Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional
Universidade Estadual de Londrina – Departamento de Matemática

Prova de Seleção – 2010

Nome:____ / / .

Questões de Análise

1) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua, tal que, $f(a)\le a$ e $f(b)\ge b$. Nestas condições, prove que existe pelo menos um $c\in[a,b]$, tal que, $f(c)=c$.

2) Seja *I* um intervalo qualquer dado. Uma função $f:I\to\mathbb{R}$ é Lipschitziana se existe $M>0$, tal que, $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$ para quaisquer $x,y\in I$.
a) Mostre que se $f:I\to\mathbb{R}$ é Lipschitziana, então, *f* é contínua.
b) Seja $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$. Mostre que se *f* é contínua em *I* e tem derivada contínua em *I*, então, *f* é Lipschitziana em *I*.

3) Se uma seqüência de funções $f_n:X\to\mathbb{R}$ converge uniformemente para $f:X\to\mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a\in X$, então, *f* é contínua no ponto $a\in X$.

4) Prove que:
a) Toda seqüência de Cauchy é limitada.
b) Se uma seqüência de Cauchy (x_n) tem uma subseqüência convergindo para $a\in\mathbb{R}$, então, $\lim_{x\to+\infty} x_n = a$

Questões de Álgebra Linear

1) Seja $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$ a matriz do operador linear em $\mathbb{R}^2$ sob o corpo dos reais na base canônica. Por meio deste operador, determine a imagem da circunferência de raio unitário e centro na origem.

2) O Professor mostrou em sala de aula que o espaço vetorial dos números complexos tem dimensão dois, mas, estudando com os colegas percebemos que $a+bi=1.(a+bi)$ de onde concluímos que a dimensão daquele espaço vetorial é um. Quem está correto, o Professor ou eu e meus colegas?

3) Seja *V* o conjunto de todas as seqüências reais (x_n), tais que, $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$. O conjunto *V* é conhecido como conjunto das seqüências de Fibonacci, dentre as quais, a mais conhecida é {1,1,2,3,5,8,...}. Com a soma usual de seqüências e a multiplicação usual de seqüência por um escalar real (termo a termo em ambos os casos), mostre que *V* é espaço vetorial.

4) Determine todos os subespaços do $\mathbb{R}^3$.