Universidade de Brasília

O modelo SIR e o achatamento da curva da COVID-19

Ma To Fu
UnB, Departamento de Matemática

WEBINÁRIOS DO PGMAC
Universidade Estadual de Londrina, 31 de Julho de 2020

Sumário

1 - COVID-19

- O mundo enfrenta a maior pandemia de sua história, a COVID-19, causada pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2).
- Observou-se o colapso do sistema de saúde em diversas regiões do mundo, inclusive no Brasil.
- No Brasil, em 30/07/2020, pela COVID-19 somaram-se 2.613.789 casos e 91.377 mortes, mais subnotificações.

1 - COVID-19

- Na falta de uma vacina a forma mais ortodoxa de se combater a epidemia é o distanciamento social (quarentena).
- Dois exemplos históricos:
  - Peste Bubônica (séc. XIV)
  - Gripe Espanhola (séc. XX)

1 - COVID-19 nos telejornais

- Março: Ministro Mandetta fala do achatamento da curva.
- Abril: Cientistas falam do número de reprodução R_0.
- Maio: Começam falar sobre a imunidade de rebanho.
- Julho: Os números são apresentados em média móvel.

Qual a fundamentação científica para esses conceitos ?

A matemática pode mostrar as possíveis hipóteses!

2 - Achatamento da curva

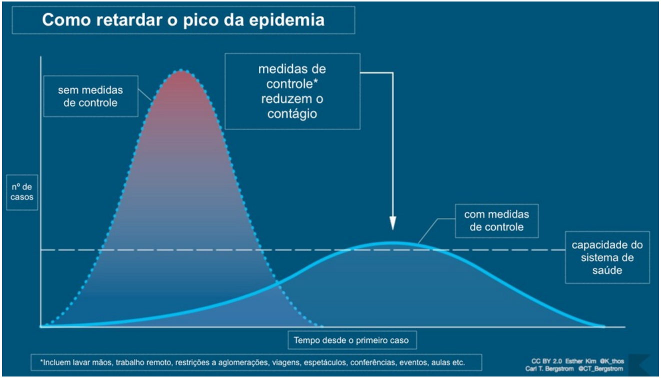
As instituições governamentais e a grande mídia vem alertando sobre a necessidade do isolamento social. Utilizam-se justificativas de cunho científico como o achatamento da curva de infecção. O que vem a ser isso?.

2 - Achatamento da curva

As instituições governamentais e a grande mídia vem alertando sobre a necessidade do isolamento social. Utilizam-se justificativas de cunho científico como o achatamento da curva de infecção. O que vem a ser isso?.

2 - Achatamento da curva

As instituições governamentais e a grande mídia vem alertando sobre a necessidade do isolamento social. Utilizam-se inclusive de justificativas de cunho científico: o achatamento da curva de infecção. O que vem a ser isso?.



Arte gráfica exibida pela Rede Globo (Março 2020)

3.1 - Modelo SIR

Cenário pré-epidemia.

- No início, o sistema de saúde alerta para uma epidemia emergente.
- Laboratórios tentam detectar/identificar a causa. Tempo de incubação, vacinas, taxa de letalidade.
- É declarada a epidemia: Com os dados disponíveis, como fazer análise de cenários? Como minimizar ao máximo o impacto da epidemia?
- Atualmente, usamos modelos matemáticos tipo SIR (Kermack e McKendrick, 1927) para estudar a dinâmica da epidemia.
- Infelizmente, os parâmetros do modelo SIR são de difícil obtenção. É necessário equipes interdisciplinares para fazer tratamento de dados.
- Nosso objetivo: vamos apresentar o conceito de curva de infecção através do modelo SIR.

3.2 - Modelo SIR: Compartimentos

Trata-se de um modelo **compartimental**. A população total é distribuída em três classes (compartimentos).

- S população de indivíduos **susceptíveis**.
- I população de indivíduos **infectados**.
- R população de indivíduos **retirados**.
- Os retirados representam indivíduos que se recuperaram ou morreram. O compartimento R é também chamado **recuperados**.
- As populações são funções da variável temporal t, i.e.

$$S = S(t) \qquad I = I(t) \qquad R = R(t).$$

3.3 - Modelo SIR: Pressupostos

Pressupostos do modelo SIR:

- A população total N é constante.
- $S(t) + I(t) + R(t) = N$
- Durante a evolução da epidemia não se considera nascimentos ou migrações.
- Os retirados (recuperados) R ficam imunes e não voltam para o compartimento dos susceptíveis S.

3.4 - Modelo SIR: Dedução

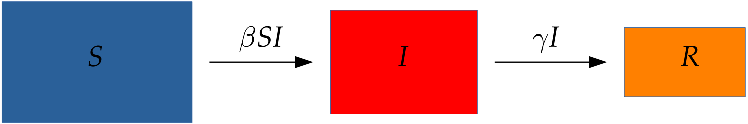
Pensemos assim:

- De um dia para outro, uma quantidade Q de indivíduos de S é infectada e passa para o compartimento I.
- Tal quantidade deve ser "proporcional" às populações S e I.

$$Q = \beta SI.$$

- O coeficiente β representa a probabilidade de um infectado infectar um suscetível por uma unidade de tempo (dia).
- Analogamente, no decorrer da epidemia, uma quantidade γI de indivíduos do compartimento I passa para o compartimento R (representando os curados ou mortos).

3.5 - Modelo SIR: Equações



Em termos de taxa de variação teremos um sistema de três equações diferenciais ordinárias:

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta\, S\, I, \\
\frac{dI}{dt} &= \beta\, S\, I - \gamma\, I, \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma\, I.
\end{aligned}
$$

3.6 - Modelo SIR: Discreto

Para plotar a curva de infectados precisamos resolver o sistema de EDOs do modelo SIR. Pode ser ser muito técnico.

Vamos empregar a versão discreta do modelo SIR.

Sabemos que $\boxed{S} \xrightarrow{\beta SI} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma I} \boxed{R}$. Então do dia i para dia $i+1$:

$$
\begin{aligned}
S_{i+1} &= S_i - \beta\, S_i\, I_i, \\
I_{i+1} &= I_i + \beta\, S_i\, I_i - \gamma\, I_i, \\
R_{i+1} &= R_i + \gamma\, I_i.
\end{aligned}
$$

Conhecendo-se as populações iniciais S, I, R do dia 0, podemos facilmente obter as populações S, I, R dos dias subsequentes.

Podemos usar uma planilha Excel.

4.1 - Número de reprodução R_0

Queremos estudar a curva de infectados $I = I(t)$. Sabemos que

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I.$$

- Quando $\frac{dI}{dt} > 0$, a curva é crescente (epidemia).
- Quando $\frac{dI}{dt} < 0$, a curva é decrescente (não epidemia).
- Da equação acima, concluímos que $\frac{dI}{dt} = 0$ quando $\frac{\beta S}{\gamma} = 1$, e

$$\frac{dI}{dt} > 0 \iff \frac{\beta S}{\gamma} > 1 \qquad \text{(epidemia)},$$
$$\frac{dI}{dt} < 0 \iff \frac{\beta S}{\gamma} < 1 \qquad \text{(não epidemia)}.$$

4.2 - Número de reprodução R_0

- Definimos o número básico de reprodução

$$R_0 = \frac{\beta S}{\gamma}.$$

- R_0 mede a força da epidemia.
- Pode ser deduzido que R_0 representa o número de novos infectados causados por um infectado.
- No início da epidemia, $S \approx N$. Assim temos $R_0 \approx \frac{\beta N}{\gamma}$.
- O parâmetro $\frac{1}{\gamma}$ é o tempo médio que um infectado leva para ser retirado. Mas o cálculo de β é mais difícil.
- Em geral, manipulamos o sistema EDOs para não utilizar diretamente o parâmetro β.

5.1 - Matemática da curva: Estratégias

Achatar a curva de infectados equivale a diminuir a força da epidemia R_0. Lembremos que

$$R_0 = \frac{\beta S}{\gamma}.$$

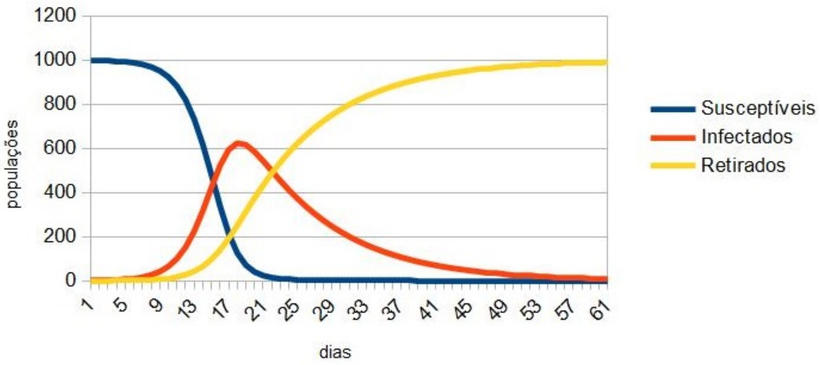
- Aumentar o valor de γ é inviável.
- Diminuir a quantidade S equivale a aumentar a imunidade da população total. Ideal com uso de vacinas.
- A outra alternativa seria diminuir o valor de β, isto é, diminuir o número de contatos entre populações S e I. Ideal com políticas de isolamento social, uso de máscaras e higienização.
- Uma maneira (mais cruel) de diminuir a quantidade S seria aumentar a I. Seria a hipótese da imunidade de rebanho.

5.2 - Matemática da curva: Exemplo 1

Usamos dados fictícios num cenário sem políticas de combate à doença.

$$S(0) = 999, \quad I(0) = 1, \quad R(0) = 0, \quad \beta = 0,0007, \quad \gamma = 0,1.$$

O pico da epidemia é atingido no dia 21 com 623 infectados.

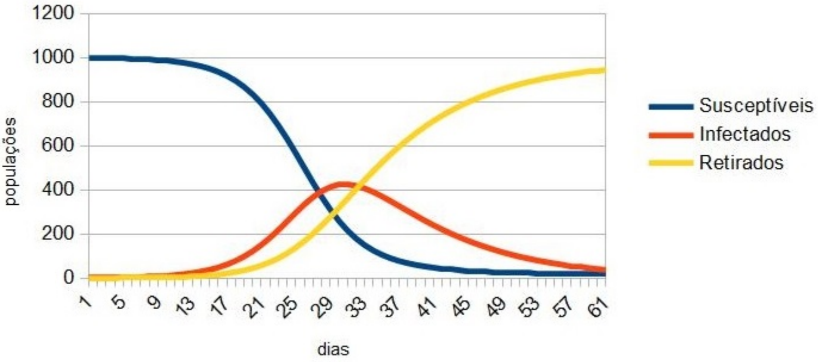


5.3 - Matemática da curva: Exemplo 2

Cenário com políticas de isolamento social. Diminuindo β para $0,0004$.

$$S(0) = 999, \quad I(0) = 1, \quad R(0) = 0, \quad \beta = 0,0004, \quad \gamma = 0,1.$$

O pico da epidemia é atingido no dia 34 com 424 infectados.



6 - Conclusões

- Anotando os dados de uma epidemia já ocorrida é fácil plotar o gráfico de infectados.
- No início de uma epidemia, para prever a curva de infectados, é necessário modelos matemáticos.
- O modelo compartimental SIR é amplamente utilizado para tomada de decisões em nível governamental.
- O isolamento social (quarentena) diminui o β. Este faz diminuir o R_0 (a força da epidemia). Consequentemente o isolamento social achata a curva de infectados.

Referências

- BRAUER, F.; CASTILLO-CHAVEZ, C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. New York. Springer. 2001.
- KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proc. Roy. Soc. Lond. A 115, 700-721, 1927.
- MA, Z.; LI, J. (ed.). Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics. Singapore. World Scientific. 2009.
- Ministério da Saúde, Centro de Operações de Emergências em Saúde Pública. Doença pelo Coronavírus 2019 COE-COVID19. https://www.saude.gov.br/images/pdf/2020/fevereiro/27/2020-02-27—COVID—COLETIVA-DE-IMPRENSA—-QUINTA.pdf