



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

TALISSON FERNANDO LEIRIA

**GEOMETRIA ESFÉRICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA:
POSSIBILIDADES PARA O DESENVOLVIMENTO DO
PENSAMENTO GEOMÉTRICO**

Londrina
2025

TALISSON FERNANDO LEIRIA

**GEOMETRIA ESFÉRICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA:
POSSIBILIDADES PARA O DESENVOLVIMENTO DO
PENSAMENTO GEOMÉTRICO**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof.^a Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de
Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

L545g Leiria, Talisson Fernando.

Geometria esférica na formação inicial de professores de matemática : possibilidades para o desenvolvimento do pensamento geométrico / Talisson Fernando Leiria. - Londrina, 2025.
202 f. : il.

Orientador: Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2025.

Inclui bibliografia.

1. Geometria não euclidiana - Tese. 2. Geometria esférica - Tese. 3. Formação inicial de professores de matemática - Tese. 4. Pensamento geométrico - Tese. I. Cyrino, Márcia Cristina de Costa Trindade. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

TALISSON FERNANDO LEIRIA

**GEOMETRIA ESFÉRICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA:
POSSIBILIDADES PARA O DESENVOLVIMENTOS DO PENSAMENTO
GEOMÉTRICO**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Elias Santiago de Assis
Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. Ênio Freire de Paula
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
de São Paulo

Prof. Dr. Paulo Henrique Rodrigues
Universidade Estadual do Paraná

Prof. Dr. Rafael Mestrinheire Hungaro
Universidade Estadual do Paraná

Londrina, 21 de fevereiro de 2025.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me deu forças e que me ajudou a encontrar as respostas para os meus problemas, oportunizando a realização de tantos sonhos.

Aos meus pais, Claudomir Leiria e Vanilde Arengue Leiria pela paciência e compreensão que tiveram nas diferentes situações e que me apoiaram e incentivaram com muito amor e carinho.

À minha irmã, Elvaní Cristiane Leiria, e a minha sobrinha Rafaela Leiria, pelo carinho, pela ajuda e compreensão.

À minha Orientadora, Professora Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, pela confiança, oportunidade e contribuição para a realização deste sonho.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Elias, Prof. Dr. Ênio, Prof. Dr. Paulo e Prof. Rafael, que aceitaram o convite e se dispuseram a ler meu trabalho e pelas inúmeras contribuições realizadas para o desenvolvimento e a conclusão deste.

Ao Gepefopem, pelas inúmeras oportunidades de aprendizagem compartilhadas e pelas contribuições diretas e indiretas para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas, André e Salvador, um agradecimento especial, que compartilharam comigo este processo de investigação e escrita de tese de doutorado.

Aos meus colegas, Fernanda e Salvador, que contribuíram com leituras, estudos e construção de tarefas para a obtenção de informações para este trabalho.

À minha namorada, Patrícia Fernandes Canuto, que esteve ao meu lado, incentivando e apoiando com todo amor e carinho.

Aos Futuros Professores de Matemática, que aceitaram participar de todo o processo formativo realizado nas disciplinas de O Ensino de Geometria e Metodologia e Práticas de Ensino em Matemática, sempre abertos a se exporem e contribuírem com esta investigação.

À Professora Regente da disciplina de Metodologia e Práticas de Ensino em Matemática, por disponibilizar um momento com a turma para realizar parte desta investigação.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática pelas aulas ministradas e pelos ensinamentos, os quais ajudaram a compreender o papel de formador de professores. Em especial à Professora Dra. Regina Buriasco, que me acolheu de início e orientou para este caminho que aqui me encontro hoje.

LEIRIA, Talisson Fernando. **Geometria Esférica na formação inicial de professores de matemática**: possibilidades para o desenvolvimento do pensamento geométrico. 2025. 201 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2024.

RESUMO

Um número crescente de estudos voltados ao ensino de Geometria na Educação Básica e na formação de professores de matemática, tiveram como foco a Geometria Euclidiana Plana (reconhecer as figuras geométricas, quadriláteros e congruência de triângulos), a Geometria Euclidiana Espacial (cálculo da área e volume de sólidos e planificações), conhecimentos dos professores para o ensino destas temáticas, e a apresentação de propostas de ensino para a Educação Básica. Poucos estudos se dedicaram à discussão das Geometrias não Euclidianas na formação inicial e continuada de professores de matemática. No caso da Geometria Esférica, assim como a Geometria Euclidiana, ela descreve coerentemente situações experienciadas no mundo físico, especialmente quando tratamos da superfície do planeta Terra como uma esfera. Este estudo objetiva responder: que elementos do pensamento geométrico podem ser mobilizados por futuros professores de matemática (FPMat) na resolução e discussão de tarefas de Geometria Esférica? A investigação de natureza qualitativa, de cunho interpretativo, foi desenvolvida nas disciplinas “O Ensino de Geometria” e “Metodologias e Práticas de Ensino de Matemática”, ambas da 2.^a série do Curso de Graduação em Matemática – Licenciatura da Universidade Estadual do Paraná - *Campus* de Paranavaí, com aplicação do empreendimento Estudos sobre Geometrias não Euclidianas: A Geometria Esférica. Os resultados evidenciam que os FPMat tiveram a oportunidade de: interpretar e reconhecer informações do enunciado das tarefas; construir diferentes estratégias de resolução; escolher/elaborar material manipulável como recursos auxiliares; negociar significados; sistematizar aprendizagens; e discutir estratégias de ensino de geometria. Para organizar e apresentar os resultados desta investigação, utiliza o formato multipaper que consiste em uma coletânea de artigos científicos autocontidos e publicáveis, por possibilitar a disseminação do estudo com agilidade alcançando um número maior de leitores. O trabalho com tarefas oportunizou aos FPMat não somente mobilizarem aspectos do pensamento geométrico, aprendizagens sobre a Geometria Esférica, e ressignificações de conteúdos de Geometria Euclidiana Plana e Espacial, além de discutirem o ensino e a aprendizagem de Geometrias, sobretudo as Geometrias não Euclidianas, tão importantes na formação inicial de professores de matemática. Por fim, é importante trabalhar com tarefas matemáticas de geometrias não euclidianas que promove o desenvolvimento do pensamento geométrico na formação inicial de professores de matemática.

Palavras-chave: Geometria não euclidiana. Geometria esférica. Formação inicial de professores de matemática. Pensamento geométrico.

LEIRIA, Talisson Fernando. **Spherical geometry in the initial of mathematics teachers education**: possibilities for the development of geometric thinking. 2025. 201 f. Thesis (Doctorate in Teaching of Sciences and Mathematics Education) – Londrina State University, Londrina, 2025.

ABSTRACT

A growing number of studies focused on the teaching of Geometry in Basic Education and in the training of mathematics teachers, had as focus the Euclidean Geometry Flat (recognize the geometric figures, quadrilaterals and congruence of triangles), Spatial Euclidean Geometry (calculating the area and volume of solids and plans patterns), teachers' knowledge for teaching of these subjects, and the presentation of teaching proposals for Basic Education. Few studies have been dedicated themselves to the discussion of non-Euclidean Geometries in the initial and continuing training of mathematics teachers. In the case of Spherical Geometry, as well as Euclidean Geometry, it consistently describes situations experienced in the physical world, especially when we treat the surface of planet Earth as a sphere. This study aims to answer: what elements of geometric thinking can be mobilized by future mathematics teachers (FPMat) in solving and discussing tasks of Spherical Geometry? The qualitative research, of interpretative nature, was developed in the disciplines "Teaching Geometry" and "Methodologies and Practices of Teaching Mathematics", both of the 2nd series of the Undergraduate Course in Mathematics - Bachelor's Degree of the State University of Paraná - Paranavaí Campus, with application of the project Studies on Non-Euclidean Geometries: Spherical Geometry. The results show that the FPMat had the opportunity to: interpret and recognize information of the statement of tasks; build different strategies of resolution; choose/ elaborate manipulable material as auxiliary resources; negotiate meanings; systematize learning; and discuss strategies for teaching geometry. To organize and present the results of this research, it uses the multipaper format consisting of a collection of self-contained and publishable scientific articles, allowing the dissemination of the study with agility reaching a larger number of readers. The work with tasks allowed FPMat not only to mobilize aspects of geometric thinking, learning about Spherical Geometry, and re-meanings of contents of Euclidean Flat and Spatial Geometry, besides discussing the teaching and learning of Geometries, especially the non-Euclidean Geometries, so important in the initial training of mathematics teachers. Finally, it is important to work with mathematical tasks of non-Euclidean Geometries that promotes the development of geometric thinking in the initial training of mathematics teachers.

Keywords: Non-Euclidean geometry. Spherical geometry. Initial mathematics education. Geometric thinking.

LISTA DE FIGURAS – ORGANIZADAS POR ARTIGO/CAPÍTULO

INTRODUÇÃO ESTENDIDA

Figura 1 – A Dualidade da Participação e da Reificação.....	23
Figura 2 – Organização da Tese no Formato <i>Multipaper</i>	39

ARTIGO/CAPÍTULO 1

Figura 1 – Representação na folha de papel A4 - Celeste.....	56
Figura 2 – Representação plana da resolução na bola de isopor - Celeste.....	58
Figura 3 – Representações construídas - Luna e Órion.....	58
Figura 4 – Resoluções elaboradas - Aurora.....	59
Figura 5 – Resolução do item 3 - Luna.....	61
Figura 6 – Registro escrito do item 2 - Balthazar.....	63
Figura 7 – Registro escrito do item 2 - Balthazar.....	63
Figura 8 – Representação externa do item 3 - Celeste.....	64
Figura 9 – Representações externas - Órion.....	65
Figura 10 – Interpretação de imagens - Balthazar.....	67

ARTIGO/CAPÍTULO 2

Figura 1 – Representação de um triângulo esférico.....	82
Figura 2 – Resolução do item 2 da tarefa I - Celeste.....	87
Figura 3 – Resolução do item 5 da tarefa II - Atena.....	87
Figura 4 – Resolução do item 3 da tarefa I - Luna.....	88
Figura 5 – Resolução do item 2 da tarefa II - Celeste.....	88
Figura 6 – Representação - Aurora.....	89
Figura 7 – Representação do ângulo esférico sobre a superfície de uma esfera.....	90
Figura 8 – Reflexão de Balthazar Sobre uso de material manipulável.....	91
Figura 9 – Reflexão de Balthazar sobre discussão das tarefas.....	92
Figura 10 – Reflexão de Balthazar sobre mensuração de um ângulo esférico.....	92
Figura 11 – Registro escrito do Axioma da GE - Órion.....	93
Figura 12 – Resolução para o item 3 da tarefa I - Balthazar.....	93
Figura 13 – Resolução para o item 2 da tarefa II - Luna.....	94
Figura 14 – Reflexão de aula - Balthazar.....	95
Figura 15 – Resolução de uma questão direcionada a Balthazar.....	95
Figura 15 – Registro dos contornos do corte da bola - Órion e Balthazar.....	96
Figura 16 – Representação de infinitas circunferências máximas - Órion.....	97

ARTIGO/CAPÍTULO 3

Figura 1 – Representação de triângulo plano - Artemis.....	117
Figura 2 – Representação de triângulo no plano - Teseu.....	118
Figura 3 – Representação de triângulo no plano - Ícaro.....	118
Figura 4 – Representação do triângulo na superfície da bola de isopor - Eros.....	119

Figura 5 – Representação do triângulo na superfície da bola de isopor - Tesália.....	119
Figura 6 – Representação plana do triângulo esférico - Orfeu.....	121
Figura 7 – Representação externa - Teseu.....	122
Figura 8 – Representação externa do triângulo - Ícaro.....	122
Figura 9 – Representação externa - Artemis.....	123
Figura 10 – Representação externa do item 2 - Artemis.....	123
Figura 11 – Representação externa do item 2 - Perseu.....	123
Figura 12 – Representação escrita para o item 3 - Artemis.....	125
Figura 13 – Material para medir o ângulo esférico.....	126
Figura 14 – Registro - Ícaro.....	126
Figura 15 – Representação escrita - Teseu.....	127

LISTA DE QUADROS – ORGANIZADO POR ARTIGO/CAPÍTULO

INTRODUÇÃO ESTENDIDA

Quadro 1 – Habilidades de Visualização de Gutiérrez.....	32
---	----

ARTIGO/CAPÍTULO 1

Quadro 1 - Problema do Urso, item 1.....	53
Quadro 2 - Construindo reta na superfície plana e esférica - item 2.....	53
Quadro 3 - Construindo triângulos planos na superfície plana e esférica - item 3 da tarefa I.....	54
Quadro 4 - Percepção visual - Celeste.....	57
Quadro 5 - Olhar em perspectiva - Balthazar.....	60
Quadro 6 - Imagem mental - Luna e Órion.....	60
Quadro 7 - Registro do diálogo entre Balthazar e Formador.....	61
Quadro 8 - Diálogo entre Luna e Órion.....	62
Quadro 9 - Diálogo entre Celeste, Zora e Aria.....	64
Quadro 10 - Diálogo entre Luna e Órion.....	65
Quadro 11 - Interpretação visual mobilizada no item 2.....	66
Quadro 12 - Diálogo entre Aurora e Balthazar.....	68

ARTIGO/CAPÍTULO 2

Quadro 1 – Tarefa I - As retas são retas?.....	83
Quadro 2 – Tarefa II - Circunferências máximas são paralelas?.....	84
Quadro 3 – Tarefa III - Como calcular a distância entre dois pontos?.....	84
Quadro 4 - Discussão coletiva entre Formador e Celeste.....	96

ARTIGO/CAPÍTULO 3

Quadro 1 – Tarefa “Explorando outras Superfícies Geométricas”.....	114
Quadro 2 – Diálogo entre as FPMat Tesália e Flora com o Formador.....	119
Quadro 3 – Conversação entre Tesália e Formador.....	120

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CoP PAEM	Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática
CREP	Currículo da Rede Estadual Paranaense
FAFIPA	Faculdade Estadual de Educação, Ciências e Letras de Paranavaí
FPMat	Futuros Professores de Matemática
GE	Geometria Euclidiana
GNE	Geometria não-Euclidiana
Gepefopem	Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática
IES	Instituição de Ensino Superior
MMM	Movimento da Matemática Moderna
PECEM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Educação Matemática
PMat	Professores de Matemática
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UNESPAR	Universidade Estadual do Paraná

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	9
1.1 TRAJETÓRIA PESSOAL E ACADÊMICA.....	11
1.2 QUESTÃO NORTEADORA, OBJETIVO GERAL E OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	16
1.3 O ENSINO DE GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA. .	17
1.4 PENSAMENTO GEOMÉTRICO.....	24
1.4.1 VISÃO E VISUALIZAÇÃO NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA.....	29
1.5 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO E CONTEXTOS DAS INVESTIGAÇÕES.....	32
1.6 ESTRUTURA DA TESE.....	37
1.7 REFERÊNCIAS.....	40
 ARTIGO/CAPÍTULO 1.....	 47
VISÃO E VISUALIZAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA.....	47
1 INTRODUÇÃO.....	47
2 VISÃO E VISUALIZAÇÃO COMO ASPECTOS MOBILIZADORES DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO.....	49
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	52
4 ELEMENTOS DA VISÃO E VISUALIZAÇÃO MOBILIZADOS NA TAREFA - CONHECENDO A GEOMETRIA ESFÉRICA.....	56
4.1 A PERCEPÇÃO VISUAL E A APRENDIZAGEM DE FPMAT.....	56
4.2 ELEMENTOS DA VISUALIZAÇÃO MOBILIZADOS POR FPMAT.....	60
4.2.1 CRIAÇÃO DE IMAGENS MENTAIS E REPRESENTAÇÕES DE OBJETOS GEOMÉTRICOS. .	60
4.2.2 REPRESENTAÇÕES EXTERNAS.....	62
4.2.3 PROCESSOS E HABILIDADES DE VISUALIZAÇÃO.....	66
5 VISÃO E VISUALIZAÇÃO E A MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS DE GEOMETRIA ESFÉRICA.....	69
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	72
7 REFERÊNCIAS.....	73
 ARTIGO/CAPÍTULO 2.....	 77
CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESFÉRICA	

MOBILIZADOS POR FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA.....	77
1 INTRODUÇÃO.....	77
2 A FORMAÇÃO DE PROFESSORES E O ENSINO DE GEOMETRIA ESFÉRICA.	78
3 CONTEXTO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO...	82
4 CONHECIMENTOS SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA ESFÉRICA	
MOBILIZADOS POR FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA.....	86
4.1 CONHECIMENTOS ESPECIALIZADOS SOBRE GEOMETRIA ESFÉRICA.....	87
4.2 CONHECIMENTOS SOBRE O USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESFÉRICA.....	91
4.3 CONHECIMENTOS SOBRE A NECESSIDADE DE TRABALHAR COM DIFERENTES REPRESENTAÇÕES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESFÉRICA.....	93
4.4 CONHECIMENTO SOBRE A NECESSIDADE DE ARTICULAÇÃO DA GEOMETRIA ESFÉRICA COM OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO.....	96
5 CONHECIMENTO MOBILIZADOS PELOS FPMAT E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO.....	98
6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES.....	101
7 REFERÊNCIAS.....	103
 ARTIGO/CAPÍTULO 3.....	 108
POTENCIALIDADES DE UMA TAREFA DE GEOMETRIA ESFÉRICA PARA PROMOVER O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO.....	108
1 INTRODUÇÃO.....	108
2 TAREFAS DE MATEMÁTICAS E O ENSINO DE GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA.....	110
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E O CONTEXTO DA INVESTIGAÇÃO	113
4 AS POTENCIALIDADES DA TAREFA “EXPLORANDO OUTRAS SUPERFÍCIES GEOMÉTRICAS”.....	117
4.1 MOBILIZAÇÃO DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS DE TRIÂNGULOS.....	117
4.2 MOBILIZAÇÃO DE ELEMENTOS DA VISUALIZAÇÃO.....	117
4.3 MOBILIZAÇÃO DE CONHECIMENTOS ASSOCIADOS ÀS GEOMETRIAS.....	125
5 O PAPEL DA TAREFA PARA PROMOVER O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO.....	127
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	127

7 REFERÊNCIAS.....	133
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	138
Potencialidades das tarefas que promoveram o desenvolvimento do pensamento geométrico de FPMat.....	139
Nossa tese: a importância de se trabalhar com tarefas de GNE na formação inicial de professores de matemática.....	144
Limitações e possibilidades de futuras investigações.....	147
REFERÊNCIAS.....	149
APÊNDICES.....	157
APÊNDICE A.....	158
APÊNDICE B.....	164

1 INTRODUÇÃO

O ensino de geometria é um campo de investigação que ainda enfrenta desafios, pois muitos professores e futuros professores de matemática se sentem despreparados para ensinar conceitos, teoremas, propriedades e, conseqüentemente, desenvolver o pensamento geométrico. Isso ocorre tanto pela falta de conhecimento do conteúdo quanto pela ausência de estratégias adequadas para o seu ensino (Barros; Pavanello, 2022; Blanco, 2014; Cowley, 2009; Gonzato; Blanco; Godino, 2011; Grolá; Gualandi, 2023; Marmolejo; Sánchez; Londoño, 2017; Marmolejo; Astudillo, 2015; Pavanello, 1993; Silva; Cyrino, 2024; Smith; Julie; Gierdien, 2020).

Até a década de 1960, o ensino dos conceitos geométricos no sistema de ensino regular do Brasil sempre esteve entre os conteúdos de matemática, principalmente os de álgebra e aritmética. Com o surgimento do Movimento de Matemática Moderna (MMM) no País, o trabalho com a geometria passou a ter um enfoque nas estruturas, especialmente por planos vetoriais e/ou por transformações geométricas (Caldatto; Pavanello, 2015).

Uma vez que as transformações geométricas é um conceito de pouco conhecimento dos professores do ensino secundário, isso faz com que a geometria seja pouco explorada nas aulas de matemática da Educação Básica, ou trabalhada sob um enfoque predominantemente axiomático, sendo até mesmo negligenciada pela maioria dos professores (Barros, Pavanello, 2022; Caldatto; Pavanello, 2015; Elia; En Den Heuvel-Panhuizen; Gagatsis, 2018; Marmolejo; Astudillo, 2015; Pavanello, 1993; Silva; Cyrino, 2024).

Apesar de alguns estados brasileiros terem promovido mudanças nos currículos a partir da década de 1970, no que diz respeito ao ensino de Geometria Euclidiana¹ (GE) na Educação Básica, pesquisadores da área de Educação Matemática têm chamado a atenção para a negligência dessa temática, tanto na Educação Básica quanto na formação inicial de professores de matemática (Blanco, 2014; Caldatto; Pavanello, 2015; Gonzato *et al.*, 2011; Marmolejo *et al.*, 2017; Marmolejo; Astudillo, 2015; Silva; Cyrino, 2024).

Nos primeiros anos dos cursos de Licenciatura em Matemática é notório o conhecimento incipiente dos futuros professores da disciplina a respeito de geometria e o foco ao ensinar Geometria esteja somente na GE, a partir de uma abordagem axiomática (Assis, 2021; Grando; Nacarato; Gonçalves, 2008; Oliveira; Velasco, 2007; Silva; Cyrino, 2024; Souza, 2021).

¹ Ao dizer “Geometria Euclidiana ou GE” estarei me referindo à Geometria Euclidiana Plana e à Geometria Euclidiana Espacial.

Embora as Geometrias não Euclidianas (GNE) estejam presentes em algumas propostas curriculares contemporâneas, como na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) e no Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP) (Paraná, 2019), a formação inicial de professores de matemática carece de uma abordagem mais aprofundada sobre esse tema. Compreende-se a GNE como um sistema geométrico distinto da GE, que não atende ao Axioma das Paralelas elaborado por Euclides.

Nos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática, tanto no Brasil quanto internacionalmente, os estudos sobre as GNE costumam se limitar a conteúdos introdutórios, sem uma exploração significativa de como ensiná-las (Cowley, 2009).

Por mais que as GE possam descrever e representar coerentemente os fenômenos vivenciados e/ou experienciados no cotidiano dos sujeitos, são as GNE quem melhor representam tais fenômenos, a partir de outros modelos geométricos que permitem analisá-los e caracterizá-los com determinada precisão, como exemplo os deslocamentos urbanos nas ruas de uma cidade que estão associadas à Geometria do Táxi (Cavalcante; Sousa; Sousa, 2019); a superfície terrestre e esfera celeste; a Astronomia Posicional (Kovacevic, 2019) e a Geográfica (Honda, 2013); as leis da Teoria da Relatividade de Albert Einstein (Geometria Elíptica).

Vivemos em um mundo tridimensional em que variadas situações estão representadas em superfícies curvas (ou em espaços curvos), cujas propriedades de GE não satisfazem as condições deste espaço, pelo fato de ela utilizar a superfície plana. Ao considerar grandes distâncias sobre a superfície do planeta Terra, as quais não podem ser desprezadas nos cálculos, os conceitos de GE não são aplicáveis devido à curvatura do planeta. Por exemplo, as viagens cujas distâncias são longas, no caso as viagens de avião, são dadas por coordenadas esféricas, a trigonometria esférica, que estão associadas ao estudo da Geometria Esférica.

Por outro lado, há investigações que têm se dedicado a analisar propostas e abordagens para integrar as GNE no ensino de matemática na Educação Básica, bem como nos processos formativos de professores, tanto na formação continuada quanto na formação inicial (FPMat) (Blanco, 2014; Brunheira; Ponte, 2018; Carvalho; Azevedo, 2020; Cowley, 2009; Fonseca, 2020; Gambini; Lénárt, 2021; Gomes, 2014; Guven; Karatas, 2009; Marmolejo *et al.*, 2017; Pérez; Ortega; Gallardo, 2019; Reis, 2006; Ribeiro, 2013; Silva, 2018; Silva; Cyrino, 2024; Vieira; Batista; Tavares, 2020). Essas investigações têm buscado estratégias para superar a limitação curricular ao apresentar propostas de ensino que possibilitem uma compreensão mais abrangente das GNE no contexto educacional.

Estudar geometria na formação inicial e continuada de professores de matemática se

torna relevante, a fim de que sejam promovidas discussões que associem os processos de ensino e de aprendizagem para mobilizar e desenvolver o *pensamento geométrico*. Os autores, em suas investigações, trazem como resultados a identificação de padrões geométricos e desenvolvimento do raciocínio lógico, a utilização de representações verbais e gráficas, e elementos da visão e da visualização que podem contribuir para o acesso aos objetos geométricos, e consequentemente, para a aprendizagem de Geometria e ao desenvolvimento do pensamento geométrico (Blanco, 2014; Elia *et al.*, 2018; Marmolejo *et al.*, 2017; Swoboda, 2008; Torregrosa; Quesada, 2007).

Nesse contexto, o Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática - Gepefopem² tem investigado diferentes caracterizações para o *pensamento geométrico* e o seu desenvolvimento em contextos de formação de professores (Cybulski; Cyrino, 2021, 2022; Vieira; Cyrino, 2022). Nessas investigações, os elementos voltados para a visão e visualização no pensar geometricamente chamaram nossa atenção, por serem dois elementos citados corriqueiramente por autores em suas investigações e que carecem de discussões. É neste contexto que organizamos nossa investigação, que tem como temática a "*Geometria Esférica na formação inicial de professores de matemática e o desenvolvimento do pensamento geométrico*".

Na próxima seção, apresento minha trajetória como investigador e a escolha da temática de investigação deste trabalho. Em seguida, apresento a questão norteadora da investigação e seus objetivos, os aportes teóricos, os encaminhamentos metodológicos e a estrutura com a qual esta tese está organizada.

1.1 TRAJETÓRIA PESSOAL E ACADÊMICA

No ano de 2009, ingressei no Curso de Graduação em Matemática - Licenciatura Plena da Faculdade Estadual de Educação, Ciências e Letras de Paranavaí (FAFIPA). A intenção de cursar Matemática era aprofundar meus conhecimentos na área e, posteriormente, cursar uma graduação em Engenharia, o que não aconteceu devido a questões financeiras e à necessidade de tomar um rumo na vida, no sentido de deixar o ninho e buscar novos ares. Quando estava na 2.^a série do curso de Matemática, em 2010, uma professora que ministrou aulas de "Metodologia e Práticas de Ensino em Matemática" me incentivou a continuar na área de ensino de matemática e formação de professores e não migrar para as engenharias, tendo em vista a transformação que a Educação promove.

² <https://www.uel.br/grupo-estudo/gepefopem/apresentacao.html>

No entanto, inserir-me no campo de trabalho, especificamente na área da formação inicial de professores, foi um processo gradativo e demorado. Isso se deu tanto pela dificuldade em obter boas colocações nos processos seletivos quanto pela escassez de aulas disponíveis, que, na maioria das vezes, eram apenas substituições temporárias.

No ano de 2012, estando na 4.^a série do curso, a partir de uma conversa com o professor Márcio Roberto da Rocha, comecei a participar do grupo Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática – CoP PAEM, coordenado pela professora Tânia Marli Rocha Garcia. Neste período inicial da participação no grupo, que perdurou até o ano de 2014, obtive muitos aprendizados, que vão desde o processo de planejamento e organização de uma tarefa a ser explorada nas aulas de matemática, perpassando por estudos teóricos sobre ensino exploratório e raciocínio proporcional até compreender o processo de pesquisa científica. Desse instante em diante, coloquei-me em desafio de fazer o Mestrado e o Doutorado, ciente de todos os percalços e das adversidades que teria que enfrentar.

A CoP, que assim ficou eternizada, era um projeto vinculado ao Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática (Gepefopem), coordenado pela professora Márcia Cyrino, ligado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da Universidade Estadual de Londrina (UEL) e que tinha a participação de professoras de diferentes colégios estaduais de Paranavaí e região, além das professoras Laís Maria e Tânia e do professor Márcio que estavam cursando Mestrado e Doutorado, orientandos da Márcia.

Em 2014, consegui me encaixar para ministrar 28 horas/aula de Física, distribuídas entre os períodos matutino e noturno, em um colégio estadual localizado na região noroeste do estado, aproximadamente 60 km de distância da cidade em que morava. Entre os meses de agosto e setembro daquele ano, participei do processo seletivo para a docência no Ensino Superior, na Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR/*Campus* de Paranavaí e, no final do mês de outubro, recebi minha convocação para trabalhar como professor universitário nesta instituição, iniciando as atividades em novembro daquele ano.

Em novembro do mesmo ano, participei do processo de seleção do Mestrado em Ensino: Formação Docente Interdisciplinar, para início no 1.^o semestre de 2015, da Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR/*Campus* de Paranavaí, ficando como suplente da vaga, caso surgisse. Em janeiro de 2015, fui informado por minha futura orientadora de Mestrado acerca da minha convocação para assumir a vaga que havia sido colocada à disposição pela candidata até então selecionada. Aceitei o convite sem pensar duas vezes, pelo fato de estar trabalhando na Universidade e, ao mesmo tempo, ter a oportunidade de cursar o

Mestrado. Iniciava-se ali a caminhada por um sonho que até então era tido como impossível de se realizar.

No Mestrado, tive a oportunidade de estudar assuntos ligados à Filosofia e à Epistemologia da Ciência, na intenção de conhecer o Método Científico empreendido nos experimentos e validação de importantes teorias científicas, além da experimentação para ensinar Física na Educação Básica. Este estudo possibilitou argumentar que não há um método único e eficaz para realizar pesquisas científicas, como em uma receita de bolo. Há outras maneiras para construir e validar uma teoria científica. Há momentos que é necessário voltar à fase inicial da experimentação para realizar ajustes e validar ou não o que se quer demonstrar.

Tal estudo se deve ao fato de que, nos livros didáticos, distribuídos nas escolas da Educação Básica durante aquele período, o método científico era apresentado aos estudantes como uma receita a ser seguida para se fazer ciência, e sabemos que não é bem dessa forma. Isso porque são necessárias horas de estudos e a realização repetitiva da experimentação para que se alcancem os resultados pretendidos. Queríamos chamar a atenção para as experimentações que são realizadas nas escolas, quando o professor opta por explorar o conteúdo por meio de uma experiência com os alunos e têm-se a possibilidade de chegar a um erro, seja por falha no processo de execução seja por falta de conhecimento de algum conceito em específico que precisa ser ajustado para que a experiência se consolide e valide a teoria.

Fazer Ciência não é somente realizar um único experimento, seguindo um conjunto de regras e passos e chegando ao resultado esperado. Trata-se de um processo mais complexo que demanda conhecimento teórico e prático. É preciso obter resultados que sejam confiáveis para que se valide o experimento e, por consequência, constitua uma teoria científica.

A princípio, tive a impressão de que os estudos realizados durante o Mestrado não contribuiriam para a minha área de formação, pois estava estudando Filosofia e Epistemologia da Ciência e a experimentação no ensino de Física. Uma situação que me intrigava durante as aulas do Mestrado eram os constantes questionamentos feitos pelos professores da área da Pedagogia sobre a dificuldade de se ensinar matemática para os estudantes. Por que ensinar processos de resoluções, cujo único propósito era repeti-los em outros exercícios aplicados em listas extensas, sem saber o motivo de aprender aqueles processos?

No entanto, aos poucos, ao lecionar no Curso de Licenciatura em Matemática, fui percebendo que poderia desenvolver práticas didáticas e pedagógicas que proporcionassem reflexões aos futuros professores sobre o processo de ensino e de aprendizagem da disciplina. Situações vivenciadas nas aulas da graduação puderam ser analisadas e refletidas com base

nos referenciais utilizados nos estudos do Mestrado, em especial sobre o ensino, as formas de oportunizar a aprendizagem aos sujeitos, e sobre a maneira que eles aprendem.

O Mestrado – “Uma discussão do papel das atividades experimentais e a formação do professor de física no contexto das políticas neoliberais” – foi concluído no dia 02 de dezembro de 2016. Período em que meu contrato de dois anos com a universidade tinha se encerrado, porém com chances reais de retornar (no ano de 2017), após a aprovação no processo seletivo realizado em 2016 e com o título de mestre em mãos.

Com o incentivo da minha família, de colegas do Colegiado de Matemática e de membros da CoP-PAEM, no 1.º semestre de 2019 iniciei minha trajetória acadêmica no Doutorado, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da Universidade Estadual de Londrina (UEL), como estudante especial (aluno não regular), cursando a disciplina de “Tópicos em Educação Matemática” ministrada pela professora Regina Buriasco. Ainda como estudante especial, cursei outras disciplinas durante o 2.º semestre de 2019 e ao longo do ano letivo de 2020.

Meu ingresso como estudante regular no Doutorado se deu no ano de 2021, quando fui aprovado no processo de seleção do PECEM, realizado entre os meses de outubro e novembro de 2020. No projeto de pesquisa encaminhado para o processo de seleção, a minha intencionalidade inicial era estudar o processo de comunicação entre alunos e professores nas aulas de matemática, isto é, como os professores compreendiam e comunicavam os conhecimentos matemáticos aos seus alunos.

Inicialmente, foram realizadas leituras publicadas na área da Educação Matemática a respeito desta temática, com o objetivo de verificar possíveis caminhos a serem investigados. Em maio de 2021, iniciei minha participação em um grupo de estudos sobre “Pensamento Geométrico”, com colegas que, junto comigo, faziam parte naquele período do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Formação de Professores que ensinam Matemática (Gepefopem), coordenado pela professora Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, tendo tal temática como uma de suas linhas de pesquisa.

O foco de estudo deste grupo era pesquisar e discutir possíveis caracterizações para o pensamento geométrico, além de pesquisar as produções disponíveis na literatura científica nacional e internacional acerca deste tipo de pensamento. As pesquisas realizadas focaram em contextos de formação inicial e continuada de professores de/que ensinam matemática, em teses e dissertações, e nos periódicos nacionais e internacionais de boa qualificação.

Com os estudos e as investigações realizadas por este grupo, uma situação nos intrigou fortemente. Nos trabalhos publicados na área a respeito desta temática, pensamento

geométrico, os termos “visualização”, “imaginação”, “intuição” e “percepção visual” eram recorrentes nessas publicações. Em algumas delas havia breves explicações sobre estes termos, mas sem esclarecer coerentemente o que cada um deles representa para a literatura na Educação Matemática, e também a maneira como esses termos aparecem no processo de ensino e aprendizagem de geometria.

As investigações analisadas por este grupo discutem conteúdos de Geometria Plana e Espacial voltados aos estudantes da Educação Básica e à formação de professores de matemática e que ensinam matemática, além de analisar elementos do pensamento geométrico mobilizados pelos sujeitos participantes das investigações.

Outra situação que têm intrigado os membros do grupo são as poucas investigações sobre as GNE em contextos de formação continuada e inicial de professores de matemática. Ao longo de minha trajetória de estudante e de professor, percebi que as GNE raramente eram ensinadas nas aulas de matemática da Educação Básica e nas formações de professores. Diante destes fatos, adveio a possibilidade de trabalhar com as Geometrias não Euclidianas na formação de professores.

A partir desse momento, minha linha de investigação começou a ganhar forma e direção, porém ainda com um ponto de interrogação a ser respondido: realizar a investigação na formação inicial ou continuada? Em conversa com a minha orientadora, professora Márcia Cyrino, em um primeiro momento optamos por desenvolver a investigação no contexto da formação continuada com a condição de que esta fosse realizada em uma escola pública, em que a maioria dos docentes se dispusesse a participar e, ainda, que outros possíveis professores interessados pudessem ter acesso à escola onde seriam realizados os encontros de formação.

No período em que buscávamos autorização junto ao Núcleo Regional de Educação para constituir um grupo de formação continuada com os professores das escolas, ainda me encontrava trabalhando como docente no Curso de Licenciatura em Matemática da UNESPAR/*Campus* de Paranavaí. Durante a distribuição de aulas para o ano letivo de 2022, selecionei a disciplina O Ensino de Geometria para lecionar, pensando em uma possível alternativa para desenvolver a proposta de investigação na formação inicial, com os futuros professores de matemática (FPMat).

Nesse processo de negociação sobre quais seriam as possibilidades, durante uma reunião com a professora Márcia consideramos mais interessante desenvolver a investigação na disciplina O Ensino de Geometria, visto que eu atuaria como professor responsável e investigador ao mesmo tempo. A autorização para realizar a investigação na disciplina,

ofertada pelo Curso de Licenciatura em Matemática, foi obtida a partir de um Ofício de Solicitação encaminhado ao Coordenador do Curso, que a tramitou na reunião de colegiado, tendo a aprovação de todos os presentes, ficando registrada em Ata de Reunião. Por fim, o Coordenador do Curso emitiu uma declaração autorizando a realização da investigação na referida disciplina, cujo resultados obtidos são apresentados neste relatório de pesquisa.

A proposta inicial para a formação visava explorar diferentes áreas das GNE, como: Projetiva, Topológica, Esférica e Hiperbólica. Buscava compreender o modo que os FPMat interpretavam as situações do cotidiano associadas às GNE, iniciando com a Geometria Projetiva, tratando de aspectos de projeção e do ver (com os olhos); seguindo pelas ideias de vizinhança e fronteira da Geometria Topológica; pelo conceito de distância e da soma dos ângulos internos do triângulo na Geometria Esférica; e, por fim, pela Geometria Hiperbólica com um conceito oposto à Geometria Esférica sobre a soma dos ângulos internos do triângulo.

Diante dos acontecimentos que ocorreram após o início da disciplina e das dificuldades apresentada pelos FPMat com os conteúdos de GE, optamos por abordar com eles a Geometria Esférica, por se tratar de um conteúdo que envolve o conceito de esfera que havia sido objeto de estudo na 1.^a série da graduação e que poderia estar mais próxima de uma situação do cotidiano dos FPMat, no caso o conceito de distância na aviação e/ou nas grandes navegações (náutica).

Decidimos, então, focar exclusivamente na Geometria Esférica, abordando-a a partir de uma tarefa de Gomes (2014) que é proposta para a Educação Básica.

1.2 QUESTÃO NORTEADORA, OBJETIVO GERAL E OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os referenciais teóricos apresentados nesta investigação sobre o ensino de Geometria, em especial das GNE, na formação inicial de PMat, permitiram construir o seguinte questionamento: **Que elementos do pensamento geométrico, associados à Geometria Esférica, são mobilizados por futuros professores de matemática na resolução e na discussão de tarefas?**

Para tanto, com o propósito de responder à questão de investigação, almejamos o seguinte objetivo geral para esta tese: **Discutir as potencialidades de tarefas apoiadas na Geometria Esférica que possibilitam o desenvolvimento do pensamento geométrico de futuros professores de matemática.** Para atender a este objetivo geral, construímos os seguintes objetivos específicos:

- ✓ **Objetivo Específico 1:** analisar elementos da visão e da visualização mobilizados por futuros professores de matemática na resolução de uma tarefa de Geometria Esférica.
- ✓ **Objetivo Específico 2:** discutir conhecimentos sobre o ensino de Geometria Esférica mobilizados por futuros professores de matemática na resolução e discussão de tarefas.
- ✓ **Objetivo Específico 3:** discutir as potencialidades de uma tarefa sobre triângulos esféricos para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico de futuros professores de matemática.

A partir dos resultados obtidos nesta investigação, buscamos defender a necessidade de espaços na formação inicial de professores de matemática que oportunizem discutir processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Esférica, bem como as suas implicações e contribuições com a GE, e suas potencialidades para desenvolver o pensamento geométrico de FPMat.

1.3 O ENSINO DE GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

O ensino de geometria no Brasil até a década de 1960 estava inserido entre os conteúdos de matemática, especificamente entre os conteúdos de álgebra e aritmética. O Movimento de Matemática Moderna (MMM), cuja influência no País foi a francesa, promoveu alterações neste ideário sobre o ensino de geometria até então estabelecido no sistema de ensino regular.

O MMM buscava desenvolver um novo currículo escolar de matemática, na intenção de aproximar a matemática construída pelos cientistas daquela ensinada nas escolas, em que era defendida a necessidade de suprir as demandas econômicas e científico-tecnológicas da época. Os conteúdos de matemática passaram a ser abordados a partir do formalismo, dando ênfase a temas da teoria de conjuntos, das teorias algébricas e da lógica (Caldatto; Pavanello, 2015).

O MMM defendia o ensino de geometria sob o viés das estruturas, isto é, o ensino de geometria sendo desenvolvido a partir de temáticas do plano vetorial e das transformações geométricas. Dessa forma, ela não mais poderia ser ensinada somente para determinar características específicas e propriedades a partir de um ente geométrico (objeto geométrico), mas sim, de sua formalidade em acordo com sua estrutura por meio das transformações geométricas que dela advêm (Caldatto; Pavanello, 2015).

Segundo Caldato e Pavanello (2015, p. 120), “um dos principais legados da Matemática Moderna para o processo educacional no Brasil foi o abandono da geometria na escola básica que perdura até meados da década de 2010”. As autoras reforçam que o “abandono” do ensino de geometria no Brasil não seja culpa apenas do MMM, mas também de outros fatores que intervieram neste processo, como a promulgação da Lei Federal nº. 5.692/71 que dava liberdade às escolas para que pudessem escolher e organizar seus próprios currículos de ensino (Caldatto; Pavanello, 2015).

Silva (2023, no prelo, p. 24, grifo da autora), referindo-se ao MMM, destaca que “Alguns pesquisadores da História da Matemática, a partir de revisões, novos aportes teóricos, metodológicos e fontes históricas indicam que o chamado ‘abandono’ sempre esteve presente na educação brasileira”.

Entretanto, alguns pesquisadores da área da Educação Matemática não estão de acordo com o uso do termo *abandono*, ao se referirem ao ensino de geometria na Educação Básica e na formação de PMat. Leme da Silva (2022, p. 19), por exemplo, ao investigar o contexto histórico do desenvolvimento da matemática no período do Movimento da Matemática Moderna, destaca que os termos “abandono ou fracasso” do ensino de geometria “podem ser interpretados como juízo de valores”.

Leme da Silva (2022) sugere que o termo “abandono” do ensino da geometria como uma das consequências do MMM seja revisto diante dos aportes teóricos e das fontes de pesquisas que estão à disposição atualmente. A autora destaca que devemos ter atenção sobre a produção histórica advinda ao longo dos anos, desde a forma que é organizado o sistema de ensino até a sua aplicação nas escolas. Para ela, as pesquisas devem ser realizadas a partir de fontes e aportes teóricos que sustentaram uma explicação para o fato acontecido sem a necessidade de atribuir algum valor, sem determinar uma sentença.

Segundo Leme da Silva (2022, p. 19),

Talvez seja preciso reconhecer e entender porque o percurso do ensino de geometria parece ter sido distinto de outros conceitos matemáticos, como por exemplo, as estruturas algébricas, que mesmo sem domínio dos professores sobre o assunto, foram inseridas diretamente nos manuais didáticos, nos cursos de formação de professores. Entender a complexidade da trajetória do ensino da geometria, associado ao período do MMM e as apropriações que autores de livros didáticos, professores e alunos, certamente nos permitirá um olhar mais crítico frente ao ensino atual.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998a) tratam da Geometria como componente Espaço e Forma e destacam que “Uma das possibilidades mais fascinantes

do ensino de Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença e elementos da natureza e em criações do homem” (Brasil, 1998a, p. 82).

Os PCN do terceiro e quarto ciclos (Brasil, 1998b) enfatizam que, embora a geometria tenha recebido pouco destaque nas aulas de matemática e que, muitas vezes, seu ensino seja confundido com a componente de Grandezas e Medidas, ela “desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (Brasil, 1998b, p. 122).

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE) do estado do Paraná para a Matemática (Paraná, 2008) preveem estudos de GE e noções de GNE desde os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. As DCE destacam que “Na Educação Básica, a Educação Matemática valoriza os conhecimentos geométricos, que não devem ser rigidamente separados da aritmética e da álgebra” (Paraná, 2008, p. 57).

Observa-se que, na escrita das DCE do estado do Paraná, ainda se preservam as interações entre os conteúdos de geometria e a aritmética e a álgebra, destacando que conceitos, propriedades e questões aritméticas e algébricas podem ser clarificadas e/ou solucionadas a partir de conceitos geométricos. Assim como nos PCN (1998a, 1998b), as DCE dão ênfase para o desenvolvimento para um tipo especial de pensamento, o pensamento geométrico.

Porém, mesmo as GNE estando presentes nas DCE com orientações para seu ensino desde os anos finais do Ensino Fundamental, são poucos os sujeitos que tiveram acesso a estes conhecimentos geométricos, inclusive professores de matemática que estão ou não atuando em sala de aula (Caldatto; Pavanello, 2015). Pois bem, de que forma um professor de matemática pode ensinar um conteúdo que não aprendeu e nem conhece práticas pedagógicas que podem oportunizar a aprendizagem dessas geometrias?

Atualmente, os documentos curriculares que orientam a organização da Educação Básica no Brasil, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), e mesmo a construção de planos estaduais para a Educação, têm o propósito de nortear a organização dos conteúdos a serem trabalhados em cada uma das disciplinas escolares. Em outras palavras, eles definem o mínimo que deve ser explorado em cada disciplina nos diferentes estados federativos.

No estado do Paraná, há o Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP) (Paraná, 2019) e o Referencial Curricular do Paraná (Paraná, 2018), organizados segundo os propósitos da BNCC. Ambos documentos preveem conteúdos de GE e GNE no currículo

escolar da matemática, mas será que professores e futuros professores de matemática estão aptos a ensinar os conceitos de GNE?

Por exemplo, no CREP é indicado ensinar Geometria dos Fractais e Geometria Projetiva já nos anos finais do Ensino Fundamental. Porém, em vez de colocar estes conhecimentos no campo das GNE, o documento indica que tais geometrias são do campo das GE. Isto é, não reconhece a Geometria dos Fractais e a Geometria Projetiva como uma GNE, mas sim, como uma GE.

A geometria ensinada nas escolas da Educação Básica, comumente, tem dado ênfase ao reconhecimento de formas e figuras geométricas planas e espaciais, que podem ser associadas a objetos físicos, bem como aos cálculos de áreas e volume desses objetos. Muitas das propostas de tarefas de Geometria Euclidiana para a sala de aula estão associadas aos conteúdos de álgebra, números e aritmética (Guven; Karatas, 2009; Reis, 2006).

Investigações na Educação Básica e na formação de professores têm se dedicado, principalmente, em mostrar propostas de tarefas e sequências didáticas para explorar as GNE (Carvalho; Carvalho, 2011; Cowley, 2009; Pérez *et al.*, 2019; Ribeiro, 2013; Vieira *et al.*, 2020). Entretanto, ainda são incipientes discussões em contextos de formação inicial e continuada de professores de matemática (Carvalho; Azevedo, 2020; Fonseca, 2020; Gomes, 2014; Reis, 2006; Silva, 2018).

As GNE são previstas em alguns currículos da formação inicial de PMat com a indicação de estudos introdutórios, mas isso que raramente acontece. Quando acontece é de uma maneira axiomática, com demonstrações e provas de teoremas e propriedades, seguindo com o rigor e o formalismo da matemática sem analisar possíveis práticas pedagógicas que permitirão ensiná-las (Silva; Cyrino, 2024).

De certa forma há situações em que o ensino de GNE na formação inicial de PMat será relegado a um segundo plano, justificando-se pela falta de condições de os estudantes aprenderem GNE ou, até mesmo, pelo professor não ter condições para ensiná-los, pela falta seja de conhecimento específico do conteúdo seja de conhecimento pedagógico do conteúdo. De acordo com Kaleff (2007, p. 93) “[...], a aquisição de conhecimentos geométricos não-euclidianos se apresenta como um significativo desafio aos meios de formação de professores”.

É relevante que os FPMat não conheçam apenas as definições e os resultados matemáticos sobre as GNE de um ponto de vista puramente acadêmico, mas que sejam contempladas práticas pedagógicas para o ensino dessas geometrias e que possam contribuir

para o desenvolvimento do pensamento geométrico deles (Gambini; Lenárt, 2021; Guven; Karatas, 2009; Livy; Downton, 2018; Silva, 2023, no prelo; Silva; Cyrino, 2024).

Ao se referir à formação de professores, Cyrino (2017, p. 709, grifos da autora) enfatiza que

[...] não nos referimos a qualquer proposta de formação de PEM³, mas sim àquela que valoriza o (futuro) professor como protagonista do seu processo de formação, como produtor de conhecimento; que articula a prática letiva do PEM com a sua profissão, com as políticas educacionais e as políticas públicas mais amplas. Cursos de formação de professores constituídos de conteúdos predeterminados pelo formador, com técnicas pedagógicas homogêneas, assumidas como “receitas” ou “fórmulas mágicas”, que tencionam “colonizar” o professor e a escola, nos parecem ineficazes, além de perversos.

É importante se pensar em uma formação em que os FPMat sejam os protagonistas do seu próprio processo de aprendizagem, o qual está em constante movimento e que se molda a cada significado negociado e reificado. É relevante para o desenvolvimento profissional de FPMat a constituição de espaços em que eles possam discutir e refletir sobre conhecimentos específicos e conhecimentos pedagógicos e didáticos, além de questões históricas e filosóficas da matemática de um modo geral.

O processo de formação inicial de professores de matemática é complexo e dinâmico. Envolve elementos da prática profissional docente e do seu compromisso político e social com a comunidade a qual pertence, além de que pode estar relacionada à própria natureza da matemática. De acordo com Silva (2023, p. 20, no prelo):

A complexidade da prática e da formação docente não se limita apenas ao desenvolvimento de conhecimentos específicos e disciplinares. Reduzir o papel do docente a executor o desconsidera como um indivíduo que elabora conhecimentos próprios em sua prática.

Há investigações que apontam para modelos de formação que se concentram em cursos de capacitação e aqueles que são predeterminados, com o propósito de discutir documentos curriculares orientadores, índices e taxas de reprovação escolar, atribuindo total responsabilidade aos professores. Há, ainda, modelos que apresentam propostas de aulas e atividades lúdicas, oferecendo aos docentes possibilidades de explorar determinados conteúdos com seus alunos. Contudo, o que predomina nessas propostas de formação é a desvinculação da realidade e das necessidades dos professores em sala de aula (Assis, 2021; Estevam; Cyrino, 2019).

³ Professores que ensinam matemática.

Concebemos a aprendizagem como um processo de negociação de significados que se desenvolve no contexto da experiência cotidiana de participação no mundo. Aquela que promove interação entre um regime de competência e uma experiência de significado (Schneider, 2012; Wenger, 2003, 2013; Wenger-Trayner; Wenger-Trayner, 2015). Isto é, a competência é histórica e socialmente desenvolvida e em interação com a experiência de cada sujeito (Wenger, 2003).

A aprendizagem não é um processo em que se trata apenas de construir conhecimentos específicos e pedagógicos do conteúdo. Abrange a possibilidade de o sujeito tornar-se uma pessoa que habita dentro de um contexto (de uma comunidade) com uma identidade, em que a construção dinâmica reflete em suas trajetórias naquele cenário. Esse movimento de idas e vindas pelas/entre as práticas molda quem nós somos.

Segundo Wenger (1998), a aprendizagem muda nossa identidade. A identidade é negociada em cada comunidade da qual participamos, com histórias de aprendizado social que levamos juntos conosco para cada situações e comunidades que vivenciamos. Como destaca Wenger (1998, p. 169), “a identidade é uma trajetória no tempo que incorpora o passado e o futuro no significado do presente”.

De acordo com Estevam e Cyrino (2019, p. 229):

a aprendizagem envolve a interação entre “um conjunto de critérios e expectativas pelo qual os membros de uma comunidade reconhecem seus modos de pertencimento” (Wenger, 2010, p. 180) e uma experiência de participação não mecânica que envolve a reprodução de padrões da prática dessa comunidade com certa apropriação de sentido (Wenger, 1998).

De certo modo, a aprendizagem está diretamente associada a comunidades que estão ao redor daquele que aprende e, ao fazer parte desses grupos, em um contexto histórico e social, dá estrutura e significado para aquilo que faz (Estevam; Cyrino, 2019). Ao fazer parte de comunidades, os professores aprendem novos conhecimentos e até ressignificam aqueles já construídos, resultando novos significados e novas estruturas.

[...] nós produzimos significados que se estendem, redirecionam, repudiam, reinterpretam, modificam ou confirmam - em uma palavra, negociam novamente - as histórias de significados das quais fazemos parte. Nesse sentido, a vida é um processo constante de negociação de significado (Wenger, 1998, p. 52-53).

Wenger (1998) enfatiza que a aprendizagem se desenvolve a partir de um processo de negociação de significados e que é, por meio dela, que experimentamos o mundo e a maneira

com a qual nos engajamos nele. A experiência do significado não nasce sozinha e tampouco a partir de uma atividade mecânica e rotineira.

Na interação social (em grupo ou em uma comunidade), os professores podem compartilhar relatos e experiências vivenciadas por eles e/ou pelos demais participantes, desencadear discussões a partir de um assunto de interesse comum, negociar significados que se constituem em oportunidades de aprendizagem que ressignificam, fundamentam, sustentam e orientam a construção do conhecimento do professor de matemática.

A negociação de significados envolve a interação de outros dois processos duais e dinâmicos da prática que caracterizam este processo de negociação e, consequentemente, as aprendizagens: participação e reificação (Figura 1).

Figura 1 – A dualidade da participação e da reificação



Fonte: Wenger (1998, p. 63)

A participação envolve a experiência e a convivência em comunidades sociais, isto é, a nossa participação no mundo, nossa prática e experiência que estão em constante movimento, interagindo com outras práticas e experiências, articulando elementos do saber, do fazer, do conversar, do sentir, do pertencer e das emoções.

[...] as coisas têm que ser feitas, relacionamentos trabalhados, processos inventados, situações interpretadas, os artefatos produzidos, os conflitos resolvidos. [...] alcançá-los sempre envolve um processo de participação complexo, delicado, social, ativo e negociado (Wenger, 1998, p.49).

É na participação e no processo de aprender que nos tornamos (ou transformamos) quem nós somos. Movimento que oportuniza construir conhecimentos e nossas identidades,

que possibilita modificar nossas experiências e ampliar nossos repertórios sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Como afirma Wenger (1998, p. 4), “esta participação molda não só o que fazemos, mas também quem somos e como interpretamos o que fazemos.”

Já o processo de reificação abrange o engajamento nas tarefas e nas atividades da comunidade, à qual se pertence, na negociação de significados e na maneira pela qual eles são apresentados para o mundo. Projetamos nossos significados ao mundo de forma que assumam uma existência independente, não sendo necessário que nos reconheçamos nela.

De acordo com Wenger (1998, p. 48-39, grifo do autor), a reificação é o

[...] processo de dar forma a nossa experiência, produzindo objetos que congelam esta experiência em uma ‘coisa’. Com isso, criamos pontos de enfoque em torno dos quais se organiza a negociação de significado. [...] É dada forma a certa compreensão que, então, se converte em um foco para a negociação de significado [...].

Trata-se da maneira que damos forma às nossas experiências, à produção de objetos e à conversão de elementos (objetos) abstratos em elementos (objetos) reais, que caracterizam fixamente esta experiência. A reificação envolve “[...] fazer, desenhar, representar, nomear, codificar e descrever, tanto como perceber, interpretar, utilizar, reutilizar, decodificar e reestruturar” (Wenger, 1998, p. 59). Isto é, a reificação tem uma característica processual e não pode ser tida como um produto pronto para ser utilizado, que está em processo de mudança a partir daquilo que é construído e/ou modelado pelo sujeito.

No processo de negociação de significados, a participação e a reificação formam uma unidade. Elas se complementam. Não devem ser consideradas separadamente e tampouco vistas em oposição uma à outra.

1.4 PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Dentre as diversas temáticas da área da Educação Matemática que são alvo de investigações nacionais e internacionais, o tema “pensamento geométrico” vem ganhado destaque. Isso ocorre no intuito de compreender como os estudantes tanto na Educação Básica, quanto na formação (inicial e continuada) de professores de matemática o aprendem. Um exemplo disso é a aprendizagem de álgebra e cálculo a partir de demonstrações que exigem a mobilização de conteúdos de geometria, e vice-versa.

Segundo os PCN (Brasil, 1998a, p. 82), o pensamento geométrico

desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades. Por meio da observação e experimentação elas começam a discernir as características de uma figura, e a usar as propriedades para conceituar classes de formas.

Os PCN destacam que o pensamento geométrico se desenvolve a partir da visualização, parte do que o sujeito conhece, do seu contato com o espaço que existe ao seu redor. A partir deste contato com o mundo externo o sujeito começa a discernir as características e os elementos das formas e das representações geométricas do mundo físico, contemplando a sua intuição, dedução, abstração e demonstração de propriedades da Geometria e a desenvolver o seu pensamento geométrico.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018, p. 271), o pensamento geométrico “[...] é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias”.

Mesmo com o passar dos anos e com os avanços alcançados na área da Educação Matemática, há no documento, ainda, uma pequena menção que remete ao MMM sobre o ensino de geometria por meio das estruturas de planos vetoriais e transformação geométrica. O documento descreve a geometria como um conjunto amplo de conceitos e procedimentos que serve para resolver problemas do mundo físico e de outras áreas do conhecimento.

Pesquisadores da área da Educação Matemática buscam, de alguma maneira, apresentar uma caracterização/definição para *pensamento geométrico*. Segundo Costa (2020), não há um consenso entre os educadores matemáticos sobre o que seja pensamento geométrico. Para Costa (2020, p. 177), *pensamento geométrico é*

a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos, de aplicar de modo coerente os instrumentos geométricos na resolução de problemas. É a capacidade de compreender a natureza dos fenômenos e inferir sobre eles, de identificar e perceber a Geometria como uma ferramenta para entendimento do mundo físico e como um modelo matemático para compreensão do mundo teórico.

Nas palavras de Fischbein (1993), *pensamento geométrico é a capacidade de uma pessoa compreender a geometria como uma composição de entidades mentais, que possuem características conceituais e figurais, em que há uma interação entre as imagens e os conceitos. Segundo o autor, o desenvolvimento do pensamento geométrico é caracterizado por*

construções conceituais, simbolizadas e/ou mediadas por meios imaginários, isto é, pela interação entre os aspectos figurativos e conceituais.

Gravina (2001, p. 2) define *pensamento geométrico* como “os raciocínios de natureza dedutiva e visual quando manipulam desenhos inseridos num quadro conceitual bem definido. É o pensamento que permite a construção de conhecimento, a geometria concebida como modelo teórico do mundo sensível imediato.”

De acordo com Gravina (2001, p. 2-3), o desenvolvimento do *pensamento geométrico* acontece quando o “[...] modelo é construído, de forma magnífica, mediante teoremas e demonstrações deduzidos, por via de regras de inferência lógica, a partir de alguns poucos pressupostos que a intuição não coloca em questão: axiomas.”

Leivas (2009, p. 136), em seus estudos de doutoramento, apresenta uma definição para *pensamento geométrico* avançado, que, segundo ele, é “um processo capaz de construir estruturas geométricas mentais a partir de imaginação, intuição e visualização, para a aquisição de conhecimentos matemáticos científicos.” Leivas (2009) destaca que o desenvolvimento do *pensamento geométrico* está intrinsicamente ligado ao desenvolvimento da intuição, da imaginação e da visualização.

Dentre as caracterizações apresentadas para o pensamento geométrico, há alguns termos e expressões que são comuns entre os autores, como: a capacidade de o sujeito criar imagens mentais, a manipulação de objetos físicos que representam objetos matemáticos e a mobilização de estruturas geométricas a partir da imaginação e visualização. Isso nos permite trabalhar a percepção visual do sujeito em relação aos objetos geométricos e aos elementos que o capacitam a analisar, raciocinar, conjecturar e argumentar geometricamente, a partir de imagens figurais, de teoremas e propriedades da própria geometria.

A partir das definições apresentadas para o *pensamento geométrico*, podemos caracterizá-lo como a capacidade de visualizar, identificar, representar e estabelecer relações entre os conceitos geométricos, além de criar conjecturas, resolver problemas, justificar, abstrair e elaborar de provas.

Raymond Duval (1994, 1998, 2005) destaca as apreensões geométricas como importantes de serem consideradas no ensino de geometria. Essas apreensões – atividades cognitivas que ajudam na exploração e na compreensão das representações em geometria – são organizadas por ele em quatro tipos: *apreensão perceptiva*; *apreensão discursiva*; *apreensão operatória*; e *apreensão sequencial*. De acordo com Duval (1998), a aprendizagem em geometria acontece quando uma ou mais apreensões são mobilizadas pelos alunos.

Entretanto, não há uma hierarquia entre elas, de modo que a mobilização de uma não implica que as outras tenham sido mobilizadas antes, por exemplo.

A *apreensão perceptiva* é a mais global. Ela permite identificar ou reconhecer uma forma ou um objeto, seja plana ou espacial, de uma maneira imediata. Essa apreensão não depende especificamente de teoremas e propriedades da matemática para identificar ou reconhecer uma figura geométrica (ou objeto geométrico). É acionada apenas a visão que conduzirá a resolução da tarefa geométrica, sem a necessidade de mobilizar outra apreensão para chegar na solução. Além do mais, não depende de restrições técnicas de instrumentos de construção (por exemplo: régua, compasso e *software* de geometria dinâmica), sendo explicada apenas pelo discurso do sujeito.

Quando a *apreensão perceptiva* é utilizada de maneira isolada, ela pode ser enganosa em algumas situações, pelo fato de ela possibilitar múltiplas representações e interpretações e por levar a uma identificação imediata de uma forma ou um objeto. Assim, durante uma tarefa geométrica, pode ser necessário recorrer a outras apreensões para obter uma solução.

A *apreensão discursiva* corresponde à explicação (descrições, argumentações e demonstrações) dada pelo sujeito para certas propriedades matemáticas de uma figura, podendo ser em linguagem natural ou em linguagem matemática, para além daquilo que está presente no enunciado da tarefa (ou das legendas ou possíveis hipóteses). A *apreensão discursiva* possui uma natureza dedutiva.

A *apreensão sequencial* está relacionada com a construção de uma figura geométrica e a atividade de descrição dela, no intuito de detalhar o passo a passo das etapas de construção que serão manuseadas para reproduzir a ordem dos elementos que proporcionarão a sua construção. Portanto, a *apreensão sequencial* consiste na ordem de construção de uma figura geométrica, no reconhecer os passos necessários que possibilitarão a construção de uma figura geométrica, sendo necessário levar em consideração as restrições técnicas que estão ligadas ao uso de instrumentos que possibilitem a sua construção, como: régua, compasso e/ou softwares de geometria; e das propriedades matemáticas, como: definições, teoremas, postulados e propriedades; que serão utilizadas.

O discurso em linguagem natural ocorre por meio de uma nomeação, descrição ou argumentação do indivíduo com relação a alguma figura geométrica (ou objeto geométrico). Por outro lado, o discurso em linguagem matemática (mais teórico) está diretamente relacionado com as definições, os teoremas e as propriedades da matemática, que protagonizam uma organização dedutiva do discurso.

Segundo Duval (2005), a Geometria é uma área da Matemática que requer, em um processo cognitivo, a utilização de ao menos dois tipos de registros de representação, sendo um registro gráfico que envolve o uso de figuras, linguagem geométrica e simbólica, e um registro verbal (oral ou escrito), para enunciar teoremas e propriedades de geometria e da própria matemática e para deduzir outras.

Ao representar uma figura geométrica em um determinado contexto de uma dada tarefa matemática, essa figura representada é objeto de duas atitudes consideradas contrárias. Uma delas imediata e automática, por meio da qual se tem a possibilidade de identificar ou reconhecer uma forma ou um objeto geométrico (a apreensão perceptiva), e a outra atitude considerada controlada, a qual possibilita a aprendizagem e a interpretação discursiva de elementos figurais. Essas atitudes geram um conflito pelo fato de a figura expor objetos que se destacam independentemente do que está no enunciado ou nas hipóteses e legendas, que podem ou não contribuir para a resolução da tarefa geométrica. Os objetos que são nomeados no enunciado das hipóteses nem sempre são aqueles que aparecem de forma espontânea na figura geométrica.

Em uma figura geométrica há mais formas constituintes e mais possíveis subconfigurações do que podemos encontrar explicitamente mencionadas nos enunciados e nas hipóteses ou que são explicitamente mobilizadas para a sua construção. Isso porque algumas das subconfigurações (ou formas constituintes) proporcionam uma ideia para a solucionar e/ou explicar uma tarefa geométrica.

E, por fim, a *apreensão operatória* proporciona que sejam feitas modificações figurais em uma figura geométrica de maneira que seja possível determinar uma modificação heurísticamente relevante para solucionar a tarefa. É a *apreensão operatória* que possibilita realizar mudanças na figura geométrica sem alterar o seu formato inicial e que permitirá encontrar a solução do problema proposto na tarefa.

As modificações feitas na figura não alteram o seu formato original, tampouco a dimensão e o seu registro inicial. De acordo com Duval (1994, p. 126), trata-se de uma “apreensão de uma dada figura nas suas diferentes modificações possíveis de outras figuras”.

A *apreensão operatória* é a que mais se aproxima da *apreensão perceptiva*, mesmo que ambas estejam em níveis de processamento diferentes, pelo fato de uma ser imediata (apreensão perceptiva) enquanto a outra (apreensão operatória) requer análises mais rigorosas. As figuras são constituídas por muitas subconfigurações, que podem ser mais ou menos visíveis, dependendo de certos fatores, como por exemplo, a orientação vertical ou horizontal e a convexidade da figura.

Dentre as caracterizações de pensamento geométrico discutidas, bem explicam Vieira e Cyrino (2022):

A geometria é um sistema de representação usado para visualizar conceitos, formas de raciocínio e ambientes espaciais (Battista, 2007). Espera-se que o seu ensino contribua para desenvolver habilidades de visualização; de pensamento crítico; de capacidades de raciocinar, argumentar, demonstrar, fazer suposições e inferências lógicas, reduzir objetos tridimensionais a duas dimensões, de perceber que as ideias geométricas são úteis na representação e na resolução de problemas (NCTM, 2000 *apud* Vieira; Cyrino, 2022, p. 287).

Na seção seguinte, trataremos especificamente da visão e da visualização que são elementos importantes no desenvolvimento do pensamento geométrico e que, normalmente, se apresentam nas investigações.

1.4.1 VISÃO E VISUALIZAÇÃO NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA

A visão desempenha seu papel de maneira imperfeita na matemática, principalmente porque vivemos em um mundo tridimensional e não temos acesso direto aos objetos matemáticos abstratos. Além disso, ela oferece apenas uma estimativa perceptiva das relações entre unidades figurativas, que podem ser afetadas por ilusões ópticas e pela linearidade das representações, o que limita a nossa capacidade de discernir essas relações de forma precisa (Duval, 1999, 2005).

Swoboda (2008) destaca que algumas teorias enfatizam que o conhecimento e a compreensão em geometria são constituídos de uma forma específica, isto é, é dada prioridade à percepção visual (que está associada à visão). Segundo o autor “O mundo geométrico não pode ser percebido literalmente. Está escondido no mundo real, e está emergindo do entorno através da atividade intelectual especial que pode ser chamada de ‘a percepção geométrica’ (Swoboda, 2008, p. 112, grifo do autor, tradução nossa⁴).

A visão não pode ser considerada a única maneira de organização e planejamento dos processos de ensino e de aprendizagem em matemática, em especial em geometria (Gutiérrez, 1992, 1996). A visão possibilita apenas uma percepção visual do mundo exterior a partir dos olhos (receptor sensorial), dentre os diversos significados que podem ser atribuídos em nosso

⁴ “Geometrical world cannot be perceived literally. It is hidden in the real world, and it is emerging from the surroundings through the special intellectual activity which can be called ‘the geometrical insight’” (Hejn’ y, M. 1993, Vop’ enka, P. 1989)” (Swoboda, 2008, p. 112).

cotidiano. Assim, a visão refere-se à percepção visual que possibilita o desenvolvimento de imagens visuais a partir do que é visto.

Essa percepção visual está associada ao que enxergamos por meio do sentido da visão, que desenvolve imperfeitamente a apreensão (Duval, 1999) completa do objeto ou da situação, pelo fato de vivermos em um mundo tridimensional e por conseguirmos ter apenas apreensão de uma parte do objeto físico, sendo necessária sua exploração por meio de movimentos, ou do observador ou do objeto.

A percepção visual é um elemento muito importante para as inúmeras tarefas do cotidiano das pessoas, incluindo aquelas relacionadas ao processo de aprendizagem de geometria. É preciso que o investigador, ao utilizar-se de tal termo, tenha ciência do significado que adotou para evitar confusões filosóficas e epistemológicas. Gutiérrez (1992, p. 44, tradução nossa⁵) afirma que: “O elemento básico central em todas as concepções de percepção visual são as imagens mentais, isto é, as representações mentais que as pessoas podem fazer de objetos físicos, relacionamentos, conceitos, etc.”.

Na matemática, o termo visualização não está relacionado apenas ao que se enxerga e ao que se toca por meio dos cinco sentidos, conforme podemos analisar nas definições presentes nos dicionários de língua portuguesa. De acordo com Arcavi (1999), os sujeitos não enxergam apenas aquilo que lhes são dados, mas também aquilo que não é visível aos olhos.

Gutiérrez (1996, p. 9, tradução nossa⁶) define a visualização “como um tipo de atividade de raciocínio baseada na utilização de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizado para resolver problemas ou provar propriedades”. O autor complementa sua definição de visualização e a descreve como

o conjunto de tipos de imagens, processos e habilidades necessários para que os alunos de geometria possam produzir, analisar, transformar e comunicar informações visuais relativas a objetos reais, modelos e conceitos geométricos. A informação visual produzida (imagens) pode ser tanto física (figuras ou diagramas) como mental (imagens mentais). A análise de informação visual refere-se tanto às imagens produzidas pelo próprio estudante como às recebidas do exterior (de estudantes, professor, texto, etc.). As transformações podem ser feitas entre uma imagem e informação verbal (oral ou escrita) ou de uma imagem em outra. A comunicação pode ser gráfica, verbal ou mista. (Gutiérrez, 2006, p. 27, tradução nossa⁷).

⁵ “El elemento básico central en todas las concepciones de percepción visual son las imágenes mentales, es decir las representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc.”

⁶ “[...] as the kind of reasoning activity based on the use of visual or spatial elements, either mental or physical, performed to solve problems or prove properties.”

⁷ “[...] el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos. La información visual producida (imágenes) puede ser tanto física (figuras

De acordo com Gutiérrez (1996), a visualização é constituída por quatro elementos considerados importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico, sendo as “imagens mentais, as representações externas, os processos de visualização e as habilidades de visualização” (Gutiérrez, 1996, p. 9, tradução nossa⁸).

Gutiérrez (1996, p. 9, tradução nossa⁹) afirma que a *imagem mental* é o elemento básico da visualização, a qual é concebida como “qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais”. Segundo Gutiérrez (1996), as imagens mentais utilizadas na matemática não são imagens pictóricas, pois muitas delas se baseiam em diagramas, outros tipos de representações e até mesmo em informações verbais (oral ou escrita) ou simbólicas.

A *representação externa* é “qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo imagens, desenhos, diagramas, etc., que ajuda a criar ou transformar imagens mentais e a fazer raciocínio visual” (Gutiérrez, 1996, p. 9-10, tradução nossa¹⁰).

O *processo de visualização*, de acordo com Gutiérrez, é “uma ação mental ou física em que as imagens mentais estão envolvidas” e que se constitui basicamente em dois processos: “interpretação visual de informações” e “interpretações de imagens mentais” (Gutiérrez, 1996, p. 10, tradução nossa¹¹). A interpretação visual de informações está associada à conversão de relações abstratas e de dados não figurais em termos visuais, à manipulação de imagens visuais e à transformação de imagens visuais em outras imagens.

As interpretações de imagens mentais estão relacionadas às convenções visuais e o vocabulário espacial, utilizado em trabalhos geométricos, diagramas, tabelas, gráficos, além da interpretação e leitura de imagens visuais, mental ou física, na intenção de obter informações relevantes que possam contribuir para a resolução de um problema. Gutiérrez (1996, p. 10) indica que este processo é composto por três subprocessos: “observação e

ou diagramas) como mental (imágenes mentales). El análisis de información visual se refiere tanto a las imágenes producidas por el próprio estudiante como a las recibidas desde el exterior (de estudiantes, profesor, texto, etc.). Las transformaciones pueden hacerse entre una imagen e información verbal (oral ou escrita) o de una imagen em otra. La comunicación puede ser gráfica, verbal o mixta.”

⁸ “[...] mental images, external representations, processes of visualization, and abilities of visualization.”

⁹ “[...] any kind of cognitive representation of a mathematical concept or property by means of visual or spatial elements.”

¹⁰ “[...] any kind of verbal or graphical representation of concepts or properties including pictures, drawings, diagrams, etc. that helps to create or transform mental images and to do visual reasoning.”

¹¹ “[...] is a mental or physical action where mental images are involved. There are two processes performed in visualization: ‘Visual interpretation of information’ to create mental images, and ‘interpretation of mental images’ to generate information.”

análise de imagens mentais, transformação de imagens mentais em outras imagens mentais e a transformação de imagens mentais em outros tipos de informações”.

Gutiérrez (1996) descreve que as *habilidades de visualização* são um conjunto de habilidades que os indivíduos devem desenvolver para que possam realizar processos com imagens mentais para solucionar um determinado problema. As principais habilidades destacadas pelo autor são: a percepção figura-fundo, constância perceptiva, a rotação mental, a percepção de posições espaciais, a percepção de relações espaciais e a discriminação visual, que os indivíduos utilizam ao resolver algum tipo de problema.

No Quadro 1, são apresentadas cada uma das habilidades¹² de visualização e suas respectivas funções, tendo como base o trabalho de Gutiérrez (1996).

Quadro 1 – Habilidades de Visualização de Gutiérrez

Habilidades de Visualização	Características
Percepção Figura-Fundo	Capacidade de identificar uma figura específica por isolamento de um fundo complexo.
Constância perceptiva	Capacidade de reconhecer algumas propriedades de um objeto (real ou em imagem mental), independentes de tamanho, cor, textura ou posição, e permanecer sem confundir quando um objeto ou imagem é percebido em diferentes orientações.
Rotação mental	Capacidade de produzir imagens mentais dinâmicas e de visualizar uma configuração em movimento.
Percepção de posições espaciais	Capacidade de relacionar um objeto, imagem ou imagem mental para si mesmo.
Percepção de relações espaciais	Capacidade de relacionar vários objetos, imagens e/ou imagens mentais entre si, ou simultaneamente consigo mesmo.
Discriminação visual	Capacidade de comparar vários objetos, imagens e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles.

Fonte: Gutiérrez (1996, p. 10)

Segundo Gutiérrez (2006), são habilidades necessárias para realizar os processos de visualização com as imagens, além de importantes no processo de aprendizagem de Geometria, pois se trata de uma relação muito estreita entre visualização e Geometria, pelo fato de ser inevitável a manipulação de representações planas de objetos espaciais, imprescindíveis no progresso da aprendizagem de Geometria.

Na seção seguinte, apresentamos os encaminhamentos metodológicos e os contextos investigados.

¹² A utilização do termo “habilidades” e “capacidades” não estão associadas a questões de ordem de organização das políticas neoliberais, determinando quem tem ou não habilidade ou capacidade para exercer uma dada tarefa.

1.5 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO E CONTEXTOS DAS INVESTIGAÇÕES

Esta investigação é de natureza qualitativa, de cunho interpretativo, e “preocupa-se com as especificidades do significado e da ação na vida social que ocorrem em cenas concretas de interação” (Erickson, 1986, p. 156, tradução nossa¹³). As informações analisadas nesta investigação foram produzidas a partir das interações entre os FPMat e o professor formador¹⁴ em dois contextos formativos, descritos a seguir.

Para a análise interpretativa dos dados, adotamos a abordagem de Erikson (1986, 2012), que é estruturada em cinco etapas. Na primeira etapa, buscamos identificar, nas discussões individuais e coletivas, assim como nas produções escritas, indícios de elementos do pensamento geométrico, de aprendizagens e de conhecimentos associados ao ensino de Geometria Esférica que foram mobilizados pelos FPMat. Na segunda etapa, buscamos filtrar a seleção feita na primeira etapa, em que selecionamos trechos das gravações e dos registros escritos que indicam aprendizagens e conhecimentos sobre o ensino de geometrias, os quais contribuíram para mobilizar os elementos do pensamento geométrico.

Na terceira etapa, foi realizada uma análise detalhada nos registros escritos produzidos pelos FPMat na intenção de evidenciar aspectos comuns aos que foram identificados nos episódios das gravações. Isto é, buscamos aproximar por similaridade os episódios das gravações e, também, entre os registros escritos dos FPMat. Na quarta etapa, buscamos as similaridades entre os episódios com os registros escritos, com o propósito de agrupar todas essas informações em unidades de análise, coerentemente com a literatura adotada na investigação.

Na quinta etapa, realizamos inferências sobre as informações contidas em cada unidade de análise, relacionando-as com os aportes teóricos da literatura, com o propósito de buscar um diálogo entre as informações a fim de atender aos objetivos da tese.

Nossa investigação¹⁵ se deu em dois contextos: primeiro na disciplina “O Ensino de Geometria” e depois na disciplina “Metodologias e Práticas de Ensino de Matemática”.

A disciplina O Ensino de Geometria pertence à matriz curricular do 2.º ano do Curso de Graduação de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual do Paraná –

¹³ “[...] concerned with the specifics of meaning and action in social life that takes place in concrete scenes of face-to-face interaction.” (Erikson, 1986, p. 156)

¹⁴ Os termos “pesquisador”, “investigador”, “formador” e “professor formador” serão utilizados como sinônimos.

¹⁵ Investigação aprovada pelo Comitê de Ética da UEL com o Parecer: 5.001.063 e CAAE: 50991921.1.0000.5231.

UNESPAR/*Campus* de Paranavaí. Participaram da disciplina 13 FPMat regularmente matriculados, que já haviam cursado as disciplinas de Geometria I e Geometria II ofertadas no 1.^a ano do Curso de Graduação.

Para preservar a identidade dos FPMat no processo de análise, os participantes são identificados com nomes fictícios: Ajax, Aria, Atena, Aurora, Apolo, Balthazar, Celeste, Ísis, Loki, Luna, Órion, Selene e Zora. Todos eles assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido comprometendo-se a participar desta investigação de forma voluntária e cientes de que os registros servirão apenas para fins acadêmicos.

A disciplina foi ministrada no segundo semestre letivo de 2022, iniciado em setembro de 2022 e com término em fevereiro de 2023¹⁶. As aulas foram ministradas pelo investigador que, na ocasião, foi o professor formador responsável pela disciplina. As aulas aconteceram no formato presencial, no período noturno, com uma carga horária total de 72 horas/aulas distribuídas em 4 horas/aulas semanais. Para a investigação foram destinadas 36 horas/aulas

O objetivo da referida disciplina é “evidenciar e discutir a articulação entre os conteúdos que permeiam os currículos da escola básica e a ciência matemática da geometria” (UNESPAR, 2019)¹⁷. Na ementa, os conteúdos a serem tratados com os estudantes são “Conteúdos relacionados ao ensino de geometria que permeiam os currículos da Educação Básica em articulação com a ciência Matemática. Desenvolvimento do pensamento geométrico” (UNESPAR, 2019).

A proposta de formação teve como objetivo explorar tarefas associadas à Geometria Esférica que oportunizassem a mobilização do pensamento geométrico dos FPMat e promovessem discussões sobre as GNE, por meio dessas tarefas. Nessa perspectiva, o professor formador/pesquisador atuou promovendo discussões, questionamentos e hipóteses que evidenciassem as atividades realizadas pelos FPMat durante a resolução das tarefas e no momento em que compartilhavam seus repertórios.

Para isso, foram selecionadas e adaptadas nove tarefas que envolviam o conteúdo de Geometria Esférica por meio do manuseio de materiais manipuláveis, como proposto por Gomes (2014). As tarefas foram adaptadas, de modo que fosse possível explorar conteúdos de GNE, discutir as semelhanças entre as GE e GNE e as possibilidades para o ensino de Geometria Esférica e, por conseguinte, de GNE.

¹⁶ O 4.^o bimestre do calendário letivo de 2022 da Universidade foi interrompido em dezembro de 2022 com retorno em fevereiro de 2023 para encerramento das disciplinas dos cursos de Graduação.

¹⁷ Citação, cuja referência é o Projeto Político-Pedagógico do Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), *Campus* de Paranavaí, aprovado em maio de 2018 e início em 2019.

Na adaptação das tarefas, construímos uma sequência de itens (Apêndice A) com o objetivo de discutir conteúdos de Geometria Esférica a partir dos conteúdos de GE, para analisar os teoremas e as propriedades da GE e testar sua validade para a Geometria Esférica, bem como discutir questões sobre o processo de ensino e aprendizagem de Geometria Esférica na Educação Básica e na formação de PMat.

A disciplina de Metodologias e Práticas de Ensino em Matemática foi ofertada no 2.º ano do Curso de Graduação em Matemática – Licenciatura da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR/*Campus* de Paranavaí, localizada na região noroeste do estado do Paraná. A disciplina tem carga horária anual de 120 horas, sendo 60 horas teóricas e 60 horas práticas distribuídas em 4 horas/aula semanais.

Para realizar a investigação nesta disciplina, foi marcada uma reunião com a professora responsável para que pudéssemos explicar os objetivos da proposta de trabalho, quantas aulas poderiam ser utilizadas para exploração da tarefa e a forma pela qual seria desenvolvida a investigação sem comprometer o planejamento dela.

Em reunião com a professora responsável, ficou acordado que a proposta de formação poderia envolver quaisquer conteúdos de Geometria, sendo exigido apenas que a tarefa fosse estruturada na perspectiva do ensino exploratório da Matemática. A professora orientou que fosse construído o plano de aula da tarefa de forma que fosse possível discutir com os FPMat o método de ensino empreendido na aula. Informou que a proposta de formação fosse trabalhada entre os dias 25 de agosto e 15 de setembro de 2023, que totalizou 12 horas/aulas.

A referida disciplina tem por objetivos:

1. Desenvolver a capacidade de análise e de reflexão sobre as situações de ensino-aprendizagem da Matemática e sobre os problemas da prática profissional do professor, mobilizando saberes adquiridos e constituindo novos saberes;
2. Refletir sobre questionar e reelaborar as próprias concepções de ensino de Matemática ‘dialogando’ com a bibliografia e com textos produzidos pelos próprios alunos;
3. Conhecer os aspectos relevantes para o seu desenvolvimento profissional dentro da Educação Matemática;
4. Analisar atividades e recursos pedagógicos existentes para o ensino de Matemática, bem como criar e produzir novos recursos, de acordo com suas concepções e necessidades (UNESPAR, 2019, grifo do autor)¹⁸.

Na ementa da disciplina estão descritos estudos sobre:

Concepções sobre o processo Ensino-Aprendizagem da Matemática. Tendências em Educação Matemática. O professor de Matemática e seu desenvolvimento profissional. Metodologia de Projetos e Tecnologias de

¹⁸ Citação cuja referência é o Projeto Político-Pedagógico do Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), *Campus* de Paranavaí, aprovado em maio de 2018 e início em 2019.

Informação e Comunicação no ensino de Matemática. Atividades e recursos pedagógicos para o ensino de Matemática. Avaliação em Matemática (UNESPAR, 2019).

Participaram da investigação nove FPMat regularmente matriculados na disciplina que serão identificados como Artemis, Eros, Flora, Ícaro, Loki, Orfeu, Perseu, Tesália e Teseu, para preservar suas identidades. Todos os participantes assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido se comprometendo a participar desta investigação de forma voluntária e cientes de que os registros servirão apenas para fins acadêmicos.

A formação proposta para o referido período teve objetivo de explorar uma tarefa de Geometria Esférica, envolvendo o conceito de triângulo esférico (Apêndice B), estruturada na perspectiva de ensino exploratório de matemática a pedido da professora regente. Selecionamos e adaptamos uma tarefa (Gomes, 2014) que abordava o conteúdo de triângulo esférico a partir da manipulação de materiais físicos, com o propósito de analisar conceitos de Geometria Esférica mobilizados pelos FPMat e o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A tarefa foi adaptada de forma que pudéssemos explorar conceitos de triângulos no plano e na superfície de uma esfera, para discutir as semelhanças e as diferenças entre as GE e GNE, em especial de Geometria Esférica, bem como as possibilidades para seu ensino na Educação Básica.

Em cada um dos contextos de investigação, cada um dos itens que compõem cada uma das tarefas, respectivamente, foram entregues separadamente, isto é, um a um para que os FPMat pudessem, em duplas, resolver e anotar todas as suas estratégias de resolução, bem como as suas reflexões e possíveis questionamentos relacionados aos conteúdos envolvidos na resolução. Cada uma das duplas de FPMat recebeu folhas de papel A4 branca, folhas de papel A4 coloridas, bolas de isopor, régua, tesoura, cola, canetas coloridas, transferidor, transferidor esférico, fita métrica e elásticos.

Para resolver cada item da tarefa, destinamos 20 minutos e, quando necessário, foi acrescentado mais 10 minutos. Neste tempo, o formador orientou e mediou o trabalho dos FPMat durante a resolução de cada item da tarefa, e durante este processo analisou as estratégias e as resoluções elaboradas por eles, questionando-os sobre suas intencionalidades com a resposta e as reflexões descritas. Esse processo foi importante para que ele pudesse selecionar e sequenciar as resoluções das duplas para apresentação de suas resoluções no quadro, seguidas da discussão coletiva na busca de sistematizar as aprendizagens.

Após o tempo destinado para a resolução de cada item, o formador orientou e incentivou as duplas no processo de resolução e discussão em pares. Em seguida, foram selecionadas duplas para apresentar e explicar suas resoluções no quadro, seguidas de uma discussão coletiva com o objetivo de sistematizar as aprendizagens.

Para organizar a sequência de apresentação das resoluções, adotamos o seguinte critério: primeiro, as resoluções incorretas, seguidas pelas resoluções parcialmente corretas e, por fim, as corretas. Foram desconsideradas as resoluções tidas como semelhantes. Para evitar constrangimentos, o formador tomou a iniciativa de discutir coletivamente algumas estratégias e resoluções identificadas durante o acompanhamento das duplas, que foram consideradas conceitualmente errôneas.

Para obter as informações foram utilizados como instrumentos: gravações em áudios das aulas que envolveram a exploração, a resolução e a proposição da tarefa; registros escritos dos FPMat, produzidos nas ações que envolveram a tarefa proposta; anotações referentes às dúvidas ou aos questionamentos particulares que não apresentados durante as discussões coletivas; e os registros escritos do formador em seu diário de campo.

As análises interpretativas das informações estão descritas com detalhes em cada capítulo/artigo, tendo em conta seu respectivo objetivo.

A próxima seção se dedica a apresentar a estrutura desta tese.

1.6 ESTRUTURA DA TESE

Para organizar e apresentar a tese, optamos em utilizar o formato *multipaper*, o qual consiste em uma coletânea de artigos publicáveis e independentes entre si, mas que se complementam com o propósito de responder aos objetivos desta investigação. Este formato é bastante utilizado em outras áreas (Barbosa, 2015; Duke; Beck, 1999; Thomas; West; Rich, 2016). Trata-se de um modelo alternativo aos modelos monográficos, mas sem perder de vista a essência da pesquisa acadêmica, tendo o mesmo rigor na busca de responder à problemática da investigação (Barbosa, 2015; Watson; Nehls, 2016).

Barbosa (2015, p. 350) destaca que modelos alternativos para apresentação das dissertações e teses são formatos “que rompem com a representação tradicional da pesquisa educacional nestas modalidades de trabalho acadêmico”, e afirma ainda que “insubordinar-se em relação ao formato tradicional equipara-se a sair dos marcos estabelecidos na pesquisa educacional e procurar por novas representações

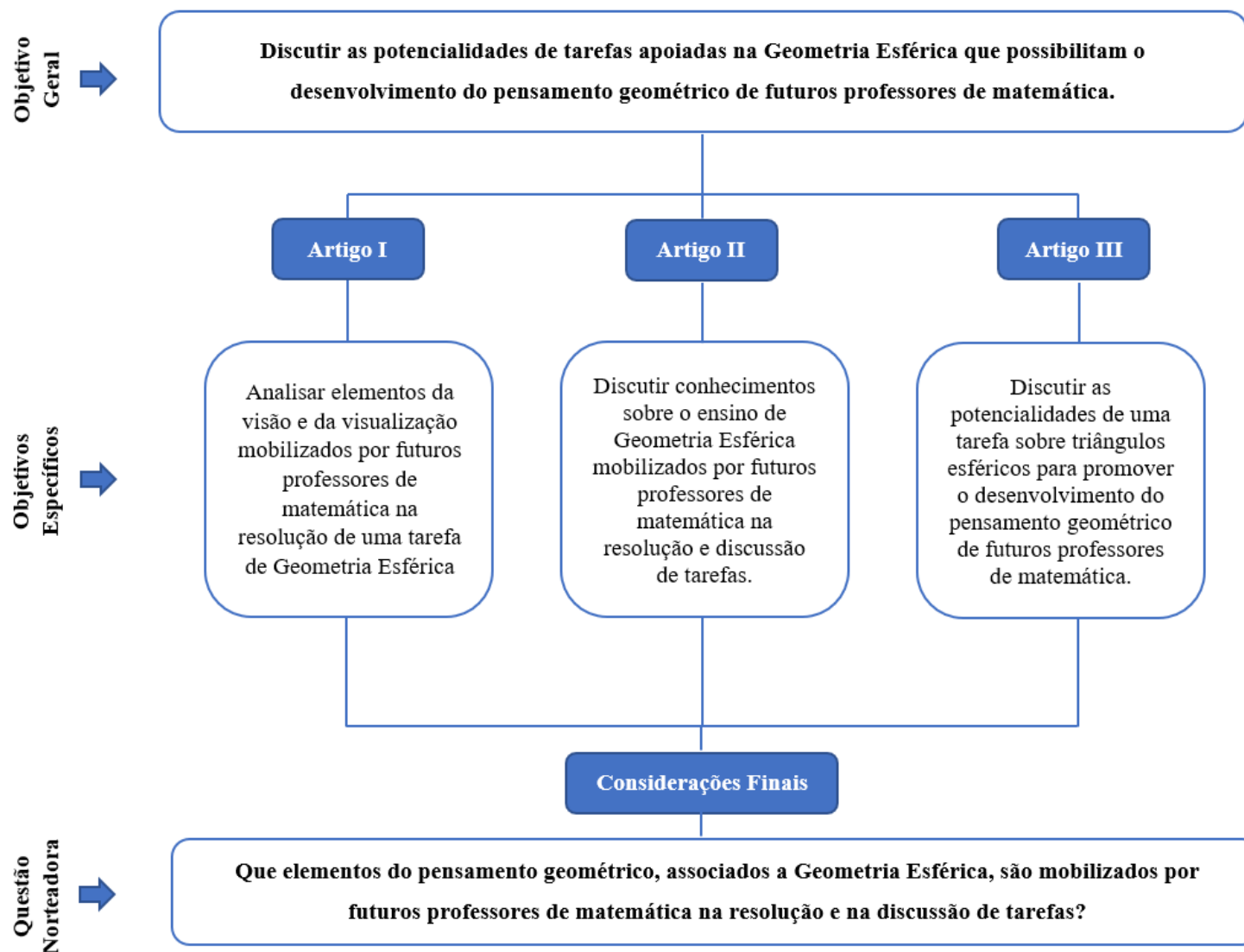
possíveis, que melhor se adequem aos próprios propósitos da investigação” (Barbosa, 2015, p. 365).

O formato *multipaper* proporciona maior autonomia ao pesquisador, pois possibilita o desenvolvimento da capacidade de síntese, necessária no preparo do futuro pesquisador. Além disso, permite agilidade na disseminação da investigação realizada, visto que a busca em periódicos é mais recorrente que a por dissertações e teses, tendo um número maior de leitores e aproxima o futuro pesquisador de suas funções que realizará ao longo de sua trajetória profissional. (Barbosa, 2015; Duke; Beck, 1999; Watson; Nehls, 2016).

Uma das possibilidades do formato *multipaper* é constituir-se de um capítulo introdutório, conhecido como Introdução Estendida, no qual é feita a apresentação geral da tese bem como do caminho percorrido pelo pesquisador ao longo da investigação, seguida dos artigos/capítulos que são autocontidos. Cada um dos artigos/capítulos que compõe a tese intenciona responder uma questão problematizadora elaborada a partir do objetivo geral, e todos esses artigos/capítulos juntos contribuem para responder à questão geral.

Por fim, o pesquisador escreve a consideração final da investigação na intencionalidade de retomar a questão geral e respondê-la, procurando promover uma articulação entre os artigos/capítulos que compõem a tese, e consequentemente, o que está se propondo a defender. Em nossa tese, assumimos a estrutura apresentada na Figura 2.

Figura 2 – Organização da tese no formato multipaper



Fonte: Autores (2025)

No artigo/capítulo I, objetivamos discutir elementos da visão e da visualização mobilizados por FPMat na resolução de uma tarefa de Geometria Esférica. Para isso, identificamos elementos mobilizados pelos futuros professores, tendo o auxílio de materiais manipuláveis, durante a exploração e a resolução das situações propostas em cada um dos itens da tarefa.

No artigo/capítulo II, buscamos discutir conhecimentos sobre o ensino de Geometria Esférica mobilizados por FPMat na resolução e na discussão de tarefas de geometrias. Para isso, analisamos os conhecimentos que foram mobilizados pelos FPMat durante a resolução e a discussão de tarefas que envolvem conceitos de Geometria Esférica.

No artigo/capítulo III, procuramos discutir as potencialidades de uma tarefa sobre triângulos esféricos para promover a mobilização do pensamento geométrico de FPMat. Para tanto, analisamos as resoluções e as discussões engendradas pelos FPMat no trabalho com a tarefa proposta, na intenção de buscar indícios que possibilitem discutir a potencialidade da tarefa para a construção do conceito de triângulo esférico.

No artigo/capítulo IV, temos por objetivo analisar aspectos do pensamento geométrico mobilizados por FPMat no trabalho com tarefas que promoveram articulações entre Geometria Euclidiana e Geometria Esférica.

Com os resultados dos quatro artigos/capítulos, esperamos responder à questão: **Que elementos do pensamento geométrico, associados a Geometria Esférica, são mobilizados por futuros professores de matemática na resolução e na discussão de tarefas?**, e defender a nossa tese: **a importância de se trabalhar com tarefas matemáticas de GNE que promovam o desenvolvimento do pensamento geométrico na formação inicial de professores de matemática.**

1.7 REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. The role of visual representation in the learning of mathematics. *In*: Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 21. Cuernavaca, México, 1999. **Proceedings...** Columbus: Eric Clearinghouse for Science, 1999, p. 55-80.

ASSIS, E. S. de. As histórias em quadrinhos nas aulas de geometria. *In*: MADRUGA, Z. E. F.; DE ASSIS, E. S. (org). **Vivências e experiências em matemática**. Cruz das Almas (BA): EDUFRB, 2021. p. 23-42.

BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. *In: D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (org.). Vertentes da subversão na produção científica em Educação Matemática*. Campinas: Mercado de Letras, 2015. p. 347-367.

BARROS, R. C. P.; PAVANELLO, R. M. Relações entre figuras geométricas planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a BNCC? **JIEEM**, v. 15, n. 1, p. 11-19, 2022.

BLANCO, T. F. Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometría. *In: FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA*, 9., 2014, Quepos, Puntarenas, Costa Rica. **Actas de Congreso**. Quepos, Puntarenas, Costa Rica: Fundación CIENTEC, 2014. p. 1-13.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - primeiro e segundo ciclos: apresentação dos temas transversais. Brasília: Ministério da Educação (MEC), 1998a.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais. Brasília: Ministério da Educação (MEC), 1998b.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. da. Desenvolvendo o raciocínio espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos. **Zetetiké**, Campinas, v. 26, n. 3, p. 464-485, set./dez. 2018.

CALDATTO, M.; PAVANELLO, R. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, v. 24, n. 1, p. 103-128, 2015.

CARVALHO, M. A. S. de; CARVALHO, A. M. F. T. de. O ensino de geometria não euclidiana na educação básica. *In: Conferência Interamericana de Educação Matemática*, 13., 2011. Recife (Brasil). **Anais [...]** Recife: 2011. p. 1-10.

CARVALHO, O. A.; AZEVEDO, J. S. Geometria não-Euclidiana: aplicações na educação básica. *In: PORTO, J. P. S.; ROCHA, K. S. F. L.; NASCIMENTO, S. A. (org.). Inovações educacionais em matemática no Recôncavo*. Cruz das Almas (BA): EDUFRB, 2020.

CAVALCANTE, R. N. B.; SOUSA, M. H. R.; SOUSA, J. P. R. A interdisciplinaridade entre matemática e Geografia: inferindo conceitos de localização e Distâncias na cidade. **Revista Encantar – Educação Matemática e Sociedade**, Bom Jesus da Lapa, v. 1, n. 3, p. 7-20, set./dez. 2019.

COSTA, A. P. da. Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão (PR), v. 9, n. 18, p. 152-179, jan./jun. 2020.

COWLEY, C. S. **Spherical and Hyperbolic Geometry in the high school curriculum**. 2009. Dissertação (Mestrado em Artes) - Presented to the Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Arts, Texas, 2009.

CYBULSKI, F. C.; CYRINO, M. C. C. T. Abordagens de pensamento geométrico na formação inicial de professores que ensinam matemática presentes em dissertações e teses. *In: REUNIÃO NACIONAL DA ANPED*, 40, 2021, Belém (PA), **Anais [...]**. Rio de Janeiro (RJ): ANPED, 2021, não paginado.

CYBULSKI, F. C.; CYRINO, M. C. C. T. Geometria e pensamento geométrico na formação inicial de professores que ensinam matemática: o que revelam as pesquisas brasileiras entre 2009 e 2020. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão (PR), v. 11, n. 26, p. 44-65, set./dez. 2022.

CYRINO, M. C. C. T.; ESTEVAM, E. J. G. Tarefas matemáticas na formação de professores que ensinam matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 16, n. 42, p. 1-29, 2023.

CYRINO, M. C. C. T. Identidade profissional de (futuros) professores que ensinam matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 10, p. 699-712, 2017.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative forms for the dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères**, n.17, p.121-138, 1994. Disponível em: <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/reperes-irem/consultation-en-ligne/numero-017-reperes-irem/7-les-differents-fonctionnements-d-une-figure-dans-une-demarche-geometrique--1353739.kjsp>. Acesso em: 29 jul. 2024.

DUVAL, R. Geometry from a cognitive point of view. *In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (ed.). Perspectives on the teaching of Geometry for the 21 st Century*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. p. 37-52.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning. *In: Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cuernavacas, Morelos, Mexico, 1999. p. 3-26.

DUVAL, R. Les conditions cognitive de L'Apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**, v. 10, p. 5-53, 2005.

ELIA, I.; VEN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; GAGATSI, A. Geometry learning in the Early Years: developing understanding of shapes and spaces with a focus on visualization. *In: KINNEAR, V. et al. (ed.). Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning*, Early Mathematics Learning and Development, 2018. capítulo 5, p. 73-95.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. *In: WITTROCK, M. C. (ed.), Handbook of research on teaching*. Nova Iorque: MacMillan, 1986. p. 119-161.

ERICKSON, F. Qualitative research methods for science education. **Second international handbook of science education**, p. 1451-1469, 2012.

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. C. T. Condicionantes de aprendizagens de professores que ensinam matemática em contextos de comunidades de prática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 12, n. 2, p. 227-253, maio 2019.

FISCHBEIN, E. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 24, n.2, p. 139-162, 1993.

FONSECA, J. A. **Investigação de aspectos da compreensão relacional e da instrumental em geometria esférica**. 2020. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Franciscana, Santa Maria (RS), 2020.

GAMBINI, A.; LÉNÁRT, I. Basic geometric concepts in the thinking of in-service and pre-service mathematics teachers. **Education Sciences**, v. 11, n. 350, 2021.

GOMES, M. P. **Geometria esférica: uma proposta de estudo e atividades para a escola básica**. 2014. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Fluminense, Niterói (RJ), 2014.

GONZATO, M; BLANCO, T. F.; GODINO, J. D. Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. **Revista de Didáctica de las Matemáticas**. v. 77, p. 99-117, jul. 2011.

GRANDO, R. C.; NACARATO, A. M.; GONÇALVES, L. M. G. Compartilhando saberes em Geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. **Caderno Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 39-56, jan./abr. 2008.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GROLÁ, M. G.; GUALANDI, J. H. O ensino de geometria e o desenvolvimento do pensamento geométrico: um mapeamento de pesquisas realizadas no estado do Espírito Santo. **Revista Tangran**, v. 6, n. 1, p. 63-99, jan./mar. 2023.

GUTIÉRREZ, Á. Procesos y habilidade em visualización espacial, em Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación em Educación Matemática: Geometría. México: CINVESTAV, 1992. p. 44-59. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/278785961_Procesos_y_habilidades_en_visualizacion_espacial. Acesso em: 15 ago. 2023.

GUTIÉRREZ, Á. **Visualization in 3-Dimensional Geometry**: in search of a framework. In: PUIG, L; GUTIÉRREZ, Á. (ed.). Proceedings of the 20th Internacional Conference of the P.M.E., 1, p. 3-19. Valencia. Valencia: University of Valence, Spain, 1996.

GUTIÉRREZ, A. La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. In: FLORES, P.; RUIZ, F; DE LA FUENTE, M. (ed.). **Geometría para el siglo**, 21, p. 13-58. Badajoz: F.E.S.P.M. y Soc. Andaluza de Educación Matemática Thales, 2006.

GUVEN, B.; KARATAS, I. Students discovering spherical geometry using dynamic geometry software. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 40, n.3, p. 331-340, abr. 2009.

HONDA, A. M. C. **Matemática e Geografia: uma interdisciplinaridade**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 108p, 2013.

KALEFF, A. M. R. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, SP, ano 20, n. 28, p. 69-94, 2007.

KOVACEVIC, M. S. Geometria esférica: um estudo da interposição entre Matemática e Astronomia. **Rev. Prod. Disc. Educ. Matem**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 2-15, 2019.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática**. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LEME DA SILVA, M. C. Abandono do ensino de geometria e a matemática moderna: uma revisão histórica. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 30, p. 1-22, 2022.

LIVY, S., DOWNTON, A. Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 51, p. 150-160, 2018.

MARMOLEJO, G. -A.; ASTUDILLO, M. T. G. Control visual em la construcción del área de superficies planas em los textos escolares. Una metodología de análisis. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**. [S. l.], v. 18, n. 3, p. 301-328, nov. 2015.

MARMOLEJO, G.-A.; SÁNCHEZ, N.; LONDOÑO, S. Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**. v. 12, n. 2, p. 18-28, dic. 2017.

OLIVEIRA, L. L. de; VELASCO, A. D. O ensino de geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá. In: International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design, 7, Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, 18, 2007. Curitiba (PR). **Anais [...]**, Livro de Resumos, Curitiba, 2007.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática**. Curitiba: SEED/PR, 2008.

PARANÁ. **Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações**. Curitiba, SEED/PR, 2018.

PARANÁ. Diretoria de Educação. Departamento de Desenvolvimento Curricular. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**. Curitiba: SEED/PR, 2019.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Curitiba: SEED/PR, 2021.

PAVANELLO, R. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**. Campinas, v. 1, v.1, p. 7-18, 1993.

PÉREZ, H. J. G.; ORTEGA, M. V.; GALLARDO, O. A. A. Development of geometric thought. *In: Applies Mathematics Meeting and Statistic Meeting*. **IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series** 1329, 2019.

REIS, J. D'Arc S. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro (SP), 2006.

RIBEIRO, R. S. **Geometrias não-Euclidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica**. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

SCHNEIDER, E. I. **Uma Contribuição aos Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA) suportados pela Teoria da Cognição Situada (TCS) para pessoas com deficiência auditiva**. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Gestão do Conhecimento), Florianópolis: PPEGC/UFSC, 2012.

SILVA, B. S. **Geometrias não euclidianas na formação de professores de matemática**. 2023. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2023, no prelo.

SILVA, B. S.; CYRINO, M. C. C. T. Geometrias não euclidianas na formação de professores de matemática: reflexões de professoras formadoras experientes no ensino de geometria. **Vidya**, Santa Maria (RS), v. 44, n. 1, p. 325-350, jan./jun. 2024.

SILVA, L. J. F. **Ensino de geometria projetiva e perspectiva: um olhar pelas fotografias**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória (ES), 2018.

SMITH, C. R.; JULIE, C.; GIERDIEN, F. The integration of semiotic resources and modalities in the teaching of geometry in a grade 9 class in a South African high school: the four cases of congruency. **South African Journal of Education**, v. 40, n. 2, maio 2020.

SOUZA, L. R. **Geometrias não-Euclidianas na formação de professores**. 2021. 101 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

SWOBODA, E. Space, geometrical regularities and shapes in children's learning and teaching. *In: Annales of the Polish Mathematical Society*, 5, 2008. **Anais [...]**. Polish Mathematical Society: Didactica Mathematicae, 2008. p. 111-122.

THOMAS, R. A.; WEST, R. E.; RICH, P. Benefits, challenges, and perceptions of the multiple article dissertation format in instructional technology. **Australasian Journal of Educational Technology**, v.32, n. 2, 2016.

TORREGROSA, G.; QUESADA, H. Coordinación de procesos cognitivos en geometria. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**. [S. l.], v. 10, n. 2, p. 275-300, 2007.

VIEIRA, A. F. M.; CYRINO, M. C. C. T. Pensamento geométrico: reflexões manifestadas por futuros professores de matemática em estudos do modelo de van Hiele. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n. 8, p. 286-314, dez. 2022.

VIEIRA, C. A. N.; BATISTA, E. B.; TAVARES, L. S. Explorando conceitos de geometria não-euclidiana com softwares de geometria dinâmica. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 18, p. 37-48, jul. 2020.

WATSON, D. L.; NEHLS, K. Alternative Dissertation Formats: preparing scholars for the academy and beyond. In: STOREY, V. A.; HESBOL, K. A. **Contemporary Approaches to Dissertation Development and Research Methods**. Hershey: Information Science Reference, 2016. p. 43-52.

WENGER-TRAYNER, E.; WENGER-TRAYNER, B. Learning in landscapes of practice: A framework. In: WENGER, E. *et al.* **Learning in landscapes of practice**. New York: British Library, 2015. p. 13-31.

WENGER, E. **Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

WENGER, E. Uma teoria social da aprendizagem. In: Illeris, K. (org.). **Teorias contemporâneas da aprendizagem**. Trad. Ronaldo Cataldo Costa. Porto Alegre: Penso, 2013, p.246-257.

WENGER, E. Communities of Practice and Social Learning Systems. In: NICOLINI, D.; GHERARDI, S.; YANOW, D. (ed.). **Knowing in Organizations: A Practice-Based Approach**. New York: M.E. Sharpe, 2003.

ARTIGO/CAPÍTULO 1

VISÃO E VISUALIZAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA¹⁹

Resumo: Esta investigação tem por objetivo discutir elementos da visão e da visualização mobilizados por futuros professores de matemática na resolução de uma tarefa de Geometria Esférica. Trata-se de uma investigação de natureza qualitativa, de cunho interpretativo, desenvolvida com treze futuros professores de matemática (FPMat), em uma disciplina de Ensino de Geometria do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Campus de Paranavaí. Na análise foi possível observar que os FPMat, ao resolver e discutir a resolução da tarefa, mobilizaram: percepção visual (visão) e elementos da visualização, como a criação de imagens mentais e de representações de objetos geométricos; representações externas; e processos e habilidades da visualização, nomeadamente interpretação visual de informações e de imagens mentais, percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental e percepção de posições espaciais. Considera-se que a mobilização destes elementos desvela aprendizagens de conceitos de Geometria Esférica que permitiram compreender diferenças e semelhanças entre a Geometria Esférica e a Geometria Euclidiana.

Palavras-chave: Formação inicial de Professores de matemática. Visão. Visualização. Ensino de Geometria Esférica.

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Geometria tem gerado considerável inquietação entre os pesquisadores na área da Educação Matemática. Diversos fatores contribuem para essa preocupação, dentre os quais se destacam o histórico de marginalização da Geometria nos currículos educacionais, a insuficiente exploração ou, em muitos casos, a negligência do tema por parte dos professores, e a predominância de um ensino de caráter axiomático na formação de professores de matemática (Barros; Pavanello, 2022; Elia *et al.*, 2018; Marmolejo; Astudillo, 2015; Pavanello, 1993; Silva; Cyrino, 2024).

Apesar de os atuais documentos²⁰ norteadores das propostas curriculares da Educação Básica preverem o estudo das Geometrias (euclidiana e não euclidianas) desde os anos iniciais²¹, estes conhecimentos são pouco explorados nas aulas de matemática. Podemos dizer que as Geometrias não euclidianas (GNE) raramente são trabalhadas (Silva; Cyrino, 2024).

¹⁹ Artigo publicado na Revista Acta Scientiae, v. 27, n. 1, jan./mar., 2025. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/8190>. Acesso em: 10 mar. 2025.

²⁰ Atualmente, no Brasil, o currículo educacional que orienta os conteúdos a serem ensinados na Educação Básica é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que foi implementada no ano de 2018.

²¹ O estado do Paraná confeccionou um currículo próprio a partir das orientações propostas pela BNCC, intitulado Currículo Estadual da Rede Paranaense implementado a partir de 2019.

Compreende-se a GNE como um sistema geométrico distinto da GE, que não atende ao Axioma das Paralelas elaborado por Euclides.

Pesquisadores, tanto no âmbito nacional como internacional, chamam a atenção para esse abandono, na Educação Básica e na formação inicial de professores de matemática (Blanco, 2014; Gonzato *et al.*, 2011; Marmolejo; Astudillo, 2015; Marmolejo *et al.*, 2017). A maioria das investigações se concentram em discutir conceitos da Geometria Euclidiana Plana e Espacial, no intuito de analisar o pensamento e as estratégias de resolução de estudantes da Educação Básica e de professores, além de provar teoremas e propriedades matemáticas, bem como o uso de imagens e raciocínio geométrico destes sujeitos no momento em que resolvem tarefas de Geometria Euclidiana (Swoboda, 2008; Blanco, 2014; Fujita *et al.* 2017; Marmolejo *et al.*, 2017; Elia *et al.*, 2018).

Identificamos poucas investigações que têm como foco a exploração de conceitos das GNE, tanto com estudantes da Educação Básica quanto em contextos de formação inicial e continuada de professores (Reis, 2006; Gomes, 2014; Silva, 2018; Carvalho; Azevedo, 2020; Fonseca, 2020), apesar de tais conceitos fazerem parte das propostas educacionais de alguns estados (como o Paraná) para a Educação Básica e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

As GNE descrevem com mais precisão características do mundo tridimensional que vivemos do que a própria GE, isto é, que demanda conhecimentos que vão além das Geometria Euclidiana Plana e Espacial, por exemplo: de deslocamentos urbanos nas ruas de uma cidade que estão associadas a Geometria do Táxi (Cavalcante *et al.*, 2019); da superfície terrestre e a esfera celeste, relacionada à Astronomia Posicional (Kovacevic, 2019) e à Geográfica (Honda, 2013); das leis da Teoria da Relatividade de Albert Einstein; de algumas pinturas/gravuras que envolvem a Geometria Fractal, dentre outras situações.

O Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática²² (Gepefopem) tem se dedicado a investigar diferentes abordagens para o pensamento geométrico²³ e seu desenvolvimento em contextos de formação de professores (Cybulski; Cyrino, 2021; 2022; Vieira; Cyrino, 2022; Silva; Cyrino, 2024). Nessas pesquisas, os elementos associados à visão e à visualização no desenvolvimento do pensamento

²² <https://www.ucl.br/grupo-estudo/gepefopem/apresentacao.html>

²³ Dentre as caracterizações de pensamento geométrico presentes na literatura, bem explicam Vieira e Cyrino (2022) que o ensino de Geometria “contribua para desenvolver habilidades de visualização; de pensamento crítico; de capacidades de raciocinar, argumentar, demonstrar, fazer suposições e inferências lógicas, reduzir objetos tridimensionais a duas dimensões, de perceber que as ideias geométricas são úteis na representação e na resolução de problemas” (NCTM, 2000 *apud* Vieira; Cyrino, 2022, p. 287).

geométrico chamaram nossa atenção, uma vez que são frequentemente mencionados pelos autores, mas carecem de aprofundamento nas discussões sobre a formação de professores e o ensino de Geometria Esférica.

Importante que haja estudos sobre esses elementos na formação inicial e continuada de professores de matemática em que sejam promovidas discussões que os associem aos processos de ensino e de aprendizagem das Geometrias para a mobilização e desenvolvimento do pensamento geométrico, visto que a visão e a visualização podem contribuir no acesso aos objetos matemáticos por meio de representações verbais e gráficas (Torregrosa; Quesada, 2007; Swoboda, 2008; Blanco, 2014; Marmolejo *et al.*, 2017; Elia *et al.*, 2018).

Na presente investigação, analisamos aspectos associados à visão e à visualização mobilizados por futuros professores de matemática (FPMat), matriculados na disciplina “O Ensino de Geometria” do 2.º ano do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – *Campus* de Paranavaí, na resolução de uma tarefa²⁴ de Geometria Esférica. Optamos por abordar a Geometria Esférica, por reconhecer a sua relevância para compreender fenômenos do mundo físico, interpretadas muitas vezes a partir do senso comum e divulgadas nas redes sociais, por exemplo que a Terra é plana, uma interpretação totalmente equivocada.

Nas próximas seções, apresentaremos a base teórica que fundamenta aspectos da visão e da visualização, os procedimentos metodológicos, a análise e discussão dos aspectos da visão e visualização que foram mobilizados pelos FPMat ao resolverem uma tarefa de Geometria Esférica e as considerações finais.

2 VISÃO E VISUALIZAÇÃO COMO ASPECTOS MOBILIZADORES DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

A visão não pode ser considerada como a única e mais relevante maneira de orientar os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática (Gutiérrez, 1991; 1996). O ato ou o efeito de ver possibilita uma percepção do mundo exterior a partir dos olhos, dentre tantos outros significados que lhe são atribuídos no nosso cotidiano.

A visão, especialmente quando compreendida como o sentido da vista, refere-se à percepção visual, a qual está diretamente associada ao desenvolvimento de uma imagem mental a partir do que é observado. No entanto, essa percepção visual frequentemente se

²⁴ Por tarefas, compreendemos ser aquelas como problemas de exploração que se enquadram “nos níveis de demanda cognitiva com procedimentos com conexões com os significados e fazer matemática, categorizados em elevado nível de demanda cognitiva” (De Jesus; Cyrino; De Oliveira, 2018, p. 22).

limita ao que é captado pelo sentido da visão, o que implica uma apreensão imperfeita do objeto ou da situação em questão (Duval, 1999). Isso ocorre devido à nossa vivência em um mundo tridimensional, em que somos capazes de perceber apenas uma parte do objeto físico de cada vez. Para obter uma apreensão completa, é necessário realizar uma exploração adicional, seja por meio de movimentos do observador ou do objeto, a fim de possibilitar a apreensão total da estrutura observada.

A percepção visual é um aspecto muito importante para as inúmeras tarefas do cotidiano das pessoas, incluindo aquelas relacionadas ao processo de aprendizagem de Geometria. É preciso que o pesquisador ao utilizar-se de tal termo tenha ciência do significado que adotou para evitar confusões filosóficas e epistemológicas. Concordamos com Gutiérrez (1992) ao afirmar que: “O elemento básico central em todas as concepções de percepção visual são as imagens mentais, isto é, as representações mentais que as pessoas podem fazer de objetos físicos, relacionamentos, conceitos, etc.” (Gutiérrez, 1992, p. 44, tradução nossa²⁵).

O termo visualização na área da Matemática, e em especial no campo da Geometria, não está relacionado apenas ao que é possível de se enxergar e tocar com as mãos, tal como é concebida em sua definição nos dicionários de Língua Portuguesa^{26,27}. Segundo Arcavi (1999) os sujeitos não enxergam somente o que lhe é dado para ser visto, mas também aquilo que não é visível aos olhos. A capacidade de compreender e utilizar conceitos é essencial para o desenvolvimento do conhecimento matemático e geométrico, tanto para estudantes quanto para professores.

Gutiérrez (1996, p. 9, tradução nossa²⁸) descreve a visualização “como um tipo de atividade de raciocínio baseada na utilização de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizado para resolver problemas ou provar propriedades”. Tendo como base a definição de visualização, o autor a detalha e descreve como

²⁵ “*El elemento básico central en todas las concepciones de percepción visual son las imágenes mentales, es decir las representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc.*”

²⁶ Dicionário Aulete - Visualização. (vi.su.a.li.za.ção). sf. 1. Ação ou resultado de visualizar: Divertia-se em fazer a visualização de seu projeto de viagem. 2. Ato de transformar em imagem mental conceitos abstratos. 3. Ato de converter formas visíveis em conceitos. 4. Processo ou técnica de tornar algo perceptível à visão. Disponível em: <https://www.aulete.com.br/visualiza%C3%A7%C3%A3o>. Acesso em: 01 nov. 2024.

²⁷ Dicionário Michaelis – visualização. (vi·su·a·li·za·ção). sf. 1 Ato ou efeito de visualizar. 2 Imagem formada na mente ou a que resulta desse processo; visualidade. 3 Ato de transformar em imagem mental conceitos abstratos. 4 Percepção nítida de algo.

²⁸ “[...] *as the kind of reasoning activity based on the use of visual or spatial elements, either mental or physical, performed to solve problems or prove properties.*”

o conjunto de tipos de imagens, processos e habilidades necessários para que os alunos de geometria possam produzir, analisar, transformar e comunicar informações visuais relativas a objetos reais, modelos e conceitos geométricos. A informação visual produzida (imagens) pode ser tanto física (figuras ou diagramas) como mental (imagens mentais). A análise de informação visual refere-se tanto às imagens produzidas pelo próprio estudante como às recebidas do exterior (de estudantes, professor, texto, etc.). As transformações podem ser feitas entre uma imagem e informação verbal (oral ou escrita) ou de uma imagem em outra. A comunicação pode ser gráfica, verbal ou mista. (Gutiérrez, 2006, p. 27, tradução nossa²⁹).

Gutiérrez argumenta que a visualização é constituída por quatro importantes elementos, sendo “imagens mentais, representações externas, processos e habilidades de visualização.” (Gutiérrez, 1996, p. 9, tradução nossa³⁰). Segundo o autor, a imagem mental é o elemento básico para a visualização e é tida como “qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais.” (Gutiérrez, 1996, p. 9, tradução nossa³¹).

A representação externa é “qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo imagens, desenhos, diagramas, etc., que ajuda a criar ou transformar imagens mentais e a fazer raciocínio visual.” (Gutiérrez, 1996, p. 9-10, tradução nossa³²).

O processo de visualização, de acordo com Gutiérrez (1996), é “uma ação mental ou física em que as imagens mentais estão envolvidas” e que se constitui basicamente em dois processos: “interpretação visual de informações” e “interpretações de imagens mentais” (Gutiérrez, 1996, p. 10, tradução nossa³³). A Interpretação visual de informações está associada à conversão de relações abstratas e de dados não-figurais em termos visuais, à manipulação de imagens visuais e à transformação de imagens visuais em outras imagens. Já as interpretações de imagens mentais estão associadas às convenções visuais e do vocabulário espacial que é utilizado em trabalhos geométricos, diagramas, tabelas, gráficos, além da

²⁹ “[...] *el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos. La información visual producida (imágenes) puede ser tanto física (figuras o diagramas) como mental (imágenes mentales). El análisis de información visual se refiere tanto a las imágenes producidas por el propio estudiante como a las recibidas desde el exterior (de estudiantes, profesor, texto, etc.). Las transformaciones pueden hacerse entre una imagen e información verbal (oral o escrita) o de una imagen en otra. La comunicación puede ser gráfica, verbal o mixta.*”

³⁰ “[...] *mental images, external representations, processes of visualization, and abilities of visualization.*”

³¹ “[...] *any kind of cognitive representation of a mathematical concept or property by means of visual or spatial elements.*”

³² “[...] *any kind of verbal or graphical representation of concepts or properties including pictures, drawings, diagrams, etc. that helps to create or transform mental images and to do visual reasoning.*”

³³ “[...] *is a mental or physical action where mental images are involved. There are two processes performed in visualization: ‘Visual interpretation of information’ to create mental images, and ‘interpretation of mental images’ to generate information.*”

interpretação e leitura de imagens visuais, mental ou física, na intenção de obter informações relevantes que possam contribuir para resolução de um problema.

Gutiérrez (1996) descreve que as habilidades de visualização são um conjunto de habilidades que os indivíduos devem desenvolver para que possam realizar processos com imagens mentais para a solução de determinado problema. As principais habilidades destacadas pelo autor são: a percepção figura-fundo, constância perceptiva, a rotação mental, a percepção de posições espaciais, a percepção de relações espaciais e a discriminação visual, que os indivíduos utilizam ao resolver algum tipo problema.

A habilidade de percepção figura-fundo está associada a capacidade de identificar e isolar uma figura específica de dentro de uma situação complexa. A constância perceptiva é a capacidade de reconhecer propriedades específicas de um objeto, seja físico ou mental, além de reconhecer quando um objeto é real ou uma representação e como é percebido em diferentes posições. A rotação mental está relacionada com a capacidade de construir imagens mentais e movimentá-las mentalmente, isto é, de criar um movimento mental para a imagem produzida na mente.

A percepção de posições espaciais é associada a capacidade de o indivíduo relacionar um objeto, uma representação ou uma imagem mental para si mesmo (Gutiérrez, 1996). Já a percepção de relações espaciais está associada a capacidade de relacionar diversos objetos (ou representações ou imagens mentais) entre si ou simultaneamente consigo mesmo. Por fim, a discriminação visual é a capacidade de identificar semelhanças e diferenças ao comparar diversos objetos (ou representações ou imagens mentais).

Assumiremos a visualização em Geometria a partir dos estudos de Gutiérrez (1996), pois a compreendemos como um processo que perpassa de construções de imagens mentais para a construção de argumentos matemáticos convincentes, que proporciona o fazer matemática e que pode colaborar com o desenvolvimento do pensamento geométrico do FPMat.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Desenvolvemos uma investigação³⁴ de natureza qualitativa, de cunho interpretativo (Erickson, 1986; 2012), que envolveu 13 FPMat, regularmente matriculados na disciplina “O Ensino de Geometria” do 2º ano do Curso de Graduação em Matemática - Licenciatura, da

³⁴ Aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Londrina - UEL (Parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231)

Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR/Campus de Paranavaí, localizada na região noroeste do Estado do Paraná. A disciplina foi ministrada no segundo semestre letivo de 2022, com início em setembro de 2022 e término em fevereiro de 2023³⁵. Nesta disciplina, além de ser professor regente, tive a atuação de pesquisador.

As aulas foram realizadas no formato presencial, no período noturno, com duração de 4 horas/aulas semanais, totalizando uma carga horária de 72 horas/aulas. Para esta investigação foram destinadas 8 horas/aulas semanais para o desenvolvimento da tarefa.

Antes de iniciar a investigação, foi desenvolvida com os FPMat uma tarefa que tinha o propósito de discutir elementos e características presentes nos sólidos geométricos associados à GE. Em seguida, com o objetivo de discutir elementos da visão e da visualização mobilizados por FPMat foi proposta a tarefa intitulada *Conhecendo a Geometria Esférica*, a qual foi adaptada por Gomes (2014) com base na publicação de Coutinho (2001), a qual readaptamos em três itens (Quadros 1, 2 e 3).

Quadro 1 - Problema do Urso, Item 1

1. Um urso partiu de sua toca em busca de alimento e percorreu uma distância de 10 km para o Sul. Em seguida, mudou de direção e percorreu mais 10 km para Leste. Por fim, novamente voltou a mudar de direção indo agora para o Norte percorrendo 10 km, chegando assim à sua toca. De posse dessas informações desenhe o trajeto percorrido pelo urso:
 - a) em uma folha de papel A4;
 - b) sobre a bola de isopor.
 - c) Após a construção dos desenhos, discuta com sua dupla e anote todas as observações feitas apresentando uma explicação.

Fonte: Adaptado de Gomes (2014, p. 56-57).

O item 1 do “*Problema do Urso*”³⁶ foi proposto para que os FPMat reconhecessem que na Geometria Euclidiana Plana não é possível desenhar o caminho percorrido pelo urso, mas que isso é possível na Geometria Esférica, em que o urso conseguisse retornar à sua toca.

No Quadro 2 temos o enunciado do item 2 intitulado “*Construindo retas em superfícies plana e esférica*”. Neste item, os FPMat observaram que a reta representada na superfície plana cresce indefinidamente para ambos os lados, enquanto a reta representada na superfície de uma esfera, no caso a bola de isopor, sempre retornará ao ponto de partida.

³⁵ O calendário foi alterado por conta das restrições provocadas pela Pandemia da Covid-19.

³⁶ O problema do urso proposto na tarefa é uma variação do problema que foi publicado em 1995 por George Polya em seu livro *A arte de resolver problema*, com o objetivo consistia de descobrir a cor do urso.

Quadro 2 - Construindo reta na superfície plana e esférica - Item 2

2. Em uma folha de papel A4, marque um ponto qualquer e com o auxílio de uma régua trace a representação de uma reta que passe por este ponto. Em seguida, marque um ponto qualquer sobre a bola de isopor e com o auxílio de um elástico, trace uma trajetória que passe pelo ponto marcado. Em qual das situações é possível retornar ao ponto de partida? Por quê? Descreva detalhadamente sua resposta apresentando uma justificativa.

Fonte: Adaptado de Gomes (2014, p. 57-58).

No Quadro 3, apresentamos o enunciado do Item 3 intitulado “*Colagem de triângulos planos na superfície plana e esférica*”, com a intencionalidade de que os FPMat representassem dois triângulos em uma folha colorida, podendo ser triângulos de diferentes medidas. Na sequência, foi solicitado que os FPMat recortassem e colassem cada uma das representações, uma a uma, nas superfícies plana e esférica, anotando suas observações com relação ao que estava acontecendo no momento de colá-las.

Quadro 3 – Construindo triângulos planos na superfície plana e esférica - Item 3 da Tarefa I

3. Você recebeu duas folhas de papel A4, sendo uma branca e uma colorida. Na folha colorida desenhe e recorte a representação de dois triângulos quaisquer. Em seguida, cole uma dessas representações de triângulos recortadas na folha branca e a outra representação do triângulo cole sobre a bola de isopor. O que você observa que aconteceu com as representações dos triângulos após serem coladas? Discuta com sua dupla e descreva detalhadamente a conclusão em que chegaram.

Fonte: Adaptado de Gomes (2014, p. 56).

Os FPMat foram orientados a trabalhar em duplas, sendo que um dos grupos foi formado por três FPMat, e anotar todas as suas estratégias de resolução, bem como os relatos pós aula e possíveis questionamentos relacionados ao conteúdo e aos conhecimentos pedagógicos e didáticos envolvidos na resolução da tarefa, para serem apresentados na discussão coletiva (grande grupo).

Para a resolução de cada item da tarefa, destinamos 20 minutos e, quando necessário, foi acrescentado mais 10 minutos. Neste tempo, o formador orientou e incentivou as duplas no processo de resolução e discussão. Para tanto, analisou as estratégias e as resoluções dos futuros professores, questionando-os a respeito das suas intencionalidades com a resposta e os relatos descritos. Na sequência, foram selecionadas duplas para apresentar e explicar as suas

resoluções no quadro, seguidas da discussão coletiva na busca de sistematizar as aprendizagens relacionadas aos conteúdos de Geometria, tanto plana quanto esférica.

A sequência de apresentação das duplas teve como critério primeiro as resoluções incorretas seguidas das resoluções parcialmente corretas e as resoluções corretas, sendo desconsideradas as resoluções tidas como semelhantes. Optamos por iniciar pelas resoluções incorretas para que fosse possível chamar a atenção dos FPMat sobre alguns teoremas e propriedades que estavam sendo utilizado de forma equivocada.

Os itens da tarefa foram entregues um a um, separadamente, de forma que os futuros professores pudessem anotar as estratégias de resolução de cada item, as suas conclusões e relatos de aula a respeito das discussões nas duplas e no grande grupo antes de receber o item seguinte. Cada uma das duplas de FPMat receberam materiais didáticos para a resolução de cada item da tarefa, especificamente folhas de papel A4 branca, folhas de papel A4 coloridas, bolas de isopor, régua, tesoura, cola, canetas coloridas, fita métrica e elásticos.

Para preservar a identidade dos FPMat no processo de análise, os participantes são identificados com nomes fictícios: Celeste, Aria, Luna, Órion, Zora, Aurora e Balthazar.

Para obtenção das informações foram utilizados como instrumentos: os registros escritos dos FPMat e do diário de campo do formador, assim como as gravações em áudio que ocorreram em sala de aula durante o trabalho com a referida tarefa (totalizam 8 horas/aula). Foram considerados os registros escritos realizados durante a proposição, exploração e resolução da tarefa, bem como as anotações em seus respectivos cadernos referentes a dúvidas ou questionamentos particulares que não foram discutidos coletivamente.

As gravações em áudios envolveram as discussões de cada uma das duplas de FPMat durante a resolução da tarefa e as discussões coletivas. Foram selecionados e transcritos episódios que foram objeto de análise na investigação.

Nesta investigação, concebemos a aprendizagem como um processo de negociação de significados que se desenvolve no contexto da experiência cotidiana de participação no mundo, sendo aquela que promove interação entre um regime de competência e uma experiência de significado (Wenger, 2003; 2013; Schneider, 2012; Wenger; Wenger, 2015).

Isto é, a competência é histórica e socialmente desenvolvida e em interação com a experiência de cada sujeito (Wenger, 2003).

No primeiro momento, identificamos elementos da visão e da visualização mobilizados pelos FPMat no conjunto de informações obtidas. Em seguida, segundo momento, selecionamos episódios em que esses elementos se encontravam evidentes. No terceiro momento, buscamos identificar semelhanças e diferenças nos elementos identificados. No quarto momento, realizamos agrupamentos em unidades de análise articuladas com a literatura adotada na investigação, especificamente estudos sobre visão e visualização de Gutiérrez (1996). No quinto momento realizamos inferências entre as informações e esses aportes teóricos para atender o objetivo do artigo.

4 ELEMENTOS DA VISÃO E VISUALIZAÇÃO MOBILIZADOS NA TAREFA - CONHECENDO A GEOMETRIA ESFÉRICA

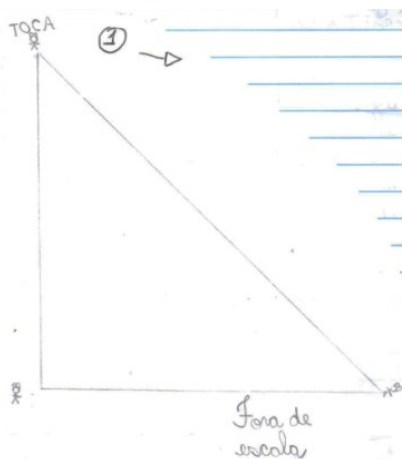
A análise das informações aponta, de modo geral, que a resolução e a discussão da tarefa *Conhecendo a Geometria Esférica* oportunizou aos FPMat a mobilização de aspectos relacionados ao pensamento geométrico, em específico elementos da visão e visualização, nomeadamente: a percepção visual (visão) e elementos da visualização, como a criação de imagens mentais e de representações de objetos geométricos; representações externas; e processos e habilidades da visualização. Estes elementos se afiguram favorecedores ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

4.1 A PERCEPÇÃO VISUAL E A APRENDIZAGEM DE FPMAT

A percepção visual é um dos elementos associados ao pensamento geométrico mais presente nas estratégias e resoluções apresentadas pelos FPMat. Trata-se de uma percepção global em que a atenção do sujeito foca nas características visuais e físicas das figuras geométricas, como a identificação dos lados, dos ângulos, dos vértices, a cor e textura, atribuindo importância mais aos aspectos físicos do que matemático.

A partir da leitura do enunciado do item 1, Celeste fez o **desenho de um triângulo** para representar o caminho percorrido pelo urso (Figura 1). Esta ação se apresenta pelo **acesso direto ao enunciado**, tendo como ponto de partida a expressão “chegando assim à sua toca”.

Figura 1 - Representação na folha de Papel A4 - Celeste



Fonte: Registro no caderno do dia 31/10/2022

Ao representar o caminho do urso na folha de papel A4 a condição de seguir para a direção norte não é obedecida pela Celeste. Isto é, ao traçar o caminho do urso ligando o ponto a leste onde ele se encontra com o ponto ao norte, está sendo tomada a direção noroeste (Figura 1) e não a direção norte, como é solicitado no enunciado do item 1.

Esta estratégia nos possibilita questionar o **conhecimento geométrico da Celeste sobre GNE** ao tentar representar no plano um triângulo que seria o possível caminho do urso. Ou a pensar na **influência da GE** no modo que concebemos o mundo real, isto é, na forma que conduzimos as situações que vivenciamos (Quadro 4).

Quadro 4 - Percepção visual - Celeste

Celeste: *Aqui, realmente, eu pensei em desenhar, porque eu fui na ideia do triângulo, foi a primeira coisa, mas aqui deu certo, as medidas no meu caderno não deram não, aí eu coloquei que estavam fora de escala.*

Formador: *Você pensou no triângulo, por que pensar no triângulo logo de cara? O que levou você a pensar diretamente no triângulo?*

Celeste: *Porque se ele vai para baixo, depois vai para a direita, para ele voltar para o lugar teria que ir na diagonal. [...]*

Celeste: *E aqui eu pensei a mesma coisa, só que já pensando na bola, o que me ajudou muito.*

Formador: *Isso na letra b?*

Celeste: *Na letra b, marquei 10 para este ponto aqui, aí já marquei pra cá e, depois, marquei 10 de volta, só que meio arredondado.*

Fonte: Registro em áudio do dia 31/10/2022

A Celeste fez o **desenho de um triângulo** na tentativa de representar o caminho percorrido pelo urso na superfície da bola de isopor, na folha de papel A4 (Figura 2). Ela acreditou que esta representação é correta e que todos os lados da representação geométrica construída no plano **têm as mesmas medidas**, e argumenta que **os lados do triângulo são meio arredondados** pelo fato de estar na superfície de uma bola.

Figura 2 - Representação plana da resolução na bola de isopor - Celeste

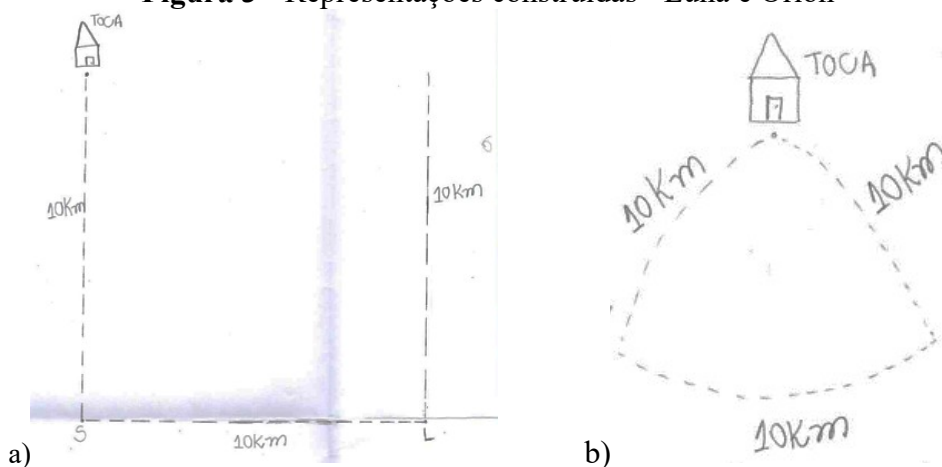


Fonte: Registro no caderno do dia 31/10/2022

A percepção visual mobilizada pela Celeste também se fez presente no item 2, sendo que **a leitura do enunciado pode ter influenciado na construção da sua imagem visual** para uma possível solução. Outra possibilidade de influência é por ter manuseado e explorado a bola de isopor no item 1. Pode-se dizer que a exploração da bola de isopor, por meio da visão, favoreceu o desenvolvimento de sua percepção visual contribuindo para a construção de uma representação mental, ao notar que o elástico percorre toda a superfície esférica da bola de isopor até retornar ao ponto de partida.

A situação relatada por Celeste se repete com Órion quando argumenta que o **caminho percorrido pelo urso é um triângulo** (Figura 3), isso a partir da leitura do enunciado do item 1. A construção de uma **imagem visual** pode estar **associada ao seu conhecimento de GE**, a partir da mobilização da sua percepção visual.

Figura 3 - Representações construídas - Luna e Órion



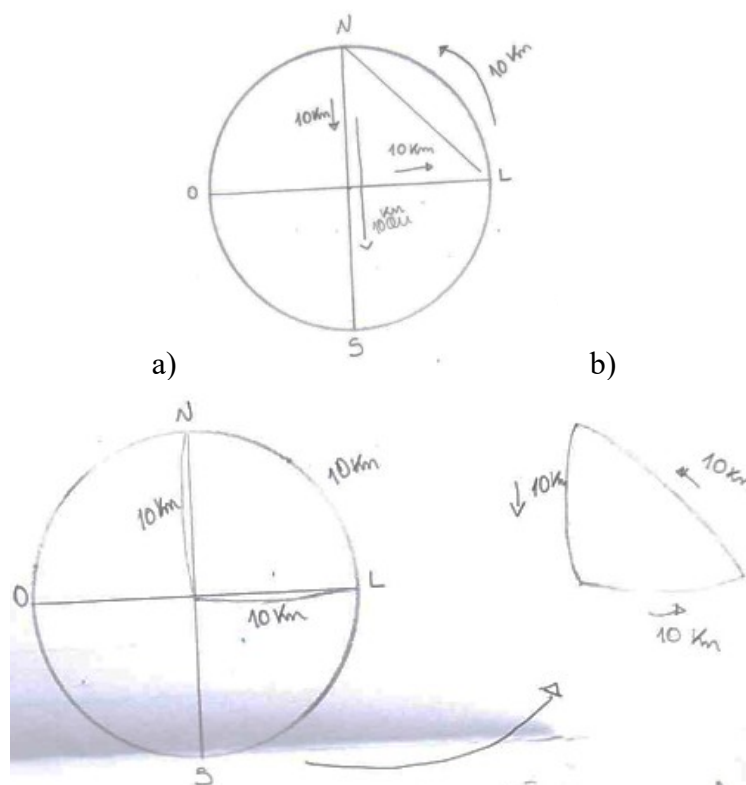
Fonte: Registro no caderno do dia 31/10/2022

Luna ficou confusa e questionou Órion para onde que o urso vai após percorrer a distância de 10 km para o leste. Órion **explorou possíveis situações** para conseguir lhe explicar seu raciocínio, construindo **argumentos matemáticos** para afirmar que o caminho percorrido **era um triângulo**.

Ao explorar outras estratégias com a Luna, Órion realizou **movimentos com a imagem visual**, de forma que conseguisse responder à dúvida dela. Estas manipulações realizadas por Órion viabilizam desenvolver processos e habilidades que estão associadas ao pensamento geométrico, como os processos de interpretação visual de informações e interpretação de imagens mentais, e as habilidades de percepção de figura-fundo, rotação mental e percepção de posições espaciais.

Aurora e Balthazar apresentaram outras possibilidades para representar o caminho percorrido pelo urso, para a situação da folha A4 e da bola de isopor (Figura 4).

Figura 4 - Resoluções elaboradas - Aurora



Fonte: Registro no caderno do dia 31/10/2022

Aurora argumentou que o urso deveria chegar na sua toca, mesmo tendo a orientação de que o caminho a ser seguido seja para a direção norte, simplesmente pelo fato de, **no enunciado do item 1, constar a expressão “chegando assim à sua toca”**.

Aurora afirmou que a resposta para a questão era a **mesma representação feita pela Celeste** (Figura 1), visto que o caminho traçado levava o urso até a sua toca, **discordando da resposta da Luna** (Figura 3a), na qual o urso seguiu pela direção Norte sem chegar a sua toca.

Na discussão coletiva do item 1, Balthazar reconheceu ter havido uma **diferença entre as superfícies plana e esférica** e que **a representação de um objeto espacial em um plano** não é algo simples de se fazer. Balthazar disse a Aurora que seria preciso **ter um olhar em perspectiva** para compreender o caminho percorrido pelo urso (Quadro 5), olhar para o todo sem focar em algo específico, como ela estava fazendo.

Quadro 5 - Olhar em perspectiva - Balthazar

Balthazar: *Agora a sua perspectiva é outra. Agora a sua perspectiva é aqui. O seu olhar em perspectiva! Você não está indo reto?*

Aurora: *Ah tá!*

Balthazar: *Entendeu?*

Fonte: Registro em áudio do dia 31/10/2022

A representação e as explicações de Balthazar durante a resolução do item 1 e nos diálogos com a Aurora, nos possibilitam dizer que houve a **mobilização da percepção visual além de conhecimentos de GE, inclusive indícios de conhecimento sobre GNE**, como a noção de profundidade e de projeção em Geometria Projetiva (Quadro 5).

4.2 ELEMENTOS DA VISUALIZAÇÃO MOBILIZADOS POR FPMAT

A seguir, descrevemos elementos da visualização mobilizados por FPMat na resolução e discussão da tarefa *Conhecendo a Geometria Esférica*, nomeadamente: a criação de imagens mentais e de representações de objetos geométricos, representações externas, e processos e habilidades da visualização.

4.2.1 CRIAÇÃO DE IMAGENS MENTAIS E REPRESENTAÇÕES DE OBJETOS GEOMÉTRICOS

Durante as resoluções da tarefa, os FPMat apresentaram dificuldades para a constituição de imagens mentais, principalmente no momento em que eles analisam as possibilidades de solução para o que era proposto em cada item, em busca de **reconhecer e validar** alguma definição ou propriedade geométrica.

No Quadro 6, temos um excerto representativo que ilustra o modo como os FPMat parecem mobilizar o elemento associado a visualização, no caso a imagem mental. Órion em diálogo com a Luna, afirmou que o caminho percorrido pelo urso é um triângulo. Tal elemento associado à visualização igualmente foi observado nas interações e diálogos entre outros FPMat.

Quadro 6 - Imagem mental - Luna e Órion

Órion: *O que é isso aqui? Por quê?*
Luna: *É para fazer a atividade do professor.*
Órion: *Vai ser um triângulo!*
Luna: *Ah, verdade isso?*
Órion: *Por precaução.*

Fonte: Registro em áudio do dia 31/10/2022

Balthazar, ao representar o caminho percorrido pelo urso, apresentou um registro gráfico que nos permite lembrar de um triângulo construído na superfície de uma esfera. Isto é, a representação de um triângulo esférico desenhado na superfície plana.

De acordo com Balthazar, esta representação se desenvolveu após **tentativas de desenhar** o caminho percorrido pelo urso por meio de conteúdos de GE, especificamente de **circunferência e distância**, (Quadro 7). Diante desta circunstância, o FPMat ressalta a necessidade de trabalhar em uma dimensão superior a qual estava, isto é, **construir uma representação na esfera** e, conseqüentemente, obter a distância correta.

Quadro 7 - Registro do diálogo entre Balthazar e Formador

Balthazar: *A gente tentou representar na circunferência. Em vez de pegar a ideia delas na esfera, a gente tentou representar primeiro na circunferência. Então ele desceria, depois, ele vira aí para o lado e, em seguida, deveria chegar. Só que esse tamanho de chegar ele já não daria certo, e ele também não estaria indo diretamente para o norte, então já seria um erro em duas questões. Pra gente representar isso aí, de uma maneira certa, eu teria que representar na esfera, que daí daria para pegar à outra dimensão que falta para poder dar o tamanho e a distância certa.*
Formador: *Entendi!*

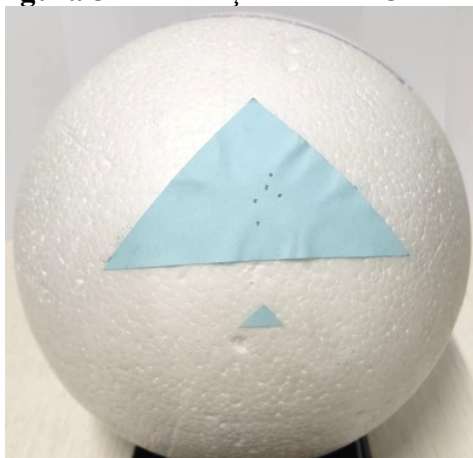
Fonte: Registro em áudio do dia 31/10/2022

Aurora, ao registrar sua justificativa para a resolução do item 1, argumentou que “as medidas desenhadas no papel não ficaram corretas, somente na esfera que não é plana” (Registro do dia 31/10/2022). A justificativa da Aurora é referente as **tentativas de desenhos** que fizera para representar o caminho percorrido pelo urso, afirmando que não é possível utilizar as medidas indicadas no item 1.

Para o item 2 da tarefa, Aurora respondeu que **só é possível retornar ao ponto de partida na bola**. Percebe-se que a resposta produzida parte de uma construção mental, isto é, de uma imagem mental que é a **representação cognitiva a partir de um elemento visual**, que é a bola de isopor.

Na resolução do item 3, os FPMat argumentam não ser possível representar um triângulo plano na superfície de uma esfera por ela estar em uma dimensão superior, espaço tridimensional (Figura 5).

Figura 5 – Resolução do item 3 - Luna



Fonte: Registro fotográfico do dia 07/11/2022

Na discussão em pares, Luna e Órion argumentaram não ser possível representar um triângulo plano sobre a superfície da bola de isopor. E disseram que a representação do triângulo plano não tocaria todos os seus pontos na superfície da bola de isopor (Quadro 8).

Quadro 8 - Diálogo entre Luna e Órion

Órion: <i>Ok! Entendi. É impossível de representar um triângulo em uma bola, em uma esfera. Putz! Por que será?</i> Luna: <i>Por que nem todos...</i> Órion: <i>Por que será?</i> Luna: <i>É porque o triângulo não toca todos os lados certinhos na esfera.</i> Órion: <i>E por quê?</i> Luna: <i>Porque ele não está na geometria plana, ele não está no plano. Ele está em uma esfera</i> Órion: <i>É porque estamos tentando colar uma representação de um triângulo presente na geometria plana em uma esfera, na geometria espacial. Vamos colocar isso!</i>
--

Fonte: Registro em áudio do dia 07/11/2022

Diante de tais discussões, os FPMat puderam constatar que nem sempre é possível representar adequadamente uma situação que ocorre no espaço tridimensional em um espaço

bidimensional. Cabe, portanto, levar em consideração o sistema em que a representação é produzida.

Baseados nas evidências apresentadas, podemos inferir que a **imagem mental e a representação geométrica** são elementos importantes no processo de aprendizagem de Geometria, especialmente na construção do conhecimento geométrico, na intenção de criar ou transformar informações escritas ou gráficas em possíveis estratégias de resolução de problemas de Geometria.

4.2.2 REPRESENTAÇÕES EXTERNAS

Aurora e Balthazar valeram-se da **representação verbal** para justificar sua resposta ao item 2, afirmando que a reta cresce indefinidamente para a esquerda e para a direita, o qual retrata um dos conteúdos abordados na tarefa (Figura 6).

Figura 6 – Registro escrito do item 2 - Balthazar

2. Observamos que: No cotidiano a reta segue infinitamente para a direita e para a esquerda, não conseguindo assim retornar ao ponto.

Fonte: Registro no caderno do dia 31/10/2022

Balthazar explicou que, ao passar o elástico sobre a superfície da bola de isopor, a reta retorna ao ponto de partida após contornar toda a bola de isopor, a que se trata de uma **reta limitada** (Figura 7). Isto é, uma **reta que tem um limite** (um comprimento, que corresponde a uma volta na superfície de uma esfera), mas que podemos **dar tantas voltas nela quanto quisermos**.

Figura 7 – Registro escrito do item 2 - Balthazar

Isso na esfera temos que qualquer traço que passar pelo ponto retorna ao ponto após contornar toda a esfera. Sendo também limitado.

Fonte: Registro no caderno do dia 31/10/2022

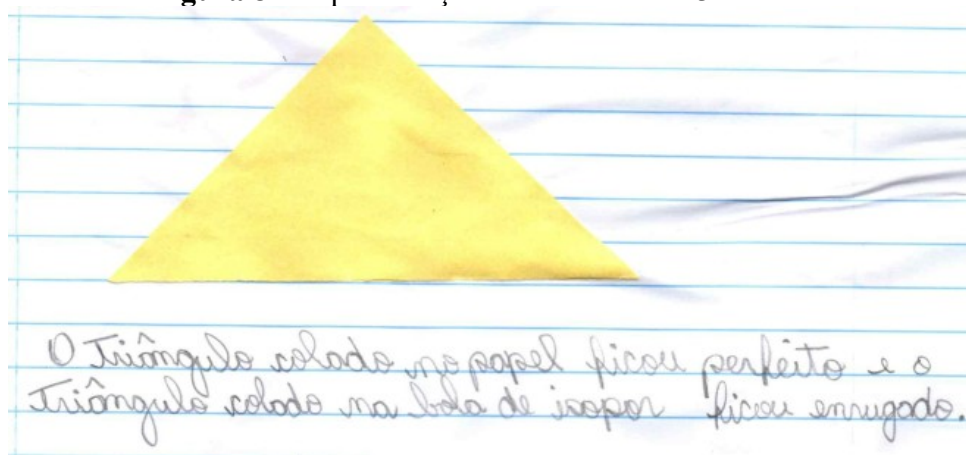
Uma representação verbal que se assemelha ao registro escrito de Balthazar foi feito pela Celeste ao observar o que acontece na folha de papel A4 e na bola de isopor, afirmando que a situação na qual permite retornar ao ponto de partida é na bola de isopor.

Celeste apresentou uma justificativa para sua resolução do item 2, que identificamos como uma representação verbal, escrita de maneira informal e sem empregar conhecimentos geométricos, sem definir que o elástico representa uma reta na superfície esférica e que se trata de uma reta limitada.

A resolução apresentada por Luna e Órion para o item 2 é semelhante ao que foi exposto por Balthazar e Celeste. Luna e Órion utilizaram uma representação verbal e gráfica e afirmaram que só é possível retornar ao ponto de partida na bola de isopor, e que na Geometria Euclidiana Plana, não é possível retornar ao ponto de partida porque a reta cresce indefinidamente para ambos os lados a partir de um ponto qualquer no plano.

Para o item 3, Celeste apresentou uma representação gráfica (colagem do triângulo plano na superfície plana) e uma representação verbal (sem empreender definições e teoremas) (Figura 8). Os argumentos utilizados por ela nos permitem inferir que ela reconheceu a imperfeição da colagem do triângulo plano sobre a superfície da bola de isopor.

Figura 8 - Representação externa do item 3 - Celeste



Fonte: Registro no caderno do dia 07/11/2022

Em um trecho do diálogo entre Celeste, Zora e Aria, em que Aria apresentou uma dúvida a respeito da colagem dos triângulos planos sobre as superfícies plana e esférica, Celeste ressaltou que **um dos triângulos estava no plano e o outro estava na superfície esférica** (Quadro 9). Aria identificou a **diferença entre as duas superfícies geométricas**, indagando que o passo seguinte seria somente escrever a resposta.

Quadro 9 - Diálogo entre Celeste, Zora e Aria.

Aria: *Eu não sei o que aconteceu.*

Zora: *O quê?*

Celeste: *Não viu que aqui colou certinho e aqui não cola oh, porque não é plano. A lógica é essa!*

Aria: *É só escrever.*

Fonte: Registro em áudio do dia 07/11/2022

Na intenção de provocar os FPMat, o formador os questionou sobre a possibilidade ou não de colar outros triângulos de tamanhos diferentes sobre a superfície da bola de isopor, e o que aconteceria com o triângulo plano. Aria argumentou que, se fosse um **triângulo menor**, com **os lados tendo medidas inferiores**, as quais elas tinham utilizado, a **representação plana do triângulo** na superfície da bola de isopor se **aproximaria de uma situação feita no plano**. Ou melhor, o triângulo não iria conter tantas deformidades ao ser colado na superfície da bola de isopor.

Esta afirmação de Aria é reiterada por Luna e Órion **ao representarem** em uma bola de isopor **um triângulo plano suficientemente pequeno**, com **medidas menores** em relação ao triângulo plano representado inicialmente, ao ponto de se tornar quase impossível de manuseá-lo com as mãos e **constatarem que não se observavam deformidades neste triângulo plano** ao ser colado sobre a superfície da bola (Figura 9).

Figura 9 – Representações externas - Órion



Com duas representações de triângulos que foram cortados, saíram de uma folha de tamanho A4, logo, os triângulos estão na segunda dimensão (geometria plana), e quando tentamos colar a representação do triângulo na superfície de uma esfera, a mesma fica levemente deformada, pois a esfera está na terceira dimensão (geometria espacial).

Fonte: Registro no caderno do dia 07/11/2022

A exploração e os questionamentos produzidos por Luna nos permitem dizer que houve a mobilização da imagem mental, bem como sua articulação com a representação externa (verbal e gráfica), na intenção de constituir uma explicação se o fato identificado é válido ou não para qualquer que seja o triângulo plano a ser colado sobre a superfície de uma bola de isopor, por maior ou menor que ele seja.

A exploração feita com os materiais utilizados na resolução da tarefa possibilitou aos FPMat **trabalharem a sua percepção visual**, por terem acesso ao enunciado da tarefa (uma representação externa), além de conseguirem articular o **registro escrito com a representação feita no papel e na bola** (representação verbal e gráfica), diretamente associado a imagem mental construída por eles.

Luna e Órion reconhecem a dificuldade de representar **objetos tridimensionais em um espaço bidimensional** e, conseqüentemente, a **diferença entre as superfícies plana e esférica** (Quadro 10).

Quadro 10 - Diálogo entre Luna e Órion

Luna: *Por que uma está na geometria plana e a outra???*

Órion: *Uma está em duas dimensões e a outra em três. É, ué!*

[...]

Luna: *Simples! Uma é na geometria plana e a outra é na geometria esférica.*

Fonte: Registro em áudio do dia 07/11/2022

Semelhantemente a Luna e Órion, Balthazar conseguiu articular a **imagem mental construída com a representação externa**, relatando sua dificuldade em colar o triângulo plano na superfície da bola de isopor. Pelo **triângulo ser plano** é mais “*fácil*” de colá-lo na superfície plana do que querer colá-lo na superfície esférica.

Os indícios apresentados evidenciam a importância das **representações externas** (verbal ou gráfica) **no ensino de Geometria**, por exigir a troca entre as informações que são fornecidas e/ou construídas, seja elas verbais ou gráficas. Merecem destaque as **conversões entre as informações verbais e gráficas** ao serem empreendidas pelos FPMat, que devem ter relações intrínsecas entre si, de forma que seja possível compreender o raciocínio e a estratégia de resolução que fora construída.

4.2.3 PROCESSOS E HABILIDADES DE VISUALIZAÇÃO

No que se refere aos processos e habilidades da visualização os FPMat mobilizaram: interpretação visual de informações e a interpretação de imagens mentais (processo de visualização), e percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental e percepção de posições espaciais (habilidades de visualização).

Durante a resolução da tarefa os FPMat realizaram **mudanças entre os registros de representação externa**. Isto é, eles modificaram suas estratégias alternando entre registro

gráfico e registro verbal, ora buscavam por uma justificativa que atendesse a imagem mental e/ou registro gráfico, ora buscavam compreender o registro verbal a partir do registro gráfico.

O subprocesso que foi mais mobilizado pelos FPMat na exploração da tarefa foi o subprocesso de “interpretação visual de informações”, que está associado a interpretação de relações abstratas e de dados não-figurais em termos visuais, além de manipulação e transformações de imagens visuais.

No Quadro 11, temos o excerto do diálogo entre o Formador e os FPMat (discussão coletiva) em que há indícios da presença do subprocesso de interpretação visual de informações.

Quadro 11 - Interpretação visual mobilizada no Item 2

Formador: *Em qual das situações é possível retornar ao ponto de partida? Por quê? Descreva detalhadamente sua resposta apresentando uma justificativa.* (Leitura do enunciado do item 2 da tarefa).

Celeste: *Na bola!!!*

Formador: *Na bola, mas por que na bola é possível retornar?*

Luna: *Por aqui é plano!*

Formador: *É plano! E o que mais? Além do plano, o que acontece?*

Aurora: *Na situação da bola de isopor!*

Órion: *São, sei lá. Pelo ponto são lados opostos, tipo não tem como se encontrarem se não for uma esfera.*

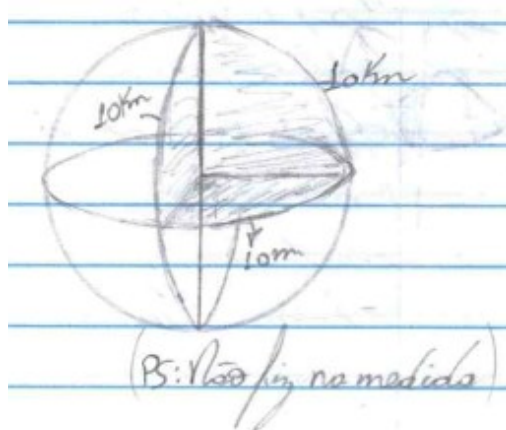
Fonte: Registro em áudio do dia 31/10/2022

A interpretação visual de informações também é presenciada no diálogo entre Luna e Órion, quando Órion respondeu ao término da leitura do enunciado do item 1, que o **caminho percorrido pelo urso será um triângulo** (Quadro 15). Trata de uma interpretação de um registro escrito em uma imagem mental que se tornará uma representação gráfica.

O subprocesso de “interpretação visual de imagens” está associado ao conhecimento de convenções visuais, o uso de vocabulário espacial utilizados em trabalhos que envolvem conceitos de Geometria, além de trabalhos com gráficos, tabelas e diagramas dos mais variados contextos, bem como a leitura e interpretação de imagens mentais ou físicas.

Este subprocesso também pode ser identificado quando o FPMat Baltazar busca por **outras estratégias para a resolução** do item 1, utilizando de **imagens mentais e representações externas** (Figura 10).

Figura 10 - Interpretação de imagens - Baltazar



Fonte: Registro no caderno do dia 31/10/2022

Esta representação do Balthazar nos remete a um **objeto geométrico** específico da **Geometria Esférica**, que é o **triângulo esférico trirretângulo**. Ao ser questionado sobre as estratégias utilizadas que possibilitaram construir esta representação, Balthazar argumentou que **apenas lembrou de fazer a representação de uma esfera na folha de papel A4** e, sobre ela, traçar o caminho percorrido pelo urso. Após as tentativas de desenhos para explicar o caminho percorrido pelo urso, Balthazar faz uma representação gráfica retratando uma esfera e o possível caminho do urso, havendo aí indícios da mobilização de processos e habilidades de visualização.

Aurora e Balthazar, quando discutiram sobre **o caminho pela direção norte a ser percorrido pelo urso**, mobilizam o subprocesso de interpretação visual de imagens (Quadro 12).

Quadro 12 - Diálogo entre Aurora e Balthazar

Balthazar: *A gente não sabe desenhar a esfera.*

Aurora: *Então nenhuma deles dá para o Norte se for assim!*

Balthazar: *Dá, aquela ali dá! Aquela ali é a representação de uma esfera. Eles pegaram uma parte da esfera. Como se eles tivessem pegado só isso aqui.*

Aurora: *Independente. Mesmo assim está indo para Oeste. Onde que está indo para o Norte? Não tem que subir reto?*

Balthazar: *Oh, desceu, depois que a gente desce...*

Aurora: *Não tem que ir reto?*

Balthazar: *Está reto!*

Aurora: *Não! Oh!*

Balthazar: *É que você olhando assim está vendo um triângulo e não é um triângulo, direto. Ele tem as retinhas aqui!*

Aurora: *Aqui por exemplo. Se aqui está em pezinho [vertical] pra cá, aí eu venho pra cá reto.*

Balthazar: *Agora a sua perspectiva é outra. Agora a sua perspectiva é aqui. Você não está indo reto?*

Aurora: *Ah tá!*

Fonte: Registro em áudio do dia 31/10/2022

Nem todos os FPMat conseguiram mobilizar os processos de modificação de imagens e representações em suas estratégias de resolução. As habilidades de visualização mobilizados pelos FPMat foram percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental, percepção de posições espaciais.

As habilidades de visualização evidenciadas nos excertos das gravações em áudio e nas figuras que conservam os registros dos FPMat são identificadas como “percepção figura-fundo” e “constância perceptiva”, quando Órion **respondeu imediatamente ao término da leitura** do item 1 feita pelo formador.

A habilidade de “constância perceptiva” é observada nas falas e registros de Balthazar, assim como a habilidade de “rotação mental”, que foi mobilizada quando ele proporcionou **diferentes registros gráficos a partir de sua imagem mental**, conforme podemos observar na Figura 10.

Outra habilidade de visualização mobilizada por Balthazar foi a “percepção de posições espaciais”, que ocorreu quando ele comentou com Aurora sobre **ter um olhar em perspectiva para reconhecer que o caminho percorrido pelo do urso sobre a bola de isopor é um triângulo**, conforme excerto do Quadro 5.

A habilidade de “percepção de posições espaciais” também foi observada no momento em que Aurora e Balthazar **discutiram sobre o caminho pela direção Norte a ser percorrido pelo urso**, de acordo com o excerto do Quadro 12.

Nos indícios apresentados, é possível identificar que apenas as habilidades percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental e percepção de posições espaciais foram manifestadas por Balthazar e Órion. Durante a resolução da tarefa, nem todos os FPMat empreenderam as habilidades de visualização em suas estratégias.

5 VISÃO E VISUALIZAÇÃO E A MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS DE GEOMETRIA ESFÉRICA

Na exploração da Tarefa *Conhecendo a Geometria Esférica* os FPMat tiveram a oportunidade de mobilizar **conhecimentos associados às geometrias e ao pensamento geométrico**, como a **percepção visual** relacionada a **visão** e elementos associados a **visualização**, nomeadamente a criação de **imagens mentais e de representações de objetos geométricos, representações externas e processos e habilidades da visualização**.

No que se refere aos **processos de visualização**, os FPMat mobilizaram a **interpretação visual de informações** e a **interpretação de imagens mentais**. Quanto as

habilidades de visualização, os FPMat mobilizaram **percepção figura-fundo**, **constância perceptiva**, **rotação mental** e **percepção de posições espaciais**.

Nas interações que aconteceram no decorrer das discussões coletivas da tarefa, buscamos identificar **conhecimentos sobre as geometrias** que foram mobilizados pelos FPMat, em especial aqueles que passaram por um **processo de ressignificação** a partir do engajamento e a participação deles.

No processo de negociação de significados, desencadeados a partir da resolução, discussão e sistematização das aprendizagens, foram identificadas **aprendizagens** dos FPMat relativas as:

- potencialidades observadas nas diferentes estratégias para a resolução da tarefa, algumas envolvendo Geometria Plana e Geometria Esférica, que evidenciaram a mobilização, por alguns FPMat, de elementos da visão e da visualização associadas ao pensamento geométrico;
- fragilidades ao trabalharem com os conceitos de geometrias ao elaborarem estratégias de resolução, indicando que alguns FPMat tinham pouca familiaridade com o conteúdo, ao lidarem com situações que envolvem as geometrias (por exemplo conceito de reta, noção de ângulo, conceito de esfera, etc.);
- potencialidades dos materiais manipuláveis disponibilizados aos FPMat, como recursos potenciais para a exploração e resolução da tarefa, com o apoio de registros escritos e gráficos;
- escolhas de representações verbais e gráficas adequadas para cada item da tarefa.

Os FPMat, a partir do processo de sistematização do item 2, mostraram-se mais **engajados e participativos** ao trabalharem com a tarefa, e tiveram a oportunidade de **ressignificar conceitos de Geometria Euclidiana Plana** (por exemplo a noção de reta), e **compreender conceitos da Geometria Esférica**.

No item 2, os FPMat puderam representar uma reta na superfície plana de uma folha de papel A4, e na discussão afirmaram que a reta no plano é ilimitada. Na Geometria Esférica, puderam observar que a reta sobre a superfície da bola de isopor (representação de uma esfera) retornava ao ponto de partida ao contornar toda a sua superfície, sendo uma reta que apresenta início e fim, e também por permitir dar tantas voltas quanto quisermos.

Esse cuidado dos FPMat com o espaço geométrico que é objeto de estudo, foi observado nas discussões em pares (entre as duplas) durante a resolução dos itens da tarefa, em específico nos itens 1 e 3, quando foram exploradas duas superfícies geométricas, uma

plana e outra esférica. Na discussão coletiva, os FPMat puderam analisar que **situações que ocorre no plano dificilmente, acontecem na superfície de uma esfera**, e vice-versa.

A articulação entre objetos no espaço geométrico bidimensional com o espaço geométrico tridimensional se apresentou como uma dificuldade para os FPMat (Duval, 1999; Swoboda, 2008; Elia *et al.*, 2018). Trata-se do processo de conversão entre as diferentes maneiras de se registrar uma estratégia ou uma solução a tarefa proposta.

O possível **desconhecimento das GNE** pelos FPMat pode ter algum envolvimento nas dificuldades enfrentadas por eles na resolução da tarefa proposta. Em cada um dos itens, os FPMat buscavam **justificar suas estratégias** de resolução por meio de **conhecimentos de GE**, pelo simples fato de conhecerem apenas noções básicas de GE.

Apesar de a GE ser um conteúdo estudado no 1.º ano da Graduação, os FPMat revelaram compreensões equivocadas em alguns conceitos (por exemplo conceito de reta e noção de ângulo na Geometria Euclidiana Plana), que foram esclarecidas durante a negociação de significados e sistematização das aprendizagens.

À medida que as discussões avançaram, os FPMat não utilizaram os conceitos de forma errônea, empoderando-se dos novos significados e produzindo argumentos matemáticos convincentes. De acordo com Melo (2005), “esse domínio amplo e profundo da matéria de ensino pelo professor é fundamental e necessário, sobretudo quando se busca inovação curricular” (Melo, 2005, p. 39).

Os FPMat **participaram ativamente das negociações de significados, compartilhando informações e questionamentos** sobre as Geometrias e **legitimando as estratégias de resolução** produzidas pelos colegas. O formador incentivou-os a compartilharem suas estratégias e raciocínios, conduzindo as discussões coletivas e a participação deles na legitimação do conhecimento produzido.

Durante o processo de negociação de significados, identificaram-se evidências de aprendizagens dos FPMat a partir dos **registros escritos e gráficos**, quanto aos elementos da visualização, nomeadamente: criação de imagens mentais e de representações de objetos geométricos, representações externas e processos e habilidades da visualização.

Segundo Elia *et al.* (2018), a visualização em Geometria é um processo cognitivo essencial do pensamento geométrico, que envolve o reconhecimento de formas geométricas que podem ser identificadas em alguma unidade figural além da possibilidade de manipular e operar com estas figuras. Assim, a visualização possibilita apreender simultaneamente um objeto geométrico por completo, distinguindo todas as suas unidades figurais e suas especificidades.

A visualização, assim como a representação, está no cerne da atividade matemática realizada por estudantes e professores. Isto é, a visualização não é intuição porque não é mera percepção visual. A visualização em matemática é necessária porque oportuniza organizar as relações entre as diferentes formas de registro para um mesmo objeto matemático (Duval, 2014; Elia *et al.*, 2018)

Os FPMat utilizaram dos registros verbais e gráficos à medida que avançavam nas discussões em pares, na intenção de **elaborar estratégias geométricas** (representação de figuras planas e espaciais) e/ou **matemáticas** que proporcionasse a solução dos itens da tarefa (Gutiérrez, 1996). Os FPMat estabeleceram relações entre as **imagens mentais e as representações externas** e buscaram criar e/ou transformar imagens mentais em registros verbais ou gráficos de forma que pudessem expor suas ideias.

O acesso à registros externos podem ter contribuído para a constituição da **percepção visual** dos FPMat, sendo que alguns deles tiveram mais dificuldades que outros. Tais dificuldades podem estar relacionadas à maneira com a qual os FPMat interpretaram as informações contidas nos enunciados dos itens ou até mesmo, pela forma que elaboraram a imagem visual das situações.

De acordo com Gutiérrez (1992), a **percepção visual é o elemento básico para as representações mentais dos sujeitos**. Isto é, são as representações de objetos físicos ou de situações que as pessoas fazem a partir do que é observado.

Duval (1999) diz que **a percepção visual fixa imediatamente a visão de algumas formas** (objetos e situações), que essa evidência as torna firmes, e que o ensino de Geometria dever partir da **intuição geométrica** que se enfatiza na percepção.

A **percepção visual** tem limitações por vivermos em um mundo tridimensional, do qual só conseguimos apreender uma parte do objeto explorado. Quando acessamos qualquer representação visual de objetos físicos fora da matemática só é possível focar apenas em um lado específico deste objeto, podendo ser explorado por movimentos do objeto físico ou do sujeito que o está observando (Duval, 1999; Elia *et al.*, 2018).

Os elementos da visão e da visualização mobilizados pelos FPMat durante a resolução da tarefa desenvolvida, foram significativos e potenciais para a aprendizagem de conceitos da Geometria Esférica, inclusive para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Os FPMat puderam reconhecer a contribuição de outras Geometrias, como as GNE, para a constituição do campo da Matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação destaca a importante presença da Geometria Euclidiana (GE) na resolução das tarefas e na tomada de decisões relacionadas à construção das estratégias de resolução. Isso se deve, em grande parte, ao fato de os FPMat terem estudado conceitos de GE desde o início de sua escolarização, com a geometria euclidiana sendo apresentada como uma verdade absoluta, sem questionamentos.

No início do trabalho na disciplina, alguns FPMat afirmaram conhecer o básico de GNE por meio de seus professores da Educação Básica, os quais haviam comentado sobre a existência de outras Geometrias. Outros FPMat relataram que nunca tinham estudado nada sobre as GNE, e que apenas conheciam as Geometrias Plana e Espacial.

O trabalho com a tarefa apoiada com materiais físicos possibilitou aos FPMat ressignificarem aprendizagens sobre as Geometrias, em especial a GE e a Geometria Esférica. Além do mais, oportunizou a mobilização de elementos associados a visão e visualização, intrinsecamente relacionados ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

A exploração das tarefas com o auxílio dos materiais manipuláveis que compuseram cada item em conjunto com as ações do formador, conduziu os FPMat a uma trajetória reflexiva sobre os conceitos e processos de ensino e aprendizagem das geometrias. Esses materiais funcionaram como elementos motivadores, incentivando-os a identificarem o que ocorre na prática e a buscarem explicações e fundamentos para suas ações e interações. Durante a exploração das situações propostas, os FPMat tiveram a oportunidade de desenvolver elementos essenciais para o pensamento geométrico, como a visão e a visualização, que se refletem nos registros escritos nos cadernos e nos diálogos gravados.

Um questionamento referente aos materiais manipuláveis utilizados pelos FPMat é a sua limitação, por não possibilitarem uma abstração para além daquilo que é explorado em cada uma das situações propostas na tarefa. Talvez seja preciso que haja outras investigações que analisem as contribuições de *softwares* de geometria dinâmica para o desenvolvimento do pensamento geométrico e a contribuição da visão e da visualização no ensino de GE e GNE, em especial na formação inicial e continuada de PMat.

Ressaltamos a importância de se trabalharem com PMat e FPMat conceitos de GNE, que estão tão próximos de todos nós, atendendo as nossas necessidades tanto quanto a GE, uma vez que ela pode favorecer o ensino e a aprendizagem de outros conceitos matemáticos, inclusive da própria GE com a possibilidade de promover o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A investigação foi realizada com um pequeno grupo de FPMat, com características bem particulares, visto que estavam vindo de um período pós-pandêmico e a disciplina de GE teria sido trabalhada totalmente assíncrona e de maneira axiomática. Considera-se relevante sua ampliação para outros grupos de FPMat e PMat com características diversas o que poderá revelar aspectos complementares.

Em conclusão, a investigação envolvendo a Geometria Esférica desempenhou um papel significativo no desenvolvimento do conhecimento geométrico dos FPMat, favorecendo o desenvolvimento do pensamento geométrico. Além disso, essa investigação permitiu a ressignificação dos conhecimentos prévios sobre Geometria, proporcionando aos participantes a oportunidade de explorar situações por meio de materiais manipuláveis, o que, provavelmente, favoreceu o raciocínio geométrico.

7 REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. The role of visual representation in the learning of mathematics. *In: Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 21. Cuernavaca, México, 1999. **Proceedings...** Columbus: Eric Clearinghouse for Science, 1999, p. 55-80.

BLANCO, T. F. Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometria. *In: FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA*, 9., 2014, Quepos, Puntarenas, Costa Rica. **Actas de Congreso**. Quepos, Puntarenas, Costa Rica: Fundación CIENTEC, 2014. p. 1-13.

BARROS, R. C. P.; PAVANELLO, R. M. Relações entre figuras geométricas planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a BNCC? **JIEEM**, v. 15, n. 1, p. 11-19, 2022.

CARVALHO, O. A.; AZEVEDO, J. S. Geometria não-Euclidiana: aplicações na educação básica. *In: PORTO, J. P. S.; ROCHA, K. S. F. L.; NASCIMENTO, S. A. (org.). Inovações educacionais em matemática no Recôncavo*. Cruz das Almas (BA): EDUFRB, 2020.

CAVALCANTE, R. N. B.; SOUSA, M. H. R.; SOUSA, J. P. R. A interdisciplinaridade entre matemática e Geografia: inferindo conceitos de localização e Distâncias na cidade. **Revista Encantar – Educação Matemática e Sociedade**, Bom Jesus da Lapa, v. 1, n. 3, p. 7-20, set./dez. 2019.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Interciência, 2001.

CYBULSKI, F. C; CYRINO, M. C. C. T. Abordagens de pensamento geométrico na formação inicial de professores que ensinam matemática presentes em dissertações e teses. *In: REUNIÃO NACIONAL DA ANPED*, 40, 2021, Belém (PA), **Anais [...]**. Rio de Janeiro (RJ): ANPED, 2021, não paginado.

CYBULSKI, F. C.; CYRINO, M. C. C. T. Geometria e pensamento geométrico na formação inicial de professores que ensinam matemática: o que revelam as pesquisas brasileiras entre 2009 e 2020. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão (PR), v. 11, n. 26, p. 44-65, set./dez. 2022.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning. *In: Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cuernavacas, Morelos, Mexico, 1999. p. 3-26.

DUVAL, R. The first crucial point in geometry learning: visualization. **Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education**, v. 13, p. 1-28, 2014.

ELIA, I.; VEN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; GAGATSI, A. Geometry learning in the Early Years: developing understanding of shapes and spaces with a focus on visualization. *In: KINNEAR, V. et al. (ed.). Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning*, Early Mathematics Learning and Development, capítulo 5, p. 73-95.

ERICKSON, F. Qualitative research methods for science education. **Second international handbook of science education**, p. 1451-1469, 2012.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. *In: WITTROCK, M. C. (ed.), Handbook of research on teaching*. Nova Iorque: MacMillan, 1986. p. 119-161.

FONSECA, J. A. **Investigação de aspectos da compreensão relacional e da instrumental em geometria esférica**. 2020. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria (RS), 2020.

FUJITA, T.; KONDO, Y.; KUMAKURA, H.; KUNIMUNE, S. Students' geometric thinking with cube representations: assessment framework and empirical evidence. **The Journal of Mathematical Behavior**. v. 46, p. 96-111, 2017.

GONZATO, M.; BLANCO, T. F.; GODINO, J. D. Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. **Revista de Didáctica de las Matemáticas**. v. 77, p. 99-117, jul. 2011.

GOMES, M. P. **Geometria esférica: uma proposta de estudo e atividades para a escola básica**. 2014. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Fluminense, Niterói - RJ, 2014.

GUTIÉRREZ, A. La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. *In: FLORES, P.; RUIZ, F.; DE LA FUENTE, M. (ed.). Geometría para el siglo*, 21, p. 13-58. Badajoz: F.E.S.P.M. y Soc. Andaluza de Educación Matemática Thales, 2006.

GUTIÉRREZ, Á. **Visualization in 3-Dimensional Geometry**: in search of a framework. *In: PUIG, L.; GUTIÉRREZ, Á. (ed.). Proceedings of the 20th International Conference of the P.M.E.*, 1, p. 3-19. Valencia. Valencia: University of Valence, Spain, 1996.

GUTIÉRREZ, Á. **Procesos y habilidade em visualización espacial em Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación em Educación Matemática: Geometría**. México:

CINVESTAV, 1992. p 44-59. Disponível em:
https://www.researchgate.net/publication/278785961_Procesos_y_habilidades_en_visualizacion_espacial. Acesso em: 15 ago. 2023.

HONDA, A. M. C. **Matemática e Geografia: uma interdisciplinaridade**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 108p, 2013.

JESUS, C. C. de; CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. de. Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, 20(2), 21-46, 2018. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p21-46>

KOVACEVIC, M. S. Geometria esférica: um estudo da interposição entre Matemática e Astronomia. **Rev. Prod. Disc. Educ. Matem**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 2-15, 2019.

MARMOLEJO, G.-a.; ASTUDILLO, M. T. G. Control visual em la construcción del área de superficies planas em los textos escolares. Una metodología de análisis. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**. [S. l.], v. 18, n. 3, p. 301-328, nov. 2015.

MARMOLEJO, G.-A.; SÁNCHEZ, N.; LONDOÑO, S. Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**. v. 12, n. 2, p. 18-28, dic. 2017.

MELO, G. F. A. Saberes docentes de professores de Matemática em um contexto de inovação curricular. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (org.) **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática: investigando e teorizando a partir da prática**. Campinas: Musa Editora, 2005. p. 33-48.

PAVANELLO, R. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**. Campinas, v. 1, v.1, p. 7-18, 1993.

REIS, J. D'Arc S. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro (SP), 2006.

SCHNEIDER, E. I. **Uma Contribuição aos Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA) suportados pela Teoria da Cognição Situada (TCS) para pessoas com deficiência auditiva**. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Gestão do Conhecimento), Florianópolis: PPEGC/UFSC, 2012.

SILVA, B. S.; CYRINO, M. C. C. T. Geometrias não euclidianas na formação de professores de matemática: reflexões de professoras formadoras experientes no ensino de geometria. **Vidya**, Santa Maria (RS), v. 44, n. 1, p. 325-350, jan./jun. 2024.

SILVA, L. J. F. **Ensino de geometria projetiva e perspectiva: um olhar pelas fotografias**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória (ES), 2018.

SWOBODA, E. Space, geometrical regularities and shapes in children's learning and teaching. In: ANNALES OF THE POLISH MATHEMATICAL SOCIETY, 5, 2008. **Anais [...]**. Polish Mathematical Society: Didactica Mathematicae, 2008. p. 111-122.

TORREGROSA, G.; QUESADA, H. Coordinación de procesos cognitivos en geometria. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**. [S. l.], v. 10, n. 2, p. 275-300, 2007.

VIEIRA, A. F. M.; CYRINO, M. C. C. T. Pensamento geométrico: reflexões manifestadas por futuros professores de matemática em estudos do modelo de van Hiele. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n. 8, p. 286-314, dez. 2022.

WENGER-TRAYNER, E.; WENGER-TRAYNER, B. Learning in landscapes of practice: A framework. In: WENGER, E. *et al.* **Learning in landscapes of practice**. New York: British Library, 2015. p. 13-31.

WENGER, E. Uma teoria social da aprendizagem. In: Illeris, K. (org.). **Teorias contemporâneas da aprendizagem**. Trad. Ronaldo Cataldo Costa. Porto Alegre: Penso, 2013, p.246-257.

WENGER, E. Communities of Practice and Social Learning Systems. In: NICOLINI, D.; GHERARDI, S.; YANOW, D. (ed.). **Knowing in Organizations: A Practice-Based Approach**. New York: M.E. Sharpe, 2003.

ARTIGO/CAPÍTULO 2

CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESFÉRICA MOBILIZADOS POR FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Resumo: Esta investigação tem por objetivo discutir conhecimentos para o ensino de Geometria Esférica, mobilizados por futuros professores de matemática durante a resolução e na discussão de tarefas de Geometria. Trata-se de uma investigação de natureza qualitativa, de cunho interpretativo, desenvolvida com treze futuros professores de matemática (FPMat) sobre tarefas que envolvem conceitos de Geometria Esférica, do Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – *Campus* de Paranaíba. Na análise, foi possível depreender que os FPMat mobilizaram conhecimentos especializados sobre Geometria Esférica; conhecimentos sobre uso de material manipulável; sobre a necessidade de trabalhar com diferentes representações; e sobre articulação da geometria com outras áreas do conhecimento para o ensino de Geometria Esférica. Considera-se que discussões sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria não Euclidiana, quando associados à Geometria Euclidiana, em contexto de formação inicial podem promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos FPMat.

Palavras-chave: Formação inicial. Professores de matemática. Geometria não euclidiana. Geometria esférica. Ensino de geometria. Pensamento geométrico.

1 INTRODUÇÃO

Investigações realizadas em todo o mundo têm apontado desafios enfrentados por professores de matemática (PMat) e futuros professores de matemática (FPMat), ao ensinar Geometria. Eles muitas vezes se veem despreparados, seja por falta de conhecimento do conteúdo seja por falta de estratégias para o seu ensino. Além disso, encontram dificuldades em lidar com as necessidades individuais dos alunos durante o processo de aprendizagem em Geometria (Barros; Pavanello, 2022; Blanco, 2014; Cowley, 2009; Gonzato; Blanco; Godino; 2011; Grolá; Gualandi, 2023; ; Sánchez; Londoño, 2017; Marmolejo; Astudillo, 2015; Pavanello, 1993; Silva; Cyrino, 2024; Smith; Julie; Gierdien, 2020; Vieira; Cyrino, 2022).

Embora seja notável o conhecimento incipiente de Geometria dos FPMat no início da graduação, nessa etapa da formação há uma certa valorização da Geometria Euclidiana (GE) (Geometria Plana, Geometria Espacial e a Geometria Analítica) em uma abordagem axiomática e aplicações de fórmulas em exercícios de fixação de conteúdo, na intenção de reproduzir o que lhe é ensinado (Assis, 2021; Grando; Nacarato; Gonçalves, 2008; Oliveira; Velasco, 2007; Silva; Cyrino, 2024; Souza, 2021).

Apesar de as Geometrias não Euclidianas (GNE) estarem presentes em algumas propostas curriculares contemporâneas, como na Base Nacional Comum Curricular (Brasil,

2018) e no Currículo da Rede Estadual Paranaense (Paraná, 2019), a formação inicial de professores de matemática ainda necessita de uma abordagem mais aprofundada sobre esse tema. Atualmente, a maioria dos currículos dos cursos de matemática (licenciatura) dedica apenas estudos introdutórios sobre as GNE e, raramente, exploram como ensiná-las (Cowley, 2009).

No entanto, há investigações que têm se dedicado a apresentar propostas e abordagens para incorporar as GNE na Educação Básica e em processos formativos de (futuros) professores de matemática (Blanco, 2014; Brunheira; Ponte, 2018; Cowley, 2009; Gambini; Lénárt, 2021; Guven; Karatas, 2009; Marmolejo *et al.*, 2017; Pérez; Ortega; Gallardo, 2019; Ribeiro, 2013; Silva; Cyrino, 2024; Vieira; Batista; Tavares, 2020).

Considerando a importância de (re)pensar a abordagem da GNE na Educação Básica e na formação de professores e, tendo em conta a necessidade de preparar os FPMat para trabalharem com o ensino dessas geometrias, desenvolvemos, na disciplina “O Ensino de Geometria”, do Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná - Unespar/*Campus* de Paranavaí, um trabalho com tarefas matemáticas sobre Geometria Esférica.

No presente artigo, buscamos discutir os conhecimentos para o ensino de Geometria Esférica mobilizados por FPMat na resolução e na discussão de tarefas de Geometria. As tarefas³⁷ referem-se a situações-problema desafiadoras que exigem raciocínios matemáticos para a sua resolução, que podem utilizar procedimentos que façam conexões com os significados e o fazer matemática (Jesus; Cyrino; Oliveira, 2018; Stein; Smith, 1998).

A seguir, apresentam-se a fundamentação teórica, que embasa os argumentos relativos à Geometria Esférica e à formação inicial de PMat; o contexto no qual o estudo foi realizado; os procedimentos metodológicos adotados, bem como a análise e a discussão dos resultados obtidos, os quais evidenciam os conhecimentos mobilizados pelos FPMat para o ensino de Geometria Esférica ao resolverem as tarefas propostas.

2 A FORMAÇÃO DE PROFESSORES E O ENSINO DE GEOMETRIA ESFÉRICA

O processo de formação de professores de matemática (PMat) é complexo e dinâmico, envolvendo não apenas o domínio do conteúdo, mas também o conhecimento necessário para o ensino desse conteúdo, com o objetivo de promover a aprendizagem dos alunos. Na

³⁷ Por tarefas, compreendemos ser aquelas como problemas e tarefas de exploração que se enquadram “nos níveis de demanda cognitiva com procedimentos com conexões com os significados e fazer matemática, categorizados em elevado nível de demanda cognitiva” (Jesus; Cyrino; Oliveira, 2018, p. 22).

formação inicial de professores de matemática, algumas Instituições de Ensino Superior (IES) brasileiras incluem uma breve introdução das Geometrias não Euclidianas (GNE) após o estudo das Geometrias Euclidianas Plana e Espacial, enquanto outras não abordam esse tema, uma vez que ele não está presente em todas as propostas curriculares da Educação Básica.

Na Educação Básica, muitas vezes, a geometria é relegada a um segundo plano, em detrimento dos conhecimentos algébricos, numéricos e aritméticos (Güven; Karatas, 2009; Reis, 2006). Quando ocorre, ele tem se resumido ao reconhecimento de figuras e formas geométricas planas e espaciais, ao estudo de alguns conceitos e propriedades e à articulação da geometria com o estudo de medidas por meio do cálculo de áreas de figuras planas e do volume de sólidos geométricos (Barros; Pavanello, 2022; Brum; Schuhmacher, 2014; Pavanello, 1993).

Apenas reconhecer figuras e formas geométricas planas e espaciais e calcular área e volume de figuras e sólidos geométricos não atende às necessidades e às demandas da sociedade moderna (Guillén; González; García, 2009). É preciso desenvolver habilidades de visualizar e de pensar criticamente, como destacam Vieira e Cyrino (2022, p. 287), ao enfatizarem o desenvolvimento de “capacidades de raciocinar, argumentar, demonstrar, fazer suposições e inferências lógicas, reduzir objetos tridimensionais a duas dimensões, de perceber que as ideias geométricas são úteis na representação e na resolução de problemas”.

Vivemos em um mundo tridimensional, que requer conhecimentos que vão além das Geometrias Euclidianas Plana e Espacial e exigem conhecimentos de GNE para entender, por exemplo, sobre os deslocamentos urbanos nas ruas de uma cidade, que estão associados à Geometria do Táxi (Cavalcante; Sousa; Sousa, 2019); sobre a superfície terrestre e a esfera celeste; sobre a Astronomia Posicional (Kovacevic, 2019) e a Geográfica (Honda; 2013); sobre as leis da Teoria da Relatividade de Albert Einstein (Geometria Elíptica); sobre algumas pinturas/gravuras que envolvem a Geometria Fractal e a Geometria Projetiva, dentre outras situações.

Os conhecimentos para ensinar geometria são aqueles que os professores de matemática utilizam em suas práticas de sala de aula, são as ações direcionadas para a aprendizagem de seus estudantes. São conhecimentos pertinentes à prática docente em relação aos conhecimentos profissionais. Segundo Wenger (2000, p. 18, tradução nossa³⁸) “Conhecimento não é um objeto que pode ser gerenciado de fora. Ele é parte integrante da vida das comunidades, das pessoas na melhor posição para assumir a administração dele”.

³⁸ *Knowledge is not an object that can be managed from the outside. It is an integral part of the life of communities the people in the best position to take stewardship of it* (Wenger, 2000, p. 18).

As GNE, mesmo que timidamente, estão presentes em currículos educacionais que orientam a Educação Básica, como no Currículo Estadual da Rede Paranaense (CREP) aprovado e implementado no ano de 2019 e no Novo Ensino Médio do estado do Paraná, implementado em 2021, constituídos após a aprovação e a implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no ano de 2018.

O Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná destaca a importância das GNE na Educação Básica, ao afirmar que “O seu surgimento mostrou que, para compreender diversos problemas da realidade e do mundo científico, além das relações matemáticas com a própria geometria euclidiana é necessário incorporar na educação básica o estudo das geometrias não euclidiana” (Paraná, 2021, p. 516).

O estudo das GNE na formação inicial é uma oportunidade para que os FPMat possam conhecer outros modelos geométricos, que representem situações do mundo contemporâneo, para além do modelo euclidiano, viabilizando e potencializando o desenvolvimento do pensamento geométrico (Silva; Cyrino, 2024; Vieira; Cyrino, 2022). Além do mais, como há documentos nacionais que recomendam o ensino de noções de GNE, é importante que os PMat e os FPMat tenham conhecimentos desta área para que possam ensiná-la.

Os FPMat, a partir do estudo de GNE, podem “estabelecer conexão das GNE com outros conceitos matemáticos; ampliar a compreensão de conceitos da própria GE; articular GNE com outras áreas do conhecimento; desenvolver explorações e generalizações de relações geométricas; propor investigações acadêmicas sobre conteúdos e princípios das GNE” (Silva; Cyrino, 2024, p. 343). As GNE possibilitam uma abordagem dinâmica, para os PMat e os FPMat analisarem diferentes espaços geométricos simultaneamente, em uma comparação com elementos e propriedades da GE.

No processo de formação inicial de PMat, é importante que sejam discutidas questões históricas e filosóficas a respeito das GNE, de forma que ele possa compreender as rupturas de paradigmas até então tomados como verdades absolutas e os avanços da Geometria e suas contribuições para o desenvolvimento da área da Matemática (Vieira; Cyrino, 2022; Silva; Cyrino, 2024).

A Geometria Esférica é considerada uma das GNE, pelo fato de não atender ao Quinto Postulado de Euclides. Euclides escreve o Quinto Postulado da seguinte forma: “E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos” (Euclides, tradução Bicudo, 2009, p. 98).

Em 1795, o geômetra John Playfair apresentou um substituto para o Quinto Postulado de Euclides, conhecido como Axioma de Playfair, que consiste em: “Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada” (Barbosa, 2008).

Ao longo dos séculos, diferentes matemáticos tentaram provar o Quinto Postulado, dizendo que este poderia ser verificado a partir dos resultados que lhe antecederiam e que, portanto, não se tratava de um postulado. Contudo, no século XIX, os matemáticos Carl Friedrich Gauss, Johann Bolyai, Nicolai Ivanovich Lobachevsky e Georg Bernhard Riemann, suspeitaram que o Quinto Postulado não seria efetivamente uma proposição, mas sim, um axioma necessário e independente dos demais, sendo que não poderia ser demonstrado a partir dos postulados anteriores (Andrade, 2011; Gregor *et al.*, 2020).

Com isso, desenvolveram outras geometrias, como a Geometria Hiperbólica (Bolyai e Lobachevsky), a Geometria Elíptica (Riemann) e a Geometria Projetiva.

A Geometria Projetiva é a parte da matemática que estuda as relações entre objeto real e sua imagem projetada, levando em consideração que duas retas sempre se interceptam. Trata-se da geometria que lida com as propriedades descritivas das figuras geométricas e que “se preocupa com o mundo que vemos” (Silva, 2023, p. 46, no prelo).

A Geometria Hiperbólica é conhecida como a geometria das curvaturas negativas, tal como a pseudoesfera e que não admite o Quinto Postulado de Euclides, que é substituído por “por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelos menos duas retas que não encontram a reta dada” (Barbosa, 2007, p. 47).

A Geometria Esférica, foco desta investigação, é caracterizada a partir do postulado constituído por Riemann que afirma a inexistência de retas paralelas. O Postulado de Riemann, assim como é conhecido, é enunciado da seguinte forma: “Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro” (Coutinho, 2018, p. 52)

Em seus estudos, Georg Bernhard Riemann argumentou a respeito de uma superfície geométrica que não precisava ser nivelada no espaço euclidiano tridimensional. Para ele, as retas na geometria elíptica podem ser interpretadas como geodésicas (círculos máximos) e que não existem retas paralelas a uma reta dada. De acordo com Coutinho (2018, p. 51, grifo do autor), “Na Geometria de Riemann abandona-se a noção de ‘estar entre’ e a reta não é mais infinita como na Geometria Euclidiana, mas sim ilimitada”.

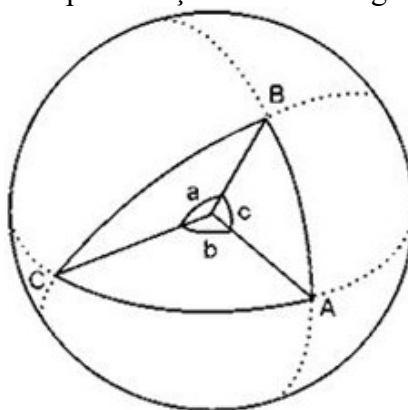
O conceito de reta na geometria elíptica está associado ao de círculo máximo, ou circunferência máxima³⁹ (conhecida também por geodésica), sendo aquela que contém o

³⁹ Partindo da definição de círculo e circunferência da geometria euclidiana, optamos por utilizar circunferência máxima por estarmos operando apenas com a superfície da esfera.

mesmo diâmetro da esfera. Trata-se de um círculo obtido a partir da interseção de uma esfera com um plano (da Geometria Euclidiana Plana) que passa pelo seu centro e contém o mesmo raio da esfera, chamado de círculo máximo (Jesus; Assis, 2024).

Na perspectiva da Geometria Esférica, é possível construir triângulos na superfície de uma esfera, chamados de triângulos esféricos. Os triângulos esféricos possuem três arcos de circunferência máxima (que são os lados), três pontos não pertencentes à mesma circunferência máxima e nenhum sendo antípoda⁴⁰ um do outro (que são os vértices) e os três ângulos internos do triângulo esférico que são formados pelos arcos de circunferência máxima AB, BC e AC (Figura 1).

Figura 1 – Representação de um triângulo esférico.



Fonte: Coutinho (2015, p. 33)

Há estudos que defendem a possibilidade de trabalhar a Geometria Esférica na Educação Básica e na formação de professores, a partir da utilização de *softwares* de geometria dinâmica (como o GeoGebra, Cabri e DGS) (Guyen; Karatas, 2009; Jesus; Assis, 2024). Os estudos de Livy e Downton (2018) e de Gambini e Lenárt (2021) apontam que o uso de *softwares* de geometria dinâmica na formação inicial de professores de matemática pode contribuir para construir tanto os conhecimentos de Geometria quanto os para ensinar Geometria. Estudos estes destacam a importância de se abordar conteúdos de GNE na formação inicial de professores de matemática, ressaltando que tais modelos representam com veracidade situações vivenciadas no cotidiano do que as GE.

3 CONTEXTO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO

⁴⁰ Definição (pontos diametralmente opostos) - Os dois pontos oriundos da intersecção de um eixo com a esfera são chamados diametralmente opostos (ou antípodas).

A presente investigação⁴¹ de natureza qualitativa, de cunho interpretativo, (Erickson, 1986, 2012), envolveu 13 FPMat⁴² matriculados na disciplina “O Ensino de Geometria”. A ementa da disciplina previa “Conteúdos relacionados ao ensino de geometria que permeiam os currículos da Educação Básica em articulação com a ciência Matemática. Desenvolvimento do pensamento geométrico.” tendo objetivo de “evidenciar e discutir a articulação entre os conteúdos que permeiam os currículos da escola básica e a ciência matemática da geometria” (UNESPAR, 2019, p. 28).

As aulas desta disciplina foram ministradas pelo primeiro autor deste artigo, no formato presencial, período noturno, no segundo semestre letivo de 2022, iniciado em setembro de 2022 e com término em fevereiro de 2023, totalizando 72 horas/aula distribuídas em 4 horas/aulas semanais.

Neste artigo, as aulas analisadas envolveram o trabalho com 3 tarefas que buscaram oportunizar o estudo da Geometria Esférica, discussões sobre as GNE, e o desenvolvimento do pensamento geométrico, em 7 encontros que totalizaram 28 horas/aula. Trabalhamos com tarefas matemáticas por compreendê-las como problemas de exploração que se enquadram nos procedimentos conectados com os significados e o fazer matemática (Jesus; Cyrino; Oliveira, 2018; Stein; Smith, 1998).

Com o objetivo de discutir o conceito de circunferência máxima e de distância entre dois pontos em uma superfície esférica, foi proposta a Tarefa I – As retas são retas? (Quadro 1).

Quadro 1 – Tarefa I - As retas são retas?

1. Em posse de uma folha de papel A4, faça o que é solicitado nas alternativas a seguir.
 - a) Marque um ponto qualquer na folha e responda: Quantas representações de retas podem ser traçadas por este ponto?
 - b) Agora, marque dois pontos distintos na folha e responda: Quantas representações de retas podem ser traçadas passando por estes dois pontos simultaneamente?
2. Em posse de uma bola de isopor, faça o que é solicitado nas alternativas a seguir.
 - a) Na bola de isopor, faça um corte qualquer, dividindo-a em duas partes. Em seguida, apoie as duas partes obtidas, após o corte, sobre uma folha de papel A4, contornando-as com o auxílio de uma caneta colorida. Que figuras são formadas na folha de papel?
 - b) Existe algum corte que divide a bola em duas partes iguais? Em que lugar deve ser feito o corte para que isso ocorra?
3. Em posse de uma bola de isopor, de alfinetes e de elásticos, faça o que é indicado nas

⁴¹ Aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Londrina - UEL (Parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231)

⁴² No processo de análise, utilizamos nomes fictícios para identificar os FPMat, nomeadamente: Ajax, Aria, Atena, Aurora, Apolo, Balthazar, Celeste, Ísis, Loki, Luna, Órion, Selene e Zora.

alternativas a seguir.

- a) Com o auxílio de um alfinete, marque a representação de um ponto qualquer sobre a bola de isopor. Por este ponto, quantas circunferências máximas podem ser traçadas?
 - b) Com o auxílio de dois alfinetes, marque dois pontos distintos sobre a bola de isopor. Quantas circunferências máximas passam por estes dois pontos simultaneamente?
4. Em posse de uma folha de papel A4, marque dois pontos distintos e, com o auxílio de uma régua, ligue esses dois pontos. Que conceitos geométricos estão envolvidos?
 5. Com o auxílio de dois alfinetes, marque dois pontos quaisquer sobre a bola de isopor e represente uma circunferência máxima que passe por estes pontos. Com uma caneta colorida, ligue esses dois pontos. Que conceitos geométricos estão envolvidos?

Fonte: Adaptado de Gomes (2014, p. 59-60)

A Tarefa II - Circunferências máximas são paralelas? (Quadro 2) oportuniza aos FPMat reconhecerem que, na Geometria Esférica, não existem circunferências máximas paralelas.

Quadro 2 – Tarefa II - Circunferências máximas são paralelas?

1. Em uma folha de papel A4 e com o auxílio de uma régua, represente uma reta e um ponto não pertencente a ela. Quantas representações de retas podem ser traçadas, passando por este ponto de forma que não haja interseção com a reta desenhada inicialmente?
2. Em uma bola de isopor e com o auxílio de dois alfinetes, represente dois pontos distintos A e B. Em posse de dois elásticos, trace representações de duas circunferências máximas distintas em que uma delas passe pelo ponto A, e a outra passe pelo ponto B. Existe intersecção entre essas representações de circunferências máximas? Discuta com sua dupla e apresente uma resposta com justificativa.
3. Utilizando da mesma representação realizada no exercício anterior, construa outras circunferências máximas que passem, simultaneamente, pelos pontos A e B marcados anteriormente e responda: Existe intersecção entre estas circunferências máximas fora as que já foram traçadas? Justifique sua resposta.

Fonte: Adaptado de Gomes (2014, p. 59-60)

Com o objetivo de definir os pontos antipodais e ângulo esférico, além de determinar a medida do ângulo e a distância entre dois pontos na superfície da esfera, propusemos a Tarefa III - Como calcular a distância entre dois pontos? (Quadro 3).

Quadro 3 – Tarefa III - Como calcular a distância entre dois pontos?

1. Em posse de uma folha de papel A4, represente um ponto A e, com o auxílio de uma régua, construa representações de duas semirretas, r e s, distintas que passem por este ponto (desconsidere os limites da folha de papel A4). Após essa representação, responda:
 - a) As duas representações de semirretas distintas, r e s, que partem do mesmo ponto

- A delimitam uma amplitude. Em geometria plana, qual é o nome dado a esta amplitude entre as semirretas?
- b) De que maneira é calculada a medida dessa amplitude entre as duas semirretas?
2. Em uma bola de isopor represente um ponto A e, com o auxílio de dois elásticos, construa representações de duas circunferências máximas distintas que passem pelo ponto A. Após essa representação, responda:
- a) Além do ponto A que se encontra na intersecção das duas circunferências máximas, existe alguma outra intersecção entre estas circunferências?
- b) Se a resposta anterior for afirmativa, existe alguma relação entre essas intersecções?
3. Com a representação realizada no exercício anterior, responda:
- a) As duas representações de circunferências máximas, ao partirem do ponto de intersecção A delimitam amplitudes sobre a superfície esférica. Ao selecionar uma dessas amplitudes, ao acaso, podemos observar que elas são formadas por semicircunferências (ou arcos) que possuem uma amplitude entre si. Como essa amplitude é nomeada na Geometria Esférica?
- b) Como pode ser calculada a amplitude entre essas semicircunferências?
- c) Determine a medida da amplitude formada pelas semicircunferências que partem do ponto A.
4. Em posse de uma bola de isopor, alfinetes e fita métrica, faça o que está sendo indicado nas alternativas a seguir.
- a) Determine a medida do raio da bola de isopor. Caso seja necessário, utilize a fita métrica.
- b) Com o auxílio de alfinetes marque dois pontos distintos, C e D, sobre a superfície da bola de isopor. De que maneira podemos calcular a distância entre estes dois pontos?
- c) Calcule a distância entre estes pontos.

Fonte: Adaptado de Gomes (2014, p. 58-59)

O objetivo da proposição dessas tarefas era discutir conhecimentos para o ensino de Geometria Esférica, mobilizados por futuros professores de matemática na resolução e na discussão delas.

Para obter as informações, foram utilizados os seguintes instrumentos: registros escritos dos FPMat; gravações em áudio das aulas, que contemplam tanto as discussões em duplas quanto as discussões coletivas; e o diário de campo do formador⁴³. Os registros escritos dos FPMat incluem as resoluções das tarefas, bem como as anotações nos respectivos cadernos relacionadas a dúvidas e/ou questionamentos individuais. As gravações em áudio, referentes às interações de cada dupla de FPMat e às discussões coletivas, foram transcritas e analisadas em episódios ao longo desta investigação.

Respeitando as perspectivas dos participantes deste estudo e com a intenção de compreender os significados de suas produções escritas e dos processos pelos quais elas foram problematizadas nas discussões coletivas, assumimos a perspectiva interpretativa de

⁴³ Os termos “formador”, “pesquisador”, “investigador” serão utilizados como sinônimos.

Erikson (1986, p. 156, tradução nossa⁴⁴) que se “preocupa com as especificidades do significado e da ação na vida social que ocorrem em cenas concretas de interação”. A partir desta perspectiva de análise interpretativa, estruturamos nosso processo analítico em cinco momentos.

No primeiro momento, identificamos, nas discussões gravadas em áudio de cada uma das duplas de FPMat, bem como nas discussões coletivas e nas produções escritas dos FPMat, indícios de conhecimentos para o ensino de Geometria Esférica mobilizados por eles. No segundo momento, selecionamos episódios em áudios, cujos conhecimentos para o ensino de Geometria Esférica se encontravam evidentes. O terceiro momento se caracterizou por uma análise dos registros escritos feitos pelos FPMat, na busca de evidenciar indicadores de conhecimentos comuns para o ensino de Geometria Esférica e que foram identificados nos episódios selecionados. No quarto, os indicadores foram agrupados por similaridades entre os episódios selecionados nas gravações com os registros escritos; e, no quinto, realizamos inferências com os aportes teóricos da literatura na expectativa de articular um diálogo entre as informações obtidas.

Nesse processo, foi possível depreender que os FPMat mobilizaram conhecimentos especializados sobre Geometria Esférica; sobre uso de material manipulável; sobre a necessidade de trabalhar com diferentes representações; e sobre articulação da geometria com outras áreas do conhecimento para o ensino de Geometria Esférica.

Nas próximas seções, apresentamos e discutimos cada um desses conhecimentos, os quais, juntos, podem oferecer uma apresentação abrangente dos resultados desta investigação e da forma como emergiram no contexto formativo.

4 CONHECIMENTOS SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA ESFÉRICA MOBILIZADOS POR FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

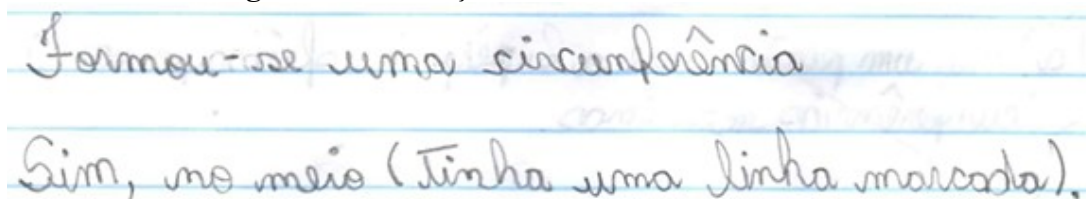
Nessa seção, apresentamos excertos que consideramos significativos para representar cada um dos conhecimentos mobilizados pelos FPMat, quais sejam: conhecimentos especializados sobre Geometria Esférica; sobre uso de material manipulável; sobre a necessidade de trabalhar com diferentes representações; e sobre articulação da Geometria com outras áreas do conhecimento para o ensino de Geometria Esférica.

⁴⁴ “[...] concerned with the specifics of meaning and action in social life that takes place in concrete scenes of face-to-face interaction.” (Erikson, 1986, p. 156)

4.1 CONHECIMENTOS ESPECIALIZADOS SOBRE GEOMETRIA ESFÉRICA

No item 2 da Tarefa I, quando foi solicitado que os FPMat fizessem um corte qualquer em uma bola de isopor, dividindo-a em duas partes e, em seguida, que apoiassem as duas partes obtidas sobre uma folha de papel A4, contornando-as com o auxílio de uma caneta colorida, os FPMat tiveram a oportunidade de discutir o conceito de **circunferência máxima**.

Figura 2 – Resolução do item 2 da tarefa I - Celeste



Formou-se uma circunferência
Sim, no meio (Tinha uma linha marcada).

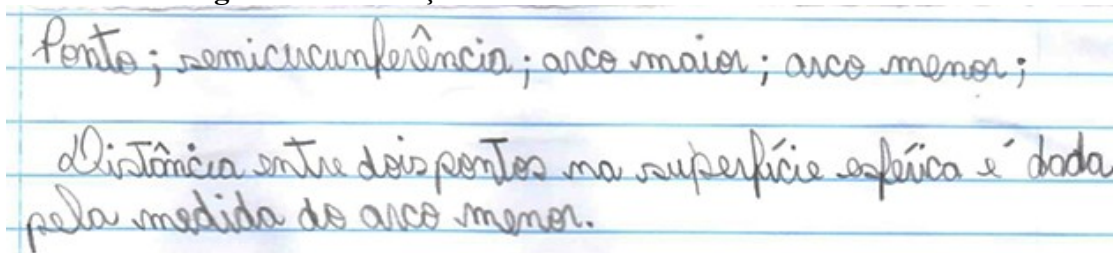
Fonte: Registro no caderno do dia 07/11/2022

Ao justificar sua resposta (Figura 2), Celeste destacou que, ao cortar a bola de isopor em duas partes, foi possível observar a representação de duas circunferências. Segundo ela, para que a bola fosse dividida em duas partes iguais, o corte deveria ser feito ao meio, exatamente onde havia a demarcação da produção da bola de isopor.

Durante a discussão coletiva, foi possível sistematizar o conceito de reta na Geometria Esférica, como **circunferências máximas (Geodésicas)**, que são circunferências que possuem o mesmo diâmetro que a esfera.

Ainda no item 2 da Tarefa I, foi possível discutir com os FPMat a noção de **distância entre dois pontos** na superfície de uma esfera. Os FPMat perceberam que as principais ideias do conceito de distância são preservadas e que a diferença é com relação à reta que liga os dois pontos, sendo que na Geometria Euclidiana é **um segmento de reta** e na Geometria Esférica é o **menor arco de circunferência máxima** que os unem.

Figura 3 – Resolução do item 5 da tarefa II - Ana Karoline

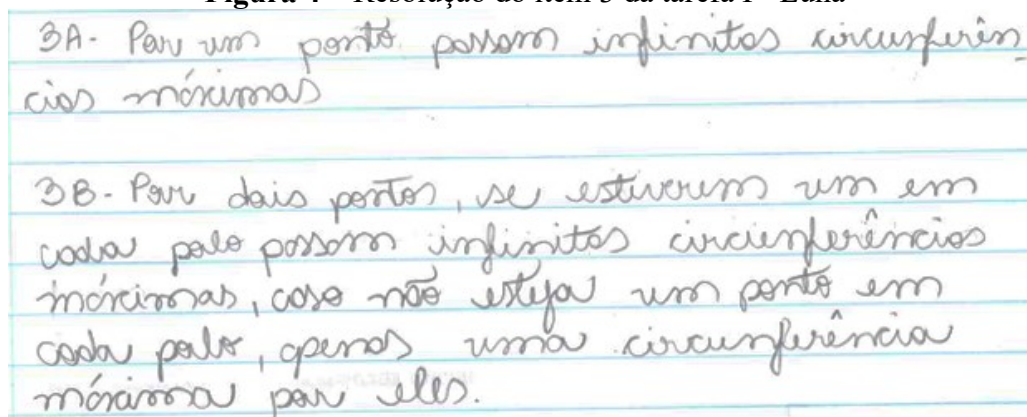


Ponto; semicircunferência; arco maior; arco menor;
A distância entre dois pontos na superfície esférica é dada pela medida do arco menor.

Fonte: Registro do caderno dia 21/11/2022

No item 3 da Tarefa I, foram explorados dois axiomas importantes da Geometria Euclidiana: “**Por um único ponto passam infinitas retas**” (Dolce; Pompeu, 2013) e “**Por dois pontos distintos passa uma única reta**”. E no item 3 da Tarefa I, os FPMat discutiram que, **por um ponto em uma superfície esférica, passam infinitas circunferências máximas**, e **por dois pontos distintos (não sendo pontos antipodais) passa uma única circunferência máxima**.

Figura 4 – Resolução do item 3 da tarefa I - Luna

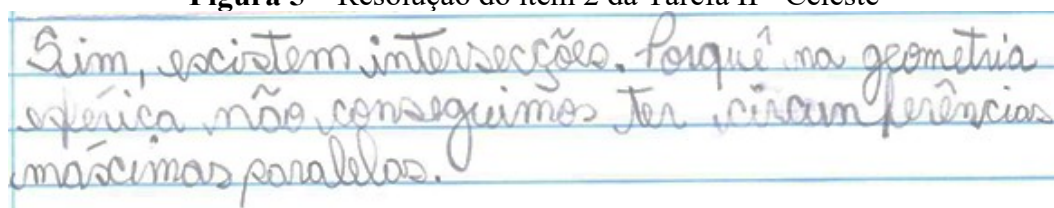


Fonte: Registro no caderno do dia 07/11/2022

Percebemos, no registro da Luna (Figura 4), sua preocupação em relação à **posição dos pontos na superfície da bola de isopor**, ao dizer que “[...] *caso não esteja um ponto em cada polo*[...]”. Neste caso, ela estava se referindo aos **pontos antipodais** em que é possível traçar **infinitas circunferências máximas**. Caso os **pontos não sejam antipodais**, é possível traçar apenas **uma única circunferência máxima**.

No item 1 da Tarefa II, os FPMat tiveram a oportunidade de relembrar o Postulado das Paralelas, a partir da construção de **uma reta paralela passando por um ponto fora de uma reta dada**. E, ao observar que, na Geometria Esférica, item 2 da mesma tarefa, há interseções entre as **circunferências máximas**, isto é, elas **se cruzam em dois pontos que são diametralmente opostos**, conhecidos como **pontos antipodais**, eles verificaram que as circunferências máximas se cruzam em mais de um ponto (Figura 5).

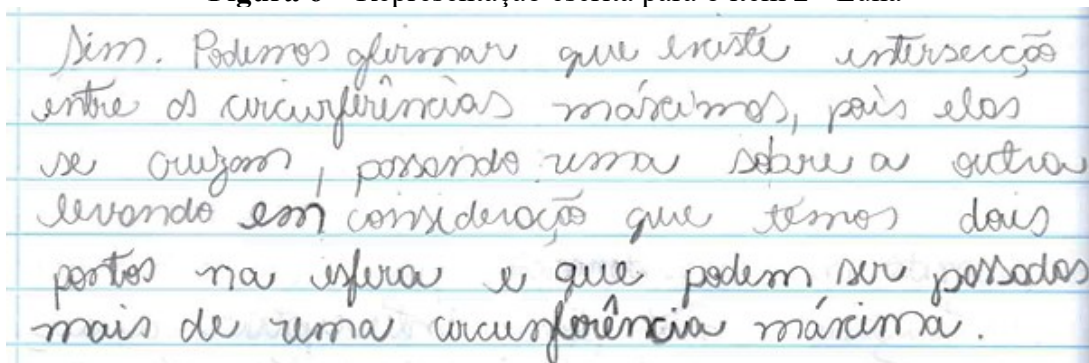
Figura 5 – Resolução do item 2 da Tarefa II - Celeste



Fonte: Registro no caderno do dia 28/11/22

Nas discussões coletivas, os FPMat concluíram e sistematizaram que **não existem circunferências máximas paralelas na Geometria Esférica** e que, nesse caso, como se trata de uma GNE, o Postulado da Paralela da GE não é válido (Figura 6). Os FPMat compreenderam o que é necessário considerar para que uma geometria seja euclidiana.

Figura 6 – Representação escrita para o item 2 - Luna

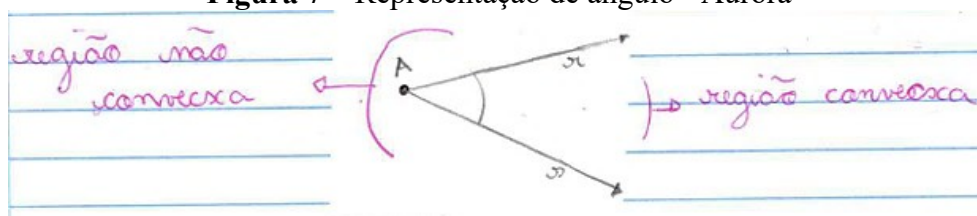


Fonte: Registro no caderno do dia 28/11/2022.

O conceito de ângulo na GE e na GNE foi explorado na Tarefa III, itens 1 e 2 respectivamente. No item 1, os FPMat puderam explorar o conceito de **ângulo** na GE, como a **medida de uma região entre duas semirretas que partem de uma mesma origem** (Dolce; Pompeu, 2013).

Na discussão coletiva desse item, os FPMat expuseram dúvidas quanto à noção de **ângulo convexo e ângulo não convexo**. Nesse momento, o formador esclareceu que ângulo convexo é aquele cuja medida é superior a 0° e inferior a 180° . Caso a medida do ângulo seja superior a 180° , temos um ângulo não convexo, como o representado pela Aurora (Figura 7).

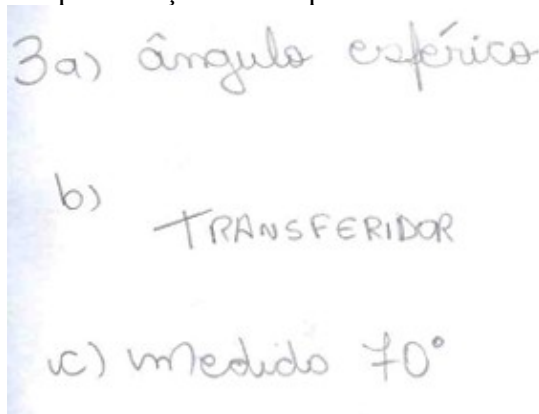
Figura 7 – Representação de ângulo - Aurora



Fonte: Registro no caderno do dia 28/11/2022.

No item 2 da Tarefa III, foi explorado o conceito de ângulo na Geometria Esférica. Na discussão coletiva, os FPMat sistematizaram que o **ângulo esférico** é a **medida da região delimitada por dois arcos de circunferências máximas que partem de um mesmo ponto sobre a superfície de uma esfera** (Figura 8).

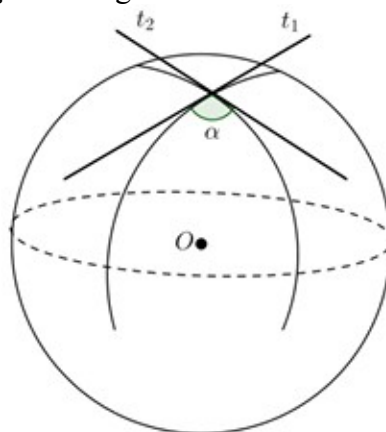
Figura 8 – Representação escrita para o item 3 da tarefa – Órion



Fonte: Registro no caderno do dia 12/12/2022

A Figura 9 ilustra, após questionamentos realizado pelo formador, a maneira como os FPMat utilizaram o transferidor para realizar a mensuração do ângulo esférico, a partir de duas retas tangentes (representando os arcos de circunferência máxima) a um mesmo ponto na superfície da esfera. A amplitude formada pelas duas retas tangentes é correspondente à amplitude formada pelos dois arcos, sendo chamado de ângulo esférico.

Figura 9 - Representação do ângulo esférico sobre a superfície de uma esfera



Fonte: Silva (2020)

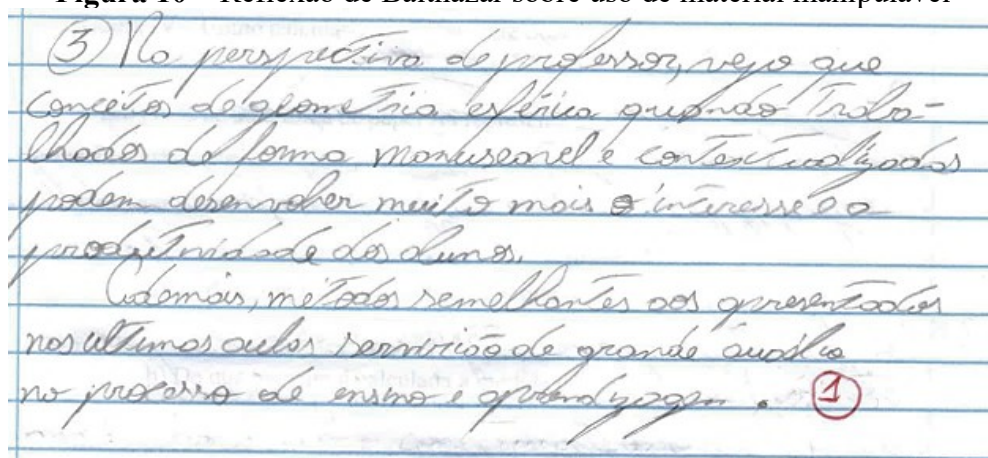
Diante das representações feitas na superfície da bola de isopor, os FPMat foram questionados a respeito do processo de **mensurar o ângulo esférico** formado pelos arcos de duas circunferências máximas.

A partir das discussões coletivas promovidas pelo formador, os FPMat concluíram que **a medida do ângulo esférico é igual à medida do ângulo plano**, e que é dado pela medida formada pelas retas tangentes de dois arcos de circunferência máxima que o formam.

4.2 CONHECIMENTOS SOBRE O USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESFÉRICA

Ao registrar seus relatos e considerações no seu caderno sobre as tarefas, Balthazar descreveu que **utilizar material manipulável para trabalhar com a geometria** pode promover um **ensino dinâmico e produtivo**, estimulando a **participação ativa dos estudantes** (Figura 10).

Figura 10 – Reflexão de Balthazar sobre uso de material manipulável



Fonte: Registro no caderno do dia 02/12/2022

Esta reflexão de Balthazar nos possibilita inferir que a maneira com que as aulas foram desenvolvidas com eles oportunizou a **compreender o processo de ensino e de aprendizagem de Geometria Esférica**; refletir sobre a prática de sala de aula, a utilização de materiais manipuláveis no processo de ensino de geometria e sobre práticas pedagógicas potentes para construir o conhecimento geométrico por parte dos alunos.

No entanto, o uso de material manipulável deve ser feito de forma equilibrada, cuidadosa e complementar a outras abordagens para garantir que os estudantes possam desenvolver suas habilidades e construir seus conhecimentos. O material pode colaborar para uma compreensão inicial de conceitos, mas suas limitações precisam ser levadas em conta, visto que se tratam apenas de representações de objetos da geométricos.

Balthazar destacou que as **discussões coletivas** desencadeadas a partir da resolução das tarefas foram efetivas para que eles pudessem **compreender o processo de ensino e de aprendizagem de GE e de Geometria Esférica e pensar em outras estratégias e exemplos** para trabalhar com esses temas (Figura 11).

Figura 11 – Reflexão de Balthazar sobre discussão das tarefas

① Em especial, os meios apresentados pela professora de apresentar no gráfico uma esfera. E Balthazar não especificidades por meio do Tarefa seria uma forma muito efetiva para trabalhar esses conceitos. Entretanto, a apresentação a relação com as partes do planeta Terra a partir de um Globo terrestre manuseável também serviu muito bem para desenvolver discussões sobre Tol.

Fonte: Registro no caderno do dia 12/12/2022

Nas discussões coletivas referentes aos pontos antípodas, Balthazar sugeriu a utilização de um globo terrestre para explicar que os polos terrestres são **pontos antípodas**. Trata-se de uma sugestão para encaminhamento das discussões e sistematização do conceito de ponto antípoda e que pode promover reflexões acerca da importância da matemática, em especial da articulação da Matemática com outras áreas do conhecimento, como a geografia.

A construção de um suporte para **mensurar a medida do ângulo esférico**, representado sobre a superfície de uma bola de isopor, também, foi indicada por Balthazar como uma experiência significativa para sua formação e que será utilizada por ele quando necessário (Figura 12).

Figura 12 – Reflexão de Balthazar sobre mensuração de um ângulo esférico

Em especial a construção do suporte de transferir redondo em bola de isopor foi uma experiência muito boa, que tem muitas possibilidades quando necessário, pois acredito que os ângulos e a efetividade de uma dinâmica foram excepcionais.

Fonte: Registro no caderno do dia 12/12/2022

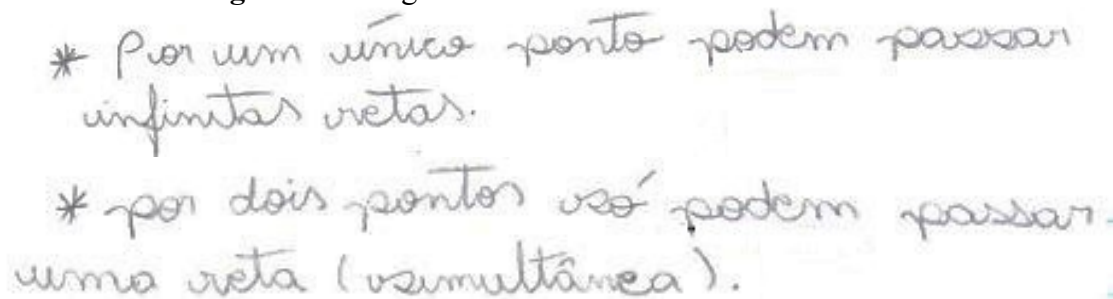
Os relatos e as considerações expressas por Balthazar revelam conhecimentos pedagógicos essenciais para o ensino de Geometria Esférica, os quais foram mobilizados por ele, ao resolver e discutir as tarefas propostas. Essas considerações permitem uma análise sobre o trabalho com tarefas e o uso de materiais manipuláveis, que contribuirão para construir o conhecimento geométrico e para desenvolver o pensamento geométrico dos

FPMat, além de favorecer a reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem de Geometria.

4.3 CONHECIMENTOS SOBRE A NECESSIDADE DE TRABALHAR COM DIFERENTES REPRESENTAÇÕES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESFÉRICA

No que se refere à Tarefa I, itens 1 e 3, Órion registrou em seu caderno que, **por um ponto podem passar infinitas retas** sobre a superfície plana, e que **por dois pontos sobre a superfície plana pode passar uma reta** (Figura 13).

Figura 13 – Registro escrito do Axioma da GE - Órion



* Por um único ponto podem passar infinitas retas.

* por dois pontos só podem passar uma reta (simultânea).

Fonte: Registro no caderno do dia 21/11/2022

Na discussão coletiva, o Formador questionou os FPMat referente ao **uso da palavra “podem”** nesses casos. Esta palavra pode promover um sentido ambíguo, de que existe a **possibilidade ou não** de passar uma, mais de uma ou nenhuma reta por um ponto sobre a superfície plana. Da mesma maneira, têm-se a **possibilidade ou não** de passar uma, mais que uma ou nenhuma reta por dois pontos sobre a superfície plana, o que não é considerado nos axiomas da GE.

Tratando-se dos pontos sobre a superfície de uma esfera, os FPMat registraram que, **por um ponto, passam infinitas circunferências máximas**, e que **por dois pontos, caso forem antípodas, passam infinitas circunferências máximas**, mas, se os **dois pontos não forem antipodais, passa apenas uma única circunferência máxima**.

Balthazar fez o uso de uma linguagem natural, em que utiliza de palavras do próprio vocabulário (do seu cotidiano) para explicar o que aconteceu com as representações construídas sobre a superfície da esfera (Figura 14). Porém, a linguagem utilizada por ele guarda resquícios de conhecimentos de GE.

Figura 14 – Resolução para o item 3 da Tarefa I - Balthazar

3.0) Por um ponto qualquer passam infinitas circunferências máximas.

b) Por dois pontos distintos temos apenas uma circunferência, o não ser quando colocamos os dois pontos exatamente nos polos da esfera daí temos infinitas circunferências máximas.

Fonte: Registro no caderno do dia 21/11/2022

Na Tarefa II, cujo objetivo foi analisar a inexistência de paralelismo entre as circunferências máximas, os FPMat **registraram que as circunferências máximas se interceptam em dois pontos** e que, se novas **circunferências forem traçadas por estes mesmos dois pontos, eles se tornam ainda mais evidentes**, isto é, se caracterizando como **pontos antipodais**.

Luna, no item 2 da Tarefa II, argumentou com suas palavras que existe a intersecção entre as duas circunferências máximas e que pode ter mais circunferências máximas pelo fato de se interceptarem em dois pontos diametralmente opostos (Figura 15). Ao analisar o registro verbal da Luna, vemos a utilização de palavras usuais do cotidiano para explicar o fenômeno ocorrido, mesmo sem o uso de termos matemáticos, mas que guardam relações com teoremas e propriedades da GE.

Figura 15 – Resolução para o item 2 da Tarefa II - Luna

Sim. Podemos afirmar que existe intersecção entre as circunferências máximas, pois elas se cruzam, passando uma sobre a outra levando em consideração que temos dois pontos na esfera e que podem ser passadas mais de uma circunferência máxima.

Fonte: Registro no caderno do dia 28/11/2022

Balthazar argumentou com suas palavras que a **quantidade de pontos que se formam a partir da intersecção de circunferências máximas está diretamente relacionada à quantidade de circunferências máximas que são traçadas sobre a superfície de uma**

esfera. Isto é, a quantidade de pontos de intersecção é igual à quantidade de circunferências máximas construídas na superfície da esfera (Figura 16).

Figura 16 – Relato do Balthazar

Neste aula, conseguimos aprender mais conceitos provenientes da geometria esférica, como por exemplo: a inexistência de circunferências máximas paralelas, o crescimento do número de pontos de intersecção totalmente relacionado ao número de circunferências máximas traçadas.

Fonte: Registro no caderno do dia 05/12/2022

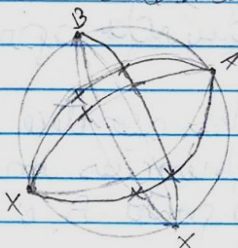
Quando questionado acerca deste crescimento de pontos de intersecção estar relacionado ao número de circunferências máximas traçadas, Balthazar disse que traçar duas circunferências máximas distintas por um mesmo ponto dado sobre a superfície esférica não indica que teremos apenas um único ponto, mas sim, o ponto dado e o ponto que é diametralmente oposto a ele.

Balthazar estava se referindo aos pontos antípodas. Porém, se adicionarmos uma terceira circunferência máxima, passando pelo mesmo ponto dado, continuamos a ter dois pontos de intersecção, mas, se traçarmos esta terceira circunferência máxima por fora do ponto dado, teremos seis pontos de intersecção ou três pontos antipodais (Figura 17).

Figura 17 – Resolução de uma questão direcionada a Balthazar

9) Neste caso, afirmei que como analisado no Torço II-2 ao observarmos duas circunferências máximas traçadas a partir de um único ponto teremos não só a intersecção no ponto de partida, mas sim no ponto diametralmente oposto a ele também. Logo ao adicionarmos novas pontos de partida nesse mesmo caso, teremos o número de intersecções crescendo também.

Exemplo:



Quanto mais pontos X de intersecção surgirem quanto mais circunferências máximas adicionarmos do outro ponto qualquer.

Fonte: Registro no caderno do dia 12/12/2022

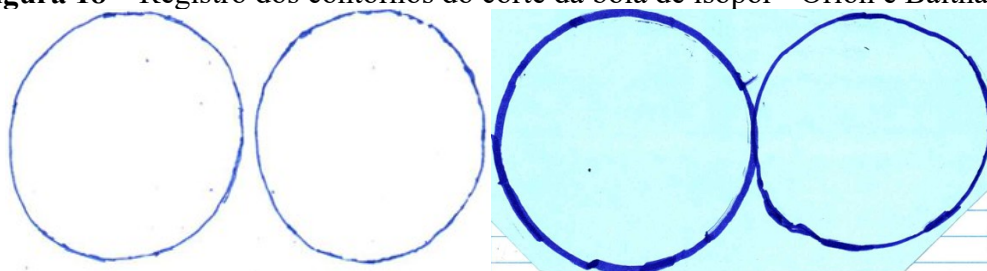
Na resolução do item 1 da Tarefa III, Balthazar argumentou que a representação feita sob a superfície da bola de isopor lembra um triângulo. Por ter dúvidas em relação às nomenclaturas utilizadas no conteúdo de Geometria Esférica, Balthazar disse “*Talvez sendo um triângulo esférico.*” pelo fato de não ter certeza se o triângulo representado na superfície da bola de isopor seria definido como triângulo esférico. Porém, é possível observar que a descrição realizada por ele é coerente com a definição matemática para o conceito de triângulo esférico.

4.4 CONHECIMENTO SOBRE A NECESSIDADE DE ARTICULAÇÃO DA GEOMETRIA ESFÉRICA COM OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

No item 2 da Tarefa II, após dividir uma bola de isopor em duas partes, os FPMat colocaram as superfícies cortadas (plana) sobre uma folha de papel A4 e fizeram o seu contorno. Essa ação permitiu que eles observassem que esses contornos representam circunferências.

Observamos que as bolas de isopor foram divididas com cortes diferentes, por exemplo, uma dupla de FPMat fez o corte exatamente ao meio, outra dupla o fez um pouco acima do meio da bola de isopor; e outra, um pouco mais acima (uma calota como na definição da Geometria Euclidiana Espacial) que a dupla anterior (Figura 18).

Figura 18 – Registro dos contornos do corte da bola de isopor - Órion e Balthazar



Fonte: Registro no caderno do dia 07/11/2022

Na sistematização do item 2, os FPMat associaram este conhecimento **aos meridianos do Planeta Terra**, promovendo uma **articulação entre conhecimentos de Geometria Esférica e Geografia**. Na discussão coletiva, Celeste disse que os **paralelos seriam os meridianos**, caso estivéssemos pensando no Planeta Terra (Quadro 4).

Quadro 4 - Discussão coletiva entre Formador e Celeste.

Apolo: Não é a maior circunferência?

Celeste: É! E as paralelas serão os meridianos, no caso. Se for pensar no Planeta Terra.

Formador: O quê?

Celeste: Mas, não são?

Fonte: Registro em áudio do dia 07/11/2022

O Formador argumentou ser necessário fazer uma distinção entre as circunferências que são constituídas sobre a superfície da bola de isopor. Há situações em que a circunferência passa pelo centro da esfera (tem o mesmo diâmetro da esfera) e situações que a circunferência não passa pelo centro da esfera (tem diâmetro inferior ao diâmetro da esfera). A distinção a ser feita é entre **circunferência máxima** e **circunferência menor**.

As circunferências máximas são circunferências que possuem o mesmo diâmetro da esfera, e que podem ser representadas como os meridianos do Planeta Terra, sendo linhas verticais imaginárias que ligam um polo ao outro e auxiliam na medição da longitude.

A circunferência menor é uma circunferência que possui um diâmetro de tamanho inferior ao da esfera, e que pode ser representado pelos paralelos (trópicos) do Planeta Terra, que são linhas horizontais imaginárias que auxiliam na medição da latitude.

A Figura 19 representa a construção de Órion em relação aos pontos serem diametralmente opostos e por passarem infinitas circunferências máximas, lembrando as discussões sobre os meridianos e os paralelos do Planeta Terra.

Figura 19 - Representação de infinitas circunferências máximas - Órion



Fonte: Registro fotográfico do dia 21/11/2022

Os FPMat, ao articularem a Geometria Esférica e a Geografia, desvelaram o potencial do uso de exemplos que apresentam possibilidades de aplicabilidade de conceitos da Geometria Esférica e das GNE no cotidiano das pessoas.

Outro exemplo levantado na discussão coletiva foi sobre a rota de aviões entre uma cidade a outra. Eles compreenderam que a rota do avião não será em linha reta, mas sim, uma rota calculada por meio das coordenadas de **latitude e longitude**.

Não podemos deixar de expressar que o Planeta Terra não é perfeitamente uma esfera, que há um leve achatamento em seus polos e que há um processo de cálculo e teorias, articuladas entre si, que sustentam todo este campo de conhecimento.

Nesta seção, apresentamos indícios sobre as possíveis relações que podemos fazer com outras áreas do conhecimento com a Geometria Esférica. Os FPMat salientaram, principalmente, alguns conteúdos de Geografia como: Meridianos, Linha do Equador, Trópicos de Câncer e de Capricórnio, Círculos Polares Ártico e Antártico e os pontos cardeais.

A utilização de exemplos é imprescindível no ensino de geometria, visto que contribui para construir imagens mentais a partir de imagens visuais (a intuição geométrica), para mobilizar processos e habilidades de visualização (importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico), além de promover conexões entre os conceitos geométricos e com os outros conteúdos da matemática.

5 CONHECIMENTO MOBILIZADOS PELOS FPMAT E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Na exploração das tarefas propostas, os FPMat mobilizaram **conhecimentos para o ensino de Geometria Esférica**, especificamente associados aos **conhecimentos especializados de Geometria Esférica, conhecimentos sobre as diferentes representações e articulação da Geometria com outras áreas do conhecimento para o ensino de Geometria Esférica**.

Os conhecimentos associados os conteúdos geométricos que foram mobilizados pelos FPMat se direcionaram para **definições, teoremas, elementos e propriedades** das GE e da Geometria Esférica envolvidas nas tarefas. A exploração destas tarefas possibilitou aos FPMat **ressignificarem conceitos estudados** ao longo de sua formação, além de compreenderem conceitos que eram desconhecidos para alguns.

Os conhecimentos de Geometria Esférica permitiram aos FPMat mobilizarem elementos que estão diretamente relacionados ao pensamento geométrico, como a percepção visual, elemento associado à visão e à construção de imagens visuais e mentais (intuição geométrica); às representações externas e aos processos e habilidades de visualização, elementos importantíssimos no processo de ensinar e aprender Geometria. Cowley (2009) afirma que os professores necessitam ter mais do que o conhecimento mínimo para ensinar geometria, isto é, que os professores não tenham domínio apenas do conteúdo de Geometria

que irão ensinar, mas também domínio de conhecimentos didáticos-pedagógicos para ensiná-las.

Os elementos associados ao pensamento geométrico viabilizam que os FPMat possam fazer conjecturas, raciocinar, formular e resolver problemas de geometria, criar argumentos convincentes com base nos conceitos matemáticos, além de promover o desenvolvimento do pensamento matemático.

Ao analisar os registros escritos dos FPMat, quando explicam e expõem seus argumentos matemáticos em linguagem natural, é possível observar uma coerência entre a maneira que explicaram os conceitos de geometria com a formalidade e o rigor da matemática. Os registros escritos podem ser feitos por meio de linguagens natural, algébrica, numérica, geométrica, tabelas, gráficos e diagramas. O registro dos FPMat em seus respectivos cadernos é um tipo de representação externa, mesmo ela sendo informal e sem o rigor da matemática.

Gambini (2021) considera importante que os professores mantenham uma comunicação no estilo de uma linguagem viva, que empreguem termos que estão presentes no cotidiano e que sejam atualizados. Sabemos que esta forma de expressar o conteúdo matemático não é a mais apropriada para um FPMat, mas a maneira que registraram suas resoluções e enunciaram os conceitos de matemática possibilitou-lhes **conhecer uma nova geometria**, bem como **aspectos referentes ao seu ensino e aprendizagem** (Gambini, 2021).

A utilização de materiais manipuláveis contribuiu para o processo de aprendizagem de Geometria Esférica. Os FPMat realizaram construções com base nas orientações de cada tarefa e, então, puderam articular as representações construídas com os seus registros escritos. Os materiais manipuláveis permitiram-lhes explorar todas as situações mais de uma vez, inclusive construir outras representações que pudessem ilustrar seu raciocínio e a estratégia de resolução a partir de intuições geométricas.

As **representações por desenhos** e a **manipulação de materiais manipuláveis** viabilizaram aos FPMat analisarem as situações propostas nas tarefas, favorecendo a **interpretação das informações** contidas nos enunciados de cada item das tarefas. Além do mais, contribuíram para interpretar imagens visuais e mentais elaboradas pelos FPMat, desencadeando a compreensão de conhecimentos para ensinar Geometria Esférica.

Como salienta Gutiérrez (2006, p. 26, tradução nossa⁴⁵), “A conveniência de utilizar representações gráficas para ajudar a compreender conceitos geométricos vai para além da

⁴⁵ *La conveniencia de usar representaciones gráficas como ayuda para comprender los conceptos geométricos se extiende más allá de la geometría euclídea elemental* (Gutiérrez, 2006, p. 26).

Geometria Euclidiana elementar”. A **mobilização de interpretações de informações e de imagens**, de acordo com Gutiérrez (1996), **contribui para desenvolver o processo de visualização**, sendo este um dos elementos importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Os FPMat, mesmo que de uma maneira muito sutil e ingênua, apresentaram indícios de conversões e tratamentos entre os registros escritos e gráficos. Isto é, algumas representações realizadas pelos FPMat foram analisadas e convertidas em outros registros e/ou em outras imagens visuais coerentes às definições e às propriedades envolvidas nas tarefas, porém ainda em uma linguagem sem o rigor e o formalismo da matemática.

Os FPMat reconheceram não ser possível registrar uma representação de um objeto que está na terceira dimensão (tridimensional) em um espaço de duas dimensões (bidimensional) (Suárez; Delgado, 2021). A articulação que as tarefas propuseram entre conteúdos de GE e de Geometria Esférica oportunizou aos FPMat trabalharem com **diferentes maneiras de registrar suas estratégias e soluções**, ao enunciarem os conceitos matemáticos envolvidos nas tarefas, além de analisar **que conceitos são válidos ou não na GE**, e **quais são válidos ou não na Geometria Esférica**.

Estas articulações entre os conteúdos de geometria e as diferentes maneiras de registrar uma mesma estratégia ou solução proporciona aos FPMat conhecerem que as teorias matemáticas e científicas são construções humanas que aconteceram ao longo do tempo, a partir de rupturas em paradigmas tidos como irrefutáveis e que, com argumentos e demonstrações, foram refutados, gerando a necessidade de um novo conhecimento que atendesse e resolvesse o problema. Este tipo de conhecimento possibilita compreender a construção do conhecimento geométrico, compreender a maneira que a geometria, abordada em diferentes épocas, tem contribuído para desenvolver outras importantes teorias científicas, como a Teoria da Relatividade, de Albert Einstein.

No decorrer da resolução das tarefas, é constante a presença de **desenhos** utilizados pelos FPMat como **representações de objetos geométricos** como suporte para a constituição de **estratégias de resolução** para as situações propostas ou, até mesmo, como **prova para validar suas estratégias e raciocínio** ou para **demonstrar algum conceito matemático**, na intenção de encontrar falhas ou para comprovar a sua veracidade. Os desenhos construídos pelos FPMat, na maioria, **são representações de figuras prototípicas**, aquelas comumente utilizadas nas aulas de matemática.

O uso de representações de figuras geométricas no processo de resolução de situações-problema, quando é possível utilizá-las, é imprescindível para desenvolver elementos do

pensamento geométrico, principalmente quando se buscam registrar e/ou interpretar situações que foram constituídas a partir de imagens visuais e/ou mentais da situação proposta na tarefa (Gambini 2021; Lénárt, 2007).

Durante a sistematização de conceitos de Geometria Esférica, os FPMat estabeleceram relações com a Geografia, ao tratar as circunferências máximas como sendo os meridianos que dividem o Planeta Terra em 24 cunhas esféricas, respectivamente relacionadas ao tempo que o planeta leva para girar em cima do próprio eixo.

Os FPMat relacionaram os Trópicos de Câncer e Capricórnio, como sendo circunferências menores (que não possuem o mesmo diâmetro da esfera); e a Linha do Equador, como uma circunferência máxima. Esta articulação entre Geometria Esférica e Geografia é um dos possíveis exemplos mencionados pelos FPMat, relevante para discutir as aplicabilidades da matemática, principalmente das GNE, cujo ensino muitas vezes tem sido renegado na Educação Básica e no Ensino Superior, em especial na formação de professores de matemática (Pérez; Ortega; Gallardo, 2019).

6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

As tarefas propostas nesta investigação possibilitaram aos FPMat mobilizarem conhecimentos para o ensino de Geometria Esférica. Tais conhecimentos estão associados ao conteúdo geométrico, ao conteúdo pedagógico, às diferentes representações empreendidas nas resoluções e na utilização de materiais manipuláveis.

Com o apoio de materiais manipuláveis para a construção de representações de imagens mentais para cada caso proposto nas tarefas, os FPMat partiram de conhecimentos de GE, em específico o conceito de esfera estudado em Geometria Euclidiana Espacial, para elaborarem estratégias de resolução. Valer-se de materiais manipuláveis foi de fundamental valia no processo de aprendizagem de Geometria Esférica, pois propiciou aos FPMat realizarem desenhos para representar situações ou imagens e analisarem a veracidade do que estavam produzindo matematicamente.

Os FPMat, ao explorarem as tarefas propostas com o auxílio dos materiais manipuláveis, em associação com as ações do formador, puderam trilhar uma trajetória reflexiva sobre os conceitos e os processos de ensino e aprendizagem da Geometria Esférica e da GE. Os materiais manipuláveis funcionaram como elementos motivadores para a reflexão da prática docente em sala de aula, além de proporcionar a busca por explicações e fundamentos para as ações e as interações no decorrer da resolução das tarefas.

A linguagem utilizada pelos FPMat, no registro escrito de suas representações geométricas, não era apropriada pelo fato de eles usarem palavras que não condizem com o contexto teórico e conceitual da geometria e da própria matemática. Um exemplo foi quando o FPMat utilizou a palavra “terreno” no lugar de “superfície”, ao escrever sobre a dificuldade de representar um objeto plano em uma superfície esférica. O termo terreno esférico não é uma situação tão simples de se presenciar no cotidiano dos sujeitos.

Não se trata aqui de encontrar uma aplicação de tudo da geometria para tornar a explicação de seus conceitos acessíveis e conectados ao cotidiano dos sujeitos, mas a intenção é deixar claro que algumas palavras podem promover significados errôneos a respeito dos conceitos matemáticos, provocando a constituição de barreiras epistemológicas no processo de aprendizagem em Geometria.

As tarefas aqui propostas possibilitaram mobilizar elementos associados à visualização, em específico as imagens mentais, às representações externas, aos processos de visualização. Alguns FPMat mobilizaram habilidades de visualização. Esses elementos da visualização são imprescindíveis para o trabalho dos FPMat em tarefas matemáticas, inclusive para desenvolver o pensamento geométrico.

A visualização faz parte do pensar geometricamente, que consiste na construção de argumentos matemáticos convincentes, além de formular, raciocinar, conjecturar a partir de conceitos geométricos. Podemos afirmar que, durante o trabalho dos FPMat com as tarefas, houve indícios da manifestação do pensamento geométrico, sendo que, em alguns dos FPMat, de uma maneira explícita e, em outros, de uma maneira mais tímida.

Para pesquisas futuras, sugerimos analisar que conhecimentos para o ensino de Geometria Esférica são mobilizados por professores e futuros professores de matemática durante a resolução e discussão dessas tarefas e, conseqüentemente, para o ensino das GNE, a partir da exploração de tarefas que envolvam o uso de *softwares* de geometria dinâmica.

Outra possibilidade de recurso para o ensino de Geometria Esférica, considerada pelos FPMat, seria utilizar um globo terrestre para explicar o conceito de circunferência máxima, associando-a aos meridianos (que dividem o planeta em 24 fusos horários) e à linha do Equador (que divide o planeta em dois hemisférios, norte e sul). Sugeriram eles, ainda, usar o globo terrestre para explorar o conceito de pontos antipodais, que, neste caso, estarão representando os polos norte e sul do Planeta Terra.

Estes recursos contribuiriam para o modo de ver dos FPMat sobre as situações propostas. Eles afirmaram que estes recursos oportunizam enxergar possíveis encaminhamentos e estratégias de resolução das tarefas que não estavam evidentes e ao

alcance para alguns deles. Podemos observar a importância do ver (elemento associado a visão) para o desenvolvimento de tarefas geométricas e, conseqüentemente, de tarefas matemáticas, além de apresentar indícios do pensar geometricamente.

Os FPMat, ao resolverem as tarefas propostas, puderam mobilizar seus conhecimentos sobre o processo de ensino e aprendizagem de geometria, em especial de Geometria Esférica, foco desta investigação.

Explorar conceitos de Geometria não Euclidiana (GNE), especificamente a Geometria Esférica, no contexto da formação inicial, se configura como um significativo caminho para o processo de formação dos FPMat, principalmente se essa abordagem for acompanhada da discussão de conceitos da GE, pois facilita aos FPMat ressignificarem seus conhecimentos e aprimorarem suas práticas de ensino de Geometria.

7 REFERÊNCIAS

ANDRADE, M. L. T. D. **Geometria Esférica**: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no ensino básico. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

ASSIS, E. S. de. As histórias em quadrinhos nas aulas de geometria. *In*: MADRUGA, Z. E. F.; DE ASSIS, E. S. (org.). **Vivências e experiências em matemática**. Cruz das Almas (BA): EDUEFRB, 2021. p. 23-42.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Hiperbólica**. Fortaleza: Impa, 2008.

BARROS, R. C. P.; PAVANELLO, R. M. Relações entre figuras geométricas planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a BNCC? **JIEEM**, v. 15, n. 1, p. 11-19, 2022.

BLANCO, T. F. Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometria. *In*: FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA, 9., 2014, Quepos, Puntarenas, Costa Rica. **Actas de Congreso**. Quepos, Puntarenas, Costa Rica: Fundación CIENTEC, 2014. p. 1-13.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E. Uma abordagem de conceitos elementares de geometria não euclidiana: uma experiência vivenciada no ensino de matemática a partir de uma sequência didática. **Holos**, v. 1, p. 258-281, 2014.

BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. da. Desenvolvendo o raciocínio espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos. **Zetetiké**, Campinas, v. 26, n. 3, p. 464-485, set./dez. 2018.

CAVALCANTE, R. N. B.; SOUSA, M. H. R.; SOUSA, J. P. R. A interdisciplinaridade entre matemática e Geografia: inferindo conceitos de localização e Distâncias na cidade. **Revista Encantar – Educação Matemática e Sociedade**, Bom Jesus da Lapa, v. 1, n. 3, p. 7-20, set./dez. 2019.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. 3. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2018.

COUTINHO, L. **Trigonometria esférica**: a matemática de um espaço curvo. Rio de Janeiro: Interciência, 2015. 232p.

COWLEY, C. S. **Spherical and Hyperbolic Geometry in the high school curriculum**. 2009. Dissertação (Mestrado em Artes) - Presented to the Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Arts, Texas, 2009.

DOLCE, O.; POMPOE, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9**: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), **Handbook of research on teaching**. Nova Iorque: MacMillan, 1986. p. 119-161.

ERICKSON, F. Qualitative research methods for science education. **Second international handbook of science education**, p. 1451-1469, 2012.

EUCLIDES. **Os elementos**. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

GAMBINI, A. Five years of comparison between euclidian plane geometry and spherical geometry in primary schools: an experimental study. **European Journal of Science and Mathematics Education**, v. 9, n. 4, p. 230-243, 2021.

GAMBINI, A.; LÉNÁRT, I. Basic geometric concepts in the thinking of in-service and pre-service mathematics teachers. **Education Sciences**, v. 11, n. 350, 2021.

GOMES, M. P. **Geometria esférica**: uma proposta de estudo e atividades para a escola básica. 2014. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Fluminense, Niterói - RJ, 2014.

GONZATO, M.; BLANCO, T. F.; GODINO, J. D. Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. **Revista de Didáctica de las Matemáticas**. v. 77, p. 99-117, julio 2011.

GRANDO, R. C.; NACARATO, A. M.; GONÇALVES, L. M. G. Compartilhando saberes em Geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. **Caderno Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 39-56, jan./abr. 2008.

GREGOR, I. C. S. *et al.* O estudo de geometria esférica na formação de PM: uma experiência baseada na utilização de materiais manipuláveis. **Research, Society and Development**, v. 10, n.1, 2021.

GROLÁ, M. G.; GUALNDI, J. H. O ensino de geometria e o desenvolvimento do pensamento geométrico: um mapeamento de pesquisas realizadas no estado do Espírito Santo. **Revista Tangran**, v. 6, n. 1, p. 63-99, jan./mar. 2023.

GUILLÉN, G.; GONZALEZ, E.; GARCÍA, M.A. Critérios específicos de análise da geometria nos manuais escolares do ensino básico e secundário obrigatório. Análise a partir dos corpos da revolução. *In*: GONZÁLES M. J.; GONZÁLES M. T.; MURILLO, J (ed.). **Research in Mathematics Education**, 13, 3 ed. SEIEM. p. 247-258, 2009.

GUTIÉRREZ, Á. Visualization in 3-Dimensional Geometry: in search of a framework. *In*: PUIG, L; GUTIÉRREZ, Á. (ed.). **Proceedings of the 20**, Internacional Conference of the P.M.E., 1, p. 3-19. Valencia. Valencia: University of Valence, Spain, 1996.

GUTIÉRREZ, A. La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. *In*: Flores, P.; Ruiz, F; De La Fuente, M. (ed.). **Geometría para el siglo**, 21, p. 13-58. Badajoz: F.E.S.P.M. y Soc. Andaluza de Educación Matemática Thales, 2006.

GUVEN, B.; KARATAS, I. Students discovering spherical geometry using dynamic geometry software. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 40, n.3, p. 331-340, abr. 2009.

HONDA, A. M. C. **Matemática e Geografia**: uma interdisciplinaridade. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 108p, 2013.

JESUS, J. S. de; ASSIS, E. S. de. Aprendizagem de Geometria Esférica Por Meio do Geogebra. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 16, n. 3, p. 353-362, 2024.

JESUS, C. C. de; CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. de. Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 21-46, 2018.

KOVACEVIC, M. S. B. Geometria esférica: um estudo da interposição entre Matemática e Astronomia. **Rev. Prod. Disc. Educ. Matem.**, São Paulo, v.8, n.1, p.2-15, 2019

LÉNÁRT, I. Comparative geometry in general education. *In*: SZENDREI J. (ed.), **Proceedings of CIEAEM**, 59, Dobogókő, Hungary, 2007, p. 250-256.

LIVY, S., DOWNTON, A. Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 51, p. 150-160, 2018.

MARMOLEJO, G.-a.; ASTUDILLO, M. T. G. Control visual em la construcción del área de superficies planas em los textos escolares. Una metodología de análisis. **Revista**

Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa. [S. l.], v. 18, n. 3, p. 301-328, novembro, 2015.

MARMOLEJO, G.-A.; SÁNCHEZ, N.; LONDOÑO, S. Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias.** v. 12, n. 2, p. 18-28, diciembre, 2017.

OLIVEIRA, L. L. de; VELASCO, A. D. O ensino de geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON GRAPHICS ENGINEERING FOR ARTS AND DESIGN, 7, SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 18, 2007. Curitiba (PR). Anais [...], Livro de Resumos, Curitiba, 2007.*

PARANÁ. Diretoria de Educação. Departamento de Desenvolvimento Curricular. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP).** Curitiba, 2019

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná.** Curitiba: SEED/PR., 2021.

PAVANELLO, R. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké.** Campinas, v. 1, v.1, p. 7-18, 1993.

PÉREZ, H. J. G.; ORTEGA, M. V.; GALLARDO, O. A. A. Development of geometric thought. *In: Applies Mathematics Meeting and Statistic Meeting. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1329, 2019.*

REIS, J. D'A. S. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro (SP), 2006.

RIBEIRO, R. S. **Geometrias não-Euclidianas na escola:** uma proposta de ensino através da geometria dinâmica. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

SILVA, B. S.; CYRINO, M. C. C. T. Geometrias não euclidianas na formação de professores de matemática: reflexões de professoras formadoras experientes no ensino de Geometria. **Vidya, Santa Maria (RS),** v. 44, n. 1, p. 325-350, jan./jun. 2024.

SILVA, B. S. **Geometrias não euclidianas na formação de professores de matemática.** 2023. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2023, no prelo.

SMITH, C. R.; JULIE, C.; GIERDIEN, F. The integration of semiotic resources and modalities in the teaching of geometry in a grade 9 class in a South African high school: the four cases of congruency. **South African Journal of Education,** v. 40, n. 2, maio 2020.

SOUZA, L. R. **Geometrias não-Euclidianas na formação de professores**. 2021. 101 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, p.268-275, 1998.

SUÁREZ, C. R.; DELGADO, T. Á. S. Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación. **Educación Matemática**, v. 33, n. 1, p. 208-239, abr. 2021.

VIEIRA, A. F. M.; CYRINO, M. C. C. T. Pensamento geométrico: reflexões manifestadas por futuros professores de matemática em estudos do modelo de van Hiele. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n. 8, p. 286-314, dec. 2022.

VIEIRA, C. A. N.; BATISTA, E. B.; TAVARES, L. S. Explorando conceitos de geometria não-euclidiana com softwares de geometria dinâmica. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 18, p. 37–48, jul. 2020.

WENGER, E. Communities of Practice: the key to knowledge strategy. In: LESSER, E. L.; FONTAINE, M. A.; SLUSHER, J. A. (ed.). **Knowledge and Communities**. Butterworth-Heinemann, 2000. p. 3-20.

ARTIGO/CAPÍTULO 3

POTENCIALIDADES DE UMA TAREFA DE GEOMETRIA ESFÉRICA PARA PROMOVER O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Resumo: O artigo tem por objetivo discutir as potencialidades de uma tarefa sobre triângulo esférico para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico de futuros professores de matemática. Trata-se de uma investigação de natureza qualitativa, de cunho interpretativo, desenvolvida com nove futuros professores de matemática sobre uma tarefa de triângulo esférico aplicada na disciplina de “Metodologia e Prática de Ensino em Matemática”, do Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná - *Campus* de Paranavaí. Na análise, foi possível depreender que a tarefa possibilitou mobilizar: diferentes representações geométricas para triângulos; elementos relativos à visualização; e conhecimentos relacionados às geometrias. Discutir sobre tarefas de Geometria Esférica, quando associadas à Geometria Euclidiana em contextos de formação inicial, pode promover a compreensão do papel da tarefa na aprendizagem de conhecimentos de e para o ensino de Geometria e, por conseguinte, para desenvolver o pensamento geométrico.

Palavras-chave: Formação inicial de professores de matemática. Geometria esférica. Triângulos esféricos. Tarefa de geometria. Pensamento geométrico.

1 INTRODUÇÃO

As tarefas assumem um papel importante no processo de ensino e aprendizagem de matemática, e principalmente de geometria, não somente dos estudantes da Educação Básica, mas também dos professores e futuros professores dessa disciplina (Arbaugh; Brown; 2005; Christiansen; Walther, 1986; Doyle, 1983; Simon; Tzur, 2004; Stein *et al.*, 2007; Stein *et al.*, 2009; Stein; Smith, 1998; Vieira; Cyrino, 2022; Walls, 2005; Watson; Sullivan, 2008). Por mais que as tarefas sejam relevantes para o processo de ensino e aprendizagem de matemática, estudos a respeito dessa temática ainda são incipientes (Cyrino; Jesus, 2014), principalmente sobre tarefas para o ensino e aprendizagem de geometria.

Segundo Stein e Smith (1998), as tarefas oportunizam diferentes maneiras de compreender e perceber a matemática. Elas viabilizam entender o modo como os estudantes desenvolvem seu raciocínio, ao resolvê-las, e, ainda, o modo como aprendem a pensar matematicamente. Stein e Smith (1998) descrevem a tarefa como uma proposta de trabalho que é direcionada aos estudantes, isto é, uma “proposição feita pelo professor em sala de aula, cujo objetivo é concentrar a atenção dos alunos em uma determinada ideia matemática” (Stein

et al., 2009, p. 19).

As tarefas matemáticas referem-se a situações-problema desafiadoras que exigem raciocínios de alta demanda cognitiva para a sua resolução e que requer a utilização de procedimentos que façam conexões com os significados (Jesus; Cyrino; Oliveira, 2018; Stein; Smith, 1998). Tarefas são tanto problemas quanto aquelas de exploração que se enquadram “nos níveis de demanda cognitiva com procedimentos com conexões com os significados e fazer matemática, categorizados em elevado nível de demanda cognitiva” (Jesus; Cyrino; Oliveira, 2018, p. 22).

Refletir sobre as tarefas que são propostas aos estudantes da Educação Básica pode ser uma forma de os professores de matemática (PMat) e futuros professores de matemática (FPMat) estarem mais atentos aos processos de ensino e de aprendizagem de geometria. É necessário que compreendam o papel das tarefas no processo de ensino e aprendizagem, visto que suas escolhas podem influenciar diretamente na aprendizagem de seus estudantes.

Steele (2001, p.42) enfatiza que “nenhuma outra decisão que o professor toma tem um impacto tão grande nas oportunidades de os alunos aprenderem e na sua percepção do que é Matemática, como a seleção ou elaboração de tarefas”. Dessa forma, as ações do professor estão diretamente relacionadas com a sua maneira de ensinar matemática.

De acordo com Vieira e Cyrino (2022, p. 288), a geometria “é pouco trabalhada ou abordada” com os estudantes da Educação Básica, provavelmente pelo ensino precário tido pelos professores que ensinam matemática na formação inicial deles. As autoras destacam que há estudos que indicam o uso de tarefas que englobem o desenvolvimento do pensamento geométrico com futuros professores de matemática, de modo que esse conhecimento possa reverberar em sua prática profissional futura (Vieira; Cyrino, 2022).

Considerando a necessidade de (re)pensar a abordagem da GNE na formação de professores e na possibilidade de preparar o FPMat para o trabalho com esta geometria na Educação Básica, desenvolvemos na disciplina “Metodologia e Prática de Ensino de Matemática”, do Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná - *Campus* de Paranavaí, um trabalho com uma tarefa que explora o conceito de triângulo na Geometria Esférica.

No presente artigo, buscamos discutir as potencialidades de uma tarefa sobre triângulo esférico para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico de futuros professores de matemática.

A seguir, apresentamos a base teórica que fundamenta nossos argumentos em relação à tarefa de Geometria Esférica na Perspectiva do Ensino Exploratório, os procedimentos

metodológicos e o contexto de investigação, assim como a análise e a discussão dos resultados, que evidenciam as potencialidades da tarefa para a aprendizagem de conceitos geométricos.

2 TAREFAS DE MATEMÁTICAS E O ENSINO DE GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

As tarefas matemáticas são importantes instrumentos no processo de ensino e aprendizagem de matemática, inclusive de geometria. Elas influenciam os estudantes na escolha de estratégias de resolução, orientam sua atenção para diferentes características dos conteúdos matemáticos elucidados no enunciado e a processar em diferentes modos essas informações (Cyrino; Jesus, 2014; Doyle, 1983).

A atividade matemática é realizada pelos estudantes, após o professor propor uma tarefa matemática. A atividade se concretiza a partir de um conjunto de ações que são processos direcionados para o objetivo originado pela tarefa proposta (Christiansen; Walther, 1986; Cyrino; Estevam, 2023; Leontiev, 1978). De acordo com Leontiev (1978), a atividade matemática desenvolvida pelo estudante surge da necessidade de resolver uma determinada tarefa, que pode exigir dele realizar diferentes ações.

Stein e Smith (1998) descrevem a tarefa como uma proposta de trabalho direcionada aos estudantes. De acordo com Stein *et al.* (2000), as tarefas se configuram como uma situação (ou um conjunto de situações) organizada com um propósito: desenvolver uma ideia ou um conceito matemático específico “na interação entre ensino e aprendizagem” (Stein *et al.*, 2000, p. 25), em que o professor seleciona tarefas que promovam o engajamento dos estudantes no processo de ensino, que se constituem.

Stein *et al.* (2007, p. 346) afirmam que “as tarefas matemáticas, nas quais os alunos se envolvem, determinam o que eles aprendem em Matemática e como o aprendem”. Quando bem elaboradas e articuladas com os propósitos do professor, as tarefas possibilitam aos estudantes formularem estratégias de resolução, conjecturarem teoremas e propriedades geométricas, argumentarem e desenvolverem o raciocínio geométrico (Canavarro; Santos, 2012).

Tarefas são problemas de exploração que se enquadram, de acordo com Stein e Smith (1998), “nos níveis de demanda cognitiva com procedimentos com conexões com os significados e fazer matemática, categorizados em elevado nível de demanda cognitiva” (Jesus; Cyrino; Oliveira, 2018, p. 22).

As tarefas de elevado nível de demanda cognitiva, segundo Stein *et al.* (2009, p. 6), possibilitam utilizar procedimentos que “não podem ser usados sem compreensão do aluno que precisa se envolver com as ideias conceituais subjacentes aos procedimentos a fim de completar a tarefa com sucesso e desenvolver compreensão”.

A tarefa é uma proposição feita pelo professor em sala de aula com a intenção de concentrar a atenção de seus estudantes em uma determinada ideia matemática (Cyrino; Estevam, 2023; Stein *et al.* 2009). Quando uma tarefa é proposta pelo professor em sala de aula, essa se torna objeto para atividade dos seus estudantes.

São as tarefas que promovem diferentes tipos de representações (diagramas, figuras geométricas, registros escritos, materiais manipuláveis, tabelas e quadros, dentre outros), que potencializam a atenção dos estudantes no processo de aprendizagem e no desenvolvimento de significados. Isto é, as tarefas estimulam formas complexas de pensamento.

As tarefas matemáticas demandam dos PMat e dos FPMat conhecimentos que precisam ser discutidos no decorrer de toda a sua formação. Trabalhar com tarefas matemáticas na formação de professores pode potencializar sua aprendizagem (Chapman, 2013; Cyrino; Estevam, 2023), seus conhecimentos para ensinar matemática e seus conhecimentos acerca das tarefas matemáticas para o ensino.

Trabalhar com tarefas matemáticas na formação inicial possibilita aos professores construir suas próprias estratégias de resolução, negociarem significados com seus colegas após apresentar sua resolução, discutirem seus anseios e receios, além de reconhecerem suas dificuldades e buscar saná-las. Ao se trabalhar com tarefas com alto nível de demanda cognitiva na formação inicial de PMat, busca-se compreender a matemática em um todo e promover reflexões e conexões entre as diversas ideias matemáticas e generalizar do concreto para o abstrato.

A formação de PMat precisa, segundo Watson e Mason (2007), encorajá-los a “envolverem-se no pensamento matemático através do trabalho em tarefas relacionadas com a matemática, [...], refletir sobre a experiência de fazer sozinho tarefas relacionadas com a matemática, ..., analisando a estrutura de tarefas, incluindo propósito e recursos” (Watson; Mason, 2007, p. 207-208).

Além do mais, as tarefas matemáticas precisam oportunizar aos FPMat desafiar os métodos tradicionais de ensino e refletirem sobre as próprias experiências como professores quando alunos em processo de formação; e possibilitar o desenvolvimento de práticas de ensino que sejam adequadas aos conceitos a serem ensinados (Watson; Mason, 2007).

Muitas das propostas de tarefas para o ensino de Geometria estão relacionadas aos

conteúdos de álgebra, números e aritmética, sendo as geometrias muitas vezes relegadas a um segundo plano. O foco dessas tarefas, geralmente, são os conhecimentos algébricos e numéricos (Guillén; González; García, 2009; Guven; Karatas, 2009; Reis, 2006).

A GE ensinada nas escolas da Educação Básica, comumente, tem dado ênfase ao reconhecimento de formas e figuras geométricas planas e espaciais, que podem ser associadas a objetos físicos e aos cálculos de áreas de figuras e volumes desses objetos (Barros; Pavanello, 2022; Brum; Schuhmacher, 2014; Pavanello, 1993).

A GE na formação inicial de PMat, por vezes, tem sido trabalhada de uma forma axiomática, com a demonstração de teoremas e propriedades da própria GE e, em especial, da matemática em si. Em geral, os conteúdos de GE na formação inicial de PMat são utilizados nas demonstrações de teoremas e propriedades algébricas, numéricas e da Teorias de Conjuntos, em que a geometria auxilia no processo de provar ou comprovar tal fenômeno.

As GNE, mesmo que timidamente, estão presentes em currículos educacionais que orientam a Educação Básica, como no Currículo Estadual da Rede Paranaense (CREP) aprovado e implementado no ano de 2019 (Paraná, 2019) e no Novo Ensino Médio do estado do Paraná (Paraná, 2021) implementado em 2021, constituídos após a aprovação e a implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no ano de 2018 (Brasil, 2018).

Estudar as GE e as GNE na formação inicial e continuada de PMat se torna relevante, a fim de que sejam promovidas discussões que associem os processos de ensino e de aprendizagem para mobilizar e desenvolver o *pensamento geométrico*. Estudar as GNE na formação inicial é uma oportunidade para que os FPMat possam conhecer outros modelos geométricos, que representem situações do mundo contemporâneo, para além do modelo euclidiano, viabilizando e potencializando o desenvolvimento do *pensamento geométrico* (Silva; Cyrino, 2024; Vieira; Cyrino, 2022).

O FPMat, a partir do estudo de GNE, pode “estabelecer conexão das GNE com outros conceitos matemáticos; ampliar a compreensão de conceitos da própria GE; articular GNE com outras áreas do conhecimento; desenvolver explorações e generalizações de relações geométricas; propor investigações acadêmicas sobre conteúdos e princípios das GNE” (Silva; Cyrino, 2024, p. 343).

É preciso desenvolver habilidades de visualizar e de pensar criticamente, como destacam Vieira e Cyrino (2022, p. 287), para desenvolver “capacidades de raciocinar, argumentar, demonstrar, fazer suposições e inferências lógicas, reduzir objetos tridimensionais a duas dimensões, de perceber que as ideias geométricas são úteis na representação e na resolução de problemas”.

As GNE são previstas em alguns currículos da formação inicial de PMat, com a indicação de estudos introdutórios, mas isso raramente acontece e, quando acontece, é de uma maneira axiomática, com demonstrações e provas de teoremas e propriedades, seguindo com o rigor e o formalismo da matemática, sem analisar possíveis práticas pedagógicas e didáticas que permitirão ensiná-las (Silva, 2023, no prelo). Kaleff (2007, p. 94) aponta que “[...] a aquisição de conhecimentos geométricos não-euclidianos se apresenta como um significativo desafio aos meios de formação de professores”.

É relevante que os FPMat não conheçam apenas as definições e os resultados matemáticos sobre as GNE de um ponto de vista puramente acadêmico. Este conhecimento deve ser complementado com estudos de possíveis práticas para o ensino de geometrias e que possam contribuir para desenvolver o *pensamento geométrico* dos FPMat (Gambini; Lenárt, 2021; Guven; Karatas, 2009; Livy; Downton, 2018; Silva, 2023, no prelo; Silva; Cyrino, 2024).

Cumprir que, no processo de formação inicial de PMat, sejam discutidas questões históricas e filosóficas a respeito das GNE, de forma que o FPMat possa compreender as rupturas de paradigmas até então tomados como verdades absolutas e os avanços das geometrias e suas contribuições para o desenvolvimento da área da matemática (Vieira; Cyrino, 2022; Silva; Cyrino, 2024).

Discutir as potencialidades de tarefas para o ensino de GNE, em especial, de Geometria Esférica, pode contribuir para inseri-las na formação inicial de professores de matemática. Além do mais, podem contribuir com reflexões sobre os conhecimentos para o ensino de geometrias, visto que elas suscitam diferentes oportunidades para aprender os conceitos matemáticos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E O CONTEXTO DA INVESTIGAÇÃO

A presente investigação⁴⁶, de natureza qualitativa e cunho interpretativo (Erickson, 1986, 2012), foi desenvolvida com nove FPMat⁴⁷ regularmente matriculados na disciplina de “Metodologia e Práticas de Ensino de Matemática”, ofertada no 2.º ano do Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR/Campus de Paranavaí.

⁴⁶ Aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Londrina - UEL (Parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231).

⁴⁷ Indicados pelos nomes fictícios, de acordo com o termo de consentimento livre e esclarecido aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UEL (Parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231) nomeadamente: Artemis, Eros, Flora, Ícaro, Loki, Orfeu, Perseu, Tesália e Teseu.

Trata-se de uma disciplina anual com uma carga horária total de 120 horas, sendo 60 horas teóricas e 60 horas práticas, distribuídas em 4 horas/aulas semanais. Para esta investigação, foram disponibilizadas 12 horas/aulas.

No presente artigo, discutimos as potencialidades de uma tarefa sobre triângulo esférico (Quadro 1), construída na perspectiva do Ensino Exploratório (Canavarro, 2011; Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012) e adaptada de Gomes (2014) pelo primeiro autor.

Quadro 1 – Tarefa “Explorando outras Superfícies Geométricas”

1. Em uma folha de papel A4, marque três pontos distintos A, B e C não alinhados. Construa os segmentos de reta AB, BC e AC e responda:
 - a) Que figura geométrica convexa é constituída pelos pontos A, B e C? Descreva algumas de suas características.
 - b) Determine as medidas dos ângulos internos de cada um dos vértices desta figura geométrica.
 - c) Determine a soma desses ângulos.
2. Agora, em posse de uma bola de isopor e de uma caneta colorida, marque três pontos A, B e C distintos e não alinhados. Em seguida, ligue os pontos A e B, A e C, B e C e responda:
 - a) Que figura geométrica fechada é constituída pelos pontos A, B e C? Descreva algumas de suas características.
 - b) Determine as medidas dos ângulos internos de cada um dos vértices desta figura geométrica.
 - c) Determine a soma desses ângulos.
3. Analisando e comparando as suas respostas nos itens 1 e 2, anteriormente, responda:
 - a) Que conclusões podemos chegar a partir desta comparação?
 - b) Se aumentarmos as medidas dos lados desses triângulos, o que acontece com as medidas dos ângulos internos?
4. Em uma bola de isopor e com o auxílio de uma caneta colorida, marque dois pontos A e B de forma que sejam opostos entre si. Em seguida, trace duas circunferências máximas que passem por estes pontos e uma terceira circunferência máxima que não passe pelos pontos A e B.
 - a) Em quantas partes as três circunferências máximas dividem a superfície da bola de isopor?
 - b) A figura formada sob a superfície da bola de isopor pelas três circunferências máximas lembra alguma representação? Apresente uma justificativa para sua resposta.

Fonte: Adaptada de Gomes (2014, p. 62)

A tarefa foi construída na perspectiva de Ensino Exploratório por considerá-la como potencial para promover a aprendizagem dos estudantes, visto que as orientações curriculares nacionais e estaduais para a Educação Básica apontam a necessidade de se articularem

diferentes tendências de ensino em matemática de forma que se possibilite construir o conhecimento matemático.

A Perspectiva do Ensino Exploratório, segundo Rodrigues (2015, p. 48),

[...] assume papéis distintos, para os professores e para os alunos, dos assumidos em uma perspectiva tradicional de ensino. No ensino tradicional o foco, de modo geral, situa-se no professor e em uma perspectiva de transmissão de conteúdo. Contudo, na abordagem do ensino exploratório o foco está nas relações entre os processos de ensino e de aprendizagem.

Cyrino e Oliveira (2016) destacam que, na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática, professor e estudante tem papéis importantes no processo de ensino e de aprendizagem, visto que, nessa perspectiva, o professor não explica todo o conteúdo e não apresenta todas as estratégias de cálculo como é usual no ensino diretivo. Pelo contrário, ele é responsável por selecionar criteriosamente tarefas desafiadoras, que “envolvam os alunos em atividade matemática significativa e favoreça o seu raciocínio e compreensão dos conceitos e processos matemáticos” (Cyrino; Oliveira, 2016, p. 23).

No Ensino Exploratório, o conhecimento é tratado sob uma perspectiva situada e dialógica, que integra a ação em cooperação com outros e a reflexão sobre o que foi aprendido nesse processo. A ênfase deve estar nos alunos e nas condições que lhes favoreçam participar na atividade de inquirição, colaborativa e individualmente. (Estevam; Cyrino; Oliveira, 2015, p. 168.)

O objetivo dessa tarefa foi explorar tópicos de Geometria Esférica, por meio da construção e da exploração de um triângulo esférico, para que pudessemos analisar conceitos da Geometria Esférica mobilizados pelos FPMat. Para a exploração da tarefa, cada item que a compõe foi entregue separadamente, isto é, um a um, para que os FPMat pudessem, em duplas, resolver e anotar todas as suas estratégias de resolução, bem como as suas reflexões e possíveis questionamentos relacionados ao conteúdo envolvido, para serem apresentados posteriormente na discussão coletiva (grande grupo).

Cada dupla de FPMat recebeu folhas de papel A4 brancas, folhas de papel A4 coloridas, bolas de isopor, régua, tesoura, cola, canetas coloridas, fita métrica e elásticos para auxiliar na resolução da tarefa. Para a resolução de cada item da tarefa, destinamos 20 minutos e, quando necessário, foram acrescentados mais 10 minutos.

Nesse tempo, o Formador monitorou e orientou as duplas no processo de resolução de cada item da tarefa e na discussão em pares, analisando as estratégias, questionando as intencionalidades das respostas e das reflexões escritas, auxiliando nas possíveis dúvidas que surgiam. Esse processo foi importante para que ele pudesse selecionar e sequenciar as

resoluções das duplas para, conseqüentemente, apresentá-las no quadro e desencadear a discussão coletiva na busca de sistematizar as aprendizagens relacionadas aos conteúdos de Geometria Esférica.

A sequência para apresentação das resoluções das duplas teve como critério primeiro as resoluções incorretas, seguidas das resoluções parcialmente corretas e das resoluções corretas, sendo desconsideradas as resoluções tidas como semelhantes.

Fazem parte do conjunto de informações analisadas nesta investigação os registros escritos dos FPMat e o diário de bordo do Investigador, as gravações em áudio das discussões de cada uma das duplas de FPMat, durante a resolução da tarefa e das discussões coletivas, além das reflexões produzidas pelos FPMat ao final de cada aula

Com a intenção de discutir as potencialidades desta tarefa para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico de FPMat, assumimos a perspectiva de análise interpretativa de Erikson (1986, p. 156, tradução nossa⁴⁸) que se “preocupa com as especificidades do significado e da ação na vida social que ocorrem em cenas concretas de interação”. A partir desta perspectiva de análise interpretativa, estruturamos nosso processo analítico em cinco momentos.

No primeiro momento, identificamos nos registros dos FPMat evidências que possibilitam argumentar sobre potencialidades da tarefa para o desenvolvimento do pensamento geométrico (Duval, 1999; Gutiérrez, 1996, 2006). No segundo momento, buscamos identificar, nas discussões gravadas em áudio de cada uma das duplas de FPMat e nas discussões coletivas, indícios que permitissem analisar essas potencialidades.

No terceiro momento, selecionamos episódios em áudios que se associavam aos indícios evidenciados nos registros dos FPMat com a intenção foi de identificar padrões comuns entre a fala e registros dos FPMat.

No quarto, os padrões identificados foram agrupados por similaridades entre os episódios selecionados nas gravações com os registros escritos, que, por meio de um processo de codificação, resultaram em três unidades de análise, nomeadamente mobilização: de diferentes representações geométricas de triângulos, de elementos da visualização (representações externas, processos e habilidades de visualização) e de conhecimentos associados às geometrias.

O quinto momento se caracteriza pelas inferências realizadas entre as informações obtidas com os aportes teóricos da literatura na expectativa de articular um diálogo entre essas

⁴⁸ “[...] concerned with the specifics of meaning and action in social life that takes place in concrete scenes of face-to-face interaction.” (Erikson, 1986, p. 156).

unidades de análise e o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Na próxima seção, descremos cada uma das unidades de análise a partir de episódios que consideramos significativos para representá-las, para, na seção subsequente, discutirmos os resultados (quinto momento) tendo em conta a relevância da tarefa no processo de desenvolvimento do pensamento geométrico.

4 AS POTENCIALIDADES DA TAREFA “EXPLORANDO OUTRAS SUPERFÍCIES GEOMÉTRICAS”

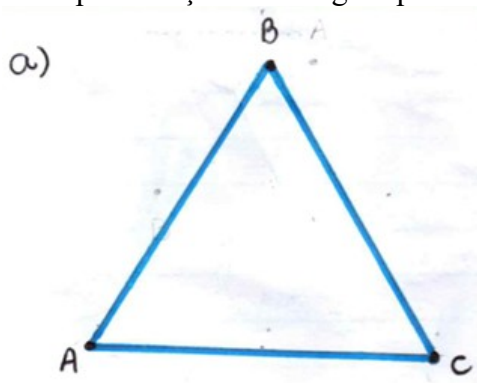
Nessa seção, apresentamos a análise das informações obtidas durante o processo de investigação que aponta que a tarefa oportunizou aos FPMat mobilizarem diferentes representações geométricas de triângulos; elementos da visualização; conhecimentos associados às geometrias. Estes indícios se afiguram potencializadores ao desenvolvimento do pensamento geométrico dos FPMat, inclusive para o ensino de Geometria Esférica.

4.1 MOBILIZAÇÃO DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS DE TRIÂNGULOS

Na resolução da tarefa, alguns itens – itens 1 e 2 da tarefa – solicitavam a construção de representações geométricas de triângulos no plano e de triângulos na superfície de uma esfera e foram fornecidas orientações para a constituição das representações destes triângulos.

A Figura 1 é uma representação de um triângulo plano, construído por Artemis, durante a resolução do item 1 da tarefa, semelhante àquelas comumente utilizadas nas salas de aula pelos professores de matemática.

Figura 1 – Representação de triângulo plano - Artemis

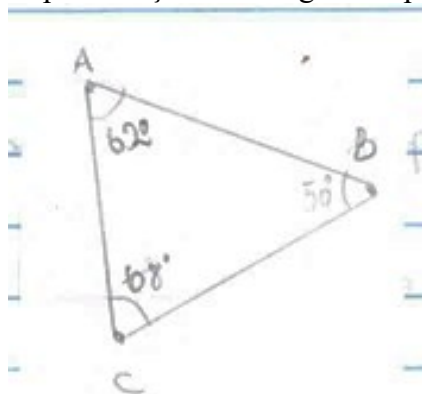


Fonte: Registro do dia 23/08/2023

Na Figura 1, Artemis registra uma **representação comumente utilizada pelos professores de matemática** por ser, na maioria das vezes, a representação mais utilizada na Educação Básica e ser facilmente reconhecida pelos estudantes como um triângulo. Na situação de **um triângulo ser representado no plano com uma leve inclinação** em relação à linha horizontal, os estudantes da Educação Básica e até mesmo professores e futuros professores não o reconhecem como um triângulo representado no plano.

Uma representação de um triângulo levemente inclinado em relação à linha horizontal no plano é feita por Teseu (Figura 2). Diferentemente das representações utilizadas, a representação do triângulo feita por Teseu **tem a base desenhada na vertical com leve inclinação**, mas que também é uma representação geométrica de um triângulo no plano.

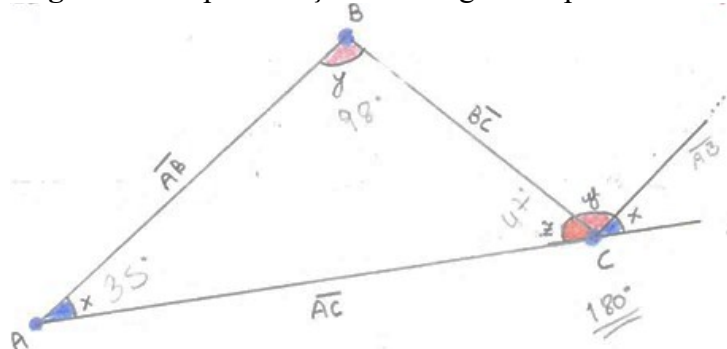
Figura 2 – Representação de triângulo no plano - Teseu



Fonte: Registro do dia 23/08/2023

Na Figura 3, apresentamos outra representação de triângulo no plano levemente inclinado construído por Ícaro. A representação do triângulo feita por Ícaro tem a **base levemente inclinada** em relação a uma **linha horizontal imaginária**.

Figura 3 – Representação de triângulo no plano - Ícaro



Fonte: Registro do dia 23/08/2023

A partir da construção destas representações, foi promovida uma discussão coletiva com os FPMat sobre quais delas estariam corretas, com a intenção de que afirmassem que todas são representações de triângulos e de que **evidenciassem características da figura geométrica triangular**. Houve certa confusão entre os FPMat sobre quais seriam as características e os elementos de uma figura plana triangular.

No item 2 da tarefa, os FPMat tinham a orientação de construir de um triângulo sobre a superfície de uma esfera. Em posse de uma bola de isopor (que estaria representando uma esfera maciça) e com uma canetinha colorida, os FPMat marcaram os pontos e com o auxílio de um elástico ligaram os pontos, formando um triângulo representado na superfície da bola de isopor. A Figura 4 apresenta uma possível representação para um triângulo construído sobre a superfície de uma esfera, no caso sobre a superfície de uma bola de isopor.

Figura 4 – Representação do triângulo na superfície da bola de isopor - Eros



Fonte: Registro do dia 23/08/2023

Tesália, ao concluir a construção do triângulo sobre a superfície da bola de isopor (Figura 5), afirmou que o **triângulo construído não é um triângulo** e que sua representação ficou equivocada (Quadro 2).

Figura 5 – Representação do triângulo na superfície da bola de isopor - Tesália



Fonte: Registro do dia 23/08/2023

Quadro 2 – Diálogo entre Tesália e Flora

Tesália: (Pergunta a FPMat Flora) *O que deu no seu?*

Flora: *Ah!?*

Tesália: *O seu deu a mesma coisa que o meu?*

Flora: *O meu deu!*

Tesália: *O quê?*

Flora: *Um triângulo!*

Tesália: *Desse jeito um triângulo? Para mim não parece um triângulo!*

Flora: *Porque você fez muito distante! Mas o seu é tipo este daqui! (Flora se referindo ao triângulo plano.). Qual é a única figura que se constrói com três pontos?*

Tesália: *Então! Um triângulo!*

Flora: *Um triângulo!*

Tesália: *Então, vai! Não ficou um triângulo certinho, assim.*

Flora: *Uh!?*

Tesália: *Não ficou um triângulo certinho. Não adianta falar que é! Olha aqui e dizer que é um triângulo. Não gostei do meu desenho.*

Flora: *Por quê?*

Tesália: *Porque não é um triângulo.*

Fonte: Áudio gravado no dia 30/08/2023.

As explicações de Tesália (Quadro 3) para a sua representação geométrica de triângulo sobre a superfície da bola de isopor pode estar associada à sua **limitação à GE**, pelo fato de ter acesso apenas aos conteúdos de Geometria Euclidiana, e a ausência de conhecimentos sobre as GNE. Isso pode se referir ao conhecimento e à formação (escolar e acadêmica) dela, o seu acesso aos conteúdos de GNE, que não foram exploradas possibilidades de representações de figuras geométricas em outras de superfícies ou dimensões.

Quadro 3 – Conversação entre Tesália e Formador

Flora: *Você concorda que é um triângulo?*

Tesália: *Concordo que é um triângulo! Mesmo sem saber como identificar o meu como um triângulo. Será que aqui deveria ser mais inclinado? É?*

Flora: *O quê?*

Tesália: *Aqui deveria ser mais inclinado para ser um triângulo?*

Formador: *Calma! Eu não entendi seu raciocínio. Vamos lá!*

Tesália: *Aqui, os lados que eu formei teriam que ser mais inclinado para ser um triângulo?*

Formador: Quando você diz mais inclinado, está se referindo ao ângulo ser mais fechado ou mais aberto?

Tesália: Mais fechado.

Formador: Estes dois segmentos aqui deveriam estar mais abertos ou mais fechados?

Tesália: Está muito aberto. Eles teriam que ser um pouco mais fechado.

Formador: Se diminuir a abertura entre esses segmentos de retas, faria diferença?

Tesália: Sim! Para mim faria diferença. Eu enxergaria melhor o triângulo.

Formador: Você conseguiria enxergar o triângulo? Você teria uma melhor visão do triângulo?

Tesália: Sim! É!

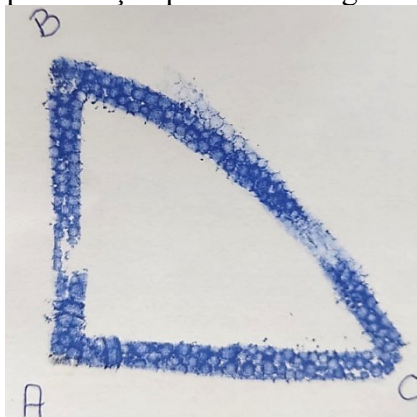
Fonte: Áudio gravado no dia 30/08/2023

Outra situação que pode estar relacionada à negação de Tesália quanto à representação de triângulo sobre a superfície da bola de isopor é a posição dos pontos tomados por ela. Isto é, a posição e a distância entre os pontos podem tê-la influenciado em não aceitar a representação construída como um triângulo na superfície de uma esfera.

Durante a discussão coletiva, o Formador chamou a atenção de todos os FPMat para a representação de triângulo na superfície da bola de isopor construída por Tesália. Neste momento, foi abordada com os FPMat a disposição dos pontos sobre a superfície da bola de isopor, que proporcionou grande amplitude entre os arcos de circunferência máxima (ângulos esféricos) e que a soma dos seus ângulos internos do triângulo desenhado sobre a superfície da bola de isopor foi superior à soma dos demais FPMat.

Orfeu, durante a resolução do item 2, reforçou com canetinha colorida os traços que representavam os lados do triângulo sobre a superfície da bola de isopor (arcos de circunferência máxima) e, em uma folha de papel A4 branca, representou o triângulo desenhado (Figura 6).

Figura 6 – Representação plana do triângulo esférico - Orfeu



Fonte: Registro do dia 30/08/2023

Orfeu revelou que teve a curiosidade de saber como ficaria a representação de um triângulo esférico na superfície plana, e com isso pensou em carimbar o triângulo esférico que

havia construído no plano. Esta é outra **representação de triângulo, diferente** daquelas que estamos acostumados a experienciar nas aulas de matemática.

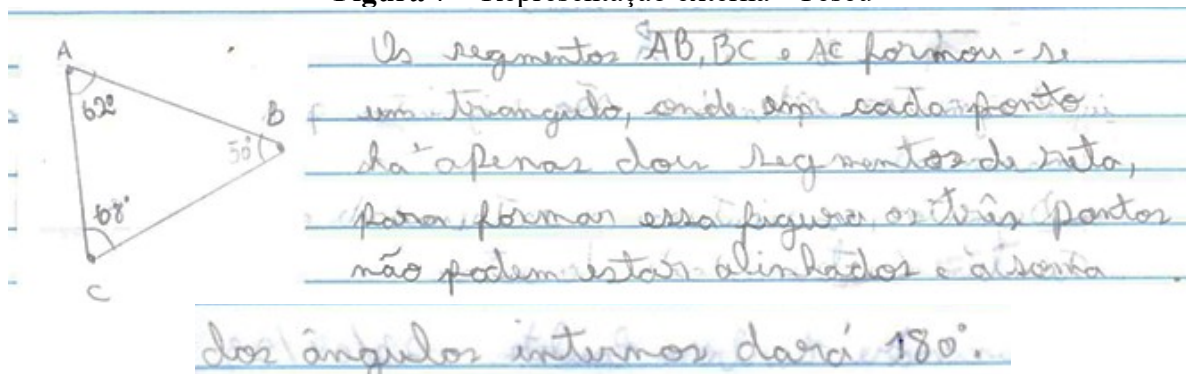
A resolução da tarefa proposta oportunizou os FPMat analisarem e reconhecerem diferentes representações geométricas de triângulo, tanto na superfície plana quanto na superfície de uma esfera. Podemos inferir que a representação geométrica é um importante elemento no processo de aprendizagem de geometrias, inclusive da Geometria Esférica.

4.2 MOBILIZAÇÃO DE ELEMENTOS DA VISUALIZAÇÃO

Nas estratégias e nas resoluções apresentadas pelos FPMat, é possível observar a presença de elementos da visualização. Os elementos mais empreendidos pelos FPMat são os registros verbais e gráficos associados à representação externa, à interpretação visual de informações e de imagens mentais referentes ao processo de visualização, e à constância perceptiva e a rotação mental referentes as habilidades de visualização.

Na Figura 7, temos o **registro verbal e gráfico** de Teseu para o item 1 da tarefa referente à representação de um triângulo no plano. Teseu buscou justificar a sua construção a partir das orientações presentes no enunciado do item 1, além de responder as alternativas.

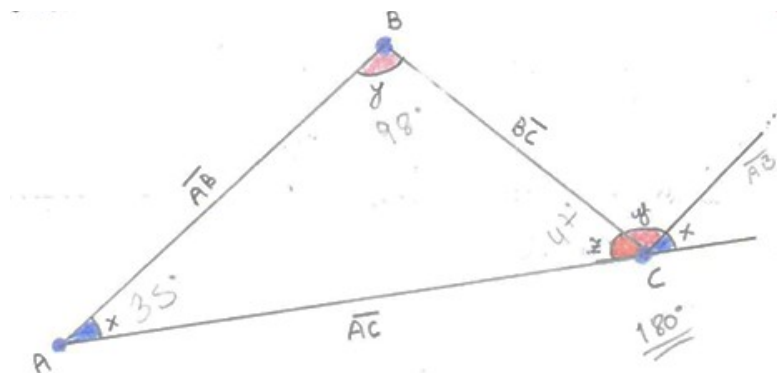
Figura 7 – Representação externa - Teseu



Fonte: Registro do dia 23/08/2023

A Figura 8 é uma representação externa, um **registro gráfico**, de um triângulo construído por Ícaro. Para justificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , Ícaro demonstrou por meio de um **registro gráfico** a validade de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , ao transportar os ângulos internos do triângulo sobre uma reta retratando um ângulo raso.

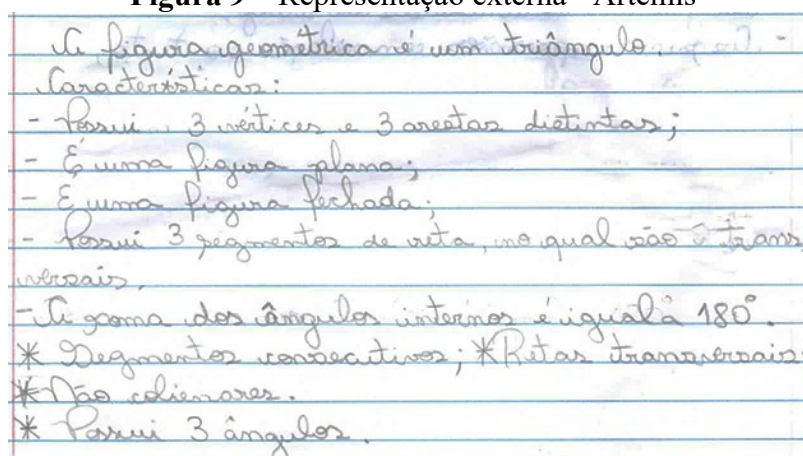
Figura 8 – Representação externa do triângulo - Ícaro



Fonte: Registro do dia 23/08/2023

Artemis, além de utilizar do registro gráfico, utilizou o **registro verbal** para resolver o item 1 da tarefa (Figura 9). Neste registro, ela descreveu algumas características sobre triângulos no plano, afirmando se tratar de uma figura plana e fechada que possui três ângulos internos, três vértices e três lados, que são segmentos de reta.

Figura 9 – Representação externa - Artemis



Fonte: Registro do dia 23/08/2023

Para o item 2 da tarefa, Artemis mobilizou a **representação gráfica**, ao desenhar sobre a superfície da bola de isopor uma representação de triângulo e a **representação verbal** na intenção de registrar o que observou no instante em que estava construindo o triângulo na bola de isopor (Figura 10).

Figura 10 – Representação externa do item 2 - Artemis

2) a. É um triângulo.
 → Possui 3 vértices e 3 lados de circunferência;
 → Possui 3 ângulos;
 → É uma figura fechada;
 → Possui segmentos de reta consecutivos;
 → Possui retas transversais;

Fonte: Registro do dia 30/08/2023

Perseu mobilizou a **representação externa** (registros verbal e gráfico) para apresentar sua estratégia de resolução para o item 2 da tarefa (Figura 11).

Figura 11 – Representação externa do item 2 - Perseu

a) um triângulo, que possui 3 lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e três ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.
 b) $\hat{A} = 67^\circ$, $\hat{B} = 84^\circ$ e $\hat{C} = 73^\circ$
 c) 224°

Fonte: Registro do dia 25/08/2023

O subprocesso de interpretação visual de informações pode ser observado no instante em que os FPMat **interpretam as informações** contidas nos enunciados de cada item da tarefa e **transformam em registros gráficos e verbais**. Isto é, para elaborarem estratégias de resolução, os FPMat realizaram mudanças entre os registros escritos e gráficos, principalmente ao **converter o enunciado** de cada item e o **registro escritos e gráficos**.

O subprocesso de interpretação visual de imagens também foi mobilizado pelos FPMat, o qual consiste em convenções visuais entre os desenhos de representações de triângulos e o uso de vocabulário dos conceitos geométricos. Este subprocesso pode ser observado nas Figuras 7 e 8, em que FPMat puderam expor seus conhecimentos de geometria por meio de **desenhos e escritas** para justificar suas construções de representações de triângulos.

Durante a discussão em duplas, é notória a mobilização do subprocesso de interpretação visual de imagens em que os FPMat buscaram **construir mentalmente imagens** que pudessem explicar suas estratégias e raciocínios aos companheiros, como se estivessem realizando uma **leitura e uma interpretação** de imagens mentais.

As habilidades de visualização identificadas no decorrer da resolução da tarefa foram: constância perceptiva e rotação mental. Nos itens 1 e 2 da tarefa, é solicitado aos FPMat que descrevessem as características da figura geométrica construída, reconhecendo importantes **propriedades do triângulo** representado no plano e na superfície de uma esfera.

Essa é uma particularidade da constância perceptiva, que possibilita **reconhecer propriedades específicas** de um objeto físico ou mental, além de reconhecê-lo quando é real ou uma simples representação que pode ser percebida em diferentes posições, conforme podemos observar nas Figuras 7 e 8.

Outra habilidade de visualização presente nas estratégias de resolução dos FPMat é a rotação mental, que consiste na realização de movimentos do objeto físico ou mental que é referente a capacidade de construir imagens mentais e movimentá-las mentalmente, isto é, além de **criar uma imagem mental** que represente a situação proposta, o sujeito tem a possibilidade de **alterá-la mentalmente** por meio de movimentos, até que se consiga obter uma representação mental coerente para o problema geométrico.

4.3 MOBILIZAÇÃO DE CONHECIMENTOS ASSOCIADOS ÀS GEOMETRIAS

No que se refere às aprendizagens de conceitos geométricos, os FPMat puderam ressignificar importantes conhecimentos sobre triângulos planos, que até aquele presente momento eram tidos como verdade absoluta, ao considerarem a GE. Nas discussões coletivas acerca dos itens 1 e 2 da tarefa, os FPMat revisitaram conceitos de reta, semirretas e segmentos de reta, além de segmentos de reta consecutivos.

A respeito do triângulo, os FPMat puderam discutir sobre as características e os elementos de um triângulo no plano, observando que os lados de um triângulo no plano são segmentos de reta consecutivos, que o encontro desses segmentos é um ponto, denominado vértice, e que a inclinação entre os segmentos de retas é denominada ângulo. Concluímos a exploração do triângulo no plano, discutindo a soma dos ângulos internos, que no plano é 180° .

Quanto ao triângulo na superfície de uma esfera (triângulo esférico), os FPMat puderam analisar que **os seus lados são** compostos por **arcos de circunferência máxima**, além de possuir **três vértices** e **três ângulos**. Na Figura 12, temos o registro da FPMat Artemis para o item 3 da tarefa no qual afirma que há diferenças entre as representações de triângulos, pois estão em dimensões diferentes.

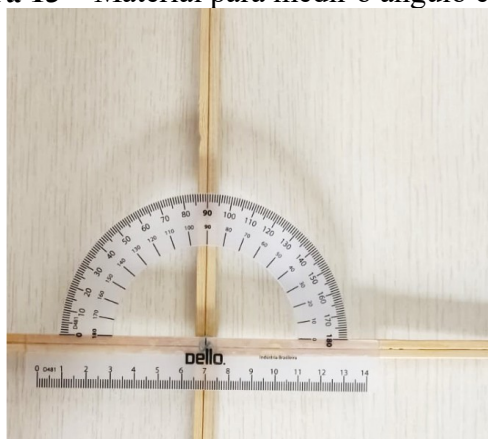
Figura 12 – Representação escrita para o item 3 - Artemis

a). A partir dos exercícios anteriores, há diferença na nomenclatura dos elementos, tais como lado - arco. Evidenciamos distinções entre a soma dos ângulos internos, pois, são representados em dimensões diferentes, região plana-retas e região esférica - curvas. Além disso, também concluímos que o triângulo esférico contém diâmetro.

Fonte: Registro do dia 06/09/2023

Para determinar a **medida dos ângulos internos de um triângulo esférico**, os FPMat manipularam um equipamento (Figura 13), construído pelo primeiro autor desta investigação. O funcionamento deste equipamento é semelhante à medição que é realizada no plano, em que as varetas de bambu são as retas tangentes aos arcos de circunferência máxima com a reta horizontal fixa ao transferidor e à reta vertical manipulável para indicar a medida do ângulo entre as retas e, conseqüentemente, a medida do ângulo esférico entre os arcos de circunferência máxima.

Figura 13 – Material para medir o ângulo esférico



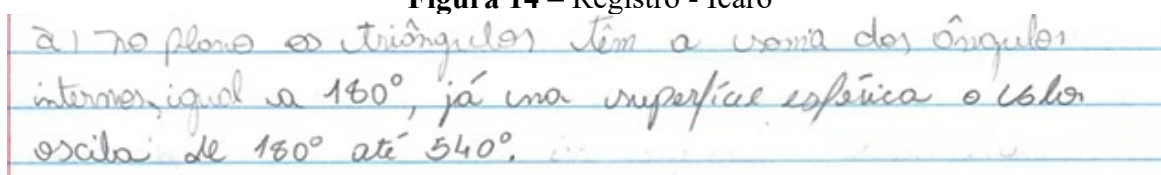
Fonte: Autores

A medida do ângulo esférico de um triângulo esférico é **igual a medida do ângulo plano, formado pelas retas tangentes aos dois arcos de circunferência máxima que formam o ângulo esférico**. Isto é, se as retas tangentes possuem vetores diretores em relação aos dois arcos de circunferência máxima, o ângulo entre os vetores é o ângulo esférico (Coutinho, 2015).

Ao medirem os ângulos esféricos do triângulo esférico, os FPMat notaram que, ao somarem os valores obtidos, teriam um resultado superior a medida da soma dos ângulos internos de um triângulo plano. Isto é, que o resultado da **soma dos ângulos esféricos internos de um triângulo esférico é superior a 180°** , como rotineiramente é definido na GE.

Na Figura 13, podemos observar o registro do Ícaro sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo na superfície de uma esfera, **reconhecendo que nem sempre o resultado da soma dos ângulos será 180°** , como na GE. Este reconhecimento se desenvolveu após as construções e manipulações de materiais feita pelo FPMat.

Figura 14 – Registro - Ícaro

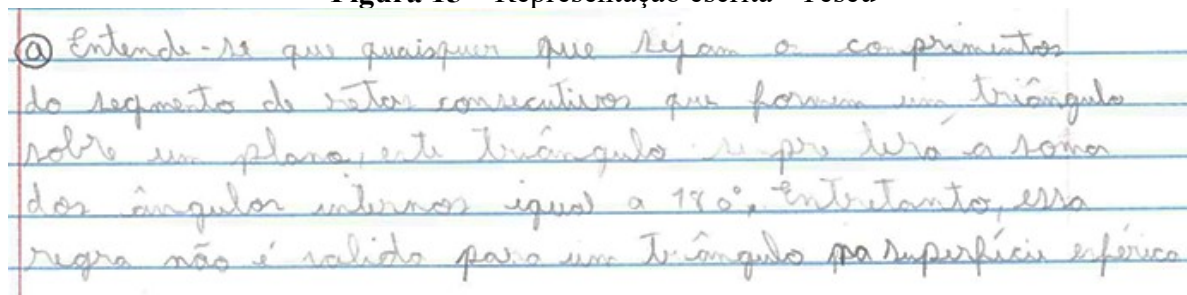


a) No plano os triângulos têm a soma dos ângulos internos igual a 180° , já na superfície esférica o valor oscila de 180° até 540° .

Fonte: Registro do dia 06/09/2023

Quando questionados sobre a possibilidade de aumentar a medida dos lados de um triângulo no plano, os FPMat responderam que, no triângulo plano, têm-se a **alteração na medida da área e do perímetro** do triângulo, porém mantendo a medida de 180° para a soma dos ângulos internos do triângulo. Já sobre a possibilidade de aumentar os lados de um triângulo na superfície de uma esfera, os FPMat argumentaram que, além de alterar a área e o perímetro do triângulo esférico, os **ângulos esféricos também sofrem alterações** e, consequentemente, a **soma dos ângulos esféricos** internos do triângulo esférico pode aumentar, dependendo da situação.

Figura 15 – Representação escrita - Teseu



@ Entende-se que quaisquer que sejam os comprimentos do segmento de retas consecutivos que formam um triângulo sobre um plano, este triângulo sempre terá a soma dos ângulos internos igual a 180° . Entretanto, essa regra não é válida para um triângulo na superfície esférica.

Fonte: Registro do dia 06/09/2023

Diante desses fatos, os FPMat puderam compreender que **não é todo triângulo que tem a soma dos ângulos internos igual a 180°** . Isso só acontece nos triângulos representados

no plano euclidiano e que seguem as definições e propriedades da GE, e que devem estar atentos para a superfície com a qual estão lidando.

A tarefa proposta oportunizou aos FPMat ressignificarem conhecimentos sobre triângulos que já tinham sido construídos anteriormente, além de poderem aprender novos conhecimentos sobre triângulos esféricos e de GNE. Podemos inferir que a tarefa contribuiu para a aprendizagem dos FPMat, bem como para a construção de conhecimentos para o ensino de Geometria Esférica e da desconstrução de algumas verdades tidas como absolutas na GE e, inclusive, para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

5 O PAPEL DA TAREFA PARA PROMOVER O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

A análise das informações obtidas a partir da resolução dos FPMat possibilitou identificar potencialidades da tarefa para a mobilização de diferentes representações geométricas de triângulos; de elementos da visualização e de conhecimentos associados às Geometrias. Nessa seção, discutimos o papel dessas potencialidades para desenvolver o *pensamento geométrico*.

As **diferentes representações de triângulos mobilizadas** pelos FPMat destacam a forma de comunicação escrita e gráfica empreendidas durante a resolução da tarefa (Duval, 1999, 2014; Parzysz, 1988). As representações externas (registros escritos e gráficos) auxiliaram os FPMat na resolução da tarefa proposta, sendo uma oportunidade para raciocinar, argumentar, conjecturar, demonstrar e fazer suposições e inferências lógicas para a resolução do problema geométrico, bem como para a construção do conhecimento sobre geometrias e para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

De acordo com Martinho e Rocha (2018, p. 34):

O ato de escrita, forçando a explicitação de conjecturas e conclusões, constitui uma oportunidade para elucidar, organizar e consolidar o pensamento do aluno, e desenvolver o conhecimento matemático, a capacidade de resolver problemas, o poder de abstração bem como a capacidade de raciocínio e a confiança em si próprio [...].

As diferentes representações viabilizam diferentes formas de interpretar uma informação que pode ser obtida a partir da exploração do enunciado da tarefa, da representação mental ou física, que foram construídas, e da interpretação que se tem da representação construída, podendo ser convertida em outras representações mentais ou físicas

(registro escrito ou gráfico). Observa-se que a mobilização de **representações de triângulos**, logo no início da resolução da tarefa, contribui para a **mobilização de elementos da visualização**.

Durante a resolução da tarefa, os FPMat mobilizaram elementos da visualização para **produzir informações visuais**, tanto físicas quanto mentais, além de realizarem transformações entre imagem e informação verbal ou de uma imagem em outra (Duval, 2014; Sarama; Clements, 2009). Segundo Duval (2014, p. 11), a visualização está muito além de uma mera “maneira perceptual espontânea de ver” uma simples figura.

A visualização está no cerne do processo de aprendizagem de geometrias, em especial no processo de ensino e aprendizagem de Geometria Esférica, pois exibe **uma organização de relações matemáticas** que consiste em apreender todas as configurações possíveis dessas relações e diferenciar o que é ou não relevante nela (Duval 1999; Escrivà; Jaime; Gutiérrez, 2018; Gutiérrez, 1996).

Gutiérrez (2006) argumenta que não é costume investigar as práticas de ensino e as estratégias visuais na resolução de problemas de geometrias, no propósito de analisar se as **práticas de ensino favorecem a mobilização de estratégias visuais** na resolução de problemas. Segundo Gutiérrez (2006, p. 28, tradução nossa⁴⁹), “O reconhecimento da importância da visualização na aprendizagem da geometria também não costuma ser acompanhado de uma análise das próprias práticas de ensino para verificar se favorecem ou não o uso de estratégias visuais”.

As tarefas que envolvem conteúdos de geometrias devem ser estruturadas e organizadas de forma que seja possível **construir diferentes representações geométricas**, bem como possíveis estratégias de resolução de problemas que empreendam conhecimentos de geometrias. Além do mais, as tarefas devem promover a construção de imagens mentais pelos FPMat para a situação-problema de geometria, de forma que possam **movimentá-la e adequá-la** em conformidade com o problema e que podem favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico (Godino *et al.*, 2012; Guillén, 2000; Gutiérrez, 2006).

Por mais que as representações externas utilizadas pelos FPMat não sejam as adequadas e que não atendem ao formalismo e rigor da matemática, é importante que **as representações matemáticas** (os diferentes registros para um mesmo objeto matemático) sejam **frequentemente utilizadas durante o processo de formação** para que possam ser parte do cotidiano dos FPMat e que, assim, façam uso delas em suas práticas de ensino.

⁴⁹ *El reconocimiento de la importancia de la visualización en el aprendizaje de la geometría tampoco suele ir acompañado de un análisis de las propias prácticas docentes para ver si favorecen o no el uso de estrategias visuales* (Gutiérrez, 2006, p. 28).

Segundo Gutiérrez (2006 p. 41, tradução nossa⁵⁰), “O ensino correto é aquele que ajuda a formar definições e imagens corretas e completas dos conceitos e, além disso, ensina a relacionar com fluência os dois compartimentos da memória para saber passar de um para o outro de acordo com o interesse”.

É relevante que as tarefas possibilitem construir **conhecimentos matemáticos formais**, em que seja possível atingir a abstração matemática, sem que se confundam objetos matemáticos com sua representação. Isto é, que compreendam os objetos matemáticos como regras gramaticais e de linguagens simbólicas e/ou visuais que descrevem os mundos que a matemática modela, sendo este o pressuposto antropológico da natureza dos objetos matemáticos (Godino *et al.*, 2012).

A tarefa possibilitou aos FPMat ressignificarem seus **conhecimentos sobre as Geometrias**, principalmente ao conteúdo de triângulos. Ao discutirem conceitos de triângulos no plano os FPMat, puderam sistematizar aprendizagens de conceitos de GE, como reta, semirreta, segmento de reta, características e elementos que compõem a figura geométrica triângulo, além de proporcionar o desenvolvimento de conhecimentos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem de geometrias.

Já em relação ao conteúdo de triângulos esféricos, tópico de Geometria Esférica, os FPMat puderam **analisar algumas semelhanças e diferenças** entre as duas geometrias. Por exemplo, os lados de um triângulo plano são constituídos por segmentos de retas, enquanto os lados de um triângulo esférico são constituídos por arcos de circunferência máxima.

Os FPMat puderam desmistificar a verdade absoluta a respeito de que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° , como é enunciado na Educação Básica. Os FPMat construíram triângulos sobre a superfície de uma bola de isopor, representando uma esfera. Após medir os ângulos e somá-los, verificaram que o resultado foi superior a 180° . Dessa forma, foi sistematizado com os FPMat que somente os triângulos planos possuem a soma dos ângulos internos igual a 180° e que isso poderia variar, conforme a superfície geométrica trabalhada.

A seleção/construção/adaptação de tarefas é fundamental para que os FPMat possam **desenvolver seus conhecimentos sobre as geometrias** e, em especial, que possam desenvolver seu pensamento geométrico (Christiansen; Walther, 1986; Nathan; Knuth, 2003; Stein; Smith, 1998; Stein *et al.*, 2009). As tarefas devem **oportunizar diferentes aprendizagens**, isto é, diferentes tarefas podem desencadear a mobilização de conhecimentos

⁵⁰ *Una enseñanza correcta es la que ayuda a formar definiciones e imágenes de conceptos correctas y completas y, además, enseña a relacionar con fluidez ambos compartimentos de la memoria para saber pasar de uno a otro según interese* (Gutiérrez, 2006, p. 41).

para aprender e para ensinar as geometrias, além de promover o uso de diferentes representações para um mesmo objeto geométrico. As atividades que os estudantes realizam durante a resolução da tarefa é que determinam sua aprendizagem.

É importante que a **tarefa seja testada** com antecedência para que esteja **alinhada aos objetivos almejados**, que seja **explorada todas as possíveis estratégias** de resolução para que o Formador consiga mediar os FPMat no momento que estão resolvendo a tarefa e na discussão coletiva. Para isso, é preciso que o Formador tenha bem claro os objetivos que pretende alcançar com a tarefa e **promover a constituição de um espaço** que favoreça a aprendizagem de conceitos geométricos (Stein; Smith, 1998; Stein *et al.*, 2009)

As tarefas serão potenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico, na medida em que as dinâmicas e os recursos empreendidos promovam uma investigação reflexiva

sobre a prática pedagógica e o impacto das decisões do professor nos processos de ensinar e aprender, envolvendo: planejamento intencional, sustentado e situado, com o delineamento da(s) tarefa(s) a ser(em) explorada(s); questionamentos a serem associados para desencadear processos reflexivos que articulem as discussões às ações a serem empreendidas pelo formador e (futuros) PEM no decurso da ação formativa; abertura para negociação e flexibilidade para articulações às demandas manifestadas pelos professores participantes; consideração dos conhecimentos, crenças, sentimentos e concepções dos professores como ponto de partida das práticas desenvolvidas; e compromisso com a aprendizagem dos envolvidos e desenvolvimento de sua autonomia (Cyrino; Estevam, 2023, p. 24-25).

A disciplina de Metodologia e Práticas de Ensino de Matemática favoreceu um espaço em que os FPMat puderam mobilizar conhecimentos de geometrias, em especial acerca da Geometria Esférica, conhecimentos associados ao ensino e à aprendizagem desta área da matemática, como a utilização de materiais manipuláveis e uma prática de ensino fundamentada na Perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (como solicitado pela professora regente).

A tarefa proposta permitiu aos FPMat (re)significarem conhecimentos para o ensino de Geometria Esférica, inclusive para o ensino de Geometria de um modo geral. A tarefa possibilitou a construção de diferentes representações geométricas para triângulos planos e esféricos, além de contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico, quando os FPMat utilizam de representações externas para representar as imagens mentais que criam dos objetos geométricos e das manipulações que fazem deste para chegar a uma solução.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A tarefa proposta evidenciou conhecimentos dos FPMat associadas à GE e à Geometria Esférica, e também, conhecimentos associados ao ensino de geometria (Cyrino; Estevam, 2023; Vilas Boas; Barbosa, 2016). Em termos da aprendizagem, podemos inferir que a tarefa proporcionou mudanças sobre os significados atribuídos pelos FPMat a alguns conceitos de geométricos, não só no que diz (na sua fala), mas também naquilo que faz, em especial nos sentidos e nas interpretações que sustentam seus dizeres e fazeres, indicativos de aprendizagem.

As representações são importantes para que os FPMat possam analisar as informações no enunciado da tarefa e selecionar uma estratégia para resolver o problema. Além das diferentes representações geométricas de triângulos constituídas pelos FPMat, a tarefa propiciou mobilizar elementos associados à visualização em geometria. Os FPMat puderam expor suas estratégias por meio de representações externas, usando registros verbais (em linguagens algébricas, geométricas, natural, etc.) e registros gráficos (desenhos, diagramas, tabelas, dentre outros).

As tarefas de geometria, de um modo geral, quando trabalhadas na formação inicial e de professores de matemática, precisam oportunizar a construção de conceitos geométricos, a mobilização de aspectos do pensamento geométrico, como os elementos da visualização, que foram utilizados pelos FPMat na resolução dessa tarefa sobre triângulos esféricos (Swoboda, 2008).

O método de ensino que fundamentou esta aula –Perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática–, solicitado pela professora regente, igualmente contribuiu para o desenvolvimento da tarefa pelos FPMat, isto é, possibilitou aos FPMat explorarem a tarefa de diferentes formas. Suas resoluções potencializaram as discussões coletivas devido às diferentes estratégias e aos registros empreendidos, ampliando o repertório de conhecimentos sobre o ensino de geometrias.

A exploração de tarefas por si só não é suficiente para favorecer a aprendizagem dos FPMat, visto que ensinar geometria não é meramente propor e explorar boas tarefas. Boas tarefas são aquelas que contribuem para construir o conhecimento para o ensino de geometria, que promovam investigações de situações experienciadas no cotidiano. O uso de materiais manipuláveis há de ser racional. Há de ser recurso auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de geometrias, sem interferir diretamente na construção de conceitos geométricos.

Cabe explorar com os FPMat possibilidades de trabalhar com tarefas que sejam cognitivamente desafiadoras, oportunizar momentos em que eles possam fazer reflexões sobre a seleção/construção/adaptação em tarefas de geometrias e que proporcionem mobilizar aspectos do pensamento geométrico. É importante que haja discussões sobre o papel das tarefas na aprendizagem de geometrias, suas implicações, os desafios e as demandas exigidas pela tarefa e que podem ou não desencadear o aprendizado dos seus estudantes.

Como bem apontam Stein e Smith (1998), é preciso que os professores reflitam sobre as tarefas matemáticas que podem potencializar seu desenvolvimento profissional, que possibilitem aos FPMat construir hipóteses sobre o processo de aprendizagem, tomando como base tarefas que foram selecionadas/construídas/adaptadas para o estudo de um conceito matemático.

Para isso, é importante que sejam oportunizados espaços na formação inicial em que os FPMat possam discutir sobre as tarefas de GE e GNE, principalmente, analisar sua potencialidade para mobilizar conhecimentos geométricos e o pensamento geométrico e, além de tudo, contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos para ensinar geometrias na Educação Básica.

Em possíveis estudos futuros é importante a adaptação/construção de tarefas que busquem adentrar e aprofundar estudos de conteúdos de Geometria Esférica, visto que há poucas tarefas exploratórias cuja demanda cognitiva seja desafiadora. Outros estudos poderiam focar em tarefas que oportunizem conhecer as outras GNE, como a Geometria Hiperbólica, a Geometria Elíptica, a Geometria Topológica, a Geometria Fractal e a Geometria Projetiva.

Esses estudos devem promover reflexões sobre o ensino dessas geometrias na formação inicial e continuada de professores de matemática, e promover o desenvolvimento do pensamento geométrico desses profissionais. Acima de tudo, facultar o desenvolvimento de conhecimentos para ensinar essas geometrias na Educação Básica.

É relevante privilegiar tarefas que oportunizem o registro de diferentes estratégias de resolução, em que os FPMat possam mobilizar construções mentais de objetos geométricos que possibilitem o uso de diferentes representações externas e que contribuam para aprendizagem desses profissionais em formação que atuarão em sala de aula.

7 REFERÊNCIAS

ARBAUGH, F.; BROWN, C. A. Analyzing mathematical tasks: a catalyst for change?. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, v. 8, n. 6, p. 499-536, 2005.

BARROS, R. C. P.; PAVANELLO, R. M. Relações entre figuras geométricas planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a BNCC? **JIEEM**, v. 15, n. 1, p. 11-19, 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E. Uma abordagem de conceitos elementares de geometria não euclidiana: uma experiência vivenciada no ensino de matemática a partir de uma sequência didática. **Holos**, v. 1, p. 258-281, 2014.

CANAVARRO, A. P. Ensino Exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, nov./dez., p.11-17, 2011.

CANAVARRO, A.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In: SANTOS, L. (ed.), **Investigação em Educação Matemática**. Práticas de ensino da Matemática. SPIEM, Porto Alegre, p.255-266, 2012.

CANAVARRO, A. P.; SANTOS, L. Explorar tarefas matemáticas. In: CANAVARRO, A. P. *et al.* (ed.). **Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino em Matemática**. Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática. Castelo de Vide (Portugal), p. 99-104, 2012.

CHAPMAN, O. Mathematical-task knowledge for teaching. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 16, n. 1, p. 1-6, 2013.

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. Task and Activity. In: CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; OTTE, M. (ed.). **Perspective on Mathematics Education**. Dordrecht: D. Reidel, 1986. p. 243-307.

COUTINHO, L. **Trigonometria esférica**: a matemática de um espaço curvo. Rio de Janeiro: Interciência, 2015. 232p.

CYRINO, M. C. C. T.; ESTEVAM, E. J. G. Tarefas matemáticas na formação de professores que ensinam matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 16, n. 42, p. 1-29, 2023.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Ensino Exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam matemática. In: CYRINO, M. C. C. T. (ed.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 20-32.

CYRINO, M. C. C. T.; DE JESUS, C. C. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência & Educação**, v. 20, p. 751-764, 2014.

DOYLE, W. Academic work. **Review of Educational Research**, Thousand Oaks, v. 53, n. 2, p. 159-199, 1983.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning. *In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNACIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. Anais [...].* Cuernavacas, Morelos, Mexico, 1999. p. 3-26.

DUVAL, R. The first crucial point in geometry learning: visualization. **Mediterranean Journal for Research in Mathematics Educacion**, v. 13, p, 1-28, 2014.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), **Handbook of research on teaching**. Nova Iorque: MacMillan, 1986. p. 119-161.

ERICKSON, F. Qualitative research methods for science education. *In: Fraser, B.; Tobin, K.; McRobbie, C. (ed.). Second International Handbook of Science Education.* Springer International Handbooks of Education, v. 24. Springer: Dordrecht, 2012. p. 1451-1469.

ESCRIVÀ, M.T., JAIME, A., GUTIÉRREZ, Á. Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria. Edma 0-6: **Educación Matemática en la Infancia**, v. 7, n. 1, p. 42-62, 2018.

GAMBINI, A.; LÉNÁRT, I. Basic geometric concepts in the thinking of in-service and pre-service mathematics teachers. **Education Sciences**, v. 11, n. 350, 2021.

GODINO, J. D.; GONZATO, M.; CAJARAVILLE, J. A.; FERNÁNDEZ, T. Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. **Enseñanza de las Ciencias**, Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, v. 30, n. 2, p. 109-130, 2012.

GOMES, M. P. **Geometria esférica: uma proposta de estudo e atividades para a escola básica.** 2014. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Fluminense, Niterói - RJ, 2014.

GUILLÉN, G. Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 18, n. 1, p. 35-53, 2000.

GUILLÉN, G.; GONZALEZ, E.; GARCÍA, M.A. Critérios específicos de análise da geometria nos manuais escolares do ensino básico e secundário obrigatório. Análise a partir dos corpos da revolução. *In: GONZÁLES M. J.; GONZÁLES M. T.; MURILLO, J (ed.). Research in Mathematics Education*, 13, 3 ed. SEIEM. p. 247-258, 2009.

GUTIÉRREZ, Á. **Visualization in 3-Dimensional Geometry: in search of a framework.** *In: PUIG, L; GUTIÉRREZ, Á. (ed.). Proceedings of the 20, International Conference of the P.M.E.*, 1, p. 3-19. Valencia. Valencia: University of Valence, Spain, 1996.

GUTIÉRREZ, A. La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. *In: Flores, P.; Ruiz, F; De La Fuente, M. (ed.). Geometría para el siglo*, 21, p. 13-58. Badajoz: F.E.S.P.M. y Soc. Andaluza de Educación Matemática Thales, 2006.

GUVEN, B.; KARATAS, I. Students discovering spherical geometry using dynamic geometry software. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 40, n.3, p. 331-340, abr. 2009.

JESUS, C. C. de; CYRINO, M. C. C. T; OLIVEIRA, H. M. de. Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 20, n. 2, p. 21-46, 2018.

KALEFF, A. M. R. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), n. 28, p-69-94, 2007

LEONTIEV, A. N. **Activity, consciousness, and personality**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1978.

LIVY, S., DOWNTON, A. Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 51, p. 150-160, 2018.

MARTINHO, M. H.; ROCHA, H. A escrita matemática e a intuição em Geometria. **Educação e Matemática**, v. 149-150, p. 34-38, 2018.

NATHAN, M.; KNUTH, E. Study of whole classroom mathematical discourse and teacher change. **Cognition and Instruction**, v. 21, n.2, p.175-207, 2003.

PARANÁ. Diretoria de Educação. Departamento de Desenvolvimento Curricular. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**. Curitiba, 2019

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Curitiba: SEED/PR., 2021.

PARZYSZ, B. “Knowing” vs “seeing”. Problem of the plane representation of space geometry figures. **Educational Studies in Mathematics**, v. 19, p. 79-92, 1988.

PAVANELLO, R. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**. Campinas, v. 1, v.1, p. 7-18, 1993.

REIS, J. D’Arc S. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro (SP), 2006.

RODRIGUES, P. H. **Práticas de um grupo de estudos e pesquisa na elaboração de um recurso multimídia para a formação de professores que ensinam Matemática**. 2015. 228 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

SARAMA, J.; CLEMENTS, D. H. **Early childhood mathematics education research: learning trajectories for young children**. New York, NY: Routledge, 2009.

SILVA, B. S. **Geometrias não euclidianas na formação de professores de matemática**. 2023. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2023, no prelo.

SILVA, B. S.; CYRINO, M. C. C. T. Geometrias não euclidianas na formação de professores de matemática: reflexões de professoras formadoras experientes no ensino de Geometria. **Vidya**, Santa Maria (RS), v. 44, n. 1, p. 325-350, jan./jun. 2024.

SIMON, M. A.; TZUR, R. Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. **Mathematical Thinking and Learning**, Philadelphia, v. 6, n. 2, p. 91-104, 2004.

STEELE, D. F. Vozes entusiastas de jovens matemáticos. **Educação e Matemática**, n. 62, p. 39-42, 2001.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S.; HENNINGSEN, M. A.; SILVER, E. A. **Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development**. 2. ed. New York: Teachers College Press, 2009.

STEIN, M., REMILLARD, J., SMITH, M. How curriculum influences student learning. In: LESTER, F. (ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics**. Charlotte: Information Age Publishing, 2007. v. II, p. 319-369.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S.; HENNINGSEN, M. A.; SILVER, E. A. **Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development**. New York: Teachers College Press, Columbia University, 2000.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, p.268-275, 1998.

SWOBODA, E. Space, geometrical regularities and shapes in children's learning and teaching. In: *Annales of the Polish Mathematical Society*, 5, 2008. **Anais [...]**. Polish Mathematical Society: Didactica Mathematicae, 2008. p. 111-122.

VIEIRA, A. F. M.; CYRINO, M. C. C. T. Pensamento geométrico: reflexões manifestadas por futuros professores de matemática em estudos do modelo de van Hiele. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n. 8, p. 286-314, dez. 2022.

VILAS BOAS, J.; BARBOSA, J. C. Aprendizagem do professor: uma leitura possível. **Revista Ciência & Educação**, Bauru, SP, v. 22, n. 04, p. 1097-1107, 2016.

WALLS, F. Challenging task-driven pedagogies of mathematics. In: CLARKSON, P. *et al.* (ed.), **Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Melbourne, Sydney: MERGA, p.751-758, 2005.

WATSON, A.; MASON, J. Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 10, n. 4, p. 205-215, 2007.

WATSON, A.; SULLIVAN, P. Teachers learning about tasks and lessons. *In*: TIROSH, D.; WOOD, T. (ed.). **Tools and processes in mathematics teacher education**. London: Sense Publishers, 2008. p.109-134.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ainda hoje professores enfrentam desafios significativos, ao abordarem conceitos de geometria, tanto em termos de conhecimento do conteúdo quanto em habilidades práticas para ensiná-la (Barros, Pavanello, 2022; Blanco, 2014; Caldatto; Pavanello, 2015; Cowley, 2009; Elia; Ven den Heuvel-Panhuizen; Gagatsis, 2018; Gonzato; Blanco; Godino, 2011; Leme da Silva, 2022; Marmolejo; Astudillo, 2015; Pavanello, 1993; Silva; Cyrino, 2024; Smith; Julie; Gierdien, 2020).

Na busca de investigar alternativas que promovam o enfrentamento desses desafios na formação inicial de professores de matemática, na presente investigação nos propomos a responder à seguinte questão: **“Que elementos do pensamento geométrico, associados à Geometria Esférica, são mobilizados por futuros professores de matemática na resolução e na discussão de tarefas?”**. Para responder a essa questão de investigação, trabalhamos nos capítulos/artigos desta tese, considerando os três objetivos específicos a seguir:

- **Objetivo 1:** analisar elementos da visão e da visualização mobilizados por futuros professores de matemática na resolução de uma tarefa de Geometria Esférica.
- **Objetivo 2:** discutir conhecimentos para o ensino de Geometria Esférica mobilizados por futuros professores de matemática na resolução e discussão de tarefas.
- **Objetivo 3:** discutir as potencialidades de uma tarefa sobre triângulos esféricos para promover o desenvolvimento do pensamento geométricos de futuros professores de matemática.

De posse dos resultados desses capítulos/artigos, resgatamos o que se tornou pontos de enfoque na articulação das ideias discutidas e, assim, neste capítulo, apresentamos reflexões que sustentam possíveis respostas para nossa questão de investigação e para a defesa de nossa tese: *a importância de se trabalhar com tarefas matemáticas de GNE que promovam o desenvolvimento do pensamento geométrico na formação inicial de professores de matemática*.

Nas próximas seções, à luz do que foi apresentado nos artigos, discutimos as potencialidades do trabalho com tarefas matemáticas apoiadas na Geometria Esférica, que

promoveram o desenvolvimento do pensamento geométrico de FPMat, em um contexto de formação inicial, em que defendemos a importância de se trabalhar com tarefas matemáticas de GNE, que promovam o desenvolvimento do pensamento geométrico, na formação inicial de professores de matemática; e, para finalizar, relatamos limitações de nossa investigação e indicamos sugestões para futuras pesquisas sobre as GNE na formação de PMat e o desenvolvimento do pensamento geométrico.

5.1 POTENCIALIDADES DAS TAREFAS QUE PROMOVERAM O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE FPMAT

Ao trabalhar com as tarefas de Geometria Esférica, os FPMat tiveram a oportunidade de mobilizar elementos do pensamento geométrico associados a esse tema. No Quadro 1, associamos potencialidades das tarefas aos respectivos elementos do pensamento geométrico mobilizados pelos FPMat em nossa investigação.

Quadro 1 – Potencialidades do trabalho com tarefas de geometria esférica que promoveram o pensamento geométrico

Potencialidades do trabalho com tarefas	Elementos do pensamento geométrico mobilizados pelos FPMat
Interpretar e reconhecer informações do enunciado	Criação e mobilização de imagens visuais e mentais de objetos geométricos
	Mobilização de conceitos e propriedades geométricas
Construir diferentes estratégias de resolução	Mobilização de diferentes registros para representar um mesmo objeto geométrico
	Utilização de imagens visuais e mentais de objetos geométricos na construção de estratégias de resolução
	Mobilização de conceitos e propriedades geométricas
Escolher/elaborar material manipulável como recursos auxiliares	Desenvolvimento de imagens visuais e mentais
	Construção de desenhos

Negociar significados	Análise e validação de argumentos geométricos
	Construção de explicações para conjecturas
	Mobilização de registros escritos em linguagem natural e matemática
	Utilização de argumentos geométricos e matemáticos
	Elaboração de suposições e inferências lógicas
Sistematizar aprendizagens	Mobilização de definições, teoremas e propriedades de geometrias
	Mobilização de conhecimentos de geometria (ponto, reta e plano; segmento de reta e semirreta; distância entre dois pontos; ângulo euclidiano plano e esférico; triângulo euclidiano plano e triângulo esférico; e, soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano plano e de um triângulo esférico)
Discutir estratégias de ensino de geometria	Reconhecimento de que as ideias geométricas são úteis para representar fenômenos teóricos e do mundo físico
	Sugestões de recursos didáticos e tecnológicos para o ensino de geometria

Fonte: Autores

As potencialidades, listadas no Quadro 1, oportunizaram aos FPMat desenvolverem habilidades associados ao pensamento geométrico, tais como: mobilização de conhecimentos sobre geometrias, capacidade de mudar registros, alternando-os entre registro escrito e registro gráfico; habilidades para lidar com informações e imagens visuais e mentais.

Ao interpretar e reconhecer informações nos enunciados das tarefas, os FPMat tiveram a oportunidade de **criar, mobilizar e representar imagens visuais e mentais** de objetos geométricos que os auxiliaram na **mobilização de conceitos e propriedades geométricas** dos objetos envolvidos, necessários para a resolução das tarefas.

As **imagens visuais e mentais foram utilizadas** pelos FPMat, em busca de **construir diferentes estratégias de resolução**. Para tanto, eles mobilizaram diferentes registros para

representar um mesmo objeto geométrico, assim como conceitos e propriedades dos objetos em estudo.

A partir de desenhos, raciocínio mental e representações por meio dos materiais manipuláveis, os FPMat construíram outras possibilidades de resoluções que pudessem atender ao que estava sendo proposto nas tarefas. E até mesmo, construindo argumentos geométricos que validassem sua estratégia ou sua ideia matemática para o que se buscava representar.

Em uma das tarefas, os FPMat, ao tentarem **registrar uma mesma situação** que ocorrera **na superfície de uma esfera na superfície plana**, perceberam que a representação feita no plano **não seria adequada** para representar a situação experienciada na superfície da esfera. Em outra tarefa, em que, então, eles tinham que **levar do plano para a superfície da esfera**, notaram que nem sempre **o que ocorre no plano necessariamente acontece na superfície da esfera**.

Essas tarefas desvelaram que **reduzir ou representar objetos tridimensionais em duas dimensões**, e vice e versa, nem sempre é possível acontecer. Precisamos estar atentos em relação à superfície utilizada. Como vivemos em mundo tridimensional e não temos uma **apreensão completa** do objeto físico, é necessário a realização de **movimentos do observador ou do próprio objeto**, por termos apenas acesso a um de seus lados e para que seja possível criar uma apreensão completa.

Para que se tenha a mobilização de **diferentes estratégias de resolução e registros** para um mesmo objeto geométrico, cabe que as tarefas oportunizem a **construção de imagens visuais e imagens mentais** e que seja possível **movimentá-las e adequá-las** em conformidade com a situação proposta, para que se favoreça a mobilização de **registros em linguagem natural e linguagem matemática**, além de promover representações por meio de **desenhos e diagramas**.

Os **materiais manipuláveis** contribuíram para o **desenvolvimento de imagens visuais e mentais**, bem como para a **construção de desenhos** que pudessem representar as situações contidas nos enunciados das tarefas e/ou que foram produzidas pelos FPMat após o seu manuseio.

Os FPMat puderam, a partir do manuseio dos materiais manipuláveis, **analisar a veracidade** do que estavam produzindo matematicamente, isto é, eles puderam voltar e analisar suas produções e relacioná-la com o que haviam registrado por escrito ou por desenho, recorrendo aos materiais manipuláveis para tirar a prova real do que produziram. Os materiais exerceram um papel motivador para a reflexão da prática docente para o ensino de

geometria, em que os FPMat puderam desvelar suas aprendizagens sobre o processo de ensino e aprendizagem de GE e de Geometria Esférica.

Nas discussões coletivas de suas resoluções, os FPMat tiveram a oportunidade de **negociar significados** a respeito de suas estratégias de resolução e, por conseguinte, **analisar e validar argumentos geométricos** ao **construir explicações** para validar suas conjecturas. Ao compartilharem suas estratégias, eles puderam verificar os **diferentes registros escritos em linguagem natural e matemática** que foram empreendidos pelos demais FPMat.

Discutir estratégias de resolução e analisar justificações proporcionou aos FPMat a possibilidade de **utilizar argumentos geométricos** e matemáticos, cuja intenção era analisar e validar estas estratégias e as representações construídas durante a resolução das tarefas.

A interação entre os FPMat, a forma que negociavam entre si os conceitos geométricos e a maneira que organizaram seus registros escritos e gráficos permitiu que demonstrassem conhecimentos de GE e de geometria Esférica.

Essa **troca de informações e interações** entre os FPMat enriqueceu o seu processo de formação, não somente sobre definições, teoremas e propriedades de geometria, mas também sobre o **uso de palavras adequadas** ao ensino de geometria. Em muitos episódios, observamos que os FPMat dialogaram e corrigiram entre si termos utilizados por eles. Isso demonstra a atenção que tiveram com relação **ao que falavam** (o que enunciam) e com **o que escreviam**, visto que, em alguns momentos, eles solicitavam apoio sobre a maneira que poderiam escrever alguma ideia ou conceito geométrico.

Os FPMat perceberam que é preciso ter atenção quanto ao emprego de conhecimentos geométricos na resolução de problemas, que é necessário compreender e avaliar as condições dos fenômenos, **fazer suposições e inferências lógicas** e **identificar que conhecimentos** de geometria podem auxiliar na resolução do problema e compreender a importância da geometria na representação de objetos presentes no mundo físico.

Negociar significados possibilitou construir conhecimentos, aprendizagem de conceitos e propriedades geométricas. Diante das discussões promovidas em sala, os FPMat foram convidados a **sistematizar suas aprendizagens**. Eles puderam ressignificar conhecimentos sobre GE e construir conhecimentos sobre a Geometria Esférica, além de promover discussões sobre o ensino dessa geometria na Educação Básica.

Dentre os conceitos de GE que foram discutidos com os FPMat, os principais são: noção de ponto, reta e plano; noções de semirretas e segmentos de reta; triângulo euclidiano plano (seus elementos e suas características); soma dos ângulos internos de um triângulo

euclidiano plano; ângulo (convexo e não convexo); e distância entre dois pontos na superfície euclidiana plana.

Os FPMat, ainda, puderam conhecer noções básicas dos seguintes conceitos de Geometria Esférica: conceito de reta na superfície de uma esfera; circunferência máxima e círculo menor; conceito de triângulo na esfera (triângulo esférico), suas características e elementos; ângulos na superfície da esfera (ângulos esféricos); soma dos ângulos esféricos de um triângulo na superfície de uma esfera; e, a distância entre dois pontos na superfície de uma esfera (medida do menor arco de circunferência máxima que os unem).

Os FPMat puderam **comparar os conceitos** de GE e Geometria Esférica e **verificar** que são os mesmos, e que se **diferenciam na superfície** onde estão sendo representados e no **processo de cálculo**. Por exemplo, o conceito de distância entre dois pontos é tido como o menor comprimento que os unem, mas na GE o que une os dois pontos é o menor segmento de reta. Na Geometria Esférica o que une os dois pontos é o menor arco de circunferência máxima. A diferença está no instante em que o conceito de distância é aplicado em cada uma das superfícies, gerando segmentos de reta na GE e arcos de circunferência máxima na Geometria Esférica.

Podemos inferir que as tarefas de Geometria Esférica proporcionaram **mudanças sobre os significados** atribuídos pelos FPMat a **alguns conceitos geométricos** de GE e de Geometria Esférica, não só pela forma **que enunciam** (por meio da fala), mas também **naquilo que fazem** (registro escrito e oral), em especial, nos sentidos e nas interpretações que sustentam seus dizeres e fazeres, que são indicativos de aprendizagem.

É importante deixar claro que as **palavras usadas equivocadamente** podem promover **significados errôneos** a respeito de conceitos geométricos, provocando a constituição de **barreiras epistemológicas** no processo de aprendizagem de geometria.

Os FPMat questionaram sobre a possibilidade de utilizar o **globo terrestre** para ensinar conceitos de Geometria Esférica. Quando questionados sobre o uso do globo terrestre no ensino de geometria esférica, os FPMat indicaram a possibilidade de **explorar os conceitos de circunferência máxima** e de **distância entre dois pontos** na superfície de uma esfera.

Ao sugerir a utilização do globo terrestre, os FPMat revelaram **conhecer possibilidades de recursos didáticos e tecnológicos** para o ensino de Geometria Esférica, e consideraram estes instrumentos potenciais para o ensino tanto de GE como de GNE.

Os recursos citados pelos FPMat, segundo eles, **proporcionariam um olhar diferente** para a Geometria Esférica e que tornaria a aprendizagem mais dinâmica e envolvente. Porém,

reconheceram a potencialidade dos materiais manipuláveis que foram disponibilizados, pois eles **auxiliaram na construção de estratégias de resolução** e na **observação dos fenômenos** que estavam sendo reproduzidos em cada uma das superfícies trabalhadas.

Os FPMat disseram que os materiais utilizados são **acessíveis** a todos e que podem ser facilmente encontrados no comércio ou improvisados a partir de outros materiais descartáveis ou recicláveis. Eles alegaram que os materiais manipuláveis utilizados podem **suprir a ausência** de recursos tecnológicos na escola, caso essa não os possua.

A visão e a visualização fazem parte do pensar geometricamente, que consiste na construção de argumentos matemáticos convincentes, além de formular, raciocinar, demonstrar e conjecturar a partir de conceitos geométricos os fenômenos teóricos e do mundo físico. A visualização está no cerne do processo de ensino e aprendizagem de geometria, seja da geometria esférica, da GE ou da GNE, ao exibir uma organização de relações matemáticas que consiste em apreender todas as configurações possíveis de um objeto geométrico a partir dessas relações e de diferenciar o que é ou não relevante nela.

5.2 NOSSA TESE: A IMPORTÂNCIA DE SE TRABALHAR COM TAREFAS DE GNE NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Nesta investigação, buscamos discutir as potencialidades de tarefas matemáticas de GNE na formação inicial para o desenvolvimento do pensamento geométrico de FPMat. A contribuição das tarefas matemáticas de GNE na construção de conhecimentos geométricos no contexto de formação inicial de PMat para interpretar fenômenos e situações teóricas e do cotidiano, e para o desenvolvimento do pensar geometricamente.

Não queremos com esta investigação apresentar uma solução para o ensino de geometria, com propostas de tarefas matemáticas para a Educação Básica e para a formação de PMat. Muito menos apontar culpados e caminhos que serão a salvação do ensino de geometria nas escolas e nas universidades. Tampouco temos por obrigação encontrar aplicações de todos os conceitos de geometria ao cotidiano dos sujeitos, a torná-los acessíveis e conectados com a realidade. Nossa intenção é revelar a possibilidade de desenvolver, por meio de tarefas matemáticas de GNE, o pensamento geométrico na formação inicial de PMat. Defendemos a importância de se trabalhar com tarefas matemáticas de GNE na formação inicial, as quais oportunizem o desenvolvimento do pensamento geométrico dos FPMat.

Os conteúdos de GNE estão presentes nos currículos escolares de matemática, pois tanto os documentos curriculares nacionais (Base Nacional Comum Curricular, por exemplo) como os alguns estados (Referencial Curricular do Paraná, por exemplo) apontam a relevância de eles serem trabalhados na Educação Básica. Cabe que os PMat tenham a oportunidade de explorar e discutir esses conceitos na formação inicial, para que possam conhecer não só essas geometrias, mas também diferentes práticas de ensino que lhes permitam ensiná-las na Educação Básica.

A exploração de conceitos de GNE no contexto da formação inicial pode contribuir significativamente para o processo de formação dos FPMat. Isso se torna ainda mais relevante, quando essa abordagem é acompanhada da discussão de conceitos da GE, permitindo aos FPMat ressignificarem seus conhecimentos e refletirem sobre as práticas docentes para o ensino de geometria.

As tarefas matemáticas de geometria, de um modo geral, quando trabalhadas na formação inicial e continuada de PMat, precisam oportunizar a construção de conceitos geométricos, de GE e GNE, e a mobilização de aspectos do pensamento geométrico, como os elementos da visão e da visualização, as diferentes representações de objetos geométricos, o raciocinar e o argumentar geometricamente, o demonstrar empírica (por meio de materiais manipuláveis) e matematicamente a validade de teoremas e propriedades geométricas e de fenômenos do mundo físico, que foram utilizadas pelos FPMat na resolução das tarefas propostas. Estes elementos são imprescindíveis para o trabalho dos FPMat em tarefas de geometria.

As tarefas matemáticas de GNE demandam dos PMat e dos FPMat conhecimentos que precisam ser discutidos no decorrer de sua formação, isto é, para além de discutir conhecimento de conteúdo é relevante que sejam promovidas discussões que as associem aos processos de ensino e aprendizagem de Geometria e oportunize o desenvolvimento do pensamento geométrico (Gambini; Lenárt, 2021; Guven; Karatas, 2009; Livy; Downton, 2018; Silva; Cyrino, 2024).

É pertinente que as tarefas oportunizem compreender que os objetos geométricos são como regras gramaticais e de linguagem simbólicas e/ou visuais que permitem descrever o mundo físico em termos geométricos (a Matemática), e que este é o pressuposto da natureza dos objetos matemáticos. Além de promover reflexões e conexões entre as diversas ideias matemáticas e oportunizar a generalização do concreto para o abstrato.

O trabalho com tarefas de GNE na formação inicial de PMat podem ser potenciais para sua aprendizagem de próprios conceitos de GE e de outras áreas da Matemática

(Chapman, 2013; Cyrino; Estevam, 2023). Que os FPMat possam constituir uma trajetória reflexiva sobre os conceitos e os processos de ensino e aprendizagem de GNE e a potencialidade das tarefas, ao propiciar relações com outras áreas do conhecimento científico, além de conexões com a própria matemática.

A partir do estudo de GNE, os FPMat podem “estabelecer conexão das GNE com outros conceitos matemáticos; ampliar a compreensão de conceitos da própria GE; articular GNE com outras áreas do conhecimento; desenvolver explorações e generalizações de relações geométricas; propor investigações acadêmicas sobre conteúdos e princípios das GNE” (Silva; Cyrino, 2024, p. 343).

Para isso, cumpre pensar em uma formação em que os FPMat sejam os protagonistas do seu próprio processo de aprendizagem, o qual está em constante movimento e que se molda a cada significado negociado e reificado (Cyrino, 2017). É relevante para o desenvolvimento profissional de FPMat, a constituição de espaços em que eles possam discutir sobre conhecimentos específicos e conhecimentos pedagógicos e didáticos, além de questões históricas e filosóficas da matemática, de um modo geral, e em específico da própria geometria.

Discutir questões históricas e filosóficas a respeito das GNE na formação inicial de PMat propicia-lhes compreender as rupturas de paradigmas até então tomados como verdades absolutas e os avanços da geometria e suas contribuições para o desenvolvimento da área da Matemática (Silva; Cyrino, 2024; Vieira; Cyrino, 2022).

É importante que sejam oferecidos espaços na formação inicial onde os FPMat possam discutir sobre as tarefas de GNE, especialmente para analisar sua potencialidade para mobilizar conhecimentos geométricos, e aspectos do pensamento geométrico e, além de tudo, que possam contribuir para desenvolver conhecimentos para ensinar geometria na Educação Básica.

Torna-se relevante a realização de discussões e reflexões sobre a seleção/adaptação/construção de tarefas matemáticas de GNE e seu papel (Stein; Smith, 1998) na aprendizagem de geometria. Tarefas que favoreçam o desenvolvimento de habilidades de visualização, de capacidade de raciocinar e argumentar geometricamente, que possam contribuir para analisar e representar fenômenos do mundo físico e/ou do mundo teórico (Silva; Cyrino, 2024; Swoboda, 2008; Vieira; Cyrino, 2022).

O presente estudo evidencia a possibilidade de mobilizar elementos da visão e da visualização no trabalho com tarefas matemáticas de GNE na formação inicial de PMat. Isto é, destaca a potencialidade das tarefas de Geometria Esférica para mobilizar e desenvolver de

aspectos do pensamento geométrico em um contexto de formação inicial de PMat, diante dos desafios inerentes à inclusão das GNE na formação de PMat.

Dentre os desafios a serem enfrentados, está a não aceitação de uma nova geometria, por se acreditar que tudo pode ser descrito em consonância com os conteúdos de GE, recusando a nova geometria, como por exemplo, acreditar que o Planeta Terra é plano. Se a Terra é plana, de que maneira explicar as viagens áreas e marítimas?

5.3 LIMITAÇÕES E POSSIBILIDADES DE FUTURAS INVESTIGAÇÕES

O estudo que realizamos responde a questões discutidas no Gepefopem, como: que elementos estão associados ao pensamento geométrico? De que maneira estes elementos podem ser mobilizados por (futuros) professores de matemática na resolução de tarefas de geometria? Quais aportes teóricos sustentam o pensamento geométrico em tarefas de matemática? O ensino de GNE é discutido na formação inicial de PMat? Que discussões são realizadas na formação inicial de PMat? Porém, o presente estudo desvela situações que demandam novas investigações sobre o ensino de GNE na formação de professores de matemática.

Tendo em conta que a investigação foi realizada com um pequeno grupo de FPMat, com características bem particulares, que estava saindo de um período pós-pandêmico, que a 1.^a série do curso tinha sido cumprida inteiramente de forma remota, e que as disciplinas de Geometria Euclidiana Plana e de Geometria Euclidiana Espacial foram desenvolvidas totalmente de forma assíncrona e axiomática, entendemos ser relevante ampliar esta investigação para outros grupos de FPMat e PMat, que tenham outras características e que poderão revelar aspectos complementares.

Para futuras investigações, sugerimos analisar que conhecimentos para o ensino de Geometria Esférica são mobilizados por (futuros) professores de matemática durante a resolução de tarefas por meio da utilização de *softwares* de geometria dinâmica. Outro potencial estudo é analisar a contribuição de *softwares* de geometria dinâmica para o desenvolvimento do pensamento geométrico de (futuros) professores de matemática.

Neste estudo não foi possível utilizar o laboratório de ensino de matemática, por ele estar passando por reformas no período em que nossa investigação foi realizada e por não conter computadores suficientes que acomodassem todos os participantes.

É importante que as próximas investigações se direcionem para a construção/adaptação de tarefas, que tenham foco na exploração de conceitos de Geometria

Esférica, cuja demanda cognitiva seja desafiadora, visto que foram identificadas poucas tarefas sobre este conteúdo. Outros estudos poderiam focar em tarefas que oportunizem conhecer as demais GNE, como a Geometria Hiperbólica, a Geometria Elíptica, a Geometria Topológica, a Geometria Fractal e a Geometria Projetiva.

Porém, que estes estudos não sejam meramente propostas de ensino de GNE para a Educação Básica, mas que se direcionem para a formação inicial e continuada de PMat, para que eles possam refletir sobre conhecimentos para ensinar estas geometrias, sobre o planejamento e a organização das aulas, perpassando pela escolha do método de ensino, sobre os materiais e os recursos que poderão utilizar, sobre os desafios que poderão encontrar e se preparem para enfrentá-los.

Um estudo que podemos considerar relevante para o ensino de Geometria e, especialmente para a área da Educação Matemática, é o tratamento e a conversão de representações semióticas. A transformação consiste sistematicamente em transformar uma representação interna em um registro de representação ou sistema. A conversão consiste em transformar a representação de um objeto dado em um registro em outra representação desse mesmo objeto em outro registro. Isto é, converter um objeto geométrico, que está em terceira dimensão, em um registro escrito em linguagem algébrica.

Compreender a maneira que os estudantes e (futuros) professores de matemática lidam com estes tratamentos e conversões pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de GE e de GNE, além de favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico. Realizar este estudo com FPMat e PMat pode desencadear reflexões sobre o conhecimento que estão produzindo, isto é, ao analisar a situação, por meio de materiais manipuláveis ou por *softwares* de geometria dinâmica, eles poderão refletir sobre o enunciado (registro escrito) produzido, avaliar se é coerente ou não com as propriedades geométricas.

As tarefas matemáticas de geometria, quando forem planejadas, precisam ser organizadas para que oportunizem a mobilização de diferentes registros para um mesmo objeto geométrico. Não apenas o registro gráfico, mas também o registro escrito, construído em linguagem matemática. As tarefas precisam viabilizar aos sujeitos explorar e interpretar situações por meio de materiais manipuláveis (quando vier ao caso seu uso), partindo de sua intuição (geométrica) com a intenção de generalizá-la matematicamente. As atividades que são produzidas pelos sujeitos a partir da resolução de uma tarefa é que determinam sua aprendizagem.

Cabe discutir porque o trabalho com as GNE, embora seja previsto nos documentos curriculares nacionais e estaduais (como o Paraná) que orientam o currículo escolar de

matemática nas escolas públicas, quase nunca é feito, ou é feito de forma aligeirada nos cursos de Graduação em Licenciatura em Matemática. Para que essa realidade seja mudada, o ensino dos conceitos geométricos não pode ser negligenciado na formação de PMat. É necessário que os futuros professores adquiram conhecimentos suficientes sobre os processos de ensino e de aprendizagem destas geometrias, para que se sintam confiantes e seguros para ensiná-los a seus alunos. Afinal, de que maneira a GNE pode ser ensinada nas escolas públicas, se os próprios professores têm dificuldades de lidar com os conceitos geométricos?

REFERÊNCIAS

- ASSIS, E. S. de. As histórias em quadrinhos nas aulas de geometria. *In*: MADRUGA, Z. E. F.; DE ASSIS, E. S. (org.). **Vivências e experiências em matemática**. Cruz das Almas (BA): EDUFRB, 2021. p. 23-42.
- BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. *In*: D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (org.). **Vertentes da subversão na produção científica em Educação Matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2015. p. 347-367.
- BARROS, R. C. P.; PAVANELLO, R. M. Relações entre figuras geométricas planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a BNCC? **JIEEM**, v. 15, n. 1, p. 11-19, 2022.
- BLANCO, T. F. Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometria. *In*: FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA, 9., 2014, Quepos, Puntarenas, Costa Rica. **Actas de Congreso**. Quepos, Puntarenas, Costa Rica: Fundación CIENTEC, 2014. p. 1-13.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica, 2018.
- BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E. Uma abordagem de conceitos elementares de geometria não euclidiana: uma experiência vivenciada no ensino de matemática a partir de uma sequência didática. **Holos**, v. 1, p. 258-281, 2014.
- BRUNHEIRA, L.; DA PONTE, J. P. Desenvolvendo o raciocínio espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos. **Zetetiké**, Campinas, v. 26, n. 3, p. 464-485, set./dez. 2018.
- CALDATTO, M.; PAVANELLO, R. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, v. 24, n. 1, p. 103-128, 2015.
- CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, [S. l.], p. 11-17, nov./dez. 2011.
- CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso de Célia. *In*: CANAVARRO, A. P.; SANTOS, L.; BOAVIDA, A.; H. OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CARREIRA, S. (ed.), **Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática**, 2012.
- CANAVARRO, A. P.; SANTOS, L. Explorar tarefas matemáticas. *In*: CANAVARRO, A. P. et al. (ed.). **Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino em Matemática**. Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática. Castelo de Vide (Portugal), p. 99-104, 2012.
- CARVALHO, M. A. S. de; CARVALHO, A. M. F. T. de. O ensino de geometria não euclidiana na educação básica. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011. Recife (Brasil). **Anais** [...] Recife: 2011. p. 1-10.

CARVALHO, O. A.; AZEVEDO, J. S. Geometria não-Euclidiana: aplicações na educação básica. In: PORTO, J. P. S.; ROCHA, K. S. F. L.; NASCIMENTO, S. A. (org.). **Inovações educacionais em matemática no Recôncavo**. Cruz das Almas (BA): EDUFRB, 2020.

CHAPMAN, O. Mathematical-task knowledge for teaching. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 16, n. 1, p. 1–6, 2013.

COSTA, A. P. da. Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão (PR), v. 9, n. 18, p. 152-179, jan./jun. 2020.

COWLEY, C. S. **Spherical and Hyperbolic Geometry in the high school curriculum**. 2009. Dissertação (Mestrado em Artes) - Presented to the Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Arts, Texas, 2009.

CYBULSKI, F. C.; CYRINO, M. C. C. T. Abordagens de pensamento geométrico na formação inicial de professores que ensinam matemática presentes em dissertações e teses. In: REUNIÃO NACIONAL DA ANPED, 40, 2021, Belém (PA), **Anais [...]**. Rio de Janeiro (RJ): ANPED, 2021, não paginado.

CYBULSKI, F. C.; CYRINO, M. C. C. T. Geometria e pensamento geométrico na formação inicial de professores que ensinam matemática: o que revelam as pesquisas brasileiras entre 2009 e 2020. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão (PR), v. 11, n. 26, p. 44-65, set./dez. 2022.

CYRINO, M.C.C.T. **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Eduel, Londrina, 2016.

CYRINO, M. C. C. T. Identidade profissional de (futuros) professores que ensinam matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 10, p. 699-712, 2017.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. O ensino exploratório e a elaboração de um framework para os casos multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T. (ed.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 82-99.

CYRINO, M. C. C. T.; TEIXEIRA, B. R. O ensino exploratório e a elaboração de um framework para os casos multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T. (org.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 81-100.

CYRINO, M. C. C. T.; ESTEVAM, E. J. G. Tarefas matemáticas na formação de professores que ensinam matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 16, n. 42, p. 1-29, 2023.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative forms for the dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères**, n.17, p.121-138, 1994. Disponível em: <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/reperes-irem/consultation-en-ligne/numero-017-reperes-irem/7-les-differents-fonctionnements-d-une-figure-dans-une-demarche-geometrique--1353739.kjsp>. Acesso em: 29 jul. 2024.

DUVAL, R. Geometry from a cognitive point of view. *In*: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (ed.). **Perspectives on the teaching of Geometry for the 21 st Century**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. p. 37-52.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning. *In*: **Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education**. Cuernavacas, Morelos, Mexico, 1999. p. 3-26.

DUVAL, R. Les conditions cognitive de L'Apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**, v. 10, p. 5-53, 2005.

ELIA, I.; VEN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; GAGATSIS, A. Geometry learning in the Early Years: developing understanding of shapes and spaces with a focus on visualization. *In*: KINNEAR, V. *et al.* (ed.). **Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning**, Early Mathematics Learning and Development, 2018. capítulo 5, p. 73-95.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. *In*: WITTROCK, M. C. (ed.), **Handbook of research on teaching**. Nova Iorque: MacMillan, 1986. p. 119-161.

ERICKSON, F. Qualitative research methods for science education. **Second international handbook of science education**, p. 1451-1469, 2012.

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. C. T. Condicionantes de aprendizagens de professores que ensinam matemática em contextos de comunidades de prática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 12, n. 2, p. 227-253, maio. 2019.

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Desenvolvimento do conhecimento estatístico para ensinar a partir da análise de tarefas em uma comunidade de professores de matemática. **RENCIMA**, v.9, p.32-51, 2018.

FISCHBEIN, E. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 24, n.2, p. 139-162, 1993.

FONSECA, J. A. **Investigação de aspectos da compreensão relacional e da instrumental em geometria esférica**. 2020. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Franciscana, Santa Maria (RS), 2020.

GAMBINI, A.; LÉNÁRT, I. Basic geometric concepts in the thinking of in-service and pre-service mathematics teachers. **Education Sciences**, v. 11, n. 350, 2021.

GOMES, M. P. **Geometria esférica**: uma proposta de estudo e atividades para a escola básica. 2014. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Fluminense, Niterói - RJ, 2014.

GONZATO, M; BLANCO, T. F.; GODINO, J. D. Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. **Revista de Didáctica de las Matemáticas**. v. 77, p. 99-117, jul. 2011.

GRANDO, R. C.; NACARATO, A. M.; GONÇALVES, L. M. G. Compartilhando saberes em Geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. **Caderno Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 39-56, jan./abr. 2008.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GROLÁ, M. G.; GUALNDI, J. H. O ensino de geometria e o desenvolvimento do pensamento geométrico: um mapeamento de pesquisas realizadas no estado do Espírito Santo. **Revista Tangran**, v. 6, n. 1, p. 63-99, jan./mar. 2023.

GUTIÉRREZ, Á. Procesos y habilidade em visualización espacial, em Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación em Educación Matemática: Geometría. México: CINVESTAV, 1992. P 44-59. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/278785961_Procesos_y_habilidades_en_visualizacion_espacial. Acesso em: 15 ago. 2023.

GUTIÉRREZ, Á. **Visualization in 3-Dimensional Geometry**: in search of a framework. In: PUIG, L; GUTIÉRREZ, Á. (ed.). Proceedings of the 20th Internacional Conference of the P.M.E., 1, p. 3-19. Valencia. Valencia: University of Valence, Spain, 1996.

GUTIÉRREZ, A. La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. In: FLORES, P.; RUIZ, F; DE LA FUENTE, M. (ed.). **Geometría para el siglo**, 21, p. 13-58. Badajoz: F.E.S.P.M. y Soc. Andaluza de Educación Matemática Thales, 2006.

GUVEN, B.; KARATAS, I. Students discovering spherical geometry using dynamic geometry software. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 40, n.3, p. 331-340, abr. 2009.

JESUS, C. C. de. **Análise crítica de tarefas matemáticas**: um estudo com professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. 2011. 95 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

JESUS, C. C. de; CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. de. Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 21-46, 2018.

KALEFF, A. M. R. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, SP, ano 20, n. 28, p. 69-94, 2007.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática**. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LEME DA SILVA, M. C. Abandono do ensino de geometria e a matemática moderna: uma revisão histórica. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 30, p. 1-22, 2022.

LIVY, S., DOWNTON, A. Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 51, p. 150-160, 2018.

MARMOLEJO, G. -A.; ASTUDILLO, M. T. G. Control visual em la construcción del área de superficies planas em los textos escolares. Una metodología de análisis. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**. [S. l.], v. 18, n. 3, p. 301-328, nov. 2015.

MARMOLEJO, G.-A.; SÁNCHEZ, N.; LONDOÑO, S. Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**. v. 12, n. 2, p. 18-28, dic. 2017.

OLIVEIRA, H. M.; CYRINO, M. C. C. T. Developing Knowledge of Inquiry-Based Teaching by Analysing a Multimedia Case: One Study with Prospective Mathematics Teachers. *Sisyphus*. **Journal of Education**, v. 1, p. 214-245, 2013.

OLIVEIRA, L. L. de; VELASCO, A. D. O ensino de geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON GRAPHICS ENGINEERING FOR ARTS AND DESIGN, 7, SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 18, 2007. Curitiba (PR). **Anais [...]**, Livro de Resumos, Curitiba, 2007.

PARANÁ, SEED. **Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações**. Curitiba, 2018.

PARANÁ. Diretoria de Educação. Departamento de Desenvolvimento Curricular. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**. Curitiba, 2019.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Curitiba: SEED/PR., 2021.

PAVANELLO, R. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**. Campinas, v. 1, v.1, p. 7-18, 1993.

PÉREZ, H. J. G.; ORTEGA, M. V.; GALLARDO, O. A. A. Development of geometric thought. In: Applies Mathematics Meeting and Statistic Meeting. **IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series** 1329, 2019.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

REIS, J. D'Arc S. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro (SP), 2006.

RIBEIRO, R. S. **Geometrias não-Euclidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica**. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

RODRIGUES, P. H. **Práticas de um grupo de estudos e pesquisa na elaboração de um recurso multimídia para a formação de professores que ensinam Matemática**. 2015. 228 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

SCHNEIDER, E. I. **Uma Contribuição aos Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA) suportados pela Teoria da Cognição Situada (TCS) para pessoas com deficiência auditiva**. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Gestão do Conhecimento), Florianópolis: PPEGC/UFSC, 2012.

SILVA, B. S. **Geometrias não euclidianas na formação de professores de matemática**. 2023. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2023, no prelo.

SILVA, B. S.; CYRINO, M. C. C. T. Geometrias não euclidianas na formação de professores de matemática: reflexões de professoras formadoras experientes no ensino de geometria. **Vidya**, Santa Maria (RS), v. 44, n. 1, p. 325-350, jan./jun. 2024.

SILVA, L. J. F. **Ensino de geometria projetiva e perspectiva: um olhar pelas fotografias**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória (ES), 2018.

SILVA, M. C. L. Abandono do Ensino de Geometria e a Matemática Moderna: uma revisão histórica. **Zetetiké**, v. 30, p. e022030-e022030, 2022.

SMITH, C. R.; JULIE, C.; GIERDIEN, F. The integration of semiotic resources and modalities in the teaching of geometry in a grade 9 class in a South African high school: the four cases of congruency. **South African Journal of Education**, v. 40, n. 2, maio 2020.

SOUZA, L. R. **Geometrias não-Euclidianas na formação de professores**. 2021. 101 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

STEELE, D. F. Vozes entusiastas de jovens matemáticos. **Educação e Matemática**, n. 62, p. 39-42, 2001.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, p.268-275, 1998.

STEIN, M. K. *et al.* **A. Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development.** New York: Teachers College Press, 2000.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S.; HENNINGSSEN, M. A.; SILVER, E. A. **Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development.** New York: Teachers College Press, 2009.

SWOBODA, E. Space, geometrical regularities and shapes in children's learning and teaching. In: *Annales of the Polish Mathematical Society*, 5, 2008. **Anais [...]**. Polish Mathematical Society: Didactica Mathematicae, 2008. p. 111-122.

THOMAS, R. A.; WEST, R. E.; RICH, P. Benefits, challenges, and perceptions of the multiple article dissertation format in instructional technology. **Australasian Journal of Educational Technology**, v.32, n. 2, 2016.

TORREGROSA, G.; QUESADA, H. Coordinación de procesos cognitivos en geometria. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**. [S. l.], v. 10, n. 2, p. 275-300, 2007.

VIEIRA, A. F. M.; CYRINO, M. C. C. T. Pensamento geométrico: reflexões manifestadas por futuros professores de matemática em estudos do modelo de van Hiele. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n. 8, p. 286-314, dez. 2022.

VIEIRA, C. A. N.; BATISTA, E. B.; TAVARES, L. S. Explorando conceitos de geometria não-euclidiana com softwares de geometria dinâmica. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 18, p. 37-48, jul. 2020.

WALLS, F. Challenging task-driven pedagogies of mathematics. In: CLARKSON, P. *et al.* (ed.), **Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Melbourne, Sydney: MERGA, 2005. p.751-758.

WATSON, D. L.; NEHLS, K. Alternative Dissertation Formats: preparing scholars for the academy and beyond. In: STOREY, V. A.; HESBOL, K. A. **Contemporary Approaches to Dissertation Development and Research Methods**. Hershey: Information Science Reference, 2016. p. 43-52.

WATSON, A. *et al.* Task Design in Mathematics Education. In: MARGOLINAS, C *et al.* (ed.). **Proceedings of the ICMI Study 22**, Oxford, UK, Oxford: ICMI, 2013, p. 9-16.

WENGER, E. **Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

WENGER, E. Communities of Practice and Social Learning Systems. In: NICOLINI, D.; GHERARDI, S.; YANOW, D. (ed.). **Knowing in Organizations: A Practice-Based Approach**. New York: M.E. Sharpe, 2003.

WENGER, E. Uma teoria social da aprendizagem. In: Illeris, K. (org.). **Teorias contemporâneas da aprendizagem**. Trad. Ronaldo Cataldo Costa. Porto Alegre: Penso, 2013, p.246-257.

WENGER-TRAYNER, E.; WENGER-TRAYNER, B. Learning in landscapes of practice: A framework. *In*: WENGER, E. *et al.* **Learning in landscapes of practice**. New York: British Library, 2015. p. 13-31.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Tarefa I – Conhecendo a Geometria Esférica

Objetivo: Conhecer a Geometria Esférica e estabelecer relações com a Geometria Euclidiana.

Materiais: Folha de Papel A4 Colorida, Folha de Papel A4 Branca, Bola de Isopor, régua, fita métrica, canetas coloridas, elástico e cola branca.

Quantidade de Aulas: 2 aulas a 4 aulas.

1. Um urso partiu de sua toca em busca de alimento e percorreu uma distância de 10 km para o Sul. Em seguida, mudou de direção e percorreu mais 10 km para Leste. Por fim, novamente voltou a mudar de direção indo agora para o Norte percorrendo 10 km, chegando assim à sua toca. De posse dessas informações desenhe o trajeto percorrido pelo urso:
 - a) em uma folha de papel A4;
 - b) sobre a bola de isopor.
 - c) Após a construção dos desenhos, discuta com sua dupla e anote todas as observações feitas apresentando uma explicação.
2. Em uma folha de papel A4, marque um ponto qualquer e com o auxílio de uma régua trace a representação de uma reta que passe por este ponto. Em seguida, marque um ponto qualquer sobre a bola de isopor e com o auxílio de um elástico, trace uma trajetória que passe pelo ponto marcado. Em qual das situações é possível retornar ao ponto de partida? Por quê? Descreva detalhadamente sua resposta apresentando uma justificativa.
3. Você recebeu duas folhas de papel A4, sendo uma branca e uma colorida. Na folha colorida desenhe e recorte a representação de dois triângulos quaisquer. Em seguida, cole uma dessas representações de triângulos recortadas na folha branca e a outra representação do triângulo cole sobre a bola de isopor. O que você observa que aconteceu com as representações dos triângulos após serem coladas? Discuta com sua dupla e descreva detalhadamente a conclusão em que chegaram.

Tarefa II – As retas são retas?

Objetivo: construir o conceito de circunferência máxima e de distância entre dois pontos em uma superfície esférica.

Materiais: Folha de papel A4, bola de isopor, bola de chocolate, régua, canetas coloridas, elástico, alfinete e estilete.

Quantidade de aulas: 2 a 3 aulas.

1. Em posse de uma folha de papel A4, faça o que é solicitado nas alternativas a seguir.
 - c) Marque um ponto qualquer na folha e responda: Quantas retas podem ser traçadas por este ponto?
 - d) Agora, marque dois pontos distintos na folha e responda: Quantas retas podem ser traçadas passando por estes dois pontos simultaneamente?
2. Em posse de uma bola de chocolate, faça o que é solicitado nas alternativas a seguir.
 - c) Na bola de chocolate, faça um corte qualquer dividindo-a em duas partes. Em seguida, apoie as duas partes obtidas, após o corte, sobre uma folha de papel A4, contornando-as com o auxílio de uma caneta colorida. Que figuras são formadas na folha de papel?
 - d) Existe algum corte que divida a bola em duas partes iguais? Em que lugar deve ser feito o corte para que isso ocorra?
3. Em posse de uma bola de isopor, de alfinetes e de elásticos faça o que é indicado nas alternativas a seguir.
 - c) Com o auxílio de um alfinete, marque um ponto qualquer sobre a bola de isopor. Por este ponto, quantas circunferências máximas podem ser traçadas?
 - d) Com o auxílio de dois alfinetes, marque dois pontos distintos sobre a bola de isopor. Quantas circunferências máximas passam por estes dois pontos simultaneamente?
4. Em posse de uma folha de papel A4 marque dois pontos distintos e, com o auxílio de uma régua, ligue os dois pontos. Que conceitos geométricos estão envolvidos?

5. Com o auxílio de dois alfinetes marque dois pontos quaisquer sobre a bola de isopor e represente uma circunferência máxima que passe por estes pontos. Com uma caneta colorida, ligue os dois pontos. Que conceitos geométricos estão envolvidos?

Tarefa III – Circunferências máximas são paralelas?

Objetivo: Reconhecer que na Geometria Esférica não existe circunferências máximas paralelas.

Materiais: Folha de Papel A4, bola de isopor, alfinete, elástico, régua.

Momento de antecipação: relembrar os conceitos de posições relativas entre duas retas no plano e do quinto postulado de Euclides.

Quantidade de aulas: 2 aulas.

1. Em uma folha de papel A4 e com o auxílio de uma régua, represente uma reta e um ponto não pertencente a ela. Quantas representações de retas podem ser traçadas passando por este ponto de forma que não haja interceptação com a reta desenhada inicialmente?
2. Em uma bola de isopor e com o auxílio de dois alfinetes, represente dois pontos distintos A e B. Em posse de dois elásticos, trace duas circunferências máximas distintas em que uma delas passe pelo ponto A e a outra passe pelo ponto B. Existe intersecção entre as circunferências máximas? Discuta com sua dupla e apresente uma resposta com justificativa.
3. Utilizando da mesma representação realizada no exercício anterior, construa outras circunferências máximas que passem, simultaneamente, pelos pontos A e B marcados anteriormente e responda: Existe intersecção entre estas circunferências máximas fora as que já foram traçadas? Justifique sua resposta.

Tarefa IV – Como calcular a distância entre dois pontos?

Objetivo: definir os pontos antipodais e ângulo esférico, e determinar a medida do ângulo e da distância entre estes pontos.

Materiais: Folha de papel A4, régua, transferidor, bola de isopor, fita métrica, alfinetes, elásticos e canetas coloridas.

Quantidade de aulas: 2 aulas.

1. Em posse de uma folha de papel A4 represente um ponto A e, com o auxílio de uma régua, construa duas semirretas, r e s , distintas que passem por este ponto (desconsidere os limites da folha de papel A4). Após essa representação, responda:
 - c) As duas semirretas distintas, r e s , que partem do mesmo ponto A delimitam uma amplitude. Em geometria plana, qual é o nome dado a esta amplitude entre as semirretas?
 - d) De que maneira é calculada a medida dessa amplitude entre as duas semirretas?
2. Em uma bola de isopor represente um ponto A e, com o auxílio de dois elásticos, construa duas circunferências máximas distintas que passem pelo ponto A. Após essa representação, responda:
 - c) Além do ponto A que se encontra na intersecção das duas circunferências máximas, existe alguma outra intersecção entre estas circunferências?
 - d) Se a resposta anterior for afirmativa, existe alguma relação entre essas intersecções?
3. Com a representação realizada no exercício anterior, responda:
 - d) As duas circunferências máximas ao partirem do ponto de intersecção A delimitam amplitudes sobre a superfície esférica. Ao selecionar uma dessas amplitudes, ao acaso, podemos observar que elas são formadas por semicircunferências (ou arcos) que possuem uma amplitude entre si. Como essa amplitude é nomeada na Geometria Esférica?
 - e) Como pode ser calculada a amplitude entre essas semicircunferências?
 - f) Determine a medida da amplitude formada pelas semicircunferências que partem do ponto A.
4. Em posse de uma bola de isopor, alfinetes e fita métrica, faça o que está sendo indicado nas alternativas a seguir.
 - d) Determine a medida do raio da bola de isopor. Caso seja necessário, utilize a fita métrica.

- e) Com o auxílio de alfinetes marque dois pontos distintos, C e D, sobre a superfície da bola de isopor. De que maneira podemos calcular a distância entre estes dois pontos?
- f) Calcule a distância entre estes pontos.

Tarefa V – Existem figuras geométricas na superfície esférica?

Objetivo: Conceituar triângulo esférico.

Materiais: Bola de isopor, canetas coloridas.

Quantidade de aulas: 2 a 4 aulas

1. Em uma bola de isopor e com o auxílio de uma caneta colorida, marque dois pontos A e B antipodais. Em seguida, trace duas circunferências máximas que passem por estes pontos e uma terceira circunferência máxima que não passe pelos pontos A e B.
 - a) Em quantas partes as circunferências máximas dividem a superfície da bola de isopor?
 - b) A figura formada lembra alguma representação? Apresente uma justificativa para sua resposta.
2. Em posse de uma bola de isopor e de uma caneta colorida, marque três pontos A, B e C distintos e não alinhados. Em seguida, construa os arcos menores AB, AC e BC e responda:
 - a) Que figura geométrica convexa é constituída pelos pontos A, B e C? Descreva algumas de suas características.
 - b) Determine as medidas dos ângulos internos de cada um dos vértices desta figura geométrica.
 - c) Determine a soma desses ângulos.
 - d) Faça uma comparação da resposta encontrada no item anterior com a Geometria Euclidiana. A que conclusões podemos chegar a partir desta comparação?

Tarefa VI – Mensurando a Distância na Superfície Esférica

Objetivo: Calcular a distância entre dois pontos na superfície esférica

Materiais: bola de isopor, alfinetes, caneta colorida, fita métrica e transferidor.

Quantidade de aulas: 2 a 4 aulas

Sugestão: Retomar o conteúdo de distância entre dois pontos na Geometria Euclidiana e relembrar a definição de distância entre dois pontos em uma superfície esférica estudado na Tarefa II.

1. Em posse de uma bola de isopor, alfinetes e fita métrica, faça o que está sendo indicado nas alternativas a seguir.
 - a) Com o auxílio de alfinetes marque dois pontos distintos, C e D, sobre a superfície da bola de isopor. De que maneira podemos determinar a medida da distância entre estes dois pontos?
 - b) Determine a medida do raio da bola de isopor. Caso seja necessário, utilize a fita métrica.
 - c) Como podemos determinar a medida da distância entre estes dois pontos.

Tarefa VII – Calculando a área de um triângulo esférico

Objetivo: Definir e calcular a área de um triângulo esférico

Materiais: bola de isopor, caneta colorida, fita métrica e transferidor.

Quantidade de aulas: 2 a 4 aulas

1. Em posse de uma bola de isopor, caneta colorida e fita métrica, faça o que está sendo indicado nas alternativas a seguir.
 - a) Construa um triângulo esférico sobre a bola de isopor.
 - b) Determine a medida dos ângulos esféricos deste triângulo esférico.
 - c) Na Geometria Euclidiana, que o nome é dado a região fechada que é determinada por três segmentos de retas consecutivos? E como é realizado o cálculo para determinar a medida desta região?
 - d) Como podemos determinar a medida desta região na Geometria Esférica?

APÊNDICE B**SEQUÊNCIA DIDÁTICA****1. Identificação**

Instituição de Ensino: Universidade Estadual do Paraná – Unespar/*campus* de Paranavaí

Professora Regente:

Estagiário: Talisson Fernando Leiria

Disciplina: Metodologia e Prática de Ensino de Matemática

Turma: 2ª série

Turno: noturno

Horas-aula: 12 a 14 aulas

Data: 23/08 a 15/09/2023

2. Tema/Conteúdo

- Unidade Temática: Geometrias.
- Objetos de Conhecimento: Geometria Esférica.
- Conteúdo: Triângulo Esférico e Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo Esférico

3. Objetivos**Objetivo Geral**

Conhecer a representação de triângulos na superfície esférica.

Objetivos Específicos

- Definir triângulo esférico;
- Conceituar ângulo esférico;
- Determinar a medida de ângulos esféricos;
- Definir a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico;
- Aplicar o conceito de soma dos ângulos internos de um triângulo esférico;
- Reconhecer que a soma dos ângulos interno de um triângulo esférico é sempre superior a 180° ;
- Comparar o triângulo esférico com o triângulo plano;
- Discutir visão e visualização em geometria;

- Explorar as diferentes formas de registrar as estratégias e as resoluções em geometria.

4. Método de Ensino

As aulas serão desenvolvidas na perspectiva do Ensino Exploratório. Pauta-se a aula nesta perspectiva de ensino por considerá-la como potencial para promover a aprendizagem dos alunos, visto que as orientações curriculares nacionais para a Educação Básica apontam a necessidade de se articular diferentes tendências de ensino de forma que se possibilite a construção do conhecimento matemático a partir deles.

A Perspectiva do Ensino Exploratório, segundo Rodrigues (2015, p. 48)

[...] assume papéis distintos, para os professores e para os alunos, dos assumidos em uma perspectiva tradicional de ensino. No ensino tradicional o foco, de modo geral, situa-se no professor e em uma perspectiva de transmissão de conteúdo. Contudo, na abordagem do ensino exploratório o foco está nas relações entre os processos de ensino e de aprendizagem.

Canavarro (2011) argumenta que na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática professor e aluno tem papéis importantes no processo de ensino e de aprendizagem, visto que nesta perspectiva o professor não explica todo o conteúdo e não apresenta todas as estratégias de cálculo como é num ensino diretivo, mas é responsável por selecionar criteriosamente tarefas desafiadoras que “envolvam os alunos em atividade matemática significativa e favoreça o seu raciocínio e compreensão dos conceitos e processos matemáticos” (CYRINO; OLIVEIRA, 2016, p. 23).

A sistematização das aprendizagens ocorre por meio das discussões coletivas que são organizadas e mediadas pelo professor em grande grupo, estabelecendo relações entre os conhecimentos matemáticos que foram mobilizados pelos alunos na resolução e na discussão da tarefa, com o propósito de apresentar e sistematizar os conceitos matemáticos.

Por sua vez, ao aluno cabe participar de forma ativa das aulas, sendo responsável pela sua própria aprendizagem, num sentido de explorar conhecimentos e procedimentos matemáticos para a resolução das tarefas propostas de forma a desenvolverem capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

No Ensino Exploratório, o conhecimento é tratado sob uma perspectiva situada e dialógica, que integra a ação em cooperação com outros e a reflexão sobre o que foi aprendido nesse processo. A ênfase deve estar nos alunos e nas condições que lhes favoreçam participar na atividade de inquirição, colaborativa e individualmente. (ESTEVAM; CYRINO; OLIVEIRA, 2015, p. 168.)

Cyrino (2016) em conjunto com o Grupo de Estudo e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática (GEPEFOPEM) elaborou um *Framework* (Quadro 1), cujo propósito é proporcionar aos professores uma reflexão sobre as ações específicas em cada etapa da aula (antes e durante a aula) que um professor pode desenvolver em sua preparação na perspectiva do Ensino Exploratório.

Quadro 1 – Framework constituído no Gepefopem

Etapas	Ações	Elementos que compõem as ações
Antes da aula	Antecipar	• Estabelecer os objetivos específicos da aula. • Escolher/adaptar/elaborar a(s) tarefa(s) considerando: - os objetivos da aula; - a natureza da tarefa, priorizando aquelas de elevado nível de demanda cognitiva; - os conhecimentos prévios dos alunos; - os recursos disponíveis na escola. • Resolver a(s) tarefa(s). • Prever possíveis resoluções, dúvidas e erros dos alunos. • Pensar em possíveis questionamentos, orientações ou outros recursos que podem ser sugeridos aos alunos, cuidando para manter o nível de demanda cognitiva. • Estabelecer conexões entre: - as resoluções previstas; - as resoluções previstas e os conhecimentos matemáticos a serem desenvolvidos em sala de aula.
Durante a aula	Propor a tarefa	• Apresentar a tarefa para os alunos. • Explicitar para os alunos a dinâmica para viabilizar a resolução da tarefa: a forma de trabalho (grupo, individual), recursos a serem utilizados, gestão do tempo, organização do ambiente. • Orientar formas de comunicação das resoluções: organização dos registros escritos, seleção e organização de uma resolução a ser socializada. • Distribuir a tarefa para os alunos.

		• Direcionar a leitura da tarefa que pode ser feita pelo professor, pelo aluno, individualmente ou para a sala. • Promover a compreensão do enunciado da tarefa. • Fomentar o engajamento dos alunos na discussão e na resolução da tarefa.
	Monitorar a resolução da tarefa	• Questionar, orientar e provocar o aluno quanto a resolução da tarefa. • Promover e mediar a interação entre os alunos. • Manter o desafio cognitivo e a autonomia dos alunos. • Solicitar justificações para as resoluções e representações utilizadas (corretas ou não) • Não validar a correção das respostas dos alunos. • Identificar as diferentes resoluções e representações e possíveis conexões entre elas. • Avaliar o potencial das diferentes resoluções para a discussão e a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa. • Fazer anotações a respeito das resoluções que têm potencial para promover a discussão e as aprendizagens dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa.
	Selecionar e sequenciar as resoluções para discussão	• Escolher e propor resoluções e representações que têm potencial para a discussão e a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa. • Escolher e mobilizar os alunos para apresentação das resoluções selecionadas. • Sequenciar as apresentações tendo em conta os objetivos da aula e as características dos alunos. Por exemplo: - Partir de resoluções, corretas ou não, que foram utilizadas pela maioria. - Partir de uma resolução menos complexa para uma mais complexa. • Organizar a discussão: decidir se a discussão vai ocorrer após a apresentação de cada resolução selecionada ou após a apresentação de um conjunto de resoluções.
	Discutir as resoluções	• Convidar os alunos para a discussão e promover uma atitude de respeito e interesse pelas diferentes resoluções

		apresentadas. • Promover e gerir a participação dos alunos nas discussões. • Incentivar os alunos a questionar e buscar possíveis respostas. • Solicitar justificações para as resoluções e as representações apresentadas. • Evidenciar e discutir equívocos comuns. • Salientar para os alunos a existência de diferentes resoluções para a tarefa. • Caso necessário, introduzir uma resolução particularmente importante, não apresentada pelos alunos, para atingir os objetivos da aula. • Confrontar as diferentes resoluções e analisar o potencial matemático de cada uma delas.
	Sistematizar as aprendizagens	• Relacionar os conhecimentos matemáticos presentes nas resoluções dos alunos com seus conhecimentos prévios e as representações matemáticas formalizadas, com vistas à sistematização. • Promover o reconhecimento da importância das regras ou generalizações. • Apresentar os conhecimentos matemáticos em uma estrutura organizada. • Incentivar os alunos a registrar os conhecimentos matemáticos sistematizados.

Fonte: Teixeira; Cyrino, 2016.

As etapas de uma aula na perspectiva do ensino exploratório são: Antes da Aula e o Durante a Aula. Na etapa Antes da aula, temos a ação de antecipar que remete ao professor, isto é, momento importante em que o professor tenha de forma clara os seus objetivos específicos com relação a aprendizagem de seus alunos, além de “antecipar elementos de sua prática que colaborem para a gestão da aula, de acordo com o tempo, as condições materiais e os alunos que possui” (CYRINO; TEIXEIRA, 2016, p. 88).

Neste momento de antecipação da aula, o professor deverá escolher uma tarefa que tenha uma demanda cognitiva desafiadora pelo fato delas proporcionarem aos estudantes o desenvolvimento da capacidade de pensar e raciocinar matematicamente, com a criação de

argumentos convincentes além de promover o desenvolvimento da sua autonomia (JESUS, 2011).

Ainda nesta fase de antecipação, o professor pode prever as interpretações dos estudantes com relação ao enunciado da tarefa, os possíveis questionamentos que podem aparecer no decorrer do desenvolvimento da tarefa, as possíveis estratégias e resoluções que podem ser realizadas pelos estudantes, incluindo as dúvidas e erros, bem como os diferentes tipos de registros possíveis para a tarefa e as relações entre as resoluções e os conceitos e ideias matemáticas que pretende sistematizar (CYRINO; TEIXEIRA, 2016).

Na etapa Durante a Aula, as ações que remete ao professor são: propor a tarefa; monitorar a resolução da tarefa; selecionar e sequenciar as resoluções para discussão; discutir as resoluções; e, por fim, sistematizar as aprendizagens. No momento em que o professor faz a proposição da tarefa é fundamental que ele explique a dinâmica que será adotada na aula a fim de viabilizar a sua resolução, além de orientar a organização dos alunos para o trabalho (em dupla ou individual), o tempo destinado para a resolução, os recursos que serão disponibilizados e utilizados na aula, bem como os registros que podem fazer em sua resolução.

A tarefa pode ser impressa e entregue para os estudantes, ou transcrita no quadro ou utilizar um projetor para apresenta-la para a turma. É importante que seja feita a leitura da tarefa para sanar possíveis dúvidas, sendo que a leitura pode ser feita pelo professor, ou por um dos estudantes em coletivo, ou pelo próprio estudante individualmente. É relevante que o professor se certifique que os alunos compreenderam o enunciado da tarefa, realizando questionamentos se há alguma dúvida com relação as informações fornecidas e ao que é solicitado a se fazer.

No momento de monitorar a resolução da tarefa, o professor deve estar atento ao processo de elaboração das estratégias e das resoluções para que possa identificar o real potencial dessas tais resoluções para a aprendizagem matemática. Neste momento em que o professor circula pela sala de aula, ele deve analisar as resoluções que estão sendo desenvolvidas e, o mais importante, que se lembrem de sempre questionar seus estudantes, evitando dizer se o caminho escolhido pelo estudante está certo ou errado, tendo o cuidado para manter a demanda cognitiva da tarefa.

Ao monitorar a resolução da tarefa pelos estudantes, o professor pode identificar as resoluções que são diferentes uma das outras, na intenção de selecionar aquelas que são importantes para partilhar com toda a sala de aula, sendo aquelas que podem proporcionar uma diversidade de ideias matemáticas que são adequadas para o propósito da aula. Para isso,

o professor precisa ter bem claro os critérios para a seleção das resoluções, como por exemplo, as resoluções que apresenta um pequeno equívoco a ser discutido com todos, ou uma resolução que se diferencie das demais e que pode agregar/ajudar no propósito da aula, resoluções com diferentes estratégias matemáticas, aquelas que são mais produtivas e mais eficazes, ou até aquelas que apresentam uma resolução mais sofisticada matematicamente.

No momento de sequenciar as resoluções, o importante é que o professor não perca o seu foco com relação ao que pretende na exploração matemática da tarefa, isto é, no que ele sistematizar matematicamente com os seus estudantes. Os critérios para sequenciar as resoluções a serem apresentadas podem partir de uma resolução mais simples (pouco sofisticada) para uma mais completa (aquela que é sofisticada), mais abstrata.

Na discussão das resoluções, o professor convida os estudantes para apresentarem suas resoluções (aquelas que foram selecionadas e sequenciadas) para toda a turma para discuti-la coletivamente. É importante que o professor engaje os estudantes nas discussões, que sempre peça para justificarem seus argumentos e afirmações de uma forma clara e concisa, que oportunize aos estudantes evidenciar e discutir equívocos (seja ele certo ou errado), incentivando-os a questionarem a si próprios e aos colegas, além de proporcionar que busquem possíveis respostas para que consigam estabelecer conexões entre as resoluções discutidas.

Por fim, temos o momento da sistematização das aprendizagens em que o professor pode conduzi-la tendo em conta as discussões das resoluções feitas anteriormente, partindo dos conhecimentos prévios de seus alunos,

com ideias matemáticas ou com representações formalizadas, introduzindo ou discutindo conceitos e ideias matemáticas, regras, generalizações, propriedades, entre outros, de acordo com os objetivos que delineou em relação à aprendizagem matemáticas dos alunos para aquela aula (CYRINO; TEIXEIRA, 2016, p. 97).

É importante que o professor conscientize seus estudantes a respeito da sistematização das aprendizagens, em especial, dos conhecimentos matemáticos, destacando as definições, conceitos e ideias, introduzidos ou discutidos a partir da tarefa que fora trabalhada, além de explorar em outros contextos matemáticos ou extra matemáticos, de forma que eles reconheçam a importância das regras e das generalizações.

5. Desenvolvimento da Aula

5.1 Proposição e apresentação da Tarefa (10 minutos)

A aula iniciará com orientações aos estudantes a respeito da dinâmica da aula, com breves questionamentos a respeito da Geometria Euclidiana para identificar o que eles lembram desta área do conhecimento matemático, a forma que eles devem registrar as estratégias e as resoluções dos itens da tarefa em folha separada, para que se organizem em duplas (sendo que estas deverão se manter até o final da tarefa) e, por fim, se autorizam a gravação das discussões promovidas pelas duplas e em coletivo.

Para o desenvolvimento da aula, admitimos que os alunos já tenham conhecimento prévio de Geometria Plana (figuras planas, figuras planas regulares, elementos que constituem uma figura plana e transformações geométricas) e de Geometria Espacial (figuras espaciais, sólidos geométricos, elementos que constituem um sólido geométrico, diedro e triedro).

Em seguida, o professor distribuirá, a Tarefa – Explorando outras Superfícies Geométricas (Quadro 2), com cada item sendo apresentado separadamente. Será realizada a leitura do enunciado dos itens da tarefa para o esclarecimento de possíveis dúvidas que possam surgir.

Quadro 2 – Tarefa Explorando Outras Superfícies Geométricas

Tarefa - Explorando Outras Superfícies Geométricas

1. Em uma folha de papel A4, marque três pontos distintos A, B e C não alinhados. Construa os segmentos de reta AB, BC e AC e responda:
 - a) Que figura geométrica convexa é constituída pelos pontos A, B e C? Descreva algumas de suas características.
 - b) Determine as medidas dos ângulos internos de cada um dos vértices desta figura geométrica.
 - c) Determine a soma desses ângulos.
2. Agora, em posse de uma bola de isopor e de uma caneta colorida, marque três pontos A, B e C distintos e não alinhados. Em seguida, ligue os pontos A e B, A e C, B e C e responda:
 - a) Que figura geométrica fechada é constituída pelos pontos A, B e C? Descreva algumas de suas características.
 - b) Determine as medidas dos ângulos internos de cada um dos vértices desta figura

geométrica.

c) Determine a soma desses ângulos.

3. Analisando e comparando as suas respostas nos itens 1 e 2, anteriormente, responda:

a) Que conclusões podemos chegar a partir desta comparação?

b) Se aumentarmos as medidas dos lados desses triângulos, o que acontece com as medidas dos ângulos internos?

4. Em uma bola de isopor e com o auxílio de uma caneta colorida, marque dois pontos A e B de forma que sejam opostos entre si. Em seguida, trace duas circunferências máximas que passem por estes pontos e uma terceira circunferência máxima que não passe pelos pontos A e B.

a) Em quantas partes as três circunferências máximas dividem a superfície da bola de isopor?

b) A figura formada sob a superfície da bola de isopor pelas três circunferências máximas lembra alguma representação? Apresente uma justificativa para sua resposta.

Os alunos serão orientados a registrarem todas as suas resoluções e justificativas (estratégias e raciocínios na forma de cálculos ou de textos), além de anotarem suas dúvidas e questionamentos de maneira clara e organizada visto que compartilharão posteriormente com os colegas de sala. Tais registros serão importantes para a etapa da “Discussão coletiva da tarefa”, quando terá a apresentação para a turma.

5.2 Planejamento das aulas, possíveis resoluções e sistematização das aprendizagens

1ª e 2ª Aula

Parte I

Apresentação inicial com destaque para o objetivo do trabalho e explicação sobre o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Proposição do texto “*Representation, vision and visualization: cognitive*

functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning" de autoria de Raymond Duval para estudo a respeito da visão e visualização, solicitando aos estudantes que façam as anotações de dúvidas e possíveis questionamentos, além de anotar possíveis palavras que não conheçam para serem discutidas coletivamente.

Parte II

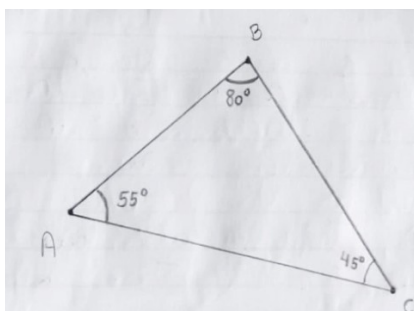
Descrição: Proposição do item 1 da Tarefa – Explorando outras superfícies geométricas (Anexo A).

1. Em uma folha de papel A4, marque três pontos distintos A, B e C não alinhados. Construa os segmentos de reta AB, BC e AC e responda:
 - a) Que figura geométrica convexa é constituída pelos pontos A, B e C? Descreva algumas de suas características.
 - b) Determine as medidas dos ângulos internos de cada um dos vértices desta figura geométrica.
 - c) Determine a soma desses ângulos.

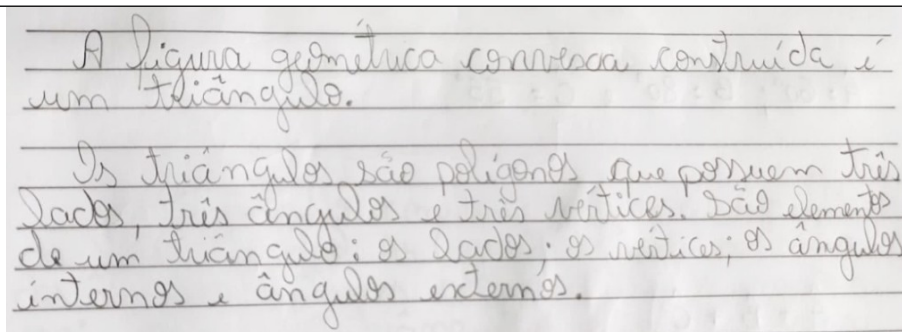
Para a resolução do item 1 da tarefa, será destinado um tempo entre 20 a 30 minutos para que os estudantes possam resolvê-la. Os estudantes serão orientados a escreverem, por escrito, suas estratégias e conclusões.

Resolução da tarefa pelos alunos: Possíveis resoluções dos alunos para o item 1 da tarefa bem como as possíveis intervenções que podem ser realizadas pelo professor.

1. Em uma folha de papel A4, marque três pontos distintos A, B e C não alinhados. Construa os segmentos de reta AB, BC e AC e responda:



a) Que figura geométrica convexa é constituída pelos pontos A, B e C? Descreva algumas de suas características.



Possíveis Intervenções

1. Quais são as características de um triângulo?

R: As arestas, os vértices e os ângulos.

2. As arestas é uma das características de um triângulo?

R: Não, a aresta não é característica de um triângulo. Na verdade, os lados são característicos de um triângulo.

3. Os lados de um triângulo são retas, semirretas ou segmentos de reta?

R: O triângulo é constituído por segmentos de retas consecutivos.

4. E o que são os vértices?

R: São pontos em comum que ligam os segmentos de reta que formam o triângulo.

5. O que é ângulo?

R: É a medida da inclinação entre duas retas que partem de um ponto comum.

6. O que mais podemos dizer a respeito de ângulo?

R: Que é uma região delimitada por duas semirretas que partem de um ponto em comum.

7. E o que é uma figura convexa?

R: É uma figura fechada.

8. E o que mais podemos afirmar?

R: Que ao tomar dois pontos pertencentes a esta figura, a reta que une estes pontos deve estar contida na figura, com nenhuma de suas partes passando por fora da figura.

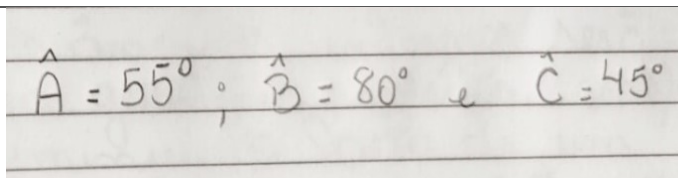
9. E como podemos dizer isso matematicamente?

R: Matematicamente, se trata de uma figura geométrica que não possuem ângulos internos com medidas superiores a 180° .

Expectativa: Nesta resolução, é esperado que os alunos consigam representar um triângulo em uma superfície plana e que identifiquem as suas principais características, como os

lados, os ângulos e os vértices, além de relembrar conceitos importantes que serão discutidos nas próximas questões.

b) Determine as medidas dos ângulos internos de cada um dos vértices desta figura geométrica.



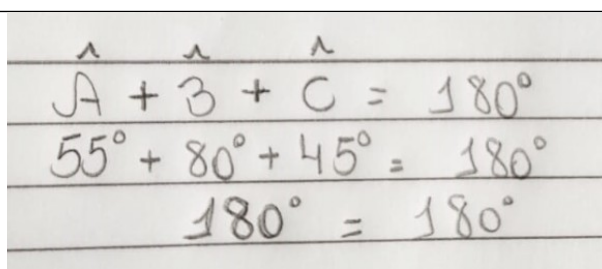
$$\hat{A} = 55^\circ; \hat{B} = 80^\circ \text{ e } \hat{C} = 45^\circ$$

Possíveis Intervenções

As respostas para esta alternativa da questão dependerão das construções feitas pelos estudantes. Espera-se que os estudantes saibam utilizar o transferidor e que reconheçam conceitos de Geometria Euclidiana, por exemplo, a definição de ângulo e de vértice em geometria plana.

c) Determine a soma desses ângulos.

Resolução 1 (correta pouco sofisticada)



$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \\ 55^\circ + 80^\circ + 45^\circ &= 180^\circ \\ 180^\circ &= 180^\circ \end{aligned}$$

Possíveis Intervenções

1. Quais são as medidas dos ângulos internos do triângulo?

R: As medidas dos ângulos são 55° , 80° e 45° , respectivamente.

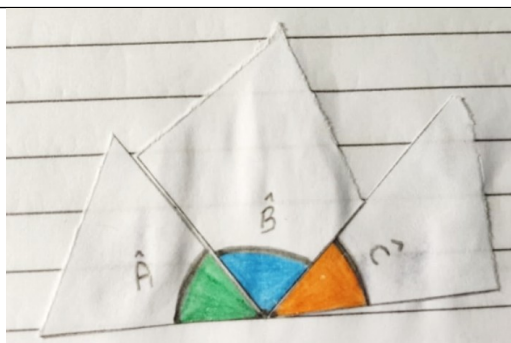
2. Todos obtiveram a mesma medida para os seus ângulos do triângulo?

R: Não, pois fizemos representações de triângulos diferentes uns dos outros.

3. Solicitar aos estudantes, para alguns deles, dizerem as medidas que obtiveram para a representação do seu triângulo.

Nesta resolução, percebe-se que há indícios a respeito da definição de soma dos ângulos internos de um triângulo ao colocar a igualdade entre os termos da operação, na intenção de provar que soma dos três ângulos internos do triângulo vale 180° .

Resolução 2 (correta pouco sofisticada)



Possíveis Intervenções

1. Quem é $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ nesta resolução?

R: $\hat{A}$ está se referindo ao ângulo posicionado no vértice A, $\hat{B}$ é a notação referente ao ângulo que está direcionado ao vértice B, e $\hat{C}$ é o ângulo que está direcionado ao vértice C.

2. E os três ângulos juntos estão afirmando o quê?

R: Estão afirmando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

3. Mas essa informação é apresentada na resolução?

R: Não!

4. E como podemos melhorar isto?

R: Acrescentando o respectivo valor de cada um dos ângulos na representação feita e outra possibilidade é apresentar a soma das medidas dos respectivos ângulos para concluir que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual 180° .

Resolução 3 (correta e sofisticada)

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S = (3 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S = 1 \cdot 180^\circ$$

$$S = 180^\circ$$

Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° .

Possíveis Intervenções

1. Que fórmula é essa?

R: Essa fórmula é utilizada para calcular a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo.

3. E qual o significado da expressão “ $n - 2$ ”?

R: O “ n ” é o número de lados da figura geométrica.

4. Certo! Mas o “ $n - 2$ ” resulta em que? O resultado da diferença entre o número de lados da figura geométrica e 2, o que representa?

R: Está relacionado com a quantidade de triângulos que podem ser formados em uma figura plana.

Percebe-se que a resolução apresentada é algébrica, no qual é utilizado a fórmula da soma dos ângulos internos para qualquer polígono convexo. A intenção é que seja utilizado a soma das medidas realizadas na alternativa b) da questão, o que não é o caso aqui, mas que também pode ser considerada uma resolução.

Discussão coletiva: Para a discussão coletiva deste item 1 da tarefa, será disponibilizado um tempo de 15 minutos aproximadamente, em que serão selecionadas as resoluções dos estudantes (das duplas) seguindo o critério definido antecipadamente pelo professor, a partir das resoluções que apresentam procedimentos mais empíricos e com menos contextualizações matemáticas (pictórico, tentativa e erro, aritmético), isto é, aquelas menos abstratas, para uma resolução mais completa matematicamente, mais abstrata, com representações e argumentações que sejam coerentes com o que é solicitado pela tarefa.

Caso seja identificado alguma estratégia ou procedimento desenvolvido de maneira errada (ou equivocada), esta deverá ser integrada nas discussões, como um dos primeiros casos a ser discutido, sendo apresentada pelo professor a fim de evitar situações constrangedoras entre os estudantes.

O professor deverá mediar essas discussões, promovendo a participação de todos os estudantes e, sempre que possível, realizar perguntas com base no que é exposto e apresentado por eles, promovendo interações e incentivando-os a reconhecerem as diferentes estratégias e procedimentos que podem ser empregados na resolução da tarefa.

Sistematização das aprendizagens: Para a sistematização dos conteúdos explorados no item da tarefa será disponibilizado um tempo de 15 minutos, aproximadamente, então dar continuidade nas demais itens da Tarefa.

Das discussões da alternativa a) do item 1 da Tarefa, será sistematizado que:

O triângulo é um polígono convexo que se caracteriza por ter três lados, três

vértices e três ângulos internos.

Dessa forma, espera-se que os estudantes compreendam que o triângulo é um polígono convexo formado pelo encontro de três segmentos de retas não colineares, em pares, que formam os três ângulos e delimitam sua região interna. Por sua vez, os vértices são os pontos de encontro entre os segmentos de retas que são os lados do triângulo, e questioná-los com relação aos elementos que compõem o triângulo e as suas características.

Das discussões realizadas na alternativa b) do item 1 da tarefa, será sistematizado o conceito de ângulo.

Ângulos são regiões internas delimitadas por duas semirretas que partem de um mesmo ponto, chamado de vértice.

É esperado que os estudantes compreendam o significado de ângulo, reconhecendo que se trata de uma região delimitada por duas semirretas que têm a mesma origem, que é o vértice. No caso do polígono que é uma figura fechada os lados são segmentos de retas e que o encontro entre dois desses segmentos forma um ângulo. Sendo convexo, os ângulos internos de um polígono são menores que 180° .

Na alternativa c) do item 1 da tarefa, o professor irá sistematizar o conceito de soma dos ângulos internos de um triângulo que é igual a 180° . O professor poderá sistematizar a fórmula da soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo, que pode ser utilizada conhecendo-se apenas o número de lados desse polígono.

A soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana é sempre igual a 180° .

A soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo é determinada conhecendo-se apenas o seu número de lados, isto é, dada pela expressão:

$$S = (n - 2) \times 180^\circ$$

A intenção é que os alunos percebam que é possível determinar a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo de duas maneiras: 1. conhecendo-se a medida de cada um dos ângulos que compõem o respectivo polígono convexo e, posteriormente, somando-os;

e, 2. conhecendo-se o número de lados do respectivo polígono.

3ª e 4ª Aula

Parte I

Caso não tenhamos discutido e finalizado o item 1 da Tarefa na aula anterior, retornaremos ao mesmo para que possamos finalizar as discussões e sistematizar os conteúdos envolvidos (15 a 20 minutos). Caso tenhamos finalizado as discussões e a sistematização, será feita uma retomada com a intenção de relembrar as discussões na aula anterior (10 minutos).

Parte II

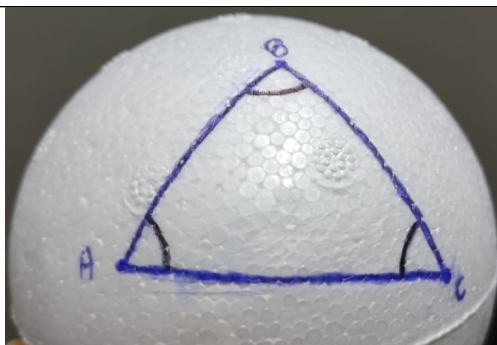
Descrição: Proposição do item 2 da Tarefa – Explorando outras superfícies geométricas.

2. Agora, em posse de uma bola de isopor e de uma caneta colorida, marque três pontos A, B e C distintos e não alinhados. Em seguida, ligue os pontos A e B, A e C, B e C e responda:
- a) Que figura geométrica fechada é constituída pelos pontos A, B e C? Descreva algumas de suas características.
 - b) Determine as medidas dos ângulos internos de cada um dos vértices desta figura geométrica.
 - c) Determine a soma desses ângulos.

Para a resolução do item 2 da tarefa, será destinado um tempo de 20 a 30 minutos para que os estudantes possam resolvê-la. Os estudantes serão orientados a escreverem, por escrito, suas estratégias e conclusões.

Resolução da tarefa pelos alunos: Possíveis resoluções dos alunos para o item 2 da tarefa bem como as possíveis intervenções que podem ser realizadas pelo professor.

2. Agora, em posse de uma bola de isopor e de uma caneta colorida, marque três pontos A, B e C distintos e não alinhados. Em seguida, ligue os pontos A e B, A e C, B e C e responda:



a) Que figura geométrica é constituída pelos pontos A, B e C? Descreva algumas de suas características.

Resolução

A figura geométrica construída é um triângulo, porém os lados não são retos, são arcos de uma circunferência. São características da figura geométrica, ter três lados, três ângulos e três vértices.

Possíveis Intervenções

1. Que características são apontadas?

R: De que o triângulo construído possui três lados, três vértices e três ângulos como na questão anterior da tarefa.

2. O que mais poderíamos apontar como características desta figura geométrica?

R: Que os lados não são retos, eles são meio curvos, parecendo arcos de um círculo.

3. Arcos de um círculo ou de uma circunferência?

R: Arcos de um círculo.

4. Existe diferença entre círculo e circunferência? Que diferença é essa?

R: Sim, existe diferença. O círculo é toda a região delimitada pela linha poligonal, compreendendo todos os pontos internos inclusive os pontos da linha poligonal. A circunferência é somente os pontos que pertencem à linha poligonal.

Nesta resolução, é esperado que os alunos consigam representar um triângulo em uma superfície esférica utilizando os recursos que serão disponibilizados e que identifiquem as suas principais características, como os lados, os ângulos e os vértices, além de observarem que o triângulo na superfície esférica é diferente do triângulo apresentado na superfície plana (Geometria Euclidiana).

b) Determine as medidas dos ângulos internos de cada um dos vértices desta figura geométrica.

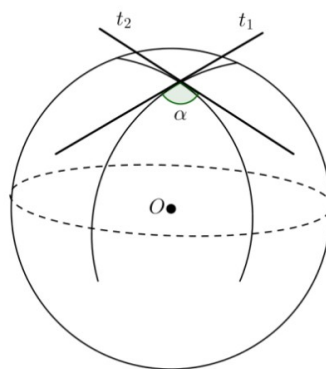
Resolução

$$\hat{A} = 60^\circ; \hat{B} = 80^\circ \text{ e } \hat{C} = 55^\circ$$

Possíveis Intervenções

As respostas para esta alternativa da questão dependerão das construções feitas pelos estudantes. Espera-se que os estudantes compreendam que a medida do ângulo esférico é a mesma medida do ângulo no plano e que pode ser utilizado o transferidor para determinar a medida de cada um dos ângulos esféricos. Para isso, será abordado com os estudantes que pôr um ponto na superfície esférica passaremos duas retas tangentes, t_1 e t_2 , que terão a mesma posição dos arcos de circunferência que constituem os respectivos lados do triângulo esférico, observar a Figura 1 a seguir, e que a medida do ângulo formado pelas duas retas tangentes é equivalente a medida do ângulo esférico α .

Figura 1. Retas tangentes em um ponto na superfície esférica.

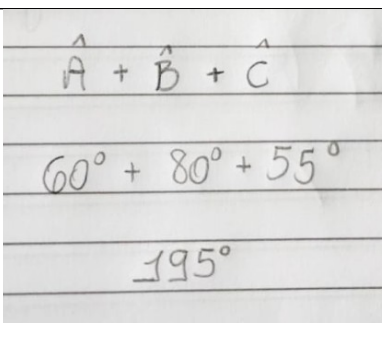


Fonte:

http://mat.ufcg.edu.br/encontrocampinenseprofmat/wp-content/uploads/sites/24/2021/07/IIIECP_Maxwell_Versao-Final.pdf

c) Determine a soma desses ângulos.

Resolução

		
Possíveis Intervenções 1. Quais são as medidas dos ângulos internos do triângulo? R: As medidas dos ângulos são 60°, 80° e 55°, respectivamente. 2. Todos obtiveram a mesma medida para os seus ângulos do triângulo? R: Não, pois fizemos representações de triângulos diferentes uns dos outros. 3. Solicitar aos estudantes, para alguns deles, dizerem as medidas que obtiveram para a representação do seu triângulo. Nesta resolução, a intencionalidade é que os estudantes reconheçam que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180°, diferentemente do que acontece na Geometria Euclidiana.		

Discussão coletiva: Para a discussão coletiva deste item 2 da tarefa, será disponibilizado um tempo de 15 minutos aproximadamente, em que serão selecionadas as resoluções dos estudantes (das duplas) seguindo o critério definido antecipadamente pelo professor, a partir das resoluções que apresentam procedimentos mais empíricos e com menos contextualizações matemáticas (pictórico, tentativa e erro, aritmético), isto é, aquelas menos abstratas, para uma resolução mais completa matematicamente, mais abstrata, com representações e argumentações que sejam coerentes com o que é solicitado pela tarefa.

Caso seja identificado alguma estratégia ou procedimento desenvolvido de maneira errada (ou equivocada), esta deverá ser integrada nas discussões, como um dos primeiros casos a ser discutido, sendo apresentada pelo professor a fim de evitar situações constrangedoras entre os estudantes.

O professor deverá mediar essas discussões, promovendo a participação de todos os estudantes e, sempre que possível, realizar perguntas com base no que é exposto e apresentado por eles, promovendo interações e incentivando-os a reconhecerem as diferentes

estratégias e procedimentos que podem ser empregados na resolução da tarefa.

Sistematização das aprendizagens: Para a sistematização dos conteúdos explorados no item da tarefa será disponibilizado um tempo de 15 minutos, aproximadamente, então dar continuidade nas demais itens da Tarefa.

Das discussões da alternativa a) da questão 2 da tarefa, o professor sistematizará o conceito de triângulo esférico, além de definir juntamente com os estudantes alguns conceitos de Geometria Esférica importantes para a sequência da tarefa.

***Circunferência** é um conjunto de pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância não nula dada. O ponto dado é o **centro** e a distância dada é o **raio** da circunferência.*

*Chamamos de **circunferência máxima** a toda circunferência que resulta da interseção entre uma superfície esférica e um plano passando pelo seu centro.*

***Triângulo Esférico** é um triângulo formado por três pontos distintos da superfície esférica e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima e cujos vértices estão interligados pelas circunferências máximas que se interceptam duas a duas.*

Na alternativa b) da questão 2 da tarefa o professor sistematizará o conceito de ângulo esférico, bem como definirá com os estudantes a maneira de medir ângulos em uma superfície esférica, retomando conceitos da Geometria Euclidiana.

***Ângulo esférico** é o ângulo formado por dois arcos de circunferências máximas com uma extremidade em comum. **Sua medida é a mesma do ângulo euclidiano** formado pelo **diedro** definido pelos dois planos que contém esses arcos.*

Na alternativa c) do item 2 da tarefa o professor discutirá com os estudantes que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° e menor que 540° , diferente do que acontece de um triângulo no plano em que a soma dos ângulos sempre é igual a 180° .

5ª e 6ª Aula

Parte I

Caso não tenhamos discutido e finalizado o item 2 da Tarefa na aula anterior, retornaremos ao mesmo para que possamos finalizar as discussões e sistematizar os conteúdos envolvidos (15 a 20 minutos). Caso tenhamos finalizado as discussões e a sistematização, será feita uma retomada com a intenção de relembrar as discussões na aula anterior (10 minutos).

Parte II

Proposição do item 3 da Tarefa – Explorando outras superfícies geométricas.

3. Analisando e comparando as suas respostas nos itens 1 e 2, anteriormente, responda:
- a) Que conclusões podemos chegar a partir desta comparação?
 - b) Se aumentarmos as medidas dos lados desses triângulos, o que acontece com as medidas dos ângulos internos?

Para a resolução do item 3 da tarefa, será destinado um tempo de 20 a 30 minutos para que os estudantes possam resolvê-la. Os estudantes serão orientados a escreverem, por escrito, suas estratégias e conclusões.

Exploração de um material manipulável que possibilite determinar a medida dos ângulos esféricos do triângulo esférico construído.

Resolução da tarefa pelos alunos: Possíveis resoluções dos alunos para o item da tarefa bem como as possíveis intervenções que podem ser realizadas pelo professor.

3. Analisando e comparando as suas respostas nos itens 1 e 2, anteriormente, responda:

a) Que conclusões podemos chegar a partir desta comparação?

Resolução

Podemos concluir que em ambas as superfícies geométricas a figura construída é um triângulo que possui as mesmas características, sendo três lados, três ângulos e três vértices.

Outra conclusão é a respeito da soma dos ângulos internos que na geometria esférica é superior a 180° , enquanto que na geometria plana é sempre 180° .

Possíveis Intervenções

1. As características descritas nos itens 1 e 2 são comuns para ambos triângulos?

R: Sim, podemos afirmar que sim. As características mencionadas para ambos os triângulos são: três ângulos, três lados e três vértices.

2. As medidas dos ângulos internos dos triângulos são as mesmas ou não?

R: Não são as mesmas, são medidas diferentes.

3. Em qual dessas medidas podemos afirmar que a soma dos ângulos internos será igual a 180° ?

R: Na representação do triângulo no plano.

4. O que acontece com a soma dos ângulos internos do triângulo representado na bola de isopor (esfera)?

R: A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo representado na bola de isopor é superior a 180° .

A intencionalidade nesta questão é que os estudantes observem que temos outras superfícies geométricas, para além da Geometria Plana, em que é possível construir figuras geométricas, e que precisamos estar atentos a forma que nos comunicamos com os sujeitos, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180° só tem sua veracidade na Geometria Plana (Geometria Euclidiana).

b) Se aumentarmos as medidas dos lados desses triângulos, o que acontece com as medidas dos ângulos internos?

Resolução

No triângulo construído sobre a superfície da folha de papel A4 (geometria plana) a soma dos ângulos internos continua sendo igual a 180° . Porém, no triângulo construído sobre a superfície da bola de isopor ao aumentar ou diminuir os lados do triângulo de forma que os ângulos internos serão diferentes, ou seja, na geometria esférica conforme aumenta ou diminui os lados de um triângulo esférico a soma dos ângulos internos sofrerá alteração.

Possíveis Intervenções

A intenção é de que os estudantes possam verificar que ao aumentar ou modificar os arcos de circunferência máxima de um triângulo esférico haverá alteração na medida do ângulo interno deste respectivo triângulo e que, conseqüentemente, terá alterações no resultado da soma dos ângulos internos deste triângulo esférico.

Discussão coletiva: Para a discussão coletiva deste item 3 da tarefa, será disponibilizado um tempo de 15 minutos aproximadamente, em que serão selecionadas as resoluções dos estudantes (das duplas) seguindo o critério definido antecipadamente pelo professor, a partir das resoluções que apresentam procedimentos mais empíricos e com menos contextualizações matemáticas (pictórico, tentativa e erro, aritmético), isto é, aquelas menos abstratas, para uma resolução mais completa matematicamente, mais abstrata, com representações e argumentações que sejam coerentes com o que é solicitado pela tarefa.

Caso seja identificado alguma estratégia ou procedimento desenvolvido de maneira errada (ou equivocada), esta deverá ser integrada nas discussões, como um dos primeiros casos a ser discutido, sendo apresentada pelo professor a fim de evitar situações constrangedoras entre os estudantes.

O professor deverá mediar essas discussões, promovendo a participação de todos os estudantes e, sempre que possível, realizar perguntas com base no que é exposto e apresentado por eles, promovendo interações e incentivando-os a reconhecerem as diferentes estratégias e procedimentos que podem ser empregados na resolução da tarefa.

Sistematização das aprendizagens: Para a sistematização dos conteúdos explorados no item da tarefa será disponibilizado um tempo de 15 minutos, aproximadamente, então dar continuidade nas demais itens da Tarefa.

O item 3 da tarefa é uma sistematização das discussões que são foram realizadas nos

itens anteriores, ou seja, dos itens 1 e 2. Portanto, se trata das discussões e das sistematizações dos conceitos de Geometria Euclidiana e Geometria Esférica que foram exploradas nos itens 1 e 2 da tarefa que servirão de base para os estudantes possam responder o item 3.

7ª e 8ª Aula

Parte I

Caso não tenhamos discutido e finalizado o item 3 da Tarefa na aula anterior, retornaremos ao mesmo para que possamos finalizar as discussões e sistematizar os conteúdos envolvidos (15 a 20 minutos). Caso tenhamos finalizado as discussões e a sistematização, será feita uma retomada com a intenção de relembrar as discussões na aula anterior (10 minutos).

Parte II

Proposição do item 4 da Tarefa – Explorando outras superfícies geométricas.

4. Em uma bola de isopor e com o auxílio de uma caneta colorida, marque dois pontos A e B de forma que sejam opostos entre si. Em seguida, trace duas circunferências máximas que passem por estes pontos e uma terceira circunferência máxima que não passe pelos pontos A e B.
- a) Em quantas partes as três circunferências máximas dividem a superfície da bola de isopor?
- b) A figura formada sob a superfície da bola de isopor pelas três circunferências máximas lembra alguma representação? Apresente uma justificativa para sua resposta.

Para a resolução do item 4 da tarefa, será destinado um tempo de 20 a 30 minutos para que os estudantes possam resolvê-la. Os estudantes serão orientados a escreverem, por escrito, suas estratégias e conclusões.

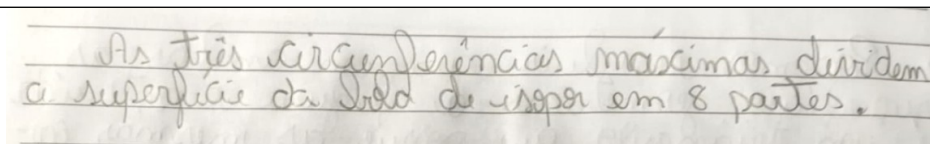
Resolução da tarefa pelos alunos: Possíveis resoluções dos alunos para o item 4 da tarefa bem como as possíveis intervenções que podem ser realizadas pelo professor.

4. Em uma bola de isopor e com o auxílio de uma caneta colorida, marque dois pontos A e B de forma que sejam opostos entre si. Em seguida, trace duas circunferências máximas que passem por estes pontos e uma terceira circunferência máxima que não passe pelos

pontos A e B.

a) Em quantas partes as três circunferências máximas dividem a superfície da bola de isopor?

Resolução



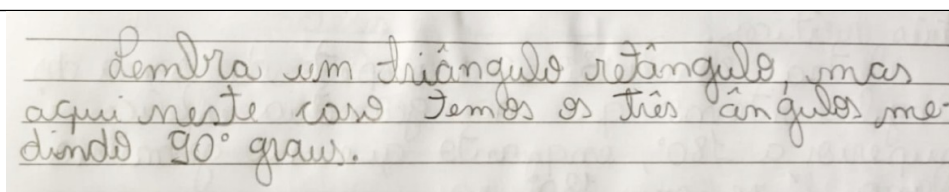
As três circunferências máximas dividem a superfície da bola de isopor em 8 partes.

Possíveis Intervenções

A intencionalidade é de que os estudantes observem uma das classificações de triângulo esférico, neste caso o triângulo tri-retângulo, e comparar com as classificações existentes na Geometria Euclidiana.

b) A figura formada lembra alguma representação? Apresente uma justificativa para sua resposta.

Resolução



Lembra um triângulo retângulo, mas aqui neste caso temos os três ângulos medindo 90° graus.

Possíveis Intervenções

O objetivo é observar que em uma superfície esférica podemos ter um triângulo em que todos os seus ângulos internos possuem medidas igual a 90°, cuja soma resulta em 270°.

Discussão coletiva: Para a discussão coletiva deste item 4 da tarefa, será disponibilizado um tempo de 15 minutos aproximadamente, em que serão selecionadas as resoluções dos estudantes (das duplas) seguindo o critério definido antecipadamente pelo professor, a partir das resoluções que apresentam procedimentos mais empíricos e com menos contextualizações matemáticas (pictórico, tentativa e erro, aritmético), isto é, aquelas menos abstratas, para uma resolução mais completa matematicamente, mais abstrata, com representações e argumentações que sejam coerentes com o que é solicitado pela tarefa.

Caso seja identificado alguma estratégia ou procedimento desenvolvido de maneira errada (ou equivocada), esta deverá ser integrada nas discussões, como um dos primeiros

casos a ser discutido, sendo apresentada pelo professor a fim de evitar situações constrangedoras entre os estudantes.

O professor deverá mediar essas discussões, promovendo a participação de todos os estudantes e, sempre que possível, realizar perguntas com base no que é exposto e apresentado por eles, promovendo interações e incentivando-os a reconhecerem as diferentes estratégias e procedimentos que podem ser empregados na resolução da tarefa.

Sistematização das aprendizagens: Para a sistematização dos conteúdos explorados no item da tarefa será disponibilizado um tempo de 15 minutos, aproximadamente, então dar continuidade nas demais itens da Tarefa.

Das discussões do item 4, o professor poderá sistematizar com seus estudantes o conceito de pontos antípodas e do triângulo esférico tri-retângulo, que é aquele que possui três ângulos com medidas iguais a 90° .

*Quando dois pontos de uma esfera são pontos diametralmente opostos, dizemos que são pontos **antípodas**.*

*Os **Triângulos Esféricos** se dividem em **Retângulo**, **Bi-retângulo** e **Tri-retângulo** conforme possuem **um**, **dois** ou **três ângulos retos** respectivamente.*

O professor utilizará das ideias presentes nas estratégias elaboradas pelos alunos para formalizar conceitos de Geometria Esférica e comparar com conceitos da Geometria Euclidiana que tem dominado os currículos educacionais da Educação Básica.

9ª e 10ª Aula

Parte I

Caso não tenhamos discutido e finalizado o item 4 da Tarefa na aula anterior, retornaremos ao mesmo para que possamos finalizar as discussões e sistematizar os conteúdos envolvidos (15 a 20 minutos). Caso tenhamos finalizado as discussões e a sistematização, será feita uma retomada com a intenção de relembrar as discussões na aula anterior (10 minutos).

Parte II

Discussão coletiva do texto “*Representation, vision and visualization: cognitive*

functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning" de autoria de Raymond Duval indicado para estudo sobre visão e visualização.

Os estudantes serão orientados a buscarem o significado de palavras que julgarem ser novas ao seu vocabulário. Isto é, como tarefa os estudantes devem procurar em um dicionário o significado de palavras que são desconhecidas e que não pertencem ao seu vocabulário.

11ª e 12ª Aula

Caso não tenhamos finalizado a discussão do texto "*Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning*" de autoria de Raymond Duval, retornaremos ao mesmo para que possamos finalizar as discussões e sanar as dúvidas dos estudantes.

Discutir com os estudantes a lição de casa aplicada na aula anterior para dar continuidade nas discussões a respeito do texto "*Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning*".

Caso não tenhamos finalizado a discussão do texto "*Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning*" de autoria de Raymond Duval, retornaremos ao mesmo para que possamos finalizar as discussões e sanar as dúvidas dos estudantes.

13ª e 14ª Aula

Parte I

Caso não tenhamos finalizado a discussão do texto "*Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning*" de autoria de Raymond Duval, retornaremos ao mesmo para que possamos finalizar as discussões.

Parte II

Propor aos estudantes que retomem em suas resoluções e tendo como base o texto discutido, solicitar que identifiquem indícios de mobilização de aspectos da visão e da visualização em suas resoluções, apresentando uma justificativa reflexiva, procurando

responder o porquê ele acha que tais aspectos foram mobilizados por eles.

Propor aos estudantes que retomem em suas resoluções e tendo como base o texto discutido, solicitar que identifiquem indícios de mobilização de aspectos da visão e da visualização em suas resoluções, apresentando uma justificativa reflexiva, procurando responder o porquê ele acha que tais aspectos foram mobilizados por eles.

5.3 Orientações ao Professor

Na intenção de orientar as ações do professor nesta etapa da aula, será organizado um quadro (Quadro 3) dividido em três colunas: a primeira (da esquerda para a direita) indicando a questão, a segunda indicando as possíveis atividades dos estudantes no decorrer da resolução de cada uma das questões da tarefa; e uma terceira que indica as possíveis ações do professor com relação as atividades desenvolvidas pelos estudantes.

Quadro 3 – Possibilidades de Intervenções do Professor durante a resolução da tarefa

	Atividade dos Alunos	Ações do Professor
1. a)	- Demonstrar dificuldades em reconhecer uma figura convexa. - Apresentar dificuldades em descrever características de um triângulo.	- Questionar os estudantes: De que maneira identificamos que uma figura geométrica é convexa ou não? Que explicações são apresentadas na Educação Básica? - Questionar os estudantes: Quando você escuta alguém lhe dizer a palavra triângulo, o que vem primeiramente em seu pensamento? Isso é uma característica de triângulo ou não? O que você reconhece de imediato quando alguém lhe diz a palavra triângulo?
1. b)	- Apresentar dificuldades em compreender o que é ângulo. - Demonstrar dificuldades em determinar a medida do ângulo interno de um triângulo.	- Compreender como os estudantes conceituam ângulo de uma figura geométrica plana. - Questionar o significado de ângulo em uma figura geométrica plana. - Questionar os estudantes com relação ao que é apresentado na tarefa, na intenção de que reconheçam o vértice de uma figura geométrica plana, neste caso o vértice de um triângulo plano. De que maneira poderíamos determinar a medida

		do ângulo interno? Existe algum instrumento que possamos utilizar para determinar a medida dos ângulos internos deste triângulo? Que instrumento é esse? Como utilizar este instrumento?
1. c)	- Reconhecer a possibilidade de utilizar o transferidor para determinar a medida de cada dos ângulos para depois fazer a soma dos ângulos internos. - Apresentar dificuldades para explicar, sobretudo de forma escrita, as estratégias e os procedimentos utilizados na resolução da tarefa. - Afirmar que podem determinar a soma dos ângulos internos pela fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo, $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$.	- Verificar como os estudantes compreendem o conceito de soma dos ângulos internos de um polígono convexo e, especificamente, de um triângulo. - Identificar as estratégias utilizadas pelos estudantes para determinar a soma dos ângulos internos do triângulo construído. - Questionar os estudantes a respeito da função de um transferidor. - Provocar os estudantes: Como você pensou para chegar nesta resposta? Explique como você fez. Por que você utilizou essa estratégia? A partir dos relatos orais, incentivar os alunos a transcreverem isso por escrito na resolução da questão, de modo a esclarecer o procedimento utilizado. - Questionar os estudantes com relação a possibilidade ou não de utilizar a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para determinar a soma dos ângulos internos de um triângulo. - Questionar qual a compreensão dos estudantes a respeito da fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo e se este conceito é compatível com a proposta da tarefa.
2. a)	- Demonstrar dificuldades em compreender o conceito de circunferência máxima.	- Verificar como os estudantes compreendem o conceito de circunferência e de circunferência máxima, questionando-os a respeito da diferença entre circunferência e círculo, e a diferença entre reta e circunferência máxima. - Promover uma discussão coletiva com a turma explorando as respostas dos estudantes a respeito da circunferência

	- Apresentar dificuldades em identificar o que seja não alinhado. - Demonstrar dificuldades em descrever características de um triângulo (triângulo esférico).	máxima. - Questionar o significado de colineares e não colineares. - Questionar os estudantes com relação ao que é apresentado na tarefa, na intenção de que reconheçam que os pontos não podem estar todos em uma mesma circunferência máxima. - Quando você escuta alguém lhe dizer a palavra triângulo, o que vem primeiramente em seu pensamento? Isso é uma característica de triângulo ou não? O que você reconhece de imediato quando alguém lhe diz a palavra triângulo? O triângulo construído é semelhante ao que foi construído no item 1 da Tarefa?
2. b)	- Reconhecer que os vértices são os pontos de encontro entre os lados de um triângulo. - Apresentar dificuldades em compreender o que é ângulo esférico. - Demonstrar dificuldades em determinar a medida do ângulo interno de um triângulo esférico.	- Verificar como os estudantes compreendem o vértice de uma figura geométrica. - Identificar, clarificar e compreender a estratégia utilizada pelos estudantes para determinar a medida dos ângulos internos de um triângulo esférico. - Questionar o significado de vértice em uma figura geométrica esférica. - Compreender como os estudantes conceitua ângulo de uma figura geométrica esférica. - Questionar o significado de ângulo em uma figura geométrica esférica. - Questionar os estudantes com relação as possibilidades para determinar as medidas dos ângulos internos do triângulo esférico. De que maneira poderíamos determinar a medida do ângulo interno? Existe algum instrumento que possamos utilizar para determinar a medida dos ângulos internos deste triângulo? Que instrumento é esse? Que conceitos matemáticos estão envolvidos nesta questão?
2. c)	- Reconhecer a possibilidade de	- Verificar como os estudantes

	utilizar o transferidor para determinar a medida de cada dos ângulos para depois fazer a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. - Apresentar dificuldades para explicar, sobretudo de forma escrita, as estratégias e os procedimentos utilizados na resolução da tarefa. - Afirmar que podem determinar a soma dos ângulos internos pela fórmula da soma dos ângulos internos de um triângulo plano.	compreendem o conceito de soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. - Identificar as estratégias utilizadas pelos estudantes para determinar a soma dos ângulos internos do triângulo construído. - Questionar os estudantes a respeito da função de um transferidor. - Provocar os estudantes: Como você pensou para chegar nesta resposta? Explique como você fez. Por que você utilizou essa estratégia? A partir dos relatos orais, incentivar os alunos a transcreverem isso por escrito na resolução da questão, de modo a esclarecer o procedimento utilizado. - Questionar os estudantes com relação a possibilidade ou não de utilizar a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para determinar a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. - Questionar qual a compreensão dos estudantes a respeito da fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo e se este conceito é compatível com a proposta da questão.
3. a)	- Não conseguem diferenciar os triângulos que foram construídos em superfícies diferentes. - Diferenciar os triângulos construídos em superfícies diferentes. - Podem apresentar dificuldades para explicar, sobretudo de forma escrita, as estratégias e os procedimentos utilizados na resolução da tarefa.	- Solicitar aos estudantes que analisem as suas respostas dos itens 1 e 2, e que façam uma comparação, de forma que consigam enxergar a diferença entre os triângulos plano e esférico. Os triângulos são ou não são semelhantes? O que há de comum e incomum entre eles? - Solicitar aos estudantes que descrevam o que há ou não há de comum entre os triângulos? Que características podemos considerar que são parecidas em relação as Geometrias Plana e Esférica? - Provocar os estudantes: Como você pensou para chegar nesta resposta? Explique como você fez. Por que você utilizou essa estratégia? A partir dos relatos orais, incentivar os alunos a

		transcreverem isso por escrito na resolução da questão, de modo a esclarecer o procedimento utilizado.
3. b)	- Reconhecer que no triângulo construído na superfície plana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° , enquanto que no triângulo construído na superfície esférica, a soma dos ângulos internos pode variar de 180° a 540° .	- Orientar os estudantes a construírem novas representações de triângulo nas superfícies plana e esférica e verificar o que acontece com a medida do ângulo interno de cada uma delas, inclusive a soma das medidas desses respectivos ângulos.
4. a)	- Demonstrar dificuldades de reconhecer que os pontos A e B sejam opostos entre si. - Apresentar dificuldades em compreender o que são circunferências máximas.	- Discutir com os estudantes o que quer dizer pontos opostos entre si, de que deve estar em posição semelhante só que do outro lado. - Questionar os estudantes a respeito do significado de reta na geometria plana, bem como o significado de semirreta e segmento de reta. - Questionar os estudantes a respeito do significado de retas na geometria esférica, e questionar o que são as circunferências máximas.
4. b)	- Compreender o significado de representação na geometria. - Podem apresentar dificuldades para explicar, sobretudo de forma escrita, as estratégias e os procedimentos utilizados na resolução da tarefa.	- Questionar os estudantes com relação a que figura geométrica o objeto construído se assemelha. A construção feita com a canetinha colorida na bola de isopor se assemelha a qual objeto matemático? - Provocar os estudantes: Como você pensou para chegar nesta resposta? Explique como você fez. Por que você utilizou essa estratégia? A partir dos relatos orais, incentivar os alunos a transcreverem isso por escrito na resolução da questão, de modo a esclarecer o procedimento utilizado.

Durante a resolução da Tarefa, o professor acompanhará os estudantes e observará possíveis resoluções que possam ser fontes para as discussões, na intenção de selecionar e sequenciar algumas das duplas que apresentarão na lousa suas estratégias e procedimentos para a resolução da tarefa e, por meio das discussões em grande grupo, validar a solução da tarefa e sistematizar os conteúdos explorados.

6. Recursos Didáticos

Lousa, giz, projetor, notebook, tarefa impressa, folhas de papel A4, folhas de papel almaço, bola de isopor; régua, fita métrica, transferidor, transferidor esférico, canetas coloridas, elástico e cola branca.

7. Avaliação

A avaliação dos alunos ocorrerá por meio da observação e da análise do trabalho realizado em grupos. Durante a exploração da tarefa proposta será avaliado o trabalho colaborativo dos alunos e os procedimentos utilizados na sua resolução, bem como no engajamento e na sua participação nas discussões e na sistematização do conteúdo.

8. Referências

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica, 2018.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, [S. l.], p. 11-17, nov./dez. 2011.

CANAVARRO, A. P., OLIVEIRA, H., e MENEZES, L.. Práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso de Célia. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes e S. Carreira (ed.). **Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática**, 2012.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Ensino Exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam matemática. In: CYRINO, M. C. C. T. (ed.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 20-32.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. O ensino exploratório e a elaboração de um framework para os casos multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T. (ed.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 82-99.

DA FONSECA, M. O. S; TREVISAN, A. L. Práticas de ensino exploratório em sala de aula: uma experiência com geometria espacial. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 7., 2017, Canoas (RS). **Anais [...]**. Canoas: 2017. P.

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Medidas de tendência central e o ensino exploratório de estatística. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande (MS), v. 8, n. 17, p. 166-191, 2015.

JESUS, C. C. **Análise crítica de tarefas matemáticas**: um estudo com professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. 2011. 95 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de

Londrina, Londrina, 2011.

PARANÁ, S. de E. da E. do. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**. Disponível em:

<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/crep_2020/matematica_curriculo_rede_estadual_paranaense_diagramado.pdf>. Acesso em: 08 out. 2021.

RODRIGUES, P. H. **Práticas de um grupo de estudos e pesquisa na elaboração de um recurso multimídia para a formação de professores que ensinam Matemática**. 2015. 228 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.