KASSIANA SCHMIDT SURJUS

DISCUTINDO MISCONCEPÇÕES EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

LONDRINA
2025

KASSIANA SCHMIDT SURJUS

DISCUTINDO MISCONCEPÇÕES EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
Orientadora: Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

LONDRINA
2025

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

S961d Surjus, Kassiana Schmidt.
Discutindo misconcepções em atividades de modelagem matemática / Kassiana Schmidt Surjus. - Londrina, 2025.
169 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2025.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3. Matemática - Estudo e ensino - Tese. 4. Misconcepções - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51

KASSIANA SCHMIDT SURJUS

DISCUTINDO MISCONCEPÇÕES EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
Orientadora: Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

BANCA EXAMINADORA

_____

Orientadora: Prof.ª Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina – UEL

_____

Prof.ª Dra. Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa
Universidade Estadual do Norte do paraná – UENP

_____

Prof. Dr. Jhony Alexánder Villa-Ochoa
Universidade de Antioquia – UdeA

_____

Prof.ª Dra. Lilian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá – UEM

_____

Prof.ª Dra. Michele Regiane Dias Veronez
Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR

Londrina, 28 de fevereiro de 2025

Ao meu esposo Edson, companheiro de todas as batalhas, aos meus filhos Pedro e Daniel, meu enteado Eduardo e sua esposa Bruna, e minha futura nora Isabelle, meus bens mais preciosos.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela minha vida, por ter me dado a oportunidade de ingressar neste doutorado, sou sua filha amada, obrigada Pai!

Ao meu esposo, Edson, por ter me apoiado para fazer o doutorado e ter suportado todas as dificuldades comigo!

Aos meus filhos Pedro e Daniel, que mesmo sendo privados da minha companhia, me apoiaram o tempo todo!

Ao meu enteado Eduardo e sua esposa Bruna por me apoiarem e por toda acessoria que me deram sobre diversos assuntos.

Aos meus pais, Carlos e Rose (*in memorian*), por terem me amado, educado e investido na minha formação acadêmica. E especial agradeço a minha mãe, que nunca duvidou do meu potencial para fazer este doutorado, não permitiu que eu desistisse, mesmo nos momentos mais difíceis, antes de sua partida.

À minha orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida por suas contribuições, dedicação, apoio e extrema paciência que foram fundamentais na construção desta pesquisa.

Aos professores Bárbara, Jhony, Lilian e Michele, pelas sugestões e críticas valiosíssimas que tanto contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos amigos Fabianne, Thiago Mendes e Kátia, ombro amigo em todas as horas!

À Geila que segurou as pontas nos momentos críticos!

Aos colegas de doutorado do GRUPEMMAT Aline, Bianca, Caio, Élida, Flávio Fernades., Flávio Lima, Jeferson, Joice, Lucas, Rosângela, Robson, Talita, Thainara e Thiago, que colaboraram direta e indiretamente neste trabalho, especialmente aos colegas Thiago Mendes e Caio Moreira pelas contribuições e acessorias.

Ao professor Carlos Prado pelo convite para ministrar o minicurso na Engenharia Civil, e à professora e Heliana Fontenele, ambos me deram todo apoio necessário para a sua realização.

Aos meus alunos, cujas dificuldades inspiraram essa pesquisa.

Aos meus irmãos da Missão 516, Ely e Carla, Saulo e Fernanda, Raphael e Marcele, Marilda e Claudio, Mari e Guilherme, Caru e Elton, Maurício e Kelly, Cheris e Max, Nídia e Carlos, Catarina e Sérgio, Thaila e Rodolfo, Cidinha e Junior, Thayse e Walter, e tantos outros por terem orado e pedido a intercessão de Jesus junto ao Pai nos momentos mais difíceis.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Eu estava meramente pensando os pensamentos de Deus após Ele. Uma vez que nós, astrônomos, somos sacerdotes do Deus supremo em relação ao livro da natureza, é bom para nós pensarmos não na glória de nossas mentes, mas, acima de tudo, na glória de Deus.

Johannes Kepler

SURJUS, Kassiana Schmidt. **Discutindo misconcepções em atividades de modelagem matemática**. 2025. 169 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2025.

Resumo

Misconcepções são um padrão de pensamento equivocado que surge a partir de uma premissa incorreta, que causa erros sistemáticos (Nesher, 1987). A emergência de misconcepções no processo de aprendizagem tem sido um campo fértil para pesquisas que voltam o seu olhar para a análise de tais misconcepções com vistas a superá-las. Nesse cenário a presente pesquisa discute as relações entre a modelagem matemática e misconcepções, bem como as implicações dessas relações quando atividades de modelagem matemática são desenvolvidas no âmbito da sala de aula. Sendo assim, o objetivo é investigar interlocuções entre modelagem matemática e misconcepções dos estudantes. O arcabouço teórico da pesquisa é pautado em pressupostos teóricos da modelagem matemática como alternativa pedagógica e, segue uma perspectiva semiótica com a abordagem semiótico-cognitiva de Raymond Duval e a abordagem construtivista de Bruno D'Amore, e uma perspectiva didática para misconcepções segundo Silvia Sbaragli. A presente pesquisa é de natureza qualitativa com caráter interpretativo, e para compor os dados empíricos, atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas em dois contextos, o primeiro é a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I em um curso de Licenciatura em Matemática, e o segundo é a disciplina de Transportes em um curso de Engenharia Civil. O conjunto de dados advém de registros escritos dos estudantes e gravações em áudio durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. A emergência de misconcepções foi retratada em episódios, em que participam professora e estudantes. O esforço analítico pauta-se nas misconcepções que emergem no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Os resultados sinalizam o potencial de atividades de modelagem matemática para lidar com misconcepções. Com base nas análises específicas, o cruzamento com as teorias de base apontam para duas possibilidades: as especificidades e as características de atividades de modelagem matemática têm potencial para a manifestação de misconcepções; e misconcepções já incorporadas pelos estudantes podem ser superadas mediante demandas de uma atividade de modelagem matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Ensino Superior, Misconcepções.

SURJUS, Kassiana Schmidt. **Discussing misconceptions in mathematical modeling activities**. 2025. 169 f. Tesis (Doctoral in Teaching Science and Mathematics Education) – Londrina State University, Londrina, 2025.

Abstract

Misconceptions are a pattern of mistaken thinking that arises from an incorrect premise, which causes systematic errors (Nesher, 1987). The emergence of misconceptions in the learning process has been a fertile field for research that focuses on analyzing such misconceptions with a view to overcoming them. In this scenario, this research discusses the relationships between mathematical modeling and misconceptions, as well as the implications of these relationships when mathematical modeling activities are developed in the classroom. Therefore, the objective is to investigate interlocutions between mathematical modeling and students' misconceptions. The theoretical framework of the research is based on theoretical assumptions of mathematical modeling as a pedagogical alternative and follows a semiotic perspective with the semiotic-cognitive approach of Raymond Duval and the constructivist approach of Bruno D'Amore, and a didactic perspective for misconceptions according to Silvia Sbaragli. This research is qualitative in nature with an interpretative character, and to compose the empirical data, mathematical modeling activities were developed in two contexts, the first is the Differential and Integral Calculus I discipline in a Mathematics undergraduate course, and the second is the Transportation discipline in a Civil Engineering course. The data set comes from students' written records and audio recordings during the development of mathematical modeling activities. The emergence of misconceptions was portrayed in episodes in which both teacher and students participated. The analytical effort is based on the misconceptions that emerge in the development of mathematical modeling activities. The results indicate the potential of mathematical modeling activities to deal with misconceptions. Based on the specific analyses, the intersection with the basic theories points to two possibilities: the specificities and characteristics of mathematical modeling activities have the potential to manifest misconceptions; and misconceptions already incorporated by students can be overcome through the demands of a mathematical modeling activity.

Keywords: Mathematical Modeling, Higher Education, Misconceptions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Ciclo de modelagem matemática.....24
Figura 1.2 – Ciclo de modelagem matemática.....26
Figura 1.3 – Fases da Modelagem Matemática e Ações Cognitivas dos Estudantes.....27
Figura 2.1 – Polígonos.....47
Figura 2.2 – Quadro teórico.....49
Figura 3.1 – Organização da pesquisa.....65
Figura 4.1 – Registro dos estudantes E2 e E18.....70
Figura 4.2 – Registros dos estudantes E5, E7 e E13.....70
Figura 4.3 – Registro do estudante E7.....72
Figura 4.4 – Registro do estudante E11.....73
Figura 4.5 – Registro do estudante E5.....74
Figura 4.6 – Registro do estudante E27.....75
Figura 4.7 – Registro do estudante E3.....77
Figura 4.8 – Registro do estudante E13.....77
Figura 4.9 – Registro do estudante E19.....78
Figura 4.10 – Registro do estudante E4.....79
Figura 4.11 – Registro do estudante 23.....79
Figura 4.12 – Registro do estudante E11.....82
Figura 4.13 – Registro do estudante E24.....82
Figura 4.14 – Registro dos estudantes E2 e E23.....82
Figura 4.15 – Registro do estudante E15.....83
Figura 4.16 – Registro dos estudantes E1 e E14.....83
Figura 4.17 – Registro dos estudantes E4 e E20.....84
Figura 4.18 – Registro do estudante E5.....85
Figura 4.19 – Determinação da taxa de sobrevivência.....91
Figura 4.20 – Representação gráfica incorreta da função P_n do primeiro estágio.....91
Figura 4.21 – Representação gráfica da função P_n do primeiro estágio.....92
Figura 4.22 – População de abelhas em uma colônia.....94
Figura 4.23 – Erro processual do G3.....96
Figura 4.24 – Abordagem alternativa do G3 para o problema.....98
Figura 4.25 – Determinação da distância do encaixe para o ângulo de 157,5º.....105

Figura 4.26 – Posição da haste livre no encaixe.....105
Figura 4.27 – Conclusão do G4T1.....106
Figura 4.28 – Determinação da área com o AutoCad do G4T1.....110
Figura 4.29 – Divisão do primeiro buraco e divisão de cada parte do buraco.....111
Figura 4.30 – Tabela de cálculo da área do primeiro buraco.....112
Figura 4.31 – Resolução do G3T2 113
Figura 4.32 – Determinação da área com o AutoCad do G3T1.....115
Figura 4.33 – Procedimentos para a obtenção das funções.....115
Figura 4.34 – Cálculo da área e volume.....116
Figura 4.35 – Comparação das áreas obtidas e análise dos resultados.....116
Figura 5.1 – Representação gráfica de P_n no segundo estágio.....127
Figura 5.2 – Determinação do ponto de intersecção.....133

LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1 – Atividades selecionadas para descrição e análise.....60
Quadro 4.1 – Atividades e grupos selecionados para descrição 66
Quadro 4.2 – Teste Diagnóstico.....68
Quadro 4.3 – Texto informativo da atividade *Sem abelha, sem alimento!*.....87
Quadro 4.4 – Síntese da resolução de G6.....90
Quadro 4.5 – Interpretação dos resultados do G6.....94
Quadro 4.6 – Síntese da resolução de G3.....95
Quadro 4.7 – Respostas do G3 obre sua experiência com a atividade de modelagem e sobre o papel da matemática no estudo da situação-problema.....97
Quadro 4.8 – Abordagens alternativas do G3 para a resolução do problema.....98
Quadro 4.9 – Texto informativo da atividade *Ajustando medidas em um equipamento de musculação*.....101
Quadro 4.10 – Síntese da resolução do grupo G4T1 na atividade ajustando medidas em um equipamento de musculação.....101
Quadro 4.11 – Texto informativo da atividade *Manutenção de vias asfálticas*.....107
Quadro 4.12 – Informações sobre os defeitos asfálticos.....107
Quadro 4.13 – Síntese da resolução do grupo G2T2 na atividade manutenção de vias asfálticas.....108
Quadro 4.14 – Análise e interpretação dos resultados do G2T2.....112
Quadro 4.15 – Síntese da resolução do grupo G3T1 na atividade manutenção de vias asfálticas.....114
Quadro 5.1 – Atividades e episódios analisados.....118
Quadro 5.2 – Selecionando variáveis.....119
Quadro 5.3 – Determinando o domínio e o contradomínio da função.....122
Quadro 5.4 – Conjunto dos Números Naturais.....124
Quadro 5.5 – Elaborando a representação gráfica da função.....125
Quadro 5.6 – Discussões sobre o fazer matemática.....128
Quadro 5.7 – Um novo olhar para a Matemática.....130
Quadro 5.8 – Buscando uma intersecção.....131
Quadro 5.9 – Ordem para prioridade de manutenção.....134
Quadro 5.10 – Volume para prioridade de manutenção.....137
Quadro 5.11 – Misconcepções identificadas nos episódios.....139

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Tipos de erros da questão 1.....69
Tabela 4.2 – Confiança do estudante quanto à sua resposta na questão 1.....71
Tabela 4.3 – Tipos de erros da questão 2.....72
Tabela 4.4 – Tipos de erro da questão 3.....74
Tabela 4.5 – Confiança do estudante quanto à sua resposta na questão 3.....75
Tabela 4.6 – Tipos de erro da questão 4.....76
Tabela 4.7 – Tipos de erro da questão 5.....78
Tabela 4.8 – Tipos de erro da questão 6.....80
Tabela 4.9 – Confiança do estudante quanto à sua resposta na questão 6.....80
Tabela 4.10 – Tipos de erro da questão 7.....81
Tabela 4.11 – Tipos de erro da questão 8.....84

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 14

CAPÍTULO 1 – MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA...22

CAPÍTULO 2 – MISCONCEPÇÕES EM CONTEXTOS DE APRENDIZAGEM 33
2.1 Introduzindo ideias 33
2.2 Perspectiva semiótica de misconcepções 38
2.2.1 Abordagem semiótico-cognitiva de Raymond Duval 39
2.2.2 Abordagem Construtivista de Bruno D'Amore 43
2.3 Perspectiva Didática: misconcepções inevitáveis e evitáveis 44
2.4 Síntese do quadro teórico.....48
2.5 Modelagem matemática e misconcepções: um passeio pela literatura.....49

CAPÍTULO 3 – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 53
3.1 Contextos da pesquisa 53
3.1.1 Contexto 1: Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I na Licenciatura em Matemática.....54
3.1.2 Contexto 2: Disciplina de Transportes na Engenharia Civil.....56
3.1.3 Os papéis de cada contexto na pesquisa.....57
3.2 As atividades de modelagem matemática desenvolvidas.....60
3.3 Sobre a coleta e o tratamento dos dados.....61
3.4 Natureza da pesquisa e metodologia de análise.....63

CAPÍTULO 4 – DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA EMPÍRICA 66
4.1 Contexto 1: Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I na Licenciatura em Matemática.....66
4.1.1 Identificando misconcepções em um teste diagnóstico.....67
4.1.2 Descrição da atividade *Sem abelhas, sem alimento!* 86
4.2 Contexto 2: Disciplina de Transportes na Engenharia Civil 99
4.2.1 Descrição da atividade *Ajustando medidas em um equipamento de musculação* 100
4.2.2 Descrição da atividade *Manutenção de vias asfálticas*.....106

CAPÍTULO 5 – EM BUSCA DE INTERLOCUÇÕES.....118
5.1 Análise da atividade *Sem abelhas, sem alimento!* 118
5.1.1 Episódio 1.....119
5.1.2 Episódio 2.....122
5.1.3 Episódio 3..... 125
5.1.4 Episódio 4.....128
5.2 Análise da atividade *Ajustando medidas em um equipamento de musculação*.....131
5.2.1 Episódio 5.....131
5.3 Análise da atividade *Manutenção de vias asfálticas*.....134
5.3.1 Episódio 6.....134
5.3.2 Episódio 7.....136
5.4 Apresentando interlocuções entre modelagem matemática e misconcepções.....139

CONSIDERAÇÕES FINAIS.....145

REFERÊNCIAS 149

APÊNDICE A – Termo de consentimento livre e esclarecido.....159

ANEXO A – Grade Curricular do Curso de Engenharia Civil.....161

ANEXO B – Plano de Ensino da disciplina de Estradas.....164

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma área do saber reconhecida pela sociedade como necessária tanto para investigar situações diversas, dando suporte para amparar decisões, como para o avanço e desenvolvimento da ciência e tecnologia. Nas instituições de ensino, a matemática ocupa um papel fundamental na formação do estudante nos diversos níveis de escolaridade, e o seu ensino é cercado de desafios e superações. Na sala de aula, estudantes e professores protagonizam de forma coletiva a construção do conhecimento (Pasquali, 2017), criando um cenário propício para discussões e investigações.

No Ensino Superior, as disciplinas de conteúdos matemáticos integram a grade curricular de cursos de diferentes áreas de conhecimento, sobretudo em Ciências Exatas e Tecnológicas. Além disso, conteúdos de disciplinas de outras áreas do conhecimento requerem o uso de conceitos matemáticos, bem como em áreas de pesquisa tais como Administração, Engenharias, Biologia, Economia, Física entre outras. Ou seja, o uso da matemática se faz presente em diversas áreas do conhecimento, e isso confere um papel fundamental para a Matemática.

No contexto da aprendizagem em Matemática, D'Amore (2007) sugere que as condições que influenciam a aprendizagem estão ligadas às práticas pedagógicas adotadas em sala de aula. A aprendizagem, entendida como um conjunto de mudanças de comportamento resultantes das interações entre professor e estudantes, está relacionada à gestão de diferentes representações, ao emprego de diversas linguagens e à utilização de um repertório de manifestações e argumentações sobre determinado conteúdo matemático (D'Amore, 2007). A gestão do ensino é uma das atribuições do professor, de modo que, a forma como os conceitos matemáticos são apresentados e trabalhados em sala de aula, influencia a construção do conhecimento pelos estudantes. A mediação do professor, ao escolher suas opções metodológicas, pode favorecer a compreensão e a superação de possíveis dificuldades. A atuação docente pode ir além do ensino tradicional[1], buscando outras alternativas para estimular o engajamento dos estudantes e possibilitar a construção do conhecimento, utilizando assim uma variedade de metodologias de ensino em sala de aula. De acordo com Masola e Alevatto (2016), deve-se promover uma aprendizagem ativa e desafiadora, que incentive a autonomia intelectual, utilizando métodos

[1] Entende-se ensino tradicional como uma metodologia de ensino em que o professor tem um papel ativo e o estudante um papel passivo, é um ensino conteudista centrado na transmissão de informações do professor para os estudantes.

criativos e motivadores no processo de ensino.

Nesse sentido, apresentamos a modelagem matemática[2] como alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem. Evidenciando seu caráter dinâmico, ela pode modificar a atuação de um estudante em relação a aprendizagem, movendo-o de um papel passivo para um papel ativo na construção do conhecimento. Ao utilizar a modelagem matemática, os estudantes são estimulados a investigar e compreender conceitos matemáticos dentro de um contexto real, o que os conduz à reflexão sobre múltiplas ações. A promoção da interação entre os estudantes, aliada à troca de ideias e à análise de estratégias, possibilita a construção do conhecimento de maneira colaborativa (Castro, 2022). Desse modo, quando a dinâmica da modelagem matemática é integrada às aulas nos diversos níveis de ensino, os estudantes assumem a corresponsabilidade pela investigação de uma situação-problema da realidade, na qual definem e resolvem um problema utilizando conceitos matemáticos (Almeida; Brito, 2005). Partindo de uma situação-problema da realidade, a modelagem matemática pode ser entendida como "a arte de transformar um problema da realidade em um problema matemático e resolvê-lo interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (Bassanezzi, 2006, p. 16).

Em se tratando de abordagens pedagógicas que visam contribuir para a aprendizagem dos estudantes, a dinâmica da modelagem matemática vai para além do desenvolvimento de técnicas de resolução. A caracterização de atividades de modelagem matemática[3] leva em conta a inter-relação bidirecional entre realidade e matemática (Almeida, 2018). De acordo com Almeida, Castro e Silva. (2021), atividades desse tipo envolvem o uso de diferentes tipos de representações matemáticas e estimulam a comunicação entre os estudantes por meio dessas representações, oferecendo a possibilidade da constituição de soluções alternativas em relação ao que se pretende estudar na atividade. Ao desenvolver atividades de modelagem, o estudante passa a explorar estratégias de resolução diferentes das que habitualmente utiliza para resolver exercícios ou problemas estruturados. Esse desenvolvimento envolve a formulação, resolução, análise e interpretação de problemas dentro de um contexto real, que naturalmente levam à emergência de erros, que podem ser vistos não como falhas, mas como parte essencial da aprendizagem. Nesse contexto, a modelagem matemática mostra um potencial para explorar os erros dos estudantes, não apenas identificando-os, mas também utilizando-os como oportunidades de aprendizagem, a fim de problematizá-los (Vidotti, 2019).

---

[2] Neste relatório, o uso das expressões modelagem matemática e modelagem apresentam o mesmo significado.
[3] Neste relatório, o uso das expressões atividade de modelagem matemática e atividade de modelagem apresentam o mesmo significado.

No entanto, a maneira como os erros são percebidos e tratados pode ser influenciada por fatores emocionais e sociais, como o medo da reprovação, a baixa autoestima e a visão negativa da matemática construída a partir de experiências familiares e escolares (Cury, 2006). De maneira geral, os estudantes evitam expor suas dificuldades, a maior parte encara os erros como falhas inaceitáveis, deixando de participar ativamente do processo de aprendizagem (Cury, 2006). Sendo assim, é desejável buscar alternativas pedagógicas que sejam propícias para o desenvolvimento da autonomia e confiança dos estudantes, para exporem suas ideias e concepções. Nesse sentido, a modelagem matemática é uma alternativa pedagógica que proporciona a cooperação e segurança entre os estudantes, como apontado por Manrique (2021, p.122) em sua pesquisa:

> Com o desenvolvimento da atividade, os estudantes estavam focados em realizar a atividade de forma que todos os integrantes dos grupos pudessem compreender a situação e colaborar de alguma forma com a resolução, sem se importarem em demonstrar capacidade melhor que seus colegas ou de evitar demonstrar incapacidade perante o próximo (Manrique, 2021, p.122).

Segundo Manrique (2021), essa sinergia entre os estudantes mantém seu foco em realizar a atividade de modelagem da melhor maneira possível, sem se preocupar com erros que possam ocorrer em seu desenvolvimento. Desse modo, o professor pode ter uma atuação mediadora e reflexiva, promovendo a colaboração entre estudantes de forma a auxiliar os estudantes a compreenderem suas dificuldades, reformularem suas estratégias e aprofundarem seus conhecimentos matemáticos, propiciando a aprendizagem.

A emergência de erros no processo de aprendizagem pode servir de subsídio para as ações do professor. Erros podem ser entendidos como uma parte integrante do processo de aprendizagem, pois expõe as dificuldades dos estudantes e possibilitam que os professores elaborem estratégias pedagógicas para lidar com eles (D'Amore, 2007; Swan, 2002; Mackonye, 2011). D'Amore (2007) aponta que erros podem ser recursos valiosos do ponto de vista pedagógico, na medida em que promovem uma atitude reflexiva nos estudantes. Esses recursos podem ser utilizados pelo professor, que desempenha um papel central na gestão de representações e linguagens, atuando como mediador do processo de aprendizagem. Por meio dessa mediação, os docentes podem intervir diretamente nos processos cognitivos dos estudantes, oferecendo novos modos de abordagem, permitindo que os estudantes possam ir além de corrigir esses erros (D'Amore (2007).

A possibilidade de utilizar os erros dos estudantes para promover a construção do conhecimento pode gerar uma discussão em torno da seguinte questão: o que causa o erro?

Quando voltamos nosso olhar para o que pode gerar um erro, não apenas identificamos falhas eventuais, mas também conseguimos acessar indícios de equívocos mais profundos em relação ao raciocínio do estudante. Assim, para além de revelar dificuldades pontuais, o erro também pode evidenciar o que chamamos *misconcepções*[4]. De acordo com Nesher (1987, p. 35) "a noção de misconcepção denota uma linha de pensamento que causa erros resultantes de uma premissa subjacente incorreta". Isso implica que o estudante constrói uma compreensão inadequada de um conceito ou regra, que resulta em erros repetidos ou sistemáticos. Uma misconcepção relativa a um conceito pode ser persistente e, se não for superada, pode interferir no aprendizado de outros conceitos ao longo do tempo. Nesher (1987) defende que, para promover sua superação não basta corrigir o erro pois, isto implica em uma análise superficial de sua estrutura; é necessário ir para um nível mais profundo, a origem da misconcepção e, de acordo com a autora:

> Quando um princípio errôneo é detectado em um nível mais profundo, ele pode explicar não um único, mas um aglomerado de erros. Tendemos a chamar este princípio errôneo de misconcepção (Nesher, 1987, p. 35).

Embora sejam vistas por uma parte da comunidade docente como um produto negativo do ensino, as misconcepções, em algumas situações, são produtivas e colaboram para a construção do conhecimento (D'Amore, 1999; D'Amore; Sbaragli, 2005; Santi; Sbaragli, 2008; Sarwadi; Shahrill, 2014; Swan, 2002). De acordo com D'Amore e Sbaragli (2005) pesquisas apontam que há casos em que elas são causas sensatas de erros, causas que muitas vezes são bem-motivadas e às vezes até convincentes, sugerindo uma conotação positiva para misconcepções.

Para lidar com misconcepções Nesher (1987) argumenta que, um bom desenho instrucional busca erros em vez de condená-los, e recomenda que o professor deve usar os erros como recurso para favorecer o ensino e a aprendizagem, pois por meio dos erros pode-se chegar às misconcepções. Ao trabalhar com os erros dos estudantes é necessário ir a fundo e investigar o porquê de sua ocorrência. Erros oriundos de misconcepções são denominados erros conceituais, erros que são causados por falhas no processo de resolução são denominados erros processuais[5]. A importância de um ensino que estimule a autonomia dos estudantes e encare os erros como parte do processo de aprendizagem pode favorecer uma construção crítica e reflexiva do conhecimento. Para realizar essa tarefa, as instituições de ensino têm a função de

[4] A caracterização de misconcepções e o seu papel na aprendizagem são discutidos no capítulo dois.
[5] Erros conceituais e erros processuais serão detalhados no capítulo dois.

organizar e sistematizar, visando promover o desenvolvimento da autonomia dos estudantes para que continuem aprendendo, e os professores, por meio de suas opções metodológicas, são responsáveis por estimular esse desenvolvimento (Mendes et al., 2019).

Dessa forma, o papel do professor é essencial pois, ele precisa reconhecer e identificar misconcepções de estudantes, deve estar sensível em relação às misconcepções que podem se manifestar durante o processo de ensino e aprendizagem (Santi; Sbaragli, 2008). É desejável que misconcepções sejam identificadas para que sejam superadas, e cabe ao professor criar oportunidades para modificar o entendimento dos estudantes, levando-os a examinar inconsistências em suas próprias interpretações, explorando suas crenças e manifestando suas misconcepções, recebendo desta forma o *feedback* específico por suas ações para superá-las (Nesher, 1987; Swan, 2002). Ao identificá-las, o professor tem a oportunidade de não apenas corrigir o erro imediato, mas de auxiliar os estudantes a reconstruírem seu entendimento com base em premissas corretas para promover sua superação.

Uma vez que o professor está ciente das misconcepções que deseja lidar, deve ser intencional em seu planejamento para abordá-las (Nesher, 1987; Swan, 2002; Yip, 1998). Para Sbaragli (2005) o professor deve estruturar e preparar o meio de forma adequada, e com as ferramentas apropriadas para lidar com misconcepções. Para isso, é desejável que o professor utilize o trabalho desenvolvido pelos estudantes como o ponto de partida para discussões e reflexões, moldando e lapidando suas ideias a fim de levá-los a um pensamento matemático poderoso, eficiente e preciso (Stein et al., 2008). Balacheff e Gaudin (2002, p. 1) corroboram com este argumento pois, para estes autores “os únicos indicadores que temos do bom ou do mau funcionamento do ensino são os comportamentos e produções dos estudantes, que são consequências do saber que construíram e das suas relações com o conteúdo ensinado”.

Lidar com erros e misconcepções dos estudantes, entretanto, é um desafio para professores e, encontrar meios de superação passa a ser uma iniciativa recorrente. Quando o foco é direcionado para os erros dos estudantes, Borasi (1996) argumenta que os mesmos podem servir como “trampolins para investigação”[6], funcionando como oportunidades para estimular questionamentos e incertezas que incentivam os estudantes a explorarem conceitos e aprofundar seu aprendizado. De acordo com Cury (2006, 2008), a análise de erros tem se constituído como uma abordagem de pesquisa sob diferentes enfoques, e desse modo “as investigações sobre erros, dificuldades, obstáculos ou desempenho de estudantes em Matemática, em qualquer nível

[6] “Springboards for Inquiry” (Borasi, 1996).

de ensino, vêm sendo desenvolvidas em mestrados ou doutorados da área de Ensino" (Cury, 2013, p. 547). Em meio a essa demanda, Cury e Konzen (2006) propõe que estratégias de ensino sejam utilizadas para explorar as dificuldades detectadas e auxiliar os estudantes em sua superação.

Ao direcionar o foco para misconcepções dos estudantes, pesquisas sinalizam interesse em buscar relações entre modelagem matemática e misconcepções de estudantes. Mendes, Sousa e Almeida (2017) investigam como atividades de modelagem matemática podem evidenciar misconcepções dos estudantes em disciplinas introdutórias, enquanto Almeida, Silva e Brito (2022) propõem uma abordagem didático-semiótica para mostrar como tais atividades auxiliam em sua superação.

Surjus, Almeida e Kowalek (2023) exploram o papel do professor ao identificar e intervir sobre as misconcepções emergentes na modelagem matemática. Surjus e Almeida (2023, 2024) aprofundam a análise semiótica desses fenômenos a partir de referenciais como Duval e Radford e, dando continuidade, ampliam a discussão com base na perspectiva construtivista de D'Amore, analisando dados de estudantes e reforçando o potencial da modelagem matemática no enfrentamento das misconcepções.

No cenário internacional, Swan et al. (2007) destacam como atividades de modelagem permitem que os estudantes desenvolvam conceitos e habilidades matemáticas, tornando mais visíveis suas dificuldades e permitindo conexões entre conhecimento teórico e contexto aplicado. Pla-Castells, Melchor e Chaparro (2021) apresentam o uso dos Diagramas de Atividades de Modelagem (MAD+) como ferramenta para identificar misconcepções, entendidas por esses autores como obstáculos conceituais, e obstáculos processuais ao resolver problemas, fornecendo informações detalhadas para aprimorar o ensino. Já Vera et al. (2021) exploram misconcepções na modelagem matemática aplicada à biomedicina, discutindo estratégias para aproximar modeladores matemáticos e pesquisadores experimentais.

Nesse contexto, dirigimos nosso olhar para a relação entre modelagem matemática e misconcepções de estudantes, e desse modo o objetivo da pesquisa consiste em *investigar interlocuções entre modelagem matemática e misconcepções dos estudantes*.

Para buscar elementos relativamente a este objetivo, duas questões são objeto de investigação:

1) Que misconcepções podem emergir no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática?
2) Por que atividades de modelagem matemática servem como meio de superação de misconcepções previamente identificadas?

Para alcançar este objetivo, a investigação, por um lado, organiza uma estrutura teórica para tratar de modelagem matemática e misconcepções. Por outro lado, uma pesquisa empírica é desenvolvida com estudantes do Ensino Superior, considerando dois contextos em que, atividades de modelagem matemática, foram desenvolvidas no intuito de observar que misconcepções dos estudantes se manifestariam no decorrer das atividades, bem como a mediação do professor para promover sua superação. O primeiro contexto se trata da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I de um curso de Licenciatura em Matemática, e a escolha desse contexto se deu a partir do interesse em investigar misconcepções de estudantes que serão futuros professores de matemática. O segundo contexto é a disciplina de Transportes[7] de um curso de Engenharia Civil, e essa escolha se deu pelo interesse em investigar misconcepções de estudantes que utilizam a matemática como ferramenta para resolução de problemas aplicados à engenharia.

A estrutura do relatório da pesquisa está organizada em cinco capítulos. Inicialmente são apresentados na introdução os rumos da pesquisa, trazendo uma breve contextualização dos principais referenciais teóricos para o leitor se familiarizar com a temática da pesquisa, sua relevância para a Educação Matemática e o objetivo da pesquisa.

No primeiro capítulo evidenciamos as compreensões de Modelagem Matemática na Educação Matemática adotadas nesta investigação e o seu papel no ensino e aprendizagem. Também destacamos os principais aspectos que orientam o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na sala de aula, e o papel do professor e do estudante em relação a atividades dessa natureza.

No Capítulo 2, apresentamos os fundamentos teóricos sobre misconcepções em contextos de aprendizagem, que nos forneceram subsídios para analisarmos sua manifestação em atividades de modelagem matemática. Ainda nesse capítulo, apresentamos alguns trabalhos que nos forneceram *insights* teóricos para conhecer possíveis relações entre misconcepções e modelagem matemática.

[7] Esta disciplina é ofertada na quinta série da Grade Curricular do curso de Engenharia Civil (Anexo A)

No Capítulo 3 descrevemos os contextos em que os dados da pesquisa foram coletados, identificando o ambiente e sujeitos da pesquisa. Apresentamos os procedimentos de coleta e tratamento de dados, o encaminhamento metodológico da investigação e a abordagem de pesquisa que orienta este estudo.

A pesquisa empírica é apresentada no quarto capítulo, em que trazemos a descrição do desenvolvimento das atividades de modelagem selecionadas para a análise. No capítulo 5 trazemos a análise das misconcepções identificadas no desenvolvimento das atividades de modelagem buscando interlocuções entre a modelagem matemática e misconcepções.

Em seguida tecemos as considerações finais retomando o percurso da investigação, apontando contribuições para a Educação Matemática, bem como sugestões para futuras pesquisas. Na sequência, as referências que corroboram o desenvolvimento da pesquisa, e por fim incluímos alguns apêndices e anexos.

CAPÍTULO 1

MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática, enquanto atividade humana, pode ser entendida como uma forma de resolver problemas, com origem em situações da realidade, usando matemática. No âmbito da Educação Matemática, a Modelagem Matemática é um processo dinâmico que, preservando a estrutura que tem foco na resolução de um problema do mundo real, passa a inserir características e especificidades que a tornam adequada para propósitos educacionais (Almeida, 2018; Araujo, 2021; Blum, 2015; Meyer, 2020; Pollak, 2015, entre outros).

Na Educação Matemática, a Modelagem Matemática é abordada por diferentes perspectivas, as quais variam de acordo com os objetivos e papéis assumidos pelo professor e pelos estudantes no desenvolvimento das atividades de modelagem. Pode-se encontrar várias perspectivas e abordagens diferentes na literatura de pesquisa em Educação Matemática sobre Modelagem Matemática (Blum; Galbraith; Henn; Niss, 2007; Fredj; Geiger, 2013; Garcia, Gascón; Higueras; Bosch, 2006; Haines, Galbraith; Blum; Khan, 2007; Jablonka; Gellert, 2007; Kaiser; Sriraman, 2006; Sriraman; Kaiser, 2006). A noção de modelagem matemática é descrita de diferentes formas dependendo da perspectiva adotada (Kaiser; Sriraman, 2006).

Em sua revisão de literatura, Kaiser e Sriraman (2006) sistematizaram seis principais perspectivas de modelagem matemática, a saber: *realista ou aplicada* (foca em problemas autênticos), *teórica ou epistemológica* (estrutura problemas para promover o desenvolvimento teórico da matemática), *educacional* que se subdivide em didática e conceitual (propõe integrar problemas autênticos com o desenvolvimento teórico matemático), *sócio-crítica* (orienta-se à análise crítica da natureza dos modelos matemáticos e sua relevância na sociedade), *contextual* (voltada à construção teórica da matemática, sustentada em estudos psicológicos sobre a aprendizagem) e *cognitiva* (análise e compreensão dos processos cognitivos que ocorrem durante o processo de modelagem). As perspectivas podem estar relacionadas entre si, por exemplo a perspectiva educacional pode estar relacionada à perspectiva cognitiva. De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012):

> A perspectiva cognitivista está intimamente relacionada à perspectiva educacional, sobretudo porque tem como uma de suas preocupações principais buscar compreender os processos cognitivos individuais dos estudantes em modelagem, bem como identificar barreiras matemáticas, psicológicas e cognitivas relacionadas com a

> aprendizagem via modelagem (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 29).

Essas perspectivas destacam diferentes aspectos da modelagem. Conforme apontam Barbosa e Santos (2007), cada uma pode ter um foco pedagógico específico: desenvolvimento da teoria matemática (perspectivas epistemológica, educacional e contextual); habilidades em resolver problemas aplicados (perspectiva realista); análise crítica dos modelos matemáticos na sociedade (perspectiva sócio-crítica). As diferenças de objetivo implicam variações nas metodologias e formas de organizar as atividades de modelagem, cabendo ao professor decidir o melhor encaminhamento.

Cada perspectiva oferece uma abordagem particular para integrar essas atividades no ensino da matemática. A presente pesquisa considera as perspectivas educacional e cognitiva, uma vez que o objetivo das atividades de modelagem matemática aqui propostas é lidar com misconcepções no ensino de matemática.

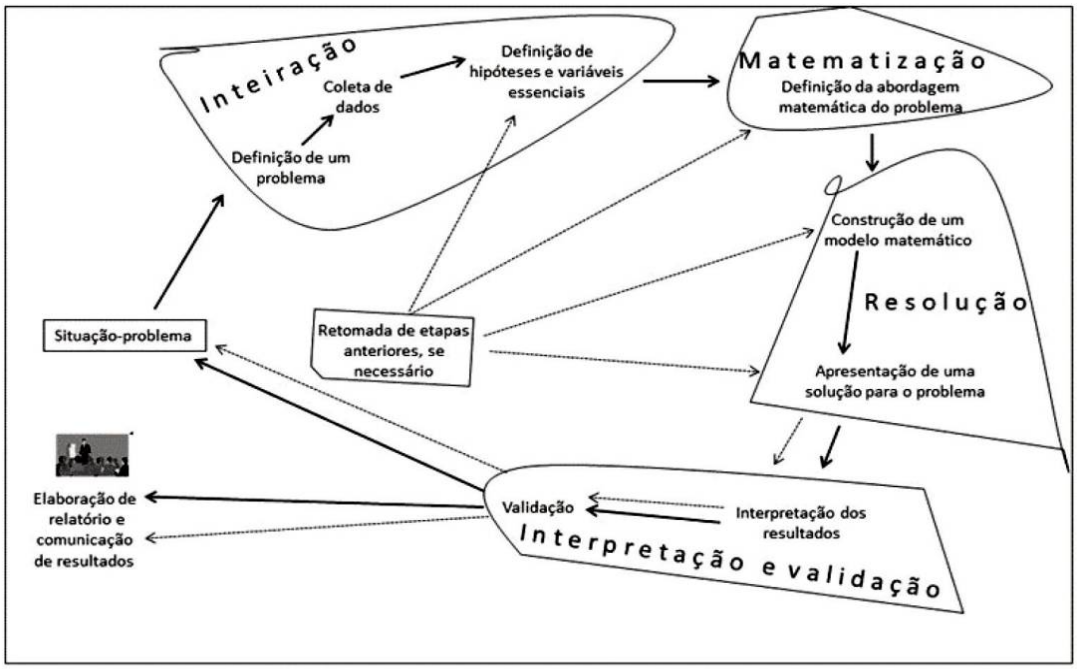
De maneira geral, o desenvolvimento de atividades de modelagem para o propósito educacional, requer um conjunto de ações, que conforme pontua Pollak (2012), podem ser assim estruturadas:

> A situação real geralmente tem tantas facetas que você não pode levar tudo em consideração, então você decide quais aspectos são mais importantes e os mantém. Neste ponto, você tem uma versão idealizada da situação do mundo real, que pode ser traduzida em termos matemáticos. O que você tem agora? Um modelo matemático da questão idealizada. Você então aplica seus instintos e conhecimentos matemáticos ao modelo e obtém *insights*, exemplos, aproximações, teoremas e algoritmos interessantes. Você traduz tudo isso de volta para a situação do mundo real e espera ter uma teoria para a questão idealizada. Mas você precisa verificar: os resultados são práticos, as respostas razoáveis, as consequências aceitáveis? Se sim, ótimo! Se não, dê outra olhada nas escolhas que você fez no início e tente novamente (Pollak, 2012, p. 1).

Henry Pollak identifica um conjunto de ações tais como: decidir quais aspectos da situação real serão mantidos, traduzir a versão idealizada para termos matemáticos, aplicar instintos e conhecimentos matemáticos ao modelo da situação idealizada, traduzir os resultados para a situação real, verificar se os resultados fazem sentido, e se não fizerem sentido olhar novamente as escolhas iniciais. Estas ações identificadas por Pollak, em geral, podem se associar a esquemas que as especificam e articulam e são reconhecidos como *ciclos de modelagem*. Os ciclos de modelagem têm como finalidade representar o caminho percorrido pelos estudantes no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, caracterizando assim um encaminhamento padrão para essas atividades (Almeida; Silva, 2021). Segundo Borromeo Ferri (2018), os ciclos, além de constituírem um esquema teórico que define uma

atividade de modelagem matemática, atuam como um recurso de aprendizado para os estudantes, e servem como uma ferramenta diagnóstica para os professores. Nesses ciclos, as ações dos modeladores são associadas a fases (ou etapas, ou estágios). A Figura 1.1 representa um ciclo de modelagem, cujo objetivo é caracterizar as etapas da modelagem matemática, considerando fases que representam a dinâmica da atividade. Além disso, as setas contínuas indicam as fases do processo, e as setas pontilhadas representam as ações dos estudantes durante a atividade de modelagem matemática, que podem ser retomadas sempre que o resultado não for satisfatório, caracterizando a dinamicidade das ações (Almeida; Castro; Silva, 2021). Tais fases consistem em: inteiração; matematização; resolução; interpretação e validação.

Figura 1.1 – Ciclo de Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Castro e Silva (2021, p. 386)

A *inteiração* tem como foco central a escolha de um tema e a busca de informações a seu respeito. Isto implica cercar-se de informações sobre essa situação por meio de coleta de dados quantitativos e qualitativos, seja mediante contatos diretos e indiretos (Almeida; Silva e Vertuan, 2012). A falta de compreensão e entendimento da situação é que orienta a formulação do problema e a definição de metas para a sua resolução. Mesmo sendo uma fase inicial, a inteiração pode se prolongar ao longo do desenvolvimento da atividade, conforme novas necessidades de informação surgirem durante o desenvolvimento da atividade de modelagem.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) a *matematização* é realizada a transição da

linguagem natural para a linguagem matemática, e de acordo com Almeida (2018) essa transição é mediada pelo conhecimento matemático e extramatemático. Essa transição permite que o problema formulado na fase de inteiração seja expresso matematicamente. A matematização envolve selecionar variáveis, formular hipóteses e simplificar informações, criando descrições matemáticas relacionadas ao problema definido na fase da inteiração da situação-problema (Almeida; Vertuan, 2014). A transição entre representações exige que se escolham conceitos e técnicas matemáticas adequadas, possibilitando uma representação simbólica e visualização matemática da situação real.

A *resolução* consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação. Esta ação permite analisar os aspectos relevantes da situação, responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação e até mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo.

A *interpretação de resultados e validação* requer a análise da resposta para o problema. A interpretação da resposta obtida constitui um processo avaliativo, no qual o estudante verifica se o modelo é adequado tanto para a matemática utlizada como para a situação-problema. Caso o modelo não seja adequado deve-se retornar ao processo em alguma das fases anteriores.

Ao final do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática considera-se que a *comunicação de resultados* e a *elaboração de um relatório* são ações fundamentais para estudantes modeladores, uma vez que atividades de modelagem matemática podem ser incluídas em diferentes níveis de escolaridade (Almeida; Castro; Silva, 2021).

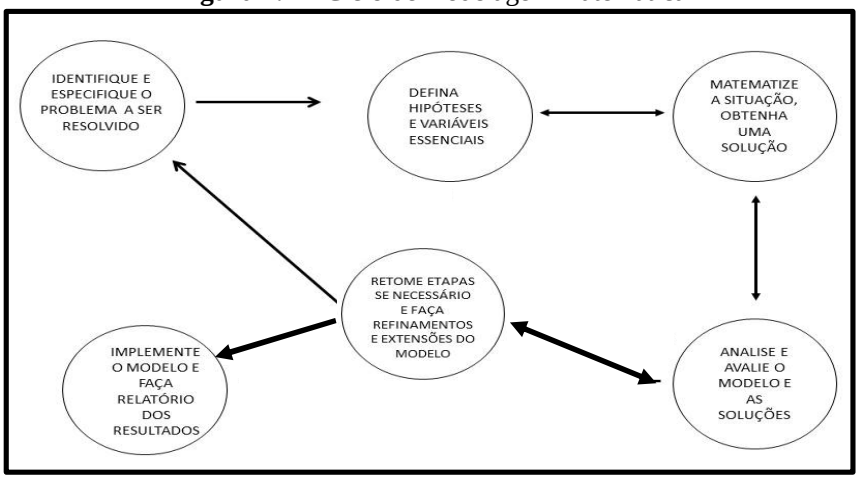
A comunicação de resultados e a elaboração de um relatório, são ações que estão um passo além das ações propostas por Pollak, e de acordo com Brown e Edwards (2017, p. 187), “[...] o que os estudantes se tornam capazes de dizer acerca de suas soluções para as atividades de modelagem, dá uma visão de pertinência de suas compreensões matemáticas e como utilizam o conhecimento prévio em cada atividade particular ”.

Adicionalmente um ciclo pode também ser um esquema orientador ou facilitador para os estudantes, atuando como um guia, especialmente para estudantes sem experiências anteriores com modelagem. Neste caso ponderam Almeida e Silva (2021) que, além do papel na construção do conhecimento, o ciclo tem um papel instrucional, visando indicar de forma clara aos estudantes as ações incluídas em uma atividade de modelagem matemática, bem como destacar a não-linearidade das ações dos estudantes. Para essas autoras “os ciclos pretendem

incluir o aspecto de que idas e vindas entre as diferentes etapas são recorrentes e relevantes para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática" (Almeida; Silva, 2021, p. 5).

A Figura 1.2 mostra a iteratividade, associada a idas e vindas entre as etapas, caracterizadas no ciclo instrucional pelas flechas de duplo sentido.

Figura 1.2 – Ciclo de modelagem matemática

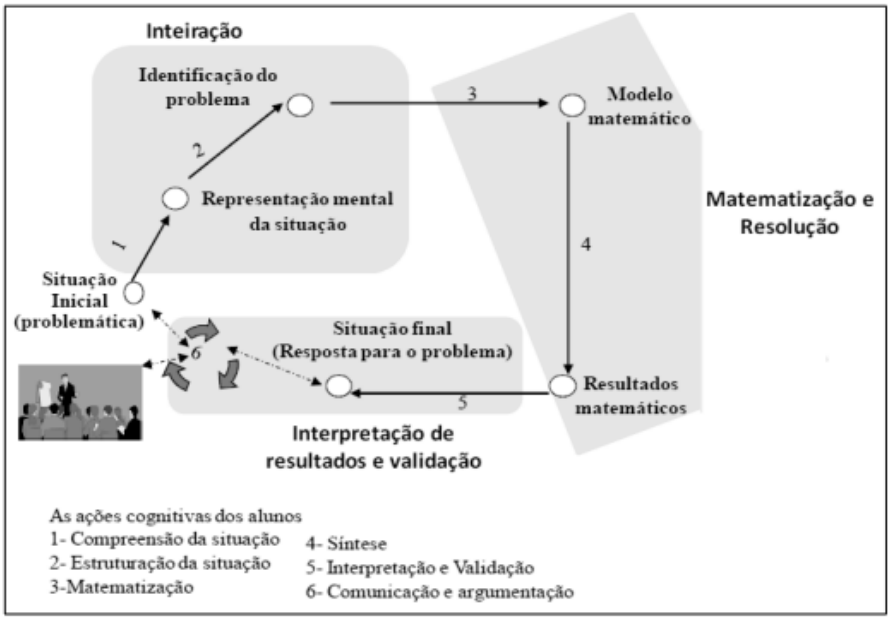


Fonte: Adaptado de Almeida (2020)

A linguagem utilizada neste ciclo remete a um conjunto de instruções, e de acordo com Almeida e Silva (2021, p. 6) "a modelagem matemática requer disposição para explorar a situação e recomeçar sempre que necessário, para incrementar o que já se sabe sobre a situação investigada, bem como para refletir sobre o que ainda não se é capaz de dizer sobre ela". No entanto, o estudante não precisa, necessariamente, utilizar o ciclo no desenvolvimento da atividade, pode utilizá-lo parcialmente, indo e voltando pelas fases. De acordo com Borromeo Ferri (2018), pode ser que os estudantes modeladores não sigam o ciclo, e de acordo com as demandas da atividade de modelagem, eles podem ir e voltar nas etapas conforme julgarem adequado. Este movimento a autora identifica como rotas de modelagem.

Considerando a perspectiva cognitiva, apresenta-se o ciclo proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2012) que visa compreender as ações cognitivas do estudante modelador que intermedeiam as passagens de uma fase a outra no decorrer do desenvolvimento da atividade de modelagem. As fases do ciclo de modelagem em concordância com as ações cognitivas dos estudantes são ilustradas na Figura 1.3.

Figura 1.3 – Fases da Modelagem Matemática e Ações Cognitivas dos Estudantes



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.19)

As ações cognitivas presentes no ciclo da Figura 1.3 são descritas de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012) como:

> ***Compreensão da situação***: Quando o aluno se depara com uma situação-problema que pretender investigar, inicialmente precisa compreender o problema fazendo algumas aproximações ou idealizações, chegando ao que denominamos representação mental da situação. Consideramos que a transição da *situação-problema* para a *representação mental da situação* implica diversas habilidades como entendimento da situação, apreensão de significado, interpretação de fatos e informações, agrupamento de ideias.
> ***Estruturação da situação***: a partir de representação mental da situação, os envolvidos com a atividade de modelagem precisam identificar o problema e definir metas para a sua resolução. A formulação de um problema para uma situação requer a estruturação e/ou simplificações deliberadas das informações acerca da situação.
> ***Matematização***: essa estruturação é mediada por conhecimentos e habilidades que levam à identificação de regularidades e relações até então desconhecidas.[...] culmina na construção de um modelo matemático e é fundamentada na definição e no julgamento de hipóteses que guiam a construção do modelo[...] a transição que busca uma linguagem matemática evidencia um problema matemático a ser resolvido; a elaboração de um modelo matemático é mediada pelas relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características, a organização de partes, a identificação de componentes.
> ***Síntese***: a construção e/ou resolução de um modelo matemático com vistas a apresentar resultados matemáticos para o problema, requer o domínio de técnicas e procedimentos matemáticos e uma coordenação adequada das diferentes representações associadas aos objetos matemáticos[8]. Nessa ação torna-se necessário o uso de conceitos, técnicas, métodos e representações, a solução de problemas específicos usando conhecimentos prévios, a visão de padrões, o uso de ideias

[8] Objeto matemático é qualquer entidade, real ou imaginária, a qual nos referimos ou da qual falamos, na atividade matemática (Font et al, 2007).

> conhecidas para criar novas ideias, e em muitas situações, é adequado o uso de recursos tecnológicos como softwares por exemplo.
> ***Interpretação e validação***: a análise de uma resposta para o problema obtida, inicialmente em termos de resultados matemáticos por meio do modo matemático, constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade. Nessa etapa, o aluno se depara com a necessidade de comparar e distinção de ideias, generalização de fatos, articulação de conhecimentos de diferentes áreas. Essa ação diz respeito à análise da representação matemática associada ao problema, tanto em relação aos procedimentos matemáticos quanto em relação à adequação da representação para a situação.
> ***Comunicação e argumentação***: implica essencialmente o desenvolvimento de uma argumentação que possa convencer aos próprios modeladores e àqueles aos quais esses resultados são acessíveis de que a solução apresentada é razoável e é consistente, tanto do ponto de vista da representação matemática e dos artefatos matemáticos a ela associados, quanto da adequação desta representação para a situação em estudo. Nessa ação, o aluno necessita expor para outros o julgamento do valor de teorias e métodos, apresentar e justificar suas escolhas baseadas em argumentos racionalmente fundamentados, reconhecer que a situação requer alguma subjetividade (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 17-19).

O envolvimento dos estudantes com estas ações será mais ou menos intenso de acordo com a familiaridade dos estudantes com atividades de modelagem (Almeida, Silva e Vertuan, 2012). Conforme ponderam Almeida, Kowalek e Souza (2024),

> a própria natureza das atividades de modelagem aponta para problemas que incluem condições vagas ou não bem especificadas à *priori*, de modo que sua resolução se torna um processo com várias demandas dos estudantes e que não se resolvem mediante procedimentos previamente conhecidos. De fato, estudos revelam que as demandas cognitivas que elas requerem podem, em alguns casos, atuar como barreira, seja para o sucesso dos estudantes nessas atividades no que se refere aos procedimentos requeridos, seja na sua repercussão sobre a aprendizagem (Almeida; Kowalek; Souza, 2024, p. 321).

As demandas cognitivas requeridas nas atividades de modelagem podem ser identificadas nas ações cognitivas dos estudantes, para isso é necessário considerar que, ao se confrontar com uma situação real (situação inicial), o estudante reconhece suas intenções e limitações para o desenvolvimento da atividade e para a busca da situação final (uma resposta para o problema) (Almeida; Silva; Vertuan, 2012).

Os ciclos de modelagem apresentados, traduzem a iteratividade, ou seja, as idas e vindas requeridas ao longo dessas fases, e funcionam como modelo de referência epistemológica para a modelagem matemática (Almeida, 2022). O ciclo epistemológico (Figura 1.1) evidencia o processo no qual a modelagem matemática é utilizada para promover o desenvolvimento da teoria matemática, indo além de uma simples aplicação, tem um fim educacional. Ele é um subsídio para o professor planejar os encaminhamentos para a realização da atividade de acordo com os seus objetivos didáticos.

O ciclo instrucional (Figura 1.2) pode ser disponibilizado para os estudantes que não

estão familiarizados com os processos de modelagem pois, como mencionado anteriormente, atua como um guia indicativo de ações para os estudantes. Almeida e Silva (2021, p. 5) apontam que “a finalidade do ciclo associa-se então à intenção de apresentar uma versão idealizada do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática no sentido de caracterizar um encaminhamento padrão para essas atividades”.

O ciclo cognitivo (Figura 1.3) ilustra as ações cognitivas dos estudantes ao desenvolver a atividade de modelagem, e desse modo colaboram para investigar os processos de ensino e da aprendizagem (Almeida; Silva, 2021; Borromeo Ferri, 2018). Desse modo o ciclo tem o papel de atuar como instrumento diagnóstico, em que o professor pode identificar possíveis barreiras cognitivas dos estudantes no decorrer da modelagem (Borromeo Ferri, 2018).

A dinamicidade da modelagem observada nos ciclos apresentados, se dá em torno do trabalho colaborativo que, mediado pelo diálogo pode ser relevante, e de acordo com Ferruzzi e Almeida (2015), é um meio dos estudantes estruturarem suas ideias, seja em relação à definição do problema, formulação das hipóteses ou seleção de variáveis, ou em relação às escolhas relativas aos conceitos matemáticos que serão utilizados. A dinâmica do trabalho em grupo nas atividades de modelagem oportuniza aos estudantes desenvolver capacidades que favorecem a aprendizagem, tais como falar, ouvir, pensar, criar, raciocinar, comunicar e questionar (Borromeo Ferri, 2018; Castro, 2017; Vertuan, 2013; Vorhölter, 2019). No trabalho em grupo o objetivo em comum que produz uma solução final, tem o mérito de possibilitar discussões de diferentes estratégias para resolver o mesmo problema e isso contribui significativamente para a aprendizagem dos conceitos envolvidos (Almeida; Silva; Vertuan, 2012).

Assim estruturada, para Almeida, Silva e Vertuan (2012), a modelagem matemática na sala de aula pode ser entendida como uma alternativa pedagógica em que são resolvidos problemas com origem fora da matemática por meio do uso da matemática. Os modeladores (que no âmbito da sala de aula são estudantes e professores) são levados a refletir, investigar, conjecturar, inferir sobre as questões que emergem da resolução do problema. Esta resolução, de acordo com Stillman (2015, p. 44), requer o uso de “conceitos, estruturas e relações matemáticas para descrever e caracterizar, ou modelar, uma situação do mundo real de modo que capture suas características essenciais”.

Estas estruturas configuram o que se denomina *modelo matemático*. De acordo com

Almeida e Vertuan (2014, p. 2) o modelo matemático é

> um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, que é expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, em geral, não matemático,[...] é o que dá forma à solução do problema e a modelagem matemática é a atividade de busca por esta solução (Almeida; Vertuan, 2014, p. 2).

Greefrath, Hertleif e Siller (2018) apontam que, há uma suposição geral na literatura de que os modelos matemáticos obtidos no decorrer das atividades de modelagem matemática, são moldados tanto pelo conhecimento matemático dos estudantes, como também pelas possibilidades de uso das ferramentas digitais disponibilizadas pelo professor para o desenvolvimento da atividade. Borssoi e Almeida (2015) apontam que

> [...] oferecer um ambiente que dispõe de recursos da tecnologia bem como propor atividades que provoquem os estudantes a lançar mão da tecnologia, pode promover a motivação ao uso. As atividades de modelagem, em especial, parecem provocar os estudantes a buscar tais recursos (Borssoi; Almeida, 2015, p. 44).

A tecnologia possibilita representações dinâmicas, ampliando e aprimorando as representações matemáticas, ultrapassando as limitações das formas estáticas e impressas dos registros tradicionais em papel (Goulart; Almeida, 2020). A elaboração de um modelo matemático pode se beneficiar de múltiplas representações, possibilitadas por ferramentas digitais, como computadores, *tablets* e dispositivos portáteis. Os estudantes são incentivados a utilizar e aplicar suas habilidades e conhecimentos matemáticos ao interagir com tecnologias e recursos digitais (Weigand, 2014). Diversos pesquisadores, como Galbraith e Stillman (2006), Confrey e Maloney (2007), Siller e Greefrath (2010), e Greefrath, Hertleif e Siller (2018), visualizam o uso das ferramentas digitais de forma holística no aprendizado, destacando diversas possibilidades, entre elas: a construção de múltiplas representações para o mesmo objeto matemático, a criação de representações conectadas interativamente e a verificação e controle das soluções obtidas.

Carreira et al. (2013) destacam que várias dessas possibilidades, ao serem aplicadas à modelagem matemática, podem ser exploradas por *softwares* de geometria dinâmica, tais como o GeoGebra[9], ou o AutoCad[10] que é amplamente utilizado nas engenharias. Esses programas

---

[9] O GeoGebra é um *softwareI de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Tem livre distribuição, nos termos da* General Public License I, e é programado em linguagem JAVA, o que possibilita sua utilização em várias plataformas.

[10] O AutoCad é um *software* do tipo CAD — *computer aided design* ou *desenho auxiliado por computador* - criado e comercializado pela Autodesk, Inc. desde 1982. É utilizado principalmente para a elaboração de peças

permitem a criação de modelos geométricos que, conforme observado por Hall e Lingefjär (2017), possibilitam medir diretamente no modelo, o que pode gerar relações interessantes para investigações adicionais sobre o próprio modelo. Pead, Bill e Muller (2007) consideram o GeoGebra uma ferramenta digital que pode apoiar diferentes processos nas etapas de uma atividade de modelagem matemática, com uma ênfase particular nas representações gráficas, fornecendo uma ampla gama de opções de representação e controle. Além disso, Carreira et al. (2013) reforçam que o uso do GeoGebra amplia a compreensão do contexto da modelagem matemática e possibilita o desenvolvimento de competências matemáticas.

Almeida, Castro e Silva (2021) destacam como a tecnologia se integra em todas as fases da modelagem, servindo como fonte de dados, ferramenta de visualização, e suporte na criação de modelos matemáticos. A diversidade de recursos tecnológicos utilizados podem ter um papel de suporte nas diferentes etapas da modelagem denotanddo "a capacidade dos estudantes de buscar ferramentas tecnológicas que podem ser úteis para atender a diferentes propósitos e adequadas ao que requer cada etapa da atividade" (Almeida; Seki; Castro, 2024, p. 144).

Assim realizada na sala de aula, de acordo com Pollak (2012), a modelagem matemática é um meio dos estudantes entenderem quando, como e por que a Matemática funciona no estudo de uma situação da realidade. Para o autor, a formulação e resolução de problemas por meio da modelagem matemática tem um grande valor pedagógico, especialmente no que se refere ao lidar com a matemática. De fato, Bassanezi (2006), vem parafrasear Ubiratan D'Ambrósio, afirmando que

> a modelagem matemática é matemática por excelência. As origens das ideias centrais da matemática são o resultado de um processo que procura entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento dessas ideias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaborações sobre representações do real (Bassanezzi, 2006, p. 11).

Particularmente, como pondera Bassanezi (2006), o desafio do professor que toma o caminho da modelagem para o ensino é ajudar o estudante a aprender, construindo relações matemáticas significativas e também vislumbrar como a matemática do currículo escolar pode ser útil. Todavia, a organização da aula com modelagem matemática é orientada pelos propósitos do professor e, de acordo com Barbosa e Santos (2007),

> propósitos diferentes implicam em diferenças nas formas de organizar e conduzir as atividades de modelagem. Isso nos força a refletirmos sobre as maneiras como as práticas de sala de aula representam ou constituem perspectivas mais amplas sobre

---

de desenho técnico em duas dimensões (2D) e para criação de modelos tridimensionais (3D). É amplamente utilizado por engenheiros, arquitetos, designers e diversos ramos da indústria.

> Modelagem Matemática (Barbosa; Santos, 2007, p. 2).

Cabe ao professor o planejamento das atividades de modelagem de acordo com seus objetivos instrucionais. Diante dessa afirmação, podemos destacar o papel do professor no desenvolvimento de atividades de modelagem, e de acordo com Ramos (2020),

> ele é responsável por planejar as atividades para que aquilo que tem a intenção de ensinar fique explicito e é responsável por viabilizar vastas oportunidades de envolvimento ao aluno favorecendo assim a permanente ativação cognitiva e oportunidades de comunicação. Portanto experiências com diferentes atividades de modelagem matemática e com aspectos teóricos explicitam diferentes intenções do professor o que permite ao estudante diferentes oportunidades de comunicação, refinando assim cada vez mais o que o estudante aprende sobre modelagem matemática (Ramos, 2020, p. 92).

O planejamento da atividade de modelagem é fundamental pois, o professor pode antecipar as dificuldades e questionamentos dos estudantes a respeito dos conceitos matemáticos que podem emergir no decorrer da atividade, proporcionando-lhe segurança para lidar com as ideias e ações dos estudantes que podem ser diversificadas (Almeida, 2020). Até mesmo os erros dos estudantes podem ganhar um olhar diferente em uma atividade de modelagem pois,

> um resultado que poderia ser considerado errado não equivale naturalmente a uma nota baixa, a um risco com caneta vermelha. Vale sim, como um resultado testado, rejeitado e que pode indicar novos caminhos e estratégias, novas necessidades e rumos. Erros assim levam, muitas vezes, a uma nova compreensão do problema original e também do modelo matemático (Meyer; Caldeira; Malheiros, 2013, p. 58).

As discussões e reflexões sobre os conceitos matemáticos emergentes no desenvolvimento da atividade de modelagem podem revelar as dificuldades dos estudantes em relação a esses conceitos, e de acordo com Surjus e Almeida (2023, p. 3) “abre uma janela de oportunidade para que misconcepções sejam reveladas e oportuniza ao professor auxiliar os estudantes em sua provável superação”. É neste sentido que a assertiva de D’Amore (2007) de que *superar uma misconcepção é um passo que os estudantes podem dar apoiados em uma organização pedagógica que inclui situações didáticas que lhes permitem aprender*, pode encontrar respaldo em atividades de modelagem matemática.

CAPÍTULO 2

SOBRE MISCONCEPÇÕES EM CONTEXTOS DE APRENDIZAGEM

2.1 Introduzindo ideias

O termo *misconcepção* deriva da palavra inglesa *misconception*, que, em geral, é interpretado como concepção equivocada ou errônea. No *Collins Cobild English Dictionary*, por exemplo, seu significado é “uma ideia que não está correta (...), sendo dado como sinônimo de engano, erro, mal-entendido, equívoco, falácia” (Misconception, 2024).

No contexto educacional o termo misconcepção começou a ser utilizado em pesquisas realizadas em meados da década de 1980 quando, na tentativa de codificar os erros dos estudantes, buscavam-se misconcepções subjacentes para explicar sua causa (Swan, 2002). Na pesquisa de D’Amore e Sbaragli (2005) é feito um levantamento histórico-bibliográfico para os primeiros usos desse termo, concluindo que:

> uma das primeiras aparições documentadas do termo *misconcepção* em Matemática ocorreu nos EUA, em 1981, por Wagner (1981), em um trabalho que trata da aprendizagem de equações e funções; também em 1981 publicou um famoso texto de Kieran (1981) sobre a atividade de resolução de equações. Em 1982 foi publicado um artigo pertencente ao domínio da aprendizagem da álgebra: Clement (1982). Em 1983 temos trabalhos de Wagner (1983) e Kieran (1983) ainda sobre álgebra. Vários trabalhos apareceram em 1985 em que o termo "misconcepção" era explícito: Schoenfeld (1985), Shaughnessy (1985) e Silver (1985), que o usavam principalmente para a resolução de problemas, juntamente com crenças ou para explicar suas interações (D’Amore; Sbaragli, 2005, p. 7).

Segundo Sisman e Aksu (2016), inicialmente o uso do termo misconcepção foi associado à *remediação*, *diagnóstico*, *prescrição* e esforços consideráveis foram feitos no sentido de identificar suas fontes e tratá-las de forma a erradicá-las. Confrey (1986, manuscrito p. 4[11] apud Balacheff; Gaudin, 2002, p. 4), por sua vez, definiu misconcepções “como falhas documentadas dos estudantes na resolução de problemas que pareciam estar relacionadas a erros no uso de conceitos fundamentais”. Desse modo, misconcepções assumiram uma conotação negativa, vinculada a sinônimo de erros, causa de erros ou crenças errôneas e as tornaram objeto de estudo no âmbito educacional em pesquisas relacionadas a erros.

---

[11] CONFREY J. “Misconceptions” accross subject matters: charting the course from a constructivist perspective. **Annual meeting of the American Educational Research Association**. (unpublished manuscript), 1986.

No entanto, com a evolução das pesquisas nesse contexto, misconcepções começaram a ser vistas como "fruto do conhecimento e não como uma absoluta falta de conhecimento" (D'Amore; Sbaragli, 2005, p. 12). Os resultados começaram a convergir para o fato de que "os erros não são apenas efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, mas o efeito de um saber anterior que foi interessante e bem-sucedido, mas que agora se revela como falso ou simplesmente não adaptado" (Brousseau, 1997, p. 82[12] apud Balacheff; Gaudin, 2002, p. 5)

Em sua pesquisa Yip (1998, p. 461) define misconcepções como "ideias que são inconsistentes com o conhecimento científico, mesmo após o ensino". Para Chi (2005) é uma interpretação errônea geral de algum tipo de processo para outro tipo, que pode ocorrer para vários conceitos em muitos domínios. A partir de uma perspectiva construtivista Uegatani (2014) define misconcepção como o resultado de uma encapsulação[13] de um processo inadequado.

De acordo com Swan (2002) um crescente fascínio pela natureza dos erros dos estudantes levou pesquisadores a tentativa de codificá-los, buscando misconcepções subjacentes para explicar a causa dos erros. Esse autor conclui que, qualquer que seja o currículo seguido ou as estratégias adotadas, os estudantes podem criar suas próprias concepções errôneas apesar do que lhes é ensinado, dando origem às misconcepções. Essas misconcepções promovem uma linha de pensamento com base em uma premissa subjacente incorreta, e em consequência causam erros (Nesher, 1987).

Pesquisas recentes, entretanto, têm revelado uma abordagem mais ampla para o termo, reconhecendo que a ocorrência de misconcepções não se constitui, necessariamente, como impedimento para a aprendizagem. Para Sarwadi e Shahrill, (2014) elas podem ser vistas como oportunidades para aprender e refletir tornando-se desafios no ensino dos conteúdos matemáticos. Também há argumentos que nas dinâmicas do ensino e da aprendizagem, a ocorrência de misconcepções pode inclusive ser necessária, porém temporária, para a construção do conhecimento, sugerindo uma conotação positiva para a sua ocorrência (D'Amore, 1999; ; D'Amore; Sbaragli, 2005; Swan, 2002).

---

[12] BROUSSEAU G. **Theory of didactical situations in mathematics**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[13] De acordo com Dubinsky (1991), encapsulação é a conversão de um processo (dinâmico) em um objeto (estático). É um processo cognitivo indispensável para a aprendizagem do indivíduo.

Uma misconcepção pode ser entendida como um conceito que está em construção, ou seja, ainda em formação, e de acordo com Swan (2002, p. 154) “frequentemente, uma misconcepção não é um pensamento errado, mas é um conceito embrionário ou uma generalização local que o estudante faz”. Uma generalização local pode ser entendida como a ação de utilizar um conceito que é necessário em uma determinada situação, em outra situação de forma equivocada, sinalizando uma misconcepção do estudante em relação a este conceito. Nesse caso, a misconcepção é um conhecimento que funciona em determinado domínio, mas não funciona em outro, possuindo um domínio de validade (Balacheff; Gaudin, 2002). Nessa perspectiva D’Amore (1999) apresenta uma proposta construtivista e sugere que misconcepção é

> um conceito errado e, portanto, é um evento a ser evitado; no entanto, não deve ser vista como uma situação totalmente e certamente negativa: não podemos excluir que, para chegar a construção de um conceito, pode ser importante passar por uma misconcepção temporária (D’Amore, 1999, p. 124).

Erros e misconcepções fazem parte do processo de construção de um conceito. Há diferentes razões para os erros dos estudantes, desse modo a presente pesquisa aborda três situações nas quais se estabelecem relações entre erros e misconcepções: erros que não provém de misconcepções, erros oriundos de misconcepções e, situações em que o estudante tem uma misconcepção, porém devido a estrutura da atividade, ela não se manifesta em sua resolução.

A primeira situação diz respeito a erros que não provém de misconcepções. Esses erros podem ser classificados como erros não sistemáticos, e ocorrem devido a lapsos de concentração, inadvertência ou desatenção, raciocínio apressado, sobrecarga de memória ou falha em perceber características salientes de uma situação, e podem ser corrigidos pelo próprio autor uma vez que se torne consciente dos mesmos (Makonye, 2011; Swan, 2002) . Esse tipo de erro não é oriundo de misconcepções e de acordo com Makonye (2011, p. 11) “podem ser facilmente corrigidos porque não há estruturas conceituais subjacentes e com falhas associadas a elas”. Para esse mesmo autor, por exemplo, um estudante pode encontrar um grande valor quando seu instinto sinaliza o contrário, mostrando que há algo errado, desencadeando metacognição.

Na segunda situação, erros oriundos de misconcepções são classificados como erros sistemáticos, e são evidenciados em respostas incorretas, metodicamente reaplicadas no decorrer do espaço e do tempo, em relação a tipos específicos de perguntas matemáticas

(Makonye, 2011). Erros sistemáticos não podem ser vistos apenas como um produto do acaso ou ignorância. Esse tipo de erro pode ser, em determinada situação, ocasionado pela utilização de um conhecimento anterior que não é adequado para aquela situação. De acordo com Nesher (1987, p.33) " erros não ocorrem aleatoriamente, mas se originam em uma estrutura conceitual inconsistente baseada em conhecimentos adquiridos anteriormente". Para D'Amore e Sbaragli (2005):

> O erro, portanto, não é necessariamente apenas o resultado da ignorância, mas poderia ser o resultado do conhecimento prévio, um conhecimento que foi bem-sucedido, que produziu resultados positivos, mas que não se mantém à prova de fatos mais contingentes ou mais gerais. (D'Amore; Sbaragli , 2005, p. 14).

Olhando para a primeira e segunda situação temos que, erros podem advir de falhas processuais, sendo erros não sistemáticos, ou, podem ser erros sistemáticos, produto de uma misconcepção.

Na terceira situação temos que, nem sempre uma misconcepção produz um erro, e desse modo, ela pode ser difícil de ser detectada. Podemos dizer que há uma misconcepção a partir do momento em que ela está evidenciada. Um exemplo dessa situação pode ser encontrado em Nesher (1987) quando uma atividade com números decimais é apresentada a estudantes das séries finais do Ensino Fundamental. Os estudantes tiveram que marcar o maior número nos seguintes pares:

Caso I: 0,4 e 0,234
Caso II: 0,4 e 0,675

Entre os resultados, Nesher apresenta a resposta do estudante Jeremy, que marcou no caso I que 0,234 é maior que 0,4; e no caso II ele marcou que 0,675 é maior que 0,4. Ao ser indagado a respeito de suas respostas em uma entrevista, ele justificou que em ambos os casos o número com o maior número de dígitos após a vírgula é o número maior (em valor). A partir dessa explicação a autora conclui que:

> Jeremy tinha um princípio orientador quanto à ordem dos decimais e, consequentemente, no caso I Jeremy estava errado, enquanto que no caso II ele estava certo. Embora seus princípios orientadores tenham sido um erro, ele conseguiu resolver corretamente todos os exercícios semelhantes ao caso II. Também não é difícil ver que seu princípio orientador foi aquele que lhe serviu bem até este ponto, tendo sido importado de seu conhecimento de números inteiros onde os números mais longos realmente são maiores em valor (Nesher, 1987, p. 35).

Como podemos observar na resposta de Jeremy, seu princípio orientador era uma regra

equivocada que, em alguns casos, pode levar a uma resposta correta, ou seja, “o estudante pode obter a resposta certa pelas razões erradas” (Nesher, 1987, p. 36). Deste modo, é necessário que o professor trabalhe com diferentes atividades para provocar a manifestação de misconcepções, para que possa identificá-las, bem como utilizar instrumentos para inquirir os estudantes a respeito de suas escolhas, pois uma resposta correta pode mascarar uma misconcepção.

Desse modo uma misconcepção pode gerar um erro ou não, isso vai depender do conhecimento do professor a respeito de misconcepções relativas aos conceitos que planeja trabalhar, e dos encaminhamentos que irá propor para abordá-las.

Nesse contexto, discussões relativas aos erros e suas possíveis causas foram também sendo associadas à caracterização de conhecimentos específicos. Particularmente em matemática, desde meados da década de 1980, a proposta de Hiebert (1986), identificando conhecimento conceitual e conhecimento processual, vem sendo abordada. Em sua pesquisa, McCormick (1997) discute conhecimento processual e conceitual e sua inter-relação, evidenciando o constraste entre processo e conteúdo, abordando o aprendizado do conhecimento processual e conceitual associados à educação tecnológica. Rittle-Johnson e Alibali (1999) examinam as relações entre a conhecimento conceitual e processual de equivalência matemática em estudantes do Ensino Fundamental. Schneider e Stern (2010) utlizam uma abordagem multimétodo para investigar como as interações entre conhecimento conceitual e procedural influenciam o desenvolvimento de competências matemáticas.

O conhecimento conceitual é caracterizado por Hiebert (1986) como uma *teia conectada de conhecimento* rica em relações, destacando a importância de ver a matemática como um sistema de conceitos interligados. Rittle-Johnson e Alibali (1999, p.175) definem o conhecimento conceitual como “o entendimento explícito ou implícito dos princípios que governam um domínio e das inter-relações entre partes do conhecimento em um domínio”. Para Schneider e Stern (2010, p. 179) de maneira geral “o conhecimento conceitual é visto como um conhecimento geral e abstrato dos princípios fundamentais e suas inter-relações em um domínio”. Para McCormick (1997) o conhecimento conceitual pode ser expresso como o *saber-o-que-fazer*.

Por outro lado, o conhecimento processual envolve saber como executar tarefas matemáticas por meio de símbolos e procedimentos específicos, como algoritmos, passo a

passo, por exemplo (Hiebert, 1986). É frequentemente entendido como o domínio dos métodos e das circunstâncias em que esses métodos podem ser aplicados para alcançar certos objetivos, por exemplo, uma sequência de ações para a resolução de problemas concretos (Schneider; Stern, 2010; Rittle-Johnson; Alibali, 1999). Para McCormick (1997) ele pode ser expresso como o *saber-como-fazer*.

A partir das definições de conhecimento processual e conhecimento conceitual, podemos associar os erros dos estudantes a possíveis falhas desses conhecimentos. Erros sistemáticos provém de misconcepções, e podem ser entendidos como equívocos conceituais. Desse modo, denominamos erros conceituais aqueles que são oriundos de falhas no conhecimento conceitual. Por outro lado, erros não sistemáticos podem ser entendidos como falhas processuais, e desse modo, os denominamos como erros processuais.

Se o que se pode dizer de um objeto matemático e como operar com ele é mediado pela associação desses conhecimentos, as misconcepções também se associam às representações e aos símbolos com que é preciso lidar, trazendo para elas uma perspectiva semiótica (D'Amore; Sbaragli, 2005).

2.2 Perspectiva semiótica de misconcepções

A atividade matemática, seja na sala de aula ou fora dela, vem permeada pela natureza dos objetos matemáticos e como a sua apreensão pode se dar, considerando assim uma perspectiva semiótica para a construção do conhecimento em matemática (Almeida; Silva; Brito, 2022; D'Amore; Pinilla; Iori, 2015; entre outros).

A matemática depende de representações simbólicas que muitas vezes exigem transições complexas entre significados, representações visuais e contextos de uso. Ao dizer que, ao apresentar um conceito, precisamos lidar com representações através de signos, ou seja, com a semiótica, estamos concordando com Duval (1993), que afirma que não há aquisição conceitual de um objeto (noética) sem a representação por meio de signos (semiótica). De acordo com D'Amore (2003) "em matemática, a aquisição conceitual de um objeto passa necessariamente pela aquisição de uma ou mais representações semióticas", ou seja, a semiótica é essencial para dar o primeiro passo em direção à noética.

Para Ernest (2006, p. 69) "o foco principal em uma perspectiva semiótica é a atividade

comunicativa em matemática utilizando signos [...] e isso envolve a recepção e a compreensão de sinais por meio da escuta e da leitura, e a produção de sinais por meio da fala e da escrita ou do esboço". Assim, a atividade comunicativa envolve um processo dinâmico de recepção, compreensão e produção, essencial para a troca de ideias e para a aprendizagem matemática. É necessário um processo adaptativo com que os estudantes precisam lidar para aprender determinado conteúdo em Matemática, considerando que para aprender há a necessidade da apreensão de representações (Ernest, 2006). Esta é uma problemática que, segundo Erlwanger (1975), pode gerar misconcepções.

A semiótica, o estudo dos signos e de como eles são interpretados, pode estar relacionada às misconcepções, especialmente no contexto da aprendizagem matemática. Misconcepções, podem emergir quando os estudantes interpretam erroneamente os signos e símbolos matemáticos. A semiótica ajuda a entender como esses signos e símbolos são interpretados pelos estudantes e quais aspectos dos mesmos podem causar confusões ou interpretações equivocadas, originando misconcepções.

Por exemplo, em um problema envolvendo uma representação gráfica, um estudante pode interpretar mal o significado de uma curva ou de uma variável, e essa má interpretação pode se transformar em uma misconcepção. A abordagem semiótica pode permitir que os educadores identifiquem como essas interpretações incorretas ocorrem e, assim, possam ajustar suas práticas pedagógicas para melhor apoiar a compreensão correta desses símbolos e representações.

A semiótica, entretanto, foi recebendo atenção de educadores/pesquisadores na área da Educação Matemática considerando diferentes elementos. Particularmente, nos referimos aqui à definição de sistemas de representação semiótica caracterizados pelo educador francês Raymond Duval (Duval, 1993) e uma abordagem construtivista para misconcepções proposta pelo professor e pesquisador italiano Bruno D'Amore (D'Amore, 1999).

2.2.1 Abordagem semiótico-cognitiva de Raymond Duval

Em comparação com outros campos do conhecimento, a matemática possui uma situação epistemológica especial, o que confere às representações semióticas um papel fundamental, pois são a única maneira de acesso aos objetos matemáticos (Duval, 2006).

O desenvolvimento da matemática ocorreu em função dos registros de representação, e a necessidade e importância do estudo dos objetos matemáticos é destacada por Duval (2003, p. 13) pois, “o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático”. Um registro de representação semiótica é um sistema de representação que designa os diferentes tipos de representação. De acordo com Duval (2003, p. 21) os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis sem o uso de registros de representação, conforme mostra a afirmação:

> [...] diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação. (Duval, 2003, p. 21)

Interessado no funcionamento cognitivo cognitivo do estudante, Duval (2011, p. 15) nos mostra que, em Matemática “a análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados”. Para ele o pensamento se relaciona com as operações semióticas e por consequência, não haverá compreeensão possível sem o recurso a essas representações (Almeida; Silva; Veronez, 2021).

Para a comprensão dos conceitos matemáticos Duval (2003) destaca a lei fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento: “Não há *noésis* (aquisição conceitual de um objeto) sem *semiósis* (apreensão ou produção de uma representação semiótica) ”, Para o autor não há aquisição conceitual de um objeto sem recorrer a sistemas semióticos, ou seja, não é possível haver *noésis* sem *semiósis*.

Conforme aponta Duval (2003), três atividades cognitivas fundamentais estão diretamente relacionadas à semiósis: formação, tratamento e conversão. A formação é a representação identificável: o sistema deve ser comum a todos, estabelecido socialmente, sendo possível reconhecer o objeto representado. O tratamento é a transformação de uma representação dentro de um mesmo sistema semiótico. Essa transformação é interna ao registro de representação e corresponde a procedimentos de justificação, possui regras próprias de funcionamento, que variam de acordo com o registro. A conversão transforma a representação de um objeto de determinado registro em uma representação do mesmo objeto em outro registro, ou seja, é uma transformação externa, entre registros distintos.

Para Duval (2011) a compreensão está associada à atividade de conversão de pelo menos dois registros de representação e ela se dá na medida em que o sujeito coordena vários registros de representação associados ao mesmo objeto. A conversão tem um papel central na aquisisção do conhecimento, como aponta Duval (2011). A construção do conhecimento matemático está relacionada à combinação das três atividades cognitivas (formação, tratamento e conversão), e, para Santi e Sbaragli (2008, p. 61) " a coordenação dos registros semióticos, por meio das três atividades cognitivas citadas acima, amplia nossas possibilidades cognitivas, pois permitem transformações e operações sobre os objetos matemáticos". Entretanto, para esses mesmos autores "a coordenação destas três ações não é espontânea, nem facilmente gerida; isso representa a causa de muitas dificuldades na aprendizagem da matemática" (Santi; Sbaragli, 2008, p. 61).

Embora a coordenação entre registros de representação seja essencial para entender o pensamento matemático, os estudantes frequentemente enfrentam barreiras ao reconhecer um mesmo conceito em contextos variados, pois "pode-se não reconhecer um mesmo objeto, nos diferentes registros de representação, o que dificulta a distinção do objeto matemático abstrato de sua representação semiótica" (Bisognin; Bisognin, 2021, p. 152).

As dificuldades em coordenar as atividades cognitivas, podem ser identificadas em algumas situações do âmbito escolar. Por exemplo, a atividade de tratamento é amplamente utilizada pelos professores, e, sendo utilizada de maneira inadequada, pode promover apenas uma algoritmização mecânica do objeto matemático. Em sua pesquisa, Vertuan (2007) discute problemas que podem ocorrer quando, o professor escolhe um "melhor registro" para trabalhar um conceito com os estudantes, exemplificando uma situação em relação ao conceito de derivada:

> Se o conceito estudado for "derivada", por exemplo, pode ser que o professor utilize somente às regras de derivação e de forma estritamente algébrica. Na medida em que realizam os cálculos (tratamentos matemáticos), os estudantes acabam 'compreendendo' como devem fazer para calcular derivadas. Mas realizar tratamentos em um só registro não significa que o estudante compreendeu o conceito de derivada. Significa sim, que o estudante sabe manipular (calcular) uma das representações de derivada (neste tipo de registro). Este modo de trabalhar o conteúdo derivada, pode ocasionar a confusão, por parte dos estudantes, entre o conceito derivada e a representação que o tornou acessível (Vertuan, 2007, p. 23).

Trabalhar com um único registro pode levar a uma compreensão parcial do objeto, dado que, um único registro não contempla todas as suas características. Isto pode levar o estudante

a confundir o objeto com sua representação, e requer uma aquisição conceitual do próprio objeto para governar a atividade semiótica que, por sua vez, permite o desenvolvimento do conhecimento matemático e essa situação autorreferencial é apontada como um paradoxo cognitivo para Duval (1993):

> Por um lado, a aprendizagem de objetos matemáticos não pode ser senão uma aprendizagem conceitual, por outro, uma atividade sobre os objetos só é possível através de representações semióticas. Este paradoxo pode ser para aprender um verdadeiro círculo vicioso. Como os estudantes poderiam não confundir objetos matemáticos se eles não podem ter relações, mas com representações semióticas? A impossibilidade de um acesso direto a objetos matemáticos, que só pode ocorrer através de uma representação semiótica, leva a uma confusão inevitável. E, por outro lado, como os aprendizes podem dominar procedimentos matemáticos, necessariamente vinculados a representações semióticas, se eles ainda não possuem uma aprendizagem conceitual dos objetos representados? (Duval, 1993, p. 38).

O primeiro contato com o objeto matemático pode funcionar bem e o estudante naturalmente se apega a essa primeira representação, de acordo com Santi e Sbaragli (2008, p. 65) o estudante "necessariamente identifica o objeto com a primeira representação que encontra, e conectá-lo com as outras não é espontâneo e requer uma ação didática específica para passar por essa misconcepção". De acordo com Duval (2003), os estudantes frequentemente não reconhecem o mesmo objeto em outras representações que lhe podem ser apresentadas em sistemas semióticos diferentes. Para esse mesmo autor, a passagem de um sistema de representação a um outro, ou, a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer do mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte e estudantes.

Sob esta ótica, misconcepções podem ser oriundas de equívocos entre a representação de um objeto e o próprio objeto, uma vez que o primeiro acesso do estudante ao conceito em geral, é feito por uma de suas representações.

Um exemplo dessa situação é apresentado em Surjus e Almeida (2023) e ocorre quando o estudante identifica a função quadrática como uma parábola com a concavidade voltada para cima. De fato, se a introdução da função quadrática e sua representação gráfica se der pela expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$ seguida de exemplos e construção de gráficos com $a > 0$, o estudante, provavelmente, vai considerar que é essa a situação definitiva e exclusiva para a parábola. A partir das primeiras manifestações do estudante sobre esse equívoco em relação à parábola, o professor deve propor exemplos e tarefas com $f(x) = ax^2 + bx + c$, para $a < 0$.

Um outro exemplo em que as diferentes representações são importantes é aquele em que

o estudante precisa identificar que $\left(\frac{1}{2}; 0{,}5; \frac{7}{14}; \frac{500}{1000}; 5 \times 10^{-1}\right)$ por exemplo, embora não pertençam todas ao mesmo sistema de representação, referem-se a um único objeto matemático. Neste caso, os estudantes encontram dificuldades porque estão presos à representação fracionada de números racionais ou consideram frações e representação decimal números diferentes, e ainda, não reconhecem a equivalência entre frações. Assim, conforme apontam D'Amore, Pinilla e Iori (2015), é importante que o professor evidencie as especificidades de cada representação, para evitar que misconcepções sejam geradas.

2.2.2 Abordagem Construtivista de Bruno D'Amore

A abordagem construtivista de misconcepção na sala de aula, apresentada por D'Amore (1999), considera que misconcepções são necessárias na construção de um conceito, porém devem ser temporárias pois, são um evento a ser evitado.

Segundo Santi e Sbaragli (2008), na proposta construtivista de D'Amore, uma misconcepção é uma imagem[14], um produto de uma função cognitiva do ser humano restrita à sua experiência, associando-se ao que se pode dizer de um mesmo objeto matemático em diferentes situações, oportunidades ou mesmo ambientes ou etapas da escolaridade.

A partir dessa proposta, novas discussões no âmbito educacional estão sendo realizadas e mostram que misconcepções não são, necessariamente, um fenômeno negativo, pelo contrário, D'Amore (1999) considera misconcepções como etapas pelas quais os estudantes devem passar, e que devem ser controladas sob um ponto de vista didático pelas ações dos professores para que estejam vinculadas a ideias modificáveis, e não a modelos[15] estáveis que podem se tornar obstáculos para a aprendizagem do conceito. Assim, na formação de conceitos, misconcepções podem ser necessárias, mas devem ser temporárias e ultrapassadas para que não

---

[14] "uma imagem é fraca e transitória e explica a atividade matemática a que o estudante está exposto no processo de aprendizagem; sofre mudanças para se adaptar a situações matemáticas mais complexas e ricas estabelecidas pela engenharia didática como caminho para chegar a um conceito C" (Santi; Sbaragli, 2008, p. 58).

[15] "um modelo tem um caráter *dinâmico* e é visto como uma imagem limite de sucessivas adaptações a situações matemáticas cada vez mais ricas. Reconhecemos a imagem limite quando uma determinada imagem não precisa de mais modificações, pois encontra situações novas e mais difíceis. Podemos concluir que um modelo é uma imagem forte e *estável* do conceito C que o professor quer que o estudante aprenda. Um modelo entre as imagens é o definitivo que contém o máximo de informações e é estável diante de muitas outras solicitações" (Santi; Sbaragli, 2008, p. 58).

se tornem enraizadas em modelos fortes, impedindo a apreensão de um conceito.

Uma vez dominado um procedimento matemático vinculado a uma representação do objeto que funciona em um determinado domínio, o estudante tende a utilizá-lo por analogia em um novo domínio, podendo não ter êxito nesse novo uso (D'Amore; Sbaragli, 2005). Neste caso, a misconcepção decorre do equívoco de considerar que um determinado conceito ou procedimento que funciona em um domínio, pode ser transposto de modo equivalente para outro domínio. Isso ocorre porque misconcepções se associam a dificuldades de uma distinção epistemológica entre os objetos matemáticos e suas representações, que requer identificar diferentes modos cognitivos de acesso (Duval, 2011), ou seja, para compreender um conceito matemático, o estudante precisa transitar entre diferentes registros de representação (numérico, algébrico, geométrico, verbal, etc.).

Um exemplo de misconcepção, apontado por Santi e Sbaragli (2008), está vinculado a um modelo que dificulta o desenvolvimento cognitivo do estudante relativo a resolução de equações do segundo grau. Ao ser proposta a equação $2x^2 + 3x + 5 = 0$, o estudante a resolve da forma:

$$2x^2 = -3x - 5$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{(-3x-5)}{2}}.$$

Esse exemplo mostra como o método para resolver equações de primeiro grau foi internalizado como um modelo estável, que permaneceu inalterado mesmo após as explicações e exercícios adicionais dados pelo professor. Isso ilustra que uma misconcepção não é uma falta de conhecimento ou um conceito incorreto, mas um conhecimento que funciona em um domínio, mas não funciona em outro domínio. Ou seja, incorporado o processo de resolução de uma equação do primeiro grau, ele foi transposto para o domínio da resolução de equações do segundo grau.

2.3 Perspectiva Didática: misconcepções inevitáveis e evitáveis

De acordo com uma perspectiva didática, Sbaragli (2005) propõe uma interpretação de misconcepção, apresentando uma distinção entre tipos de misconcepções, caracterizando-as como *evitáveis* e *inevitáveis*.

Misconcepções são denominadas *inevitáveis* “quando derivam apenas indiretamente da transposição didática, sendo atribuíveis à necessidade de partir de um determinado conhecimento para se comunicar, que nunca será inicialmente exaustivo de todo o conceito matemático” (Sbaragli, 2005, p. 64). Na introdução de um conceito o professor necessariamente vai utilizar uma de suas representações para apresentá-lo, ou seja, misconcepções se originam da necessidade do professor de dizer ou mostrar algo para explicar um conceito (Sbaragli, 2005). Elas dependem, principalmente, da inacessibilidade intrínseca dos objetos matemáticos, “a inevitabilidade da passagem pela semiótica torna inevitáveis as misconcepções resultantes” (Sbaragli, 2005, p. 61).

A apresentação de um conceito ocorre de forma progressiva, sendo frequentemente apoiada por representações semióticas que ajudam a abordar gradualmente sua complexidade. Isso acontece porque é inviável introduzir, desde o início, todos os aspectos necessários para definir um conceito de maneira completa do ponto de vista matemático (Sbaragli, 2005).

Para exemplificar uma misconcepção inevitável, trazemos uma discussão apresentada na pesquisa de Makonye (2011). Este autor discute a generalização equivocada da integral da função potência. Uma vez que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, o estudante de forma equivocada calcula $\int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0}$ e, como resposta, alguns estudantes dizem que o resultado é indeterminado, outros dizem que não existe, alguns dizem que é zero, outros dizem que é 1; todas as respostas estão erradas. A resolução da integral é feita utilizando uma generalização excessiva da regra, a utilização de um procedimento válido, porém inadequado para uma nova situação.

Esta é uma generalização local feita pelo estudante que utiliza um conhecimento prévio que é ineficaz em uma nova situação, e deve ser ultrapassada (D’Amore; Sbaragli, 2005; Swan, 2002). A partir das primeiras manifestações nas resoluções do estudante com a regra equivocada, o professor deve propor exemplos e tarefas para que os estudantes possam percebê-la e, provavelmente, superá-la.

Por outro lado, a Sbaragli (2005, p. 57) denomina misconcepções *evitáveis* as que “derivam diretamente da transposição didática do conhecimento, pois são, de fato, uma consequência direta das escolhas dos professores”. Essas misconcepções podem ser originadas por diversos fatores: misconcepções do professor, insuficiência de representações semióticas

do objeto matemático, forte apelo a modelos intuitivos (D'amore; Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2005).

Misconcepções evitáveis dependem das práticas do professor para introduzir, revisar ou revisitar conceitos. Se o professor tiver misconcepções relativas a um conceito, fatalmente irá perpetuá-las com costumes impróprios propostos a seus estudantes (D'amore; Sbaragli, 2005).

Outra prática que deve ser evitada é a exposição de representações semióticas unívocas ou repetitivas de maneira a fortalecer uma confusão entre representações simbólicas e o objeto matemático (Santi; Sbaragli, 2008). Caso o professor apresente continuamente ao estudante a mesma forma de representar o conceito, sem considerar os possíveis impactos dessa escolha, pode acabar gerando obstáculos didáticos que dificultarão o aprendizado em etapas posteriores, conforme aponta Sbaragli (2005). Para a autora, a escolha metodológica do professor, muitas vezes decorre das propostas da noosfera (livros didáticos, programas, revistas, ...), que leva o professor por optar pela utilização exclusiva de exemplos-padrão. Segundo Sbaragli (2005) isto pode ocasionar uma confusão, tanto do estudante como do próprio professor, entre a representação proposta com o objeto matemático: "o estudante não sabe que está aprendendo sinais que representam conceitos e que, em vez disso, deve aprender conceitos; se o professor nunca pensou nisso, ele acreditará que o estudante está aprendendo conceitos, enquanto ele está realmente 'aprendendo' apenas para fazer uso de sinais" (D'Amore, 2003).

Outro fator que pode originar misconcepções evitáveis é o apelo a modelos intuitivos. De acordo com Sbaragli (2005, p. 15), modelos intuitivos "são modelos que respondem plenamente a solicitações intuitivas e, portanto têm uma forte aceitação imediata". Deve-se ter um olhar intencional para misconcepções pois, é muito provável que no improviso, ou no intuito de facilitar a compreensão do conceito pelos estudantes, o professor recorra a modelos intuitivos que tem adesão imediata (D'amore; Sbaragli, 2005).

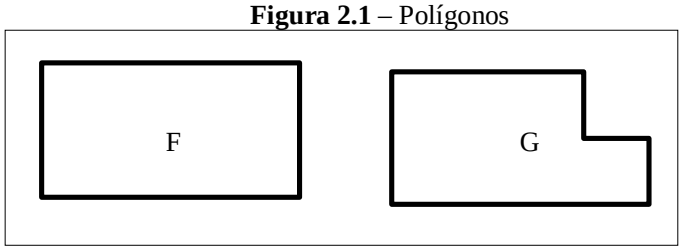
Um exemplo de misconcepção evitável está relacionado ao conceito da integral definida como a área abaixo de uma curva $y = f(x)$ de a até b. De fato, em geral, a introdução da integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ e sua representação gráfica, é seguida de exemplos-padrão de funções em determinados intervalos para que, o estudante faça o cálculo da área no intervalo solicitado e sua representação gráfica. O trabalho com apenas este tipo de representação pode induzir o estudante a pensar que o único uso da integral definida é o cálculo da área abaixo da curva, e é comum que sejam dados intervalos em que a função é positiva. Segundo D'Amore e

Sbaragli (2005) este tipo de equívoco constitui uma misconcepção necessária mas deve ser temporária. O professor deve estar atento às suas escolhas didáticas, propondo situações nas quais a integral definida é utilizada para outros fins, como, por exemplo, o cálculo do valor médio de uma função, ou conceito de *trabalho* na física.

Outro exemplo de misconcepção recorrentemente observada diz respeito às relações entre os objetos *área* e *perímetro*. Conforme apontam D'Amore, Pinilla e Iori (2015), uma afirmação que frequentemente se pode ouvir é: "Seja dado um polígono *F* com determinado perímetro *p* e área *A*. Modificamos *F*: se *p* tende a aumentar, necessariamente *A* tende a aumentar" (D'Amore; Pinilla; Iori, 2015, p. 123).

Claramente está aí uma misconcepção, uma misconcepção com origem semiótica. De fato, o que pode dar origem a essa misconcepção é o fato de que nos livros didáticos ou mesmo nas lousas dos professores, tende-se a apresentar polígonos convexos, como retângulos e triângulos, por exemplo. Assim, é possível observar que, espontaneamente, poucos estudantes pensariam em considerar polígonos como na Figura 2.1. De fato, passando do polígono F para o polígono G, a área diminui, mas o perímetro não.

Figura 2.1 – Polígonos



Fonte: D'Amore et al. 2015, p. 124.

Este é um tipo de misconcepção que, no contexto escolar, embora com um invariante semiótico, pode ser associada a ações didáticas pouco exploratórias, a hábitos de professores que persistem em considerar somente exemplos-padrão para representar objetos matemáticos, passando a gerar erros conceituais graves, como é o caso da relação entre área e perímetro.

O professor pode encontrar subsídios em sua interpretação das representações dos estudantes, e realizar intervenções para lidar com misconcepções. Misconcepções evitáveis ou inevitáveis podem ser superadas na medida em que o professor mobiliza em aula vários registros de representação do mesmo objeto. O professor pode utilizar de diferentes tipos de atividades para possibilitar a manifestação de misconcepções, e uma vez identificadas, possa realizar intervenções no intuito de que os estudantes as superem. Nesse processo, o estudante

deve testar as limitações e restrições de um determinado conhecimento e, recebendo *feedback* adequado, poderá prosseguir com seu inquérito (Nesher, 1987).

D'Amore (2007) sugere que os estudantes podem avançar com o apoio de uma organização pedagógica que inclui situações didáticas propícias para a aprendizagem. Essa organização pedagógica deve incluir questões desafiadoras, estímulos ou perguntas que criem uma tensão que precisa ser resolvida e que proporcionem uma variedade de *feedback* aos estudantes sobre suas interpretações (Almeida; Silva; Brito, 2022; Swan, 2002).

2.4 Síntese do quadro teórico

O quadro teórico desta pesquisa articula três eixos centrais: modelagem matemática, perspectiva semiótica para misconcepções e perspectiva didática para misconcepções.

A modelagem matemática é compreendida como uma alternativa pedagógica que envolve os estudantes na investigação de situações reais por meio do uso da matemática (Almeida; Silva; Vertuan, 2012). No desenvolvimento de uma atividade de modelagem se dá mediante ciclos iterativos, que incluem fases como a inteiração com o problema, a matematização, a resolução e a validação e interpretação de resultados, as quais os estudantes podem fazer idas e vindas sempre que decidirem ser necessário. Nesse contexto, a modelagem matemática também evidencia os processos cognitivos dos estudantes, incluindo eventuais misconcepções.

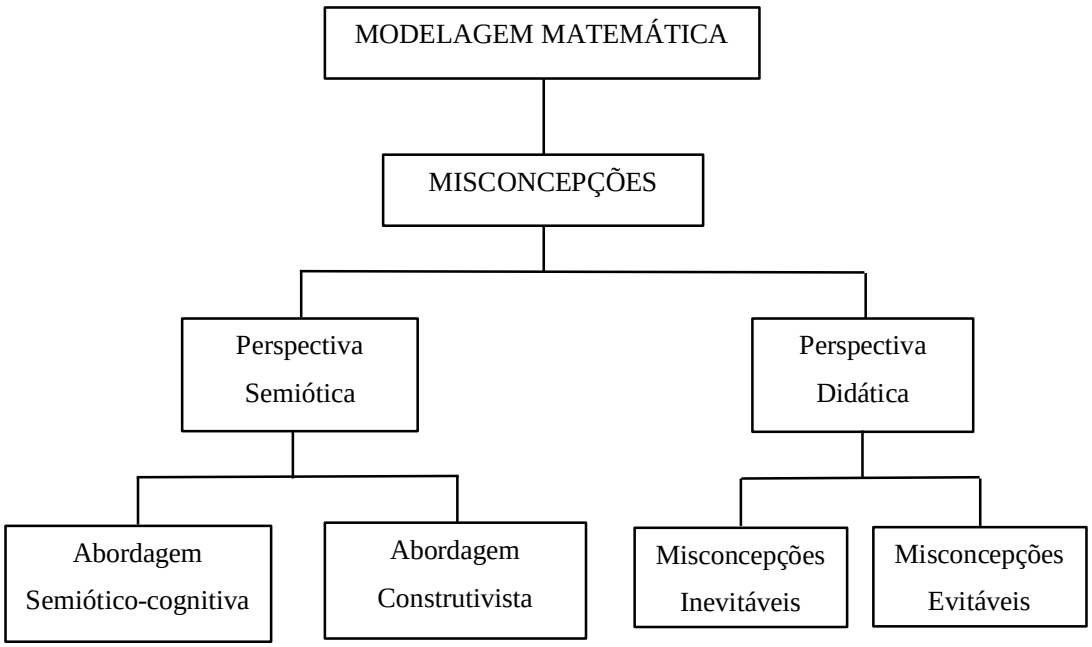
Misconcepções são entendidas nessa pesquisa como conceitos embrionários ou generalizações locais (Swan, 2002) e, são abordadas sob duas perspectivas semióticas complementares: a abordagem semiótico-cognitiva, fundamentada em Duval (1993), e a construtivista, defendida por D'Amore (1999). Segundo Duval, as misconcepções frequentemente decorrem da confusão entre representação e objeto matemático, e podem se manifestar nas dificuldades referentes a coordenação entre diferentes registros de representação semiótica, essencial para o pensamento matemático. Já D'Amore, entende que essas misconcepções podem ser um conhecimento que funciona em um dominio, mas não funciona em outro domínio; são um processo necessário, porém temporário.

Adicionalmente, Sbaragli (2005) propõe que misconcepções podem ser classificadas como evitáveis ou inevitáveis. Misconcepções inevitáveis dependem da inacessibilidade

intrínseca dos objetos matemáticos, são inerentes ao processo de construção do conhecimento, são atribuíveis à necessidade de partir de um determinado conhecimento para se comunicar. Por outro lado, misconcepções evitáveis são aquelas que podem ser minimizadas ou prevenidas mediante estratégias pedagógicas eficazes, dependem das escolhas metodológicas do professor ao trabalhar um conceito. O papel do professor como mediador desse processo está em prevenir misconcepções evitáveis, e superar as inevitáveis.

Assim, este quadro teórico busca integrar a riqueza da modelagem matemática como alternativa pedagógica, ao mesmo tempo em que oferece subsídios para compreender e abordar as misconcepções sob múltiplas perspectivas teóricas, e dessa forma buscar *interlocuções entre modelagem matemática e misconcepções dos estudantes*. A Figura 2.2 ilustra as relações do quadro teórico.

Figura 2.2 – Quadro teórico



Fonte: Autora, 2025.

2.5 Modelagem matemática e misconcepções: um passeio pela literatura

Reconhecendo a relevância do desenvolvimento de atividades de modelagem em diversos níveis de ensino, pesquisadores e grupos de pesquisa têm concentrado esforços em explorar aspectos teóricos significativos. Esses esforços incluem a identificação de elementos característicos da modelagem matemática, a expansão do conhecimento na área e a investigação

das inter-relações entre a modelagem e outras abordagens teóricas.

Com a finalidade de obter *insights* teóricos que abordam a temática sobre misconcepções e modelagem matemática, apresentamos algumas pesquisas realizadas sobre esse tema. Não foi realizada uma pesquisa invariante ou revisão de literatura, o estudo desses trabalhos teve como foco conhecer a ideia de misconcepções e suas possíveis relações com a modelagem matemática.

Destacamos dentre essas pesquisas, os trabalhos realizados no âmbito do Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), coordenados pela orientadora da presente pesquisa. Entre eles pode-se considerar a modelagem matemática articulada a misconcepções dos estudantes.

A emergência de misconcepções pode ser observada em atividades de modelagem como apontam Mendes, Sousa e Almeida (2017), que investigaram em uma disciplina de Introdução á Modelagem Matemática de um curso de Licenciatura em Matemática, como atividades de modelagem podem possibilitar que misconcepções de estudantes em relação a diferentes conhecimentos matemáticos sejam evidenciadas.

Seguindo a interpretação construtivista de D'Amore para misconcepções, em Surjus e Almeida (2023) é feita uma abordagem semiótica dentro dos referenciais propostos por Raymond Duval e Luis Radford. A pesquisa apresenta uma experiência piloto em que uma atividade de modelagem foi desenvolvida por estudantes do segundo ano de um curso de Licenciatura em Matemática no âmbito da disciplina de Etnomatemática e Tópicos de Educação para a Cidadania. Esta experiência possibilitou uma discussão sobre a natureza das misconcepções de estudantes que emergiram no desenvolvimento da atividade de modelagem, com base na abordagem semiótico-cognitiva de Duval e na bordagem semiótico-cultural de Radford.

O estudo realizado por Surjus e Almeida (2024) apresenta uma discussão sobre a abordagem construtivista de D'Amore, trazendo em seu quadro teórico uma perspectiva didática de misconcepções proposta por Sbaragli (2005). Com base nessa perspectiva, é lançado um olhar sobre as misconcepções relativas a conceitos do Cálculo diferencial e Integral (CDI), que emergiram no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática realizada com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. Os resultados apontam para o potencial de atividades de modelagem matemática para lidar com misconcepções.

A superação de misconcepções que emergiram em atividades de modelagem pode ser possibilitada em Almeida, Silva e Brito (2022) que, ao propor uma perspectiva didático-semiótica para a Modelagem Matemática, revisitam conceitos e mostram a emergência de misconcepções no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, bem como as ações do professor que colaboram para a sua superação. Em Surjus, Almeida e Kowalek (2023) é proposto um cenário para a discussão de misconcepções no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática a fim de investigar a superação de misconcepções dos estudantes em relação aos conceitos emergentes.

Pesquisas do âmbito internacional também serviram de inspiração para buscar elementos que articulam modelagem matemática e misconcepções.

Swan et al. (2007) ilustram como ferramentas matemáticas fundamentais, tanto conceitos quanto habilidades, podem ser desenvolvidas por meio de atividades de modelagem. No desenvolvimento de uma das atividades propostas, uma misconcepção emerge na resolução do problema. Os autores reconhecem a importância de dar aos estudantes a oportunidade de pensar e fazer uso das características matemáticas de seu entorno, promovendo o crescimento das competências matemáticas, forjando conexões fortes e explícitas entre o conhecimento matemático, por um lado, e os contextos nos quais esse conhecimento pode ser usado por outro.

Em sua pesquisa Pla-Castells, Melchor e Chaparro (2021), investigaram o potencial de Diagramas de Atividades de Modelagem (MAD+) na detecção de erros conceituais e processuais de estudantes ao resolver problemas de Fermi. Este trabalho descreve a utilização de uma ferramenta de representação, chamada MAD+. Esta ferramenta possibilita compreender como a análise temporal das resoluções dos estudantes pode oferecer informações mais profundas sobre suas misconcepções em relação aos conceitos matemáticos e de modelagem. A representação combinada permite conhecer quando ocorrem erros e fornece uma ferramenta para que os educadores adaptem os processos de ensino e a aprendizagem de matemática em todos os níveis de educação.

Vera, et al. (2021) discutem o papel da modelagem matemática em relação ao arsenal métodos da ciência moderna em biomedicina. Os autores tratam de misconcepções frequentes sobre modelagem matemática encontrados entre os experimentalistas biomédicos, sugerindo algumas boas práticas que, podem ajudar a preencher lacunas cognitivas entre modeladores e pesquisadores experimentais em biomedicina. A pesquisa se endereça tanto a modeladores

matemáticos que desejam investigar situações-problema relativas a biomedicina, como para biomédicos interessados em utilizar modelagem matemática para investigar a fisiopatologia de doenças humanas, no intuito de melhorar diagnósticos e tratamentos.

Deste modo, destacamos que o interesse de pesquisadores em investigar abordagens da modelagem matemática para lidar com misconcepções, tem se manifestado nos últimos anos. Há um vasto campo de investigações a ser explorado no que se refere à relação entre modelagem matemática e misconcepções.

Para além de observar a emergência e superação de misconcepções em atividades de modelagem, na presente pesquisa, objetivamos *investigar interlocuções entre modelagem matemática e misconcepções de estudantes*. Para tal, trazemos um olhar detalhado sobre as misconcepções emergentes quanto à sua natureza identificando se são um conceito embrionário que está em formação ou uma generalização local (Swan, 2002) e denominando-as. Quanto à sua origem apresentamos uma perpectiva semiótica com as abordagens semiótico-cognitiva de Duval (1993) e a abordagem construtivista de D'Amore (1999) para misconcepções. Quanto à forma como se apresentam as misconcepções, trazemos uma perspectiva didática que as classifica em evitáveis e inevitáveis, proposta por Sbaragli (2005). Para realizar essa investigação fundamentamo-nos metodologicamente nos pressupostos apresentados no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Visando *investigar interlocuções entre modelagem matemática e misconcepções dos estudantes*, considerando o referencial teórico discutido nos capítulos anteriores, este capítulo apresenta os contextos e os participantes da pesquisa empírica. Além disso, detalham-se as atividades realizadas, os procedimentos de coleta e tratamento de dados. Por fim, é descrita a metodologia de análise, evidenciando os passos seguidos para explorar os aspectos da modelagem que dialogam com as misconcepções dos estudantes.

3.1 Contextos da pesquisa

A pesquisa empírica foi realizada no ano de 2024 em uma universidade pública localizada em uma cidade do norte do Paraná. Para buscar interlocuções entre a modelagem matemática e misconcepções de estudantes, atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas em dois contextos com características distintas. Para observar essas interlocuções, foram escolhidas duas disciplinas para a constituição dos dois contextos e a realização da pesquisa empírica: a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I na Licenciatura em Matemática, e a disciplina de Transportes na Engenharia Civil.

Nos dois contextos a pesquisadora é referida como professora-pesquisadora. Bortoni-Ricardo (2008) afirma que, quando o professor assume o papel de pesquisador em formação, ele mostra que é possível realizar pesquisa em sala de aula se envolvendo ativamente, buscando explorar experiências e processos, respeitando a dinâmica da sala de aula. De acordo com a autora,

> o docente que consegue associar o trabalho de pesquisa a seu fazer pedagógico, tornando-se um professor pesquisador de sua própria prática ou das práticas pedagógicas com as quais convive, estará no caminho de aperfeiçoar-se profissionalmente, desenvolvendo uma melhor compreensão de suas ações como mediador de conhecimentos e de seu processo interacional com os educandos. Vai também ter uma melhor compreensão do processo de ensino e de aprendizagem (Bortoni-Ricardo, 2008, p. 32-33).

Nas últimas décadas, o pesquisador tem atuado de forma ativa em suas investigações reforçando o paradigma interpretativista , apontado por Bortoni-Ricardo (2008). Esse modelo

permite que o professor integre sua prática de ensino com o exercício da pesquisa, caracterizando-o como professor pesquisador. A autora conclui que o professor pesquisador, além de consumir o conhecimento gerado por pesquisas, é fundamentalmente um produtor de saberes acerca dos problemas que vivencia diariamente no ambiente escolar, atuando como investigador de sua própria prática e das práticas de seus colegas, ou das práticas pedagógicas com as quais convive.

Campos e Araújo (2015) denominam esse duplo papel como “relação dialética professor|pesquisador” e enfatiza que essa é uma característica marcante no campo da modelagem na educação matemática. A relação dialética é caracterizada por Campos e Araújo (2015, p. 324) como uma “alternância entre momentos de ênfase no papel de pesquisadora e no de professora, mas de tal forma que, embora diferentes, ambos coexistam e dialoguem”. Por um lado, a prática pedagógica da modelagem serve de pano de fundo para a realização de diversas pesquisas, por outro lado os pesquisadores se envolvem com a realização da prática pedagógica.

Desse modo, ao inserir-se nos dois contextos da presente pesquisa, a pesquisadora atuou ora como observadora da atuação da professora ao tratar de misconcepções a fim de coletar os dados para a pesquisa, ora como professora regente, planejando e acompanhando o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Ou seja, a pesquisadora olhou para a aprendizagem no papel de professora. Assim, a presente pesquisa está alinhada ao paradigma interpretativista de Bortoni-Ricardo (2008) e a caracterização proposta por Campos e Araújo (2015), e diante disso, opta-se por denominar a pesquisadora como professora-pesquisadora. Os contextos de atuação da professora-pesquisadora são caracterizados na sessão seguinte.

3.1.1 Contexto 1: Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I na Licenciatura em Matemática

A primeira etapa da coleta de dados se deu na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, ofertada para o primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática. No momento da coleta a professora-pesquisadora era a professora regente da disciplina, que ministrou essa disciplina durante o segundo semestre letivo de 2023. Ressaltamos que a coleta foi realizada no primeiro semestre de 2024 pois, o calendário acadêmico do ano de 2023 estava em atraso ocasionado pelo isolamento durante a pandemia do Covid-19 nos anos de 2020 e 2021. A turma era

composta por 34 estudantes.

A escolha deste contexto para a realização da pesquisa se deu pela importância da influência que misconcepções podem ter na formação do estudante de Licenciatura em Matemática, pois é fundamental que o estudante não se forme carregando misconcepções. Também é importante frisar que faz parte das ações didáticas da professora-pesquisadora desse curso promover a superação de misconcepções identificadas nos estudantes. A professora-pesquisadora assumiu essa turma como titular no terceiro bimestre letivo, substituindo o professor que ministrou a turma no primeiro semestre letivo. Para conhecer as dificuldades dos estudantes em conceitos do CDI que foram ministrados no primeiro semestre letivo e suas possíveis misconcepções, foi aplicado um teste diagnóstico, elaborado para averiguar o conhecimento dos estudantes e investigar a presença de misconcepções relativas a conceitos do CDI já incluídos na programação do primeiro semestre do ano letivo. A aplicação do teste se deu durante duas aulas no terceiro bimestre letivo, e as questões foram respondidas por 27 estudantes.

Após a realização do teste diagnóstico foi feita a análise dos erros dos estudantes em cada questão no intuito de identificar possíveis misconcepções. A fim de reparar as dificuldades dos estudantes nesses conteúdos e lidar com misconcepções, a professora-pesquisadora buscou na literatura uma atividade de modelagem em que conceitos relativos a algumas das misconcepções identificadas no teste pudessem emergir. Ao indagar se os estudantes já haviam desenvolvido alguma atividade de modelagem matemática, alguns responderam que conheciam o termo modelagem matemática, mas nenhum tinha desenvolvido alguma atividade de modelagem. Assim, a atividade de modelagem intitulada: *Sem abelhas, sem alimento!*[16] proposta para essa turma, foi a primeira atividade de modelagem desenvolvida por esses estudantes . Para o desenvolvimento da atividade a professora-pesquisadora constatou que alguns estudantes estavam familiarizados com *software* GeoGebra ou outros aplicativos para construir gráficos.

Participaram do desenvolvimento da atividade de modelagem 30 estudantes e, para a condução da mesma, a professora-pesquisadora solicitou que os estudantes formassem 6 grupos com cinco estudantes cada, em que eles mesmos escolheram os participantes de cada grupo. A duração da atividade foi de seis horas aula, distribuídas em três encontros de aulas regulares.

[16] A atividade é baseada em Bassanezi (2006).

Para referir-se aos grupos e estudantes na descrição e análise, utilizou-se a notação G seguida do número correspondente a cada grupo (G1, G2,..., G6), e os estudantes foram codificados como E1, E2, E3, ..., E30.

3.1.2 Contexto 2: Disciplina de Transportes na Engenharia Civil

O segundo contexto foi constituído a partir do aceite do convite do professor da disciplina de Transportes na Engenharia Civil, para familiarizar os estudantes com uma atividade investigativa. Diante da perspectiva de solucionar e compreender situações-problema, a modelagem matemática perfaz o caminho da pesquisa científica, e pode ser apresentada como uma metodologia investigativa (Costa *et al.*, 2020). Desse modo, a professora-pesquisadora propôs ao colegiado deste curso a realização de um minicurso intitulado *Modelagem Matemática*, pois a modelagem matemática pode dar uma visão do papel da matemática em situações da realidade. Sendo assim, o minicurso foi ofertado pelo colegiado do curso de Engenharia Civil para os estudantes do nono semestre da disciplina de Transportes, com uma carga horária de 20 horas aula, distribuídas em 10 encontros de aulas regulares, sendo realizados dois encontros por semana.

Inicialmente, para ter uma visão geral do grupo, a professora-pesquisadora fez um levantamento entre os estudantes sobre seu conhecimento a respeito de modelagem matemática. Dessa forma, constatou-se que os estudantes não possuiam conhecimento prévio sobre essa abordagem, bem como não tinham desenvolvido atividades de modelagem matemática anteriormente.

A seguir a professora-pesquisadora fez uma explanação sobre a modelagem matemática, elucidando conceitos e procedimentos para facilitar a compreensão dos estudantes, além de uma explicação sobre como utilizar o ciclo instrucional em seu desenvolvimento. Duas atividades de modelagem foram demonstradas a fim de exemplificar a utilização do ciclo instucional. Subsequentemente foi desenvolvida uma atividade de modelagem com o intuito de familiarizar os estudantes com a dinâmica da modelagem. A atividade de modelagem intitulada *Conectando a Cidade: Wi-fi livre no centro da cidade*[17], foi o primeiro contato dos estudantes com a modelagem matemática, e, dessa forma, não foram coletados dados para a pesquisa empírica.

[17] A atividade é baseada em Omodei (2021).

Outras duas atividades de modelagem foram desenvolvidas em cada turma para a coleta de dados: *Ajustando medidas em um equipamento de musculação, Manutenção de vias asfálticas*. A proposta para o planejamento das atividades de modelagem compreendia o estudo de situações-problema que têm relação com a prática da engenharia civil. Os estudantes das duas turmas estavam habituados a utilizar o *software* AutoCad, e alguns sabiam utlizar o *software* Geogebra, bem como outros aplicativos para a construção de gráficos e planilhas.

Participaram do minicurso trinta e sete estudantes, que foram divididos em duas turmas, as quais denominamos turma um (T1), e turma 2 (T2). A T1 era composta de 17 estudantes que foram divididos em 4 grupos formados pelos próprios estudantes. A T2 era composta de 20 estudantes que, da mesma forma que na T1, foram divididos em 4 grupos formados por eles mesmos. A composição dos grupos foi mantida em todas as atividades. As aulas foram conduzidas pela pesquisadora e acompanhadas pelo professor titular da disciplina que concedeu espaço para esse trabalho. Destaca-se que, para uma organização adequada, ao referir os grupos na descrição e análise utilizou-se a notação G seguida do número correspondente a cada grupo seguida da notação T1 ou T2 conforme a turma (G1T1, G1T2, ..., G4T1, G4T2). Os estudantes da turma T1 foram codificados como E1T1, E2T1, ..., E17T1, e os estudantes da turma T2 como E1T2, E2T2, ..., E20T2.

3.1.3 Os papéis de cada contexto na pesquisa

A relação entre misconcepções e atividades de modelagem nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia Civil, apresenta semelhanças e diferenças devido à natureza do conhecimento matemático envolvido e à forma como ele é utilizado em cada área. Desse modo, cada contexto contribui de maneira distinta para a investigação de interlocuções entre a modelagem matemática e misconcepções de estudantes.

O contexto um, a Licenciatura em Matemática, desempenhou um papel preliminar na pesquisa. Nele a professora-pesquisadora buscou compreender como futuros professores aprendem matemática, observando a emergência de misconcepções previamente identificadas ou não, no desenvolvimento das atividades de modelagem, bem como possibilitar sua superação. Além disso, esse contexto deu experiência à professora-pesquisadora, que serviu como base para planejar as atividades de modelagem que foram realizadas no segundo contexto, com vistas a lidar com misconcepções que emergiram em seu desenvolvimento.

O papel do segundo contexto, a Engenharia Civil, foi o de proporcionar a investigação da emergência de misconcepções de estudantes em atividades de modelagem, como também possibilitar sua superação, em uma área voltada para o uso da matemática como ferramenta para estudar situações-problema relativa à sua prática.

Em relação a esses papéis, podemos observar algumas semelhanças entre os dois contextos. Nos dois contextos a matemática é fundamental na aprendizagem de conceitos trabalhados ao longo do curso. Desse modo, misconcepções relativas a esses conceitos podem ser originadas e, posteriormente, serem identificadas e superadas. Da mesma forma misconcepções de conceitos não matemáticos podem emergir e serem superadas.

Outra semelhança que podemos observar é a que os estudantes de ambos os contextos podem ter misconcepções relativas a conceitos vistos na Educação Básica.

Nos dois contextos os estudantes desconheciam atividades de modelagem matemática, sendo esse seu primeiro contato com essa dinâmica. O ciclo de modelagem epistemológico (Figura 1.1) e o ciclo cognitivo (Figura 1.3) apresentados no capítulo um, foram utilizados pela professora-pesquisadora para planejar e conduzir as atividades de modelagem em cada contexto.

Por outro lado, os dois contextos apresentam diferenças significativas. Na Licenciatura em Matemática, a ênfase está na compreensão e no ensino dos conceitos. Os futuros professores precisam entender como os estudantes da Educação Básica ou Ensino Superior aprendem matemática e quais desafios e dificuldades enfrentam. Na Engenharia Civil, a matemática é vista como uma ferramenta aplicada para resolver problemas da prática da engenharia, tais como cálculos estruturais, dimensionamento de materiais e modelagem física.

Os estudantes da Licenciatura em Matemática cursavam o primeiro ano da graduação, enquanto que os estudantes da Engenharia Civil cursavam o quinto ano, sendo assim eram mais experientes em relação a conteúdos matemáticos, visto que nesta graduação há diversas disciplinas da área matemática.

Na Licenciatura em Matemática a professora-pesquisadora era a professora regente da turma, sendo assim conhecia os estudantes e os conceitos que já tinham sido trabalhados nessa disciplina antes de desenvolver a atividade de modelagem. Já na Engenharia Civil, a professora-pesquisadora foi a professora de um minicurso ofertado para a turma de Transportes, então foi

seu primeiro contato com os estudantes dessa turma.

A familiaridade dos estudantes da Engenharia Civil com ferramentas tecnológicas era mais ampla do que a familiaridade dos estudantes da Licenciatura em Matemática com tais ferramentas, mostrando dificuldades diferentes em relação á utilização dos softwares no trato dos conceitos matemáticos.

Os estudantes da Licenciatura em Matemática resolveram um teste diagnóstico relativo a conceitos do CDI, em que misconcepções foram identificadas. A partir do conhecimento destas misconcepções, a professora-pesquisadora buscou uma atividade de modelagem com a intenção de observar a emergência de algumas dessas misconcepções e possibilitar sua superação. Nesse contexto os estudantes não tiveram explicações sobre o desenvolvimento de uma atividade de modelagem, e nem tiveram acesso a qualquer um dos ciclos apresentados no capítulo um. Desse modo os estudantes do contexto um desenvolveram apenas uma atividade de modelagem, que foi conduzida pela professora-pesquisadora.

Já no segundo contexto, a Engenharia Civil não foi realizado um teste diagnóstico, o objetivo foi verificar que misconcepções podem emergir em uma atividade de modelagem sem que haja uma pré-identificação. Os estudantes desse contexto tiveram uma explicação sobre modelagem matemática, e sobre como utilizar o ciclo instrucional (Figura 1.2) no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, que foi entregue aos estudantes. Nesse contexto o ciclo teve um papel de orientador do desenvolvimento da atividade de modelagem, e não de formatador do processo, visto que os estudantes tinham a liberdade de utilizar o ciclo quando julgassem necessário. Os estudantes desenvolveram três atividades de modelagem, sendo que a primeira atividade de modelagem foi desenvolvida em conjunto com a professora-pesquisadora para os estudantes se familiarizarem com a dinâmica da modelagem matemática e a utilização do ciclo instrucional.

Em relação ao papel da professora-pesquisadora, no que tange ao tratamento de misconcepções emergentes em cada contexto, na Licenciatura em Matemática, o olhar da professora-pesquisadora foi mais didático e reflexivo, visto que foi necessário lidar com misconcepções de futuros professores da Educação Básica ou do Ensino Superior. Na Engenharia Civil, o intuito foi garantir que o uso da matemática seja adequado, promovendo a superação de misconcepções que podem comprometer projetos e cálculos técnicos.

Desse modo, mediante os diferentes papéis de cada contexto, foram desenvolvidas

atividades de modelagem específicas em cada contexto a fim de alcançar o objetivo da pesquisa.

3.2 As atividades de modelagem matemática desenvolvidas

A elaboração do material empírico foi feita por meio do desenvolvimento de atividades de modelagem, de forma que, para atingir o objetivo proposto, para cada contexto foram planejadas diferentes atividades. O Quadro 3.1 sintetiza as atividades de modelagem desenvolvidas durante a pesquisa em cada contexto[18] selecionadas para a descrição e análise.

Quadro 3.1 – Atividades selecionadas para descrição e análise

Contexto	Atividades
Contexto 1 – Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I na Licenciatura em Matemática	Sem abelhas, sem alimento!
Contexto 2 – Disciplina de Transportes na Engenharia Civil	Ajustando medidas em um equipamento de musculação
	Manutenção de pavimentos asfálticos

Fonte: Autora, 2024

Para o desenvolvimento das atividades de modelagem, inicialmente a professora-pesquisadora fez uma breve apresentação dos procedimentos característicos da modelagem matemática para cada contexto. No segundo contexto, o ciclo instrucional (Figura 1.2) foi entregue na primeira atividade desenvolvida pelos estudantes. Na entrega do ciclo instrucional a professora-pesquisadora explicou para os estudantes que eles poderiam recorrer ao ciclo durante o desenvolvimento da atividade de modelagem sempre que precisassem voltar ao início e fazer novas suposições para chegar mais perto de um resultado adequado (Gaimme, 2016).

Antes de iniciar o desenvolvimentos da atividade, a professora-pesquisadora instruiu os estudantes dos dois contextos a não apagar de seus registros resoluções que considerassem incorretas, que apenas fizessem um “X” ou um círculo sobre a parte a ser desconsiderada. O motivo desta instrução se dá pelo fato de que, nessas resoluções, poderiam ter erros oriundos de misconcepções, que seriam importantes para análise posterior.

[18] Em cada um dos contextos da pesquisa, os estudantes foram esclarecidos sobre o propósito da pesquisa, bem como da necessidade de fazer uso de registros por eles produzidos e do áudio dos grupos. Após esclarecimentos os estudantes eram convidados a assinar o termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice A).

Os estudantes trabalharam em grupos, reunindo-se para debater, compartilhar ideias, confrontar pontos de vista e estabelecer estratégias que os conduzissem a resultados a serem analisados e validados no contexto do problema investigado. Durante esse processo, a professora-pesquisadora atuou como orientadora, oferecendo suporte e acompanhamento aos grupos sempre que necessário, assegurando a compreensão dos conceitos e o aprimoramento das competências necessárias para solucionar os problemas apresentados.

A descrição e análise das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos estudantes de cada contexto, foi realizada utilizando as lentes teóricas apresentadas nos capítulos 1 e 2 deste relatório, que nos oferecem subsídios para a interpretação dos dados e reflexão sobre eles. Para tal, foram selecionadas três atividades realizadas nos contextos, sendo que, as atividades *Sem abelhas, sem alimento!*, *Ajustando medidas em um equipamento de musculação* e *Manutenção de pavimentos asfálticos*, foram temáticas propostas pela professora-pesquisadora. Em todas as atividades foi solicitado aos estudantes dos dois contextos que elaborassem um relatório com o desenvolvimento da atividade para ser entregue. Para o segundo contexto, além do relatório, a professora-pesquisadora solicitou que os estudantes organizassem uma apresentação com *slides* para comunicar seus resultados à turma, promovendo a socialização das aprendizagens.

3.3 Sobre a coleta e o tratamento dos dados

Para a realização da pesquisa, os dados foram obtidos por meio de diferentes intrumentos de coleta: gravadores de áudio, registro escrito dos estudantes da resolução das questões do teste diagnóstico, registro escrito dos estudantes durante o desenvolvimento da atividade, relatório elaborado pelos grupos. Com os dados coletados, o primeiro passo que o pesquisador deve dar é o de organizar o material coletado, uma vez que estudos baseados em dados qualitativos demandam “trabalhar todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos das observações, as transcrições de entrevistas, as análises de documentos e as demais informações disponíveis” (Lüdke; André, 2013, p. 45).

O teste diagnóstico foi utilizado somente no primeiro contexto, pois a professora-pesquisadora quiz averiguar o conhecimento dos estudantes em relação aos conceitos do CDI já trabalhados na disciplina e possíveis misconcepções relativas a esses conceitos. No contexto da disciplina de Transportes não foi aplicado um teste diagnóstico pois, o intuito era observar

que misconcepções emergem nas atividades de modelagem sem que haja uma prévia identificação. O teste é composto por oito questões discursivas estruturadas de forma a abordar diferentes conceitos e regras pertinentes ao estudo de funções e conjuntos numéricos em disciplinas de CDI. Para a elaboração das questões foram selecionados conceitos trabalhados no primeiro, segundo e terceiro bimestre da disciplina na intenção de revisitar esses conceitos. As questões versam sobre conceitos de conjuntos numéricos, inequação, funções e sua representação gráfica, limites, continuidade e derivadas, com a finalidade de analisar como os estudantes compreendem os conceitos tratados para identificar possíveis misconcepções relativas a esses conceitos. Em cada questão os erros dos estudantes foram analisados para identificar possíveis misconcepções relativas aos conceitos requeridos em sua reolução. As misconcepções identificadas no teste diagnóstico subsidiaram a escolha da atividade *Sem abelhas, sem alimento!*.

As gravações em áudio dos diálogos entre os estudantes de cada grupo, e dos estudantes com a professora-pesquisadora no decorrer do desenvolvimento das atividades de modelagem, foram feitas utilizando um gravador para cada grupo. Os diálogos foram transcritos e organizados. No processo de transcrição das gravações, houve alguns problemas técnicos combinados, tais como: ruídos externos (barulho do ventilador ou ar-condicionado), vozes muito baixas de alguns estudantes, pessoa dominante no grupo, falta de comunicação dos estudantes que pertenciam ao mesmo grupo. Esta constelação tornou difícil obter informações suficientes em determinados grupos para a análise, motivo pelo qual alguns grupos foram descartados. Destaca-se que para uma organização adequada, apresenta-se as falas da professora-pesquisadora indicadas pela abreviação de *Prof* e as falas dos estudantes conforme a codificação indicada em cada contexto. Para a descrição e análise, foram selecionados excertos dos diálogos transcritos no momento em que uma misconcepção foi observada pela professora-pesquisadora nas falas dos estudantes.

O material produzido pelos estudantes é composto do registro escrito produzido por eles no desenvolvimento da atividade de modelagem, e do relatório elaborado pelos grupos após o término da atividade de modelagem. Deste material são feitos recortes dos elementos que sinalizam misconcepções dos estudantes, e que, possivelmente tenham relação com as misconcepções identificadas nos diálogos dos estudantes.

Desta forma, para compor o material de análise, utilizamos os excertos das diálogos transcritos e do material produzido pelos estudantes que sinalizam a manisfestação das

misconcepções no desenvolvimento das atividades de modelagem. Com o material organizado, encaminhamo-nos para a interpretação e análise dos dados.

3.4 Natureza da pesquisa e metodologia de análise

Para *investigar interlocuções entre modelagem matemática e misconcepções dos estudantes*, a pesquisa segue encaminhamentos da abordagem qualitativa de cunho interpretativo (Bogdan; Biklen, 1994), uma vez que , envolve a obtenção de dados descritivos (pessoas, lugares, processos interativos), mediante contato direto do pesquisador com a situação objeto de estudo; enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em compreender e retratar o fenômeno segundo a perspectiva dos participantes.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a abordagem qualitativa prioriza a compreensão profunda das experiências e significados atribuídos pelos participantes, buscando interpretar fenômenos a partir das suas interações com a realidade. A escolha por uma abordagem qualitativa é fundamentada no objetivo de captar as nuances e processos, que ocorrem nas interações entre professor e estudantes com as atividades de modelagem matemática.

Na pesquisa empírica, realizada na presente investigação, os dados foram coletados por meio de instrumentos qualitativos como observações, gravações de áudio e do material produzido pelos estudantes. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), esse processo de coleta envolve o contato direto com os participantes e a obtenção de descrições detalhadas das situações e interações, focando mais no processo que no resultado final.

Para analisar os dados, a pesquisa utiliza indicações de Fiorentini e Lorenzato (2006), realizando a análise em etapas, incluindo a organização dos dados, a leitura flutuante e a categorização de temas emergentes. Nesse contexto, a análise busca identificar elementos que revelam misconcepções dos estudantes, com o intuito de compreender como elas se manifestam durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, havendo um esforço para a categorização desses elementos.

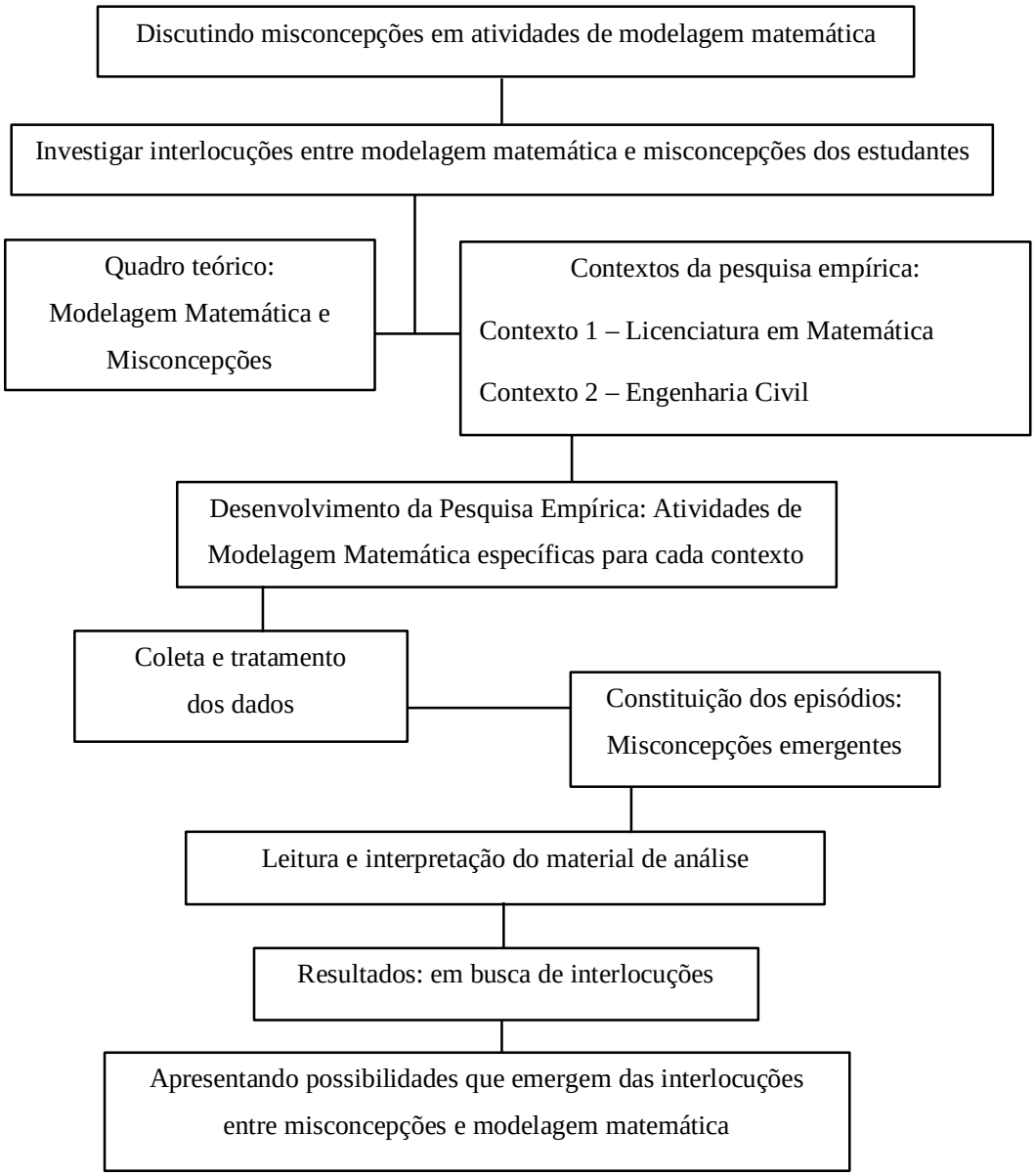
Para o processo de análise dos dados, inicialmente foi realizada uma seleção de situações que apresentavam subsídios para a nossa pesquisa. Com base no referencial teórico adotado, buscou-se nestas situações, misconcepções que haviam sido observadas pela professora-pesquisadora no decorrer do desenvolvimento das atividades de modelagem. Cada situação em

que uma misconcepção foi observada pela professora-pesquisadora, foi retratada no que denominamos *episódio*, e em cada episódio uma misconcepção é analisada. Para compô-los foram utilizados excertos das gravações de aúdio e do material produzido pelos estudantes.

A análise das misconcepções em cada episódio considera a fases do ciclo de modelagem em que a misconcepção emerge, e para tal, foram utilizados os ciclos epistemológico e cognitivo, olhando para as características de cada fase que propicia a emergência ou superação da misconcepção analisada. Uma vez que a misconcepção é situada no ciclo de modelagem, é feita a sua caracterização em relação a três aspectos: sua natureza, sua origem e forma didática. Quanto à sua natureza, as misconcepções podem ser identificadas como conceito embrionário que está em formação, ou uma generalização local (Swan, 2002). Quanto à sua origem, misconcepções podem ser oriundas da confusão entre o objeto matemático e uma de suas representações (Duval, 1993), ou de um conhecimento que funciona bem para uma determinada situação, mas não em outra (D'Amore, 1999). Quanto a forma didática de como se apresentam, as misconcepções são classificadas como evitáveis ou inevitáveis (Sbaragli, 2005). Cada misconcepção identificada recebeu uma denominação. Nos episódios também destacamos como uma misconcepção pode ter uma conotação positiva (D'Amore, 1999), mostrando que o tratamento de uma misconcepção pode ir além de simplesmente corrigir o erro e desfazer a misconcepção.

À luz do arcabouço teórico da pesquisa, é realizada uma análise interpretativa dos episódios, e para tal, as transcrições de áudio foram comparadas com o material produzido pelos estudantes, complementando as observações da professora-pesquisadora. Esse procedimento foi essencial, pois, conforme mencionado por Zanelli (2002), os dados isoladamente não se manifestam de forma completa. É necessário vinculá-los aos referenciais teóricos e aos pressupostos que norteiam a pesquisa para formar uma análise coerente e fundamentada. Para uma organização adequada do caminho metodológico percorrido, o processo de análise da pesquisa empírica é ilustrado na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Organização da pesquisa.



Fonte: Autora, 2025

Os dados selecionados para a análise apontam para interlocuções entre modelagem matemática e misconcepções dos estudantes, evidenciando como as misconcepções dos estudantes emergiram e foram identificadas pela professora-pesquisadora no desenvolvimento das atividades de modelagem, bem como sua intervenção no intuito de superá-las. Os resultados dessa análise serão apresentados no Capítulo 5. Na sequência apresentamos o desenvolvimento da pesquisa empírica.

CAPÍTULO 4

DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA EMPÍRICA

Considerando que as misconcepções manifestadas nas atividades de modelagem são analisadas em episódios, a pesquisa empírica, que considera os dois contextos apresentados no Capítulo 3, foi desenvolvida com o objetivo de *investigar interlocuções entre modelagem matemática e misconcepções dos estudantes* evidenciadas nestes episódios selecionados nas atividades de modelagem desenvolvidas.

Para a seleção dos episódios, foram considerados os dados coletados durante o desenvolvimento das atividades de modelagem, que incluem os excertos das transcrições dos diálogos ocorridos em sala de aula, do registro escrito dos estudantes no decorrer da atividade e do relatório elaborado pelos grupos após o término de cada atividade. O material de análise fornece os elementos que sinalizam as misconcepções dos estudantes, relativas aos conceitos que emergiram nas atividades de modelagem. As atividades de modelagem descritas em cada contexto, e os grupos selecionados para a análise, são apresentados no Quadro 4.1.

Quadro 4.1 – Atividades e grupos selecionados para descrição

Contexto	Atividades	Grupos	Estudantes
Contexto 1 – Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I na Licenciatura em Matemática	Teste Diagnóstico	Turma	E1 a E27
	Sem abelhas, sem alimento!	Turma	E1 a E30
		G3	E11 a E15
		G6	E26 a E30
Contexto 2 – Disciplina de Transportes na Engenharia Civil	Ajustando medidas em um equipamento de musculação	G4T1	E13 a E17
	Manutenção de pavimentos asfálticos	G2T2	E5 a E10
		G3T1	E9 a E12

Fonte: Autora, 2024

4.1 Contexto 1: Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I na Licenciatura em Matemática

Neste contexto, a pesquisadora era a professora regente da disciplina no momento da coleta dos dados, e será referida no texto como professora-pesquisadora (Bortoni-Ricardo, 2008; Campos; Araújo, 2017).

Primeiramente, um teste diagnóstico (Quadro 4.2) foi respondido pelos estudantes para identificar misconcepções relativas a conceitos do CDI, já apresentados aos estudantes na disciplina. A avaliação diagnóstica, de acordo com os estudos de Bloom et al. (1983), é o ponto de partida para todo trabalho a ser desenvolvido pelo educador. Seu objetivo é verificar o conhecimento prévio de cada estudante, tendo como finalidade constatar pré-requisitos de conhecimento ou habilidades imprescindíveis de que os estudantes possuem para o preparo de uma nova etapa de aprendizagem. Este tipo de avaliação pode subsidiar o planejamento do professor e permitir estabelecer o nível de necessidades iniciais para a realização de um planejamento adequado.

4.1.1 Identificando misconcepções em um teste diagnóstico

Um teste diagnóstico (Quadro 4.2) foi respondido pelos estudantes da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, para que misconcepções relativas aos conceitos do CDI fossem identificadas. A aplicação do teste diagnóstico se deu durante duas aulas e responderam às questões vinte e sete estudantes, denominados E1, E2, E3, ..., E27, os quais responderam individualmente às questões.

A professora-pesquisadora solicitou aos estudantes que apresentassem a resolução das questões justificando seu desenvolvimento. Para identificar possíveis misconcepções dos estudantes, as questões foram analisadas, sendo identificados nas respostas os erros conceituais ou processuais de cada estudante em cada questão. Na sequência foram agrupadas e classificadas as respostas em comum dos estudantes. Desse modo para cada questão foi relacionado um rol de tipos de erros dos estudantes como: tipos de erros, resposta correta e sem resolução. Essa classificação orientou a identificação de misconcepções relativas a conceitos do CDI requeridos na resolução de cada questão e possibilitou uma caracterização das misconcepções manifestadas.

Quadro 4.2 – Teste Diagnóstico

Questão 1: Números irracionais fazem parte dos conjuntos numéricos e como exemplos clássicos de números irracionais temos o número e chamado número de Euler e o número π que é utilizado na determinação do comprimento da circunferência, área do círculo, por exemplo. Estes números pertencem ao conjunto dos números irracionais denotado por $\mathbb{I}$. Defina o conjunto dos números irracionais.
Com relação à sua resposta, assinale uma das alternativas:
( ) estou confiante na minha resposta
( ) estou pouco confiante na minha resposta
( ) não estou confiante na minha resposta
( ) estou certo da minha resposta

Questão 2: Determine o conjunto solução da inequação $(-x^2 + 5x - 6) \geq 0$. Apresente a resolução incluindo uma representação gráfica.

Questão 3: A função $f(x) = \frac{x}{x-1}$ está definida para todos os números reais x tais que $x \neq 1$. É possível criar uma extensão (remover a descontinuidade) da função f de forma que essa nova função seja contínua em todos os reais? Apresente sua resolução.
Com relação à sua resposta, assinale uma das alternativas:
( ) estou confiante na minha resposta
( ) estou pouco confiante na minha resposta
( ) não estou confiante na minha resposta
( ) estou certo da minha resposta

Questão 4: O gráfico de uma função pode ter assíntota horizontal e assíntota vertical. Determine as assíntotas da função $f(x) = \frac{2}{1-x}$ e represente no plano cartesiano o gráfico da função e das assíntotas.

Questão 5: Calcule o limite da função $f(t) = \frac{t^2+t}{e^{t^2+1}}$ quando t tende a mais infinito ($+\infty$). Apresente a resolução, explicando o que usou em cada etapa da resolução.

Questão 6: A expectativa de vida da população vem aumentando a partir do século XX. A tabela a seguir apresenta a expectativa de vida da população masculina nos Estados Unidos para nascidos a partir do ano de 1900, denotada por $E(t)$. Estime e interprete a expectativa de vida de um homem que nasceu no ano de 1975. Como, do método usado para essa estimativa, pode associar a derivada da função E?

t	$E(t)$	t	$E(t)$
1900	48,3	1960	66,6
1910	51,1	1970	67,1
1920	55,2	1980	70,0
1930	57,4	1990	71,8
1940	62,5	2000	74,1
1950	65,6		

Com relação à sua resposta, assinale uma das alternativas:
( ) estou confiante na minha resposta
( ) estou pouco confiante na minha resposta
( ) não estou confiante na minha resposta
( ) estou certo da minha resposta

Questão 7: Calcule a derivada da função $f(x) = (\text{sen}\, x)^2 \cdot \cos(x^2)$ e descreva cada uma das fases do seu processo de resolução.

Questão 8: Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ em $x = 2$. Apresente a resolução dessa situação incluindo uma representação gráfica.

Fonte: Autora, 2024

Questão 1

A primeira questão do teste versa sobre números irracionais e o enunciado se refere a

estes números e alguns de seus exemplos solicitando a definição do Conjunto dos Números Irracionais:

> *Números irracionais fazem parte dos conjuntos numéricos e como exemplos clássicos de números irracionais temos o número e chamado número de Euler e o número π que é utilizado na determinação do comprimento da circunferência, área do círculo, por exemplo. Estes números pertencem ao conjunto dos números irracionais denotado por* $\mathbb{I}$. *Defina o conjunto dos números irracionais.*

Os tipos de erros observados estão relacionados na Tabela 4.1, bem como as respostas incompletas e as corretas.

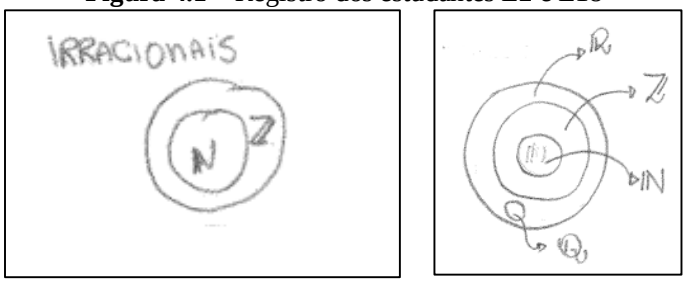
Tabela 4.1 – Tipos de erros da questão 1

	Tipos de erros
1	São os números que formam uma dízima periódica/número irracional no numerador da fração.
2	Números que não tem raiz quadrada exata/números infinitos/ números que não seguem padrão/não tem divisão exata/não pertence ao conjunto dos inteiros.
3	São os números que resultam em uma dízima não periódica.
4	Representação incompleta do Diagrama de Venn.
5	São números que não podem ser representados na forma de fração.
6	São números que não podem ser representados na forma de fração a/b, para $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.
7	É o conjunto das dízimas periódicas.
8	É o conjunto das dízimas não periódicas.
9	É o conjunto dos números que não podem ser escritos sob forma de fração.
10	Resposta correta: é o conjunto dos números que não podem ser representados na forma de fração a/b, para $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ ou $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Fonte: Autora, 2024

Entre os tipos de respostas relacionadas na Tabela 4.1, o tipo (7) é um erro processual e os tipos (8) e (9) são respostas incompletas. Em suas resoluções os estudantes iniciam a definição citando a palavra *conjunto*, porém, concluem a definição parcialmente ou de forma incorreta. Em algumas das resoluções o conjunto dos números irracionais foi representado com Diagramas de Venn de forma incompleta, caracterizado como tipo de erro (4), mostrando que há o entendimento do que é conjunto como vemos nas resoluções dos estudantes E2 e E18 (Figura 4.1). Nesses tipos de erro consideramos que os estudantes têm a noção de conjunto, porém ao definir o conjunto dos números irracionais efetuam erros processuais.

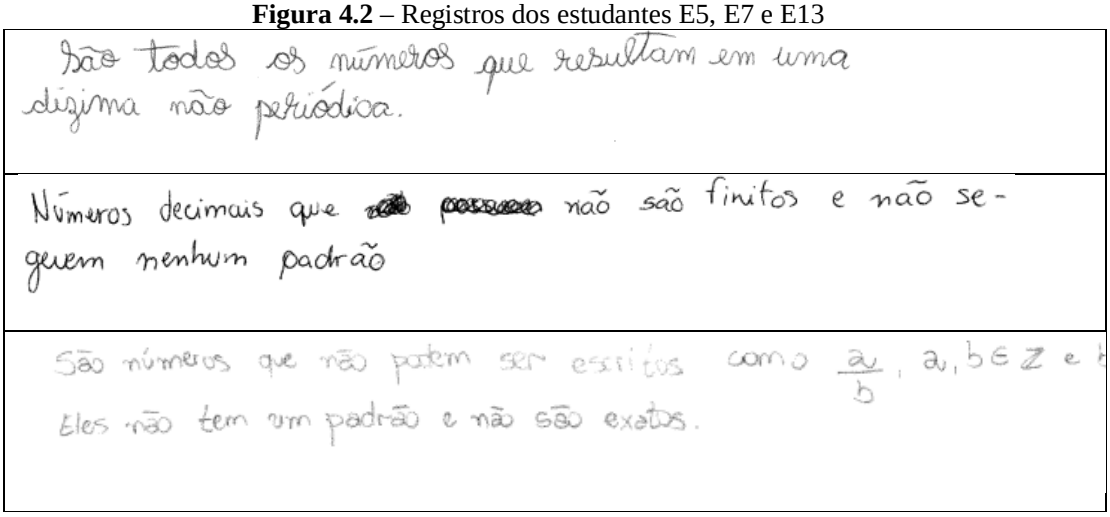
Figura 4.1 – Registro dos estudantes E2 e E18



Fonte: Teste diagnóstico

Os tipos de erros (1), (2), (3), (5) e (6) os estudantes definem conjunto utilizando a palavra *número*. Percebe-se um equívoco quando o estudante faz referência a número no lugar de conjunto, como evidenciam os registros de alguns estudantes na Figura 4.2:

Figura 4.2 – Registros dos estudantes E5, E7 e E13



Fonte: Teste diagnóstico

O equívoco observado foi identificado como uma misconcepção entre a definição de conjunto e a definição de elemento, e desse modo a mesma é caracterizada como *confusão entre conjunto e elemento de um conjunto*, em que a definição do conjunto numérico é dada pela definição de seu elemento.

O que se pode inferir é que provavelmente os estudantes tenham uma concepção equivocada de conjunto pelo fato de os conjuntos numéricos serem inicialmente apresentados na forma de seus elementos, como ocorre nos anos finais do Ensino Fundamental, como por exemplo apresentar o conjunto dos números irracionais da forma $\mathbb{I} = \{\ldots, -\pi, -e, -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \varphi, e, \pi \ldots\}$. Essa é uma misconcepção inevitável pois nesse contexto a introdução do conceito deve ser feita utilizando esta representação. Porém a falta de outras representações do mesmo conceito pode levar o estudante a construir uma concepção

enraizada em um modelo intuitivo sobre a definição do conjunto na qual confunde o objeto conjunto numérico com uma de suas representações. Pode-se dizer que é um conceito embrionário, pois ainda está em formação, visto que o estudante possivelmente terá um aprofundamento desse conceito em disciplinas que abordam a teoria dos conjuntos. Sendo assim essa misconcepção deve ser temporária e superada. Uma vez identificada, o professor poderá explorar oportunidades para intervir com encaminhamentos, vinculando-a a ideias modificáveis para que seja arranjada e possivelmente superada.

Nessa questão o estudante tinha que responder à pergunta sobre a sua confiança em relação à resposta dada, como está apresentado na Tabela 4.2 que relaciona a confiança do estudante com a avaliação de suas respostas (correta ou incorreta). Como pode ser visto na tabela 2 mais da metade dos participantes responderam estar pouco confiante em suas respostas. Menos de um terço dos estudantes responderam corretamente a questão conforme aponta a Tabela 4.1, e entre esses apenas dois estavam certos de suas respostas.

Tabela 4.2 – Confiança do estudante quanto à sua resposta na questão 1

Respostas	Resposta correta	Resposta incorreta
Estou confiante na minha resposta	3	3
Estou pouco confiante na minha resposta	3	13
Não estou confiante da minha resposta	-	2
Estou certo da minha resposta	2	-
Sem resposta	-	1
TOTAL	8	19

Fonte: Autora, 2024

É possível identificar que há três estudantes confiantes de suas respostas incorretas e infere-se que seja um indício de misconcepção. De fato, observando a resolução desses três estudantes – E3, E6 e E17 – os tipos de erros que apontam para a misconcepção identificada, o que reforça a nossa hipótese. Desta forma, nessa primeira questão caracterizamos a primeira misconcepção como *confusão entre conjunto e elemento de um conjunto*.

Questão 2

A segunda questão do teste versa sobre inequações e o enunciado se refere a uma inequação de segundo grau e solicita a determinação do conjunto solução da inequação juntamente com sua representação gráfica:

Determine o conjunto solução da inequação $(-x^2 + 5x - 6) \geq 0$. *Apresente a resolução incluindo uma representação gráfica*.

Na Tabela 4.3 estão relacionados os tipos de erros, as respostas corretas, questão sem resolução.

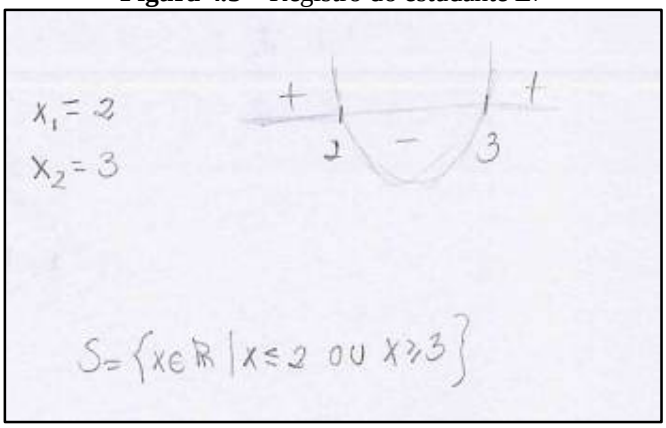
TABELA 4.3 – Tipos de erros da questão 2

	Tipos de erros
1	Procedimento incorreto na determinação dos valores de x.
2	Não verifica os valores de y para os quais a inequação é maior ou igual a zero.
3	Erro conceitual na verificação dos valores de y para os quais a inequação é maior ou igual a zero.
4	Resolução correta da inequação, porém apresenta representação gráfica incompleta.
5	Resolução correta.
6	Sem resolução.

Fonte: Autora, 2024

Os tipos de erros (1), (2) e (4) são erros processuais, as resoluções apresentam algum erro de cálculo ou estão incompletas. Entre os erros observados destacamos o tipo de erro (3) que é identificado como um erro conceitual. Nesse tipo de erro identifica-se o equívoco que é a verificação dos valores de y para os quais a inequação é maior ou igual a zero para uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$ que é representada graficamente por uma parábola com a concavidade voltada para cima. A Figura 4.3 ilustra este equívoco na resolução do estudante E7:

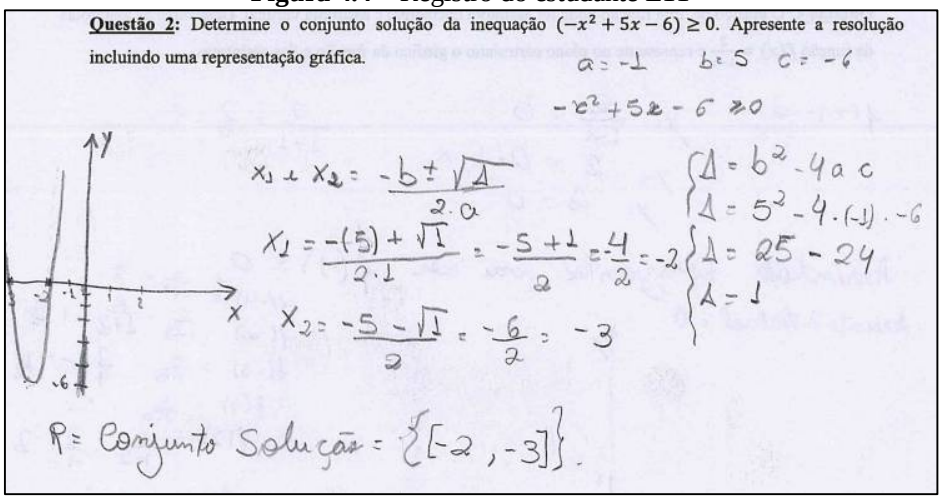
Figura 4.3 – Registro do estudante E7



Fonte: Teste diagnóstico

Em outra resolução percebe-se que apesar do cálculo incorreto dos valores de x, o estudante E11 utiliza o mesmo raciocínio equivocado como ilustra a Figura 4.4:

Figura 4.4 – Registro do estudante E11



Fonte: Teste diagnóstico

Na inequação quadrática apresentada na questão temos que $a < 0$, desta forma é representada graficamente por uma parábola com a concavidade voltada para baixo, a qual o estudante deve recorrer para verificar os valores de y.

Infere-se que este equívoco ocorre quando, o estudante recorre aos processos de simplificação da inequação inicial para a obtenção das raízes da equação associada a essa inequação. Ao verificar os valores de y necessários para determinar o domínio da inequação na representação gráfica da função, o estudante não retorna à inequação inicial, e desse modo constrói a representação gráfica da equação simplificada e faz uma interpretação errônea na verificação dos valores de y.

Nessa questão foi identificada a segunda misconcepção caracterizada como *equívocos no uso de inequações e equações de 2º grau*.

Questão 3

Na terceira questão o enunciado se refere a uma função racional e questiona se é possível remover a descontinuidade da função solicitando sua resolução:

> *A função $f(x) = \frac{x}{x-1}$ está definida para todos os números reais x tais que $x \neq 1$. É possível criar uma extensão (remover a descontinuidade) da função f de forma que essa nova função seja contínua em todos os reais? Apresente sua resolução.*

Na Tabela 4.4 estão relacionados os tipos de erros, as respostas corretas, questão sem resolução.

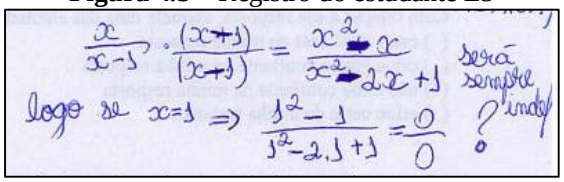
TABELA 4.4 – Tipos de erro da questão 3

	Tipos de erros
1	Esboça cálculos incoerentes com a questão.
2	Justifica sem realizar cálculos que não é possível criar uma extensão pois a função não é contínua em *x = 1*.
3	Justifica que é possível remover a descontinuidade sem apresentar cálculo.
4	Verifica que a função não é definida em *x = 1*.
5	Constrói o gráfico de forma inadequada – não representa a hipérbole.
6	Calcula o limite de forma incorreta .
7	Utiliza o Teorema do Confronto de forma equivocada e conclui que a função tem limite quando *x* tende a 1.
8	Calcula a derivada da função.
9	Menciona os limites laterais, mas não realiza o cálculo.
10	Verifica que os limites laterais são diferentes e propõe uma remoção de forma equivocada
11	Resolução correta.
12	Sem resolução.

Fonte: Autora, 2024

Nas resoluções incorretas percebe-se que nenhum estudante verifica os três itens necessários para que haja continuidade no ponto: a função ser definida no ponto, existência do limite, o limite ser igual a imagem. Para remover uma descontinuidade basta redefinir f em x_0, e para isso é necessário que o limite em x_0 exista. A existência do limite ocorre quando os limites laterais são iguais. Na maior parte das resoluções dos estudantes que calcularam o limite, observa-se a tentativa de utilizar artifícios de simplificação para que a variável x pudesse ser substituída por x_0, como mostra a Figura 4.5:

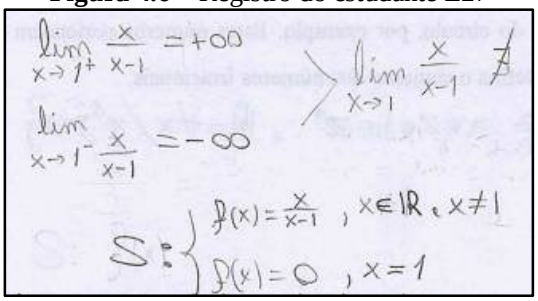
Figura 4.5 – Registro do estudante E5



Fonte: Teste diagnóstico

Este procedimento mostra que os estudantes não associaram a definição de limite com a igualdade dos limites laterais. Infere-se que um modelo intuitivo equivocado pode ter se instalado, levando os estudantes a calcular o limite apenas como a imagem da função. Somente em duas resoluções os estudantes calcularam os limites laterais, em uma delas o estudante resolveu a questão corretamente. Na outra resolução o estudante calculou os limites laterais corretamente, porém redefiniu f para um valor x_0, equivocadamente pois já havia concluído que os limites laterais eram diferentes e que não existe limite nesse ponto, como ilustrado na Figura 4.6:

Figura 4.6 – Registro do estudante E27



Fonte: Teste diagnóstico

Este estudante não verifica em sua resolução que a descontinuidade não pode ser removida quando o limite não existe.

A respeito da confiança dos estudantes em relação ás suas respostas podemos observar na Tabela 4.5 nessa questão apenas um estudante respondeu estar confiante de sua resposta que estava correta, e nenhum respondeu estar certo de sua reposta. Dois terços dos estudantes estavam pouco confiantes ou não confiantes em suas respostas e estes apresentaram resposta incorretas, isso pressupõe que os estudantes não estavam certos de seus procedimentos. Quase um terço dos estudantes deixou a pergunta sobre a confiança sem resposta. A confiança dos estudantes em relação às suas respostas pouco apontou em relação com as misconcepções identificadas.

TABELA 4.5 – Confiança do estudante quanto à sua resposta na questão 3

Respostas	Resposta correta	Resposta incorreta
CO – Estou confiante na minha resposta	1	-
PC – Estou pouco confiante na minha resposta	-	7
NC – Não estou confiante da minha resposta	-	11
CE – Estou certo da minha resposta	-	0
SR – Sem resposta	-	8
TOTAL	1	26

Fonte: Autora, 2024

Na terceira questão foram identificadas a terceira e quarta misconcepções, caracterizadas como e*quívoco na identificação de continuidade de uma função em um ponto* e *não reconhecimento, na definição de limite de uma função, a necessidade da igualdade dos limites laterais.*

Questão 4

Na quarta questão o enunciado se refere a uma função racional e solicita a determinação de suas assíntotas horizontais e verticais, bem como a representação no plano cartesiano do

gráfico da função com suas assíntotas:

O gráfico de uma função pode ter assíntota horizontal e assíntota vertical. Determine as assíntotas da função $f(x) = \frac{2}{1-x}$ *e represente no plano cartesiano o gráfico da função e das assíntotas.*

Na Tabela 4.6 estão relacionados os tipos de erros, as respostas corretas, questão sem resolução.

Tabela 4.6 – Tipos de erro da questão 4

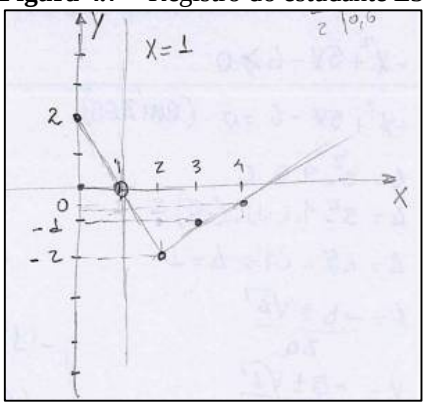
	Tipos de erros
1	Calcula algumas imagens.
2	Faz a representação gráfica incompleta da função.
3	Obtém os pontos da função corretamente, mas não representa a hipérbole no plano cartesiano.
4	Faz a representação gráfica da função e não determina as assíntotas
5	Faz a representação gráfica da função e não conclui o cálculo das assíntotas.
6	Não utiliza os limites laterais para determinar a assíntota vertical, e faz a representação gráfica de forma incorreta.
7	Calcula os limites laterais de forma incorreta e faz uma representação gráfica incorreta.
8	Faz a representação gráfica da função, não utiliza os limites laterais para determinar a assíntota vertical e não calcula a assíntota horizontal.
9	Resolução correta.
10	Sem resolução

Fonte: Autora, 2024

Os tipos de erros (1), (2), (4), (5) e (6) consideramos como erros processuais ou resolução incompleta e os erros do tipo (3), (7) e (8), consideramos como erros conceituais.

Das resoluções com erros processuais, a maior parte são erros relativos à construção do gráfico da função. Esses estudantes não chegaram a fazer o cálculo do limite, deixando a resolução incompleta. Um exemplo de erro processual podemos observar na construção do gráfico do E3 como podemos observar na Figura 4.7:

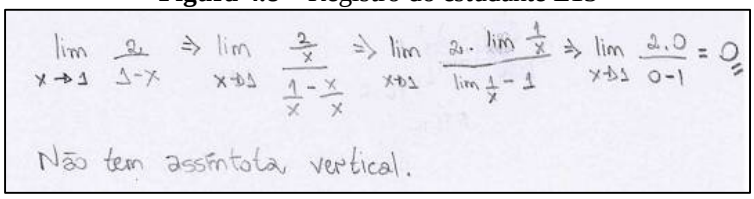
Figura 4.7 – Registro do estudante E3



Fonte: Teste diagnóstico

Entre os erros considerados conceituais observamos que ao calcular o limite para x tendendo a 1, o estudante calcula o limite fazendo simplificações para substituir o valor de x na expressão algébrica ao invés de calcular os limites laterais. Por exemplo, o E13 não utiliza os limites laterais em seu cálculo e como efetua erros processuais conclui o limite de forma equivocada. Destacamos o fato de que apesar de ter concluído erroneamente que o limite existe ele não associou à definição de assíntota vertical concluindo que a assíntota não existe, conforme ilustra a Figura 4.8:

Figura 4.8 – Registro do estudante E13



Fonte: Teste diagnóstico

Desta forma observamos que na quarta questão foi identificada novamente a quarta misconcepção, caracterizada como *não reconhecimento, na definição de limite de uma função, a necessidade da igualdade dos limites laterais.* Isso reforça a identificação da misconcepção manifestada.

Questão 5

Na quinta questão o enunciado se refere a uma função racional e solicita a determinação do limite quando a variável independente tende a mais infinito (+ ∞) requerendo a explicação de cada etapa da resolução:

Calcule o limite da função $f(t) = \frac{t^2+t}{e^{t^2}+1}$ *quando t tende a mais infinito (+ ∞). Apresente a resolução, explicando o que usou em cada etapa da resolução.*

Na Tabela 4.7 estão relacionados os tipos de erros, as respostas corretas, questão sem resolução.

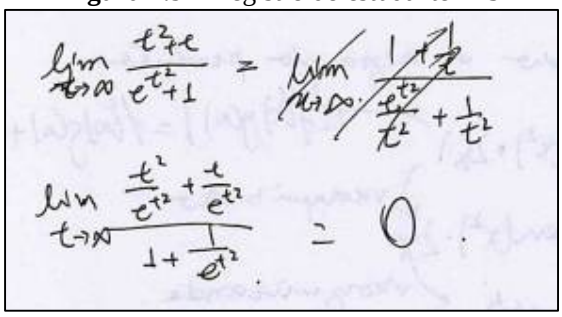
Tabela 4.7 – Tipos de erro da questão 5

	Tipos de erros
1	Substitui t por mais infinito e não conclui o cálculo.
2	Utiliza simplificações no limite de forma incorreta e substitui t por mais infinito concluindo de forma incorreta.
3	Substitui t por mais infinito e conclui que o limite é indeterminado.
4	Substitui t por mais infinito e conclui de forma incorreta.
5	Utiliza a definição de limite de forma incorreta e não conclui a resolução.
6	Utiliza a regra de L'Hôspital, mas calcula a derivada da função e^{t^2} de forma incorreta.
7	Resolução correta.
8	Sem resolução.

Fonte: Autora, 2024

Consideramos os tipos de erros de (1) a (5) como erros processuais ou resolução incompleta. Entre os erros processuais destacamos erros como o do E19 que fez uma simplificação incorreta para calcular o limite conforme ilustra a Figura 4.9:

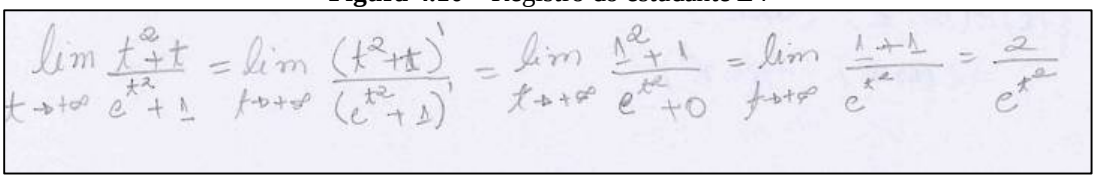
Figura 4.9 – Registro do estudante E19



Fonte: Teste diagnóstico

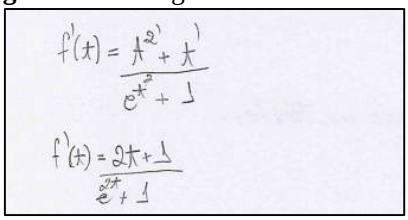
O tipo de erro (6) foi considerado um erro conceitual. O equívoco conceitual identificado nesta questão, foi a derivação incorreta de uma função composta. Como o estudante não reconhece a função composta e^{t^2}, para utilizar a regra da cadeia ele utiliza de forma equivocada a regra da função exponencial, como observamos na Figura 4.10, ou a regra da função exponencial e a regra da potência no expoente de forma inadequada como mostra a Figura 4.11.

Figura 4.10 – Registro do estudante E4



Fonte: Teste diagnóstico

Figura 4.11 – Registro do estudante E23



Fonte: Teste diagnóstico

Nessas resoluções o estudante faz uma generalização local, possivelmente não reconhece a função composta e desta forma não utiliza a regra da cadeia, recorrendo à derivada da regra da potência. Novamente o estudante utiliza um conhecimento que funciona para um domínio, mas não funciona para outro. Assim nessa questão caracterizamos a quinta misconcepção identificada como *não reconhecimento da função composta para utilizar a regra da cadeia para derivar a função.*

Questão 6

Na sexta questão o enunciado se refere a uma tabela de dados sobre a expectativa de vida da população masculina nos Estados Unidos para nascidos a partir do ano de 1900. É solicitado que se estime e interprete a expectativa de vida de um homem que nasceu no ano de 1975. Também é questionado como, do método usado para essa estimativa, pode-se associar a derivada da função dos dados apresentados:

> *A expectativa de vida da população vem aumentando a partir do século XX. A tabela a seguir apresenta a expectativa de vida da população masculina nos Estados Unidos para nascidos a partir do ano de 1900, denotada por E(t). Estime e interprete a expectativa de vida de um homem que nasceu no ano de 1975. Como, do método usado para essa estimativa, pode associar a derivada da função E?*

T	$E(t)$	t	$E(t)$
1900	48,3	1960	66,6

1910	51,1	1970	67,1
1920	55,2	1980	70,0
1930	57,4	1990	71,8
1940	62,5	2000	74,1
1950	65,6		

Na Tabela 4.8 estão relacionados os tipos de erros, as respostas corretas, questão sem resolução.

Tabela 4.8 – Tipos de erro da questão 6

	Tipos de Erros
1	Calcula a média aritmética das expectativas entre os anos de 1970 e 1980.
2	Calcula a média aritmética das expectativas entre os anos de 1970 e 1980 e menciona a taxa de variação.
3	Calcula a média aritmética das expectativas de vida entre os anos de 1970 e 1980 e menciona a derivada.
4	Calcula a média aritmética das expectativas de vida e responde que a taxa de variação é a derivada.
5	Calcula a diferença entre as expectativas de vida.
6	Calcula a diferença entre as expectativas de vida e faz a média aritmética das diferenças.
7	Calcula a diferença entre as expectativas de vida e responde que a taxa de variação é a derivada.
8	Calcula a razão entre as expectativas e os anos de 1970 e 1980 e conclui de forma incorreta.
9	Sem resolução.

Fonte: Autora, 2024

A expectativa para a resolução dessa questão era de que os estudantes calculassem a taxa de variação e associação à derivada. Como nenhum estudante resolveu desta forma, podemos inferir que para esses estudantes a derivada é coeficiente angular da reta tangente. Mas para provar essa hipótese seria necessário uma investigação com outras questões para que pudéssemos observar nas resoluções dos estudantes essa misconcepção. Nessa questão nenhum estudante apresentou a resolução correta.

De acordo com a Tabela 4.9 nenhum estudante respondeu que estava confiante ou certo de sua resposta. Dois terços dos estudantes responderam estar pouco confiantes ou não confiantes de suas resoluções. Um terço dos estudantes não respondeu a questão sobre a confiança em sua resposta.

Tabela 4.9 – Confiança do estudante quanto à sua resposta na questão 6

Respostas	Resposta correta	Resposta incorreta
CO – Estou confiante na minha resposta	-	0

PC – Estou pouco confiante na minha resposta	-	8
NC – Não estou confiante da minha resposta	-	10
CE – Estou certo da minha resposta	-	0
SR – Sem resposta	-	9
TOTAL	0	27

Fonte: Autora, 2024

Nessa questão não foi possível identificar misconcepções visto que os erros observados nas resoluções dos estudantes se tratava apenas de erros processuais.

Questão 7

Na sétima questão o enunciado apresenta uma função f como o produto de duas funções trigonométricas compostas e solicita a determinação da derivada de primeira ordem da função f: *Calcule a derivada da função* $f(x) = (sen\ x)^2 \cdot cos(x^2)$ *e descreva cada uma das fases do seu processo de resolução.*

Na Tabela 4.10 foram relacionados os tipos de erros observados, as respostas corretas, questão sem resolução.

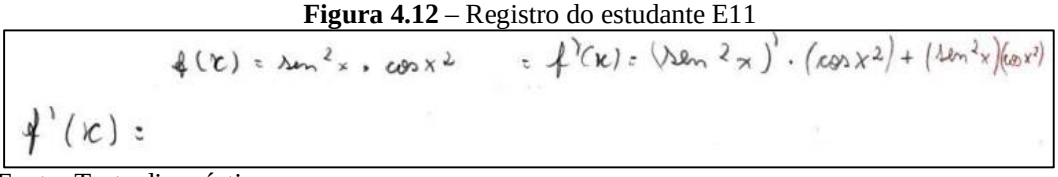
Tabela 4.10 – Tipos de erro da questão 7

	Tipos de erros
1	Utiliza a regra da soma no lugar da regra do produto e não utiliza a regra da cadeia.
2	Utiliza a regra da cadeia antes da regra do produto.
3	Utiliza a regra do produto e não utiliza a regra da cadeia.
4	Descreve as fases e não realiza o cálculo.
5	Não utiliza a regra da cadeia em $(\text{sen}\ x)^2$.
6	Utiliza a regra do produto e a regra da cadeia com alguns erros.
7	Resolve corretamente apresentando $f(x) = 2\text{sen}x \cdot \cos x \cdot \cos(x^2) - 2x\,(\text{sen}\ x)^2 \cdot \text{sen}(x^2)$, mas não descreve as fases do processo de resolução.
8	Resolve corretamente apresentando $f(x) = 2\text{sen}x \cdot \cos x \cdot \cos(x^2) - 2x\,(\text{sen}\ x)^2 \cdot \text{sen}(x^2)$, e descreve as fases corretamente.
9	Sem resolução.
	TOTAL

Fonte: Autora, 2024

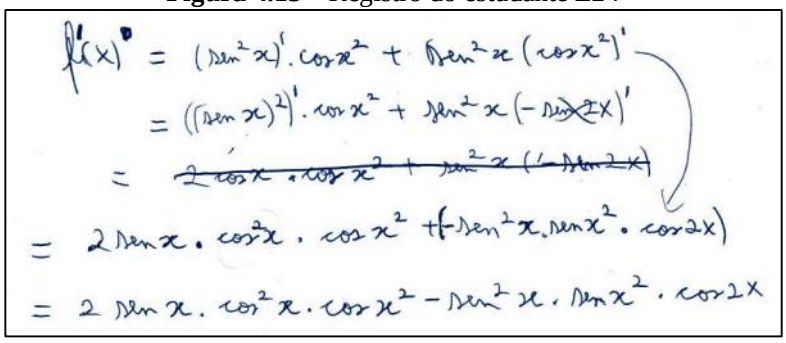
Os tipos de erro (2), (4), (5) e (6) são resoluções incompletas ou resoluções com erros processuais. Examinando as questões os estudantes iniciam de forma correta, mas não concluem o cálculo (Figura 4.12). Em outros processuais, o estudante utiliza as regras do produto e da cadeia, porém no decorrer do desenvolvimento efetua pequenas falhas que levam a um resultado incorreto (Figura 4.13).

Figura 4.12 – Registro do estudante E11



Fonte: Teste diagnóstico

Figura 4.13 – Registro do estudante E24

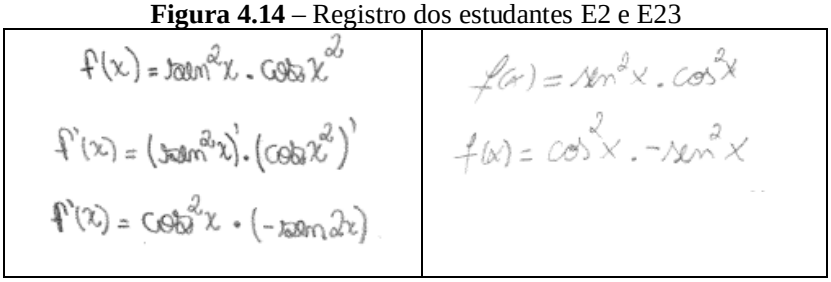


Fonte: Teste diagnóstico

Nos tipos de erros (1) e (3) os estudantes não utilizam a regra do produto e nem a regra da cadeia, ou só utilizam a regra do produto. Nas resoluções percebe-se dois tipos de generalizações locais equivocadas, a primeira em relação da regra do produto, e a segunda em relação a da regra da cadeia.

O primeiro equívoco conceitual identificado foi a generalização equivocada da regra da soma, a partir de uma interpretação errônea. Essa é uma misconcepção observada na derivada do produto de funções. O estudante se utiliza do raciocínio para derivada da soma que é "a derivada da soma é a soma das derivadas", e da mesma forma faz "a derivada do produto é o produto das derivadas" como mostra a Figura 4.14. Essa é uma generalização local que o estudante faz, ele se utiliza de um conhecimento que funciona para um determinado domínio, porém é ineficaz em outro domínio. Cabe ressaltar que essa mesma misconcepção é identificada na derivada do quociente entre funções, o estudante se utiliza novamente da generalização equivocada da regra da soma para fazer "a derivada do quociente é o quociente das derivadas".

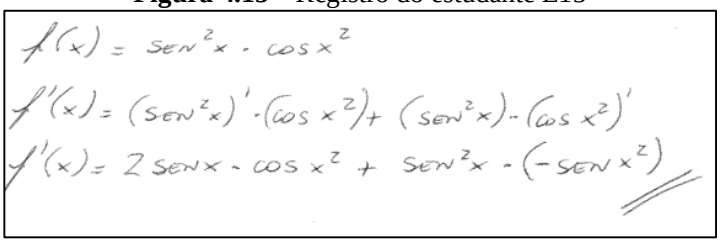
Figura 4.14 – Registro dos estudantes E2 e E23



Fonte: Teste diagnóstico

O segundo equívoco conceitual identificado nesta mesma questão, foi novamente o não reconhecimento da função composta para utilizar a regra da cadeia, como também observamos na questão 5. Como o estudante não identifica a função composta para utilizar a regra da cadeia ele utiliza a regra da potência de forma inadequada como mostra a Figura 4.15:

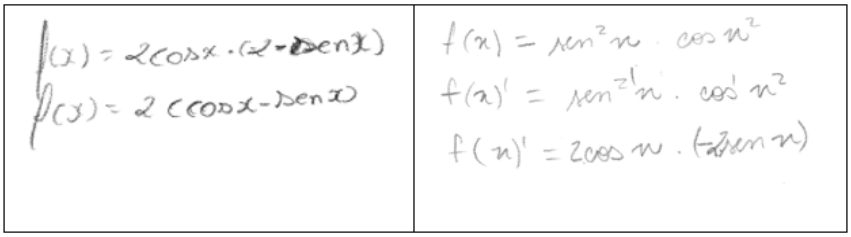
Figura 4.15 – Registro do estudante E15



Fonte: Teste diagnóstico

Na Figura 4.16 pode-se observar que em algumas resoluções foram identificadas as duas misconcepções no cálculo da derivada:

Figura 4.16 – Registro dos estudantes E1 e E14



Fonte: Teste diagnóstico

A origem das duas misconcepções caracterizadas nessa questão é semelhante pois, em ambas o estudante utiliza um conhecimento que é necessário em determinado domínio, porém inadequado em um domínio mais amplo.

Sendo assim, na sétima questão foi identificada novamente a misconcepção *não reconhecimento da função composta para utilizar a regra da cadeia para derivar a função*, identificada na questão 5, e a sexta misconcepção, caracterizada como *a derivada do produto é o produto das derivadas*.

Questão 8

Na oitava questão o enunciado se refere a solicitação da determinação da equação da reta tangente ao gráfico da função apresentada incluindo sua representação gráfica:

Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ *em x = 2. Apresente a resolução dessa situação incluindo uma representação gráfica.*

Na Tabela 4.11 estão relacionados os tipos de erros, as respostas corretas, questão sem resolução.

Tabela 4.11 – Tipos de erro da questão 8

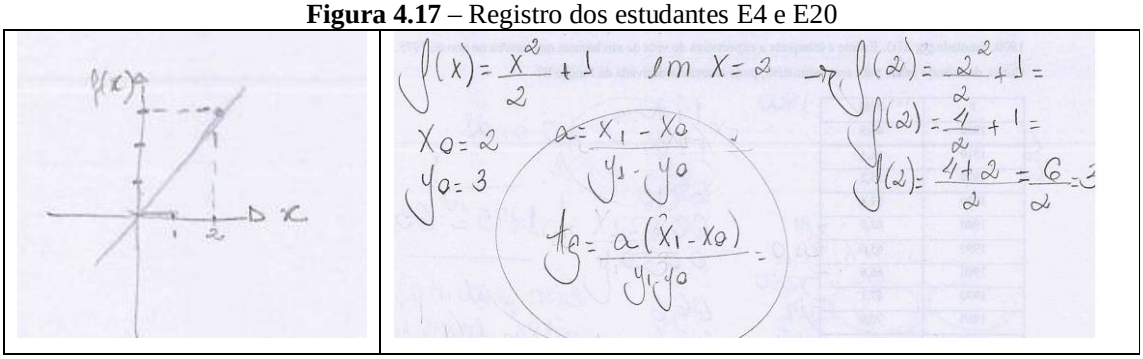
	Tipos de erros
1	Calcula a imagem de *x = 2* .
2	Calcula a imagem de *x = 2* de forma incorreta.
3	Afirma que x_1 e y_1 são pontos.
4	Calcula a imagem de *x=2* e traça uma reta passando pelos pontos (2,3) e (0,0).
5	Não conclui o cálculo da derivada.
6	Calcula o coeficiente angular da reta tangente.
7	Calcula o coeficiente angular de forma incorreta.
8	Calcula alguns pontos da função e faz uma representação gráfica parcial da parábola.
9	Faz a representação gráfica de *f* e o cálculo da derivada de *f*.
10	Apresenta o gráfico de *f* com uma reta tangente no ponto (2,3), mas não apresenta o cálculo para a obtenção da função da reta tangente.
11	Obtém a função da reta tangente corretamente, mas esboça a função *f* e a reta tangente de maneira incorreta.
12	Apresenta resolução correta e representação do gráfico função *f* e da reta tangente adequada.
13	Sem resolução.

Fonte: Autora, 2024

Nessa questão apenas o tipo de erro (3) foi considerado como erro conceitual. O restante dos tipos de erros consideramos como erros processuais ou resolução incompleta.

Das resoluções com erros processuais, temos uma variedade de erros tais como erros relativos à construção do gráfico da função e erros na obtenção da tangente. Para exemplificar estes erros a Figura A.17 ilustra a resolução de dois estudantes:

Figura 4.17 – Registro dos estudantes E4 e E20

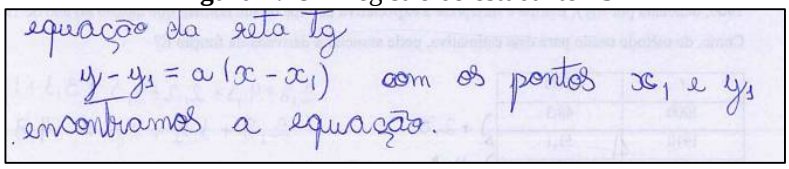


Fonte: Teste diagnóstico

Observamos um erro conceitual nessa questão que é a confusão entre o que é coordenada e o que é ponto. O estudante E5 não fez a resolução da questão, mas escreveu um raciocínio

que nos chamou atenção, conforme ilustra a Figura A.18:

Figura 4.18 – Registro do estudante E5


equação da reta tg
$y - y_1 = a(x - x_1)$ com os pontos x_1 e y_1
encontramos a equação.

Fonte: Teste diagnóstico

O estudante chama de pontos a abcissa e ordenada do ponto, e comum na sala de aula ouvirmos estudantes expressando em suas falas esse mesmo raciocínio. Então caracterizamos nessa questão a sétima misconcepção como *equívoco entre o conceito de coordenada e o conceito de ponto no plano cartesiano*.

A análise da resolução das questões permite observar diferentes tipos de erros processuais e conceituais efetuados pelos estudantes. Examinando a resolução dos estudantes é possível identificar misconcepções em busca de padrões para que seja possível teorizar suas possíveis causas (Sarwadi; Shahrill, 2014). Como resultado da análise das oito questões do teste diagnóstico, foi identificado um conjunto de misconcepções relativas a conceitos do CDI, que inclui: (i) Confusão entre *conjunto* e *elemento de um conjunto*; (ii) Equívocos no uso de inequações e equações de 2º grau; (iii) Equívoco na identificação de continuidade de uma função em um ponto; (iv) Não reconhecimento, na definição de limite de uma função, da necessidade da igualdade dos limites laterais; (v) Não reconhecimento da função composta para utilizar a regra da cadeia para derivar a função; (vi) A derivada do produto é o produto das derivadas; (vii) Equívoco entre o conceito de coordenada e o conceito de ponto no plano cartesiano.

Após verificar o conhecimento prévio dos estudantes, a professora-pesquisadora utilizou o resultado da análise do teste para planejar a atividade de modelagem que faz parte da pesquisa empírica. Com isso, a professora-pesquisadora iniciou uma busca na literatura por atividades de modelagem desenvolvidas em que, entre os conceitos emergentes em seu desenvolvimento, houvesse alguns dos conceitos que faziam parte das questões do teste. Assim, a atividade *Sem abelhas, sem alimento!* foi adaptada do tema *Abelha* do livro *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* (Bassanezzi, 2006).

Para a estruturação da atividade, o ciclo epistemológico (Figura 1.1) e o ciclo instrucional (Figura 1.2) tiveram a função de orientar a professora-pesquisadora em seu

planejamento e condução. Os estudantes receberam apenas uma explicação sucinta acerca da dinâmica da modelagem matemática. O ciclo cognitivo (Figura 1.3) foi utilizado para captar e interpretar as ações cognitivas dos estudantes no decorrer do desenvolvimento da atividade de modelagem no momento em que as misconcepções se manifestaram.

O desenvolvimento dessa atividade de modelagem teve o intuito de promover a manifestação de alguma ou algumas misconcepções identificadas no teste e possibilitar sua superação. Essa atividade fez parte da composição da nota do quarto bimestre, e participaram do seu desenvolvimento 30 estudantes distribuídos em seis grupos de cinco estudantes, formados por eles mesmos. A atividade foi realizada em 3 encontros de 2 horas-aula cada. A descrição da atividade de modelagem feita na próxima seção considera os diálogos da professora-pesquisadora com a turma durante a inteiração e a matematização, visto que, essas fases foram conduzidas pela professora-pesquisadora de forma conjunta com a turma. A descrição da resolução e interpretação de resultados e validação é feita considerando o desenvolvimento da atividade de modelagem dos estudantes do G6 e do G3.

4.1.2 Descrição da atividade *Sem abelhas, sem alimento!*

O primeiro dia do desenvolvimento da atividade iniciou com a explicação da professora a respeito da dinâmica da atividade que seria realizada e a formação dos grupos. Na sequência foi entregue o texto informativo para os estudantes (Quadro 4.3) para que eles se inteirassem com tema. Após a leitura do texto, a professora-pesquisadora iniciou uma discussão sobre a diminuição da população de abelhas decorrente das mudanças climáticas, uso de agrotóxicos, crescimento urbano, entre outros. Essas situações podem provocar uma divisão na colmeia, e segundo as informações do texto, uma rainha seguida de um grupo de abelhas deixa a colmeia para formar uma nova. Diante da problemática que emerge em meio às informações, ao final da discussão a professora-pesquisadora sugeriu o seguinte problema para ser investigado: *Como se dá o crescimento de uma colmeia?*

Quadro 4.3 – Texto informativo da atividade *Sem abelha, sem alimento!*[19]

SEM ABELHA, SEM ALIMENTO!

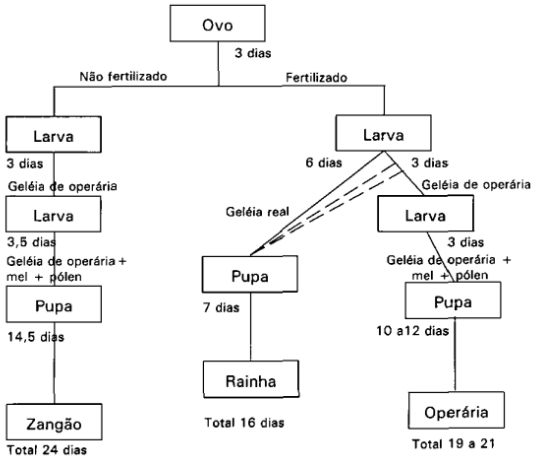
As abelhas são cultuadas ao longo da história por diversas civilizações como símbolo de riqueza, trabalho ou perseverança, as abelhas surgiram muito antes do homem, há mais de 100 milhões de anos. As abelhas têm importância fundamental para o meio ambiente e para a produção agrícola pois, representam 87% das espécies de polinizadores. No entanto vários estudos, compilados pelo relatório da Plataforma Intergovernamental de Política Científica sobre Serviços de Biodiversidade e Ecossistemas (IPBES) em 2016 sobre Polinizadores, Polinização e Produção de Alimentos, mostraram que espécies de abelhas silvestres estão em declínio em várias regiões do planeta.

Mudanças climáticas, uso de agrotóxicos e crescimento urbano acelerado estão entre os principais motivos que podem influenciar na redução das populações de abelhas. Diversas campanhas para a conscientização da população sobre a morte e o desaparecimento massivo de abelhas tem sido feitas. Pesquisadores do Centro de Ciências Biológicas (CCB) da Universidade Estadual de Londrina (UEL) acompanham populações e diferentes espécies de abelhas no município e região, e a professora Silvia Helena da Universidade Estadual de Londrina, recorda o lema utilizado atualmente: "sem abelha, sem alimento".

A abelha mais popular é a *Apis mellifera* (abelha melífera, europeia, do mel ou africanizada), famosa pelo ferrão e sua picada dolorida, e por estar em todo o Brasil e por produzir a maior parte do mel que consumimos. Em uma colmeia das abelhas melíferas existem 3 castas de abelhas: rainha, operárias e zangões. As operárias vivem de 38 a 42 dias, mas podem chegar até cinco meses de vida em climas muito frios. Os machos são expulsos da colônia por volta de 10 dias de vida e vivem cerca de três semanas no ambiente, mas, caso encontrem uma rainha, morrem logo após a cópula. Já as rainhas podem viver de dois a quatro anos, o que geralmente depende de seu desempenho na postura de ovos.

O caminho da nobreza é fundar uma nova colônia pelo processo de enxameagem, pelo qual colônias já maduras se dividem para povoar novos ambientes — seja por superpopulação, seja por abundância de alimento. O enxame migratório em geral tem de 10000 a 30000 indivíduos. A rainha é responsável pelo povoamento da nova colônia, pondo ovos de forma contínua, garantindo o nascimento das operárias, machos e rainhas virgens (princesas). A postura de ovos pode chegar a dois mil ovos por dia, no caso da *Apis mellifera*.

O desenvolvimento das abelhas depende de sua casta. As fêmeas são originadas de ovos fecundados e os machos de ovos não fecundados. O período entre a fase larval e o nascimento de uma abelha depende da alimentação que recebe nos primeiros dias de vida e do tipo de alvéolo em que se desenvolverá. Os machos se tornarão os zangões e tem um desenvolvimento diferente das fêmeas. O esquema da Figura 1 mostra detalhadamente o desenvolvimento das 3 castas:



Fonte: Autora, 2024

A coleta de dados se deu com as informações apresentadas no texto, que foram organizadas de forma conjunta, entre a professora-pesquisadora e estudantes, dando início à matematização. Foram estabelecidas as seguintes informações e hipóteses:

I_1: A quantidade inicial de abelhas na nova colmeia é de 10 000 indivíduos.

[19] Texto adaptado do site A.B.E.L.H.A.S e de Pereira, et al. (2006)

I_2: A postura média da rainha é de 2 000 ovos por dia.

I_3: O período entre a postura e o nascimento da abelha operária é de 21 dias.

I_4: A longevidade média de uma operária é de 40 dias.

H_1: A dinâmica populacional se dá em 2 estágios, o primeiro é o *período de adaptação* que começa com a postura inicial e vai até o nascimento das primeiras abelhas, o segundo é o *período de desenvolvimento* quando começa a nascer abelhas diariamente.

H_2: A taxa de crescimento populacional é proporcional à quantidade de abelhas que se tem a cada instante.

Dando continuidade à matematização, a professora-pesquisadora indagou para a turma quais são as variáveis do problema a fim de selecioná-las. Os estudantes começaram a sugerir de forma aleatória as variáveis que constam nas informações como podemos observar neste trecho da discussão com a turma:

> Prof: Quais são as variáveis que vamos utilizar para poder estudar esse problema?
> E27: A vida da rainha?
> Prof: Bom, vamos lá, o que mais?
> E10 : Quantidade de ovos que põe por dia?
> [⋮]
> E9 : Quantas rainhas tem?
> Prof : O que vocês entendem por variável?
> E21: Se ela cresce ou não cresce.
> E25: Se ela aumentar muito né, ou se ela diminuir também.
> E11: O número de abelhas?
> Prof: É uma! (resposta para o estudante E11). O número de abelhas é uma variável do problema. (Transcrição do diálogo com a turma)

Assim ficou definido que umas das variáveis do problema é a quantidade de abelhas. Diante da dificuldade e confusão entre os estudantes a respeito de quais são as variáveis do problema, a professora-pesquisadora percebeu que esta poderia ser uma misconcepção dos estudantes. Foi necessário continuar conduzindo a discussão com a turma na busca pela outra variável:

> E12: Professora seria o tempo de vida das abelhas também uma variável?
> Prof: Temos que pensar no crescimento populacional.
> E9 : A quantidade de ovos?
> E25: Quais variáveis...Uma é o número de abelhas, quantidade de abelhas, quantidade de ovos... acho que não tem que ser quantitativo.
> E18: Quantas abelhas contém?
> [⋮]
> Prof: O número de abelhas na nova colmeia vai crescer infinitamente ou há um momento em que ela para de crescer?
> E28: Ela cresce infinitamente.
> E27: Porque sempre vai trocar as rainhas! Nunca vai parar de crescer!

E1: É o número de dias.
E25: É tempo não é? Tempo! Não é??
Prof: Número de dias pessoal? A dinâmica populacional de crescimento vai relacionar quem? O número de abelhas com quem?
E1: Tempo.
E16: Com o tempo! (Transcrição do diálogo com a turma)

Neste momento os estudantes concluem que a outra variável é o tempo. Após a definição das variáveis os estudantes não mostraram dificuldade em identificar que o tempo é a variável independente e a quantidade de abelhas a variável dependente. Assim as variáveis foram denominadas n (tempo em dias) e P_n (população das abelhas no *n-ésimo* dia). Para definir o domínio e contradomínio da função, a professora-pesquisadora, no intuito de verificar se a misconcepção identificada no teste diagnóstico como *confusão entre conjunto e elemento do conjunto* se manifestaria, fez uma provocação, indagando novamente a turma como mostra o diálogo:

Prof: A qual conjunto numérico as variáveis pertencem?
E16: Inteiros?
E20: Naturais?
E1: Reais?
E18: Inteiros.
E8: Naturais.
Prof: E qual é a definição do conjunto dos números naturais?
E15: Números.
E3: São números inteiros positivos!
E15: Números né?
E16: Algarismos?
E14: Inteiros.
E18: Não são os números encontrados na natureza?
E3: São os inteiros positivos incluindo o zero, não é?
E15: Números naturais é tudo aquilo que pode ser contado naturalmente
E3: Que outra palavra então pode ser usada aí?
E4: Número e... (Transcrição do diálogo com a turma)

É possível inferir que os estudantes não possuíam naquele momento uma ideia clara da definição do conjunto numérico dos números naturais. Em suas falas percebe-se uma ligeira confusão entre a definição de *conjunto* e *elemento do conjunto* o que aponta para uma misconcepção destes conceitos. A fim de auxiliar os estudantes a superarem essa misconcepção, a professora-pesquisadora sistematizou o conceito explicando que a definição do conjunto é diferente da representação do conjunto, apresentando a definição de conjunto dos números naturais. Desta forma ficou definido que o domínio e o contradomínio da função é o conjunto dos números naturais e assim os grupos iniciaram a resolução do problema.

No Quadro 4.4 podemos observar uma síntese da resolução de G6:

Quadro 4.4 – Síntese da resolução de G6

Construção do Modelo Matemático por G6

Desenvolvimento do primeiro estágio

Antes, devemos calcular a taxa de sobrevivência:
1º Estágio: 10 000 óbitos em 40 dias equivalem a 250 óbitos/dia. Daí temos que a taxa de mortalidade (j) é de 0,025.

Portanto, a taxa de sobrevivência (i) é igual a $i = 1 - j = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$.
Agora, conforme as hipóteses H_1 e H_2, veja como o número de abelhas (P_n) muda em função do tempo (n):

$$n = 0 \Rightarrow P_0 = 10.000 \times 0{,}975^0$$
$$n = 1 \Rightarrow P_1 = 10.000 \times 0{,}975^1$$
$$n = 2 \Rightarrow P_2 = 10.000 \times 0{,}975^2$$
$$\ldots$$
$$\therefore n = k \Rightarrow P_k = 10.000 \times 0{,}975^k, 0 \leq k \leq 21$$

Temos: $P_n = 10\,000 \times 0{,}975^n, 0 \leq n \leq 21$.

A partir de função P_n, podemos encontrar a função $P(t)$

$$(0{,}975)^t = e^{\ln 0{,}975^t} = e^{t \ln 0{,}975} = e^{-0{,}02532t}$$

$$\Longrightarrow P(t) = 10\,000 \times e^{-0{,}02532t}, 0 \leq t \leq 21$$

sendo que A_0 são as remanescentes do 21º dia.

Desenvolvimento do segundo estágio

2º Estágio: Após 21 dias, sobrevivem 5.876 abelhas e passam a nascer 2.000 novas abelhas todos os dias. Daí, conforme as hipóteses H2, H3 e H5, veja como o número de abelhas (P_n) muda em função do tempo (n):

$$n = 22 \Rightarrow P_{22} = 10.000 \times 0{,}975^{22} + 2.000 \times 0{,}975^0$$
$$n = 23 \Rightarrow P_{23} = 10.000 \times 0{,}975^{23} + 2.000 \times 0{,}975^1 + 2.000 \times 0{,}975^0$$
$$n = 24 \Rightarrow P_{24} = 10.000 \times 0{,}975^{24} + 2.000 \times 0{,}975^2 + 2.000 \times 0{,}975^1 + 2.000 \times 0{,}975^0$$
$$\ldots$$
$$n = k \Rightarrow P_k = 10.000 \times 0{,}975^k + \frac{2.000 \times (1 - 0{,}975^{k-21})}{1 - 0{,}975}, k > 21$$
$$\Leftrightarrow P_k = 10.000 \times 0{,}975^k + 80.000 \times (1 - 0{,}975^{k-21}), k > 21$$
$$\Leftrightarrow P_k = 10.000 \times \frac{0{,}975^k \times 0{,}975^{21}}{0{,}975^{21}} - 80.000 \times \frac{0{,}975^k}{0{,}975^{21}} + 80.000, k > 21$$
$$\Leftrightarrow P_k = 0{,}975^{k-21} \times (10.000 \times 0{,}975^{21} - 80.000) + 80.000, k > 21$$
$$\therefore P_k = (5876 - 80.000) \times 0{,}975^{k-21} + 80.000, k > 21$$

$$P_n = -74.124 \times 0{,}975^{n-21} + 80.000, n > 21$$

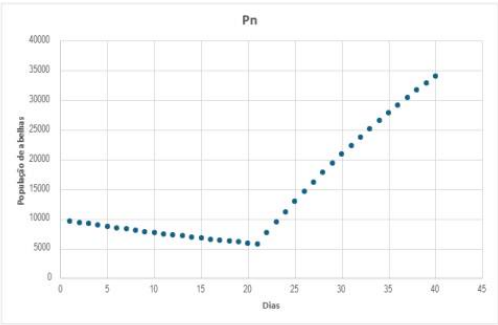
A partir de função P_n, podemos encontrar a função $P(t)$

$$(0{,}975)^{t-21} = e^{\ln 0{,}975^{t-21}} = e^{(t-21) \times \ln 0{,}975} = e^{-0{,}02532 \times (t-21)}$$
$$\Rightarrow P_{(t)} = -74.124 \times e^{-0{,}02532 \times (t-21)} + 80.000$$
$$\therefore P_{(t)} = -74.124 \times e^{-0{,}02532 \times (t-21)} + 80.000, t > 21$$

Função P_n no 1º e 2º estágio

$$P_n = \begin{cases} (0{,}975)^n \cdot P_0 & \text{para } 0 \leq n \leq 21, n \in \mathbb{N} \\ (A_0 - 80\,000)(0{,}975)^{n-21} + 80\,000 & \text{para } n > 21 \end{cases}$$

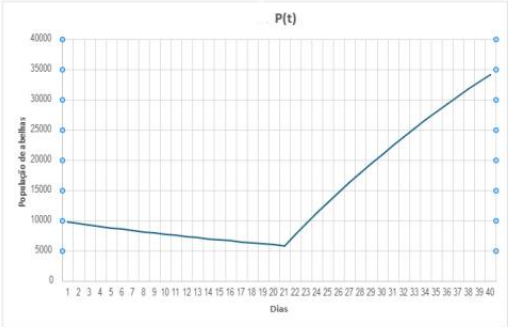
sendo que A_0 são as remanescentes do 21º dia.



Função $P(t)$ no 1º e 2º estágio

$$P(t) = \begin{cases} P(0) \cdot e^{-0{,}02532t} & \text{para } 0 \leq t \leq 21, t \in \mathbb{R} \\ (A_0 - 80\,000)e^{-0{,}02532(t-21)} + 80\,000 & \text{para } t > 21 \end{cases}$$

sendo que A_0 são as remanescentes do 21º dia.

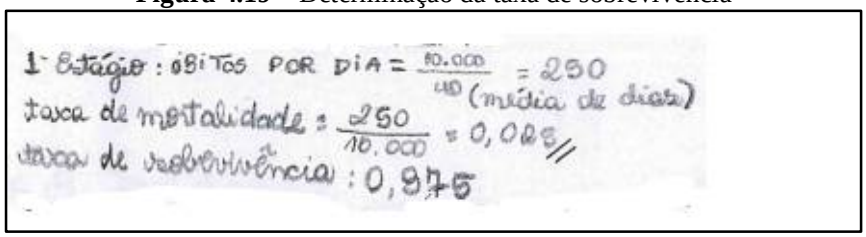


Fonte: Relatório do G6

Para iniciar a resolução a professora-pesquisadora apontou que, para a obtenção da função do primeiro estágio era necessário definir a taxa de sobrevivência das abelhas. Como no período de adaptação (primeiro estágio) não há nascimentos, sua duração é até o vigésimo primeiro dia, ou seja $0 \leq n \leq 21$. Pelas informações I_1 e I_4 há inicialmente 10 000 abelhas na

nova colmeia e a vida média das abelhas é de 40 dias. Desta forma os estudantes determinaram a taxa de sobrevivência conforme ilustrado na Figura 4.19.

Figura 4.19 – Determinação da taxa de sobrevivência



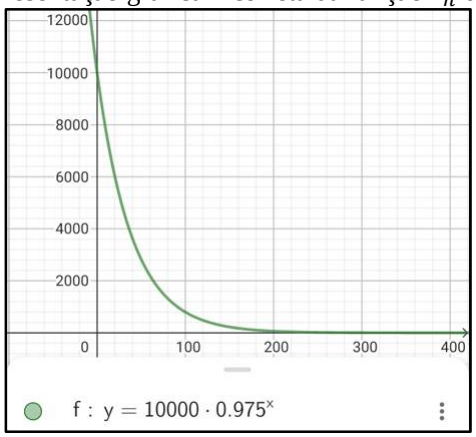
Fonte: Registro escrito do G6

Com a taxa de sobrevivência calculada, os estudantes perceberam que para a determinação do modelo seria necessário recorrer ao Método de Indução, e dessa forma, os grupos obtiveram uma expressão de recorrência (modelo discreto) que determina a quantidade de abelhas remanescentes na colmeia no *n-ésimo* dia:

$$P_n = (0{,}975)^n \cdot P_0 \quad \text{para } 0 \leq n \leq 21.$$

A professora-pesquisadora sugeriu que os grupos utilizassem algum *software* para fazer a representação gráfica da função. Alguns estudantes conheciam o *software* GeoGebra e outros sabiam fazer representações gráficas na planilha Excel. Assim os grupos utilizaram celulares e *notebooks* para trabalhar na representação gráfica, e os primeiros resultados foram a representação gráfica de P_n de forma incorreta, com um traço contínuo, como mostra a resolução do G6 ilustrada na Figura 4.20.

Figura 4.20 – Representação gráfica incorreta da função P_n do primeiro estágio



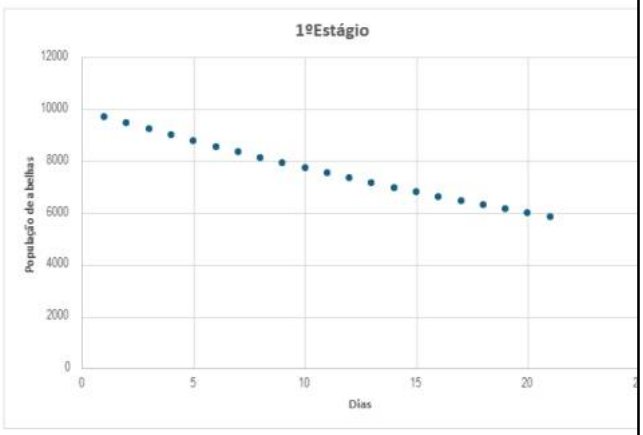
Fonte: Elaborado pelo G6

Como o domínio e o contradomínio da função é o conjunto dos números naturais, a função a ser obtida é um modelo discreto, e sua representação gráfica deve ser feita com pontos.

Ao utilizar o GeoGebra para fazer a representação gráfica, o comando selecionado mostra automaticamente um traço contínuo para representar a função. Desta forma o usuário deve fazer uso de procedimentos e comandos para plotar pontos no lugar do traço contínuo. O erro dos estudantes ao apresentar o gráfico da função P_n com um traço contínuo no lugar de pontos sinaliza uma misconcepção comum, que se manifesta quando se requer a construção de um gráfico cujo domínio é o conjunto dos naturais ou inteiros. Identificada essa misconcepção a professora-pesquisadora aproveitou a oportunidade para realizar uma intervenção para todos os grupos, visto que, o mesmo erro foi observado em mais de um grupo. A professora-pesquisadora explicou que, como o domínio e contradomínio é o conjunto dos números naturais, a representação gráfica da função deve ser feita com pontos e não com um traço contínuo, devido à natureza dos elementos do conjunto dos números naturais. Depois de orientar os estudantes em relação aos comandos do GeoGebra e do Excel para construir um gráfico com pontos, os grupos que haviam construído o gráfico com o traço contínuo retificaram seu procedimento, conforme é ilustrado na Figura 4.21 a nova representação gráfica construída por G6:

Figura 4.21 – Representação gráfica da função P_n do primeiro estágio

1ºEstágio	
Dias	População
1	9750
2	9506
3	9269
4	9037
5	8811
6	8591
7	8376
8	8167
9	7962
10	7763
11	7569
12	7380
13	7195
14	7016
15	6840
16	6669
17	6502
18	6340
19	6181
20	6027
21	5876



Fonte: Relatório do G6

Diante do episódio da misconcepção entre modelo discreto e contínuo, a professora-pesquisadora sugeriu para a turma a utilização da propriedade de mudança de base dos logaritmos para transformar a função potência do tipo $y = a^n$ para $n \in \mathbb{N}$, em uma função exponencial. A função P_n tem base $a = 0{,}975$ e, utilizando uma mudança de base, pode ser

dada na forma exponencial $y = e^t$ com $t \in \mathbb{R}$ (tempo contínuo). O número "e" chamado número de Euler, é utilizado como base de funções exponenciais para descrever situações as quais a variação é contínua. Desta forma, obtém-se um modelo contínuo.

Revisitando conceitos de logaritmos, utilizou-se a propriedade $b^{\log_b c} = c$ para fazer a mudança de base e obter a função exponencial para a variável t dada por:

$$P(t) = P(0) \cdot e^{-0{,}02532t} \text{ para } 0 \leq t \leq 21.$$

A quantidade de abelhas remanescentes ao final deste período, ou seja, ao final do vigésimo primeiro dia é dada por:

$$P(21) = 10\,000 \cdot e^{-0{,}02532 \cdot 21} = 5\,876,$$

portanto, ao final do vigésimo primeiro dia haverá na colmeia 5876 abelhas.

Com a familiarização dos processos necessários para a obtenção dos modelos no primeiro estágio, os grupos partiram para a obtenção dos modelos discreto e contínuo do segundo estágio, obtendo as funções $P_n = (A_0 - 80\,000)(0{,}975)^{n-21} + 80\,000$ para $n > 21$ e $P(t) = (A_0 - 80\,000)e^{-0{,}02532(t-21)} + 80\,000$ para $t > 21$.

Desta forma foram obtidos os modelos discreto e contínuo para resolver o problema:

$$P_n = \begin{cases} (0{,}975)^n \cdot P_0 & \text{para } 0 \leq n \leq 21, n \in \mathbb{N} \\ (A_0 - 80\,000)(0{,}975)^{n-21} + 80\,000 & \text{para } n > 21 \end{cases}$$

$$P(t) = \begin{cases} P(0) \cdot e^{-0{,}02532t} & \text{para } 0 \leq t \leq 21, t \in \mathbb{R} \\ (A_0 - 80\,000)e^{-0{,}02532(t-21)} + 80\,000 & \text{para } t > 21 \end{cases}$$

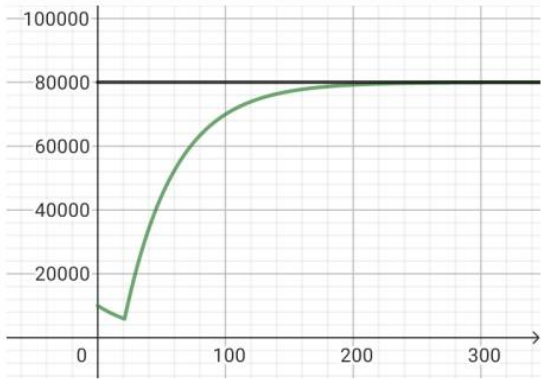
Para resolver o problema – *como se dá o crescimento de uma colmeia* – observa-se no gráfico das funções que, com o passar do tempo, a população de abelhas tende a estabilizar em um valor próximo a 80000 abelhas, o que remete ao conceito de limite. Ao questionar a turma sobre como poderia ser obtido este valor, alguns responderam que seria o limite. Desta forma os grupos trabalharam na obtenção do limite e constataram que a solução do limite correspondia ao que havia sido observado no gráfico, conforme ilustra a Quadro 4.5.

Quadro 4.5 – Interpretação dos resultados do G6

- Seja o limite a seguir:

$$\lim_{t\to\infty}\left(-74.124 \times e^{-0,02532(t-21)} + 80.000\right) = +80.00$$

E seu gráfico:



Assim, obtemos uma função por partes em que, ao calcular o limite para algum *x* suficientemente grande, foi constatado que a colmeia atinge superpopulação no valor de 80.000 abelhas.

É fácil observar que a colmeia não cresce infinitamente, mas ela suporta até 80.000 abelhas. Em outras palavras, ela para de crescer nesse valor limite (tornando-se uma colônia madura). Devido a superpopulação, se dividem para povoar novos ambientes e o ciclo começa novamente.

Fonte: Relatório do G6

No modelo obtido quando o tempo aumenta a população de abelhas estabiliza em aproximadamente 80000 indivíduos. Para fazer a validação do problema recorreu-se às informações da Associação Brasileira de Estudos das Abelhas (A.B.E.L.H.A) uma colônia pode chegar a 80 mil abelhas, conforme ilustra a Figura 4.22.

Figura 4.22 – População de abelhas em uma colônia

Colônia

20 de março de 2015

É o nome dado para o conjunto de indivíduos que vive em uma sociedade organizada. Nas colônias de abelhas, as fêmeas se dividem em duas castas (rainha e operária), com funções bem definidas que são executadas visando a manutenção e sobrevivência da colônia. Numa colônia de abelha melífera, existe uma rainha, cerca de 2 mil a 80 mil operárias e de 0 a 400 machos, dependendo da estação do ano.

Fonte: Associação Brasileira de Estudos das Abelhas (A.B.E.L.H.A)

Como o modelo obtido para $t \in \mathbb{R}$ é uma função por partes, a professora-pesquisadora viu a oportunidade de explorar o conceito de continuidade neste tipo de função, pensando na relação com o episódio do modelo discreto e contínuo. Desta forma a professora-pesquisadora questionou a turma sobre a continuidade do modelo obtido.

Os estudantes não souberam responder a respeito da continuidade da função p, ou por estarem em dúvida ou por não se lembrarem. Então a professora retomou o conceito de continuidade explicando que para uma função f ser contínua em um valor $x = a$ ela deve cumprir três condições: $f(a)$ deve estar definida, o limite de $f(x)$ quando x tende a a existe, o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a $f(a)$ (Stewart, 2006). Encerrado o tempo

determinado para o desenvolvimento da atividade durante as aulas, a professora-pesquisadora solicitou aos estudantes que cada grupo elaborasse um registro escrito da atividade. Como a atividade foi construída em conjunto com a professora-pesquisadora, que ora orientava a turma, ora orientava dúvidas específicas de cada grupo, não foi solicitado aos grupos uma apresentação de seus resultados.

Os estudantes do G3 por sua vez, trabalharam na resolução do problema com maior fluidez, e uma síntese de sua resolução é apresentada no Quadro 4.6.

Quadro 4.6 – Síntese da resolução de G3

Construção do Modelo Matemático pelo G3

➢ **Função p_n no 1º estágio** e sua representação gráfica.

Sendo p a população de abelhas e n a quantidade de dias, temos:

$$Po = 10000$$
$$P1 = 10000 * (0,975) = 9750$$
$$P2 = 10000 * (0,975) * (0,975)$$

Portanto,

$$pn = 10000 * (0,975)^n$$

➢ **Função $p_{(t)}$ no 1º estágio** e sua representação gráfica.

Para modelar a população $p(t)$ durante os primeiros 21 dias, usamos um modelo exponencial que considera apenas a mortalidade, pois os ovos ainda não se transformaram em abelhas:

$$dp(t)/dt = -\ d.p(t)$$

A solução desta equação diferencial é:

$$p(t) = po.e^{-dt}$$

Substituindo os valores fornecidos:

$$p(t) = 10000.e^{-0,02532t}$$

Para ilustrar a população em alguns dias específicos durante o primeiro estágio:

Dia 0: $p(0)$=10000

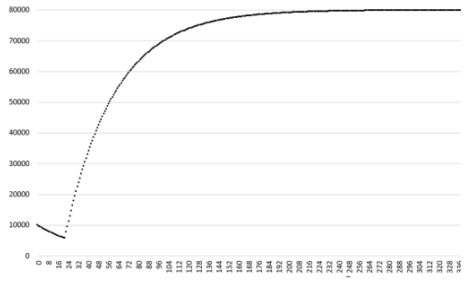
Dia 10: $p(10)$=10000 $\cdot e^{-0,2532}$≈7.763

Dia 21: $p(21) = 10000.e^{-0.53172}$≈5.876

Graficamente, considerando que o 1º estágio dura 21 dias, temos:

$$p(t) = 10000.e^{-0,02532t}$$

$$pn = \begin{cases} (0,975)^n.10000 & ,0 \le n \le 21 \\ (5876 - 80000).(0,975)^{n-21} + 80000 & ,n \ge 21 \end{cases}$$



➢ **Função p_n no 2º estágio** e sua representação gráfica.

O segundo estágio começa no 21º dia, quando as primeiras abelhas nascem e a população começa a crescer mais rapidamente. Durante este estágio, devemos considerar tanto os nascimentos quanto as mortes na população.

$$p21 \rightarrow Po = Ao = 5876$$
$$p22 \rightarrow P1 = (0,975).Po + 2000 = (0,975)Ao + 2000$$
$$p23 \rightarrow P2 = (0,975).P1 + 2000 = (0,975)[(0,975)Ao + 2000]+2000$$
$$= (0,975)^2Ao + 2000(0,975) + 2000$$
$$Pr = (0,975).P_{r-1} + 2000$$

$$Pr = (0,975)^r Ao + 2000(0,975)^{r-1} + 2000(0,975)^{r-2} + ... + 2000(0,975 + 2000)$$

Substituindo P_r por P_{n-21}, temos:

$$pn = (0,975)^{n-21}Ao + 80000 - 80000(0,975)^{n-22}$$

Substituindo Ao:

$$pn = (0,975)^{n-21}5876 + 80000 - 80000(0,975)^{n-22}$$
$$pn = (5876 - 80000).(0,975)^{n-21} + 80000$$

➢ **Função $p_{(t)}$ no 2º estágio** e sua representação gráfica.

Para modelar a população $p(t)$ após os primeiros 21 dias, usamos um modelo exponencial :

$$dp(t)/dt = -\ d.p(t)$$

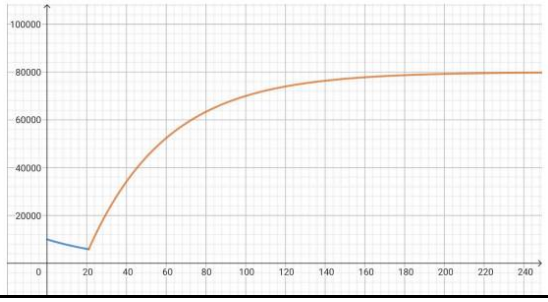
A solução desta equação diferencial é:

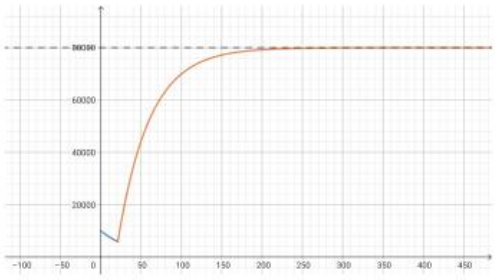
$$p(t) = po.e^{-dt}$$

ou para o nosso problema:

$$(0,975)^t = e^{ln(0,975)^t} = e^{t.ln(0,975)} = e^{-0,02532t}$$

$$P(t) = \begin{cases} 10000.e^{-0,02532t} & ,0 \le t \le 21 \\ (5876 - 80000).e^{-0,02532t} + 80000 & ,t \ge 21 \end{cases}$$



O número de abelhas não cresce infinitamente, conforme os dias vão passando, a população da colmeia vai se aproximando cada vez mais de 80000, mas nunca passa disso. Podemos mostrar isso, Calculando o limite da função $P(t)$ com t tendendo ao infinito, temos: $\lim_{x \to \infty} P(t) = \lim_{x \to \infty} (5876 - 80000).e^{-0,02532t} + 80000$ $\lim_{x \to \infty} P(t) = 80000$ Isto é, temos uma assíntota horizontal em y = 80 000, comprovando a nossa resposta ao problema.	

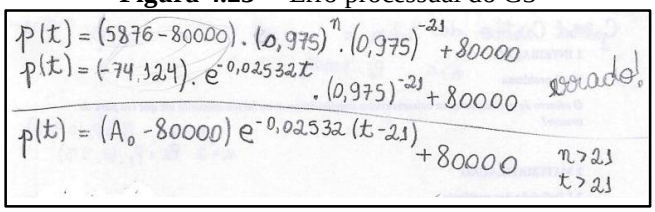
Fonte: Relatório do G3

Os estudantes do G3 determinaram o modelo $P(t)$ que descreve a situação-problema proposta e obtiveram a assíntota da função que responde ao problema.

No desenvolvimento da atvidade de modelagem, a dificuldade observada pela professora-pesquisadora estava em os estudantes decidirem qual conceito seria necessário a cada passo da resolução, o que já era esperado pois, foi a primeira atividade de modelagem desenvolvida pelos estudantes.

Durante a resolução este grupo teve pouca dificuldade em trabalhar com os conceitos e processos requeridos para a obtenção dos modelos. Alguns erros processuais foram identificados pelos próprios estudantes como mostra a Figura 4.23.

Figura 4.23 – Erro processual do G3



Fonte: Registro escrito do G3.

No entanto, havia uma descrença de que os procedimentos que estavam realizando de fato estavam *corretos* e conduziriam à solução do problema. Destacamos esse diálogo de alguns estudantes do G3 durante a obtenção do modelo do 1º estágio, sobre a sua incerteza ao realizar o processo recursivo para obter o modelo exponencial que descreve a situação-problema:

> E11: Porque quando chegar em 40 dias não teria que morrer toda a população? Mas não faz sentido eu trabalhar com essa função, em 40 dias não tem que morrer todas as abelhas? Com essa ideia nunca vão morrer todas as abelhas sempre vai sobrar alguma! Isso não é absurdo?
> E14: A gente tem que aceitar esse absurdo para poder desenvolver?
> E13: Eu não entendi o que ela (a professora) quer que a gente faça com essa fórmula... Por que não faz sentido gente?
> [⋮] (mesmo em dúvida o grupo continua o processo recursivo)

> E13: Chegou! O *E11*, chegou! (quando o estudante E11 finalizou o processo recursivo e obteve o modelo do 1º estágio)
> E14: Eu cheguei também. (Transcrição do diálogo dos estudantes do G3)

Apesar dos estudantes executarem corretamente a maior parte dos procedimentos, inicialmente houve dificuldade para visualizar o padrão matemático por trás do fenômeno. Até obter o modelo e construir sua representação gráfica, havia um sentimento de incerteza em relação aos procedimentos que eles estavam utilizando, e isso perdurou ao longo da atividade. Ao solicitar a elaboração de um relatório com o desenvolvimento da atividade de modelagem, a professora-pesquisadora propôs aos estudantes que respondessem duas perguntas no relatório: Qual foi a experiência do grupo ao fazer uma atividade de modelagem matemática? Qual o papel da matemática no estudo dessa situação? As respostas apresentadas pelo G3 estão transcritas no Quadro 4.7.

Quadro 4.7 – Respostas do G3 sobre sua experiência com a atividade de modelagem e sobre o papel da matemática no estudo da situação-problema

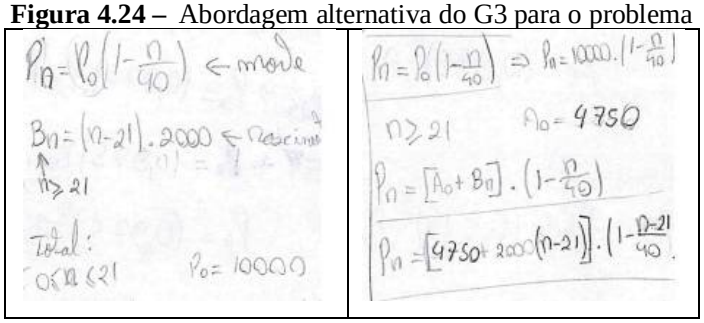
Qual foi a experiência do grupo ao fazer uma atividade de modelagem matemática?
Inicialmente não pudemos observar com clareza o caminho ao qual deveríamos seguir para desenvolver o problema proposto, como fomos introduzidos a esse modelo com essa atividade creio que não compreendermos o objetivo em primeiro plano era comum, e por conta disso a docente teve um papel importante em conduzir o contexto e dar indícios de qual meio poderíamos tomar para chegar a uma conclusão válida. Acreditamos que para realizar uma atividade desse modelo é importante que os alunos tenham conhecimento sobre conteúdos previamente compreendidos, a depender da questão, conteúdo e turma isso pode mudar. Dentre os diversos pontos positivos que podemos citar o que mais chama atenção é a criação da relação entre a realidade e o mundo matemático, o aluno aprende a aprender e pode despertar em si um espírito pesquisador através de situações-problema, pois a modelagem matemática está diretamente ligada com fatos do cotidiano e necessidades sociais, o que também traz uma resposta a uma pergunta muito comumente observada quando abordamos um novo conteúdo em sala de aula: “para que usarei isso?”. Um dos pontos negativos importante a ser citado, é que apesar de se esperar que a turma possuísse o conhecimento necessário para aquele modelo, não fazíamos ideia de como aplicá-lo, isso pode ter ocorrido por diversos motivos, mas um deles pode ser o de que normalmente seguimos um padrão de uma aprendizagem nunca suficientemente pesquisadora e investigadora, mas, com o avançar do curso temos observado diversos modos de se trabalhar algum conhecimento específico.
Qual o papel da matemática no estudo dessa situação?
Sem a matemática o problema seria visto como uma situação sem solução, como apresentado anteriormente é necessário saber aplicar conteúdos como: progressões geométricas, funções (definir variáveis, construir gráficos), funções logarítmicas, funções exponenciais, limites e assíntotas horizontais e afins para solucionar a situação.

Fonte: Relatório do G3

Por um lado, o grupo relata suas incertezas e dificuldades durante o desenvolvimento da atividade de modelagem, revelando suas concepções a respeito da utilização de conceitos matemáticos e sobre a própria matemática. Por outro lado, o grupo mostra um novo olhar sobre o fazer matemática e a matemática em si. Durante o desenvolvimento da atividade, os estudantes do G3 mostraram interesse em buscar alternativas para a resolução do problema,

como ilustra a Figura 4.24. A professora-pesquisadora orientou que eles poderiam ir além da abordagem que foi proposta para a turma, e investigar outras abordagens para o problema pois, nas discussões com esse grupo a professora-pesquisadora percebeu que os estudantes não estavam satisfeitos com a abordagem proposta.

Figura 4.24 – Abordagem alternativa do G3 para o problema



Fonte: Registro escrito do G3

Desse modo, o grupo investigou outras abordagens matemáticas para o problema, e as trouxe em seu relatório, como mostra o Quadro 4.8.

Quadro 4.8 – Abordagens alternativas do G3 para a resolução do problema

Ideia de modelo alternativo 1

- **Taxa de mortalidade:** $\frac{n}{40}$
- **Taxa de sobrevivência:** $(1 - \frac{n}{40})$
- **Nascimento:** $Bn = (n - 21).2000 \quad [n \geq 21]$

◆ **1° estágio:** $0 \leq n \leq 21$

$Pn = Po(1 - \frac{n}{40})$

$Po = 10000$

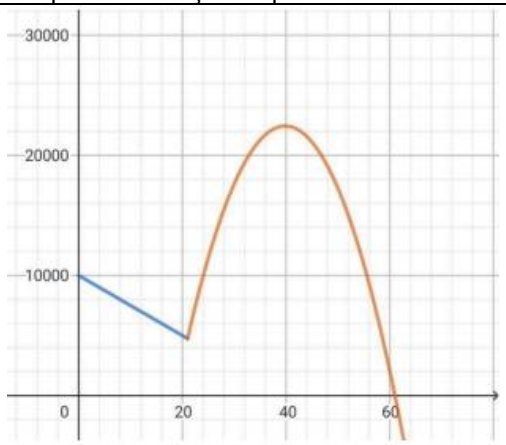
$Pn = Po(1 - \frac{n}{40}) \Rightarrow Pn = 10000.(1 - \frac{n}{40})$

◆ **2° estágio:** $n \geq 21$

$Ao = P(21) = 4750$

$Pn = [Ao + Bn].(1 - \frac{n}{40})$

$Pn = [4750 + 2000(n - 21)].(1 - \frac{n-21}{40})$



Ideia de modelo alternativo 2

- **Taxa de mortalidade:** $(0,025)^n$
- **Taxa de sobrevivência:** $(0,975)^n$
- **Nascimento:** $Bn = (n - 21).2000 \quad [n \geq 21]$

◆ **1° estágio:** $0 \leq n \leq 21$

$Po = 10000$

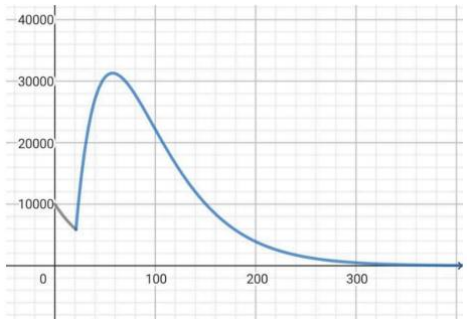
$Pn = Po(0,975)^n \Rightarrow Pn = 10000.(0,975)^n$

◆ **2° estágio:** $n \geq 21$

$Ao = P(21) = 5876$

$Pn = [Ao + Bn].(0,975)^n$

$Pn = [5876 + 2000(n - 21)].(0,975)^n$



Ideia de modelo alternativo 3 (Completamente Linear)

1°estágio: Adaptação (só morrem)
2°estágio: Nascimento (Nascem novas e morrem velhas)
3°estágio: Só nascem novas
4°estágio: Nascem e morrem na mesma proporção

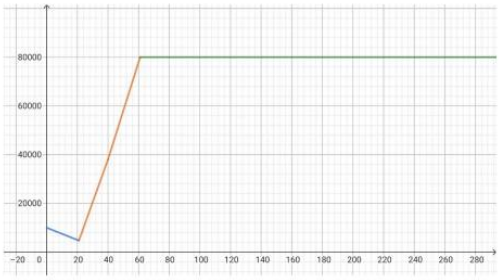
- **Taxa de mortalidade:** $250.n$ $[n \leq 40]$
- **Taxa de mortalidade:** $0.n$ $[40 \leq n \leq 61]$
- **Taxa de mortalidade:** $2000.(n-61)$ $[n \leq 61]$
- **Nascimento:** $Bn = (n-21).2000$ $[n \geq 21]$

◆ **1° estágio:** $0 \leq n \leq 21$
$Po = 10000$
$Pn = Po - 250n$ $[n \leq 21]$
$Pn = Po - 250.n \Rightarrow Pn = 10000 - 250.n$

◆ **2° estágio:** $21 \leq n \leq 40$
$Ao = P(21) = 4750$
$Pn = [Ao + Bn] - 250.(n-21)$
$Pn = [4750 + 2000(n-21)] - 250.(n-21)$

◆ **3° estágio:** $40 \leq n \leq 61$
$Co = P(40) = 38000$
$Pn = [Co + Bn] - 0.(n-40)$
$Pn = [38000 + 2000(n-40)]$

◆ **4° estágio:** $61 \leq n$
$Do = P(61) = 8000$
$Pn = [Do + Bn] - 2000.(n-61)$
$Pn = [80000 + 2000(n-61)] - 2000.(n-61)$
$Pn = 80000$



Fonte: Relatório do G3

O tempo destinado para o desenvolvimento da atividade não permitiu que a professora-pesquisadora pudesse discutir as abordagens alternativas realizadas por esse grupo com a turma. Os estudantes do G3, em conversa com a professora-pesquisadora posterior ao término da atividade, reconheceram que não há uma única abordagem para resolver um problema, porém nem todas as abordagens conduzirão a uma resposta satisfatória, como é o caso das abordagens 1 e 2 realizadas pelo grupo.

4.2 Contexto 2: Disciplina de Transportes na Engenharia Civil

Neste contexto, a pesquisadora era a professora ministrante do minicurso intitulado *Modelagem Matemática* no momento da coleta dos dados, será referida no texto como professora-pesquisadora (Bortoni-Ricardo, 2008; Campos; Araújo, 2017). As atividades de modelagem descritas foram desenvolvidas neste minicurso ofertado aos estudantes do nono ano do curso de Engenharia Civil. Para a estruturação das atividades de modelagem desenvolvidas no minicurso, a professora-pesquisadora utilizou os ciclos epistemológico e instrucional (Figuras 1.1 e 1.2) para o planejamento – com foco em temas relacionados à prática da engenharia – e para a condução das atividades de modelagem. Nesse contexto o ciclo instrucional foi apresentado e entregue aos estudantes para orientar suas ações no decorrer do desenvolvimento da atividade. Semelhante ao contexto 1, o ciclo cognitivo (Figura 1.3) foi utilizado pela professora-pesquisadora para captar e interpretar as ações cognitivas dos estudantes na manifestação das misconcepções no decorrer do desenvolvimento da atividade de modelagem.

A professora-pesquisadora iniciou o minicurso com uma conversa com os participantes para averiguar suas expectativas em relação ao minicurso e, constatou que, os estudantes não tinham familiaridade com atividades de modelagem matemática, nenhum deles havia desenvolvido alguma atividade dessa natureza. Em seguida, foi feita uma breve explanação da dinâmica da modelagem matemática e do ciclo instrucional. Ao final da apresentação, foi entregue aos estudantes uma cópia impressa do ciclo instrucional com a finalidade de orientar suas ações no desenvolvimento da atividade de modelagem. Na sequência, foram apresentados dois exemplos de atividades de modelagem para que os estudantes acompanhassem as fases do ciclo instrucional e como eles poderiam utilizar e recorrer ao ciclo durante o desenvolvimento de cada atividade de modelagem.

Após as apresentações deu-se início ao desenvolvimento da primeira atividade de modelagem "Conectando a Cidade: *wi-fi* livre no centro da cidade". Os estudantes formaram os grupos eles mesmos e, esta primeira atividade foi conduzida pela professora-pesquisadora no intuito de familiarizar os estudantes com a dinâmica da modelagem matemática. Desse modo, não foram observadas misconcepções dos estudantes, portanto esta atividade não será descrita. Desta forma, na segunda e terceira atividades de modelagem os estudantes já estavam familiarizados com o ciclo instrucional. Nas seções seguintes apresentamos a descrição dos procedimentos adotados pelo G4T1 para o desenvolvimento da atividade "Ajustando medidas em um equipamento de musculação", e a descrição dos procedimentos adotados pelos grupos G2T2 e G3T1, para o desenvolvimento da atividade "Manutenção de pavimentos asfálticos" que, utilizaram abordagens diferentes em seu desenvolvimento.

4.2.1 Descrição da atividade *Ajustando medidas em um equipamento de musculação*

A atividade *Ajustando medidas em um equipamento de musculação* foi desenvolvida pelos estudantes de engenharia civil no minicurso *Modelagem Matemática*. A duração da atividade foi de 3 encontros (quatro horas-aula), 2 encontros destinados ao desenvolvimento da atividade de modelagem e um encontro para os grupos compartilharem suas resoluções e resultados. Para iniciar a inteiração foi distribuído aos grupos um texto informativo com a temática da atividade (Quadro 4.9), no qual constam as informações sobre as medidas de um equipamento de musculação que necessita de ajustes no ângulo de posicionamento do encosto do banco, para estar adequado ao treinamento de atletas de alta performance. Considerando

esta necessidade, o problema a ser investigado proposto no texto é: *qual é o posicionamento do banco para atender a formação desses ângulos.*

Quadro 4.9 – Texto informativo da atividade *Ajustando medidas em um equipamento de musculação*

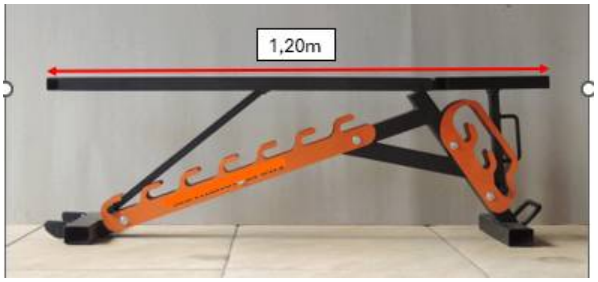
AJUSTANDO MEDIDAS EM UM EQUIPAMENTO DE MUSCULAÇÃO

Dentre os diversos equipamentos para academia produzidos por uma pequena empresa na cidade de Londrina - PR está o chamado **banco de regulagem**.

Esse banco permite a execução de diferentes exercícios, seja com utilização de barras, halteres, anilhas ou até mesmo abdominais.

A inclinação do encosto e do assento podem ser ajustadas para que, dependendo do tipo de exercício a ser praticado pelo usuário, o banco será posicionado com uma angulação específica entre o encosto e o assento que é obtida pelo posicionamento do extremo livre da haste do encosto. Atletas de alta performance necessitam de que o ângulo formado entre o assento e o encosto do banco seja preciso para atender de forma uniforme o trabalho com todos os músculos envolvidos no treinamento. É desejável que esses ângulos sejam de: 90º, 112,5º, 120º, 135º, 157,5º, 180º, 202,5º.

Esta necessidade nos leva a investigar qual é o posicionamento do banco para atender a formação desses ângulos.



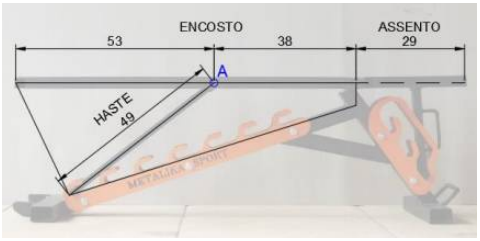
Fonte: Autora, 2024

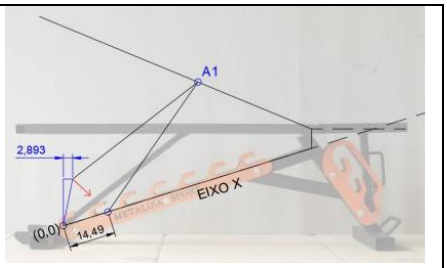
Os dados apresentados na descrição foram extraídos do relatório dos estudantes do G4T1 e uma síntese da resolução para essa atividade pode ser vista no Quadro 4.10.

Quadro 4.10 – Síntese da resolução do grupo G4T1 na atividade ajustando medidas em um equipamento de musculação

IDENTIFIQUE E ESPECIFIQUE O PROBLEMA A SER RESOLVIDO	*Qual é o posicionamento do banco para atender a formação de ângulos específicos.*
DEFINA HIPÓTESES E VARIÁVEIS ESSENCIAIS *H1*: O assento do banco de musculação se encontra fixo, não podendo sofrer nenhuma alteração em sua altura ou tamanho; *H2*: O equipamento é analisado em perspectiva ortogonal, em relação ao plano do piso. Desta forma, não é possível visualização em três dimensões do objeto de estudo.	**RESOLUÇÃO**

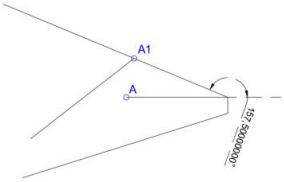
MATEMATIZE A SITUAÇÃO, OBTENHA UMA SOLUÇÃO

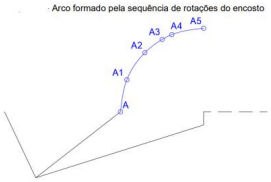


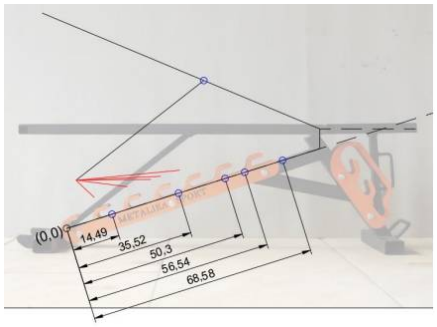


Primeiramente, o comando **ROTATE** e o comando **DIM** foram utilizados, a fim de garantir que o encosto fosse rotacionado em 22,5º (180º - 157,5º = 22,5º), chegando ao ângulo de 157,5º entre o assento e o encosto.

IMPLEMENTE O MODELO E FAÇA O RELATÓRIO DOS RESULTADOS



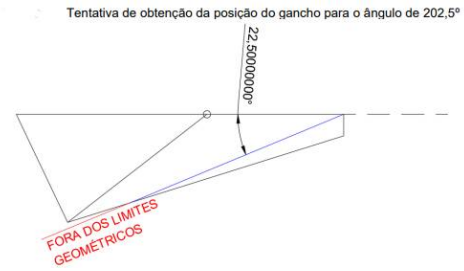




ANALISE E AVALIE O MODELO E AS SOLUÇÕES

Pode-se notar que para o ângulo de 202,5º o valor não foi inserido.

ÂNGULO (°)	DISTÂNCIA DA ORIGEM (CM)
180	0
157,5	14,44
135	35,52
120	50,30
112,5	56,54
90	68,58
202.5	-



Isto se deve ao fato de que o ângulo excede os limites geométricos dos elementos. Para que esse ângulo possa ser utilizado corretamente na máquina, seria necessário movimentar a barra de fixação, alterando a angulação dela, para poder chegar ao ângulo esperado, porém, caso a alteração seja executada, será necessário que o fabricante refaça todos os cálculos, tendo em vista que o ângulo já não será mais o mesmo

Fonte: Relatório do G4T1

Levando em consideração as informações fornecidas, a professora-pesquisadora orientou os estudantes a utilizarem o ciclo instrucional para desenvolver a atividade de modelagem, sugerindo aos estudantes que identificassem o problema a ser resolvido. Identificado problema, houve um momento de socialização nos grupos, os quais começaram a discutir quais seriam as estratégias de resolução, iniciando dessa forma a matematização do problema. De maneira geral cada grupo foi selecionando suas hipóteses e variáveis, sendo que, alguns grupos solicitavam a orientação da pesquisadora. O G4T1 definiu as seguintes hipóteses:

H1: O assento do banco de musculação se encontra fixo, não podendo sofrer nenhuma alteração em sua altura ou tamanho;

H2: O equipamento é analisado em perspectiva ortogonal, em relação ao plano do piso. Desta forma, não é possível visualização em três dimensões do objeto de estudo.

Diante da necessidade de investigar o posicionamento do banco reclinável para atender a formação de ângulos específicos, na matematização o G4T1 realizou o upload da imagem do banco no *software* AutoCad, que possui ferramentas para realizar procedimentos geométricos para a determinação dos ângulos. Como os estudantes de engenharia civil estão mais familiarizados com o *software* AutoCad, este se tornou a principal ferramenta de trabalho na resolução do problema.

Para obtenção da solução, inicialmente foi necessário ajustar uma escala para a imagem do banco reclinável dentro da interface do AutoCad. Com isso, foi possível obter a distância de 38 centímetros entre o eixo do banco e a haste do equipamento. Realizando a medição do tamanho da haste, obteve-se uma distância de 49 centímetros. Para determinar qual deve ser a distância na peça de encaixe de maneira que, ao posicionar a haste livre do encosto na base de encaixe, o ângulo de abertura formado entre o encosto e o encaixe seja o ângulo desejado, é necessário determinar o ponto de intersecção entre a circunferência de raio 49 centímetros e centro no eixo que une a haste e o encosto do banco, e a semirreta situada na base do encaixe, para a obtenção da distância adequada para o encaixe.

Inicialmente os estudantes fizeram tentativas, tangenciando a circunferência sobre a semirreta sobre a base dos encaixes. Este procedimento é impreciso, visto que o comando do AutoCad não fornecia o ponto de intersecção. Então os estudantes analisavam o resultado e retomavam o procedimento obtendo o ponto visualmente, mas não as coordenadas do ponto em relação à semirreta da base.

Percebendo o equívoco dos estudantes, a professora-pesquisadora os questionou a fim de verificar seus procedimentos para obter os resultados, como mostra o diálogo com o grupo:

> Prof: Como vocês estão trabalhando?
> E13: Colocando esse ângulo (ângulo de 157,5°), ficaria nesse ponto (o lugar do encaixe) então ele viria desse ponto aqui até esse outro ponto aqui, num primeiro movimento (rotação da haste). Daí, o que eu fiz, eu passei todos os movimentos (da haste livre) aqui dessa parte fixa pra cá, daí eu ajustei todos os ângulos que foram dados para ajustar os movimentos (da haste livre). Eu movi para cima e rotacionei para ver onde bate, mas isso não daria um cálculo matemático, a gente não está achando o valor (posição da haste no encaixe), mas aí seria por tentativa, desenhando...

> Prof: Sim, mas existe uma justificativa geométrica para obter esse resultado, por que você chega nesse resultado fazendo esse procedimento?
> E13: Nós temos um ponto fixo e uma barra que pode bascular, à medida que o encosto vai subindo a haste vai se ajustando nos encaixes, então ela se ajusta conforme sobe e desce.
> E14: A gente tá fechando um triângulo nesse desenho, uma forma geométrica.
> Prof: Sim, você poderia encontrar o resultado utilizando a trigonometria também. Mas vocês estão utilizando o desenho geométrico, então quais são os elementos que vocês estão utilizando para chegar no resultado desejado?
> E13: Esse ajuste não bate com essa linha aqui, meio que saiu por tentativa e erro
> E15: Mas dá para tentar melhorar...
> Prof: Então você está fazendo por tentativa e erro para chegar no resultado?
> E13: Isso.
> Prof : Você está fazendo por tentativa e erro por que não sabe qual é o elemento que deve ser utilizado para obter o resultado, mas você sabe que está faltando algo para justificar o seu procedimento, certo?
> E13: Exato.
> Prof: Existe esse elemento geométrico, e ele é preciso. Pensem nos elementos que vocês estão utilizando: ponto reta, circunferência. (Transcrição do diálogo com o G4T1)

No diálogo com os estudantes a professora-pesquisadora constatou que os estudantes não estavam relacionando seus procedimentos com a intersecção entre circunferência e semirreta. O grupo conseguia determinar o lugar geométrico do ponto, mas não seu comprimento na base. A professora-pesquisadora aguardou enquanto os estudantes discutiam sobre como determinar o valor pretendido:

> E13: Eu pensei nessa relação do arco com o ponto, eu consigo rebater esse ponto aqui, eu acho...
> E14: Não sei como...
> E13: Eu não sei o que isso pode significar...
> E14: O comprimento?
> E13: Olha aqui, essa é a relação que a gente tem que fazer, o arco, ele bate aqui, tá vendo? Essa distância é maior, com certeza vai ser maior...
> E14: É o comprimento do arco? Você pode medir ele, tem um comando
> [⋮]
> E16: Gente, nós temos dois lados do triângulo definido, é só definir esse lado de baixo
> E13: Eu estava pensando nisso também
> E14: Mas não é um triângulo
> E14: Ah é um quadrilátero, não dá. E se usar a projeção horizontal?
> E13: Não sei, acho que não dá. (Transcrição do diálogo com o G4T1)

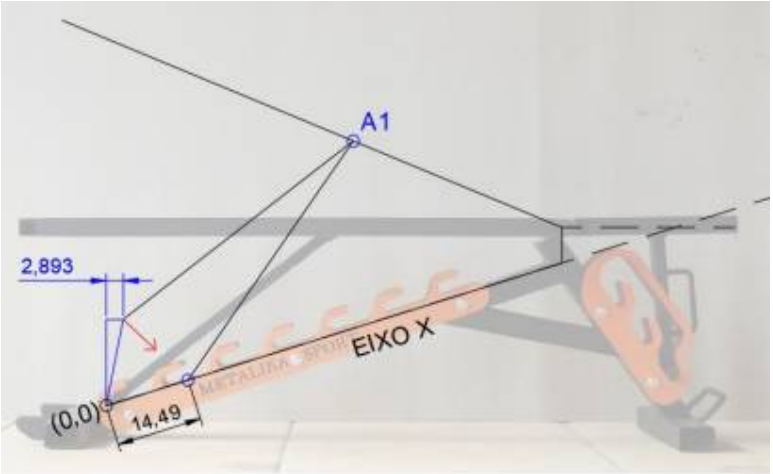
Vendo a dificuldade dos estudantes, a professora-pesquisadora orientou-os a buscar os conceitos necessários para a resolução pesquisando na internet.

> E14: Eu não sei fazer
> E13: É eu também não. Eu não sei uma forma de interceptar ele em um ponto preciso aqui no AutoCad. Deve ter um jeito, mas eu não sei. É, eu acho que não tem... da forma como a gente está pensando não tem
> E14: Exato
> E13: Se tivesse como fazer a rotação seria mais fácil. Professora dá uma dica para gente! A gente sabe que é uma relação do arco com onde ele bate aqui, mas a gente esqueceu como é que faz...

> Prof: Então, essa solução é o encontro de dois elementos geométricos. Esse encontro é a intersecção, um ponto de intersecção. A intersecção do quê está produzindo esse ponto?
> Prof: Essa haste fica livre, eu posso imaginar o lugar geométrico de todos os pontos da haste quando você move ela. O AutoCad possui os comandos para vocês construírem essa intersecção. (Transcrição do diálogo com o G4T1)

Após as orientações da professora-pesquisadora o grupo ainda fez mais algumas tentativas e por fim, concluiu que o ponto desejado é o ponto de intersecção entre a circunferência e a semirreta, refinando o modelo inicial do círculo que tangencia a semirreta para o modelo do círculo que intersecciona a semirreta. O modelo obtido foi implementado para os ângulos desejados a fim de obter as posições dos encaixes correspondentes a cada ângulo. A Figura 4.25 apresenta a posição do encaixe correspondente ao ângulo de 157,5°.

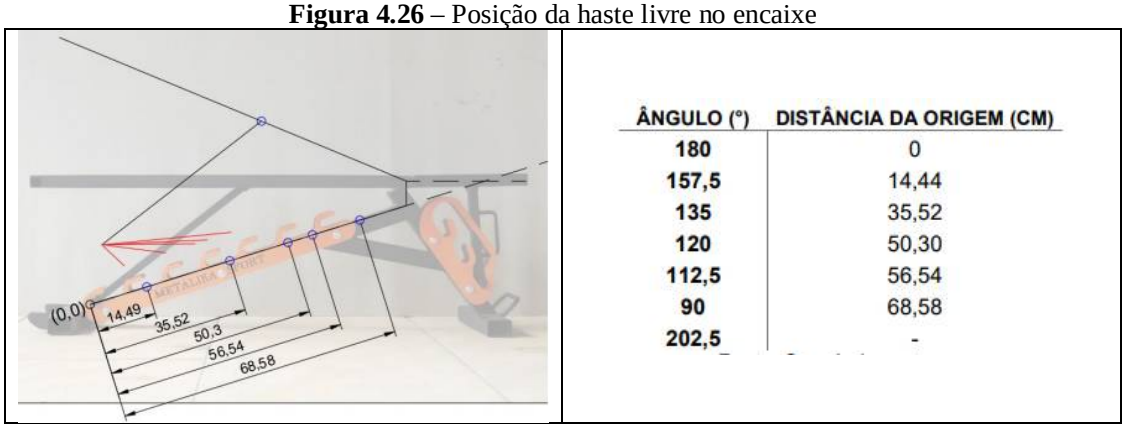
Figura 4.25 – Determinação da distância do encaixe para o ângulo de 157,5°



Fonte: Relatório do G4T1

Com o modelo obtido, o grupo implementou o procedimento para os outros ângulos solicitados, e obteve as distâncias estabelecidas para cada ângulo conforme mostra a Figura 4.26:

Figura 4.26 – Posição da haste livre no encaixe



ÂNGULO (°)	DISTÂNCIA DA ORIGEM (CM)
180	0
157,5	14,44
135	35,52
120	50,30
112,5	56,54
90	68,58
202,5	-

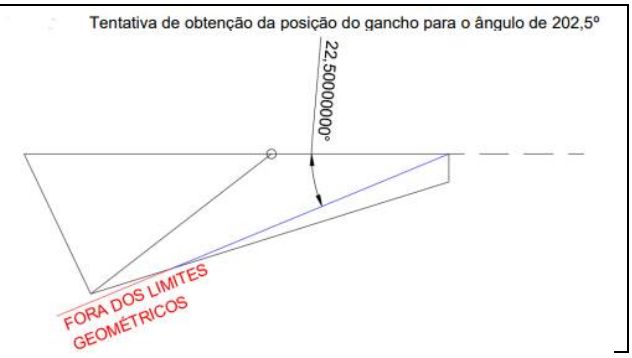
Fonte: Relatório do G4T1

Após a implementação do modelo, O G4T1 concluiu que para o ângulo de 202,5° a estrutura do banco reclinável é inadequada, como mostra o trecho da análise da resposta em relação ao problema na Figura 4.27. O grupo também sugeriu mudanças no equipamento, como parte da avaliação das soluções do modelo.

Figura 4.27 – Conclusão do G4T1

Pode-se notar que para o ângulo de 202,5º o valor não foi inserido. Isto se deve ao fato de que o ângulo excede os limites geométricos dos elementos.

Para que esse ângulo possa ser utilizado corretamente na máquina, seria necessário movimentar a barra de fixação, alterando a angulação dela, para poder chegar ao ângulo esperado, porém, caso a alteração seja executada, será necessário que o fabricante refaça todos os cálculos, tendo em vista que o ângulo já não será mais o mesmo.



Fonte: Relatório do G4T1

4.2.2 Descrição da atividade *Manutenção de vias asfálticas*

A atividade *Manutenção de vias asfálticas* foi a terceira atividade de modelagem matemática proposta para os grupos de estudantes do minicurso. A duração da atividade foi de 3 encontros (quatro horas-aula), 2 encontros destinados ao desenvolvimento da atividade e um encontro para os grupos compartilharem suas resoluções e resultados. Para o desenvolvimento desta atividade de modelagem, a professora-pesquisadora foi em busca de temas que tivessem relação com prática da engenharia civil. A ideia deste tema surgiu em uma conversa com docentes do departamento de Engenharia Civil que, entre outros temas, sugeriram a investigação de defeitos nos pavimentos asfálticos, conteúdo que faz parte da ementa da disciplina Estradas[20], ofertada no quarto ano do curso de Engenharia Civil. Para decidir qual via asfáltica terá prioridade de manutenção, critérios devem ser satisfeitos. Entre estes critérios está a determinação do nível de severidade de um tipo de defeito asfáltico denominado *panela ou buraco*. Com base nestas informações a pesquisadora foi em busca de vias com este tipo de defeito asfáltico para compor o texto informativo apresentado no Quadro 4.11, e informações adicionais sobre as dimensões dos buracos como mostra o Quadro 4.12, que foram entregues para o desenvolvimento da atividade. Nessa seção apresenta-se uma descrição do desenvolvimento da atividade dos estudantes dos grupos G2T2 e G3T1.

[20] O conteúdo faz parte do tópico Projeto de restauração de pavimentos flexíveis (Anexo B)

Quadro 4.11 – Texto informativo da atividade *Manutenção de vias asfálticas*

MANUTENÇÃO DE VIAS ASFÁLTICAS

Uma malha viária em boas condições é crucial para o desenvolvimento socioeconômico de uma região, pois garante o transporte seguro e eficiente de pessoas e mercadorias, beneficiando o comércio e facilitando o acesso a serviços essenciais. É responsabilidade dos gestores assegurar que o pavimento atenda às necessidades locais, através de programas de manutenção e reabilitação. O planejamento, construção, avaliação e manutenção das vias fazem parte do Sistema de Gerência de Pavimentos (SGP), que, segundo o DNIT, auxilia na maximização do desempenho da malha viária, ao mesmo tempo que otimiza os custos orçamentários.

Embora os pavimentos se deteriorem com o tempo e necessitem de manutenção, estes, na maioria dos casos, não se deterioram ao mesmo nível, isto é, apresentam condições diferentes após um período, portanto não precisam de manutenção simultaneamente (Figura 1). Sendo assim, é necessário haver uma seleção das vias para priorizar as que estão em um estado mais degradante.

Figura 1 – Vias que apresentam deteriorações

Para realizar essa seleção, deve-se avaliar os tipos de defeito na superfície asfáltica e o nível de sua severidade. As vias ilustradas nas Figuras 2 e 3 apresentam algumas deteriorações, e desta forma podem ser candidatas à avaliação para viabilidade de manutenção. Que critérios podem ser utilizados para decidir qual das vias terá prioridade de manutenção?

Figura 2 – Trecho da Rua A

Figura 3 – Trecho da Rua B

Fonte: Autora, 2024

Quadro 4.12 – Informações sobre os defeitos asfálticos

INFORMAÇÕES SOBRE O TRECHO DA RUA A

Profundidade: 6,0 cm / 4,2 cm / 5,1 cm

Profundidade: 4,3 cm

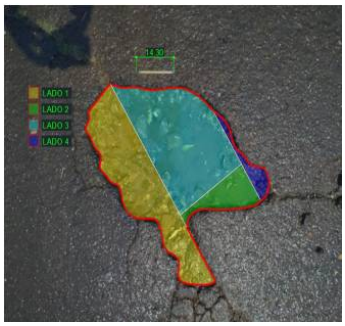
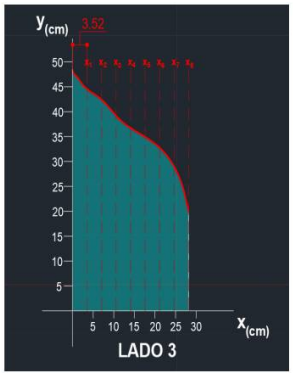
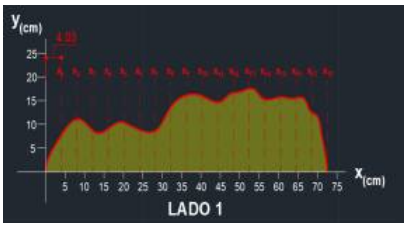
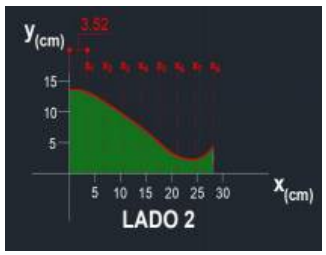
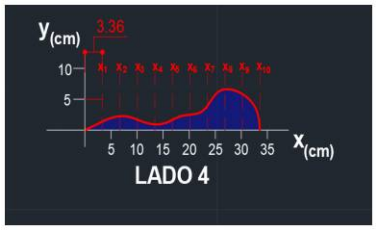
INFORMAÇÕES SOBRE O TRECHO DA RUA B

Profundidade: 5,2 cm | Profundidade: 4,8 cm | Profundidade: 8,7 cm/ 6,2 cm/ 3,6 cm

Fonte: Autora, 2024

No texto informativo o problema proposto para investigação é: *que critérios podem ser utilizados para decidir qual das vias terá prioridade de manutenção?* Para buscar as informações necessárias para resolver o problema, os estudantes do grupo G2T2, pesquisaram em *sites* da *internet* quais são os critérios utilizados para decidir qual via tem prioridade em relação a outra. Uma síntese da resolução desse grupo para essa atividade é apresentada no Quadro 4.13.

Quadro 4.13 – Síntese da resolução do grupo G2T2 na atividade manutenção de vias asfálticas

IDENTIFIQUE E ESPECIFIQUE O PROBLEMA A SER RESOLVIDO	**MATEMATIZE A SITUAÇÃO, OBTENHA UMA SOLUÇÃO**	
Que critérios podem ser utilizados para decidir qual das vias terá prioridade de manutenção? Critérios para decisão de manutenção das vias - Hierarquia Viária; - Medidas de Comportamento; - Resposta e Desempenho; - Deterioração; - Características de operações; - Nível de Severidade do Buraco; **SIMPLIFICAÇÃO** Será considerado e desenvolvido o Nível de Severidade do Buraco.	  	  
	$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3} * (f(x_0) + 4 * f(x_1) + 2 * f(x_2) + 4 * f(x_3) + \cdots + 2 * f(x_{n-2}) + 4 * f(x_{n-1}) + f(x_1))$	

DEFINA HIPÓTESES E VARIÁVEIS ESSENCIAIS

H_1: Os defeitos são do tipo "panela";
H_2: A região dos defeitos é irregular;

Variáveis: a área da superfície e a profundidade de cada buraco

lado 1				lado 2				lado 3				lado 4			
fx0	0,000	x0	0,000	fx0	13,564	x0	0,000	fx0	48,105	x0	0,000	fx0	0,000	x0	0,000
fx1	7,830	x1	4,026	fx1	13,163	x1	3,523	fx1	44,513	x1	3,523	fx1	1,374	x1	3,356
fx2	11,134	x2	8,052	fx2	11,483	x2	7,046	fx2	42,399	x2	7,046	fx2	2,240	x2	6,712
fx3	8,779	x3	12,078	fx3	9,516	x3	10,569	fx3	39,165	x3	10,569	fx3	1,679	x3	10,068
fx4	9,165	x4	16,104	fx4	7,130	x4	14,092	fx4	36,705	x4	14,092	fx4	0,923	x4	13,424
fx5	10,408	x5	20,130	fx5	4,943	x5	17,615	fx5	34,910	x5	17,615	fx5	1,657	x5	16,780
fx6	8,884	x6	24,156	fx6	2,797	x6	21,138	fx6	32,743	x6	21,138	fx6	2,476	x6	20,136
fx7	8,690	x7	28,182	fx7	2,286	x7	24,661	fx7	28,968	x7	24,661	fx7	3,933	x7	23,492
fx8	13,738	x8	32,208	fx8	4,394	x8	28,184	fx8	19,995	x8	28,184	fx8	6,608	x8	26,848
fx9	16,218	x9	36,234									fx9	5,831	x9	30,204
fx10	16,015	x10	40,260									fx10	0,000	x10	33,560
fx11	14,696	x11	44,286												
fx12	16,733	x12	48,312												
fx13	17,603	x13	52,338												
fx14	15,313	x14	56,364												
fx15	15,812	x15	60,390												
fx16	15,615	x16	64,416												
fx17	12,569	x17	68,442												
fx18	0,000	x18	72,468												
h/3	1,342			h/3	1,174			h/3	1,174			h/3	1,119		
Área (cm^2)	890,570			Área (cm^2)	211,861			Área (cm^2)	1035,783			Área (cm^2)	92,167		
Área total da figura (cm^2) 1/3 Simpson				2230,38											
Área Pelo AutoCad (cm^2)				2245,97											

ANALISE E AVALIE O MODELO E AS SOLUÇÕES

Com os dados obtidos foi possível realizar uma análise comparativa da metodologia aplicada, com o Autocad que ao delimitarmos suas extremidades consegue disponibilizar a área dos buracos para nós, já devidamente proporcional a sua escala.

IMPLEMENTE O MODELO E FAÇA O RELATÓRIO DOS RESULTADOS

Com base nos resultados de suas áreas obtidas, podemos ranquear os buracos de forma que fique definido qual é a ordem de prioridade de manutenção dos buracos estudados, dispondo eles da seguinte forma:

01º Lugar: Buraco 1 da Rua A
02º Lugar: Buraco 3 da Rua B
03º Lugar: Buraco 1 da Rua B
04º Lugar: Buraco 2 da Rua A
05º Lugar: Buraco 2 da Rua B
Sendo dessa forma classificado o Buraco 1 da Rua A com uma maior necessidade de manutenção.

Fonte: Relatório do G2T2

Para atender a todos os critérios seria necessário um conjunto de informações de difícil acesso, como por exemplo valores do investimento, tráfego da via, entre outros. Os estudantes tinham em mãos informações sobre as dimensões dos buracos de cada via (Quadro 4.12) e desse modo, o grupo realizou simplificações, a fim de atender a um único critério – nível de severidade do buraco – para prosseguir com a investigação. Para determinar este nível de severidade é necessário ter as medidas das dimensões de cada buraco presente em um trecho de uma via a ser avaliado. De acordo com Domingues (1993) os níveis de severidade[21] são classificados em:

- Baixo: profundidade menor que 2,5 cm e área menor que 0,28 m²;

[21] Os níveis de severidade já tinham sido apresentados aos estudantes na disciplina de Estradas, ofertada no quarto ano do curso de Engenharia Civil.

- Médio: profundidade menor que 2,5 cm e área maior que 0,28 m²; profundidade entre 2,5 e 5 cm e área menor que 0,28 m²; profundidade maior que 5 cm e área menor que 0,10 m²;

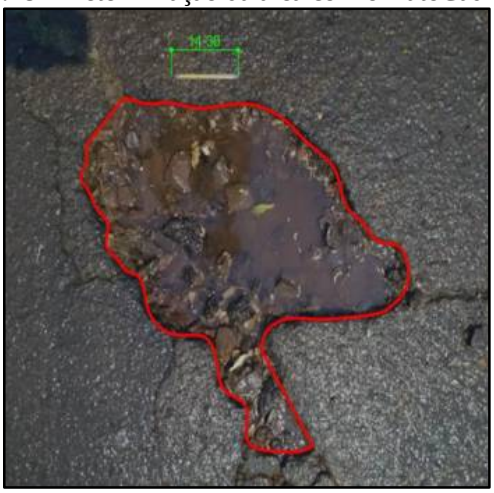
- Alto: profundidade entre 2,5 e 5 cm e área maior que 0,28 m².

Como as variáveis do problema são a área da superfície e a profundidade de cada buraco, e os estudantes consideraram como hipótese que geometria dos buracos é irregular, o primeiro passo foi inserir as imagens no AutoCad e determinar uma escala para fazer a conversão das medidas reais para as medidas da imagem. A conversão pode ser realizada a partir da medida de uma caneta colocada ao lado de cada buraco ao fotografá-lo. Este procedimento é comum na engenharia civil, a caneta serve como referência para a determinação da escala.

Pelo modelo da caneta os estudantes, mediante pesquisa no *site* do fabricante, obtiveram a medida de 14,3 cm de seu comprimento. As imagens foram inseridas no AutoCad e assim, com as medidas obtidas pelo Auto Cad e a medida real da caneta, utilizando regra de três os estudantes determinaram a escala e obtiveram as medidas de cada buraco para o cálculo da área.

Para calcular a área de cada buraco, inicialmente o grupo recorreu à ferramenta “área”, comando do AutoCad, obtendo a área do primeiro buraco como ilustra a Figura 4.28.

Figura 4.28 – Determinação da área com o AutoCad do G4T1



Fonte: Relatório do G2T2

A fim de aprofundar a investigação, a professora sugeriu ao grupo que utilizasse uma outra abordagem com conceitos matemáticos para o cálculo das áreas, e os comparassem com os resultados do AutoCad. Desta forma, o grupo iniciou uma busca por conceitos matemáticos envolvidos no cálculo de áreas de figuras irregulares. Conteúdos relativos ao CDI e Cálculo Numérico já haviam sido apresentados a esses estudantes em disciplinas anteriores. O grupo

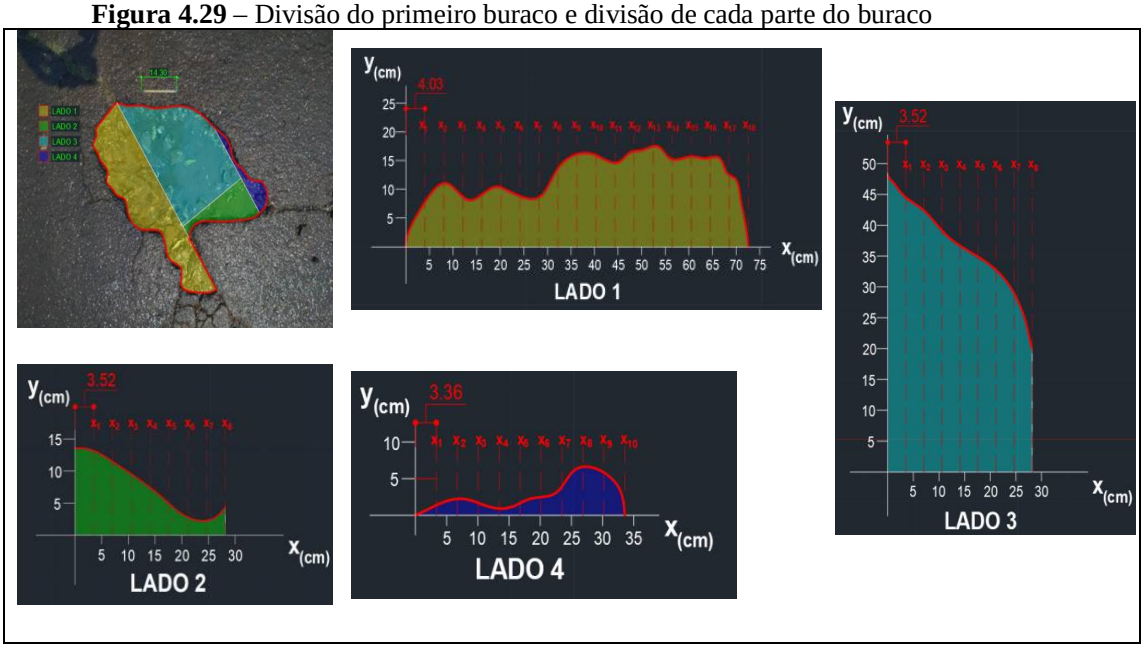
pesquisou formas de utilizar a integral para o cálculo de regiões irregulares. Dois conceitos matemáticos emergiram nas discussões entre os estudantes do grupo e das orientações da professora-pesquisadora: a Regra 1/3 de Simpson[22] e a integral definida.

Em sua resolução, os estudantes do G2T2 decidiram realizar uma abordagem numérica, utilizando o conceito da Regra 1/3 de Simpson que é dado pela fórmula:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\cdot\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \quad (1)$$

Para a determinação da área do primeiro buraco, o grupo fez uma divisão do buraco em quatro partes e, para cada parte realizou uma nova divisão para a obtenção dos valores que são inseridos na fórmula (1), como ilustra a Figura 4.29.

Figura 4.29 – Divisão do primeiro buraco e divisão de cada parte do buraco



Fonte: Relatório do G2T2

Após a obtenção dos valores de cada parte, o grupo construiu uma tabela para o cálculo da área, como mostra a Figura 4.30.

[22] A Regra 1/3 de Simpson é um método de integração numérica que consiste na utilização de um polinômio de segundo grau para aproximar a função no intervalo de integração (Ruggiero; Lopes, 1998)

Figura 4.30 – Tabela de cálculo da área do primeiro buraco

lado 1				lado 2				lado 3				lado 4			
fx0	0,000	x0	0,000	fx0	13,564	x0	0,000	fx0	48,105	x0	0,000	fx0	0,000	x0	0,000
fx1	7,830	x1	4,026	fx1	13,163	x1	3,523	fx1	44,513	x1	3,523	fx1	1,374	x1	3,356
fx2	11,134	x2	8,052	fx2	11,483	x2	7,046	fx2	42,399	x2	7,046	fx2	2,240	x2	6,712
fx3	8,779	x3	12,078	fx3	9,516	x3	10,569	fx3	39,165	x3	10,569	fx3	1,679	x3	10,068
fx4	9,165	x4	16,104	fx4	7,130	x4	14,092	fx4	36,705	x4	14,092	fx4	0,923	x4	13,424
fx5	10,408	x5	20,130	fx5	4,943	x5	17,615	fx5	34,910	x5	17,615	fx5	1,657	x5	16,780
fx6	8,884	x6	24,156	fx6	2,797	x6	21,138	fx6	32,743	x6	21,138	fx6	2,476	x6	20,136
fx7	8,690	x7	28,182	fx7	2,286	x7	24,661	fx7	28,968	x7	24,661	fx7	3,933	x7	23,492
fx8	13,738	x8	32,208	fx8	4,394	x8	28,184	fx8	19,995	x8	28,184	fx8	6,608	x8	26,848
fx9	16,218	x9	36,234									fx9	5,831	x9	30,204
fx10	16,015	x10	40,260									fx10	0,000	x10	33,560
fx11	14,696	x11	44,286												
fx12	16,733	x12	48,312												
fx13	17,603	x13	52,338												
fx14	15,313	x14	56,364												
fx15	15,812	x15	60,390												
fx16	15,615	x16	64,416												
fx17	12,569	x17	68,442												
fx18	0,000	x18	72,468												
h/3	1,342			h/3	1,174			h/3	1,174			h/3	1,119		
Área (cm^2)	890,570			Área (cm^2)	211,861			Área (cm^2)	1035,783			Área (cm^2)	92,167		
Área total da figura (cm^2) 1/3 Simpson				2230,38											
Área Pelo AutoCad (cm^2)				2245,97											

Fonte: Relatório do G2T2

O grupo considerou o modelo e a solução satisfatórios, pois a diferença entre a área calculada pela regra 1/3 de Simpson e a área obtida pelo AutoCad tem uma pequena diferença. Dessa forma o modelo foi implementado para a obtenção da área dos outros buracos, e após a obtenção de todos os valores o grupo organizou um ranking para classificar cada buraco quanto a prioridade de manutenção, como mostra o Quadro 4.14:

Quadro 4.14 – Análise e interpretação dos resultados do G2T2

Com base nos resultados de suas áreas obtidas, podemos ranquear os buracos de forma que fique definido qual é a ordem de prioridade de manutenção dos buracos estudados. Dispondo eles da seguinte forma:

Ordem de Prioridade em Manutenção:
01º Lugar: Buraco 1 da Rua A
02º Lugar: Buraco 3 da Rua B
03º Lugar: Buraco 1 da Rua B
04º Lugar: Buraco 2 da Rua A
05º Lugar: Buraco 2 da Rua B

Sendo dessa forma classificado o Buraco 1 da Rua A com uma maior necessidade de manutenção.

Fonte: Relatório do G2T2

Apesar de terem feito todos os cálculos corretamente, o grupo não utilizou os níveis de severidade para classificar os buracos, levando em conta apenas a área dos buracos para decidir a prioridade na manutenção. O erro na interpretação dos resultados matemáticos frente à análise da resposta em relação à situação-problema levou a uma decisão equivocada do grupo, apontando o Buraco 1, e não a via que teria prioridade na manutenção. A utilização adequada

do critério do nível de severidade para decidir qual rua tem prioridade de manutenção foi feita pelo grupo G3T2, que utilizou o comando polígono do AutoCad e a abordagem numérica regra dos trapézios[23] para obter a área dos buracos, como ilustra a Figura 4.31

Figura 4.31 – Resultados do G3T2

Após calcular as áreas das seções dos buracos, foi possível realizar a classificação da severidade do buraco com base na área da seção e na profundidade dos buracos.

Rua	Buraco	Área pelo trapézio (m^2)	Profundidade (cm)	Severidade
A	1	0,6431	6,0	Alta
	2	0,0443	4,3	Média
B	1	0,0584	5,2	Média
	2	0,0185	4,8	Média
	3	0,188	8,7	Alta

De acordo com os resultados, a rua a possui um buraco com severidade alta e um buraco com severidade média. Já a Rua B possui um buraco com severidade alta e dois buracos com severidade média. Por isso a Rua B foi escolhida para ser reformada.

Fonte: Relatório do G3T2

A abordagem utilizando o conceito de integral definida para o cálculo da área, foi a utilizada pelos estudantes do G3T1. A partir dos dados extraídos do relatório da atividade deste grupo, no Quadro 4.15 apresentamos uma síntese de sua resolução para essa atividade.

[23] A Regra dos Trapézios é um método de integração numérica que consiste na utilização de um polinômio de primeiro grau para aproximar a função no intervalo de integração (Ruggiero; Lopes, 1998)

Quadro 4.15 – Síntese da resolução do grupo G3T1 na atividade manutenção de vias asfálticas

IDENTIFIQUE E ESPECIFIQUE O PROBLEMA A SER RESOLVIDO

Que critérios podem ser utilizados para decidir qual das vias terá prioridade de manutenção?

SIMPLIFICAÇÕES

Inicialmente, foi definido que não seriam considerados os tipos de veículos que trafegam nas respectivas vias da Rua A e Rua B. Além disso, para efeito de análise, a posição dos buracos em relação à via de tráfego foi desconsiderada.

DEFINA HIPÓTESES E VARIÁVEIS ESSENCIAIS

H_1: O volume do tráfego considerado será constante para cada via, na qual possuem buracos irregulares e que consideram apenas os buracos apresentados nas respectivas figuras anteriores.

H_2: Foi registrada a profundidade máxima de cada buraco como a constante para o cálculo de volume.

MATEMATIZE A SITUAÇÃO, OBTENHA UMA SOLUÇÃO

Determinação da área com a o comando segmento de reta do AutoCad

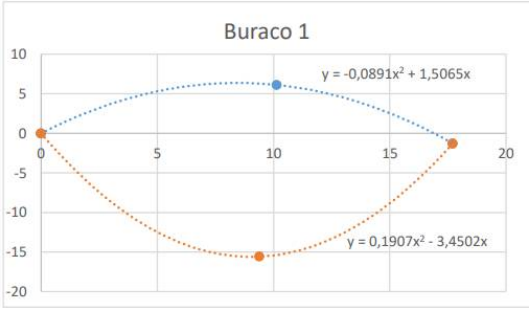


Tabela 3– Integrais.

	Integral definida	17,71	Integral definida	118,80
Cima	-0,0891/3*x³+1,5065/2*x²	71,28	-0,0176/3*x³+2,0968/2*x²	4.960,03
Baixo	0,1907/3*x³-3,4502/2*x²	187,98	0,0231/3*x³-2,9283/2*x²	7.753,77
Total		259,26		12.713,80

	Integral definida	32,06	Integral definida	76,10
Cima	-0,0377/3*x³+1,2078/2*x²	206,61	-0,016/3*x³+1,2153/2*x²	1.168,57
Baixo	0,0763/3*x³-2,4469/2*x²	419,42	0,015/3*x³-1,1441/2*x²	1.109,31
Total		626,03		2.277,88

	Integral definida	37,22
Cima	-0,0468/3*x³+1,8517/2*x²	478,26
Baixo	0,0228/3*x³-0,8496/2*x²	196,62
Total		674,87

Rua	Área [cm²]	Profundidade [cm]	Volume [cm³]	Total [cm³]
A	6.878,56	6,00	41.271,36	43.204,03
A	449,46	4,30	1.932,66	
B	204,25	4,80	980,40	27.361,54
B	554,19	5,20	2.881,77	
B	2.701,08	8,70	23.499,37	

Tabela 4 – Volume final de cada buraco.

Profundidade	4,80	Profundidade	6,00	Profundidade	4,30	Profundidade	8,70	Profundidade	5,20
Volume (1)	1.244,44	Volume (2)	76.282,81	Volume (3)	2.691,92	Volume (4)	19.817,52	Volume (5)	3.509,35

ANALISE E AVALIE O MODELO E AS SOLUÇÕES

Tabela 5 – Comparação dos métodos.

	Método 1	Método 2	Dif
Buraco 1	204,25	259,26	26,93%
Buraco 2	6.878,56	12.713,80	84,83%
Buraco 3	449,46	626,03	39,28%
Buraco 4	2.701,08	2.277,88	-15,67%
Buraco 5	554,19	674,87	21,78%

IMPLEMENTE O MODELO E FAÇA O RELATÓRIO DOS RESULTADOS

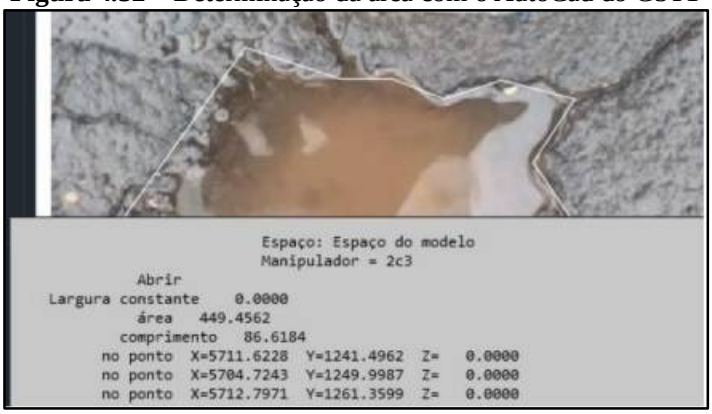
A decisão de qual rua será realizado as intervenções de melhoria se baseia no volume de cada buraco calculado anteriormente, conforme a escolha do grupo para a tomada de decisão. Realizando uma comparação entre as Ruas A e B, obteve-se um volume total dos buracos para a Rua A de 78.974,73 cm³ enquanto a Rua B obteve um volume total de 24.571,30 cm³. Deste modo, como a Rua A apresenta maior volume total, esta por sua vez, deverá realizar as reparações primeiro.

Fonte: Autora, 2024

Para se inteirar do tema, semelhante ao G2T2, o grupo G3T1 pesquisou em *sites* da *internet* quais são os critérios utilizados para decidir qual via tem prioridade em relação a outra, verificando que o único critério possível de ser atendido é a determinação do nível de severidade dos buracos.

Após a definição das hipóteses e variáveis essenciais, o grupo se pôs a determinar a área dos buracos com o auxílio do AutoCad. A partir das figuras dos respectivos buracos, projetadas na interface do programa, foi utilizada a ferramenta de criação de segmentos de reta, em que a área é determinada pelo perímetro da região da superfície do buraco, como é ilustrado na Figura 4.32.

Figura 4.32 – Determinação da área com o AutoCad do G3T1

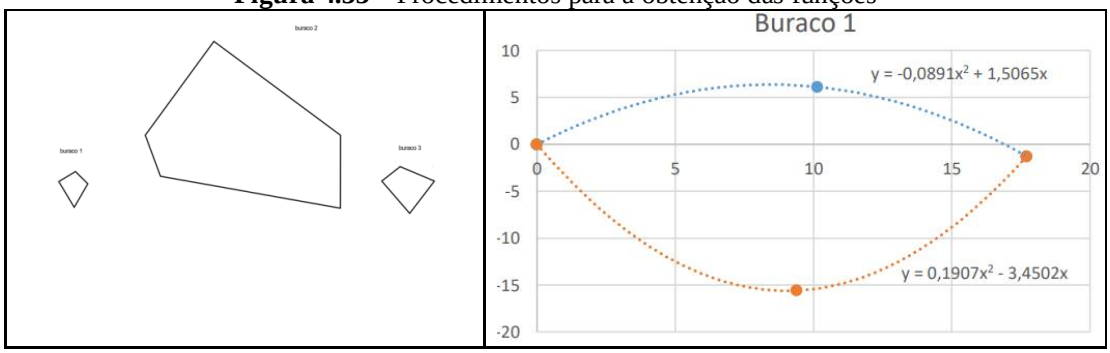


Fonte: Relatório do G3T1

A partir da proposta da professora-pesquisadora para determinar a área utilizando conceitos matemáticos, o G3T1 decidiu por calcular a área dos buracos utilizando integrais definidas, e compará-las com as obtidas pelo AutoCad.

Para realizar o cálculo, foram feitas simplificações nas geometrias dos buracos, e a partir disso, os estudantes do G3T1 utilizaram o Excel para estabelecer as coordenadas dos pontos necessários para a obtenção das funções (Figura 4.33).

Figura 4.33 – Procedimentos para a obtenção das funções



Buraco 1		Buraco 2		Buraco 3		Buraco 4		Buraco 5	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10,14	6,11	41,7873	56,7986	11,14	8,78	4,3852	11,4471	16,6269	16,9597
17,71	-1,28	118,7996	0	32,06	0	33,3199	21,297	35,395	11,6591
0	0	0	0	0	0	76,0983	0	37,2241	0
9,39	-15,58	9,2123	-24,8264	17	-19,54	0	0	0	0
17,71	-1,28	118,726	-44,178	32,06	0	35,0916	-21,635	18,7313	-7,9061
		118,7996	0			76,0983	0	37,2241	0

Fonte: Relatório do G3T1

Os estudantes utilizaram funções de segundo grau para obter uma região aproximada da superfície do buraco. A partir dessas funções, foi calculada a integral para a obtenção da área de cada buraco e subsequentemente, os estudantes utilizaram o valor da profundidade dos buracos para calcular o volume, como mostra a Figura 4.34:

Figura 4.34 – Cálculo da área e volume

	Integral definida	17,71
Cima	$-0,0891/3*x^3+1,5065/2*x^2$	71,28
Baixo	$0,1907/3*x^3-3,4502/2*x^2$	187,98
Total		259,26

Integral definida	118,80
$-0,0176/3*x^3+2,0968/2*x^2$	4.960,03
$0,0231/3*x^3-2,9283/2*x^2$	7.753,77
	12.713,80

	Integral definida	32,06
Cima	$-0,0377/3*x^3+1,2078/2*x^2$	206,61
Baixo	$0,0763/3*x^3-2,4469/2*x^2$	419,42
Total		626,03

Integral definida	76,10
$-0,016/3*x^3+1,2153/2*x^2$	1.168,57
$0,015/3*x^3-1,1441/2*x^2$	1.109,31
	2.277,88

	Integral definida	37,22
Cima	$-0,0468/3*x^3+1,8517/2*x^2$	478,26
Baixo	$0,0228/3*x^3-0,8496/2*x^2$	196,62
Total		674,87

Profundidade	4,80	Profundidade	6,00	Profundidade	4,30	Profundidade	8,70	Profundidade	5,20
Volume (1)	1.244,44	Volume (2)	76.282,81	Volume (3)	2.691,92	Volume (4)	19.817,52	Volume (5)	3.509,35

Fonte: Relatório do G3T1

Apesar da abordagem utilizando a integral definida atender à necessidade de obter a área de uma superfície irregular, o G3T1 manteve sua resolução mesmo tendo constatado diferença entre as áreas após comparar os resultados obtidos pelo AutoCad (denominado Método 1 no relatório do G3T1), com os resultados obtidos pelas integrais (denominado Método 2 no relatório do G3T1). Trata-se de um erro processual, e podemos observar na tabela construída pelo G3T1 as diferenças entre esses resultados, como mostra a Figura 4.35:

Figura 4.35 – Comparação das áreas obtidas e análise dos resultados

	Método 1	Método 2	Dif
Buraco 1	204,25	259,26	26,93%
Buraco 2	6.878,56	12.713,80	84,83%
Buraco 3	449,46	626,03	39,28%
Buraco 4	2.701,08	2.277,88	-15,67%
Buraco 5	554,19	674,87	21,78%

A maior diferença encontrada ocorreu no buraco 2, com uma diferença de 84,83%, indicando um valor acima da média quando se comparado aos demais. Os outros buracos tiveram variações mais brandas, sendo o buraco 4 o que menos sofreu diferença. As mudanças de resultados são resultados dos diferentes métodos empregados, visto que se baseiam em perspectivas distintas

Fonte: Relatório do G3T1

Embora o grupo tenha sido orientado a utilizar o ciclo instrucional no desenvolvimento da atividade de modelagem, na análise e avaliação do modelo e suas soluções o G3T1 deveria ter verificado que os resultados dos integrais definidas não são compatíveis com os obtidos pelo AutoCad, e retomado as etapas anteriores e refinado o modelo, por exemplo, utilizando outros tipos de funções que se ajustam de forma mais adequada ao contorno da região, ou então buscando outra abordagem matemática no lugar da integral definida. Ao invés disso, o grupo justificou erroneamente que a diferença dos resultados se deve à diferença dos métodos empregados. Mesmo com essa diferença, o grupo escolheu utilizar os resultados obtidos no cálculo das integrais para tomar a decisão sobre qual rua tem a prioridade de manutenção.

O grupo tomou sua decisão comparando o volume total dos buracos de cada rua para decidir qual rua teria prioridade de manutenção. O volume total estimado dos buracos da Rua A é de 78.974,73 cm^3 enquanto que, na Rua B o volume total estimado dos buracos é de 24.571,30 cm^3. Dessa forma, a Rua A teria prioridade de manutenção. No entanto, o critério do nível de severidade deveria ter sido utilizado pois, a situação-problema apresentada está inserida em um contexto da prática da engenharia civil, que requer critérios bem definidos para que se possa tomar uma decisão. Além do mais, o conceito do nível de severidade já havia sido trabalhado com os estudantes na disciplina de Estradas, e no momento da inteiração o conceito foi revisitado e compartilhado entre todos os grupos.

CAPÍTULO 5

EM BUSCA DE INTERLOCUÇÕES

Considerando o objetivo de investigar *interlocuções entre modelagem matemática e misconcepções dos estudantes*, o processo analítico é dirigido aos dados, buscando identificar misconcepções e meios de sua superação nas ações e registros dos estudantes no decorrer das atividades de modelagem matemática.

A análise é organizada considerando as misconcepções observadas em cada atividade. Há indicativos de misconcepções reveladas nas transcrições dos diálogos com a turma ou com os grupos, nos excertos dos registros dos estudantes e do relatório entregue pelos grupos. Para analisar as misconcepções foram selecionados episódios de sua ocorrência em cada contexto, que são apresentados no Quadro 5.1.

Quadro 5.1 – Atividades e episódios analisados

Contexto	Atividades	Grupo	Estudantes	Episódios
Contexto 1 – Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura em Matemática (2023)	Sem abelhas, sem alimento!	Turma	E1 a E30	Episódio 1
		Turma	E1 a E30	Episódio 2
		G6	E26 a E30	Episódio 3
		G3	E11 a E15	Episódio 4
Contexto 2 – Disciplina de Transportes na Engenharia Civil	Ajustando medidas em um equipamento de musculação	G4T1	E13 a E17	Episódio 5
	Manutenção de pavimentos asfálticos	G2T2	E5 a E10	Episódio 6
		G3T1	E9 a E12	Episódio 7

Fonte: Autora, 2024

Ressaltamos que, apesar dos episódios serem apresentados de forma cronológica, um episódio não é necessariamente a continuação do episódio anterior.

5.1 Análise da atividade de modelagem: Sem abelhas, sem alimento!

Nesta atividade foram selecionados quatro episódios em que misconcepções dos estudantes emergiram no desenvolvimento da atividade de modelagem. Os episódios aqui analisados ocorreram em diferentes fases da atividade. Considerando que esta atividade foi a primeira atividade de modelagem matemática desenvolvida pelos estudantes que estavam matriculados na disciplina, as discussões iniciais nas fases da inteiração e matematização foram

realizadas coletivamente com a turma, e durante a matematização foram identificadas duas misconcepções que são analisadas nos episódios 1 e 2, respectivamente. Na fase da resolução são identificadas outras duas misconcepções, uma no G6 e outra no G3, analisadas nos episódios 3 e 4, respectivamente.

5.1.1 Episódio 1

No Quadro 5.2 são exibidos excertos de diálogos entre a professora-pesquisadora e a turma, durante a matematização na atividade de modelagem sobre o crescimento da colmeia ao longo do tempo. Após o tratamento das informações e formulação das hipóteses, os estudantes em conjunto com a professora-pesquisadora, deliberam sobre as variáveis do problema.

Quadro 5.2 – Selecionando variáveis

Na matematização os estudantes em conjunto com a professora-pesquisadora, definiram a partir do texto informativo da atividade (Quadro 4.3) as seguintes informações e hipóteses:

I_1: A quantidade inicial de abelhas na nova colmeia é de 10 000 indivíduos.
I_2: A postura média da rainha é de 2 000 ovos por dia.
I_3: O período entre a postura e o nascimento da abelha operária é de 21 dias.
I_4: A longevidade média de uma operária é de 40 dias.
H_1: A dinâmica populacional se dá em 2 estágios, o primeiro é o *período de adaptação* que começa com a postura inicial e vai até o nascimento das primeiras abelhas, o segundo é o *período de desenvolvimento* quando começa a nascer abelhas diariamente.
H_2: A taxa de crescimento populacional é proporcional à quantidade de abelhas que se tem a cada instante.

Com as informações e hipóteses estabelecidas a professora-pesquisadora realiza questionamentos a fim de respeito das variáveis do problema:

Prof: Quais são as variáveis que vamos utilizar para poder estudar esse problema?
E27: A vida da rainha?
Prof: Bom, vamos lá, o que mais?
E10 : Quantidade de ovos que põe por dia?
[⋮]
E9 : Quantas rainhas tem?
Prof : O que vocês entendem por variável?
E21: Se ela cresce ou não cresce.
E25: Se ela aumentar muito né, ou se ela diminuir também.
E11: O número de abelhas?
Prof: É uma! (resposta para o estudante E11). O número de abelhas é uma variável do problema.
[⋮]
E12: Professora seria o tempo de vida das abelhas também uma variável?
Prof: Temos que pensar no crescimento populacional.
E9 : A quantidade de ovos?
E25: Quais variáveis...Uma é o número de abelhas, quantidade de abelhas, quantidade de ovos... acho que não tem que ser quantitativo.
E18: Quantas abelhas contém?
[⋮]
Prof: O número de abelhas na nova colmeia vai crescer infinitamente ou há um momento em que ela para de crescer?
E28: Ela cresce infinitamente.
E27: Porque sempre vai trocar as rainhas! Nunca vai parar de crescer!
E1: É o número de dias.

E25: É tempo não é? Tempo! Não é?? Prof: Número de dias pessoal? A dinâmica populacional de crescimento vai relacionar quem? O número de abelhas com quem? E1: Tempo. E16: Com o tempo! (Transcrição do diálogo com a turma)

Fonte: Dados da pesquisa, 2025

No momento da seleção das variáveis do problema, a professora-pesquisadora observou que havia uma confusão dos estudantes sobre o que são as variáveis do problema. Essa discussão ocorreu no momento da matematização, que requer a tradução da linguagem natural apresentada na situação-problema, para uma linguagem matemática (Almeida; Castro; Silva, 2021). A definição das variáveis requer uma relação entre as características da situação e conceitos – neste caso uma função exponencial – que representam essa situação, bem como identificar esses componentes.

As diversas tentativas dos estudantes para escolher as variáveis revelam que, as variáveis do problema podem ser qualquer grandeza que varia entre os dados coletados, sinalizando a misconcepção. Em um primeiro momento, os estudantes não se atentaram ao fato de que, para estudar o crescimento de uma população, as variáveis tempo e quantidade de indivíduos são essenciais. A discussão propiciada pela atividade de modelagem para decidir quais variáveis fazem parte do rol de informações serão utilizadas revela um erro conceitual que pode passar despercebido quando se trabalha com problemas em que as variáveis já estão definidas, como na sala de aula.

O conceito de função é introduzido nos anos finais do Ensino Fundamental. De maneira geral, quando se trabalha o conteúdo funções, os problemas já são dados com as variáveis. A prática de resolver exercícios e problemas os quais já trazem definidas as variáveis da função, ou resolver problemas em que as variáveis a serem definidas estão subentendidas entre os dados, não desenvolve nos estudantes a habilidade de selecionar as variáveis de um problema em meio a diversas informações. Desse modo, observamos que para os estudantes qualquer uma das grandezas poderia ser candidata à variável do problema. Consideramos que este raciocínio sinaliza uma misconcepção, e neste caso, essa misconcepção é uma generalização local do conceito variável no senso comum. É desejável que o conceito *variável do problema* seja desenvolvido e, para isso, é necessário trabalhar com atividades em que, o estudante é exposto a situações nas quais ele necessita tomar decisões para selecionar o que é essencial, e o que não é essencial para resolver o problema.

Percebe-se que os estudantes interpretam o objeto *variável do problema* a partir do senso comum, como tudo aquilo que varia, e trazem essa generalização para o contexto matemático da atividade. O conceito em formação se condensou em um modelo intuitivo, que precisa ser exposto em situações diversas para que o estudante possa ter sua misconcepção confrontada. A matematização neste caso, proporcionou aos estudantes um outro uso para o conceito, diferente do que eles estavam habituados.

Na Educação Básica, a introdução do conceito de variável da função pode originar uma misconcepção inevitável, no entanto, é necessário que seja superada em algum momento. Trabalhar com atividades que trazem os mesmos exemplos-padrão podem produzir um modelo forte, porém instável (Duval, 1993). Desse modo os estudantes podem ser levados a utilizar um conhecimento que funciona bem em determinado domínio, mas não em outro, quando necessitam de utilizar esse mesmo conhecimento em uma situação diferente da que habitualmente o utiliza (D'Amore; Sbaragli, 2005; Balacheff; Gaudin, 2002). Para promover sua superação é necessário que o professor utilize diferentes tipos de atividades com questões desafiadoras, estímulos e perguntas, a fim de provocar a manifestação de misconcepções. A atividade da seleção das variáveis, muitas vezes é desafiadora e, no processo de selecionar as variáveis para resolver o problema do crescimento da colmeia no decorrer do tempo, emergiu uma misconcepção inevitável. Entretanto, o próprio processo de seleção pode possibilitar sua superação, uma vez que, a relação entre as características da situação e os componentes que representam essas características são ativados pela modelagem matemática.

A fim de promover a superação dessa misconcepção, a professora-pesquisadora permitiu que os estudantes continuassem com suas tentativas para definir as variáveis, com a intenção de que eles refletissem sobre suas escolhas. Observa-se que a fala de E25 " *Quais variáveis... uma é a quantidade de abelhas [...] acho que não tem que ser quantitativo*", sinaliza uma intuição de que a variável não precisa ser relativa aos dados informados, mas que pode ser algo que está além do que consta nas informações. Na matematização os estudantes são convidados a decidir quais serão as variáveis para o problema, e a interação dos estudantes com a professora-pesquisadora, contribuiu para que os estudantes compreendessem que o tempo e a quantidade de abelhas são as variáveis essenciais para o problema e não as outras sugestões dadas por eles.

A seleção das variáveis requerida na matematização da atividade de modelagem, possibilitou a manifestação de uma misconcepção que, não está entre as identificadas no teste

diagnóstico. A ação de selecionar as variáveis do problema revela a misconcepção advinda da confusão entre o que é variável e o que são as variáveis do problema. Denominamos essa misconcepção *confusão entre variável e variáveis do problema*.

5.1.2 Episódio 2

Durante a matematização na atividade de modelagem, o episódio dois refere-se ao momento em que, a professora-pesquisadora questiona os estudantes sobre qual é o domínio e contradomínio da função P_n que dá a quantidade de abelhas no decorrer do tempo n. São exibidos excertos relativamente a este diálogo no Quadro 5.3.

Quadro 5.3 – Determinando o domínio e o contradomínio da função

A fim de estabelecer o domínio e o contradomínio da função, a professora-pesquisadora questiona os estudantes sobre quais são estes conjuntos: Prof: A qual conjunto numérico as variáveis pertencem? E16: Inteiros? E20: Naturais? E1: Reais? E18: Inteiros. E8: Naturais. Prof: E qual é a definição do conjunto dos números naturais? E15: Números. E3: São números inteiros positivos! E15: Números né? E16: Algarismos? E14: Inteiros. E18: Não são os números encontrados na natureza? E3: São os inteiros positivos incluindo o zero, não é? E15: Números naturais é tudo aquilo que pode ser contado naturalmente E3: Que outra palavra então pode ser usada aí? E4: Número e... (Transcrição do diálogo com a turma)

Fonte: Dados da pesquisa, 2025

Ao buscar uma atividade de modelagem para desenvolver com os estudantes, a professora-pesquisadora priorizou um tema em que, o conteúdo de funções emergisse em seu desenvolvimento. Como é necessário determinar o domínio e o contradomínio da função, que são dados por conjuntos numéricos, a professora-pesquisadora viu a possibilidade de provocar a manifestação da misconcepção *confusão entre conjunto e elemento de conjunto*, que foi identificada no teste diagnóstico. Desse modo, a professora-pesquisadora planejou verificar o conhecimento dos estudantes em relação à definição de conjuntos numéricos assim que as variáveis do problema estivessem selecionadas, pois, é necessário definir o domínio e contradomínio da função para essas variáveis. Para provocar a manifestação dessa misconcepção, a professora-pesquisadora indagou os estudantes sobre quais são os conjuntos

numéricos do domínio e contradomínio da função, e na sequência solicitou que os estudantes definissem esses conjuntos.

Inicialmente, o diálogo mostra que os estudantes, assim como na questão a respeito das variáveis, começaram *sugerindo* conjuntos, pois, em suas falas a professora-pesquisadora percebeu que as respostas eram em tom de dúvida: "*Inteiros*?" (E16), "*Naturais*?" (E20), "*Reais*?" (E1). Este pode ser considerado um erro processual pois, ao refletirem sobre as características da situação e sobre a natureza das variáveis do problema, eles perceberam que o domínio e contradomínio são o conjunto dos números naturais.

No entanto, ao solicitar a definição do conjunto dos números naturais, a professora-pesquisadora percebeu nas respostas dos estudantes o mesmo erro conceitual observado na questão 1 do teste diagnóstico. Nas definições dadas pelos estudantes são utilizadas as palavras números, contagem, algarismos, representação de quantidades, ou seja, tentam definir o conjunto por meio dos seus elementos. Como eles associam números naturais com aquilo que é contado naturalmente, de forma equivocada, associam a definição de conjunto dos números naturais à contagem. Observa-se, portanto, que eles relacionam o conceito de conjunto ao conceito de elemento de um conjunto.

A expectativa era a de que os estudantes iniciassem a definição com a palavra *conjunto*, como é devido. O que se pode inferir é que, provavelmente, os estudantes tenham um conceito ainda em formação relativamente a conjuntos. Os conjuntos numéricos são apresentados inicialmente na forma de seus elementos, como ocorre nos anos finais do Ensino Fundamental, como por exemplo, apresentar o conjunto dos números naturais como $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4 \ldots\}$. Nesse contexto, é devido que a introdução do conceito de conjunto dos números naturais seja feita com uma de suas representações, o que é inevitável. No entanto, isso pode gerar uma misconcepção entre a representação do conjunto dos números naturais e o objeto conjunto dos números naturais, pois o estudante pode entender que a definição conjunto dos números naturais seja essa representação. Essa misconcepção temporária, deve ser ultrapassada ao se trabalhar com conceitos mais avançados, que são ministrados no ensino superior, não permanecendo exclusivamente com a representação $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4 \ldots\}$. Durante a transcrição da gravação em áudio, é possível ouvir E3 pensando em voz alta "*Que outra palavra então pode ser usada aí?*", mostrando um desconforto do estudante ao perceber que sua concepção do conceito não era validada pela professora-pesquisadora. De fato, o conceito ainda está em formação e precisa ser trabalhado, visto que a definição formal deste conjunto numérico pode ser feita em diversas

disciplinas, tais como Cálculo Diferencial Integral, Fundamentos da Matemática ou Análise Real.

A atividade de modelagem proporciona aos modeladores coordenar diversas representações semióticas de um mesmo objeto, oportunizando a superação de misconcepções inevitáveis. A professora-pesquisadora aproveitou o momento para realizar uma intervenção a fim de resgatar o conceito de conjunto numérico, apresentando a definição formal de conjunto dos números naturais, como ilustra o Quadro 5.4, visando a provável superação da misconcepções entre o conjunto numérico e os seus elementos. Após a explicação, a professora-pesquisadora também reforçou para os estudantes que na definição de conjunto é devido utilizar a palavra *conjunto*, que denomina o conceito, no lugar da palavra *número*, que remete ao elemento do conjunto.

Quadro 5.4 – Conjunto dos Números Naturais

Conjunto dos Números Naturais
Sejam dados um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados números naturais, e uma função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $s(n)$, valor que a função s assume no ponto n, é chamado *sucessor* de n. A função s satisfaz os seguintes axiomas:
P1. $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva. Em outros termos: dados $m, n \in \mathbb{N}$, $s(m) = s(n) \Longrightarrow m = n$. Ou, em palavras, dois números que tem o mesmo sucessor são iguais.
P2. $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ consta de um só elemento. Ou seja, existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Ele se chama "um" e é representado pelo símbolo 1. Assim qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ tem-se $1 \neq s(n)$. Por outro lado, se $n \neq 1$ então existe um único $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $s(n_0) = n$.
P3. (Princípio da Indução) Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se também $s(n) \in \mathbb{N}$, então $X = \mathbb{N}$.
Assim temos que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. A inclusão do zero foi posterior à construção do conjunto, ao ser constatado que não existia um número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - n = c$. Então define-se o número zero com o símbolo 0 tal que $n - n = 0$.

(LIMA, 1976)

Fonte: Autora, 2025

A matematização na atividade de modelagem, promoveu a identificação do conjunto dos números naturais, por meio de sua definição. A apresentação da definição desse conceito proporcionou revisitar o Princípio de Indução Finita, que estava previsto para ser utilizado na resolução para a obtenção do modelo para o problema. Para além de proporcionar a superação da misconcepção identificada, a intervenção promoveu o resgate de outros conceitos, que podemos considerar como um aspecto positivo ao se trabalhar com misconcepções, pois o foco não está em apenas corrigir um erro e sim ampliar o conhecimento dos estudantes, seja em relação ao conceito abordado, seja em relação a outros conceitos que emergem na intervenção.

Sendo assim, neste episódio constata-se a manifestação da misconcepção identificada no teste diagnóstico como *confusão entre conjunto e elemento do conjunto*, em que a definição

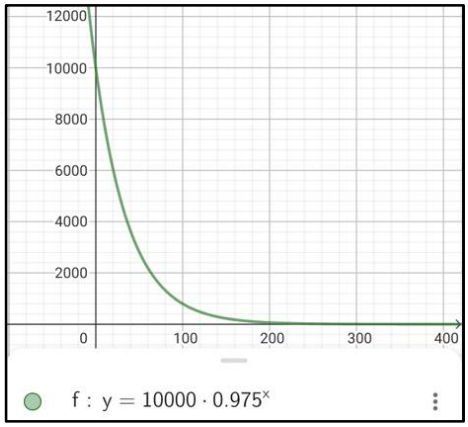
do conjunto numérico é dada pela definição de seu elemento. A necessidade de relacionar as características da situação com o conceito de conjunto dos números naturais que a matematização requer fez emergir a misconcepção dos estudantes relativa a este conceito.

5.1.3 Episódio 3

Neste episódio é possível evidenciar uma misconcepção que emergiu na resolução do problema do crescimento da colmeia. O equívoco ocorreu quando os estudantes elaboravam a representação gráfica do primeiro modelo do primeiro estágio obtido no desenvolvimento da atividade de modelagem. São exibidos excertos do registro do G6 no Quadro 5.5.

Quadro 5.5 – Elaborando a representação gráfica da função

A partir da obtenção do modelo do 1º estágio, em que não nascem abelhas até o vigésimo primeiro dia, a professora-pesquisadora solicitou aos estudantes que construíssem a representação gráfica da função $P_n = 10\,000 \times 0{,}975^n, 0 \leq n \leq 21,$ utilizando um *software* de geometria dinâmica. Os estudantes apresentaram o gráfico da função com uma linha contínua.



Fonte: Dados da pesquisa, 2025

Ao solicitar aos estudantes a representação gráfica do primeiro modelo obtido na resolução do problema sobre o crescimento da colmeia no decorrer do tempo, a função P_n, que dá o número de abelhas em cada unidade de tempo, os estudantes do G6 utilizaram o GeoGebra e apresentaram um gráfico com uma linha contínua. Podemos considerar que isso é um erro conceitual, pois os estudantes apresentam o gráfico com uma linha contínua como sendo o gráfico da função P_n, não considerando que a variável da unidade de tempo neste momento, é uma variável discreta, pois esse desenvolvimento é determinado em dias. O que se pode considerar como misconcepção nesse caso é a não identificação da diferença entre variável discreta e variável contínua na representação do plano cartesiano. Como o domínio da função é o conjunto dos números naturais, trata-se de um modelo discreto, e neste caso o traçado do gráfico deve ser feito com pontos.

Essa misconcepção emergiu durante a construção do modelo, em que é necessário o uso de conceitos, técnicas, métodos e representações, bem como a coordenação adequada dessas representações. No entanto, o erro oriundo dessa misconcepção é frequentemente nomeado nas pesquisas pois, este é um erro comum observado em sala de aula. Os estudantes ao construir o gráfico de uma função, colocam os pontos e automaticamente traçam uma linha unindo esses pontos, considerando sempre o domínio como o conjunto dos números reais, o que faz com que a representação gráfica seja uma linha.

A falta de uma coordenação adequada de diferentes representações associada aos objetos matemáticos, e o uso inadequado da ferramenta tecnológica para trabalhar com representações gráficas do objeto, revela a misconcepção dos estudantes ao apresentarem o gráfico da função P_n com uma linha contínua no lugar de pontos. Unir pontos por uma linha é um procedimento comum observado quando os estudantes realizam representações gráficas. Isso ocorre pois, usualmente, os professores têm uma preferência em trabalhar com funções reais em exercícios e problemas. Deste modo, os estudantes acabam se habituando a realizar este procedimento, sem verificar previamente, por exemplo, o conjunto numérico do domínio e contradomínio da função.

A tecnologia também pode reforçar essa misconcepção, uma vez que, ao declarar a função na barra de comando, imediatamente sua representação gráfica é mostrada no plano cartesiano com uma linha contínua. Sendo assim, o estudante ao utilizar o software para fazer uma representação gráfica, deve utilizar os comandos pertinentes à função, levando em consideração suas características.

O procedimento de unir os pontos com uma linha é um procedimento que funciona para funções reais, mas não em funções cujo domínio é o conjunto dos números naturais ou conjunto dos números inteiros. Nesse caso traçar uma linha é um procedimento utilizado de forma inadequada, e isso caracteriza uma misconcepção gerada por uma generalização local.

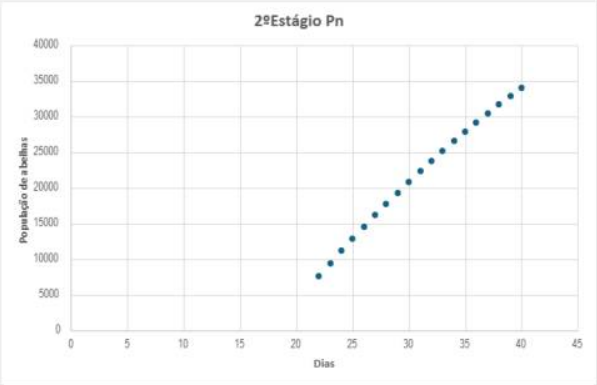
Pode-se dizer que essa é uma misconcepção evitável, visto que os exercícios e exemplos trabalhados deveriam contemplar funções com outros conjuntos numéricos, não apenas os reais, para que os estudantes não tornem esse procedimento enraizado e automático, como se a linha contínua fosse a única representação de funções no plano cartesiano. Cabe ressaltar que essa misconcepção pode permanecer oculta e ser difícil de ser detectada pois, se o estudante tiver contato com atividades em que sempre sejam solicitadas construções gráficas de funções reais

contínuas, estará sempre obtendo a resposta correta com as razões erradas.

Nessa atividade de modelagem foi possível observar a superação da misconcepção, que se deu durante a resolução, em meio à construção do modelo. Para retificar a representação gráfica da função P_n relativa ao primeiro estágio, em que se considera o crescimento da colmeia até o vigésimo primeiro dia, a professora-pesquisadora apresentou aos estudantes os procedimentos e comandos do GeoGebra que permitem a construção de um gráfico com pontos. Desse modo a tecnologia favoreceu tanto a emergência da misconcepção, como a sua superação. Para resolver o problema da atividade de modelagem é necessário determinar um modelo para o primeiro estágio e um modelo para o segundo estágio, em que se considera o crescimento da colmeia após o vigésimo primeiro dia, quando começam a nascer abelhas. Ao solicitar a representação gráfico de P_n para o segundo estágio, em que $n > 21$, os estudantes realizaram corretamente os procedimentos no GeoGebra e obtiveram o gráfico da função no plano cartesiano representado com pontos como ilustra a Figura 5.1.

Figura 5.1 – Representação gráfica de P_n no segundo estágio

2ºEstágio Pn	
Dias	População
22	7729
23	9536
24	11298
25	13015
26	14690
27	16323
28	17915
29	19467
30	20980
31	22456
32	23894
33	25297
34	26664
35	27998
36	29298
37	30565
38	31801
39	33006
40	34181



Fonte: Relatório do G6

Desse modo, na construção do modelo, emergiu uma misconcepção durante a elaboração do gráfico da função P_n, com $0 \leq n \leq 21$, no primeiro estágio do crescimento da colmeia, utilizando o GeoGebra. Esta ação revela um procedimento errôneo comum entre os estudantes que é unir os pontos no plano cartesiano por uma linha, qualquer que seja a função. Denominamos essa misconcepção como *o gráfico de uma função no plano cartesiano é sempre uma linha contínua.*

5.1.4 Episódio 4

No episódio quatro, a professora-pesquisadora constatou no diálogo com o G3, sua resistência em utilizar uma abordagem que não satisfazia sua expectativa de obter uma resposta exata para resolver o problema do crescimento da colmeia ao longo do tempo, como mostra o excerto relativo a este diálogo no Quadro 5.6.

Quadro 5.6 – Discussões sobre o fazer matemática

No processo de construção do primeiro modelo do primeiro estágio do crescimento da colmeia até o vigésimo primeiro dia, o G3 discute se a utilização do processo recursivo é o processo correto para a obtenção do modelo: E11: Porque quando chegar em 40 dias não teria que morrer toda a população? Mas não faz sentido eu trabalhar com essa função, em 40 dias não tem que morrer todas as abelhas? Com essa ideia nunca vão morrer todas as abelhas sempre vai sobrar alguma! Isso não é absurdo? E14: A gente tem que aceitar esse absurdo para poder desenvolver? E13: Eu não entendi o que ela (a professora) quer que a gente faça com essa fórmula... Por que não faz sentido gente?

Fonte: Dados da pesquisa, 2025

Na construção do primeiro modelo, o G3 exibe uma visão equivocada da matemática em relação à resolução de problemas. De acordo com Pozzo (1998), estudantes criam e cultuam mitos geralmente oriundos da ação didática de seus professores, e para esse autor:

> "Os problemas matemáticos têm uma e somente uma resposta correta. Existe somente uma forma correta de resolver um problema matemático e, normalmente, o correto é seguir a última regra demonstrada em aula pelo professor. Os estudantes 'normais' não são capazes de entender Matemática; somente podem esperar memorizá-la e aplicar mecanicamente aquilo que aprenderam sem entender. Os estudantes que entenderam Matemática devem ser capazes de resolver qualquer problema em cinco minutos ou menos. A Matemática ensinada na escola não tem nada a ver com o mundo real. As regras formais da Matemática são irrelevantes para os processos de descobrimento e de invenção" (Pozo, 1998, p. 46).

Essa visão equivocada emergiu na resolução, e se trata de uma crença do senso comum de que *na matemática há um único caminho que sempre conduz a uma resposta correta*. Desse modo, ao utilizar o processo recursivo, os estudantes se deparam com o fato de que a população inicial da nova colmeia nunca se extinguirá. De fato, o objetivo não é estudar a degradação da colmeia e sim seu desenvolvimento. Porém, havia um estranhamento entre os estudantes do grupo, mesmo sabendo que esse modelo corresponde ao primeiro estágio de 21 dias em que não há nascimento de abelhas, e que após esse intervalo de tempo a colmeia volta a crescer.

Esse equívoco pode ser considerado uma misconcepção pois, supostamente é um conceito que está em formação, visto que esses estudantes estavam no primeiro ano do curso

de Matemática. Há uma confusão sobre o que é a Matemática e suas representações. É inevitável que isso ocorra pois, desde as séries iniciais, os estudantes podem ser levados a pensar que a matemática é infalível, precisa e exata, desse modo consideramos essa misconcepção inevitável. Essa é uma misconcepção necessária e temporária, que provavelmente será superada ao longo da vida acadêmica desses estudantes.

Essa misconcepção não emergiu de um erro, mas sim de um desconforto gerado pela insatisfação dos estudantes com o encaminhamento da professora-pesquisadora para a construção do modelo. Na concepção dos estudantes o modelo *correto* deveria fornecer o resultado $P_{40} = 0$, o que não ocorre na função $P_n = (0{,}975)^n \cdot P_0$, motivo pelo qual E11 diz "*não faz sentido eu trabalhar com essa função*". O raciocínio dos estudantes é, se não nascessem mais abelhas, a população teria que se extinguir.

Diante da insatisfação dos estudantes, a professora-pesquisadora sugeriu que os mesmos investigassem outras abordagens matemáticas para o problema. Um passo para a superação dessa misconcepção se deu após o término da atividade de modelagem, na elaboração do relatório. Na entrega do relatório, o G3 apresentou mais três abordagens que haviam pesquisado para resolver o problema do crescimento da colmeia, sendo que uma delas tem a mesma resposta para a situação-problema que a abordagem sugerida pela professora-pesquisadora (Quadro 5.7). A atividade motivou os estudantes a buscarem outras abordagens para a resolução do problema. Nota-se que o uso da ferramenta tecnológica se fez presente nas abordagens apresentadas, sendo um recurso utilizado como meio de visualização e auxiliar na construção dos modelos conforme já apontou Almeida, Castro e Silva (2021). Além disso, em sua resposta sobre a experiência do grupo com a atividade de modelagem, o G3 mostra indícios de que a modelagem matemática possibilitou um novo olhar sobre o fazer matemática (Quadro 5.7).

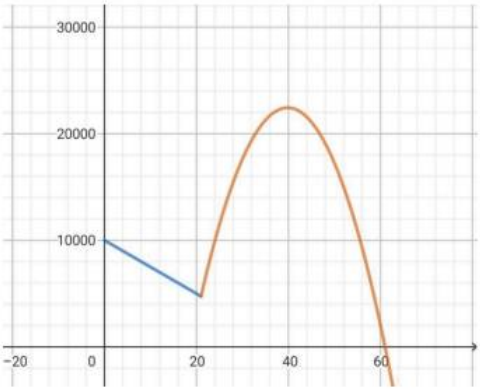
Quadro 5.7 – Um novo olhar para a Matemática

Ideia de modelo alternativo 1

- **Taxa de mortalidade:** $\frac{n}{40}$
- **Taxa de sobrevivência:** $(1 - \frac{n}{40})$
- **Nascimento:** $Bn = (n - 21).2000 \quad [n \geq 21]$

◆ **1° estágio:** $0 \leq n \leq 21$
$Pn = Po(1 - \frac{n}{40})$
$Po = 10000$
$Pn = Po(1 - \frac{n}{40}) \Rightarrow Pn = 10000.(1 - \frac{n}{40})$

◆ **2° estágio:** $n \geq 21$
$Ao = P(21) = 4750$
$Pn = [Ao + Bn].(1 - \frac{n}{40})$
$Pn = [4750 + 2000(n - 21)].(1 - \frac{n-21}{40})$

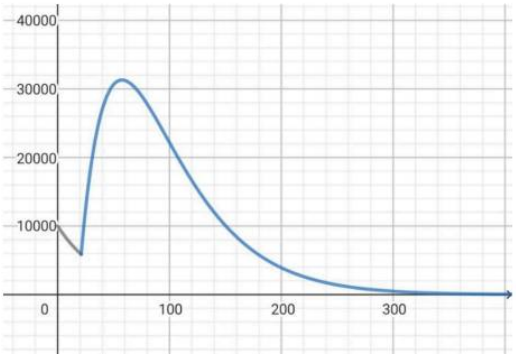


Ideia de modelo alternativo 2

- **Taxa de mortalidade:** $(0,025)^n$
- **Taxa de sobrevivência:** $(0,975)^n$
- **Nascimento:** $Bn = (n - 21).2000 \quad [n \geq 21]$

◆ **1° estágio:** $0 \leq n \leq 21$
$Po = 10000$
$Pn = Po(0,975)^n \Rightarrow Pn = 10000.(0,975)^n$

◆ **2° estágio:** $n \geq 21$
$Ao = P(21) = 5876$
$Pn = [Ao + Bn].(0,975)^n$
$Pn = [5876 + 2000(n - 21)].(0,975)^n$



Ideia de modelo alternativo 3 (Completamente Linear)

1°estágio: Adaptação (só morrem)
2°estágio: Nascimento (Nascem novas e morrem velhas)
3°estágio: Só nascem novas
4°estágio: Nascem e morrem na mesma proporção

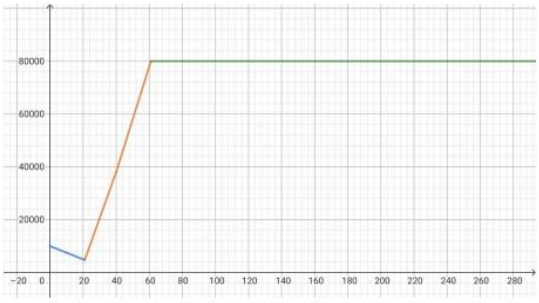
- **Taxa de mortalidade:** $250.n \quad [n \leq 40]$
- **Taxa de mortalidade:** $0.n \quad [40 \leq n \leq 61]$
- **Taxa de mortalidade:** $2000.(n - 61) \quad [n \leq 61]$
- **Nascimento:** $Bn = (n - 21).2000 \quad [n \geq 21]$

◆ **1° estágio:** $0 \leq n \leq 21$
$Po = 10000$
$Pn = Po - 250n \quad [n \leq 21]$
$Pn = Po - 250.n \Rightarrow Pn = 10000 - 250.n$

◆ **2° estágio:** $21 \leq n \leq 40$
$Ao = P(21) = 4750$
$Pn = [Ao + Bn] - 250.(n - 21)$
$Pn = [4750 + 2000(n - 21)] - 250.(n - 21)$

◆ **3° estágio:** $40 \leq n \leq 61$
$Co = P(40) = 38000$
$Pn = [Co + Bn] - 0.(n - 40)$
$Pn = [38000 + 2000(n - 40)]$

◆ **4° estágio:** $61 \leq n$
$Do = P(61) = 8000$
$Pn = [Do + Bn] - 2000.(n - 61)$
$Pn = [80000 + 2000(n - 61)] - 2000.(n - 61)$
$Pn = 80000$



[...] normalmente seguimos um padrão de uma aprendizagem nunca suficientemente pesquisadora e investigadora, mas, com o avançar do curso temos observado diversos modos de se trabalhar algum conhecimento específico.

[...] a modelagem matemática está diretamente ligada com fatos do cotidiano e necessidades sociais, o que também traz uma resposta a uma pergunta muito comumente observada quando abordamos um novo conteúdo em sala de aula: “para que usarei isso?”.

Fonte: Dados da pesquisa 2025

Nesse episódio, a construção do modelo revelou uma misconcepção dos estudantes sobre o fazer matemática. A crença errônea dos estudantes foi exposta ao trabalharem com procedimentos que colocaram em dúvida a utilização da matemática para resolver o problema.

A misconcepção impulsionou os estudantes a ir além dos resultados obtidos e buscar outras estratégias de resolução. Denominamos essa misconcepção *a matemática sempre traz uma única solução correta*.

5.2 Análise da atividade *Ajustando medidas em um equipamento de musculação*

Nesta atividade foi selecionado um episódio em que uma misconcepção dos estudantes emergiu no desenvolvimento da atividade de modelagem. Esta foi a segunda atividade de modelagem matemática desenvolvida pelos estudantes do minicurso ofertado na disciplina de Transportes na Engenharia Civil. Para a realização da atividade de modelagem, foi entregue o ciclo instrucional para que recorressem a ele sempre que necessário. O episódio analisado ocorreu na fase da resolução, no desenvolvimento da atividade do G4T1.

5.2.1 Episódio 5

No diálogo da professora-pesquisadora com os estudantes durante a resolução, foi revelada uma dificuldade dos estudantes a respeito de um conceito do desenho geométrico. Os estudantes não relacionavam os procedimentos do AutoCad com o conceito matemático envolvido. No Quadro 5.8 os excertos do diálogo entre a professora-pesquisadora e os estudantes do G4T1 são exibidos.

Quadro 5.8 – Buscando uma intersecção

Percebendo o equívoco dos estudantes, a professora-pesquisadora os questionou a fim de verificar seus procedimentos para obter os resultados, como mostra o diálogo com o grupo:

Prof: Como vocês estão trabalhando?
E13: Colocando esse ângulo (ângulo de 157,5°), ficaria nesse ponto (o lugar do encaixe) então ele viria desse ponto aqui até esse outro ponto aqui, num primeiro movimento (rotação da haste). Daí, o que eu fiz, eu passei todos os movimentos (da haste livre) aqui dessa parte fixa pra cá, daí eu ajustei todos os ângulos que foram dados para ajustar os movimentos (da haste livre). Eu movi para cima e rotacionei para ver onde bate, mas isso não daria um cálculo matemático, a gente não está achando o valor (posição da haste no encaixe), mas aí seria por tentativa, desenhando...
Prof: Sim, mas existe uma justificativa geométrica para obter esse resultado, por que você chega nesse resultado fazendo esse procedimento?
E13: Nós temos um ponto fixo e uma barra que pode bascular, à medida que o encosto vai subindo a haste vai se ajustando nos encaixes, então ela se ajusta conforme sobe e desce.
E14: A gente tá fechando um triângulo nesse desenho, uma forma geométrica.
Prof: Sim, você poderia encontrar o resultado utilizando a trigonometria também. Mas vocês estão utilizando o desenho geométrico, então quais são os elementos que vocês estão utilizando para chegar no resultado desejado?
E13: Esse ajuste não bate com essa linha aqui, meio que saiu por tentativa e erro
E15: Mas dá para tentar melhorar...
Prof: Então você está fazendo por tentativa e erro para chegar no resultado?
E13: Isso.
Prof : Você está fazendo por tentativa e erro por que não sabe qual é o elemento que deve ser utilizado para obter o resultado, mas você sabe que está faltando algo para justificar o seu procedimento, certo?

E13: Exato.
Prof: Existe esse elemento geométrico, e ele é preciso. Pensem nos elementos que vocês estão utilizando: ponto reta, circunferência.

[...] Discussão entre os estudantes:
E13: Eu pensei nessa relação do arco com o ponto, eu consigo rebater esse ponto aqui, eu acho...
E14: Não sei como...
E13: Eu não sei o que isso pode significar...
E14: O comprimento?
E13: Olha aqui, essa é a relação que a gente tem que fazer, o arco, ele bate aqui, tá vendo? Essa distância é maior, com certeza vai ser maior...
E14: É o comprimento do arco? Você pode medir ele, tem um comando
[:]
E16: Gente, nós temos dois lados do triângulo definido, é só definir esse lado de baixo
E13: Eu estava pensando nisso também
E14: Mas não é um triângulo
E14: Ah é um quadrilátero, não dá. E se usar a projeção horizontal?
E13: Não sei, acho que não dá.

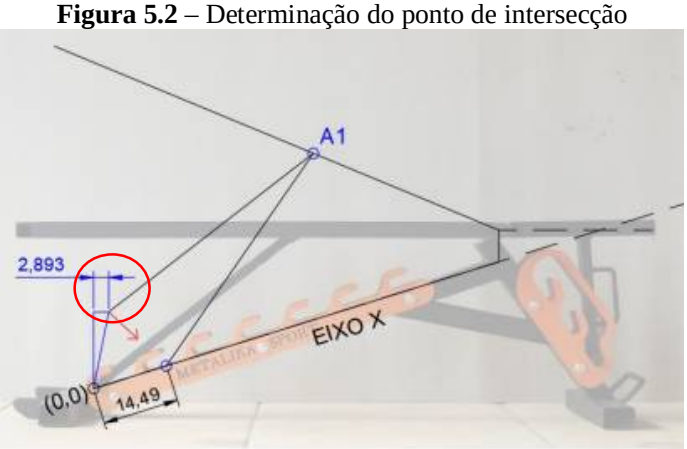
[...] Discussão com a professora-pesquisadora:
E14: Eu não sei fazer
E13: É eu também não. Eu não sei uma forma de interceptar ele em um ponto preciso aqui no AutoCad. Deve ter um jeito, mas eu não sei. É, eu acho que não tem... da forma como a gente está pensando não tem
E14: Exato
E13: Se tivesse como fazer a rotação seria mais fácil. Professora dá uma dica para gente! A gente sabe que é uma relação do arco com onde ele bate aqui, mas a gente esqueceu como é que faz...
Prof: Então, essa solução é o encontro de dois elementos geométricos. Esse encontro é a intersecção, um ponto de intersecção. A intersecção do quê está produzindo esse ponto?
Prof: Essa haste fica livre, eu posso imaginar o lugar geométrico de todos os pontos da haste quando você move ela. O AutoCad possui os comandos para vocês construírem essa intersecção.

Fonte: Dados da pesquisa, 2025

Os estudantes perceberam na matematização a possibilidade de associar conceitos do desenho geométrico à imagem da estrutura do banco reclinável e reconheceram procedimentos que poderiam realizar utilizando o AutoCad. Desse modo, optaram por uma abordagem geométrica para a construção do modelo.

Embora os estudantes utilizassem os comandos adequados do AutoCad para a construção do modelo, eles não estabeleceram a relação entre a linguagem natural e a linguagem matemática necessária para resolver o problema de ajustar a posição dos encaixes de um banco reclinável para atender aos ângulos pretendidos. Era necessário determinar um ponto de intersecção entre a semirreta da base dos encaixes e a circunferência com centro no eixo do assento e raio o comprimento da haste livre como mostra a Figura 5.2.

Figura 5.2 – Determinação do ponto de intersecção



Fonte: Dados da pesquisa, 2025

Durante a resolução observa-se a confusão na fala de E13 "*Eu movi para cima e rotacionei para ver onde bate, mas isso não daria um cálculo matemático, a gente não está achando o valor, mas aí seria por tentativa, desenhando...*". O estudante obteve a circunferência e a semirreta, mas não enxergou o ponto de intersecção como o resultado pretendido, em lugar disso, visualizava que a posição do encaixe é obtida quando a haste *bate* na base, ou seja, de forma equivocada ele pensava em se tratar de um ponto de tangência, e isso sinaliza que o estudante não tinha uma ideia clara de que esta posição é o ponto de intersecção entre a semirreta e a circunferência. Desse modo, podemos considerar que há uma confusão entre o ponto de intersecção e o ponto de tangência, sinalizando a misconcepção.

A tecnologia favoreceu a emergência da misconcepção relativa ao conceito de intersecção em matemática, visto que a ferramenta possibilita várias tentativas dos estudantes em determinar a posição desejada do encaixe para formar o ângulo pretendido. Possivelmente essa misconcepção é um conceito que ainda está em formação, pois falta uma percepção espacial mais aguçada nos estudantes para visualizar o lugar geométrico do encontro entre a semirreta e a circunferência. Quando o E13 diz "*Eu não sei uma forma de interceptar ele em um ponto preciso aqui no AutoCad*", há um indício de que ainda há uma confusão entre objeto e representação que precisa ser superada, pois o estudante utiliza o termo *interceptar* mas ainda não o relaciona com o ponto de intersecção. Essa misconcepção pode ser evitável, na medida que os estudantes têm acesso a ferramentas tecnológicas que podem ser utilizadas para se trabalhar diversas representações do mesmo objeto.

Vendo que os estudantes não conseguiam finalizar o modelo geométrico para determinar a posição do encaixe para formar o ângulo desejado, a professora-pesquisadora deu algumas orientações para que os estudantes pudessem buscar o conceito, e realizar o procedimento

correto. Assim que a professora-pesquisadora explicou que o resultado que eles pretendiam é o ponto de intersecção, o grupo ainda fez algumas tentativas utilizando o AutoCad, e conseguiu finalizar a construção do modelo geométrico e implementá-lo para a obtenção das posições do encaixe para os outros ângulos. Sendo assim a misconcepção foi ultrapassada durante a resolução com o auxílio da ferramenta tecnológica.

Neste caso podemos olhar para a misconcepção como uma oportunidade de aprender sobre a utilização da ferramenta tecnológica. Apesar de dominar os comandos para construir o modelo geométrico, a falta de compreensão do objeto matemático foi um obstáculo para a sua realização. Para os estudantes a misconcepção mostrou que não basta saber os comandos da ferramenta tecnológica, também é necessário conhecer o objeto matemático. Denominamos essa misconcepção como *confusão entre ponto de tangência e ponto de intersecção*.

5.3 Análise da atividade *Manutenção de vias afálticas*

Esta foi a terceira atividade desenvolvida pelos estudantes do minicurso ofertado na disciplina de Transportes na Engenharia Civil. Nesta atividade, foram identificadas duas misconcepções relativas a conceitos não matemáticos na elaboração do relatório e apresentação dos resultados. Dois episódios são selecionados para análise, em que misconcepções são identificadas no G2T2 e no G3T1.

5.3.1 Episódio 6

No Quadro 5.9 são exibidos excertos do relatório dos estudantes do G2T2. Após o término da atividade o grupo de estudantes entregou o relatório, e nele a professora-pesquisadora percebeu que, apesar dos resultados obtidos pelo modelo estarem corretos, uma interpretação errônea na decisão da prioridade de manutenção das ruas foi feita pelo grupo.

Quadro 5.9 – Ordem para prioridade de manutenção

O G2T2 apresentou em seu relatório uma interpretação dos resultados com base em um critério não condizente com o critério definido na inteiração para resolver o problema: Critérios para decisão de manutenção das vias - Hierarquia Viária; - Medidas de Comportamento; - Resposta e Desempenho; - Deterioração; - Características de operações; - Nível de Severidade do Buraco; (Critério selecionado)

Com base nos resultados de suas áreas obtidas, podemos ranquear os buracos de forma que fique definido qual é a ordem de prioridade de manutenção dos buracos estudados, dispondo eles da seguinte forma: 01º Lugar: Buraco 1 da Rua A 02º Lugar: Buraco 3 da Rua B 03º Lugar: Buraco 1 da Rua B 04º Lugar: Buraco 2 da Rua A 05º Lugar: Buraco 2 da Rua B Sendo dessa forma classificado o Buraco 1 da Rua A com uma maior necessidade de manutenção.

Fonte: Dados da pesquisa, 2025

Nesta atividade foi investigada uma situação-problema no contexto da engenharia civil em que, as ruas A e B com defeitos asfálticos são apresentadas, e o problema a ser resolvido solicita critérios que devem ser utilizados para decidir a prioridade de manutenção entre duas ruas com defeitos asfálticos.

O critério do nível de severidade de um buraco foi escolhido para tomar tal decisão. Essa escolha é justificada com base em um argumento racionalmente fundamentado, visto que, esse critério é bem definido de acordo com a literatura (Domingues, 1993). Para utilizá-lo é necessário determinar a área da superfície dos buracos que estão em cada rua. Desse modo, os estudantes utilizaram a modelagem matemática para obter o valor dessas áreas.

Inicialmente o G2T2 obteve os valores das áreas utilizando o AutoCad. A professora-pesquisadora sugeriu então que o grupo obtivesse esses valores utilizando conceitos matemáticos. Sendo assim, o grupo escolheu uma abordagem numérica para determinar a área da superfície dos buracos em cada uma das vias asfálticas, utilizando a regra 1/3 de Simpson.

No desenvolvimento da atividade, o grupo realizou a construção do modelo e obteve resultados satisfatórios ao comparar os resultados obtidos pela abordagem numérica com os resultados obtidos utilizando o GeoGebra. No entanto, foi observado no relatório dos estudantes que, ao analisar e interpretar os resultados, o grupo ranqueou os cinco buracos colocando em primeiro lugar aquele cuja área da superfície é a maior. Desse modo, o G2T2 tomou a decisão e elegeu o Buraco 1 da Rua A em resposta à questão da prioridade de manutenção. Embora o resultado matemático tenha apontado o buraco com a maior área, a decisão não deve ser tomada com esse argumento, e sim utilizando o critério do nível de severidade. Além do mais, o grupo elegeu como prioritário um dos buracos e não uma das ruas.

Utilizando o critério do nível de severidade a prioridade de manutenção é da rua B. Infere-se que o grupo ao tomar a decisão olhou para somente o resultado matemático, não utilizando o critério escolhido. A confusão pode residir no fato de que o resultado matemático

chama a atenção para o tamanho da área buraco, levando a uma conclusão errônea de que o buraco maior deve ser restaurado primeiro. É um conhecimento que funciona bem no domínio da comparação do tamanho das áreas, mas não funciona quando se tem que seguir um critério bem estabelecido. Desse modo pode-se caracterizar uma misconcepção relacionada ao uso inadequado da Matemática para decidir qual via terá prioridade de manutenção. O raciocínio utilizado pelo grupo é uma generalização local, pois o G2T2 utilizou uma comparação do senso comum para um contexto técnico. Adicionalmente, podemos dizer que esse raciocínio é um indício de uma misconcepção evitável. Para superar a misconcepção na tomada de decisões é necessário desenvolver atividades relacionadas a situações-problema em que, os conhecimentos específicos da engenharia civil que requerem tomadas de decisão sejam trabalhados.

Na apresentação dos resultados, o grupo pode expor seus resultados e julgamentos de valor e verificar os resultados dos outros grupos, e desse modo, observou que apesar da área do buraco 1 ser relativamente maior que a área dos outros buracos, deve-se levar em conta as outras condições requeridas para determinar o nível de severidade do buraco, além de adicionar à decisão os outros buracos que pertencem à mesma via asfáltica. Considerando a profundidade dos buracos (Quadro 4.12) e a quantidade de buracos em cada via, a rua que tem prioridade de manutenção é a Rua B. Desse modo, foi possível contribuir para a superação do equívoco realizado pelo grupo.

Nessa situação-problema a misconcepção emergente é relativa a conceitos não matemáticos. Ao elaborar o relatório e a apresentação, os estudantes mostram como utilizam seus conhecimentos e expõe suas compreensões, e dessa atividade emergiu a misconcepção da utilização inadequada de conceitos matemáticos para responder à situação-problema.

Um ponto positivo da ocorrência dessa misconcepção para esses estudantes é que, eles puderam experimentar como a matemática deve ser utilizada quando é necessário atender a normas técnicas, que são requeridas no contexto da prática de sua futura área de atuação profissional. Denominamos essa misconcepção *utilizar o senso comum na tomada de decisão*.

5.3.2 Episódio 7

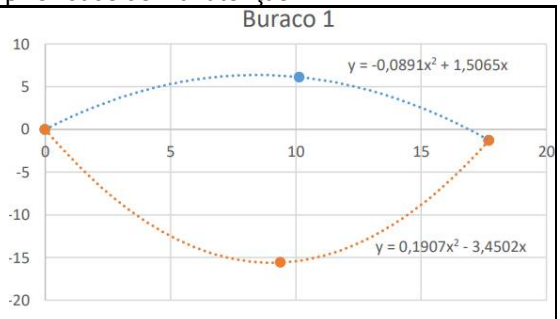
No sétimo episódio são exibidos excertos do relatório dos estudantes do G3T1 no Quadro 5.10. Ao analisar o relatório após o término da atividade, a professora-pesquisadora verificou que, havia um erro processual na abordagem matemática ao problema que solicita critérios que devem ser utilizados para decidir entre duas ruas com defeitos asfálticos, qual tem

a prioridade de manutenção. Além disso, o G3T1 realizou uma interpretação equivocada dos resultados obtidos na construção do modelo em sua decisão.

Quadro 5.10 – Volume para prioridade de manutenção

	Método 1	Método 2	Dif
Buraco 1	204,25	259,26	26,93%
Buraco 2	6.878,56	12.713,80	84,83%
Buraco 3	449,46	626,03	39,28%
Buraco 4	2.701,08	2.277,88	-15,67%
Buraco 5	554,19	674,87	21,78%

A maior diferença encontrada ocorreu no buraco 2, com uma diferença de 84,83%, indicando um valor acima da média quando se comparado aos demais. Os outros buracos tiveram variações mais brandas, sendo o buraco 4 o que menos sofreu diferença. As mudanças de resultados são resultados dos diferentes métodos empregados, visto que se baseiam em perspectivas distintas



O volume total estimado dos buracos da Rua A é de 78.974,73 cm³ enquanto que, na Rua B o volume total estimado dos buracos é de 24.571,30 cm³. Dessa forma, a Rua A teria prioridade de manutenção.

Fonte: Dados da pesquisa, 2025

Inicialmente o G3T1, calculou a área da superfície do buraco utilizando o AutoCad. Seguindo a proposta da professora-pesquisadora para obter a área com conceitos matemáticos, o grupo utilizou integrais definidas para calcular as áreas irregulares. Para o cálculo da integral o grupo determinou funções de segundo grau que se ajustam ao contorno de cada buraco. Utilizando a integração, todas as áreas foram obtidas.

Na análise dos resultados chama a atenção a diferença dos valores obtidos pelo AutoCad e pela integração. As funções obtidas estavam muito simplificadas e assim os valores das áreas pela integral ficaram muito diferentes das áreas obtidas pelo AutoCad. Inferimos que neste caso trata-se de um erro processual pois, se o grupo tivesse utilizado mais pontos para obter as funções que se ajustam ao contorno de cada buraco, poderia ter determinado uma função mais adequada ao contorno da superfície do buraco. Ao invés disso, o grupo justificou a diferença dos valores por causa da diferença dos métodos. Neste caso, o grupo poderia ter retornado às etapas anteriores e refinado o modelo, ou optado por outra abordagem e, embora o grupo tivesse o ciclo instrucional em mãos, essa ação não foi observada.

Mesmo com a diferença dos valores o grupo escolheu os resultados das integrais para as áreas para decidir qual rua tem a prioridade de manutenção. Com esses resultados o grupo calculou o volume de cada buraco, e na sequência calculou o volume total dos buracos de cada rua. Desse modo a resposta à situação-problema foi que a Rua A tem a prioridade de manutenção. Portanto, a decisão está pautada na utilização dos conceitos matemáticos, levando em conta o senso comum no lugar da norma técnica, o que mostra uma generalização local. De

fato, o volume dos buracos da Rua A é maior, mesmo calculando com os valores do AutoCad. Porém, para essa decisão o critério do nível de severidade deveria ter sido utilizado.

O equívoco do G3T1 ao tomar a decisão considerando apenas os resultados matemáticos, aponta para uma misconcepção. Os volumes totais são notavelmente diferentes, o que faz a atenção se voltar para que a decisão seja feita com base nesse argumento. A comparação entre a soma dos valores dos volumes dos buracos de cada rua, obtida pelo grupo, aponta para que a prioridade de manutenção seja da rua A. Porém, pelo critério do nível de severidade a prioridade é da rua B. A misconcepção da utilização do senso comum para decidir a prioridade de manutenção comparando os volumes buracos é um conhecimento que pode funcionar em determinadas situações, porém não funcionou quando foi utilizada nessa situação, gerando uma decisão com base no senso comum, no lugar de se utilizar o conhecimento técnico. Esta ação configura uma misconcepção evitável em que o senso comum é trazido para o meio científico, e isto independe das opções metodológicas do professor.

Durante a apresentação dos resultados, o G3T1 constatou o erro de sua interpretação, que conduziu a uma decisão errônea para responder à situação-problema. Apesar do volume total dos buracos da Rua A ser consideravelmente maior que o volume total dos buracos da Rua B, o grupo deveria ter utilizado o critério do nível de severidade, que é um dos critérios técnicos da prática da engenharia civil a ser utilizado nessa situação. A socialização dos resultados contribuiu para superar o equívoco do G3T1 pois, houve grupos que mediante os conceitos matemáticos abordados, e a utilização apropriada do critério do nível de severidade, concluíram que a Rua B tem a prioridade de manutenção.

Após apresentarem seus resultados, os estudantes compreenderam que é devido utilizar o critério escolhido para a tomada de decisão. Isso reforça um aprendizado que vai além das fronteiras acadêmicas, pois os estudantes experimentaram uma situação-problema situada na prática da engenharia civil, em que é necessário analisar os resultados matemáticos obtidos considerando argumentos técnicos para tomar uma decisão.

A misconcepção emergente nesta atividade foi identificada no relatório dos estudantes. Semelhante ao G2T2, o G3T1 tomou sua decisão com base nos resultados matemáticos, sem levar em consideração que havia um critério técnico que deve ser utilizado. Entretanto, o G3T1 obteve resultados diferentes do G2T2 e os interpretou considerando outros conceitos matemáticos para tomar sua decisão. Sendo assim, neste episódio constata-se a manifestação da misconcepção *utilizar o senso comum na tomada de decisão*, caracterizada no episódio seis.

A análise das misconcepções emergentes nas atividades de modelagem empreendida em cada um dos sete episódios, possibilitou a identificação e caracterização de seis misconcepções, que são apresentadas de forma sintetizada no Quadro 5.11.

Quadro 5.11 – Misconcepções identificadas nos episódios

Episódio	Conceito	Misconcepção	Natureza	Origem	Forma didática
1	Variáveis do problema	Confusão entre variável e variáveis do problema	Generalização local	Funciona bem em um domínio, mas não em outro	Inevitável
2	Conjunto dos números naturais	Confusão entre conjunto e elemento de um conjunto	Conceito embrionário	Confusão entre objeto e representação	Inevitável
3	Gráfico de uma função de variáveis discretas	O gráfico de uma função no plano cartesiano é sempre uma linha contínua	Generalização local	Funciona bem em um domínio, mas não em outro	Evitável
4	Matemática	A matemática sempre traz uma única solução correta	Conceito embrionário	Confusão entre objeto e representação	Inevitável
5	Ponto de intersecção	Confusão entre ponto de tangência e ponto de intersecção	Conceito embrionário	Confusão entre objeto e representação	Evitável
6 e 7	Nível de severidade	Utilizar o senso comum na tomada de decisão	Generalização local	Funciona bem em um domínio, mas não em outro	Evitável

Fonte: Autora, 2025

5.4 Apresentando interlocuções entre modelagem matemática e misconcepções

O processo analítico relativo aos sete episódios, extraídos do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, nos leva a identificar e caracterizar um conjunto de seis misconcepções que inclui: *confusão entre variável e variáveis do problema; confusão entre conjunto e elemento de um conjunto; o gráfico de uma função no plano cartesiano é sempre uma linha contínua; a matemática sempre traz uma única solução correta; confusão entre ponto de tangência e ponto de intersecção;* e *utilizar o senso comum na tomada de decisão.*

No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, realizadas em cada contexto da pesquisa, constatou-se a ocorrência de misconcepções. No contexto um observamos a emergência de uma misconcepção previamente identificada no teste diagnóstico, bem como de outras misconcepções dos estudantes, tanto de conceitos matemáticos como de conceitos não matemáticos. Da mesma forma foi observado no contexto dois a emergência de misconcepções dos estudantes relativas a conceitos matemáticos e não matemáticos. No desenvolvimento das atividades de modelagem, as características e especificidades relativas às

diferentes fases, contribuíram para a emergência de uma variedade de misconcepções.

Uma vez observada a emergência das misconcepções já incorporadas pelos estudantes nas atividades de modelagem pela professora-pesquisadora, intervenções foram realizadas para auxiliar os estudantes no enfrentamento de tais misconcepções a fim de superá-las. Estas ações foram realizadas pela professora-pesquisadora tanto no primeiro contexto como no segundo contexto. Pode-se observar a superação de algumas misconcepções durante o desenvolvimento das atividades de modelagem. Mesmo não sendo possível constatar a superação de algumas das misconcepções, as ações da professora-pesquisadora durante a condução das atividades de modelagem possibilitaram sua provável superação.

Considerando o meio de ocorrência e enfrentamento dessas misconcepções dentro de cada contexto, apontamos que a presente pesquisa sinaliza duas possibilidades: (1) *as especificidades e as características de atividades de modelagem matemática têm potencial para a manifestação de misconcepções;* (2) *misconcepções já incorporadas pelos estudantes podem ser superadas mediante demandas de uma atividade de modelagem matemática.*

Neste sentido, o planejamento das atividades de modelagem pode atender a objetivos instrucionais específicos de acordo com as intenções do professor (Ramos, 2020). Para Barbosa e Santos (2007), a organização da aula é orientada pelos propósitos do professor, e essa organização varia de acordo com seus propósitos, sendo que diferentes propósitos conduzem a formas diferenciadas de organização. Neste contexto, atividades de modelagem podem ser planejadas para promover a manifestação de misconcepções previamente identificadas em sala de aula ou, para conhecer misconcepções dos estudantes relativas a conteúdos já trabalhados, para possibilitar sua superação.

1) As especificidades e as características de atividades de modelagem matemática têm potencial para a manifestação de misconcepções

Atividades de modelagem matemática, conforme ponderamos no Capítulo 2, podem vir orientadas por um conjunto de ações expressas, de modo geral, em ciclos.

Nestas ações, a matematização requer a transição da linguagem natural para a linguagem matemática. Esta transição, entre outros aspectos, inclui a seleção de variáveis essenciais para a resolução do problema. Relativamente a este aspecto, é necessário que os estudantes

deliberem sobre o que é essencial e o que não é essencial para a escolha das variáveis, relacionando as características da situação e os conceitos matemáticos que representem essas características, e uma vez selecionadas, é feita a identificação de seus componentes (Almeida, 2022).

O não reconhecimento da seleção das variáveis essenciais do problema, foi indicativo de misconcepções. De fato, esse é o caso em que estudantes do Contexto 1 fazem uma confusão entre o que entendem como variável e o que devem selecionar como variáveis em uma atividade de modelagem matemática. Nesta situação, o que o estudante conhece como variável, pode não coincidir com o que ele deve considerar como variável para o estudo da situação. Ou seja, o estudante utiliza um conhecimento que funciona bem em determinado domínio, mas não em outro (D'Amore; Sbaragli, 2005; Balacheff; Gaudin, 2002). Assim, a misconcepção *confusão entre variável e variáveis do problema*, foi caracterizada a partir da necessidade gerada pela atividade de modelagem matemática.

No processo de resolução do problema, se dá a construção do modelo, que requer o domínio e uso de técnicas e procedimentos matemáticos, bem como a coordenação adequada de diferentes representações associadas aos objetos matemáticos, uso de ferramentas tecnológicas, visão de padrões. Entretanto esse processo de construção pode levar os estudantes ao uso de conceitos em formação ou generalizações locais, que conforme sugere Swan (2002), podem revelar misconcepções. Este parece ser o caso do equívoco dos estudantes em relação ao que é intersecção ou como pode se dar sua representação, conforme observado no episódio 5.

Santi e Sbaragli (2008) argumentam que o apego do estudante a uma de suas representações faz com que a conexão com outras representações não seja espontânea e uma ação didática específica é requerida para promover a superação dessa misconcepção.

Misconcepção como generalização local também se manifesta na construção do modelo. Um exemplo disso é a manifestação da misconcepção *o gráfico de uma função no plano cartesiano é sempre uma linha contínua*, em que a representação gráfica da função P_n do primeiro estágio do crescimento da colmeia no decorrer do tempo, foi feita com uma linha contínua, procedimento correto quando se trata de funções reais, no lugar de pontos que é a representação adequada quando se tem uma função com variáveis discretas. A utilização de ferramentas tecnológicas pode favorecer a emergência dessas misconcepções, atuando como

coadjuvantes na construção do modelo. Em particular podemos citar o GeoGebra pois, Pead, Bill e Muller (2007) consideram-no uma ferramenta digital que pode apoiar diferentes processos nas atividades de modelagem, e para Carreira et al. (2013), ele pode ampliar o contexto da modelagem matemática. A falta da coordenação adequada dos registros e o uso inadequado da tecnologia, neste caso, favoreceram a manifestação da misconcepção, uma vez que o estudante pode não coordenar adequadamente diferentes representações associadas aos objetos matemáticos, e utilizar comandos inadequados para obter resultados, como ocorreu na construção do gráfico da função P_n.

O professor ao planejar uma atividade de modelagem matemática no intuito de conhecer as misconcepções dos estudantes, pode criar oportunidades para modificar o seu entendimento, examinando inconsistências de suas interpretações, explorando suas crenças a fim de superá-las (Swan, 2002; Nesher, 1987). A misconcepção *a matemática sempre traz uma única solução correta*, é um exemplo disso. Esse tipo de misconcepção não emerge necessariamente de um erro, mas de um desconforto, insatisfação ou dúvida do estudante em relação às suas ações no desenvolvimento da atividade de modelagem.

A interpretação de resultados e validação requer que os estudantes analisem a resposta em relação à situação-problema (Almeida; Castro; Silva, 2021), e os resultados dessas análises podem ser observados nos relatórios e comunicação dos resultados. Nesse processo de avaliação, misconcepções podem emergir, uma vez que erros conceituais podem ocorrer na resolução do problema. Mesmo os erros processuais podem conduzir a uma misconcepção visto que, os resultados obtidos na resolução do problema também são analisados em relação à situação-problema. Um resultado errado pode ser utilizado como uma premissa para uma decisão. A misconcepção *utilizar o senso comum na tomada de decisão* é um exemplo disso pois, para tomar sua decisão, os grupos G2T2 e G3T1 se basearam na premissa incorreta do senso comum de que *o buraco visualmente maior é o que tem a maior área e maior volume e por isso deve ter a prioridade de manutenção*, e essa pode ser "uma estrutura conceitual inconsistente baseada em conhecimentos adquiridos anteriormente" (Nesher, 1987, p.33). Essa é uma misconcepção inevitável, uma vez que na concepção dos estudantes, resultados matemáticos são precisos e confiáveis (Pozzo, 1998), e pode-se dizer que essa é até uma causa sensata de erros (D'Amore; Sbaragli, 2005). As ações cognitivas comparar e distinguir ideias, e articular conhecimentos de diferentes áreas, são requeridas na análise e interpretação dos resultados (Almeida; Silva; Vertuan, 2012) e, se forem baseadas em misconcepções, podem

conduzir a resultados equivocados como os da atividade de modelagem da *Manutenção de Vias Asfálticas*.

Assim, a organização pedagógica da modelagem matemática, tendo como demandas o lidar com diferentes situações, bem como, com uma diversidade de conceitos e usos da matemática, pode ser um momento promissor para a emergência ou identificação de "ideias que são inconsistentes" conforme sugere Yip (1998, p. 461), ou revelam interpretações errôneas, como indica Chi (2005), apontando para a existência de misconcepções.

2) Misconcepções já incorporadas pelos estudantes podem ser superadas mediante demandas de uma atividade de modelagem matemática

Se, por um lado, misconcepções podem ser temporárias e não certamente negativas como indica D'Amore (1999), por outro lado, a intervenção didática do professor provê uma abordagem construtivista para a misconcepção na sala de aula. Neste sentido, práticas pedagógicas podem ter o potencial para colaborar ou para fomentar a superação. Esta ação de superação se manifestou em diferentes episódios considerados na presente pesquisa.

De fato, a *confusão entre conjunto e elemento de um conjunto*, inferido aos estudantes mediante o teste diagnóstico, encontrou na atividade de modelagem relativa ao crescimento da colmeia, respaldo para entendimento. A construção do modelo matemático, ancorado no Princípio da Indução Finita, foi um meio para os estudantes lidarem de forma acertada com elemento e conjunto.

A misconcepção de que o gráfico de uma função no plano cartesiano é sempre uma linha contínua, ao mesmo tempo em que se manifestou na atividade de modelagem também encontrou meios de superação. "Desfazer um pensamento decorrente de uma premissa incorreta" (Almeida; Silva; Brito, 2022, p.797), foi a ação necessária neste caso. Após a identificação pela professora-pesquisadora, encaminhamentos para o enfrentamento foram apontados e, em nova representação gráfica na mesma atividade, um gráfico formado por pontos para a função com domínio nos números naturais foi construído pelos estudantes.

O uso da tecnologia como meio de visualização e auxiliar na construção do modelo, favoreceu tanto a emergência como a superação de misconcepções. Nas atividades de modelagem ela pode se integrar em todas as fases, servindo como fonte de dados, ferramenta de visualização e suporte na criação de modelos matemáticos, atendendo a diferentes propósitos

e adequados ao que requer cada fase (Almeida; Castro; Silva, 2021; Almeida; Seki; Castro, 2024). Ferramentas tecnológicas tais como o GeoGebra, AutoCad e Excel, podem ampliar a compreensão do contexto, em particular o AutoCad, que no contexto da engenharia civil foi amplamente utilizado pelos estudantes. Essa ferramenta pode favorecer a emergência e contribuir para a superação de misconcepções, como foi o caso da misconcepção *confusão entre ponto de tangência e ponto de intersecção*, que emergiu na atividade *Ajustando medidas em um equipamento de musculação* em que, a implementação do modelo geométrico fornece o ponto de intersecção necessário para obter todas as posições do encaixe para a formação dos ângulos pretendidos.

Em termos gerais, atividades de modelagem matemática desenvolvidas proporcionam *feedback* aos estudantes sobre suas compreensões, e uma vez que a professora-pesquisadora identificou as misconcepções dos estudantes, pode proporcionar intervenções variadas, como explicações, formalização e sistematização de conceitos, discussões, entre outras, a fim de auxiliá-los na superação de suas misconcepções.

Quando o olhar se dirige para as possibilidade de que: (1) *as especificidades e as características de atividades de modelagem matemática têm potencial para a manifestação de misconcepções;* (2) *misconcepções já incorporadas pelos estudantes podem ser superadas mediante demandas de uma atividade de modelagem matemática*, apontamos as características da modelagem matemática e as ações do professor em seu planejamento e desenvolvimento que promovem a emergência e superação das misconcepções, concluindo que as atividades de modelagem matemática possuem um potencial para tratar de misconcepções.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa se propôs a *investigar interlocuções entre modelagem matemática e misconcepções dos estudantes.* A investigação do objetivo foi mediada por duas questões:

1) Que misconcepções podem emergir no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática?

2) Por que atividades de modelagem matemática servem como meio de superação de misconcepções previamente identificadas?

No intuito de alcançar o objetivo da pesquisa e responder a estas questões, atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas em dois contextos: a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I na Licenciatura em Matemática, e a disciplina de Transportes na Engenharia Civil.

No contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, a atividade e o tratamento de misconcepções pode promover nos estudantes novas formas de lidar com seus erros e dificuldades. A importância disso se deve ao fato de que eles serão futuros professores de Matemática e, suas misconcepções devem ser superadas para que não perpetuem essas misconcepções em suas aulas, seja na Educação Básica ou no Ensino Superior. O tratamento com as misconcepções também possibilitou um novo olhar sobre a Matemática, enquanto área do saber, que fundamenta sua formação profissional.

Quanto ao segundo contexto, o tratamento de misconcepções por meio das atividades de modelagem, possibilitou aos estudantes da engenharia civil, ter contato com a matemática que está por trás das técnicas, procedimentos e normas dos conteúdos pertinentes a área da Engenharia Civil, e que também utilizarão no contexto de sua atuação profissional.

Cabe destacar que a utilização da ferramenta tecnológica foi um coadjuvante, tanto na emergência, quanto na superação das misconcepções reveladas nas atividades de modelagem matemática. No contexto um os estudantes se beneficiaram da possibilidade de aprender novos comandos e de utilizar a tecnologia como parceira na resolução dos problemas. O tratamento com as misconcepções dos estudantes, possibilitou um aprofundamento na utilização de ferramentas tecnológicas, promovendo a familiarização dos estudantes com este recurso. De acordo com Goulart e Almeida (2020) a tecnologia utilizada como meio de visualização na atividade de modelagem matemática, pode ativar recursos semióticos como gráficos e tabelas,

que viabilizaram visualizações de aspectos matemáticos, e desse modo, pode-se constatar a emergência e superação de misconcepções em seu desenvolvimento.

Mesmo tendo familiaridade com as ferramentas tecnológicas utilizadas no desenvolvimento das atividades de modelagem, os estudantes do contexto dois perceberam que não basta ter o conhecimento computacional das ferramentas e comandos do *software*, é necessário relacioná-los ao conhecimento matemático que emerge na resolução da situação-problema. Por um lado, as dificuldades em trabalhar com os conceitos matemáticos requeridos na resolução do problema evidenciaram uma lacuna entre o conhecimento computacional das ferramentas e comandos do *software* e o conhecimento matemático, que fez emergir a misconcepção dos estudantes. Por outro lado, os estudantes encontraram meios de superação da misconcepção no decorrer da própria atividade de modelagem.

Uma gama de misconcepções emergiram nas diversas fases do ciclo de modelagem. Na matematização emergiram tanto misconcepções de conceitos matemáticos previamente identificados, como foi o caso da misconcepção *confusão de conjunto e elemento de conjunto* identificada no teste diagnóstico, quanto misconcepções de conceitos que ainda não haviam sido identificadas pela professora-pesquisadora. Na resolução emergiram tanto misconcepções relativas aos conceitos matemáticos requeridos na resolução da situação-problema, quanto misconcepções de conceitos não matemáticos. E por fim durante a socialização dos resultados emergiram misconcepções reveladas na interpretação e validação dos resultados. A emergência dessas misconcepções se deu mediante as especificidades e características das atividades de modelagem matemática relativas a cada fase, revelando assim o potencial de tais atividades para a sua manifestação.

Se por um lado misconcepções de estudantes emergem em atividades de modelagem, por outro lado as demandas requeridas nas atividades de modelagem podem promover a sua superação. Isso pode ser observado em diferentes situações. Na matematização, a professora-pesquisadora pode intervir sistematizando e formalizando conceito de conjunto dos números naturais no primeiro contexto. Durante a resolução, os estudantes desse mesmo contexto puderam superar a misconcepção o gráfico de uma função no plano cartesiano é sempre uma linha contínua na obtenção do modelo do segundo estágio da situação-problema. Na comunicação dos resultados, os estudantes do segundo contexto superaram a misconcepção *utilizar o senso comum na tomada de decisão* ao socializar os resultados de seu estudo com os outros grupos. No entanto, não foi possível constatar a superação de todas as misconcepções

que emergiram nas atividades de modelagem matemática, porém, alguns encaminhamentos dados no decorrer da atividade, propiciam o início do processo de superação.

Ao propor as atividades de modelagem nos dois contextos, a professora-pesquisadora forneceu informações preliminares e a questão a ser investigada da situação-problema da realidade apresentada. Dessa forma não se observou misconcepções de estudantes na fase da inteiração. Esse fato não garante que os estudantes não tinham misconcepções relativas aos conceitos mobilizados nessa fase, mas que, diante da forma como a atividade foi planejada conduzida, não houve espaço para a emergência de misconcepções.

Para além de tratar misconcepções, as atividades de modelagem matemática proporcionam diferentes aprendizados em relação a diversas situações, e isso se constitui um *diferencial* em utilizar atividades de modelagem para tratar misconcepções no contexto do ensino e da aprendizagem. Visando superar misconcepções, os encaminhamentos da professora-pesquisadora oportunizaram aos estudantes da Licenciatura em Matemática: revisitar outros conceitos matemáticos, conhecer novos comandos do GeoGebra e do Excel, buscar novas abordagens para a resolução de um problema, um novo olhar sobre a Matemática enquanto área do saber. Para os estudantes da Engenharia Civil o tratamento das misconcepções: promoveu o entendimento de que não basta ter o domínio da ferramenta tecnológica, é necessário conhecer o objeto matemático o qual se quer trabalhar; mostrou que o conhecimento matemático deve estar adequado ao conhecimento técnico ao se tomar decisões em situações-problema relativas à prática profissional. Essas situações de aprendizagem é o que pode-se relacionar com a conotação positiva defendida por D'Amore (1999), Swan (2002), e D'Amore e Sbaragli (2005) para misconcepções.

Embora as abordagens nos dois contextos sejam diferentes, ambas as áreas contribuem para a investigação de misconcepções de estudantes, seja para melhorar a formação dos futuros professores na Licenciatura em Matemática, ou para garantir a utilização adequada da matemática em problemas práticos na Engenharia Civil. Nesta pesquisa, a investigação pode identificar dificuldades comuns a fim de contribuir com uma alternativa pedagógica para o tratamento de misconcepções em diferentes áreas do conhecimento. Por um lado, na Licenciatura em Matemática o desafio está em compreender e ensinar conceitos matemáticos o que permite analisar a origem das misconcepções e desenvolver encaminhamentos para superá-las, o que impacta diretamente o ensino básico e superior. Por outro lado, na Engenharia Civil, o desafio é utilizar a matemática adequadamente em situações-problema da realidade, buscando

minimizar os impactos das misconcepções na prática profissional futura, garantindo que os cálculos e modelos matemáticos sejam aplicados corretamente em projetos reais.

Considerando os dois contextos, as possibilidades para a interlocução entre misconcepções e modelagem matemática, se caracterizam por meio de duas possibilidades: (1) *as especificidades e as características de atividades de modelagem matemática têm potencial para a manifestação de misconcepções;* (2) *misconcepções já incorporadas pelos estudantes podem ser superadas mediante demandas de uma atividade de modelagem matemática*.

Assim, o potencial da modelagem matemática, por um lado provê meios de enfrentamento e superação e, por outro lado, suas demandas podem proporcionar a identificação de misconcepções para o professor. Desse, como sugerem Swan et al. (2007), a presente pesquisa dá indicativos de quê, o entorno da Matemática requerido pela modelagem, é promissor para os estudantes lidarem com misconcepções. Entretanto, de forma complementar ao que indicam Pla-Castells, Melchor e Chaparro (2021), a presente pesquisa, aponta que também no fazer requerido pela modelagem matemática, podem se estruturar meios para misconcepções emergentes.

É preciso ponderar entretanto que, conforme já apontam D'Amore e Sbaragli (2005), misconcepçoes podem ser evitáveis, e isso implica em meios de ensino pertinentes. A análise da evitabilidade e inevitabilidade das misconcepções, todavia, requer seguir processos longitudinais de formação em matemática, o que pode ser objeto de pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

Associação Brasileira de Estudos das Abelhas (A.B.E.L.H.A) Disponível em: <https://abelha.org.br/glossario/colonia/#:~:text=Numa%20col%C3%B4nia%20de%20abelha%20mel%C3%ADfera,dependendo%20da%20esta%C3%A7%C3%A3o%20do%20ano>. Acesso em: 17 de abril de 2024.

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n.1, p. 19–30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W. Estratégias heurísticas como meios de ação em atividades de Modelagem Matemática. **Com a palavra, o professor**, v. 5, n. 11, p. 220-236, 2020.

ALMEIDA, L. M. W. Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. **VIDYA**, v. 42, n. 2, p. 121-145, 2022.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência & Educação**, v. 11, n. 3, p. 483–498, 2005.

ALMEIDA L. M. W.; CASTRO, É. M. V.; SILVA, M. H. S. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 14, n. 2, p. 383-406, 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; KOWALEK, R. M.; SOUZA, F. L. Suporte em atividades de modelagem matemática: olhar sobre um plano de resolução. **Ensino e Tecnologia em Revista**, v. 8, n. 2, p. 318-336, 2024.

ALMEIDA, L. M. W.; SEKI, J. T. P.; CASTRO, E. M. V. Tecnologias digitais e modelagem matemática: interlocuções e possibilidades. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 20, n. 45, p. 144-161, 2024.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Ciclo de modelagem matemática interpretado à luz de estratégias heurísticas dos alunos. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 2, p. 1-27, 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A.P.; BRITO, D. S. Interface Didática entre Modelagem Matemática e Semiótica. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 36, n. 73, p. 777-800, 2022.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P., VERONEZ, M. R. D. Interlocuções entre Modelagem Matemática e Semiótica. In: ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P., VERONEZ, M. R. D. (Org.). **Elementos Semióticos em Atividades de Modelagem Matemática**. 1 ed. São paulo: Livraria da Física, 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Matemática.

In: ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P. (Org.). **Modelagem Matemática em Foco**. 1ed. Rio de Janeiro - RJ: Ciência Moderna, v. 1, p. 1-21, 2014.

ARAUJO, J. L. Um estudo sobre planos de atividades de modelagem matemática. **REnCiMa**, São Paulo. v. 12, n. 2, p. 1-25, 2021.

BALACHEFF, N.; GAUDIN, N. Students conceptions: an introduction to a formal characterization. **Hal**. 2002. ⟨hal-00190425⟩.

BARBOSA, J.C.; SANTOS, M. Modelagem Matemática, perspectivas e discussões. In: **Encontro Nacional De Educação Matemática**. Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 1-12. CDROM.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Análise de modelos matemáticos: contribuições dos registros de representação semiótica. In: ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P., VERONEZ, M. R. D. (Org.). **Elementos Semióticos em Atividades de Modelagem Matemática**. 1 ed. São paulo: Livraria da Física, 2021.

BLOOM, B. S.; HASTINGS, J. T.; MADAUS, G. **Handbook on formative and summative evaluation of student learning**. New York: McGraw-Hill, 1983.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (ed.). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**: Intellectual and Attitudinal Changes. New York: Springer, p. 73–96, 2015.

BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H.; NISS, M. **Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study**. New York: Springer. 2007

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BORASI, R. **Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors**. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BORROMEO FERRI, R. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Springer, 2018.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática. **REIEC**, v. 10, n. 2, p. 36 – 45, 2015.

BORTONI-RICARDO, S. M. **O professor pesquisador: introdução à pesquisa qualitativa**. São Paulo: Parábola Editorial, (Estratégias de Ensino, 8), 2008.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

BROWN, J.; EDWARDS, I. Modelling Tasks: Insight into Mathematical Understanding In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.). Mathematical Modellling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education. Cham, Switzerland: **Springer**, p. 187-197, 2017.

CAMPOS, I. S.; ARAÚJO, J. L. Quando pesquisa e prática pedagógica acontecem simultaneamente no ambiente de modelagem matemática: Problematizando a dialética pesquisador| professor. **Acta Scientiae**, v. 17, n. 2, p. 324-339, 2015.

CARREIRA, S.; AMADO, N.; CANÁRIO, F. Students' modelling of linear functions: How GeoGebra stimulates a geometrical approach. In B. Ubuz et al. (Eds.) **CERME 8**. Proceedings of the eighth congress of the European Society of Research in Mathematics Education (pp. 1031–1040), Antalya, Turkey. Ankara: Middle East Technical University, 2013.

CASTRO, E. M. V. **Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas em atividades de modelagem matemática**. 2007. 99 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Estadual do Centro-Oeste, UNICENTRO, Guarapuava, 2017.

CASTRO, E. M. V. **Metacognição em atividades de modelagem matemática**. 2022. 229 f. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

CHI, M. T. H. Commonsense conceptions of emergent processes: Why some misconceptions are robust. **The journal of the learning sciences**, v. 14, n. 2, p. 161-199, 2005.

CONFREY, J. "Misconceptions" accross subject matters: charting the course from a constructivist perspective. **Annual meeting of the American Educational Research Association**. (unpublished manuscript), 1986.

CONFREY, J.; MALONEY, A. A theory of mathematical modelling in technological settings. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), **Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study** (pp. 57–68). New York: Springer, 2007.

COSTA, P. P. P.; MEDEIROS, K. M.; HARDOIN, E. L.; MANSILLA, D. E. P. A modelagem matemática como uma metodologia investigativa e crítica nas aulas de Matemática. **Educação Matemática Debate**, v. 4, p. 1-25, 2020.

CURY, H. N. Análise de Erros e Formação de Professores: Sugestões para Ensino e Pesquisa em Cursos de Licenciatura em Matemática. **Contexto e Educação**, ano 21, n.76, p. 95-113, jul-dez, 2006.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

CURY, Helena Noronha. Uma proposta para inserir a análise de erros em cursos de formação de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 15, n. 3, p. 547-562, 2013.

CURY, H. N.; KONZEN, B. Classificação e análise de erros em álgebra. **Anais VII Salão de Iniciação Científica da PUCRS [Internet]**, 2006.

D'AMORE, B. **Elementi di didattica della matematica**. Bologna: Pitagora, 1999.

D'AMORE B. **Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica**. Pitagora: Bologna, 2003.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica:** sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. São Paulo: Editora da Livraria da Física, 184p, 2015.

D'AMORE, B; SBARAGLI, S. Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". **La matematica e la sua didattica**. v2, 139-163, 2005.

DOMINGUES, F. A. A. **Mid: manual para identificação de defeitos de revestimentos asfálticos de pavimentos**. São Paulo: Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1993.

DUBINSKY, E. The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. *In*: (L.P. Steffe, ed). *In*: **Epistemological Foundationsof Mathematical Experiences**. New York: Springer-Verlag, 1991.

DUVAL, R. Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. **Annales de didactique et de sciences cognitives**. v5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas: Editora Papirus, p.11-34, 2003.

DUVAL, R. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. **La matematica e la sua didattica**, v.4, p. 558-619, 2006.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. São Paulo: PROEM, 160p, 2011.

ERLWANGER, S. H. Case studies of childrenn's conceptions of mathematics. **Journal of Children's Mathematical Behaviour**, v.1, n. 3, p.157-283, 1975.

ERNEST, P. A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, p. 67 – 101, 2006.

FERRUZZI, E. C.; ALMEIDA, L. M. W. Diálogos em modelagem matemática. **Ciência & Educação** (Bauru), v. 21, p. 377-394, 2015.

FIORENTINI, D. & LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos**

teóricos e metodológicos. Autores Associados, Campinas, SP, 2006.

FONT, Vicenç; GODINO, J.; D'AMORE, B. Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemátic. **For the Learning of Mathematics**, 27 (2): 2 -7, 2007.

FREJD, P.; GEIGER, V. Theoretical approaches to the study of modelling in mathematics education. Paper presented at **ICTMA 16**, Blumenau, Brazil, p. 14-19. July, 2013.

GAIMME – Guidelines for assessment &instructions in mathematics modeling education. NCTM, 2016.

GALBRAITH, P.; STILLMAN, G. A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, 38(2), 143–162, 2006.

GARCIA, F.; GASCÓN, J.; HIGUERAS, L.; BOSCH, M. Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. **ZDM**, 38(3), 226-246, 2006.

GOULART, T. C. K.; ALMEIDA, L. M. W. A Tecnologia Digital em atividades de modelagem matemática: Um olhar para os Recursos Semióticos. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 19, p. 262-284, 2020.

GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H. Mathematical modelling with digital tools - a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 233-244, 2018.

HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (Eds.). **Mathematical modelling (ICTMA 12): education, engineering and economics: proceedings from the twelfth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications**. Chichester: Horwood, 2007.

HALL, J.; LINGEFJÄRD, T. **Mathematical Modeling: applications with GeoGebra**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2017.

HIEBERT, J. **Conceptual and procedural knowledge:** The case of mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1986.

JABLONKA, E.; GELLERT, U. Mathematisation - dematematisation. In: U. Gellert, & E. Jablonka (Eds.), **Mathematisation and demathematisation: Social, philosophical and educational ramifications** (pp. 1-18). Rotterdam: Sense Publishers, 2007.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, 38(3), 302-310, 2006.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976 – v. ilust. (Projeto Euclides).

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo, EPU, 2013.

MAKONYE, J. P. **Learner mathematical errors in introductory differential calculus tasks**: A study of misconceptions in the senior school certificate examinations [Tese de doutoramento]. University of Johannesburg, South Africa, 2011.

MANRIQUE, E. D. **A motivação de estudantes para aprender em modelagem matemática na perspectiva da teoria de metas de realização**. 2021. 156 f. Dissertação de Mestrado (Pós Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, UEM, Maringá, 2021.

MASOLA, W. J.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior. **Revista Brasileira de Ensino Superior**, v. 2, n. 1, p. 64-74, 2016.

MCCORMICK, R. Conceptual and procedural knowledge. **International journal of technology and design education**, v. 7, p. 141-159, 1997.

MENDES, T. F.; SOUSA, B. N. P. A.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem Matemática e Conhecimento Matemático: uma análise de misconcepções. *In*: XIV Encontro Paranaense de Educação Matemática (XIV EPREM), 2017, Cascavel. **Anais do XIV EPREM**. Cascavel: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2017.

MENDES, T. F; SURJUS, K. S. ; BORSSOI, A. H. ; SILVA, K. A. P. . Projeto de Desenvolvimento de Produto em uma Atividade de Modelagem Matemática. *In*: XI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (XI CNMEM), 2019, Belo Horizonte. **Anais da XI CNMEM**. Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2019.

MEYER, J. F. A Modelagem Matemática: O desafio de se 'fazer' a Matemática da necessidade. **Com a Palavra o Professor**, Vitória da Conquista, v.5, n.11, p. 140-149, 2020.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

MISCONCEPTION. *In*: **Collins Cobild English Dictionary**. Disponível em: https://www.collinsdictionary.com/dictionary/english/misconception Acesso em: 22/05/24.

NESHER, P. Towards an instructional theory: The role of learners' misconceptions for the learning of mathematics. **For the Learning of Mathematics**, v. 7, n. 3 p. 33-39, 1987.

OMODEI, L. B. C. **Autenticidade em Atividades de Modelagem Matemática: da Aprendizagem para o Ensino em um Curso de Formação de Professores**. 2021. 189 f. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

PASQUALI, C. Dá para ser protagonista só de vez em quando. Lovato, Antônio. Yrula, Carolina Prestes. Franzim, Raquel (Orgs.). **Protagonismo**: A potência de ação da comunidade escolar, p. 52-57, 2017.

PEAD, D.; BILL, R.; MULLER, E. Uses of technologies in learning mathematics through modelling. In W. Blum et al. (Ed.), **Modelling and applications in mathematics education.**

The 14th ICMI study (pp. 309–318). New York: Springer, 2007.

PEREIRA, F. de M.; et al. **Produção de rainhas**. Teresina : Embrapa Meio-Norte, 2006. 37 p. ISSN 0104-866X ; 1441.

PLA-CASTELLS, M.; MELCHOR, C.; CHAPARRO, G. MAD+. Introducing misconceptions in the temporal analysis of the mathematical modelling process of a Fermi problem. **Education Sciences**, v. 11, n. 11, p. 747, 2021.

POLLAK, H. O. What is mathematical modeling? In: **Mathematical Modeling Handbook**. Bedfort: COMAP, 2012. Disponível em< www.comap.com>

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (ed.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 265-276, 2015.

POZZO, J. I. (Org.). **A Solução de Problemas - Aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Editora Artmed, 1998.

RAMOS, D. C. **Modelagem matemática**: uma análise semiótica das experiências dos alunos. 2020. 100 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RITTLE-JOHNSON, Bethany; ALIBALI, Martha Wagner. Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. **Journal of educational psychology**, v. 91, n. 1, 175p , 1999.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Pearson/Makron, 1998.

SANTI, G.; SBARAGLI, S. Misconceptions and semiotic: a comparision. In: Conference of Five Cities: Nicosia, Bologna, Palermo, Locarno. Nicosia: Univ. of Cyprus. **Proceedings of Conference of Five Cities: Nicosia, Bologna, Palermo, Locarno**. Nicosia, p. 57-72, 2008.

SARWADI, H. R. H., SHAHRILL, M. Understanding Students' Mathematical Errors and Misconceptions: The Case of Year 11 Repeating Students, **Mathematics Education Trends and Research**, v. 2014, n. 2014, p. 1-10, 2014.

SBARAGLI, S. Misconcezioni inevitabili e misconcezioni evitabili. **La matematica e la sua didattica**, v. 1, p. 57-71, 2005.

SCHNEIDER, M.; STERN, E. The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach. **Developmental psychology**, v. 46, n. 1, p. 178, 2010.

SILLER, H.; GREEFRATH, G. Mathematical modelling in class regarding to technology. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), **Proceedings of the sixth congress of the European Society for Research in Mathematics Education** (CERME6) (pp.

2136–2145). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique, 2010

SISMAN G. T.; AKSU, G. M. A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume**. International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 14, p. 1293-1319, 2016.

SRIRAMAN, B.; KAISER, G. Theory usage and theoretical trends in Europe: A survey and preliminary analysis of CERME4 research reports. **ZDM**, 38(1), p. 22-51, 2006

STEIN, M. K. et al. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical thinking and learning**, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

STILLMAN, G. Problem Finding and Problem Posing for Mathematical Modelling. In L. N. Hoe, & N. K. E. Dawn (Eds.). **Mathematical Modelling**: from theory to practice. Singapore: World Scientific Publishing, p. 41-56, 2015.

SURJUS, K. S.; ALMEIDA, L. M. W. Podem Atividades de Modelagem Matemática Revelar Misconcepções? In: XII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (XII CNMEM), 2023, Porto Alegre. **Anais da XII CNMEM**. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2023.

SURJUS, K. S.; ALMEIDA, L. M. W. Lidando com Misconcepções em uma Atividade de Modelagem Matemática. In: X Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (X EPMEM), 2024, Cornélio Procópio. **Anais do X EPMEM**. Cornélio Procópio: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2024.

SURJUS, K. S.; ALMEIDA, L. M. W.; KOWALEK, R. M. Ultrapassando uma misconcepção em uma atividade de modelagem matemática. In: XVI Conferência Interamericana de Educação Matemática (XVI CIAEM), 2023, Lima. **Anais da XVI CIAEM**. 2023.

SWAN, M. Dealing with misconceptions in mathematics. In: **Issues in mathematics teaching**. Routledge, p. 147-165, 2002.

SWAN, M.; TURNER, R.; YOON, C.; MULLER, E. The roles of modelling in learning mathematics. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; NISS, M. (ed.). **Modelling and applications in mathematics education**: The 14th ICMI Study . New York: Springer, p. 275-284, 2007.

UEGATANI, Y. Possible misconceptions from japanese mathematics textbooks with particular reference to the function concept. In: **Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014)**, 465 p, 2014.

VERA, J.; LISCHER, C.; NENOV, M.; NIKOLOV, S.; Lai, X.; EBERHARDT, M. Mathematical Modelling in Biomedicine: A Primer for the Curious and the Skeptic. **International journal of molecular sciences**, v.22, n.2, p.547, 2021.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. 2007. 141 f. Dissertação de Mestrado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2007.

VERTUAN, R. E. **Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática**. 2013. 247f. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2013.

VIDOTTI, D. B. **Potencialidades da modelagem matemática e da análise de erros para o ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral em várias variáveis**. 2019. 212 f. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, UEM, Maringá, 2019.

VORHÖLTER, K. Enhancing metacognitive group strategies for modelling. **ZDM**, v. 51, n. 4, p. 703-716, 2019.

WEIGAND, H.-G. Looking back and ahead – didactical implications for the use of digital technologies in the next decade. **Teaching Mathematics and Its Applications**, 33, p. 3-15, 2014.

YIP, D. Identification of misconceptions in novice biology teachers and remedial strategies for improving biology learning, **International Journal of Science Education**, 20:4, p. 461-477, 1998.

ZANELLI, J. C. **Pesquisa qualitativa em estudos da gestão de pessoas**. Estudos da Psicologia, n. 7, p. 79-88, 2002.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Termo de consentimento livre e esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Tendo em vista o desenvolvimento de parte da pesquisa de doutorado da estudante Kassiana Schmidt Surjus do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, orientada pela professora Lourdes Maria Werle de Almeida, declaro que autorizo o uso , a partir da presente data, dos dados concedidos em material escrito, imagens, áudio ou vídeo durante as aulas, sem restrições de prazos e citações, podendo divulgá-los em publicações, congressos e eventos da área, com a condição de que seja garantido o anonimato, não sendo nome e nenhuma informação pessoal tornada pública. Declaro que abdico de direitos meus e de meus descendentes.

Londrina, ___ de _____ de _____.

Nome do estudante: _____;
Assinatura: _____.

ANEXOS

ANEXO A – Grade Curricular do Curso de Engenharia Civil

Universidade Estadual de Londrina

2010

ENGENHARIA

HABILITAÇÃO: **ENGENHARIA CIVIL**

TURNO: **INTEGRAL**

DURAÇÃO: MÉDIA 5 ANOS - MÁXIMA 10 ANOS

SISTEMA ACADÊMICO: **SERIADO ANUAL**

1ª Série

Código	Nome	Ess	Ofe	Carga Horária T	T/P	P	Total
6ARQ005	REPRESENTAÇÃO VISUAL EM TRABALHOS DE ENGENHARIA CIVIL (ARQ-60/CIV-30)	N	A	30	0	60	90
6FIS043	FÍSICA APLICADA À ENGENHARIA I	N	A	60	0	30	90
6GGM010	TOPOGRAFIA	N	A	60	0	60	120
6MAT053	DESENHO GEOMÉTRICO E GEOMETRIA DESCRITIVA	N	A	90	0	0	90
6MAT054	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I	N	A	120	0	0	120
6QUI023	QUÍMICA APLICADA À ENGENHARIA CIVIL A	N	A	60	0	30	90
6CIV030	INTRODUÇÃO À ENGENHARIA (CIV-15/TRU-15)	N	1S	30	0	0	30
6EMA025	ESTATÍSTICA E PROBABILIDADES	N	1S	45	0	15	60
6CIV080	OFICINA DE COMUNICAÇÃO E EXPRESSÃO PARA ENGENHARIA CIVIL (CIV-30/LET-8/TRU-8)	N	2S	22	0	23	45
6COP007	COMPUTAÇÃO PARA ENGENHARIA	N	2S	30	0	30	60
6MAT055	ÁLGEBRA LINEAR	N	2S	30	0	0	30
6TRU012	MECÂNICA DAS ESTRUTURAS I	N	2S	60	0	0	60
	Total			**637**	**0**	**248**	**885**

2ª Série

Código	Nome	Ess	Ofe	Carga Horária T	T/P	P	Total
6CIV032	MATERIAIS DE CONSTRUÇÃO I	N	A	45	0	45	90
6FIS044	FÍSICA APLICADA À ENGENHARIA II	N	A	60	0	30	90
6MAT056	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II	N	A	120	0	0	120
6TRU013	RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS A	N	A	120	0	0	120
6TRU014	MECÂNICA DAS ESTRUTURAS II A	N	A	120	0	0	120
6ARQ006	ELEMENTOS DE ARQUITETURA	N	1S	30	0	30	60
6CIV033	FENÔMENOS DE TRANSPORTE	N	1S	30	0	30	60
6MAT057	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	N	1S	30	0	0	30
6MAT058	CÁLCULO NUMÉRICO	N	1S	30	0	30	60
6API005	ATIVIDADE PEDAGÓGICA INTEGRADORA I (CIV-42/TRU-3)	N	2S	0	0	45	45
6BAV040	GESTÃO AMBIENTAL NA ENGENHARIA CIVIL	N	2S	15	0	15	30
6CIV034	HIDRÁULICA I	N	2S	45	0	15	60
6GGM011	GEOLOGIA APLICADA À ENGENHARIA	N	2S	30	0	30	60
6SOC100	ELEMENTOS DE SOCIOLOGIA URBANA	N	2S	30	0	0	30
	Total			**705**	**0**	**270**	**975**

3ª Série

Código	Nome	Ess	Ofe	Carga Horária T	T/P	P	Total
6CIV035	CONFORTO AMBIENTAL	N	A	30	0	30	60
6CIV036	MECÂNICA DOS SOLOS	N	A	60	0	60	120
6CIV037	HIDROLOGIA APLICADA E SISTEMAS DE DRENAGEM	N	A	90	0	30	120
6CIV038	MATERIAIS DE CONSTRUÇÃO II	N	A	45	0	45	90
6TRU015	FUNDAMENTOS DO PROJETO ESTRUTURAL	N	A	90	0	0	90
6TRU016	MECÂNICA DAS ESTRUTURAS III	N	A	120	0	0	120
6CIV039	HIDRÁULICA II	N	1S	45	0	15	60
6ELE002	INSTALAÇÕES ELÉTRICAS	N	1S	30	0	30	60
6FIL068	FILOSOFIA B	N	1S	30	0	0	30
6API006	ATIVIDADE PEDAGÓGICA INTEGRADORA II (CIV-42/TRU-3)	N	2S	0	0	45	45
6CIV040	INSTALAÇÕES HIDRÁULICAS E PREDIAIS I	N	2S	45	0	15	60
6TRU017	CONSTRUÇÕES EM CONCRETO ESTRUTURAL I	N	2S	60	0	0	60
	Total			**645**	**0**	**270**	**915**

Universidade Estadual de Londrina

2010

ENGENHARIA

HABILITAÇÃO: **ENGENHARIA CIVIL** TURNO: **INTEGRAL**

4ª Série

Código	Nome	Ess	Ofe	Carga Horária T	T/P	P	Total
6CIV041	FUNDAÇÕES E OBRAS DE TERRA	N	A	90	0	30	120
6CIV042	ESTRADAS	N	A	90	0	30	120
6CIV043	SANEAMENTO GERAL	N	A	90	0	30	120
6CIV044	PROCESSOS CONSTRUTIVOS I	N	A	90	0	30	120
6TRU018	CONSTRUÇÕES EM CONCRETO ESTRUTURAL II	N	A	90	0	0	90
6CIV045	INSTALAÇÕES HIDRÁULICAS E PREDIAIS II	N	1S	30	0	30	60
6TRU019	CONSTRUÇÕES EM AÇO	N	1S	45	0	15	60
6API007	ATIVIDADE PEDAGÓGICA INTEGRADORA III (CIV-30/TRU-15)	N	2S	0	0	45	45
6CIV046	TÉCNICAS DE PLANEJAMENTO E ORÇAMENTAÇÃO	N	2S	30	0	0	30
6TRU020	CONSTRUÇÕES EM MADEIRA	N	2S	45	0	15	60
	Total			**600**	**0**	**225**	**825**

5ª Série

Código	Nome	Ess	Ofe	Carga Horária T	T/P	P	Total
6TCC802	TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO - TCC (CIV-30/TRU-30)	N	A	60	0	0	60
6API008	ATIVIDADE PEDAGÓGICA INTEGRADORA IV (CIV-42/TRU-3)	N	1S	0	0	45	45
6CIV047	TRANSPORTES	N	1S	30	0	30	60
6CIV048	GERENCIAMENTO DE EMPREENDIMENTOS (ADM-30/CIV-30/ECO-30)	N	1S	90	0	0	90
6CIV049	AVALIAÇÃO DE BENS E PERÍCIAS	N	1S	45	0	15	60
6CIV050	PROCESSOS CONSTRUTIVOS II	N	1S	60	0	30	90
6CIV051	INICIAÇÃO AO EXERCÍCIO PROFISSIONAL (CIV-25/TRU-5)	N	1S	30	0	0	30
6PRI037	LEGISLAÇÃO APLICADA À ENGENHARIA CIVIL	N	1S	30	0	0	30
6EST801	ESTÁGIO CURRICULAR OBRIGATÓRIO EM ENGENHARIA CIVIL (CIV-170/TRU-170)	N	2S	0	0	340	340
	Total			**345**	**0**	**460**	**805**

OBSERVAÇÕES:

a) Além das disciplinas constantes da seriação deverão ser cumpridas 240 horas em Atividades Acadêmicas Complementares (Monitoria Acadêmica, Projetos de Pesquisa em Ensino, de Pesquisa, de Extensão e Integrados, Programas de Extensão e de Formação complementar no ensino de graduação, Disciplinas Especiais, Cursos de Extensão, Eventos, Estágios curriculares não obrigatórios e Disciplinas Eletivas), resultando em uma carga horária total para o curso de 4.645 horas.

b) Nas atividades Acadêmicas Especiais 6TCC802 Trabalho de Conclusão de Curso e 6EST801 Estágio Curricular Obrigatório em Engenharia Civil o estudante fará opção por uma área vinculada ao Departamento de Estruturas ou ao Departamento de Construção Civil.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO, PROMOÇÃO E RETENÇÃO

Sistema de Avaliação

Considerar-se-á aprovado na atividade acadêmica o estudante que obtiver média final igual ou superior a 6,0 (seis) e frequência de, no mínimo, 75% (setenta e cinco por cento).

O estudante terá direito a Exame Final quando obtiver média parcial na atividade acadêmica igual ou superior a 3,0 (três) e inferior a 6,0 (seis).

As atividades acadêmicas especiais de natureza obrigatória devem atender aos objetivos do Projeto Pedagógico do Curso, e terão sistema de avaliação e controle de frequência definidos em regulamentos próprios, aprovados pela Câmara de Graduação.

Critérios de Promoção

É promovido para a série subsequente o estudante:

- Aprovado em todas as atividades acadêmicas regulares da série e nas eventualmente cursadas em regime de dependência;
- Reprovado, por nota igual ou superior a 3 (três), em até 2 (duas) atividades acadêmicas da série anterior, que serão cursadas em regime de dependência;
- Reprovado por falta ou nota inferior a 3(três) em até uma atividade acadêmica da série, que será cursada em regime de dependência presencial;
- Reprovado por nota em atividade acadêmica cursada em regime de dependência.

OBSERVAÇÃO:

Universidade Estadual de Londrina

2010

ENGENHARIA

HABILITAÇÃO: **ENGENHARIA CIVIL** TURNO: **INTEGRAL**

- O regime de dependência é permitido ao estudante cumprir em até 2 (duas) atividades acadêmicas, independente da modalidade.
- A atividade acadêmica em regime de dependência presencial deve ser cumprida juntamente com a turma regular, com frequência obrigatória.

Critérios de Retenção

Ficará com a matrícula retida na série o estudante que:
- Acumular mais de uma dependência na modalidade presencial das atividades acadêmicas da série;
- Acumular mais de duas dependências na modalidade assistencial das atividades acadêmicas da série;
- Acumular mais de duas dependências, independente da modalidade;
- Reprovar, simultaneamente, por nota e por falta, em uma ou mais atividades acadêmicas;
- Reprovar, simultaneamente, por nota e por falta, em atividade acadêmica cursada em regime de dependência.

Informações Adicionais

Renovação de Matrícula: ANUAL

ANEXO B – Plano de Ensino da disciplina de Estradas

Centro: CTU - Centro de Tecnologia e Urbanismo	ANO LETIVO
Departamento: DCCi - Departamento de Construção Civil	2024

PLANO DE CURSO

CÓDIGO	NOME
6CIV042	Estradas

CURSO	SÉRIE
Engenharia Civil - Turma 1000	4ª

CARGA HORÁRIA				SEM. DE OFERTA	HABILITAÇÃO (ÕES)
T	P	TOTAL	[X] ANUAL	1º [X] 2º [X]	
108	36	144	[ ] SEMESTRAL		

PROGRAMI.DOC

*1 - EMENTA:
Traçado de estradas. Elementos básicos para o projeto. Curvas horizontais circulares e de transição. Seção transversal. Superlargura e superelevação. Curvas verticais. Projeto de terraplenagem. Drenagem de pavimento. Materiais betuminosos. Camadas constituintes do pavimento. Estudo do tráfego. Dimensionamento de pavimentos flexíveis. Projeto de restauração de pavimentos flexíveis. Composição de preços (Tabela do DER-PR). Estudo dos solos e dos agregados.

2 - OBJETIVO(S):
Caracterizar a infraestrutura rodoviária;
Conceituar os princípios básicos do projeto geométrico e sua relação com os fatores condicionantes ambientais e econômicos;
Conhecer as características particulares do projeto geométrico de rodovias;
Conhecer o conceito de pavimentos, bem como os métodos de dimensionamento e os tipos de materiais usados na infraestrutura de transportes.

*3 - CONTEÚDO PROGRAMÁTICO:

1. Introdução à Infraestrutura de transportes

2.Traçado de Estradas
- 2.1. Estudos preliminares;
- 2.2. Classificação das estradas;
- 2.3. Fatores que influem na escolha do traçado.

3. Elementos básicos para projeto
- 3.1. Veículo de Projeto;
- 3.2. Velocidade de projeto e velocidade média de percurso;
- 3.3. Distâncias de visibilidade.

4. Projeto geométrico horizontal
- 4.1. Estaqueamento;
- 4.2. Recomendações sobre o traçado em planta;
- 4.3. Curvas horizontais circulares;
- 4.4. Curvas horizontais de transição;
- 4.5. Superelevação e superlargura.

5. Projeto geométrico vertical
   5.1. O perfil longitudinal;
   5.2. Rampas;
   5.3. Curvas verticais;
   5.4. Recomendações das normas oficiais.

6. Seção Transversal
   6.1. Definição;
   6.2. Elementos básicos.

7. Projeto de terraplanagem
   7.1. Definição;
   7.2. Cálculo das áreas e volumes de corte e aterro;
   7.3. Distribuição dos materiais: compensação de volumes e diagrama de massas;
   7.4. Distância econômica de transporte;
   7.5. Momento de transporte;
   7.6. Tipos de equipamentos.

8. Composição de preços (Tabela do DER-PR)

9. Estudo dos solos e agregados
   9.1. Investigação e estudo do subleito e jazidas;
   9.2. Classificação, principais propriedades e ensaios de agregados.

10. Camadas constituintes dos pavimentos
   10.1. Estrutura dos pavimentos
   10.2. Classificação dos pavimentos.

11. Materiais betuminosos
   11.1. Ligantes asfálticos para pavimentação;
   11.2. Aplicação

12. Estudo do tráfego
   12.1. Características do fluxo de tráfego;
   12.2. Capacidade e níveis de serviço;
   12.3. Configuração do tráfego rodoviário;
   12.4. Pesquisas de tráfego;
   12.5. A utilização dos resultados

13. Dimensionamento de pavimentos flexíveis
   13.1. Distribuição de tensões no pavimento
   13.2. Métodos de dimensionamento

14. Drenagem do pavimento
   14.1. Drenagem superficial;
   14.2. Drenagem subterrânea;
   14.3. Drenagem subsuperficial.

15. Projeto de restauração de pavimentos flexíveis

4 - PROCEDIMENTOS DE ENSINO:

Metodologia:

As atividades presenciais constarão de aulas expositivas e interativas, utilizando de apresentação da teoria por meio de slides confeccionados no software Power Point e possível utilização de quadro para resolução de exemplos práticos. As aulas práticas serão relativas ao aprendizado do software Autocad Civil 3D e sua aplicação em uma atividade, em sala de aula, relacionada ao projeto geométrico e de terraplenagem.

A atividade discente será de acompanhamento das aulas presenciais, estudo do conteúdo, execução de exercícios em sala de aula (inclusive o de projeto geométrico e de terraplenagem de uma estrada com o Autocad Civil 3D) e extraclasse.

Serão disponibilizados no *Google Classroom* os arquivos dos slides (em pdf) desenvolvidos pelo docente, as atividades referentes ao conteúdo ministrado e alguns materiais de apoio como normas e manuais.

5 - CRONOGRAMA:

Encontros relativos ao 1º semestre letivo:

Encontros	Conteúdo
1º (2 aulas)	Apresentação da disciplina
2º (2 aulas)	Introdução à infraestrutura de transportes
3º (2 aulas)	Traçado de estradas: estudos preliminares e classificação de estradas
4º (2 aulas)	Traçado de estradas: Fatores que influem na escolha do traçado
5º (2 aulas)	Elementos básicos para projeto
6º (2 aulas)	Projeto geométrico horizontal
7º (2 aulas)	Projeto geométrico horizontal
8º (2 aulas)	Projeto geométrico horizontal*
9º (2 aulas)	Projeto geométrico horizontal*
10º (2 aulas)	Projeto geométrico horizontal*
11º (2 aulas)	Projeto geométrico horizontal*
12º (2 aulas)	Projeto geométrico vertical
13º (2 aulas)	Projeto geométrico vertical
14º (2 aulas)	Projeto geométrico vertical
15º (2 aulas)	Projeto geométrico vertical*
16º (2 aulas)	Projeto geométrico vertical*
17º (2 aulas)	Discussão sobre as dúvidas discentes relativas aos assuntos para a 1º bimestre
18º (2 aulas)	**Avaliação (Prova) 14/08/2024 (quarta-feira), passível de mudança**
19º (2 aulas)	Vista de prova 1º bimestre
20º (2 aulas)	Seções transversais
21º (2 aulas)	Seções transversais
22º (2 aulas)	Seções transversais*
23º (2 aulas)	Seções transversais*
24º (2 aulas)	Seções transversais*
25º (2 aulas)	Projeto de terraplenagem
26º (2 aulas)	Projeto de terraplenagem
27º (2 aulas)	Projeto de terraplenagem*
28º (2 aulas)	Projeto de terraplenagem*
29º (2 aulas)	Projeto de terraplenagem**
30º (2 aulas)	Projeto de terraplenagem**
31º (2 aulas)	Composição de preços
32º (2 aulas)	Projeto de terraplenagem*
33º (2 aulas)	Projeto de terraplenagem*
34º (2 aulas)	Projeto de terraplenagem*

35 (2 aulas)	Discussão sobre as dúvidas discentes relativas ao 2º bimestre
36º (2 aulas)	**Avaliação (Prova) 09/10/2024 (quarta-feira), passível de mudança**

*Uso do Civil 3D
**Atividade direcionada

Encontros relativos ao 2º semestre letivo:

Encontros	Conteúdo
37º (2 aulas)	Apresentação de exemplos de projetos**
38º (2 aulas)	Apresentação de exemplos de projetos**
39º (2 aulas)	Vista de prova 2º bimestre
40º (2 aulas)	Estudo cos solos e agregados
41º (2 aulas)	Estudo cos solos e agregados
42º (2 aulas)	Estudo cos solos e agregados
43º (2 aulas)	Estudo cos solos e agregados
44º (2 aulas)	Camadas constituintes dos pavimentos
45º (2 aulas)	Camadas constituintes dos pavimentos
46º (2 aulas)	Camadas constituintes dos pavimentos
47º (2 aulas)	Camadas constituintes dos pavimentos
48º (2 aulas)	Camadas constituintes dos pavimentos**
49º (2 aulas)	Materiais betuminosos
50º (2 aulas)	Materiais betuminosos
51º (2 aulas)	Materiais betuminosos
52º (2 aulas)	Materiais betuminosos
53º (2 aulas)	Materiais betuminosos
54º (2 aulas)	**Avaliação (Prova) 18/12/2024 (quarta-feira), passível de mudança**
55º (2 aulas)	Vista de prova do 3º bimestre
56º (2 aulas)	Estudos de Tráfego
57º (2 aulas)	Estudos de Tráfego
58º (2 aulas)	Dimensionamento de pavimentos flexíveis
59º (2 aulas)	Dimensionamento de pavimentos flexíveis
60º (2 aulas)	Dimensionamento de pavimentos flexíveis**
61º (2 aulas)	Dimensionamento de pavimentos flexíveis**
62º (2 aulas)	Dimensionamento de pavimentos flexíveis
63º (2 aulas)	Dimensionamento de pavimentos flexíveis
64º (2 aulas)	Drenagem de pavimentos**
65º (2 aulas)	Drenagem de pavimentos **
66º (2 aulas)	Projeto de restauração de pavimentos flexíveis
67º (2 aulas)	Projeto de restauração de pavimentos flexíveis
68º (2 aulas)	Projeto de restauração de pavimentos flexíveis
69º (2 aulas)	Projeto de restauração de pavimentos flexíveis
70º (2 aulas)	Discussão sobre as dúvidas discentes relativas aos assuntos para a 4º bimestre
71º (2 aulas)	**Avaliação (Prova) 19/02/2025 (quarta-feira), passível de mudança**
72º (2 aulas)	**Exame 25/02/2025 (terça-feira)**

**Atividade direcionada

6 - FORMAS E CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO:

Critérios de avaliação de aprendizagem: Serão aplicadas 4 (quatro) avaliações (provas) equivalendo, cada uma a 100% da nota do referido bimestre.

Sendo assim, as notas bimestrais e a média anual serão calculadas da seguinte forma:

N1= 1xP1
N2= 1xP2
N3= 1xP3
N4= 1xP4

Nn= Nota do bimestre (n)
Pn = Nota da Prova do bimestre n

Cada avaliação bimestral (Nn) poderá ter valor total igual até 10,0.
Média anual=(N1 + N2 + N3 + N4)/4
Para aprovação no curso, o aluno deverá obter média anual maior ou igual a 6,0.

*7 - BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

BATISTA, C. F. N. *Pavimentação*. Porto Alegre: Globo, 1975-76.
BERNUCCI, L. B.; DA MOTTA, L. M. G.; CERATTI, J. A. P.; SOARES, J. B. *Pavimentação Asfáltica: Formação básica para engenheiros*. Rio de Janeiro: PETROBRAS: ABEDA, 2008.
BRASIL. Departamento Nacional de Estradas de Rodagem. *Manual de projeto geométrico de rodovias rurais*. IPR publ. 706. Rio de Janeiro: IPR, 1999.
CEDERGREN, H. R. *Drenagem dos pavimentos de rodovias e aeródromos*. Rio de Janeiro: LTC, 1980.
GOUVÊA CAMPOS, V. B. Planejamento de Transportes - Conceitos e Modelos. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2013.
LEE, S. H. *Introdução ao Projeto Geométrico de Rodovias*. Florianópolis: UFSC, 2008.
MICHELIN, R. G. *Drenagem superficial e subterrânea de estradas*. 2 ed. Porto alegre: Multilibri, 1975.
SENÇO, W. *Manual de Técnicas de Pavimentação*. V 2. São Paulo: Pini, 2004.
SENÇO, W. *Manual de Técnicas de Pavimentação*. V1.São Paulo: Pini, 1997.
SENÇO, W. *Terraplenagem*. São Paulo: EDUSP, 1980.
SOUZA, M. L. *Pavimentação rodoviária*. Rio de Janeiro: DNER, 1976.

*8 - BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS. A policy on geometric design of highways and streets. 4 ed. Washington, D.C., 2001.
ANTAS, P. M.; VIEIRA, A.; GONÇALO, E. A.; LOPES, L. A. S. Estradas: projeto geométrico e de terraplenagem. Rio de Janeiro: Interciência, 2010.
BRASIL. Departamento Nacional de Estradas de Rodagem. *Projeto de Restauração de pavimentos flexíveis TECNAPAV – DNER PRO 269/94*. Rio de Janeiro: IPR, 1995.
BRASIL. Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes. *Manual de projeto de interseções. 2.ed.* IPR publ. 718. Rio de Janeiro: IPR, 2005.
BRASIL. Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes. *Manual de projeto geométrico de travessias urbanas*. IPR publ. 740. Rio de Janeiro: IPR, 2010.
CARDOSO, M. C. Autodesk Civil 3D 2020: Aplicações BIM para projetos de infraestrutura. São Paulo: Érica, 2020.
HOEL, L. A.; GARBER, N. J.; SADEK, A. W. Engenharia de Infraestrutura de Transportes: uma integração multimodal. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
MUNDRIK, C. Caderno de Encargos. Volume 1: Terraplenagem; pavimentação e serviços complementares. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
PINTO, C. S. *Curso Básico de Mecânica dos Solos:exercícios resolvidos: em 16 aulas*. São Paulo: Oficina de Textos, 2002.
SENÇO, W. Estradas de Rodagem: projeto. São Paulo: Grêmio Politécnico, 1975.
SENÇO, W. *Pavimentação*. São Paulo: Grêmio Politécnico, 1980.

Aprovado pelo Depto. em ___/___/___ Aprovado pelo Colegiado em ___/___/___

_____ _____

Assinatura do Chefe do Departamento Assinatura do Coord. do Colegiado

** Itens correspondentes ao programa oficial a ser cadastrado na PROGRAD (antiga CAE).*