



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

MARIANA SOUZA INNOCENTI

**AVALIAÇÃO DEMOCRÁTICA PARA A APRENDIZAGEM
ESCOLAR**

Londrina
2024

MARIANA SOUZA INNOCENTI

AVALIAÇÃO DEMOCRÁTICA PARA A APRENDIZAGEM ESCOLAR

Tese apresentada à Universidade Estadual de Londrina - UEL, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco

Londrina
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

M333a Innocenti, Mariana.
AVALIAÇÃO DEMOCRÁTICA PARA A APRENDIZAGEM ESCOLAR /
Mariana Innocenti. - Londrina, 2024.
66 f.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) -
Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2024.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Avaliação Democrática para a
Aprendizagem Escolar - Tese. 3. Educação Matemática Realística - Tese. 4.
Educação Matemática Crítica - Tese. I. Corio de Buriasco, Regina Luzia . II.
Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de
Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

MARIANA SOUZA INNOCENTI

AVALIAÇÃO DEMOCRÁTICA PARA A APRENDIZAGEM ESCOLAR

Tese apresentada à Universidade Estadual de Londrina - UEL, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Orientadora Dr^a. Regina Luzia Corio de
Buriasco
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof^a. Dr^a. Maria Tereza Carneiro Soares
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Prof^a. Dr^a. Maria do Socorro Taurino
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Profa. Dra. Pamela Emanuelli Alves Ferreira
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 29 de abril de 2024.

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco, minha orientadora e amiga de todas as horas, que aceitou o desafio de me orientar e acompanhou todo o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos componentes da banca, Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares, Prof^a. Dr^a. Maria do Socorro Taurino, Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva, Profa. Dra. Pamela Emanuelli Alves Ferreira, Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan Prof. Dr. Diego Barboza Prestes, pela leitura cuidadosa e pelos apontamentos.

Aos membros do GEPEMA, pelas conversas, discussões, críticas, sugestões, apoio e amizade.

À minha família, pelo apoio incondicional.

Aos meus amigos, em especial, à Fernanda, à Talita, ao Gustavo, à Andressa e ao Matheus, por ouvir algumas horas de desabafo, pelos momentos de descontração e pelo apoio.

À Ivone Alves de Lima, pela correção do texto.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida.

**Não é possível atuar em favor da igualdade,
do respeito aos direitos à voz, à
participação, à reinvenção do mundo, num
regime que negue a liberdade de trabalhar,
de comer, de falar, de criticar, de ler, de
discordar, de ir e vir, a liberdade de ser.**

Paulo Freire

INNOCENTI, Mariana Souza. **Avaliação Democrática para Aprendizagem Escolar**. 2024. 66p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2024.

RESUMO

Esta investigação inicia a estruturação de uma perspectiva teórica de uma Avaliação Democrática para a Aprendizagem Escolar a partir da articulação de informações presentes na literatura de Educação Matemática Realística e na Educação Matemática Crítica. O trabalho foi desenvolvido em uma perspectiva de natureza teórica do tipo especulativa. De modo geral, alguns dos elementos para uma avaliação democrática destacados no texto são: o diálogo, tomado como um processo de comunicação entre professor e estudante e entre estudantes; a diversificação de instrumentos de avaliação; o fornecimento de *feedbacks* fidedignos; a autoavaliação; a avaliação por pares; oportunidades para uma reflexão crítica sobre a realidade; uma relação horizontal entre professor e estudante. Destaca-se que não houve intenção de encerrar discussões sobre o que é uma Avaliação Democrática para a Aprendizagem Escolar, quais são seus elementos, qual é o seu propósito, mas direcionar esforços para iniciar uma jornada para uma perspectiva de avaliação pensando em uma sala de aula democrática.

Palavras-chave: Avaliação Democrática para a Aprendizagem, Educação Matemática Realística, Educação Matemática Crítica.

INNOCENTI, Mariana Souza. **Democratic Assessment for School Learning**. 2024. 66p. Thesis (Doctorate in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2024.

ABSTRACT

This investigation begins the structuring of a theoretical perspective of a Democratic Assessment for School Learning based on the articulation of information present in the literature on Realistic Mathematics Education and Critical Mathematics Education. The work was developed from a speculative theoretical perspective. In general, some of the elements for a democratic classroom highlighted in the text are: dialogue, taken as a process of communication between teacher and student and between students; the diversification of assessment instruments; providing reliable feedback; self-assessment; peer assessment; opportunities for critical reflection on reality; a more horizontal relationship between teacher and student. It is noteworthy that there was no intention to end discussions about what a Democratic Assessment for School Learning is, what its elements are, what its purpose is, but to direct efforts to begin the journey to structure an assessment perspective thinking about a classroom democratic classroom.

Key-words: Democratic Assessment for Learning, Realistic Mathematics Education, Critical Mathematics Education.

LISTA DE QUADROS

Quadro 01 – Princípios da Educação Matemática Realística	26
Quadro 02 – Relação entre os estágios de pensamento segundo Sfard (1991) e as ações de matematização apresentadas por De Lange (1999)	30
Quadro 03 – Diferentes ambientes de aprendizagem	39
Quadro 04 – Características de uma boa tarefa	53

SUMÁRIO

	APRESENTAÇÃO	11
	INTRODUÇÃO	15
2	MÉTODO	21
3	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA E ARTICULAÇÕES	24
4	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA E ARTICULAÇÕES	35
5	A AVALIAÇÃO PARA APRENDIZAGEM ESCOLAR NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA	47
6	A AVALIAÇÃO DEMOCRÁTICA PARA APRENDIZAGEM ESCOLAR	56
	REFERÊNCIAS	63

APRESENTAÇÃO

Nunca fui uma estudante de excelência. Quando digo às pessoas de fora da academia que curso doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática no Programa de Pós-Graduação da UEL, as reações quase sempre são as mesmas. "NOSSA, você faz doutorado em Matemática? Você é um gênio!". Quase sempre ignoram a parte da "Educação" do "Educação Matemática". Os que não ignoram, afirmam a mesma coisa, pois, para se trabalhar com Educação Matemática, a matemática se faz necessária. Raramente me perguntam da minha trajetória escolar, das condições de vida que eu tive ou qualquer outra coisa relacionada aos meus estudos. Não consideram o fato de que eu sempre recebi oportunidades para chegar ao ponto em que estou hoje, que sempre tive apoio incondicional da minha família.

Nasci em um país sem guerra (abertamente), em uma região abastada, no estado mais rico do país. Nunca me faltaram água, alimentos, recursos para estudar. Sou branca, frequentei escolas privadas, tive oportunidade de ir a museus, teatros, sempre tive acesso a livros e, por mais que não fosse a maior amante de tudo isso, tudo sempre esteve lá, ao meu alcance. Não me considero uma pessoa excepcional, que foi agraciada com uma inteligência ímpar. As minhas condições de vida, minhas escolhas e ações é que me trouxeram aqui.

Na escola em que estudei, eram ofertadas duas provas de recuperação (de notas) por ano, uma ao final de cada semestre. Os alunos podiam escolher fazer a prova de recuperação, mesmo que atingissem a média exigida pela escola (que era 7). Nesses casos, calculava-se a média entre a menor nota bimestral e a nota da recuperação. Se um aluno que tirasse 7 no primeiro bimestre e 8 no segundo escolhesse fazer a prova de recuperação e tirasse 10, a nota do primeiro bimestre seria alterada para 8,5. Algumas vezes enxerguei nessa dinâmica uma oportunidade para aumentar minha nota, pois sempre cometia um erro em algo que eu sabia fazer nas provas bimestrais, e como as provas tinham a mesma demanda cognitiva, a chance de aumentar a nota era grande. Mesmo que o meu objetivo fosse apenas aumentar essas notas e apesar de ter essa oportunidade de aumentá-las, incomodava-me o fato de meu aprendizado ser "medido" em apenas um ou dois dias. Quando questionava isso, ouvia de alguns professores: "No vestibular, você só terá uma chance". De fato, o objetivo da escola era esse, formar pessoas para serem aprovadas no vestibular.

Ingressei no curso de Licenciatura em Matemática e, durante a graduação, tive oportunidade de conhecer uma perspectiva de avaliação diferente daquela a que estava familiarizada, cujo foco não era mais o produto, mas o processo, e um de seus objetivos era oportunizar a aprendizagem. Quando terminei o curso, meus olhos se voltaram para a Pós-Graduação e para o Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA)¹ da mesma universidade. Os participantes do GEPEMA consideram que a avaliação deve ser tomada como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem e deve caminhar amalgamada aos processos de ensino e de aprendizagem. Como integrante do Grupo, conheci um pouco mais sobre esse tipo de avaliação e sobre os diferentes instrumentos que se podem utilizar para operacionalizá-la. Entendi também que tais instrumentos podem ser grandes aliados no processo educacional quando o objetivo é formar cidadãos autônomos.

No ano de 2017, um ano antes de ingressar no mestrado, tive a oportunidade de participar do Projeto de Formação Intercultural da UEL, que faz parte da Comissão Universidade para Indígenas (CUIA)², e consiste em um apoio para estudantes indígenas que foram aprovados no Vestibular Específico Interinstitucional dos Povos Indígenas. Participei como professora de Matemática e tive oportunidade de colocar em prática (ou pelo menos tentar) o que estava aprendendo no GEPEMA.

A CUIA tem como objetivo promover atividades pedagógicas para amparar esses estudantes, incluí-los no meio acadêmico e envolvê-los com a comunidade de professores e estudantes não indígenas. Ao longo de um ano, os estudantes cursam as disciplinas de Língua Portuguesa, Matemática e Ciências. Após esse período, se forem aprovados, eles começam a cursar a graduação escolhida. O projeto tem a proposta de entrelaçar áreas do conhecimento, então, para além das aulas que ocorriam de segunda a quarta, todos os envolvidos eram convidados a participar de diversas atividades: assistir a palestras, discutir e refletir sobre alguns temas relevantes para a sociedade, como a questão indígena, a política da atualidade, entre outros. Participar desse projeto me fez enxergar o

¹ Neste trabalho, utilizarei Grupo sempre que me referir ao GEPEMA.

² A Lei Estadual 14.996 de 2006 assegura 6 vagas (anuais) em qualquer curso de graduação da Universidade Estadual de Londrina para estudantes indígenas.

mundo com outros olhos, prestar atenção a questões que me seriam importantes enquanto educadora matemática e cidadã.

No mestrado, fiz um estudo com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental Anos Finais de um colégio público de Londrina para verificar como lidaram com uma prova-escrita-com-cola³ sob a perspectiva da Avaliação Didática. A pesquisa apontou que a cola foi um recurso que pode ter oportunizado a aprendizagem, porque a maioria dos estudantes que acertou as questões apresentou indícios para as respostas corretas em suas colas. O resultado frutífero dessa pesquisa me fez ter ainda mais interesse pela perspectiva de avaliação defendida pelo GEPEMA e pensar se, de alguma forma, eu poderia estudar algo “novo” em relação à avaliação.

No segundo ano do mestrado, em 2019, tive a oportunidade de estudar o texto "Interpretações de Significados em Educação Matemática"⁴, de Ole Skovsmose. O autor apresenta um experimento mental em que duas pessoas de diferentes contextos sociais estão submetidas a uma aula com a mesma abordagem pedagógica e propõe que, talvez, esses dois estudantes não respondam da mesma forma, ainda que colocados no mesmo contexto; uma preocupação sociopolítica no âmbito da sala de aula. Será que as reflexões propostas por esse autor subsidiam uma perspectiva de avaliação democrática?

No doutorado, em 2020, o interesse em trabalhar com Avaliação para a Aprendizagem Escolar⁵ sob uma perspectiva democrática surgiu após a palestra *online* da professora Regina Luzia Corio de Buriasco, ministrada no Ciclo de *lives* GT-6 da SBEM⁶ intitulada "Avaliação e Tecnologias em Educação Matemática"⁷. Na palestra, a professora pesquisadora associou a palavra "democrática" à Avaliação para a Aprendizagem Escolar na perspectiva da Educação Matemática Realística (RME⁸), uma abordagem neerlandesa ao ensino de matemática que considera a matemática um produto da atividade humana. Essa

³ Instrumento de avaliação em que os estudantes recebem um pedaço de papel com um tamanho determinado pelo professor em que anotam informações para utilizar durante a prova.

⁴ SKOVSMOSE, Ole. Interpretações de Significados em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 764-780, dez. 2018.

⁵ Neste trabalho, sempre que se utilizar a expressão avaliação, entenda-se Avaliação para a Aprendizagem Escolar.

⁶ Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

⁷ Transmitida pelo canal do YouTube do GT6 SBEM, no dia 26 de agosto de 2020. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=cII45i3IV40>> Acesso: 03. out. 2023.

⁸ Do Inglês "*Realistics Mathematics Education*".

perspectiva também é objeto de estudo do GEPEMA e será apresentada no decorrer deste trabalho.

O assunto gerou reflexão no âmbito do Grupo. Afinal, o que é uma Avaliação Democrática? Quais são os elementos que precisam existir na sala de aula para que uma avaliação seja democrática? Que características tem essa perspectiva de avaliação? Qual é o propósito dessa avaliação? Essas perguntas, mesmo tendo sido discutidas em função da palestra, serviram de mote para este trabalho na expectativa de que, a partir dele, essa discussão seja retomada de modo que represente um primeiro passo na direção de constituir uma proposta de avaliação democrática.

INTRODUÇÃO

Na comunidade científica, é frequentemente aceito que teoria e prática estejam em um constante processo dialético. Essa perspectiva reconhece que teoria e prática não são entidades separadas e estáticas, mas sim componentes de um movimento dinâmico de ideias contraditórias que se influenciam mutuamente (GRAMSCI, 1999; FREIRE, 1979, MARX, 2023). A teoria fornece um guia para a prática, oferecendo estruturas conceituais e entendimentos que orientam a ação. No entanto, a prática também desafia e enriquece a teoria, testando sua aplicabilidade e revelando novas dimensões.

Na dinâmica da vida e do pensamento, a dialética emerge como uma abordagem que reconhece a interconexão entre teoria e prática. A interação constante entre ideias e a realidade é importante para o desenvolvimento humano. A dialética, originada da palavra grega "*dialektiké*", que significa a arte do diálogo e do debate, reflete a essência do confronto entre diferentes visões.

Na sala de aula, por exemplo, a utilização da dialética pode desenvolver o pensamento crítico, permitindo que os estudantes explorem diferentes perspectivas e tenham oportunidade de compreender os temas discutidos. Além disso, a dialética representa uma ferramenta para a compreensão e transformação do mundo. Ao reconhecer a interação dinâmica entre teoria e prática, pode-se compreender a complexidade da vida e buscar soluções criativas e inovadoras para os desafios enfrentados.

Tendo isso em vista, esta investigação tem a intenção de apresentar, teoricamente, uma alternativa à concepção de avaliação presente em grande parte das escolas brasileiras, buscando uma opção de prática pedagógica⁹ em favor da democratização do conhecimento e da inclusão social para a formação de um estudante autônomo, capaz de fazer escolhas pelo bem-estar social, em prol de um modelo de educação no qual a pessoa¹⁰ possa se perceber cidadão que compartilha um momento histórico, político, social com outras pessoas; um ambiente que oportunize que a pessoa construa sua cosmovisão, por meio da reflexão crítica, de forma coerente com a realidade em que vive. A intenção é estruturar uma

⁹ Neste trabalho, a prática pedagógica é tomada como um conjunto de ações intencionais do professor que oportunize a aprendizagem envolvendo a criação de condições que possibilitem a reflexão crítica, o diálogo, a participação dos estudantes (FREIRE, 2016).

¹⁰ Pessoa: ser humano considerado individualmente.

perspectiva teórica de Avaliação Democrática para a Aprendizagem Escolar subsidiada na Educação Matemática Realística e na Educação Matemática Crítica.

Conforme argumentado por Freire (2013), a prática pedagógica deve ser “essencialmente dialógica”, colaborativa e emancipatória. Seu propósito é formar pessoas capazes de efetuar mudanças na realidade que os circunda. Assim, a prática educativa engloba não apenas os aspectos relacionados à condução das aulas, organização e planejamento, mas também as estratégias didáticas adotadas pelo professor para proporcionar oportunidades de aprendizagem aos estudantes.

Para Freire (2013), um estudante autônomo é aquele que assume um papel ativo em sua aprendizagem, sendo consciente e crítico em relação à sua realidade. Essa autonomia não se resume a receber conhecimento passivamente, mas envolve participação, diálogo e engajamento crítico. Os estudantes autônomos, segundo o mesmo autor, têm a capacidade de questionar, refletir e relacionar o conhecimento acadêmico com as experiências vividas. O mesmo autor argumenta que estudantes autônomos não apenas compreendem sua realidade, mas também buscam transformá-la, comportando-se como agentes de mudança em suas comunidades. Em suma, o estudante autônomo, segundo a visão de Freire (2013), é aquele que vai além da reprodução de informações, é um ser humano crítico, reflexivo e engajado na transformação da realidade que o cerca.

A avaliação que, comumente, acontece em grande parte das salas de aula com o propósito de classificar os estudantes é usada somente para fins de seriação e centrada no produto das atividades dos estudantes, o que, em grande parte, exige que o estudante seja um bom reprodutor de informações. Esse tipo de avaliação não tem se mostrado a favor da aprendizagem, pois o objetivo é atribuir uma nota a cada bimestre, trimestre, sem possibilidade de mudança, para que, ao final de um ano letivo, o aluno “passe” para o ano subsequente até que termine o período escolar. Essa avaliação acaba contribuindo para um ambiente de segregação e de fracasso. Segundo Esteban (2003, p. 8), “a reflexão sobre avaliação (no cotidiano escolar) só tem sentido se estiver atravessada pela reflexão sobre a produção do fracasso/sucesso escolar no processo de inclusão/exclusão social”, para, com isso, mudar a visão de avaliação para a aprendizagem escolar. Logo, faz-se necessário refletir sobre mudanças no ensino levando em consideração o contexto histórico, político, social dos envolvidos.

Atualmente, mesmo que existam escolas com algumas ações para mudanças no ensino que contribuam para a aprendizagem, ainda persiste o rito da classificação no processo de avaliação e, conseqüentemente, ainda existe a seriação de valores positivos ou negativos. Então, é necessário pensar em como um professor pode trabalhar em sala de aula para que a aprendizagem dos estudantes seja priorizada no processo avaliativo. Nesse sentido, estaríamos vivendo um momento de transição e, espera-se, se aproxime de um processo de democratização e emancipação social da e na escola. Esse é um dos grandes desafios que precisa ser enfrentado.

A democracia como um bem público pode ser entendida como uma

forma sócio-política definida pelo princípio da isonomia (igualdade dos cidadãos perante a lei) e da isegoria (direito de todos para expor em público suas opiniões, vê-las discutidas, aceitas ou recusadas em público), tendo como base a afirmação de que todos são iguais porque são livres, isto é, ninguém está sob o poder de um outro porque todos obedecem às mesmas leis das quais todos são autores (autores diretamente, numa democracia participativa; indiretamente, numa democracia representativa) (CHAUÍ, 2008, p. 67).

Segundo Neitzel, Dalbosco e Schwengber (2024), um modelo de organização da vida pública de forma democrática exige que os membros da sociedade, os participantes de um contrato social, percebam-se como parte integrante da organização. Essa exigência estabelece a condição para que as pessoas estejam preparadas para esse modo de vida social, uma vez que o poder, nesse modelo de organização, emana de seus membros. Assim, considerando que a escola tem como objetivo fundamental a formação humana e o desenvolvimento das capacidades individuais, a educação, nesse sentido, só pode ser efetivamente realizada quando impregnada pelo espírito cooperativo e democrático.

Neste trabalho, a democracia é entendida como "forma de vida" que emerge e se desenvolve através da interação social (DEWEY, 1979, NEITZEL; DALBOSCO; SCHWENGBER, 2024). Ela é caracterizada por valores de cooperação e participação ativa na tomada de decisões que afetam a comunidade como um todo. A democracia não é um produto exclusivo da educação formal, mas desempenha um papel fundamental em seu início e fortalecimento. Embora a escola desempenhe um papel considerável na promoção da democracia, não é o único agente responsável por isso.

De acordo com Dewey (2004), a democracia se estabelece como um amplo tecido social e político, essencial para o funcionamento saudável de uma sociedade. No

entanto, seu cultivo inicial ocorre no ambiente escolar, onde os princípios democráticos podem ser aprendidos, praticados e internalizados pelos indivíduos, os quais contribuirão para uma participação ativa na vida cívica e social.

Pensando na sala de aula democrática, devem-se levar em consideração a interação entre pessoas e grupos de maneira harmoniosa; a autonomia para expressar ideias, fazer escolhas e participar ativamente na aula sem coações indevidas; a importância da subjetividade e identidade, tanto das pessoas quanto do grupo; o respeito pela diversidade de perspectivas, o reconhecimento da dignidade e valor de cada pessoa e grupo, respeito à diversidade das condições das pessoas envolvidas; o reconhecimento de que as pessoas têm necessidades diferentes, que aprendem de formas diferentes, em tempo diferentes.

Essa ideia de democracia converge para o que é estudado no Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Inclusão (Épura)¹¹, que defende que se deve levar em conta as especificidades das pessoas quando se pensa em Educação Matemática com intenção de superar as relações de opressão existentes na sociedade que cerceiam direitos humanos, objetivando uma educação libertadora e humanizadora (FORNER, 2021; FREIRE, 2019; MILANI, 2015; SKOVSMOSE, 2017). O Grupo Épura tem suas pesquisas voltadas a contribuir para a educação de pessoas com alguma dificuldade de aprendizagem e para as que não têm as mesmas oportunidades de educação que a maioria¹².

Segundo Esteban (2003), um dos fatores que fazem com que haja um desperdício de um grande potencial humano é a inexistência de um processo escolar que possa atender às necessidades e particularidades das classes populares, que permitiria que múltiplas vozes fossem explicitadas e incorporadas. Há uma negação da legitimidade de conhecimentos e formas de vida situados à margem dos limites socialmente definidos como válidos. Com isso, há muitas pessoas excluídas do acesso ao conhecimento socialmente valorizado, dos espaços reconhecidos da vida social. Essa marginalização de conhecimentos socialmente produzidos, mas não reconhecidos e validados, fortalece

a necessidade de engendrar mecanismos de intervenção na dinâmica inclusão/exclusão social. O processo de avaliação do resultado escolar dos alunos e alunas está profundamente marcado pela necessidade

¹¹ Grupo da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, campus de Rio Claro, coordenado pela professora Miriam Godoy Penteadó e pelo professor Ole Skovsmose, docentes do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) do IGCE-- Unesp, Campus de Rio Claro.

¹²<https://igce.rc.unesp.br/#!/departamentos/educacao-matematica/grupos-de-pesquisa/epura/apresentacao/>

de criação de uma nova cultura de avaliação, que ultrapasse os limites da técnica e incorpore em sua dinâmica a dimensão ética (ESTEBAN, 2003, p. 8).

Esteban (2003) apresenta provocações para que o leitor reflita sobre o que é a avaliação e qual é o papel dela na escola. Ela indaga se é possível existir uma escola sem avaliação e, posteriormente, traz a reflexão de que se pensar apenas em provas escritas, nas quais os estudantes devem reproduzir o que foi trabalhado em sala de aula, ou que os estudantes apenas decoraram o procedimento, apenas com fins de classificação, talvez boa parte dos professores e alunos pense que é melhor não avaliar ou ser avaliado. Os professores e os pais dos estudantes ainda podem considerar a avaliação, nessa perspectiva, como um "mal necessário", pois, afinal, "[...] o que obrigaria os alunos e alunas a estudar? [...] como garantir que os conteúdos mínimos estão sendo aprendidos, como identificar quem sabe e quem não sabe?" (ESTEBAN, 2003, p. 10).

Certamente a avaliação é um elemento importante no processo educacional, entretanto, não há como obrigar uma pessoa a estudar, não há como identificar quem sabe e quem não sabe e, muito menos, garantir que conteúdo foi aprendido. As provocações de Esteban (2003) caminham no sentido de se pensar em uma reforma na Avaliação para a Aprendizagem Escolar sob uma perspectiva democrática. E isso caminha na direção que esta investigação pretende seguir, no âmbito da Educação Matemática.

A escolha da Educação Matemática Realística se deu porque é a abordagem ao ensino de matemática adotada pelo GEPEMA, grupo do qual a autora desta investigação participa. A Educação Matemática Crítica foi escolhida porque as ideias de ensino e de aprendizagem defendidas pelo Grupo ÉPURA se alinham às do GEPEMA.

Para tanto, buscar-se-á identificar, cotejar, analisar e discutir informações presentes em obras de Educação Matemática Realística e de Educação Matemática Crítica a fim de buscar sustentação teórica para uma perspectiva de avaliação democrática para a sala de aula. Como objetivos específicos, têm-se

- identificar e inventariar aspectos da avaliação para a aprendizagem escolar na perspectiva da Educação Matemática Realística e da Educação Matemática Crítica presentes na literatura buscando subsídios para uma Avaliação Democrática para a Aprendizagem Escolar;

- cotejar e analisar as informações presentes na literatura a respeito de avaliação na Educação Matemática Realística e na Educação Matemática Crítica com intenção de estruturar uma perspectiva teórica de Avaliação Democrática para a Aprendizagem Escolar.

A avaliação, nesta investigação, é entendida como fio condutor da prática docente. Isso significa que a avaliação integrada à prática pedagógica implica que não há uma separação entre as tarefas trabalhadas em sala de aula e as de avaliação. O método, a estratégia, o procedimento, o meio de ensino são integrantes do processo de avaliação.

A abordagem ao ensino de matemática adotada é conhecida como RME, portanto, a avaliação conduzida com base nos princípios dessa abordagem é parte integrante dos processos de ensino e de aprendizagem.

2. MÉTODO

Essa investigação caracteriza-se como de natureza interpretativa de cunho especulativo com *corpus* intertextual¹³ porque se constitui em uma narrativa construída pela interpretação que o pesquisador faz a partir de enunciados teóricos presentes na literatura (VAN DER MAREN, 1996). Essa interpretação está diretamente ligada às vivências da pesquisadora. Não é neutra e pode ser reconfigurada a partir de elementos que são acrescentados ao referencial teórico. Nesse tipo de pesquisa, o pesquisador pode confrontar textos de diversos autores ou do mesmo autor a respeito de um tema comum, a respeito de um tema escrito em diferentes épocas e pode ser resumida em três eixos fundamentais: interpretação, argumentação e o recontar. Partindo da interpretação e da análise crítica da literatura alcançada, o pesquisador escreve, de forma geral, o que foi investigado.

Para a análise pretende-se articular as informações presentes na literatura alcançada para compor um texto que discuta/estruture uma perspectiva democrática de Avaliação para a Aprendizagem Escolar. Para essa articulação, buscaram-se, em um primeiro momento, semelhanças entre o que é apresentado na literatura de Educação Matemática Realística e de Educação Matemática Crítica procurando subsídio para uma perspectiva de Avaliação Democrática para a Aprendizagem Escolar no contexto da Educação Matemática.

A partir disso, foi realizado um levantamento das possíveis características que poderiam subsidiar a avaliação nessa perspectiva, separando-as em grupos com temática recorrente nos trabalhos estudados. Entre os grupos, estão o “diálogo no ambiente escolar”, a “diversificação de estratégias e procedimentos (recolha de informações) utilizados na sala de aula”, o “contexto em que as pessoas estão inseridas” (que podem servir como fonte de inspiração para o contexto das tarefas). Esses trabalhos foram selecionados partindo das teses defendidas no âmbito do Grupo Épura e do GEPEMA e de artigos e livros citados por esses autores.

Também foram selecionados trabalhos que, de alguma forma, têm aspectos que convergem para a perspectiva de ensino, de aprendizagem e de avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem. Para a busca nos trabalhos em língua

¹³ Quando o pesquisador conta com mais de um discurso, o corpus de pesquisa é denominado intertextual e é constituído na interação das informações que resulta em uma informação comum, convergente, e contribui com a constituição do núcleo teórico (PASSOS, 2015, p. 33).

inglesa, foram utilizadas as expressões “*assessment formative*”, “*didactical assessment*”, “*assessment for learning*”.

Escolhido o tema, buscou-se, no catálogo de teses e dissertações da CAPES¹⁴, verificar se o tema já havia sido abordado em outros trabalhos. Para isso, utilizou-se a expressão "Avaliação Democrática da Aprendizagem", resultando em uma tese de doutorado em Educação (MARTINS, 2019)¹⁵. Posteriormente, buscou-se também, a expressão "Avaliação+Democracia", que resultou em quatro trabalhos fora da área de Educação Matemática (ALMEIDA, 2018; MENEZES, 2019; PAIVA, 1989; SANTOS, 2016)¹⁶.

O próximo passo foi procurar, no catálogo de periódicos SCIELO¹⁷, pelos mesmos termos acrescidos da palavra 'Matemática', uma vez que a pesquisa está situada no campo da Educação Matemática: "Avaliação Democrática da Aprendizagem *and* Matemática", "Avaliação *and* Democracia *and* Matemática", "Avaliação *and* Democrática *and* Matemática", "*Democratic Assessment for Learning and Mathematics*"¹⁸, "*Assessment and Democracy and Mathematics*", "*Assessment and Democratic and Mathematics*". As buscas resultaram em "Não foram encontrados documentos para sua pesquisa".

Procurou-se pelos mesmos termos no banco de dados ERIC¹⁹, resultando em 581 artigos encontrados para a busca da expressão "Democratic Assessment" sem aspas. A

¹⁴ Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Disponível em: <<http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>> Acesso: 08 de junho de 2022.

¹⁵ MARTINS, Marcus Leonardo Bomfim. **A (im)possibilidade da avaliação no ensino de História: uma análise a partir de exercícios de livros didáticos**. 336 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

¹⁶ PAIVA, Elizabeth Pereira. **Avaliação e Democracia - Realidade ou Fantasia?**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 1989.

MENEZES, Hemerson Claudio Mendonça. **A Accountability Educacional - Arquétipo do Estado Gerencial e Avaliador: Os (des)caminhos da Democracia e a Preservação do *Stablishment***. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

ALMEIDA, Rodrigo Freire de. **Avaliação dos Programas de Pós-Graduação em Educação Física no Brasil, considerações acerca da Democracia Representativa**. Dissertação (Mestrado em Educação Física) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

SANTOS, Margareth Guerra dos. **Teias do Pensar Democrático Presente nos Discursos dos Atores das Redes de Agências de Acreditação e Avaliação da Qualidade da Educação Superior na América Latina: as vozes do lado de lá...**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

¹⁷ Scientific Electronic Library Online. Disponível em: <<https://scielo.org/>> Acesso: 08 de junho de 2022.

¹⁸ **Assessment for learning** is designed to give teachers information to modify and differentiate teaching and learning activities. It acknowledges that individual students learn in idiosyncratic ways, but it also recognizes that there are predictable patterns and pathways that many students follow. It requires careful design on the part of teachers so that they use the resulting information to determine not only what students know, but also to gain insights into how, when, and whether students apply what they know. Teachers can also use this information to streamline and target instruction and resources, and to provide feedback to students to help them advance their learning (EARL, KATZ, 2006, p. 13)

¹⁹ Disponível em: <<https://eric.ed.gov/>> Acesso: 14 de outubro de 2023.

partir desse resultado, foram realizadas leituras dos resumos e, como muitos fugiam do tema que se pretende estudar, foi realizada uma outra busca utilizando a mesma expressão com aspas resultando em 18 artigos. Novamente as buscas resultaram "*No results matched your query*" para a busca com os termos entre aspas "*Democratic Assessment*" and "*Mathematics*". O mesmo aconteceu para as expressões "*Assessment and Democracy and Mathematics*" e "*Assessment and Democratic and Mathematics*".

Um aspecto da originalidade do trabalho está na adoção de uma perspectiva crítica em relação à avaliação na área da Educação Matemática. Em vez de considerar a avaliação como um meio de atribuir notas ou classificações, a pesquisa pretende explorar seu papel como uma prática que influencia ativamente as dinâmicas sociais e políticas no ambiente educacional.

3. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA E ARTICULAÇÕES

A Educação Matemática Realística (RME) é uma abordagem ao ensino de matemática que surgiu na segunda metade do século XX, nos Países Baixos, principalmente para se opor às ideias do Movimento da Matemática Moderna (MMM), que exercia grande influência no currículo de diversos países, propondo uma outra visão para o currículo de matemática neerlandês. O MMM foi influenciado por Nicolas Bourbaki²⁰, que buscava inovar o currículo na tentativa de superar o fracasso escolar que era associado à ideia de que o baixo desempenho dos estudantes em matemática decorria da utilização de métodos tradicionais de ensino de matemática, fortemente baseados em memorização, procedimentos mecânicos. Segundo Kline (1976), a aversão pela matemática também era motivada pela dificuldade em compreender os materiais utilizados.

O interesse pela mudança do currículo foi intensificado, em um contexto de Guerra Fria, com o lançamento do primeiro satélite artificial da Terra, o Sputnik I, pela União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS) em 1957. A intenção dos defensores do MMM era apresentar propostas de ensino de matemática com ênfase em Álgebra Abstrata, Álgebra de Boole, Topologia e Lógica Simbólica, desde o início até o final da escolaridade básica, com uma abordagem que considerava as estruturas básicas como o cerne da matemática, sem preocupação com aplicações (EVES, 2011; KLINE, 1976).

Além da forte influência estadunidense no desenvolvimento do MMM e do desenvolvimento de currículos baseados nessa perspectiva em diferentes países, grupos radicais começaram a surgir, recomendando o abandono total dos conteúdos do ensino secundário, em que já se consideravam superados pela eletrônica, pela relatividade e pelos computadores. Um desses grupos internacionais mais radicais se reuniu em Royaumont, na França, em 1959, em um simpósio organizado pela Organização para a Cooperação Econômica Europeia (OECE).

Uma das consequências diretas da realização do Simpósio de Royaumont foi a criação de uma comissão em 1961, pelo governo neerlandês, que visava estudar a modernização do ensino nas escolas secundárias, a Comissão de Modernização do Currículo

²⁰ Nicolas Bourbaki é, na verdade, um pseudônimo usado por um grupo de matemáticos de origem francesa. “Acredita-se que entre os membros originais figuravam C. Chevalley, J. Delsarte, J. Dieudonné e A. Weil. A composição do grupo é variável, tendo chegado a ter até 20 matemáticos” (EVES, 2011, p. 691)

de Matemática (CMLW²¹). Um dos pesquisadores envolvidos nessa comissão foi o matemático alemão Hans Freudenthal (1905-1990), que influenciou outros membros a se concentrarem no ensino de matemática em vez de nos conteúdos curriculares.

Diferentemente das ideias presentes no MMM, Freudenthal (1971, 1973) defendia que a matemática é uma atividade humana e que ensinar matemática não trata de treinar pessoas para reproduzir procedimentos. O pesquisador considerava a matemática como uma atividade de procurar por problemas, assim como de lidar com determinado assunto, que pode ser assunto da realidade, ou de um dos padrões e modelos²² matemáticos, caso os problemas devam ser resolvidos,

mas também é uma atividade de organização de um assunto. Isso pode ser uma questão da realidade que tem de ser organizada de acordo com padrões matemáticos se os problemas da realidade tiverem de ser resolvidos. Também pode ser uma questão matemática, resultados novos ou antigos, próprios ou de terceiros, que devem ser organizados de acordo com novas ideias, para serem mais bem compreendidos, num contexto mais amplo, ou por uma abordagem axiomática (FREUDENTHAL, 1971, p. 414, tradução nossa)²³.

Essa perspectiva é oposta à perspectiva de que os alunos devem receber ferramentas e objetos matemáticos prontos e acabados (DRIJVERS et al., 2013), que, na abordagem de ensino preconizada por Freudenthal (1971), RME, é chamada de "inversão antidiadática" (FREUDENTHAL, 1971). "Inversão" porque, na sala de aula, geralmente, acredita-se, equivocadamente, que trabalhar com tarefas que demandam ferramentas já prontas, apresentadas antes delas, favorecem a aprendizagem, é "antidiadática" por não favorecer o ensino.

De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (2001c; 2010b), a RME pode ser apresentada a partir de seis princípios: da atividade, da realidade, de níveis, do entrelaçamento, da interatividade e da orientação, sintetizados e apresentados no Quadro 01.

²¹ Do Holandês "*Commissie Moderniseren Leerplan Wiskunde*".

²² Modelo é considerado neste trabalho como a representação de alguma coisa (CUNHA, 1989).

²³ *of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter. This can be a matter from reality which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or of others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach.*

Quadro 01 - Princípios da Educação Matemática Realística

Princípio	O que expressa
Da Atividade	O princípio da atividade diz que, na RME, os alunos são tratados como participantes ativos no processo de aprendizagem. Enfatiza também que aprende-se a matemática fazendo matemática, o que está fortemente refletido na interpretação de Freudenthal da matemática como uma atividade humana, bem como na ideia de matematização de Freudenthal (1991) e Treffers (1987).
Da Realidade	O Princípio da Realidade pode ser reconhecido na RME de duas maneiras. Em primeiro lugar, expressa a importância atribuída ao objetivo da Educação Matemática, incluindo a capacidade dos estudantes de aplicar a matemática na resolução de problemas da “vida real”. Em segundo lugar, significa que a Educação Matemática deve partir de situações que sejam significativas para os alunos, o que lhes oferece oportunidades de atribuir significado às construções matemáticas que desenvolvem enquanto resolvem problemas. Em vez de começar com o ensino de abstrações ou definições a serem aplicadas posteriormente, na RME, o ensino começa com problemas em contextos ricos que requerem organização matemática ou, em outras palavras, que podem ser matematizados e colocam os alunos no caminho de estratégias menos formais de solução relacionadas ao contexto, como um primeiro passo no processo de aprendizagem.
De Níveis	O Princípio de Níveis enuncia que, ao aprender matemática, os alunos passam por vários níveis de compreensão: desde soluções menos formais relacionadas com o contexto, passando pela criação de vários níveis de esquematizações, até o desenvolvimento de conhecimentos sobre como os conceitos e estratégias estão relacionados. Os modelos são importantes para estabelecer uma ligação entre a matemática menos formal, relacionada ao contexto, e a matemática mais formal. Para cumprir essa função de ligação, os modelos têm de mudar – como Streefland (1985, 1993, 1996) chamou – de um “modelo de” (uma situação particular) para um “modelo para” todos os tipos de outras situações, mas equivalentes.
Do Entrelaçamento	O Princípio do Entrelaçamento diz respeito aos domínios de assuntos matemáticos, que não são considerados capítulos curriculares isolados, mas fortemente integrados. Os alunos lidam com situações nas quais podem usar várias ferramentas e conhecimentos matemáticos. Esse princípio também se aplica dentro de domínios. Por exemplo, dentro do domínio do sentido numérico, aritmética mental, estimativa e algoritmos são ensinados em estreita conexão entre si.
Da Interatividade	O Princípio da Interatividade da RME pressupõe que a aprendizagem da matemática não é apenas uma atividade individual, mas também uma atividade social. Portanto, a RME favorece discussões com toda a turma e trabalhos em grupo que oferecem aos alunos oportunidades de compartilhar suas estratégias e invenções com outras pessoas. Dessa forma, os alunos podem desenvolver ideias para desenvolver as suas estratégias. Além disso, a interação evoca reflexão, o que permite aos alunos alcançar um nível mais elevado de compreensão.

Da Orientação	O Princípio de Orientação refere-se à ideia de Freudenthal de “reinvenção guiada” da matemática. Implica que, na RME, os professores devem ter um papel proativo na aprendizagem dos estudantes e que tanto os programas educativos quanto os planos de aula devem conter cenários que tenham o potencial de funcionar como uma alavanca para alcançar mudanças na compreensão dos alunos. Para concretizar isso, o ensino deve basear-se em trajetórias de ensino e de aprendizagem (TEA) coerentes a longo prazo.
---------------	---

Fonte: a autora baseada em Van Den Heuvel-Panhuizen e Drijvers (2020, p. 714/715)

Peck (2015, p. 140)²⁴ afirma que Freudenthal foi muito cuidadoso na escolha do termo reinvenção "em oposição a 'construção' ou 'descoberta'". Essa escolha linguística não é casual. Primeiramente, a ideia de que as produções matemáticas são inventadas, não descobertas, sugere que são produtos da atividade humana, em vez de elementos de uma estrutura platônica que existe independentemente dos seres humanos. Freudenthal (1968, p. 6) também fundamentou as origens da matemática como resultado da matematização de aspectos da realidade. Em segundo lugar, o prefixo "re", em reinvenção, indica que as produções que um estudante deve reinventar existem antes dele. Para Freudenthal (1991, p. 48, tradução nossa),

[...] guiar a reinvenção significa encontrar um equilíbrio sutil entre a liberdade de inventar e a força de orientar [...] a livre escolha do estudante já é restringida pelo "re" da "reinvenção". O estudante deve inventar algo que seja novo para ele, mas bem conhecido para o guia.

Ao se pensar na matemática como um assunto pronto e no ensino como o momento em que os estudantes “recebem” informações a respeito de assuntos matemáticos, desconsidera-se que a matemática foi desenvolvida para lidar com alguma situação em determinado contexto histórico e condições materiais. Afinal, para que as pessoas possam se organizar como sociedade, a matemática se faz necessária, porque, segundo Caraça (1984, p. XIII), a matemática enquanto ciência, “encarada como um organismo vivo, impregnado de condição humana” com as suas forças e fraquezas, está subordinada às necessidades do homem na luta pelo entendimento da condição humana e pela libertação de restrições naturais que o homem possui. Ela aparece como uma grande parte da vida humana social. Isso significa que ela está presente na vida dos homens porque, certamente, serve para

²⁴ Freudenthal was very careful in his choice of the term “guided reinvention,” as opposed to “construction” or “discovery” or even “invention”.

resolver seus grandes problemas. Em consonância com esse argumento, Skovsmose (1994) enfatiza que a matemática é indissociável da sociedade atual, uma vez que vivemos em uma sociedade altamente tecnologizada.

A matemática desempenha um papel essencial no impulsionamento da inovação tecnológica, fornecendo ferramentas para resolver problemas por meio do desenvolvimento de modelos matemáticos, que são fundamentais para entender e manipular fenômenos. Segundo D'Ambrosio (2002), fenômenos elétricos e tecnologias associadas à eletricidade tiveram grande influência no desenvolvimento da matemática a partir do século XIX. Além disso, destaca que as percepções da natureza, como a mecânica quântica e a relatividade, foram possíveis graças ao avanço tecnológico relacionado a eletricidade, eletromagnetismo, eletrônica e microeletrônica. De acordo com esse autor, a tecnologia não apenas influencia as atividades e práticas cotidianas, mas também desempenha um papel importante na produção de conhecimento científico e no desenvolvimento de novas teorias e abordagens em várias áreas, incluindo a matemática. Essa interdependência entre a tecnologia e a sociedade moderna é evidenciada pelo fato de que muitas das mudanças sociais, econômicas e culturais, ao longo dos séculos XIX, XX e XXI, foram impulsionadas e moldadas pelo avanço tecnológico.

Levando em conta que a matemática foi desenvolvida para atender às necessidades humanas, é um equívoco considerar que ela não atende aos interesses de determinados grupos de pessoas. Nesse sentido, Peck (2018, p. 3) afirma que conceber a matemática como neutra é resultado da crença generalizada da "filosofia do platonismo-formalismo no ocidente", que trata a matemática como algo fora da mente humana, como se a existência dela não dependesse da existência humana. Essa crença está pautada na afirmação de que não há um conhecimento que exista aquém do ser humano e que o conhecimento historicamente desenvolvido e validado pelos pares, o conhecimento socialmente aceito, foi desenvolvido para resolver alguma situação com que aqueles humanos tiveram que lidar.

Então, de acordo com Freudenthal (1971, 1973, 1991), para aprender matemática, as pessoas precisam experienciar situações similares àsquelas pelas quais os matemáticos passaram para desenvolver conhecimentos e, assim, lidar e organizar assuntos provenientes dessas experiências por meio da matemática. Essa atividade de lidar matematicamente com uma situação recebe o nome de “matematização” e

[...] refere-se à essência da atividade matemática, ao fio condutor que atravessa toda a educação matemática dirigida ao desenvolvimento de conhecimentos factuais, à aprendizagem de conceitos, à obtenção de competências e ao uso da linguagem e de outras competências de organização na resolução de problemas que são, ou não são, colocados no contexto matemático (TREFFERS, 1987, p. 51, tradução nossa)²⁵.

No processo de matematização, ocorre algo semelhante ao que Sfard (1991) defende quando é desenvolvido um conceito. Para ela, o desenvolvimento de conceitos é um processo composto por três estágios que correspondem a graus de estruturação crescente: a interiorização, a condensação e a reificação.

Na interiorização, a pessoa se "familiariza com os processos que eventualmente darão origem a um novo conceito" (SFARD, 1991, p. 18, grifos nossos). Segundo a autora, se um conhecimento pode ser concretizado por meio de representações (mentais), pode-se afirmar que foi interiorizado. Esse estágio, aparentemente, está presente em ações de matematização de como identificar as especificidades matemáticas em um contexto geral, ou seja, fazer uma leitura de alguma codificação da realidade por meio da matemática; organizar as informações presentes na situação para lidar matematicamente com ela, isto é, esquematizar; formular, visualizar um problema, que implica em transformar a identificação e a organização em linguagem matemática; descobrir relações e regularidades (DE LANGE, 1999).

A condensação é um período de compreensão de longas sequências de operações em unidades mais simples de lidar. Nesse estágio, o estudante passa a pensar no processo como um todo, sem sentir necessidade de entrar em detalhes (SFARD, 1991). Esse estágio está presente em ações de matematização tais como reconhecer similaridades em diferentes problemas, para facilitar a escolha da estratégia em situações distintas; representar uma relação em uma fórmula; provar regularidades; refinar e ajustar modelos; combinar e integrar modelos, generalizar (DE LANGE, 1999).

Por fim, ocorre o estágio de reificação, que é definido "como uma mudança ontológica - uma habilidade repentina de ver algo familiar sob uma luz totalmente nova" (SFARD, 1991, p. 19, tradução nossa). Para a autora, a reificação é o momento em que se torna

²⁵ *Mathematising is an organizing activity. It refers to the essence of the mathematical activity, to the thread that runs through all mathematics education directed towards the acquisition of factual knowledge, the learning concepts, the attainment of skills and the use of language and other organizing skills in solving problems that are, or are not, placed in mathematical context.*

possível conceber um conceito como um objeto. E esse é o estágio final do processo de matematização, que é a capacidade do estudante de aplicar o que desenvolveu. A teoria apresentada por Sfard (1991) é focada nos processos mentais realizados sobre objetos com intenção de construir objetos.

É importante considerar que a atividade de matematização do estudante não precisa, necessariamente, percorrer todas as ações citadas acima, mas é desejável que, trabalhando com um modelo menos formal seja possível desenvolver um modelo mais formal (GRAVEMEIJER, 2005). Isso quer dizer que, para atingir um modelo mais formal, muitas vezes, o estudante passa por um menos formal.

Quadro 02 - Relação entre os estágios de pensamento segundo Sfard (1991) e as ações de matematização apresentadas por De Lange (1999)

Estágios do pensamento segundo Sfard (1991)	Ações de matematização segundo De Lange (1999)
Interiorização Familiarização com os processos que eventualmente darão origem a um novo conceito.	- identificar as especificidades matemáticas em um contexto geral; - fazer uma leitura de alguma codificação da realidade por meio da matemática; - organizar as informações presentes na situação para lidar matematicamente com ela; - esquematizar; - formular, visualizar uma situação; - transformar a identificação e a organização em linguagem matemática; - descobrir relações e regularidades;
Condensação Período de compreensão de longas sequências de operações em unidades mais simples de lidar.	- reconhecer similaridades em diferentes situações, para facilitar a escolha da estratégia em situações distintas; - representar uma relação em um modelo matemático; - provar regularidades; - refinar e ajustar modelos; - combinar e integrar modelos. - generalizar
Reificação Mudança ontológica: transformação na percepção de algo, resultando em uma compreensão totalmente nova desse objeto ou conceito. Nesse processo, um indivíduo adquire repentinamente a habilidade de enxergar algo	- aplicar o modelo generalizado em outras situações.

familiar sob uma luz completamente diferente.	
---	--

Fonte: a autora

Na abordagem discutida, destaca-se o papel essencial do professor no processo educativo, conforme delineado pelas ideias de Freudenthal (1991). A reinvenção guiada emerge como um método de ensino que oferece aos alunos a oportunidade de vivenciar um processo análogo à trajetória percorrida por matemáticos no desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Nessa perspectiva, reconhece-se que os conceitos matemáticos não se originam instantaneamente, mas foram desenvolvidos ao longo de séculos (GRAVEMEIJER, 2004, 2005). Então, cabe ao professor desempenhar um papel de encurtar esse percurso para os estudantes. Sua função é orientá-los na exploração da tarefa e na reinvenção, proporcionando experiências que oportunizem o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Ele assume a responsabilidade de guia, incentivando o pensamento crítico e oferecendo suporte quando necessário.

O professor não mostra caminhos que o estudante deve percorrer, mas cria oportunidades para que ele encontre algum. Isso não quer dizer que o estudante trilha esse caminho sem orientação alguma. Na RME, o papel do professor é criar oportunidades de aprendizagem e guiar o estudante no seu processo de reinvenção por meio de intervenções, *feedbacks*.

Van Reewijk (2001) afirma que o ponto de partida da reinvenção guiada é a ação dos estudantes ao lidarem com situações de acordo com estratégias conhecidas, menos formais ou não. Para tanto, o professor pode elaborar uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem - TEA, que é composta de uma Trajetória de Ensino, contendo indicações didáticas, descrevendo como o ensino pode se articular com o processo de aprendizagem dos estudantes, e de uma Trajetória de Aprendizagem, que dá uma visão geral do possível processo de aprendizagem dos estudantes e um delineamento dos assuntos matemáticos que podem ser trabalhados em sala de aula (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, 2001a, 2001b, 2001c, 2010a). Uma TEA apresenta uma perspectiva longitudinal, porque "leva em consideração os processos de ensino e de aprendizagem a longo prazo, dando uma visão geral desses processos e podendo ser um guia para as tomadas de decisões didáticas" (ROSSETTO, 2021, p. 46).

As tarefas selecionadas nesse ambiente de trabalho devem ser realísticas, como sugere o nome da abordagem. Van Den Heuvel-Panhuizen (2001c) e Van Den Heuvel-Panhuizen e Drijvers (2020) explicitam que o termo "*realistic*" vem da palavra neerlandesa "*rich realiseren*", que significa imaginar, realizar, e está relacionado com o fato de que, na RME, o professor oferece aos estudantes situações que façam sentido para eles. Essas situações podem ser contextualizadas partindo do mundo real²⁶, mas também do mundo da fantasia, da imaginação, dos contos de fadas e até mesmo do mundo formal da matemática. O importante é que sejam possíveis de serem imaginadas pelos estudantes e que eles possam se sentir convidados a lidar com elas (DRIJVERS et al., 2013).

Segundo Freudenthal (1971, 1973), os contextos significativos são aqueles que podem ser matematizados. Quando os alunos lidam com uma tarefa cuja resolução parte de uma situação, é desejável que desenvolvam modelos para resolvê-la. Esses modelos, inicialmente, podem surgir a partir de contextos específicos e

referem-se a situações paradigmáticas concretas, que são experiências reais para os alunos. Neste nível os modelos devem permitir estratégias informais que correspondem a estratégias de resolução situadas ao nível da situação que está definida na tarefa contextualizada. [...] Depois, enquanto os alunos recolhem experiências com problemas semelhantes, a sua atenção pode transferir-se para as relações e estratégias matemáticas. Como consequência, o modelo toma caráter mais objetivo, e torna-se mais importante como base para o raciocínio matemático do que como uma forma de representar um problema contextualizado. Assim, o modelo começa a tornar-se uma base referencial para o nível da matemática formal (GRAVEMEIJER, 2005, p. 16).

Treffers (1987)²⁷ afirma que a passagem de um nível mental para o seguinte se assemelha a um labirinto, isso significa que não há apenas um caminho para seguir, e ele não é linear. Uma pessoa pode trilhar um caminho diferente do de outra pessoa. Van den Heuvel-Panhuizen (2010b, p. 5) afirma que os estudantes passam por diferentes níveis de compreensão:

[...] desde a apresentação de soluções menos formais relacionadas ao contexto, à criação de vários níveis de atalhos e esquematizações, ao desenvolvimento de conhecimentos de como os conceitos e estratégias estão relacionados. Os modelos servem como um dispositivo importante para preencher a lacuna entre a matemática informal relacionada ao

²⁶ Considerando-se que Mundo Real/Realidade é onde todos nós vivemos. É onde se manifesta tudo que há.

²⁷ [...] *the passage from one mental level to the next is not a neat lattice path but rather a patch-work of paths, if not a labyrinth* [...]

contexto e a matemática formal. (VAN DEN HEUVEL- PANHUIZEN, 2010b, p. 5, tradução nossa)²⁸.

A passagem de um nível mental para outro pode ocorrer a todo momento. Não existe uma regra ou uma prescrição. Para além disso, na perspectiva da RME, os assuntos matemáticos são fortemente integrados (VAN DEN HEUVEL- PANHUIZEN, 2010b). Isso

também se aplica a tópicos dentro de domínios. Por exemplo, dentro do domínio do número, isso significa que o sentido dos números, a aritmética mental, a estimativa e os algoritmos são ensinados em estreita conexão uns com os outros (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010b, p. 5, tradução nossa)²⁹.

Quando os estudantes compartilham suas estratégias e procedimentos, eles podem "tomar consciência das desvantagens ou vantagens de suas próprias produções, e que copiar o trabalho de outros não ajudará em seu próprio progresso" (TREFFERS, 1987, p. 249, tradução nossa)³⁰. Em suma, o diálogo - o compartilhamento de ideias, de estratégias e procedimentos, a discussão em pequenos grupos, a apresentação da própria produção - faz parte de uma aula na perspectiva da RME (TREFFERS, 1987). O professor deve oferecer aos alunos oportunidades de compartilhar suas estratégias e invenções com outros alunos. Dessa forma, eles podem obter ideias para melhorar suas estratégias. Além disso, a reflexão é evocada, o que pode lhes permitir atingir um nível superior de compreensão (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010b, p. 5, tradução nossa)³¹.

De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (2010b), na perspectiva da Educação Matemática Realística, a aprendizagem de matemática não é somente uma

²⁸ [...] from the ability to invent informal context-related solutions, to the creation of various levels of shortcuts and schematisations, to the acquisition of insight into how concepts and strategies are related. Models serve as an important device for bridging the gap between informal, context-related mathematics and the more formal mathematics. In order to fulfil this bridging function, models have to shift from a – ‘model of’ a particular situation to a – ‘model for’ all kinds of other, but equivalent, situations.

²⁹ This principle also applies to topics within domains. For example, within the domain of number this means that number sense, mental arithmetic, estimation and algorithms are taught in close connection to each other.

³⁰ This means that the pupils are also confronted with the constructions and productions of their fellows, which can stimulate them to shorten their learning path, to help themselves up on the procedures of others, to become aware of the drawbacks or advantages of their own productions, and that copying others' work slavishly will not aid their own progress. In brief, the learning process is part of interactive instruction where individual work is combined with consulting fellow students, group discussion, collective work reviews, presentation of one's own productions, evaluation of various constructions on various levels and explanation by the teacher.

³¹ The interactivity principle of RME signifies that the learning of mathematics is not only a personal activity but also a social activity. Therefore, RME is in favour of ‘whole-class teaching’. Education should offer students opportunities to share their strategies and inventions with other students. In this way they can get ideas for improving their strategies. Moreover, reflection is evoked, which enables them to reach a higher level of understanding.

atividade pessoal, mas também uma atividade social³². É desejável que os estudantes tenham acesso às produções de seus colegas de sala, que compartilhem suas estratégias uns com os outros, o pode estimulá-los, servir como oportunidade e auxiliar na aprendizagem.

³² Atividade social é o conjunto de ações mobilizadas por um grupo para que juntos alcancem um objetivo. Pautada no conceito de Leontiev (1977/1997). Acesso em 13/01/2024. <https://www.marxists.org/portugues/leontiev/1972/mes/atividade.htm>

4. A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA E ARTICULAÇÕES

No prefácio de Skovsmose (2017), consta que discussões de aspectos políticos em torno da Educação Matemática surgiram na década de 1980, com expoentes como Ubiratan D'Ambrosio, Marilyn Frankenstein, Arthur Powell, Paulus Gerdes, John Volmik, Munir Fasheh, Stleg Mellin-Olsen, Ole Skovsmose. Esses estudiosos trouxeram à tona questões relacionadas ao papel da matemática na sociedade.

De acordo com Skovsmose (2014), a matemática tem um papel importante na sociedade moderna, por exemplo, a linguagem da tecnologia é matemática. De acordo com o mesmo autor, é comum que as pessoas considerem que a matemática carrega um *status* de poder, uma vez que a racionalidade matemática é valorizada e considerada indispensável para os humanos e, além disso, é considerada indiscutível. Para questionar esse *status* da matemática, ele propõe uma abordagem denominada Educação Matemática Crítica (EMC) (SKOVSMOSE; VALERO, 2002, 2012; SKOVSMOSE, 1994, 2014, 2017, 2021). Skovsmose (2014) afirma que a EMC pode ser caracterizada em termos de diferentes preocupações com o papel da matemática na sociedade e com o da Educação Matemática sob a ótica social, política, econômica.

Em uma palestra ministrada por Skovsmose (2020)³³, ele afirmou que a EMC não é um método, não é baseada em teorias fixas e não é baseada em posições políticas particulares, mas trata de preocupações a respeito das condições de vida dos estudantes e do futuro deles, dos mundos-vida³⁴ dos professores, da sociedade (exploração, opressão, pobreza, racismo, sexismo, colonização, machismo, injustiça social etc.) e dos ambientes de aprendizagem (cenários para investigação, diálogos, pedagogia por projetos, tradição de matemática escolar, investigações). Por conseguinte, a Educação Matemática Crítica deve promover uma leitura crítica do ambiente no qual a pessoa está inserida para que seja possível estar no caminho para uma mudança social libertadora em uma sociedade altamente tecnologizada.

³³ No EBRAPEM. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=micoFSQHvAs>. Acesso em: 20 de novembro de 2020.

³⁴ O conceito de mundo-vida de Husserl (2012) refere-se ao ambiente vital e cotidiano no qual as experiências humanas ocorrem. Ele abrange não apenas o ambiente físico, mas também as relações sociais, as práticas culturais e as experiências subjetivas. O mundo-vida é o repositório de significados e sentidos que orientam as ações e interpretações das pessoas, sendo uma base essencial a partir da qual as coisas têm significado e relevância para as pessoas (HUSSERL, 2012).

Nesse sentido, de acordo com Frankenstein (2005) e Skovsmose (2014), na perspectiva da EMC, bem como na da RME (PECK, 2015), a matemática é uma área do conhecimento que não é neutra. Ela atende a interesses sociais, políticos e econômicos particulares, uma vez que existem muitos usos para ela. Afinal, o conhecimento matemático foi desenvolvido para resolver problemas do cotidiano de pessoas.

Um dos propósitos da EMC é formar pessoas críticas e capazes de contribuir para possíveis transformações sociais. Nesse contexto, uma abordagem educacional que visa capacitar os estudantes a se tornarem agentes ativos e conscientes das transformações sociais, reconhecendo o papel fundamental que a matemática desempenha nesse processo, deve promover o desenvolvimento de um modo de pensar e agir que permita aos estudantes compreenderem a realidade como um processo dinâmico em constante mudança (DUARTE, 1985).

Segundo esse mesmo autor, isso implica em compreender as leis internas que regem o desenvolvimento dessa realidade em diferentes contextos sociais, econômicos e políticos. Ao entenderem as dinâmicas subjacentes e as inter-relações entre diferentes variáveis, os estudantes podem identificar as possibilidades de transformação e intervenção no mundo ao seu redor.

Nesse sentido, a matemática ajuda a fornecer ferramentas analíticas e conceituais para investigar padrões, formular hipóteses, analisar dados e prever resultados. Ao integrarem o pensamento matemático a uma perspectiva crítica e reflexiva sobre a sociedade, os estudantes são capacitados a aplicar seu conhecimento de forma significativa na análise e na resolução de problemas sociais complexos (DUARTE, 1985).

Skovsmose (2014) afirma que a matemática pode ser utilizada tanto para promover maravilhas, como, por exemplo, os avanços na medicina, quanto para promover horrores, como a bomba atômica. Não há uma essência para a matemática, ela "pode atender a qualquer interesse" (SKOVSMOSE, 2014, p. 88). Segundo esse autor, não há garantia alguma em relação ao uso que se faz do conhecimento matemático, que pode ser utilizado para controle, para produzir mão de obra, mas também para lutar por justiça social, entre outros usos.

Frankenstein (2005, p. 106) ainda afirma que o conhecimento não existe separado do como e do porquê é utilizado, nem no interesse de quem. Segundo Frankenstein (2005, p. 104), o conhecimento

- não é neutro, pois está sempre a serviço do interesse de um grupo de pessoas;
- não é fixo permanentemente nas propriedades abstratas dos objetos;
- é continuamente criado e recriado tal como as pessoas refletem e agem no mundo;
- não existe separado da mente humana, é produzido pelos humanos coletivamente, buscando e tentando dar sentido ao seu mundo;
- não é acabado devido à existência da unidade entre subjetividade e objetividade. Não há como as pessoas conhecerem completamente aspectos particulares do mundo.

Sendo assim, na perspectiva da EMC, não se trata apenas de aprender aplicações, estratégias e procedimentos da matemática para se ajustar a uma realidade, porque leva-se em consideração a influência dos fatores sociais, culturais e políticos. É um processo em constante evolução e sujeito a revisão e transformação ao longo do tempo. É uma construção social resultante da interação e colaboração entre pessoas e grupos e é uma ferramenta essencial para a compreensão e transformação do mundo.

Na EMC, “o propósito do conhecimento é as pessoas se humanizarem, superando a desumanização através da resolução da contradição fundamental da nossa época: aquela entre dominação e libertação” (FRANKENSTEIN, 2005, p. 105), uma vez que o conhecimento matemático é parte integrante da tecnologia, do mercado de trabalho, das notícias de jornal, enfim, de diversas ações humanas do dia a dia.

Nesse sentido, a EMC busca trazer questionamentos a respeito da matemática e de como ela é ensinada nas salas de aula levando em consideração o contexto histórico, político, social, econômico dos envolvidos. Nessa perspectiva, por meio de reflexões pessoais e/ou coletivas nas salas de aula, em espaços de discussão, estudantes e professores são levados a identificar, estudar, compreender, avaliar, criticar o conhecimento matemático e as áreas do conhecimento que utilizam a matemática como meio ou fim.

Skovsmose (2014, 2017, 2020) afirma que a matemática pode formatar a sociedade e propõe que, pensando em uma conscientização coletiva de quem somos e qual nosso papel na sociedade, toda pessoa deve ler e escrever o mundo com matemática. Entende-se “ler” o mundo como a forma de interpretar o mundo e “escrever” como as

maneiras de agir no mundo, com uma interpretação que converge para a ideia de “literacia”³⁵ de Freire e Macedo (1987) e a de “materacia”³⁶ de D’Ambrosio (2004).

Skovsmose (2009, 2014), em particular, define essa leitura e interpretação do mundo como “matemacia”, que é definida como “[...] capacidade para ler e interpretar situações sociais, culturais, políticas, econômicas e interpretar essas situações com condições para a realização de ações de transformação” (SKOVSMOSE, 2009, p. 111) por meio da matemática. De acordo com o mesmo autor, a matemática pode ajudar os estudantes a desenvolverem uma consciência crítica fornecendo subsídios para que eles aprofundem seus conhecimentos do contexto sociopolítico de suas vidas, e isso é fundamental para desenvolver um ambiente democrático³⁷. Segundo Milani (2015, p. 16), “com a matemacia faz-se uma leitura crítica das situações, avaliando-se as posições de poder, os riscos envolvidos e as possíveis mudanças”. O estudante que reflete criticamente sobre uma situação transforma seu modo de enxergar essa situação, e isso pode mudar suas ações no dia a dia.

Skovsmose (2014) traz em discussão a “indefinição” da Educação Matemática, pois ela pode ser um “potencializador” para os estudantes, mas também um “despotencializador”. No contexto do ensino tradicional³⁸, é comum que o professor prescreva exercícios para os alunos resolverem, e esses exercícios, geralmente, são “uma sequência de ordens” com frases imperativas como “calcule”, “resolva” (SKOVSMOSE, 2014, p. 18). Isso pode ser um “despotencializador” de acordo com esse autor, pois esse tipo de proceder na sala de aula tende a treinar os estudantes a serem obedientes, a sempre seguirem o que é prescrito. Nesse sentido, a obediência cega e a submissão acrítica a um “regime de verdades” podem contribuir para a apatia social e política, favorecendo interesses do mercado

³⁵ D’Ambrosio (2004, p. 36) define literacia como “a capacidade de processar informação escrita, o que inclui escrita, leitura e cálculo, na vida cotidiana”.

³⁶ Para D’Ambrosio (2004, p. 36), materacia é “a capacidade de interpretar e manejar sinais e códigos e de propor e utilizar modelos na vida cotidiana”

³⁷ Ambiente em que há liberdade de associação e de expressão e no qual não existem distinções ou privilégios de classe hereditários ou arbitrários.

³⁸ Neste trabalho, a abordagem tradicional de ensino é “uma concepção e uma prática educacionais que persistem no tempo, em suas diferentes formas, e que passaram a fornecer um quadro diferencial para todas as demais abordagens que a ela se seguiram. [...] o adulto, na concepção tradicional, é considerado como homem acabado, ‘pronto’ e o aluno um ‘adulto em miniatura’, que precisa ser atualizado. O ensino será centrado no professor. O aluno apenas executa prescrições que lhe são fixadas por autoridades exteriores (MISUKAMI, 1986, p. 7).

de trabalho, que, muitas vezes, está alinhado às prioridades do mercado neoliberal, valorizando a produção sem questionamentos.

Será que uma obediência cega, da qual faz parte certa submissão ao regime de verdades, alimenta a apatia social e política que tanto é apreciada pelas forças do mercado de trabalho? Será que esse tipo de obediência contempla perfeitamente as prioridades do mercado neoliberal, em que a produção sem questionamentos atende às demandas econômicas? (SKOVSMOSE, 2014, p. 19).

Por outro lado, segundo esse autor, a Educação Matemática pode "potencializar"³⁹ os estudantes quando traz à tona contextos que são relevantes fora da escola, como assuntos que emergem em decorrência das necessidades humanas (SKOVSMOSE, 2014). Esse enfoque sugere que a aprendizagem matemática não deve ser dissociada da realidade cotidiana e das demandas da sociedade. Ao integrar assuntos matemáticos a situações práticas e contextos do mundo real, a Educação Matemática busca tornar a disciplina mais significativa e aplicável à vida dos estudantes. Essa abordagem visa mudar a visão de "transmissão de conhecimento matemático", para desenvolver conhecimento que pode ser utilizado no dia a dia e em diferentes situações.

Na Educação Matemática Crítica, propõe-se o trabalho com situações que sejam significativas para os estudantes e que levem em consideração a vivência deles (*backgrounds*) e as perspectivas para o futuro desses estudantes (*foregrounds*). O *foreground* de um humano "refere-se às oportunidades que as condições sociais, políticas, econômicas e culturais proporcionam a ele" (SKOVSMOSE, 2014, p. 34). Entretanto, o *foreground* não é uma condição determinística das condições sociais, políticas, econômicas, culturais. Não há uma garantia de que um estudante que nasceu em uma família rica corresponda às estatísticas provenientes da classe social dele. Vale o mesmo para uma pessoa que nasceu em uma região afetada por guerra, ou em um contexto socioeconômico desprivilegiado. O *background* de uma pessoa (as experiências vividas) exerce influência no seu *foreground* (as experiências que ela pode viver). Tanto o *foreground* quanto o *background* podem sofrer alterações ao longo da vida de uma pessoa, pois a percepção em relação às experiências já vividas pode mudar, e as perspectivas que essa pessoa tem para o futuro é algo que está em aberto.

³⁹ Exemplos de trabalhos com tarefas matemáticas consideradas como "potencializadoras" podem ser vistos em Faustino (2018), Muzinatti (2018).

De acordo com Skovsmose (2000), os professores e os alunos precisam, juntos, encontrar seus percursos entre os diferentes ambientes de aprendizagem proporcionados pelo contexto, por exemplo, das tarefas. Esse autor apresenta uma matriz de ambientes que pode e deve ser trabalhada em sala de aula (Quadro 03), que categoriza os ambientes em duas colunas, uma como paradigma do Exercício e outra como Cenário para Investigação.

Quadro 03 - Diferentes ambientes de aprendizagem

	Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000)

Os ambientes de aprendizagem (1), (3) e (5) se concentram no "paradigma do exercício", prática comum de uma sala de aula tradicional. Os estudantes resolvem sequências de tarefas cuja estratégia de solução já conhecem. O que muda entre esses ambientes é o contexto das tarefas. No (1), trabalha-se predominantemente em exercícios mais abstratos, teóricos e desvinculados de situações práticas do cotidiano; no (3), as tarefas possuem conexões com situações ou elementos do mundo real, mas podem conter elementos simplificados ou adaptados, tornando-os semirreais. Segundo Skovsmose (2000, p. 74), a "semirealidade pode ser uma referência que ofereça suporte para alguns alunos na resolução de problema". No ambiente (5), o contexto das tarefas é baseado na vida real.

Os ambientes (2), (4) e (6) estão inseridos no "cenário para investigação". Aqui, os estudantes são confrontados a buscar resposta para as tarefas. O (2) refere-se a um ambiente que incorpora números e figuras geométricas. Esse ambiente pode ser entendido como um espaço em que conceitos matemáticos, como quantidades numéricas e formas geométricas, desempenham um papel significativo. O quarto ambiente "contém referências a uma semi-realidade, mas agora ela [...] é um convite para que os alunos façam explorações e explicações" (SKOVSMOSE, 2000, p. 75). Por fim, no ambiente (6), as tarefas envolvem investigação e o contexto é inspirado na vida real. As informações de jornais, revistas que envolvam situações cotidianas, como fome, tratamento do lixo, consumo, economia, entre outros, podem servir de fonte de inspiração para a escolha de tarefas para esse ambiente.

A prática pedagógica baseada em cenários para investigação envolve a busca por contextos do mundo real nos quais os alunos podem explorar e aplicar conceitos matemáticos. Isso fomenta a compreensão e a resolução de problemas de maneira contextualizada. Por outro lado, as práticas centradas em exercícios tendem a ser mais diretas, visando à reprodução, muitas vezes desvinculadas de situações práticas. Skovsmose (2000) defende que os seis ambientes devem ser explorados em uma sala de aula e que o professor pode, e deve, transitar entre eles.

Skovsmose (2018) destaca a importância de conectar os conhecimentos matemáticos a situações concretas, que podem ser experienciadas pelos estudantes. Por exemplo, a introdução do conceito de fração pode ser inicialmente baseada na ideia de dividir em partes iguais, criando uma base tangível para a compreensão. Novas referências podem ser introduzidas conforme os estudantes aprendem, expandindo e refinando o significado do termo "fração".

Os motivos, ou o contexto que orienta as ações, desempenham um papel significativo na produção de significado na sala de aula de matemática. Portanto, a discussão sobre diferentes tipos de referências, na Educação Matemática, não se limita apenas à apresentação de exemplos ou a situações, também incorpora os motivos que impulsionam as ações dos alunos. Essa abordagem visa proporcionar um contexto mais amplo e significativo para a aprendizagem.

Skovsmose (2017) deixa claro que a EMC está ancorada na Educação Crítica de Paulo Freire e enfatiza a questão do diálogo na relação entre estudantes e professores. Na compreensão desse autor, não existe uma pessoa que comanda e uma que obedece nos processos de ensino e de aprendizagem, o espaço deve ser colaborativo e o professor e os estudantes, parceiros. Não é apenas o professor que ensina e o aluno que aprende. Os participantes são considerados ativos na construção do conhecimento e é por meio dele que os estudantes desenvolvem consciência crítica. Além disso, a prática do diálogo vai além da conversação, envolve uma reflexão crítica sobre o mundo e as experiências dos participantes. Os envolvidos no diálogo são desafiados a questionar, refletir e construir significado coletivamente.

As ideias que dizem respeito ao diálogo e à relação entre estudantes e professor são desenvolvidas do ponto de vista de que a educação deve fazer parte de um processo de democratização. Se o desejo é “desenvolver uma atitude democrática por meio

da educação, a educação como relação social não deve conter aspectos fundamentalmente não democráticos” (SKOVSMOSE, 2017, p. 16).

Não é interessante que o professor tenha um papel decisivo e prescritivo na condução das atividades em sala de aula, tampouco fazer conexões prematuras entre os modelos menos formais e os modelos mais formais que os estudantes desenvolvem. Para Skovsmose (2014), é válido que os alunos expressem suas ideias em qualquer nível de sofisticação de conceitos e de linguagem formal ou não.

Na visão desse mesmo autor, o homem precisa analisar toda forma de racionalidade matemática⁴⁰ por intermédio de reflexões sobre a matemática, incluindo as ações das quais ela (a matemática) pode fazer parte, refletir com a matemática e por meio de processos de investigação.

Um exemplo de reflexão "sobre a matemática" é pensar se é confiável utilizar alguma análise estatística em uma população a partir de uma pequena amostra; se o método X é mais apropriado que o método Y para uma situação; pensar no significado da interpretação de gráficos, entre outras reflexões que abrangem a própria matemática. Um exemplo de reflexão "com matemática" é o projeto citado por Skovsmose (2014) para discutir o consumo de energia na produção de carne de porco e a quantidade de energia que aquela carne pode oferecer ao corpo humano. A partir desse projeto, os alunos concluíram que, do ponto de vista energético, não compensa produzir carne de porco, pois, para produzir a carne, utiliza-se mais energia do que a quantidade de energia fornecida pela carne quando ingerida. É importante salientar que a matemática não garante a veracidade das conclusões, mas abre um espaço de possibilidades para se refletir sobre as incertezas presentes nos procedimentos, nas informações que lhe são apresentadas. Um exemplo de reflexão "por intermédio de investigações matemáticas" é a exploração da função $f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$ utilizando o *software Geogebra*. Criam-se os parâmetros a , b , c e d e observa-se o que acontece ao gráfico da função conforme mudam-se esses parâmetros a , b , c e d . O que acontece ao gráfico se $a = 0$, ou se b dobrar?

De acordo com Skovsmose (2014, p. 105), a escola deve oportunizar que os estudantes tenham acesso aos conhecimentos que são importantes para a manutenção e o aprimoramento do mecanismo que sustenta a globalização e a economia associada a ela. Isso

⁴⁰ Propensão para encarar fatos e ideias de um ponto de vista puramente racional.

está diretamente ligado à ideia da matemacia entendida como uma competência para lidar com técnicas matemáticas. Além disso, segundo Skovsmose (2014), deve-se refletir e discutir a diversidade de condições em que as pessoas vivem, pois há condições distintas entre as crianças do planeta. Para ele, as condições de ensino e de aprendizagem se estruturam socioeconomicamente, não apenas culturalmente, e o aspecto político também deve ser levado em consideração.

Skovsmose (2017, p. 37) afirma que “a democracia não caracteriza apenas estruturas institucionais da sociedade com relação às distribuições de direitos e deveres. Democracia também tem a ver com a existência de uma competência na sociedade”. Se os professores continuarem abordando a matemática sem o aspecto democrático, ela não passará de mais um instrumento domesticador em uma sociedade dominada pela tecnologia. De acordo com Skovsmose (1994, p. 55),

é de importância democrática, tanto para a pessoa quanto para a sociedade, que qualquer cidadão receba instrumentos para compreender o papel da matemática. Quem não estiver em posição de tais instrumentos torna-se “vítima” de processos sociais nos quais a matemática é um componente. Assim, o propósito da educação matemática deve ser capacitar os alunos para perceber, entender, julgar, utilizar e também realizar a aplicação da matemática na sociedade, em particular em situações que são importantes para sua vida privada, social e vida profissional.⁴¹

D'Ambrosio, em uma entrevista⁴² mediada pela professora Maria do Carmo Domite, afirma que o homem, para ser livre, deve ser capaz de se expressar, ser capaz de ler, de discursar (D'AMBROSIO; FREIRE, 1996). Um exemplo ilustrativo dessa situação ocorreu em julho de 2023⁴³ no aeroporto de Miami. Durante uma discussão sobre bagagem com uma companhia aérea, um brasileiro foi erroneamente acusado de transportar uma bomba devido a um mal-entendido causado pela barreira linguística. Felizmente, a intervenção de uma

⁴¹ *It is of democratic importance, to the individual as well as to society at large, that any citizen is provided with instruments for understanding the role of mathematics. Anyone not in position of such instruments becomes "victim" of social processes in which mathematics is a component. So, the purpose of mathematical education should be to enable students to realize, understand, judge, utilize and also to perform the application of mathematics in society, in particular in situations which are of significance to their private, social and professional life* (SKOVSMOSE, 1994, p. 55).

⁴² Entrevista exibida no ICME 8 (1996) em Sevilha na Espanha, disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=O_TC3nSz3MM> (versão remasterizada). Acesso: 20 de ago. de 2021.

⁴³ Disponível em: <<https://oglobo.globo.com/brasil/noticia/2023/07/21/brasileiro-detido-em-aeroporto-dos-eua-ja-esta-no-brasil-diz-filha-mal-entendido-por-barreira-linguistica.ghtml>> Acesso: 10 de nov. de 2023.

pessoa que estava passando esclareceu os fatos, evitando assim a possível detenção do cidadão.

Na mesma entrevista, Freire complementa que, para além de ser capaz de se expressar, o homem deve ser capaz de ler e discursar utilizando a matemática (D'AMBROSIO; FREIRE, 1996). De acordo com o autor, a "*Math alphabetization literacy*"⁴⁴ pode ajudar na própria criação da cidadania.

No momento em que você traduz a naturalidade da matemática como uma condição de estar no mundo, você trabalha contra um certo elitismo de que os estudos matemáticos são para poucos, mesmo contra a vontade de alguns matemáticos. Ou seja, você democratiza a possibilidade da naturalidade da matemática. E isso é cidadania. Você viabiliza a convivência com a matemática (D'AMBROSIO; FREIRE, 1996).

De acordo com o autor, ao se traduzir a naturalidade matemática como uma condição de estar no mundo, destaca-se a importância de tornar a matemática mais acessível e relevante para todos, independentemente do histórico ou contexto socioeconômico dos estudantes. Isso significa reconhecer e valorizar diferentes formas de conhecimento e experiências, incluindo o conhecimento do senso comum.

Na entrevista, Freire enfatiza que o rigor na matemática é fundamental para garantir consistência, mas isso não deve ser um obstáculo para tornar os conceitos matemáticos mais compreensíveis e aplicáveis à vida cotidiana. Ele propõe que os professores adotem uma abordagem ao ensino de matemática que comece pelo que o estudante sabe. Assim, os professores podem ajudar a construir "pontes" entre os conceitos matemáticos e as experiências pessoais dos alunos, tornando a aprendizagem mais significativa (D'AMBROSIO; FREIRE, 1996).

A relação entre a Educação Matemática e a Democracia ainda não é óbvia nem muito clara (SKOVSMOSE; VALERO, 2002). Segundo Neitzel, Dalbosco e Schwengber (2024, p. 15), a democracia não é apenas uma forma de governo, mas uma forma de vida "em coexistência com outros, em condições iguais de participação de direitos a partir da pluralidade de vozes" (NEITZEL; DALBOSCO; SCHWENGBER, 2024, p. 15). Isso significa que democracia não é apenas um sistema político, mas uma forma de vida e de interagir que está presente no processo formativo.

[...] a relação entre educação e democracia não é dada naturalmente e, exatamente por isso, precisa ser constantemente reafirmada. Isso porque

⁴⁴ Expressão citada pelo autor na entrevista.

pode haver um tipo de educação sem referência à democracia, assim como pode existir democracia sem sua relação direta com a educação e, quando este afastamento acontece, ele precariza e compromete tanto uma como a outra – democracia e educação (NEITZEL; DALBOSCO; SCHWENGBER, 2024, p. 16)

De acordo com Neitzel, Dalbosco e Schwengber (2024, p. 13), ao longo dos anos a escola passou por várias reformas que buscaram redefinir, renovar, adicionar ou remover os papéis que ela desempenha. No entanto, o entendimento sobre a função da escola permanece consistente, o seu objetivo de formação humana, embora ela falhe nessa missão em certos momentos, deixando de formar "pessoas dotadas de senso crítico, de justiça e, principalmente, de humanidade". Esses mesmos autores defendem que "a vida democrática depende de um discurso em comum, que exige formação mínima e que permita a própria sociedade ter clareza sobre a importância fundamental da cultura democrática".

O documento⁴⁵ que anuncia o ICMI⁴⁶ 27 aponta que os estudos sobre uma série de eventos recentes expuseram a natureza precária, incerta e dinâmica do mundo contemporâneo. Esses eventos incluem crises climáticas, pandemias de saúde, perda de biodiversidade, movimentos migratórios forçados, aumento da pobreza, crescente desigualdade, totalitarismo em ascensão e disseminação de notícias falsas que distorcem a realidade. Esses desafios impactaram desproporcionalmente grupos historicamente minorizados, revelando a precariedade que muitos enfrentam há muito tempo.

Segundo esse documento, a conscientização da inseparabilidade das preocupações humanas e ecológicas está emergindo dessa precariedade. Os eventos mencionados estão interconectados em sistemas de relações complexas e interdependentes, que atravessam várias escalas de espaço e tempo. Eles evidenciam os limites destrutivos das relações contemporâneas centradas no ser humano, conhecidas como "neoliberalismo", "capitalismo racial" ou "sociedade industrial de consumo". A Educação Matemática, abrangendo currículo, pedagogia, pesquisa e política, não apenas reflete, mas também "produz" pessoas que usam matemática. No entanto, essas práticas podem (re)produzir injustiças históricas em diversas dimensões, epistêmicas, ontológicas, linguísticas, culturais, sociais e ecológicas.

⁴⁵ *Discussion Document. Mathematics Education and the Socio-Ecological*. Disponível em: https://icmstudy27.sciencesconf.org/data/pages/Discussion_Document_ICMI_28.pdf. Acesso: 20/03/2024.

⁴⁶ *International Commission on Mathematical Instruction* - Comissão Internacional de Ensino de Matemática.

A precariedade socioecológica do mundo questiona o papel da Educação Matemática, destacando a necessidade de ir além das considerações tradicionais e incorporar as dimensões sociopolíticas da vida. Isso envolve refletir sobre o significado da condição socioecológica do mundo para a Matemática e a Educação Matemática, bem como explorar o que a Matemática e a Educação Matemática podem significar para enfrentar essa condição desafiadora.

Segundo o documento do ICMI *Study 27*, as pesquisas que utilizam a Educação Matemática Crítica como fundamento demonstram o potencial da Matemática para “ler” e “escrever” a condição ecológica contemporânea do mundo. A EMC está cada vez mais conceitualizando o mundo social, em particular, a tecnologia ou a matemática em ação, como tendo um impacto no mundo ecológico. A modelagem sociocrítica, que promove a modelagem como uma prática para a compreensão crítica do mundo, passou do foco nas desigualdades sociais para explorar a ação humana nas ecologias do planeta, em fenômenos como o aquecimento global, gestão de resíduos. As tradições críticas na Educação Matemática centraram-se nos povos marginalizados pela colonialidade e pela globalização neoliberal. Na verdade, esses grupos, há muito tempo afetados por eventos localizados na (inter)ação dos humanos e da Terra, colocam cada vez mais em primeiro plano essas interdependências.

5. A AVALIAÇÃO PARA A APRENDIZAGEM ESCOLAR NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Considera-se, aqui, que existe distinção entre avaliação do rendimento escolar e avaliação para a aprendizagem escolar. Na sala de aula, a avaliação que se refere ao produto da atividade dos estudantes é realizada de maneira pontual, usualmente ao final de um período letivo (um mês, um bimestre, um semestre, um ano), cujo resultado não tem possibilidades de ser modificado. Por outro lado, a avaliação que se refere ao processo como um todo, portanto, contínua, ocorre ao longo de todo o período escolar e possibilita a retomada da aprendizagem sempre que necessário (BARLOW, 2006; BURIASCO, 2020; HADJI, 1994).

De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (1996, p. 85, tradução nossa), a avaliação que deve estar presente na sala de aula é a que leva em consideração todo o processo e está intimamente ligada aos processos de ensino e de aprendizagem.⁴⁷ Nela, o propósito, a escolha dos assuntos matemáticos, o método e os instrumentos são todos de natureza didática, pois o objetivo da avaliação não está nos resultados das tarefas, mas nos próprios procedimentos de resolução, na escolha da estratégia para resolver uma tarefa, na resposta apresentada, no diálogo entre as pessoas envolvidas, na escolha da tarefa, em todo o processo educacional.

Esse tipo de avaliação visa também recolher informações a respeito dos processos envolvidos para tomada de decisões educacionais particulares, que envolvem a realização de intervenções e regulação nos processos de aprendizagem, tanto na prática dos professores, quanto nas práticas dos estudantes. Isso significa que é desejável que o professor planeje, antecipadamente, os caminhos que podem surgir na sala de aula, quais tarefas podem surgir ou que pode propor, qual intencionalidade ao propor tal tarefa, quais assuntos podem emergir delas, quais as possíveis dificuldades dos estudantes, que instrumento utilizar e como, quais possíveis encaminhamentos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

O propósito é didático porque a avaliação está sempre a serviço dos processos de ensino e de aprendizagem. A avaliação, aqui, é tomada como oportunidade de aprendizagem, entendida como "ocasião conveniente ao ato de aprender" (PEDROCHI

⁴⁷ *The assessment most appropriate to RME can best be described as 'didactical assessment'. This assessment is closely linked to the education, and all aspects of it reveal this educational orientation.*

JUNIOR, 2012, p. 41) e como prática de investigação (BURIASCO, FERREIRA, CIANI, 2009). No mesmo sentido, Barlow (2006, p. 123) afirma que

[...] uma avaliação deve ser educativa, isto é, ao invés de ser uma simples constatação, tem de constituir realmente um elemento de formação. O aluno deve aprender alguma coisa ao ser avaliado. Todo teste de conhecimentos deve permitir-lhe firmar suas aquisições ou descobrir outras que, no entanto, estejam a sua altura (sob pena de não ter validade) (BARLOW, 2006, p. 123).

O conteúdo ou assuntos matemáticos são didáticos porque eles devem fazer algum sentido, ser imagináveis, acessíveis para os alunos. O conteúdo ensinado na escola como uma “maneira de fazer”, repetindo o procedimento utilizado pelo professor *a priori*, dá lugar a uma “maneira de conhecer”, pois, nessa perspectiva, os estudantes lidam com as tarefas com o que já conhecem, sem receber prescrições ou estratégias. A partir delas (tarefas), são guiados para desenvolver conhecimento, o que ocorre por meio do diálogo, da reflexão, da socialização de ideias. Os estudantes deixam de ser meros reprodutores e passam a se envolver em seu processo de aprendizagem (BURIASCO, 2021⁴⁸; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). A intenção desse tipo de dinâmica caminha sempre na direção de tornar a escola mais atrativa para os estudantes. Para aprender matemática, eles precisam matematizar, lidar com situações que podem experienciar, já que o objetivo geral é que eles aprendam.

Os procedimentos são didáticos porque o processo de avaliação está conectado aos processos de ensino e de aprendizagem, então todo recurso e/ou estratégia utilizados têm o objetivo de oportunizar a aprendizagem. As ferramentas são didáticas porque são utilizadas para favorecer o ensino. O objetivo é coletar um desenho tão completo quanto possível da aprendizagem dos estudantes e, com isso, auxiliar o professor e os estudantes a realizarem intervenções e regulações na aprendizagem. Assim, a natureza didática se mostra na prioridade dada aos processos de aprendizagem dos alunos, afinal, a avaliação deve fornecer informações das atividades dos estudantes. Pode-se, então, considerar que o propósito, a escolha dos conteúdos, os procedimentos e as ferramentas são aspectos da Avaliação Didática (BURIASCO, 2021; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

A avaliação pode ser considerada como fio condutor da prática pedagógica escolar (PEDROCHI JUNIOR, 2018), uma vez que o objetivo do professor e da avaliação é o

⁴⁸Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=dxHsogev0UU>. Acesso em: 24/09/2021.

mesmo: oportunizar a aprendizagem do estudante. Essa perspectiva de avaliação possibilita, por um lado, que o professor forneça aos estudantes um *feedback* confiável de seus processos de aprendizagem e, por outro lado, que os estudantes tenham oportunidades de dar *feedbacks* sobre o trabalho desenvolvido em sala de aula. O *feedback*, na perspectiva da RME, pode

- ajudar a esclarecer os próximos passos nos caminhos pensados pelos estudantes e pelos professores;
- auxiliar o desenvolvimento da autoavaliação (reflexão) na/da/para aprendizagem;
- fornecer informações aos alunos sobre suas produções;
- encorajar a interação entre professores e ~~os~~ estudantes em torno da aprendizagem;
- incentivar a análise e reflexão de estratégias e resoluções apresentadas pelos estudantes;
- oportunizar que o estudante passe, a partir de modelos que desenvolveu, para modelos mais formais.

Segundo Barlow (2006), Black e Wiliam (2006), Buriasco (2020), Earl e Katz (2006), De Lange (1999), Hadji (1994, 2001), Van den Heuvel-Panhuizen (1996), o principal objetivo da avaliação na sala de aula é oportunizar e subsidiar a aprendizagem. Assim, os estudantes devem conhecer todo esse processo, os critérios utilizados para avaliação, o que se espera deles, com quais instrumentos serão avaliados e, não somente conhecer, mas também participar da sua construção, construindo critérios coletivamente, propondo tarefas, avaliando a si mesmo e os colegas.

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) afirma que, para a Avaliação Didática, qualquer instrumento permite ao professor dialogar com o estudante enquanto ele aprende pode ser utilizado, porque a qualidade desse instrumento está no uso que o professor faz com as informações (produzidas a partir dele) e que ele é capaz de enxergar. A prática do diálogo é indispensável em uma avaliação, pois as pessoas que estão envolvidas no processo devem ser levadas em consideração. Não é apenas o professor que coordena o processo.

A autoavaliação deve ser levada em consideração, pois "é um dos processos presentes na busca por uma avaliação democrática e formativa" (SILVA, 2023, p. 1088). Segundo o mesmo autor, pode-se definir a autoavaliação como "processo em que os estudantes refletem e emitem julgamentos em relação à sua aprendizagem e suas produções, valorando-as" (SILVA, 2023, p. 1091). A reflexão sobre o próprio desempenho é uma parte integrante da experiência de aprendizagem de cada pessoa, manifestando-se tanto durante

as aulas quanto em outros momentos. Esse processo nem sempre segue um formato formal, com registros físicos, e muitas vezes é realizada sem registro, critérios definidos ou objetividade. De fato, a autoavaliação pode ser imprecisa e injusta, assim como a heteroavaliação. Independentemente da abordagem adotada pelo estudante em sua autoavaliação, é importante que o professor estimule e promova sua participação.

Além de criar um ambiente que fomente a corresponsabilidade relativa ao trabalho do próprio estudante, o professor desenvolve uma cultura de sala de aula em que os estudantes sejam críticos e avaliem o trabalho dos colegas - Avaliação por Pares.

O papel do professor não se limita a apenas fornecer informações, mas também a cultivar uma mentalidade de autonomia e reflexão nos alunos em relação ao processo de avaliação. Encorajar os alunos a se envolverem ativamente na avaliação de seu próprio progresso não apenas fortalece sua responsabilidade pela aprendizagem, mas também os capacita a desenvolverem habilidades críticas de autorreflexão e autogerenciamento (SILVA; BURIASCO, 2020, p. 50).

Isso implica que o ambiente de sala de aula é um espaço onde todos os estudantes são tratados com respeito e reconhecimento, valorizando-se suas contribuições individuais. Além disso, é crucial que os professores possuam habilidades para cultivar uma comunidade entre os alunos, destacando e valorizando suas diferenças únicas. Estabelecer normas de comunicação respeitadas, encorajando respostas construtivas e positivas, reconhecendo e respeitando as variadas habilidades dos colegas, promoverá um ambiente seguro para todos os alunos, permitindo que aprendam uns com os outros (HERITAGE, 2007, p. 144).

A prática do diálogo é indispensável em uma avaliação democrática, pois as pessoas que estão envolvidas no processo devem ser levadas em consideração (SKOVSMOSE, 2014). A interação entre professor e estudantes e entre os próprios estudantes são aspectos fundamentais de uma aula na perspectiva da RME. Segundo Silva e Buriasco (2022, p. 2),

é por meio dessa interação que o professor pode obter indícios do que os alunos já sabem, de suas dificuldades e inseguranças, de como podem contribuir com as discussões. É também por meio dela que os estudantes podem apresentar suas resoluções, justificá-las, refiná-las; aprender com as explicações dos colegas, pedir esclarecimentos, corrigir resoluções uns dos outros.

Sendo assim, nessa perspectiva, a cultura de que o professor controla tudo em sala é deixada de lado. No ensino tradicional, é o professor quem dita as regras do jogo.

O professor fala e o aluno, supostamente, retém o que ele fala. Freire (1975) denomina essa dinâmica como 'educação bancária', em que o professor deposita conhecimento no estudante. A avaliação, nesse contexto, acontece de forma pontual, o professor, a partir de uma prova escrita, que ocorre ao final de um período, atribui uma nota, sem possibilidade de mudança.

Quando se pensa em uma escola mais democrática, diversificar os instrumentos de avaliação e, conseqüentemente, aumentar a oportunidade de diálogo entre as pessoas que fazem parte do processo educativo pode ajudar no processo de formação de humanos-históricos⁴⁹. Nesse sentido, os professores devem utilizar diferentes instrumentos de avaliação, para que os estudantes recebam oportunidades de documentar o que sabem em diversos formatos (DE LANGE, 1999; EARL; KATZ, 2006; HADJI, 1994, 2001).

Além disso, essa diversificação pode favorecer uma maior representatividade de vozes, possibilitando que mais estudantes expressem aquilo que aprenderam e contribuam para a promoção da interação entre os colegas. Esse enfoque não apenas valoriza as habilidades individuais dos alunos, mas também fomenta um ambiente inclusivo e participativo, no qual a diversidade de perspectivas é reconhecida e valorizada.

Neste trabalho, a aprendizagem é tomada como um processo de reinvenção (FREUDENTHAL, 1973, 1991; GRAVEMEIJER, 1999) e objetificação⁵⁰ (RADFORD, 2008), em que as pessoas reinventam artefatos matemáticos e os dotam de significado (PECK, 2015). O artefato matemático é o conhecimento historicamente desenvolvido e validado pela sociedade (PECK, 2015). Em sua tese de doutorado, Peck (2015) afirma que, para que ocorra aprendizagem, o estudante precisa objetificar o conceito matemático. Precisa torná-lo concreto para ele, não no sentido de ser palpável⁵¹, mas de ser imaginável, fazer sentido. Esse processo acontece quando o estudante lida com uma situação e a representa com linguagem matemática. Sendo assim, é função do professor oferecer situações que sejam próximas à

⁴⁹ Humanos-históricos são pessoas contemporâneas que são capacitadas a compreenderem, criticarem e participarem ativamente do contexto histórico e político em que estão inseridas.

⁵⁰ O autor se refere ao processo de tornar conceitos abstratos em concretos (KOSIK, 1976) e compreensíveis para os estudantes. A objetificação, nesse sentido, envolve a representação de conceitos matemáticos de uma forma mais tangível e perceptível.

⁵¹ Tomado como algo que pode ser tocado, apalpado, que pode ser visto, percebido (RADFORD, 2008).

realidade dos estudantes. Afinal, “o objetivo da Educação Matemática Realística é apoiar os estudantes na criação de uma nova realidade matemática” (GRAVEMEIJER; COBB, 2006, p. 64).

Na Avaliação Didática, a tarefa pode ser tomada como início de oportunidade de aprendizagem já que o estudante é convidado a experienciar⁵² o objeto matemático para então atribuir significado à situação. Nessa perspectiva, cabe ao professor trabalhar com tarefas em vários níveis de reprodução, conexão e análise (DE LANGE, 1999). A demanda cognitiva da tarefa é o esforço intelectual que os estudantes têm para resolver uma atividade matemática (SMITH; STEIN, 1998). Está relacionada à complexidade da tarefa, diferente da facilidade ou dificuldade, que está relacionada ao sujeito que resolve a tarefa. Para De Lange (1999), **tarefas de reprodução** demandam

- reconhecer fatos, relações, equivalências;
- representar relações;
- recordar objetos e propriedades matemáticas;
- executar procedimentos de rotina;
- aplicar algoritmos padrão;
- desenvolver habilidades técnicas;
- lidar e operar com afirmações e expressões que contenham símbolos e fórmulas;

tarefas de conexão requerem que os estudantes

- façam conexões entre as diferentes vertentes e domínios da matemática;
- integrem informações para resolver situações simples;
- lidem com diferentes formas de representação de acordo com a situação e o propósito;
- decodifiquem e interpretem linguagem simbólica ou formal;
- relacionem diferentes linguagens com a linguagem natural;
- formulem e resolvam problemas e lidem com situações;

tarefas de reflexão (ou análise) envolvem

- matematização de situações;
- a análise, a interpretação e o desenvolvimento de modelos e estratégias;

⁵² Experienciar refere-se ao processo contínuo de interação entre uma pessoa e seu ambiente, no qual a criatura viva vivencia e se envolve com as condições ambientais. Esse envolvimento resulta na qualificação da experiência com emoções e ideias, levando à emergência de uma intenção consciente. Experimentar envolve vivenciar os eventos, observações, pensamentos, desejos e resultados que surgem dessa interação (DEWEY, 2022).

- argumentos matemáticos incluindo provas e generalizações;
- elaborar e resolver problemas.

Para Hadji (2001) e para autores da Educação Matemática Realística (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996; DE LANGE, 1999), não deve existir distinção entre tarefa trabalhada em sala de aula e tarefa de avaliação. A tarefa matemática é definida como o objeto para a atividade do aluno durante a aula. Ela é apresentada, na maioria das vezes, pelo professor e constitui o foco central para o engajamento dos alunos. A tarefa é concebida como independente da experiência de aprendizagem que os alunos poderão obter com ela, sendo mediada pelo contexto da aula e pelas ações do professor. Em resumo, a tarefa é a atividade específica proposta que os alunos devem realizar durante a aula de matemática (CHRISTIANSEN, WALTHER, 1986). O contexto das tarefas, em um trabalho na perspectiva da RME, precisa fazer sentido para os estudantes, deve ser autêntico, acessível e significativo, afinal, eles têm oportunidade para aprender quando lidam com tarefas.

A tarefa, de alguma forma, precisa ser acessível, flexível, informativa, significativa e transparente (Quadro 04).

Quadro 04 – Características de uma boa tarefa na perspectiva da RME

Acessível	O enunciado é compreensível para os estudantes.
Flexível	Pode ser resolvida por diferentes estratégias, em diferentes níveis de aprendizagem.
Informativa	Permite ao estudante expressar o máximo de informação possível a respeito do seu conhecimento e de como utilizam esse conhecimento em novas situações e, também, permite revelar algo do processo no que se refere às escolhas de estratégias e procedimentos feitos pelo estudante.
Significativa	Convidativa, que valha a pena resolver, desafiadora, e que a sua solução seja útil para fornecer uma ou várias respostas.
Transparente	Permite ao estudante apresentar indícios do nível em que se encontra e possibilitar informações para que todos os estudantes pelo menos tentem solucioná-las.

Fonte: A autora baseada em Van Den Heuvel-Panhuizen (1996)

O professor é aquele que acompanha comprometida e seriamente o estudante no processo de aprendizagem, bem como em todo o seu desenvolvimento educacional. A relação entre o professor e o estudante é vista como uma parceria, estabelecendo um ambiente de aprendizagem interpessoal e construtivo. Nessa dinâmica, o professor orienta, apoia e adapta suas estratégias de ensino para atender às diversas necessidades dos estudantes.

O professor não apenas entrega informações, mas também acompanha de perto o estudante enquanto ele desenvolve seu conhecimento. Isso implica em estar atento às necessidades individuais de cada aluno, reconhecendo, respeitando sua singularidade e levando em consideração que diferentes estudantes têm estilos de aprendizagem distintos, ritmos variados. Esse processo está situado no interior de condições histórico-sociais, fazendo parte de uma realidade concreta, isto é,

o homem capta a realidade, e dela se apropria 'com todos os seus sentidos', [...] mas estes sentidos, que reproduzem a realidade para o homem, são eles próprios um produto histórico social. O homem deve ter desenvolvido o sentido correspondente a fim de que os objetos, os acontecimentos e os valores tenham um sentido para ele. [...] o homem descobre o sentido das coisas porque ele se cria um sentido humano para as coisas (KOSIK, 1976, p. 120).

Isso pressupõe um professor que não seja mero recurso audiovisual do livro didático, mas um profissional que seja sensível, culto, estudioso, familiarizado com as conquistas dos homens e, também, com os desastres que os homens proporcionaram a esse planeta em tão poucos milênios de civilização (BURIASCO, 2020). O trabalho docente é uma atividade fundamentalmente social, porque, segundo Buriasco (2020) e Paro (2012), pode contribuir para a formação cultural e científica das pessoas, e isso é uma tarefa indispensável para outras conquistas democráticas. Quando se pensa em uma escola democrática, o acesso ao conhecimento, que é também dado nos processos de ensino, de aprendizagem, de avaliação, oportuniza outras formas de ver e compreender o mundo, e isso abre possibilidades de mudanças na compreensão da/na ação cotidiana das pessoas (BURIASCO, 2020).

6. A AVALIAÇÃO DEMOCRÁTICA PARA APRENDIZAGEM

Esta investigação pretende apresentar uma perspectiva teórica de avaliação para a aprendizagem escolar como condição para que uma sala de aula de matemática caminhe no sentido de ser democrática, de modo que todos possam ter acesso ao conhecimento científico historicamente validado pela sociedade. A intenção é propor uma alternativa ao modelo de avaliação com fins de classificação (HADJI, 1994; BARLOW, 2006), que carrega consigo a concepção de que o conhecimento é transmitido do professor para os alunos e retido por eles. Esse tipo de avaliação resulta em segregação e domesticação, em que os estudantes estão condicionados a seguir ordens e prescrições.

A Avaliação para a Aprendizagem Escolar defendida nesta investigação vai de encontro (no sentido de se opor) à perspectiva tradicional apresentada acima (BARLOW, 2006; BLACK e WILIAM, 2006; BURIASCO, 2020; EARL, KATZ, 2006; DE LANGE, 1999; HADJI, 1994, 2001; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). Aqui, a avaliação é vista como um processo e o objetivo geral é oportunizar a aprendizagem. Os estudantes deixam de ser considerados como receptores de conhecimento pronto e acabado para serem autores de sua própria aprendizagem e o professor, seu aliado. Transformar a sala de aula em um ambiente colaborativo pode ser mais atrativo, pois o desejo não pode ser ensinado, porém é possível criar um ambiente que seja menos hostil e segregador, onde ele (o desejo) possa aflorar.

Denominou-se, aqui, a Avaliação para a Aprendizagem Escolar como "Avaliação Democrática para a Aprendizagem Escolar", que pode ser definida como uma rede de ações colaborativas, que buscam coletar informações sobre os processos de ensino e de aprendizagem entre professor e estudantes que estão engajados em coordenar um ambiente de sala de aula no qual exista oportunidade de aprendizagem, respeitando as especificidades, vivências e perspectivas futuras dos estudantes, com o objetivo de formar cidadãos autônomos e críticos.

Nessa perspectiva de avaliação, adota-se a concepção de matemática como atividade humana (FREUDENTHAL, 1991; FRANKENSTEIN, 2005), abandonando a concepção de que a matemática existe independentemente da existência humana. Para aprender matemática, os estudantes precisam fazer matemática (DE LANGE, 1999). Para além disso, nessa perspectiva, é desejável que os estudantes, aprendendo matemática, aprendam a ler, interpretar, escrever criticamente o mundo com matemática (SKOVSMOSE, 2014).

Um estudante envolvido no seu processo de aprendizagem expressa suas opiniões, faz perguntas, questiona, dotando de significado aquilo que aprende, aumentando a chance de estabelecer relações com suas próprias experiências e perspectivas. Essa prática pode contribuir para formar pessoas mais empáticas e mais solidárias, capazes de fazer escolhas em prol de um bem-estar comum.

A diversificação de instrumentos e formatos de avaliação contribui para a equidade no processo de avaliação, uma vez que permite que os estudantes documentem seus conhecimentos de diversas formas, aumentando as possibilidades de diálogo. Além disso, essa diversificação pode ampliar a visão do professor quanto ao que os alunos sabem, podendo auxiliar no fornecimento de *feedbacks* e nas tomadas de decisões educacionais.

Nesse ambiente, reconhecer a importância da subjetividade e da identidade de cada pessoa e do grupo implica em valorizar e respeitar as diferentes perspectivas culturais, étnicas, sociais e pessoais que os estudantes trazem consigo. É necessário promover o respeito à diversidade, reconhecendo que cada estudante possui uma bagagem única de conhecimento e experiências. Isso requer uma abertura para ouvir e valorizar todas as vozes presentes na sala de aula, garantindo que todas as pessoas sejam tratadas com dignidade e respeito.

Reconhecer e respeitar as diferentes condições e necessidades dos estudantes, adaptar as práticas de ensino e avaliação para atender a essas diferenças e reconhecer que as pessoas aprendem de maneiras e em ritmos diferentes são elementos que existem em uma sala de aula democrática. O que se pretende é que a avaliação seja menos imprecisa, menos injusta, inacabada, uma vez que é um processo contínuo. Na Avaliação Democrática para a Aprendizagem, a

autoavaliação é própria de cada indivíduo que participa da dinâmica de sala de aula e ocorre nos momentos de aula e fora deles. Nem sempre a autoavaliação é formal; ela pode ser feita sem registro, sem critérios e sem objetividade. Aliás, da mesma forma que a avaliação, ela é imprecisa, injusta e subjetiva (SILVA, 2023, p. 1091).

O professor, ao encorajar e valorizar a participação dos estudantes no processo de autoavaliação, torna-se parceiro do aluno na construção da autonomia e da reflexão sobre o seu próprio processo de aprendizagem. A autoavaliação pode fornecer *insights* valiosos da percepção que os estudantes têm de si mesmos e como se avaliam. Essa percepção pode revelar dificuldades ou sucessos que não ficaram evidentes em produções

escritas ou orais presentes em outros instrumentos de avaliação. Além disso, a autoavaliação pode auxiliar os estudantes a desenvolverem estratégias de estudo e aprendizagem, promovendo autonomia e responsabilidade em relação ao seu próprio desenvolvimento acadêmico.

Portanto, ao implementar a autoavaliação como parte integrante dos processos de ensino e de aprendizagem, o professor não apenas pode ampliar sua compreensão sobre o progresso e as necessidades dos estudantes, como também os capacita a se tornarem participantes ativos e conscientes de seu próprio crescimento educacional.

A avaliação por pares também tem um papel fundamental na Avaliação Democrática da Aprendizagem Escolar, pois proporciona aos alunos uma fonte adicional de *feedback* fidedigno sobre seu trabalho, complementando as avaliações realizadas. Essa diversidade de perspectivas contribui para uma compreensão mais abrangente do desempenho individual. Ao avaliar o trabalho de seus colegas, os alunos são desafiados a estabelecer critérios e a articular seus pensamentos de maneira clara. Além disso, a participação dos alunos nesse tipo de avaliação pode promover o desenvolvimento de análise crítica e julgamento fundamentado.

Outro aspecto relevante é que a prática da avaliação por pares pode incentivar a aprendizagem, colocando os estudantes no centro do processo educacional. Isso, por sua vez, pode aumentar o seu engajamento e sua motivação, uma vez que podem sentir-se mais envolvidos em seu próprio progresso acadêmico. Avaliação por pares pode promover a diversidade de perspectivas, uma vez que os estudantes têm a oportunidade de receber *feedback* de colegas com diferentes experiências e pontos de vista, enriquecendo, assim, sua compreensão do assunto em questão e incentivando uma visão mais abrangente. Esse tipo de prática avaliativa também pode contribuir para a criação de um ambiente colaborativo na sala de aula, no qual os alunos são encorajados a trabalhar juntos. Isso pode fortalecer o senso de comunidade e cooperação entre os estudantes, criando um ambiente de aprendizagem mais inclusivo, colaborativo e solidário. Além disso, pode-se considerar que contribui para um ambiente de aprendizagem que considera as especificidades de cada um, assegurando que todas as vozes, independentemente de sua origem social, cultural, econômica, sejam valorizadas e ouvidas. Esse enfoque aumenta as chances de que todos os alunos tenham oportunidades de aprendizagem.

Para que as pessoas mudem a realidade em que estão inseridas, é importante que elas tomem consciência dessa realidade. Se o objetivo da escola é formar pessoas autônomas e críticas, elas precisam receber na escola oportunidade para refletir sobre questões da sociedade. Isso pode ocorrer pela contextualização das tarefas trabalhadas em sala de aula. Essa perspectiva destaca a importância da ação dos estudantes, enfatizando que eles não são meros receptores. Ao lidar com uma tarefa contextualizada, eles têm oportunidade de fazer escolhas e tomar decisões para resolver problemas.

Essas tarefas precisam fazer sentido para eles, possibilitar que eles consigam resolvê-las utilizando mais de uma estratégia, precisam possibilitar que estudantes expressem o máximo de informações sobre seu conhecimento e de como aplicam esse conhecimento em novas situações.

A dinâmica escolar, como um mecanismo de controle das pessoas, dos processos envolvidos, dos conteúdos (ESTEBAN, 2003) e de obediência cega, alimenta a apatia social e política que contempla um modelo de sociedade desigual, em que há pessoas que são desumanizadas. Sendo assim, um dos elementos a ser repensado em uma sala de aula são as tarefas, que, nas salas de aula tradicionais, geralmente, estão situadas no paradigma do exercício, com estratégias e procedimentos dados de antemão. Para de Lange (1999), são de reprodução e quase sempre a redação delas explicita o procedimento de resolução no enunciado, sendo grande parte delas redigidas no modo imperativo: "Simplifique a expressão...!", 'Resolva a equação...!', 'Encontre o x tal que...!', 'Calcule quanto Pedro economizaria se...' (SKOVSMOSE, 2014, p. 18).

Skovsmose (2014) advoga uma abordagem que conecte o ensino de matemática às questões sociais mais amplas, como racismo, homofobia, machismo, poluição, violência, exclusão social, eleição, pagamento de impostos, salários mínimos, permitindo que os alunos percebam interconexões entre diferentes campos do conhecimento e que a matemática se faz presente no cotidiano das pessoas e na organização da sociedade. Essa prática vai ao encontro do que Freudenthal (1991) defendeu e chamou de Princípio do Entrelaçamento, que compreende que o que é ensinado na escola não deve ser separado em seções de um livro, além de deixar claro que a matemática é uma atividade humana, que é desenvolvida quando os humanos lidam com problemas da sua realidade. Sendo assim, a matemática não é só para algumas pessoas, mas para todas, assumindo que as pessoas não devem ser segregadas entre as que sabem e as que não sabem.

Ao escolher uma tarefa, as vivências dos estudantes deveriam ser levadas em consideração, assim como seu contexto político, histórico, cultural. A busca por uma educação mais democrática envolve o desenvolvimento da capacidade de analisar informações criticamente, questionar suposições, compreender as implicações sociais e políticas do conhecimento. Isso pode ser feito a partir de tarefas com contextos significativos que façam parte da realidade dos envolvidos (SKOVSMOSE, 2014, 2017). O acesso ao conhecimento pode permitir que uma pessoa compreenda os processos de organização do trabalho, as práticas de opressão que ocorrem dentro de determinados sistemas socioeconômicos. Por exemplo, ao estudar conceitos econômicos e sociais, uma pessoa pode entender como os meios de produção são controlados por uma classe dominante (os donos) e como isso resulta na exploração da classe trabalhadora.

Ao compreender esses processos, pode-se perceber como a desigualdade econômica é perpetuada e como os trabalhadores geralmente recebem uma parcela pequena dos frutos de seu trabalho em comparação com os donos dos meios de produção. Isso pode levar a uma consciência das injustiças sociais e econômicas e motivar a pessoa a se envolver em esforços para promover mudanças que busquem uma distribuição mais justa da riqueza e do poder.

Portanto, o acesso ao conhecimento pode desempenhar um papel crucial no desenvolvimento da consciência crítica e na capacidade de identificar e desafiar estruturas de opressão e exploração. É inviável que exista uma sala de aula democrática em uma sociedade fortemente influenciada por práticas neoliberais, entretanto é possível caminhar no sentido de se criar um ambiente de aprendizagem mais democrático e inclusivo, onde cada aluno se sinta valorizado, respeitado e capacitado a contribuir de forma significativa para os processos de ensino e de aprendizagem.

Em síntese, eis alguns elementos para uma avaliação mais democrática:

- **o diálogo**, tomado como um processo de comunicação entre professor e estudante e entre os estudantes, não unilateral, mas uma troca constante de ideias e experiências com linguagem relevante e acessível.
- **a diversificação de instrumentos de avaliação**, elemento fundamental para que existam várias oportunidades de os estudantes documentarem o que sabem e se engajarem no processo educacional.

- o fornecimento de **feedbacks fidedignos**, para promover a aprendizagem.
- a **autoavaliação**, pois a pessoa autônoma precisa conseguir julgar o próprio trabalho e conseguir refletir sobre a própria prática.
- a **avaliação por pares**, fundamental para fomentar uma aprendizagem centrada no aluno, desenvolver habilidades críticas e construir uma comunidade de aprendizagem colaborativa. Além disso, favorece a promoção de um ambiente de equidade e inclusão, admitindo que todas as vozes, independentemente de sua origem social, cultural, econômica, sejam valorizadas e ouvidas no ambiente educacional.
- oportunidades para a **reflexão crítica** sobre a realidade, por meio da matemática, buscando compreender estruturas sociais, políticas que oprimem, ou que podem oprimir algum grupo, dadas a partir, também, de tarefas com contextos relevantes. Isso implica um questionamento constante das condições existentes para a busca de transformações sociais ⁵³. Esses ambientes podem ser criados a partir de situações que sejam realísticas para os estudantes, significativas e que os provoquem, de alguma forma, contribuindo para a construção de uma sociedade menos injusta e desigual.
- uma **relação mais horizontal** entre professor e estudante.

Esta investigação apresenta como pano de fundo a abordagem da Educação Matemática Realística, que talvez não seja a única possível, mas pode ser uma para dar alguma visibilidade a uma “picada”⁵⁴ para se ter uma sala de aula mais democrática.

Também se destaca que este trabalho não teve intenção de encerrar discussões sobre o que é uma Avaliação Democrática para a Aprendizagem Escolar, quais são seus elementos, qual é o propósito dela, mas direcionar esforços para iniciar a jornada para estruturar uma perspectiva de avaliação pensando em uma sala de aula democrática.

⁵³ A transformação social refere-se a mudanças significativas nas estruturas, relações e valores de uma sociedade. Essas mudanças podem ocorrer em diversos níveis: político, econômico, cultural e social. O objetivo é construir uma sociedade mais justa, igualitária e inclusiva partindo da Educação como prática libertadora.

⁵⁴ Picada compreendida aqui como uma via de acesso aberta em um ambiente que contém dificuldades materializadas pelo sistema sociopolítico vigente.

REFERÊNCIAS

- BLACK, Paul Black; WILIAM, Dylan. Assessment and Classroom Learning, **Assessment in Education: Principles, Policy & Practice**, v. 5, n. 1, p. 7-74, 2006. DOI: 10.1080/0969595980050102.
- BARLOW, Michel. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006
- BARTELL, Tonya Gau. Is This Teaching Mathematics for Social Justice? In: WAGER, A. A.; STINSON, D. W. (Eds.). **Teaching Mathematics for Social Justice**: Conversations with Mathematics Educators. USA: NCTM, National Council of Mathematics Teachers, 2012. p. 113-125.
- BURIASCO, Regina Luzia Corio de; FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves; CIANI, Andreia Büttner. Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos). **Bolema**, Rio Claro, n. 33, p. 69-96, 2009.
- CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Sá da Costa, 1984.
- CHAUÍ, Marilena. Cultura e democracia. **Crítica y Emancipación**, v. 1, p. 53-76, jun. 2008.
- CUNHA, Antônio Geraldo da. **Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa**. 2 ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1989.
- CHRISTIANSEN, Bo; WALTHER, Guenther. Task and Activity. In: CHRISTIANSEN, Bo, HOWSON, Albert Geoffrey, OTTE, Michael (eds). **Perspectives on Mathematics Education**. Dordrecht: Springer, 1986. p. 243-307.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. A relevância do projeto Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional – INAF como critério de avaliação da qualidade do ensino de matemática. In: FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis (org.). **Letramento no Brasil**: habilidades matemáticas. São Paulo: Global, 2004.
- DE LANGE, Jan. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.
- DRIJVERS, Paul; BOON, Peter; DOORMAN, Michiel; BOKHOVE, Christian; TACOMA, Sietske. Digital design: RME principles for designing online tasks. In: **ICMI Study 22**: Task Design in Mathematics Education. Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Utrecht University, Utrecht, jul. 2013.
- DEWEY, John. **Democracia e Educação**. 4. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979.
- _____. **La opinión pública y sus problemas**. Madrid: Ediciones Morata. 2004.
- _____. Ter uma Experiência. **PAR**, on-line, [s.v.], n. 07, p. 153-174, 2022.
- DUARTE, Newton. O compromisso político do educador no ensino da matemática. **Revista da Associação Nacional de Educação – ANDE**. São Paulo, ano 5, n. 9, p. 51-54, 1985.

EARL, Lorna; KATZ, Steven. **Rethinking Classroom Assessment with Purpose in Mind**.

Manitoba: Western and Northern Canadian Protocol for Collaboration in Education, 2006.

ESTEBAN, Maria Teresa. Avaliação no cotidiano escolar. In: ESTEBAN, Maria Teresa; GARCIA, Regina Leite; BARRIGA, Ángel Días; AFONSO, Almerindo Janela; GERALDI, Corinta M. G.; LOCH, Jussara M. P. **Avaliação: uma prática em busca de novos sentidos**. Rio de Janeiro: DP & A; 2003.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FAUSTINO, Ana Carolina. **"Como você chegou a esse resultado?": o diálogo nas aulas de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2018. 232 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018.

FRANKENSTEIN, Marilyn. Educação Matemática Crítica: uma aplicação da epistemologia de Paulo Freire. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.) **Educação Matemática**. São Paulo: Centauro, 2005, p. 101-137.

FREIRE, Paulo. **Conscientização: teoria e prática da libertação, uma introdução ao pensamento de Paulo Freire**. Trad. de Kátia de Mello e Silva. São Paulo: Cortez & Moraes, 1979.

_____. **Pedagogia do Oprimido**. 17ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

_____. **Pedagogia da Autonomia**. ed. 54. Rio de Janeiro/São Paulo: Paz e Terra. 2013.

FREIRE, Paulo; MACEDO, Donaldo. **Literacy: reading the word and the world**. 1. ed. Londres: Routledge, 1987.

FREIRE, Paulo; D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação e Educação Matemática**. [Entrevista concedida a] Maria do Carmo S. Domite. Exibida no ICME, 1996, Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=O_TC3nSz3MM>. Acesso: 14 de set. 2023.

FREUDENTHAL, Hans. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

_____. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1973.

_____. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAMSCI, Antônio. **Cadernos do cárcere: introdução ao estudo da filosofia**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1999. v. 1.

GRAVEMEIJER, Koeno. How emergent models may foster the constitution of formal Mathematics. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 1, n. 2, p. 155-177, 1999.

_____. Local Instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 6, n. 2, p. 105-128, 2004.

_____. What makes mathematics so difficult, and what we do about it? In: SANTOS, Leonor; CANAVARRO, Ana Paula; BROCARD, Joana (Eds.). **Educação Matemática: Caminhos e encruzilhadas**, Lisboa: APM. 2005. p. 83-101.

_____. Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education. In: APEC - Tsukuba International Conference III, Tokyo Kanazawa and Kyoto, Japão, 2007. **Proceedings...** Disponível em: [http://www.cried.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/papers/PDF/3.Keynote\(Dec.9for\)_Koenno_Gravemeijer_Netherlands.pdf](http://www.cried.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/papers/PDF/3.Keynote(Dec.9for)_Koenno_Gravemeijer_Netherlands.pdf) . Acesso em: 20 jan. 2023.

GRAVEMEIJER, Koenno; COBB, Paul. Design research from a learning design perspective. In: VAN DEN AKKER, J. et al., **Educational design research**. London: Routledge, 2006.

HADJI, Charles. **A Avaliação, Regras do Jogo**. Portugal: Porto Editora, 1994. 190 p.

_____. **A avaliação desmistificada**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

HEGEL, Georg Wilhelm Friedrich. **Fenomenologia do espírito**. Petrópolis: Vozes, 1992.

HENNINGSEN, Marjorie; STEIN, Mary Kay. Mathematical tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 28, n. 5, p. 524-549, nov. 1997.

KOSIK, Karel. **Dialética do Concreto**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

MARTINEAU, Stéphane; SIMARD, Denis; GAUTHIER, Clermont. Recherches théoriques et spéculatives: considérations méthodologiques et épistémologiques. **Recherches Qualitatives**, Montreal, v. 22, n. 3, p. 3-32, 2001.

MARX, Karl. **O Capital**: Livro 1. São Paulo: Boitempo. 2023.

MILANI, Raquel. **O processo de aprender a dialogar por futuros professores de matemática com seus alunos no estágio supervisionado**. 2015. 239 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/124074>.

MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti. **Ensino: as abordagens do processo**. São Paulo: EPU, 1986.

MUZINATTI, João Luiz. **A “Verdade” apaziguadora na Educação Matemática: como a argumentação de estudantes de classe média pode revelar sua visão acerca da injustiça social**. 2018. 254 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018.

NEITZEL, Odair; DALBOSCO, Claudio Almir; SCHWENGBER, Ivan Luis. O público e o democrático na Educação Deweyneana: uma reconstrução com base em Jürgen Oelkers. **Educação Temática Digital**, Campinas (SP), v. 46, e0230006, p. 1-19, 2024.

PASSOS, Adriana Quimentão. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e GEPEMA:**

algumas aproximações. 2015. 147 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

PARO, Vitor Henrique. A educação, a política e a administração: reflexões sobre a prática do diretor de escola. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 36, n.3, p. 763-778, set./dez. 2010.

_____. **Gestão democrática**. [Entrevista concedida a] [não encontrado]. 2013. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=WhvyRmJatRs&t=713s>> Acesso: 14 set. 2023.

PECK, Frederick A. **The intertwinement of activity and artifacts**: a cultural perspective on Realistic Mathematic Education. 2015. 205f. Tese (Doutorado em Filosofia da Educação) - Universidade do Colorado, 2015.

_____. **Rejecting Platonism**: Recovering Humanity in Mathematics Education. **Education Sciences**, v. 8, n. 43, p. 1-13, 2018.

PEDROCHI JUNIOR, Osmar. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em Matemática**. 2012. 56f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

_____. **A Avaliação Formativa como Oportunidade de Aprendizagem**: fio condutor da prática pedagógica escolar. 2018. 67 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

PLATÃO. **República**. Rio de Janeiro: Editora Best Seller, 2002. Tradução de Enrico Corvisieri.

RADFORD, Luis. The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In: RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F. (Eds.), **Semiotics in mathematics education**: Epistemology, history, classroom, and culture. Rotterdam: Sense Publishing. 2008. p. 215-234.

ROSSETTO, Hallynnée Héllenn Pires. **O desenvolvimento de um framework de Trajetórias de Ensino e Aprendizagem de matemática**. 2021. 91f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SFARD, Anna. On the dual nature of mathematical conceptions: On processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, v. 22, p. 1-36, 1991.

SILVA, Gabriel dos Santos e. Índícios de autoavaliação em um Vaivém. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 37, n. 77, p. 1087-1105, dez. 2023.

SILVA, Gabriel dos Santos e; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Índícios de interatividade na aplicação de uma Prova-Escrita-em-Fases. **Ciência & Educação**, v. 28, e22036, 2022.

SKOVSMOSE, Ole. Towards a Critical Mathematics Education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 27, p. 35-57, 1994.

_____. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

- _____. Preocupações de uma educação matemática crítica. In: FÁVERO, Maria Helena; CUNHA, Célio da (Org.). **Psicologia do Conhecimento: o diálogo entre as ciências e a cidadania**. Brasília: UNESCO, Universidade de Brasília, Liber Livros Editora, 2009. p. 101-114.
- _____. **Um convite à educação matemática crítica**. Campinas (SP): Papirus. 2014. 141p.
- _____. **Educação matemática crítica: a questão da democracia**. Campinas (SP): Papirus. 2017. 185p.
- _____. Interpretação de Significados. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 764-780, 2018.
- _____. O que poderia significar a Educação Matemática Crítica para diferentes grupos de estudantes? **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 6, n. 12, p. 18-37, jul./dez. 2020.
- SMITH, Margareth Schwan; STEIN, Mary Kay. Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, n. 5, p. 344-350, 1998.
- TREFFERS, Adrian. **Three dimensions**. A model of goal and theory description in mathematics instruction – the Wiskobas project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática, Tecnologia e Sociedade. In: EPREM, 7., 2002, Foz do Iguaçu. **Conferência**. Foz do Iguaçu: SBEM, 2002. p. 1 – 5.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Assessment and realistic mathematics education**. Utrecht: Freudenthal Institute. 1996.
- _____. Mathematics education in the Netherlands: a guide tour. Freudenthal Institute. CD-ROM for **ICME9**. Utrecht: Utrecht University, 2000.
- _____. A learning-teaching trajectory description as a hold for mathematics teaching in primary schools in the Netherlands. In: TZEKAKI, Marianna (Ed.). **Didactics of Mathematics and Informatics in Education**. 5th Panhellenic Conference with International Participation, p. 21-39. Thessaloniki: Aristotle University/University of Macedonia/ Pedagogical, 2001a.
- _____. **Children learn mathematics: a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school**. Groningen, The Netherlands: Wolters Noordhoff, 2001b.
- _____. Realistic Mathematics Education as work in progress. In: LIN, Fou-Lai. (Ed.). **Common Sense in Mathematics Education: Proceedings of 2001**. The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics. Taipei, Taiwan, p. 1-43, nov. 2001c.
- _____. **Los niños aprenden matemáticas: una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el cálculo con números naturales en la escuela primaria**. tr. del inglés Fernanda Gallego y Betina Zolkower; tr. del neerlandés Cornelis van der Meer, México: Correio del maestro: La Vasija, 2010a.
- _____. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, Len; KISSANE, Barry; HURST, Chris (Eds.).

Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Fremantle: MERGA. 2010b.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja; DRIJVERS, Paul. Realistic Mathematics Education. In: LERMAN, Stephen. (Ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education.** Springer, Cham, 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170

VAN DER MAREN, Jean-Marie. **Méthodes de recherche pour l'éducation.** Bruxelles: De Boeck and Larcier, 1996.