

**UTFPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

## Introdução à Modelagem do Escoamento Turbulento

Prof. Dr. Gylles Ricardo Ströher  
gylles@utfpr.edu.br

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Brevíssima revisão histórica;
- Características do escoamento turbulento;
- Abordagens adotadas para o escoamento turbulento;
- Equações Médias de Reynolds;
- Modelos;
- Exemplos.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR** Introdução à Modelagem da Turbulência

**Revisão Histórica**  
Séculos XVI e XVII:  
- Leonardo da Vinci (1495) um dos primeiros a abordar o problema de forma científica



Modelo de Turbulência de Leonardo da Vinci (**TURBULENZA**) (extraído de [http://en.wikipedia.org/wiki/Science\\_and\\_inventions\\_of\\_Leonardo\\_da\\_Vinci](http://en.wikipedia.org/wiki/Science_and_inventions_of_Leonardo_da_Vinci))

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR** Introdução à Modelagem da Turbulência

**Revisão Histórica**  
Séculos XVI e XVII:  
- Leonardo da Vinci (1495) um dos primeiros a abordar o problema de forma científica



Figura2: Desenho de Leonardo da Vinci. Nota-se aqui noções primitivas de zonas de turbulência, vórtices e esteira (atrás de um obstáculo).

Modelos visuais para descrever o escoamento turbulento em seus desenhos;

Nenhum modelo matemático foi proposto para descrever o comportamento do fluido.

Deduziu a equação de conservação de massa em um escoamento, assim como produziu experimentos que comprovassem suas teorias.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

Séculos XVII e XVIII:

I. Newton (1623-1727)  
L. Euler (1707-1783)  
D. Bernoulli (1700-1782)

Contribuíram para criar um modelo matemático para o movimento de fluidos com base na hipótese do meio contínuo e invíscido:

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \rho G_i - \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

Século XIX:

L.M.H. Navier (1785-1836)  
J.B. Fourier (1768-1830)  
St. Venant (1797-1886)  
G.G. Stokes (1819-1903)

Modelo para o movimento de fluidos com base: hipótese do meio contínuo e viscoso

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \rho G_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Modelo para fluido viscoso

Nenhum modelo estava disponível para descrever o escoamento e a transferência de calor turbulento.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Séculos XIX e XX:

O. Reynolds (1842-1912)  
L. Prandtl (1875-1953)  
T. Von Kármán (1881-1963)

Contribuíram para o desenvolvimento de modelo matemático para escoamentos turbulentos com base na hipótese do meio contínuo, fluido viscoso e escoamento médio.

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} - \rho G_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \pi_{ij}^*}{\partial x_i} \quad \text{Modelo de fluido viscoso (médio)}$$

*"A turbulência é um movimento irregular que, em geral, surge em escoamentos com gases ou líquidos, quando um destes flui adjacente a superfícies sólidas ou mesmo quando escoamentos vizinhos do mesmo fluido ocorrem um sobre o outro". (Von Kármán)*

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Definição de turbulência em escoamentos?

Qualquer definição seria pouco representativa e incompleta, dessa forma, adota-se específica -la por meio de suas principais características:

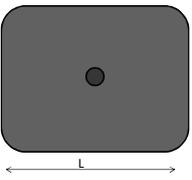
- Irregularidade
- Difusividade
- Número de Reynolds Elevados
- Flutuações Tridimensionais
- Dissipação
- Fenômeno Contínuo.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Difusividade:

As taxas de transferência e de mistura são várias ordens de grandezas mais elevadas que as taxas devidas à difusão molecular.



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \quad l = 5m$$

$$\frac{\Delta T}{t_m} \sim \alpha \frac{\Delta T}{L^2} \quad \alpha = 0,2 \frac{cm^2}{s}$$

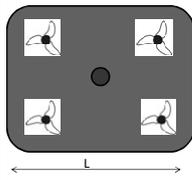
$$t_m \sim \frac{L^2}{\alpha} \quad t = 100 \text{ horas}$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Difusividade:

As taxas de transferência e de mistura são várias ordens de grandezas mais elevadas que as taxas devidas à difusão molecular.



$$t_t \sim \frac{L}{V}$$

$$\frac{t_t}{t_m} \sim \frac{L}{V} \frac{\alpha}{L^2} = \frac{\alpha}{VL}$$

Uma vez que a difusividade térmica tem a mesma Ordem de grandeza que a viscosidade cinemática.

$$\frac{t_t}{t_m} \sim \frac{1}{Re}$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

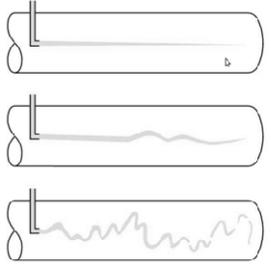
**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

-Número de Reynolds Elevados

- Flutuações Tridimensionais

-Dissipação

Osborne Reynolds (1880)

Laminar

Transitional

Turbulent

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{\text{força Inercial}}{\text{força Viscosa}}$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

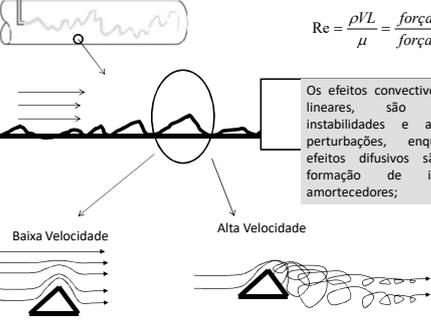
**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{\text{força Inercial}}{\text{força Viscosa}}$$

Os efeitos convectivos, altamente não lineares, são geradores de instabilidades e amplificadores de perturbações, enquanto que os efeitos difusivos são inibidores da formação de instabilidades e amortecedores;

Baixa Velocidade

Alta Velocidade



GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

-Sensibilidade do Instrumento de medida;  
- Olho!!




- Formiga → altos relevos;  
- Eng. → Rugosidade no interior de tubo.



-Eng. Civil → definirá uma malha (numérica ou experimental) para estudar o escoamento ao redor da catedral.  
-Meteorologista → a catedral será uma rugosidade.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

**Equações de Navier – Stokes: Validade para Turbulência ?**

A fundamentação da modelagem da turbulência são as equações de N-S, entretanto, é necessário entendê-las e validá-las quanto a capacidade de descrever o movimento turbulento de fluidos.

Hipóteses usadas para a dedução das equações de N-S:

- O movimento do fluido pode ser considerado como meio contínuo (fluido contínuo);
- A difusão viscosa de  $U_i$  é proporcional ao gradiente de velocidade (taxa de cisalhamento);
- Fluido isotrópico;
- A tensão de cisalhamento é proporcional a  $U, P, T$  e  $\rho$ ;
- Quando o fluido está em repouso a tensão é unicamente hidrostática;
- Propriedades físicas constantes do fluido:  $\rho$  e  $\mu$ ;

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Não há nada dito nestas hipóteses algo excluindo escoamentos turbulentos. Enquanto um escoamento não violar tais hipóteses, as equações de N-S devem ser válidas para escoamentos turbulentos.

Para massa específica e viscosidade constante, as equações de N-S e da Energia são:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} - \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \Phi$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Fenômeno Contínuo:

A hipótese do meio contínuo é válida para o escoamento turbulento?

Mesmo as escalas mais pequenas de um escoamento turbulento são, em geral, muito maiores que qualquer escala de comprimento molecular.

Exemplo, considere o escoamento de ar:  $u = 10 \text{ m/s}$  e  $v = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  e  $L = 10^{-6} \text{ m}$  é o tamanho de um vórtice muito pequeno.

Em CNTP existem  $10^{29}$  moléculas/ $\text{m}^3$ .

Neste caso, há  $10^{11}$  moléculas de ar/ $\text{m}^3$  (onde  $1 \text{ L}^3 = 10^{-18} \text{ m}^3$ ).

Para um vórtice com  $10^{11}$  moléculas, a hipótese do meio contínuo é válida.

**As equações de Navier-Stokes modelam qualquer escoamento independente do regime ser turbulento ou não, inclusive é possível demonstrar que as menores escalas de comprimento da turbulência são ainda muito maiores que o livre caminho médio molecular do fluido.**

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

**DNS**  
(Direct Numerical Simulation)



**SRS**  
(Scale Resolving Simulations)



**RANS**  
(Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulations)



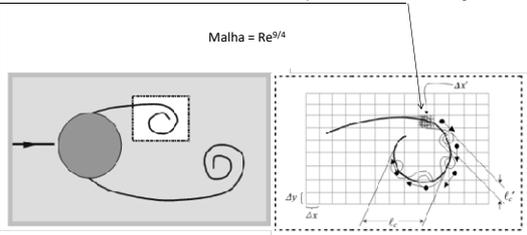
Fonte: Ansys

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

**DNS** modela o escoamento turbulento resolvendo diretamente as equações de N-S. A Simulação Numérica Direta (DNS) consiste em resolver as equações de Navier-Stokes diretamente, ou seja, sem a imposição de um modelo de turbulência. Dessa forma seria necessário impor uma malha suficientemente fina que captasse todas as estruturas presentes no escoamento, ou seja, o tamanho da menor célula da malha deve ser menor que o vórtice mais fino. Em geral:

Malha =  $Re^{9/4}$



GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**

**DNS**

Considerando o menor comprimento de um vórtice como a escala de comprimento de Kolmogorov

$$\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \quad \epsilon = U_0^3/\delta$$

Espessura da Camada Limite:  $\delta \quad \delta \times \delta \times \delta$

$$N = \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^3 = 216 \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^3$$

6 pontos são utilizados para as pequenas escalas

$$\left(\frac{\delta}{\eta}\right)^3 = \left[\delta \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}\right]^3 = \left[\delta \left(\frac{U_0^3}{\delta \nu^3}\right)^{1/4}\right]^3 = \left(\frac{U_0 \delta^3}{\nu^3}\right)^{3/4} = (Re \epsilon)^{3/4}$$

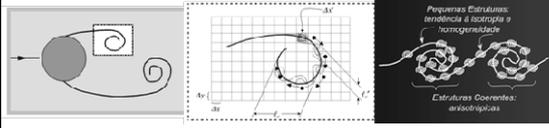
Malha =  $Re^{3/4}$

$Re = 5000 \rightarrow$  Malha com  $4.5 \times 10^{10}$  pontos

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**

**LES (Simulação das Grandes Escalas)**, separa as escalas, de forma que as maiores estruturas (grandes escalas) são calculadas a partir das equações de Navier-Stokes, enquanto as menores estruturas (pequenas escalas) são simuladas a partir da metodologia LES.



**RANS (Equações Médias de Reynolds)** Uma alternativa encontrada foi o conceito da decomposição das escalas por meio de um processo de médias proporcionou um avanço na determinação de um comportamento médio para o escoamento turbulento por meio da solução das equações médias de Navier-Stokes.

Equações médias de Navier-Stokes, ou equações médias de Reynolds (Reynolds Average Navier Stokes)

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR** [https://www.youtube.com/watch?v=eP\\_eytKCCFY](https://www.youtube.com/watch?v=eP_eytKCCFY)

DNS (Direct Numerical Simulation)	SRS (Scale Resolving Simulations)	RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulations)
<p>Resolve numericamente as equações de N-S em regime não permanente</p> <p>-Nenhum modelo é necessário</p> <p>- Uma ferramenta de pesquisa (muita informação não necessária para aplicações industriais)</p>	<p>-Inclui Large Eddy Simulation (LES);</p> <p>-O movimento dos maiores vórtices é resolvido diretamente por meio das equações de N-S, mas os vórtices menores que malha são modelados;</p> <p>- Método inerentemente em regime não permanente;</p>	<p>-Resolve as equações com médias de Reynolds;</p> <p>-Toda a turbulência é modelada. Grandes e pequenas escalas não são resolvidas;</p> <p>-Soluções em regime permanente são possíveis;</p> <p>-Abordagem de longe a mais utilizada industrialmente;</p>

<http://www.ansys.com/staticassets/ANSYS/Conference/Confidence/San%20Jose/Downloads/turb>

<https://www.google.com/search?q=ansys+static+assets+ansys+conference+confidence+model>

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**

Decomposição de Reynolds

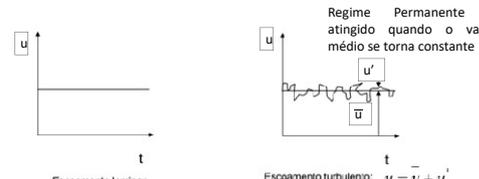
Equações médias de Navier-Stokes, ou equações médias de Reynolds (Reynolds Average Navier Stokes)

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**

Decomposição de Reynolds

Medindo a componente x da velocidade num ponto fixo de um tubo, tanto para escoamento laminar quanto turbulento, os registros gráficos da velocidade x tempo aparecerão de acordo com as figuras abaixo:



Regime Permanente é atingido quando o valor médio se torna constante

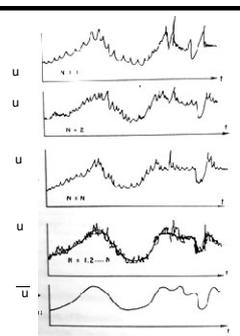
Escoamento laminar

Escoamento turbulento:  $u = \bar{u} + u'$

$$\bar{u}_i = \frac{1}{N} \sum_1^N u_i \quad u' = \left( \frac{1}{N-1} \sum_1^N (u_i - \bar{u}_i)^2 \right)^{0.5}$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**



GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

Propriedades da Média de Reynolds

O processo de média de Reynolds sobre operações envolvendo as variáveis instantâneas é decorrente das definições da média:

$$f = \bar{f} + f'$$

valor instantâneo = valor médio + valor fluante

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}$$

$$\overline{f'} = 0$$

$$\overline{f \cdot g} = (\bar{f} + f') \cdot (\bar{g} + g') = \bar{f} \cdot \bar{g} + \bar{f} \cdot g' + f' \cdot \bar{g} + f' \cdot g'$$

$$\overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{f' \cdot g'}$$

$$\overline{f' \cdot g'} = 0$$

$$\overline{f + g} = \overline{(\bar{f} + f') + (\bar{g} + g')} = \bar{f} + \bar{g}$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial (\bar{f} + f')}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$$

$$\int f dx = \int (\bar{f} + f') dx = \int \bar{f} dx$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

$\bar{f} = 0$        $\overline{f' \cdot g'} \neq 0$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

Eq. da Continuidade:  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$

[http://www2.eesc.usp.br/netef/Oscar/FUNDA\\_MENTOS\\_DE\\_TURBULENCIA.pdf](http://www2.eesc.usp.br/netef/Oscar/FUNDA_MENTOS_DE_TURBULENCIA.pdf)

Usando a decomposição de Reynolds,  $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ , temos:

$\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0$ , queremos o valor médio de  $u_i$  e não o valor da perturbação, logo:

$$\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial (\bar{u}_i + \overline{u'_i})}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial (\bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial (\bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

N-S

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Usando a decomposição de Reynolds,  $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ , temos:

$$\frac{\partial (\rho \bar{u}_i + \rho u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j + \rho \bar{u}_i u'_j + \rho u'_i \bar{u}_j + \rho u'_i u'_j)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial (\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho [\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j + u'_i u'_j])}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial (\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho [\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j}])}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

$$\frac{\partial (\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho [\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j}])}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial (\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho [\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j])}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial (\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho [\bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j}])}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial (\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij} - \rho \bar{u}_i u'_j)}{\partial x_j}$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

N-S

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

N-S com média de Reynolds

$$\frac{\partial (\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij} - \rho \bar{u}_i u'_j)}{\partial x_j}$$

Perdeu informação (média)

Tensor de Reynolds  
9 incógnitas → simetria → 6 incógnitas

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \bar{u}'u' & \bar{u}'v' & \bar{u}'w' \\ \bar{v}'u' & \bar{v}'v' & \bar{v}'w' \\ \bar{w}'u' & \bar{w}'v' & \bar{w}'w' \end{bmatrix}$$

Sistema aberto!!

Variáveis:  $u, v, w, P + 6$  (tensor Reynolds) = 10 variáveis  
Equações: 4

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

Hipótese de Boussinesq (1877):

Boussinesq propôs fechar o sistema de equações, modelando o tensor de Reynolds com o conceito de viscosidade turbulenta (analogia com escoamento laminar).

Laminar	Turbulento
$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$	$\tau'_{ij} = -\rho u_i u_j$
Quando calcula-se o mov. Microscópico NÃO precisamos de $\mu$ .	$(-\rho u_i u_j) = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$
Quando NÃO calcula-se o mov. Microscópico precisamos de $\mu$ .	$\mu_t =$ viscosidade turbulenta $k =$ energia cinética turbulenta (por unidade de massa)
$\mu =$ viscosidade molecular $\rightarrow$ propriedade física de um fluido.	$\mu_t =$ viscosidade turbulenta, uma medida local do nível de turbulência que pode variar ponto a ponto e escoamento a escoamento.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

- O conceito de viscosidade turbulenta,  $\nu_T$ , é fenomenológico, não possuindo qualquer base matemática.
- Viscosidade molecular é uma propriedade do fluido e que a viscosidade turbulenta é uma propriedade do escoamento.
- O principal ponto fraco desta hipótese está no fato que a viscosidade turbulenta é uma grandeza escalar, o que pressupõe isotropia.
- Turbulência nas grandes escalas possui alto grau de anisotropia

$$(-\rho u_i u_j) = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

Modelagem das Equações Médias de Reynolds:

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = \rho g_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau'_{ij} - \rho u_i u_j)$$

Subst.  $\tau'_{ij} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$  e  $(-\rho u_i u_j) = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \nu_T \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right]$$

Resta ainda o cálculo da viscosidade turbulenta, papel fundamental dos chamados **modelos de turbulência**. Para tanto, lança-se mão de uma analogia estreita entre o que se passa a nível de *partícula de fluido* e que se passa a nível de *estruturas turbulentas*.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

Modelos de Turbulência:

Modelos Clássicos (RANS):

1. Modelos de Zero equações : Comprimento de mistura.
2. Modelos de Uma Equação: Spalart-Almaras.
3. Modelos de Duas Equações :  $k-\epsilon$  style models (standard, RNG, realizable),  $k-\omega$  model, and ASM.
4. Modelos de Sete Equações: Reynolds stress model.

O número de equações denota o número de EDPs que deverão ser resolvidas.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

Modelos do comprimento de mistura de Prandtl

Vários autores propuseram que  $\nu_T$  pudesse ser definida a partir do produto de uma velocidade característica e de um comprimento característico

$$\nu_T = u_c l_c \quad u_c = 2l_c \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)$$

Para a camada limite  $\rightarrow l_c = 0.4y$

Para o escoamento em jatos  $\rightarrow \frac{l_c}{\delta} = cte.$



Escoamento	Camada de mistura	Jato plano
$\left( \frac{l_m}{\delta} \right)$	0,67	0,09

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

- São estritamente válidos para escoamentos bidimensionais simples.
- Adequados para escoamentos com fracos gradientes de pressão
- Não são apropriados para escoamentos com curvatura, rotação e separação.
- Considera que a taxa local de produção de turbulência e taxa de dissipação de turbulência são aproximadamente iguais.
- Não inclui convecção de turbulência, o que é contrário a física dos escoamentos
- São modelos simples e a implementação é relativamente simples.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

Modelo uma Equação:

Nos modelos de uma equação, uma equação de transporte é utilizada.

Utilizam uma equação diferencial para a escala de velocidade e o escala de comprimento é especificado algebricamente.

A escala de velocidade é tipicamente escrita em termos da Energia Cinética Turbulenta  $k$ , definida como:

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$$

$$\mu_t = \rho k^{1/2} \ell$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

Modelo uma Equação:

Nos modelos de uma equação, uma equação de transporte é utilizada.

- 1:  $[N-S] - [\overline{N-S}] \rightarrow u'_i$
- 2: Multiplicar a eq(1) por  $u'_i$
- 3: Multiplicar a eq(1) por  $u'_j$
- 4: Somar as equações obtidas em (1) e (2)
- 5: Aplicar a média para o resultado em (4)

Eq. de transporte das tensões de Reynolds

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = - \left( \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j u_k}$$

$$- \frac{1}{\rho} \left( \overline{u_j} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \right) + \nu \left( \overline{u_j} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{u_i} \frac{\partial^2 \overline{u_j}}{\partial x_k \partial x_k} \right)$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = - \left( \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j u_k}$$

$$- \frac{1}{\rho} \left( \overline{u_j} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \right) + \nu \left( \overline{u_j} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{u_i} \frac{\partial^2 \overline{u_j}}{\partial x_k \partial x_k} \right)$$

Fazendo-se  $i = j$  na equação acima, obtemos finalmente

$$\frac{Dk}{Dt} = - \overline{u_i u_i} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\kappa u_j} + \overline{p u_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{\kappa}}{\partial x_j \partial x_j} - \nu \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)^2$$

O primeiro termo representa a produção de energia turbulenta;

O segundo e o terceiro termo podem ser escritos como uma divergência, representa a difusão da energia turbulenta

Quarto representa a dissipação de energia cinética em calor

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

$$\frac{D\kappa}{Dt} = - \overline{u_i u_i} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\kappa u_j} + \overline{p u_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{\kappa}}{\partial x_j \partial x_j} - \nu \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)^2$$

O termo de produção pode ser facilmente modelado pela re-introdução do conceito de viscosidade turbulenta, neste caso

$$- \overline{u_i u_i} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} = \left( (-2/3) \kappa \delta_{ij} + \nu_T \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \right) \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}$$

Após argumentos dimensionais

$$- \nu \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)^2 = C_D \frac{\kappa^{3/2}}{l_c} \quad \text{Normalmente } C_D = 0, 09$$

Para a camada limite bidimensional, a equação se reduz a

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_T \frac{\partial \kappa}{\partial y} \right) + \nu_T \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \right)^2 - C_D \frac{\kappa^{3/2}}{l_c}$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

Modelo de Uma Equação: Sparlat Allmaras (1992)

A viscosidade turbulenta é calculada por:

$$\mu_t = \overline{\nu} f_{\nu 1}$$

$$\frac{d\overline{\nu}}{dt} = \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot \left( (\nu + \overline{\nu}) \nabla \overline{\nu} \right) + c_{\nu 1} (\nabla \overline{\nu})^2 \right] + c_{\nu 2} \overline{\nu} (1 - f_{\nu 1}) - \left[ c_{\nu 3} f_{\nu 1} - \frac{c_{\nu 2}}{\sigma} f_{\nu 1} \right] \left[ \frac{\overline{\nu}}{l} \right]^2 + f_{\nu 1} (\Delta \overline{\nu})^2$$

$$f_{\nu 1} = \frac{\chi^2}{\chi^2 + c_{\nu 1}}$$

$$\chi = \frac{\overline{\nu}}{\nu}$$

Viscosidade turbulenta modificada.

Dados experimentais  
- Análise dimensional;  
- Invariância de Galileu;  
- Dependência selecionada da viscosidade molecular.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTFPR**

$$\frac{d\overline{\nu}}{dt} = \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot \left( (\nu + \overline{\nu}) \nabla \overline{\nu} \right) + c_{\nu 1} (\nabla \overline{\nu})^2 \right] + c_{\nu 2} \overline{\nu} (1 - f_{\nu 1}) - \left[ c_{\nu 3} f_{\nu 1} - \frac{c_{\nu 2}}{\sigma} f_{\nu 1} \right] \left[ \frac{\overline{\nu}}{l} \right]^2 + f_{\nu 1} (\Delta \overline{\nu})^2$$

$\sigma = \frac{2}{3}$      $c_{\nu 1} = 0,1305$      $c_{\nu 2} = 0,622$

$c_{\nu 3} = \frac{c_{\nu 2}}{\sigma} + (1 + c_{\nu 2})/\sigma$      $c_{\nu 4} = 0,3$      $c_{\nu 5} = 2$      $\sigma = 0,41$

$c_{\nu 6} = 7,1$      $c_{\nu 7} = 1,0$      $c_{\nu 8} = 2,0$      $c_{\nu 9} = 1,1$      $c_{\nu 10} = 2,0$

$$f_{\nu 1} = \frac{\chi^2}{\chi^2 + c_{\nu 1}} \quad f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}}$$

$$\chi = \frac{\overline{\nu}}{\nu} \quad f_{\nu 3}(\tau) = g \left( \frac{1 + c_{\nu 4}}{\sigma + c_{\nu 4}} \right)^4$$

$$S = S + \frac{\overline{\nu}}{2\sigma} f_{\nu 2} \quad \tau = \tau + c_{\nu 5} (\sigma - \tau)$$

$$S = \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} \right| \quad \tau = \frac{\overline{\nu}}{2\sigma c_{\nu 6}^2}$$

$$f_{\nu 4} = c_{\nu 7} \exp(-c_{\nu 8} \chi^2)$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia



**UTPR**

**k-ε Realizável Shih et al (1995)**

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_1 \frac{kU^*}{\epsilon}}$$

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_d$$

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + \rho C_1 S_\epsilon - \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k + \sqrt{0.5\nu\epsilon}}$$

$\sigma_k = 1,2$       $C_1 = \max \left[ 0,43, \frac{\eta}{\eta+5} \right], \eta = S_\epsilon \frac{k}{\epsilon}$       $C_2 = 1,9$

• De acordo com Shih et al (1995) este novo modelo descreve o estiramento dos vórtices turbulentos e os termos de dissipação de forma mais correta.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**

A equação para  $\epsilon$  é mais aprimorada;  
 $C_\mu$  é variável ao invés de ser uma constante;  
 Melhores resultados para escoamentos envolvendo:

- Jatos livres planos e circulares;
- Camada limite com fortes gradientes de pressão adversos;
- Escoamentos com rotação e com recirculação;
- Linhas de correntes curvas;

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**

**Modelo v2-f (Durbin, 1991)**

$$v_i = C_\mu v^2 T \quad T = k / \epsilon$$

tem a mesma equação para a energia cinética turbulenta e para a taxa de dissipação utilizadas no modelo  $k-\epsilon$

As duas outras equações do modelo  $v2-f$  são dadas a seguir:

$$\rho \frac{Dv^2}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_v} \right) \frac{\partial v^2}{\partial x_i} \right] + kf \frac{v^2}{k} \epsilon$$

$$f = L^2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_i^2} + (C_1 - 1) \frac{(2/3 - v^2/k)}{T} + C_2 \frac{P_\epsilon}{k}$$

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**

**Modelo v2-f, Durbin (1991)**

Modelo originalmente concebido devido à deficiência dos modelos em descrever o escoamento perto de contornos sólidos (região interna). O escoamento turbulento próximo à parede pode ser dividido em duas regiões: **camada interna e externa**.

Interna: tem se a escala de comprimento de Kolmogoroff

Externa: a escala de comprimento é uma dimensão do escoamento, como no caso a espessura da camada limite ou a meia largura de um canal.

Funções "ad-hoc" ou as chamadas funções de amortecimento (ou correção) as quais são ajustadas experimentalmente ou numericamente.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**

**Modelo v2-f, Durbin (1991)**

Função de parede que substitui o efeito da subcamada viscosa (viscous sublayer) e a camada tampão (buffer layer) por Guerrero (2015).

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**

O modelo v2-f faz uso do modelo  $k-\epsilon$  padrão, mas incorporando anisotropia perto à parede, enquanto assume a hipótese de viscosidade turbulenta linear.

De acordo com Durbin (1995), este modelo tem a vantagem de possuir menos equações que o modelo de Reynolds Stress e, ainda apresenta maior robustez numérica.

Diferenças entre o modelo  $k-\epsilon$  padrão e o v2-f é que o último é completamente independente da distância à parede e usa a escala de velocidade, no lugar da energia cinética turbulenta ( $k$ ), para avaliar a viscosidade turbulenta.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo:

Linhas convergentes

Fonte do jato

Região de Núcleo Potencial

Região Desenvolvida

Região de Transição

Estrutura-diamante no escoamento de um jato turbulento sobreexpandido, Mach = 1.8 (Dike, 1988).

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Re = 22500	
1	U = 36,43 m/s
2	Simetria
3	Pressão ambiente
4	Pressão ambiente
5	Parade

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Figura 29: Comparação dos contornos de velocidade previstos pelos modelos de turbulência.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

**Jato Livre Subsônico:**

Tabela 5 – Condições usadas para o caso do jato subsônico, em que os índices T e e representam condição total e estática.

	Mach 0,6	Mach 0,9
1	$P_1 = 129240,4 \text{ Pa}$ $P_e = 101325 \text{ Pa}$ $T_1 = 316,64 \text{ K}$	$P_1 = 171371,3 \text{ Pa}$ $P_e = 101325 \text{ Pa}$ $T_1 = 343,22 \text{ K}$
2	Simetria	Simetria
3	Pressão e temperatura ambiente	Pressão e temperatura ambiente
4	Pressão e temperatura ambiente	Pressão e temperatura ambiente
5	Parade a temperatura ambiente	Parade a temperatura ambiente

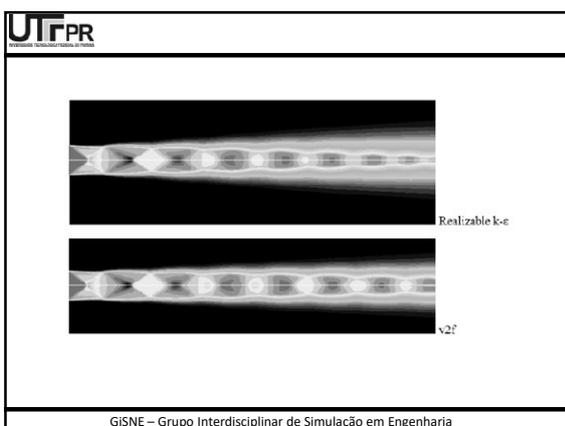
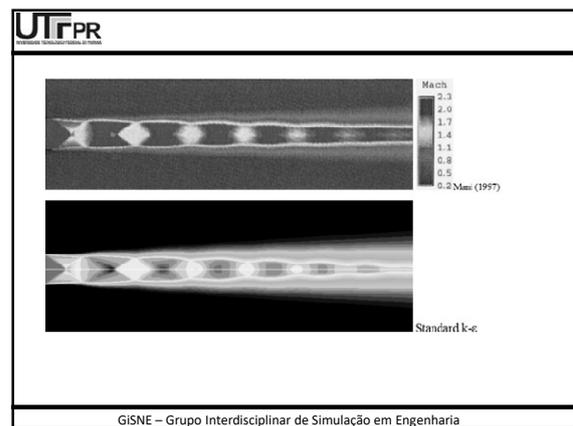
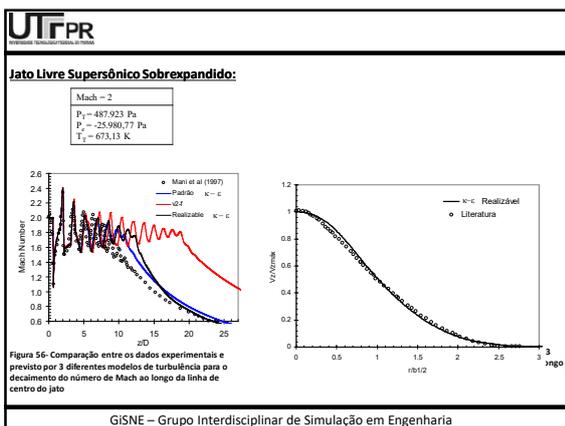
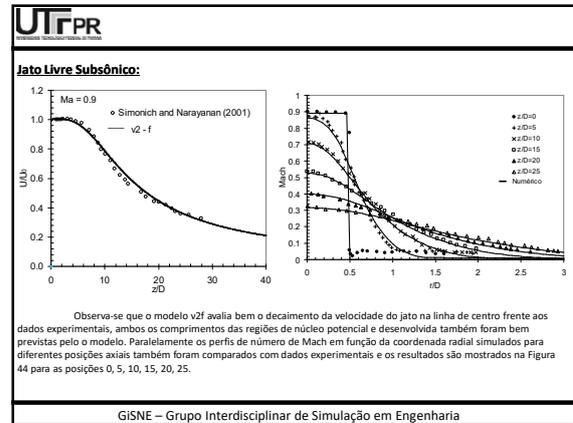
Pressão ambiente 101325Pa, Temperatura ambiente 295,35 K.

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia

**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

**Jato Livre Subsônico:**

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia



**UTPR**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

OBRIGADO!!!

gylles@utfpr.edu.br

GISNE – Grupo Interdisciplinar de Simulação em Engenharia