Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Universidade Estadual de Londrina - Departamento de Matemática

---

PROVA DE SELEÇÃO - 2009

Nome:____Data 09/02/2009.

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$. Obtenha uma base para o núcleo de T e uma base para a imagem de T.

2. Prove que se $f : V \to \mathbb{R}$ é um funcional sobre o espaço n-dimensional V , então o conjunto de todos os vetores $x \in V$ tais que $f(x) = 0$ formam um subespaço de V. Qual a dimensão deste subespaço?

3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Mostre que se $T : V \to V$ não é injetiva, então 0 é autovalor de T.

4. Um operador linear $P : V \to V$ é uma projeção se $P^2 = P$. Mostre que se P, Q são projeções tais que $PQ = QP$, então PQ é uma projeção cujo núcleo é $N(P)+N(Q)$.

5. Defina indutivamente a sequência $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Prove que:

   (a) a sequência é convergente

   (b) calcule o seu limite.

6. Sejam $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que para todo $x \in [a, b]$ se tenha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Mostre que, se para um $c \in (a, b)$ tem-se $f(c) = h(c)$ e $f'(c) = h'(c)$ então existe $g'(c)$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Mostre que $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Mostre que se f é integrável num intervalo $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$ então existe $c \in (a, b)$ tal que
$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx.$$