Universidade Estadual de Londrina
Departamento de Matemática
Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada e Computacional
Processo de Seleção 2024

BANCO DE QUESTÕES - ÁLGEBRA LINEAR

---

1. Seja V o espaço vetorial consistindo de todas a funções da forma $\alpha e^{2x}\cos x+\beta e^{2x}\text{sen}x$. Considere a seguinte transformação linear $L : V \to V$:
$$L(f) = f' + f$$
   (a) Encontre a matriz que representa L em relação à base $\{e^{2x}\cos x, e^{2x}\text{sen}x\}$.

   (b) Use sua resposta da parte (a) para encontrar uma solução para a seguinte equação diferencial: $y'+y = e^{2x}\cos x$.

2. Dado $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (a) Encontre uma base ortonormal para o espaço nulo de A.

   (b) Determine o *rank* (posto) de A.

   (c) Encontre uma base ortonormal para o espaço linha de A.

3. Duas funções são definidas por $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ xy \end{bmatrix}.$$
   Determine se T, S e $S \circ T$ são transformações lineares.

4. Sejam E um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{L}(E)$ (conjunto dos operadores lineares em E). Mostre que são equivalentes:

   (a) $Im(A) = Ker(A)$;

   (b) $A^2 = 0, A \neq 0, n$ é par e $\dim Im(A) = n/2$.

5. Considere o sistema de equações abaixo nas variáveis x e y. As letras $a, b, c, d, e, f, \alpha, \beta$ e γ são constantes reais.
$$\begin{cases} ax+by &= \alpha \\ cx+dy &= \beta \\ ex+fy &= \gamma \end{cases}$$
   O que é possível afirmar sobre a posição relativa das retas quando:

   (a) o sistema não tem solução;

   (b) o sistema tem exatamente uma solução;

   (c) o sistema tem infinitas soluções?

6. Determine o polinômio característico, os autovalores e calcule uma base de autovetores para o operador $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representado pela matriz $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ na base canônica. Defina um produto interno em $\mathbb{R}^3$ em relação ao qual A seja auto-adjunto.

7. Sabendo que duas normas $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ são equivalentes, no espaço vetorial euclidiano E, se existem constantes k_1 e k_2, tais que:
$$k_1\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq k_2\|x\|_a, \forall x \in E.$$
   Verifique se as normas $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$ e $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ são equivalentes no $\mathbb{R}^n$, tal que
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

.

8. Demonstre que em um espaço vetorial euclidiano E, temos a Desigualdade de Schwarz:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| + \|y|, \quad \forall x, y \in E.$$

Com igualdade válida se e somente se x e y são linearmente dependentes.

9. Demonstre que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_m$, tais que:

   (a) $v_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$;

   (b) $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para $i \neq j$.

   são sempre linearmente independentes.

10. Em um espaço vetorial E de dimensão n, como as coordenadas de v em uma base B_1 podem ser determinadas em uma outra base B_2?