# PROVA DE SELEÇÃO

02 de Fevereiro de 2011

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

| | Pontos |
|---|---|
| Questão 1 | |
| Questão 2 | |
| Questão 3 | |
| Questão 4 | |
| Questão 5 | |
| Questão 6 | |
| Questão 7 | |
| Questão 8 | |
| Total | |

Nome: ____________________________________________

*Todas as questões têm a mesma pontuação.*
*As questões serão consideradas somente se forem devidamente justificadas.*
*Use o verso das folhas como rascunho.*

BOA PROVA!!!

**Questão 1.** Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações.

a) Toda sequência convergente é limitada.

b) Toda sequência limitada é convergente.

**Questão 2.** Considere a sequência $\{x_n\}_{n\in}$ definida através das equações $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, para $n = 1, 2, \ldots$. Mostre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge e determine o limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

**Questão 3.** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

**Questão 4.** Mostre que, se

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0,$$

onde $C_0, C_1, \ldots, C_n$ são constantes reais, então a equação

$$C_0 + C_1 x + \ldots C_{n-1} x^{n-1} + C_n x^n = 0$$

admite pelo menos uma raiz entre 0 e 1.

**Questão 5.** Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix},$$

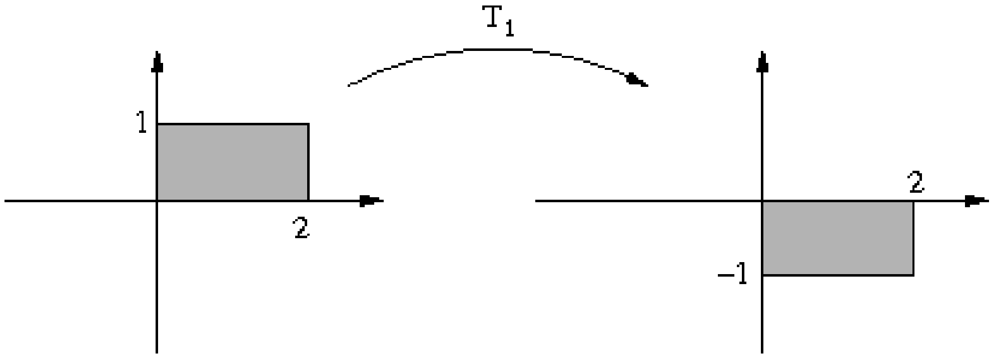
determine $\mathbf{L}$, matriz triangular inferior, e $\mathbf{U}$, matriz triangular superior, de modo que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.

**Questão 6.** Usando o processo de Gram-Schmidt, encontre uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir da base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, onde

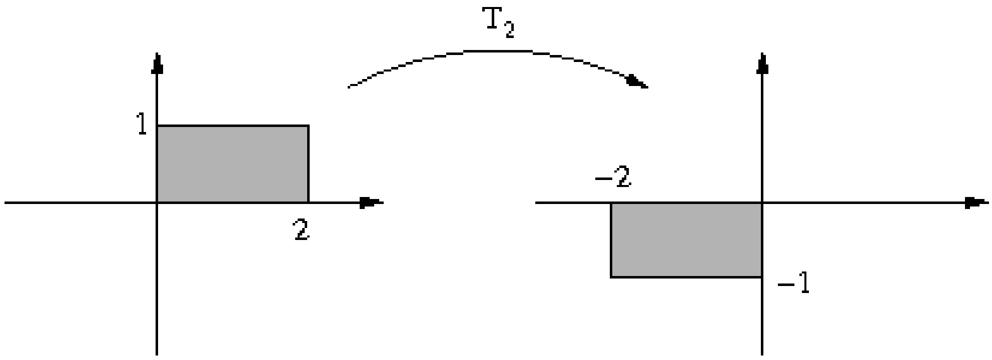
$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Questão 7.** Determine as transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que realizam as seguintes transformações do plano:

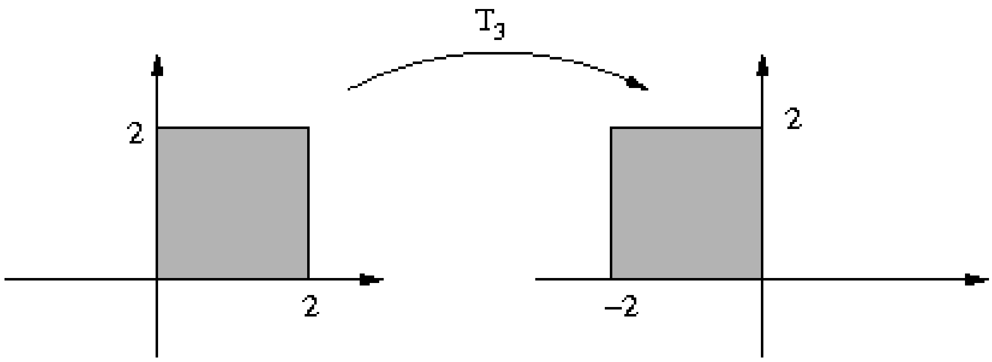
a)



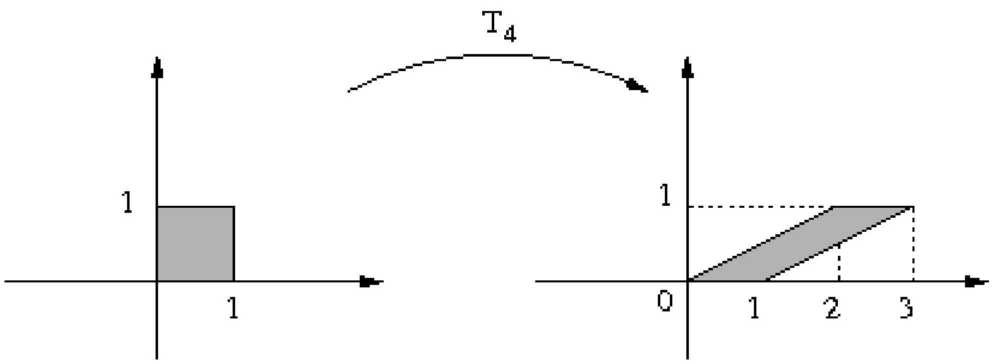

b)




c)




d)



**Questão 8.** a) Enuncie e demonstre o Teorema da Dimensão do Núcleo e Imagem de uma transformação linear $T : V \to W$, onde $\dim V = n$.

b) Utilizando o teorema acima, responda as seguintes perguntas:

   i) Existe uma transformação linear $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

      – sobrejetora?

      – injetora?

   ii) Existe uma transformação linear $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$

      – sobrejetora?

      – injetora?

Dê exemplos nos casos afirmativos e justifique os casos negativos.

**–FOLHA EXTRA–**

**–FOLHA EXTRA–**