



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

BEATRIZ DOS SANTOS SILVA

**GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

Londrina

2024

BEATRIZ DOS SANTOS SILVA

**GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

Texto apresentado à Banca Examinadora como requisito parcial para aprovação no exame de defesa de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Márcia Cristina de Costa
Trindade Cyrino

Londrina

2024

S586g Silva, Beatriz dos Santos.
Geometrias não Euclidianas na formação de professores de matemática /
Beatriz dos Santos Silva. - Londrina, 2024.
153 f. : il.

Orientador: Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) -
Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-
Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2024.
Inclui bibliografia.

1. Geometrias não Euclidianas - Tese. 2. Formação de professores de
matemática - Tese. I. Cristina de Costa Trindade Cyrino, Márcia . II. Universidade
Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em
Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51

BEATRIZ DOS SANTOS SILVA

**GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

Texto apresentado à Banca Examinadora como requisito parcial para aprovação no exame de defesa de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dr^ª. Márcia Cristina de Costa Trindade
Cyrino

Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof^ª. Dr^ª. Talita Secorun dos Santos
Universidade Estadual do Paraná

Prof. Dr. Paulo Henrique Rodrigues
Universidade Estadual do Paraná

Londrina, 26 de abril de 2024.

AGRADECIMENTOS

À Beatriz Marques, minha companheira, que secou minhas lágrimas, acreditou em mim quando nem eu mesma acreditei, me forneceu um lugar seguro no mundo para descansar e foi obrigada a gostar de matemática.

À meus pais, Gilson e Rosane, pelo amor, pelo incentivo aos estudos desde a minha infância e por depositarem fé em meus objetivos.

À meus irmãos, Deisy e Pietro, por terem compreendido minha ausência durante o período do mestrado e pelo apoio incondicional.

À Vitória Regina da Silva que, apesar de ser mestrande em Serviço Social, colaborou grandemente em uma pesquisa de Educação Matemática com suas ideias, opiniões, impressões e risadas.

À professora Márcia, pela compreensão, paciência e por ter a capacidade de transformar as pessoas tão facilmente.

À Loreni, Marie-Claire e Mariana, por terem colaborado com o presente trabalho.

Ao Paulo Henrique Rodrigues e à Talita Secorun dos Santos, pela leitura cuidadosa da dissertação e pelas contribuições no exame de qualificação.

À Anna Flávia, por ter me colocado nos eixos durante meus (vários) momentos críticos do mestrado.

Aos membros do Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática (Gepefopem), por todas as leituras, contribuições e palavras de apoio.

Àqueles que foram obrigados a me ouvir falando sobre Geometrias não Euclidianas durante dois anos.

À todos os professores que tive.

À Capes, pelo apoio financeiro durante todo o período do mestrado.

Por fim, à mim mesma, já que as quase 52 mil palavras escritas a seguir foram digitadas com meus dedos, sob muito esforço, diante de várias noites sem dormir e com incontáveis litros de café.

SILVA, B. S. **Geometrias não Euclidianas na formação de professores de matemática.** 156f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2024.

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo discutir implicações do ensino de Geometrias não Euclidianas (GNE) para a formação, inicial e continuada, de professores de matemática (PMat). Para tanto, foram consideradas duas fontes de informações: uma de natureza documental que contempla pesquisas brasileiras sobre a temática; e outra de natureza narrativa com reflexões de três professoras formadoras experientes no ensino de geometria. Na investigação documental, são descritos e interpretados artigos publicados em periódicos brasileiros, no período de 2011 a 2022, que têm como objeto de análise o trabalho com GNE na formação de PMat. O *corpus* de análise foi constituído a partir de um levantamento de periódicos indicados pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática, com *qualis* de A1 a A4 atribuído pela CAPES. Os resultados evidenciam que, apesar de integrar as diretrizes curriculares de alguns estados brasileiros, há cursos de formação de PMat que não trabalham conhecimentos geométricos não euclidianos, privando os futuros docentes de preparo para abordarem outras geometrias na EB. Embora haja indicações na literatura de metodologias, propostas e recursos para o estudo, o ensino e a aprendizagem de GNE, professores e futuros professores, em geral, não possuem conhecimentos sobre o tema. Na investigação das narrativas produzidas pelas professoras foram analisadas reflexões sobre as GNE na formação de PMat e na EB. No que se refere as GNE na formação de PMat, os resultados abordam justificativas para o trabalho com GNE na formação de PMat; desafios inerentes à inclusão de GNE na formação de PMat; e sugestões de metodologias, abordagens e recursos didáticos para o trabalho com GNE na formação de PMat. Nas reflexões sobre as GNE na EB foram considerados o papel dessas geometrias: na compreensão mais ampla das geometrias, suas relações, diferenças e semelhanças; nas conexões possíveis entre GNE, no mundo e em outras áreas do conhecimento; em discussões sociais e políticas tendo as GNE como interface. Foram consideradas também desafios para o trabalho com as GNE na EB, quais sejam: a carência de conceitos geométricos não euclidianos em livros didáticos, propostas curriculares e programas de formação de PMat; e os conflitos entre conceitos euclidianos e não euclidianos. É possível concluir que o trabalho com GNE em programas de formação de professores pode: ampliar horizontes conceituais, cognitivos e pedagógicos de PMat, permitindo uma compreensão abrangente dos conhecimentos geométricos; desenvolver pensamento crítico de PMat em relação à matemática e ciência, como áreas em constante evolução; incentivar a curiosidade e a exploração de PMat; e preparar PMat para desafios educacionais de modo a abordar a matemática de maneira rica e contextualizada, considerando diferentes abordagens e recursos. Promover uma formação de PMat que contemple esses aspectos pode auxiliar o (futuro) PMat da EB: no desenvolvimento do pensamento crítico dos estudantes, situando-os enquanto sujeitos sociais e formando-os estudantes cidadãos; a estimular a criatividade; a evidenciar o funcionamento da matemática e da ciência; e a refletir sobre a noção de verdade arraigada ao conhecimento matemático.

Palavras-chave: geometrias não euclidianas; formação de professores de matemática.

SILVA, B. S. **Non-Euclidean Geometries in mathematics teacher's education.** 155 f. Dissertations (Master's degree in the Teaching of Science and Mathematical Education) – Londrina State University, Londrina, 2024.

ABSTRACT

This research aims to discuss the implications of teaching non-Euclidean Geometry (NEG) for the initial and continuing education of Math Teachers (MaT). To this end, two sources of information were considered: one of a documentary nature that includes Brazilian research on the subject, and another of a narrative nature with reflections from three experienced teacher educators in the teaching of geometry. In the documentary investigation, articles published in Brazilian journals between 2011 and 2022 that analyze the work with NEG in the training of MaT are described and interpreted. The corpus of analysis was constituted from a survey of journals indicated by the Brazilian Society of Mathematics Education, with a rating from A1 to A4 attributed by CAPES. The results show that, despite being part of the curricular guidelines of some Brazilian states, there are teacher training courses that do not cover non-Euclidean geometric knowledge, depriving future teachers of the preparation to address other geometries in Basic Education (BE). Although there are indications in the literature of methodologies, proposals, and resources for the study, teaching, and learning of NEG, teachers and future teachers generally do not have knowledge on the subject. In the investigation of the narratives produced by the teachers, reflections on NEG in the training of MaT and in BE were analyzed. Regarding NEG in the training of MaT, the results address justifications for working with NEG in the training of MaT; challenges inherent to the inclusion of NEG in the training of MaT; and suggestions of methodologies, approaches, and teaching resources for working with NEG in the training of MaT. In the reflections on NEG in BE, the role of these geometries was considered: in the broader understanding of geometries, their relationships, differences, and similarities; in the possible connections between NEG, in the world and in other areas of knowledge; in social and political discussions having NEG as an interface. Challenges for working with NEG in BE were also considered, namely: the lack of non-Euclidean geometric concepts in textbooks, curricular proposals, and MaT training programs; and the conflicts between Euclidean and non-Euclidean concepts. It is possible to conclude that working with NEG in teacher training programs can: broaden MaT's conceptual, cognitive, and pedagogical horizons, allowing a comprehensive understanding of geometric knowledge; develop MaT's critical thinking in relation to mathematics and science as constantly evolving fields; encourage MaT's curiosity and exploration; and prepare MaT for educational challenges in order to approach mathematics in a rich and contextualized way, considering different approaches and resources. Promoting a MaT training that includes these aspects can help (future) MaT in BE: in developing students' critical thinking, situating them as social subjects and forming them as citizen students; stimulating creativity; highlighting the functioning of mathematics and science; and confronting the notion of truth rooted in mathematical knowledge.

Keywords: non-Euclidean geometries; mathematics teacher's education.

LISTA DE FIGURAS – ORGANIZADAS POR ARTIGO-CAPÍTULO

INTRODUÇÃO EXPANDIDA

Figura 1 – Quinto postulado de Euclides

Figura 2 – Quadrilátero de Saccheli

Figura 3 – Quadrilátero de Lambert

Figura 4 – Modelo da pseudo-esfera de Beltrami a partir da tratriz

Figura 5 – Retas paralelas na pseudo-esfera

Figura 6 – H-retas no modelo do Disco de Poincaré

Figura 7 – H-retas paralelas e paralelas limites

Figura 8 – Quadriláteros de Saccheli e Lambert no Disco de Poincaré

Figura 9 – Intersecção entre reta r e o plano α

Figura 10 – Retas s e r na superfície esférica

Figura 11 – Objeto com propriedades autossimilares

Figura 12 – Complexidade infinita do fractal árvore bifurcada

Figura 13 – Conjunto de Mandelbrot

Figura 14 – Construção da faixa de Möbius

Figura 15 – Retângulo ABCD antes e depois da deformação

Figura 16 – Elementos da técnica de perspectiva presentes na obra *A Última Ceia*, de Leonardo da Vinci

Figura 17 – Trilhos de trem se encontrando no horizonte

Figura 18 – Perspectiva de um cubo com um, dois e três pontos

Figura 19 – Etapas do processo de mapeamento

Figura 20 – Organização da dissertação no formato *multipaper*

ARTIGO-CAPÍTULO 1

Figura 1 - Ficha baseada em Fiorentini *et al.* (2016)

Figura 2 – Transformação do plano em uma superfície cilíndrica

ARTIGO-CAPÍTULO 2

Figura 1 - Retas na Geometria Esférica

Figura 2 – Enunciado da narrativa

Figura 3 – Evolução da “circunferência” na Geometria do Táxi

Figura 4 – Comparação entre a obra Limite Circular I (1958) de Escher e tesselação triângulos hiperbólicos no disco de Poincaré

ARTIGO-CAPÍTULO 3

Figura 1 – Enunciado da narrativa

Figura 2 – Retas r e s em uma superfície esférica

Figura 3 – Construção da “circunferência” na Geometria do Táxi

Figura 4 - Evolução da “circunferência” na Geometria do Táxi

Figura 5 – Cálculo da constante π na Geometria do Táxi e na GE

Figura 6 – Perímetro da costa da Grã-Bretanha, considerando três escalas diferentes

Figura 7 – Comparação entre as obras *Taula de Sant Miquel* de Soriguerola e *A Última Ceia* de Leonardo da Vinci

Figura 8 – Comparação entre as duas possibilidades de rotas no plano

Figura 9 – Rota aproximada feita pela Emirates, saindo de Dubai rumo a São Francisco

Figura 10 – Jogo Pacman no formato de um cilindro

Figura 11 – Mapa adaptado do Pacman no plano e no toro

LISTA DE QUADROS – ORGANIZADA POR ARTIGOS-CAPÍTULOS

ARTIGO-CAPÍTULO 1

Quadro 1 – Pontos de enfoque dos artigos do *corpus*

Quadro 2 – Artigos que discutem GNE em propostas curriculares

Quadro 3 – Artigos que discutem concepções e conhecimentos de GNE

Quadro 4 – Artigos que discutem propostas e recursos para o ensino e a aprendizagem de GNE

ARTIGO-CAPÍTULO 2

Quadro 1 – Formação e atuação profissional das professoras participantes

Quadro 2 – Comparação entre a Geometria Euclidiana e Geometria do Táxi

ARTIGO-CAPÍTULO 3

Quadro 1 – Comparação entre a Geometria Euclidiana e a do Táxi

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DCE	Diretrizes Curriculares Estaduais
EB	Educação Básica
GE	Geometria Euclidiana
Gepefopem	Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática
GNE	Geometrias não Euclidianas
GPEG	Pesquisa em Ensino de Geometria
IES	Instituições de Ensino Superior
NRE	Núcleo Regional de Educação
PECEM	Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PRPGEM	Programa de Pós-graduação em Educação Matemática
RP	Residência Pedagógica
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SEED	Secretaria Estadual de Educação
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UEM	Universidade Estadual de Maringá
UEPG	Universidade Estadual de Ponta Grossa
UNESPAR	Universidade Estadual do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA.....	20
DA GEOMETRIA EUCLIDIANA ÀS NÃO EUCLIDIANAS	27
Geometria Hiperbólica	35
Geometria Elíptica	39
Geometria Fractal.....	40
Topologia.....	44
Geometria Projetiva	45
ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS.....	49
ESTRUTURA/ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	54
REFERÊNCIAS.....	56
ARTIGO-CAPÍTULO 1.....	61
INTRODUÇÃO	61
ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS	62
Geometrias não Euclidianas e propostas curriculares	64
Concepções e conhecimentos de professores e futuros professores de matemática a respeito de Geometrias não Euclidianas	67
Propostas e recursos para o ensino e a aprendizagem de Geometrias não Euclidianas ..	71
O QUE DIZEM AS PESQUISAS DO <i>CORPUS</i> A RESPEITO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES.....	76
CONSIDERAÇÕES FINAIS	81
REFERÊNCIAS DO <i>CORPUS</i>	82
REFERÊNCIAS.....	82
ARTIGO-CAPÍTULO 2.....	86
INTRODUÇÃO	86

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES	87
ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS	89
REFLEXÕES MANIFESTADAS POR PROFESSORAS FORMADORAS A RESPEITO DAS GNE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA	94
Justificativas para o trabalho com Geometrias não Euclidianas na formação de professores de Matemática	94
Desafios relacionados à inclusão de Geometrias não Euclidianas na formação de professores de matemática.....	99
Sugestões de metodologias, abordagens e recursos didáticos a serem utilizados no trabalho com Geometrias não Euclidianas na formação de professores de matemática	103
GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA.....	107
CONSIDERAÇÕES FINAIS	112
REFERÊNCIAS.....	113
ARTIGO-CAPÍTULO 3.....	117
INTRODUÇÃO	117
GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA.....	119
ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS	120
REFLEXÕES MANIFESTADAS POR UMA PROFESSORA EXPERIENTE A RESPEITO DAS GNE NA EDUCAÇÃO BÁSICA.....	124
O papel das GNE na EB.....	124
Desafios para o trabalho com GNE na EB.....	135
GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: DIÁLOGO COM A LITERATURA.....	140
CONSIDERAÇÕES FINAIS	144
REFERÊNCIAS.....	147
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	

INTRODUÇÃO

As configurações de verdade, mesmo as científicas e, talvez, principalmente essas, carregam em si as maiores provas e os mais nítidos exemplos de medo, angústia, amor, fé, júbilo filosófico e contemplação na mais alta rigorosidade metodológica e ceticismo científico, pois o espírito científico é metafórico (Francelin, 2004, p. 33).

Considero¹ importante expor um breve histórico das condições pessoais que me levaram a desenvolver a presente investigação.

Desde criança, interessei-me por ciência. Lembro-me de ler várias edições da revista *Ciência Hoje* e tentar construir alguns dos experimentos propostos. O cientista estereotipado, perpetuado pela mídia e pela cultura popular, que veste jaleco branco, trabalha em um laboratório abarrotado de equipamentos complexos, sabe química, mecânica, matemática, astronomia e biologia e é desprovido de habilidades sociais, era uma figura que me cativava.

Em 2011, a novela “Morde & Assopra” foi ao ar e, pela primeira vez, eu vi cientistas fora de filmes e seriados americanos. Uma paleontóloga que investigava ossadas de mais de 90 milhões de anos e um cientista que construiu um robô *android* chamado Zariguim eram meus personagens favoritos, naturalmente. Decidi que queria ser como Ícaro (o cientista que fez Zariguim) e perguntei para um familiar que faculdade eu teria que fazer para construir robôs. A resposta foi engenharia mecatrônica. Minhas indagações sobre como ser cientista não foram respondidas, pois não havia graduações nem cursos técnicos com essa finalidade.

Nos anos seguintes, sempre que me perguntavam o que eu queria ser quando crescesse a resposta era “engenheira mecatrônica!”. Porém, no ensino médio as coisas mudaram. Estudei em um colégio que tinha aulas de robótica (não por coincidência) e virei membro do time que participava de torneios pelo estado. No entanto, tudo acaba caindo na rotina e se algo não nos cativa, é difícil continuar. Não me lembro dos detalhes, mas cursar engenharia mecatrônica passou a significar, para mim, só um sonho bobo de criança. No final do ensino médio, eu *tinha* que escolher um curso superior para concorrer. Soube do vestibular da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) de Apucarana e fiz a inscrição para o curso de Graduação em Matemática - Licenciatura. Não posso dizer qual foi a minha motivação, já que matemática não era minha disciplina preferida, tampouco desejava ser professora de matemática. O fato de o curso ter matérias comuns aos cursos de engenharia e a minha familiaridade com ciências exatas podem ter colaborado na escolha. Naquele momento, as conclusões que tive sobre a escolha do

¹ Nesta seção, a autora escreve em primeira pessoa do singular por apresentar parte de sua trajetória. Em seguida, na primeira pessoa do plural por se caracterizar como um trabalho colaborativo com a orientadora e o Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática (Gepefopem).

curso não me pareceram ruins: possibilidade de ascensão social e atender às expectativas familiares. Passei no vestibular e, em 2018, iniciei o curso de licenciatura em Matemática.

Na primeira semana de aula, todos os calouros foram convidados para o auditório, e as coordenações dos cursos, dos centros acadêmicos e do campus fizeram uma breve fala sobre as atividades da universidade. Lembro-me perfeitamente da exposição feita sobre pesquisas e eventos científicos. Foi uma descoberta ímpar: ciência é feita por meio de pesquisas, logo os cientistas são pesquisadores. Nos anos seguintes, participei de programas de iniciação à docência e de vários cursos de extensão, mas, infelizmente, não tive a oportunidade de fazer iniciação científica.

Nenhum lugar trazia o mesmo sentimento de quando eu estava envolvida com projetos e aulas da universidade. Eu me sentia útil e percebi que o que me atraía, desde criança, era aprender coisas. Claro que aprendi algo em todos os meios sociais em que vivi, mas os saberes científicos (especialmente os matemáticos) me davam “certezas” que outros saberes não poderiam proporcionar.

A preferência da minha turma em disciplinas matemáticas era evidente. Por ter bom desempenho em disciplinas como Cálculo, Álgebra Linear e Geometria Analítica, sentia-me inteligente e validada pelos pares. Porém, na disciplina “Educação e Sociedade”, ainda no primeiro ano, tive contato com o lado social da profissão. Na época eu não tinha assimilado que estava em um curso que me licenciaria professora de matemática. Ao longo da disciplina, estudamos as estruturas sociais e discutimos alguns problemas relacionados à escola. Aumento de salário, reconhecimento dos professores, acesso universal à escola, materiais didáticos de qualidade e metodologias inovadoras *pareciam* ser as respostas claras a tais problemas.

Durante minha participação no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), de 2018 a 2020, e no Residência Pedagógica (RP), de 2020 a 2022, tive contato direto com as dificuldades da sala de aula, e algumas lacunas, veladas, foram evidenciadas. Percebi que os resultados da produção de conhecimento da área da Educação e da Matemática nem sempre se fazem presentes nas práticas de ensino cotidianas. Compreender a escola liberal como legitimadora e perpetuadora de desigualdades foi doloroso. Mesmo depois de ter contato com discussões políticas fundamentadas, pensar sobre os desafios escolares e discutir com colegas caminhos para vislumbrar uma educação brasileira de “qualidade”, não havia respostas exatas como nas disciplinas matemáticas.

Em 2020, no terceiro ano da licenciatura, comecei a trabalhar no hospital da cidade e fiquei lá até meados do ano seguinte. Poucos meses depois, as aulas presenciais foram suspensas por conta da pandemia de Covid-19. Recordo-me de me despedir de colegas e professores,

pensando que, na pior das hipóteses, em um mês retornaríamos à universidade. Eu só retornei à UNESPAR exatamente dois anos depois, em março de 2022, para a colação de grau. A pandemia trouxe impactos significativos na ordem social e, principalmente, na minha vida pessoal.

Nesse período, a universidade ficou em segundo plano e pensei em desistir do curso diversas vezes. Eu me perguntava por que as estratégias apresentadas por especialistas em saúde eram minimizadas e como as falácias acerca das vacinas se consolidavam. Pude perceber que a realidade do trabalho era confrontada e negada por discursos com interesses duvidosos, o que me deixou apática e desesperançosa. Essa apatia se estendeu para a minha formação profissional: tudo o que aprendi na universidade parecia utópico, já que desde o primeiro ano atuei em escolas da cidade e percebi que não seria fácil manter uma postura “antissistema” diante dos desafios escolares e cotidianos.

No quarto ano da licenciatura, em 2021, cursei a disciplina “Filosofia da Educação Matemática”. Filosofia sempre foi muito difícil para mim, pois não suportava paradoxos. Felizmente, o professor foi muito sensível ao momento delicado que estávamos vivendo e dedicou algumas aulas para que expuséssemos nossas aflições, o que gerou momentos significativos e me reaproximou dos estudos. Durante um debate sobre o cumprimento ou não dos conteúdos previstos no currículo da educação básica, conversamos sobre as pressões que fazem os professores novatos desistirem de tentar “aplicar” metodologias e estratégias aprendidas na universidade quando confrontados com a realidade da escola. O cumprimento do currículo, a cultura escolar, as dificuldades de gestão de aula e a falta de apoio e orientação são fatores que podem fazer o professor se sentir desmotivado e ceder ao ensino mecânico e técnico. Mas para além disso, o conjunto de crenças, emoções e experiências tornam as pessoas (professores) em quem elas são e norteiam suas práticas.

Ao longo das aulas desta disciplina, constatei que ultrapassar a exposição de métodos de ensino e explicações sobre conceitos matemáticos, englobando a prática, as concepções, as crenças e a perspectiva de mundo, dava relevância e um significado particular à profissão de educador. Afinal, somos seres com desejos, sonhos e medos. Carregamos nossas histórias para todo lugar, transformamo-nos no contato com o outro, com o espaço e até com nós mesmos. Nesse momento conheci, mesmo que superficialmente, a formação de professores. Como licencianda, eu senti que os saberes matemáticos e didático-pedagógicos mobilizados em minha formação inicial me permitiam vislumbrar uma educação básica diferente daquela que tivera. Porém, a realidade que vi nas escolas minava essa esperança, uma vez que o próprio sistema educativo forçava os professores a adotarem o ensino tradicional, e muitos já tinham suas

crenças sobre como deveriam ser as aulas de matemática. A possibilidade de mudança de perspectiva em processos de formação foi uma descoberta e tanto e pareceu responder às minhas indagações sobre como as mudanças sabidamente necessárias à escola poderiam ser efetivadas: através dos professores.

No final da licenciatura, inscrevi-me no processo de seleção para o mestrado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM), da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Para a orientação do meu trabalho, escolhi como opção principal a Prof^a Dr^a Márcia Cristina da Costa Trindade Cyrino, tendo em conta sua trajetória profissional e a linha de pesquisa ter como foco a formação de professores que ensinam matemática. A partir desse momento, voltei aos desejos da minha infância e passei a ser uma pesquisadora (cientista) em formação.

Ao ingressar no programa, em 2022, e tornei-me membro do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática – Gepefopem. Uma colega do grupo, que estava no doutorado, desenvolvia seus estudos e pesquisa em uma disciplina de Ensino de Geometria, e o fato de uma oficina de Geometrias não Euclidianas (GNE) fazer parte das ações formativas da disciplina me chamou atenção. Eu nunca tinha tido contato com outras geometrias para além da euclidiana até aquele momento.

Perceber a existência de outros modelos geométricos colocou em xeque os lastros de certeza que, até então, eu tinha sobre a matemática: “como é possível que existam triângulos trirretângulos?”. Passado o choque, interessei-me pela natureza pouco intuitiva das GNE e decidi investigá-las em minha pesquisa de mestrado.

Durante a pós-graduação, não precisar lidar com disciplinas “mais matemáticas” como na licenciatura permitiu-me aprofundar em outras questões de meu interesse, destacando-se, dentre estas, o que eu concebia como ciência.

A Ciência não está enclausurada em uma bolha, invulnerável aos acontecimentos ao redor. O conhecimento científico é obra humana, e como homens pertencentes a uma sociedade – com seus modelos culturais, políticos, históricos, econômicos etc. –, eles trazem à Ciência suas concepções, crenças e anseios. Portanto, falar da natureza da Ciência aparentemente deve envolver o esclarecimento de sua indissociabilidade do mundo e da humanidade, de sua mutabilidade – assim como a dos homens –, de seus limites de validade (Moura, 2014, p. 37).

A noção comum de ciência foge à exposta na citação anterior. Os adjetivos exata, verdadeira, pura e rigorosa são comumente atribuídos a ela. O método científico, a falseabilidade e os testes objetivos (não subjetivos) são indicados como pilares essenciais do fazer científico, que deve ser livre de quaisquer influências emocionais, sociais e políticas. A imparcialidade parece ser um pressuposto básico de qualquer pesquisa.

Ao identificar a discrepância entre essa noção comum de ciência e a ciência que tive contato na pós-graduação, retornei às angústias do período pandêmico. Pude entender a dificuldade das pessoas em filtrar as informações, já que, mesmo as opiniões que contrariavam a eficácia das vacinas e apontavam vermífugos como tratamento ideal para infecções virais, eram fundamentadas em “pesquisas” científicas. Estamos em um momento histórico em que os meios de comunicação em massa tradicionais (jornais impressos, TV e rádio) foram, em boa parte, substituídos por equipamentos móveis com acesso à *internet*, o que torna o compartilhamento e acesso à informação imediato e volumoso. Informações falsas configuram-se como instrumento de manipulação e permitem que certos grupos possam “obter vantagens em conflitos sociais, políticos e econômicos, principalmente, em situações que fragilizam a capacidade humana de discernimento” (Ferreira; Lima; Souza, 2021, p. 33). A falta de conhecimento sobre o que é ciência e como ela é produzida pode acarretar distorções e até mesmo negações dela.

Explicações que pressupõem a existência de verdades absolutas na ciência são evidenciadas em vários contextos, principalmente quando nos referimos à matemática. Romper com ideias absolutas, a-históricas e dogmáticas relacionadas à matemática pode levar os professores e futuros professores de matemática a desenvolverem o pensamento crítico. O estudo de GNE pode proporcionar aos professores em formação, a partir de conflitos e embates relacionados à verdade e certeza, a oportunidade de explorar perspectivas que evidenciem que a matemática (e a ciência) não é estática, mas sim, produto humano e em constante transformação.

Nos últimos anos, algumas produções acadêmicas sobre o ensino de geometria passaram a debater a integração de GNE na educação básica (Carvalho; Azevedo, 2020; Leivas; Souza; Portella, 2017; Padilha; Moran, 2023). Entretanto, há poucas pesquisas que investigaram as GNE associadas a contextos de formação de professores de matemática (PMat), conforme apontado por Cybulski (2022).

Tendo em conta a importância e a necessidade de uma formação, inicial e continuada, de PMat que possibilite a constituição de conhecimentos geométricos (euclidianos e não euclidianos), o Gepefopem, do qual participamos², tem se dedicado a desenvolver pesquisas relacionadas ao assunto. Dentre as investigações elaboradas e em andamento, destacam-se os trabalhos de Cybulski (2022), Corrêa (2023); Magnoni-Vieira (2023), Fraga (em andamento) e Leiria (em andamento). Mapeamentos de dissertações e teses brasileiras (Cybulski, 2022;

² Daqui em diante, escreveremos em primeira pessoa do plural.

Corrêa, 2023), planejamento e desenvolvimento de disciplinas de Ensino de Geometria (Magnoni-Vieira, 2023; Leiria, em andamento) e proposição de um curso de formação continuada (Fraga, em andamento) integram as ações desenvolvidas nos trabalhos. A investigação de Leiria (em andamento) se dedica a discutir elementos relacionados à Geometria Espacial e à Geometria Esférica – uma das GNE – na formação inicial de PMat. As demais pesquisas desenvolvidas e em desenvolvimento focam na Geometria Euclidiana.

Diante desses fatos, propomo-nos a explorar aspectos relacionados às GNE na formação, inicial e continuada, de PMat. Desse modo, o objetivo geral deste estudo é *discutir implicações do ensino das GNE para a formação de PMat*. Para tal, elaboramos uma investigação que contemple a temática sob dois pontos de vista: de pesquisas brasileiras em Educação Matemática e de professoras formadoras experientes no ensino de geometria. Tendo em vista o objetivo citado, buscamos responder às seguintes indagações: *Que implicações do ensino das GNE podem ser consideradas para a formação de PMat? Que perspectivas referentes às GNE podem ser consideradas na formação de PMat? Quais os principais pontos indicados pela literatura acerca do trabalho com outras geometrias? O que professoras formadoras experientes no ensino de geometria revelam sobre as GNE na formação de PMat e na EB?*

Para tanto, na próxima seção, apresentaremos algumas considerações acerca da formação inicial e continuada de PMat. Na sequência, na seção 3, destacamos alguns aspectos referentes ao desenvolvimento histórico de algumas GNE e suas especificidades, pois compreendemos que o entendimento sobre a temática é relevante para a formação de PMat. Na seção 4, descrevemos os procedimentos metodológicos empregados no desenvolvimento da investigação. E, na seção 5, por fim, a estrutura/organização da presente dissertação.

A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

A educação escolar desempenha um papel importante na formação dos indivíduos, já que se propõe a permitir o desenvolvimento social, cognitivo, moral e afetivo, por intermédio de professores, que têm um papel fundamental nesse processo. “Então, a formação de quem vai formar torna-se central nos processos educativos formais, na direção da preservação de uma civilização que contenha possibilidades melhores de vida e co-participação de todos” (Gatti, 2016, p. 163). Quando falamos de formação de professores,

[...] não nos referimos a qualquer proposta de formação de PEM³, mas sim àquela que valoriza o (futuro) professor como protagonista do seu processo de formação, como produtor de conhecimento; que articula a prática letiva do PEM com a sua profissão, com as políticas educacionais e as políticas públicas mais amplas. Cursos de formação de professores constituídos de conteúdos predeterminados pelo formador, com técnicas pedagógicas homogêneas, assumidas como “receitas” ou “fórmulas mágicas”, que tencionam “colonizar” o professor e a escola, nos parecem ineficazes, além de perversos (Cyrino, 2017, p. 709, grifo da autora).

Portanto, refletir sobre a formação de PMat implica considerar um processo multifacetado, em constante movimento e de natureza contínua. A complexidade da prática e da formação docente não se limita apenas ao desenvolvimento de conhecimentos específicos e disciplinares. Reduzir o papel do docente a executor o desconsidera como um indivíduo que elabora conhecimentos próprios em sua prática (Lima *et al.*, 2020).

A complexidade da profissão do PMat pode estar relacionada à própria natureza de sua especialidade. Os conteúdos matemáticos são frequentemente associados aos adjetivos difícil e abstrato, o que requer que o professor, além de dominar os conceitos, tenha habilidades didáticas e pedagógicas que engajem os estudantes na disciplina, o que não é tarefa simples dada a rejeição à matemática escolar. Além disso, ser professor (não só de matemática) requer uma contínua construção de conhecimentos, que nem sempre é possível diante das demandas da escola, das condições de trabalho e do desprestígio social da profissão.

[...] a multiplicação e diferenciação dos conhecimentos produzidos pelas ciências e artes ressoam no campo educacional - nos sistemas de ensino, nas escolas, nas salas de aula – causando, de um lado críticas, pela obsolescência do ensinado nas escolas ou pela sua insuficiência (quer na educação básica, quer na superior), e, de outro, provocando perplexidades ante o que fazer com os currículos escolares e a formação de professores. Embora os currículos encontrem boa sustentação no discurso científico clássico, o volume e a

³ Professor que Ensina Matemática.

constante mudança em conhecimentos, áreas de saber e formas de conhecer, trazem para os currículos escolares e a formação dos docentes um grande desafio [...]. Aumentar o número de disciplinas na formação dos professores, ou, na escola básica? A que leva isto? É suportável? Quais escolhas, então, fazer? Como incluir as novas lógicas? E quais valores? Quais formas de relacionamento intra-escolar implementar? A escola está no centro desse redemoinho. Os professores estão nesse redemoinho (Gatti, 2016, p.166).

Portanto, as demandas educacionais, políticas e sociais (que sempre se fazem presentes) afetam diretamente a viabilidade de sua formação contínua.

A atuação do professor não se restringe a um grupo homogêneo de estudantes, já que ele atua em diversas etapas da educação básica. Mesmo em turmas de um mesmo ano de escolaridade há variações dos conhecimentos, experiências e histórias entre os estudantes (Leite *et al.*, 2018). A diversidade de vivências e bagagens culturais dos envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem influencia significativamente a prática do professor.

Além disso, a conjectura histórica e a política atual⁴ evidenciam descontentamentos relacionados à formação de professores em duas frentes: políticas públicas e práticas formativas (Gatti *et al.*, 2019). A desprofissionalização, precarização da formação, tanto inicial quanto continuada, o salário e as condições de trabalho são insatisfações destacadas no âmbito das políticas públicas. A articulação fraca entre a universidade e a escola, entre teoria e prática e entre conhecimentos específicos e pedagógicos representa inquietações observadas no escopo das práticas formativas (Gatti *et al.*, 2019).

Considerando esses aspectos, é importante a formação de um profissional ciente das demandas inerentes à profissão docente e aos (diversos) desafios associados. Uma formação embasada em práticas, concepções e/ou crenças de professores e futuros PMat, visando instigar diálogos e reflexões que transcendam a exposição de métodos de ensino e conceitos matemáticos (Vasconcelos *et al.*, 2021) pode promover uma formação holística aos professores e futuros professores.

A formação inicial, aquela desenvolvida durante a graduação ou magistério, pode ser considerada como um suporte para a futura prática docente. “Futuros professores de matemática precisam entender ‘o que sabem’, ‘o que aprendem’, ‘porquê aprendem’ e ‘como aprendem’, para que, então, com segurança, como professores, possam guiar seus alunos na construção de novos conhecimentos” (Nunes; Onuchiq, 2019, grifo das autoras).

Diversas críticas cercam os cursos de licenciatura em geral. Algumas destas dirigem-se ao currículo, às disciplinas específicas e às conexões reais entre as práticas de aprender e ensinar

⁴ Nos referimos ao ano de 2024.

na educação básica e as práticas formativas. Santos e Lins (2016) discorrem, entre outros elementos, sobre as escolhas das disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática. Relatam que a inclusão de certas disciplinas é influenciada, em parte, por interesses de professores e pesquisadores integrantes dos departamentos das Universidades, que se preocupam em formar, também, futuros pesquisadores. Embora os conhecimentos matemáticos acadêmicos integrem a formação necessária ao professor, essa “tradição” presente nas instituições de ensino pode colocar questões relacionadas ao ensino em segundo plano, como se o “aprender a ensinar” acontecesse concomitantemente à prática do futuro professor, já em sala de aula. Para pensarmos um currículo de licenciatura que atenda às demandas profissionais do professor, precisamos antes refletir sobre o que é sua prática profissional e sobre onde se encontra a matemática nessa prática.

David, Moreira e Tomaz (2013) propõem uma distinção entre a “matemática escolar” e a “matemática acadêmica”. A primeira pode ser vista como práticas e saberes, em conjunto, associados ao desenvolvimento do processo educacional em matemática. A matemática escolar não se restringe apenas aos conhecimentos ensinados aos estudantes das escolas, pois incluem os saberes específicos da profissão de professor, por exemplo. A matemática acadêmica pode ser interpretada como um conjunto de saberes e práticas que são ligadas à constituição do corpo científico de conhecimentos sistematizados, produzidos pelos matemáticos e reconhecido, socialmente, como produto do trabalho destes profissionais. Os autores ainda propõem uma reflexão do que seria a “matemática do cotidiano”: práticas, saberes, ideias e opiniões, baseadas ou não na matemática escolar, aplicadas em situações cotidianas que não são experienciadas na escola.

Ao discutir o lugar da matemática na licenciatura, Fiorentini e Oliveira (2013) apontam que a formação necessária ao professor é concebida a partir da interpretação do que é a prática desse profissional e destacam três perspectivas que impactam a organização do processo de formação. A primeira, de caráter técnico, concebe a prática do professor como aplicação de métodos advindos do domínio do conhecimento matemático. Nessa perspectiva, as disciplinas didático-pedagógicas ocupam posições subalternas na formação, sem conexão direta com as práticas de ensinar e aprender matemática, que existe de modo clássico, formal e “euclidiano”. A segunda, de caráter reflexivo, compreende a prática do professor como aplicações de conhecimentos acadêmicos, tanto matemáticos quanto educacionais (com enfoque mais didático do que pedagógico). Esses conhecimentos são exercitados, posteriormente, nos processos de treinamento desse profissional, e a matemática é vista como um saber científico a ser “adaptado” para contextos de ensino. A terceira, de caráter crítico, considera a prática

pedagógica do PMat como prática social, composta por relações emaranhadas que são constantemente transformadas. Essa perspectiva gera uma formação focada no estudo de diversas atividades profissionais do educador matemático, como pesquisa, escrita e edição de livros didáticos, formação de professores, desenvolvimento de *softwares* e jogos etc. Desse modo, a matemática relaciona-se com outras disciplinas e conhecimentos de forma dinâmica e a partir de práticas sociais e negociações de significados, o que a caracteriza como um saber de relação. Compreender a matemática como saber de relação tange conhecimentos históricos, filosóficos, epistemológicos e político-pedagógicos, mesmo como ferramenta de leitura e entendimento do mundo. Portanto, ao levarmos em conta a última perspectiva como representante da prática do professor de matemática, podemos identificar que a organização de seu processo de formação exige mudança. Disciplinas matemáticas e didáticas isoladas podem ter foco excessivo na teoria em detrimento da prática e não preparar o futuro professor para a realidade da sala de aula, que é o objetivo da licenciatura.

Considerando essa perspectiva de mudança nos processos de formação de professores, os docentes dos cursos de licenciatura em Matemática ocupam uma posição estratégica no processo de formação de professores. Ao assumir o posto de formador, não basta que o professor domine o conhecimento de conteúdos específicos da matemática e os conhecimentos pedagógicos dos conteúdos, cumpre que ele se atente, também, aos conhecimentos relacionados, especificamente, à formação de professores (Coura; Passos, 2021). Além dos docentes da licenciatura, os professores da escola básica também são atores na mudança dos processos de formação, e segundo Fiorentini e Oliveira (2013, p. 935):

Uma prática colaborativa e investigativa conjunta entre formadores, professores da escola básica e futuros professores, envolvendo análises sistemáticas de problemas e práticas de ensinar e aprender matemática, na escola e em sala de aula, proporciona aprendizagens não apenas aos professores da escola, mas também aos formadores, que aprendem sobre a complexidade do trabalho pedagógico dos professores, em diferentes contextos de prática docente, e sobre outras formas e dinâmicas de formação docente, na qual a formação matemática do professor desenvolve-se a partir da mobilização e da análise do saber matemático de relação que é produzido e mobilizado na prática escolas e das interações discursivas em sala de aula.

Se almejamos uma mudança nos processos de formação, é fundamental a conexão entre a universidade, a escola, os licenciandos, os professores da rede e os formadores, de forma colaborativa. Porém, a formação inicial não se configura como o único contexto formativo possível para PMat. Processos de formação continuada permitem o aprimoramento de práticas pedagógicas, bem como a promoção de reflexão sobre a prática, mitigando os desafios do cotidiano escolar, da contemporaneidade e do avanço tecnológico (Gatti, 2008). Contudo, é

preciso cuidado, pois “Grande parte dos programas de formação contínua têm-se revelado de grande inutilidade, servindo apenas para complicar um quotidiano docente já de si fortemente exigente” (Nóvoa, 2011, p. 11).

É importante que o PMat encontre nessas formações conexões reais com suas práticas em sala de aula. Enfoques que tratem a formação continuada apenas como forma de sanar lacunas da formação inicial devem ser evitadas, de modo a possibilitar que o professor sinta “a alegria de ensinar e aprender, a surpresa diante do novo, a satisfação por conseguir enfrentar novos desafios e por superar conflitos” (Davis *et al.*, 2012, p. 13).

Considera-se que a formação, inicial ou continuada, exerce grande influência na percepção, construção e organização de diversos saberes docentes, que, de forma conjunta, se manifestarão no ato de ensinar, ou seja, no fazer docente em seu cotidiano. A formação docente não é a única responsável pela construção do saber profissional, mas se apresenta como constituinte indispensável, uma vez que o conhecimento profissional não poderia se sistematizar, consistentemente, na ausência de processos de formação (Albuquerque; Gonjito, 2013, p. 78).

Embora o desenvolvimento de conhecimentos específicos e disciplinares seja parte integrante da formação, inicial e continuada de PMat, indagações relacionadas ao conhecimento matemático são persistentes, principalmente quando nos referimos à geometria.

O nomeado “abandono do ensino de geometria” no Brasil, foi inicialmente denunciado por Pavanello (1989) em sua dissertação de mestrado. A autora enfatiza que esse cenário se intensificou após o início do Movimento da Matemática Moderna. Todavia, alguns pesquisadores da História da Matemática, a partir de revisões, novos aportes teórico-metodológicos e fontes históricas, indicam que o chamado “abandono” sempre esteve presente na educação brasileira (Silva, 2022). De todo modo, pesquisas recentes indicam que o ensino de geometria no Brasil segue tendo caráter precatório e ineficiente (Barros; Pavanello, 2022) e que conteúdos geométricos são colocados em segundo plano nas práticas escolares (Brum; Schuhmacher, 2014). Neste contexto, as GNE não são citadas diretamente pois, normalmente, não eram consideradas relevantes dentre os conhecimentos geométricos escolares. A própria dificuldade em Geometria Euclidiana (GE) pode ser interpretada como obstáculo para o desenvolvimento do trabalho de outras geometrias em contextos formativos.

Apesar das dificuldades manifestadas por professores e futuros PMat em relação à GE, algumas investigações apontam a relevância de incluir GNE em programas de formação, inicial e continuada, de PMat (Leivas, 2013; Leivas; Souza; Portella, 2017; Lopes; Manrique; Macêdo, 2022). Entretanto, seu trabalho nesses contextos formativos também encontra desafios.

O estudo de GNE, mesmo em contextos de formação de PMat, tende a se deparar com vários possíveis obstáculos cognitivos que, segundo Kaleff e Nascimento (2004, p. 12), estão:

relacionados a representações semióticas, principalmente àquelas expressadas na forma de expressões euclidianas, tanto apresentadas na linguagem natural (por meio do emprego de expressões homônimas às euclidianas) como em desenhos, gráficos e diagramas (com características euclidianas), os quais se apresentam intervenientes em processos de resolução de problemas. Desta forma, a utilização de denominações e de representações gráficas, habitualmente empregadas para desenhar e nomear figuras euclidianas, aparentemente influencia negativamente a construção dos novos conhecimentos.

Segundo esses autores, algumas representações e conceitos não euclidianos, como a noção de reta, quando consideramos alguns modelos de Geometria Hiperbólica, podem ser associados a expressões euclidianas. O termo “paralelas”, por exemplo, é frequentemente vinculado de imediato ao conceito de retas paralelas da GE, sendo esta a forma mais comum na introdução à noção de paralelismo na matemática. Além da representação em linguagem natural, as GNE possuem linguagens simbólicas matemáticas e representações geométricas próprias. Para compreender o significado dos objetos matemáticos, é essencial coordenar mentalmente elementos provenientes de diferentes sistemas de representação. A abundância de formas de representação matemática pode tornar a apreensão de significações complexa e se manifesta na prática educacional, “quando se enfrenta as situações do ensino de conceitos matemáticos que não possuem um significado *a priori*, como acontece no caso das geometrias advindas dos sistemas formais, cujos objetos só possuem o significado instituído pelos matemáticos, por meio de convenções” (Kaleff *apud* Duval, 2007, p. 75).

Para se formar um professor mais capacitado a acessar novos conhecimentos geométricos e que esteja preparado para ministrá-los na Escola, há necessidade de se processar uma grande transformação em sua formação. Mesmo no nível da formação continuada, no que concerne ao ensino das Geometrias, além das características matemáticas próprias e seus saberes, é necessário se considerar os aspectos linguísticos e cognitivos relacionados aos obstáculos à apreensão desses novos conhecimentos geométricos (Kaleff, 2007, p. 93).

A despeito das dificuldades, o trabalho com GNE em formações iniciais e continuadas de PMat pode permitir que os envolvidos constituam, também, saberes sobre outros elementos que nutrem conexão com a matemática e que colaboram com a formação didático-pedagógica⁵. Para tal, é:

⁵ Ao utilizarmos a composição dos termos, concordamos que “A didática busca explorar as relações professor-aluno-conteúdo (como enfatiza a didática francesa) e centra foco no processo de ensinar e aprender um conteúdo

necessário que esse público seja oportunizado a uma reflexão sobre alguns aspectos da Geometria não-euclidiana, ao mesmo tempo que incorporam ao seu repertório formativo questões de base Filosófica, Epistemológica e Axiológica que tangem a construção do saber de modo a ressignificar os seus conhecimentos para que possam propor ações em sua sala de aula da Educação Básica (Souza, Sousa; Lopes, 2021, p.47).

Além de colaborar no desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e pedagógicos, o estudo de GNE que leva em conta questões de ordem histórica e filosófica pode “contribuir para uma visão de ciência mais próxima do que conhecemos hoje sobre sua natureza” (Arthury, 2007, p.29), romper com a concepção de linearidade, verdade e rigidez da matemática e respaldar práticas educativas que não se baseiem no excesso de formalismo presente no ensino de geometria (Brum; Schuhmacher; Silva, 2015).

Contudo, a incorporação de aspectos históricos em quaisquer contextos formativos não deve ser feita sem o tratamento metodológico que o estudo de qualquer ciência demanda. Interpretações simplistas e fragmentadas podem ser evitadas, principalmente se pensarmos nos questionamentos que as ideias científicas têm enfrentado nos últimos anos. A história não é uma narrativa única e definitiva que deva ser incorporada ao ensino. Incluir uma versão anacrônica, baseada em ideias de progresso positivista acarreta consequências indesejáveis. Práticas educacionais que seguem abordagens estritamente internalistas da História da Ciência podem favorecer para disseminar concepções de que a ciência é neutra, individualista e empirista-indutivista (Hidalgo *et al*, 2018).

Na sequência, apresentaremos algumas considerações sobre o desenvolvimento das GNE e suas especificidades.

e, também, no que antecede essa prática (planejamento) e a sucede (avaliação). A Pedagogia, por sua vez, se preocupa com o sentido formativo ou educativo do que ensinamos e aprendemos; com as consequências da ação didática, em termos de formação e desenvolvimento humano do sujeito. A Pedagogia, portanto, governa e vetoriza a ação didática, pois dá sentido a essa ação, preocupando-se com questões tais como: por que, para que e para quem ensinamos?”. (Fiorentini; Oliveira, 2013, p. 919 *apud* Fiorentini, 2005, p. 108).

DA GEOMETRIA EUCLIDIANA ÀS NÃO EUCLIDIANAS

A geometria, assim como outras áreas da matemática, caracterizou-se como campo de conhecimento a partir da contribuição de diversas sociedades e momentos históricos. Em um mundo material com grande diversidade de formas e tamanhos, o desenvolvimento da geometria é impulsionado por seres humanos e as suas necessidades de transformá-lo. Necessidades relacionadas à medição de terras (*geo* – terra e *metrein* – medida), volumes e curvas e à construção de estruturas físicas (em que noções de paralelismo e perpendicularidade são presentes) revelam a origem prática da geometria, nas sociedades babilônica e egípcia. Porém, na sociedade grega, a geometria passou a ter uma configuração particular.

Na época em que ocorreu o projeto de sistematização da geometria, as ideias de Platão eram influentes entre os intelectuais e filósofos gregos. Na visão platônica, os objetos matemáticos não estavam situados na esfera do mundo sensível, apesar de reais no mundo das ideias. Esse modo de conceber os objetos matemáticos faz com que a aceitação de sua existência não requeira uma experiência física.

Por exemplo, a reta é um objeto matemático que não tem uma existência material. É no plano da intuição que é concebida como um conjunto de infinitos pontos – esta é uma verdade intuitiva para os adeptos da concepção platônica de Matemática, isto é, uma verdade evidente para a mente⁶(Cavichiolo, 2011, p. 41).

Os objetos matemáticos são entendidos, nesse contexto, como alheios à realidade material: objetos de pensamento. No mundo sensível, as coisas são incertas e subjetivas. No mundo das ideias, as coisas possuem características de universalidade e objetividade. “[...] foi com esse olhar platônico transcendental, para cuja constituição foram fundamentais as contribuições do pitagorismo e do eleatismo, que Euclides olhou a produção matemática de seus antecessores [...] e escreveu *Os Elementos*” (Miguel, 1995, p. 23).

Tradicionalmente, é atribuída a Euclides de Alexandria a organização da síntese do conhecimento geométrico elaborado até aquela época, estruturada em um formato lógico-dedutivo, baseado em axiomas e postulados. A obra foi denominada de *Os Elementos* e é composta por 13 livros. Porém, assim como não há prova material da existência de Pitágoras e sim da chamada Escola Pitagórica, ainda pairam várias dúvidas sobre a existência de Euclides e sobre a escrita de *Os Elementos*. O texto original foi perdido e o que se sabe, hoje, deriva dos

relatos de Proclus (410 – 485). “O que pode ter havido foi a existência de uma ‘escola euclidiana’, composta por vários personagens ilustres que compilaram maravilhosamente o livro *Os Elementos*, e também outras atribuídas a Euclides” (Nobre, 2004, p. 537). De todo modo, muitas produções científicas⁷ seguem designando a figura de Euclides a autoria da obra.

Nem todos os teoremas e axiomas incluídos em *Os Elementos* são inéditos. A relevância da obra não está na descoberta de teoremas, que de fato foi feita, mas sim na organização lógica apresentada e pelas provas rigorosas e concatenadas elaboradas (Garbi, 2010). Na obra estão organizadas 465 proposições em uma dedução lógica advinda de axiomas e postulados. A diferença entre as palavras “axioma” e “postulado” está relacionada mais à sua origem. A palavra “axioma” se deriva do grego “ἀξίωμα” (válido, digno, dogma) e diz sobre afirmações gerais autoevidentes, não demonstráveis, que podem ser aceitas sem discussão. O termo “postulado” deriva do latim “*postulatus*” (impor, exigir, ordenar) e se refere a um princípio básico que, mesmo sendo demonstrável, é admitido e utilizado sem demonstração (Melo, 2015). Ambos os termos se referem a afirmações que, dadas as suas simplicidades, podem ser aceitas por qualquer indivíduo.

A distinção entre axioma e postulado foi adotada por Euclides em seus *Elementos*. Enquanto os axiomas expressam verdades evidentes e são chamados por Euclides de noções comuns, os postulados expressam o que se propõe ser admitido e concernem à existência de determinados elementos geométricos. A distinção entre postulado e axioma deixou de ser usada na lógica e na matemática moderna (Abbagnano, p. 782, 2007).

Ao apresentar a matemática como uma ciência dedutiva, os autores da obra garantiram que toda afirmação construída fosse deduzida logicamente a partir de outras afirmações mais simples (como princípios de partida). Então, em uma cadeia de conclusões, tudo decorreria daquilo que foi estabelecido anteriormente, sem que houvesse contradição no interior do raciocínio.

No Livro I são apresentados nove axiomas (noções comuns), que são:

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si;
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais;
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, os restantes são iguais;
- [4. Coisas que coincidem entre si são iguais entre si;
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si;
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si;]
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si;
8. E o todo [é] maior do que a parte;

⁷ As citações feitas ao longo do texto conservam a escrita original dos autores, então alguns contêm referências à Euclides como uma figura histórica.

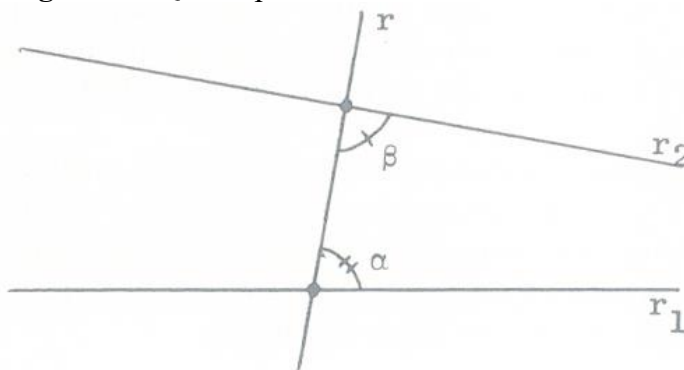
9. E duas retas não contém uma reta (Euclides, 2009, p. 99).

Ainda no Livro I são apresentados os cinco postulados, que são:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto;
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo;
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos;
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores que dois retos (Euclides, 2009, p. 98).

Note que o quinto postulado não é tão simples e autoevidente quanto os demais. O fato de as 28 primeiras proposições do primeiro livro serem demonstradas sem o uso do quinto postulado indica que até mesmo os autores de *Os Elementos* o consideravam pouco evidente (Carmo, 1987). Muitos matemáticos o tratavam como teorema e acreditavam que sua demonstração, a partir dos outros quatro postulados e algumas definições, era possível.

Figura 1 – Quinto postulado da Geometria Euclidiana



Fonte: Carmo (1987, p. 24)

A descrição da geometria baseada em axiomas e postulados escritos na obra foi hegemônica durante séculos. Até meados do século XIX, não foi necessário se preocupar com a existência de outras geometrias já que era consenso que a Geometria Euclidiana (GE) descrevia e interpretava o espaço adequadamente. Porém, o quinto postulado e sua forma pouco evidente instigou muitos matemáticos, desde a publicação de *Os Elementos*, a buscarem outras formas de enunciá-lo, de modo a confirmá-lo dentro da axiomática euclidiana. Uma das reformulações foi proposta por John Playfair (1748-1819), em 1795: “para toda reta l e todo ponto P fora de l , pode-se traçar uma única reta paralela a l que passe por P ”. O quinto postulado enunciado dessa forma ficou conhecido como “Postulado das Paralelas” e equivale ao quinto postulado da GE, em linguagem distinta. Outras reformulações do quinto postulado são:

(1) Há pelo menos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a um ângulo raso. (2) Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes. (3) Existe um par de retas igualmente distantes uma da outra em todos os pontos. (4) Por três pontos não colineares pode-se traçar uma circunferência. (5) Por qualquer ponto no interior de um ângulo menos que 60° pode-se sempre traçar uma reta que intercepta ambos os lados do ângulo (Eves, 2004, p. 539).

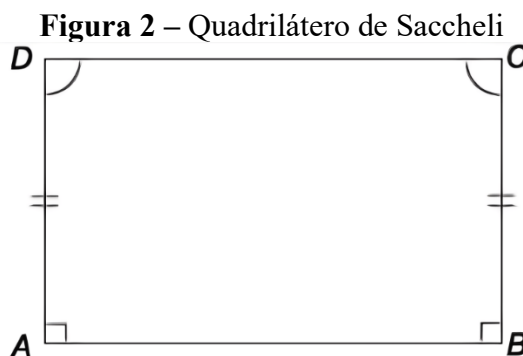
Além de reformulações, várias tentativas, frustradas, de prova do quinto postulado foram elaboradas. Porém todas, das mais simples às mais elaboradas, “continham sempre um raciocínio circular que escondia, dentro da argumentação lógica de sua demonstração, as verdades do próprio quinto postulado que se queria provar” (Cabariti, 2004, p.32).

Um matemático que tentou provar o quinto postulado foi Claudius Ptolomeu (II a. E. C.) A proposta de demonstração de Ptolomeu baseava-se em uma proposição⁸ do Livro I de *Os Elementos*, a qual dependia do quinto postulado. A prova era, portanto, intrinsecamente equivalente ao próprio postulado que se pretendia provar e essencialmente circular. Outros matemáticos também se debruçaram sobre a pouca evidência do quinto postulado, como Proclus (410-485), Nasir ad-Din al-Tusi (1201-1274), Comandino (1509-1575) e Wallis (1616-1703).

Alguns dos esforços com resultados notáveis sobre o quinto postulado são atribuídos a Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

Saccheri propôs uma abordagem para provar o quinto postulado da GE que partia de um quadrilátero ABCD, com lados iguais e com dois ângulos retos (Figura 2). Ao traçar as diagonais AC e BD e aplicar teoremas de congruência, Saccheri estabeleceu igualdade entre os ângulos D e C. Havia, portanto, três hipóteses: os ângulos são agudos, retos ou obtusos iguais. Bastava provar que as hipóteses de ângulos agudos e obtusos resultavam em uma contradição, reforçando a veracidade da hipótese de ângulos retos (equivalente ao postulado das paralelas) (Eves, 2004).

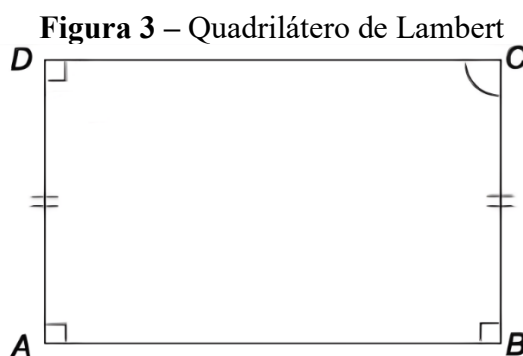
⁸ Ptolomeu utilizou em sua prova a 29.^a proposição do Livro I “A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos” (Euclides, 2009, p. 120).



Fonte: Eves (2004, p. 541)

A hipótese do ângulo obtuso foi descartada mediante o emprego de noções relacionadas à infinitude de retas. No entanto, as tentativas de contradizer a hipótese do ângulo agudo foram mais complexas e Saccheri forçou uma contradição através de conceitos vagos sobre elementos infinitos. “Não tivesse ele se mostrado tão ávido de exhibir uma contradição e, em vez disso, tivesse admitido sua incapacidade de alcançá-la, sem dúvida, os méritos da descoberta da geometria não euclidiana caberiam a ele” (Eves, 2004, p.540). Um ponto importante de seu trabalho é que, durante as demonstrações, várias proposições decorrentes da negação do quinto postulado surgiram, como a constatação de que duas retas paralelas poderiam não ser equidistantes (Carmo, 1987).

Algumas décadas após a publicação das investigações de Saccheri relacionadas ao quinto postulado, Lambert propôs uma demonstração baseada em um quadrilátero com três ângulos retos (Figura 3).



Fonte: Eves (2004) (adaptado)

Suas conclusões sobre a hipótese do ângulo obtuso assemelharam-se às de Saccheri. Entretanto, no que se refere à hipótese do ângulo agudo, os resultados foram insatisfatórios (Eves, 2004). Assim como Saccheri, Lambert obteve proposições curiosas como: a diferença entre a soma dos ângulos internos de um triângulo e dois ângulos retos não é zero; em vez disso, está relacionada proporcionalmente à área do triângulo (Carmo, 1987).

As demonstrações propostas por Legendre eram associadas à soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual, maior ou menor que dois ângulos retos. Considerando a infinitude da reta, como Saccheri e Lambert, eliminou a segunda hipótese, mas não pôde descartar a terceira. Seu livro *Éléments de Géométrie* foi amplamente adotado e reeditado, o que contribuiu para popularizar o problema relacionado ao postulado das paralelas (Eves, 2004).

Provavelmente, esses matemáticos não cogitaram a existência de qualquer outra geometria para além da euclidiana. Porém, suas contribuições foram significativas e fundamentais para o desenvolvimento de GNE.

Os esforços de dois mil anos para alterar o status da famosa afirmação de Euclides, de postulado para teorema, resultou em um fracasso em relação a esse objetivo, mas foram altamente bem-sucedidos em outro aspecto. Eles serviram para reorientar o pensamento sobre a natureza da geometria e foi uma preparação necessária para um ambiente cultural que possibilitaria aos seus beneficiários realizar trabalhos de maior importância ainda (Blumenthal, 1980, p. 12, tradução nossa⁹).

Hoje sabemos que as geometrias desenvolvidas sob um conjunto básico de axiomas acrescido da hipótese do ângulo agudo ou da hipótese do ângulo obtuso apresentam coerência e consistência equivalentes à GE, construída sob um conjunto básico de axiomas acrescido da hipótese do ângulo reto. Esse fato comprova a independência do quinto postulado dos demais, impedindo, portanto, sua derivação a partir destes (Eves, 2004).

Os primeiros trabalhos elaborados e amplamente divulgados sobre a possibilidade de modelos geométricos além do euclidiano foram os escritos por Janos Bolyai (1802-1860) e Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1743-1856). Esses matemáticos adotaram a forma de Playfair para o quinto postulado e baseavam-se em três possibilidades: a partir de um ponto dado, pode-se traçar uma, mais do que uma ou nenhuma reta paralela a uma reta também dada. Note que essas possibilidades estão associadas, respectivamente, às hipóteses do ângulo reto, agudo e obtuso (Eves, 2004).

No século XIX, a Igreja Romana tinha integrado os princípios filosóficos de Immanuel Kant (1724-1804) à sua doutrina. A filosofia kantiana considerava o espaço e o tempo categorias fundamentais para compreender a experiência humana, relacionava a noção de espaço ao espírito humano e à intuição e “sustentava que o espaço é uma estrutura já existente no espírito

⁹ Texto original “The efforts of two thousand years to change the status of Euclid's famous assertion from a postulate to theorem resulted in failure with regard to that objective, but they were highly successful in another aspect. They served to reorient men's thinking concerning the nature of geometry, and they were necessary preparation for a cultural environment that would enable its beneficiaries to accomplish work of far greater importance.”

humano, e que os postulados da geometria euclidiana são juízos *a priori* impostos ao espírito humano, e que sem esses postulados não é possível nenhum raciocínio consistente sobre o espaço” (Eves, 2004, p. 545). A visão da GE como modelo perfeito de racionalidade e ordem se alinhava com perspectivas religiosas que buscavam uma visão ordenada e estável do mundo. Apesar de Kant considerar o sujeito elemento essencial para a existência do conhecimento geométrico, os objetos, para ele, referem-se somente à razão. Apesar da filosofia kantiana ter influenciado a aceitação de outras geometrias, “foi o ideal da Geometria Euclidiana que fez com que a comunidade matemática não aceitasse a existência das novas geometrias” (Ferreira, Dos Santos, 2023, p. 13)

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nunca publicou nada relacionado a outras geometrias, talvez pensando na filosofia dominante da época, mas há indícios de que ele desenvolveu estudos sobre a temática. Em uma carta escrita a Taurinus em 1824, disse:

“A hipótese que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° conduz a uma geometria separada, totalmente diferente de nossa geometria (euclidiana), que é em si própria inteiramente consequente, e que desenvolvi de maneira totalmente insatisfatória para mim, de tal modo que posso nela resolver qualquer problema, exceto a determinação de uma constante que não pode ser fixada a priori” (Carmo, 1987, p. 30-31, grifos da autora).

A elaboração clara de uma geometria que rejeitasse o quinto postulado foi publicada, independentemente e quase ao mesmo tempo, por Lobachevski, em 1829, e Bolyai, em 1832. Ambos admitiram a hipótese do ângulo agudo (que permitia a existência de mais de uma reta paralela a um ponto exterior a outra reta).

Lobachevski publicou seu primeiro artigo sobre o tema em 1829. Por ser escrito em russo, o trabalho não teve grande alcance. Nos anos seguintes, Lobachevski deu continuidade aos estudos envolvendo GNE, mas o reconhecimento de sua obra se deu apenas após sua morte. O pai de Bolyai era professor de matemática, amigo de Gauss e estimulou seu filho a investigar o postulado das paralelas. Em 1823, Bolyai escreveu uma carta a seu pai, dizendo “Do nada eu criei um universo novo e estranho” (Eves, 2004, p. 542). O trabalho foi publicado como um apêndice de um manuscrito de seu pai em 1832 e, depois disso, Bolyai nunca mais publicou nada a respeito. A geometria desenvolvida por Lobachevski e Bolyai é, hoje, chamada de Geometria Hiperbólica (Carmo, 1987).

Outro matemático que se debruçou sobre a existência de outras geometrias foi Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Ele, ao contrário dos outros, propôs uma geometria consistente baseada na hipótese do ângulo obtuso e publicou seu trabalho em 1868. Para

Riemann, a geometria tem como objetivo tratar modelos gerais que podem ser especificados a partir de hipóteses particulares (os axiomas da GE, por exemplo). A geometria iniciada por ele é, hoje, denominada de Geometria Elíptica (Eves, 2004).

Mesmo com a elaboração de modelos matemáticos consistentes, a aceitação da existência de outras geometrias pelos matemáticos da época foi longa. “As demonstrações das geometrias não-euclidianas seguem o modelo euclidiano. No entanto, nelas não podemos utilizar o método de visualização, nem da intuição geométrica como validação das conclusões” (Brito, 1995, p. 129). Além das influências kantianas e da GE, a dificuldade da comunidade científica em aceitar a possibilidade de existência de outras geometrias pode estar relacionada à visualização de conceitos geométricos não euclidianos, uma vez que ir além dos limites das ilustrações do modelo euclidiano é essencial para entender essas geometrias.

Com o desenvolvimento das Geometrias alternativas, o problema de verdade física se transforma no problema de coerência lógica. É essa transformação de enfoque que torna possível a coexistência de várias Geometrias diferentes. Lobatschewsky percebeu a impossibilidade de uma determinação empírica de qual Geometria era a “verdadeira”, ou seja, de qual pode ser usada, mais apropriadamente, para descrever o mundo físico (Ferreira, 2011, p. 43).

Os axiomas e os postulados tornaram-se conjecturas não dependentes de validade física e, mantendo a consistência, poderiam ser alterados (Eves, 2004). Essas noções influenciaram profundamente a concepção matemática e científica (Kaleff, 2007) do século XX pois “a existência de tais geometrias mostrou a necessidade de se raciocinar com rigor e manter a intuição sob controle [...] e permitiu a criação de teorias matemáticas com um alto nível de abstração” (Carmo, 1987, p. 33-34).

Foi através das novas geometrias que os cientistas iniciaram a busca por explicar o mundo físico dos nossos dias, por meio de ferramentas teóricas modernas ligadas à Teoria da Relatividade. Essa grande abertura científica e filosófica, trazida pelo surgimento das GNE às ideias euclidianas e às de Newton relacionadas à Física, que fez com que os conceitos anteriores ao século XIX fossem considerados insuficientes para a representação dos fenômenos físicos (Kaleff, 2010, p. 3).

Note que, ao contrário da filosofia platônica que considera a GE como detentora de verdades eternas, imutáveis e independentes do tempo e dos indivíduos, as GNE permitem a desmistificação das “verdades” geométricas e colocam em foco o desenvolvimento histórico e social da matemática. Contrariando Platão, o conceito de reta, por exemplo, não independe do tempo, do espaço e das pessoas: é um conceito fortemente contextual.

A partir disso, podemos repensar a visão dominante que temos sobre a matemática. Considerá-la uma produção impulsionada exclusivamente por aspectos intelectuais e internos de si mesma como saber unificado não corresponde à realidade, pois seu desenvolvimento é um campo de conhecimento que se modifica, já que é uma produção histórica.

Abalar a imagem de uma matemática única é, por si só, pedagógico, uma vez que possibilitaria a produção de práticas culturais emancipadoras em todos os espaços institucionais (escolares ou extra-escolares) mobilizadores de cultura matemática: o conhecimento não é o espelho do mundo, e muito menos, de um único mundo, de uma única forma de vida. Isso porque, a imagem de uma matemática única é geradora do risco de personificação do coletivo, que pode ter implicações negativas no sentido de estimular a imobilidade, o sentimento de impotência e a falta de iniciativa dos sujeitos. Além disso, a imagem de uma matemática única é geradora da discriminadora e ideológica crença de que as diversas práticas mobilizadoras de cultura matemática realizadas por diferentes comunidades de prática estariam mobilizando matemáticas imperfeitas, isto é, aspectos deformados e deformadores de uma suposta matemática verdadeira (Vilela, 2007, p. 239).

Tal perspectiva é relevante não apenas para professores e futuros professores, mas também para matemáticos, já que esses fatos integram a produção de conhecimento matemático.

Na sequência, apresentaremos considerações sobre algumas GNE, focando em suas especificidades e relações com os postulados da GE.

Não usaremos, diretamente, os conceitos abordados a seguir nas análises dos artigos. Optamos por abordá-los tendo em vista os leitores do presente trabalho, que podem não estar familiarizados com as GNE, e a denúncia acadêmica elaborada ao longo do trabalho, que indica a ausência de conceitos geométricos não euclidianos em livros didáticos, propostas curriculares e em processos formativos de PMat. Esta é uma escolha, além de tudo, política.

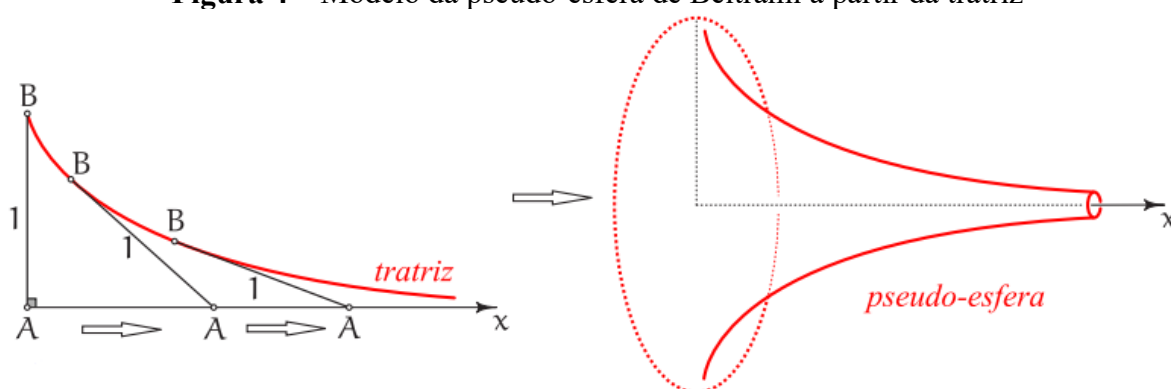
Geometria Hiperbólica

A Geometria Hiperbólica admite todos os postulados da GE, exceto o quinto. Além disso, se constitui, considerando também que “por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada” (Barbosa, 2007, p. 47). Apesar de Bolyai e Lobachevsky terem concebido uma geometria diferente da euclidiana, suas publicações não foram suficientes para convencer os matemáticos deste fato. Diferentemente da GE, a Geometria Hiperbólica foi axiomatizada e, posteriormente, surgiram modelos

matemáticos para sua representação geométrica. Na sequência, vamos expor dois modelos para a Geometria Hiperbólica.

Eugenio Beltrami (1835-1900) propôs um modelo para a Geometria Hiperbólica em 1968. Denominado de pseudo-esfera, o modelo demonstrou a consistência do sistema axiomático hiperbólico e provou a independência do quinto postulado em relação à estrutura axiomática euclidiana. A pseudo-esfera é uma superfície de revolução gerada pela rotação de uma curva (tratriziz) em torno de sua assíntota (eixo x). Para construí-la, consideramos um segmento AB perpendicular à assíntota e deslocamos o ponto A por ela (Figura 4).

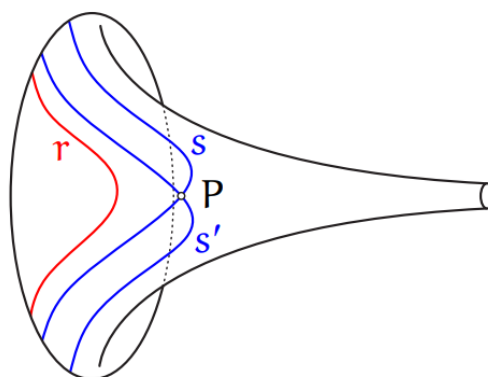
Figura 4 – Modelo da pseudo-esfera de Beltrami a partir da tratriziz



Fonte: Agustini (2022, p.59) (adaptado)

Essa superfície tem curvatura negativa constante¹⁰, assim como a esfera tem curvatura positiva constante. Note que, adotando a superfície da pseudo-esfera, podemos satisfazer o quinto postulado hiperbólico (Figura 5).

Figura 5 – Retas paralelas na pseudo-esfera



Fonte: Agustini (2022, p. 59)

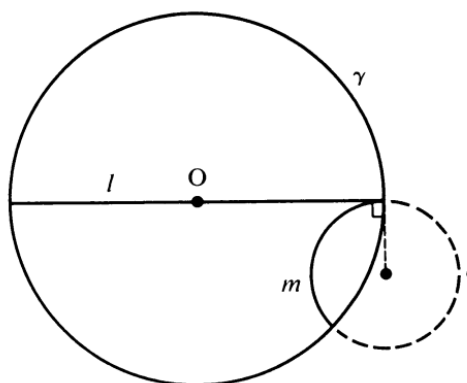
¹⁰ Uma superfície com curvatura negativa constante é uma superfície que curva “para fora”, ao contrário de superfícies com curvatura positiva constante, que curvam “para dentro”, como uma esfera.

Apesar de exibir as propriedades requeridas pela axiomática hiperbólica, o modelo de pseudo-esfera foi considerado parcial, pois impedia o prolongamento indefinido de retas para além das arestas, o que contraria o segundo postulada da GE e não se adequa à axiomática hiperbólica (Carmo, 1987).

O matemático Henri Poincaré (1854-1912) propôs modelos para a Geometria Hiperbólica baseados na GE. Desta forma, se alguma inconsistência fosse encontrada em seu modelo, haveria inconsistência na própria GE. Um dos modelos foi denominado “Modelo do Disco de Poincaré”, concebido entre 1882 e 1887, e representa a Geometria Hiperbólica no plano. Assim como o plano euclidiano é uma forma de visualizar o espaço bidimensional, um modelo equivalente poderia ser desenvolvido para o espaço hiperbólico.

Este modelo é representado por uma região do plano demarcada por uma circunferência unitária (γ). Tomando O como centro e OR como raio, o plano é constituído por todos os pontos P tais que $\overline{OP} < \overline{OR}$. Por conseguinte, a circunferência não faz parte do plano e é chamada de “horizonte”. Nesse modelo, os pontos são os mesmos da GE e as retas são: 1) cordas abertas que passam pelo centro (l); e 2) arcos de circunferência ortogonais¹¹ ao horizonte (m) (Greenberg, 1994) (Figura 6). As retas com essas características são comumente chamadas de “h-retas”.

Figura 6 – H-retas no Disco de Poincaré



Fonte: Greenberg (1994)

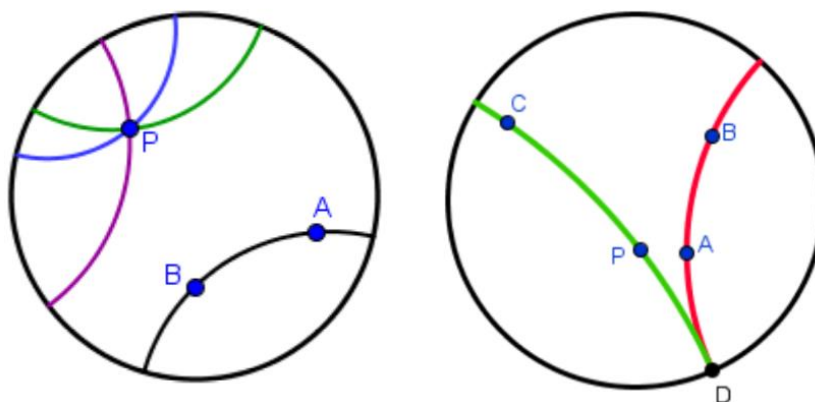
Como o horizonte não faz parte do plano hiperbólico em questão, os pontos de intersecção entre ele e as h-retas também não estão contidos no plano. Esses são chamados de “pontos ideais” das h-retas, idealizados no infinito (Lovis, 2009).

No Disco de Poincaré, semelhantemente à GE, h-retas paralelas são, por definição, aquelas que não possuem nenhum ponto em comum. Considerando um ponto P que não

¹¹ Duas circunferências que se cruzam são consideradas ortogonais se, no ponto de intersecção, os raios das circunferências são perpendiculares entre si.

pertence a uma h-reta AB, é viável traçar, a partir de P, um número infinito de h-retas que são paralelas à h-reta AB. Retas paralelas que têm um ponto ideal D em comum são chamadas de “paralelas limites” entre si (Figura 7).

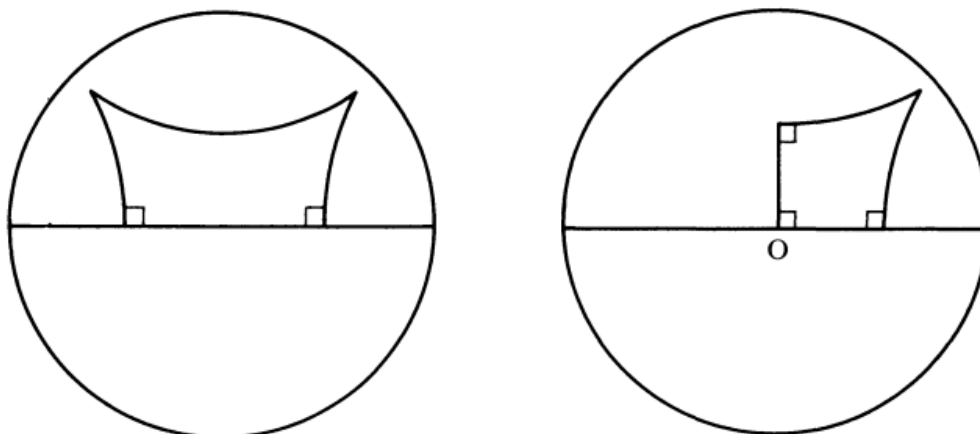
Figura 7 – H-retas paralelas e paralelas limites



Fonte: Lovis (2009) (adaptado)

Poincaré construiu um espaço hiperbólico limitado por uma métrica euclidiana. Diferentemente da pseudo-esfera, esse modelo permite a representação de retas infinitas, mesmo que limitadas por um espaço finito. Além disso, a escolha de um modelo plano para representar o espaço hiperbólico permite uma visualização clara da hipótese do ângulo agudo, desenvolvida a partir de quadriláteros por Saccheri e Lambert (Figura 8).

Figura 8 – Quadriláteros de Saccheri e Lambert no Disco de Poincaré



Fonte: Greenberg (1994) (adaptado)

Um dos resultados notáveis da Geometria Hiperbólica é a soma dos ângulos internos de um triângulo construído sobre a superfície ser sempre menor que 180° ¹². Para compreendermos os modelos citados, é necessário que conceitos euclidianos de infinitude e ilimitação sejam

¹² Modelo manipulável disponível em: <https://www.geogebra.org/m/kchb3jjx>.

desvinculados (Ferreira, 2011). A distância entre dois pontos, a construção de polígonos e a medição de ângulos também têm características e definições próprias em cada modelo.

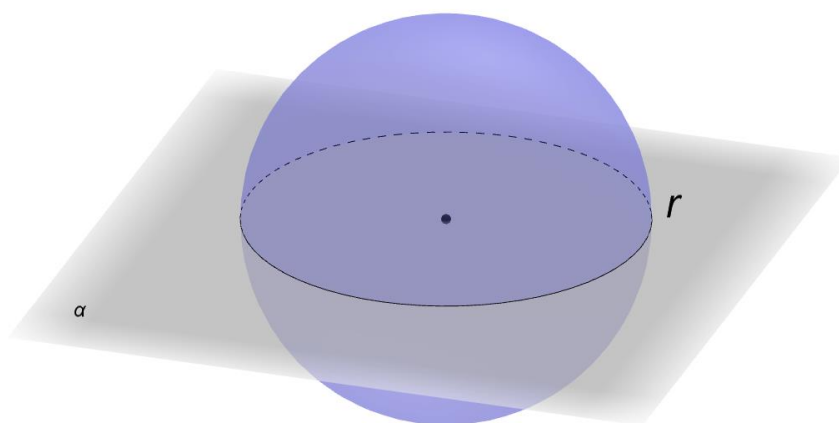
Geometria Elíptica

Enquanto a Geometria Hiperbólica nega a unicidade de retas paralelas que cruzam um mesmo ponto, a Geometria Elíptica nega a existência delas.

Bem, se na geometria euclidiana, por um ponto fora de uma reta podemos traçar somente uma reta que não intercepta a reta dada; se na hiperbólica, por um ponto fora de uma reta pode-se traçar infinitas retas que não cortam a reta dada; então nessa geometria sobre a esfera, não existe nenhuma reta que passe por um ponto fora de uma reta dada que não a encontre (Brito, 1995, p.150).

O modelo elementar da Geometria Elíptica é a Geometria Esférica ou Geometria da Superfície da Esfera. Nesse modelo, apenas os círculos máximos (geodésicas) são considerados retas, que são traçadas pela intersecção de um plano com a superfície esférica e seu centro (Figura 9).

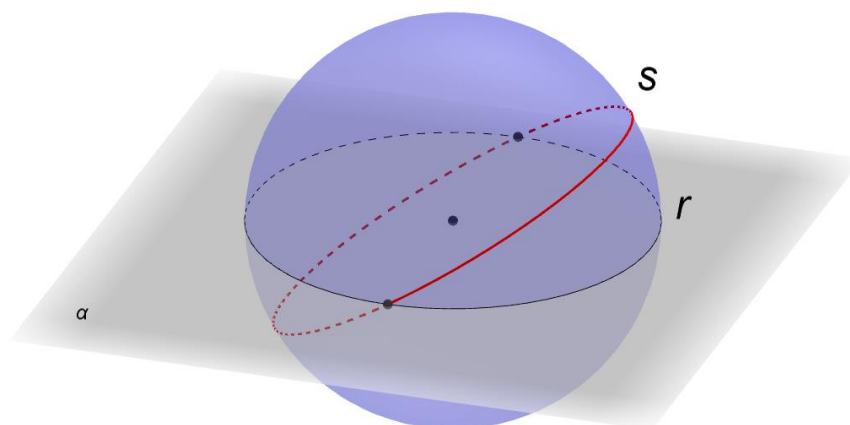
Figura 9 – Intersecção entre a reta r e o plano α



Fonte: As autoras (2023)

O comprimento das retas, na Geometria Esférica, é, assim como a própria superfície esférica, finito. Portanto, o segundo postulando da GE não é válido nesse modelo geométrico. A condição de existência das retas faz com que, além do segundo, o quinto postulando também não seja satisfeito. Podemos verificar que, dadas quaisquer duas retas na superfície esférica, elas se encontrarão em pontos diametralmente opostos (Figura 10).

Figura 10 – Retas s e r na superfície esférica



Fonte: As autoras (2023)

Um dos resultados notáveis da Geometria Esférica é a soma dos ângulos internos de um triângulo construído sobre a superfície. Ao contrário da Geometria Hiperbólica, a soma será sempre maior que 180° ¹³, o que permite a existência de triângulos trirretângulos.

Na literatura, é comum a expressão “Geometrias não Euclidianas” ser associada apenas à Geometria Hiperbólica e à Elíptica. Em consonância com Cavichiolo (2011) e outros investigadores, nesta pesquisa o termo GNE é utilizado de modo a contemplar também a Geometria Fractal, a Topologia e a Geometria Projetiva.

Geometria Fractal

Ao observarmos o mundo ao nosso redor, podemos rapidamente constatar que os padrões de raios, ondas e árvores, por exemplo, não podem ser descritos em termos euclidianos. Na busca de descrever uma geometria que representasse as reais formas da natureza, Benoit Mandelbrot (1924-2010), em 1975, cunhou o termo “fractal”¹⁴ e estabeleceu uma nova geometria.

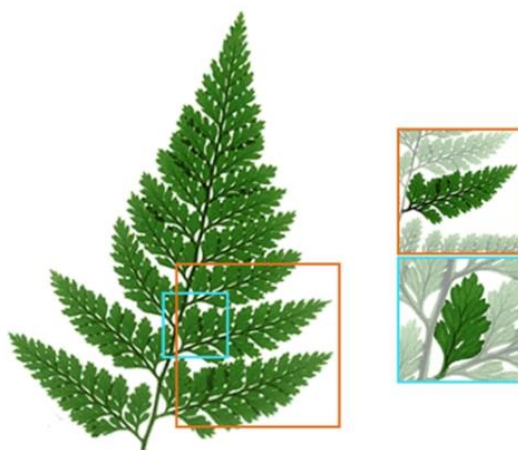
Tecnicamente, um fractal é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida em que a escala, sob a qual o mesmo é analisado, é alterada, mantendo-se a sua estrutura original. Isto não é o que ocorre, por exemplo, com uma circunferência, que parece reduzir a sua curvatura à medida em que ampliamos uma das suas partes (Assis *et al.*, 2008, p. 2304-1).

¹³ Modelo manipulável disponível em: <https://www.geogebra.org/m/quzydhb>.

¹⁴ Fractal significa quebrar, fazer em pedaços ou fraturar.

A Geometria Fractal é um ramo da matemática que lida com formas irregulares e complexas, caracterizadas por padrões repetitivos e autossimilares¹⁵ em diversas escalas (Assis *et al*, 2018). Padrões de objetos autossimilares podem ser encontrados com abundância na natureza, como o exemplo apresentado na Figura 11.

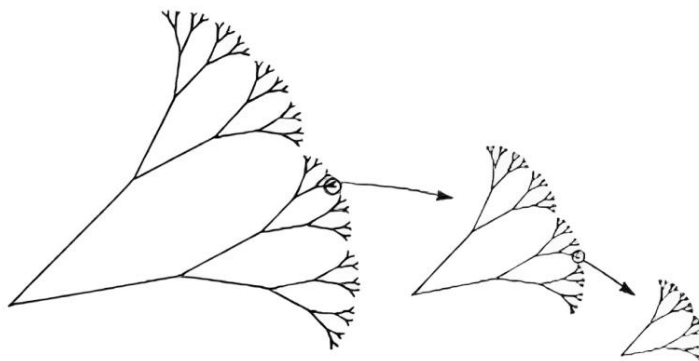
Figura 11 – Objeto com propriedades autossimilares



Fonte: Domingos (2013, p. 21)

Além da autossimilaridade, a complexidade infinita¹⁶ e a dimensão são propriedades que caracterizam os fractais (Domingos, 2013). Ao executar um procedimento específico, esse mesmo procedimento é identificado como um subprocedimento do processo, reproduzindo a operação executada anteriormente. Ou seja, o processo de geração de uma figura é recursivo e complexamente infinito (Figura 12).

Figura 12 – Complexidade infinita do fractal árvore bifurcada



Fonte: Assis *et al.* (2008) (adaptado)

¹⁵ A autossimilaridade ocorre quando uma parte, seja de uma figura ou de um contorno, se assemelha (mas não é necessariamente idêntico) ao todo em uma escala reduzida, funcionando como uma réplica em menor proporção.

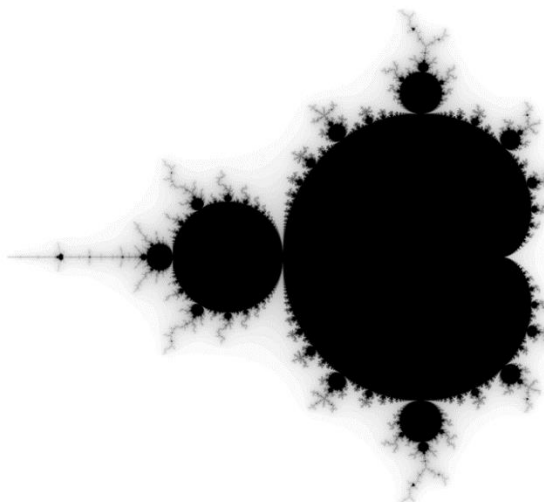
¹⁶ A complexidade infinita dos fractais refere-se ao fato de que eles possuem uma estrutura intrincada e detalhada em todas as escalas de observação. “no caso da construção iterativa de um fractal matematicamente definido, dispõe-se de um número infinito de procedimentos a serem executados, gerando-se assim uma estrutura infinitamente complexa” (Assis *et al.*, 2008, p. 2304-2).

A dimensão de um fractal, ao contrário da dimensão euclidiana, não é expressa, necessariamente, por um número inteiro. Quantidades fracionárias podem ser atribuídas à dimensão de um fractal e representam “o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém” (Assis *et al.*, 2008, p. 2304-1). Na GE, o ponto possui dimensão euclidiana zero, pois é definido como um objeto sem grandeza ou forma. A reta, por sua vez, é determinada por uma única coordenada ao longo de seu comprimento, o que a caracteriza como tendo dimensão euclidiana um. O espaço é concebido por três coordenadas ortogonais: comprimento, largura e altura, o que o caracteriza como tendo dimensão euclidiana três. No entanto, muitas formas do mundo não podem ser descritas por objetos geométricos “perfeitos” como círculos, esferas, primas e suas respectivas dimensões.

Então qual a dimensão de um rolo de barbante? Depende do ponto de vista, respondeu Mandelbrot. A uma grande distância, o rolo é apenas um ponto com dimensões zero. Mais de perto, o rolo parece encher um espaço esférico, ocupando três dimensões. De mais perto ainda, o barbante passa a ser percebido, e o objeto torna-se efetivamente monodimensional, embora a dimensão esteja emaranhada em volta de si mesma, de uma maneira que usa o espaço tridimensional. [...] Passando-se às perspectivas microscópicas, o barbante transforma-se em colunas tridimensionais, as colunas transformam-se em fibras monodimensionais, o material sólido dissolve-se em pontos de dimensão zero (Gleick, 1989, p. 92-93).

A dimensão fractal é uma forma de quantificar o grau de fragmentação, aspereza ou de irregularidade de um determinado objeto. O conjunto de Mandelbrot (Figura 13), por exemplo, tem dimensão fractal aproximada de 2,05. Isso significa que sua ocupação do espaço é mais densa do que a de uma reta ou uma superfície plana, porém não tão densa quanto um objeto tridimensional.

Figura 13 – Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Bourke (online) (2002)

O cálculo¹⁷ da dimensão fractal de objetos autossimilares é feito a partir do número de cópias (N) e do fator de redução (r). Para dimensão 1, tomamos um segmento de reta e o dividimos em duas partes iguais ($N = 2$). Cada novo segmento gerado tem fator de redução $r = \frac{1}{2}$ em relação ao segmento original. Para dimensão 2, tomamos um quadrado e o dividimos em quatro quadrados iguais ($N = 4 = 2^2$). Cada novo quadrado gerado tem fator de redução $r = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Para dimensão 3, tomamos um cubo e o dividimos em oito cubos iguais ($N = 8 = 2^3$). Cada novo cubo gerado tem fator de redução $r = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Note que a dimensão do objeto é expressa pelo expoente, que eleva o fator de redução ao seu valor. Portanto,

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação, temos que:

$$\log N = \log \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

$$\log N = D \cdot \log \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)}$$

Podemos concluir que a dimensão de objetos com autossimilaridade é descrita em função do número de cópias (N) e do fator de redução (r), o que permite a existência de dimensões fracionárias.

O progresso contínuo das tecnologias e da capacidade de processamento de dados tem viabilizado a elaboração e a representação de fractais que podem ser ampliados infinitamente. Esse fato permite que algumas características, como a complexidade infinita¹⁸, possam ser elaboradas e observadas, por meio de *smartphones* e computadores. Apesar do avanço tecnológico, a Geometria Fractal é consistente, bem estabelecida e não precisa de verificações advindas de processamento computacional para sua aceitação, sendo este uma ferramenta de visualização e interação.

¹⁷ A demonstração formal da dimensão fractal excede o contexto do trabalho. Optamos por expor a determinação da dimensão fractal em objetos com propriedades autossimilares. Para o leitor que desejar aprofundamentos, sugerimos o livro de Kenneth Falconer, *Fractal Geometry*, 1990 (Disponível nas referências).

¹⁸ Para interagir com um modelo infinitamente ampliável do conjunto de Mandelbrot, acesse: <https://math.hws.edu/eck/js/mandelbrot/MB.html>.

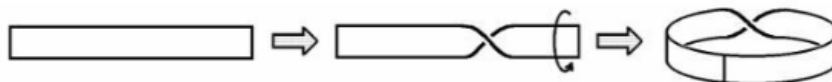
Apesar de recente, a Geometria Fractal é amplamente aplicada à modelagem de fenômenos naturais, à análise de mercado financeiro, aos estudos em ciências naturais e biomedicina e à exploração de estruturas complexas do universo.

Topologia

O desenvolvimento de outras geometrias acabou com o estatuto da geometria de “descrição exata do espaço físico” e abriu caminho para outros estudos sobre o espaço. Inicialmente, a topologia foi concebida como um ramo da geometria. Porém, como outros ramos da matemática, passou por processos de generalização e a ser considerada uma parte fundamental da matemática, tal qual a geometria, a análise e a álgebra (Eves, 2004).

Augustus Möbius (1790-1868) foi um matemático que contribuiu para o desenvolvimento dessa área, ao descobrir que há superfícies de um só lado. A faixa de Möbius (Figura 14) é um espaço topológico com essa propriedade. Sua construção pode ser feita a partir da aplicação de uma “retorção” de 180° em um retângulo.

Figura 14 – Construção da faixa de Möbius



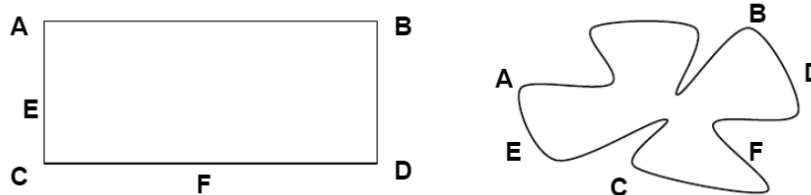
Fonte: Esquincalha (2008).

A topologia trabalha com noções de “vizinhança, fora, dentro, interior-exterior, aberto-fechado, longe-perto, separado-unido, contínuo-descontínuo, alto-baixo” (Borges, 2005, p. 16). Quando dizemos “estamos juntos”, estamos nos referindo a noções topológicas. Também chamada de “Geometria da Borracha”, estuda homeomorfismos¹⁹ e se preocupa com o aspecto qualitativo dos objetos, independente de áreas, ângulos e comprimentos.

Para exemplificar, vamos tomar um retângulo que contém os pontos A, B, C, D, E e F e aplicar algumas deformações. (Figura 15)

¹⁹ Transformações contínuas e reversíveis de propriedades geométricas. Um exemplo é um triângulo que, apesar de ter área, ângulos e comprimentos específicos, pode ser transformado em um círculo ou quadrado, como se a figura fosse feita de um material perfeitamente deformável. Mesmo com a transformação, a figura manteve propriedades de posição que não são afetadas por modificações de forma e tamanho. Essas transformações são reversíveis.

Figura 15 - Retângulo ABCD antes e depois da deformação



Fonte: Borges (2005) (adaptado)

A semelhança entre as duas figuras anteriores pode não ser evidente à primeira vista, já que uma figura é um retângulo e a outra é uma deformação da primeira. Entretanto, uma observação mais acurada revela que, apesar da distorção, certas propriedades essenciais, tais como a ordem dos pontos, foram preservadas (Borges, 2005). Esse caso exemplifica uma transformação topológica, na qual as características variam de forma contínua e mantêm certos aspectos invariantes, embora outras propriedades métricas possam ser modificadas ou perdidas.

São consideradas transformações topológicas aquelas descritas por:

- Esticar ou inflar um objeto ou alguma de suas partes.
- Encolher um objeto ou alguma de suas partes.
- Retorcer um objeto ou uma de suas partes.
- Cortar o objeto, segundo uma linha suave nele demarcado e, posteriormente, colar uma na outras duas bordas que foram geradas por esse corte, resgatando a superfície com a linha originalmente demarcada (considerando a mesma orientação).

Podemos concluir que a Topologia possui características fundamentais diferentes da GE, o que a classifica, no presente trabalho, como uma GNE.

Interessa-nos, para o fim de nossas reflexões neste trabalho, apenas explicitar que há dinâmicas e relações mais amplas que a GE e outras formas de pensar sobre matemática e geometria.

Geometria Projetiva

A Geometria Projetiva tem suas raízes históricas no século XV, com o desenvolvimento da perspectiva em obras renascentistas. O matemático Pappus (400 a. E. C.) descobriu algumas proposições não métricas, como o conhecido Teorema de Pappus. Mas foi durante o Renascimento, com a necessidade de realismo e profundidade às artes, que a Geometria Projetiva passou a constituir-se um campo de conhecimento. Os conceitos de ponto de fuga e

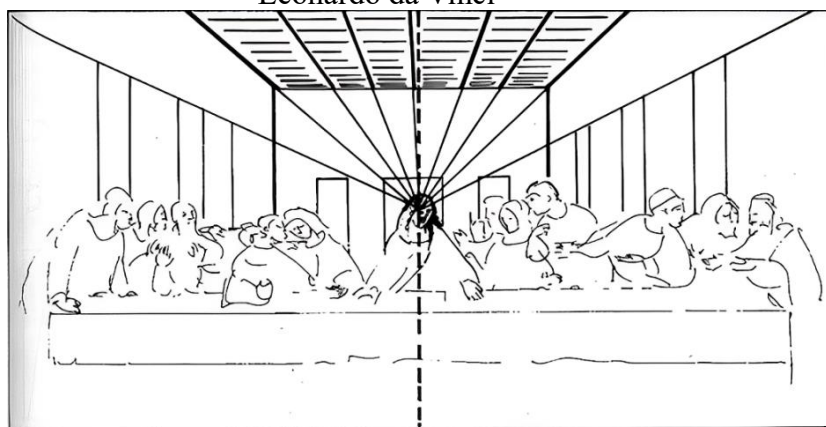
perspectiva foram introduzidos na busca de mais realismo para as obras. As ideias emergentes no início do Renascimento contribuíram na elaboração de princípios da Geometria Projetiva. Na idade média, a preocupação das obras era, geralmente, representar sermões da igreja e narrativas bíblicas, sem a necessidade de, por exemplo, existir uma proporção real entre os personagens e elementos das obras. Apesar do surgimento histórico estar relacionado à Arte desde o século XV, a formulação e a formalização matemática desses conceitos aconteceram apenas no início do século XIX.

Enquanto a GE se preocupa com o espaço que estamos inseridos, a Geometria Projetiva se preocupa com o mundo que vemos (Auffinger, Valentim, 2003). As dimensões reais e as descrições métricas dos objetos não são os elementos em foco dessa geometria. O importante são as propriedades visuais dos objetos.

O espaço através da perspectiva deixa de ser o espaço que é uma interpretação da obra de Deus para ser um espaço criado pelo homem, estabelece-se uma relação biunívoca entre os espaços de Euclides e o mundo habitado (Moraes, 2013, p.543).

A técnica de perspectiva é, essencialmente, um método de representação do tridimensional para o bidimensional, com o observador no centro da projeção, em um espaço geometrizado e orientado pela razão. Com ela, é possível identificar uma “matematização” do espaço (Figura 16).

Figura 16 – Elementos da técnica de perspectiva presentes na obra *A Última Ceia*, de Leonardo da Vinci



Fonte: Moraes, 2013.

A noção de ponto de fuga, que é um conceito central da perspectiva, carrega elementos que distinguem-se da noção euclidiana de reta: é o ponto no qual linhas paralelas parecem convergir quando recuam no espaço até o horizonte.

A diferença entre a GE e a Geometria Projetiva pode ser facilmente observada em linhas férreas. Sabemos que a distância entre as linhas laterais dos trilhos é constante (o que as coloca sob a definição euclidiana de “paralelas”). Porém, ao observarmos o trajeto à frente, podemos rapidamente concluir que as laterais dos trilhos se interceptam no horizonte. “Essa é uma das características marcantes da geometria projetiva, duas retas quaisquer sempre se interceptam” (Auffinger; Valentim, 2003, p.2).

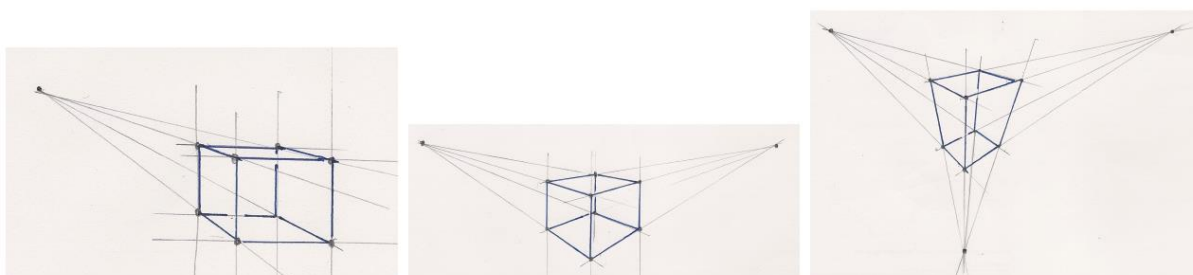
Figura 17 – Trilhos de trem se encontrando no horizonte



Fonte: *Google Fotos* (2024) (online)

Note que nossos olhos enxergam o mundo de modo não euclidiano. Uma das características mais distintivas dessa geometria é a sua invariância sob transformações projetivas. Isso significa que as propriedades geométricas dos objetos são as mesmas após a efetuação de projeções. Por exemplo, em um desenho de uma sala, os pontos de fuga nas linhas paralelas são equivalentes, mesmo se construídas sob diferentes projeções. Portanto, a Geometria Projetiva permite-nos estudar propriedades que não são alteradas com essas transformações. A partir de um mesmo objeto é possível obter diferentes projeções ao considerarmos pontos de fuga distintos (Figura 18).

Figura 18 – Perspectiva de um cubo com um, dois e três pontos



Fonte: Gothen (2016)

Atualmente, a Geometria Projetiva é um ramo da matemática mais complexo e amplo do que a sua gênese e integra áreas diversas, como o processamento computacional de imagens.

Assim como outros campos matemáticos, essa geometria não ficou restrita apenas aos seus problemas e questões geradoras.

Nesse trabalho, não entraremos nas definições formais e na axiomática da Geometria Projetiva. Nosso interesse primordial é a elucidação de alguns conceitos fundamentais que a difere da GE.

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, abordaremos as escolhas metodológicas que nortearam o desenvolvimento desta pesquisa.

Para esta investigação, elaboramos a seguinte questão: *Que implicações do ensino das GNE podem ser consideradas para a formação de PMat?* Tendo em vista o objetivo citado, buscamos responder às seguintes indagações: *Que perspectivas referentes às GNE podem ser consideradas na formação de PMat? Quais os principais pontos indicados pela literatura acerca do trabalho com outras geometrias? O que professoras formadoras experientes no ensino de geometria revelam sobre as GNE na formação de PMat e na EB?*

Para respondê-la, objetivamos *discutir implicações do ensino das GNE para a formação de PMat*, sob dois pontos de vista: da área de pesquisa em Educação Matemática e de professoras formadoras experientes no ensino de geometria. A partir desse objetivo geral, delineamos os objetivos específicos a seguir:

Objetivo 1: descrever, interpretar e integrar pesquisas publicadas em periódicos brasileiros, no período de 2011 a 2022, que têm como objeto de análise o trabalho com GNE na formação de PMat.

Objetivo 2: discutir reflexões manifestadas por professoras formadoras experientes no ensino de geometria a respeito das GNE na formação, inicial e continuada, de PMat.

Objetivo 3: discutir reflexões manifestadas por uma professora experiente no ensino de geometria a respeito das GNE na EB.

Cada um dos objetivos específicos sustentará um artigo-capítulo desse trabalho e fornecerá elementos que responderão ao objetivo geral.

O primeiro artigo buscou identificar aspectos, tendências gerais, lacunas e necessidades da área de pesquisa em Educação Matemática sobre as GNE associadas à formação, inicial e continuada, de PMat. Para tal, dividimos a pesquisa desenvolvida neste artigo em duas etapas: levantamento e análise.

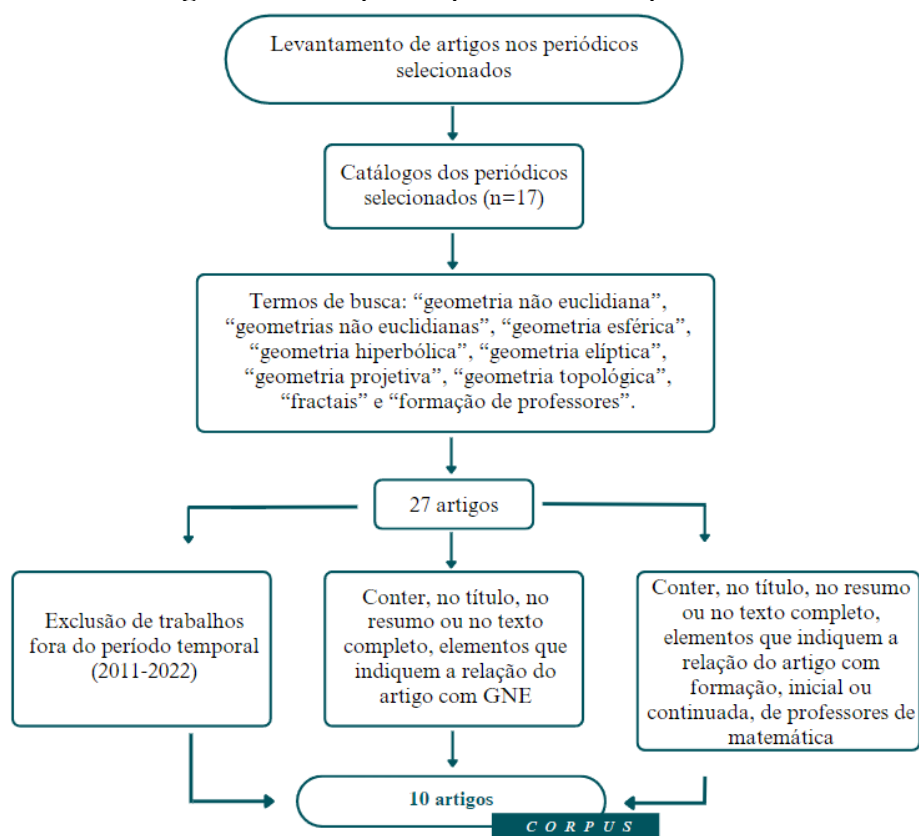
A etapa de levantamento consistiu na definição do *corpus* de análise. Primeiramente, identificamos quais periódicos indicados na *homepage*²⁰ da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) foram avaliados pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) com *qualis* de A1 a A4, no quadriênio 2017 – 2020. Conferimos as

²⁰<http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>. Data da consulta: 06 jan.2023.

avaliações na Plataforma Sucupira²¹. A escolha por estas revistas foi motivada pelo fato de representarem um conjunto de revistas altamente especializadas com visibilidade e impacto nas tendências das pesquisas da área. Em seguida, definimos os seguintes descritores: geometrias, geometria não euclidiana, geometrias não euclidianas, geometria esférica, geometria hiperbólica, geometria elíptica, geometria projetiva, geometria topológica e fractais. Também relacionamos cada descritor com “formação de professores”. A escolha desses descritores foi necessária já nem todos os estudos direcionam sua abordagem explicitamente para “geometrias não euclidianas”, focalizando, por vezes, sistemas geométricos específicos. A partir da lista de revistas selecionadas e dos descritores, realizamos as buscas nos *sites* dos periódicos, considerando o período temporal de 2011 a 2022. A busca foi realizada entre 15 e 22 de janeiro de 2023 e, com ela, obtivemos um total de 27 artigos.

Na sequência, lemos o título, o resumo e as palavras-chave de cada artigo, na busca de identificar quais deles abordavam a temática. Nos casos em que essas informações iniciais não foram suficientes, lemos o texto completo. Os critérios para incluir os artigos no *corpus* da pesquisa foram: 1) pertencer ao período temporal determinado; 2) conter, no título, no resumo ou no texto completo, elementos que indiquem a relação do artigo com GNE; 3) conter, no título, no resumo ou no texto completo, elementos que indiquem a relação do artigo com formação, inicial ou continuada, de PMat. Desse modo, o *corpus* de pesquisa foi composto por dez artigos. A Figura 19 expõe o processo de levantamento.

²¹ <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/index.xhtml>

Figura 19 – Etapas do processo de mapeamento

Fonte: As autoras

Para analisar as informações obtidas, realizamos o fichamento de cada artigo selecionado, visando a organização e a síntese de cada um. A ficha foi elaborada pelo Gepefopem com base em Fiorentini *et al.* (2016) e contém os tópicos: objetivos, procedimentos metodológicos, análise, principais referenciais teóricos e principais resultados. Em seguida, elaboramos sínteses de cada trabalho, tendo em conta o fichamento previamente realizado, identificamos alguns pontos de enfoque e estruturamos a análise a partir deles.

O segundo artigo²², qualitativo, buscou discutir reflexões manifestadas por professoras formadoras experientes no ensino de geometria a respeito do trabalho com GNE na formação, inicial e continuada, de PMat.

Escolhemos três professoras formadoras que: trabalham ou trabalharam com a formação de PMat no estado do Paraná; desenvolvem ou desenvolveram publicações acadêmicas e/ou projetos relacionados ao ensino de geometria; orientam ou orientaram iniciações científicas/dissertações/teses relacionadas à geometria; e tenham interesse em GNE. Apesar da baixa representatividade numérica, o número de participantes foi adequado, tendo em conta o

²² Pesquisa Aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Londrina (parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231).

delineamento da pesquisa, pois não pretendemos formular generalizações relacionadas à temática.

As professoras participantes são consideradas experientes²³ por apresentarem traços e características da experiência, como a capacidade de formação e transformação. Consideramos a perspectiva de experiência de Jorge Larrosa (2002, p. 24):

a experiência, a possibilidade de que algo nos aconteça ou nos toque, requer um gesto de interrupção, um gesto que é quase impossível nos tempos que correm: requer parar para pensar, parar para olhar, parar para escutar, pensar mais devagar, olhar mais devagar, e escutar mais devagar; parar para sentir, sentir mais devagar, demorar-se nos detalhes, suspender a opinião, suspender o juízo, suspender a vontade, suspender o automatismo da ação, cultivar a atenção e a delicadeza, abrir os olhos e os ouvidos, falar sobre o que nos acontece, aprender a lentidão, escutar aos outros, cultivar a arte do encontro, calar muito, ter paciência e dar-se tempo e espaço.

A experiência, portanto, é aquilo que “nos passa, que nos acontece, o que nos toca.” (Larrosa, 2002, p. 21). As três professoras participantes, Loreni, Marie-Claire e Mariana²⁴, apresentam tais características. Procuramos identificar que aspectos essas professoras experientes consideram relevantes em programas de formação de professores acerca do trabalho com GNE²⁵. Para tal, propomos às participantes a elaboração de uma narrativa de natureza reflexiva sobre a temática, a partir de um enunciado norteador.

O terceiro artigo²⁶, qualitativo, buscou discutir reflexões manifestadas por uma professora formadora experiente no ensino de geometria a respeito do trabalho com GNE na EB. A professora participante foi Loreni, tendo em vista seu percurso como professora da EB e as reflexões específicas de sua narrativa. A elaboração da narrativa foi feita a partir do mesmo enunciado norteador citado anteriormente.

As unidades de análises estabelecidas no segundo e no terceiro artigo-capítulo que compõem esta dissertação assumiram aspectos de uma abordagem interpretativa. O processo de análise do segundo e do terceiro artigo foi semelhante e dividido em três principais momentos. O primeiro foi de familiarização com os elementos abordados nas narrativas. Foram

²³ Não é o foco desta pesquisa discutir o conceito de experiência estendido às participantes. Informações sobre as categorias, aspectos relevantes e demais discussões sobre tal questão estão disponíveis em Oliveira (2022).

²⁴ Os nomes escritos no artigo são os nomes reais das participantes.

²⁵ Os detalhes das participantes e dos encaminhamentos metodológicos estão presentes no segundo artigo da pesquisa.

²⁶ ²⁶ Pesquisa Aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Londrina (parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231).

feitas leituras iniciais e flutuantes de modo a compreender todos os elementos abordados. Fizemos marcações e anotações preliminares, buscando estabelecer algumas relações entre as considerações de cada narrativa, o que nos permitiu vislumbrar superficialmente possíveis pontos de enfoque. Em seguida, no segundo momento, com as anotações e os esboços em mãos, selecionamos trechos considerados representativos que sucederiam à análise e partimos na busca de delimitar os pontos de enfoque. Os esboços foram modificados diversas vezes, com várias idas e vindas, leituras e releituras. No terceiro momento, levando em conta os objetivos de nossa pesquisa, organizamos a descrição e a análise interpretativa das informações, em torno dos pontos de enfoque.

No segundo artigo-capítulo, surgiram dúvidas relacionadas a termos utilizados pelas professoras em alguns trechos das narrativas. Para saná-las, contactamos as participantes via um aplicativo de mensagens instantâneas para esclarecer algumas informações. O conteúdo das mensagens de texto passou a integrar o corpus da pesquisa do segundo artigo-capítulo.

No segundo artigo, foram constituídos três pontos de enfoque, nomeadamente: justificativas para o trabalho com GNE na formação de PMat; desafios inerentes à inclusão de GNE na formação de PMat; e sugestões de metodologias, abordagens e recursos didáticos para o trabalho com a GNE na formação de PMat.

No terceiro artigo, chegou-se à delimitação de pontos de enfoque associados ao papel das GNE na EB e aos desafios a serem enfrentados no trabalho com essa temática na EB.

Na sequência, apresentamos a estrutura/organização do trabalho.

ESTRUTURA/ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

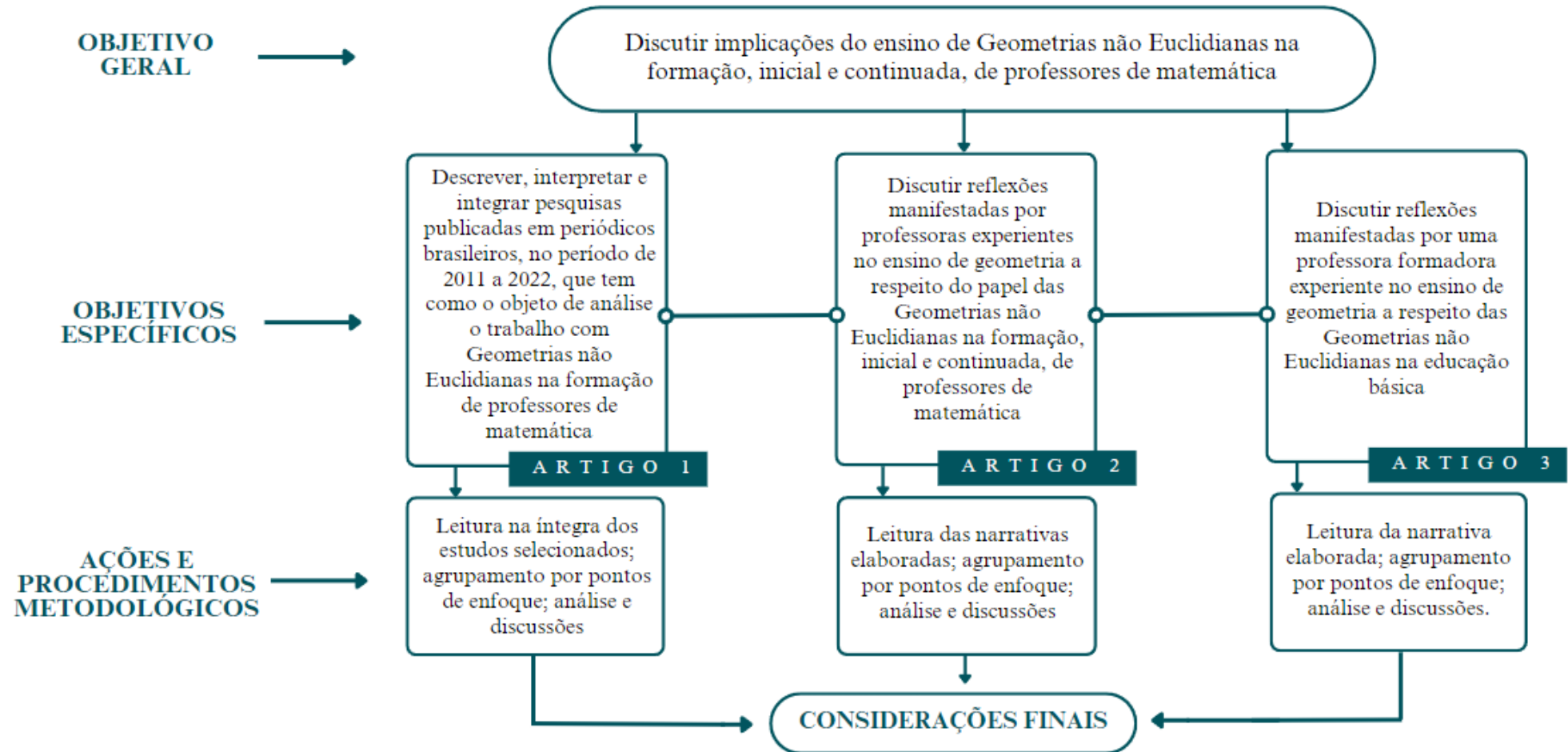
Esse trabalho foi organizado sob a estrutura do formato *multipaper*, que se caracteriza pela composição de um conjunto de artigos conectados por uma temática comum (Duke; Beck, 1999). É alternativo ao “modo predominante de apresentar os trabalhos finais de cursos de pós-graduação *stricto sensu*” (Barbosa, 2015, p. 349). Nesse formato, uma questão geral (ou objetivo geral) é subdivida em objetivos específicos, os quais são abordados individualmente em cada um dos artigos que compõem a pesquisa. Além de contemplar os objetivos específicos, os artigos têm como propósito fornecer os elementos necessários para responder ao objetivo geral da investigação.

Uma característica primordial de um trabalho redigido no formato *multipaper* reside na singularidade de cada artigo. Além de apresentar seu próprio objetivo, a introdução, a fundamentação teórica, a metodologia de pesquisa, os resultados, as discussões e as conclusões de cada artigo também são individuais. Esse fato permite que os artigos possam ser submetidos à publicação em periódicos acadêmicos de modo independente (Duke; Beck, 1999), mesmo que, em suas considerações finais, constem lastros que respondem à questão geral da pesquisa. Além disso, elaborar uma investigação redigida nesse formato colabora no desenvolvimento de competências essenciais ao pesquisador como: seleção de periódicos, exercício da capacidade de síntese (dados os limites de páginas dos artigos) e articulação entre os aspectos particulares de cada artigo e suas relações com a dissertação (Barbosa, 2015; Duke; Beck, 1999).

Além dos artigos (artigos-capítulos), o formato *multipaper* pode conter um capítulo introdutório (aqui nomeado de Introdução Expandida), que circunstancia a dissertação e um capítulo final, que sintetiza os resultados relatados nos artigos (Barbosa, 2015).

A Figura 20 expõe uma visão geral da dissertação por meio de um organograma.

Figura 19 – Organização da dissertação no formato *multipaper*



Fonte: A autora (2023)

Na sequência, apresentaremos os resultados por meio dos artigos-capítulos.

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 5 ed. Tradução da 1ª edição brasileira coordenada e revisada por Alfredo Bossi, 2007.
- AUFFINGER, A. C. T. C.; VALENTIM, F. J. S. **Introdução à geometria projetiva**. UFES, Vitória, 2003.
- AGUSTINI, E. **Introdução À Geometria Hiperbólica Plana**. Uberlândia: FAMAT UFU, 2022.
- ALBUQUERQUE, L. C.; GONTIJO, C. H. A complexidade da formação do professor de matemática e suas implicações para a prática docente. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, 2013.
- ALTOÉ, R. O; ZANON, J. M.; PEREIRA, B. M.; GUSSANI, S. B.; CECOTTI, V. T. Contribuições de uma oficina sobre Geometria do Táxi na formação de professores que ensinam matemática: entre descobertas, aprendizagens e prática docente. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel (PR), v. 6, n. 2 p. 193-216, ago. 2022.
- ARTHURY, L. H. M. **A Cosmologia Moderna à Luz dos Elementos da Epistemologia de Lakatos**. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Ciências Física e Matemática (USC), Florianópolis, SC, 2007.
- ASSIS, T. A. *et al.* Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de ensino de física**, v. 30, p. 2304.1-2304.10, 2008.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007.
- BARROS, R. C. P.; PAVANELLO, R. M. Relações Entre Figuras Geométricas Planas e Espaciais no Ensino Fundamental: o que Diz a BNCC? **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v.15, n.1, p. 11–19, 2022.
- BLUMENTHAL, L. M. **A modern view of geometry**. Courier Corporation, 1980.
- BORGES, C. C. A topologia: considerações teóricas e implicações para o ensino da matemática. **Caderno de Física da UEFS**, v. 3, n. 02, p. 15-35, 2005.
- BOURKE, P. **The Mandelbrot at a Glance**, 2002. Disponível em <<https://paulbourke.net/fractals/mandelbrot/>>. Acesso em: 30 ago. 2023.
- BRITO, A. J. **Geometrias não Euclidianas: um estudo histórico-pedagógico**. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1995.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E. Uma abordagem de conceitos elementares de geometria não euclidiana: uma experiência vivenciada no ensino de matemática a partir de uma sequência didática. **Holos**, v. 1, p. 258-281, 2014.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E.; SILVA, S. C. R. As geometrias esférica e hiperbólica em foco: sobre a apresentação de alguns de seus conceitos elementares a estudantes do Ensino Médio. **Bolema**, v. 29, p. 419-427, 2015.

CABARITI, E. **Geometria Hiperbólica**: uma proposta didática em ambiente informatizado. 2004. 131 f. Dissertação (Mestrado) –Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

CARMO, M. P. Geometrias Não-Euclidianas. **Revista Matemática Universitária**, n.6, p. 25-48, dez. 1987.

CARVALHO, O.; AZEVEDO, J. Geometria não-Euclidiana: aplicações na Educação Básica. *In: Inovações educacionais em matemática no Recôncavo*, p. 109, 2020.

CAVICHIOLO, C. V. **Geometrias não Euclidianas na formação inicial de professores**: o que dizem os formadores. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2011.

CHIZZOTTI, A. A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. **Revista portuguesa de educação**, v. 16, n. 2, p. 221-236, 2003.

COURA, F. C. F.; PASSOS, C. L. B. Conhecimento do formador de professores de matemática que é investigador da docência. **Zetekité**, Campinas (SP), v. 29, p. 1-18, 2021.

CYBULSKI, F. C. **Geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática**: indicativos de dissertações e teses brasileiras. 152f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, 2022.

CYRINO, M. C. C. T. Identidade profissional de (futuros) professores que ensinam Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 10, n. 24, 2017.

DAVID, M. M. M. S.; MOREIRA, P. C.; TOMAZ, V. S. Matemática escolar, matemática acadêmica e matemática do cotidiano uma teia de relações sob investigação. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 15, n. 1, p. 42-60, jan./abr. 2013.

DAVIS, C. L. F. Formação continuada de professores: uma análise das modalidades e das práticas em estados e municípios brasileiros. **Textos FCC**, v. 34, p. 104-104, 2012.

DOMINGOS, A. M. F. **Fractais**: da geometria à videoarte. Tese (Doutorado) - Universidade Aberta de Lisboa, 148 f., 2013.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Research news and comment: Education should consider alternative formats for the dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

ESQUINCALHA, A. C. **Tópicos em Topologia Intuitiva**. Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), 2008.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**, Tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

FALCONER, Kenneth. **Fractal geometry: mathematical foundations and applications**. John Wiley & Sons, 2004. Disponível em: < <https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=JXnGzv7X6wcC&oi=fnd&pg=PR5&dq=K.+Falconer,+Fractal+Geometry,+John+Wiley+%26+Sons+Ltd.,+1990.+&ots=FeTLlutC0F&sig=7Fq5YLkviiqCD9E1eza6nRQtQuE#v=onepage&q&f=false> >. Acesso em 28 dez. 2023.

FERREIRA, J. R. S.; LIMA, P. R. S.; SOUZA, E. D. Desinformação, infodemia e caos social: impactos negativos das *fake news* no cenário da COVID-19. **Em Questão**, Porto Alegre, v. 27, n. 1, p. 30-58, jan/mar. 2021.

FERREIRA, L.; DOS SANTOS, T. S. Uma análise da influência kantiana na aceitação das geometrias não-euclidianas. **Educação Matemática em Revista**, v. 28, n. 80, p. 1-15, 2023.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da Licenciatura em Matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, Campinas, n. 18, p.107-115, jun. 2005.

FIORENTINI, D. *et al.* O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. In: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. d. (org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática: período 2001 – 2012**. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**, v. 27, p. 917-938, 2013.

FRANCELIN, M. M. Ciência, senso comum e revoluções científicas: ressonâncias e paradoxos. **Ciência da Informação**, v. 33, p. 26-34, 2004.

GATTI, B. A. **Por uma política nacional de formação de professores**. SciELO-Editora UNESP, 2016.

GATTI, B. A. Análise das políticas públicas para formação continuada no Brasil, na última década. **Revista Brasileira de Educação**, v. 13, p. 57-70, 2008.

GATTI, B. A.; BARRETO, E. S. S.; ANDRÉ, M. E. D. A.; ALMEIDA, P. C. A. de A. **Professores do Brasil: novos cenários de formação**. Brasília: UNESCO, 2019.

GLEICK, J. **Caos: a criação de uma nova ciência**. Tradução de Waltencir Dutra, Rio de Janeiro: Elsevier, 1989.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History**. 3. ed. California: Santa Cruz, 1994.

GOTHEN, P. **Geometria Projetiva** [Notas de aula], 2016.

HIDALGO, J.; ALVES, J.; SOUZA, F.; QUEIROZ, D. A história da ciência (distorcida ou ausente) em livros didáticos: o conteúdo sobre o “Experimento de Torricelli” como estudo de caso. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 11, n. 1, p. 101-124, 2018.

KALEFF, A. M. R. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), n. 28, p-69-94, 2007.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. Atividades introdutórias às geometrias não-euclidianas: o exemplo da geometria do táxi. **Boletim Gepem**, n. 44, 2004.

KALEFF, A. M. M. R. Geometrias não-euclidianas na educação básica: Utopia ou possibilidade. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, Salvador, **Anais [...]**, 2010.

LARROSA, J. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. **Revista Brasileira de Educação**, n. 19, p. 20-28, jan./abr. 2002.

LEITE, E. A. P. *et al.* Alguns desafios e demandas da formação inicial de professores na contemporaneidade. **Educação & Sociedade**, v. 39, p. 721-737, 2018.

LEIVAS, J. C. P. Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.3, p. 647-670, 2013.

LEIVAS, J. C. P.; SOUZA, H. M.; PORTELLA, H. P. Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na Escola Básica no Brasil com Geogebra. **Revista Thema**, v. 14, n. 3, p. 210-221, 2017.

LIMA, A. M. F. D. *et al.* Identidade docente: Da subjetividade à complexidade. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 6, p. 33078-33092, 2020.

SANTOS, J. R. V.; LINS, R. C. Movimentos de teorizações em Educação Matemática. **Bolema**, v. 30, p. 325-367, 2016.

LOPES, L. R. P. MANRIQUE, A. L. MACÊDO, J. A. Revelações sobre a presença da Geometria na formação inicial de professores de matemática no Brasil (2001-2019). **Revista Paradigma**, v. 43, n. 1, p. 117-137, 2022.

MAGNONI-VIEIRA, A. F.; CYBULSKI, F. C.; CYRINO, M. C. C. T. Ensino de geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática: um panorama de artigos

brasileiros e internacionais. *In*: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, São Paulo, **Anais[...]**, 2023.

MELO, H. S. A aprendizagem de conceitos matemáticos fundamentados na sua etimologia e morfologia. *In*: GARRÃO, A. P.; DIAS, M. R; TEIXEIRA, R. C (orgs.). **Investigar em Educação Matemática**: Diálogos e conjunções numa perspectiva interdisciplinar. Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2015, p. 293-304.

MORAES, J. C. P. Relações entre geometria projetiva e a arte no renascimento: o caso da perspectiva. **Revista Técnico-Científica do IFSC**, p. 540-540, 2013.

MOURA, B. A. O que é natureza da ciência e qual sua relação com a história e filosofia da ciência? **Revista Brasileira de História da ciência**, v. 7, n. 1, p. 32-46, 2014.

NOBRE, Sergio. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência & Educação**, v. 10, n. 03, p. 531-543, 2004.

NÓVOA, A. **O regresso dos professores**, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/687/1/21238_rp_antonio_novoa.pdf>. Acesso em: 20 out. 2023.

NUNES, C. B.; ONUCHIC, L. R. O uso das transformações geométricas através da resolução de problemas na formação de futuros professores de matemática. **Interfaces da Educação**, v. 10, n.30, p. 30-56, 2019.

OLIVEIRA, J. C. R. **Um estudo sobre o movimento de constituição da identidade profissional de professores de matemática experientes**. 139p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2022.

PADILHA, L.; MORAN, M. Geometria dos fractais: uma proposta para o cálculo da dimensão da Árvore Pitagórica. **Ens. Tecnol. R.**, Londrina, v. 7, n. 1, p. 256-267, jan./abr. 2023.

PAVANELLO, R. **O abandono do ensino de Geometria**: uma visão histórica. (Dissertação em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

SILVA, M. C. L. Abandono do Ensino de Geometria e a Matemática Moderna: uma revisão histórica. **Zetetike**, v. 30, p. e022030-e022030, 2022.

SOUZA, F. N. L; SOUSA, G. C.; LOPES, G. L. O. Al-Biruni e as relações entre os lados e ângulos de triângulos aplicadas à esfera e ao plano: Uma proposta de atividade didática direcionada a formação de professores de matemática. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 10, n. 1/2, p. 41-60, 2021.

VASCONCELOS, L. O. *et al*. Rede de aprendizagem e desenvolvimento da docência: Expressões do pensamento geométrico de professoras que ensinam Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema**, v. 35, n.70, p. 708-726, 2021.

VILELA, D. S. **Matemática nos usos e jogos de linguagem**: ampliando a concepção da educação matemática. 260p. Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de educação, Universidade Estadual de Campinas, 2007.

ARTIGO-CAPÍTULO 1

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: O QUE DIZEM PESQUISAS BRASILEIRAS?

Resumo: Este artigo tem por objetivo descrever, interpretar e integrar pesquisas publicadas em periódicos brasileiros, no período de 2011 a 2022, que tiveram como objeto de análise o trabalho com Geometrias não Euclidianas (GNE), associado à formação de professores de matemática (PMat). Para a constituição do *corpus* de análise, foram realizadas seleções de critérios e busca a respeito dessa temática em periódicos citados na *homepage* da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, totalizando dez artigos. No processo de análise, a partir da leitura na íntegra dos trabalhos e de seus respectivos fichamentos, foram evidenciados três pontos de enfoque: GNE e propostas curriculares; concepções e conhecimentos de PMat e futuros PMat a respeito de GNE; e propostas e recursos para o ensino e a aprendizagem de GNE. Os trabalhos indicam que, apesar dessa temática integrar as diretrizes curriculares da educação básica em alguns estados brasileiros, há cursos de formação de professores que não trabalham com conhecimentos geométricos não euclidianos de modo que possam fazer parte da prática de sala de aula. Embora haja indicações na literatura de metodologias, recursos e propostas pedagógicas para o trabalho com GNE, a discreta presença destas temáticas nas formações iniciais e continuadas de PMat não possibilita que professores e futuros professores mobilizem conhecimentos que darão suporte à inclusão de conteúdos geométricos não euclidianos na educação básica.

Palavras-chave: Formação de professores de matemática; geometrias não euclidianas, análise de pesquisas.

INTRODUÇÃO

Tradicionalmente, o ensino de geometria é pautado pela abordagem euclidiana, que se baseia nos postulados de Euclides e nas propriedades de figuras planas e sólidas em espaços euclidianos, de forma dedutiva e axiomática. Porém, ao observarmos alguns fenômenos como a curvatura da Terra, os sistemas de posicionamento global, os métodos de segurança de dados e a natureza intrínseca do espaço-tempo, por exemplo, podemos constatar que a Geometria Euclidiana (GE) não fornece os elementos necessários para que possamos descrever o mundo em que vivemos e compreender os avanços teóricos e aplicados da Matemática.

A importância do ensino de GNE na educação básica – e por conseguinte na formação de professores – se dá por diversos fatores, destacados por professores e pesquisadores (Cavichiolo, 2011; Marquese, 2006). Dentre esses fatores, citamos: a relevância de discussões acerca da correspondência entre a geometria e as leis que governam o mundo empírico; o conhecimento de outras formas de analisar a realidade; e a possibilidade de o aluno ter uma

visão mais holística sobre o espaço (Brito, 1995; Kaleff, 2010; Reis, 2006). Desse modo, o contato com modelos geométricos diferentes do euclidiano se torna relevante.

Estudos que investigaram os conhecimentos geométricos mobilizados por PMat e futuros PMat revelam que a geometria segue sendo deixada em segundo plano (Brum; Schuhmacher, 2014). O chamado de “abandono do ensino da Geometria no Brasil” foi denunciado por Pavanello (1989), no final da década de 1980, e pesquisas recentes indicam que seu ensino segue tendo caráter precário e ineficiente, evidenciado pelas dificuldades manifestadas por estudantes e professores (Barros; Pavanello, 2022). Nesse contexto de abandono, as GNE não são diretamente citadas pois não costumavam ser citadas como parte integrante dos conhecimentos geométricos escolares.

Nos últimos anos, aliado a essa precariedade, foi inserido no debate do ensino de geometria na educação básica a inclusão de conteúdos de GNE. Essa inclusão tem sido debatida em associações de profissionais da matemática e em instituições de ensino (Bongiovani; Jahn, 2010; Cédrez, 2009). Alguns documentos educacionais destinados à escolarização básica passaram a indicar as GNE em seus componentes, desde noções básicas até o desenvolvimento de conceitos formalizados destas. Este fato levanta questionamentos sobre a formação necessária dos PMat.

Diante das dificuldades observadas no tratamento de conteúdos geométricos euclidianos e não euclidianos e da sua conexão com práticas formativas de licenciandos e docentes, consideramos pertinente verificar como pesquisas na área de Educação Matemática têm abordado o ensino de GNE na formação inicial e continuada de PMat, de modo a colaborar no debate sobre as possibilidades formativas da introdução de conhecimentos geométricos não euclidianos em contextos formativos.

No presente artigo, descrevemos, interpretamos e integramos pesquisas publicadas em periódicos brasileiros, no período de 2011 a 2022, que tiveram como o objeto de análise o trabalho com GNE associados à formação de PMat.

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa, qualitativa e de caráter documental (Fiorentini; Lorenzato, 2012), foi dividida em duas etapas: levantamento e análise.

Na busca de definir o *corpus* de análise, realizamos um levantamento de artigos publicados em periódicos brasileiros que constavam na *homepage*²⁷ da Sociedade Brasileira de

²⁷ sbem.org.br. Data da consulta: 06 jan.2023.

Educação Matemática - SBEM e foram avaliados pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, com *qualis* de A1 a A4²⁸, no quadriênio 2017 – 2020. Utilizamos como descritores de busca as sentenças²⁹ geometrias, geometria não euclidiana, geometrias não euclidianas, geometria esférica, geometria hiperbólica, geometria elíptica, geometria projetiva, geometria topológica, fractais, e também as relacionamos à sentença formação de professores, considerando o período temporal de 2011 a 2022. Com essa busca, obtivemos 27 artigos³⁰.

Na sequência, lemos o título, o resumo e as palavras-chave de cada artigo, com a intenção de identificar quais artigos abordavam GNE associados a contextos de formação de PM, seja como foco de investigação seja como parte do estudo. Nos casos em que as informações não foram suficientes, lemos o texto completo. Desse modo, nosso *corpus* passou a ser composto por dez artigos.

Para a análise do *corpus*, lemos na íntegra cada artigo e preenchemos uma ficha que foi elaborada pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática (Gepefopem), baseada em Fiorentini *et al.* (2016) (Figura 1), que contém os tópicos: objetivos, procedimentos metodológicos, análise, principais referenciais teóricos e principais resultados.

Figura 1 – Ficha baseada em Fiorentini *et al.* (2016)

FICHA X								
REFERÊNCIA								
Palavras-chave:								
Problema/Objetivos /Questão	Procedimentos metodológicos			Análise		Referenciais teóricos		Resultados
	Tipo de pesquisa/ coleta/produção de dados	Contexto e sujeitos	Organização do material de análise ou corpus de análise	Procedimentos e categorias ou eixos de análise	Focos de análise	Fundamentação	Análise	

Fonte: As autoras (2023)

²⁸ A escolha se deu por os artigos publicados em revistas de *qualis* de A1 a A4 terem visibilidade e impacto nas tendências das pesquisas em Educação Matemática.

²⁹ Utilizamos as referidas sentenças, porque nem todos os estudos abordam diretamente as “Geometrias não Euclidianas”, por vezes se referindo especificamente a determinados sistemas geométricos, como “Geometria Esférica” e “Geometria Hiperbólica”. As aspas não foram utilizadas no momento da busca.

³⁰ Busca realizada em janeiro de 2023.

Nessa ficha, organizamos e sistematizamos as informações-chave de cada artigo, o que nos permitiu inter-relacioná-los e compreender, de forma abrangente, enfoques assumidos por esses estudos tendo em conta seus objetivos, resultados, discussões e conclusões.

Nesse processo, identificamos os seguintes pontos de enfoque dos artigos que constituíram o *corpus*: GNE e propostas curriculares; concepções e conhecimentos de professores e futuros professores a respeito de GNE; e propostas e recursos para o ensino e a aprendizagem de GNE (Quadro 1).

Quadro 1– Pontos de enfoque dos artigos do *corpus*

Pontos de Enfoque	Artigos
As Geometrias não Euclidianas e propostas curriculares	Assis (2017); Caldato e Pavanello (2014)
Concepções e conhecimentos de professores e futuros professores a respeito de Geometrias não Euclidianas	Leivas (2013); Leivas (2014); Lovis e Franco (2015); Lovis, Franco e Barros (2014)
Propostas e recursos para o ensino e a aprendizagem de Geometrias não Euclidianas	Araman e Gomes (2018); Leivas e Soares (2011); Lopes, Amaral, Matto e Silva (2014); Murari (2011)

Fonte: Elaborado pelas autoras

Nas próximas seções, descrevemos e analisamos cada um desses pontos de enfoque. Na descrição, apresentamos quadros delineando os objetivos de cada artigo e ações desenvolvidas pelos pesquisadores para alcançá-los, seguidos dos principais resultados obtidos pelos pesquisadores. Para finalizar, discutimos acerca do que dizem as pesquisas a respeito das GNE na formação de PMat e as considerações finais.

Geometrias não Euclidianas e propostas curriculares

Nos dois estudos que constituíram esse ponto de enfoque, os pesquisadores se dedicaram a identificar em que medida os conhecimentos de GNE são considerados em propostas curriculares, seja na formação de professores, seja na educação básica (Quadro 2).

Quadro 2 – Artigos que discutem Geometrias não Euclidianas em propostas curriculares

Autor(a)	Objetivo	Ações desenvolvidas
Assis (2017)	“Verificar de que forma os currículos dos cursos de licenciatura em matemática no Brasil contemplam o ensino da geometria hiperbólica.” (p. 393)	• Análise de projetos político-pedagógicos de 35 cursos.

		• Análise das diretrizes curriculares da educação básica dos estados em que tais cursos estão alocados.
Caldatto e Pavanello (2014)	“Investigar como ocorreu o processo de elaboração do currículo vigente no estado do Paraná a partir da visão de professores que dele participaram, clarificando de modo especial como aconteceu a inserção das Geometrias Não Euclidianas neste currículo.” (p.42)	• Elaboração de uma visão da História do desenvolvimento das Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (2008) a partir da análise de documentos da Secretaria de Estado de Educação do Paraná (SEED) e da textualização de entrevistas feitas com participantes da elaboração.

Fonte: Elaborado pelas autoras

Assis (2017) verificou *se e de que forma* a Geometria Hiperbólica era contemplada em cursos de Licenciatura em Matemática provenientes de instituições de ensino brasileiras que possuem programas de pós-graduação *stricto sensu* em matemática pura ou aplicada. Também fez um paralelo com as propostas curriculares do ensino básico, referentes a essa geometria não euclidiana³¹, nos estados em que os cursos estão alocados. Os critérios de inclusão indicam que o contexto dos cursos identificados é favorável para a abordagem de geometrias não euclidianas por conta da possibilidade de prolongamento desses estudos em cursos de mestrado ou doutorado em matemática. Esse fato sinaliza a preocupação dos colegiados em formar, inclusive, futuros pesquisadores.

O autor constatou que a Geometria Hiperbólica é trabalhada, de algum modo, em 23 dos cursos analisados (67,7%) e é parte integrante de três componentes curriculares, entre optativos e obrigatórios: a) Geometrias Não Euclidianas, em que os futuros professores se familiarizam, principalmente, com noções fundamentais de Geometria Hiperbólica; b) História da Matemática, que inclui referências ao surgimento da Geometria Hiperbólica; e c) Geometria Hiperbólica, voltada para discussões centradas exclusivamente nesse conteúdo.

Em relação às diretrizes curriculares da educação básica, Assis (2017) encontrou referências sobre Geometrias além da Euclidiana em apenas três estados: Ceará, São Paulo e Paraná. A proposta curricular do estado do Ceará sugere “uma discussão referente à geometria e suas partes, onde se destacariam a Euclidiana Plana e a Não-Euclidiana, a Espacial, a Métrica e a Descritiva” (Ceará, 2008, p. 18 *apud* Assis, 2017), mas não determina ou orienta o ensino de Geometria Hiperbólica. Apenas um dos cursos investigados encontra-se em uma universidade cearense e tem a Geometria Hiperbólica no currículo. Nas diretrizes do estado de São Paulo, não há menção ou orientações diretas sobre a Geometria Hiperbólica, porém se

³¹ Nessa seção, o termo “geometrias não euclidianas” foi escrito conforme apresentado pelos autores, pelo fato de que o uso de letras maiúsculas e minúsculas para tais termos pode comprometer o sentido ao qual cada autor se referiu.

ênfatisa a importância de serem estudados diferentes modelos geométricos, recomendando “uma reflexão sobre as diversas formas de conceber o espaço” para “inspirar algumas noções de geometrias não euclidianas” (São Paulo, 2011, p. 40 *apud* Assis, 2017). Oito cursos investigados são de universidades paulistas e metade deles contém a Geometria Hiperbólica em seus componentes curriculares. No estado do Paraná, há uma orientação específica acerca do ensino de Geometria Hiperbólica, que propõe a “exploração dos elementos da pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos.” (Paraná, 2008 *apud* Assis, 2017).

Assis (2017) conclui que os dados revelam a supremacia da GE em relação à Hiperbólica e que a influência da tradição histórica que nomeou a primeira como modelo geométrico ideal ainda ecoa nos currículos acadêmicos. Além disso, o autor enfatiza, em sua conclusão, que o ensino de geometria no Brasil é interpretado como o ensino de GE.

Caldatto e Pavanello (2014) organizaram uma versão da história do processo de construção das Diretrizes Curriculares Estaduais do Estado do Paraná (DCE-PR), componente Matemática. A versão se concentrou, especificamente, em analisar a inclusão das Geometrias Não Euclidianas no documento a partir da visão de 15 indivíduos, entre professores e ex-membros de equipes técnico-pedagógicas, que participaram do processo de elaboração das referidas diretrizes.

Os participantes da investigação revelaram que, durante o processo de construção das Diretrizes, as discussões feitas com professores da rede a respeito da inserção das Geometrias Não Euclidianas foram polêmicas e contemplaram, ainda, outros conteúdos como números complexos e polinômios. A justificativa da equipe técnica da época foi que o estudo de Geometrias Não Euclidianas contribuiria para que os estudantes expandissem seus horizontes, pois “o meio em que vivemos tem partes planas e não planas”. Porém, não foram discutidos os desdobramentos desses conteúdos, tampouco as implicações para a formação dos estudantes, já que a preocupação principal era *convencer* os professores da rede a acatarem a inserção. De um modo geral, não foram debatidas as particularidades, os acréscimos ou as alterações de cada conteúdo relacionado às Geometrias Não Euclidianas, mas sim, se seria adequado às séries designadas e se os participantes das discussões concordariam ou discordariam das especificidades do currículo proposto. Esses fatos contrariam o discurso oficial da Secretaria de Estado da Educação (SEED) do Paraná de que a elaboração do currículo foi resultado de uma “[...] metodologia que primou pela discussão coletiva ocorrida” e “[...] envolveu todos os professores da rede”, atestando que “[...] sua participação nesses eventos e suas contribuições por escrito foram fundamentais para essa construção coletiva” (Paraná, 2008, p. 7-8 *apud*

Caldatto; Pavanello, 2014). Contudo, as autoras afirmam que esses trechos do documento são meros argumentos retóricos.

Ao considerar as condições para o trabalho com Geometrias Não Euclidianas nas escolas, os professores participantes da pesquisa, que fizeram parte do processo de elaboração das diretrizes, enfatizaram que: falta formação para o professor da rede e que, portanto, não há segurança para trabalhá-lo; a carga horária não permite que todos os conteúdos indicados no currículo sejam abordados; e boa parte dos livros didáticos não contempla essa temática.

Ambos os artigos analisados nessa seção se concentraram em discutir aspectos curriculares, mas em diferentes contextos educacionais e com perspectivas distintas. No entanto, ambos concordam que o caminho para instrumentalizar o trabalho do professor com as GNE é via formação inicial e continuada.

O debate acerca da inclusão de GNE, como a Geometria Hiperbólica, nos cursos de formação de PMat, torna-se plausível a partir da sua consistência teórica, importância na área da matemática e da constatação de que não há uma geometria verdadeira (Assis, 2017). Porém o trabalho com GNE torna-se questionável, quando são levadas em conta as condições concretas para seu desenvolvimento na educação básica.

As dificuldades e os desafios inerentes à inclusão das GNE ocorrem, em parte, por conta da formação de PMat que, em geral, não as aborda. Além disso, a alteração do currículo não basta para que essa temática seja implementada em sala de aula, pois se os docentes em exercício não considerarem as indicações curriculares convenientes, irão descartá-las (Caldatto; Pavanello, 2014).

O currículo reflete o entendimento das instituições de ensino sobre os aspectos necessários à formação dos discentes (Assis, 2017), e a sua elaboração não é uma ação neutra (Caldatto; Pavanello, 2014). As GNE são citadas nas diretrizes curriculares da educação básica em alguns estados, contudo sua inclusão não verificou se os professores da rede dispunham de conhecimentos suficientes para trabalhá-las em sala de aula.

Concepções e conhecimentos de professores e futuros professores de matemática a respeito de Geometrias não Euclidianas

Nos artigos desse ponto de enfoque, os investigadores analisaram concepções e conhecimentos de professores e futuros PMat a respeito de GNE em contextos formativos (Quadro 3).

Quadro 3 – Artigos que discutem concepções e conhecimentos de Geometrias não Euclidianas

Autor(a)	Objetivo	Ações desenvolvidas
Leivas (2013)	“Investigar o conhecimento sobre Geometrias Não-Euclidianas de noventa alunos de graduação, dezessete de mestrado e um de doutorado, todos estudantes de instituições gaúchas que oferecem Licenciatura em Matemática, mestrado e doutorado na área de ensino.” (p. 647)	• Encaminhamento de um questionário estruturado para professores com pós-graduação em ensino de Matemática, que lecionam em 13 instituições de ensino superior (IES) do Rio Grande do Sul, para posterior aplicação desse questionário em turmas de licenciatura em Matemática e de programas de pós-graduação.
Leivas (2014)	“Responder à questão: como alunos de um mestrado profissionalizante em ensino de Matemática interpretam e representam elipses, parábolas e hipérbolas utilizando a métrica dos catetos?” (p. 189)	• Proposição de uma atividade avaliativa constituída por três questões, na Disciplina Fundamentos da Álgebra Linear e Geometria Analítica, após o trabalho do conteúdo “distâncias no plano e no espaço” em diversas métricas.
Lovis, Franco e Barros (2014)	“Descrever as dificuldades e os obstáculos apresentados por um grupo de professores de matemática da Educação Básica observados durante um minicurso introdutório sobre a Geometria Hiperbólica.” (p. 11)	• Proposição de um minicurso introdutório sobre a Geometria Hiperbólica, usando, especificamente, o Modelo do Disco de Poincaré.
Lovis e Franco (2015)	Identificar e analisar as concepções sobre as Geometrias não Euclidianas de um grupo de professores de matemática de escolas públicas do Estado do Paraná.	• Entrevistas semiestruturadas com um professor de cada Núcleo Regional de Ensino (NRE) do estado do Paraná, com o auxílio de 36 cartões que continham palavras, representações de entes geométricos e objetos relacionados às Geometrias.

Fonte: Elaborado pelas autoras

Os artigos investigaram as concepções³² e os conhecimentos mobilizados por professores e futuros PMat em diferentes níveis de formação – dos primeiros anos da licenciatura até o doutoramento –, a respeito de GNE. Leivas (2013) e Lovis e Franco (2015) discutem questões relacionadas à GNE de um modo geral, enquanto Leivas (2014) foca na métrica dos catetos;³³ e Lovis, Franco e Barros (2014), na Geometria Hiperbólica.

Leivas (2013) estudou conhecimentos relacionados às Geometrias Não-Euclidianas de estudantes de graduação, mestrado e doutorado matriculados em IES gaúchas. O instrumento de coleta de dados foi um questionário estruturado, que caracterizou um “espaço ambiente”,³⁴ seguido de sete afirmações sobre geometria (p.e. “a soma dos ângulos internos de qualquer

³² O termo “concepções” foi utilizado nos artigos que compõem este ponto de enfoque.

³³ Também denominada Geometria do Táxi ou Geometria Urbana. Essa geometria concebe as distâncias entre dois pontos como a soma das unidades de deslocamento no sentido vertical e horizontal, que são os catetos de um triângulo retângulo, diferente da Geometria Euclidiana que define distância como a hipotenusa do mesmo triângulo.

³⁴ “O espaço geométrico no qual entes geométricos e axiomas são bem definidos e relações estabelecidas e demonstradas, de modo que os participantes não se limitassem a pensar, exclusivamente, em geometria plana e espacial, como é usual na formação inicial, até mesmo, continuada” (Leivas, 2013, p. 652).

triângulo é sempre igual a 180°) que deveriam ter a validade verificada e justificada pelos participantes da investigação. Os resultados apontam que a maior parte dos respondentes demonstrou não ter conhecimentos acerca das Geometrias Não-Euclidianas. Alguns justificaram os valores dados aos itens, deixando claro que se referiram ao espaço euclidiano ou que, em outras geometrias, seria possível obter respostas diferentes das dadas. Poucos utilizaram definições e resultados de Geometrias Não-Euclidianas em suas justificativas. O autor pontua que, nos cursos de formação de PMat do Rio Grande do Sul, há pouca informação sobre as Geometrias Não-Euclidianas, levando os futuros professores a não “incorporarem” à sua prática outras noções além das euclidianas.

No ano seguinte, Leivas (2014) publicou uma pesquisa realizada com estudantes de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, que estudaram distâncias no plano e no espaço em diversas métricas ao longo de uma disciplina da referida pós-graduação. Foi elaborada uma atividade avaliativa com três questões que envolviam os cálculos e a representação de elipses, parábolas e hipérboles a partir de uma métrica não euclidiana. Todos os estudantes realizaram os cálculos de forma correta, contudo as representações provenientes causaram “incredibilidade”, pois imaginavam as cônicas como curvas, não como segmentos de reta, o que indica que não conseguiram reconhecer representações gráficas de cônicas em uma métrica diferente da euclidiana. O pesquisador constatou que os estudantes deram preferências aos cálculos numéricos e algébricos, porém essa abordagem de resolução não impediu o alcance do objetivo proposto, que era a representação correta dos três lugares geométricos. Leivas defende que o estudo das métricas nessa geometria, que é dependente de medidas, proporciona aos estudantes vislumbrar outras geometrias além da Euclidiana.

No artigo de Lovis, Franco e Barros (2014), estão descritos, especificamente, as dificuldades e os obstáculos dos professores participantes de um minicurso introdutório sobre a Geometria Hiperbólica no Modelo do Disco de Poincaré. Logo na definição dos componentes básicos, o primeiro obstáculo dos professores participantes foi evidenciado, nomeadamente: o plano hiperbólico, nesse modelo, é infinito. Para os professores, o plano é o interior de um círculo e, logo, limitado. A representação geométrica é ressaltada em detrimento da definição do plano, e o fato de ser possível “ver” os pontos no infinito causa “espanto”, pois não é possível vê-los na GE. Outro obstáculo destacado pelos autores foi quanto às h-retas e aos ângulos entre elas. Os participantes afirmaram que “dá a impressão que não dá 90° de jeito nenhum” e que “não parece, mas é 90° ”. A representação de ortogonalidade difere da qual eles estão habituados – um ângulo reto entre duas retas euclidianas –, e essa “nova representação” se converte em um

obstáculo verbal³⁵. Os professores também questionaram se o objeto construído seria, de fato, uma reta e afirmam que “é uma reta que não é reta” e que “não existe isso no espaço dele (Poincaré)”. Esse fato explicita que a palavra “reta” é utilizada com noções do senso comum, expressa todo o significado contido num objeto geométrico e dificulta compreender que o arco da circunferência da GE é, nesse modelo, uma reta hiperbólica.

Os autores destacam a influência do modelo euclidiano na interpretação dos conceitos e propriedades de uma nova geometria, o que constitui um obstáculo no entendimento de novos conceitos a partir de um conhecimento geral. Acreditam que uma das causas dos obstáculos observados é o fato de os professores entenderem a representação de objetos geométricos como os objetos em si.

Lovis e Franco (2015) estudaram os conhecimentos, as preferências, as ideias e as opiniões de um grupo de 27 PMat sobre as Geometrias não Euclidianas. Quanto à formação a respeito desses conteúdos, 1 professor estudou Geometria Projetiva em sua formação inicial, 15 estudaram alguns resultados e conceitos de Geometrias não Euclidianas em cursos ofertados pela SEED-PR, 8 leram e estudaram o assunto de forma independente e 4 nunca tiveram contato.

Os autores indicaram três categorias principais relacionadas às concepções dos participantes. A primeira contém os que “não possuem concepções sobre Geometrias não Euclidianas”. Dos seis professores dessa categoria, quatro nunca estudaram o assunto e uma professora não tinha conhecimento da inclusão das Geometrias não Euclidianas nas Diretrizes Curriculares de Educação do Paraná, o que, segundo os autores, levanta questões sobre a divulgação, a implementação e o uso da estrutura curricular. Dois professores dessa categoria leram ou estudaram sobre o assunto, mas não apresentaram uma “concepção clara”. A segunda categoria inclui três professores que “apresentaram suas concepções por meio de algumas ideias e opiniões”. Alguns mencionaram esferas, fractais e curvas, como elementos relacionados às Geometrias não Euclidianas, mas afirmaram não trabalhá-las com seus estudantes. Descrevem-nas como uma resposta à necessidade de novos estudos, como o cálculo de curvas e a teoria da relatividade e destacam a importância do conhecimento da GE para compreender e trabalhar com as Geometrias não Euclidianas. A terceira categoria contém oito professores que “descreveram suas concepções através de conceitos ou resultados das Geometrias não Euclidianas”, enfatizando o quinto postulado nas discussões históricas, a curvatura da Terra e questões relacionadas à natureza.

³⁵ “Um caso em que uma única imagem, ou até uma única palavra, constitui toda a explicação” (Bachelard, 1996, p. 91 *apud* Lovis; Franco; Barros, 2014, p. 20)

Os autores concluem que os professores, em geral, ainda não mobilizaram os conhecimentos não euclidianos, pois estão na fase de identificação deles, ou seja, têm concepções e conhecimentos em formação.

As investigações desse ponto de enfoque fornecem uma visão abrangente sobre as dificuldades encontradas por professores e futuros PMat no que diz respeito às GNE. Os pesquisadores buscaram mapear os conhecimentos, de modo a propor novas ações para a formulação de currículos de formação inicial e continuada (Leivas, 2013, 2014), transformar o cenário do ensino de geometria (Lovis; Franco, 2015) e colaborar na ruptura da ideia de conhecimento geral e de senso comum (Lovis; Franco; Barros, 2014).

Os conhecimentos de geometrias além da Euclidiana viabilizam a apropriação de uma cultura geométrica (Leivas, 2013), a superação de obstáculos epistemológicos (Lovis; Franco; Barros, 2014), reflexões sobre a própria GE (Lovis; Franco, 2015) e permitem uma compreensão significativa da matemática (Leivas, 2014).

A compreensão dos conceitos das GNE é influenciada significativamente pela crença dominante de que a GE é a única possível (Leivas, 2013), porém alguns resultados e conceitos euclidianos também são incipientes entre os professores (Lovis; Franco; Barros, 2014). A ênfase dada aos aspectos mais técnicos da matemática tende a negligenciar a compreensão conceitual e a visualização geométrica (Leivas, 2014). Conhecimentos de GNE não foram integrados aos conhecimentos dos professores e, conseqüentemente, às suas práticas de ensino. Porém, há a hipótese de que elas estão sendo (trans)formadas com a inclusão das GNE na escola básica (Lovis; Franco, 2015).

Propostas e recursos para o ensino e a aprendizagem de Geometrias não Euclidianas

Propostas, recursos e possibilidades para o ensino e a aprendizagem de GNE aproximam as investigações do terceiro grupo de enfoque. O Quadro 4 indica os objetivos e as principais ações desenvolvidas nos trabalhos analisados.

Quadro 4 – Artigos que discutem propostas e recursos para o ensino e a aprendizagem de Geometrias não Euclidianas

Autor(a)	Objetivo	Ações desenvolvidas
Araman e Gomes (2018)	“Indicar um caminho para se realizarem recortes de episódios históricos, levando em consideração uma reflexão a respeito dos saberes docente, que, a <i>posteriori</i> ,	• Apresentação de um esquema com os saberes necessários para auxiliar os professores na elaboração de recortes de episódios históricos.

	podem ser utilizados em sala de aula.” (p. 274)	• Proposição de um recorte de episódios históricos sobre geometrias não euclidianas e as justificativas para tal.
Leivas e Soares (2011)	“Dar uma possibilidade de uso das habilidades mencionadas em disciplinas da formação de professores de matemática.” (p. 73)	• Apresentação de um ensaio teórico sobre a possibilidade de inserção no currículo de um conteúdo que não está inserido na formação profissional de professor de matemática.
Lopes et al. (2014)	Relatar impressões sobre o processo de formação e sobre as atividades desenvolvidas em uma oficina ministrada para professores da Educação Básica do Estado do Paraná.	• Desenvolvimento de uma oficina com carga horária de 32 horas, dividida em quatro etapas: 1) aplicação de um questionário para investigar o conhecimento prévio dos participantes; 2) exposição de um vídeo e um seminário de introdução à Geometria Fractal; 3) utilização de materiais didáticos; 4) avaliação final sobre viabilidade de aplicação das atividades na Educação Básica.
Murari (2011)	Discutir as “possibilidades do uso integrado de espelhos, caleidoscópios, materiais manipulativos e <i>softwares</i> de geometria dinâmica em estudos das geometrias euclidiana e não-euclidiana.” (p. 187)	• Proposição de resumos de ações desenvolvidas em pesquisas de mestrado orientadas pelo autor.

Fonte: Elaborado pelas autoras

Araman e Gomes (2018) sugerem uma possibilidade para abordar as geometrias não euclidianas em aulas de matemática através da História da Matemática, de modo a subsidiar a ação docente, ao fornecer elementos para auxiliar no recorte de textos históricos para a implementação dessa abordagem. Exemplificam com um recorte de dois episódios históricos, vinculados à origem e às definições das geometrias não euclidianas. O episódio 1, intitulado “O surgimento das geometrias não euclidianas”, cita a obra *Os elementos* que traz os cinco postulados que conceberam a GE e discute a repercussão do quinto postulado entre os matemáticos. O segundo episódio, “Retas paralelas nas geometrias não euclidianas”, se concentra nos conceitos de retas paralelas, segundo Lobachevsky e Bolyai (Geometria Hiperbólica) e Riemann (Geometria Elíptica), por meio de representações geométricas. Na sequência, formalizam os passos a serem seguidos para a elaboração de recortes de qualquer episódio histórico como fonte de investigação em aulas de Matemática: 1.º) definição do conteúdo matemático; 2.º) seleção das fontes (material histórico); 3.º) julgamento das fontes, com base em questões relacionadas aos fundamentos, orientações curriculares para o conteúdo e orientações didáticas do uso da História da Matemática; e 4.º) recorte do episódio histórico a partir do levantamento e seleção das informações, organizadas de forma cronológica. A proposta não sugere que o texto em si seja levado para a sala de aula, mas pode-se basear na organização e no desenvolvimento de situações de aprendizagem, tendo em vista as

potencialidades da História da Matemática, e ser parte integrante da aula a partir de situações-problema e atividades investigativas. Concluem que a proposta é mais uma possibilidade para que esse recurso didático seja integrado à formação do estudante da educação básica e, também, à formação de PMat.

O trabalho de Leivas e Soares (2011) demonstra a possibilidade de geometrizar o currículo da Licenciatura, evidenciando como a imaginação³⁶ pode ser utilizada, a partir da intuição³⁷, em um processo de visualização³⁸ de conceituações matemáticas, o que dá ao futuro professor, na educação básica, argumentações sobre “a necessidade do por que da demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo”. Consideram um plano (α) marcado por retas (r , s e t) e pontos (M e N , A e B e D e E) para, intuitivamente, imaginar e visualizar como o plano dado, semelhante a uma folha de papel, localmente, é homeomorfo³⁹ à superfície cilíndrica gerada pela transformação da folha de papel (Figura 1). Verificam que: r é uma geratriz da superfície cilíndrica, ou seja, segue sendo uma reta; s transforma-se em numa circunferência da superfície; e t transforma-se em uma hélice cilíndrica. Logo, as três curvas⁴⁰ seguem determinando o menor caminho entre os pontos considerados e executam papéis análogos aos exercidos pelas retas no plano euclidiano.

³⁶ Os autores utilizam o termo “imaginação” da forma descrita por Leivas (2009, p.20) “[...] é usada para expressar uma forma de concepção mental de um conceito matemático, o qual pode vir a ser representado por um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação dos mesmos, com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito”.

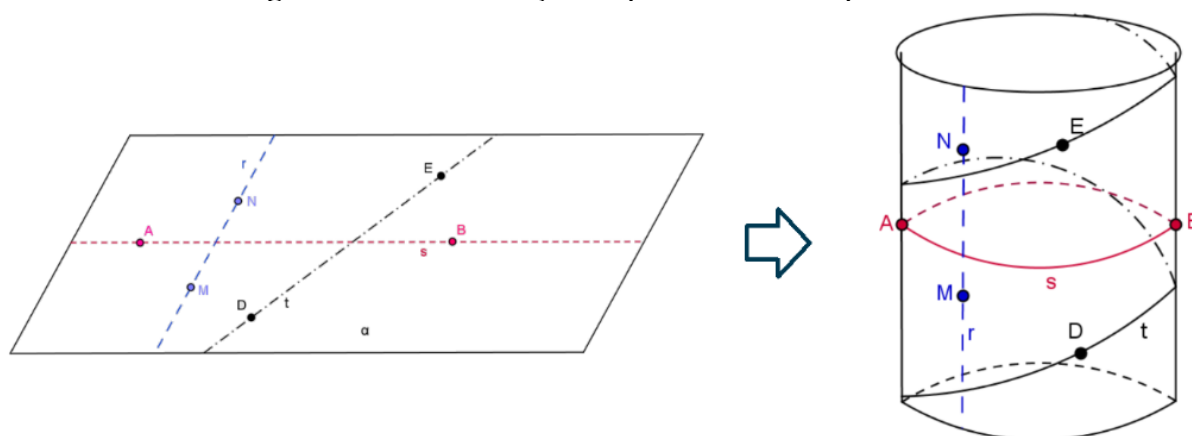
³⁷ Também utilizam o termo “intuição”, fixado por Leivas (2009, p.21) “é um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto. O conceito deve ser formado de forma reflexiva, consciente, produzindo sentimento de certeza a partir da autoevidência”.

³⁸ Definiram a compreensão de visualização como “um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (Leivas, 2009, p. 22).

³⁹ Homeomorfismo é, essencialmente, uma correspondência entre dois espaços topológicos, que podem ser transformados um no outro sem perderem suas propriedades.

⁴⁰ Denominadas geodésicas da superfície.

Figura 2 – Transformação do plano em uma superfície cilíndrica



Fonte: Leivas e Soares (2014) (adaptado)

Em seguida, a partir de noções imaginativas, intuitivas e visuais para a obtenção de geodésicas, transpõem os conceitos para uma superfície esférica para estabelecer comparativos entre triângulos esféricos e planos. Sugerem uma sequência para visualizar triângulos trirretângulos, integrando abordagens algébricas e geométricas, de modo a contribuir na formação de conceitos não euclidianos nos currículos de Licenciatura em Matemática, pois, de acordo com os autores, os cursos de Cálculo e Geometria Analítica abandonam ou não exploram representações e visualizações geométricas das construções algébricas propostas. Defendem que o emprego de métodos da Álgebra Linear, de forma intuitiva e imaginativa, auxilia o desenvolvimento de noções de Geometrias Não Euclidianas.

Lopes *et al.* (2014) relatam as ações desenvolvidas em uma oficina de Geometria Fractal, ministrada para 30 professores da educação básica durante a semana pedagógica de uma escola. As ações foram divididas em quatro etapas. Na etapa I, grande parte dos professores revelou não apresentar a Geometria Fractal a seus estudantes por falta de tempo ou por não a conhecerem. Em relação ao uso de recursos metodológicos aplicados no ensino de Geometria, 4% usavam jogos, 8% articulavam oficinas com materiais manipuláveis, 24% transmitiam vídeos com caráter explicativo e 48% recorriam apenas ao livro didático. Na etapa II, ao serem expostos aos principais conceitos relacionados ao tema e à “Geometria do Caos”, a maior parte dos participantes revelou não imaginar que as aplicações dos fractais iam desde a química até a medicina. Na etapa III, tiveram acesso, em grupo, a quebra-cabeças com fractais famosos, como o Triângulo de Sierpinski e a Curva de Hilbert, e a formas da natureza, como os brócolis e o pulmão humano. Essa proposta tinha como objetivo proporcionar aos professores a oportunidade de perceberem, de forma empírica, a “beleza das figuras” e elaborar uma atividade a ser aplicada com seus estudantes. A etapa IV foi dividida em duas partes. A primeira

consistiu na construção, em cartolina, de representações de fractais famosos e na determinação da área, do perímetro e da dimensão fractal, associada a conteúdos como progressão aritmética, geométrica e triângulo de Pascal. Em seguida, foi implementada a *arte francesa* às construções, ao se sobrepor gravuras de papel a uma figura plana, dando efeito de profundidade e volume. Na segunda parte, elaboraram cartões fractais tridimensionais. Ao término da oficina, os professores participantes sugeriram uma exposição das construções elaboradas nos murais da escola, relataram pesquisas independentes que fizeram sobre o tema e registraram uma possível interdisciplinaridade com a disciplina de Artes.

Murari (2011) faz um ensaio teórico sobre o uso de materiais manipulativos para o ensino de geometria, usando propostas e resultados de pesquisas de mestrado orientadas por ele. O estudo de Gouvea (2005), que integra o ensaio, relata o trabalho com fractais através de caleidoscópios e *softwares* educacionais de geometria dinâmica em um curso de extensão para estudantes de licenciatura em Matemática da UNESP de Rio Claro. O curso tinha como objetivo retomar conceitos básicos da GE, gerando fractais geométricos a partir de bases caleidoscópicas no *software Cabri-Geomètre II*. Os caleidoscópios fornecem visuais deslumbrantes e, segundo o autor, contribuem para despertar nos estudantes o interesse pelas atividades propostas e pelos conceitos tangentes ao tema, assim como se dá nas interações aluno-aluno, aluno-computador e aluno-professor. Murari (2011) destacou que é interessante que o processo de ensino e aprendizagem seja mais criativo e permita o desenvolvimento da capacidade inquiridora e exploratória dos estudantes, se caracterizando como “[...] uma estratégia de ensino-aprendizagem distinta da tradicional” (Murari, 2011, p.199).

Os estudos descritos anteriormente compartilham o objetivo de discutir propostas para o ensino de GNE, demonstrando a importância de considerar: aspectos históricos e reflexões sobre a natureza da matemática no ensino tradicional (Araman; Gomes, 2018); estratégias interdisciplinares (Lopes *et al*, 2014); a imaginação, a intuição e a visualização para a geometrização do currículo de formação do professor (Leivas; Soares, 2011); e as potencialidades educativas das tecnologias de informação (Murari, 2011).

Os trabalhos enfatizam que a abordagem de GNE é negligenciada por uma série de fatores. Disciplinas tradicionais na formação inicial de PMat, muitas vezes, estudam estruturas provenientes de elementos arbitrários, objetivando o desenvolvimento de algoritmos que não permitem que o futuro professor atribua significados geométricos e desenvolva a visualização para realizar as representações (Leivas; Soares, 2011). Além disso, os professores não sentem segurança para trabalhar conceitos não euclidianos (Lopes *et al.*, 2014) e o caráter técnico da

matemática conduz o ensino a focar nos procedimentos em detrimento de aspectos de sua natureza (Araman; Gomes, 2018).

As investigações citadas buscam, através da proposição de propostas e estratégias para o ensino de GNE, quebrar o paradigma atual do ensino de matemática, que isenta a sua construção de contradições e dúvidas (Araman; Gomes, 2018); colaborar no desenvolvimento do pensamento geométrico (Leivas; Soares, 2011); instrumentalizar os professores de modo a prepará-los para o ensino dos conteúdos previstos nos currículos (Lopes, *et al*, 2014); e auxiliar a compreensão do processo de ensino e aprendizagem de forma abrangente, como resposta às novas políticas públicas e às demandas sociais (Murari, 2011).

O QUE DIZEM AS PESQUISAS DO *CORPUS* A RESPEITO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Os artigos que compõem o *corpus* foram integrados em três pontos de enfoque e a análise evidenciou alguns elementos enfatizados pelos trabalhos.

Em relação às propostas curriculares relacionadas às GNE, foram destacadas: a discrepância entre a presença de GNE e GE em currículos de formação de PMat; a compreensão do ensino de geometria como ensino de GE; e a falta de formação dos PMat sobre a temática. Esses pontos contribuem para que os PMat e futuros PMat sintam insegurança ao trabalharem com a temática na educação básica, apesar das orientações curriculares.

O segundo ponto de enfoque, relacionado aos conhecimentos e às concepções de PMat e futuros PMat sobre GNE, evidenciou que: em geral, os professores e os futuros professores não mobilizam conhecimentos acerca de conceitos não euclidianos; alguns conhecimentos de GE também são incipientes; a compreensão de GNE é influenciada significativamente pela visão de uma única geometria (GE); o trabalho com GNE pode colaborar na superação de obstáculos epistemológicos e instigar reflexões sobre a própria GE.

Em relação às propostas e recursos para o ensino e a aprendizagem de GNE, o terceiro ponto de enfoque da análise, os trabalhos se concentraram: em discussões históricas e filosóficas sobre o desenvolvimento das GNE; na elaboração de materiais didáticos; e na utilização de *softwares* de geometria dinâmica. Certamente tais recomendações podem auxiliar tanto o professor quanto o futuro PMat a responder às demandas curriculares.

Apesar de Kaleff (2004) considerar, quase 20 anos atrás, que era oportuna a inclusão de conteúdos geométricos não euclidianos aos conhecimentos geométricos escolares para o século XXI, pesquisas recentes constataram que grande parte dos cursos de formação inicial de PMat

ainda segue não tratando, pedagógica e matematicamente, as GNE. Júnior (2020) realizou um mapeamento que buscou identificar a presença da temática em cursos de Licenciatura em Matemática, na modalidade presencial, de IES brasileiras. Dos 372 cursos analisados, apenas 57 (15,32%) continham disciplinas que citavam o estudo de GNE como conteúdo específico na formação de PMat, entre componentes curriculares optativos e obrigatórios. Apesar da presença tímida de conhecimentos não euclidianos nos currículos de formação de professores, Santos Júnior (2020, p. 141) diz que

[...] há um movimento de reestruturação nos currículos dos cursos de Licenciaturas em Matemática quanto ao ensino de Geometria, na qual as GNE estão sendo aos poucos inseridas na formação do professor, seja com uma proposta voltada para a aquisição de um novo saber a partir do domínio de conteúdo específico geométrico não euclidiano, ou por meio de disciplinas que incorporam conteúdos relacionados à GNE como uma abordagem para o ensino de Geometria.

É possível observar um aumento no número de pesquisas, relacionadas à formação continuada, que trabalharam com GNE nesses contextos formativos na última década (Ambrozi; Glowacki; Sauer, 2015; Araman; Gomes, 2020; Brum; Shuhmacher; Silva, 2016; Carli, 2012; Leivas; Souza; Portella, 2017; Lovis; Lunkes, 2015; Oliveira; Ferreira, 2020). A inclusão do tópico “geometrias não euclidianas” em DCE pode ter desencadeado o interesse de pesquisadores da Educação Matemática em investigar a temática e evidenciado a necessidade de proposição de formações continuadas relacionadas. Porém, o fato de a presença de GNE não estar consolidada nos currículos de formação de professores pode contribuir para que o professor e o futuro professor construam sua relação com o espaço somente a partir do modelo geométrico euclidiano e, conseqüentemente, ensine apenas GE na educação básica, mesmo com indicações curriculares que incluam o ensino de outros modelos geométricos. De todo modo, há a hipótese de que reflexões e debates sobre as GNE estejam sendo promovidas, mesmo que insatisfatoriamente, considerando a recomendação desses conteúdos na educação básica.

Um ponto evidenciado na análise diz sobre o conhecimento de professores e futuros PMat acerca de GNE. Santos (2009), em sua dissertação de mestrado que foi motivada pela referida inclusão, acompanhou um curso de GNE, oferecido pelo NRE de Maringá, ministrado para 50 PMat. Esperava-se que os participantes estivessem despreparados para trabalhar com esses conteúdos na educação básica, no entanto, para além dessa questão, percebeu-se que os conhecimentos dos professores sobre a GE também eram incipientes. Segundo Barros e Pavanello (2022, p. 12), “Pesquisas mais recentes apontam que o ensino da geometria se mostra ineficiente e precário, o que evidencia as dificuldades tanto de professores quanto de alunos em

todos os segmentos da Educação Básica.”. A dependência de livros didáticos, os quais, nas décadas de 1980 e 1990, traziam os conteúdos geométricos nas últimas páginas (fadas a serem ensinadas no final do ano letivo e, conseqüentemente, quando não havia mais tempo), é destacada pelas autoras como uma possível justificativa para as dificuldades dos estudantes e dos professores em geometria. Uma outra justificativa está ligada à disseminação de princípios e discursos educacionais que atribuíram à escola a responsabilidade de qualificar o trabalhador urbano, dando ênfase a um modelo de ensino que direcionado às necessidades da industrialização, que hoje converge com o mercado financeiro e com perspectivas neoliberais (Fernandes; Grossi; Martins, 2022). Apesar do avanço das discussões e das pesquisas, essas dificuldades ainda são marcantes.

Carli (2012), ao propor um curso de formação continuada de PMat relacionado à GNE, identificou as dificuldades manifestadas pelos participantes e as organizou em duas categorias: dificuldades relacionadas à GE; e dificuldades relacionadas às GNE. A primeira categoria evidenciou alguns equívocos conceituais, a atribuição de nomenclaturas algébricas aos termos geométricos e a incompreensão da representação das construções geométricas. A segunda explicitou a aversão dos participantes em aceitar representações diferentes das euclidianas e a necessidade de se estabelecerem relações entre o conteúdo estudado e a GE. A autora destaca que o conhecimento geométrico dos professores se restringe a conteúdos que incluem métricas e cálculos. As GNE, como a Geometria Elíptica e a Hiperbólica, possuem propriedades e relações diferentes da GE, mas ainda seguem uma estrutura lógica consistente. Esse fato permite que o estudo e a compreensão dessas geometrias seja possível sem, necessariamente, existir uma base prévia de conceitos euclidianos. No entanto, a GE pode fornecer familiaridade e uma base conceitual útil com os princípios elementares que podem facilitar a mobilização de conceitos e resultados de GNE.

Souza (2022) acompanhou um grupo de PMat durante uma disciplina de mestrado profissional. A disciplina expôs uma visão crítica dos conhecimentos euclidianos e apresentou diferentes modelos geométricos, como o modelo do Disco de Poincaré da Geometria Hiperbólica, além de fomentar discussões históricas sobre os desdobramentos das discussões relacionadas ao famoso postulado das paralelas. Os participantes da pesquisa revelaram dificuldades de se desvincularem do “mundo euclidiano”, enfatizando o movimento de desconstrução das “coisas decoradas” e de quebra dos paradigmas do campo matemático. Portanto, o estudo das GNE pode exercer influência positiva na compreensão dos professores acerca de elementos da própria GE e ampliar o repertório de conhecimentos geométricos do professor em formação (Altoé *et al.*, 2022).

Além de constatar as dificuldades relacionadas ao ensino de GE e GNE, pesquisadores têm investigado outros elementos que trazem luz a possíveis empecilhos, ao se abordar esse tema. Alguns investigadores têm empreendido esforços com o intuito de investigar emoções relacionadas à aprendizagem escolar. Carvalho e Carvalho (2010) defendem que um fato que justifica a ausência do ensino de geometrias (não Euclidianas e Euclidianas) é a ansiedade⁴¹, causada pelo despreparo de grande parte dos professores em relação a essa temática e pelas dificuldades manifestadas por seus estudantes. Em sendo assim, é possível observar um movimento repetitivo quanto à mobilização de conceitos geométricos de PMat. Devido às lacunas existentes no ensino de geometria em níveis de ensino anteriores e às limitações resultantes desse fato, os PMat e futuros PMat podem manifestar falta de confiança ao abordarem conceitos geométricos na escola básica. Para mitigar as dificuldades e permitir que o professor e o futuro PMat se sintam mais confiantes para trabalhar com GNE na educação básica, há de haver uma formação inicial abrangente e dinâmica que incentive a formação profissional contínua e ininterrupta. Cumprir instrumentalizar o professor e o futuro PMat para enfrentar os desafios relacionados ao trabalho com GNE na educação básica. Nessa ótica, o contato com propostas, metodologias e recursos didáticos é essencial.

Os recursos e os materiais didáticos desempenham um papel importante na promoção da compreensão de conceitos e na experiência de licenciandos, professores e estudantes acerca de GNE, assim como outros em conteúdos matemáticos, e são utilizados como suportes tangíveis para a exploração e a visualização de certas conjecturas. Brum, Schuhmacher e Silva (2016) sugerem que os documentários têm potencial como recurso didático educacional e organizador prévio do ensino de GNE. Dentre as sugestões indicadas pelos autores, destacamos “As aventuras de Radix”, que aborda a Geometria Esférica em um contexto de desmatamento e “Alta Ansiedade – A Matemática do Caos”, que discorre sobre a incerteza e a ansiedade diante das descobertas matemáticas do século XX.

Algumas pesquisas também recomendam as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) como recurso didático para o ensino de GNE. Gomes e Araman (2017) unem vídeos didáticos que abordam a origem dessas geometrias à História da Matemática e Silva *et al.* (2021) indicam a utilização do *software* GeoGebra em estudos introdutórios de Geometria Hiperbólica.

⁴¹ As autoras entendem o termo como “Um estado de agitação motivado por uma situação problemática, para a qual, ao mesmo tempo, se deseja a melhor solução e se teme que o pior vai acontecer. Em geral, deixa os envolvidos desanimados e incapazes de encontrar prazer nas atividades supostamente agradáveis [...]” (Bottom, 2000 *apud* Bortoloni, 2009 *apud* Carvalho; Carvalho, 2010, p. 2).

Outros estudos sugerem: abordagens interdisciplinares, envolvendo conteúdos não euclidianos, como: Geometria Fractal e Arte (Przybyviz *et al.*, 2018); Geometria do Táxi, modelos de Geografia urbana (Gusmão; Sakaguti; Pires, 2017) e Cartografia (Cavalcante *et al.*, 2019); Geometria Esférica, Geologia (Sousa; Gomes, 2015) e Geografia (Honda, 2013). O uso de recursos materiais didáticos concretos (Leivas; Bettin, 2021) e manipuláveis (Gregor *et al.*, 2021) também são citados como estratégias para o ensino e a aprendizagem de GNE.

No trabalho com GNE, a história tem um papel peculiar enquanto recurso didático. A crise de fundamentos gerada pelas tentativas de prova e posterior negação do quinto postulado de Euclides foi relevante para quebrar paradigmas históricos e filosóficos do campo matemático e científico e, de certo modo, ditou o futuro da matemática a partir do século XX (Kaleff, 2007). Esses fatos fazem com que os estudos acerca das GNE possam tangenciar seus aspectos históricos. No estudo de Araman e Gomes (2020), a História da Matemática foi utilizada em um curso de formação continuada para promover o desenvolvimento profissional dos participantes. Os resultados revelaram que, ao pensar sobre as GNE, os professores a refletem, de forma ampliada, sobre os conceitos euclidianos e agregam conceitos não euclidianos aos conhecimentos geométricos. Além disso, os autores enfatizam que vivenciar o uso pedagógico da História da Matemática e suas potencialidades incentivou os professores a incorporarem esse recurso às suas práticas, a partir das reflexões engatilhadas no processo formativo. O uso de aspectos históricos para o trabalho com GNE é amplamente considerado na literatura (Araman, 2011; Brito, 1995; Detoni; Pinheiro, 2016).

A história da matemática pedagogicamente vetorizada (Miguel, Miorim, 2004) é, como o nome acena, uma história orientada por objetivos pedagógicos, e constituída a partir do ponto de vista de PMat. Os autores apresentam três características dessa história: i) é uma história institucional e cultural da matemática constituída a partir de necessidades, questões e problemas relacionados a momentos e lugares em que a matemática se faz presente, relacionando-a com outras práticas sociais; ii) a noção de que a história pretende questionar problemas manifestados nas práticas de pesquisadores da Educação Matemática e de PMat; iii) a historiografia deve ser encarada como forma de diálogo e não apenas como fonte de respostas e procedimentos a serem “copiados”. Tais características abrangem as discussões históricas possíveis sobre as GNE. O uso de elementos históricos em aulas de matemática não pode ser restrito à simples “contextualização” e “motivação” para os estudantes, nem aderir à abordagens cronológicas e recapitulacionistas. Essa abordagem histórica pode colaborar na constituição do conhecimento matemático dos estudantes e na constituição, também, do conhecimento pedagógico de PMat e

futuros Pmat. Além disso, a história, enquanto recurso pedagógico, encoraja a humanização, que está em falta nos dias atuais.

Esta seção de discussão teve o objetivo de estabelecer relações entre os resultados analíticos da pesquisa e a literatura disponível. Na sequência, apresentamos algumas considerações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, exploramos alguns elementos relacionados ao trabalho com GNE na formação de PMat com base em pesquisas brasileiras e evidenciamos a complexidade e a relevância dessa temática.

Pudemos constatar que os conceitos, propriedades e resultados de GNE, em geral, não integraram a formação de PMat. Em decorrência disso, conhecimentos geométricos não euclidianos não puderam ser mobilizados entre PMat e futuros PMat e, consequentemente, às suas práticas de ensino. Porém, há indícios de que os cursos de licenciatura estão considerando outros modelos geométricos em seus currículos e que formações continuadas sobre a temática estão sendo fomentadas.

A carência de familiaridade e a compreensão da incipiente por parte de PMat e futuros PMat, em relação às GNE, impactam diretamente sua confiança para lecionar esses conteúdos na educação básica. A introdução, a exploração e o entendimento de conceitos não euclidianos abrem novas possibilidades para os professores em formação e permitem a ampliação dos conhecimentos geométricos. Além disso, o contato com outras geometrias promove reflexões sobre os conceitos, os resultados e as relações da própria GE e viabilizam conexões entre diversas disciplinas.

Em contextos formativos, a exposição de propostas, os recursos e os materiais didáticos para o ensino de GNE na educação básica igualmente são valiosos e instrumentalizam os professores em formação para tal. O contato com uma diversidade de abordagens permite que o professor considere diferentes contextos de ensino, se prepare para os desafios inerentes ao trabalho com conteúdos não convencionais e adquira mais confiança em suas práticas futuras.

Outro ponto relevante diz sobre a necessidade de ouvirmos os PMat e futuros PMat e os considerarmos parte do processo de debate. Fornecer a oportunidade de diálogo sobre tais questões, ouvir seus anseios, dúvidas e medos também são resultados das pesquisas, mesmo que não sistematizados no corpo dos textos.

Em síntese, apesar da presença tímida de GNE entre propostas curriculares e concepções de professores e futuros PMat, há indícios encorajadores: a consideração desses conteúdos nos currículos de licenciatura; o estímulo de formações continuadas, voltadas para essa temática; a divulgação e a elaboração de estratégias pedagógicas para o seu trabalho; e as possibilidades de reflexão sobre a geometria, a matemática e outras áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS DO *CORPUS*

ARAMAN, E. M. O; GOMES, L. F. Recorte de episódios históricos para as aulas de matemática: um caminho possível. **R. Bras. de Ensino de C&T**, Ponta Grossa, v. 11, n. 3, p. 274-295, set./dez. 2018.

ASSIS, E. S. D. A Geometria Hiperbólica nos currículos escolares e universitários. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.3, p. 393-413, 2017.

CALDATTO, N. E.; PAVANELLO, R. M. O processo de inserção das Geometrias Não Euclidianas no currículo da Escola paranaense: a visão dos professores participantes. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 42-63, abr. 2014.

LEIVAS; J. C. P. Elipse, parábola e hipérbole em uma geometria que não é euclidiana. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 9, n. 2, p. 189-209, 2014.

LEIVAS, J. C. P. Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.3, p. 647-670, 2013.

LEIVAS, J. C. P; SOARES, M. T. C. Triângulos diferentes: dos planos aos geodésicos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.13, n.1, p. 77-93, 2011.

LOPES, M. R. C. M.; AMARAL, A.; MATTO, A. F.; SILVA, K. B. R. Fractais na Educação Básica: Aprendendo com Quebra-Cabeças, Arte Francesa e Cartões. **Educação Matemática Em Revista**, v. 19, n. 41, p. 37-44, ago. 2014.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. As concepções de Geometrias não Euclidianas de um grupo de professores de matemática da Educação Básica. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 369-388, abr. 2015.

LOVIS, K. A; FRANCO, V. S; BARROS, R. M. O. Dificuldades e obstáculos apresentados por um grupo de professores de matemática no estudo da geometria hiperbólica. **Zetetiké**, FE/Unicamp, v. 22, n. 42, jul/dez-2014.

MURARI, C. Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 187-211, dez. 2011.

REFERÊNCIAS

ALTOÉ, R. O.; ZANON, J. M.; PEREIRA, B. M.; GUSSANI, S. B.; CECOTTI, V. T. Contribuições de uma oficina sobre Geometria do Táxi na formação de professores que ensinam matemática: entre descobertas, aprendizagens e prática docente. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel (PR), v. 6, n. 2 p. 193-216, ago. 2022.

AMBROZI, L.; GLOWACKI, J.; SAUER, L. T. Z. Explorando Conceitos de Geometria não Euclidiana. **Scientia Cum Industria**, v. 3, n. 3, p. 130-133, 2015.

ARAMAN, E. M. O.; GOMES, L. F. Desenvolvimento profissional e história da matemática: um exemplo a partir das geometrias não euclidianas. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, Ponta Grossa, v. 22, n. 2, ago. 2020.

BARROS, R. C. P.; PAVANELLO, R. M. Relações Entre Figuras Geométricas Planas e Espaciais no Ensino Fundamental: o que Diz a BNCC? **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v.15, n.1, p. 11–19, 2022.

BONGIOVANNI, V.; JAHN, A. P. De Euclides às geometrias não euclidianas. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 22, p. 37–51, jun. 2010.

BRITO, A. J. **Geometrias não Euclidianas: Um Estudo Histórico-Pedagógico**. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1995.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E.; SILVA, S. C. R. A utilização de documentários enquanto organizadores prévios no ensino de geometria não Euclidiana em sala de aula. **Acta Scientiarum Education**, Maringá, v. 38, n. 1, p. 43-49, jan./mar. 2016.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. As Geometrias Não-Euclidianas, presentes no currículo da escola básica e ausentes nas licenciaturas em Matemática do Estado do Paraná. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2011, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: SIEMAT, 2011, p. 1-10.

CARLI, F. A. R. **A aprendizagem de geometrias não Euclidianas: um estudo realizado com professores da rede pública de ensino**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, 2012.

CARVALHO, A. S.; CARVALHO, A. M. F. T. A questão da ansiedade no ensino e aprendizagem das geometrias não euclidianas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ENEM, 10. **Anais[...]**. Salvador: BA: 2010

CAVALCANTE, R. N. B.; SOUSA, M. H. R.; SOUSA, J. P. R. A interdisciplinaridade entre matemática e Geografia: inferindo conceitos de localização e Distâncias na cidade. **Revista Encantar – Educação Matemática e Sociedade**, Bom Jesus da Lapa, v. 1, n. 3, p. 7-20, set./dez. 2019.

CAVICHIOLO, C. V. **Geometrias não Euclidianas na formação inicial de professores: o que dizem os formadores**. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2011.

CÉDREZ, Á. J. P. Construcción, necessidade e intuición esencias em geometria. **Scientia & Studia**. São Paulo, v. 7, n. 4, p. 595-617, 2009.

DETONI, A. R.; PINHEIRO, J. M. L. Compreensões filosóficas para uma alternativa do pensamento geométrico. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 11, p. 232-243, 2016.

FERNANDES, F. S.; GROSSI, C. D. P.; MARTINS, M. F. A. A cidade “abandonou” a geometria; o campo não! Reflexões sobre a geometria e o seu ensino na perspectiva da Educação do Campo. **Acta Sci.**, Canoas, v. 24, n. 8, p. 134-162, 2022.

FIORENTINI, D. *et al.* O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. In: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. d. (org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática: período 2001 – 2012**. Campinas, SP:FE/UNICAMP, 2016.

GOMES, L. F.; ARAMAN, E. M. O. História da Matemática em Vídeos: uma produção acerca da origem das Geometrias Não Euclidianas. **BoEM**, Joinville, v. 5, n. 9, p. 40-61, ago-dez. 2017.

GREGOR, I. C. S. *et al.* O estudo de geometria esférica na formação de PM: uma experiência baseada na utilização de materiais manipuláveis. **Research, Society and Development**, v. 10, n.1, 2021.

GUSMÃO, N. L.; SAKAGUTI, F. Y.; PIRES, L. A. A geometria do táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 19, n. 2, 2017.

HONDA, A. M. C. **Matemática e Geografia**: uma interdisciplinaridade. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 108p, 2013.

KALEFF, A. M. R. Geometrias não Euclidianas na Educação Básica: Utopia ou possibilidade? In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 10, 7 a 9 Jul. 2010, Salvador, BA. **Anais[...]**. Salvador, BA: 2010.

LEIVAS, J. C. P.; BETTIN, A. D. Investigando propriedades topológicas com alunos do ensino fundamental. **R. Bras. de Ensino de C&T**, Ponta Grossa, v. 14, n.2, ago. 2021.

LEIVAS, J. C. P.; SOUZA, H. M.; PORTELLA, H. P. Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na Escola Básica no Brasil com Geogebra. **Revista Thema**, v. 14, n. 3, p. 210-221, 2017.

LOVIS, K. A.; LUNKES, M. E. Formação continuada para acadêmicos e professores de matemática: relato de um projeto de extensão. **Revista de Extensão do Instituto Federal Catarinense**, n. 3, p. 19-26, 2015.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

OLIVEIRA, E. M.; FERREIRA, L. Desenvolvimento profissional e história da matemática: um exemplo a partir das geometrias não euclidianas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 2, p. 452-482, 2020.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica**. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1989.

PRZYBYVIZ, F.; NASCIMENTO, J. K. M.; STACHESKI, J. M.; UCOSKI, L. F. Ensino da Geometria Fractal. *In*: SIMPÓSIO INTEGRADO DE MATEMÁTICA, **Anais[...]**. Ponta Grossa, out. 2018.

REIS, J. D. S. **Geometria Esférica por meio de materiais manipuláveis**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 158 f, 2006.

SANTOS JÚNIOR, C. L. dos. **Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de Matemática**: uma proposta à produção de significados no estudo de Geometria. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020, 239 p.

SANTOS, T. S. **A inclusão das geometrias não-euclidianas no currículo da educação básica**. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática)-Universidade Estadual de Maringá. Maringá, p., 2009.

SILVA, C. M.; VAZ, C. S. S.; MENEGAIS, D. A. F.; MELENDEZ, T. T. Introdução à geometria hiperbólica com o GeoGebra. *In*: SALÃO INTERNACIONAL DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO, 13. **Anais[...]**, v. 13, n. 1, 16 nov. 2021.

SOUSA, M. A. M. S.; GOMES, C. R. Interdisciplinaridade Geologia e Matemática: Estudos numa perspectiva de formação de professores ao longo da vida. *In*: CONGRESSO DESAFIOS CURRICULARES E PEDAGÓGICOS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES. **Anais [...]**. Braga, Portugal, 2015.

SOUZA, L. R. **Geometrias não-Euclidianas na formação de professores**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, p., 2022.

ARTIGO-CAPÍTULO 2

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: REFLEXÕES DE PROFESSORAS FORMADORAS EXPERIENTES NO ENSINO DE GEOMETRIA

Resumo: Este artigo tem por objetivo discutir reflexões manifestadas por professoras experientes no ensino de geometria a respeito das Geometrias não Euclidianas (GNE) na formação, inicial e continuada, de professores de matemática (PMat). Esta pesquisa é de natureza qualitativa de cunho interpretativo e para obter as informações foi solicitada, a três professoras experientes no ensino de geometria, a produção de narrativas escritas acerca dessa temática. No processo de análise, foram identificados três pontos de enfoque, nomeadamente: justificativas para o trabalho com GNE na formação de PMat; desafios inerentes à inclusão de GNE na formação de PMat; e sugestões de metodologias, abordagens e recursos didáticos para trabalhar com GNE na formação de PMat. Esses pontos de enfoque tratam de aspectos que foram tidos pelas professoras como relevantes para serem considerados em programas de formação de PMat por proporcionarem ampliação de horizontes conceituais, permitindo uma compreensão abrangente do espaço e das propriedades geométricas; desenvolvimento de um pensamento crítico em relação à matemática, como uma área em constante evolução; preparação para desafios educacionais, tendo em conta diferentes abordagens e recursos; e incentivo à curiosidade e à exploração, tornando a aula mais envolvente e interessante. O trabalho com as GNE na formação de PMat pode não apenas promover benefícios pedagógicos, cognitivos e conceituais, como também preparar os educadores para abordarem a matemática de maneira rica e contextualizada.

Palavras-chave: formação de professores de matemática; geometrias não euclidianas.

INTRODUÇÃO

A Geometria Euclidiana (GE) é um dos diversos campos de conhecimento da matemática que fornecem elementos que nos permitem compreender o espaço e construir modelos que o representem. Esse campo foi assumido como referência predominante por séculos, possibilitando o estudo das propriedades e as relações do espaço, como forma, tamanho, posição relativa dos objetos e propriedades do espaço entre si. Porém, a GE encontra algumas limitações, quando nos referimos, por exemplo, a observações astronômicas e a objetos com padrões irregulares e/ou fragmentados. Diante destas e outras situações, as GNE tornam-se relevantes e oferecem novos meios de se explorar, descrever e analisar o mundo.

Nos últimos anos, o debate sobre o ensino de geometria passou a considerar a inserção de GNE no currículo da educação básica (Carvalho; Azevedo, 2020; Leivas; Portella; Souza,

2017; Padilha; Moran, 2023). A inclusão de GNE em Diretrizes Curriculares Estaduais, como nos estados do Paraná (2008), Ceará (2008) e São Paulo (2011), promoveu debates sobre aspectos a serem levados em conta na formação de PMat para o seu trabalho na educação básica e sobre a necessidade de sua incorporação na formação inicial e continuada de PMat (Gomes; Araman; Rocha, 2017; Leivas, 2014). Foram considerados nesse debate: a expertise necessária ao PMat para trabalhar com GNE na educação básica; conexões dessas geometrias com elementos históricos (Araman; Gomes, 2020); possibilidades para mitigar lacunas da formação inicial dos professores em relação à geometria (Gomes; Araman; Rocha, 2017); demandas educacionais e tecnológicas do século XXI (Kaleff, 2007); a compreensão de interfaces e conexões entre a GE e as GNE (Altoé *et al.*, 2022); dentre outras temáticas. Porém, ainda são poucas as pesquisas que consideram as GNE em contextos de formação de PMat (Cybulski, 2022).

Uma vez que a formação do PMat é crucial para a efetivar abordagens que levem em conta a GNE na educação básica, ouvir considerações de formadoras experientes no ensino de geometria a respeito dessa temática pode promover reflexões significativas para propor ações formativas. Para tanto, analisamos as narrativas produzidas por três formadoras experientes⁴² acerca do trabalho com GNE na formação de PMat. Elas foram consideradas formadoras experientes por serem reconhecidas por seus pares como formadoras de professores que são protagonistas de seus processos de aprendizagem profissional e por apresentarem em sua atividade profissional e acadêmica características que demonstram capacidade de formação e de transformação em relação ao ensino de geometria (Oliveira; Cyrino, 2023).

Na sequência, tecemos algumas considerações sobre as GNE na formação de PMat. Posteriormente, apresentamos os encaminhamentos metodológicos, as análises, as discussões dos resultados e, por fim, as considerações finais.

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Apesar de as GNE integrarem as diretrizes curriculares de alguns estados, Santos Júnior (2020), a partir de um mapeamento de cursos de licenciatura em Matemática de universidades públicas brasileiras, concluiu que a sua presença ainda é tímida nos currículos (15, 32%) de formação de professores. Por conseguinte, Lovis e Franco (2015) indicaram que conhecimentos

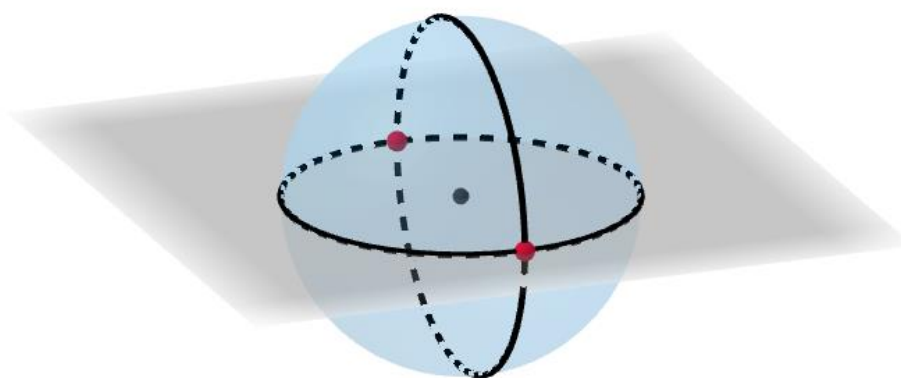
⁴² Não é o foco desta pesquisa discutir o conceito de experiência estendido às participantes. Informações sobre as categorias, aspectos relevantes e demais discussões sobre tal questão disponível em Oliveira (2022).

de GNE, em geral, não integram as concepções de PMat. No entanto, esses autores levantaram a hipótese de que essas concepções estão sendo transformadas e formadas em formações continuadas a partir da inclusão de GNE na educação básica.

Ao pensar o trabalho com as GNE na formação de PMat, devemos considerar um possível confronto entre essas geometrias e a GE. As GNE são sistemas geométricos que se afastam de princípios da GE, ou seja, podem não estar de acordo com algum dos postulados de Euclides (como no caso das Geometrias Esférica, Hiperbólica, Elíptica e Projetiva) ou utilizar conceitos fundamentais diferentes dos euclidianos (como “dimensão” na Geometria Fractal e “medida” na Geometria do Táxi).

Por exemplo, o termo “paralelas” pode ser associado, automaticamente, ao conceito de retas paralelas da GE, pois é a forma mais comum e inicial com a qual estudantes são apresentados à noção de paralelismo na matemática. Eles aprenderam que retas paralelas são aquelas que “nunca se encontram”, mantêm uma distância constante entre si e se prolongam indefinidamente. Porém, essa ideia é válida seguindo um dos princípios da GE: o quinto postulado (postulado das paralelas). Quando consideramos que não existem retas paralelas a uma dada reta através de um ponto externo, estamos considerando princípios que constituem outras geometrias como, por exemplo, a Geometria Esférica. Nessa geometria, são consideradas retas apenas os círculos máximos (geodésicas) da superfície. Esse fato faz com que, quaisquer duas retas construídas sobre a superfície esférica sempre se encontrem em dois pontos diametralmente opostos (Figura 1).

Figura 1 – Retas na Geometria Esférica.



Fonte: As autoras (2023)

A problematização pode ser feita a partir dessa imagem (Figura 1). A inexistência de retas paralelas na Geometria Esférica contrasta com a noção de paralelismo e de retas da GE.

A partir da problematização da definição convencional de reta como uma linha infinita que se estende em ambas direções sem curvatura, desafia-se a intuição construída a partir da GE e reinterpreta-se conceitos geométricos fundamentais.

Portanto, necessário se faz pensar a formação de PMat, como um processo complexo, dinâmico e infindo que engloba a interação de vários elementos. Desse modo, o estudo de GNE em contextos de formação de PMat pode ter um impacto positivo para entender os elementos da própria GE (Souza, 2022), ao permitir que sejam atribuídos diferentes significados aos conceitos de reta, paralelismo e soma dos ângulos internos de um triângulo, o que amplia a sua compreensão, quando constituídos no modelo geométrico euclidiano (Santos Júnior, 2020). Ademais, o trabalho com GNE pode “contribuir para uma nova dimensão à prática pedagógica do professor, pois ele pressupõe o desenvolvimento de processos de argumentação, de formulação de conjecturas e de desenvolvimento do raciocínio dedutivo” (Cabariti; Jahn, 2006).

Esse fato tem o potencial de auxiliar o (futuro) professor em formação a compreender a evolução dos tratamentos axiomáticos em geometria e como isso se relaciona com o desenvolvimento da própria matemática (SBEM, 2013).

Em contextos de formação de professores, a problematização de sistemas axiomáticos pode ser feita por meio de uma discussão histórico-filosófica. Estudar as GNE desafia conceitos arraigados, como a ideia de uma geometria única e absoluta, e instiga debates sobre a natureza do conhecimento e mudanças paradigmáticas na ciência. Ou seja, discutir a existência de outros sistemas constituídos, por princípios distintos da GE, pode promover a constituição de concepções de matemática e de ciência não dogmáticas, necessárias ao educador matemático.

Estudar o desenvolvimento histórico-filosófico das GNE na formação de PMat pode ser valioso para a sua (futura) prática pedagógica, uma vez que a matemática não é apenas um conjunto de fatos objetivos, mas também um produto da cultura e da sociedade de um determinado período.

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Esta investigação⁴³, qualitativa de cunho interpretativo (Erickson, 1986), tem como objetivo discutir reflexões reveladas por professoras formadoras a respeito da GNE na formação de PMat. Para tanto, foram convidadas três professoras experientes no ensino de geometria, as

⁴³ Aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Londrina (parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231).

quais foram escolhidas por terem trabalhado ou por trabalharem com a formação de PMat no estado do Paraná, que sinalizou as GNE em suas Diretrizes Curriculares; por terem desenvolvido projetos e publicações relacionados ao ensino de geometria; por terem orientado dissertações/teses/iniciações científicas relacionadas à geometria; e por terem interesse por GNE. Não nos preocupamos com a representatividade numérica de professores investigados, pois não temos pretensão de tecer generalizações relacionadas ao trabalho com GNE em contextos de formação de PMat e, sim, discutir reflexões de formadoras consideradas experientes⁴⁴ no ensino de geometria. Na perspectiva de Jorge Larrosa (2002, p. 24):

a experiência, a possibilidade de que algo nos aconteça ou nos toque, requer um gesto de interrupção, um gesto que é quase impossível nos tempos que correm: requer parar para pensar, parar para olhar, parar para escutar, pensar mais devagar, olhar mais devagar, e escutar mais devagar; parar para sentir, sentir mais devagar, demorar-se nos detalhes, suspender a opinião, suspender o juízo, suspender a vontade, suspender o automatismo da ação, cultivar a atenção e a delicadeza, abrir os olhos e os ouvidos, falar sobre o que nos acontece, aprender a lentidão, escutar aos outros, cultivar a arte do encontro, calar muito, ter paciência e dar-se tempo e espaço.

A experiência, portanto, é aquilo que “nos passa, que nos acontece, o que nos toca.” (Larrosa, 2002, p. 21). As três professoras escolhidas, ⁴⁵Loreni, Marie-Claire e Mariana, apresentam essas características e foram convidadas pela primeira autora deste artigo a participar desta investigação. (Quadro 1)

Quadro 1 - Formação e atuação profissional das professoras participantes

Professora	Formação	Atuação Profissional	
		Educação Básica	Ensino Superior
Loreni	Licenciatura em Matemática (1991) (UEL); Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática (2004) (UEL); Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática (2014) (UEL).	28 anos	16 anos

⁴⁴ As autoras desse artigo conhecem e trabalharam, em algum momento, com as professoras participantes da pesquisa. Elas são do estado do Paraná, o qual incluiu tópicos de GNE no currículo da educação básica (Paraná, 2008). As professoras têm ou tiveram uma participação ativa na área de Educação Matemática, tanto em escolas quanto em Universidades públicas, envolvendo-se em cursos de graduação, em programas de pós-graduação, em projetos de extensão, em grupos de pesquisa e em eventos acadêmicos da área. O comprometimento com a disseminação do conhecimento, com a Educação Matemática, bem como o uso responsável de recursos públicos, se faz presente nas ações das participantes e é possível identificar quando algo nos toca por aquilo que nós fazemos. Portanto, nos sentimos confortáveis em chamá-las de experientes na perspectiva de Larrosa (2002). Tal conforto não se faria presente *a priori* se as autoras não conhecessem as participantes, uma vez que apenas o tempo de atuação não é suficiente atribuir a alguém o status de experiente, conforme essa perspectiva.

⁴⁵ Os nomes não são fictícios.

Marie-Claire	Licenciatura em Matemática (1976) (UEPG); Graduação em Engenharia Civil (1980) (UEL); Mestrado em Estatística (1989) (UEL); Doutorado em Tecnologia de Ensino (2000) (Université Laval).	4 anos	26 anos
Mariana	Graduação em Matemática (2004) (UEM); Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática (2010) (UEM); Doutorado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática (2015) (UEM).	-	Desde 2008

Loreni atuou como professora formadora nos cursos de licenciatura da Faculdade de Apucarana (FAP) e da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Na formação de PMat, a professora Loreni trabalhou com as disciplinas de Geometria, Geometria Plana, Geometria Espacial e Ensino de Geometria. Atuou na formação de PMat em diversas Secretarias de Educação Municipal do estado do Paraná, produziu artigos e desenvolveu projetos relacionados à GNE na formação inicial de PMat.

Marie-Claire atuou como professora formadora na UEL nos cursos de Licenciatura em Matemática e Arquitetura e Urbanismo. Também atuou no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PECEM. Lecionou disciplinas como Desenho Geométrico, Geometria Descritiva, Desenho Arquitetônico, Geometria e Álgebra Linear. Marie-Claire elaborou e desenvolveu projetos envolvendo Desenho Geométrico, Geometria e ensino de Geometria para professores da escola básica e para estudantes de graduação.

Mariana trabalha na formação inicial de PMat na Universidade Estadual de Maringá (UEM) e no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PRPGEM) da UNESPAR. É líder do grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria (GPEG) que estuda o ensino de Geometria e a Didática da Matemática e é a Primeira Secretária da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – regional Paraná (SBEM/PR) (2022-2025). Já lecionou nos cursos de Licenciatura em Matemática, Pedagogia, Ciências Econômicas, Informática, Ciência da Computação, Ciências Contábeis, Engenharia Civil, Engenharia de Produção, Zootecnia e Ciências Biológicas. Ela elaborou e desenvolveu projetos de pesquisa, escreveu artigos para revistas e eventos e orientou iniciações científicas, relacionados à GNE. Atualmente, orienta uma pesquisa de mestrado sobre a temática.

As três professoras foram convidadas a elaborar narrativas de natureza reflexiva, tendo em vista suas considerações sobre o trabalho com GNE na formação de PMat. A escolha pelo uso de narrativas nessa investigação se sustenta no fato de que indivíduos têm histórias para contar e estas podem indicar como interpretam, criticam e vislumbram o mundo, individual e

socialmente. Esses indivíduos são atores de suas histórias, revelam-se e constituem-se por meio do discurso. A narrativa indica *o que e como* pensam sobre determinado assunto, e a experiência de quem a escreve pode assumir a forma das narrativas usadas para contá-las.

Ao contar ou escrever uma situação vivida, quem produz a narrativa mostra como vivenciou a experiência, revelando um conhecimento tácito. Essa função da linguagem, de construir a realidade pelo modo como o indivíduo dá sentido ao mundo e às suas vivências, parece-me ser o traço que define e torna narrativa peculiar em relação a outras formas do discurso e o que a torna um poderoso método de investigação em educação (Coura, 2018, p. 62).

Portanto, as narrativas seriam como reconstruções particulares da experiência (Bolívar; Domingo; Fernandes, 2001). A palavra *narrativa* é polissêmica. Pode se referir à escrita do professor, narrativas autobiográficas e de experiência, histórias de vida, pesquisa narrativa etc. “Em muitos casos, não se trata de termos correlatos, mas com múltiplos significados e múltiplas formas de abordagem teórica e de análise” (Mendes; Passos; Silva, 2014, p.703). Nesse estudo, as narrativas foram utilizadas como instrumento metodológico para a obtenção das informações, posteriormente analisadas e discutidas. Solicitamos às professoras que produzissem narrativas de natureza reflexiva considerando o enunciado a seguir (Figura 1). Destacamos que o presente artigo faz parte de uma pesquisa de mestrado que considerou, além dos aspectos relacionados ao trabalho com GNE na formação de PMat, aspectos relacionados à educação básica.

Figura 2 – Enunciado da narrativa

Objetivos:

- Compreender percepções de professoras experientes no ensino de Geometria a respeito do trabalho com as Geometrias Não Euclidianas em contextos de formação de professores e na Educação Básica;

Orientações: Considerando seu trabalho como formadora de professores e como professora de geometria, elabore um texto de natureza reflexiva que apresente as suas percepções a respeito das Geometrias não Euclidianas na formação de professores de matemática e na Educação Básica.

Para a construção dessa narrativa, você pode contemplar:

- o papel das Geometrias Não Euclidianas na formação inicial e continuada de professores de matemática;
- elementos das Geometrias Não Euclidianas a serem considerados na formação de professores de matemática;
- os desafios inerentes ao formadores de professores no trabalho com as Geometrias não Euclidianas na formação de professores.

Fonte: As autoras (2023)

A natureza das narrativas é reflexiva, uma vez que expõem elementos problematizadores de suas práticas docentes e de seus saberes experienciais (Freitas, Fiorentini, 2007). As

professoras, ao narrarem de maneira reflexiva suas experiências a outros, aprendem e ensinam e podem (re)significar suas experiências e saberes próprios (Clandinin, 2003). As reflexões, sob a ótica de Muir e Beswick (2007), podem ser classificadas em diferentes níveis: a descrição técnica, que contém relatos gerais da prática docente por vezes focados em aspectos técnicos em detrimento do valor das experiências; a reflexão deliberada, que identifica eventos particulares em sala de aula e fornece justificativas para comportamentos e/ou ações; e a reflexão crítica, que, além de identificar esses eventos, fornece explicações que levam em conta perspectivas dos outros e oferece alternativas relacionadas ao ensino e aprendizagem. A análise das três narrativas produzidas pretendeu identificar reflexões, ideias e opiniões das formadoras sobre GNE na formação de PMat.

O diálogo, no sentido estrito do termo, não constitui, é claro, senão uma das formas, é verdade que das mais importantes, da interação verbal. Mas pode-se compreender a palavra “diálogo” num sentido amplo, isto é, não apenas como a comunicação em voz alta, de pessoas colocadas face a face, mas toda comunicação verbal, de qualquer tipo que seja (Bakhtin, 2010, p. 117).

No processo de análise das narrativas também foram utilizadas mensagens de texto em conversas de um aplicativo de mensagens instantâneas, realizadas para esclarecer algumas afirmações presentes nas narrativas.

A análise foi dividida em quatro momentos principais. No primeiro, fizemos leituras iniciais e flutuantes de modo a compreender todos os elementos abordados nas narrativas. Fizemos marcações e anotações preliminares, buscando estabelecer algumas relações entre as considerações de cada narrativa, o que nos permitiu vislumbrar superficialmente possíveis pontos de enfoque. Em seguida, no segundo momento, foram selecionados trechos que julgamos representativos para o delineamento dos pontos de enfoque.

Na busca de estabelecer pontos de enfoque bem delimitados, empregamos algumas estratégias. Imprimimos e organizamos os trechos sobre uma mesa e tentamos agrupá-los de acordo com os possíveis pontos de enfoque iniciais, porém notamos que alguns trechos podiam se encaixar em mais de um agrupamento. Para resolver essa questão, fizemos destaques nas narrativas com marca-textos coloridos e sublinhados e gravamos em áudio as leituras completas de cada narrativa. Após a combinação desses métodos, constituímos três pontos de enfoque, nomeadamente: justificativas para o trabalho com GNE na formação de PMat; desafios relacionados à inclusão de GNE na formação de PMat; e sugestões de metodologias, abordagens e recursos didáticos para o trabalho com a GNE na formação de PMat.

No terceiro momento, levando em conta os objetivos de nossa pesquisa, organizamos a descrição e a análise interpretativa das informações, em torno dos pontos de enfoque. Contudo, como surgiram algumas dúvidas relacionadas aos trechos das narrativas, num quarto momento, contactamos as professoras participantes via um aplicativo de mensagens instantâneas para esclarecer algumas informações. O conteúdo das mensagens de texto passou a integrar o *corpus* da pesquisa.

Na próxima seção, apresentamos e analisamos aspectos constituintes dos pontos de enfoque. Utilizamos N. para representar trechos retirados das narrativas produzidas pelas professoras formadoras; e M.T. para indicar as mensagens de textos encaminhadas pelo aplicativo de mensagens instantâneas.

REFLEXÕES MANIFESTADAS POR PROFESSORAS FORMADORAS A RESPEITO DAS GNE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Nesta seção, descrevemos e analisamos aspectos revelados pelas professoras experientes no ensino de geometria a respeito do trabalho com GNE na formação inicial e continuada de PMat. Em alguns casos, apontamos ao leitor exemplos (entre figuras e modelos manipuláveis com acesso disponibilizado por notas de rodapé) que desencadear a apreensão de alguns aspectos citados nas narrativas.

O texto a seguir está organizado em torno dos três pontos de enfoque, nomeadamente: justificativas para o trabalho com GNE na formação de PMat; desafios relacionados à inclusão de GNE na formação de PMat; e sugestões de metodologias, abordagens e recursos didáticos para o trabalho com GNE na formação de PMat.

Justificativas para o trabalho com Geometrias não Euclidianas na formação de professores de Matemática

Ao discorrer sobre GNE, as professoras justificam a presença dessa temática na formação de PMat.

Mariana e Loreni destacam que o trabalho com GNE pode favorecer o diálogo com outros conceitos matemáticos. Mariana aponta que este estudo não se limita apenas a área específica de geometria, sublinhando a conexão entre as GNE e os diferentes campos/conceitos da matemática:

o estudo das geometrias não euclidianas possibilita o trabalho com diversos assuntos da matemática tais como: álgebra, aritmética, funções, dentre outros [Mariana, 2023, N].

Podemos citar o trabalho com fractais como exemplo de articulação entre as GNE e álgebra. A árvore bifurcada, ou árvore fractal⁴⁶, é um exemplo de fractal que contém sequências numéricas que podem ser classificadas como progressões aritméticas (PA) ou geométricas (PG). Este fractal é gerado, ao considerarmos um segmento de comprimento 1 (uma unidade), em que o fator de redução é $\frac{1}{2}$ e o ângulo de bifurcação é 120° . Se nos referirmos ao número de novos segmentos e aos seus comprimentos, podemos concluir que a sequência é uma PG, mas se nos referirmos ao nível do fractal e ao comprimento total da curva, a sequência será uma PA.

Loreni defende que o estudo de conceitos de GNE pode ampliar a compreensão de conceitos da própria GE, ao relatar que estas:

têm o papel também de contribuir para melhor compreensão dos conceitos da geometria euclidiana [...] como também da Matemática em geral [Loreni, 2023, N].

Com base nos apontamentos de Loreni, podemos citar como exemplo a aplicação da lei dos cossenos em triângulos esféricos. A referida lei descreve a relação entre os lados e ângulos de um triângulo plano qualquer. A dedução da lei dos cossenos na GE é construída a partir da altura do triângulo, que gera dois triângulos retângulos e nos permite, convenientemente, inferir as razões existentes entre os catetos, a hipotenusa e os ângulos. A versão esférica da lei dos cossenos é conhecida como “fórmula fundamental”, e sua dedução tem elementos em comum com a dedução da lei dos cossenos de triângulos planos: as relações estabelecidas ao longo da prova também advêm da construção de triângulos retângulos planos.

A lei dos cossenos da trigonometria plana relaciona-se com a fórmula fundamental da trigonometria esférica, já que ambas descrevem como dois lados adjacentes e os ângulos de um triângulo estão interconectados. Compreender a consistência e a validade de outros modelos geométricos pode facilitar a compreensão da consistência e a validade da própria GE (Altoé, *et al.*, 2022) uma vez que esta é um caso particular (espaço com curvatura nula) de um espectro mais amplo de possibilidades geométricas.

Loreni considera que

ao estudar estas geometrias [não Euclidianas], tem-se a possibilidade de desenvolver o pensamento geométrico do futuro professor ou do professor, bem como dos estudantes da Educação Básica. Esse estudo colabora para o trabalho com investigações de propriedades, a realização de generalizações e a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento em diferentes contextos [Loreni, 2023, N, grifo nosso].

⁴⁶ Modelo manipulável disponível em: <https://www.geogebra.org/m/WNrtmZap#material/sSFyHXwd>.

Para Loreni, o pensamento geométrico é

um modo de pensar o mundo, uma atividade social em que se utiliza ideias geométricas. Uma atividade intuitiva da mente/pensamento que permite utilizar as ideias dos diferentes espaços geométricos para resolver problemas matemáticos ou não, como na arte, na natureza, na arquitetura etc, ou ainda, para tomar decisões. É também, um pensamento criativo e produtivo que se relaciona com a visão espacial, a representação espacial e o movimento espacial dos objetos geométricos [Loreni, 2023, M.T.].

Entender o espaço com base em conceitos não euclidianos demanda um processo mais abrangente em relação ao pensamento geométrico e permite visualizar, analisar e raciocinar sobre espaços distintos, promovendo mudanças na forma como enxergamos o mundo. Por exemplo, o trabalho com GNE pode ajudar o PMat e o futuro PMat a compreenderem o comportamento de objetos massivos⁴⁷ de nosso sistema solar, o que abrange, inclusive, noções de Física. A teoria da relatividade de Einstein prevê a existência de curvaturas no espaço-tempo e explicita a ideia de que somente corpos massivos têm a capacidade de curvá-lo. A gravidade é uma consequência da curvatura do espaço-tempo, causada por estes objetos, e é uma propriedade geométrica do espaço-tempo. Quanto mais massivo um objeto, maior é a curvatura criada e, portanto, mais forte é a gravidade exercida. Neste espaço-tempo, os movimentos das partículas e da luz são curvos. Todavia, essas curvas nutrem relação com as linhas retas: assim como linhas retas descrevem a trajetória mais curta entre dois pontos em espaços planos, linhas curvas descrevem a trajetória mais curta entre dois pontos em espaços-tempo curvos.

Uma consequência desse fato está associada ao posicionamento dos astros: a posição aparente de uma estrela no céu costuma estar deslocada de sua posição real, devido às curvaturas existentes entre a estrela e o observador⁴⁸. Ampliar o repertório, quanto ao conhecimento geométrico, permite abordar situações-problema nas quais o modelo geométrico euclidiano apresenta limitações para sua resolução, como quando calculamos a posição real de uma estrela qualquer. Igualmente viabiliza investigar as propriedades e as interações dos objetos envolvidos de um outro ponto de vista (superfície com curvaturas).

A professora Mariana também chama a atenção para as contribuições do trabalho com GNE na formação de PMat como caminho para entender situações do cotidiano. As GNE podem

⁴⁷ Objetos massivos são corpos celestes que possuem massa significativa em comparação com outros corpos ao seu redor e exercem influência notável na dinâmica gravitacional no sistema solar. São exemplos: estrelas, planetas, planetas anões e grandes luas.

⁴⁸ Para visualizar os conceitos tratados neste parágrafo, acesse <https://www.geogebra.org/m/hXW4NGMN>.

possibilitar compreender a existência de uma geometria diferente da que estamos habituados e que pode ser reconhecida de forma representativa nas situações do dia a dia e da natureza [Mariana, 2023, N].

Determinados conceitos não euclidianos podem ser utilizados, por exemplo, quando nos deslocamos em espaços urbanos. A menor distância entre dois pontos distintos da cidade não será uma reta (ou segmento de reta) euclidiana, pois não é possível “cortar” as quadras. A distância entre os dois pontos se dá pela soma das unidades de deslocamento pelas quadras, que é o trajeto percorrido. Esta forma de tratar medidas e distâncias, como rotas de tráfego urbano, é denominada Geometria do Táxi⁴⁹, que se difere da GE apenas pela métrica. (Quadro 2)

Quadro 2 - Comparação entre a Geometria Euclidiana e a do Táxi

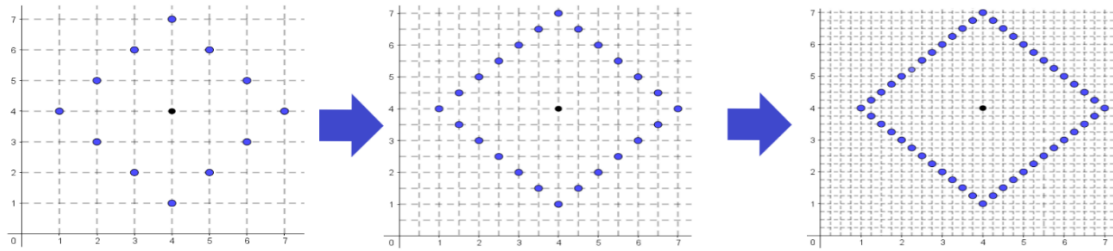
	Geometria Euclidiana	Geometria do Táxi
Cálculo da distância	$d_e(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$	$d_t(A, B) = x_a - x_b + y_a - y_b $
Representação geométrica		

Fonte: Elaborado pelas autoras (2023)

Note que a forma usual de realizar deslocamentos em espaços urbanos é, portanto, não euclidiana (Leivas, 2014). A métrica utilizada na Geometria do Táxi tem implicações significativas na forma como as distâncias são calculadas e interpretadas. Quando trabalhamos com a definição de circunferência da GE “dado um ponto central fixo, todos os pontos equidistantes dele descrevem uma circunferência” na Geometria do Táxi, temos uma representação atípica. Conforme o tamanho das quadras da cidade diminui, os pontos que descrevem a “circunferência” tornam-se mais numerosos e se aproximam da representação de um quadrado, chamado de “táxi-circunferência” (Figura 3).

Figura 3 - Evolução da “circunferência” na Geometria do Táxi

⁴⁹ O plano da Geometria do Táxi pode ser adaptado com a atribuição de pesos específicos a cada unidade, o que resulta em características individuais em cada caso e permite estabelecer comparações fiéis com mapas de cidades.



Fonte: As autoras (2023)

O estudo de outros aspectos, como cônicas, mediatrizes e o valor da constante π , pode explicitar as divergências entre os dois modelos geométricos e colaborar na aceitação de métricas diferentes das utilizadas na GE.

Mariana considera que

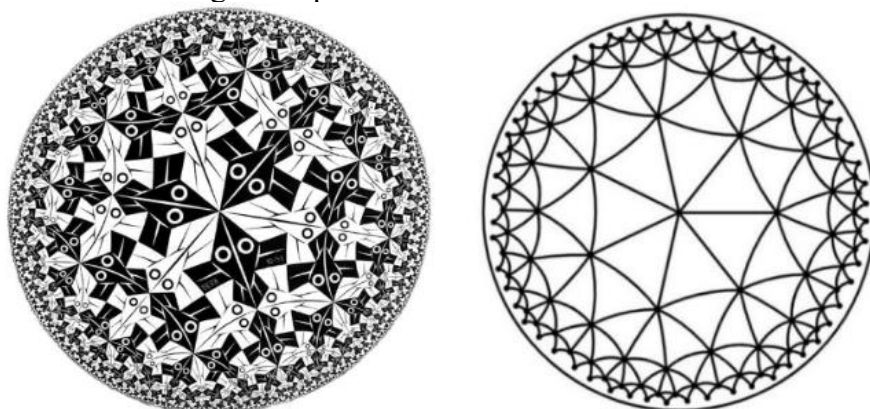
conhecer uma geometria diferente da euclidiana amplia os horizontes em termos de geometria, matemática e cultura. [Mariana, 2023, N].

Como cultura, Mariana relata que compreende

questões relacionadas à astronomia, por exemplo. No caso da geometria esférica [...] podemos pensar no globo terrestre e explorar as suas geodésias (que são as retas curvas). E também, em obras de arte com as de Escher, por exemplo. [...] Além disso, podemos observar em certas arquiteturas modernas que representam as geometrias não euclidianas em seus aspectos de construção [Mariana, 2023, M.T.]

O trecho exemplifica a presença e a influência de conceitos não euclidianos em diferentes aspectos da cultura, como no conhecimento científico (astronomia), arte e arquitetura. Maurits Cornelis Escher (1898-1972) foi um artista gráfico holandês que trabalhou com noções de simetria, perspectiva e GNE. Suas obras podem ser vistas como exemplo de como avanços matemáticos influenciam a Arte. Em *Limite Circular I* (1958), representou tesselações que se assemelham à tesselação com triângulos hiperbólicos no modelo do Disco de Poincaré. (Figura 4)

Figura 4 – Comparação entre a obra *Limite Circular I* (1958) de Escher e tesselação com triângulos hiperbólicos no disco de Poincaré.



Fonte: Ernst (1978, p. 70) e Albon e Nós (2022, p. 25)

As obras de Escher continuam sendo referências culturais e fonte de inspiração para a exploração de ideias matemáticas, demonstrando como a matemática pode transcender as fronteiras acadêmicas e escolares.

Marie-Claire justifica a presença de GNE em cursos de licenciatura e bacharelado em matemática, tendo em conta a importância de sua origem, desenvolvimento e consistência teórica.

É importante que saibam da existência das geometrias não euclidianas, entendam porque elas apareceram, o que justifica a existência delas [Marie-Claire, 2023, N].

Também enfatiza que estudos, envolvendo GNE, podem ser vistos como

ciência e eles [os futuros professores] podem fazer avançar essa ciência com seus estudos e pesquisas [Marie-Claire, 2023, N]

Marie-Claire revela acreditar que, para além de saber da existência de outros modelos geométricos e seus conceitos, o estudo de GNE em contextos de formação de PMat permite aprofundar essa temática em pesquisas acadêmicas. A professora Marie-Claire julga importante que os cursos de formação de bacharéis e licenciados em matemática fomentem, também, a formação de futuros pesquisadores.

Em síntese, as justificativas para o trabalho com as GNE na formação de PMat apresentadas pelas professoras incluem: a possibilidade de estabelecer conexões com outros campos/conceitos matemáticos; a oportunidade de ampliar a compreensão de conceitos da GE; a articulação das GNE com outras área do conhecimento como Física e Arte e com situações do dia a dia; o desenvolvimento de investigações e as generalizações de relações envolvendo GNE; e a viabilidade de investigações acadêmicas relacionadas à temática.

Desafios relacionados à inclusão de Geometrias não Euclidianas na formação de professores de matemática

As professoras reiteram que incluir as GNE em programas de formação inicial e continuada de PMat envolve alguns desafios específicos.

Um deles diz respeito ao conhecimento de GE dos professores. Marie-Claire conta a sua experiência na implementação de uma atividade durante um curso de formação de professores que atuam nos anos iniciais. Ela apresentou aos participantes questões relacionadas à GE, retiradas da Provinha Brasil, com o propósito de serem solucionadas e disse que “*o índice de erros foi alto, semelhante aos dos estudantes da 1.ª a 5.ª série (2.º e 6.º ano)*” [Marie-Claire, 2022, N., grifo nosso]

As dificuldades dos professores em geometria podem ter relação com o seu processo formativo. Professores polivalentes costumam ter uma formação centrada em processos metodológicos que não propiciam adequadamente os fundamentos matemáticos, em que prevalece a crença utilitarista da matemática com prioridade para cálculos e procedimentos (Nacarato; Mengali; Passos, 2017). O foco das disciplinas formativas costuma voltar-se para métodos de ensino e opções didáticas, como se saber ensinar matemática fosse suficiente. Por vezes, os professores em formação não entendem adequadamente conteúdos matemáticos e sua importância.

As dificuldades desses professores em tópicos de geometria podem se alongar desde o ensino básico, dadas as lacunas de sua alfabetização matemática. Esse fato pode reverberar e gerar obstáculos durante a alfabetização matemática de seus estudantes, que podem não ser enfrentados e superados nos anos escolares seguintes, e, conseqüentemente, influenciar o desempenho das escolas em avaliações em larga escala⁵⁰. Nesse contexto, a formação continuada do professor polivalente pode ser encarada, entre outras coisas, como meio de mitigar lacunas advindas de toda a sua formação.

A alfabetização matemática adequada e a compreensão prévia de conceitos euclidianos é, para Marie-Claire, essencial para o posterior estudo de conceitos não euclidianos. Ela enfatiza que

minha luta seria primeiro para melhorar o ensino de Geometria Euclidiana em todos os níveis de ensino, inclusive com os professores que fazem pedagogia. Depois da base bem-feita, podemos fazer um revestimento complementar [Marie-Claire, 2023, N].

O trecho demonstra a preocupação de Marie-Claire em tratar os desafios relacionados ao ensino de geometria de forma abrangente, envolvendo todos os níveis educacionais e incluindo a formação de professores. Em sendo assim, pode-se construir um terreno fértil para futuras explorações de conceitos ditos mais complexos e/ou avançados, como alguns tópicos de GNE.

Há estudos que identificaram que crianças que compreendem o sistema de coordenadas podem desenvolver noções fundamentais de Geometria Topológica, Esférica, Hiperbólica e Projetiva (Debastian Neto; Nogueira; Franco, 2013). Logo, o nível de dificuldade e abstração do conteúdo não euclidiano pode depender das intencionalidades do professor, e sua

⁵⁰ As avaliações de larga escala, advindas de um movimento reformista global, se estruturam a partir de uma concepção padronizada da educação, ao definir um currículo nacional e padrões de aprendizagem. O resultado é a descentralização da educação, a responsabilização das escolas e dos professores pelo desempenho e um ensino voltado excessivamente para testes, o que pode vir a ter natureza comparativa e, conseqüentemente, competitiva. Portanto, os resultados dos estudantes em avaliações dessa natureza não revelam, necessariamente, o desenvolvimento de seu aprendizado.

implementação em sala de aula não precisa, necessariamente, se dar depois do estudo de todos os tópicos de GE. Porém, ter familiaridade com conceitos geométricos euclidianos fornece uma base conceitual útil para o estudo de GNE, uma vez que alguns surgem a partir da negação ou alteração de postulados da GE.

Os conhecimentos prévios de GE necessários para o estudo de GNE podem, do mesmo modo, se configurar como desafios a serem superados. Loreni relata que

geralmente os estudantes chegam ao ensino superior com experiências somente da Geometria Euclidiana e com alguns conceitos desenvolvidos que podem se tornar obstáculos didáticos para a aprendizagem das Geometrias Não Euclidianas [Loreni, 2023, N].

As noções geométricas de professores e futuros PMat são, geralmente, moldadas por princípios da geometria que conhecem – a euclidiana. Afastar-se dos princípios que estão acostumados e se permitir estudar elementos que podem confrontá-los pode ser uma tarefa complicada, dada a influência que os conhecimentos prévios têm na construção de novos conceitos e a dificuldade que temos, naturalmente, de reavaliar crenças.

Um exemplo é a seguinte afirmação: “a soma dos ângulos internos de **qualquer** triângulo é **sempre** 180° ”, que é verdadeira, quando a estudamos na GE. Entretanto, na perspectiva da Geometria Esférica, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico⁵¹ é sempre **maior** que 180° . Essa geometria permite a existência de triângulos com três ângulos retos (trirretângulos), fato que pode ser surpreendente e difícil de aceitar para quem toma a afirmação exemplificada como verdade. Assumir a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo sempre como 180° pode fazer com os estudantes entendam que essa “regra” é verdadeira em todos os contextos e gerar barreiras na aprendizagem.

Outro desafio citado nas narrativas diz sobre a abordagem de disciplinas específicas de GNE em cursos de licenciatura em Matemática. Em relação à disciplina voltada para o estudo desses conteúdos na Universidade em que leciona, Mariana narra que

docentes com bacharelado ministram a disciplina de “Geometrias não-euclidianas” para um curso de Licenciatura em Matemática, de forma totalmente axiomática sem prepará-los metodologicamente para o ensino deste tema na Educação Básica [Mariana, 2023, N].

Se o foco de disciplinas específicas de GNE se der na estrutura lógica, no rigor da construção dos argumentos, no desenvolvimento teórico, em provas e em deduções, estas podem preparar os acadêmicos que desejam seguir carreira como matemáticos e pesquisadores

⁵¹ Para visualizar a soma dos ângulos internos de triângulos esféricos, acesse <https://www.geogebra.org/m/quzzydhb>

de Matemática, mas não, necessariamente, instrumentalizar os que ingressarão como docentes na escola básica, o foco da licenciatura. Em suma, a abordagem assumida pelos formadores pode se desconectar do objetivo do curso, que é formar PMat.

Essa abordagem pode ter relação com os desafios dos próprios formadores, ao ensinarem GNE. Segundo Mariana

muitos desafios são impostos aos professores que trabalham com as geometrias não-euclidianas na formação de professores, desde o conhecimento deste assunto até as metodologias adequadas para o seu trabalho [Mariana, 2023, N].

A abordagem desses conteúdos, em licenciaturas ou bacharelados, além de requerer o entendimento de seus conceitos, demanda abordagens pedagógicas cuidadosas por conta da divergência entre as GNE e a GE. Nas licenciaturas, mais desafios são impostos aos formadores, como o fato de se considerarem abordagens convenientes para esses conteúdos, visando ao seu trabalho na educação básica e discutir possíveis escolhas metodológicas para este fim.

O trabalho metodológico deve visar explorar matematicamente (geometricamente e algebricamente) as representações construídas. A construção pode ser feita de modo concomitante à sua exploração matemática [Mariana, 2023, M.T.]

Enfatizamos que abordagens que não assumam enfoques formalistas não negam a relevância no estudo de GNE por um viés axiomático.

Na mesma direção, Loreni relata que

os formadores de professores enfrentam desafios no trabalho com as geometrias não euclidianas na formação inicial, uma vez que o currículo das licenciaturas em Matemática (pelo menos alguns que conheço) não as contemplam; muitas vezes os formadores também não foram formados para o ensino destas geometrias; não há pesquisas suficientes com este tema e as que existem muitas vezes tratam um dos espaços geométricos isolados dos outros [Loreni, 2023, N].

É de se esperar que a presença tímida de GNE em currículos de formação de PMat limite a exposição dos licenciandos (entre eles, futuros formadores) a esses conceitos. Por não fazer parte dos conteúdos convencionais em contextos educacionais, essas geometrias podem tender a ser investigadas em áreas da matemática que não estão relacionadas diretamente à Educação. Portanto, é possível que formadores que concentram seus estudos na área de Educação e Ensino não tenham integrado a seus conhecimentos os aportes teóricos e metodológicos necessários para ministrar disciplinas específicas de GNE, mesmo em cursos de licenciatura.

A observação feita por Loreni, de que pesquisas tratam os espaços geométricos isoladamente, pode indicar uma tendência de as pesquisas centralizarem-se em uma única abordagem geométrica, sem estabelecer conexões entre diferentes espaços geométricos.

Em síntese, os desafios relacionados à inclusão de GNE na formação de PMat destacados pelas professoras são: a formação de professores polivalentes, que tende a focar em métodos de ensino em detrimento dos conteúdos a serem ensinados; a possível ênfase axiomática em disciplinas específicas sobre a temática, que salienta a construção e a análise de estruturas matemáticas em detrimento do ensino; e a forma conceitual e metodológica necessária para o trabalho com esses conteúdos em contextos de formação de PMat. Enfim, os desafios enfrentados por formadores de professores podem impactar (e provavelmente impactam) diretamente a formação dos professores e dos futuros PMat.

Sugestões de metodologias, abordagens e recursos didáticos a serem utilizados no trabalho com Geometrias não Euclidianas na formação de professores de matemática

Considerando a natureza pouco familiar e o grau de abstração de algumas GNE, as professoras formadoras julgam necessário uma seleção cuidadosa e criteriosa de métodos de ensino, práticas pedagógicas, abordagens e ferramentas empreendidas no processo de ensino e de aprendizagem, que são fundamentais para superar barreiras conceituais e que podem constituir ambientes que tornem os conceitos não euclidianos acessíveis para o professor em formação.

O enfoque em aspectos históricos e filosóficos é frequentemente indicado na literatura como estratégia viável para o ensino e a aprendizagem de GNE e, igualmente, foi citado pelas três professoras.

Loreni aponta que

Desenvolver propostas na formação envolvendo a história do desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas sempre foi fundamental para que os professores pudessem compreender a importância de trabalhar com essas geometrias nas suas práticas pedagógicas [Loreni, 2023, N].

Estudar a história do desenvolvimento de ideias matemáticas e sua difusão permite a familiarização com narrativas históricas e pode auxiliar o professor em formação a reavaliar o planejamento de suas aulas, organizar mentalmente a estrutura da matemática, desenvolver estratégias de ensino que lhe permitam explorar conteúdos matemáticos e situar-se como sujeito histórico. Loreni reforça a relevância de abordagens históricas, envolvendo GNE em “*momentos que o professor cria um espaço de aprendizagem por meio do seu ensino (sua prática reflexiva)*” [Loreni, 2023, M. T.].

Na mesma direção, Marie-Claire diz que

seria interessante que fosse mostrado como “apareceu” o ensino de Geometria na educação formal em primeiro lugar, falando-se sobre Euclides e o legado dele. Depois, mostrar que a geometria dele se aplica ao plano e nem tudo é plano. As dúvidas que surgiram quando matemáticos tentavam provar o 5º postulado e o que foi obtido a partir daí [Marie-Claire, 2023, N].

Marie-Claire sugere uma abordagem que considere, a partir de um enfoque histórico, o ensino formal de GE, as influências da GE, as tentativas de prova do 5.º postulado⁵² e o surgimento das GNE como alternativas à GE, comparando superfícies planas e não planas. Após o enfoque histórico, Marie propõe que

as discussões podem ser aprofundadas para justificativas Matemáticas [Marie-Claire, 2023, N].

Marie-Claire defende que questões históricas sejam tomadas como arranque para o trabalho com GNE, seguida de aprofundamentos acerca das questões matemáticas envolvidas. O chamado “modelo do Disco de Poincaré”, um modelo de Geometria Hiperbólica, pode exemplificar como fundamentar o trabalho com GNE, baseado no seu desenvolvimento histórico. Tal modelo foi proposto após a axiomatização da Geometria Hiperbólica e ancora-se na negação do 5.º postulado da GE ao assumir como verdade que, por um ponto P exterior a uma reta AB há infinitas retas paralelas a AB. Nesse modelo, as retas são representadas por curvas que se curvam em direção à borda do disco, o que permite a existência de triângulos cuja soma dos ângulos internos é sempre menor que 180º⁵³.

Sobre o trabalho com GNE na formação inicial de PMat, a partir de enfoques históricos, Loreni conta que

tinha a preocupação de que os futuros professores pensassem em questões como: em que momento político/histórico/filosófico isso aconteceu (a discussão no meio científico)?; por que os matemáticos questionaram o trabalho de Euclides?; o que levou os matemáticos a suspeitarem que o 5º postulado poderia ser demonstrado?; por que os matemáticos demoraram tantos anos para acreditar e comunicar a existência das geometrias não euclidianas?; temiam a Igreja?; haviam preocupações com seu ensino ou apenas em desenvolver novos teoremas e/ou contestar Euclides?; por que a comunidade matemática teve/tem dificuldades em aceitar as “novas” geometrias?; qual era o conceito de conhecimento da época, estava associada a que tipo de filosofia? [...] na minha compreensão questões como estas, são elementos que devem nortear o trabalho dos formadores [Loreni, 2023, N].

⁵² O 5.º postulado da GE passou por várias reelaborações. A reformulação feita por John Playfair é a mais famosa: “sejam dados, em um plano, uma reta AB e um ponto P que não está no plano, então existe uma e só uma paralela a AB passando por P”. A partir dessa escrita, o 5º postulado passou a ser chamado de “postulado das paralelas” (Sachs, 2016, p. 16).

⁵³ Para visualizar os ângulos internos de triângulos no modelo do Disco de Poincaré, acesse <https://www.geogebra.org/m/xctabxmy>.

Loreni sugere uma abordagem que leve em conta as questões históricas, filosóficas e epistemológicas simultaneamente com questões matemáticas, fomentando discussões que vão além do desenvolvimento de novos teoremas ou da negação de postulados de Euclides. Questionar se as preocupações que pairavam sobre os estudiosos matemáticos tinham cunho religioso e político, a que filosofia o conceito de conhecimento da época era associado e se o ensino desses conceitos era posto em debate, pode ajudar a entender que contextos, sujeitos, interesses e controvérsias permeiam e podem ditar o movimento da realidade material da qual a matemática faz parte, além de indicar implicações para seu próprio desenvolvimento. Um exemplo disso é o fato de as GNE terem despertado a noção de que a matemática, em sua totalidade, é uma criação arbitrária da mente humana e não algo ditado pelo mundo material. Tal noção difere da ideia de matemática dos gregos, que a concebiam como um estudo sistematizado do espaço material idealizado.

Loreni ainda fala:

Acredito que uma formação (inicial e continuada) que articula os diferentes espaços (planos, hiperbólicos, esféricos) por meio de questões históricas, filosóficas, sociológicas e de atividades práticas, partindo de uma abordagem intuitiva e experimental, com situações reflexivas e instigantes, que priorizem discussões e argumentações são necessárias dentro de uma perspectiva de ensino social, porque podem possibilitar que os professores e futuros professores possam incluir estas geometrias no currículo, ou seja, na prática pedagógica para a formação mais ampla dos estudantes. No entanto é necessário também pensar nas propriedades matemáticas destas geometrias e em métodos que estas possam ser formalizadas, institucionalizadas [Loreni, 2023, N].

O excerto revela que Loreni defende uma abordagem que integra aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, sociológicos e práticos, calcados em bases teóricas consistentes que assentam espaços geométricos em discussão e têm o potencial de acarretar uma formação abrangente do educador matemático. Além disso, reconhecer a influência que as ideias advindas da GE tiveram em contextos culturais, sociais e educacionais em certo tempo (até mesmo na contemporaneidade) pode fomentar discussões sobre questionamentos e extensões de seu pensamento, exemplificando como nascem e são tratados paradigmas na ciência e na matemática.

Outra abordagem citada para o trabalho com GNE em contextos formativos leva em conta as concepções dos professores e futuros professores. Segundo Mariana

há de se considerar a necessidade de um trabalho metodológico que traga conhecimento de uma geometria diferente da euclidiana, promovendo mudanças nas concepções a respeito dos elementos geométricos existentes, sendo eles euclidianos ou não-euclidianos [Mariana, 2023, N].

A mudança conceitual que o estudo de GNE demanda deve ser pensada no trabalho metodológico do formador. Um exemplo é o deslocamento de um indivíduo em uma superfície. Se estamos em um ponto A e avançamos uma unidade para frente, depois nos deslocamos uma unidade para o lado e, finalmente, retrocedemos uma unidade, nós retornamos ao ponto A inicial? A resposta para essa pergunta parece óbvia, se considerarmos uma superfície plana. Porém, se nos referimos a uma superfície esférica, a resposta é diferente. Nesse caso, o ponto A é considerado um dos polos⁵⁴ da esfera, os deslocamentos para cima e para baixo são equivalentes à latitude, e o deslocamento lateral corresponde à longitude. Sob essa perspectiva, concluiremos que, após realizados os movimentos, retornaremos ao ponto A. Note que ambas as respostas são verdadeiras e o que as difere é tão somente o contexto geométrico referido. A situação descrita destaca como as respostas para perguntas aparentemente simples podem variar drasticamente com base no contexto em que são feitas e colaborar na aceitação de conceitos não euclidianos. A relevância desses conflitos em processos formativos deve ser destacada, pois ela não se limita apenas ao trabalho com a Geometria Esférica.

Além de abordagens que considerem o desenvolvimento histórico das GNE, as professoras sugerem estratégias que assumam outros enfoques, como indica Mariana:

o uso de materiais manipuláveis, softwares de geometria, produções artísticas em forma de pinturas, dentre outros, podem auxiliar neste trabalho, no entanto é necessário estudo e conhecimento destas possibilidades para que sejam executadas [Mariana, 2023, N].

A introdução de materiais manipuláveis, como modelos tridimensionais e jogos que simulam comportamentos de objetos em espaços geométricos distintos, podem tornar o estudo de GNE mais tangível. A visualização dinâmica e interativa de seus conceitos pode ser estimulada por meio de *softwares* de geometria dinâmica (como já exemplificado no presente trabalho) e expressões artísticas que tenham o potencial de fornecer analogias visuais. Essas sugestões podem ser aplicadas tanto na formação inicial como na continuada de PMat e na educação básica, já que, além de visualizar, simular e interagir, também pode suscitar discussões acerca de aspectos didático-pedagógicos relacionados ao assunto.

Considerando suas experiências ao trabalhar com GNE em formações iniciais e continuadas de PMat, Loreni conta:

Evidenciei possibilidades de desenvolver a interdisciplinaridade com várias áreas do conhecimento, aspecto que colabora para que os estudantes possam compreender e descrever certos fenômenos (que acreditam não serem matemáticos) a partir de espaços diferentes dos propostos por Euclides, ou seja, constituírem conhecimentos matemáticos partindo de diferentes campos, por exemplo Arte. Examinando as obras do arquiteto Oscar

⁵⁴ Intersecção entre a superfície esférica e o eixo de rotação.

Niemeyer observa-se que ele muito se utilizou dos conceitos das geometrias não euclidianas [Loreni, 2023, N].

A interdisciplinaridade permite desafiar a ideia de que a matemática é isolada de outros conhecimentos, colaborando para que os estudantes possam compreender e explicar fenômenos comumente considerados não matemáticos, abordados a partir de geometrias alternativas à proposta pela GE. Obras arquitetônicas fundamentadas em conceitos não euclidianos, como as de Oscar Niemeyer, podem trazer materialidade aos estudos, além de destacar a criatividade do processo e uma incorporação tangível em outros campos, como Arquitetura.

O uso de contextos e elementos não matemáticos para se trabalhar com GNE é uma abordagem citada pelas três professoras. Como estratégia eficaz para incentivar professores em formação continuada e inicial a transcender a ideia de que o estudo desses conteúdos é mera “curiosidade”, Marie-Claire sugere

apresentar superfícies que não sejam planas e pedir por exemplo que construam paralelas [Marie-Claire, 2023, N].

Essa abordagem desafia o professor em formação a construir conjecturas que envolvem curvaturas e representações não convencionais de conceitos centrais de algumas GNE, de forma prática.

Se for difícil conseguir uma sela de cavalo, leve batatas Pringles. Você já prestou atenção à forma dessas batatas? [Marie-Claire, 2023, N].

Embora os exemplos citados por Marie-Claire sejam analogias simplificadas e metafóricas, eles podem ajudar os professores e futuros PMat a visualizarem superfícies curvas e relacionar conceitos abstratos de GNE ao cotidiano.

Em síntese, as metodologias, as abordagens e os recursos didáticos sugeridos pelas professoras para o trabalho com GNE na formação de PMat permeiam: abordagens históricas e filosóficas, que dizem sobre a natureza e os paradigmas relacionados à temática; estratégias interdisciplinares; situações com correspondência no dia a dia; e o uso de materiais manipuláveis e *softwares* de geometria dinâmica. As sugestões demandam seleções cuidadosas e metodologicamente estruturadas, de modo a tornar os conceitos em debate acessíveis aos professores em formação, considerando as barreiras conceituais e os modos de pensar estabelecidos anteriormente.

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: DIÁLOGO COM A LITERATURA

Nos trechos das narrativas elaboradas pelas professoras que dizem a respeito das justificativas apresentadas para o trabalho com as GNE na formação de PMat, observamos que elas consideram a necessidade de: estabelecer conexão das GNE com outros conceitos matemáticos; ampliar a compreensão de conceitos da própria GE; articular GNE com outras áreas do conhecimento; desenvolver explorações e generalizações de relações geométricas; propor investigações acadêmicas sobre conteúdos e princípios das GNE.

Os desafios relacionados à inclusão de GNE na formação de PMat estão associados: à formação de professores polivalentes; ao enfrentamento à ênfase axiomática em disciplinas da licenciatura; e à forma conceitual e metodológica necessária para o trabalho com a temática.

As sugestões de abordagens metodológicas e recursos didáticos indicados pelas professoras se concentram em enfoques históricos, filosóficos e epistemológicos; na interdisciplinaridade; e no uso de materiais manipuláveis e *softwares* de geometria dinâmica. Em suma, a importância da abordagem de GNE na formação inicial e continuada de PMat se dá não apenas por ser um campo de investigação, mas inclusive por conta de sua influência no desenvolvimento da geometria, da matemática e da própria ciência.

Os aspectos manifestados pelas professoras em cada um dos pontos de enfoque, como relevantes para serem considerados em programas de formação de PM, chamam a atenção por proporcionarem ao professor em formação: **ampliar os horizontes conceituais**, permitindo uma compreensão abrangente do espaço e das propriedades geométricas; **desenvolver um pensamento crítico** em relação à matemática, como uma área em constante evolução; **preparar-se para desafios educacionais**, considerando diferentes abordagens e recursos; e **incentivar a curiosidade e a exploração**, tornando a aula mais envolvente e interessante

O estudo de GNE acarreta, por natureza, conflitos entre conceitos euclidianos e não euclidianos, uma vez que os conhecimentos prévios de quem as estuda estão calcados na GE e vários conceitos não euclidianos são homônimos do conhecimento euclidiano (Kaleff; Nascimento, 2004). O contato com uma perspectiva diversificada e flexível do espaço pode levar os PMat e futuros PMat a repensarem alguns conceitos geométricos fundamentais, como paralelismo e distância entre pontos, e a se familiarizarem com diferentes modelos geométricos. Esse fato permite que o professor em formação (re)construa um repertório de conhecimentos mais abrangente no âmbito da geometria (Altoé *et al.*, 2022) e mova-se com naturalidade entre diferentes espaços geométricos.

Mas para além de permitir o aprofundamento em questões geométricas, o estudo de GNE pode dialogar com outros conceitos matemáticos, como Geometria Analítica (Leivas,

2014) e Análise Combinatória (Caldato, 2013), o que viabiliza uma integração entre conteúdos, uma compreensão rica de conceitos matemáticos e suas inter-relações. O trabalho com GNE

pode favorecer o processo de compreensão, pelo professor, das principais características e natureza da Matemática, visto que esse conhecimento faz-se presente não apenas na quantificação do real e no desenvolvimento de técnicas de cálculo com números e grandezas, mas, sobretudo, pela criação de sistemas abstratos que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento e das formas (Cabariti; Jahn, 2006, p.11).

Como muito bem lembra Cavichiolo (2011, p. 125), o estudo de GNE contribui “[...] não somente para a ampliação e aprofundamento do conhecimento da área da Geometria, mas, sobretudo, da própria Matemática”.

O contraste entre conhecimentos relacionados à GE e GNE incentiva o professor em formação a repensar a natureza, a estrutura e os resultados do conhecimento geométrico, de modo a compreender que premissas diferentes das quais estão habituados podem gerar modelos geométricos tão consistentes quanto a GE, mesmo que com propriedades distintas. O trabalho com GNE pode evidenciar que axiomas antes tomados como verdades absolutas são, na realidade, verdades relativas. Portanto, o que existe é um conjunto variado e plural de verdades. Esse embate entre GE e GNE pode levar o professor em formação a questionar, também, os pressupostos básicos sobre as quais a matemática é construída, possibilitando um posicionamento crítico e inquiridor em relação ao conhecimento científico (Cavichiolo, 2011). Esse processo expõe quebras de paradigmas no conhecimento matemático, incluindo a concepção de verdade matemática.

Os aspectos históricos relacionados ao desenvolvimento das GNE podem ser explorados em contextos de formação de PMat para esclarecer questões relacionadas ao conhecimento matemático e seu ensino, à contextualização de conteúdos, à natureza da matemática e da ciência.

A história do conhecimento geométrico não serve somente para expor o momento de gêneses da Geometria não Euclidiana, mas sim para construir uma visão mais ampla da Matemática como Ciência em que os construtos de sua epistemologia vão se modificando conforme o tratamento dado aos postulados de Euclides, projetando novas formas de saber e fazer no campo da Geometria (Santos Júnior, 2020, p.59).

A história da matemática pedagogicamente vetorizada (Miguel, Miorim, 2004) é delineada como uma história orientada primordialmente por objetivos pedagógicos e, portanto, construída sob o ponto de vista do PMat. Os autores destacam três características fundamentais

dessa abordagem. A primeira busca fornecer uma visão cultural e institucional da matemática, enfocando-se nas necessidades, questões e dilemas surgidos em contextos nos quais a matemática desempenha papel significativo. Nesse contexto, a matemática relaciona-se diretamente com outras práticas sociais. A segunda característica diz sobre utilizar a história como meio de questionar problemas observados nas práticas tanto de pesquisas em Educação Matemática quanto de PMat. A terceira considera define a historiografia como um meio de diálogo, no qual ela não apenas fornece respostas e procedimentos a serem aplicados mas também estimula a reflexão e a análise crítica frente questões históricas. Essas características abarcam as possíveis discussões históricas relacionadas às GNE. O emprego de elementos históricos no ensino de matemática não deve ser norteado pela contextualização e pela motivação para os estudantes e professores em formação, nem aderir a abordagens meramente cronológicas e recapitulacionistas. Pelo contrário, essa abordagem pode contribuir significativamente para a construção do conhecimento geométrico e matemático dos envolvidos bem como para o desenvolvimento do conhecimento pedagógico de PMat e futuros PMat. Além disso, a integração da história como recurso em aulas de matemática pode promover a humanização, um aspecto muitas vezes negligenciado nos dias atuais.

Ao estudarmos contextos, interesses e o movimento histórico de seu desenvolvimento, identificamos a estreita relação que as GNE nutrem com as concepções de matemática e de ciência necessárias ao educador matemático. Seu estudo desafia conceitos filosóficos arraigados, como a ideia de uma geometria única e absoluta, instiga debates sobre a natureza, o desenvolvimento e a construção do conhecimento matemático (Araman, 2011) e permite captar as mudanças paradigmáticas na ciência (Detoni; Pinheiro, 2016). Do mesmo modo o conhecimento histórico é valioso para a prática pedagógica, pois possibilita vislumbrar que a matemática não é apenas um conjunto de fatos objetivos, mas também um produto da cultura e da sociedade de um determinado período (Brito, 1995).

Romper com a ideia de linearidade e rigidez da matemática e abandonar a visão axiomática na qual a GE é calcada pode sustentar práticas educativas que se desvinculem do excesso de formalismo predominante no ensino de geometria (Brum; Schuhmacher; Silva, 2015) e promovam a tolerância e a apreciação pela diversidade de pensamento. A capacidade de imaginar e visualizar cenários com relações que podem, à primeira vista, não ser intuitivas, permite elaborar conjecturas e a proposição de soluções para além dos limites de soluções convencionais. A criatividade tem papel importante nessa equação, já que a elaboração, a organização e a apresentação lógica de conjecturas e construções geométricas também são

ações criativas (Leivas, 2018). Afinal, foram matemáticos criativos que questionaram o *status quo* que considerava a GE como absoluta.

Além de possibilitar a ampliação de horizontes conceituais e colaborar no desenvolvimento do pensamento crítico, o estudo de GNE em contextos formativos pode preparar os professores em formação para alguns desafios relacionados à abordagem da temática na educação básica. As conexões entre GNE e outras áreas do conhecimento exemplificam a relevância e a aplicabilidade destas e podem mitigar a falta de familiaridade e “estranheza” com a temática. A interdisciplinaridade é citada na literatura como estratégia viável para o ensino e a aprendizagem de GNE dadas essas conexões. A Geometria do Táxi descreve a malha e os deslocamentos urbanos, e pode ser relacionada à Cartografia (Cavalcante *et al.*, 2019). A Geometria Esférica descreve a superfície terrestre e a esfera celeste, podendo ser relacionada à Astronomia Posicional (Kovacevic, 2019) e à Geografia (Honda, 2013). Os fractais podem ser identificados em grafites (Navarro *et al.*, 2022) e em pinturas cubistas e abstratas (Júnior, 2008). Em síntese, essas conexões entre GNE e outras áreas e disciplinas, além de relevantes, têm correspondência com situações do dia a dia e respondem à antiga e persistente indagação dos estudantes acerca da aplicabilidade da matemática.

A associação de conceitos, até então abstratos, ao cotidiano e outras áreas do conhecimento pode despertar a curiosidade e incentivar o desenvolvimento de uma mentalidade investigativa de estudantes e professores em formação. O uso de materiais manipuláveis (Gregor *et al.*, 2021) e *softwares* de geometria dinâmica (Albon; Nós, 2022) no trabalho com GNE promove o desenvolvimento de visualização de conceitos geométricos, a partir de manipulações, e permite que o indivíduo relacione o espaço em que vive com o objeto de estudo.

Outro ponto que pode colaborar com a formação do PMat está relacionado à consciência da dificuldade dos estudantes em se desvincularem de conhecimentos geométricos prévios. Afirmarções como “a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° ” e “a distância entre duas retas paralelas é sempre constante” devem ser esclarecidas como válidas apenas na GE, caso contrário podem produzir obstáculos epistemológicos que podem interferir na compreensão de conhecimentos científicos (Lovis *et al.*, 2014). Portanto, o trabalho com GNE deve ser cuidadoso e metodologicamente estruturado, tendo em conta os conhecimentos prévios dos estudantes e as intencionalidades do professor.

É razoável concluir que o estudo de GNE em contextos de formação (tanto inicial quanto continuada) de PMat amplia os horizontes relacionados à matemática, às concepções didático-

pedagógicas e histórico-sociais dos envolvidos. Como bem complementa Cavichiolo (2011, p. 125), o estudo dessas geometrias:

conduz à reflexão sobre a natureza e os processos de construção da Matemática, mostrando-a como constructo intelectual dinâmico e, portanto, passível de mudanças decorrentes das necessidades do homem de resolver determinados problemas em diferentes épocas, quer sejam internos da Matemática ou da própria realidade social.

Esta seção de discussão teve o objetivo de estabelecer relações entre os resultados da análise e a literatura disponível. Na sequência, apresentamos algumas considerações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, exploramos aspectos relacionados ao trabalho com GNE na formação inicial e continuada de PMat Com base em reflexões, ideias e concepções de professoras experientes no ensino de geometria e na literatura, foi possível identificar algumas dimensões sobre a temática. Ao dar voz a professoras formadoras experientes, evidenciamos elementos advindos de suas experiências práticas, identificando obstáculos observados por elas, dando atenção às sugestões de estratégias pedagógicas e as incluindo no processo de construção do conhecimento da Educação Matemática.

As GNE podem ser uma fonte rica de aprendizado e reflexão, permitindo uma compreensão substancial de conceitos geométricos, mesmo aqueles relacionados à GE. O processo de desconstrução das “verdades” euclidianas e exploração de outros modelos geométricos pode ampliar a visão dos professores em formação sobre Geometria, Matemática, Ciência e Cultura e colaborar no desenvolvimento de um pensamento crítico. Além disso, o estudo de GNE tem potencial para servir de ponte para diversas áreas do conhecimento como Arte, Astronomia, Geografia e História.

Porém, o trabalho com a temática também apresenta desafios significativos, especialmente no que diz respeito às dificuldades em GE e à superação de obstáculos didáticos, cognitivos e epistemológicos. Abordagens que levem em conta a interdisciplinaridade, conexões com situações do dia a dia e outras áreas do conhecimento e o uso de diferentes materiais e *softwares* associados à exploração e à curiosidade podem colaborar na superação desses desafios.

O trabalho com GNE na formação inicial e continuada de PMat é, por natureza, uma jornada transformadora e desafiadora que pode promover benefícios pedagógicos, cognitivos e

conceituais, preparando os educadores para abordar a matemática de maneira rica e contextualizada.

O desenvolvimento da presente pesquisa, além de todos os aspectos citados, colaborou na formação acadêmica da primeira autora ao expor reflexões e instigar questionamentos pessoais que estão atrelados às concepções próprias de geometria, matemática, ciência, docência e pesquisa.

REFERÊNCIAS

ALBON, A. J. D.; NÓS, R. L. Construindo tesselações hiperbólicas no disco de Poincaré com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 11, n. 2, p. 17-032, 2022.

ALTOÉ, R. O; ZANON, J. M.; PEREIRA, B. M.; GUSSANI, S. B.; CECOTTI, V. T. Contribuições de uma oficina sobre Geometria do Táxi na formação de professores que ensinam matemática: entre descobertas, aprendizagens e prática docente. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel (PR), v. 6, n. 2 p. 193-216, ago. 2022.

ARAMAN, E. M. O. **Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática**. 238f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, 2011.

ARAMAN, E. M. O.; GOMES, L. F. Desenvolvimento profissional e história da matemática: um exemplo a partir das geometrias não euclidianas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 2, p. 452-482, 2020.

BAKHTIN, M. **Marxismo e filosofia da linguagem**. São Paulo: Hucitec, 2010.

BOLÍVAR, A. B.; DOMINGO, J. S.; FERNÁNDEZ, M. C. **La investigación biográfico-narrativa en educación**. Madrid: La Muralla, 2001.

BRITO, A. J. **Geometrias não Euclidianas**: um estudo histórico-pedagógico. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1995.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E.; SILVA, S. C. R. As geometrias esférica e hiperbólica em foco: sobre a Apresentação de alguns de seus Conceitos Elementares a Estudantes do Ensino Médio. **Bolema**, v. 29, p. 419-427, 2015.

CABARITI, E.; JAHN, A. P. A geometria hiperbólica na formação docente: possibilidades de uma proposta com o auxílio do Cabri-Géomètre. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3. **Anais[...]**. São Paulo, out. 2006.

CALDATO, P. **O uso da Geometria do Táxi no ensino de Análise Combinatória**. 2013. 46 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2013.

CARVALHO, O. A.; AZEVEDO, J. S. Geometria não-Euclidiana: aplicações na Educação Básica. *In*: PORTO, J. P. S.; ROCHA, K. S. F. L.; NASCIMENTO, S. A. (Org.). **Inovações educacionais em matemática no Recôncavo**. Cruz das Almas (BA), p. 109-134, 2020.

CAVALCANTE, R. N. B.; SOUSA, M. H. R.; SOUSA, J. P. R. A interdisciplinaridade entre matemática e Geografia: inferindo conceitos de localização e Distâncias na cidade. **Revista Encantar – Educação Matemática e Sociedade**, Bom Jesus da Lapa, v. 1, n. 3, p. 7-20, set./dez. 2019.

CAVICHIOLO, C. V. **Geometrias Não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática: o que dizem os formadores**. Curitiba: UFPR, 2011. 165 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação.

CEARÁ (Estado). Superintendência de Educação. Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática. Fortaleza, 2008.

CLANDININ, J. D. Teacher education as narrative inquiry. *In*: CLANDININ, J. D. et al. (Org.) **Learning to teach, teaching to learn: stories of collaboration in teacher education**. Nova Iorque: Columbia University Press, 1993.

COURA, F. C. F. **Desenvolvimento profissional de formadores de professores de matemática que são investigadores da docência**. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de São Carlos, Programa de Pós-graduação em Educação. São Carlos, 2018.

CYBULSKI, F. C. **Geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática: indicativos de dissertações e teses brasileiras**. 152f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Londrina, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Londrina, 2022.

DETONI, A. R.; PINHEIRO, J. M. L. Compreensões Filosóficas para Uma Alternativa do Pensamento Geométrico. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 11, p. 232-243, 2016.

MENDES, N. A.; PASSOS, C. L. B.; SILVA, H. Narrativas na pesquisa em Educação Matemática: caleidoscópio teórico e metodológico. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 28, p. 701-716, 2014.

NETO, D.; NOGUEIRA, C. M. I.; FRANCO, V. S. Geometrias na segunda fase do ensino fundamental: um estudo apoiado na epistemologia genética. **Zetetiké, FE/Unicamp**, v. 21, n. 40, 2013.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. *In*: M. C. WITTROCK, M. C. (Ed.). **Handbook of Research on Teaching**. Nova Iorque: MacMillan, p. 119-161, 1986.

ERNST, Bruno. **O espelho mágico de M. C. Escher**. Ed. Alemanha: Taschen, 1978.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**, v. 27, p. 917-938, 2013.

GOMES, L. F.; ARAMAN, E. M. O.; ROCHA, Z. F. D. C Professores de Matemática e suas Compreensões a Respeito das Geometrias Não Euclidianas. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, v. 17, n. 4, p. 301–309, 2017.

GREGOR, I. C. S. *et al.* O estudo de geometria esférica na formação de PM: uma experiência baseada na utilização de materiais manipuláveis. **Research, Society and Development**, v. 10, n.1, 2021.

HONDA, A. M. C. **Matemática e Geografia**: uma interdisciplinaridade. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 108p, 2013.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. Atividades introdutórias às geometrias não-euclidianas: o exemplo da geometria do táxi. **Boletim Gepem**, n. 44, 2004.

KALEFF, A. M. R. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), n. 28, p-69-94, 2007.

KOVACEVIC, M. S. Geometria esférica: um estudo da interposição entre Matemática e Astronomia. **Rev. Prod. Disc. Educ. Matem**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 2-15, 2019.

LARROSA, J. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. **Revista Brasileira de Educação**, n. 19, p. 20-28, jan./abr. 2002.

LEIVAS; J. C. P. Elipse, parábola e hipérbole em uma geometria que não é euclidiana. **Revemat**, Florianópolis, v. 9, n. 2, p. 189-209, 2014.

LEIVAS, J. C. P. Criatividade, Imaginação e Visualização no ensino de Geometria. **Revista Thema**, v. 15, n. 4, p. 1193-1196, 2018.

LEIVAS, J. C. P.; PORTELLA, H. P.; SOUZA, H. M. Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na escola básica no Brasil com utilização do Geogebra. **Revista Thema**, v. 14, n. 3, p. 210-221, 2017.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. As concepções de Geometrias não Euclidianas de um grupo de professores de matemática da Educação Básica. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 369-388, 2015.

LOVIS, K. A; FRANCO, V. S; BARROS, R. M. O. Dificuldades e obstáculos apresentados por um grupo de professores de matemática no estudo da geometria hiperbólica. **Zetetiké**, v. 22, n. 42, jul./dez.2014.

MUIR, T.; BESWICK, K. Stimulating reflection on practice: Using the supportive classroom reflection process. **Mathematics Teacher Education and Development**, s.v, n. 8, p. 74-93, 2007.

NACARATO, A.; MENGALI, B.; PASSOS, C. **A matemática nos Anos iniciais do Ensino Fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

NAVARRO, A. L.; MELLO, A. S.; SANTOS, D. A. B; GOMES, E. F. A interdisciplinaridade entre o Ensino de Física e o Grafite. **Educação Pública – Divulgação Científica e Ensino de Ciências**, v. 1, n. 2, jun. 2022.

OLIVEIRA, J. C. R. **Um estudo sobre o movimento de constituição da identidade profissional de professores de matemática experientes**. 139p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2022.

OLIVEIRA, J. C. R.; CYRINO, M. C. C. T. Trajetória profissional de professores de matemática experientes na busca pela profissionalização docente. **Práxis Educacional**, v. 19, n. 50, p. e11645-e11645, 2023.

PARANÁ (Estado). Superintendência de Educação. Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática. Curitiba, 2008.

PADILHA, L.; MORAN, M. Geometria dos fractais: uma proposta para o cálculo da dimensão da Árvore Pitagórica. **Ens. Tecnol. R.**, Londrina, v. 7, n. 1, p. 256-267, jan./abr. 2023.

SACHS, L. O quinto postulado de euclides como história de problemas. **Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA)**, v. 1, n. 1, p. 11-29, 2016.

SANTOS JÚNIOR, C. L. dos. **Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de Matemática**: uma proposta à produção de significados no estudo de Geometria. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020, 239 p.

SÃO PAULO (Estado). Superintendência de Educação. Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática. São Paulo, 2011.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA-SBEM. A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, **Boletim SBEM**, n. 21, p. 1-42, fev. 2013.

SOUZA, L. R. **Geometrias não-Euclidianas na formação de professores**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, p., 2022.

ARTIGO-CAPÍTULO 3

REFLEXÕES DE UMA PROFESSORA EXPERIENTE SOBRE O TRABALHO COM AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Resumo: Este artigo tem por objetivo discutir reflexões manifestadas por uma professora experiente no ensino de geometria a respeito do trabalho com as Geometrias não Euclidianas (GNE) na educação básica (EB). A professora foi considerada experiente não apenas pelo seu tempo de atuação com o ensino de geometria na EB e na formação de professores de matemática (PMat), mas por ser protagonista de sua própria prática profissional e de seu processo de profissionalização (formação). Foi realizada uma análise qualitativa de cunho interpretativo da narrativa reflexiva produzida por essa professora a respeito das GNE na EB considerando o papel das GNE na EB e os desafios a serem enfrentados quanto ao trabalho com GNE na EB. Os resultados apontam que a inclusão das GNE nesse contexto pode: possibilitar uma compreensão mais ampla das geometrias, suas relações, diferenças e semelhanças, colaborando para a compreensão da própria matemática; fomentar discussões que colaborem na formação cidadã dos estudantes e situem o conhecimento geométrico dentro de um espectro amplo de saberes em relação a outras áreas do conhecimento. No que se refere aos desafios a serem enfrentados no trabalho com GNE na EB, os resultados indicam uma carência de conceitos não euclidianos em livros didáticos, currículos da EB e na formação de PMat, assim como conflitos entre conceitos euclidianos e não euclidianos. A inserção de GNE na EB pode colaborar no desenvolvimento do pensamento crítico, estimular a criatividade, situar os estudantes enquanto sujeitos sociais, evidenciar o funcionamento da matemática e da ciência e confrontar a noção de verdade muito arraigada ao conhecimento matemático escolar. Esses fatos ressaltam a necessidade de se promover o trabalho com as GNE na EB.

Palavras-chave: Geometrias não Euclidianas na educação básica, Formação de professores, Importância das Geometrias não Euclidianas.

INTRODUÇÃO

A geometria é um ramo da matemática que trata de questões relacionadas a propriedades do espaço ocupado por objetos geométricos que têm forma, tamanho e posição. A Geometria Euclidiana (GE) é a área da geometria que, tendo em conta os axiomas e postulados descritos na obra *Os Elementos*, fornece elementos que permitem a compreensão de objetos, suas propriedades e relações e a elaboração de modelos de representação do espaço euclidiano.

Até meados do século XIX, a única geometria considerada capaz de fornecer um estudo consistente sobre o espaço era a GE. Porém, à medida que as discussões envolvendo o 5º

postulado⁵⁵ do sistema axiomático euclidiano avançaram, outras possibilidades geométricas foram constituídas.

Determinadas situações cotidianas, como deslocamentos na superfície terrestre, medições de costas litorâneas e engenharia de estruturas em grandes escalas, podem não encontrar uma representação satisfatória na GE. Nesses e em outros contextos, outras geometrias, como a Geometria Esférica e a Geometria Fractal, podem ser mais apropriadas para explorá-los, descrevê-los e analisá-los. Noções geométricas não euclidianas, além de serem aplicadas nas situações descritas anteriormente, impactaram diretamente o desenvolvimento científico do século XX (Kaleff, 2007).

No contexto do ensino de geometria na educação básica (EB), a GE é predominante, embora seu ensino, historicamente, seja precário (Pavanello; 1993; Barros; Pavanello; 2022). Concomitante a este fato, investigadores consideram a possibilidade de inserção das GNE nos bancos escolares (Carvalho; Azevedo, 2020; Kaleff, 2010; Leivas; Souza; Portella, 2017; Padilha; Moran, 2023; Reis, 2006). Alguns estados, como São Paulo (2011), Ceará (2008) e Paraná (2008) indicaram, em suas Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE), o trabalho com GNE na escola básica. Dentre as justificativas apresentadas para tal inserção, destacamos: as demandas tecnológicas e educacionais do século XXI (Kaleff, 2007); as relações de GNE com outras áreas matemáticas e outras áreas do conhecimento (Rogenski; Dias, 2007); e a possibilidade de os estudantes da EB desenvolverem uma leitura mais universal e concisa do mundo (Brum; Shuchmacher, 2015).

A partir dessas considerações, julgamos que compreender aspectos considerados por uma professora experiente no ensino de geometria, acerca do trabalho com GNE na EB, pode proporcionar discussões significativas sobre a temática. Para tanto, analisamos uma narrativa reflexiva produzida por uma professora experiente a respeito das GNE na EB tendo como objetivo discutir as reflexões presentes no decorrer da narrativa. A participante foi considerada experiente não apenas pelo seu tempo de atuação com o ensino de geometria na EB e na formação de PMat, mas por ser reconhecida, pelos seus pares, como uma professora protagonista de sua própria aprendizagem e por manifestar, em sua atividade profissional e

⁵⁵ O 5º postulado, na versão original de *Os Elementos*, é descrito por “E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores que dois retos (Euclides, 2009, p. 98)”. Porém, atualmente, a reformulação proposta por John Playfair (1748-1819), em 1975, é a mais utilizada: “sejam dados, em um plano, uma reta AB e um ponto P que não está no plano, então existe uma e só uma paralela a AB passando por P”. A partir dessa escrita, o 5º postulado passou a ser chamado de “postulado das paralelas” (Sachs, 2016, p. 16).

acadêmica, características que evidenciam capacidade de formação e transformação em relação ao ensino de geometria (Oliveira; Cyrino, 2023).

Na sequência, tecemos algumas considerações sobre as GNE na EB. Posteriormente, apresentamos os encaminhamentos metodológicos, as análises, as discussões dos resultados e, por fim, as considerações finais.

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

O 5º postulado da GE, comumente chamado de “postulado das paralelas”, distinguia-se por sua menor evidência e maior complexidade em comparação aos quatro primeiros postulados. Tais características fizeram com que alguns matemáticos tentassem prová-lo como um teorema⁵⁶ partindo dos postulados que o precediam. Um dos métodos empregados nas tentativas de prova foi a redução ao absurdo, que assume a negação de uma proposição como verdadeira e objetiva chegar a uma contradição. A obtenção de uma contradição a partir da negação de uma proposição implica na validade da própria proposição. Além de não conseguirem chegar à tal contradição que validaria o 5º postulado, alguns matemáticos obtiveram proposições que “desvirtuavam” alguns conceitos euclidianos, como a possibilidade de existência de várias retas paralelas a uma outra reta dada (Carmo, 1987). A aceitação gradual de outras geometrias no meio matemático resultou da formalização e divulgação desses sistemas geométricos diferentes da GE. Após quase 2 mil anos dos registros presentes em *Os elementos*, a GE deixou de ser a única geometria possível, dividindo espaço com as GNE.

O leitor, neste momento, pode se perguntar qual a pertinência de se trabalhar GNE na EB, já que vários campos matemáticos importantes, como cálculo e estruturas algébricas, não são trabalhados na EB. Por que com as GNE seriam diferentes? Kaleff (2022), traz uma reflexão específica sobre essa questão. Um dos pontos levantados pela autora refere-se à possibilidade de se exercitar pensamentos específicos das lógicas imbricadas tanto na própria matemática (pensamento matemático e científico) quanto na realidade, que é dinâmica. Este fato pode contribuir para a formação de estudantes que participem de processos de transformação social, extrapolando conceitos para além das fronteiras matemáticas e científicas.

Alguns estados brasileiros indicaram em suas DCE algumas referências às GNE. No estado do Ceará, as diretrizes sugeriam “uma discussão referente à geometria e suas partes, onde se destacariam a Euclidiana Plana e a Não-Euclidiana a Espacial, a Métrica e a Descritiva”

⁵⁶ Proposição matemática rigorosamente demonstrada a partir de axiomas/postulados previamente estabelecidos.

(Ceará, 2008, p. 18). O estado de São Paulo propôs que “uma reflexão sobre as diversas formas de conceber o espaço pode inspirar algumas noções de geometrias não euclidianas” (São Paulo, 2011, p. 40). As diretrizes curriculares do Paraná, no conteúdo estruturante “Geometrias”, indicavam “noções básicas de geometrias não-euclidianas”. O documento detalhou quais geometrias foram consideradas e possíveis abordagens para o trabalho com GNE.

No que diz respeito à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), salvo a Geometria Fractal⁵⁷ (EM13MAT05), as GNE não são citadas diretamente. A BNCC direciona a elaboração do currículo escolar com base nas competências e habilidades indicadas no documento, sendo este a referência nacional para a formulação dos currículos escolares de todo o país (Brasil, 2018). Na construção de propostas pedagógicas e do próprio currículo, outras organizações podem ser feitas, utilizando-se tanto das habilidades e competências da base quanto de outras demandas e necessidades das escolas. A investigação de deformações cartográficas (EM13MAT509), o reconhecimento e a construção de transformações geométricas e o reconhecimento de suas conexões com obras de arte (EF07MA21) e a resolução de problemas sobre ladrilhamento (EM13MAT505) são habilidades que, apesar de não fazerem alusão direta às GNE, podem ser contempladas pelos professores de matemática (PMat) no trabalho com GNE na EB, tendo como base indicações da BNCC.

A introdução de conceitos elementares de GNE pode promover entendimento sobre o funcionamento das Ciências, como estas lidam com paradigmas e verdades anteriormente estabelecidas e como o discurso científico se materializa na realidade.

A ciência não se configura como verdade absoluta sendo esta, dinâmica e mutável. Partindo desse pressuposto, é importante analisar e refletir sobre seus conteúdos e abordagens durante o período acadêmico dos estudantes, levando-os a considerar a mutabilidade da ciência (Carvalho; Azevedo, p. 116, 2020).

Outro ponto de destaque para a introdução de GNE na EB diz sobre a vasta possibilidade de conexão desses conteúdos com outras áreas do conhecimento. Essas possibilidades serão comentadas ao longo do texto. Nas seções em que discutimos os aspectos evidenciados pela professora que colaborou com essa investigação, apresentamos possibilidades e exemplos de trabalho com as GNE na EB.

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

⁵⁷ Vale destacar que a Geometria Fractal costuma não ser caracterizada como uma GNE pelos documentos oficiais, livros didáticos e até mesmo por PMat (Nascimento; Costa, 2019).

Na presente investigação⁵⁸, realizamos uma análise qualitativa de cunho interpretativo (Erickson, 1986) na busca de discutir reflexões manifestadas por uma professora experiente⁵⁹ no ensino de geometria a respeito do trabalho com as GNE na EB. A professora que colaborou com nossa investigação, professora Loreni⁶⁰, foi escolhida por ter ampla experiência com o ensino de geometria na EB e na formação (inicial e continuada) de PMat; ter desenvolvido projetos de investigação e ter publicações relacionadas ao ensino de GE e GNE.

Loreni foi considerada uma formadora experiente por ser reconhecida por seus pares como uma formadora de professores que são protagonistas de seus processos de aprendizagem profissional e por apresentar em sua atividade profissional e acadêmica características⁶¹ que demonstra capacidade de formação e de transformação em relação ao ensino de geometria (Oliveira; Cyrino, 2023). Quando nos referimos a Loreni como experiente, assumimos a perspectiva de experiência de Jorge Larrosa (2002, p. 24):

a experiência, a possibilidade de que algo nos aconteça ou nos toque, requer um gesto de interrupção, um gesto que é quase impossível nos tempos que correm: requer parar para pensar, parar para olhar, parar para escutar, pensar mais devagar, olhar mais devagar, e escutar mais devagar; parar para sentir, sentir mais devagar, demorar-se nos detalhes, suspender a opinião, suspender o juízo, suspender a vontade, suspender o automatismo da ação, cultivar a atenção e a delicadeza, abrir os olhos e os ouvidos, falar sobre o que nos acontece, aprender a lentidão, escutar aos outros, cultivar a arte do encontro, calar muito, ter paciência e dar-se tempo e espaço

Loreni concluiu sua licenciatura em Matemática em 1991, fez uma especialização em Educação Matemática em 1998, mestrado (2004) e doutorado (2014) em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Desde 1992, Loreni

⁵⁸ Aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Londrina (parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231).

⁵⁹ As autoras desse artigo conhecem a trajetória profissional e trabalharam, em algum momento, com a professora participante da pesquisa. Ela é do estado do Paraná, o qual incluiu tópicos de GNE no currículo da EB (Paraná, 2008). A professora teve uma participação ativa na área de Educação Matemática, tanto em escolas quanto em Universidades públicas, envolvendo-se em cursos de graduação, em programas de pós-graduação, em projetos de extensão, em grupos de pesquisa e em eventos acadêmicos da área. O comprometimento com a disseminação do conhecimento, com a Educação Matemática, bem como o uso responsável de recursos públicos, se faz presente nas ações e nas produções da participante. É possível identificar quando algo nos toca por aquilo que nós fazemos. Portanto, nos sentimos confortáveis em chamá-la de experiente na perspectiva de Larrosa (2002). Tal conforto não se faria presente *a priori* se as autoras não conhecessem a participante, uma vez que apenas o tempo de atuação não é suficiente atribuir a alguém o status de experiente, conforme essa perspectiva.

⁶⁰ O nome não é fictício.

⁶¹ Não é o foco desta pesquisa discutir profundamente o conceito de experiência estendido à participante. Informações sobre as categorias, aspectos relevantes e demais discussões sobre tal questão disponível em Oliveira (2022).

atuou como professora da Rede Estadual de Ensino do Paraná, nos anos finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos.

De 2005 a julho de 2021, trabalhou com a formação inicial de PMat. Atuou na Faculdade de Apucarana (FAP) e na Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Além disso, foi professora colaboradora na Universidade Estadual de Londrina (UEL), no curso de Especialização em Educação Matemática. Atuou em diversas Secretarias Municipais de Educação com a formação continuada de PMat. Loreni desenvolveu cursos, oficinas e projetos de extensão e produziu artigos relacionados à GNE na EB e na formação de PMat (Baldini, 2004; Baldini, 2008; Cyrino; Baldini, 2012; Baldini, Cyrino, 2016).

Para obtenção das informações, solicitamos a Loreni que produzisse uma narrativa de natureza reflexiva considerando o enunciado a seguir (Figura 1). Destacamos que o presente artigo faz parte de uma pesquisa de mestrado que considerou, além dos aspectos relacionados ao trabalho com GNE na EB, aspectos relacionados à formação de PMat. O recorte do enunciado (Figura 1) refere-se especificamente ao contexto da EB.

Figura 1 – Enunciado da narrativa

Objetivos:

- Compreender percepções de professoras experientes no ensino de Geometria a respeito do trabalho com as Geometrias Não Euclidianas em contextos de formação de professores e na Educação Básica;

Orientações: Considerando seu trabalho como formadora de professores e como professora de geometria, elabore um texto de natureza reflexiva que apresente as suas percepções a respeito das Geometrias não Euclidianas na formação de professores de matemática e na Educação Básica.

Para a construção dessa narrativa, você pode contemplar:

- o papel das Geometrias Não Euclidianas na Educação Básica;
- os obstáculos que devem ser enfrentados por professores de matemática no trabalho com as Geometrias Não Euclidianas na Educação Básica;

Fonte: As autoras (2023).

A narrativa foi escolhida como instrumento de coleta de informações pois permite-nos indicar *o que e como* a autora disserta sobre determinado tema. A experiência da pessoa que elabora a narrativa assume a configuração das histórias que são empregadas para narrá-las, proporcionando uma perspectiva particular e subjetiva sobre a experiência em questão.

Ao contar ou escrever uma situação vivida, quem produz a narrativa mostra como vivenciou a experiência, revelando um conhecimento tácito. Essa função da linguagem, de construir a realidade pelo modo como o indivíduo dá sentido ao mundo e às suas vivências, parece-me ser o traço que define e torna narrativa peculiar em relação a outras formas do discurso e o que a torna um poderoso método de investigação em educação (Coura, p. 62, 2018).

A elaboração de narrativas permite não apenas relatar eventos, mas também explorar as percepções, interpretações e significados atribuídos a eles. Segundo Bolívar, Domingo e Fernandes (2001), as narrativas podem ser consideradas uma reconstrução particular da experiência, o que se alinha com o escopo da presente pesquisa. Vale destacar que a palavra *narrativa* é polissêmica. Pode referir-se à escrita do professor, narrativas autobiográficas e de experiência, histórias de vida, pesquisa, narrativa etc. “Em muitos casos, não se trata de termos correlatos, mas com múltiplos significados e múltiplas formas de abordagem teórica e de análise” (Mendes; Passos; Silva, 2014, p.703).

A natureza da narrativa é reflexiva, uma vez que expõem elementos problematizadores da prática docente e dos saberes experienciais da participante (Freitas, Fiorentini, 2007). A professora, ao narrar de maneira reflexiva suas experiências a outros, aprende e ensina e pode (re)significar suas experiências e saberes próprios (Clandinin, 2003). Nesse estudo, a narrativa foi utilizada como instrumento metodológico para a obtenção das informações, posteriormente analisadas e discutidas. As reflexões, sob a ótica de Muir e Beswick (2007), podem ser classificadas em diferentes níveis: a descrição técnica, que contém relatos gerais da prática docente por vezes focados em aspectos técnicos em detrimento do valor das experiências; a reflexão deliberada, que identifica eventos particulares em sala de aula e fornece justificativas para comportamentos e/ou ações; e a reflexão crítica, que, além de identificar esses eventos, fornece explicações que levam em conta perspectivas dos outros e oferece alternativas relacionadas ao ensino e aprendizagem. A análise da narrativa produzida pretendeu identificar reflexões, ideias e opiniões da professora sobre GNE na EB.

Vale destacar que o tratamento dado aos elementos da narrativa também é interpretativo e envolve, necessariamente, análises do pesquisador.

[...] considerando que os textos são nossa forma de falar sobre o que é considerado como dados na pesquisa narrativa e tendo em vista que os dados tendem a carregar uma ideia de representação objetiva de uma experiência de pesquisa, é importante notar quão imbuídos de interpretação são os textos de campo (Clandinin; Connely, 2011, p. 134).

O processo analítico foi dividido em três momentos principais. O primeiro momento foi de familiarização com os elementos abordados na narrativa a partir de leituras iniciais e flutuantes, com anotações e destaques em trechos que consideramos ser importantes, o que nos permitiu a elaboração de esboços do que seriam os pontos de enfoque da análise. No segundo momento, com as anotações e os esboços em mãos, selecionamos trechos considerados representativos, que sucederiam à análise, e partimos na busca de delimitar os pontos de

enfoque. Os esboços foram modificados diversas vezes, com várias idas e vindas, leituras e releituras. No final do segundo momento, chegou-se à delimitação de pontos de enfoque associados ao papel das GNE na EB e aos desafios a serem enfrentados no trabalho com essa temática na EB. Após a constituição dos pontos de enfoque, no terceiro momento, realizamos uma análise interpretativa na busca de compreender as reflexões manifestadas pela professora.

Nas próximas seções apresentaremos os resultados, as interpretações advindas das análises, as discussões e as conclusões da pesquisa.

REFLEXÕES MANIFESTADAS POR UMA PROFESSORA EXPERIENTE A RESPEITO DAS GNE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Nesta seção, descrevemos e analisamos reflexões manifestadas pela professora participante a respeito do trabalho com GNE na EB. O texto está organizado em duas subseções, quais sejam o papel das GNE na EB e os desafios a serem enfrentados no trabalho com essa temática na EB, e seus respectivos pontos de enfoque. Para evidenciar os elementos apresentados e contextualizá-los para o leitor, em alguns casos, apresentamos exemplos (entre figuras, construções e modelos manipuláveis com acesso via notas de rodapé) que podem promover a compreensão destes.

O papel das GNE na EB

Em sua narrativa, Loreni defendeu o trabalho com as GNE na EB, considerando como pontos de enfoque a importância de o estudante: compreender a existência de outras geometrias e suas relações, diferenças e semelhanças entre elas e a GE; identificar correspondências entre as GNE, o mundo empírico e outras áreas do conhecimento; e refletir criticamente sobre conhecimentos tradicionalmente aceitos, colaborando na formação cidadã dos estudantes.

GE e GNE: relações, diferenças e semelhanças

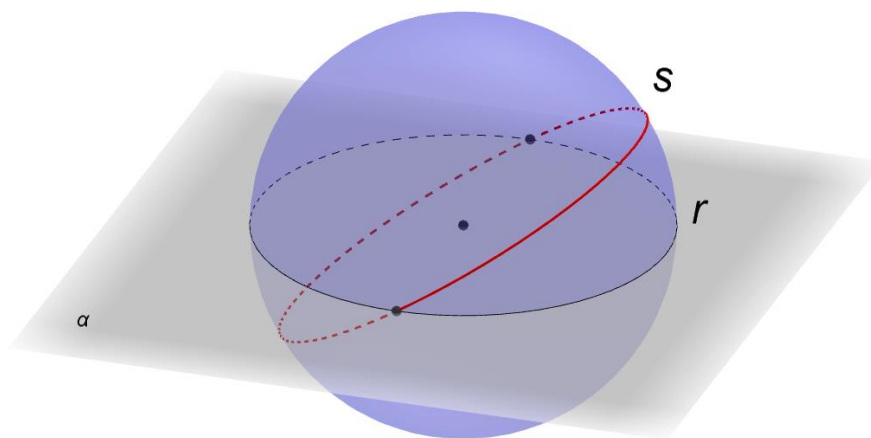
*Um aspecto que muito me atraiu nesse trabalho [com GNE] foi o fato de proporcionar desmistificar afirmativas feitas muitas vezes na Educação Básica, como: “a soma dos ângulos internos de **qualquer** triângulo é **sempre** 180°” e outras [Loreni, 2023, N, grifo da autora].*

O trabalho com GNE costuma desafiar alguns conceitos geométricos enraizados, como o resultado da soma de ângulos internos de um triângulo, conforme apontado por Loreni. Se

construído sobre uma superfície esférica⁶², por exemplo, a soma dos ângulos internos do triângulo será maior que 180° . Além da afirmação anterior, citamos “duas retas paralelas são aquelas que nunca se encontram e que mantêm uma distância constante entre si”. Essa afirmação está firmada no 5.º postulado da GE: “sejam dados, em um plano, uma reta AB e um ponto P que não está no plano, então existe uma e só uma paralela a AB passando por P”⁶³. A afirmação é verdadeira quando consideramos a GE, porém, em outros modelos/espacos/sistemas geométricos seu valor lógico pode ser diferente.

Na Geometria Esférica, são consideradas retas apenas os círculos máximos, que são traçados a partir da intersecção da superfície esférica com um plano que passa pelo seu centro. Nessa geometria, as retas são fechadas, finitas e quaisquer duas retas eventualmente se cruzarão em dois pontos diametralmente opostos (Figura 2), o que não ocorre na GE.

Figura 2 – Retas r e s em uma superfície esférica



Fonte: As autoras (2023).

Podemos afirmar, portanto, que não existem retas paralelas na Geometria Esférica. Também existem modelos geométricos que descrevem a existência de retas paralelas que se encontram em algum ponto. Imagine uma linha férrea que conserva a distância entre as linhas laterais dos trilhos constante. Quando um observador se atenta ao trajeto à frente, as linhas laterais parecem se encontrar em um ponto muito distante no horizonte. As retas com a definição euclidiana de paralelismo, aos nossos olhos, parecem se encontrar no infinito: a nossa visão representa o mundo de modo não euclidiano. Na Geometria Projetiva, uma GNE, as retas paralelas se encontram no que chamamos de ponto de fuga.

⁶² Para acessar o modelo manipulável, acesse: <https://www.geogebra.org/m/quzzydhh>.

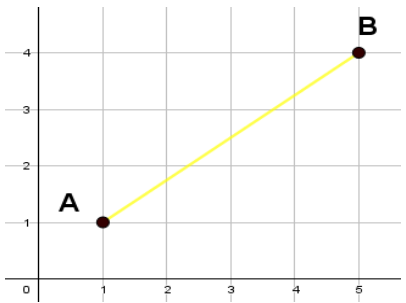
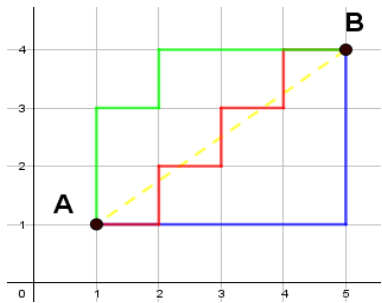
⁶³ Reformulação proposta por John Playfair (1748-1819), em 1795. O 5º postulado de Euclides original é “E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores que dois retos” (Euclides, 2009, p. 98).

Estudar diferentes definições e propriedades de retas paralelas em contextos diversos exemplifica o funcionamento de definições, premissas, axiomas, postulados, corolários etc. e pode evidenciar, além das diferenças e semelhanças entre elas e a GE, o funcionamento da própria matemática.

[...] para mim, estas geometrias não podem ser tratadas apenas como curiosidades, por várias razões, como pelo fato que elas podem contribuir para a compreensão de conceitos euclidianos, como também da Matemática em geral [Loreni, 2023, N].

Loreni afirma que o trabalho com GNE na EB pode colaborar na compreensão da matemática, além disso pode trazer elucidações de propriedades da GE. Podemos citar, como exemplo de tal afirmação, as relações e noções trabalhadas na Geometria do Táxi. A Geometria do Táxi é um modelo geométrico que trata as distâncias como o deslocamento de um táxi em uma malha urbana, convenientemente semelhante ao sistema cartesiano. O trajeto do táxi é apenas vertical e horizontal, o que não permite “atravessar” as quadras. O caminho descrito entre dois pontos terá a sua distância concebida como a soma das unidades de deslocamento, diferentemente da GE que define a distância entre dois pontos como um único segmento de reta, que é a hipotenusa de um triângulo retângulo que tem como seus catetos as unidades de deslocamento vertical e horizontal.

Quadro 1 - Comparação entre a Geometria Euclidiana e a do Táxi

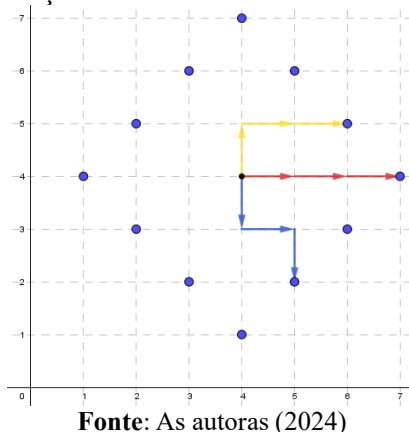
	Geometria Euclidiana	Geometria do Táxi
Cálculo da distância	$d_e(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$	$d_t(A, B) = x_a - x_b + y_a - y_b $
Representação geométrica		

Fonte: Elaborado pelas autoras (2023)

A métrica da Geometria do Táxi é comumente chamada de “métrica dos catetos” e acarreta mudanças na forma em que as distâncias são representadas e interpretadas. Um resultado interessante da adoção dessa métrica é a representação da circunferência euclidiana, definida por “dado um ponto central fixo, todos os pontos equidistantes dele descrevem uma circunferência”. Na Figura 3 estão representados os pontos que equidistam do centro (4,4) em

3 unidades, utilizando a métrica dos catetos em uma malha que fixa o valor das quadras em 1 unidade.

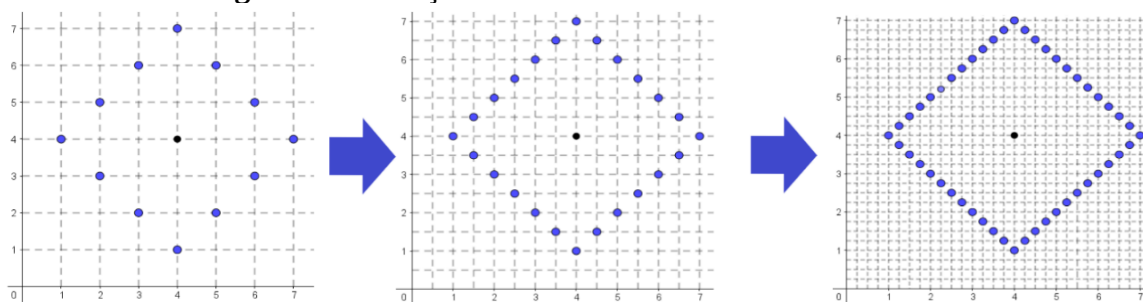
Figura 3 – Construção da “circunferência” na Geometria do Táxi



Fonte: As autoras (2024)

O plano da Geometria do Táxi pode atribuir diferentes valores a cada unidade. Se tomarmos o tamanho da quadra como $\frac{1}{2}$ unidade, teremos o dobro de pontos equidistantes do centro. Se tomarmos o tamanho da quadra como $\frac{1}{4}$ unidade, teremos o quádruplo de pontos equidistantes do centro, e assim sucessivamente (Figura 4).

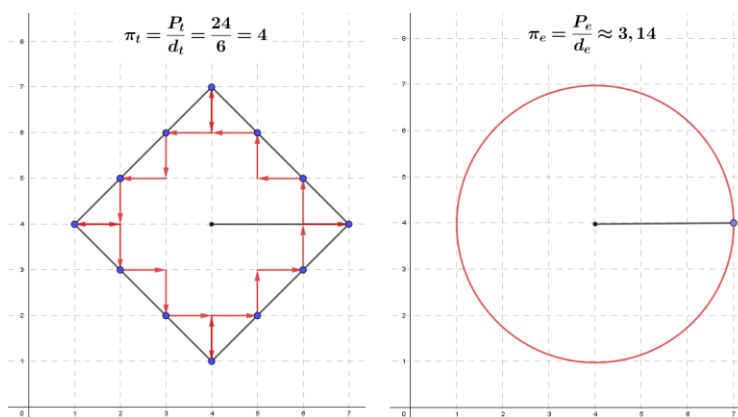
Figura 4 - Evolução da “circunferência” na Geometria do Táxi



Fonte: As autoras (2023)

Ao diminuir o tamanho das quadras, mais e mais pontos são traçados e o conjunto de pontos se aproxima da representação de um quadrado, chamado nessa geometria de “táxi-circunferência”. Nesse contexto, podemos observar que a circunferência euclidiana foi reinterpretada como um quadrado. Essa redefinição singular pode levar os estudantes a compreenderem as definições matemáticas, o funcionamento de conceitos em um sistema de representação e a flexibilidade da matemática diante de métricas e contextos diversos.

Outra consequência da adoção da métrica dos catetos é a modificação do valor da constante π (Figura 5). O π representa a relação entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. A redefinição da circunferência na Geometria do Táxi acarreta, portanto, sua modificação.

Figura 5 – Cálculo da constante π na Geometria do Táxi e na GE

Fonte: As autoras (2024)

Ao considerarmos um modelo geométrico que restringe as distâncias a trajetórias em grade, a relação entre a o comprimento da taxi-circunferência e o seu diâmetro é diferente. O estudo de métricas diferentes e suas correspondências (ou não) com a métrica euclidiana pode exemplificar a validade de sistemas geométricos, ressignificar a noção de “verdade” que é muito arraigada ao conhecimento matemático e evidenciar a dependência da matemática em relação às definições escolhidas.

GNE, o mundo e outras áreas do conhecimento

A necessidade de uma compreensão mais flexível e ampla da geometria como meio de capturar a diversidade e a complexidade da natureza, da matemática e outras áreas do conhecimento também foi um fato narrado por Loreni.

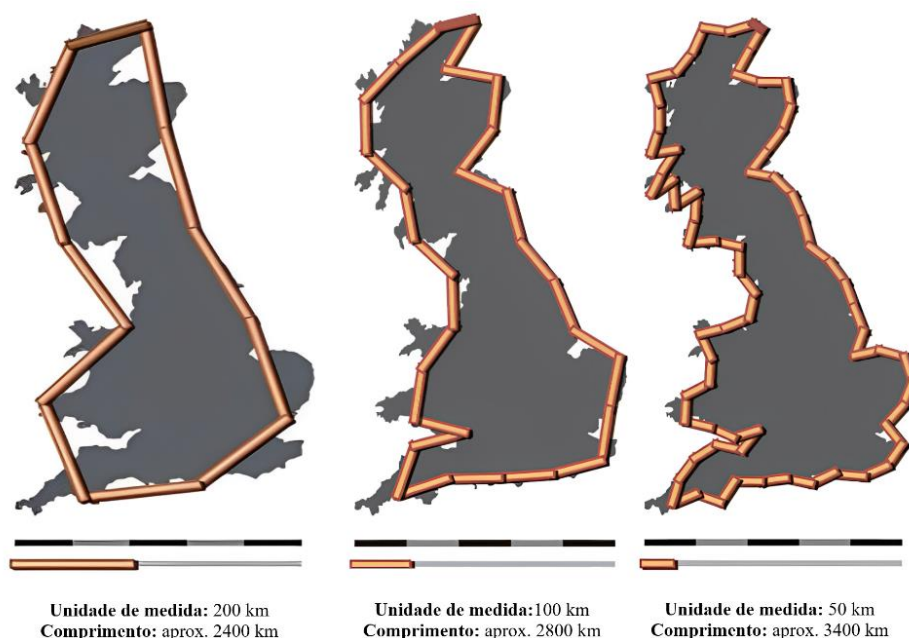
Se observarmos a natureza de modo geral, pode-se perceber que não é possível construir somente conceitos sustentados por noções primitivas como retas, pontos e planos euclidianos, já que nem tudo no universo é tão regular ou com aspectos apenas bi ou tridimensionais, evidenciando a necessidade de se discutir e compreender os diferentes espaços geométricos e como o mundo se organiza, como ocorrem os processos de pensamentos humanos que remetem a outras curvaturas, seja na Matemática, nas Artes ou em outros campos do conhecimento [Loreni, 2023, N].

A noção euclidiana de dimensão de um objeto corresponde ao número mínimo de coordenadas independentes necessárias para descrever sua posição no espaço euclidiano. Um ponto não possui dimensão. Uma reta tem dimensão um, pois é determinada por uma coordenada ao longo de seu comprimento. Um plano tem dimensão dois, pois é definido por duas coordenadas ortogonais. O espaço é caracterizado por três dimensões ortogonais: comprimento, largura e altura. Porém, muitas das formas encontradas na natureza não são

retângulos, círculos ou esferas, superfícies ou sólidos, como descrito na GE. As medidas de comprimento, área e volume considerando a dimensão euclidiana podem ser inadequadas para certas situações.

O comprimento de linhas costeiras não pode ser bem definido, apesar de ser um fato aparentemente contraintuitivo. O resultado depende especificamente da escala utilizada na medição (Figura 6).

Figura 6 – Perímetro da costa da Grã-Bretanha considerando três escalas diferentes



Fonte: Sandle e Andrus (adaptado) (online) (2005)

O litoral da Grã-Bretanha é muito acidentado, com formas não lineares que seguem um padrão “quebrado”. Conforme ampliamos a visualização da costa, mais detalhes são revelados, como a resolução de uma foto. Se utilizássemos uma régua de 1 metro para medi-la, poderíamos adicionar cada pequena rachadura e fenda que a compõem ao comprimento total da costa. Se a régua utilizada na medição for cada vez menor, chegaremos a medir cada grão de areia, depois cada átomo, e assim por diante. Ou seja, o valor não converge, sempre aumenta. Podemos concluir que a noção de comprimento não é aplicável nesse contexto, pois não há um tamanho de escala que seja considerado adequado para expressar o perímetro de litorais. É necessário medir a complexidade das formas costeiras tendo em conta suas características fractais (fraturadas) em diferentes escalas. A medida mais adequada para descrever um litoral é sua dimensão fractal⁶⁴ que advém da Geometria Fractal.

⁶⁴ Algumas técnicas de estimativa da dimensão fractal estão disponíveis no texto de Backes e Bruno (2005).

Ao contrário da GE, o valor da dimensão fractal não é, necessariamente, um valor inteiro. Ela pode ser um valor fracionário e representa o grau de ocupação do objeto em estudo no espaço. No caso do litoral da Grã-Bretanha, a dimensão fractal é aproximadamente 1,25 (Mandelbrot, 1967). Isso significa que a costa é muito complexa para ser comparada a uma reta ou segmento de reta (de dimensão euclidiana 1) mas não o suficiente para ser comparada a uma superfície (de dimensão euclidiana 2). Neste caso, a dimensão fractal compreende um valor entre 1 e 2. A Geometria Fractal, além de ser um campo matemático estruturado, é utilizada em diversas áreas como medicina, ecologia e Arte.

Na Geometria Projetiva, as retas paralelas se encontram no que chamamos de ponto de fuga. Suas raízes históricas estão na noção de perspectiva utilizada em pinturas artísticas durante o Renascimento que buscavam aplicar conceitos geométricos para criar a ilusão de profundidade nas obras. A Figura 7 traz uma comparação entre as obras *Taula de Sant Miquel*, de Mestre de Soriguerola (uma das 13 cenas), sem noções de perspectiva e *A Última Ceia*, de Leonardo da Vinci, com noções de perspectiva.

Figura 7 – Comparação entre as obras *Taula de Sant Miquel* de Soriguerola e *A Última Ceia* de Leonardo da Vinci



Fonte: Soriguerola (1275-1300) e Da Vinci (1494 – 1498)

Ao estudar a composição e a disposição das figuras nas pinturas, como os pratos nas mesas, podemos identificar como os artistas usaram diferentes modos de projetar a realidade tridimensional em superfícies bidimensionais. Note que a utilização da perspectiva afeta a percepção espacial do observador. Outro exemplo de aplicação de conceitos geométricos não euclidianos são as obras do arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer (1907 – 2012), que remetem a curvaturas suaves e “atípicas” e desafiam a rigidez das linhas retas da arquitetura tradicional. Ao revisitar conceitos euclidianos como dimensão, paralelismo e distância, sob a perspectiva de GNE, os estudantes da EB podem ampliar a compreensão dos princípios geométricos, visualizar a diversidade de abordagens possíveis dentro da matemática e suas conexões com outras áreas do conhecimento.

GNE e a formação cidadã dos estudantes

Outro ponto levantado por Loreni em relação ao trabalho com GNE na EB diz sobre a viabilidade de discussões sociais e políticas frente a problemas matemáticos que não podem ser solucionados apenas com a GE.

Quando o professor discute com seus estudantes, por exemplo, qual a curvatura do universo em que vivemos, evidencia que muitos problemas atuais não serão resolvidos no espaço de Euclides (curvatura nula), pode ser um momento rico em reflexões, não somente sobre o conhecimento geométrico, mas também, sobre questões sociais e políticas, e é nesse sentido também, que ela desenvolve um papel importante na formação do estudante da Educação Básica [Loreni, 2023, N].

Existem possibilidades de discussões, em uma aula de matemática, sobre questões sociais e políticas relacionadas a esses conteúdos. À primeira vista, pode parecer que as geometrias são apenas um conjunto de conceitos abstratos distantes da vida cotidiana. No entanto, o estudo de GNE abre caminho para reflexões sobre diversidade e pluralidade de diferentes pontos de vista. Podemos explorar como as ideias de normalidade e padrão são construídas socialmente e como anseios, necessidades, perspectivas e objetivos movimentam a sociedade⁶⁵.

O desenvolvimento histórico das GNE pode exemplificar como se dá a consolidação de um discurso matemático, visto que até meados do século XVII “as forças que atuaram na manutenção da ordem estabelecida do discurso da geometria euclidiana sobressaíram-se diante daquelas que causavam algumas inquietações” (Bernardino; Martins; Dos Anjos, 2015). A existência de geometrias além da euclidiana confrontava o pensamento dominante da época: a filosofia kantiana. Tal filosofia considerava que a GE era uma forma universal de entender o universo e seus postulados eram as regras que a mente humana usava para entender as relações entre pontos, linhas e formas no espaço (Eves, 2004). A concepção euclidiana do espaço como um modelo de racionalidade e ordem estava em consonância com perspectivas religiosas que procuravam uma compreensão ordenada e estável do universo. A incorporação das GNE aos conhecimentos científicos foi um processo, além de tudo, social.

⁶⁵ Segundo Castro (2002, p. 1), “a sociedade é uma condição universal da vida humana”. É uma necessidade biológica e simbólica. Biológica por conta da predisposição genética à vida em sociedade, pois dependemos de interações, da linguagem e da técnica (trabalho) para desenvolver capacidades físicas e intelectuais essenciais à sobrevivência. E simbólica porque há a necessidade de dar sentido às necessidades e definir parâmetros sobre por que e como fazemos algo. Isso torna necessária a definição de regras e significados compartilhados (em sentido moral e cognitivo), que leva o comportamento humano a não se basear em instintos e sim em normas orientadoras individuais e sociais, delineadas historicamente e passíveis de modificação com o tempo.

Uma outra possibilidade de discussão está relacionada ao cálculo da circunferência da Terra, elaborado por Erastótenes (276 a.E.C. - 194 a.E.C) em 200 a.E.C. Erastótenes estimou, com surpreendente precisão, o tamanho da Terra utilizando apenas conceitos geométricos e observações astronômicas. O cálculo de Erastótenes pode ser utilizado, por exemplo, como ponto de partida para promover discussões contemporâneas, como o ressurgimento do discurso terraplanista no século XXI, e estimular os estudantes a questionarem e analisarem criticamente afirmações não científicas. Além disso, discussões desse teor podem oferecer a oportunidade para a exploração dos conceitos de ciência, conhecimento e pensamento crítico tendo como interface debates contemporâneos.

É preciso entender que esses conhecimentos foram constituídos socialmente, a partir de outra base conceitual, que permite a resolução de certos tipos de problemas que outra base não possibilita. [Loreni, 2023, N].

O processo pelo qual o conhecimento é constituído, compartilhado, validado e transmitido dentro de uma sociedade pode evidenciar que o conhecimento não é uma entidade estática que existe independentemente das pessoas, mas sim um produto dinâmico e culturalmente contextualizado das interações humanas.

O relato de Loreni pode ser verificado a partir de uma discussão sobre viagens a longas distâncias. Observações astronômicas e a necessidade de navegação oceânica são alguns dos fatos que levaram ao reconhecimento da curvatura da Terra e exemplificam como o conhecimento matemático responde às necessidades práticas e às descobertas científicas de uma sociedade em um determinado tempo. Também refletem os avanços na compreensão científica e tecnológica, bem como as mudanças sociais, econômicas e políticas que moldaram o mundo globalizado.

Deslocamentos na superfície terrestre, no mar ou no ar, demandam um sistema de posicionamento. Em distâncias curtas, como o deslocamento entre bairros em uma cidade, a curvatura da Terra tem um impacto mínimo e pode ser desconsiderada, para fins práticos. Este fato faz com que as coordenadas possam ser aproximadas para um modelo plano. Porém, à medida que a distância aumenta, a curvatura da Terra se torna um fator que não pode ser ignorado. Nesse contexto, as coordenadas geográficas são utilizadas para a efetivação desses deslocamentos, descritos em valores angulares esféricos pela longitude e latitude. Neste caso, a Geometria Esférica é utilizada em viagens aéreas e marítimas devido à curvatura da Terra: as linhas de latitude (paralelas ao Equador) e as linhas de longitude (que se encontram nos polos) são curvas.

Usaremos a viagem aérea que parte de Dubai (Emirados Árabes Unidos) rumo à São Francisco (Estados Unidos) para explicitar a diferença entre distâncias em um plano⁶⁶ e em uma superfície aproximadamente esférica⁶⁷. Podemos, à primeira vista, imaginar que o avião partiria dos Emirados Árabes, cruzaria o norte do continente africano, o Oceano Atlântico e os Estados Unidos, até chegar à costa oeste do país. Ou, ainda, que o avião partiria do ponto de início, cruzaria todo o continente asiático e o Oceano Pacífico Norte, até chegar a São Francisco. A Figura 8 ilustra os dois casos citados.

Figura 8 – Comparação entre as duas possibilidades de rotas no plano



Fonte: Google Maps (online) (2024)

A menor distância entre dois pontos, na GE, é o segmento que os une e, portanto, as rotas descritas acima podem parecer corretas. Porém, a Terra não é plana e mesmo as projeções cartográficas mais proporcionais conservam distorções. Considerando esses fatos, podemos chegar a uma conclusão mais próxima da realidade.

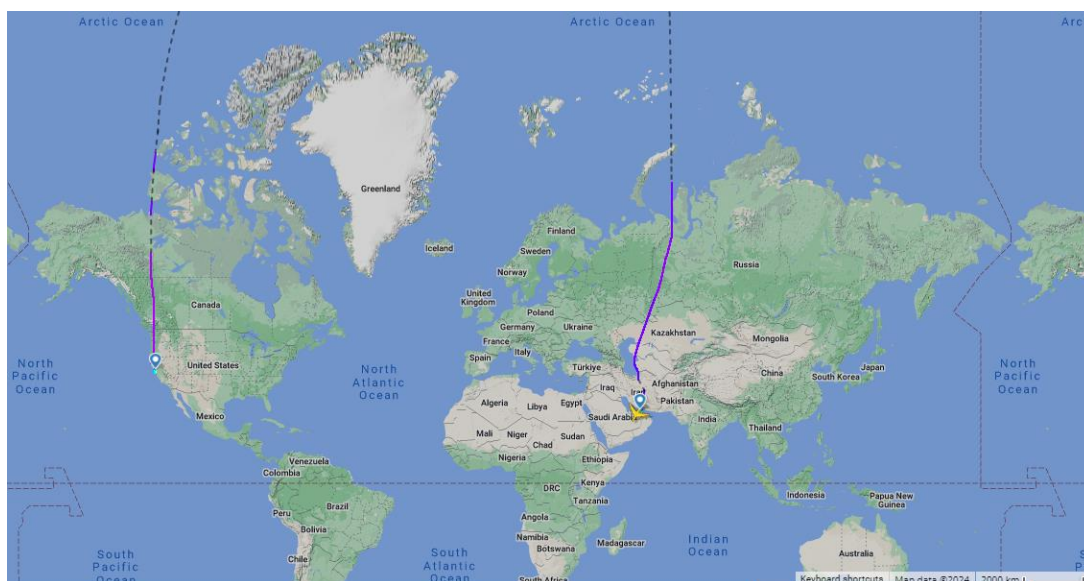
O FlightRadar24 é um site de rastreamento de voos em tempo real que fornece informações detalhadas sobre altitude, velocidade, localização, tipo de aeronave etc. O site também conta com uma representação visual das rotas de voo sobre a superfície da Terra utilizando a projeção de Mercator. A Figura 9 traz o mapa da rota (vôo EK225/UAE51N) feita pelo Airbus A380-842, da Emirates, em janeiro de 2024, partindo de Dubai (DXB) rumo a São

⁶⁶ Projeção de Mercator.

⁶⁷ A Terra não é uma esfera perfeita e sim um geóide. “O geóide é uma superfície equipotencial do campo da gravidade, ou seja, sobre essa superfície o potencial do campo da gravidade é constante, coincidindo, portanto, com uma superfície de equilíbrio de massas d’água. Como o geóide é uma superfície de características físicas complexas, os cartógrafos buscaram a figura geométrica matematicamente definida que mais se aproximasse do geóide, possibilitando assim a realização de cálculos relacionados a medições sobre a superfície terrestre (por exemplo, medições de coordenadas de pontos, distâncias, ângulos, áreas etc.). Essa figura é o Elipsoide de Revolução, definido pela rotação de uma elipse sobre o seu eixo menor.” (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2024).

Francisco (SFO). A rota em questão não possui escalas (paradas intermediárias durante o trajeto).

Figura 9 – Rota aproximada feita pela Emirates saindo de Dubai rumo à São Francisco



Fonte: Flightradar24 (online) (2024).

Se considerarmos o mapa acima, a aeronave parece “sumir” no oceano ártico, na borda superior, e “reaparecer” mais à direita⁶⁸, ainda no oceano ártico. Voos que cruzam os polos parecem seguir trajetórias incomuns em mapas planos, mas ao observá-los em um globo tridimensional⁶⁹, podemos compreender melhor como a Geometria Esférica influencia as rotas de voo: as aeronaves seguem trajetórias curvas ao redor do globo, ao invés de linhas retas em mapas planos. Portanto, a GE não fornece todos os elementos necessários para estudarmos deslocamentos de grandes distâncias na superfície terrestre. Para tal, precisamos recorrer a outra base conceitual, a Geometria Esférica, que é uma GNE. Esse trabalho pode afetar a percepção que os estudantes têm da Terra, inclusive a sua compreensão de mundo (literalmente). Também é possível introduzir discussões relacionadas às necessidades sociais e como elas espelham o desenvolvimento tecnológico e científico de determinadas áreas, como o desenvolvimento da aviação e a viabilidade e acessibilidade de viagens aéreas frente às mudanças econômicas e sociais mundiais.

⁶⁸ O tracejado representa uma parte inexistente do voo que aparece no mapa por conta das distorções cartográficas.

⁶⁹ Modelo tridimensional da rota feita pela Emirates comparada com o círculo máximo entre os dois pontos do globo terrestre disponível em: https://earth.google.com/earth/d/1cw_qx25OJaPpRXU3ZR7qK-LXpQ_glBcl?usp=sharing

Desafios para o trabalho com GNE na EB

Apesar da pertinência do trabalho com GNE na EB, conforme explicitado anteriormente, Loreni destacou alguns desafios a serem enfrentados, como: a carência de conceitos geométricos não euclidianos em livros didáticos; a presença tímida das GNE nos currículos escolares; as diferenças entre termos e conceitos euclidianos e não euclidianos; e a ausência de GNE nos processos formativos de PMat.

A carência de conceitos de GNE em livros didáticos e no currículo escolar

Loreni narrou que

a geometria ensinada na Educação Básica (apesar de ser evitada por alguns professores), quase na sua totalidade, é a que deriva dos livros didáticos, que geralmente são pautados apenas nos pressupostos da geometria euclidiana, ou às vezes com pequenas chamadas das geometrias não euclidianas apenas como curiosidades [Loreni, 2023, N].

Loreni destacou que no ensino de geometria na EB há predominância do enfoque euclidiano nos livros didáticos. Os livros didáticos desempenham um papel relevante na EB. Apresentam o conteúdo, fornecem diretrizes para os professores e, portanto, influenciam o processo de ensino e aprendizagem. Apesar de não ser a única fonte e recurso didático que deva ser considerado pelo professor, eles estão fortemente ligados à estruturação do currículo escolar e à orientação de práticas pedagógicas, sendo parte do cotidiano da matemática escolar. Além disso, os livros didáticos podem indicar quais conteúdos estão presentes ou ausentes na EB.

Para Loreni, “*materiais didáticos, como os livros didáticos, em sua maioria não apresentam propostas consistentes para o trabalho com estas geometrias, ou seja, para que os professores possam desenvolver em suas práticas*” [Loreni, 2023, N]. Os professores podem encontrar dificuldades em planejar e implementar atividades relacionadas às GNE em sala de aula, dada a ausência ou presença tímida de sugestões sobre a temática nos manuais didáticos e a consequente limitação da inclusão e da exploração de GNE em contextos de ensino.

Sabemos que embora já se passaram vários anos da comunicação científica das geometrias não euclidianas, estas ainda não encontraram seu espaço no currículo escolar [Loreni, 2023, N].

As GNE se consolidaram enquanto campo de estudo no século XIX. Seus conceitos foram utilizados na Teoria da Relatividade de Einstein e na Teoria dos Grafos. Novas áreas matemáticas, como a Topologia e a Geometria Fractal, foram desenvolvidas. As aplicações práticas e cotidianas de conhecimentos geométricos não euclidianos são vastas. Porém, apesar

desses fatos, a geometria escolar concentra-se na tradição euclidiana. Por que as GNE não encontram seu espaço no currículo escolar?

Os resultados das pesquisas em educação matemática por vezes não chegam até os estudantes e professores da EB. Todos já ouvimos falar da distância entre escola e a Universidade e das dificuldades dos professores em desenvolver os cenários das pesquisas em suas salas de aula e em integrar as reflexões, resultados e indagações engatilhadas, por exemplo, durante a leitura de um artigo, às suas práticas docentes. Nesse contexto fica evidente o distanciamento progressivo entre os saberes acadêmicos e escolares, dada a complexidade da sala de aula (Da Costa; 2020). Tal distanciamento se dá pela dificuldade de articulação entre as conclusões, resultados e sugestões advindos de pesquisas acadêmicas e a realidade da sala de aula, desencadeando um “empilhamento” de informações que não conseguem ser devidamente direcionadas à escola (Borba; Da Costa, 2018).

Ademais, Loreni reiterou uma interessante questão apontada na segunda seção deste artigo:

Nos documentos oficiais não se tem clareza do trabalho com as geometrias não euclidianas ou nem sequer são mencionadas/apresentadas [Loreni, 2023, N].

A ausência ou tímida menção de GNE nos documentos oficiais pode ser resultado de uma falta de compreensão ou familiaridade dos formuladores de políticas educacionais com conceitos não euclidianos. É possível que esses indivíduos não tenham sido expostos às GNE, que não reconheçam sua importância e relevância para o ensino de matemática ou que as considerem uma abordagem que não se encaixa nas estruturas curriculares. Quais conteúdos devem estar no currículo escolar? O currículo deve ser organizado por conteúdos a serem trabalhados ou por competências/habilidades a serem desenvolvidas? Quem elabora o currículo?

Os conflitos entre conceitos euclidianos e não euclidianos

Loreni também destacou que

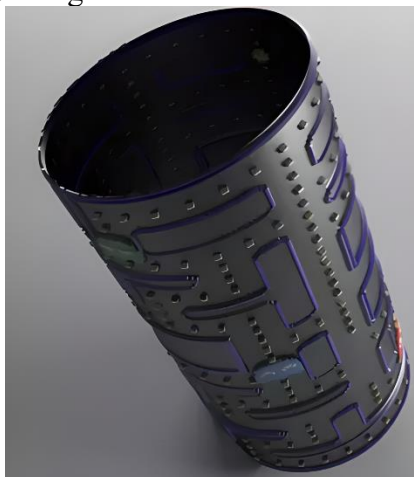
Durante a realização das atividades [relacionadas à GNE] observei, também, que os estudantes e os professores regentes da turma, apresentaram vários conflitos relacionados aos conceitos euclidianos e que se surpreendiam com os conceitos das geometrias não euclidianas ao fazerem comparações entre as geometrias, por exemplo, quando constataram que existe parte da matemática que não está vinculada aos números, como aspectos da Topologia Geométrica [Loreni, 2023, N].

A exploração de conceitos não euclidianos costuma desafiar noções geométricas de estudantes e até mesmo de professores. O termo “paralelas”, por exemplo, pode ser imediatamente relacionado às retas paralelas da GE, já que os conhecimentos prévios de estudantes e professores estão (provavelmente) fundamentados nesta geometria e já existe uma concepção euclidiana do que o referido termo significa. Outros termos já empregados neste artigo (dimensão e medida) também se enquadram nessa questão. Devemos considerar que esses termos e conceitos são definidos, aplicados e interpretados de maneira diversa.

Conforme apontado por Loreni, a exploração de noções topológicas oferece uma perspectiva diferente das preocupações com medidas exatas da matemática. Na topologia, concentramo-nos nas propriedades geométricas que permanecem inalteradas sob transformações contínuas e nas relações espaciais que não são dependentes de precisões métricas. As características qualitativas são postas em foco.

No clássico jogo *Pacman*, guiamos uma criatura amarela que parece viver em uma superfície plana. Porém, ao alcançar as bordas laterais do tabuleiro, o Pacman não encontra uma barreira intransponível: ele é “transportado” para borda oposta do tabuleiro, como se as bordas laterais estivessem, de algum modo, conectadas. Se o personagem vivesse em um plano, ao alcançar uma extremidade haveria um salto abrupto para o outro lado. Se considerarmos o ambiente do jogo como um cilindro, o movimento do Pacman torna-se contínuo e suave. Podemos visualizar intuitivamente o movimento do personagem ao colarmos as bordas laterais do “plano” do jogo (Figura 10).

Figura 10 – Jogo Pacman no formato de um cilindro

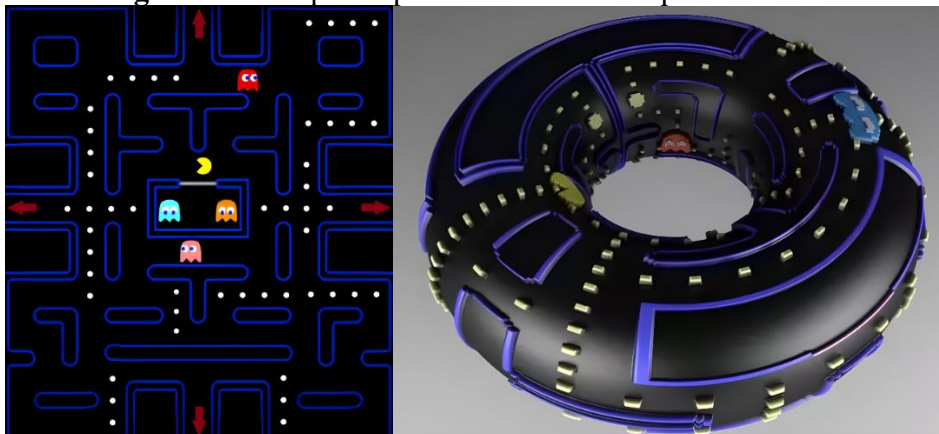


Fonte: Kruglyak (online) (2017)

No jogo original, apenas as bordas laterais permitem a passagem do personagem de um lado para o outro. Se adicionarmos tal característica nas bordas superior e inferior, permitindo que o Pacman também atravessasse continuamente essas bordas, teremos como resultado as bordas

opostas do “plano” idênticas, o que faz com que a superfície do jogo se transforme em uma estrutura toroidal⁷⁰. A Figura 11 mostra o mapa adaptado no plano e no toro.

Figura 11 – Mapa adaptado do Pacman no plano e no toro



Fonte: Kruglyak (adaptado) (online) (2017).

Note que, na superfície cilíndrica, o Pacman pode transportar-se continuamente apenas no sentido da circunferência, já na superfície toroidal pode transportar-se em qualquer sentido. Este fato demonstra como diferentes configurações de bordas podem resultar em diferentes topologias para a superfície do jogo. A movimentação do personagem em diferentes estruturas topológicas, como o cilindro e o toro, fornece uma metáfora visualmente acessível para conceitos topológicos, mostrando como certas transformações podem modificar a geometria de uma superfície e abrir possibilidades de um estudo geométrico para além das limitações impostas por medidas exatas.

O estudo de GNE não apenas proporciona aos estudantes a oportunidade de exploração de conceitos geométricos, mas também pode desafiá-los a repensar suas percepções e concepções sobre a natureza da matemática, verificando que suas complexidades abrangem desde as propriedades qualitativas e quantitativas dos objetos até o emprego de determinados termos em determinados contextos.

A presença de GNE nos processos formativos de PMat

Loreni relatou que, durante as ações fomentadas pela Secretaria do Estado de Educação (SEED-PR) para implementar as Diretrizes Curriculares Estaduais para o ensino de Matemática no estado do Paraná (2008):

⁷⁰ Para visualizar o movimento do Pacman no toro, acesse: https://www.youtube.com/watch?v=x_KNFEqdd3Q.

era muito comum ouvir os professores de matemática com os quais eu trabalhava dizer frases como: para que colocar no currículo essas geometrias se não damos conta nem da euclidiana; onde esses alunos vão usar isso? Percebi, que os professores das duas escolas em que eu trabalhava não aceitaram a proposta de trabalhar com essas geometrias, e também que pouco trabalhavam com a euclidiana [Loreni, 2023, N].

O relato da professora experiente está em consonância com algumas pesquisas que indicam que o ensino de Geometria segue precatório (Barros; Pavanello, 2022). Além da dificuldade e possível aversão a conteúdos geométricos, a fala de Loreni evidencia que, em seu contexto profissional, os PMat não tiveram contato com justificativas convincentes para o ensino de outras geometrias.

As dificuldades de professores em abordarem a GE, fato evidenciado por Loreni, pode colaborar na resistência à inclusão de outras geometrias no currículo escolar e indica um problema mais amplo em relação à abordagem e ao ensino de conteúdos geométricos em geral. Outro fator que aparenta colaborar na aversão dos professores à inclusão de conteúdos de outras geometrias diz sobre questões de utilidade prática desse conhecimento. O teor abstrato e contraintuitivo de alguns modelos geométricos pode fazer com que os professores acreditem que esses conteúdos são apenas tópicos avançados de matemática. Projetos arquitetônicos, mapeamento, navegação espacial, representações artísticas e os exemplos já expostos neste artigo evidenciam a aplicabilidade prática de conceitos não euclidianos diretamente relevantes para a vida dos estudantes e que são passíveis de serem abordados nesta etapa de ensino. Apesar de a “utilidade prática” imediata ser fator relevante na formação dos estudantes da EB, ela não é o único fator envolvido no debate.

Loreni citou, dentre os obstáculos a serem enfrentados pelos professores da EB no trabalho com GNE, “sua formação (não estudaram estas geometrias)” [Loreni, 2023, N]. Embora a formação inicial não seja o único contexto formativo de PMat, ela desempenha um papel significativo, pois é um espaço que pode introduzir uma variedade de metodologias de ensino, expor conceitos matemáticos e didático-pedagógicos, detalhar padrões curriculares e diretrizes educacionais, fomentar atitudes investigativas etc.

Algumas pesquisas apontam que, em geral, a presença de GNE em currículos de formação de PMat é tímida (Assis, 2017; Júnior, 2020). A inserção desses conteúdos em DCE estimulou a produção de artigos, a realização de oficinas e formações continuadas sobre a temática. Apesar do número de propostas de abordagem para o ensino dessa geometria, é comum que produções e materiais produzidos no meio acadêmico não cheguem às mãos dos PMat (exceto àqueles que foram participantes das produções) (Bagio, 2015).

Além da formação inicial e continuada de PMat, Loreni citou, dentre os obstáculos a serem enfrentados pelos professores da EB no trabalho com GNE, o fato de que os:

professores que não são pesquisadores porque o sistema de ensino não possibilita ou porque não buscam o seu desenvolvimento profissional [Loreni, 2023, N].

A pesquisa e a docência são atividades que podem se articular e se complementar e, segundo Freire (2008, p.9) “Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino”. O contato com a pesquisa não se restringe apenas à “atualização” de conhecimentos. Professores pesquisadores se constituem profissionais reflexivos, críticos e autônomos. Diante desses fatos, os cursos de formação inicial têm lugar estratégico e podem proporcionar ambientes formativos que concedam aos licenciandos contato com a pesquisa, além de empoderá-los como agentes ativos em seu próprio processo formativo e desenvolvimento profissional. Porém, tendo em conta as condições de trabalho, as demandas curriculares, as dificuldades dos alunos e o desprestígio social da profissão, o professor pode se sentir desmotivado. O professor não ser/conseguir ser também pesquisador diz algo sobre sua formação? Há tempo e esforço disponível para o professor ser, também, pesquisador?

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: DIÁLOGO COM A LITERATURA

Nas reflexões expostas pela professora participante, a respeito do papel das GNE na EB, foram considerados como pontos de enfoque a importância de o aluno: compreender a existência de outras geometrias e suas relações, diferenças e semelhanças entre elas e a GE; identificar correspondências entre as GNE, o mundo empírico e outras áreas do conhecimento; e refletir criticamente sobre conhecimentos tradicionalmente aceitos, colaborando na formação cidadã dos estudantes.

Os desafios para o trabalho com GNE na EB considerados pela professora, se concentram: na carência de conceitos geométricos não euclidianos em livros didáticos; na presença tímida das GNE nos currículos escolares; nas diferenças entre termos e conceitos euclidianos e não euclidianos; e na ausência de GNE nos processos formativos de PMat.

A GE é, geralmente, a única geometria ensinada na EB. Uma vez que os conhecimentos geométricos dos estudantes têm lastros apenas dessa geometria, é normal que haja dificuldades na introdução de quaisquer outras geometrias nomeadas como “não euclidianas”. Seriam estas a negação da GE? Um ponto importante é o embate entre a própria noção de verdade e certeza atreladas ao conhecimento matemático. Como podem existir outras geometrias? Como retas

podem ser finitas? Não seriam segmentos de reta? Outro ponto está relacionado às limitações encontradas na GE e em seus fundamentos básicos. Para alguns, estes podem ser pontos de conflito que dificultam a abordagem desses conteúdos. Porém, eles podem cultivar oportunidades de propiciar aos estudantes da EB a exploração de princípios subjacentes às GNE, a construção de significados dos objetos geométricos, suas definições e propriedades (Brum; Shuhmacher; Silva, 2015), o exercício da análise contextual, uma compreensão mais ampla da GE (Ribeiro; Moran; Lovis, 2020) e a elaboração de conexões dentro da própria matemática e com o mundo (Gusmão; Sakaguti; Pires, 2017).

Além de estudos específicos em geometria e em matemática, o trabalho com conceitos não euclidianos pode nutrir várias conexões interdisciplinares. Os fractais podem ser observados em grafites, conforme discutido por Navarro *et al.* (2022), bem como em obras de pintura cubista e abstrata, como abordado por Júnior (2008). A Geometria do Táxi refere-se ao estudo das malhas e dos deslocamentos urbanos e apresenta uma conexão relevante com a disciplina da Cartografia (Cavalcante *et al.*, 2019). A Geometria Esférica é empregada na descrição da superfície terrestre e da esfera celeste, estando associada a campos como Astronomia Posicional, conforme abordado por Kovacevic (2019), e Geografia, conforme discutido por Honda (2013). Evidenciar a relevância e a aplicabilidade prática de conceitos geométricos não euclidianos, além de situá-los dentro de uma gama mais ampla de conhecimentos gerais, responde à uma indagação persistente nas aulas de matemática: “Onde vamos usar isso?”. Ao estudar as aplicações em diferentes áreas do conhecimento, os estudantes podem perceber e compreender a interconexão entre as diferentes disciplinas, bem como a matemática e a geometria estão relacionadas a outros conhecimentos, sendo ferramentas fundamentais para entender e descrever o mundo.

As contribuições do trabalho com GNE na EB não se restringem apenas à matemática, à geometria e às conexões interdisciplinares com outras áreas do conhecimento. Piovesan *et al.* (2020) discutem as possibilidades que um cenário investigativo a respeito de GNE proporcionam. Os autores consideram que incorporar nos bancos escolares discussões sobre aplicações geométricas apoiadas na realidade, como a Geometria do Táxi, viabiliza que os estudantes desenvolvam a capacidade de interpretá-la e refletir sobre situações sociais e políticas estruturadas na matemática sob uma perspectiva crítica. Ao desafiar concepções tradicionais sobre a forma e a estrutura do espaço, as perspectivas de mundo dos estudantes podem ser impactadas, encorajando-os a questionarem e explorarem diferentes perspectivas, promovendo uma compreensão mais crítica e contextualizada da sociedade e do ambiente em que vivem. Portanto, o trabalho com GNE não é um fim em si, pois pode cultivar um tipo de

pensamento crítico e reflexivo que não se limita tão somente aos saberes científicos sistematizados.

Mesmo com todas as justificativas e a pertinência da inserção de estudos sobre GNE na EB, é notável a lacuna deixada pelos livros didáticos nesse aspecto. Kaleff e Franca (2008) analisaram, em duas coleções de livros didáticos, como o conceito de “retas paralelas” e suas propriedades estavam apresentadas. Os autores identificaram, de modo esporádico e ilustrativo, algumas referências às GNE nas coleções, considerando principalmente o valor histórico de seu desenvolvimento e suas contribuições, determinantes para o progresso científico do século XX. Porém, destacaram que “os autores dos livros não têm preocupações didáticas com as outras geometrias além da euclidiana” (p. 30) e que nenhum aspecto específico do conteúdo foi citado ou sugerido como atividade didática nas coleções, o que não permite que os estudantes da EB tenham contato com outros conceitos geométricos via livros didáticos. As GNE foram citadas, nessas coleções, apenas como curiosidades, conforme indicado pela professora Loreni. Os autores também destacaram que os fractais são trabalhados sem que, necessariamente, haja referência sobre a sua classificação não euclidiana.

Mais recentemente, Kallef (2021) identificou que, embora os livros didáticos atuais costumam tratar do surgimento histórico das GNE em trechos definidos como leituras complementares, a estrutura e a axiomática das GNE não são apresentadas. Pescini, Padilha e Moran (2023) analisaram o conhecimento sobre Geometria Fractal de quatro coleções compostas por três livros cada, aprovadas pelo PNLD de 2018. Os autores concluíram que essa geometria é utilizada como mediadora na abordagem de outros conteúdos dentro da disciplina de matemática, como um meio, como uma ferramenta.

Como já dito anteriormente, alguns estados brasileiros inseriram em suas DCE referências à outras geometrias além da euclidiana. Este fato motivou uma ascensão de produções acadêmicas (relatos de experiência de oficinas e minicursos, dissertações e teses com dados bibliográficos e empíricos, elaboração de materiais didáticos, etc.) sobre a temática na década de 2010 (Bagio, 2015). Porém, nos últimos anos é possível observar uma diminuição no número de artigos publicados sobre GNE na EB. Mesmo com metodologias, estratégias e recursos didáticos a serem empregados no trabalho com GNE na EB disponíveis na literatura, questionamentos relacionados a esses conteúdos são constantes entre PMat (Lovis; Franco; Barros, 2014; Lovis; Franco, 2015; Nascimento; Costa, 2020) e as GNE ainda não conquistaram um espaço definitivo nas práticas escolares. Este fato pode ter relação com a formação de PMat.

Um mapeamento realizado por Júnior (2020), indicou que conteúdos geométricos não euclidianos têm presença tímida nos cursos de licenciatura (15,32%). Lovis e Franco (2015)

estudaram os conhecimentos, concepções e opiniões de um grupo de PMat da EB sobre GNE e concluíram que os PMat, em geral, ainda não “incorporaram conhecimentos” de GNE às suas concepções. Esses fatos podem colaborar para que o PMat desenvolva sua relação com espaço tendo como fundação apenas a GE e, conseqüentemente, não incorpore à sua prática outros conhecimentos geométricos, mesmo se estes estiverem indicados em propostas curriculares. Além da falta de conhecimento de GNE, é possível observar dificuldades atreladas ao ensino da própria GE.

De acordo com Barros e Pavanello (2022, p. 12) “Pesquisas mais recentes apontam que o ensino da geometria se mostra ineficiente e precário, o que evidencia as dificuldades tanto de professores quanto de alunos em todos os segmentos da Educação Básica”. Apesar de, à primeira vista, parecer confusa uma defesa da inclusão de GNE na EB tendo em conta as dificuldades em GE, esses conteúdos não devem, necessariamente, ser abordados após o “domínio” de toda a GE. Há pesquisas que indicam que crianças desenvolvem a relação com o mundo a partir de noções topológicas. Relações topológicas são primárias; relações projetivas e euclidianas, secundárias; e os conceitos métricos surgem posteriormente aos topológicos (Montoito; Leivas, 2012). Crianças que compreenderam o sistema de coordenadas conseguem elaborar noções fundamentais de Topologia, Geometria Projetiva, Hiperbólica e Esférica (Neto; Nogueira; Franco, 2013). Não sendo dependentes dos conhecimentos euclidianos, podemos trabalhar com GNE em qualquer etapa de ensino, com escolhas metodologicamente estruturadas e com intenções bem delimitadas. Porém, a presença tímida de GNE em currículos de formação de PMat e em livros didáticos destinados à EB limita os saberes não euclidianos necessários ao PMat para a abordagem na sala de aula. Além disso, a própria linguagem pode se configurar como um desafio a ser enfrentado.

O estudo de GNE inevitavelmente conduz a conflitos entre conceitos euclidianos e não euclidianos. Dimensão, paralelismo e distância são termos muito utilizados na GE. A dimensão fractal, o paralelismo das Geometrias Projetiva e Esférica e a distância da Geometria do Táxi, apesar de compartilharem denominações semelhantes com a GE, são conceitos diferentes dos que estudantes e professores estão acostumados. Os termos parecem idênticos em sua forma, mas sua interpretação e significado variam dependendo do contexto geométrico em que são aplicados. Contudo, a representação em linguagem natural pode ser comum à GE e GNE, porém diferentes geometrias têm linguagem simbólica e as representações geométricas próprias. O contato com perspectivas diversificadas do espaço pode esclarecer as diferenças entre os termos empregados e seu contexto, colaborando na construção de um repertório geométrico abrangente (Altoé, *et al.*, 2022) e evidenciando que muitos conceitos geométricos não são absolutos, mas

sim, dependentes do contexto em que são explorados. Tais fatos também colaboram na compreensão reflexiva da natureza da própria matemática.

Ao longo do texto, por contrapormos tantas vezes a GE e a GNE, pode ter ficado a impressão de que há uma dualidade entre elas ou que uma geometria é “mais adequada” ou com “mais benefícios pedagógicos” do que outra. Muito bem esclareceram essa questão Brum e Shuchmacher (2015, p. 424):

[...] é impossível elencar qual delas é a melhor ou mais útil, mas é possível definir qual delas deve ser explorada. Por exemplo, os conhecimentos euclidianos são adequados ao trabalho do pedreiro, que utiliza instrumentos como régua e esquadro para realizar marcações e delimitar áreas de construção, o que não ocorre com um marinheiro ou um piloto de avião, que realizam viagens entre dois países.

Esse tipo de pensamento é sofisticado: depende do contexto, do objeto de estudo, dos objetivos almejados, dos sujeitos envolvidos, das expectativas dos PMat com relação ao trabalho com conceitos geométricos não convencionais, bem como ao planejamento de aulas que possam oportunizar a aprendizagem em geometrias. Não se trata, portanto, de melhor ou pior, mais útil ou menos útil, mais difícil ou mais fácil. Explorar outras geometrias pode favorecer a compreensão da matemática, dos processos de pensamentos humanos, instigar uma atitude reflexiva e investigativa, além de colaborar na formação do estudante cidadão.

Esta seção de discussão procurou estabelecer algumas relações entre os resultados advindos da análise e a literatura disponível. Na sequência, tecemos algumas considerações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do texto, exploramos o papel e os desafios associados ao trabalho com GNE no contexto da EB evidenciados por uma professora experiente no ensino de geometria. Em relação ao papel das GNE, foram considerados: a compreensão da existência de outras geometrias e suas relações, semelhanças e diferenças entre elas e a GNE; a identificação de correspondências entre as GNE, o mundo empírico e outras áreas do conhecimento; e a reflexão crítica sobre conhecimentos tradicionalmente aceitos, que colabora na formação do estudante cidadão. Nos desafios para o trabalho com GNE na EB, foram destacados: a carência de conceitos geométricos não euclidianos em livros didáticos e em currículos escolares; as diferenças entre termos e conceitos euclidianos e não euclidianos; e a ausência de GNE nos processos formativos de PMat.

As GNE, além de serem sistemas/modelos geométricos consistentes e bem estabelecidos, são conteúdos que carregam em sua abordagem possibilidades de compreensão da GE e da própria matemática. Revisitar conceitos euclidianos pode se fazer necessário, visto que a tradição escolar e científica estabeleceu a GE como a única geometria define, por conseguinte, quais são os conhecimentos geométricos que estudantes terão contato nesta etapa de ensino. Este movimento de volta aos conceitos euclidianos coloca conceitos geométricos elementares, regras matemáticas e noções de verdade em foco, já que as GNE e a GE podem ser consideradas recortes específicos de uma mesma gama de conhecimentos geométricos. O pensamento crítico pode ser desenvolvido e o funcionamento do conhecimento científico evidenciado. Além disso, as GNE permitem uma ampla interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento e podem ser intuitivamente relacionadas à vida cotidiana. Também é possível indicar que o trabalho com GNE na EB não se restringe apenas à geometria, à matemática e às conexões com outras disciplinas, colaborando na formação integral do estudante enquanto sujeito histórico e social.

No entanto, os desafios a serem enfrentados na integração das GNE no ambiente escolar são significativos. A escassez de conteúdos geométricos não euclidianos nos livros didáticos, juntamente com a sua presença limitada nos currículos escolares, pode dificultar a efetiva inserção desses conteúdos na EB. Outro ponto a ser enfrentado é a limitada exposição de PMat às GNE em cursos de licenciatura e em formações continuadas, o que dificulta a integração de conceitos, abordagens e estratégias pedagógicas às suas práticas pedagógicas.

Ao longo do texto, apesar dos obstáculos relacionados, destacamos várias justificativas (que esperamos ser convincentes) e meios para a inserção de conteúdos geométricos não euclidianos na EB. Porém, o leitor pode estar se perguntando “como trabalhar com as GNE na EB se elas não estão indicadas no currículo, não costumam aparecer em livros didáticos e não temos conhecimento para abordá-las em sala de aula?” O PMat, enquanto agente ativo de seu próprio aprendizado, sabe bem que o seu processo de formação é contínuo e infindo. O conhecimento do conteúdo é essencial para a sua efetivação na EB, então não há outro meio de aprender GNE a não ser estudá-las: com colegas PMat; em projetos de extensão das Universidades; em formações continuadas; através de pesquisas acadêmicas; e em quaisquer ambientes de estudo. Possivelmente, a parte mais desafiadora está relacionada à estruturação do currículo escolar.

Um meio de efetivar a inserção de GNE na escola é romper com a burocracia educacional, com a estrutura tradicional e com as prescrições normativas⁷¹ do currículo através da subversão responsável. Também conhecida como insubordinação criativa (D'Ambrósio; Lopes, 2015), é, resumidamente, um conceito que incentiva a adoção de uma postura flexível em relação às imposições do sistema educacional, alicerçada em bases éticas. “Qual o propósito do currículo? Que oportunidades de aprendizagem de matemática devem ser oferecidas? Que matemática é ensinada na escola? Quem decidiu isso? Há certeza na matemática?” são questões que podem engatilhar pensamentos insubordinados entre PMat.

A insubordinação criativa caracteriza ações de natureza política uma vez que certas abordagens, por vezes, podem ser opostas às normas curriculares e/ou políticas públicas. Romper com o currículo prescrito, colocar o estudante no coração do processo educacional, considerar seu desenvolvimento, extrapolar os muros da escola, propiciar oportunidades em que os estudantes vivenciem os problemas propostos e experimentem as propostas de solução como forma de ver o mundo e apoiá-los ao atribuírem significados e ao realizarem leituras da realidade de forma colaborativa são ações que se enquadram nos elementos da Insubordinação Criativa (D'Ambrósio, 2015).

Um exemplo de insubordinação criativa é a introdução da Geometria do Táxi no trabalho com um currículo que prevê o tema de distância como conteúdo da Geometria Analítica, na perspectiva da GE. Uma abordagem que parte de outro conceito de distância tem potencial de instigar reflexões sobre a natureza das medidas e suas aplicações práticas, além de explorar porque a métrica euclidiana é a norma e em que em determinados contextos outras métricas podem ser mais apropriadas. Nesse exemplo, o PMat decidiu, ativamente e conscientemente, romper com as prescrições curriculares em prol de outros elementos considerados, por ele, relevantes na formação dos estudantes.

Mas atenção: essa postura exige que o professor aja em vista a beneficiar seus estudantes, nunca em benefício próprio. Nem sempre essas ações serão opostas às normas e políticas públicas, mas diante de um cenário de desmonte da educação, os conflitos tendem a se acirrar uma vez que os professores e os beneficiados pelas políticas públicas em educação se encontram em posições por vezes antagônicas.

O PMat pode empregar a insubordinação criativa como ferramenta para dar significado à sua própria prática pedagógica, libertando-se das amarras do currículo e dos vários paradigmas relacionados ao ensino de matemática, reconhecendo o estudante como produtor de

⁷¹ Note que as políticas públicas em educação podem ser (e costumam ser) opressivas à profissão de professor.

conhecimento matemático. Note que ao adotar essa postura, o professor deve assumir-se enquanto profissional reflexivo, crítico e, principalmente, ético, de modo a identificar o ato de ensinar como uma atitude pedagógica passível (e capaz) de transformação tendo em vista os objetivos maiores da Educação Matemática. Portanto, convidamos o leitor a (depois de estudar a respeito) considerar a adoção de posturas insubordinadamente criativas.

REFERÊNCIAS

- ALTOÉ, R. O; ZANON, J. M.; PEREIRA, B. M.; GUSSANI, S. B.; CECOTTI, V. T. Contribuições de uma oficina sobre Geometria do Táxi na formação de professores que ensinam matemática: entre descobertas, aprendizagens e prática docente. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel (PR), v. 6, n. 2 p. 193-216, ago. 2022.
- ASSIS, E. S. D. A Geometria Hiperbólica nos currículos escolares e universitários. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.3, p. 393-413, 2017.
- BACKES, A. R.; BRUNO, O. M. Técnicas de estimativa da dimensão fractal: um estudo comparativo. **Journal of Computer Science**, v. 4, n.3, p.50-58, 2005.
- BALDINI, L. A. F. **Geometria não-euclidiana: uma introdução**. Caderno pedagógico (PDE– Programa de desenvolvimento educacional) – Secretaria Estadual de Educação e Universidade Estadual de Londrina, p. 1503-6, 2008. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1503-6.pdf>>. Acesso em 30 de agosto de 2023.
- BALDINI, L. A. F. **Construção do conceito de área e perímetro: uma sequência didática com o auxílio do software de Geometria dinâmica**. 179f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.
- BAGIO, Viviane Aparecida. O que dizem as produções paranaenses quanto ao ensino das geometrias não euclidianas a partir da publicação das Diretrizes Curriculares da Educação do Estado do Paraná. **Revista BOEM**, v. 3, n. 4, p. 45-65, 2015.
- BALDINI, L. A. F.; CYRINO, M. C. C. T. Função seno-uma experiência com o software GeoGebra na formação de professores de Matemática. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 1, n. 1, p. CL-CLXIV, 2012.
- BARROS, R. C. P.; PAVANELLO, R. M. Relações Entre Figuras Geométricas Planas e Espaciais no Ensino Fundamental: o que Diz a BNCC? **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v.15, n.1, p. 11–19, 2022.
- BERNARDINO, C. L.; MARTINS, J.; DOS ANJOS, M. F... Legitimação de um discurso matemático: um estudo sobre a Geometria Hiperbólica. **Revista história da matemática para professores**, v. 2, n. 1, p. 43-49, 2015.

BOLÍVAR, A. B.; DOMINGO, J. S.; FERNÁNDEZ, M. C. **La investigación biográfico-narrativa en educación**. Madrid: La Muralla, 2001.

BORBA, V. M. L.; DA COSTA, A. P. Sucesso e fracasso no ensino da Matemática: o que dizem futuros professores de uma IES?. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 2, n. 1, p. 55-76, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E.; SILVA, S. C. R. As geometrias esférica e hiperbólica em foco: sobre a Apresentação de alguns de seus Conceitos Elementares a Estudantes do Ensino Médio. **Bolema**, v. 29, p. 419-427, 2015.

CASTRO, E. V. O conceito de sociedade em antropologia: um sobrevôo. *In: A inconstância da alma selvagem*. São Paulo: Cosac Naify, 2002.

CARMO, M. P. Geometrias Não-Euclidianas. **Revista Matemática Universitária**, n.6, p. 25-48, dez. 1987.

CARVALHO, O. A.; AZEVEDO, J. S. Geometria não-Euclidiana: aplicações na Educação Básica. *In: Inovações educacionais em matemática no Recôncavo*, p. 109-133, 2020.

CAVALCANTE, R. N. B.; SOUSA, M. H. R.; SOUSA, J. P. R. A interdisciplinaridade entre matemática e Geografia: inferindo conceitos de localização e Distâncias na cidade. **Revista Encantar – Educação Matemática e Sociedade**, Bom Jesus da Lapa, v. 1, n. 3, p. 7-20, set./dez. 2019.

CEARÁ (Estado). Superintendência de Educação. Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática. Fortaleza, 2008.

CLANDININ, D. J.; CONNELLY, F. M. **Pesquisa narrativa: experiência e história em pesquisa qualitativa**. Tradução: Grupo de Pesquisa Narrativa e Educação de Professores ILEEI/UFU. Uberlândia: EDUFU, 2011.

COURA, F. C. F. **Desenvolvimento profissional de formadores de professores de matemática que são investigadores da docência**. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de São Carlos, Programa de Pós-graduação em Educação. São Carlos, 2018.

CYRINO, M. C. C. T.; BALDINI, L. A. F. O Software Geogebra na Formação de Professores de Matemática – Uma visão a partir de Dissertações e Teses. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 42-61, 2012.

DA COSTA, A. P. A geometria na educação básica: um panorama sobre o seu ensino no Brasil. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 9, n. 1, p. 128-152, 2020.

DA VINCI, L. **A Última Ceia**. 4,6 x 8,80m. Pintura a óleo sobre gesso. Milão, Itália: Convento de Santa Maria delle Grazie, 1494 – 1498. Disponível em: <<https://1.bp.blogspot.com/>>-

5pftBQDasxY/UVdZCS4jc8I/AAAAAAAAABp0/R5zUbGhDZ_4/s1600/a_ultima_ceia_Leonardo_da_Vinci.jpg> Acesso em 16 de jan. de 2024.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. Insubordinação Criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. **Bolema**, v. 29, n. 51, p. 1-17, abr. 2015.

DEBASTIAN NETO, D.; NOGUEIRA, C. M. I.; FRANCO, V. S. Geometrias na segunda fase do ensino fundamental: um estudo apoiado na epistemologia genética. **Zetetiké**, FE/Unicamp, v. 21, n. 40, 2013.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**, Tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

FLIGHTRADAR24. Disponível em: < <https://www.flightradar24.com/>> Acesso em 30 de jan. de 2024.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 37. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2008.

GOOGLE, INC. Google Maps. Disponível em: < <https://www.google.com.br/maps/preview>> Acesso em: 23 de jan. de 2024.

GUSMÃO, N. L.; SAKAGUTI, F. Y.; PIRES, L. A. A geometria do táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica. **Educação Matemática Pesquisa**, Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 19, n. 2, 2017.

HONDA, A. M. C. **Matemática e Geografia: uma interdisciplinaridade**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 108p, 2013.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE) (online). **O que é Cartografia: Forma da Terra**. Disponível em < <https://atlascolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia/forma-da-terra.html>> Acesso em 28 de jan. de 2024.

JÚNIOR, Marcos Antônio Gonçalves. Arte contemporânea e Geometrias?! Reflexões sobre a prática. **Revista Polyphonia**, v. 19, n. 2, p. 199-216, 2008.

JÚNIOR, C. L. S., C. L. S. **Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de Matemática**: uma proposta à produção de significados no estudo de Geometria. (Tese de doutorado) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020, 239 p.

KALEFF, A. M. M. R. FRANCA, J. C. Uma análise da apresentação de retas paralelas em livros didáticos do Ensino Médio. **Caderno Dá Licença**, v.7, p.09-36, 2008.

KALEFF, A. M. M. R. Registros semióticos e obstáculos cognitivos na resolução de problemas introdutórios às geometrias não-euclidianas no âmbito da formação de professores de matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 20, n. 28, p. 69-94, 2007.

KALEFF, A. M. M. R. Geometrias não-euclidianas na educação básica: Utopia ou possibilidade. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 10, Salvador, **Anais [...]**, 2010.

KALEFF, A. M. M. R. Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na Escola Básica: Por quê? Para quê? *In: Ciclo de formação em ensino de matemática: contribuições do ensino, da pesquisa e da extensão na formação do professor de Matemática*, p. 44-61, 2022.

KOVACEVIC, M. S. Geometria esférica: um estudo da interposição entre Matemática e Astronomia. **Rev. Prod. Disc. Educ. Matem.**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 2-15, 2019.

KRUGLYAK, L. **The topology of Pacman** (online), 2017. Disponível em: < <https://levsblog.quora.com/The-Topology-of-Pacman> > Acesso em 02 de fev. de 2024.

LARROSA, J. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. **Revista Brasileira de Educação**, n. 19, p. 20-28, jan./abr. 2002.

LEIVAS, J. C. P.; SOUZA, H. M.; PORTELLA, H. P. Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na Escola Básica no Brasil com Geogebra. **Revista Thema**, v. 14, n. 3, p. 210-221, 2017.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. As concepções de Geometrias não Euclidianas de um grupo de professores de matemática da Educação Básica. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 369-388, 2015.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S.; BARROS, R. M. O. Dificuldades e obstáculos apresentados por um grupo de professores de matemática no estudo da geometria hiperbólica. **Zetetiké**, v. 22, n. 42, jul./dez.2014.

MANDELBROT, B. How Long is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. **Science**, v.156, p. 636–638, 1967.

MENDES, N. A.; PASSOS, C. L. B.; SILVA, H. Narrativas na pesquisa em Educação Matemática: caleidoscópio teórico e metodológico. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 28, p. 701-716, 2014.

MONTOITO, R.; LEIVAS, J. C. P. A representação do espaço na criança, segundo Piaget: os processos mentais que a conduzem à formação da noção do espaço euclidiano. **Vidya**, v. 32, n. 2, p. 15-15, 2012.

NASCIMENTO, R.; COSTA, L. A geometria fractal e possíveis situações didáticas para a formação do professor de matemática. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 11, n. 1, jul. 2020.

NAVARRO, A. L.; MELLO, A. S.; SANTOS, D. A. B; GOMES, E. F. A interdisciplinaridade entre o Ensino de Física e o Grafite. **Educação Pública – Divulgação Científica e Ensino de Ciências**, v. 1, n. 2, jun. 2022.

OLIVEIRA, J. C. R. **Um estudo sobre o movimento de constituição da identidade profissional de professores de matemática experientes**. 139p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2022.

OLIVEIRA, J. C. R.; CYRINO, M. C. C. T. Trajetória profissional de professores de matemática experientes na busca pela profissionalização docente. **Práxis Educacional**, v. 19, n. 50, p. e11645-e11645, 2023.

PADILHA, L.; MORAN, M. Geometria dos fractais: uma proposta para o cálculo da dimensão da Árvore Pitagórica. **Ens. Tecnol. R.**, Londrina, v. 7, n. 1, p. 256-267, jan./abr. 2023.

PARANÁ (Estado). Superintendência de Educação. Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática. Curitiba, 2008.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica**. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1989.

PIOVESAN, C. *et al.* Educação matemática crítica: reflexões sobre um cenário para investigação. **REPPE-Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino**, v. 4, n. 1, p.115-126, 2020.

REIS, J. D. S. **Geometria Esférica por meio de materiais manipuláveis**. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

RIBEIRO, G. F.; MORAN, M.; LOVIS, K. A. Construção do triângulo hiperbólico no *software* GeoGebra: análise de uma experiência com alunos da educação básica. **ReviSeM**, n. 1, p. 239-249, 2020.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. **O Ensino da Geometria na Educação Básica: Realidade e Possibilidades**. Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná. Disponível em: < <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf>.> Acesso em 23 de dezembro de 2023.

SANDLE, A. V. S.; ANDRUS, C. File:Britain-fractal-coastline-combined.jpg. Wikimedia Commons. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Britain-fractal-coastline-combined.jpg> 2005>. Acesso em 11 de jan. de 2024.

SÃO PAULO (Estado). Superintendência de Educação. Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática. São Paulo, 2011.

SORIGUEROLA. **Taula de Sant Miquel**. 93 x 234,5 cm. Pintura a óleo sobre madeira. 1275-1300. Disponível em: <<https://www.ricardocosta.com/sites/default/files/imagens/taula/taula2.jpg>.> Acesso em: 16 jan. 2024.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi organizada e apresentada no formato *multipaper*, que traz a questão geral: *que implicações do ensino das GNE podem ser consideradas para a formação de PMat?* Cada um dos objetivos específicos delineados é contemplado, separadamente, em cada um dos artigos que compõem o trabalho. Tendo em vista o objetivo citado, buscamos responder às seguintes indagações: *Que perspectivas referentes às GNE podem ser consideradas na formação de PMat? Quais os principais pontos indicados pela literatura acerca do trabalho com outras geometrias? O que professoras experientes no ensino de geometria revelam sobre as GNE na formação de PMat e na EB?*

Para responder à referida questão estabelecemos como objetivo geral *discutir implicações das GNE na formação de PMat*, sob dois pontos de vista: da área de pesquisa em Educação Matemática e de professoras formadoras experientes no ensino de geometria. Na busca de responder ao objetivo geral, analisamos: o que artigos da área de pesquisa em Educação Matemática pontuam sobre GNE na formação de PMat (artigo-capítulo 1); o que professoras formadoras experientes no ensino de geometria revelaram sobre GNE na formação de PMat (artigo-capítulo 2); e o que uma professora formadora experiente no ensino de geometria relevou sobre GNE na EB (artigo-capítulo 3). Na sequência apresentamos os objetivos específicos de cada artigo-capítulo e seus respectivos resultados.

O artigo 1 teve como objetivo descrever, interpretar e integrar pesquisas publicadas em periódicos brasileiros, no período de 2011 a 2022, que têm como objeto de análise o trabalho com GNE na formação de PMat. O *corpus* de análise foi constituído a partir de um levantamento de periódicos indicados pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática, com *qualis* de A1 a A4 atribuído pela CAPES. Os resultados evidenciam que, apesar de integrar as diretrizes curriculares de alguns estados brasileiros, há cursos de formação de PMat que não trabalham conhecimentos geométricos não euclidianos, privando os futuros docentes de preparo para abordarem outras geometrias na EB. Embora haja indicações na literatura de metodologias, propostas e recursos para o estudo, o ensino e a aprendizagem de GNE professores e futuros professores, em geral, não possuem conhecimentos sobre o tema.

No artigo 2, ao discutir reflexões manifestadas por três professoras experientes no ensino de geometria a respeito das GNE na formação, inicial e continuada, de PMat, observamos que elas indicaram: justificativas para o trabalho com GNE na formação de PMat; desafios inerentes à inclusão de GNE na formação de professores; e sugestões de metodologias, abordagens e recursos didáticos para trabalhar com GNE na formação de PMat. Elas indicam

como pontos a serem considerados sobre temática: justificativas para o trabalho com GNE na formação de PMat; desafios relacionados à inclusão de conteúdos geométricos não euclidianos nestes contextos formativos; e sugestões de metodologias, abordagens e recursos para o ensino de GNE.

No artigo 3 buscamos compreender reflexões manifestadas por uma professora experiente no ensino de geometria a respeito do trabalho com as GNE na EB. A narrativa reflexiva produzida por essa professora a respeito da temática considerou o papel das GNE na EB e os desafios a serem enfrentados no trabalho com essa temática na EB. Os resultados apontam que a inclusão das GNE nesse contexto pode: possibilitar uma compreensão mais ampla das geometrias, suas relações, diferenças e semelhanças, colaborando para a compreensão da própria matemática; fomentar discussões que colaborem na formação cidadã dos estudantes e situem o conhecimento geométrico dentro de um espectro amplo de saberes em relação a outras áreas do conhecimento. No que se refere aos desafios a serem enfrentados no trabalho com GNE na EB, os resultados indicam uma carência de conceitos não euclidianos em livros didáticos, currículos da EB e na formação de PMat, assim como conflitos entre conceitos euclidianos e não euclidianos.

Apesar das dificuldades para o trabalho com a temática na formação de PMat e na EB, pontuadas no desenvolvimento dos artigos-capítulos, identificamos perspectivas passíveis de atenção.

A relevância histórica, teórica e aplicada referente às GNE pode ser considerada, em diferentes níveis, na formação de PMat e na EB. Para os professores e futuros PMat, discussões históricas, filosóficas e epistemológicas engatilhadas pelo estudo de GNE podem levar à reflexão crítica sobre a natureza da matemática, seu funcionamento interno, suas colaborações para o desenvolvimento científico e sua natureza dinâmica e orgânica, além de situar historicamente o conhecimento matemático. Os aspectos teóricos específicos de cada GNE também se enquadram nesse escopo e podem permitir o desenvolvimento e o enriquecimento do conhecimento matemático de PMat, já que a introdução e a exploração de conceitos geométricos não euclidianos permitem que PMat e futuros PMat explorem conceitos para além dos limites da GE tradicional. As aplicações, além de servirem de inspiração para práticas em sala de aula, exemplificam para os próprios PMat as conexões de sua disciplina com o mundo empírico e outras áreas do conhecimento.

Por não se tratar de conteúdos convencionais, discussões envolvendo a inserção de GNE na formação de PMat pode levar a reflexões sobre a própria prática docente, as estruturas curriculares e escolares e os objetivos da educação matemática. O estudo de GNE em programas

de formação de PMat pode ampliar horizontes conceituais, cognitivos e pedagógicos de PMat. Podemos afirmar, ainda, que a presença de GNE em contextos formativos de PMat pode desenvolver o pensamento crítico em relação à geometria, à matemática e à ciência, que são conhecimentos humanos, sociais e históricos. A noção de verdade pode ser questionada à luz de conhecimentos geométricos não euclidianos.

Para os estudantes da EB, o estudo de GNE pode colaborar no desenvolvimento do pensamento crítico da matemática, prepará-los para lidar com as complexidades, ambiguidades, diferenças, semelhanças e incertezas de elementos da vida humana, exemplificando que até mesmo algo certo e aparentemente imutável, como a matemática, é passível de questionamento e não representa um conceito de verdade universal. Tais pensamentos podem influenciar visões de mundo e servir como ferramenta para a introdução de uma educação científica alinhada com a ciência, que é produzida historicamente e socialmente e responde às necessidades práticas e às descobertas científicas em determinado tempo. A conexão com outras disciplinas pode tornar o conhecimento matemático mais relevante para os estudantes, pois permite que eles o reconheçam no mundo e situem as geometrias e a matemática dentre outros saberes. Essa visão multifacetada da geometria e da matemática pode ser estendida para a visão de mundo dos indivíduos e colaborar na formação cidadã dos mesmos. Note que os aspectos referentes à EB se relacionam diretamente com a formação de PMat.

Ao trabalhar com contextos e métricas variadas, tanto PMat e futuros PMat quanto estudantes da EB podem mobilizar uma compreensão abrangente sobre definições matemáticas e o funcionamento interno da disciplina, assim como sua flexibilidade e seus sistemas de representação. O estudo de outras geometrias e suas correspondências, diferenças e especificidades pode exemplificar a validade de sistemas geométricos e evidenciar a dependência da matemática das premissas para a elaboração de conjecturas e para a solução de problemas. Diante de provas consistentes, a matemática pode ser transformada, revisada e modificada e isso é a força motriz de seu desenvolvimento, assim como o desenvolvimento da ciência.

Outro ponto diz sobre o incentivo à curiosidade e à exploração diante de situações e cenários não convencionais. Quando incentivados à exploração de outras geometrias, PMat, futuros PMat e até mesmo estudantes da EB podem ser desafiados a questionar afirmações estabelecidas e a pensar de forma mais criativa e flexível sobre questões e problemas da vida cotidiana, sendo estes matemáticos ou não.

Também é possível afirmar, a partir dos resultados, que o contato com GNE leva à discussão e diferenciação dos significados de termos homônimos diante de contextos diferentes,

o que pode permitir discussões que levem à compreensão, de PMat, futuros PMat e estudantes da EB, da própria GE, que é uma das principais dificuldades no ensino e na aprendizagem de matemática.

Um aspecto relevante no trabalho com GNE na formação de PMat e na EB diz sobre suas possibilidades interdisciplinares. A prática matemática, percebida por muitos como “fria” e “rígida” pode permear confortavelmente em dimensões para além de técnica e da lógica matemática e o estudo de GNE pode evidenciar este fato. História, filosofia, artes, geografia e política são esferas em que a matemática, de algum modo, transita. As conexões explícitas entre GNE e essas áreas são vastas.

Em suma, considerar diversas perspectivas referentes às GNE na formação de PMat pode ajudar a estabelecer, dentre as práticas escolares, uma educação matemática mais reflexiva e inclusiva, tendo esses conteúdos como interface. O potencial pedagógico das GNE em contextos de formação de professores não se limita à construção de seus conhecimentos geométricos. Vivenciar o potencial pedagógico das GNE pode servir de incentivo para PMat e futuros PMat considerá-las e incorporá-las às suas práticas docentes. Ademais, uma perspectiva a ser ponderada é a promoção de discussões sobre dificuldades, desafios e obstáculos relacionados ao ensino de geometrias. A troca de experiências (bem-sucedidas ou não), o aprendizado coletivo (com abordagens colaborativas) e o desenvolvimento profissional (consequente de um processo de formação contínua) são aspectos que podem ser estimulados por meio do trabalho com GNE.

As pesquisas em educação matemática e as reflexões das professoras formadoras experientes no ensino de geometria, por nós analisadas, nos permitiram identificar que o trabalho com GNE na formação de PMat, assim como na EB, ainda não é consolidado. A pertinência, a presença e a necessidade da inserção desses conteúdos foram evidenciados e apontam para uma necessidade de repensar-se os objetivos das aulas de matemática e da formação de PMat.

Diante desses fatos, julgamos pertinente pesquisas futuras abordarem:

- A conexão entre o contato com GNE na formação de PMat e sua efetivação na EB.
- Articulação entre a escola, a formação inicial e a formação continuada de PMat no trabalho com GNE.
- Análise do papel do formador de PMat frente ao estudo de GNE em contextos de formação de PMat;

- As conexões entre diferentes geometrias em contextos de ensino;
- O impacto de disciplinas específicas sobre o ensino de geometria na formação inicial de PMat diante da abordagem de GNE;

As análises e reflexões apresentadas nessa dissertação podem contribuir para a investigação e abordagem do tema GNE na formação de PMat, e consequentemente, na EB. É fundamental que essas questões sejam exploradas em futuras pesquisas, visando enriquecer a prática docente e promover avanços na educação do Brasil.

Voltando às reflexões engatilhadas na Introdução Expandida, enfatizo⁷² a importância que a elaboração dessa dissertação teve em meu processo formativo. Como professora de matemática nos primeiros anos de docência, tive a oportunidade de ter contato com perspectivas de professoras formadoras experientes que, provavelmente, não teriam chegado a mim de outras formas. Como pesquisadora em formação, aprendi que a ciência não é invulnerável aos acontecimentos da vida das pessoas e que a construção de um trabalho acadêmico demanda, além dos saberes técnicos científicos, saberes sobre como o mundo se organiza e se move. Ter contato com as “entranhas” da matemática com certeza me fez ser uma professora e uma (futura?) pesquisadora da Educação Matemática melhor.

Durante a elaboração, revisão, conclusão e mesmo após esses processos, pude pensar no movimento da minha própria vida, enquanto professora, pesquisadora, cidadã, filha, irmã, namorada e amiga. Compreender diferentes geometrias me ajudou a compreender diferentes pontos de vista e a olhar para o mundo de modo diferente. O movimento de desconstrução e as reflexões engatilhadas por esse trabalho certamente me transformaram. Foi uma *experiência* e tanto.

⁷² Aqui, escrevemos em primeira pessoa do singular.