Universidade Estadual de Londrina

THIAGO FERNANDO MENDES

CARACTERIZAÇÃO DA CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA À LUZ DAS DIMENSÕES SEMIÓTICA E DIDÁTICA

Londrina
2023

THIAGO FERNANDO MENDES

CARACTERIZAÇÃO DA CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA À LUZ DAS DIMENSÕES SEMIÓTICA E DIDÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

T422c Mendes, Thiago Fernando.
Caracterização da Construção de Significado em Atividades de Modelagem Matemática à Luz das Dimensões Semiótica e Didática / Thiago Fernando Mendes. - Londrina, 2023.
154 f.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2023.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3. Construção de Significado - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51

THIAGO FERNANDO MENDES

CARACTERIZAÇÃO DA CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA À LUZ DAS DIMENSÕES SEMIÓTICA E DIDÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina (UEL)

____
Profa. Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR-LD)

____
Profa. Dra. Letícia Barcaro Celeste Omodei
Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR)

____
Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina (UEL)

____
Profa. Dra. Cláudia Carreira da Rosa
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UFMS)

Londrina, 18 de abril de 2023.

A todos aqueles que posso chamar de família.
Em especial, à Alini e à Isabela que são minhas
fontes de inspiração e alegria diária!

AGRADECIMENTOS

À Deus. Por me guiar e me fazer uma pessoa melhor a cada dia.

À minha esposa Alini Becker. Eu amaria você tanto quanto amo mesmo se não fôssemos da mesma família. Sermos casados é só um bônus. Muito obrigado por toda paciência, amor, cumplicidade e companheirismo durante todos estes anos.

À minha filha Isabela Fernanda. Você é a maior conquista de minha vida. Tudo isso é por e para você.

Aos meus pais, irmãos e sobrinhos. Obrigado pela paciência, dedicação e por compreender todas as minhas ausências.

À minha orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida. Por todos os momentos de orientação, pela paciência, confiança, apoio e dedicação à minha pesquisa. Suas incontáveis horas de leitura foram o que possibilitaram o desenvolvimento deste trabalho. A senhora é minha grande inspiração profissional.

Aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT). Todos vocês são muito importantes para mim.

Às professoras Karina Alessandra Pessôa, Letícia Barcaro Celeste Omodei, Regina Célia Guapo Pasquini e Cláudia Carreira da Rosa. Por todas as sugestões e críticas que tanto contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos amigos e colegas que fiz durante todos os anos de participação neste programa. Todas as conversas e momentos que tivemos juntos foram essenciais para o trabalho.

Aos alunos do dos cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades em que as atividades foram desenvolvidas. Vocês não imaginam a importância que tiveram em minha pesquisa. Sou imensamente grato a cada um de vocês.

À direção da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio. Por compreender a importância desta etapa em minha vida e me permitirem vivenciá-la.

Ao meu amigo e chefe imediato Douglas. Por ter “segurado a barra” em todos os momentos em que precisei me ausentar de nosso setor.

Aos meus amigos Breno e Luciana. Por me terem acolhido nos momentos de crise. Nossas conversas foram meu remédio durante esta trajetória.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho fosse realizado.

A matemática não é apenas um assunto, mas uma linguagem: uma linguagem que vale a pena aprender para ver o mundo de uma forma nova.

Jo Boaler

MENDES, Thiago Fernando. **Caracterização da Construção de Significado em Atividades de Modelagem Matemática à luz das dimensões semiótica e didática**. 2023. 147 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo identificar a construção de significado em atividades de modelagem matemática mediado pela busca de indicativos de que essa construção se dá considerando duas dimensões da construção do significado: uma dimensão semiótica e uma dimensão didática. Nossa investigação está pautada em pressupostos teóricos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e nos pressupostos teóricos relativos à construção de significado, mais especificamente, no que diz respeito à Educação Matemática. Com o intuito de alcançar o objetivo proposto desenvolvemos com alunos do curso de Licenciatura em Matemática, nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral II e Etnomatemática e Tópicos de Educação para a Cidadania, de duas universidades públicas do estado do Paraná, três atividades de modelagem matemática. O desenvolvimento da pesquisa, a coleta de dados e o encaminhamento da análise fundamentam a metodologia de pesquisa como qualitativa. Os dados foram coletados por meio de registros escritos, gravações em áudio e vídeo e questionários. A análise dos dados, coletados com quinze alunos no desenvolvimento das três atividades de modelagem matemática, tem como suporte uma técnica de organização visual de informações que se baseia na representação hierárquica e interconectada de conceitos e ideias relacionadas, denominada de árvore de associação de ideias. A pesquisa empírica mostrou que os grupos envolvidos nas atividades de modelagem matemática reagiram positivamente às propostas, fazendo uso de diferentes recursos matemáticos, reconhecendo a importância da modelagem matemática em seu processo formativo e indicando o desejo de se envolver em mais atividades dessa natureza. Evidenciou-se, ainda, que a construção de significado é influenciada por fatores sociais e culturais, como a linguagem, as normas sociais e as expectativas culturais dos grupos envolvidos. Além disso, tal construção de significados se apoiou em elementos da dimensão didática e da dimensão semiótica da construção de construção de significado com características específicas que associam fatores como as características da atividade de modelagem matemática, a natureza semiótica da construção de significado e as interações construídas no âmbito da sala de aula.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Construção de Significado. Dimensão Semiótica. Dimensão Didática.

MENDES, Thiago Fernando. **Characterization of Meaning Construction in Mathematical Modeling Activities in light of Semiotic and Didactic Dimensions**. 2023. 147 f. Doctorate Thesis (Pós-Graduation on the Teaching of Sciences and Mathematics Education) - State University of Londrina, UEL, Londrina, 2023.

ABSTRACT

This research aims to identify the construction of meaning in mathematical modeling activities mediated by the search for indications that this construction takes place considering two dimensions of meaning construction: a semiotic dimension and a didactic dimension. Our investigation is based on theoretical assumptions of Mathematical Modeling in the perspective of Mathematics Education and on theoretical assumptions related to meaning construction, more specifically, regarding Mathematics Education. In order to achieve the proposed objective, we developed three mathematical modeling activities with students from the Mathematics Teaching course, in the disciplines of Differential and Integral Calculus I and Ethnomathematics and Topics in Citizenship Education, from two public universities in the state of Paraná. The development of the research, data collection, and analysis were based on qualitative research methodology. Data was collected through written records, audio and video recordings, and questionnaires. The data analysis, collected with fifteen students during the development of the three mathematical modeling activities, is supported by a visual technique for organizing information based on the hierarchical and interconnected representation of related concepts and ideas, called the idea association tree. The empirical research showed that the groups involved in the mathematical modeling activities reacted positively to the proposals, making use of different mathematical resources, recognizing the importance of mathematical modeling in their formative process, and indicating the desire to be involved in more activities of this nature. It was also evidenced that the construction of meaning is influenced by social and cultural factors, such as language, social norms, and cultural expectations of the involved groups. Additionally, such construction of meaning relied on elements of the didactic dimension and the semiotic dimension of meaning construction with specific characteristics that associate factors such as the characteristics of mathematical modeling activity, the semiotic nature of meaning construction, and the interactions built in the classroom.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modeling. Meaning Construction. Semiotic Dimension. Didactic Dimension.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A literatura acadêmica concorda ser importante realizar o ensino, em especial na área Educação Matemática, de forma a favorecer a aprendizagem dos estudantes de uma maneira que se reconhece como revestida de *significado* (KILPATRICK et al., 2005; SKOVSMOSE, 2018; RONCATO, 2021).

Em termos gerais, significado refere-se ao que alguém *entende por* ou a *interpretação de algo*. Neste entendimento, ter significado diz respeito a como um conceito, palavra, objeto ou ação pode ser compreendido a partir de diversos fatores, tais como o contexto, a cultura, as experiências pessoais e as referências simbólicas (SKOVSMOSE, 2018).

Não há, entretanto, entre os pesquisadores, um consenso sobre como podem-se configurar práticas em sala de aula que promovam significado, uma vez que diferentes compreensões acerca do significado são visíveis na literatura.

De fato, a discussão sobre significado tem raízes filosóficas e epistemológicas. Por um lado, há indicações de que o significado de um conceito deve ser especificado por meio de suas referências, ou seja, para identificar o significado de um conceito, é necessário identificar referências adequadas a este conceito (SKOVSMOSE, 2018). Por outro lado, o significado de um conceito está ligado ao uso que se faz dele em diferentes contextos (WITTGENSTEIN, 1999).

A teoria do uso de Wittgenstein, também conhecida como teoria do uso linguístico, é uma corrente filosófica que afirma que o significado das palavras está diretamente ligado ao seu uso em contextos específicos (WITTGENSTEIN, 1999). Segundo o filósofo, o significado de uma palavra não pode ser reduzido a uma definição objetiva ou a um conjunto de referências fixas, mas sim à forma como ela é usada em situações reais de comunicação (ALMEIDA; SEKI, 2021).

Sousa (2017) esclarece que, de acordo com Wittgenstein, o significado de um conceito envolve a observação de como a palavra ou o conceito é empregado em diferentes contextos, bem como o reconhecimento das regras e convenções que regem seu uso em determinada comunidade linguística. Além disso, o uso da linguagem está intimamente ligado a aspectos culturais, sociais e históricos, o que torna o significado das palavras algo dinâmico e em constante evolução (SOUSA; ALMEIDA, 2019; ALMEIDA; TORTOLA, 2022).

Skvosmose (2005) destaca que a primeira tentativa de inserção de uma discussão relacionada ao significado no âmbito da Educação Matemática ocorreu como parte do movimento da reforma curricular na Educação na década de 1960. Nesta época, o significado estava relacionado à capacidade de os estudantes reconhecerem as conexões estruturais necessárias quando se trata de conceitos e técnicas no âmbito da matemática.

Entretanto, com os avanços das pesquisas sobre significado na área de Educação Matemática, o entendimento relacionado ao significado em práticas de sala de aula foi se ampliando. Na literatura, atualmente, é possível encontrar autores que discutem diferentes dimensões, perspectivas, abordagens e pontos de vistas do significado no âmbito de atividades de matemática em práticas de sala de aula (BUSSI, 2005; HOWSON, 2005; KILPATRICK et al., 2005; ALMEIDA; SILVA, 2017; ALMEIDA; SILVA; BRITO, 2022).

Além disso, é importante mencionar que a discussão sobre o significado em práticas de sala de aula na Educação Matemática também envolve a consideração de diferentes dimensões relacionadas ao significado. A *dimensão* é um termo utilizado em diversas áreas do conhecimento, incluindo a matemática, a física, a psicologia e a filosofia. Em geral, a *dimensão* se refere à medida de um objeto, espaço ou fenômeno em relação a um conjunto de características específicas (KOHAN, 2015). Esse entendimento se estendeu para outras áreas como a matemática, a psicologia e a filosofia, por exemplo. Na matemática, a dimensão pode ser entendida como o número mínimo de coordenadas necessárias para descrever a posição de um objeto em um espaço. Por exemplo, um ponto em um espaço bidimensional (plano) possui duas dimensões, enquanto um ponto em um espaço tridimensional possui três dimensões. Já na física, a dimensão é frequentemente utilizada para descrever a natureza dos fenômenos observados, como a dimensão do tempo ou do espaço-tempo (RONCATO, 2021). Na psicologia, a dimensão pode ser utilizada para descrever diferentes características ou traços de personalidade, como extroversão, abertura para novas experiências ou neuroticismo, que podem ser medidas em uma escala contínua (KOHAN, 2015). O

Dicionário de Filosofia Nicola Abbagnano, por sua vez, define o termo *dimensão* como “todo plano, grau ou direção no qual se possa efetuar uma investigação ou realizar uma ação” (ABBAGNANO, 2007, p. 277). Fala-se, assim, de dimensão de liberdade, por exemplo, para designar os graus da liberdade ou as direções em que ela pode manifestar-se, ou ainda, dimensão de uma pesquisa para designar os vários planos ou níveis nos quais ela pode ser conduzida.

Considerar diferentes dimensões para o significado implica considerar que o significado pode ser construído individualmente, a partir das experiências pessoais e do contexto em que a comunicação ocorre, ou pode ser estabelecido socialmente, por meio de convenções e acordos coletivos. Assim, pode-se falar em construção de significado como sendo influenciada por fatores como a cultura, o conhecimento prévio, as crenças e valores pessoais, a linguagem e o contexto (KILPATRICK et al., 2005; SKOVSMOSE, 2005).

Considerando que no ambiente destinado à aprendizagem podem emergir discussões investigativas, sociais, econômicas, políticas, filosóficas e críticas, a construção de significado neste ambiente dar-se-á a partir de diferentes fatores, isto pois, as práticas em sala de aula, bem como toda a convivência em sociedade, são mediadas por uma rede de linguagens e representações, já que são diversas as maneiras e recursos que podem ser ativados para se comunicar tais como sons, imagens, sinais, gráficos, gestos, ou seja, são vários os signos que possibilitam a comunicação entre os indivíduos.

Santaella (2012, p. 19) afirma que “as linguagens estão no mundo e nós estamos na linguagem”, o que sinaliza a importância da semiótica em nos auxiliar a compreender o mundo, uma vez a semiótica tem como objetivo o exame das linguagens e dos modos de construção de significados. Neste contexto, a tratar dos processos de aprendizagem, uma dimensão emergente relacionada à construção do significado é a dimensão semiótica.

Segundo Otte (2014), a semiótica é uma área que se dedica ao estudo dos signos e símbolos, e como eles são usados para construir significados na comunicação. Em outros termos, a semiótica possibilita uma análise sobre como o significado é construído por meio do uso de signos, como palavras, imagens, gestos ou sons, e como esses signos se relacionam com os objetos ou conceitos que eles representam (SANTAELLA, 2012; OTTE, 2014).

A semiótica está interessada nas formas como os signos são utilizados para transmitir informações, expressar emoções e comunicar ideias (MENDES, 2018). Ela analisa as relações entre os signos e as pessoas que os utilizam, e como essas relações moldam nossa compreensão do mundo ao nosso redor.

Entretanto, tendo em conta que nas práticas de sala de aula há uma interação entre os alunos e o professor que envolve discussões e reflexões que auxiliam na tomada de decisão, emerge o que pode se caracterizar como uma dimensão didática da construção do significado dentro deste contexto (ALMEIDA; SILVA; BRITO, 2022).

Assim, admitindo a percepção dos estudantes com o mundo e as especificidades educacionais de cada um, há de se considerar que cada sujeito constrói significados de diferentes maneiras (SKOVSMOSE, 2018) e, assim, no que tange especialmente à aprendizagem da matemática, o professor deve desenvolver diversas estratégias e metodologias para proporcionar tal construção em seus alunos e, dentre tais estratégias, cita-se a modelagem matemática. A modelagem matemática diz respeito à abordagem e ao estudo de uma situação da realidade usando matemática.

O professor de matemática, ao fazer a opção pela modelagem matemática em suas práticas de sala de aula, de modo a discutir conceitos, algoritmos e procedimentos de resolução, o faz, em grande parte, por influência de como ele entende que deve ser a sala de aula, a interação entre os estudantes e, principalmente, como entende o que significa ensinar e aprender matemática (VERTUAN, 2013). Ainda assim, vale ressaltar que mesmo professores que lançam mão de estratégias relacionadas à modelagem matemática em suas aulas o podem fazer de diferentes maneiras, a depender de suas concepções e entendimentos sobre os procedimentos que envolvem o desenvolvimento de uma atividade desta natureza. No entanto, apesar de suas diferentes e diversas concepções, um aspecto que merece atenção no que se refere à implementação de atividades de modelagem matemática em sala de aula está associado à construção de significado ao problema, ao fenômeno ou à matemática.

No âmbito da Educação Matemática, discussões sobre a construção de significado reconhecem que uma atividade pode, por exemplo, ter significado dentro do currículo de uma determinada disciplina, mas, ainda assim, os estudantes podem senti-la como totalmente desprovida de significado pessoal (SKOVSMOSE, 2005; 2012; 2016; 2018).

Ao se discutir a questão da construção do significado em atividades de modelagem, Silva e Almeida (2015) ressaltam a necessidade de se considerar os diferentes aspectos envolvidos no desenvolvimento deste tipo de atividade, uma vez que o significado pode se referir aos conteúdos que aparecem na atividade, ao problema, à relação que se estabelece com a realidade por meio do problema, entre outros fatores.

Swan et al (2007) e Almeida, Silva e Vertuan (2012) destacam que por mais que a aprendizagem seja uma atividade que não pode ser compartilhada, uma vez que se trata de uma responsabilidade idiossincrática, os significados construídos pelos sujeitos podem ser compartilhados, discutidos e negociados.

Considerando este entendimento de construção de significado, a presente pesquisa, com o objetivo de *identificar a construção de significado em atividades de modelagem matemática,* é mediada pela busca de indicativos de que essa construção se dá considerando duas dimensões da construção do significado: uma dimensão semiótica e uma dimensão didática.

Fundamentando-se metodologicamente nos pressupostos da pesquisa qualitativa (LÜDKE; ANDRÉ, 2013; SEVERINO, 2017), foram desenvolvidas, após revisão da bibliografia sobre significado na Educação Matemática e modelagem matemática, três atividades de modelagem matemática com quinze estudantes do curso de Licenciatura em Matemática nos anos letivos de 2021 e 2022, em duas universidades públicas localizadas no norte do estado do Paraná. Para a análise de dados foi utilizada a metodologia de análise de *árvore de associação de ideias* descrita por Spink (2010; 2013), com a finalidade de identificar dimensões da construção de significado no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

O texto que relata a pesquisa está estruturado em seis capítulos. Inicialmente, é apresentada a introdução, com contexto, justificativa e objetivo. No primeiro capítulo é realizada uma abordagem teórica sobre o significado e suas diferentes dimensões. No segundo capítulo, é apresentado o entendimento de modelagem matemática na Educação Matemática usado. No terceiro capítulo são descritos os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa. No quarto capítulo são descritas as atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos sujeitos participantes e analisadas no capítulo cinco. No capítulo seis faz-se uma retomada e síntese dos resultados possibilitados pela análise qualitativa. Por fim, são apresentadas considerações finais e as referências bibliográficas utilizadas, seguidas dos anexos e apêndices relativos ao material de coleta de dados.

CAPÍTULO 1 - O SIGNIFICADO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

"O verdadeiro desafio do ensino de matemática não é o rigor da área, mas o processo de construção de significado a objetos tão abstratos" (PIERRE THIBAUD).

1.1 SOBRE SIGNIFICADO

Significado pode ser entendido como a ideia, o conceito ou a mensagem que uma palavra, frase, símbolo ou expressão transmite. É a representação mental que uma pessoa tem de um objeto, evento, emoção ou pensamento, com base em sua experiência e contexto cultural (SKOVSMOSE, 2015). Etimologicamente, a palavra significado vem do latim *significatus*, que é o particípio passado do verbo *significare*. Esse verbo é composto por duas palavras latinas: *signum*, que significa sinal, marca ou indício, e *ficare*, que significa fazer ou fazer-se.

Portanto, *significare* pode ser traduzido como fazer um sinal ou fazer algo se tornar um sinal. A partir dessa ideia, a palavra significado passou a ser usada para se referir àquilo que uma palavra ou sinal representa, ou seja, a sua mensagem ou sentido.

O significado pode ser explícito, como em uma definição de dicionário, ou implícito, como na interpretação de uma metáfora ou ironia e pode variar de acordo com o contexto, o tom de voz, a entonação, a linguagem corporal e a cultura do falante e do ouvinte, sendo a compreensão do significado fundamental para a comunicação eficaz (SANZOVO; LABURÚ, 2017).

Ao discutir o que é significado, Ogden e Richards (1976) afirmam que a linguagem está enraizada na cultura e nos costumes de uma comunidade, e não pode ser compreendida ou explicada sem referência a tais contextos, isto é, "[...] o significado de uma palavra isolada depende da situação e do contexto" (OGDEN; RICHARDS, 1976, p. 137). Assim, "a compreensão da relação entre a interpretação linguística e a análise da cultura a que a língua pertence mostra que o significado não tem uma existência autossuficiente e independente" (SILVA, 2018, p. 44).

No âmbito educacional se reconhece a importância de o professor lidar com as questões de significado tanto para as tarefas quanto para os conceitos (RONCATO, 2021), uma vez que o processo comunicacional estabelecido em sala de aula impacta diretamente os significados ali construídos.

Neste contexto, enquanto o significado é a ideia, conceito ou mensagem que uma palavra, frase, símbolo ou expressão transmite, a construção de significado é o processo mental pelo qual uma pessoa constrói significado a essa palavra, frase, símbolo ou expressão (ILLERIS, 2015). Em outras palavras, o significado existe independentemente da percepção do receptor da mensagem, mas a construção de significado depende do conhecimento prévio e da experiência do receptor.

A construção de significado é um processo dinâmico e em constante evolução, que é influenciado por fatores como o contexto, a cultura, a entonação, o tom de voz, a linguagem corporal e as crenças pessoais do receptor, no caso da sala de aula, do aluno (SKOVSMOSE, 2018; RONCATO, 2021). Esses fatores podem afetar a forma como uma pessoa constrói significado para uma mensagem, mesmo que o significado em si seja fixo. Portanto, a compreensão do significado depende tanto do emissor quanto do receptor da mensagem, e a construção de significado é um processo colaborativo entre eles. Em resumo, o significado é o conteúdo da mensagem, enquanto a construção de significado é o processo mental pelo qual esse conteúdo é interpretado e atribuído significado pelo receptor (RONCATO, 2021).

1.2 O SIGNIFICADO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Por reconhecer a importância de o professor lidar com as questões da construção de significado nos contextos educacionais, em 2005, um grupo de educadores matemáticos de diferentes localidades do mundo se reuniu para a composição da obra "Significado em Educação Matemática[1]", resultado de estudos

[1] Tradução nossa para: "Meaning in Mathematics Education".

desenvolvidos pelo grupo BACOMET[2].

Roncato (2021) destaca que, na intenção de constituir um grupo de estudos em Educação Matemática, os membros do BACOMET iniciaram suas primeiras reuniões em meados de 1978 e, somente em 1993, o primeiro projeto acadêmico, composto por artigos, foi idealizado com publicação finalizada em 2005 com o título *Meaning in Mathematics Education*[3].

Concluído o projeto, os membros do referido grupo seguiram suas próprias direções de estudo, deixando essa produção como uma sugestão para as pessoas que buscam compreender aspectos relacionados ao significado na Educação Matemática.

Os textos da obra *Meaning in Mathematics Education* evidenciam que, na literatura, atenções especiais e diversas são atribuídas às noções de significado, com diferentes embasamentos filosóficos, teóricos e epistemológicos. Kilpatrick et al. (2005), por exemplo, abordam o desenvolvimento da teoria do significado em diferentes vieses como o filosófico e o psicológico. Os autores, ao propor estudos relacionados às possíveis definições de significado e sua construção, entendem que tal definição está relacionada às interações que dão origem a diferentes aspectos (KILPATRICK et al., 2005).

Os autores definem significado como a relação entre uma palavra ou expressão e o objeto, conceito ou evento que ela representa ou denota. Eles destacam que o significado é uma construção complexa que envolve uma série de fatores, incluindo o contexto em que a palavra ou expressão é usada, as experiências e crenças pessoais do falante ou escritor, e as normas culturais e linguísticas da sociedade em que a comunicação ocorre (KILPATRICK et al., 2005).

Além disso, os autores argumentam que o significado não é algo que pode ser simplesmente transmitido de uma pessoa para outra, mas é construído por meio da interação social e da negociação ocorrida entre os sujeitos. Em resumo, Kilpatrick et al. (2005) destacam que o significado é uma construção complexa e dinâmica que envolve a relação entre uma palavra ou expressão e o objeto ou conceito que ela representa, bem como o contexto e a interpretação

---

[2] Sigla para Basic Components of Mathematics Education for Teachers.
[3] KILPATRICK, J.; HOYLES, C.; SKOVSMOSE, O.; VALERO, P. **Meaning in Mathematics Education.** New York: Springer, 2005.

subjetiva que são aplicados pelos indivíduos envolvidos na comunicação.

Howson (2005) explora os significados associados à matemática escolar em oito países diferentes, aplicando variados testes e analisando diferentes livros didáticos, focando a construção do significado a partir de dois questionamentos, a saber: como associar o significado a objetos e conceitos matemáticos? O que os alunos devem saber sobre a matemática?

Para o autor, ao se discutir a construção de significado, é crucial distinguir dois aspectos distintos: aqueles relacionados à relevância e ao significado pessoal (como em "o que isso significa para mim?"), e aqueles que se referem ao sentido objetivo pretendido (ou seja, a significância e os referentes). Esses dois aspectos são distintos e devem ser abordados como tal (HOWSON, 2005). Ainda segundo Howson (2005), é importante diferenciar o significado construído nas atividades matemáticas da sala de aula, por exemplo, do significado da matemática como um corpo de conhecimento.

Também no sentido de explorar o significado associado à matemática escolar, Bussi (2005) discute dois aspectos relacionados aos significados para as cônicas, a saber: o aspecto histórico e o aspecto didático.

O aspecto histórico, relacionado à construção histórica de determinado conceito, possibilita a compreensão sobre determinado conteúdo estimulando a participação dos alunos no processo educativo, enriquecendo o desenvolvimento das aulas, esclarecendo dúvidas e questionamentos, demonstrando a evolução dos conceitos e das ideias matemáticas ao longo do tempo, deixando claro que esta ciência está em constante evolução (BUSSI, 2005). Já o aspecto didático se relaciona mais diretamente às interações ocorridas entre professor e estudante e entre estudantes na sala de aula.

Biehler (2005) aborda o significado matemático no ambiente de sala de aula e nos cenários da pesquisa acadêmica, além de estabelecer uma relação entre os significados que emergem nestes diferentes contextos. O autor defende a importância de uma abordagem sistemática para a construção de significados como uma tarefa didática essencial tanto para o ambiente de sala de aula, quanto para a pesquisa em Educação Matemática (BIEHLER, 2005).

Diferentemente dos demais, Hoyles (2005) aborda a construção de significado nas aulas de matemática a partir do uso de recursos tecnológicos para o desenvolvimento de suas atividades. Teoricamente, a autora se fundamenta na teoria sociocultural de Vygotsky, discutindo que, nesta teoria o significado é uma construção social e cultural, uma vez que para Vygotsky, a linguagem é um meio fundamental para a construção do significado, e é por meio da interação com outras pessoas que as crianças aprendem a utilizar a linguagem para expressar seus pensamentos e emoções (HOYLES, 2005). Em resumo, para Vygotsky, o significado é uma construção social e cultural que ocorre através da interação entre o indivíduo e o meio social em que ele está inserido, utilizando a linguagem como meio fundamental (HOYLES, 2005).

Já Laborde (2005) busca identificar ações, processos e significados construídos por estudantes no desenvolvimento de atividades que envolvem conceitos geométricos. No artigo, o autor identifica como as ações e verbalizações dos estudantes, ao se envolverem com atividades que tratam de conhecimento geométricos, permitem ao professor inferir sobre a construção de significados no âmbito das aulas de geometria.

Otte (2005) discute o significado a partir de uma perspectiva da semiótica peirceana, ao propor que os significados de um problema matemático estão diretamente relacionados às representações utilizadas neste problema. Como assevera o autor, o significado na semiótica peirceana é um conceito fundamental que se relaciona com a interpretação e a comunicação por meio de signos. De acordo com Peirce (1972; 2005), o significado é uma função que relaciona um signo a um objeto, que pode ser uma coisa, uma ideia, um conceito ou um evento.

Hillel e Dreyfus (2005) e Sierpinska (2005) discutem a inteiração e a comunicação em sala de aula como um agente influenciador da construção do significado. Neste caso, os autores fundamentam-se em aspectos didáticos do significado.

Sobre estes aspectos didáticos, Kilpatrick et al. (2005, p.10) entendem que a construção de significado envolve o que denominam de “esferas de práticas e significado[4]”, uma vez que considerar as relações entre a prática escolar e o cotidiano dos estudantes tende a auxiliar as construções de significados

[4] Tradução nossa para: “spheres of practice and meaning”.

quando o foco é o engajamento dos estudantes na aprendizagem matemática. Os autores argumentam que cabe ao professor "[...] apresentar elementos que possam auxiliar os estudantes a interagir na sociedade, exercitando a matemática no dia a dia social, no trabalho, na vida cultural, além da escolar" (KILPATRICK et al., 2005, p. 74).

Várias teorizações sobre significado têm sido realizadas na área de Educação Matemática (BUSSI, 2005; SKOVSMOSE, 2012; 2016; 2018). Skovsmose (2018) aborda as raízes filosóficas do significado, em especial, no que tange à Educação. No platonismo, o significado de algo deve ser especificado por meio de suas referências, ou seja, aquilo a que o conceito se refere em uma atividade social, por exemplo (SKOVSMOSE, 2018). Assim, para identificar o significado de um conceito, faz-se necessário identificar referências adequadas no mundo das ideias.

Neste contexto, Gottlob Frege elaborou uma teoria referencial do significado, que é uma teoria linguística que postula que o significado das palavras é determinado pela relação que elas têm com o mundo exterior, ou seja, com as coisas, eventos e conceitos que elas representam (SKOVSMOSE 2016; 2018). Neste mesmo sentido, Ludwig Wittgenstein (1922 - 1997) se refere também à teoria referencial do significado, em que consiste em uma determinada visão da linguagem em que: "[...] as palavras da linguagem denominam objetos - frases são ligações de tais denominações" (WITTGENSTEIN, 1999, p. 27).

Posteriormente, entretanto, Wittgenstein, na obra Investigações Filosóficas, sugeriu que o significado de uma palavra, precisa ser esclarecido em termos do uso dessa palavra (SOUSA, 2017). Segundo Skovsmose (2018), ambas as interpretações de significado têm sido mencionadas e usadas no âmbito da Educação Matemática.

Ao tratar da construção de significado na Educação Matemática, Otte (2005) e Cruz (2018) afirmam que tal construção está diretamente relacionada aos interpretantes enquanto signos produzidos na mente de um intérprete.

Hoffmann (2004, p. 198), neste contexto, afirma que "uma característica relevante da semiótica peirceana é o reconhecimento do papel do interpretante na construção do significado", o que justifica uma abordagem do significado a partir da semiótica, conforme será discutido na sequência.

1.3 SEMIÓTICA PEIRCEANA: UMA DIMENSÃO SEMIÓTICA DA CONSTRUÇÃO DO SIGNIFICADO

Pesquisas indicam que a aprendizagem, quando associada à produção sígnica, pode se constituir relativamente a uma variedade de representações e significados do objeto matemático e, como sugerem D'Amore, Pinilla e Iori (2015), ela tem natureza semiótica.

A semiótica peirceana, conforme definido por Santaella (2012, p. 33), é a "filosofia científica da linguagem". Charles Sanders Peirce (1839-1914), matemático, químico, físico, astrônomo, fundamentando a semiótica – semiótica peirceana – utilizou o termo *Semeiotic* a partir da lógica concebida como uma ciência da linguagem (SILVA, 2013).

Fidalgo e Gradim (2005) discutem duas frentes de construção teórica que podem ser identificadas na semiótica peirceana. Segundo os autores

> Uma taxonomia, que se ocupa da sistematização e classificação exaustiva dos diferentes tipos de signo possíveis; e uma lógica, que se ocupa do seu modo de funcionamento (como significam os signos) e do papel que estes desempenham na cognição humana e no acesso do homem ao mundo da experiência e do vivido (FIDALGO; GRADIM, 2005, p. 142).

Considerando que a presente pesquisa visa, dentre outras coisas, investigar como se pode qualificar uma dimensão semiótica para a construção do significado em atividades de modelagem matemática, direcionamos nosso interesse para a segunda frente referida pelos autores, em que Peirce (1972) define que

> Um signo, ou *representamen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo, assim criado, denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu *objeto*. Coloca-se no lugar desse objeto, não sob todos os aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que tenho, por vezes, denominado o *fundamento* do representamem (PEIRCE, 1972, p. 94).

O *representamen* é o que Santaella (2012) denomina de parte "material" do signo. Já o objeto é aquilo ao qual o signo se remete, isto é, "uma coisa singular existente e conhecida ou que se acredita tenha anteriormente existido ou que se espera venha a existir” (PEIRCE, 2005, p. 48).

O objeto, ou seja, aquilo que o *representamen* remete, pode ser de dois tipos: imediato, ou seja, tal e qual é representado pelo signo, ou dinâmico, isto é, o objeto realmente eficiente, mas não imediatamente presente, é o que guia a produção do signo cujo objeto imediato representa somente um aspecto particular (PEIRCE, 2005).

O interpretante, por sua vez, é algo que se cria na mente do ser humano (intérprete), trata-se de “um signo que interpreta o representamen” (SANTAELLA, 2008, p. 43).

A partir dessa definição de Peirce, Mortimer et al. (2014) afirmam que um signo é um processo que articula os elementos do signo em busca do significado. Assim, um "primeiro" problema do significado é o problema do todo e da parte (MORTIMER et al., 2014). O segundo problema “[...] resulta da relação entre o particular e o geral” (OTTE, 2005, p. 109).

Cada signo representa o objeto de certa forma e capacidade, ou seja, alguns aspectos conceituais componentes do objeto em estudo (SILVA; ALMEIDA, 2019). Portanto, no contexto educacional é preciso “pensar que o estudante, percebe, reconhece e se apropria de alguns aspectos do objeto, aqueles colocados em evidência, mas não de todos os que o professor tem em mente” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 112).

Esse reconhecimento, requer, dentre outras coisas, certo *conhecimento colateral* relativo ao signo, isto é, um tipo de conhecimento obtido a partir de outras experiências anteriores com aquilo que o signo denota, além de certa familiaridade com o sistema de signos (SANTAELLA, 2012).

O processo que faz com que o signo tenha um efeito cognitivo sobre o intérprete e gere novos signos é a semiose (NÖTH, 2008). De acordo com a definição de Peirce (2005) o conceito de semiose (a ação do signo) é caracterizado como uma atividade evolutiva. E, conforme discutem Almeida, Silva e Brito (2022), a construção de significados por meio do processo de semiose se dá, justamente, pela dinâmica entre os três componentes do signo: o *representamen*, o objeto e o interpretante.

Esses três componentes estão em constante interação e transformação, em um processo que Peirce chamou de semiose ilimitada, pois sempre há espaço para novas interpretações e produções de signos (D'AMORE; PINILLA; IORI, 2015).

Peirce argumentou que a semiose é uma atividade fundamental da mente humana, e que é o processo que permite a comunicação, o pensamento e se volta à busca do significado (SANTAELLA, 2007).

Assim, ao tratar da construção de significado a partir de uma dimensão semiótica, consideramos que tal construção está intrinsecamente relacionada aos interpretantes enquanto signos produzidos na mente de um intérprete. Hoffmann (2004, p. 198), neste contexto, afirma que uma característica relevante da semiótica de Peirce é justamente o reconhecimento do papel do interpretante na construção do significado.

De modo geral, Peirce constrói sua teoria do significado com base no pragmatismo e é esse o sentido mais amplo do pragmatismo, um método de análise que tem como objeto o significado dos conceitos, "um método de pensamento" (PEIRCE *apud* IBRI, 1992, p. 102 (CP, 8.259)[5]), que se põe entre o objeto e seu significado.

Para Peirce, o pragmatismo é um método para determinação de significado. Em seu texto "Como tornar nossas ideias claras[6]", de 1878, Peirce formula sua máxima pragmática. Considere quais efeitos - efeitos que podem ter consequências práticas - imaginamos ter o objeto sobre a nossa significação. A nossa percepção de tais efeitos constitui a totalidade do significado do objeto (PEIRCE, 2020).

O procedimento adotado por Peirce para explicar o significado consiste no estabelecimento de um conjunto de condições para uma dada situação em que uma operação definida produziria um determinado resultado. Em Peirce, "para tornar claro o significado de uma ideia, devemos tentar interpretar cada noção traçando suas consequências práticas" (PEIRCE, 1972, p. 21). Por exemplo, para dizer que um objeto é duro, é necessário tentar arranhá-lo com diferentes substâncias e, com isso, chegar ao resultado de que o objeto não pode ser

---

[5] PEIRCE, C. S.; HARTSHORNE, C.; WEISS, P.; BURKS, A. **The Collected Papers of Charles Sanders Peirce**. InteLex Corporation, 1994. (Aqui referido como CP; os números das citações referem-se aos volumes e parágrafos, respectivamente).
[6] Tradução nossa para "How to make our ideas clear".

arranhado pela maioria das substâncias aplicadas a ele. Dessa forma, o conceito de 'duro' ganharia um significado pragmático preciso de “aquilo que não pode ser arranhado” (CARREIRA; BAIOA; ALMEIDA, 2020).

Considerando esta perspectiva pragmática do significado em contextos educacionais, Wilhelmi, Godino e Lacasta (2007, p. 79) consideram que

> nosso significado começa por ser pragmático, relativo ao contexto, mas há usos típicos que nos permitem orientar o ensino de matemática e os processos de aprendizagem. Esses tipos são objetivados pela linguagem e constituem os referentes do léxico institucional[7].

Os mesmos autores também afirmam que “o significado de um objeto matemático é inseparável dos sistemas pertinentes de práticas e contextos de uso[8]” (WILHELMI; GODINO; LACASTA, 2007, p. 76).

Indo ao encontro do que afirma Silva (2013), ao percorrer diferentes obras de Peirce e de seus interpretadores, na semiótica peirceana, em termos gerais, há evidências de construção de significado para o objeto por meio de cinco aspectos: familiaridade; intenção; ideia; consequência futura e experiência colateral. Segundo Silva (2013, p. 69)

> *familiaridade* que o intérprete possui com o dado objeto, se este já faz parte de sua realidade ou contexto; na *intenção* de significar o objeto, em que ocorre, a partir de uma referência, uma articulação deste objeto com o contexto em que este é utilizado; como uma *ideia* que se remete ao objeto, de atuar e ser atuado; como *consequência* futura para abarcar o objeto, em que as consequências práticas estabelecem destaque entre pensamento e ação; por meio de *experiência colateral* com o objeto, ou seja, da intimidade prévia com aquilo que o signo denota (SILVA, 2013, p. 69).

Uma maneira de evidenciar as consequências é analisar os símbolos produzidos pelos intérpretes para o mesmo objeto. Se ocorrerem mudanças significativas para os símbolos, possivelmente há um progresso na construção de significado para o objeto. Isto pois, conforme afirma Peirce (2005, p.

---

[7] Tradução nossa para: “our meaning begins by being pragmatic, relative to the context, but there are typical uses that allow us to guide mathematical teaching and learning processes. These types are objectified by language and constitute the referents of the institutional lexicon”.
[8] Tradução nossa para: “the meaning of a mathematical object is inseparable from the pertinent systems of practices and contexts of use”.

40) “o corpo de um símbolo transforma-se lentamente, mas seu significado cresce inevitavelmente, incorpora novos elementos e livra-se de elementos velhos”.

A familiaridade com os símbolos possibilita um progresso na construção do significado para o objeto. A experiência colateral fortalece a produção de signos que proporcionam a construção de significado. A intenção se refere à finalidade ou objetivo do signo em uma determinada situação, enquanto, ainda para Peirce, a ideia refere-se à representação de um objeto, conceito ou fenômeno, que é produzida a partir da percepção e da experiência. Segundo Silva (2013), as ideias são construídas por meio da conexão de signos, e são a base do pensamento humano e da comunicação.

Embora a construção de significado se fundamenta em aspectos signicos e interpretativos que constituem a dimensão semiótica dessa construção, no contexto educacional, aspectos didáticos também têm estreita ligação com o processo de construção de significado.

1.4 IDENTIFICANDO UMA DIMENSÃO DIDÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADO

A construção de significado pode ser associada às estruturas sociais dos sujeitos envolvidos nas práticas educativas, o que exige que o processo educacional seja levado em consideração (SKOVSMOSE, 2005).

É possível, portanto, considerar que a construção de significado abrange também uma dimensão didática, que inclui considerações relativas ao tipo e à finalidade das atividades escolares bem como aos processos de interação que, na sala de aula, são requeridos.

Howson (2005, p. 179), neste contexto, propõe que

> O significado possibilitado pela motivação de resolver problemas "realistas" provavelmente deixará muitas áreas importantes da matemática injustificadas. Por que gastar tempo aprendendo técnicas? Por que abstrair, provar ou generalizar?

Na tentativa de compreender que significados os estudantes constroem na realização de determinadas atividades escolares, professores buscam por objetos pedagógicos diversificados. Neste contexto, abordagens diferentes quanto ao significado em Educação Matemática podem ser consideradas diante dos questionamentos dos estudantes, como “afinal, o que significa este conteúdo?” (BUSSI, 2005, p. 97).

Neste contexto, Skovsmose (2018), a partir do que o autor denomina de *foreground*[9], referente à maneira como o estudante percebe a importância das atividades educacionais para seu futuro fora do contexto educacional, caracteriza um domínio do significado que denomina de sociopolítico, domínio esse em que os contextos em que vivem os estudantes e as ideias preliminares que estes têm do conteúdo a ser trabalhado, impactam diretamente no significado que estes construirão a respeito do conteúdo, especialmente em sala de aula, relacionando-se, assim, com a dimensão didática da construção de significado.

Também é reconhecido um domínio social do significado que, segundo Bishop (2005), se relaciona a três aspectos da aula de matemática: as atividades matemáticas utilizadas, o processo comunicacional na sala de aula e a negociação de significado entre professor e estudante.

Bishop (2005) esclarece que as atividades matemáticas utilizadas devem enfatizar o envolvimento do aluno com a matemática, ao invés de priorizar aulas expositivas em que o professor apresenta o conteúdo aos alunos. Neste envolvimento, a construção do significado, em seu domínio social, se fortalece mediante o trabalho colaborativo em que dialogam os alunos e professor bem como os alunos entre si.

Relativamente à comunicação na sala de aula, Bishop (2005) e Skovsmose (2016) destacam que é preciso que se gerem discussões mediante o trabalho colaborativo em que é necessário ter em conta que “significados e compreensão são sobre as conexões que se tem entre ideias” (BISHOP, 2005, p. 27). Neste sentido, a comunicação contribui para a construção de significado considerando que uma nova ideia será significativa para um aluno na medida em que se conecta bem com as suas ideias e significados já existentes.

Bishop (2005) afirma que se pode incluir nesta ideia a elaboração

[9] Foreground pode ser traduzido como “um primeiro plano” ou “uma ideia preliminar” e, segundo Skovsmose (2018, p. 769), “são estruturados, tanto em termos de possibilidades como de impossibilidades, por esperanças e aspirações, bem como por medos e aversões”.

de um "*modus vivendi*"[10] em sala de aula, ou seja, as regras de procedimento, disciplina e comportamento que os professores já conhecem, de maneira a levar os estudantes a encontrarem determinados fundamentos para a realização das atividades propostas. Isto ocorre, pois, alguns estudantes não encontram tais fundamentos, ao passo que outros atribuem os baixos desempenhos matemáticos ao pouco domínio que possuem nas ciências exatas. Com relação às atitudes dos estudantes no contato com as tarefas propostas pelo docente, Kilpatrick et al. (2005, p. 09) esclarecem que:

> alguns alunos acham inútil fazer a lição de casa em matemática; alguns gostam de trigonometria ou gostam de discussões sobre matemática nas salas de aula; algumas famílias de estudantes acham que a matemática é inútil fora da escola; outros estudantes dizem que, devido à sua fraqueza (ponto fraco) na matemática, não podem ingressar na academia[11].

Determinados questionamentos dão indícios de possíveis motivos que levam os estudantes a agirem de determinadas formas diante de algumas situações escolares e tais questionamentos podem estar diretamente atrelados às atividades escolares propostas aos estudantes: são as disposições ou decisões que os impulsionam para a aprendizagem (SKOVSMOSE, 2015).

Isto é, a depender da atividade proposta, os estudantes reagirão de determinadas formas: aceitando, ou não, desenvolvê-la; dedicando-se mais ou menos nesta resolução; colocando mais ou menos condições para que participe da atividade, por exemplo, solicitando atribuição de nota em troca, dentre diversos outros comportamentos possíveis. E, todas estas questões, influenciarão nos significados construídos pelos estudantes para a atividade em si.

Um exemplo é mencionado por Kilpatrick et al. (2005) e refere-se ao desenvolvimento de um exercício em sala de aula que envolve números decimais. Segundo os autores, alguns dos significados construídos pelos

---

[10] No que diz respeito ao domínio social do significado, Bishop (2005) discute o “modus vivendi” em termos de um modo de vida ou, ainda, um meio de viver. Sendo este modus uma condição para que todos possam viver em concordância e de maneira harmônica o que, segundo a autora, é uma condição para o andamento adequado dos processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula (BISHOP, 2005).

[11] Tradução nossa para: Some students find it pointless to do their mathematics homework; some like to do trigonometry, or enjoy discussions about mathematics in their classrooms; some students’ families think that mathematics is useless outside school; other students are told that because of their weakness in mathematics they cannot join the academic stream.

estudantes relativos a este conteúdo matemático podem fazer referências a situações de vida real ou situações corriqueiras. Assim, sobre os diferentes significados para os números decimais, Kilpatrick et al. (2005) descrevem que, para um comerciante, talvez estes possam remeter a manipulações com dinheiro, quantidades, comprimentos, que diferem, também, do significado que físicos e químicos atribuem, frente às possibilidades de resoluções de exercícios com este mesmo conteúdo matemático.

O professor, por sua vez, também percebe os números decimais diante de diferentes vieses: um conteúdo matemático com propriedades e características peculiares, contendo normas para a resolução de operações matemáticas. Possivelmente, para o docente, além de completar o currículo necessário na realização das aprendizagens e exames escolares, tal conteúdo tem, ainda, relação com a experiência de seus alunos nas práticas com as tarefas escolares. Sendo assim, diferentes significados são construídos para o conceito matemático em questão e emerge daí a negociação de significados, relacionada à não simetria da relação professor/estudante no desenvolvimento de significados compartilhados. Isto é, a negociação refere-se ao fato de que os significados construídos pelo professor, por vezes, diferem dos significados construídos pelos alunos, por uma série de motivos, como por exemplo, a experiência de cada um com a temática tratada ou ainda as motivações que levam cada um deles (professor e estudante) a se envolver no estudo de determinados fenômenos.

No contexto da sala de aula, em especial no âmbito das aulas de matemática, a construção do significado relaciona-se diretamente com a existência de motivos e disposições que auxiliam os estudantes na execução das atividades propostas e da construção do significado (RONCATO, 2021). Neste sentido,

> [...] alguns alunos reconhecem que estudar matemática é importante para seu futuro profissional, embora nesse futuro não contenha o contato direto com os cálculos. Outros podem esclarecer que não gostam dessa disciplina, que a estudam porque são obrigados, para passar nos exames. Discutir, portanto, o contexto no qual se opera essa aprendizagem é muito importante (RONCATO, 2021, p. 35).

Skovsmose (2005) considera que para que os estudantes construam significado relativos aos conceitos que precisam aprender "[...] é essencial fornecer significado à situação educacional na qual os alunos estão envolvidos[12]" (p. 85). Neste contexto, o autor propõe interpretações do significado não em termos de suas referências ou usos, como fizeram Frege e Wittgenstein, mas sim com relação às situações em que os estudantes estão envolvidos, considerando o envolvimento e engajamento deles nos estudos propostos.

Estes aspectos podem ser vinculados ao que se reconhece como a intencionalidade dos estudantes em sala de aula. Skovsmose (2015) sugere uma reinterpretação do conceito de intencionalidade, incluindo estruturações sociais, como fatores econômicos, políticos, culturais e discursivos, entendendo, assim, que ao abordar a interpretação de intencionalidade, é importante considerar o social, a vida real.

A "intencionalidade é estar dirigido a" algum propósito (RONCATO, 2021, p. 46). Desse modo, a opção do estudante, por exemplo, em realizar ou não as atividades matemáticas propostas pelo professor, está relacionada, também, com a intencionalidade presente nesta execução:

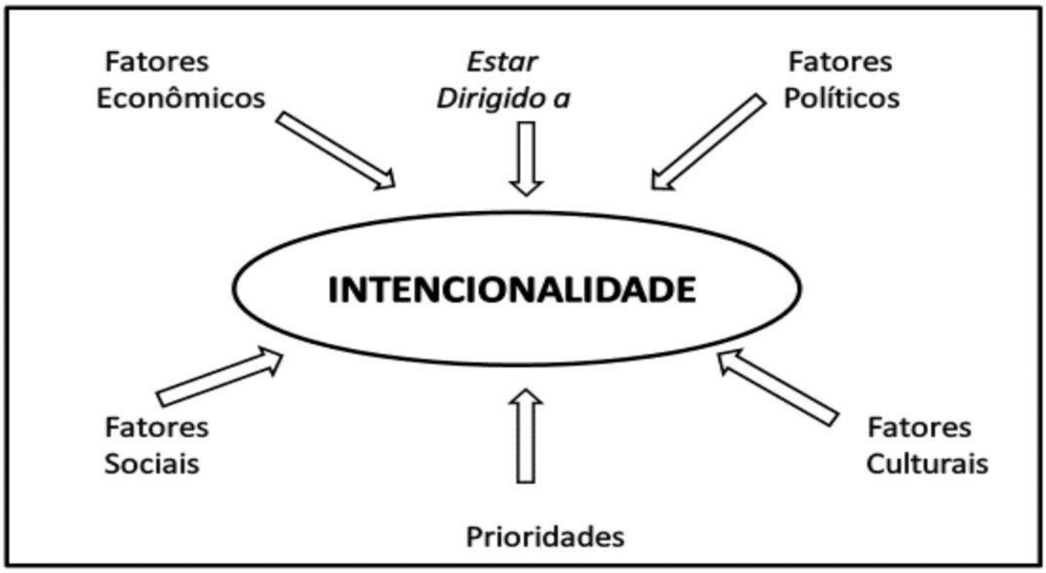
> [...] talvez o estudante decida positivamente visto que reconhece na aprendizagem desse conteúdo um elemento importante na composição de seu futuro profissional. Talvez ele goste da matemática e queira melhorar seu rendimento escolar ou, porventura, tenha simpatia pelo professor e queira agradá-lo. Quem sabe queira, simplesmente, conquistar boas notas nos exames (RONCATO, 2021, p. 46).

Skovsmose (2015) entende que há uma gama de fatores que tendem a interferir nas decisões das pessoas, especialmente os estudantes, ou seja, as decisões tomadas em sala de aula são influenciadas por diversos fatores, conforme sintetizado por Roncato (2021) (Figura 1.1).

---

[12] Tradução nossa para: "[…] for students to ascribe meaning to concepts that have to be learned, it is essential to provide meaning to the educational situation in which the students are involved".

Figura 1.1: Aspectos que direcionam a intencionalidade



Fonte: Roncato (2021, p. 47).

Conforme mencionam D'Amore, Pinilla e Iori (2015), a intencionalidade é fundamental para as ações dos alunos, uma vez que permite que se concentrem em seus objetivos e priorizem seus esforços de acordo com suas necessidades e metas. Segundo Roncato (2021), com intencionalidade

> o aprendiz se torna mais engajado e motivado para aprender, pois se sente mais responsável e envolvido no processo de aprendizagem. Ele ou ela é capaz de concentrar sua atenção e esforços em tarefas específicas que estão alinhadas com suas metas, e isso ajuda a evitar distrações e a procrastinação (RONCATO, 2021, p. 52).

Se as discussões se centrarem no ambiente escolar, especificamente de sala de aula, as prioridades de um estudante e sua intencionalidade movem suas ações e promovem a construção de significado nas aulas de matemática, especialmente, quando a aula se der em contextos específicos, como é o caso da modelagem matemática.

CAPÍTULO 2 - MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

"*Nas aulas de matemática aprende-se uma concepção muito particular do que conta como matemática, do que significa lidar com a matemática, do que é ensinar e aprender matemática*" (GELSA KNIJNIK).

2.1 SOBRE A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Pesquisas sobre modelagem matemática na Educação Matemática já constituem um *corpus* teórico reconhecido e datam de mais de trinta anos. Panoramas sobre tais pesquisas no âmbito nacional podem ser consultados em Araújo (2010), Klüber e Burak (2014) e em Kaiser, Blomhøj e Sriraman (2006), no âmbito internacional.

Almeida e Vertuan (2014) explicam que a modelagem matemática objetiva propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. O modelo matemático, neste caso, "é o que dá forma à solução do problema e a modelagem matemática é a atividade que busca por esta solução" (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 2).

Bassanezi (2002, p. 16) define a modelagem matemática como, essencialmente, "a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do seu contexto de origem".

Niss (2015, p. 67) afirma que a modelagem matemática tem o propósito de "capturar, representar, compreender ou analisar a existência de fenômenos, situações ou domínios extramatemáticos, geralmente como um meio de responder à questão de ordem prática, intelectual e científica – e resolver problemas relacionados – pertencentes ao domínio em análise[13]". Esse entendimento do autor é caracterizado por dois propósitos distintos: a modelagem

[13] Tradução nossa de: […] to capture, represent, understand, or analyse existing extra-mathematical phenomena, situations or domains, usually as a means of answering practical, intellectual or scientific questions - and solving related problems - pertaining to the domain under consideration (NISS, 2015, p. 67).

descritiva, cujo foco está na descrição dos fenômenos e a modelagem prescritiva que objetiva conceber, organizar ou estruturar certos aspectos do domínio extra matemático.

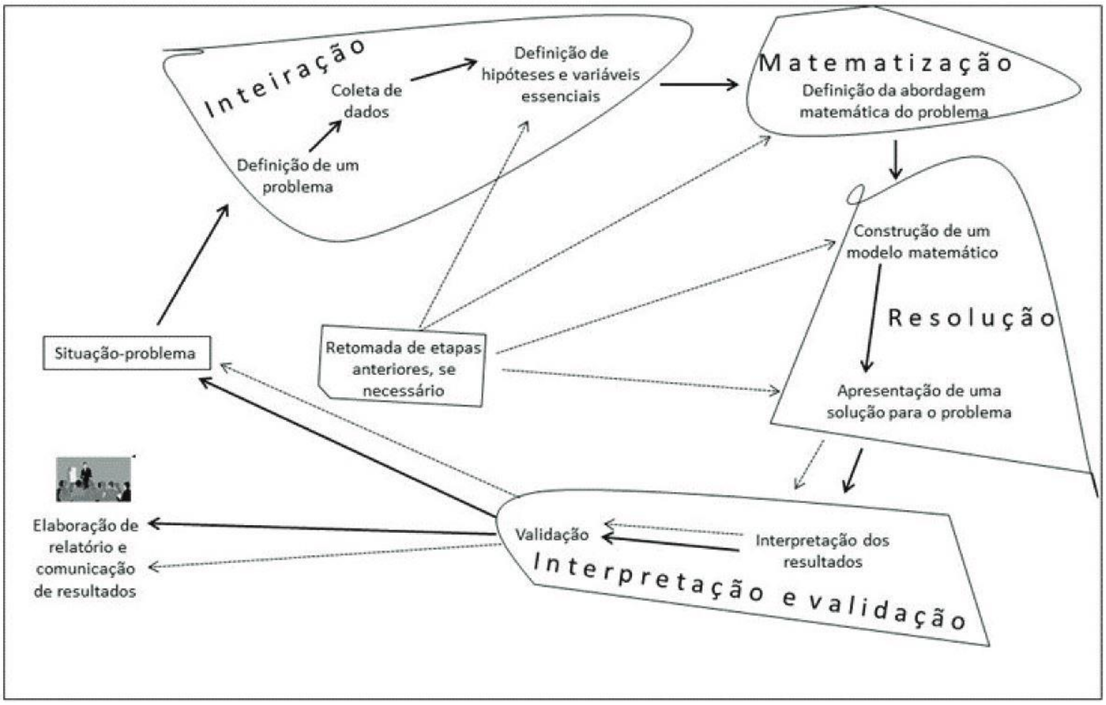
Almeida, Silva e Vertuan (2012) afirmam que as atividades de modelagem matemática podem ser definidas em termos de uma situação inicial (problemática) e uma solução para o problema (situação final) e, entre a situação inicial e a final, uma série de procedimentos e ações são requeridos dos estudantes. Assim, a modelagem matemática inclui um conjunto de procedimentos para apresentar uma solução para um problema associado a uma situação extra matemática. Neste sentido, a modelagem matemática, de certa forma, viabiliza uma interpretação, ainda que parcial, de situações da realidade com o apoio da matemática (ALMEIDA, 2010; MENDES et al. 2019).

Os procedimentos matemáticos que emergem na busca pela solução para o problema podem ser apresentados por meio de diagramas, gráficos, expressões algébricas ou geométricas caracterizadas como modelo matemático que, por sua vez, pode ser entendido como um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, que é expresso a partir de uma linguagem ou estrutura matemática e que tem como objetivo explicar ou descrever o comportamento de outro sistema, geralmente, não matemático (ALMEIDA; VERTUAN, 2014).

Portanto, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática inclui fases relativas ao conjunto de procedimentos necessários para a configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema que, em Almeida, Silva e Vertuan (2012), são caracterizadas como: inteiração, matematização, resolução e interpretação de resultados e validação.

Neste sentido, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática pode estar associado aos chamados ciclos de modelagem, em que a dinâmica da atividade é representada considerando as fases supra mencionadas, conforme ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1: Ciclo de modelagem matemática



Fonte: Almeida, Castro e Silva (2021, p. 386).

O que se pode evidenciar no ciclo da Figura 2.1 são as ações dos estudantes que desenvolvem atividades de modelagem matemática associadas às diferentes fases discutidas por Almeida, Silva e Vertuan (2012). As linhas pontilhadas do ciclo, conforme destacam Almeida, Castro e Silva (2021) indicam as ações que podem ser retomadas quando o resultado obtido não for satisfatório matematicamente ou com relação à análise do fenômeno em si.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), a inteiração representa o primeiro contato dos alunos com a situação-problema que se pretende estudar, objetivando conhecer as suas características e especificidades. Nesta fase ocorre a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução. Tal formulação orienta-se “pela falta de compreensão, de entendimento da situação”, mas requer que alguns aspectos já sejam conhecidos por quem a está desenvolvendo e é justamente este o papel da inteiração (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 4). Portanto, a escolha de um tema e a busca de informações a seu respeito são o foco central desta primeira fase.

Na matematização o que se pretende é encontrar meios para definir métodos e conceitos matemáticos para estudar a situação da realidade.

Lança-se mão nesta fase, de procedimentos como a formulação de hipóteses, seleção de variáveis e a simplificação da situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Esta é a fase em que ocorre a transição de linguagens (da linguagem natural, que o problema se apresenta à linguagem matemática que evidencia o problema a ser resolvido).

Por sua vez, na resolução é feita a construção de um modelo matemático que pode ser definido como um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por uma linguagem ou estrutura matemática, que objetiva descrever e prever o comportamento de outro sistema (LESH, 2010), tais representações incluem desde símbolos, gráficos e diagramas até expressões algébricas ou geométricas (DOERR; ENGLISH, 2003).

Por fim, Almeida, Silva e Vertuan (2012), pontuam que a interpretação dos resultados implica a análise de uma solução para o problema, constituindo-se assim um processo avaliativo realizado por todos os envolvidos na atividade. Além disso, tal interpretação implica uma validação do modelo matemático, considerando-se tanto os procedimentos matemáticos utilizados, quanto à adequação do modelo para a situação-problema. É importante destacar que o modelo matemático deve fornecer resultados que são matematicamente corretos e tais resultados devem ser confrontados com a realidade, uma vez que sua validação não depende apenas dos resultados matemáticos, mas também do sentido que a solução faz na situação da realidade (ALMEIDA; SILVA, 2021).

Vale destacar que as etapas da modelagem podem não acontecer de forma linear e “os movimentos de “idas e vindas” entre tais etapas caracterizam a dinamicidade da atividade” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 17). Além disso, o tempo dedicado a cada uma dessas fases e os obstáculos presentes nelas dependerão da dinâmica de desenvolvimento de cada atividade e do contexto da sala de aula em que a mesma estiver sendo desenvolvida.

Durante as fases da modelagem há uma interação entre os alunos que envolve discussões e reflexões que auxiliam na tomada de decisão. Segundo Swan et al. (2007), à medida que grupos de estudantes formulam problemas, a discussão pode permitir que eles façam a distinção entre o que é relevante e o que é irrelevante para abordar uma situação da realidade e então construir relações entre variáveis. “Os alunos podem então ter um "*brainstorm*" de ideias alternativas de solução e podem ajudar uns aos outros a interpretar, criticar e validar soluções" (SWAN et al., 2007, p. 7).

Essas interações podem promover a construção de significado. Nesse sentido, Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 37) afirmam que

> ainda que aprendizagem não seja uma atividade que se possa compartilhar, pois é algo de responsabilidade de cada um, o que pode ser compartilhado, discutido e negociado, são os significados. Assim, as atividades compartilhadas podem contribuir com a aprendizagem de cada participante de forma diferenciada, mas tem uma importante função social de promover um espaço para discussões e troca de significados. O trabalho com modelagem em situações de ensino proporciona uma atmosfera propícia para essa troca de significados.

Pesquisas que remetem à construção de significados para diferentes ações dos alunos podem ser notadas na literatura. Carreira, Amado e Lecoq (2011), Blomhøj e Kjeldsen, (2011) e Almeida (2010) desenvolveram trabalhos nesta linha. Estes trabalhos são abordados na próxima seção.

2.2 O SIGNIFICADO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Na literatura acadêmica, são variadas as pesquisas que defendem o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática nas aulas de matemática e tais defesas fundamentam-se em diferentes motivos.

Kaiser e Stender (2013), por exemplo, afirmam que dentre as razões para implementação da modelagem matemática em sala de aula está o fato de o uso da matemática para investigar contextos extramatemáticos ser enfatizado como uma atividade importante em si mesma e poder apoiar a aprendizagem da matemática.

Blum (2015) elenca quatro objetivos para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática nas aulas de matemática, sendo eles: i) pragmático, que visa compreender e dominar as situações do mundo real; ii) formativo, que intuita a promoção do desenvolvimento de competências nos estudantes a partir de atividades de modelagem matemática; iii) cultural, para evidenciar as relações entre a matemática e o mundo extramatemático; e iv) psicológico, que objetiva fomentar os interesses e a motivação dos estudantes para a sua aprendizagem da matemática.

Ainda segundo Blum (2015), em termos gerais, há uma dualidade nesta caracterização dos objetivos apresentada pelo autor, uma vez que, enquanto o objetivo pragmático lida com a matemática “como um suporte para o mundo real” (BLUM, 2015, p. 75), os demais (objetivos formativo, cultural e psicológico) levam à direção oposta, isto é, o mundo real como um suporte para a matemática. Neste sentido, e objetivando avanços nas ideias associadas a tais objetivos, Blum (2015) ressalta que tipos específicos de atividades são necessários, caracterizando assim sua perspectiva de modelagem matemática com um par ordenado (objetivo | atividade adequada).

É importante ressaltar que é possível que uma mesma atividade de modelagem matemática atenda mais do que um objetivo simultaneamente, entretanto, cada objetivo está vinculado a propósitos e interesses subjacentes à implementação de atividades de modelagem matemática nas aulas e, desse modo, a forma como o professor conduzirá o desenvolvimento das atividades visa atender interesses e necessidades em situações de ensino e aprendizagem (ALMEIDA; VERTUAN, 2010).

O uso da modelagem matemática nas aulas “pode motivar e apoiar a compreensão de métodos e conteúdos da matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimentos bem como pode servir para mostrar aplicações da matemática em outras áreas do conhecimento” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 30).

Além disso, dentre os aspectos que merecem atenção no que se refere ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática está a construção de significados que, em alguma medida, “pode ser evidenciada nas ações, nas representações, nas argumentações dos alunos” (ALMEIDA; SILVA, 2014, p. 128).

Na literatura, são variados os trabalhos que já se dedicaram a discutir a questão do significado no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Carreira, Amado e Lecoq (2011), por exemplo, olharam para como o conhecimento é eliciado por meio da modelagem matemática de situações cotidianas, no contexto da Educação de Jovens e Adultos. No caso, os autores examinam o significado da matematização e da competência de modelagem matemática emergidas no desenvolvimento de uma atividade que envolve culinária, temática esta escolhida pelos participantes do estudo.

Outra pesquisa que versa sobre o significado em atividades de modelagem matemática é a desenvolvida por Blomhøj e Kjeldsen (2011) em que os autores argumentam que existem dois tipos de reflexões que devem ser consideradas no que diz respeito ao significado: uma reflexão interna e outra externa com relação ao processo de modelagem.

Segundo os autores, as reflexões internas possibilitam a construção de significados relacionados aos subprocessos envolvidos em um processo de modelagem matemática, isto é, significados atrelados às ações tomadas pelos modeladores ao longo do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, enquanto as reflexões externas abordam o papel e a função do modelo em aplicações reais ou potenciais (BLOMHØJ; KJELDSEN, 2011).

Almeida (2010), por sua vez, considerando a importância da linguagem sígnica para a conceitualização em matemática, apresenta algumas reflexões sobre possíveis aproximações entre modelos matemáticos e metáforas, no intuito de discutir, dentre outras coisas, se o uso ou a produção de modelos e metáforas favorece a construção de significados para objetos dos domínios conceituais a que estão associados. As reflexões de Almeida (2010) sinalizam que é possível vislumbrar aproximações entre modelos, modelagem e metáforas que podem ser importantes para a significação de objetos associados à situação em estudo.

Silva e Almeida (2015) apresentam resultados de uma pesquisa na qual investigam evidências de atribuição de significado, fundamentadas nos pressupostos teóricos da semiótica Peirceana, em atividades de modelagem matemática. A partir da análise dos interpretantes utilizados e construídos pelos estudantes no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática relacionada ao consumo de cigarro, as autoras inferem sobre a atribuição de significado para o problema e para a matemática durante o desenvolvimento da atividade de modelagem analisada, traçando caminhos do significado.

Também fundamentados em pressupostos semióticos, Almeida, Silva e Brito (2022) propõem uma discussão relativa à abordagem de conteúdos da matemática em atividades de modelagem, de modo que se vislumbra uma interface entre modelagem matemática e semiótica.

Por um lado, essa interface didática entre modelagem matemática e semiótica se vincula à situação epistemológica particular dos objetos matemáticos que só se tornam presentes por meio de signos e, por outro lado, a modelagem matemática "tem características de uma organização pedagógica que não se desvincula de uma variabilidade de signos e de uma eminente atividade semiótica" (ALMEIDA; SILVA; BRITO, 2022, p. 796).

Ainda para Almeida, Silva e Brito (2022), as atividades de modelagem matemática proporcionam a ativação de diferentes facetas do significado de conceitos matemáticos de maneira que o que pode ter sido aprendido pelos estudantes se dá em decorrência da intervenção e utilização de signos.

Na presente pesquisa, objetivamos identificar a construção de significado em atividades de modelagem matemática mediante duas dimensões: a dimensão didática e a dimensão semiótica, fundamentando-se metodologicamente nos pressupostos apresentados no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 3 - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

"*Ciência é conhecimento organizado. Sabedoria é vida organizada*".
(WILL DURANT).

3.1 A OPÇÃO METODOLÓGICA DA PESQUISA

A presente pesquisa segue encaminhamentos do que se caracteriza na literatura como pesquisa qualitativa. A abordagem qualitativa para a pesquisa, segundo Bogdan e Biklen (1982), Lüdke e André (2013) e Severino (2017), envolve a obtenção de dados descritivos por meio do contato direto do pesquisador com a situação objeto de estudo, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em compreender e retratar o fenômeno segundo a perspectiva dos participantes (GODOY, 1995).

Para Garnica (1997, p. 114), em uma pesquisa qualitativa, como a própria denominação sugere, "o olhar está voltado à qualidade, aos elementos que sejam significativos para o pesquisador, num contexto no qual o sujeito constrói e também faz parte".

Considerando estas especificidades, a presente pesquisa, visa investigar a construção de significado em atividades de modelagem matemática, mediante duas dimensões: a dimensão didática e a dimensão semiótica.

3.2 O CONTEXTO DA PESQUISA

Três atividades de modelagem foram desenvolvidas com quinze estudantes[14] de cursos de Licenciatura em Matemática nos anos letivos de 2021 e 2022, em duas universidades públicas localizadas no norte do Paraná que aqui são referidas como Universidade A e Universidade B. Tais atividades deram-se no contexto de duas disciplinas, sendo elas, Cálculo Diferencial e Integral II, com oito

[14] O consentimento dos estudantes participantes da pesquisa foi solicitado conforme Termo de Consentimento Livre Esclarecido constante no Apêndice D.

estudantes, e Etnomatemática e Tópicos de Educação para a Cidadania, com 26 estudantes participantes.

No processo de análise, para garantir a preservação da sua identidade, os estudantes são referidos pelos códigos A1, A2, A3, e assim, sucessivamente.

Todas as atividades foram desenvolvidas em grupos, tendo-se, assim, a composição de três diferentes grupos, mencionados com os códigos G-1, G-2 e G-3. No Quadro 3.1 são apresentados as atividades de modelagem matemática desenvolvidas e os referidos grupos.

Quadro 3.1: Composição dos grupos e atividades de modelagem matemática desenvolvidas

<table>
<tr><th>Grupos</th><th>Estudantes</th><th>Temática das atividades de modelagem matemática</th><th>Universidade</th></tr>
<tr><td rowspan="2">G-1</td><td rowspan="2">A1, A2 e A3</td><td>Pavimentação de um estacionamento</td><td rowspan="2">A</td></tr>
<tr><td>Aplicação de pasta isotérmica em placa de processador</td></tr>
<tr><td>G-2</td><td>A4, A5, A6, A7, A8 e A9</td><td rowspan="2">Distribuição de riquezas no mundo</td><td rowspan="2">B</td></tr>
<tr><td>G-3</td><td>A10, A11, A12, A13, A14 e A15</td></tr>
</table>

Fonte: autoria própria (2023).

Na Universidade A as atividades foram desenvolvidas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática, cuja ementa é composta pelos seguintes conteúdos programáticos: integrais próprias e impróprias, integrais eulerianos, relações e funções em espaços reais, limite e continuidade de funções de n variáveis reais e integrações numéricas.

Já na Universidade B a atividade foi desenvolvida na disciplina de Etnomatemática e Tópicos de Educação para a Cidadania, também do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática, cujo ementário é: etnomatemática na Educação Matemática; questões estéticas e relativas à diversidade étnico-racial, afrodescendência; abordagens de aspectos sócio-etno-culturais; diversidade de gênero, sexual, religiosa, de faixa geracional e sociocultural como princípios de equidade; e direitos humanos.

Em ambas as atividades, o professor da disciplina participou das aulas em que se deu o seu desenvolvimento, sendo que, o autor da tese (pesquisador) foi o responsável pela realização das aulas.

3.3 A Coleta de Dados

Os dados foram coletados no decorrer das aulas em que se deu o desenvolvimento das atividades.

As atividades desenvolvidas na Universidade A ocorreram no período em que as aulas da disciplina estavam remotas e síncronas e, portanto, todas as interações entre os estudantes, o professor regente da disciplina e o pesquisador (autor desta pesquisa) deram-se por meio da plataforma Google Meet[15]. Foram utilizadas 12 aulas e também encontros remotos e síncronos, do projeto de extensão intitulado Nivelando Cálculo Integral na UTF. Este é um projeto de extensão semanal, cujos encontros são sempre aos sábados pela manhã, do qual o professor regente da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II é coordenador.

Assim, os dados coletados consistem em registros escritos e falas dos alunos que foram obtidos por meio de: relatórios entregues pelos estudantes após o término de cada atividade; gravações em áudio e vídeo das interações; contato via WhatsApp ou e-mail; e respostas dos mesmos aos questionários disponibilizados ao fim de cada atividade, conforme apêndices A e B.

Considerando que nem todos os estudantes matriculados na disciplina tinham familiaridade com atividades de modelagem matemática, o professor regente da disciplina solicitou que o professor pesquisador, antes do desenvolvimento da atividade fizesse uma breve explanação sobre aspectos teóricos da modelagem matemática e, principalmente, sobre as fases que compõem o desenvolvimento de atividades desta natureza.

Assim, atendendo ao pedido do professor, foi feita, com os estudantes do Grupo G-1 uma abordagem sobre a modelagem matemática na Educação Matemática e suas fases de desenvolvimento, conforme teorizado por

---

[15] Este recurso está disponível em: https://meet.google.com/qui

Almeida, Silva e Vertuan (2012) e já discutido no Capítulo 2 deste relatório de pesquisa.

Já na Universidade B foi desenvolvida uma atividade com vinte e seis estudantes, na disciplina de Etnomatemática e Tópicos de Educação para a Cidadania, cuja professora regente cedeu, ao pesquisador, seis aulas para o desenvolvimento da mesma. Embora vinte e seis alunos participassem da disciplina, consideraremos aqui as atividades desenvolvidas por dois grupos (G-2 e G-3), uma vez que estes participaram de todas as aulas destinadas à atividade e responderam, integralmente, todos os questionários propostos.

Nesta Universidade, a atividade se deu em dois diferentes momentos, conforme será apresentado com mais detalhes no Capítulo 4: Descrição das Atividades.

As aulas eram ministradas na modalidade presencial, assim, as interações dos grupos foram registradas pelo professor-pesquisador em diário de bordo e, durante o desenvolvimento da atividade, gravadores foram disponibilizados aos grupos para que pudessem registrar as interações dos estudantes. Além disso, após o desenvolvimento da atividade, cada um dos grupos entregou um relatório da atividade ao professor-pesquisador e, cada aluno, individualmente, respondeu a um questionário relacionado a diferentes aspectos da atividade, conforme consta no Apêndice C.

3.4 A ANÁLISE DE DADOS

O *corpus* de análise baseia-se nos registros escritos e gravados dos estudantes participantes da pesquisa. Visando compreender as ações destes estudantes e os registros escritos produzidos por eles no desenvolvimento das atividades, foi solicitado que evitassem apagar as anotações e os cálculos que, por algum motivo, julgassem incorretos.

Para organização do material e análise dos dados, foram feitas as transcrições das falas dos estudantes no decorrer do desenvolvimento das atividades.

Após, fez-se a seleção de excertos dos diálogos transcritos, que abordam etapas específicas da modelagem matemática e que trazem indicativos de construção de significado. Dos registros entregues pelos grupos (relatórios e respostas aos questionários) fez-se um recorte e síntese dos elementos principais e que tivessem relação com as discussões empreendidas em aula.

Com o material organizado, encaminhamo-nos para a intepretação e análise dos dados fundamentando-se, metodologicamente, nos pressupostos de Spink (2010; 2013). A autora considera que a interpretação da linguagem e das práticas discursivas dos sujeitos conduz à produção de sentidos de quem as analisa. Neste contexto, o sentido pode ser entendido como

> [...] uma construção social, um empreendimento coletivo, mais precisamente interativo, por meio do qual as pessoas - na dinâmica das relações sociais historicamente datadas e culturalmente localizadas - constroem os termos a partir dos quais compreendem e lidam com as situações e fenômenos a sua volta (SPINK, 2013, p. 22).

A interpretação é considerada intrínseca ao processo de pesquisa qualitativa, ou seja, desde o levantamento das informações o pesquisador está imerso em um processo de interpretação. Assim, as práticas discursivas podem ser tidas como a linguagem em ação e a análise de tais práticas demanda vários instrumentos capazes de capturar os discursos dos sujeitos por meio de textos de diferentes naturezas, entrevistas, questionários, narrativas, entre outros (SPINK, 2010).

Spink (2010) sugere o uso de três técnicas que podem clarificar o processo de interpretação do pesquisador: mapas de associação de ideias; árvores de associação de ideias; e linhas narrativas. Nesta pesquisa são utilizadas as árvores de associação de ideias.

A árvore da associação de ideias, segundo Spink (2010), trata-se de um recurso analítico que permite realizar inferências a partir da interpretação do pesquisador à luz dos pressupostos teóricos usados, ou seja, esta técnica nos permite visualizar o fluxo das associações de ideias por meio dos textos selecionados como dados da pesquisa.

Para identificação de aspectos relativos à construção de significado, apresentamos situações específicas ocorridas no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, denominadas aqui de “episódios”.

Serão usadas nas análises três grupos de alunos (G-1, G-2 e G-3), sendo que:

- G-1 desenvolveu duas atividades:
  - Pavimentação de um estacionamento;
  - Aplicação de pasta isotérmica em placa de processador;

- G-2 desenvolveu uma atividade:
  - Distribuição de riquezas no mundo

- G-3 desenvolveu uma atividade:
  - Distribuição de riquezas no mundo

A descrição detalhada dessas atividades é feita na sequência, no Capítulo 4.

CAPÍTULO 4 - AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

"*A construção de significado dos estudantes, em primeiro lugar, tem a ver com relações entre as atividades na sala de aula e suas experiências*" (OLE SKOVSMOSE).

Neste capítulo apresentamos as atividades de modelagem matemática desenvolvidas por três grupos de estudantes, conforme indicado no Quadro 4.1.

Quadro 4.1: Atividades de modelagem matemática analisadas

Temática das atividades de modelagem matemática	Grupos
Pavimentação de um estacionamento	G-1
Aplicação de pasta isotérmica em placa de processador	G-1
Distribuição de riquezas no mundo	G-2 e G-3

Fonte: autoria própria (2023).

4.1 ATIVIDADE PAVIMENTAÇÃO DE UM ESTACIONAMENTO DESENVOLVIDA POR G-1

A temática *Pavimentação de um Estacionamento* foi proposta pelo pesquisador para uma turma de oito estudantes, matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, na Universidade A. Considerando a participação dos estudantes no desenvolvimento da atividade, é apresentada a análise de um grupo, composto por três estudantes aqui referidos pelos códigos A-1, A-2 e A-3.

A proposta da temática se deu mediante informações que constam no Quadro 4.2, que foi compartilhado em tela no Google Meet. Tais informações são oriundas dos arquivos do Departamento de Projeto e Obras (DEPRO) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, vinculada à Diretoria de Planejamento e Administração, local de trabalho do pesquisador.

O professor da turma participou da aula junto com o pesquisador, orientando os estudantes quando solicitado.

Quadro 4.2 - Texto introdutório da atividade *Pavimentação de um estacionamento*

PAVIMENTAÇÃO DO ESTACIONAMENTO DA INCUTEC-CP

A Incubadora Tecnológica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio (INCUTEC-CP), recebeu, recentemente, um orçamento extra de investimento do Governo Federal para que fosse utilizado em obras e reformas em geral. Analisando as necessidades do setor, a equipe Diretiva decidiu por utilizar o recurso recebido para a pavimentação da área utilizada como estacionamento pelo setor, conforme apresentado na Figura 1.

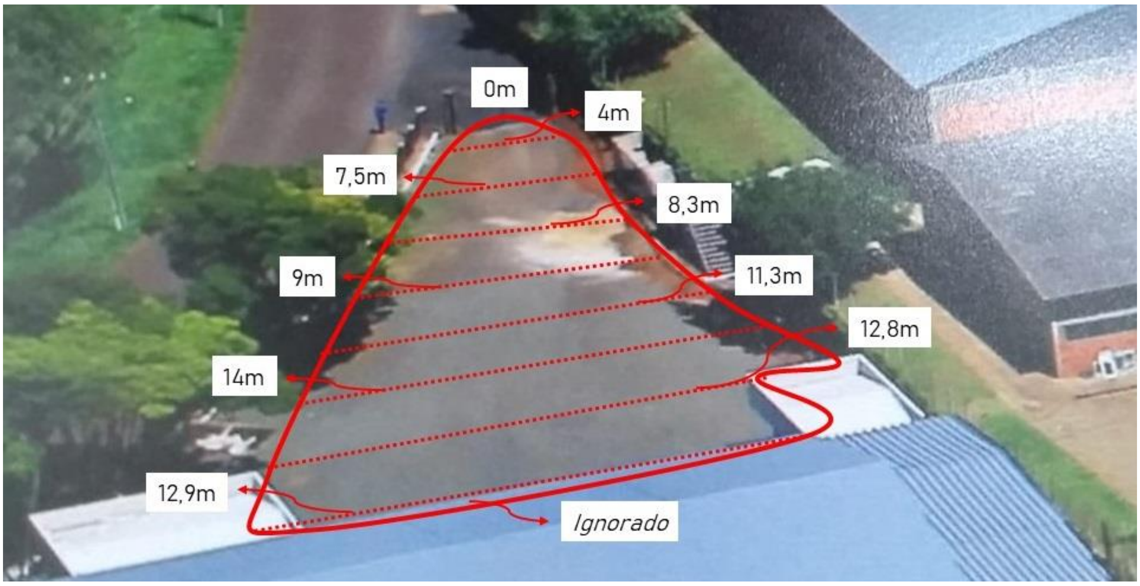
Figura 1: Vista superior do estacionamento da INCUTEC-CP
Fonte: Autoria própria (2021)

Fonte: autoria própria (2023).

Conforme consta no texto introdutório, a temática surge de um interesse institucional da UTFPR que recebeu um orçamento extra de investimento do Governo Federal para que fosse utilizado em obras e reformas em geral e, dadas as demandas das empresas e usuários da Incubadora Tecnológica, a equipe diretiva optou por pavimentar a área de estacionamento deste setor.

Assim, para além da Figura 1, constante no Quadro 4.2, foi disponibilizado para os estudantes também, uma segunda figura constando a mesma imagem, mas com marcações de distâncias realizadas pelo Departamento de Projetos de Obras da Instituição para composição do processo licitatório para pavimentação da área. Esta segunda imagem é reproduzida na Figura 4.1.

Figura 4.1: Vista superior do estacionamento da INCUTEC-CP com marcações



Fonte: Arquivos do DEPRO.

A partir da análise dessas informações, começou-se uma discussão sobre qual seria o problema a ser investigado pelos grupos e, após as considerações de alguns participantes, decidiu-se que os desenvolvimentos versariam sobre o seguinte problema: *Determinar um modelo que represente os custos gerados para a pavimentação da área utilizada como estacionamento da INCUTEC-CP.*

Nesta primeira atividade, as hipóteses a serem consideradas pelo grupo também foram construídas de forma coletiva, sendo elas:

- H_1: A região considerada está planificada.
- H_2: A região considerada é irregular.
- H_3: Não serão pavimentadas as regiões que ficam sob as árvores.

Para além das hipóteses, o grupo também considerou a necessidade de sintetizar alguns dados importantes, para além das medições constantes na Figura 4.1. Os dados elencados e utilizados pelo grupo foram:

- D_1: Os custos com a mão de obra para limpeza e pavimentação são fixos e calculados por metro quadrado de área pavimentada;

- D_2: As dimensões da região estudada são as descritas na Figura 4.1;
- D_3: O espaçamento vertical entre as marcações da Figura 4.1 é de 5 metros.

A partir dessas hipóteses e dados é que se deu o desenvolvimento da referida atividade pelo grupo G-1 (formado pelos estudantes A1, A2 e A3).

A temática foi discutida com o grupo a partir da leitura e das informações da situação apresentadas no Quadro 4.2 e na Figura 4.1. Após ser definido o problema a ser resolvido, os estudantes do grupo G-1 começaram a discutir a melhor maneira para fazê-lo.

As discussões no grupo iniciaram com a identificação das informações que julgavam relevantes para responder o problema. Num primeiro momento, um dos alunos do grupo sugeriu que as informações relevantes eram: o formato do terreno e as medidas disponibilizadas previamente, conforme indica o diálogo:

> PP (professor-pesquisador): Vocês podem começar a resolver o problema?
> A1: Olha, nós queremos pavimentar e limpar uma região. Logo, precisamos calcular a área e, pra isso, o que precisamos é saber o formato da região e as medidas, e isso nós temos.
> [...]
> A2: É, mas a gente não pode simplesmente calcular, porque a região é irregular, e as fórmulas que temos não dão pra isso.
> P (professor regente): Não conseguem pensar em uma aplicabilidade do cálculo pra isso?
> A1: Hum, verdade... Integral é pra isso, né?
>
> Transcrição das aulas

Neste momento, o grupo procura entender a situação, familiarizar-se com os aspectos relevantes e identificar mecanismos matemáticos que possibilitassem resolver o problema inicialmente proposto.

Após pedirem autorização ao professor, o grupo começou a pesquisar maneiras de, com integrais de funções, calcularem a área de determinada região.

> A3: Veja, se a gente conseguir colocar essa imagem num software, conseguimos desenhar essas funções e, depois fica simples calcular a área.
> A1: Podemos usar o Geogebra.

> A3: Se bem que, pensando bem, nós já temos os pontos, pois está na figura [referindo-se às medidas da Figura 4.1], podemos só determinar o polinômio seguindo aquela regra que vimos na aula passada [referindo-se à Regra de 1/3 de Simpson], não precisa colocar no Geogebra.
>
> Transcrição das aulas

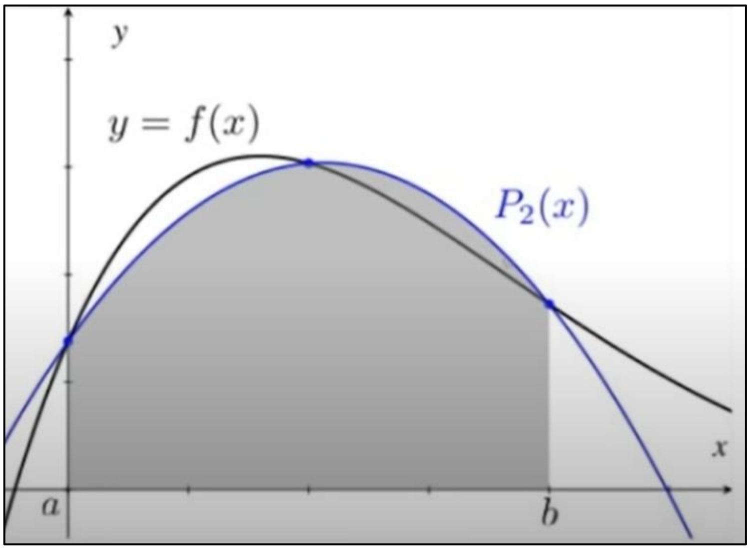
Neste momento, vale ressaltar que a disciplina em que se deu o desenvolvimento da referida atividade é a de “Cálculo Diferencial e Integral II”, no entanto, considerando que esta disciplina faz parte do núcleo comum de disciplinas dos cursos da Universidade em que aconteceu esta coleta, o Departamento Acadêmico de Matemática a dividiu em dois módulos, sendo: Cálculo Diferencial II e Cálculo Integral II, tendo os estudantes que cursarem estes módulos em semestres distintos. Sendo assim, no módulo do Cálculo Integral II, que estava sendo cursado pelos estudantes do grupo G-1, alguns conteúdos relativos à Cálculo Numérico já estavam sendo trabalhados com a turma, como é o caso da “Regra de 1/3 de Simpson[16]”, escolhida para o grupo para resolução desta atividade.

> A3: [...] nós já temos os pontos, pois está na figura [referindo-se às medidas da Figura 4.1], podemos só determinar esta função que descreve a região seguindo algumas daquelas regras que vimos nas aulas passadas [referindo-se à Regra do Trapézio e à Regra de 1/3 de Simpson], aí não precisa colocar no Geogebra.
> A2: Veja, esta regra [referindo-se à Regra do Trapézio] “objetiva aproximar a função por um polinômio de primeiro grau, ou seja, uma reta” [neste momento, A2 lê algumas de suas anotações das aulas anteriores da disciplina]. Já a outra [referindo-se à Regra de 1/3 de Simpson] “baseia-se em aproximar a integral definida pela área sob arcos de parábola que interpolam a função” [neste momento A2 continua lendo suas anotações anteriores].
>
> A3: E tem outra coisa: “a regra de 1/3 de Simpson utiliza uma parábola para aproximar a função no intervalo de integração e assim tem como vantagem um erro menor do que a integral calculada pela regra do trapézio” [aqui, A3 também lê algumas de suas anotações anteriores], ou seja, é melhor a gente usar essa segunda regra mesmo [referindo a Regra de 1/3 de Simpson], já que o erro é menor.
> A2: Sim, e seria legal utilizarmos coisas que aprendemos na aula né? Parece fazer mais sentido.

[16] A “Regra 1/3 de Simpson” é um método para a integração numérica. Este método utiliza uma parábola para aproximar a função no intervalo de integração (ASANO; COLLI, 2009).

Além do diálogo, a escolha desta maneira de resolução do grupo fica clara quando, no relatório dos mesmos, eles apresentam a representação gráfica ilustrada na Figura 4.2 (representação esta utilizada para deduzir a Regra de 1/3 de Simpson).

Figura 4.2: Parte da resolução da atividade *Pavimentação de um estacionamento* de G-1



Fonte: relatório do grupo G-1.

A Figura 4.2 descreve como funciona a Regra de 1/3 de Simpson, no caso, $f(x)$ é chamado de integrando, a é o limite inferior de integração, b é o limite superior de integração e, como mostra a figura acima, o integrando $f(x)$ é aproximado por um polinômio de segunda ordem, o interpolador quadrático é $P_2(x)$.

No caso desta regra, tem-se a aproximação conforme segue:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\} \qquad (1)$$

Substituindo $\frac{(b-a)}{2}$ por h, tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\} \qquad (2)$$

Como vê-se, existe um fator de $\frac{1}{3}$ na expressão (2), o que dá o nome à regra de “Regra 1/3 de Simpson”. Sobre essa regra, Asano e Colli (2009, p. 42) esclarecem que:

> Se uma função oscilar excessivamente e não tiver derivadas em determinados pontos, a regra acima pode não produzir resultados precisos. Uma maneira comum de se lidar com isso é usar a abordagem composta da regra de Simpson. Para fazer isso, divida $[a, b]$ em subintervalos menores, aplicando a regra de Simpson a cada subintervalo. Em seguida, some os resultados de cada cálculo para produzir uma aproximação da integral inteira.

No caso dessa atividade, G1 decidiu utilizar os subintervalos citados por Asano e Colli (2009), uma vez que a imagem que o grupo tinha do espaço a ser pavimentado já havia sido subdividido pela equipe que fez as medições, conforme apontado na Figura 4.1.

Assim, considerando o disposto pela Regra de 1/3 de Simpson, para calcular a integral de a até b de $P_2(x)$, que é a aproximação a ser utilizada pelo grupo para representar o estacionamento a ser pavimentado, é necessário definir a equação deste polinômio $P_2(x)$ e, para isso, fez-se necessário tomar 3 pontos, no caso desta situação, as dimensões do estacionamento.

Os pontos selecionados pelo grupo foram $(4, 7.5), (8.3, 9)\ e\ (12.8, 12.9)$. No caso do estacionamento, esses pontos referem-se às medidas obtidas pelos mesmos a partir da Figura 4.1

Assim, tomando:

$$(x_0, y_0); (x_1, y_1); (x_2, y_2)$$

$$\int_a^b P_2(x)\, dx$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \left(y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \right) dx$$

Fazendo uma substituição de variável:

$$u = \frac{x - a}{h}$$

$$x = hu + a$$

$$dx = hdu$$

Agora, fazendo uso da Regra de 1/3 de Simpson para o cálculo da região solicitada, tem-se:

$$I_{1/3} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Neste caso, o valor de h é tido com base no dado D_3 do grupo que o espaçamento vertical entre as marcações da Figura 4.1 é de 5 metros. Assim,

$$A = \frac{5}{3}\,.(0 + 4.4 + 2.7{,}5 + 4.8{,}3 + 2.9 + 4.11{,}3 + 2.14 + 4.12{,}98 + 12{,}9)$$

$$A = 367{,}03m^2$$

Tanto a limpeza, quanto a pavimentação são serviços cobrados por m^2, logo, o custo para pavimentação desta área de estacionamento será de:

$$C(r_1, r_2) = 367{,}03.(r_1 + r_2)$$

em que r_1 e r_2 são os valores para limpeza e pavimentação por m², respectivamente.

Obtida a resposta para a situação, começou no grupo uma discussão sobre as possíveis maneiras para validar o resultado obtido.

> A3: Com certeza existe uma planta desta parte no departamento de engenharia da Universidade.
> A1: Sim, podemos pedir essa planta e ver os valores que foram calculados lá.
> A2: Além disso, esse processo de pavimentação já está em andamento. Com certeza alguém já fez essa medição de área,

> podemos tentar conseguir essas medições feitas e compararmos com a nossa.
>
> Transcrição das aulas

Assim, para validar a resposta obtida pelo grupo, os mesmos recorreram ao Departamento de Projetos e Obras da Instituição que possui mapeadas todas as áreas do Campus. Ao contatar o engenheiro responsável pela área, o grupo soube que a área exata que seria pavimentada ainda não havia sido calculada pela Universidade, no entanto, era possível ter acesso ao valor da área daquela região completa (inclusive com a área construída).

No caso, os valores informados pelo DEPRO foram de $832{,}9\ m^2$ de área total, sendo $459{,}8m^2$ de área já construída. A partir disto, excetuando-se a área construída da área total informada, sobraria uma região aproximada de $373{,}1\ m^2$ para o estacionamento e, levando em conta as áreas com árvores a serem excluídas, o grupo considerou o resultado obtido, de $367{,}03\ m^2$, válido para a situação.

4.2 ATIVIDADE APLICAÇÃO DE PASTA ISOTÉRMICA EM PLACA DE PROCESSADOR

A temática *Aplicação de Pasta Isotérmica em Placa de Processador* foi proposta pelo grupo G-1, composto pelos estudantes A1, A2, e A3, da Universidade A, todos do curso de Licenciatura em Matemática, devido a uma dificuldade relacionada à preparação das placas dos processadores que estes integrantes possuem em seus trabalhos no laboratório de metrologia[17] da universidade em que estudam.

Os três integrantes do grupo são alunos de Iniciação Científica e atuam no laboratório de metrologia com diferentes atividades e, uma delas, é a preparação do laboratório para as aulas práticas dos professores desta disciplina que abrange os cursos de Engenharia da instituição.

[17] As atividades do laboratório de metrologia estão relacionadas com projetos de pesquisa que envolvem medições geométricas e dimensionais para diferentes tipos de materiais, dando suporte principalmente para pesquisas em “Análise Estrutural e Dinâmica” e “Materiais e Processos de Fabricação”.

Todos os cursos da Universidade têm suas demandas atendidas pelos estagiários deste laboratório e uma dessas demandas é a preparação das placas processadoras para os computadores com pasta isotérmica. Sem a pasta isotérmica, o trabalho do cooler e do dissipador é atrapalhado e o processador se aqueceria até não suportar mais. Esse superaquecimento poderia levar até a queima de alguns componentes do computador.

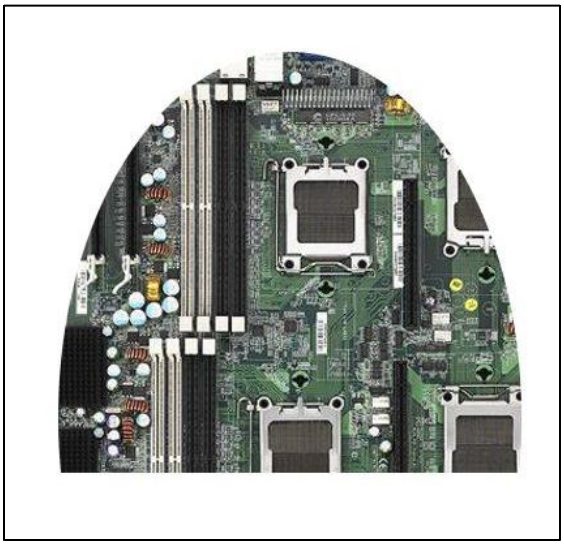
Neste contexto, o problema diz respeito à quantidade mínima de pasta isotérmica que deve ser aplicada em cada processador, pois, apesar de os alunos disporem de seringas de precisão, na aplicação, os alunos não conseguem determinar a quantidade que deve ser aplicada, havendo assim, desperdício de pasta, o que onera o laboratório, já que o mililitro de pasta isotérmica pode ultrapassar R$ 100,00. A aplicação da pasta é feita conforme demonstrado na Figura 4.3.

Figura 4.3: Aplicação de pasta isotérmica do laboratório de metrologia

Fonte: relatório do grupo G-1.

A principal dificuldade do grupo, conforme relatório, ocorre na determinação da quantidade de pasta de placas de formato oval, conforme exemplificado na Figura 4.4.

Figura 4.4: Exemplo de processador utilizado no laboratório



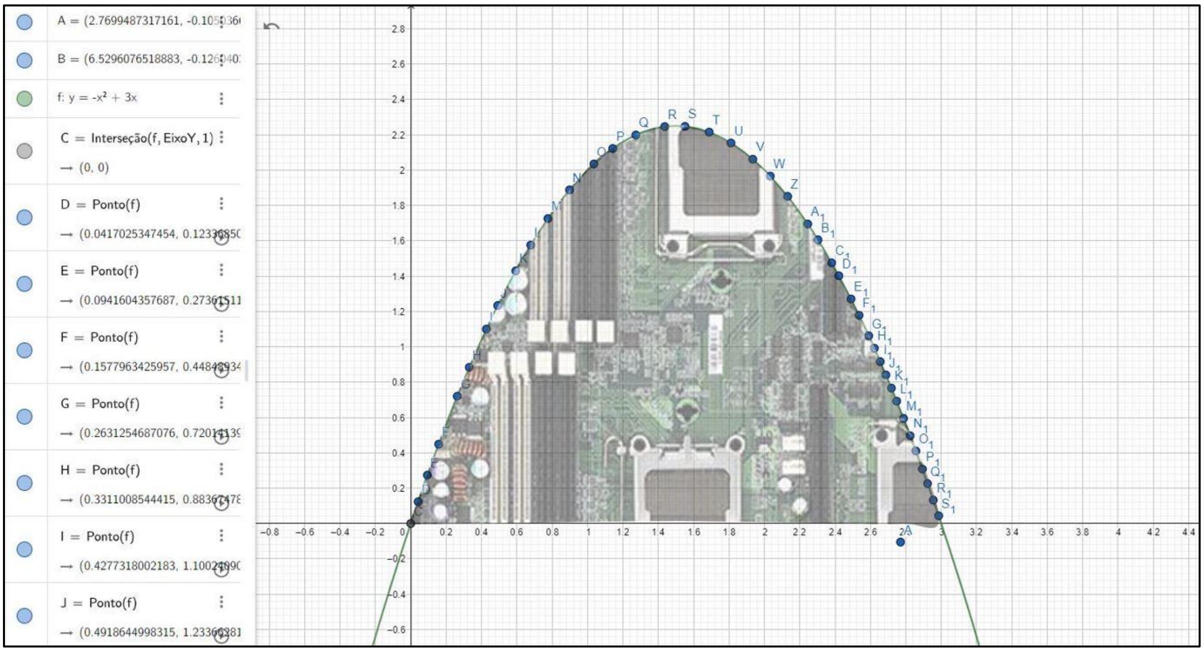
Fonte: relatório do grupo G-1.

Assim, o problema definido pelo grupo foi: d*eterminar um modelo que represente a quantidade mínima de pasta isotérmica a ser utilizada na placa para o processador*.

Inicialmente, houve consenso no grupo de que a quantidade de pasta a ser utilizada depende, diretamente, da área em que a pasta será aplicada. Sendo assim, considerando o formato da placa, o grupo utilizou um *software* de geometria dinâmica, Geogebra[18], a fim de descrever uma função matemática que representasse o formato da placa, conforme ilustrado na Figura 4.5.

[18] GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Tem livre distribuição, nos termos da *General Public License*, e é escrito em linguagem Java, o que possibilita sua utilização em várias plataformas.

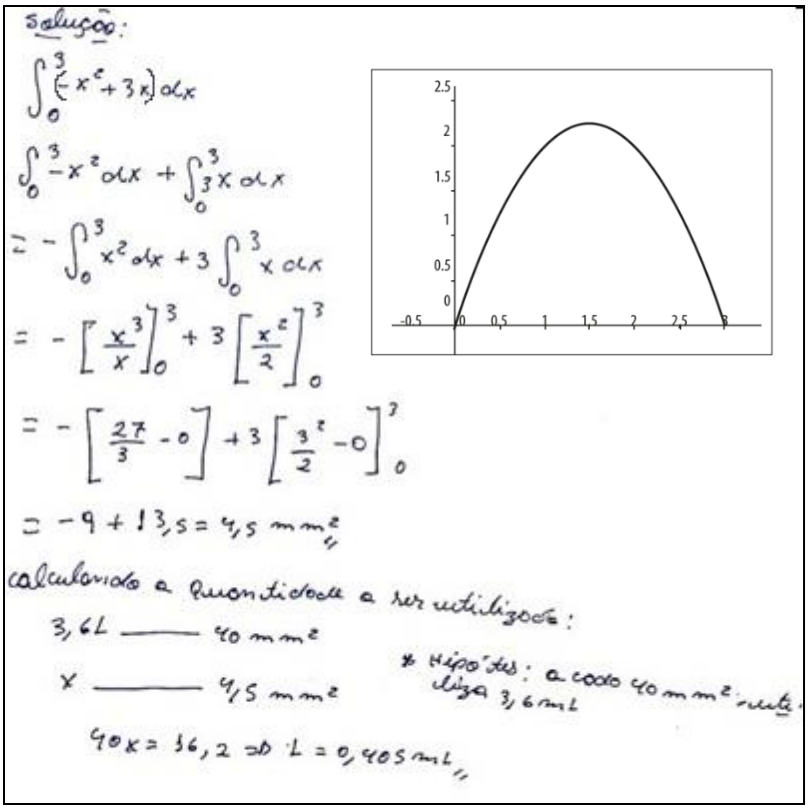
Figura 4.5: Plotagem da imagem da placa no Geogebra



Fonte: relatório do grupo G-1.

Ao fazer a plotagem da imagem no *software* Geogebra e determinar pontos para descrever a placa, o grupo, usando o *software*, encontrou que a função $f(x) = -x^2 + 3x$ representa o contorno da placa, seguindo-se para a resolução do problema, conforme descrito no Quadro 4.3.

Quadro 4.3 - Descrição da resolução da atividade proposta por G-1



Solução:

$$\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx$$

$$\int_0^3 -x^2\,dx + \int_0^3 3x\,dx$$

$$= -\int_0^3 x^2\,dx + 3\int_0^3 x\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{x}\right]_0^3 + 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= -\left[\frac{27}{3} - 0\right] + 3\left[\frac{3^2}{2} - 0\right]_0^3$$

$$= -9 + 13{,}5 = 4{,}5\ mm^2$$

calculando a quantidade a ser utilizada:

3,6L —— 40 mm²

x —— 4,5 mm²

* Hipótese: a cada 40 mm² utiliza 3,6 mL

40x = 16,2 ⇒ L = 0,405 mL

Fonte: relatório do grupo G-1.

O grupo determinou que, para a placa de processador escolhida serão necessários 0,405ml de pasta isotérmica. Vale destacar que, para chegar nesta conclusão, o grupo assumiu como hipótese que para cada 40mm² de material, são necessários 3,6ml de pasta e, tal hipótese, advém de orientações dadas pelos próprios fabricantes de pasta isotérmica.

Para validação da resposta os integrantes do grupo aplicaram a quantidade de pasta encontrada. Assim, com o uso de uma seringa de precisão, aplicaram 0,4ml de pasta isotérmica na placa do processador oval (conforme representado na Figura 4.8) e as conclusões são apresentadas no diálogo transcrito abaixo.

> A3: Vejam, primeiro que a gente não consegue pegar exatamente 0,405ml porque a escala aqui não permite [referindo-se à graduação da seringa disponível, no caso de 0,05 ml].
> A2: Então, a gente aplica 0,4ml ou 0,45ml.

> A3: Bem, como o intuito é não desperdiçar nada, vou usar 0,4ml e ver como fica a cobertura.
> [...]
> Neste momento o grupo aplica a 0,4ml da pasta isotérmica no processador escolhido.
> [...]
> A1: Ficou ótimo!
> A2: Sim, só este cantinho que parece não estar totalmente coberto, mas creio que seja por conta da nossa aproximação.
>
> Transcrição das aulas

Sendo assim, o grupo considerou válido o resultado obtido na atividade.

4.3 ATIVIDADE DISTRIBUIÇÃO DE RIQUEZAS NO MUNDO

A atividade relativa à distribuição de riquezas no mundo foi desenvolvida com uma turma de 26 estudantes, do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade B, na disciplina de Etnomatemática e Tópicos de Educação para a Cidadania. O desenvolvimento da atividade ocorreu em seis horas-aula, no primeiro semestre do ano de 2022.

A introdução da atividade de modelagem matemática na disciplina se deu com a finalidade de possibilitar discussões relativas à Educação Matemática Crítica, enquadrando-se, assim, em uma perspectiva socio-crítica da modelagem matemática que, conforme definem Kaiser e Sriraman (2006), possui objetivos pedagógicos tal como a compreensão crítica do mundo.

Inicialmente, a turma foi dividida em cinco grupos, no entanto, no presente relatório de pesquisa olhamos para os dados coletados com dois dos grupos, a saber G-2 (composto pelos alunos A4, A5, A6, A7, A8 e A9) e G-3 (composto pelos alunos A10, A11, A12, A13, A14 e A15). A escolha dos grupos G-2 e G-3 se deu em função da participação de todos os integrantes dos grupos nas discussões registradas nas gravações realizadas e na interação com a professora da disciplina no decorrer das aulas.

Para viabilizar uma discussão na sala de aula em sintonia com aspectos apontados pela Educação Matemática Crítica, foi proposta uma discussão sobre a distribuição de riquezas no mundo, considerando que a temática se apresentou em reportagens de cunho social e político, e com foco, particularmente na pandemia do COVID-19 que abalou o mundo nos dois últimos anos.

É importante destacar que a presente atividade se desenvolveu em duas etapas principais: na primeira etapa os alunos foram levados a refletir matematicamente a questão da distribuição de riquezas no mundo, construindo um modelo que representasse o fenômeno desta distribuição.

Na sequência, com a finalidade de promover uma reflexão crítica e social sobre o tema distribuição de riquezas, aos alunos foi proposto o desafio: *Suponha que você, enquanto aluno do curso de Licenciatura em Matemática, foi convidado a escrever uma carta a ser publicada em um jornal da comunidade acadêmica local falando sobre a distribuição desigual das riquezas. Faça uma abordagem matemática e apresente aqui a sua carta com a fundamentação necessária.*

As informações, juntamente com o desafio, foram entregues aos alunos que formaram grupos para discutir o tema e escrever a carta a partir de uma abordagem matemática. Cada grupo elaborou um relatório do que realizou na atividade e, após a realização da atividade, apresentou um pequeno texto fazendo uma análise crítica da situação da distribuição da riqueza e descrevendo sobre o papel da matemática no estudo dessa situação.

É importante destacar ainda que, para além da percepção geral dos grupos sobre a situação investigada na atividade, indo ao encontro daquilo que destacam Skovsmose (2005, p. 93) de que a construção de significado "é individualizada" e Bishop (2005) de que cada pessoa, individualmente, constrói um significado único com relação a um grupo em que esteja inserido, foi solicitado aos estudantes que, com a entrega do relatório do grupo, também fosse respondido, individualmente, um instrumento, relacionado à situação investigada.

Para incitar o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, foram apresentados aos alunos informações sobre a distribuição de riquezas conforme indica o texto introdutório relacionado à temática, apresentado no Quadro 4.4.

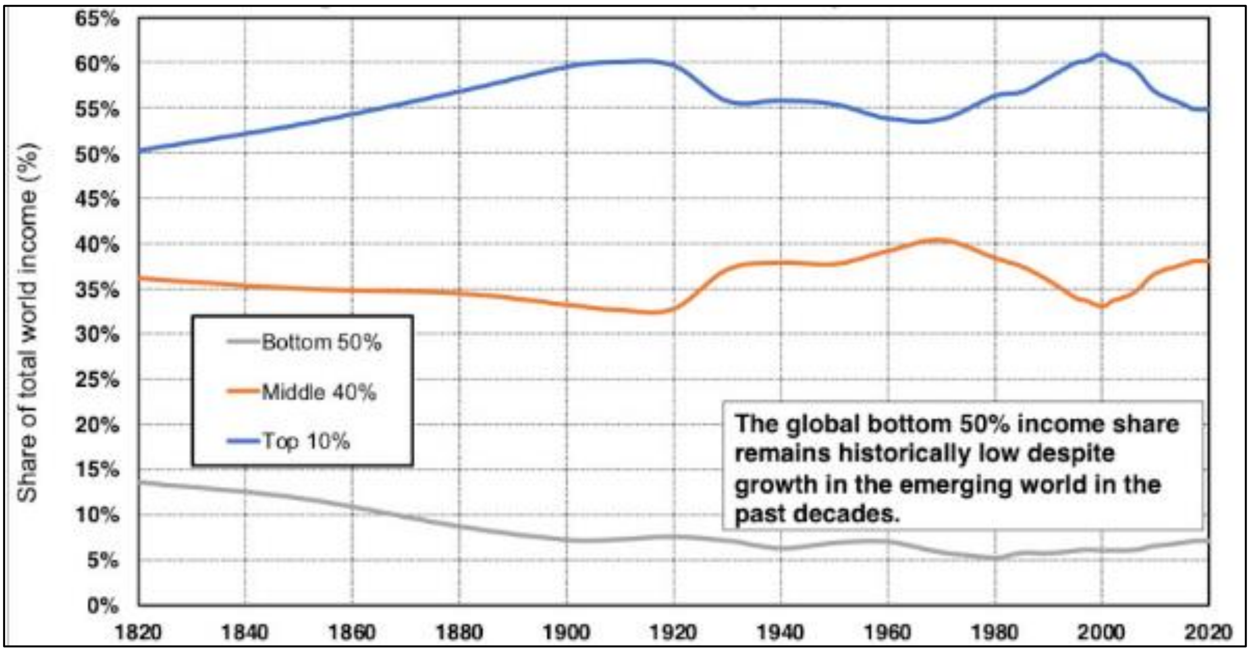
Quadro 4.4: Texto introdutório da atividade *Distribuição de riquezas no mundo*

CONCENTRAÇÃO EXTREMA DE CAPITAL: **DESIGUALDADE DE RIQUEZA NO MUNDO** As desigualdades de riqueza global são muito pronunciadas em todo e qualquer relatório econômico publicado nos diferentes continentes do planeta. Conforme aponta o "Relatório Mundial sobre as Desigualdades para 2022", produzido pela equipe de Thomas Piketty, na Escola de Economia de Paris, nos três primeiros meses de 2020, a riqueza da população mundial como um todo tinha caído 4,4% devido à pandemia. Porém, com os estímulos governamentais, no fim do ano, a riqueza global aumentou em relação a 2019, no entanto, uma coisa não mudou: ela segue altamente concentrada, sendo que 1% da população mundial detém quase metade de toda a riqueza do globo e a riqueza somada de mais da metade dos mais pobres dá pouco mais de 1% do total. O Relatório Mundial sobre as Desigualdades para 2022 indica ainda que 7,4% foi o crescimento da riqueza total do mundo em 2020, graças aos estímulos governamentais para enfrentar a pandemia e que ainda houve uma queda de 10,1% da riqueza na América Latina no ano (o pior desempenho regional no mundo). Além disso, o relatório indica um crescimento esperado de 39% para a riqueza mundial até 2025. O referido relatório mostrou também que a parcela da renda global que vai para os 10% mais rico em nível mundial flutuou em torno de 50-60% entre 1820 e 2020 (50% em 1820, 60% em 1920, 56% em 1980, 61% em 2000, 55% em 2020), enquanto a parcela que vai para os 50% mais pobre geralmente tem sido em torno ou abaixo de 10% (14% em 1820, 7% em 1920, 5% em 1980, 6% em 2000, 7% em 2020), para a classe média, as parcelas vão oscilam entre 33% e 37 % (36% em 1820, 33% em 1920, 38% em 1980, 33% em 2000 e 37% em 2020).

Fonte: autoria própria (2023).

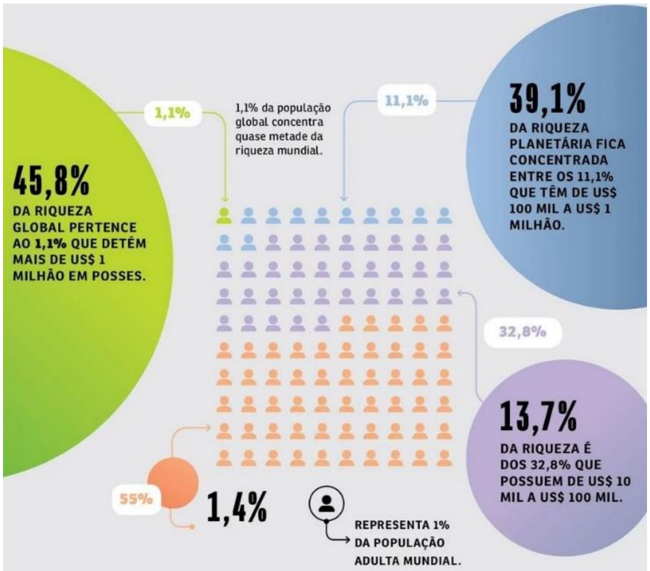
Na sequência do texto introdutório, foi disponibilizado aos estudantes um gráfico com os percentuais de distribuição de riqueza do mundo entre os anos de 1820 e 1920, conforme Figura 4.6 e também uma estratificação da distribuição de riquezas no mundo por classe social, conforme Figura 4.7.

Figura 4.6: Desigualdade de renda global entre os anos de 1820 e 2020



Fonte: wir2022.wid.wolrd/methodology (2022).

Figura 4.7: Assimetria na distribuição da riqueza mundial



Fonte: Revista VC S/A (2022)

Por se tratar do primeiro contato de vários estudantes da disciplina com atividades de modelagem matemática, optou-se por realizar algumas discussões iniciais, sobre o problema, as simplificações e as hipóteses de forma coletiva.

Assim, de início, realizou-se uma análise interpretativa sobre os dados de distribuição de riquezas no mundo constantes na Figura 4.6, conforme apresentado no Quadro 4.5.

Quadro 4.5: Análise interpretativa dos dados de distribuição de riquezas no mundo de 1820 a 2020

Até 1920 houve pouca variabilidade no comportamento da distribuição de riquezas entre 1820 e 1920. Variando: Classe alta: entre 50% e 60% Classe média: entre 36% e 33% Classe baixa: entre 14% e 7% A partir de 1920 começa a haver movimentos nesta distribuição, sendo que, quando a concentração da classe alta diminui, a classe média aumenta. E a classe baixa tem pouca variabilidade. Em 1960 acontece a menor distância entre a classe alta e a classe média, e a classe baixa aumentou discretamente. Em 2020 a distância entre a classe alta e a classe média volta a subir e a classe baixa tem um aumento mais acelerado.

Fonte: autoria própria (2023).

Desta análise interpretativa, coletivamente, definiu-se o problema a ser investigado na atividade: *Estimar a distribuição de riquezas no mundo para os próximos 20 anos, considerando os percentuais anteriores*.

Para tal, os estudantes sinalizaram a necessidade de efetuar uma simplificação (S_1) relativa aos dados a serem considerados para se estimar a distribuição de riquezas para os próximos 20 anos, assim como definir algumas hipóteses para tal (H_1, H_2 e H_3), conforme abaixo:

- S_1: Para as estimativas futuras serão consideradas as distribuições a partir de 2000.

- H_1: Parece haver uma regularidade no comportamento da distribuição da classe média e classe alta que se repete a cada período a partir de 1920.

- H_2: $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $f(x)$ o percentual de distribuição de riquezas da classe alta no ano x.

- H_3: $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$, sendo $g(x)$ o percentual de distribuição de riquezas da classe média no ano x.

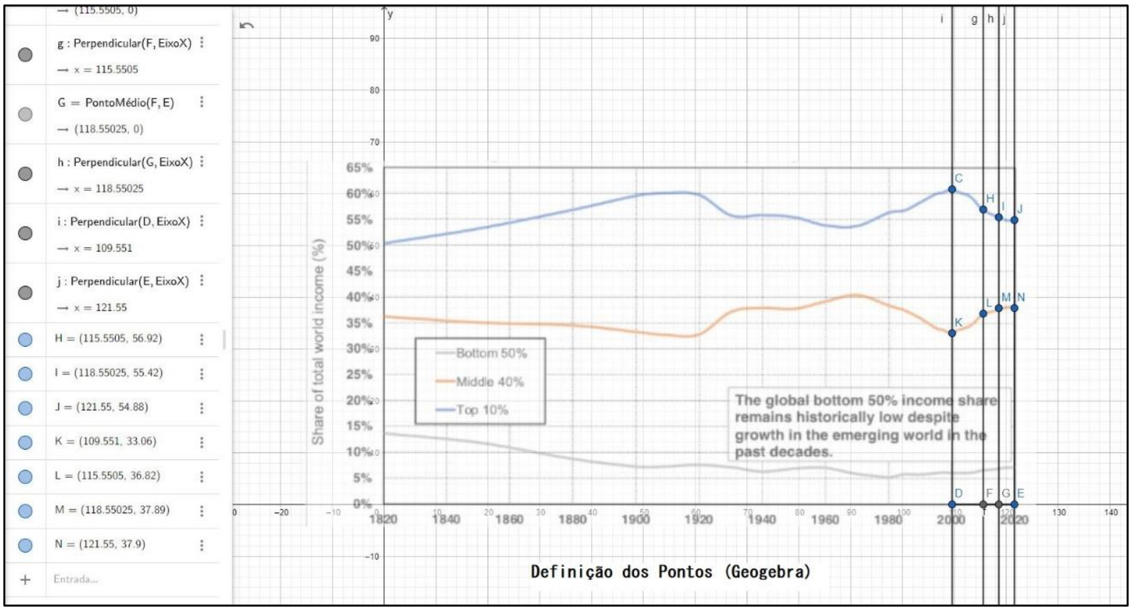
É com base no texto introdutório (constante no Quadro 4.4), nas informações quantitativas apresentadas nas Figuras 4.6 e 4.7 e nas discussões coletivas acima descritas que se fundamentou o desenvolvimento das atividades de G-2 e G-3, conforme descrito na sequência.

4.3.1 Parte 1 da atividade *Distribuição de riquezas no mundo*: construção dos modelos matemáticos por G-2 e G-3

O grupo G-2, composto pelos estudantes A4, A5, A6, A7, A8 e A9, partindo da hipótese de que a distribuição de riquezas tanto da classe alta quanto da classe média poderá ser descrita, respectivamente, pelas funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $j(x) = a'x^2 + b'x + c'$, sendo $f(x)$ o percentual de distribuição de riqueza da classe alta no ano x e $j(x)$ o percentual de distribuição de riqueza da classe média no ano x, iniciaram os procedimentos para definição dos parâmetros das referidas funções.

Assim, foi feita, pelos alunos, a plotagem do gráfico da Figura 4.6 no *software* Geogebra para determinar pontos que possibilitassem o ajuste das respectivas funções, conforme ilustrado na Figura 4.8.

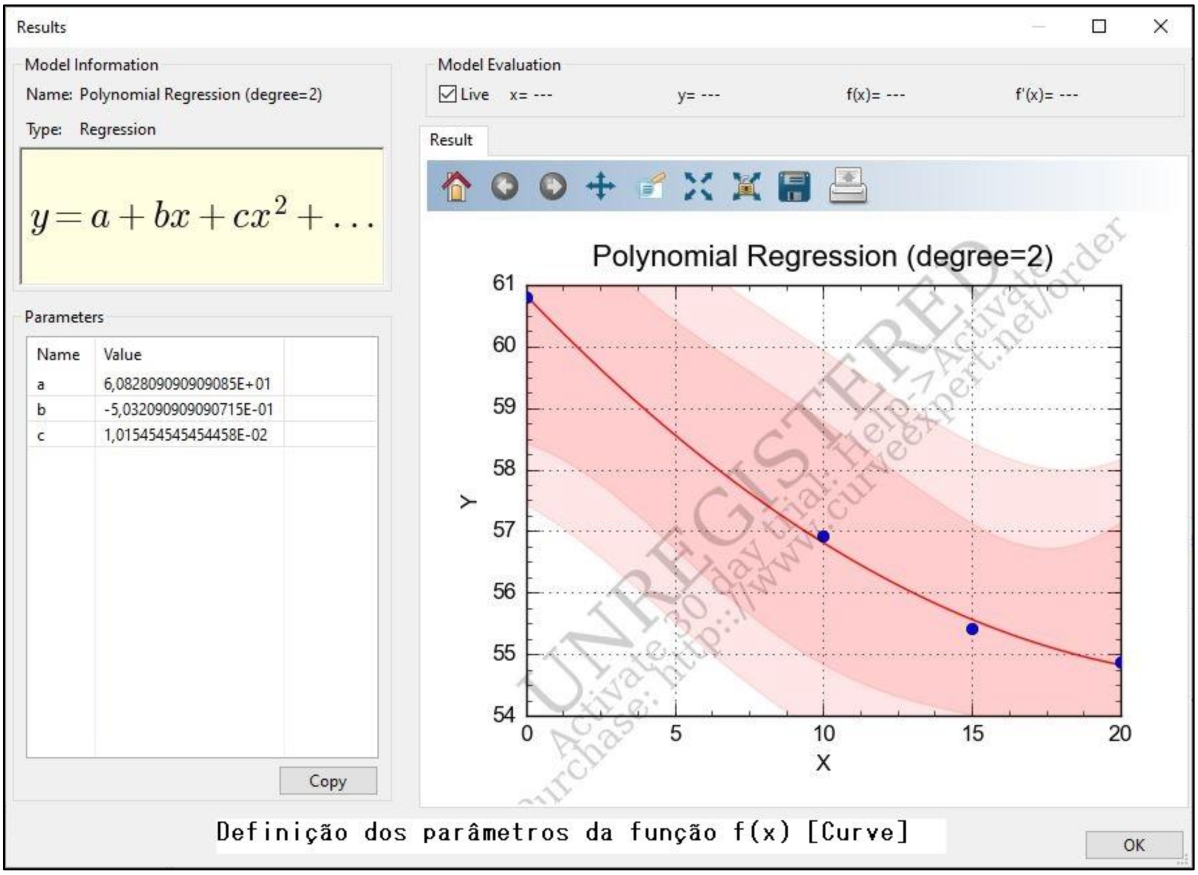
Figura 4.8: Projeção do gráfico no *software* Geogebra para determinação dos pontos para ajuste das funções $f(x)$ e $j(x)$



Fonte: relatório do grupo G-2.

Determinados quatro pontos para cada uma das funções a serem ajustadas, os estudantes fizeram uso do *software* Curve Expert para determinar os parâmetros desejados conforme tela apresentada na Figura 4.9.

Figura 4.9: Ajuste da função $f(x)$ no *software* Curve Expert



Fonte: relatório do grupo G-2.

Assim, os modelos matemáticos construídos pelo grupo G-2 para representar a distribuição de riqueza no mundo a partir do ano 2000 para as classes alta e média foram, respectivamente:

$$f(x) = 0{,}01(x - 2000)^2 - 0{,}503(x - 2000) + 60{,}83 \ \ para\ x \geq 2000$$

$$j(x) = -0{,}01(x - 2000)^2 + 0{,}53x + 33{,}04 \ \ para\ x \geq 2000$$

Após fazer a validação dos referidos modelos, conforme consta na Figura 4.10 e considerá-los adequados à situação investigada os grupos, a fim de responder o problema proposto (*estimar a distribuição de riquezas no mundo para os próximos 20 anos, considerando os percentuais anteriores*), o grupo G-2 determinou os seguintes percentuais de distribuição de riquezas em 2040: 56,71% da riqueza para a classe alta; 38,24% da riqueza para a classe média; e 5,05% da riqueza para a classe baixa.

Figura 4.10: Validação dos modelos $f(x)$ e $j(x)$

	A	B	C	D	E
1	**Classe Alta**				
2	**Ano**	**Variável**	**% Dado**	**% Modelado**	**Diferença**
3	2000	0	60,81	60,83	-0,02
4	2010	10	56,92	56,80	0,12
5	2015	15	55,42	55,54	-0,11
6	2020	20	54,88	54,77	0,11
7	2040	40		56,71	
8					
9	**Classe Média**				
10	**Ano**	**Variável**	**% Dado**	**% Modelado**	**Diferença**
11	2000	0	33,06	33,04	0,02
12	2010	10	36,82	37,34	-0,52
13	2015	15	37,89	38,74	-0,85
14	2020	20	37,9	39,64	-1,74
15	2040	40		38,24	

Validação dos modelos f(x) e j(x) [Excel]

Fonte: relatório do grupo G-2.

Após isso, conforme citado, considerando o contexto em que a presente atividade foi desenvolvida com os estudantes, no caso, a disciplina de “Etnomatemática e Tópicos de Educação para a Cidadania”, para o relatório final a ser entregue pediu-se para que cada grupo analisasse criticamente a situação da distribuição da riqueza e que enunciasse, por escrito no relatório, o papel da matemática no estudo desta situação.

A síntese das respostas dos estudantes do grupo G-2 para estes dois questionamentos é apresentada no Quadro 4.6.

Quadro 4.6: Resposta do grupo G-2 sobre a análise crítica da situação da distribuição da riqueza e o papel da matemática no estudo da situação

Fazer uma análise crítica da situação da distribuição da riqueza	**Qual o papel da matemática no estudo dessa situação?**
É totalmente visível, ao analisarmos o gráfico, que a riqueza se concentra nas mãos de uma quantidade muito pequena da população há muito tempo. Mesmo quando há quedas na riqueza da classe alta, a classe baixa oscila muito pouco, de modo que, quem realmente recebe é a classe média, e vice-versa. Dessa forma, é nítido que a riqueza se concentra nas classes alta e média, onde se encontram poucas pessoas comparada à quantidade de pessoas que compõem a classe baixa. Essa distribuição não tende a melhorar, já que ao estimarmos em 2040 podemos ver apenas que as riquezas continuam variando significativamente apenas entre a classe média e alta, enquanto a classe baixa apenas tende a diminuir.	A Matemática nos traz a possibilidade de estudarmos e analisarmos situações a fim de inferir possíveis resultados futuros e com isso, podermos tomar devidas providências, realizando reflexões e tomando atitudes, agindo como indivíduos críticos sobre tais situações que nos circundam, de modo a cooperarmos e colaborarmos para uma vida melhor às pessoas do nosso país. A matemática permite a quantificação, a mensuração das desigualdades sofridas pela sociedade, possibilita fazermos comparações e analisar a proporção das pessoas e concentração de renda, podemos dessa forma comparar a realidade contribuindo para uma visão crítica da sociedade. Através da quantificação dos dados ao longo do tempo, podemos desenvolver séries com projeções econômicas que nos permite prever como as variáveis vão se comportar ao longo dos anos.

Fonte: relatório do grupo G-2.

É importante destacar que a primeira etapa da atividade desenvolvida pelo grupo G-3, composto pelos estudantes A10, A11, A12, A13, A14 e A15, deu-se de forma bastante semelhante ao do grupo G-2, considerando que as discussões sobre o problema (*estimar a distribuição de riquezas no mundo para os próximos 20 anos, considerando os percentuais anteriores*), a simplificação, as hipóteses e a análise interpretativa se deram de maneira coletiva com todos os grupos.

Portanto, assim como G-2, o grupo G-3 também determinou os seguintes modelos para a referida situação:

$$f(x) = 0{,}01(x - 2000)^2 - 0{,}503(x - 2000) + 60{,}83 \;\; para\; x \geq 2000$$

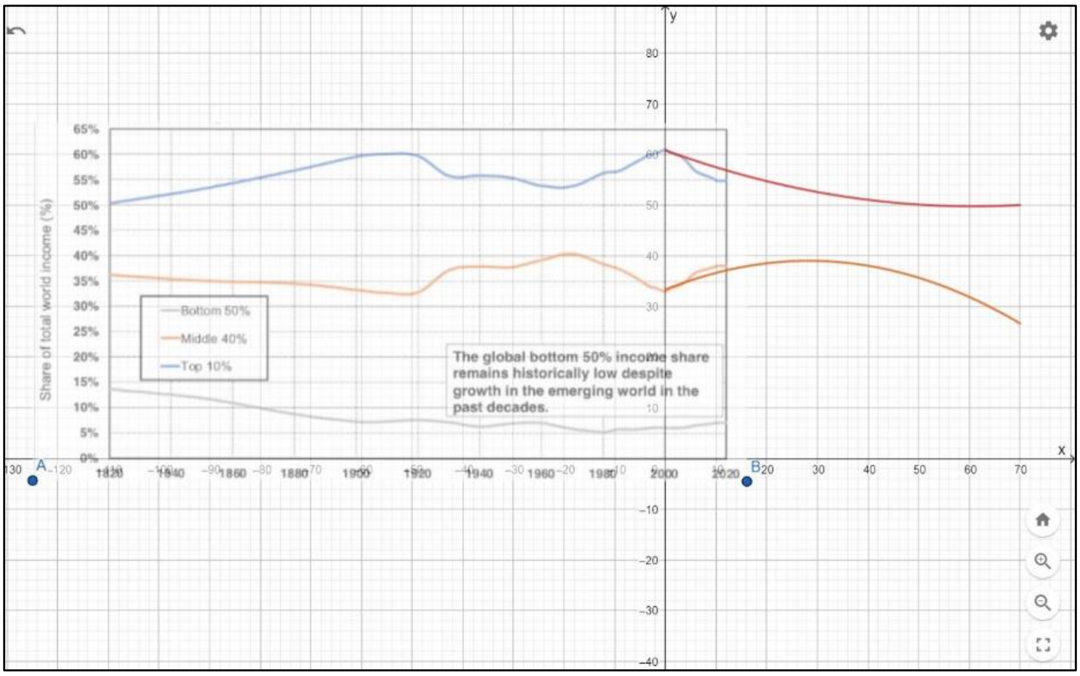
$$j(x) = -0{,}01(x - 2000)^2 + 0{,}53x + 33{,}04 \;\; para\; x \geq 2000$$

em que $f(x)$ é o percentual de distribuição de riqueza da classe alta no ano x e $j(x)$ o percentual de distribuição de riqueza da classe média no ano x.

Logo, no ano de 2040, os percentuais de distribuição de riquezas globais serão de 51%, 35% e 14% para as classes alta, média e baixa, respectivamente.

Para validar os seus modelos, o grupo G-4 utilizou o *software* Geogebra para analisarem se o comportamento das funções $f(x)$ e $j(x)$ encontradas eram coerentes com o fenômeno distribuição de riquezas no mundo para os próximos 20 anos. Este comportamento é representado na Figura 4.11.

Figura 4.11: Validação do comportamento dos modelos $f(x)$ e $j(x)$ no Geogebra



Fonte: relatório do grupo G-3.

Como o comportamento das distribuições anteriores mostrou, quando há esta redução da distância entre classe alta e classe média, há um crescimento no percentual de distribuição da classe baixa, o que também ocorrerá nos próximos 20 anos, havendo um crescimento de 7% (em 2020) para 14% (em 2040).

No entanto, apesar desta mudança nos percentuais de distribuição de riquezas no mundo, os modelos permitiram o grupo inferir que, nos próximos 20 anos, mais da metade da riqueza global (51%, especificamente), continuará concentrada em uma minoria (classe alta), não havendo, assim, impacto no que diz respeito à assimetria na distribuição de riqueza mundial.

Considerando válido o modelo e, consequentemente, as respostas obtidas, o grupo elaborou um relatório do que realizou na atividade e, após a realização da atividade, apresentou um pequeno texto analisando criticamente a situação da distribuição da riqueza e abordando o papel da matemática no estudo dessa situação. O texto apresentado por G-3 é transcrito no Quadro 4.7.

Quadro 4.7: Resposta do grupo G-3 sobre a análise crítica da situação da distribuição da riqueza e o papel da matemática no estudo da situação

Fazer uma análise crítica da situação da distribuição da riqueza	Qual o papel da matemática no estudo dessa situação?
Segundo a projeção a situação não muda muito durante os anos, pois a tendência é de que não terá uma deslocação de forma que seja “tão” visível; mas fazendo uma análise, tendo em vista as classes sociais, a concentração da riqueza global sempre permanece dominantemente com a classe alta. Independentemente se há uma queda na porcentagem de renda da classe alta enquanto temos um aumento na classe média, a classe alta sempre estará acima da classe média. E tendo em vista que nos anos que ocorreram essa queda, aconteceu algo que afetou o mundo, podemos supor que se caso acontecer alguma coisa (nova pandemia, queda na bolsa de valores etc.) dentro de 20 anos a renda tende a aumentar e diminuir de forma “espelhada” entre a classe alta e média, e a classe baixa geralmente fica entre 5% e 15%.	A matemática é necessária para fazer o comparativo de como era e as estimativas de o que pode acontecer daqui 20 anos, com a ajuda de softwares matemáticos é possível fazer uma estimativa “mais precisa” já que ela segue como base os últimos anos que realmente aconteceu, porém tudo é apenas uma estimativa, já que não é possível prever o que vai acontecer no futuro, uma pandemia, crise mundial, conflitos ou algo do tipo.

Fonte: relatório do grupo G-3.

4.3.2 Parte 2 da atividade Distribuição de riquezas no mundo: a carta do grupo G-2

Findada a primeira parte da atividade, iniciou-se a segunda etapa em que os estudantes foram levados a refletir sobre a concentração de riquezas do mundo por classes sociais e estas discussões foram iniciadas a partir das informações constantes na Figura 4.7.

Além disso, os alunos também receberam a informação de que: (i) a população mundial em 2021 foi de 7,8 bilhões de pessoas (ONU, 2022); (II) a riqueza mundial total distribuída em 2021 foi de 13,8 trilhões de dólares (Revista VC S/A, 2022).

Com a finalidade de promover uma reflexão sobre o tema distribuição de riquezas e, considerando que ela deveria se fundamentar em uma abordagem matemática da situação, aos alunos foi proposto o desafio: *Suponha que você, enquanto aluno do curso de Licenciatura em Matemática, foi convidado a escrever uma carta a ser publicada em um jornal da comunidade acadêmica local falando sobre a distribuição desigual das riquezas. Faça uma abordagem matemática e apresente aqui a sua carta com a fundamentação necessária.*

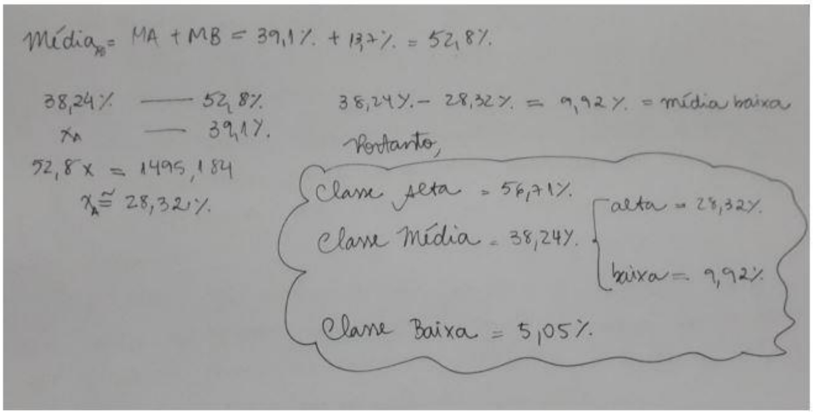
A partir dos resultados obtidos na primeira etapa da atividade, iniciou-se uma discussão relativa à quantidade de pessoas que fazem parte de cada uma das classes. Então, o grupo G-2, lançando mão dos resultados dos modelos já construídos, calculou a quantidade de pessoas que faz parte de cada uma das classes apresentada na Figura 4.7.

Entretanto, as informações da referida figura fazem uma nítida distinção de quatro classes, diferentemente da Figura 4.6 em que se identificam apenas três classes para a distribuição de riquezas.

Assim, inicialmente dos alunos foram requeridas uma análise e uma nova abordagem, inclusive da matemática, visando ponderar e tomar decisões relativamente às possíveis relações e adequações dos dados das duas figuras e, como as quatro classes sociais da Figura 4.7 podem ser interpretadas à luz das três classes identificadas na Figura 4.6.

Assim, usando as estimativas obtidas com os modelos construídos a partir dos dados da Figura 4.6, e usando as informações sobre o total de riquezas e o total da população, o grupo G-2, distribuiu os percentuais obtidos na primeira etapa desta atividade em quatro classes sociais, conforme apresentado na Figura 4.12.

Figura 4.12: Distribuição de riquezas no mundo por classes sociais (G-2)



Tomando 100% como sendo 7,8 bilhões de pessoas, encontraremos, **por regra de três**, as seguintes informações:

Classe	f_a(em nº de pessoas) **(% de 7,8 bilhões)**	f_r(em %) **(% de 7,8 bilhões)**
Alta (elite)	≈ 4,423 bilhões	56,71%
Média alta	≈ 2,209 bilhões	28,32%
Média baixa	≈ 0,774 bilhões	9,92%
Baixa	≈ 0,339 bilhões	5,05%

Fonte: Relatório do grupo G-2.

Os resultados obtidos formaram a base para a construção dos argumentos que seriam utilizados para escrever a carta, conforme desafio proposto. A carta do grupo G-2 é apresentada no Quadro 4.8.

Quadro 4.8: Carta para a comunidade acadêmica escrita pelo Grupo G-2

Caro leitor da comunidade acadêmica local
Diante da crise econômica mundial que nós, como indivíduos da sociedade, temos enfrentado, nós alunos do curso de Licenciatura em Matemática, fomos convidados a escrever sobre a distribuição desigual das riquezas em nosso país, no sentido de apresentar uma análise e considerar o que isso pode impactar na nossa sociedade. A princípio, para tal análise, tomamos como base, dados obtidos para a distribuição de riquezas nos últimos 20 anos para investigarmos e encontrarmos uma possível projeção para os próximos 20 anos. Fizemos isso com base nos dados relativos à distribuição de riquezas e à quantidade de pessoas que se inclui em cada classe social. Claramente esses dados indicam um certo padrão em relação a uma queda nos últimos vinte anos da renda da classe alta e a um crescimento das classes média e baixa. Primeiramente, nós construímos modelos matemáticos com o uso de dois softwares educacionais, o Geogebra e o Curve, para estimar como seria essa distribuição de riquezas nos próximos 20 anos, ou seja, como seria essa distribuição no ano de 2040. Os modelos matemáticos nos permitem concluir que as porcentagens de cada classe social para o ano de 2040 serão: cerca de 56.71% das riquezas estarão concentradas na classe alta, enquanto que 38,24% na classe média (sendo desses, 28,32% classe média alta e 9,92% classe média baixa) e o restante na classe baixa, ou seja, somente 5,05% das riquezas estarão com a classe baixa. Com isso, percebemos que, lamentavelmente, a concentração de riquezas continuará com a classe alta. Enquanto isso, as riquezas da classe baixa (a maioria do país) terão uma possível queda, uma vez que tínhamos em 2020 aproximadamente 7,22% da distribuição destinada à classe baixa, e para uma projeção em 2040, obtivemos apenas 5,05%, uma queda de aproximadamente 2,17%, mantendo assim, uma extrema desigualdade em relação à distribuição de riquezas. De fato, mais da metade das riquezas estará concentrada na classe alta, fato esse que provoca cada vez mais a desigualdade social e o desfavorecimento de benefícios da classe baixa que representa cerca de 55% da população mundial.

Fonte: Relatório do grupo G-2.

4.3.3 Parte 2 da atividade Distribuição de riquezas no mundo: a carta do grupo G-3

Findada a primeira parte da atividade, iniciou-se a segunda etapa em que os estudantes foram levados a refletirem sobre a concentração de riquezas do mundo por classes sociais, com base nas informações constantes na Figura 4.7, a fim de responder o desafio: *Suponha que você, enquanto aluno do curso de Licenciatura em Matemática, foi convidado a escrever uma carta a ser publicada em um jornal da comunidade acadêmica local falando sobre a distribuição desigual* *das riquezas. Faça uma abordagem matemática e apresente aqui a sua carta com a fundamentação necessária.*

Assim como em G-2, a partir dos resultados obtidos na primeira etapa da atividade, G-3 discutiu a quantidade de pessoas que fazem parte de cada uma das quatro classes constantes na Figura 4.7, denominadas pelo grupo de classe baixa, classe média baixa, classe média alta e classe alta. Então o grupo, lançando mão dos resultados já obtidos, calculou a quantidade de pessoas que faz parte de cada uma das quatro classes, conforme consta na Figura 4.13.

Figura 4.13: Distribuição de riquezas no mundo por classes sociais (G-3)

Classe	Detenção de riquezas (em dólares)	$f_a(em\ nº\ de\ pessoas)$ (% de 7,8 bilhões)	$f_r(em\ \%)$ (% de 7,8 bilhões)
1	0 |---- 10 mil	4.290.000.000	55%
2	10 mil |---- 100 mil	2.558.400.000	32,8%
3	100 mil |---- 1 milhão	86.800.000	11,1%
4	> 1 milhão	85.800.000	1,1%

Fonte: Relatório do grupo G-3.

Os resultados obtidos fundamentaram matematicamente os argumentos que seriam utilizados para escrever a carta, conforme desafio proposto. A carta do grupo G-3 é apresentada no Quadro 4.9.

Quadro 4.9: Carta para a comunidade acadêmica escrita pelo Grupo G-3

Prezado jornal da comunidade acadêmica local
Vimos por meio desta, repassar a vós e a vossos leitores uma questão que temos enfrentado na atualidade, que são os diversos problemas relacionados à desigualdade social. Através de compreensões matemáticas e projeções foi possível analisar que as mesmas podem ser calculadas considerando as porcentagens e o tempo que essa distribuição desigual ocorre. Essa questão torna-se complexa por se tratar de um assunto que aflige maior parte da sociedade, criando-se assim uma tabela desigual no qual enquanto a classe média aumenta seu percentual no gráfico (desigualdade social) a classe alta diminui e quando a classe média diminui a alta aumenta, seguindo um padrão que pode ser calculado através de funções matemáticas. Porém, a classe baixa se mantém estável na linha da pobreza. Diante de tal situação é necessário percorrer um árduo caminho, onde a desigualdade social seja a menor possível e com ajuda de conhecimentos matemáticos poderemos auxiliar nessa difícil tarefa.

Fonte: Relatório do grupo G-3.

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

"*Quando os matemáticos descobriram que os conceitos geométricos mais elementares, como o ponto ou a linha reta, não são realmente definidos, o que ficou em primeiro conforto foi a noção de que os significados desses conceitos são dados de forma tão clara na intuição tal que, a partir deles, a validade dos axiomas aparentemente poderia ser lida com extrema certeza*"
(HILBERT SCHLICK).

Neste capítulo apresentamos a análise das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos participantes da pesquisa que, realizando um trabalho colaborativo e organizados em três grupos (G-1, G-2 e G-3), desenvolveram atividades com as temáticas conforme indica o Quadro 5.1.

Quadro 5.1 - Atividades de modelagem matemática desenvolvidas por cada grupo

Grupo	Alunos	Atividades
G-1	A1; A2 e A3	Pavimentação de um estacionamento; Aplicação de pasta isotérmica em placa de processador
G-2	A4; A5; A6, A7, A8 e A9	Distribuição de riquezas no mundo
G-3	A10; A11; A12; A13; A14 e A15	Distribuição de riquezas no mundo

Fonte: Autoria própria (2023).

A análise tem como objetivo identificar a construção de significado em atividades de modelagem matemática mediante duas dimensões: a dimensão didática e a dimensão semiótica.

A análise empreendida sobre as práticas discursivas e registros escritos dos estudantes nos grupos e individualmente, identificando os significados construídos pelos estudantes e seus desdobramentos para as atividades de modelagem, expressa elementos que indicam a construção desses significados mediante árvores de associação de ideias apontadas em Spink (2010; 2013).

O processo analítico se dirige ao grupo em cada uma das atividades que desenvolveu. Isso pode ampliar as discussões sobre como diferentes significados são construídos pelos grupos e individualmente, considerando as respostas individuais apresentadas pelos mesmos aos questionários propostos.

Conforme mencionado no Capítulo 3, as análises são realizadas tomando como ponto de partida episódios que oferecem potencial relativo aos indícios de construção de significado evidenciados nas atividades de modelagem matemática. A escolha e a seleção destes episódios foram realizadas levando em consideração dois aspectos: a fase da modelagem matemática em que as discussões foram empreendidas e as respostas dadas pelos participantes a um questionário individual respondido pelos mesmos quando da finalização de cada atividade. Todos os episódios visam discutir os significados dali construídos (especialmente, levando em conta uma dimensão didática e uma dimensão semiótica do significado).

Vale ressaltar que, apesar de os episódios serem apresentados de forma cronológica, isto não determina que um episódio é sempre continuação imediata do anterior.

5.1 ATIVIDADE *PAVIMENTAÇÃO DE UM ESTACIONAMENTO* DESENVOLVIDA PELO GRUPO G-1

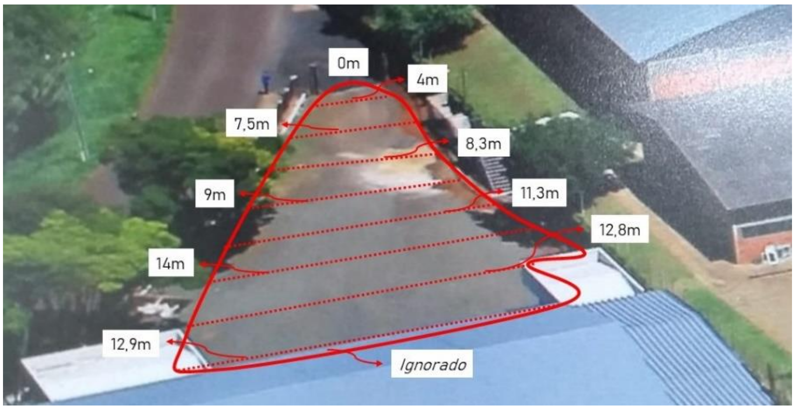
Como já mencionado, a temática *Pavimentação de um Estacionamento* foi proposta pelo pesquisador para todos os alunos da turma mediante informações já descritas no Quadro 4.2 deste relatório de pesquisa. Considerando que esta atividade foi a primeira atividade de modelagem matemática desenvolvida pela maior parte dos estudantes que estavam matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, as discussões iniciais foram realizadas coletivamente.

É importante ressaltar que o contexto desta disciplina foi remoto e síncrono, ou seja, por conta da pandemia de COVID-19, à época em que se deu o desenvolvimento desta atividade, as aulas da referida disciplina aconteciam na modalidade remota, portanto, após as discussões coletivas, o pesquisador solicitou que cada grupo criasse uma sala do Google Meet (plataforma utilizada pela instituição para as aulas) para que os grupos pudessem interagir com mais privacidade. Tanto o professor regente da disciplina, quanto o pesquisador, autor da tese, tinham acesso a essas salas privadas e foram autorizados a gravar, em áudio e vídeo, todas as interações dos participantes.

Assim, após a definição da situação a ser respondida: *determinar um modelo que represente os custos gerados para a pavimentação da área utilizada como estacionamento da INCUTEC-CP* e após as discussões iniciais sobre a situação: pavimentação do estacionamento da Incubadora Tecnológica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio, sobre o fato de o campus ter recebido um recurso extra e que a equipe diretiva optou por utilizar este recurso para pavimentação de uma área que serviria de estacionamento, e sobre as dimensões do espaço, iniciou-se a seguinte discussão na sala privativa do grupo G-1, que denominamos de Episódio I.

Quadro 5.2: Episódio I da atividade *Pavimentação de um estacionamento* de G-1

Tipo de Signo	**Descrição**
Fala do professor-pesquisador	PP (professor-pesquisador): Vocês podem começar a resolver o problema?
Fala de A1	A1: Olha, nós queremos pavimentar essa região [fazendo menção à Figura 5.1].
Imagem da vista superior do estacionamento da INCUTEC-CP	

Fala de A1	A1: Logo, precisamos calcular a área e, pra isso, o que precisamos é saber o formato da região e as medidas, e isso nós temos aqui nesta figura (referindo-se à Figura 5.2).
Imagem da vista superior do estacionamento da INCUTEC-CP com marcações	
Fala de A2	A2: Aliás, nós queremos pavimentar e limpar né? Porque eu estou vendo aqui e não é possível fazer pavimentação sem limpeza, um serviço é dependente do outro.
Fala de A1	A1: Certo, então queremos pavimentar e limpar esta região.
Fala de A3	A3: É legal se pavimentarem mesmo essa região. Eu trabalho na ****** [neste momento, A3 menciona o nome de uma das empresas incubadas na instituição e que ele faz parte do quadro de funcionários] e sempre entro por ali porque é mais perto. Faz tempo que pedimos pra pavimentar, porque quando chove é horrível.
Fala de A2	A2: Então bora calcular essa área.
Fala de A1	A1: É, mas a gente não pode simplesmente calcular, porque a região é irregular, e as fórmulas que temos não dão pra isso.
Fala de A2	A2: Não sei bem se a região é tão irregular assim. Veja, talvez possamos aproximar um trapézio.
Fala de A1	A1: Ah, acho que não. Essas aproximações nunca funcionam, ainda mais quando estamos tratando de um caso real.
Fala de A2	A2: É verdade!
Fala de A1	A1: Neste caso aqui, se encontrarmos essa área, já "matamos" a atividade, porque aí é só multiplicar pelo preço que a empresa cobrar pra pavimentar e limpar.
Fala do professor regente	P (professor regente): Não conseguem pensar em uma aplicabilidade do cálculo pra isso?
Fala de A1	A1: Hum, verdade... Integral é pra isso, né?

Fala de A3	A3: Vou dar uma pesquisada aqui no que já vimos antes, estes dias mesmo calculamos umas áreas irregulares.

Fonte: autoria própria (2023).

No diálogo transcrito no Episódio I, os alunos discutem o texto introdutório da situação assim como fazem menção às figuras a eles disponibilizadas quando das discussões coletivas: quando A1 afirma ter os dados necessários para o cálculo da área da região a ser pavimentada (medidas e formato), ele está referindo à figura da região com as referidas dimensões calculadas pelo Departamento de Projetos e Obras da Instituição.

No início do diálogo, A2 e A3 denotam construir determinados significados, neste caso, por conta da familiaridade que estes possuem com fenômeno em si. A familiaridade de A2 é evidenciada quando ele menciona a necessidade de limpeza da região junto com o serviço de pavimentação e a de A3 quando ele afirma que "faz tempo que pedimos pra pavimentar, porque quando chove é horrível", sendo ele um usuário da região que está sendo estudada. Esta familiaridade sugere construção de significados relativos ao ato de calcular a área de uma região da Universidade.

De fato, a disposição e intencionalidade dos alunos em diálogo e a interação com colegas e professor sinalizam que a construção de significado se dá em uma dimensão didática.

Ao discutir a necessidade de calcular o valor da área, A1 menciona o fato de ser necessário recorrer a recursos matemáticos específicos para tal cálculo, uma vez que a região é irregular. Esta colocação foi prontamente questionada por A2 ao responder "Não sei bem se a região é tão irregular assim [...] talvez possamos aproximar um trapézio". Neste momento, percebe-se que as representações pictóricas da região a ser pavimentada constituem um signo que produz nesses alunos diferentes impressões, ou diferentes ideias com relação ao local a ser pavimentado: A1 já parte do pressuposto de que é necessário fazer um cálculo de área para região irregular, enquanto A2 conta com a possibilidade de aproximações com figuras planas convencionais. Tais questões indicam a interpretabilidade destes signos (figuras da área a ser pavimentada), rumo ao que poderiam conhecer com relação a esta situação.

Peirce (2005) enfatiza que os signos são parte de um processo maior de investigação e descoberta, propondo que a interpretação de um signo não é um processo passivo, mas sim um processo ativo e dinâmico que envolve a construção de novos significados e novas relações entre os signos e seus objetos. Assim, foi a interação ocorrida entre A1 e A2 que possibilitou que A2 ressignificasse a situação, isto é, construísse significados para o cálculo de área, quando este concorda com A1 de que a aproximação com figuras planas não é a melhor ideia, já que se trata de uma situação real, característica de atividades de modelagem matemática.

Neste momento do episódio, A1 teve intencionalidade, isto é, estava *dirigido a*, conforme discute Skovsmose (2018), fazer com que A2 construísse outro significado para a situação discutida e, em semiótica, quando há intenção, há construção de significado, pois "significado deve envolver uma referência, a intenção" (PEIRCE, 2005, p. 16).

Portanto, esta construção de significado refere-se à dimensão didática, no que diz respeito às interações entre os sujeitos (estudante - estudante) e refere-se à dimensão semiótica, no que tange à geração de novas semioses por A2.

Além disso, uma outra questão a ser destacada deste momento do diálogo é o fato de que A1 já evidencia a sua intenção de responder a problemática proposta (*determinar um modelo que represente os custos gerados para a pavimentação da área utilizada como estacionamento da INCUTEC-CP*) calculando a área da região e multiplicando o resultado pelo valor cobrado pela empresa de pavimentação a ser contratada.

Ao perceber que os estudantes não estavam encontrando meios efetivos para solucionarem a problemática proposta, o professor regente da disciplina faz a primeira interferência nas discussões questionando-os sobre as aplicabilidades do Cálculo Diferencial e Integral para este tipo de situação.

Neste momento, o professor também tem uma intenção, mas, neste caso, ele não estava *dirigido a* algo, como A1 na situação anterior, sua intencionalidade está mais atrelada ao que Skovsmose (2018) denomina de *prioridade*, ou seja, dado o contexto em que a atividade estava sendo desenvolvida, seria natural que os alunos recorressem a recursos estudados na disciplina de

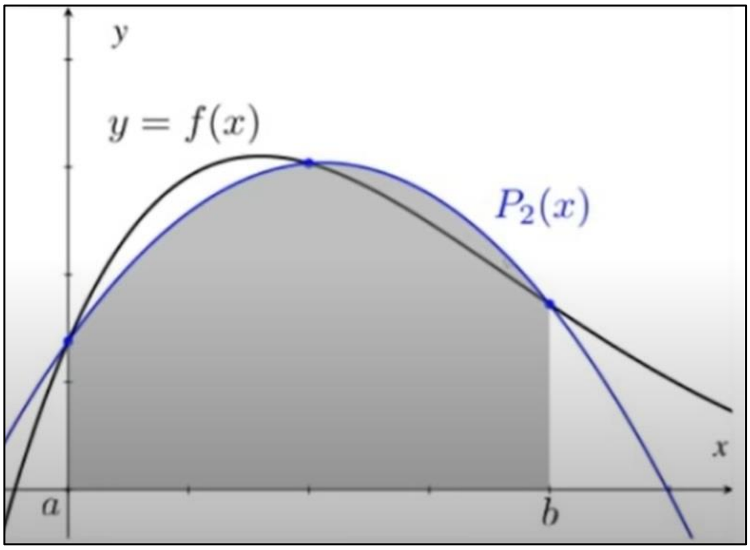
Cálculo Diferencial e Integral II, já que, neste momento, os conteúdos desta disciplina, como integral de função e técnicas para aproximação de integral definida (por exemplo, Regra do Trapézio), são prioridades destes estudantes.

Assim como A1, P também atinge seu objetivo com sua inteiração. Imediatamente após seu questionamento, A1 sugere que o grupo utilize cálculo integral para calcular a área pretendida e A3 se predispõe a consultar o que já foi trabalhado em aula sobre isso.

Neste momento, compreendida a situação e estando familiarizados com os aspectos relevantes da mesma, iniciou-se uma discussão sobre os meios matemáticos que possibilitassem resolver o problema proposto. Esta discussão é apresentada no Episódio II, conforme Quadro 5.3.

Quadro 5.3: Episódio II da atividade *Pavimentação de um estacionamento* de G-1

TIPO DE SIGNO	DESCRIÇÃO
Fala de A3	A3: Veja, se a gente conseguir colocar essa imagem num software, conseguimos desenhar essas funções e, depois fica simples calcular a área.
Fala de A2	A2: Sim, e aí, calculando a área a gente multiplica pelo valor da pavimentação e acabou.
Fala de A1	A1: Podemos usar o Geogebra. Tem um recurso lá que a gente inclui a figura e vai desenhando o contorno com os pontos, depois disso, com estes pontos a gente determina um polinômio, ou uma função, que descreve exatamente essa região. Com isso, podemos calcular a área de qualquer figura, mesmo irregular.
Fala de A3	A3: Se bem que, pensando bem, nós já temos os pontos, pois está na figura [referindo-se às medidas da Figura 5.2], podemos só determinar esta função que descreve a região seguindo algumas daquelas regras que vimos nas aulas passadas [referindo-se à Regra do Trapézio e à Regra de 1/3 de Simpson], aí não precisa colocar no Geogebra.
Fala de A2	A2: Veja, esta regra [referindo-se à Regra do Trapézio] “objetiva aproximar a função por um polinômio de primeiro grau, ou seja, uma reta” [neste momento, A2 lê algumas de suas anotações das aulas anteriores da disciplina]. Já a outra [referindo-se à Regra de 1/3 de Simpson] “baseia-se em aproximar a integral definida pela área sob arcos de parábola que interpolam a função” [neste momento A2 continua lendo suas anotações anteriores].
Fala de A3	A3: E tem outra coisa: “a regra de 1/3 de Simpson utiliza uma parábola para aproximar a função no intervalo de integração e assim tem como vantagem um erro menor do que a integral calculada pela regra do trapézio” [aqui, A3 também lê algumas de suas anotações anteriores], ou seja, é melhor a gente usar essa segunda regra mesmo [referindo a Regra de 1/3 de Simpson], já que o erro é menor.

Imagem de parte da resolução da atividade *Pavimentação de um estacionamento* de G-1	
Parte da resolução da atividade *Pavimentação de um estacionamento* de G-1	A figura 5.3 foi inserida no relatório dos estudantes como uma maneira que o grupo encontrou de “descrever” a regra matemática que seria utilizada pelo grupo para encontrar a área a ser pavimentada. No caso, f(x) é chamado de integrando, a é o limite inferior de integração, b é o limite superior de integração e, como mostra a figura acima, o integrando f(x) é aproximado por um polinômio de segunda ordem, o interpolador quadrático é P_2 (x). No caso da regra escolhida pelo grupo, a Regra de 1/3 de Simpson, tem-se a aproximação conforme segue: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}$
Fala de A2	A2: Sim, e seria legal utilizarmos coisas que aprendemos na aula né? Parece fazer mais sentido.
Parte da resolução da atividade *Pavimentação de um estacionamento* de G-1	Os pontos selecionados pelo grupo foram $(4, 7.5), (8.3, 9)\ e\ (12.8, 12.9)$. No caso do estacionamento, esses pontos referem-se às medidas percabidas pelos mesmos a partir da Figura 5.2. Assim, tomando: $(x_0, y_0); (x_1, y_1); (x_2, y_2)\ e\ \int_a^b P_2(x)\,dx$, o grupo chegou na expressão $A = \frac{5}{3}\,.\,(0 + 4.4 + 2.7{,}5 + 4.8{,}3 + 2.9 + 4.11{,}3 + 2.14 + 4.12{,}98 + 12{,}9)$ para calcular a área a ser pavimentada, sendo esta de $367{,}03m^2$. Com isso, e partindo da hipótese de que tanto a limpeza, quanto a pavimentação são serviços cobrados por m^2, logo, o custo para pavimentação desta área de estacionamento será de $C(r) = 367{,}03.(r_1 + r_2)$, em que r_1 e r_2 são os valores para limpeza e pavimentação por m², respectivamente.

Fonte: autoria própria (2023).

Como já mencionado, a disciplina em que se deu o desenvolvimento da referida atividade é a de Cálculo Diferencial e Integral II e, devido à estrutura dos cursos da UTFPR, na disciplina de Cálculo II é comum os estudantes trabalharem com conceitos do Cálculo Numérico, como é o caso da "Regra do Trapézio" e da "Regra de 1/3 de Simpson", discutidas pelo grupo.

Assim, a construção de significado não se desvincula da experiência colateral dos estudantes do grupo (especialmente de A2 e A3) para com o mecanismo matemático utilizado na resolução da atividade. Na obtenção da expressão que descreve a área a ser calculada ($A = \frac{5}{3} \,.\, (0 + 4.4 + 2.7{,}5 + 4.8{,}3 + 2.9 + 4.11{,}3 + 2.14 + 4.12{,}98 + 12{,}9)$), os alunos utilizam a Regra de 1/3 de Simpson, pois, como afirma A-3, "seria legal utilizarmos coisas que aprendemos na aula né? Parece fazer mais sentido". Neste caso, a experiência colateral, isto é, "a intimidade prévia com aquilo que o signo denota" (PEIRCE, 1989, p. 61), com os signos universais da Regra de 1/3 de Simpson corresponderam a objetos referenciais (MANECHINE; CALDEIRA, 2006) para a abordagem do objeto matemático em questão.

Para Peirce (2005), a experiência colateral é uma experiência que se relaciona com um objeto de uma maneira secundária, ou seja, que não é imediatamente relevante ou evidente para o objeto em si, mas que ainda assim pode contribuir para a compreensão do objeto. Tal experiência pode incluir observações ou informações adicionais que não fazem parte da descrição ou do contexto imediato do objeto, mas que ainda assim podem ser úteis para entender sua natureza e suas características (SANTAELLA, 2012).

Além disso, a escolha da Regra de 1/3 de Simpson também mostra que os estudantes levaram em consideração as consequências futuras de tal escolha. Quando A3 afirma que "é melhor a gente usar essa segunda regra mesmo [referindo a Regra de 1/3 de Simpson], já que o erro é menor", ele deixa claro que sua escolha se fundamenta na precisão dos resultados a serem obtidos, que era o foco e a intenção dos alunos durante o desenvolvimento da atividade. Portanto, a construção de significado nestes elementos do episódio se apoia na dimensão semiótica do significado.

Ainda neste episódio, a colocação de A3 também mostra sua intencionalidade, influenciada pelo fator *prioridade* da disciplina, em usar a Regra de 1/3 de Simpson quando menciona que “seria legal utilizarmos coisas que aprendemos na aula [...] parece fazer mais sentido”. Neste ponto, é importante destacar que o conteúdo mencionado por A3 (Regra de 1/3 de Simpson), apesar de não constar comumente nas grades curriculares da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, sendo mais comum no programa da disciplina de Cálculo Numérico, faz-se presente na grade deste curso específico, por conta de algumas adaptações que a Instituição realizou há alguns anos em toda sua grade curricular, unificando algumas temáticas.

Além disso, é possível que esta colocação de A2 tenha sido influenciada pela interação causada pelo professor regente no Episódio I, em que ele questiona se os estudantes não poderiam utilizar alguma aplicabilidade do Cálculo Diferencial e Integral na atividade, mostrando que a intenção do professor foi atingida, possibilitando, pelos estudantes, a construção de novos significados para a atividade, promovida em dimensão didática, relacionada à interação entre os sujeitos (professor - estudante).

Após a escolha do método a ser utilizado e das referidas matematizações, o grupo chegou ao resultado de que a região estudada possui $367{,}03m^2$ de área, sendo o custo C para pavimentação e limpeza descrito pelo modelo $C(r_1, r_2) = 367{,}03.(r_1 + r_2)$, em que r_1 e r_2 são os valores para limpeza e pavimentação por m^2, respectivamente.

Há indícios de semiose nos estudantes uma vez que, conforme assevera Drigo (2007), a semiose de um intérprete é desencadeada a partir da atualização da mente.

Findado o desenvolvimento da atividade em grupo, solicitou-se que os estudantes, individualmente, respondessem a um questionário com quatro perguntas relacionadas às ações por eles tomadas no desenvolvimento da atividade, ao significado que a atividade teve para eles e à importância que eles atribuíram à atividade e às diferentes ações tomadas. O terceiro episódio relacionado a esta atividade faz referências às respostas dadas pelos estudantes à duas perguntas específicas e é apresentado no Quadro 5.4:

1) Na realização da atividade *Pavimentação de um estacionamento*, você desenvolveu várias ações para atingir um objetivo, teve que pensar em várias coisas diferentes e, provavelmente aprendeu algumas coisas que você ainda não sabia. Tente se lembrar das coisas que você fez, das coisas que você pensou e das coisas que você aprendeu durante essa atividade. Descreva-as abaixo e comente as que foram mais marcantes para você.

2) O que significou para você essa atividade? Que importância você atribui a ela? Explique.

Quadro 5.4: Episódio III da atividade *Pavimentação de um estacionamento* de G-1

TIPO DE SIGNO	DESCRIÇÃO
Respostas de A1	A1: Como nós utilizamos uma regra matemática que já havíamos estudado anteriormente, para esta atividade, especificamente, não foi necessário recorrer a conceitos e conteúdos matemáticos desconhecidos por mim, no entanto, eu confesso que nunca tinha visto uma aplicabilidade prática para a Regra do 1/3 de Simpson e isto foi muito interessante. [...] Pra mim esta atividade significou muita coisa, especialmente, no que diz respeito à minha formação em licenciatura. Quando estudamos didática da matemática e fundamentos metodológicos é bastante comum a literatura bater na tecla da importância de associarmos os conhecimentos matemáticos a situações cotidianas. Assim, desenvolver esta atividade me mostrou uma aplicabilidade bastante interessante do cálculo e isto é muito importante para minha formação docente.
Respostas de A2	A2: Para determinarmos um modelo para cálculo do valor que custará a pavimentação do estacionamento, inicialmente, decidimos calcular o valor da área pretendida e, tendo esta área, multiplicaríamos pelo valor cobrado pela empresa. Por estarmos desenvolvendo esta atividade na disciplina de Cálculo Integral II, nosso grupo achou por bem escolher, dentre os conteúdos da disciplina, algum que pudesse nos ajudar nesta resolução e, para isso, usamos a regra do 1/3 de Simpson. O mais legal foi que o resultado encontrado pelo grupo bateu quase que exatamente com a medição feita pela própria Universidade, o que comprovou que nosso método e cálculo estavam certos. [...] Significou que o Cálculo Integral pode ser utilizado muito além da disciplina e dos conteúdos, mas, principalmente, em situações cotidianas. O uso do Cálculo Integral na "prática" foi o que achei mais importante e interessante.
Respostas de A3	A3: Eu confesso que, apesar de já ter estudado a Regra de 1/3 de Simpson, eu não sabia aplicá-la. Esta atividade do estacionamento me ajudou a entender isso. Vou procurar outras atividades de modelagem matemática para poder aprender mais os conteúdos de cálculo, me parece que a modelagem é um ótimo meio de estudar Cálculo.

	[...] Aprendi que por meio do cálculo podemos solucionar os problemas do cotidiano de maneira mais fácil do que maneiras que julgamos ser a "ideal" a princípio, pois, às vezes, o cálculo pode facilitar na realização de algumas contas, que poderiam, por exemplo, tomar mais tempo, caso fossem utilizadas apenas as "continhas" normais/convencionais, ou ainda, por meio dessas não fosse possível chegar a um resultado.

Fonte: autoria própria (2023).

A transcrição das respostas de A1 ao questionário sinaliza a construção de significados relacionados à sua prática profissional. Sobre isto, Skovsmose (2018) menciona que a opção de um estudante, por exemplo, em realizar ou não as tarefas matemáticas propostas pelo professor, está diretamente relacionada com a intencionalidade presente nesta execução. Assim, o estudante pode decidir positivamente ao reconhecer, na aprendizagem de determinados conteúdos, um elemento importante para o seu processo formativo profissional. Neste sentido, a construção de significado se apoia na dimensão didática.

Do ponto de vista semiótico, esta intencionalidade, em certa medida, vai movendo as ações dos estudantes na resolução do problema usando diferentes procedimentos e diferentes conteúdos matemáticos.

No que tange à construção de significado para o objeto matemático (Cálculo Integral, no caso desta atividade), é possível inferir que tal construção se dá com base: na experiência colateral que os estudantes tinham com a Regra de 1/3 de Simpson para a dedução do modelo matemático, conforme denotado por A1 e A2 ao mencionarem já conhecer o método; na consequência de determinar uma solução para o problema por meio desta possibilidade matemática, que era o foco e a intenção dos alunos durante o desenvolvimento da atividade, conforme expresso nas respostas dos três estudantes.

A resposta de A3 possibilita outra inferência, de que o estudante construiu, a partir da atividade, um significado para a modelagem matemática, em si. De acordo com o estudante, “me parece que a modelagem é um ótimo meio de estudar Cálculo” e tal afirmação está ancorada no que o mesmo pôde aprender sobre Cálculo Numérico, especificamente, sobre a regra do 1/3 de Simpson ao desenvolver a atividade da pavimentação do estacionamento.

Ao ser questionado sobre o que achou mais interessante da atividade, A2 menciona a fase da validação do resultado. De acordo com ele, “o mais legal foi que o resultado encontrado pelo grupo bateu quase que exatamente com a medição feita pela própria Universidade, o que comprovou que nosso método e cálculo estavam certos”. Tal colocação mostra que uma vez obtido o modelo, as consequências práticas de operar com este modelo e considerá-lo válido, no sentido de que fornece uma solução para o problema, “configuram um traçado que fortalece nossa inferência sobre a construção de significado” (SILVA; ALMEIDA, 2015, p. 590).

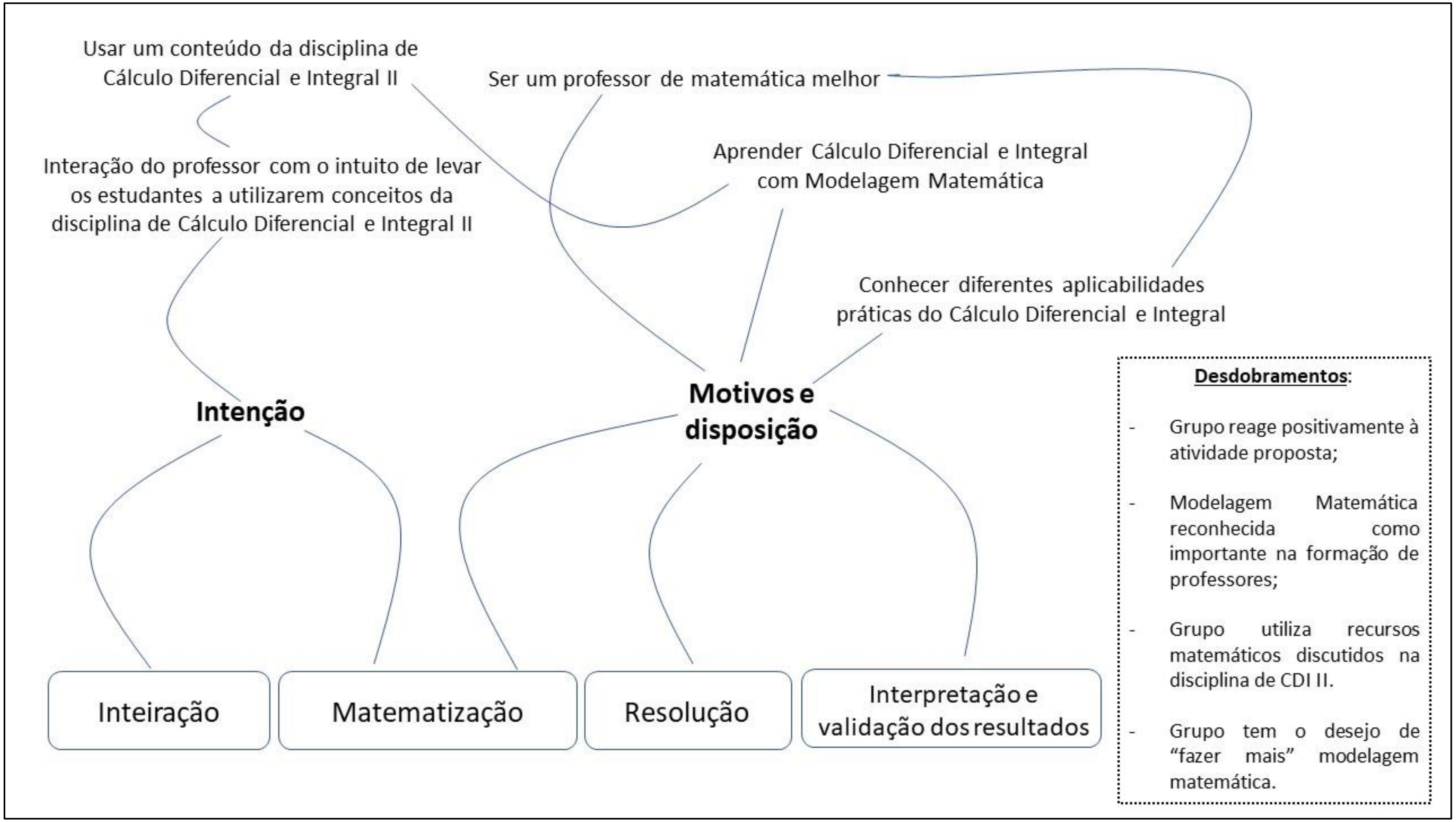
Considerando os interpretantes produzidos pelos estudantes durante o desenvolvimento da atividade de modelagem “Pavimentação de um estacionamento”, é possível inferir que a construção de significados se dá, especialmente, a partir das ações demandadas dos estudantes em cada uma das fases de desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, conforme excertos selecionados nos episódios I e II. Sobre isso, Silva e Almeida (2015, p. 590) afirmam que, “por meio dessas ações, os estudantes falam, escrevem, gesticulam, argumentam sobre suas intenções com a atividade, possibilitando-nos inferir sobre os interpretantes que produzem”. Nestes aspectos a dimensão semiótica da construção de significado se evidencia.

A intencionalidade se mostrou como um fator preponderante na construção de significados desta atividade em específico. Ora a intencionalidade era evidenciada no sentido de um sujeito estar *dirigido a* alguma ação, como é o caso em que um estudante tenta convencer o colega de grupo de que uma estratégia é mais adequada que outra, ora a intencionalidade aparece influenciada pelo fator *prioridade* como foi o caso de o professor regente da disciplina sugerir aos estudantes que fizessem uso de conteúdos relacionados à disciplina de Cálculo para a resolução da atividade.

Para além disso, diferentes motivos e disposições também puderam ser evidenciados na análise dos episódios. A3 possuía um motivo prático para se envolver na resolução do problema proposto: ele é usuário da área a ser pavimentada. Nas respostas aos questionários, A1 também evidencia uma motivação para o desenvolvimento de uma atividade desta natureza: para ser um bom professor de matemática, nas palavras de A1, ele deve conhecer diferentes aplicabilidades dos conhecimentos matemáticos. A aplicabilidade prática do Cálculo também foi mencionada na resposta de A2 ao questionário final, evidenciando assim sua motivação para participar deste desenvolvimento.

Em termos gerais, elementos da dimensão didática da construção de significado estão sistematizados na árvore de associação de ideias da Figura 5.1.

Figura 5.1: Elementos da dimensão didática da construção de significado



Fonte: autoria própria (2023).

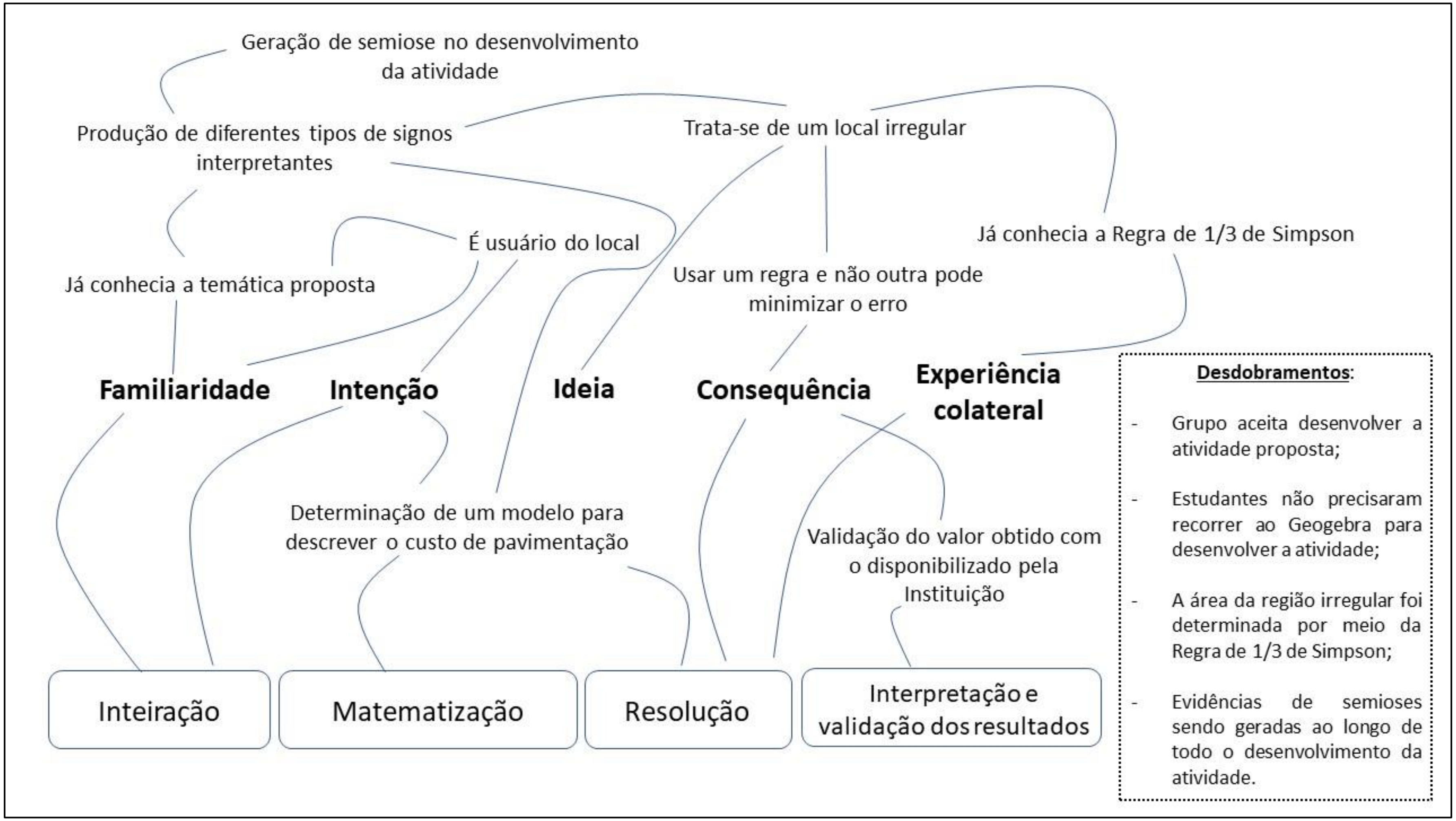
Nesta primeira árvore de associação de ideias, buscando identificar elementos da dimensão didática da construção de significado na atividade de modelagem matemática, assumimos, como raiz da árvore, as etapas de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática: inteiração; matematização; resolução; interpretação e validação dos resultados. Imediatamente acima da raiz, são postos os dois fatores capazes de nos evidenciar indícios de elementos da dimensão didática da construção de significado, sendo eles a intenção, os motivos e disposições.

A árvore apresentada na figura 5.1 mostra que as intenções do grupo G-1 no que diz respeito ao desenvolvimento da atividade “Pavimentação de um estacionamento” ficaram mais evidentes nos momentos de inteiração e resolução da atividade de modelagem matemática, enquanto que seus motivos e disposições tornaram-se mais presentes nas demais fases, resolução, interpretação e validação dos resultados.

Do que consta na árvore de associação de ideias, destaca-se que a questão formativa dos estudantes é o fator que associa tantos as intenções dos estudantes, quanto seus motivos e disposições para se empenharem no desenvolvimento da atividade proposta.

Por sua vez, os elementos da dimensão semiótica da construção de significado que foram evidenciados no desenvolvimento da atividade estão sistematizados na árvore de associação de ideias da Figura 5.2.

Figura 5.2: Elementos da dimensão semiótica da construção de significado



Fonte: autoria própria.

Nesta segunda árvore de associação de ideias, buscando evidenciar elementos da dimensão semiótica da construção de significado no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, assumimos, de forma análoga à arvore anterior, as etapas de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática como raiz da árvore. Por tratarmos dos elementos da dimensão semiótica da construção de significado, imediatamente acima da raiz, são postos os cinco aspectos cuja literatura mostra haver evidências de construção do significado, a saber: familiaridade, intenção, ideia, consequência e experiência colateral.

5.2 ATIVIDADE *APLICAÇÃO DE PASTA ISOTÉRMICA EM PLACA DE PROCESSADOR* DESENVOLVIDA PELO GRUPO G-1

A temática *Aplicação de Pasta Isotérmica em Placa de Processador* foi proposta pelo grupo G-1, composta pelos estudantes A1, A2, e A3, da Universidade A, todos do curso de Licenciatura em Matemática, tendo em vista uma dificuldade que todos os integrantes do grupo possuíam para determinar a quantidade de pasta isotérmica a ser utilizada por eles na preparação das placas de processadores utilizados no laboratório em que todos atuam.

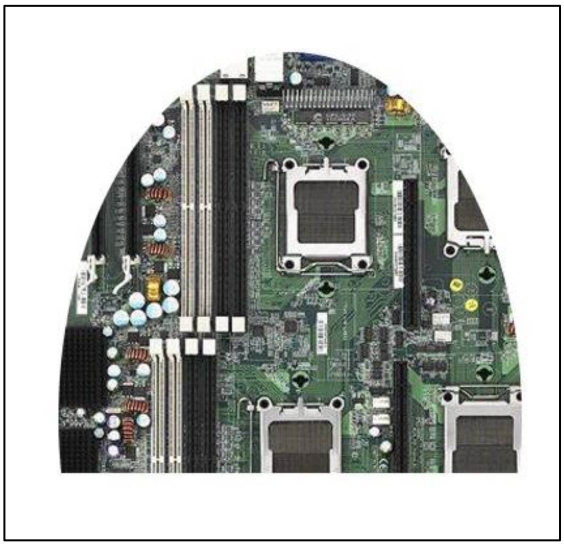
Como já citado anteriormente, os três integrantes do grupo são alunos de Iniciação Científica e atuam no laboratório de metrologia que atende a todos os cursos da universidade e, dentre as demandas do laboratório, está a preparação das placas processadoras para os computadores com pasta isotérmica, uma vez que, sem a pasta, o trabalho do cooler e do dissipador dos computadores é atrapalhado e o processador poderia queimar por conta de superaquecimento.

Uma preocupação dos estudantes é o fato do desperdício, uma vez que, apesar de se for colocada pasta isotérmica em excesso, isso não prejudicará o funcionamento do processador, no entanto, cada mililitro de pasta isotérmica pode ultrapassar R$ 100,00, o que a torna bastante onerosa, dadas as condições orçamentárias do laboratório (sendo parte da estrutura de uma instituição pública de ensino).

Assim, após a definição da situação a ser respondida: *determinar um modelo que represente a quantidade mínima de pasta isotérmica a ser utilizada* *na placa para processador escolhida* e, após as discussões iniciais sobre a situação, iniciaram-se algumas discussões que denominamos de Episódio I e apresentamos no Quadro 5.5.

Quadro 5.5: Episódio I da atividade *Aplicação de pasta isotérmica em placa de processador* de G-1

Tipo de Signo	**Descrição**
Fala de A1	A1: Bem, como nós fazemos a definição da quantidade de pasta hoje?
Fala de A3	A3: Não faz! A gente só usa a seringa dosadora e aplica. Eu, particularmente, não acho que seja possível determinar uma quantidade mínima de pasta. Acho que o máximo que a gente vai conseguir discutir é a forma como tem que aplicar a pasta para podermos cobrir a região toda. Pois é isso que me preocupa, tipo: se aplico contornando a placa, ou se é melhor concentrar um pouco de pasta no centro da placa e apertar.
Explicação da fala de A3	A3 menciona a “forma” de se aplicar a pasta isotérmica, porque, após aplicada a pasta no processador, é feita uma pressão, com uma plaquinha de acrílico a fim de distribuir a pasta por todo o processador [conforme ilustrado na Figura 5.3]. Esta preocupação de A3 justifica o fato de que a quantidade mínima de pasta já é suficiente para o processador, já que o excedente acaba escorrendo da placa e sendo descartado.
Processo de aplicação de pasta isotérmica na placa (mencionado por A3)	
Fala de A2	A2: Mas veja, se a gente definir a quantidade mínima de pasta necessária já resolve este problema, pois, independente da forma que aplicarmos, é a quantidade mínima que estaremos utilizando e, assim, não vamos jogar dinheiro fora: que é a grande questão que a gente quer resolver.
Fala de A1	A1: Exatamente!
Fala de A3	A3: Certo, entendi. Mas isso também não é muito fácil? Ué, pra sabermos a quantidade de pasta, só temos que calcular a área desta plaquinha.

Fala de A2	A2: Não é tão fácil assim não, já que nem todas as placas são retangulares. As do Baja [referindo-se às placas utilizadas pelos usuários do Projeto Baja, que utilizam as placas em computadores acoplados à veículos automotivos], por exemplo, não são assim, são assim [neste momento A2 mostra a placa para A1 e A3].
Tipo de processador utilizado no laboratório pela Equipe Baja	
Fala de A3	A3: Ah, legal. Então vamos definir um modelo para determinar a quantidade de pasta a ser utilizada neste tipo de processador. Acho que assim será mais legal.

Fonte: autoria própria (2023).

No que consta no Episódio I, vê-se que os alunos discutem a situação proposta por eles na referida atividade. Em termos gerais, a situação parte de uma necessidade do grupo em determinar a quantidade mínima de pasta isotérmica a ser utilizada nas placas de processadores preparados no laboratório em que os três integrantes do grupo (A1, A2 e A3) atuam.

Neste caso, vale destacar que o desenvolvimento da atividade proposta surge de uma necessidade, ou seja, os motivos que direcionam os estudos de G-1, referem-se ao seu *foreground* e, nesse contexto, Skovsmose (2018, p. 17) atenta para "[...] uma relação mais próxima entre intencionalidade e *foreground*" e tal intencionalidade potencializa a construção de significados por parte dos participantes, neste caso, a construção de significado neste elemento do episódio se apoia na dimensão didática do significado, pois "quando pretendemos investigar fenômenos de nosso interesse, temos a intencionalidade dos aprendizes o que facilita que eles realmente se envolvam com a atividade e se entreguem a seu desenvolvimento" (SKOVSMOSE, 2018, p. 19).

Além disso, vê-se familiaridade dos integrantes do grupo com a temática, uma vez que todos eles atuam no laboratório de metrologia e, consequentemente, aplicam a pasta isotérmica nos processadores, além de uma experiência colateral dos mesmos com a situação em questão. Assim, nestes elementos do episódio, a construção de significado também se apoia na dimensão semiótica do significado.

Para Peirce (2005), a experiência colateral é importante porque pode contribuir para a formação de inferências e generalizações mais amplas sobre um objeto, bem como para a compreensão do seu contexto e significado mais amplo. Neste sentido, o autor enfatiza que a experiência colateral não deve ser negligenciada na investigação e na análise de objetos, pois pode fornecer informações valiosas que não são evidentes à primeira vista (PEIRCE, 2005).

Além disso, como já citado, a familiaridade evidencia a construção de significados apoiada tanto pela dimensão didática, por seus motivos e disposições, quanto pela dimensão semiótica. Como afirma Peirce (2015, p. 254) “o significado de algo é a concepção que este algo veicula”. Assim, o significado está diretamente relacionado aos interpretantes que são produzidos e utilizados no decorrer da semiose. Portanto, os significados construídos no decorrer da atividade irão variar de acordo com o contexto em que esta é desenvolvida.

Incialmente, cabe destacar que A3 desacreditava na proposta feita pelo grupo para a atividade. Nas palavras de A3: *Eu, particularmente, não acho que seja possível determinar uma quantidade mínima de pasta. Acho que o máximo que a gente vai conseguir discutir é a forma como tem que aplicar a pasta para podermos cobrir a região toda*. Esta colocação de A3 deriva de sua experiência colateral com o fenômeno “aplicação de pasta isotérmica em placas de processadores” em que, na visão do estudante, a forma de aplicação é que impacta a distribuição ideal, ou não, da pasta isotérmica sobre a placa.

Neste ponto, com a intenção *direcionada a* alterar a concepção de A3 sobre a atividade a ser desenvolvida, A2 afirma que *se a gente definir a quantidade mínima de pasta necessária já resolve este problema, pois, independente da forma que aplicarmos, é a quantidade mínima que estaremos utilizando.* Esta interação de A2 com A3 tinha um propósito determinado: levar A3 a compreender a situação e, assim, aceitar desenvolvê-la com o grupo, ou seja, A2 buscou fazer com que A3 construísse novos significados relacionados à situação, o que foi atingido, uma vez que, após a referida interação A3 afirma que compreendeu a proposta do grupo.

Neste momento do episódio, A2 teve intencionalidade, isto é, estava *dirigido a* fazer com que A3 construísse outro significado para a situação discutida. É possível afirmar que tal intencionalidade contribui para a construção de significados a partir do que Bussi (2005, p. 162) irá descrever como "interações entre os atores que compõem o ambiente da sala de aula". Sendo assim, a construção de significado neste elemento do episódio se apoia na dimensão didática do significado.

Além disso, este episódio I deixa claro o motivo e a disposição do grupo para o desenvolvimento da presente atividade por G1: não desperdiçar pasta isotérmica, uma vez que o mililitro de pasta pode custar até R$ 100,00, conforme relatório dos estudantes. Isto é importante, pois, segundo Roncato (2021, p. 26) "são as disposições ou decisões que impulsionam os alunos à aprendizagem" e, consequentemente, possibilitam a construção de significados, o que também denota que a construção de significados nestes elementos também se apoia na dimensão didática.

Neste sentido, conforme discute Skovsmose (2018), os fatores que moveram a intencionalidade de G-1, neste caso, foram fatores econômicos e sociais: desenvolver a atividade proposta pelo grupo, possibilitará a economia de recursos orçamentários da Instituição, possibilitando o investimento destes recursos em outras áreas necessárias.

Do ponto de vista semiótico, vê-se que o desconforto dos estudantes com o desperdício de pasta isotérmica fez com que os mesmos produzissem determinados signos interpretantes para o fenômeno em si (aplicação de pasta isotérmica na placa de processador) e, a essa geração de interpretantes, denomina-se semiose.

Tem-se aqui, então, a constituição de semiose nos estudantes uma vez que a "identificação de um desconforto ou uma instabilidade, cuja superação é mediada pela semiose" (ALMEIDA; SILVA, 2017, p. 207).

Neste contexto, o desconforto com relação ao fenômeno foi identificado no grupo no momento em que os mesmos julgaram necessário determinar um modelo que representasse a quantidade mínima de pasta isotérmica a ser utilizada a fim de não haver desperdício do material.

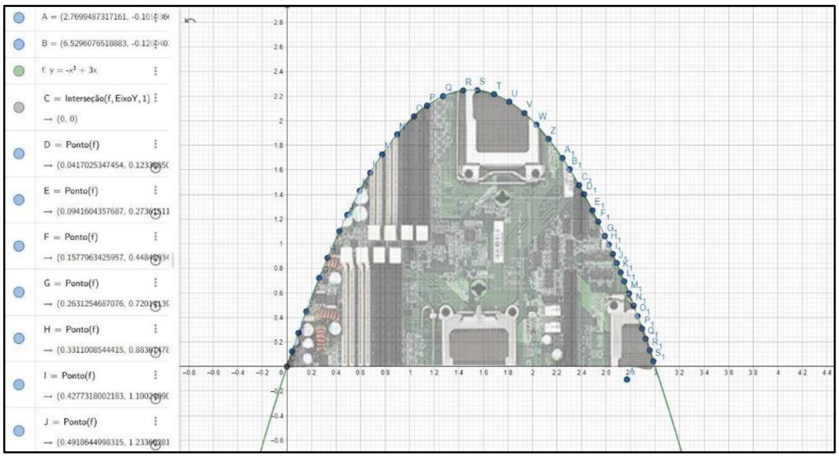
Uma outra questão a ser destacada deste episódio é a discussão dos grupos sobre o tipo de placa a ser considerada. Ao decidirem determinar um modelo que representasse a quantidade mínima de pasta isotérmica a ser utilizada na placa para processador escolhida, A3 questionou ser muito fácil a referida determinação uma vez que bastaria calcular a área de uma região retangular. Neste momento, novamente com a intenção *dirigida a* levar A3 a ressignificar suas percepções sobre o fenômeno, A2 apresentou um outro modelo de processador, conforme ilustrado na Figura 5.7.

Neste caso, evidencia-se que a construção de significado neste elemento do episódio se apoia na dimensão semiótica do significado já que é possível observar que a imagem supramencionada (processador da Figura 5.7) possibilitou que A3 pudesse visualizar a situação de uma nova maneira (as placas em que são aplicadas a pasta térmica não é apenas retangular), evidenciando a produção de signos interpretantes acerca do objeto estudado.

Neste momento, compreendida a situação, iniciou-se uma discussão sobre os meios matemáticos que possibilitassem resolver o problema proposto pelo grupo. Esta discussão e a resolução dos mesmos é apresentada no Episódio II por meio do Quadro 5.6.

Quadro 5.6: Episódio II da atividade *Aplicação de pasta isotérmica em placa de processador* de G-1

TIPO DE SIGNO	**DESCRIÇÃO**
Fala de A1	A1: Vamos pensar: o que precisamos fazer para determinar a área desta placa?
Fala de A2	A2: Vocês viram que o outro grupo [referindo à resolução da atividade Pavimentação de um estacionamento apresentada por G-2], utilizou o Geogebra para encontrar uma função para descrever o espaço a ser calculado? E se fizéssemos isso aqui?
Fala de A1	A1: Sim, na verdade a gente chegou a fazer isso também, mas achamos mais fácil utilizar a Regra de 1/3 de Simpson [referindo à resolução do grupo G1 da atividade Pavimentação de um estacionamento]. Agora podemos usar esta estratégia do Geogebra, né? Aí a gente não repete método de resolução.
Fala de A2	A2: Ok, vamos colocar a imagem desta placa no Geogebra então.

Imagem da plotagem da foto da placa no *software* Geogebra	
Parte da resolução da atividade *Aplicação de pasta isotérmica em placa de processador* do grupo G-1	Ao fazerem a plotagem da imagem no Geogebra e determinarem pontos para descrever a placa a ser utilizada, o grupo, por meio do software, encontrou que a função $f(x) = -x^2 + 3x$ representa o formato da placa, conforme destacado na Figura 5.8. Disso, iniciou-se um segundo diálogo relacionado à resolução do problema.
Fala de A1	A1: Certo, agora que temos essa f(x), basta determinarmos a área da região abaixo dela.
Parte da resolução da atividade *Aplicação de pasta isotérmica em placa de processador* do grupo G-1	Isto posto, o grupo determinou que, para a placa de processador escolhida e, considerando a hipótese de que para cada 40mm² de material são necessários 3,6ml de pasta, serão necessários 0,405ml de pasta isotérmica.

Fonte: autoria própria (2022).

O primeiro aspecto que fica evidenciado na análise do episódio II é a tratativa do grupo G1 para definir os métodos de resolução para a situação: *determinar um modelo que represente a quantidade mínima de pasta isotérmica a ser utilizada na placa para processador escolhida*. A2, de pronto, menciona o método resolutivo utilizado por outro grupo, no caso, o grupo G-2, na primeira atividade (Pavimentação de um estacionamento) em que os mesmos fizeram uso do *software* Geogebra para definição de uma função que possibilitasse calcular a área desejada.

Recorrer a um método de resolução já conhecido denota o que Peirce denomina de experiência colateral, o que influencia diretamente os significados construídos, uma vez que estes “[...] dependem diretamente da sua cultura, de seu conhecimento, e principalmente do conhecimento prévio que você tem sobre o que está vendo” (PEIRCE, 2005, p. 74). Sendo assim, conhecer um método resolutivo prévio auxilio os estudantes de G-1 a estabelecerem suas metas para resolução desta atividade.

Além disso, neste momento A1 explicita uma de suas intenções: não repetir o mesmo método resolutivo da atividade *Pavimentação de um estacionamento* já desenvolvida por este grupo. Esta intenção de A1 é evidenciada quando o mesmo afirma: *Agora podemos usar esta estratégia do Geogebra, né? Aí a gente não repete método de resolução*. Neste caso, o fator que direcionou a intencionalidade do grupo, conforme conceituado por Skovsmose (2018), foi o fator de prioridades: não usar o mesmo método anterior.

Definida a estratégia de resolução, os estudantes fizeram então a plotagem da imagem da placa representada na Figura 5.7 no *software* Geogebra, tendo como resultado a tela representada na Figura 5.8.

Neste caso, é possível observar que o signo “figura da placa do processador postada no *software* Geogebra” possibilitou que os estudantes pudessem visualizar a situação de uma nova maneira, evidenciando a produção de signos interpretantes acerca do objeto placa do processador. Ainda, sua associação com o recurso computacional possibilitou a produção de signos interpretantes acerca do objeto problema, uma vez que possibilitou ao grupo determinar a função $f(x) = -x^2 + 3x$ como representante do formato da placa selecionada.

Com esta função obtida, o grupo seguiu para os cálculos descritos no episódio II, determinando-se que, para a placa em questão, seriam necessários 0,405ml de pasta isotérmica.

Assim, no desenvolvimento da atividade, evidenciou-se que o grupo fez uso de diferentes signos que possibilitaram a produção de signos interpretantes acerca do problema, do fenômeno e da matemática abordada, nas diferentes fases da atividade.

Finalizado o desenvolvimento em grupo desta atividade, solicitou-se, novamente, que os estudantes, individualmente, respondessem a um questionário com quatro perguntas relacionadas às ações por eles tomadas no desenvolvimento da atividade, ao significado que a atividade teve pra eles e à importância que eles atribuíram à atividade e às diferentes ações tomadas. O terceiro episódio relacionado a esta atividade também faz referências às respostas dadas pelos estudantes a duas perguntas específicas e é apresentado no Quadro 5.7:

1) Na realização da atividade *Aplicação de pasta isotérmica em placa de processador*, você desenvolveu várias ações para atingir o seu objetivo. Tente se lembrar das coisas que você fez, das coisas que você pensou e das coisas que você aprendeu durante essa atividade. Descreva-as abaixo e comente as que foram mais marcantes para você.

2) O que significou para você essa atividade? Que importância você atribui a ela? Explique.

Quadro 5.7: Episódio III da atividade *Aplicação de pasta isotérmica em placa de processador* de G-1

TIPO DE SIGNO	**DESCRIÇÃO**
Respostas de A1	A1: Acho que o mais importante aqui, foi eu aprender a quantidade mínima de pasta que tenho que utilizar nos processadores. Realmente essa era uma questão que sempre me incomodava no laboratório, pois, como a pasta é bem cara, desperdiçá-la nunca foi uma boa ideia. Para além disso, aprendi uma maneira diferente de utilizar o cálculo integral em situações reais, na prática, e vi que muitas das vezes as situações que parecem complexas podem ser solucionadas de maneira mais rápida e prática por meio do cálculo. [...] Pra mim esta atividade significou a resolução de um problema real da minha vida. Fizemos um teste no final e a quantidade obtida pelo nosso modelo de fato cobriu toda a nossa placa, resolvendo o nosso problema: evitar o desperdício da pasta isotérmica.
Respostas de A2	A2: Para calcular a quantidade mínima de pasta a ser aplicada em uma plaquinha de processador inicialmente nós escolhemos a placa a ser utilizada e, depois disso, 'jogamos' a imagem desta placa no Geogebra. O uso do Geogebra se deu para definirmos uma função que nos permitisse calcular a área dessa plaquinha para, a partir disso, definirmos a quantidade mínima de pasta a ser utilizada. Destaco que a quantidade de pasta em si, foi feita com base na hipótese de que para cada 40mm² de material são necessários 3,6ml. Depois disso, chegamos ao nosso resultado. [...] Significou que o Cálculo Integral possibilita a resolução de problemas práticos e do cotidiano, além disso, percebi que o cálculo ajuda e facilita o desenvolvimento de atividades que, muito provavelmente, não poderiam ser resolvidos sem os conhecimentos de cálculo.
Respostas de A3	A3: Sem dúvidas, meu maior desafio nesta atividade foi interpretá-la e identificar por onde deveria começar, muitas das

	vezes, em sala de aula, especialmente de Cálculo, eu só conseguia realizar as atividades apenas depois que o professor dava umas dicas de como iniciar e, neste caso, não havia essa possibilidade. Como foi uma situação proposta por nós, éramos nós quem deveríamos propor uma solução. Além disso, nós [referindo-se ao grupo G-1] não queríamos utilizar a mesma regra que utilizamos na atividade anterior, o que, inicialmente, dificultou ainda mais a situação. [...] Pra mim, a realização dessa atividade permitiu o reforço de alguns conceitos que tenho dificuldade de compreender e, também, de como utilizar o cálculo integral "na prática", com situações reais. Assim, a troca de informações e o diálogo foram um dos aspectos mais importantes com meu grupo e com os professores.

Fonte: autoria própria (2022).

As respostas de A1 ao questionário evidenciam que a construção de significado se apoia na dimensão didática do significado, uma vez que esta está relacionada à sua prática enquanto estudante de Iniciação Científica que atua no laboratório de metrologia, quando o mesmo menciona que *“essa era uma questão que sempre me incomodava no laboratório, pois, como a pasta é bem cara* [cerca de R$ 100,00 o ml, conforme relatório do grupo] *desperdiçá-la nunca foi uma boa ideia”*.

Esta construção de significado vai ao encontro da intencionalidade relacionada à dimensão didática do significado, direcionada pelo fator *econômico* (intenção de economizar recurso), pelo fator *social* (economizando recurso do laboratório, será possível investir em outras áreas da Instituição) e pelo fator *estar dirigido a* (neste caso, estar dirigido a resolver o problema proposto). Tal intencionalidade e fatores são corroborados pela resposta de A1 quando questionado sobre o que significou a atividade para ele.

Em resposta ao questionamento, A1 informa que a atividade, para ele, *significou a resolução de um problema real da [...] vida*, desse modo, ressalta-se que a opção de um aluno, por exemplo, em realizar ou não as tarefas matemáticas propostas estão relacionadas, também, com a intencionalidade presente nesta execução (RONCATO, 2021, p. 46).

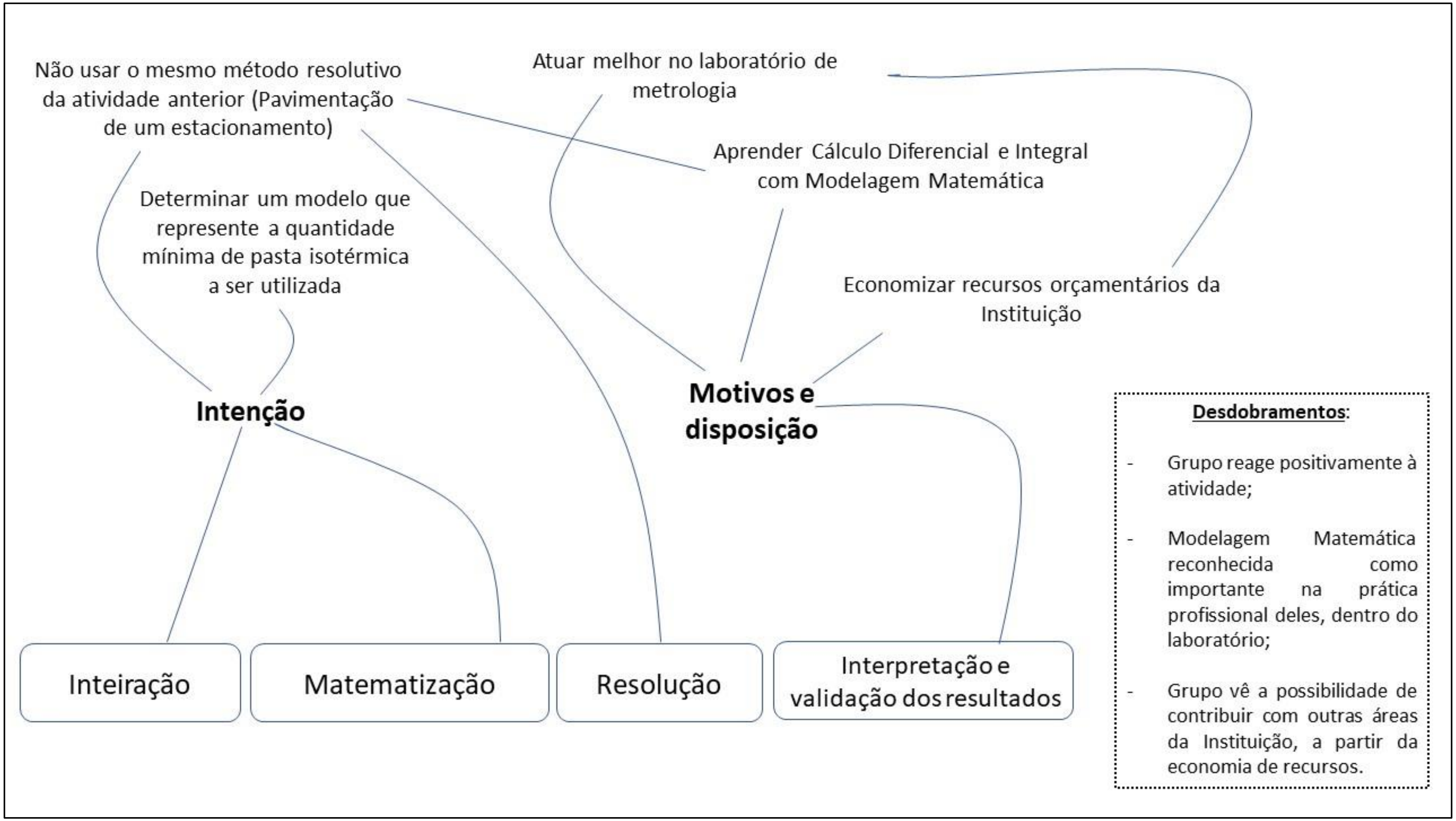
O estudante A2, por sua vez, ao ser questionado sobre o que a presente atividade significou para ele, menciona sua aprendizagem sobre as aplicações do Cálculo Diferencial e Integral na resolução de situações cotidianas. Logo, vê-se que, para A2 os significados construídos foram mais direcionados ao objeto matemático em si, ficando mais evidentes no decorrer das fases de matematização e resolução da atividade.

De forma análoga, A3 também explicita os significados construídos em termos do objeto matemático. Ao ser questionado sobre a importância da atividade o mesmo respondeu que antes da atividade "só conseguia realizar as atividades depois que o professor dava umas dicas de como iniciar e, neste caso, não havia essa possibilidade", já que a situação estava sendo criada por eles mesmos. Além disso, ainda para A3, a realização da atividade permitiu o reforço de alguns conceitos que o mesmo tinha dificuldade na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II.

É por meio da possibilidade de discutir diferentes modos de pensar o problema que distintos encaminhamentos podem ser dados para a sua resolução. Como menciona Vertuan (2013), os signos, ao mesmo tempo em que conferem significado ao percurso do desenvolver a atividade, ganham significados nesse percurso, o que denota que a interação determina o encaminhamento de um desenvolvimento e as consequentes possibilidades de aprendizagem suscitadas pelo problema.

Assim, em termos gerais, os elementos da dimensão didática da construção de significado estão sistematizados na árvore de associação de ideias da Figura 5.3.

Figura 5.3: Elementos da dimensão didática da construção de significado

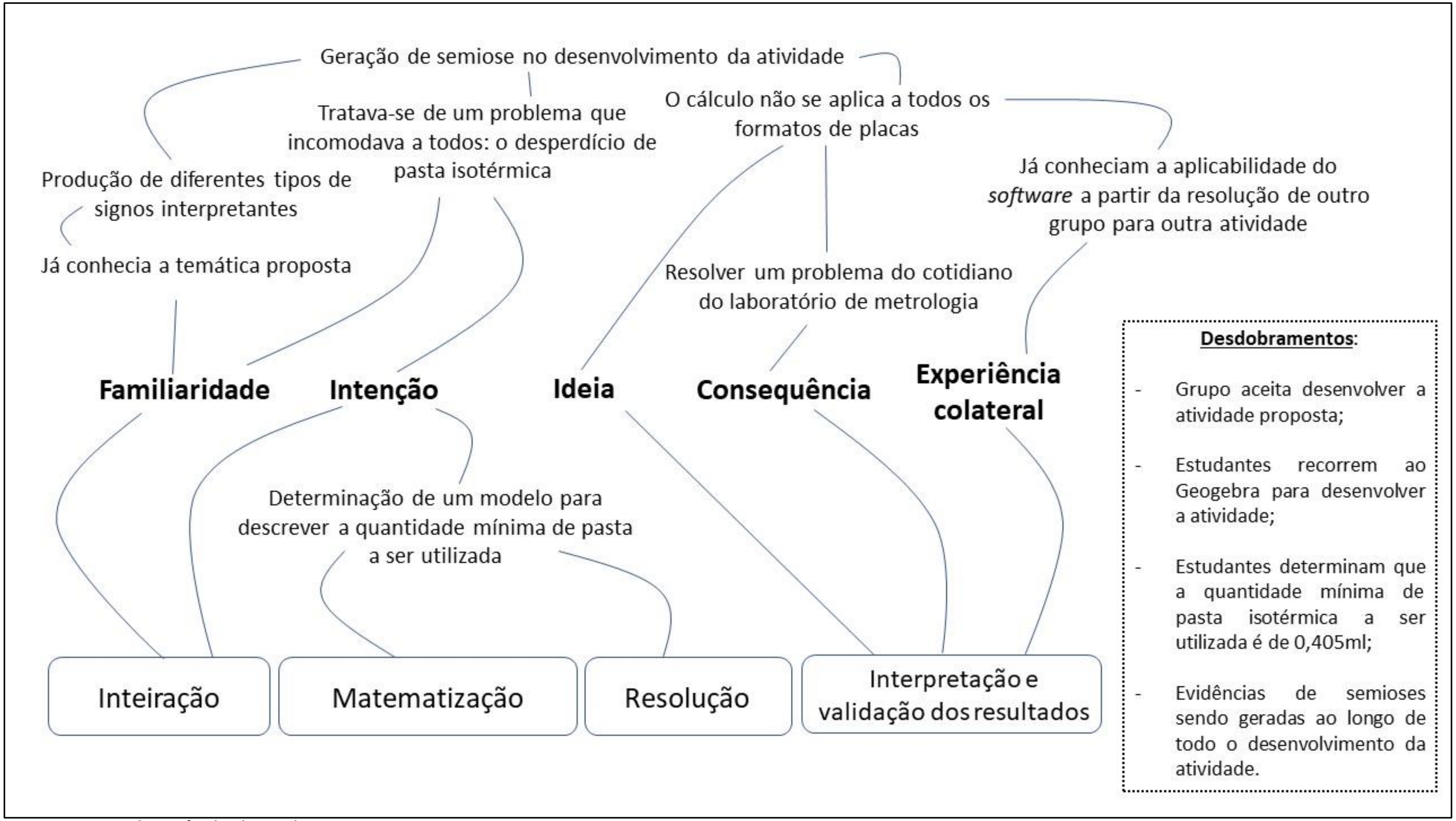


Fonte: autoria própria (2023).

A identificação dos elementos da dimensão didática da construção de significado tem como foco o processo de aprendizagem e como os indivíduos constroem conhecimento e significado a partir de experiências educacionais. Assim, tendo como raiz da árvore as fases de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, é possível evidenciar aqui que, no caso desta atividade, os significados construídos estão diretamente relacionados ao uso de conceitos matemáticos estudados na disciplina e à formação profissional dos integrantes do grupo.

Por sua vez, os elementos da dimensão semiótica da construção de significado que puderam ser evidenciados estão sistematizados na árvore de associação de ideias da Figura 5.4.

Figura 5.4: Elementos da dimensão semiótica da construção de significado



Fonte: autoria própria (2023).

A identificação dos elementos da dimensão semiótica da construção de significado baseia-se na concepção de que os signos são compostos por três elementos fundamentais: o signo em si (ou *representamen*), o objeto que ele representa e o interpretante, ou seja, o efeito que o signo tem no intérprete. Assim, é possível compreender como os signos são utilizados para transmitir e construir significado em diferentes contextos, possibilitando uma compreensão a respeito de como os signos são utilizados para construir representações e como essas representações podem afetar a forma como as pessoas percebem o mundo ao seu redor.

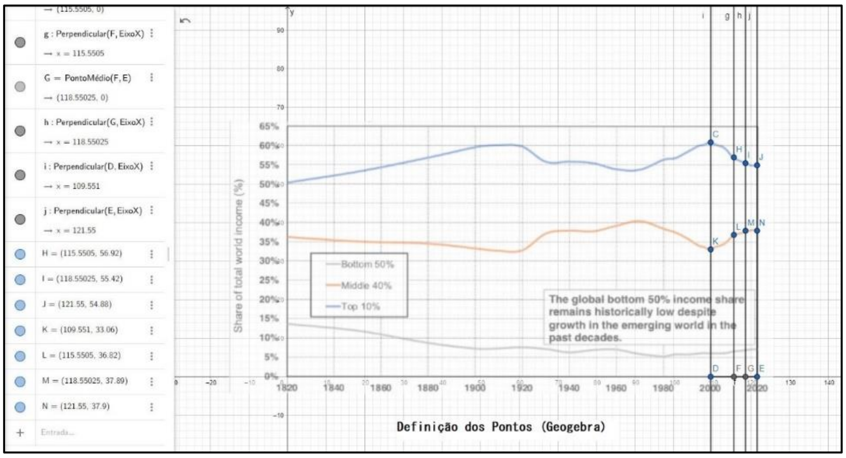
5.3 ATIVIDADE *DISTRIBUIÇÃO DE RIQUEZAS NO MUNDO* DESENVOLVIDA PELO GRUPO G-2

A temática *Distribuição de Riquezas no Mundo* foi proposta pelo pesquisador para todos os alunos da Universidade B mediante informações já descritas nas Figuras 4.6 e 4.7 deste relatório de pesquisa. Levando em conta que esta atividade foi a primeira atividade de modelagem matemática desenvolvida pela maior parte dos estudantes que estavam matriculados na disciplina de Etnomatemática e Tópicos de Educação para a Cidadania, as discussões iniciais foram realizadas coletivamente, conforme consta no Quadro 4.5.

Desta forma, após a proposição do seguinte desafio aos grupos: *Suponha que você, enquanto aluno do curso de Licenciatura em Matemática, foi convidado a escrever uma carta a ser publicada em um jornal da comunidade acadêmica local falando sobre a distribuição desigual das riquezas. Faça uma abordagem matemática e apresente sua carta com a fundamentação necessária,* e após a definição do problema a ser resolvido: *estimar a distribuição de riquezas no mundo para o os próximos 20 anos, considerando os percentuais anteriores,* iniciou-se a seguinte discussão entre os componentes do grupo G-2, composto pelos alunos A4, A5, A6, A7, A8 e A9, e resolução que denominamos de Episódio I e apresentamos no Quadro 5.8.

Quadro 5.8: Episódio I da atividade *Distribuição de riqueza no mundo* de G-2

TIPO DE SIGNO	DESCRIÇÃO

<table>
<tr><td>Fala de A4</td><td>A4: A primeira coisa que precisamos fazer aqui e encontrar um padrão neste comportamento, pois só com este padrão é que vamos conseguir determinar algum tipo de previsão para os próximos anos.</td></tr>
<tr><td>Fala de A7</td><td>A7: Sim, mas se conseguirmos determinar essas funções que estávamos discutindo com o professor, a gente encontra este padrão. A gente consegue usar o Geogebra pra tentar encontrar estas funções. Será que não? Já fizemos isso no Geogebra outras vezes. Vamos plotar esta imagem que temos no Geogebra e ver o que encontramos.</td></tr>
<tr><td>Projeção do gráfico no software Geogebra</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Modelos construídos por G-2 para a atividade Distribuição de riquezas no mundo</td><td>$f(x) = 0{,}01(x-2000)^2 - 0{,}503(x-2000) + 60{,}83 \ \ para\ x \geq 2000$

$j(x) = -0{,}01(x-2000)^2 + 0{,}53x + 33{,}04 \ \ para\ x \geq 2000$</td></tr>
<tr><td>Validação dos modelos $f(x)$ e $j(x)$ feita por G-2</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="4">Classe Alta</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Ano</td><td>Variável</td><td>% Dado</td><td>% Modelado</td><td>Diferença</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2000</td><td>0</td><td>60,81</td><td>60,83</td><td>-0,02</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2010</td><td>10</td><td>56,92</td><td>56,80</td><td>0,12</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2015</td><td>15</td><td>55,42</td><td>55,54</td><td>-0,11</td></tr>
<tr><td>6</td><td>2020</td><td>20</td><td>54,88</td><td>54,77</td><td>0,11</td></tr>
<tr><td>7</td><td>2040</td><td>40</td><td></td><td>56,71</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="4">Classe Média</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>Ano</td><td>Variável</td><td>% Dado</td><td>% Modelado</td><td>Diferença</td></tr>
<tr><td>11</td><td>2000</td><td>0</td><td>33,06</td><td>33,04</td><td>0,02</td></tr>
<tr><td>12</td><td>2010</td><td>10</td><td>36,82</td><td>37,34</td><td>-0,52</td></tr>
<tr><td>13</td><td>2015</td><td>15</td><td>37,89</td><td>38,74</td><td>-0,85</td></tr>
<tr><td>14</td><td>2020</td><td>20</td><td>37,9</td><td>39,64</td><td>-1,74</td></tr>
<tr><td>15</td><td>2040</td><td>40</td><td></td><td>38,24</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Fala de A5</td><td>A5: Neste caso aqui, não são três classes. São quatro, vejam! Parece que aqui existe uma subdivisão que a gente não considerou na primeira parte.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Fala de A8</td><td>A8: Nossa, será que vamos ter que começar do zero?</td></tr>
<tr><td>Fala de A4</td><td>A4: Eu acho que não! Porque, pra fazermos com estas quatro classes o que fizemos antes, precisaríamos de muito mais informações sobre a distribuição. E não temos nada disso aqui. E se a gente tentasse proporcionalizar, então?</td></tr>
<tr><td>Distribuição da riqueza no mundo por classes sociais</td><td>
<table>
<tr><th>Classe</th><th>$f_a(em\ n^o\ de\ pessoas)$
(% de 7,8 bilhões)</th><th>$f_r(em\ \%)$
(% de 7,8 bilhões)</th></tr>
<tr><td>Alta (elite)</td><td>≈ 4,423 bilhões</td><td>56,71%</td></tr>
<tr><td>Média alta</td><td>≈ 2,209 bilhões</td><td>28,32%</td></tr>
<tr><td>Média baixa</td><td>≈ 0,774 bilhões</td><td>9,92%</td></tr>
<tr><td>Baixa</td><td>≈ 0,339 bilhões</td><td>5,05%</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Fonte: autoria própria (2023).

As ações de G-2 na modelagem matemática dessa situação, com vistas a informar a comunidade acadêmica sobre a distribuição de riquezas entre as diferentes classes sociais, foram mediadas pelas interações provenientes de um trabalho colaborativo. A atividade matemática de interpretar os dados de gráficos e de imagens e obter modelos matemáticos para fazer estimativas sobre a situação da realidade em estudo foi dinâmica e não se orientou por uma aula expositiva da professora. Ao invés disso, negociações de significados das informações subsidiaram a construção de modelos matemáticos. Essa construção foi realizada com o suporte de ferramentas da tecnologia.

No diálogo inicial do episódio I, conforme Quadro 5.8, os alunos discutem maneiras de solucionarem o problema inicialmente proposto e, dentre tais maneiras, A4 sinaliza a possibilidade de determinar um padrão no comportamento dos dados. Para tal, A7 sugere a plotagem do gráfico disponibilizado aos alunos no *software* Geogebra, a fim de "[...] ver o que encontramos" (fala de A7). Além disso, A7 deixa claro que o recurso tecnológico Geogebra é conhecimento por eles ao afirmarem já o terem utilizado outras vezes, denotando, assim, certa familiaridade do grupo com o uso do *software*.

No que diz respeito à dimensão didática da construção do significado, fica evidente, no diálogo, a intenção do grupo G-2 de determinar modelos que possibilitem discutir, com mais precisão, a distribuição de riquezas no mundo nas diferentes classes e, tal intenção, está diretamente relacionada aos seus motivos, isto é, desenvolver a atividade proposta, tendo em vista que a mesma compõe o sistema avaliativo do bimestre na disciplina de Etnomatemática e Tópicos de Educação para a Cidadania.

Ao fazerem a reprodução do gráfico no *software* o grupo faz a demarcação de alguns pontos que seriam utilizados para o ajuste de uma função que descrevesse a distribuição de riquezas para as classes altas e médias. Neste caso, o signo gráfico do Geogebra possibilitou que os alunos visualizassem matematicamente o fenômeno distribuição de riquezas. Após, sua associação com o recurso tecnológico Curve permitiu com que os estudantes reescrevessem, matematicamente, o comportamento gráfico por meio das funções $f(x) = 0{,}01(x-2000)^2 - 0{,}503(x-2000) + 60{,}83\ \ (para\ x \geq 2000)$ e $j(x) = -0{,}01(x-2000)^2 + 0{,}53x + 33{,}04\ \ (para\ x \geq 2000)$.

Tendo obtidos os supracitados modelos, o grupo, fundamentado nas etapas relacionadas ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, lançaram mão de procedimentos para validação dos modelos construídos. Neste momento, ao considerarem as diferenças dos valores obtidos por meio dos modelos e os percentuais de distribuição apresentados no gráfico irrelevantes, o grupo G-2 considerou ambos os modelos válidos, utilizando-os, a partir daí, para determinarem os percentuais de distribuição de riquezas para as classes sociais alta e média.

Em um segundo momento da atividade, conforme descrito no capítulo anterior, iniciou-se uma discussão com os grupos sobre a quantidade de pessoas pertencentes a cada uma das classes sociais consideradas. No entanto, por se tratar de fontes de informações distintas, essa segunda discussão fundamentou-se em uma literatura que estratificava a população em quatro classes sociais e não em três o que, de início, causou certo desconforto ao grupo.

Tal desconforto possibilitou o desencadear de novas semioses no grupo, uma vez que, como assevera Drigo (2007), a semiose se dá a partir da atualização da mente, isto é, um novo signo é gerado (um interpretante) com a identificação de um desconforto ou uma instabilidade, cuja superação é mediada pela semiose. Portanto, a construção de significado nestes elementos do episódio se apoia na dimensão semiótica do significado.

Na sequência, tendo a intenção de redistribuir os percentuais obtidos anteriormente, fazendo uso de regras de proporção matemática, G-2 fez uma nova distribuição de rendas em quatro classes, conforme consta no relatório do grupo.

Neste momento, tendo os resultados matemáticos obtidos como base para a construção dos argumentos que seriam utilizados para escrever a carta, o grupo fez a elaboração da mesma, conforme proposto inicialmente na atividade. Além da carta, conforme descrito no capítulo anterior deste relatório de pesquisa, os integrantes do grupo também foram levados a refletirem criticamente sobre a situação da distribuição de riqueza no mundo, assim como o papel da matemática no estudo da situação. Trechos da carta elaborada pelo grupo e trechos das reflexões registradas por eles são apresentadas no Episódio II, conforme Quadro 5.9. Tanto as reflexões, quanto a carta de G-2, podem ser consultadas na íntegra nos quadros 4.6 e 4.8, respectivamente.

Quadro 5.9: Episódio II da atividade *Distribuição de riqueza no mundo* de G-2

TIPO DE SIGNO	**DESCRIÇÃO**
Trechos da carta elaborada pelo grupo G-2 sobre a distribuição de riquezas no mundo	A princípio, para tal análise, tomamos como base, dados obtidos para a distribuição de riquezas nos últimos 20 anos para investigarmos e encontrarmos uma possível projeção para os próximos 20 anos. Fizemos isso com base nos dados relativos à distribuição de riquezas e à quantidade de pessoas que se inclui em cada classe social. Claramente esses dados indicam um certo padrão em relação a uma queda nos últimos vinte anos da renda da classe alta e a um crescimento das classes média e baixa. Primeiramente, nós construímos modelos matemáticos com o uso de dois softwares educacionais, o Geogebra e o Curve, para estimar como seria essa distribuição de riquezas nos próximos 20 anos, ou seja, como seria essa distribuição no ano de 2040. [...] Com isso, percebemos que, lamentavelmente, a concentração de riquezas continuará com a classe alta. Enquanto isso, as riquezas da classe baixa (a maioria do país) terão uma possível queda, uma vez que tínhamos em 2020 aproximadamente 7,22% da distribuição destinada à classe baixa, e para uma projeção em 2040, obtivemos apenas 5,05%, uma queda de aproximadamente 2,17%, mantendo assim, uma extrema desigualdade. [...]

	De fato, mais da metade das riquezas estará concentrada na classe alta, fato esse que provoca cada vez mais a desigualdade social e o desfavorecimento de benefícios da classe baixa que representa cerca de 55% da população mundial.
Análise crítica de G-2 sobre a distribuição de riquezas no mundo	É totalmente visível, ao analisarmos o gráfico, que a riqueza se concentra nas mãos de uma quantidade muito pequena da população há muito tempo. Mesmo quando há quedas na riqueza da classe alta, a classe baixa oscila muito pouco. [...] Dessa forma, é nítido que a riqueza se concentra nas classes alta e média, onde se encontram poucas pessoas comparada à quantidade de pessoas que compõem a classe baixa. Essa distribuição não tende a melhorar.
Reflexão de G-2 sobre o papel da matemática no estudo da distribuição de riquezas no mundo	A Matemática nos traz a possibilidade de estudarmos e analisarmos situações a fim de inferir possíveis resultados futuros e com isso, podermos tomar devidas providências, realizando reflexões e tomando atitudes, agindo como indivíduos críticos. [...] A matemática permite a quantificação, a mensuração das desigualdades sofridas pela sociedade, possibilita fazermos comparações e analisar a proporção das pessoas e concentração de renda, podemos dessa forma comparar a realidade contribuindo para uma visão crítica da sociedade.

Fonte: autoria própria (2023).

Ao se analisar qualitativamente os trechos da carta e das reflexões apresentadas por G-2 à atividade *Distribuição de riquezas no mundo* fica evidente a construção de diferentes significados.

No que diz respeito aos elementos da dimensão didática da construção do significado, uma série de motivos e disposições emergem da referida análise. Dentre tais motivos, destaca-se o fato de que, conforme mencionado na carta, estudos dessa natureza mostram a necessidade de uma tomada de providência, tendo em vista que a distribuição de riquezas não tende a melhorar nos próximos 20 anos, possibilitando um olhar mais crítico da realidade, além de permitir uma colaboração conjunta para melhora da sociedade. Isso posto, vê-se que, no que tange à intencionalidade do grupo, esta, neste momento da atividade, estava direcionada à fatores econômicos e sociais, conforme descrito por Skovsmose (2018).

Além disso, ficou evidenciado pelos registros de G-2 que a matemática permite a quantificação e mensuração da desigualdade, mostrando para o grupo que, ainda que haja certa alteração nos percentuais de distribuição das classes, as alterações são mais evidentes entre as classes alta e média, ficando a classe baixa, sempre com o mínimo de riqueza, sendo esta uma consequência da forma como a riqueza é distribuída atualmente.

Assim, com a atividade, foi possível gerar uma discussão e um resultado, expresso na carta escrita pelo grupo, considerando os interesses da disciplina em propor uma abordagem matemática alinhada com princípios da Educação Matemática Crítica, em consonância com a prerrogativa de Skovsmose (2005) de que

> a discussão do significado na Educação Matemática não pode ser estruturada pelas prioridades do conceitualismo, em vez disso, tal discussão tem a ver com o significado das atividades nas quais os estudantes estão envolvidos como parte de um processo educacional (SKOVSMOSE, 2005, p. 86).

A carta escrita pode ser percebida como instrumento capaz de evidenciar o significado construído pelo grupo relativamente à situação, considerando que escrevem, “[...] percebemos que, lamentavelmente, a concentração de riquezas continuará com a classe alta. Enquanto isso, as riquezas da classe baixa (a maioria do país) terão uma possível queda, uma vez que tínhamos em 2020 aproximadamente 7,22% da distribuição destinada à classe baixa, e para uma projeção em 2040, obtivemos apenas 5,05%, uma queda de aproximadamente 2,17%, mantendo assim, uma extrema desigualdade em relação à distribuição de riquezas”. (relatório do grupo).

Além disso, conforme já citado, o desenvolvimento desta atividade, conforme resposta do grupo apresentado, possibilitou realizar reflexões e agir como indivíduos críticos. As respostas dos alunos indicadas no Quadro 5.9, vão ao encontro do que Skovsmove (2016, p. 416) defende sobre a construção do significado apoiada na dimensão didática do significado. Segundo o autor, a aprendizagem é como ação “[...] e as intencionalidades são cruciais para analisar as atividades de aprendizagem e para interpretar as experiências dos alunos de significado relacionadas a tais atividades”.

No caso de G-2, após a construção do significado relacionado à situação em si, a intenção dos mesmos em desenvolver a presente atividade era mostrar de uma forma crítica como a matemática pode mostrar especificidades e características de situações da realidade.

Assim como nas atividades anteriores, findado o desenvolvimento da atividade em grupo, solicitou-se que os estudantes, individualmente, respondessem a um questionário com quatro perguntas relacionadas às ações por eles tomadas no desenvolvimento da atividade, ao significado que a atividade teve pra eles e à importância que eles atribuíram à atividade e às diferentes ações tomadas. O terceiro episódio relacionado a esta atividade faz referências às respostas dadas pelos estudantes à duas perguntas específicas e é apresentado no Quadro 5.10:

1) Na realização da atividade *Distribuição de riquezas no mundo*, você desenvolveu várias ações para atingir um objetivo, teve que pensar em várias coisas diferentes e, provavelmente, aprendeu algumas coisas que você ainda não sabia. Tente se lembrar das coisas que você fez, das coisas que você pensou e das coisas que você aprendeu durante essa atividade. Descreva-as abaixo e comente as que foram mais marcantes para você.

2) O que significou para você essa atividade? Que importância você atribui a ela? Explique.

Quadro 5.10: Episódio III da atividade *Distribuição de riquezas no mundo* de G-2

TIPO DE SIGNO	DESCRIÇÃO
Respostas de A4	A4: Conhecer o *software* Curve para o ajuste de curvas foi maravilhoso. A possibilidade de enxergar como a matemática pode nos ajudar para tratarmos de reflexões sobre assuntos da humanidade e problemas dessa magnitude por meio da Educação Matemática foi o meu maior aprendizado com a atividade. [...] Foi uma atividade interessante, principalmente quando aprendemos novas ferramentas no Geogebra e vimos um aplicativo novo para utilizarmos. Nos ajudou a melhorar nosso pensamento matemático e senso crítico. Além, de certa forma, podermos prever e estimar dados com a matemática.
Reposta de A5	A5: O primeiro ponto mais marcante já foi logo a problemática para a qual tínhamos de pensar em uma solução possível: prever a distribuição de riquezas para 2040. O fato da previsão de uma situação real, por si só, já chama a atenção. Outro ponto marcante foi o fato de podermos, em grupo, discutir possíveis caminhos para possível solução, como se fôssemos investigadores, sentindo nossa própria utilidade.

	A ideia de colocar o gráfico no Geogebra para a retirada de dados para iniciar a resolução foi algo que considerei uma ótima estratégia e não havia pensado nisso logo de primeira. [...] Para mim, essa atividade foi muito interessante e, ao mesmo tempo, muito importante, visto que, com ela, tivemos a possibilidade de utilizar o conhecimento matemático de uma outra forma, diferentemente do que é apresentado nos livros didáticos. A forma como a atividade foi proposta, nos instigou a analisar o problema que tínhamos, não só no que diz respeito à matemática a ser utilizada, mas também nos levou a refletir criticamente toda a situação que nos foi apresentada.
Resposta de A6	A6: Eu, particularmente, gostei muito dessa atividade, pois ela me fez lembrar de minha graduação em Ciências Econômicas, onde fazíamos análises e projeções econômicas como esta. É muito importante refletir como a riqueza é mal distribuída no mundo. Foi muito interessante o uso do Geogebra. [...] É necessário pensar na desigualdade da distribuição de riquezas. Temos que analisar sempre estes dados e mostrar para as pessoas estas injustiças.
Resposta de A7	A7: Gostei de analisarmos os fatos mais recentes que impactarão mais na realidade próxima. Utilizamos os 20 anos anteriores para fazer uma análise e projetarmos os próximos 20. Conhecer os softwares e discorrer sobre como utilizá-los foi algo muito importante para minha formação. [...] Foi uma atividade bem interessante do ponto de vista da sua aplicabilidade, análise de comportamentos de funções e relações com o cotidiano. De início, tive a impressão de tratar-se de uma atividade com metodologia investigativa, já que tínhamos um problema norteador e nossa função era resolver o problema a partir de métodos definidos por nós mesmos.
Resposta de A8	A8: Durante a realização da atividade “Distribuição de riquezas no mundo”, dentre todas as ações desenvolvidas, a maneira como foi encontrada a função por meio do Geogebra foi algo que me chamou muita atenção e principalmente a parte a qual ele ensinou como obter o gráfico apenas partir do ponto que eu desejo, com toda certeza colaborou muito para com a minha aprendizagem. [...] A atividade “Distribuição de riquezas no mundo”, foi significativa em termos deste ser um tema bastante citado em jornais, no conteúdo escolar, porém calcular estimativas determinando a possibilidade de como ela será daqui a alguns foi a primeira vez que vi e fiz. E isso me fez refletir que a desigualdade global sempre foi deveras grande e a tendência de redução é pouca e a longo prazo.
Resposta de A9	Durante a atividade realizada em sala consegui desenvolver muito melhor o olhar crítico, visto que tenho certa dificuldade em extrair dados dos gráficos e com essa atividade consegui desenvolver. Além disso, pude perceber como a matemática envolvida em um simples gráfico, poder projetar acontecimentos

	para os próximos anos. A atividade fez com que eu entendesse mais sobre interpretar gráfico, analisar dados, utilizar o GeoGebra e trabalhar com proporção ao distribuir a classe média em classe média alta e média baixa. [...] A atividade me fez ter um olhar mais crítico da matemática em si, não são somente números, esses números representam riquezas que estão sendo distribuídas para a população, ou seja, para nós. Com essa atividade pude compreender melhor o mundo em que vivo e como as classes sociais se comportam.

Fonte: autoria própria (2023).

No campo educacional, ao explorar a concepção de construção de significado, Bussi (2005), Kilpatrick et al. (2005), Skovsmose (2018) e Roncato (2021) destacam que a atividade está vinculada diretamente a ideia de necessidade, isto é, à ideia de se ter um motivo para aprender. Assim, é o motivo que impulsiona a ação do estudante, de modo que ele seja responsável por sua aprendizagem, facilitando seu desejo por saber o porquê de determinada atividade e aonde se pretenderá chegar com ela.

Neste sentido, as respostas dos seis integrantes do grupo mostram, predominantemente, dois diferentes motivos para se desenvolver a atividade então proposta, a saber: i) fazer a previsão da distribuição de riqueza no mundo para os próximos anos; e ii) mostrar, para o mundo, uma situação considerada extremamente injusta.

Assim, a partir de um ponto de vista semiótico, a intenção de tomar providências e refletir criticamente sobre a situação influenciou nos diferentes significados construídos pelos integrantes de G-2.

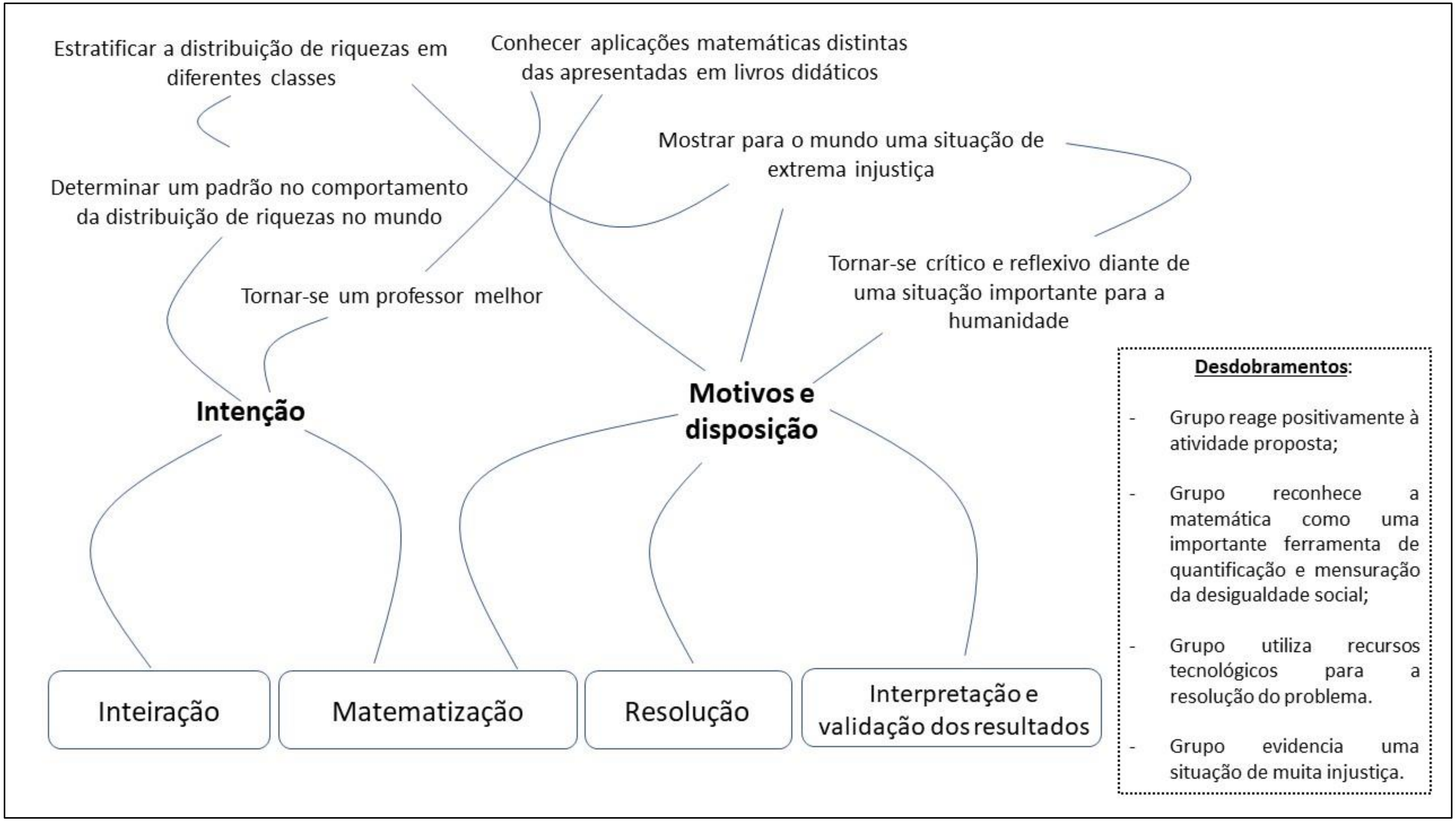
Especificamente A4 menciona que a matemática aplicada a questões da humanidade possibilita uma aprendizagem mais aprofundada do conhecimento matemático, indo ao encontro do que registrou A5 quando este afirma ter a atividade possibilitado que ele utilizasse a matemática de uma maneira diferente daquelas propostas em livros didáticos, tornando-se, assim, mais instigante.

Ainda sobre as contribuições da atividade para a formação acadêmica dos estudantes, A7 e A8 destacam a importância de se trabalhar com diferentes *softwares*, tendo em vista que práticas em mídias e tecnologias para a educação fazem parte do escopo do curso de Licenciatura em Matemática, do qual estão inseridos.

Com relação à influência da experiência colateral do intérprete para com o signo na construção de significados, vale destacar o mencionado por A6, de que a atividade o fez lembrar de sua graduação em Ciências Econômicas, tendo esta familiaridade com análises e projeções econômicas da mesma natureza da proposta na atividade. Portanto, neste caso, evidencia-se a construção de significado apoiada na dimensão semiótica do significado.

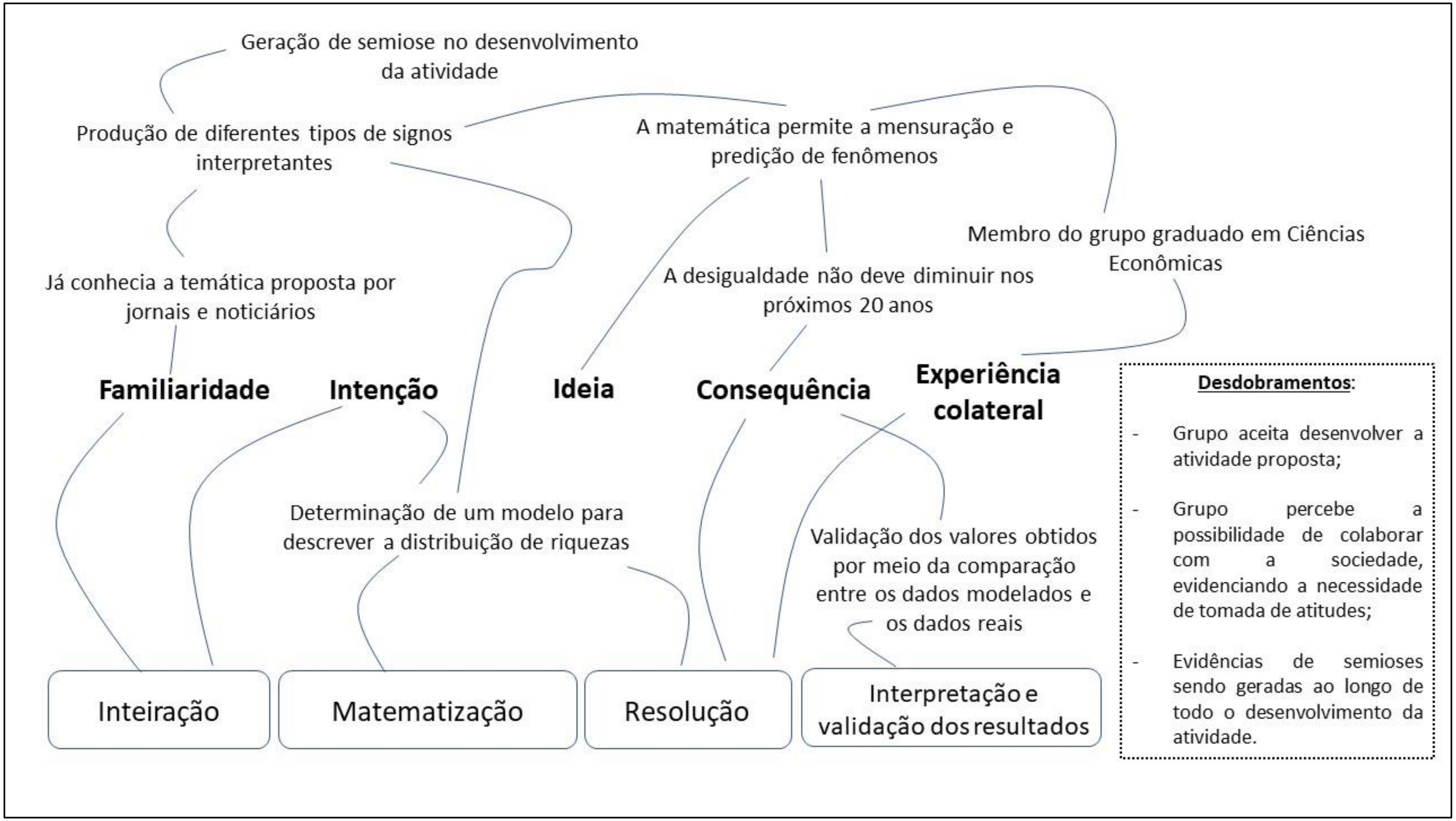
Isto posto, em termos gerais, os elementos da dimensão didática da construção de significado que puderam ser evidenciados estão sistematizados na árvore de associação de ideias da Figura 5.5 e, por sua vez, os elementos da dimensão semiótica da construção de significado que puderam ser evidenciados estão sistematizados na árvore de associação de ideias da Figura 5.6.

Figura 5.5: Elementos da dimensão didática da construção de significado



Fonte: autoria própria (2023).

Figura 5.6: Elementos da dimensão semiótica da construção de significado



Fonte: autoria própria (2023).

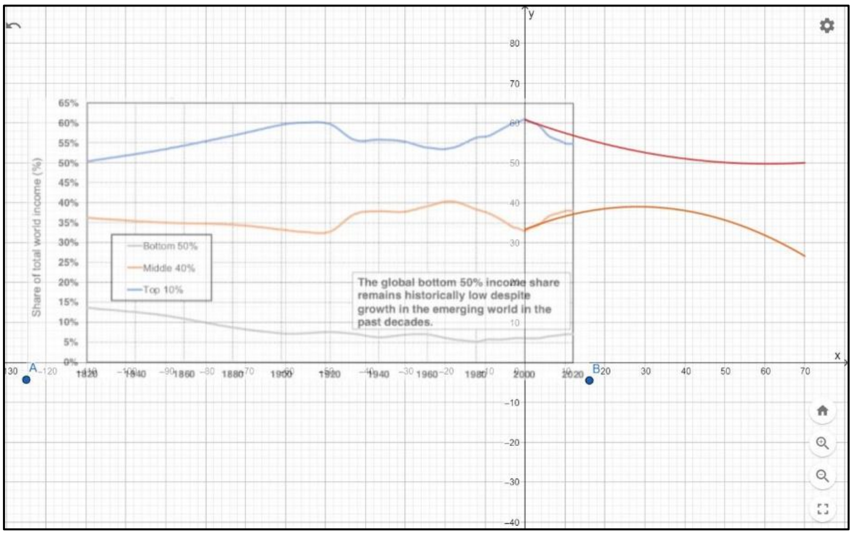
5.4 ATIVIDADE DISTRIBUIÇÃO DE RIQUEZAS NO MUNDO DESENVOLVIDA PELO GRUPO G-3

Como mencionado, a temática *Distribuição de Riquezas no Mundo* foi proposta pelo pesquisador para todos os alunos da Universidade B, o que inclui o grupo G-3, composto pelos estudantes A10, A11, A12, A13, A14 e A15. O desafio proposto: *Suponha que você, enquanto aluno do curso de Licenciatura em Matemática, foi convidado a escrever uma carta a ser publicada em um jornal da comunidade acadêmica local falando sobre a distribuição desigual das riquezas. Faça uma abordagem matemática e apresente sua carta com a fundamentação necessária,* e o problema a ser resolvido: *estimar a distribuição de riquezas no mundo para o os próximos 20 anos, considerando os percentuais anteriores,* também foram os mesmos do grupo anterior.

Com isso, iniciou-se a seguinte discussão e resolução do grupo G-3 que denominamos de Episódio I e apresentamos no Quadro 5.11.

Quadro 5.11: Episódio I da atividade *Distribuição de riqueza no mundo* de G-3

TIPO DE SIGNO	DESCRIÇÃO
Fala de A11	A11: É óbvio que aqui a gente vai precisar determinar três modelos para distribuição de riquezas no mundo, um pra cada classe.
Fala de A10	A10: Na verdade, não. Se a gente encontrar dois modelos já basta, porque aí, a diferença para os 100% já será o percentual da terceira classe.
Fala de A11	A11: Verdade! Neste caso, acho que seria melhor trabalharmos com as primeiras classes, né? [referindo-se às classes alta e média] Pois parece que elas se conversam mais.
Modelos construídos por G-3 para a atividade *Distribuição de riquezas no mundo*	$f(x) = 0{,}01(x-2000)^2 - 0{,}503(x-2000) + 60{,}83 \;\; para\, x \geq 2000$ $j(x) = -0{,}01(x-2000)^2 + 0{,}53x + 33{,}04 \;\; para\, x \geq 2000$

<table>
<tr><td>Validação dos modelos $f(x)$ e $j(x)$ feita por G-3</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Fala de A12</td><td>A12: Eu acho que é isso mesmo! Realmente, a classe alta continua crescendo, enquanto a classe média deve diminuir.</td></tr>
<tr><td>Distribuição da riqueza no mundo por classes sociais</td><td>
<table>
<tr><th>Classe</th><th>Detenção de riquezas (em dólares)</th><th>$f_a(em\ n^{o}\ de\ pessoas)$
(% de 7,8 bilhões)</th><th>$f_r(em\ \%)$
(% de 7,8 bilhões)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0 |---- 10 mil</td><td>4.290.000.000</td><td>55%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10 mil |---- 100 mil</td><td>2.558.400.000</td><td>32,8%</td></tr>
<tr><td>3</td><td>100 mil |---- 1 milhão</td><td>86.800.000</td><td>11,1%</td></tr>
<tr><td>4</td><td>> 1 milhão</td><td>85.800.000</td><td>1,1%</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Fonte: autoria própria (2023).

Conforme mencionado anteriormente, as discussões iniciais relacionadas à atividade *Distribuição de riquezas no mundo* foram realizadas de maneira coletiva com todos os integrantes dos grupos G2 e G3, o que explica o fato de os modelos $f(x)$ e $j(x)$ serem iguais para ambos os grupos.

No entanto, do episódio I vale destacar alguns pontos relacionados às discussões individuais do grupo que ocorreram antes da construção do modelo.

Inicialmente, destaca-se que A11 percebe e exterioriza a necessidade da construção de três modelos matemáticos que representasse a distribuição de riqueza para as respectivas classes sociais: alta, média e baixa. Necessidade essa imediatamente refutada por A10 que afirma ser necessário a construção de apenas dois modelos considerando que encontrando “[...] dois modelos já basta, porque aí, a diferença para os 100% já será o percentual da terceira classe” (fala de A10).

Neste ponto, com a intenção *direcionada a* alterar a concepção de A11 sobre os procedimentos a serem desenvolvidos, A10 apresenta uma solução mais simplificada. Esta interação de A10 com A11 tinha um propósito determinado: levar A11 a compreender a situação e, assim, aceitar desenvolvê-la com o grupo, ou seja, A10 buscou fazer com que A11 construísse novos significados relacionados à situação, o que foi atingido, uma vez que, após a referida interação A11 expressão sua concordância com A10.

Ainda em comparação com o grupo G-2, G-3 utilizou um procedimento diferente para efetuar a validação dos modelos obtidos. Enquanto o grupo anterior comparou os dados modelados com os dados reais, disponibilizados no texto motivado da atividade, o grupo G-3 optou por analisar o comportamento gráfico das funções obtidas a fim de analisarem se tal comportamento condiz com a realidade.

Tal análise levou o grupo a considerar os modelos construídos válidos, quando um dos integrantes afirma "[...] é isso mesmo! Realmente, a classe alta continua crescendo, enquanto a classe média deve diminuir" (fala de A12).

Logo, é possível constatar que os modelos matemáticos construídos, assim como o signo tela do Geogebra, atuaram na produção de signos interpretantes para os objetos matemáticos, função quadrática, ancorada na consequência de se obter um resultado para o problema.

Após isso, considerando a necessidade de distribuição de riquezas em quatro classes sociais distintas, G3 lançou mão de recursos estatísticos, especificamente, distribuição frequencial, para realizar tal distribuição.

Neste momento, assim como ocorreu em G-2, tendo os resultados matemáticos obtidos como base para a construção dos argumentos que seriam utilizados para escrever a carta, o grupo assim a fez. Alguns trechos da carta elaborada pelo grupo e trechos das reflexões registradas por eles são apresentados no Episódio II, conforme Quadro 5.12. As reflexões e a carta de G-3 podem ser consultadas na íntegra nos quadros 4.7 e 4.9, respectivamente.

Quadro 5.12: Episódio II da atividade *Distribuição de riqueza no mundo* de G-3

TIPO DE SIGNO	**DESCRIÇÃO**
Trechos da carta elaborada pelo grupo G-3 sobre a distribuição de riquezas no mundo	[...] Essa questão [referindo-se à distribuição desigual de riquezas no mundo] torna-se complexa por se tratar de um assunto que aflige maior parte da sociedade, criando-se assim uma tabela desigual no qual enquanto a classe média aumenta seu percentual no gráfico (desigualdade social) a classe alta diminui e quando a classe média diminui a alta aumenta, seguindo um padrão que pode ser calculado através de funções matemáticas. [...] Diante de tal situação é necessário percorrer um árduo caminho, onde a desigualdade social seja a menor possível e com ajuda de conhecimentos matemáticos poderemos auxiliar nessa difícil tarefa.
Análise crítica de G-3 sobre a distribuição de riquezas no mundo	Segundo a projeção a situação não muda muito durante os anos, pois a tendência é de que não terá uma deslocação de forma que seja “tão” visível; mas fazendo uma análise, tendo em vista as classes sociais, a concentração da riqueza global sempre permanece dominantemente com a classe alta. [...] E tendo em vista que nos anos que ocorreram muitas mudanças, aconteceu algo que afetou o mundo, podemos supor que se caso acontecer alguma coisa (nova pandemia, queda na bolsa de valores etc.) dentro de 20 anos a renda tende a aumentar e diminuir de forma “espelhada” entre a classe alta e média, e a classe baixa continuará com cerca de 5% de toda a riqueza mundial.
Reflexão de G-3 sobre o papel da matemática no estudo da distribuição de riquezas no mundo	A matemática é necessária para fazer o comparativo de como eram as estimativas e do que pode acontecer daqui 20 anos, com a ajuda de *softwares* matemáticos é possível fazer uma estimativa “mais precisa” já que ela segue como base os últimos anos que realmente aconteceu, porém tudo é apenas uma estimativa, já que não é possível prever o que vai acontecer no futuro, uma pandemia, crise mundial, conflitos ou algo do tipo.

Fonte: autoria própria (2023).

Analisando qualitativamente os trechos da carta e das reflexões apresentadas por G-3 à atividade *Distribuição de riquezas no mundo* fica evidente a construção de diferentes significados.

Considerando elementos da dimensão didática da construção do significado, especificamente no que tange às intenções, é possível observar a presença de diferentes fatores movendo a intencionalidade de G-3, dentre tais fatores destaca-se o fato de a matemática ser entendida pelos integrantes do grupo como uma ferramenta que pode auxiliar no processo de diminuição da desigualdade social, já que as análises matemáticas e os resultados advindos dessas análises evidenciam uma problemática que aflige grande parte da sociedade.

Além disso, as reflexões do grupo apontam que, ao se buscar uma articulação do objeto matemático (no caso, os modelos definidos pelo grupo) e o contexto em si (a distribuição de riquezas no mundo), tem-se indício daquilo que o signo efetivamente produz na mente dos intérpretes, isto é, de que a distribuição de riquezas é extremamente desigual.

Vê-se ainda que a análise matemática da situação permite que os alunos tirem algumas conclusões, como de que há variações de percentuais entre as classes alta e média, porém a classe baixa continua sempre com o mínimo de riquezas. Além disso, diferentemente de G2, o grupo G3 observou ainda que eventos mundiais, como guerras, pandemias e descobertas científicas, têm impacto direto na distribuição de riquezas entre as classes.

Portanto, tem-se que os resultados matemáticos obtidos atuaram na produção de signos interpretantes relacionados ao fenômeno distribuição de riquezas em si, tendo-se, como consequência, conforme registrado por G3, a necessidade de se percorrer um caminho árduo em direção à mais igualdade social no mundo.

Finalizado o desenvolvimento em conjunto da atividade, também foi solicitado aos integrantes do grupo G-3 que, individualmente, respondessem a um questionário com quatro perguntas relacionadas às ações por eles tomadas no desenvolvimento da atividade, ao significado que a atividade teve pra eles e à importância que eles atribuíram à atividade e às diferentes ações tomadas. O episódio III relacionado a esta atividade faz referências às respostas dadas pelos estudantes à duas perguntas abaixo e é apresentado no Quadro 5.13:

1) Na realização da atividade *Distribuição de riquezas no mundo*, você desenvolveu várias ações para atingir um objetivo, teve que pensar em várias coisas diferentes e, provavelmente, aprendeu algumas coisas que você ainda não sabia. Tente se lembrar das coisas que você fez, das coisas que você pensou e das coisas que você aprendeu durante essa atividade. Descreva-as abaixo e comente as que foram mais marcantes para você.

2) O que significou para você essa atividade? Que importância você atribui a ela? Explique.

Quadro 5.13: Episódio III da atividade *Distribuição de riquezas no mundo* de G-3

TIPO DE SIGNO	DESCRIÇÃO
Respostas de A10	A10: Debatemos muito no início sobre as concentrações de riquezas, acabamos percebendo que sempre quando tinha uma alteração entre as concentrações a data em questão tinha algum marco histórico, começamos a notar padrões e percebemos que o conceito de funções se aplicava bem a isso, começamos a criar intervalos menores entre 2000 e 2020 para conseguirmos ter uma variação mais precisa e assim ajudar na estimativa de 2040. [...] Ela significou bastante pra mim, por ser algo prático do conceito de função, já que estudamos tanto no curso e pouco temos contato com as práticas envolvidas, podemos perceber o conceito da etnomatematica neste trabalho e como de certa forma fomos induzidos aos métodos de tentativas e erros, muitas vezes nos frustrando, mas nos animando muito quando finalmente entendemos.
Reposta de A11	A11: Na atividade, nós trabalhamos e discutimos sobre a desigualdade social e como isso assola a sociedade, conseguimos observar pelos dados matemáticos observados que essas diferenças de riquezas entre classes é gritante e como ela oscila com o passar do tempo, mas, fica mais evidente a oscilação presente entre as classes alta e média, sendo que a classe baixa sempre se mantém com uma parcela mínima de toda a riqueza gerada. [...] Essa atividade foi significativa, pois trouxe debates interessantes sobre a distribuição de riquezas no mundo e, além de debatermos teoricamente, fizemos também uma análise crítica sobre a aplicabilidade da teoria na prática. A atividade trouxe à sala de aula um tema muito importante da atualidade.
Resposta de A12	A12: De início, a apresentação do gráfico e sua interpretação sugerem questionamentos para uma melhor compreensão da situação, no entanto, somente quando compreendemos matematicamente todos os contextos ali apresentados é que nos damos conta do quão preocupante é a situação da distribuição de riquezas no mundo. A atividade também possibilita uma reflexão sobre temas que são correlatos à distribuição em si, como é o caso de eventos mundiais que alteram a economia como um todo. Por fim, foi uma atividade que provocou questionamentos e mostrou o caminho para a interpretação e projeção de comportamentos baseados na realidade. [...] Essa atividade teve sua importância em desmistificar algumas dificuldades em analisar gráficos, mostrou caminhos mais adequados para um estudo matemático de uma situação real e possibilitou a obtenção de previsões para um fenômeno específico.
Resposta de A13	A13: Achei muito interessante a utilização de fórmulas para calcular a distribuição de riquezas dos próximos anos. O que

	também me chamou a atenção foi como a classe alta e a classe média são “opostas” entre si, se uma decai a outra aumenta e vice-versa. Pude perceber também como há desigualdade na classe baixa, eles sempre estão abaixo e apenas 5% da riqueza está nesta classe. Todas essas desigualdades são causadas por vários fatores como questões políticas, sociais, de gênero e de raça. Por meio do estudo das probabilidades podemos observar como as classes continuam na mesma distinção, a classe alta e média sempre variam entre si, e a classe baixa continua na mesma pobreza, podemos notar que isso nunca irá mudar. [...] Gostei muito de utilizar a matemática em nossa atualidade, em especial a probabilidade, pois com ela podemos calcular vários fatores futuros, não é uma certeza, mas é algo que podemos considerar. Considero muito importante a probabilidade, pois hoje ela é muito utilizada para tomadas de decisões em nossa sociedade e com ela estudamos a chance de um determinado evento acontecer como ocorreu com o estudo da distribuição de riquezas no mundo.
Resposta de A14	A14: O mais interessante foi o trabalho em grupo para construir ideias para seguir com a atividade, isso me chamou muito a atenção. Das coisas que aprendi, uma delas foi um pouco sobre a modelagem e o uso de dois *softwares*, Geogebra e Curve. Isso, sem dúvida, vai me ajudar daqui pra frente no curso. [...] A resolução do problema sendo discutido por todos da sala me chamou a atenção, pelo bom trabalho em equipe. Além disso, em aulas de matemática é comum haver uma disputa entre os alunos sobre quem chegará na resposta primeiro. No caso dessa atividade, o trabalho em equipe se mostrou muito interessante. Além disso, destaco que é importante que saibamos diferentes temáticas do cotidiano em que a matemática se aplica.
Resposta de A15	A15: Para mim foi uma novidade o método utilizado para “ler” as informações do gráfico pelo Geogebra. Além disso, todo o caminho percorrido para definição dos modelos e, depois, a realização das previsões mostra o quão a matemática nos dá segurança para fazermos uma série de afirmações em nosso cotidiano. [...] Para mim essa atividade tem um papel muito importante, pois me mostrou, na prática, como posso aplicar a matemática para embasar discussões de temáticas tão relevantes para a humanidade. Além disso, há alguns anos, estagiei no setor de Assistência Social de minha cidade e, por isso, já sabia que havia muita injustiça no que diz respeito à distribuição de renda no mundo, o que me deu ainda mais vontade de fazer a atividade com seriedade e precisão.

Fonte: autoria própria (2023).

Todo raciocínio é uma interpretação de signos de algum tipo, e a interpretação de um signo é apenas uma construção de um signo novo e assim sucessivamente, ou seja, não existe um sentido definitivo e absoluto de uma representação (OTTE, 2014), o que justifica o fato de o grupo G-3 ter, em suas análises, evidenciado alguns fatos que o grupo G-2, apesar de ter desenvolvido a mesma atividade, não ter evidenciado.

Dentre eles, destaca-se o fato de que, nos últimos 200 anos (dados estes disponibilizados aos estudantes no início da atividade) as grandes alterações nos percentuais de distribuição de riquezas ocorrem em anos de grandes eventos históricos, como foi o carro das guerras mundiais e outras pandemias, conforme citado por A10.

Das motivações para o desenvolvimento da atividade, no que diz respeito à dimensão didática da construção de significado, a aplicação prática do conhecimento matemático função quadrática foi mencionado nas respostas de A10, A11, A13 e A15.

Como consequência das análises matemáticas A12 afirma que “[...] somente quando compreendemos matematicamente todos os contextos ali apresentados é que nos damos conta do quão preocupante é a situação da distribuição de riquezas no mundo” (fala de A12). A preocupação com o fenômeno, evidenciada pela matemática, também foi citada por A11.

Sobre os resultados, em si, ainda no que diz respeito as consequências, tendo como fundamentação teórica a semiótica peirceana, A10 cita o quão frustrado o aluno fica quando os resultados não são validados na prática, isto é, quando o resultado matemático não representa satisfatoriamente o fenômeno estudado, mas como é motivador quando o oposto acontece.

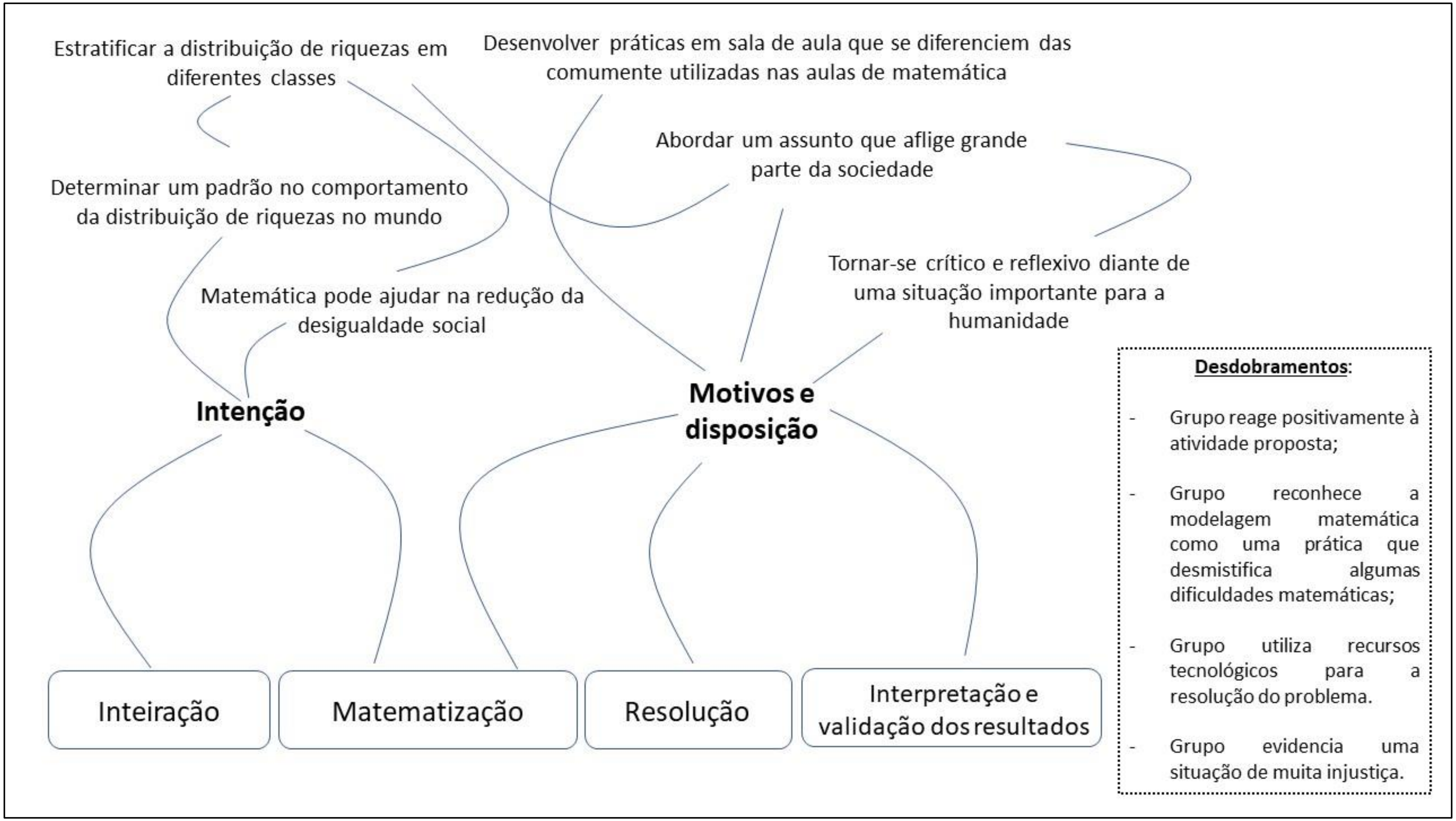
Neste mesmo sentido, A11, A12 e A14 destacaram a possibilidade de se desenvolver debates interessantes a partir da modelagem matemática e o quanto isso diferencia essas práticas de modelagem com as práticas comumente utilizadas pelos professores nas aulas de matemática.

Por fim, é importante destacar a experiência colateral de A15 para com o fenômeno, nas palavras do estudante “[...] me deu ainda mais vontade de fazer a atividade com seriedade e precisão” (registro de A15), indo ao encontro do que afirma Skovsmose (2015), o interesse do aluno com a temática a ser estudada em sala de aula impacta diretamente os significados que por ele será construído.

Assim, em termos gerais, os elementos da dimensão didática da construção de significados que puderam ser evidenciados estão sistematizados na árvore de associação de ideias da Figura 5.7.

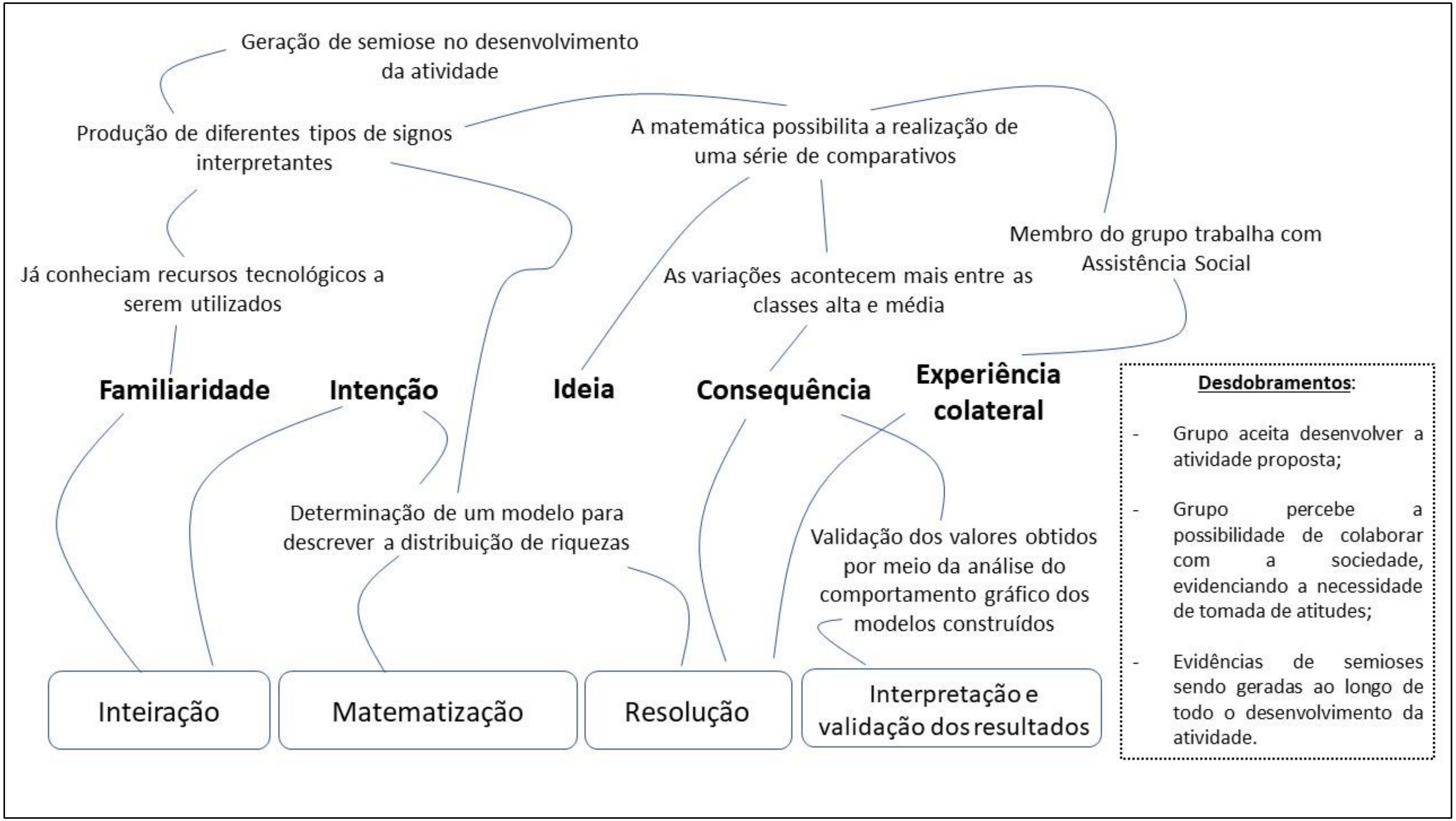
E, por fim, os elementos da dimensão semiótica da construção de significado que puderam ser evidenciados estão sistematizados na árvore de associação de ideias da Figura 5.8.

Figura 5.7: Elementos da dimensão didática da construção de significado



Fonte: autoria própria (2023).

Figura 5.8: Elementos da dimensão semiótica da construção de significado



Fonte: autoria própria (2023).

CAPÍTULO 6 - RESULTADOS

"*A matemática é uma ciência de observação: é preciso observar para descobrir*"
(ÉMILE LEMOINE).

Partindo da análise dos procedimentos e das ações empreendidas pelos alunos do curso de Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática foi possível evidenciar que os alunos fizeram uso de diferentes tipos de recursos, nas diferentes etapas das atividades.

Até determinada extensão, tais recursos constituíram-se como signos, possibilitando a produção de outros signos interpretantes acerca do fenômeno, do problema e da matemática a ser utilizada. Sobre a matemática, especificamente, conforme destaca Silva (2013), os signos interpretantes que estariam relacionados ao problema se mostraram mais evidentes nas fases de inteiração e interpretação dos resultados. Por sua vez, os signos referentes ao objeto matemático, em si, evidenciaram-se mais nas fases de matematização e resolução da atividade de modelagem matemática.

A construção de significado se apoiou em elementos de uma dimensão semiótica, conforme sugere a árvore de associação de ideias da Figura 6.1.

Figura 6.1: Elementos da dimensão semiótica da construção de significado

Fonte: autoria própria (2023).

De acordo com Spink (2013), uma árvore de associação de ideias é uma representação gráfica que ajuda a visualizar as relações entre conceitos e ideias em uma determinada área de conhecimento ou tema. Essa representação é composta por vários elementos, como os nós, que são os pontos na árvore em que os conceitos ou ideias estão localizados, sendo que cada nó representa um conceito específico; os ramos que são as conexões entre os nós que indicam as relações entre os conceitos ou ideias, no caso da análise empreendida, os nós construídos são denominados relacionais, conforme definição de Spink (2010; 2013). E, por fim, a árvore de associação de ideias também é composta pela raiz, que pode ser entendida como o nó principal da árvore.

Com relação à raiz, formada pelas etapas das atividades de modelagem matemática, apresentamos cinco elementos capazes de, semioticamente, evidenciar a construção do significado, a saber: familiaridade, intenção, ideia, consequência e experiência colateral.

No desenvolvimento das atividades, constatou-se que os estudantes fizeram uso de diferentes recursos, nas diferentes fases da modelagem matemática. Até certo ponto, tais recursos possibilitaram a produção de signos interpretantes relacionados aos problemas, aos fenômenos e aos objetos matemáticos em si.

Evidenciou-se ainda que os significados que, semioticamente, estariam relacionados ao problema se mostraram mais presentes nas fases de inteiração e interpretação dos resultados, enquanto os significados referentes aos objetos matemáticos foram mais evidentes no decorrer das fases de matematização e resolução.

Como desdobramentos gerais destas ações, tivemos que os grupos aceitaram desenvolver as atividades propostas, recorreram a diferentes *softwares* nos desenvolvimentos; geração de semioses foi evidenciada ao longo de todo o desenvolvimento das atividades e todos os grupos perceberam a possibilidade de colaborar com a sociedade, evidenciando a necessidade de tomada de atitudes.

A modelagem matemática é uma abordagem que faz uso da matemática para representar e entender fenômenos do mundo real, favorecendo a construção de significado no qual os elementos da dimensão semiótica são promovidos devido a algumas características de atividades desta natureza.

Dentre tais características, pode-se citar: a representação simbólica; a formalização; e a abstração possibilitada pela atividade. Quanto à representação simbólica, a matemática usa símbolos para representar conceitos e relações entre eles e esses símbolos têm significados precisos e bem definidos, o que facilita a comunicação de ideias matemáticas de forma clara e concisa (D'AMORE; PINILLA; IORI, 2015).

Com relação à formalização, a matemática é uma disciplina formal, o que significa que ela tem regras e procedimentos bem definidos para a construção dos modelos, o que ajuda a garantir que as conclusões obtidas a partir dos modelos matemáticos sejam consistentes e confiáveis (BASSANEZI, 2002; 2011).

Sobre a abstração, conforme mencionam D'Amore, Pinilla e Iori (2015), a matemática possibilita que ideias complexas sejam representadas de forma abstrata, sem a necessidade de se referir a objetos ou situações específicas, o que torna "mais fácil generalizar conceitos e aplicá-los a diferentes contextos" (DOERR; ENGLISH, 2003; LESH, 2010).

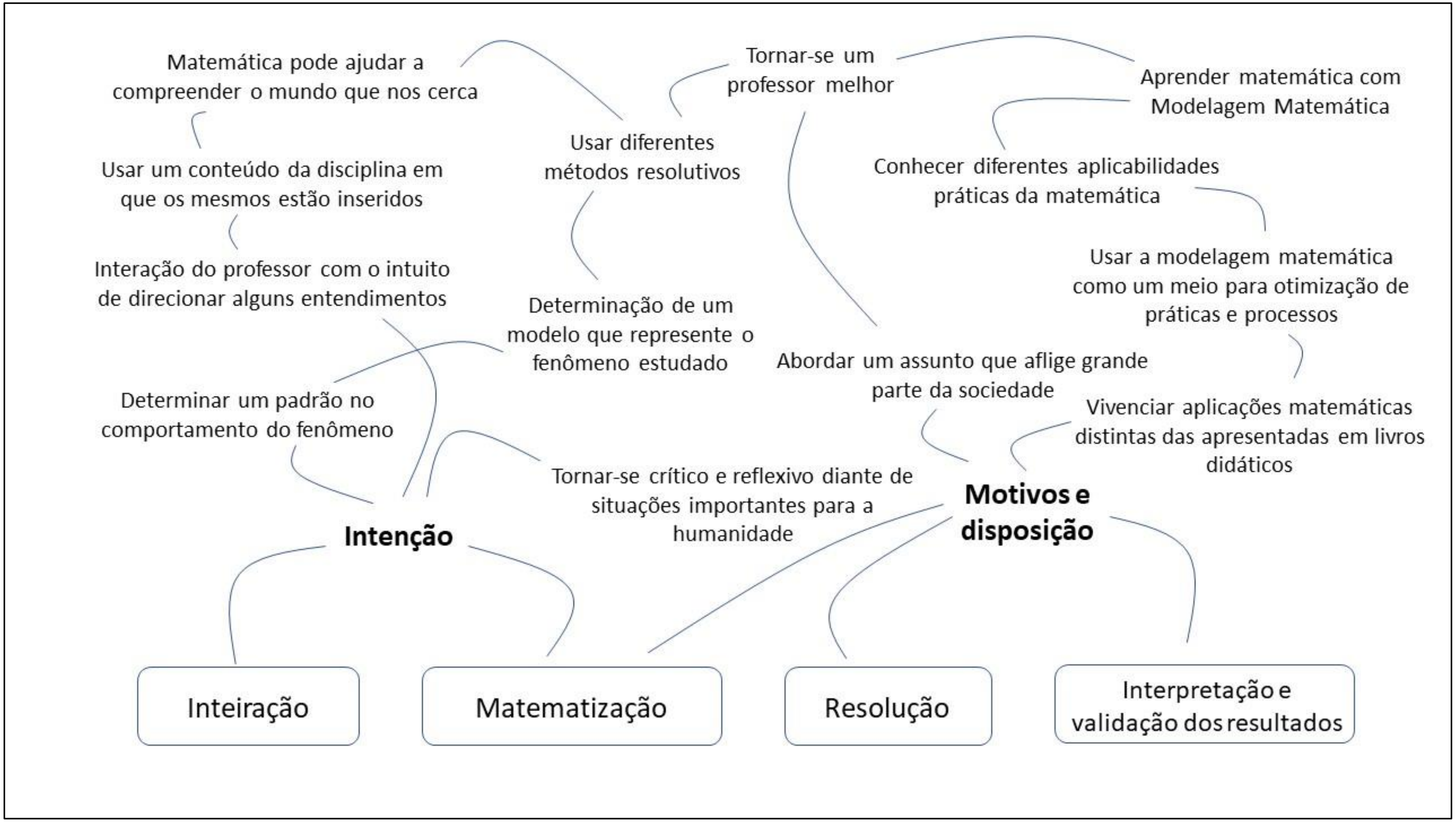
Ao combinar essas características, a modelagem matemática pode possibilitar a construção de significados permitindo que ideias sejam representadas de forma adequada, tanto com relação à matemática utilizada, quanto com relação ao fenômeno em si, e que conclusões sejam obtidas de forma clara e consistente. Além disso, a matemática pode ajudar a identificar padrões e relações entre diferentes fenômenos, o que pode levar a novas descobertas e *insights*, como mencionam Meyer, Caldeira e Malheiros (2013).

Ainda sobre os elementos da dimensão semiótica da construção de significado, vale destacar que estes estão relacionados, também, à representação e comunicação de ideias por meio de símbolos e signos (SILVA, 2013; MENDES, 2018). Na modelagem matemática, essa dimensão é promovida, por exemplo, pelo uso dos diferentes signos que os estudantes fazem no desenvolvimento da atividade, como os diagramas e gráficos, já que a modelagem matemática "pode envolver o uso de diagramas e gráficos para representar informações e relacionamentos" (BASSANEZI, 2011).

Assim, ao promover esses elementos da dimensão semiótica, a modelagem matemática ajuda a tornar as ideias matemáticas mais claras e acessíveis, permitindo que os estudantes entendam e se comuniquem de forma mais eficaz sobre conceitos matemáticos.

Os significados construídos com apoio de elementos de uma dimensão didática estão sistematizados na árvore de associação de ideias da Figura 6.2.

Figura 6.2: Elementos da dimensão didática da construção de significado



Fonte: autoria própria (2023).

Para evidenciar como características e o contexto em que se dão as atividades de modelagem matemática fomentam uma dimensão didática do significado, assumimos, como raiz da árvore, as etapas de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática e, imediatamente acima da raiz, são postos os dois fatores capazes de nos evidenciar indícios de construção de significado a partir de uma dimensão didática, sendo eles a intenção, os motivos e disposições.

Dos desdobramentos advindos desta análise, tem-se que os grupos reagiram positivamente às atividades propostas; os grupos reconheceram a modelagem matemática como importante em seus processos formativos; utilizaram os recursos matemáticos discutidos nas disciplinas em que estão inseridos e demonstraram o desejo de “fazer mais” modelagem matemática.

Além disso, evidencia-se ainda que os grupos vislumbraram a possibilidade de contribuir com outras áreas a partir da modelagem matemática, reconhecendo a modelagem matemática como uma ferramenta de inclusão social e como uma prática que desmistifica algumas dificuldades matemáticas.

Assim, a modelagem matemática pode favorecer a ativação de elementos da dimensão didática da construção de significados devido a características específicas, como clareza, contextualização, flexibilidade e interatividade.

Sobre a clareza, ressalta-se que a modelagem matemática permite que ideias complexas sejam simplificadas e representadas de forma clara e concisa, o que possibilita a compreensão e a comunicação de conceitos matemáticos, tornando-os mais acessíveis a estudantes e outros públicos (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013).

Além disso, a modelagem matemática pode ser usada para “fornecer contextos reais ou simulados para os conceitos matemáticos” (BASSANEZI, 2011, p. 117), o que potencializa a construção de significado ajudando os estudantes a entender a relevância e a aplicação prática dos conceitos, tanto para seu processo de formação, quanto para sua prática profissional, por exemplo.

Com relação à flexibilidade, destaca-se que a modelagem matemática é uma abordagem flexível que pode ser adaptada a diferentes níveis de habilidade e conhecimento, permitindo que os educadores ajustem a complexidade e a profundidade dos modelos para atender às necessidades dos estudantes (ARAÚJO, 2010).

A modelagem matemática envolve também a criação e manipulação de modelos interativos, que permitem que os estudantes explorem conceitos matemáticos de forma prática e envolvente, o que pode aumentar o engajamento dos estudantes nas práticas em sala de aula, levando-os a responderem positivamente às ações propostas (SKOVSMOSE, 2018; RONCATO, 2021).

Ao combinar essas características, a modelagem matemática pode favorecer a ativação de elementos da dimensão didática da construção de significados permitindo que os estudantes entendam e apliquem conceitos matemáticos de forma prática e significativa. Isso pode levar a uma “melhor compreensão dos conceitos matemáticos e a uma maior confiança na resolução de problemas advindos da realidade” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 113).

Assim, a modelagem matemática é uma abordagem pedagógica que envolve, dentre outros elementos, a criação e utilização de modelos matemáticos para representar e resolver problemas do mundo real e essa abordagem favorece a ativação dos elementos da dimensão didática, que incluem outros aspectos como a contextualização, a interdisciplinaridade e a autonomia do estudante.

Aborda-se a contextualização pelo fato de a modelagem matemática permitir que os estudantes trabalhem com problemas do mundo real, fornecendo um contexto concreto para a aprendizagem matemática, o que pode os auxiliar na compreensão da relevância e aplicabilidade da matemática em suas vidas e em suas profissões (SKOVSMOSE, 2018).

Sobre a interdisciplinaridade, destaca-se ainda que a modelagem matemática envolve a utilização de conhecimentos de diferentes áreas do conhecimento, incluindo, por exemplo, ciência, tecnologia, engenharia, matemática, o que auxilia evidenciar a interconexão entre diferentes áreas de conhecimento, possibilitando a compreensão do papel da matemática em outras áreas do conhecimento (BASSANEZI, 2011).

Por fim, no que diz respeito à autonomia, destaca-se que a modelagem matemática envolve a criação de modelos pelos próprios estudantes, o que incentiva a autonomia e a iniciativa no processo de aprendizagem, ajudando os estudantes a desenvolver sua capacidade para resolver problemas complexos e tomar decisões.

Assim, ao promover esses elementos da dimensão didática, a modelagem matemática ajuda a tornar a aprendizagem mais relevante e envolvente para os estudantes, aumentando sua compreensão e interesse pela matemática.

Portanto, vê-se que as duas dimensões, didática e semiótica, conferem à construção de significados em atividades de modelagem matemática especificidades que associam: as características da atividade de modelagem matemática; a natureza semiótica da construção de significado, considerando sua interlocução com o acesso e o manuseio de signos; a semiose como geradora de signos; a influência que o meio exerce sobre a construção de significado, vinculando-se com elementos como a intenção, a intencionalidade e a ação do professor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de identificar a construção de significado em atividades de modelagem matemática mediado pela busca de indicativos de que essa construção se dá considerando duas dimensões, uma dimensão semiótica e uma dimensão didática, nesta pesquisa, foram desenvolvidas três atividades de modelagem matemática com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática.

A construção de significado envolve uma série de processos que, quando colocam os indivíduos expostos a novas informações ou experiências, levam estes a interpretá-las com base em suas crenças, valores e experiências anteriores, o que pode levar a diferentes interpretações e construções de significado. Além disso, a construção de significado é influenciada por fatores sociais e culturais, como a linguagem, as normas sociais e as expectativas culturais. Em resumo, a construção de significado é um processo complexo e dinâmico que envolve a interpretação de informações, experiências e eventos.

Na pesquisa empírica, evidenciou-se que os grupos envolvidos no desenvolvimento da atividade reagiram positivamente às mesmas, reconhecendo a importância da modelagem matemática em seus processos formativos. Eles utilizaram os recursos matemáticos discutidos nas disciplinas em que estão inseridos e demonstraram o desejo de se envolver em mais atividades de modelagem matemática.

A modelagem matemática é um processo fundamental no ensino e na pesquisa em matemática, que envolve, dentre outras coisas, a construção e manipulação de modelos matemáticos para resolver problemas do mundo real (BASSANEZI, 2011), sendo que essa abordagem tem sido cada vez mais valorizada no ensino de matemática, devido às suas aplicabilidades nos processos educacionais e pedagógicos.

A partir da pesquisa empreendida, constata-se que uma das características da modelagem matemática é que essa favorece a construção de significado com base em duas dimensões, a dimensão didática e a dimensão semiótica. Na dimensão didática, a modelagem matemática é uma abordagem que permite aos estudantes compreender a matemática como uma disciplina aplicada e relevante, por meio da resolução de problemas do mundo real. Dessa forma, os alunos podem ver a matemática como algo útil e prático, o que pode aumentar sua motivação e engajamento no processo de aprendizagem.

Já no que diz respeito aos elementos da dimensão semiótica da construção de significado, a modelagem matemática faz uso de diferentes linguagens, representações e signos para a construção e comunicação de ideias matemáticas de forma clara e eficiente. Essa abordagem permite aos estudantes entender a matemática não apenas como uma linguagem abstrata, mas também como uma linguagem que pode ser usada para descrever e solucionar problemas do mundo real. Além disso, a modelagem matemática incentiva os alunos a utilizar múltiplas representações matemáticas para resolver problemas, o que pode ajudá-los a desenvolver sua habilidade de comunicação matemática e aprofundar seu entendimento dos conceitos matemáticos.

Portanto, vê-se que os significados construídos se apoiaram em elementos da dimensão didática e da dimensão semiótica da construção de significado com características específicas que associam fatores como as características da atividade de modelagem matemática e a natureza semiótica da construção de significado.

É importante ressaltar que, em alguns casos, a construção de significados pode ter mais elementos de uma dimensão do que de outra. Em outras situações, ambas as dimensões podem exercer a mesma influência na formação dos significados.

Uma pesquisa sobre a construção de significado agrega a área de modelagem matemática, uma vez que a compreensão do significado construídos no âmbito da sala de aula pode possibilitar a compreensão de algumas dificuldades que os estudantes enfrentam em suas práticas de sala de aula. Além disso, pode auxiliar na identificação de lacunas no ensino de matemática e no desenvolvimento de estratégias pedagógicas mais eficazes para o desenvolvimento da modelagem matemática no âmbito das aulas de matemática.

Em resumo, a pesquisa sobre significado pode trazer importantes inferências para a área de modelagem matemática, auxiliando na identificação de problemas no processo de ensino da matemática e no desenvolvimento de estratégias pedagógicas mais eficazes.

Entretanto, apesar da relevância desta temática de pesquisa para a área de Educação matemática, é preciso citar algumas limitações. Dentre as limitações, está a subjetividade da pesquisa, uma vez que os significados construídos pelos sujeitos variam de acordo com as experiências e as perspectivas dos próprios. Por isso, a pesquisa sobre significado pode ser influenciada por fatores subjetivos que podem dificultar a generalização dos resultados.

Outra limitação a ser citada é a limitações metodológicas, uma vez que a pesquisa sobre a construção de significado exige métodos qualitativos, o que pode dificultar a comparação entre diferentes estudos, além da impossibilidade de mensurar os significados.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 5ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, v. 18, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; CASTRO, E. M. V.; SILVA, M. H. S. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 14, n. 2, p. 383-406, 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; SEKI, J. T. P. A compreensão em Wittgenstein: reflexões teóricas e repercussões no ensino. **Acta Scientiarum Education (online)**, v. 43, p. 1-19, 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. O significado em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre pesquisas brasileiras. **REVEMAT**: Revista Eletrônica de matemática, v. 9, p. 124-145, 2014.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 57, p. 202-219, abr., 2017.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P. Ciclo de modelagem matemática interpretado à luz de estratégias heurísticas dos alunos. **REnCiMa,** v.12, n.2, p. 1-27, 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; BRITO, D. S. Interface Didática entre Modelagem Matemática e Semiótica. **Boletim de Educação Matemática**, v. 36, p. 777-800, 2022.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E. Labirintos da linguagem: jogos de linguagem como meio de ação em atividades de modelagem matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 24, p. 219-243, 2022.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por representações semióticas. **Revista de Modelagem na Educação Matemática,** v.1, n. 1, p. 28-42, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P (Orgs). **Modelagem Matemática em Foco**, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2014.

ARAUJO, J. L. Brazilian research on modelling in mathematics education. **ZDM**. 42, PP. 337–348, 2010.

ASANO, C. H.; COLLI, E. **Cálculo numérico**: fundamentos e aplicações. Departamento de Matemática Aplicada, IME-USP, v. 15, 2009.

BASSANEZI, R. C. **Ensino e aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

BIEHLER, R. Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: the concept of function as an example. In: **Meaning in mathematics education**. Springer, New York, NY, 2005. p. 61-81.

BISHOP, A. The social construction of meaning: a significant development for mathematics education. **For the Learning of Mathematics**, v. 5, n. 1, p. 24-28, 2005.

BLAIRE, E. Philosophies of mathematics and perspectives of mathematics teaching. **Int. J. Math. Educ. Sci. Technol**., v. 12, n. 2, p. 147-153, 1981.

BLOMHØJ, M.; KJELDSEN, T. H. Students' reflections in Mathematical Modelling Projects. In: KAISER, G. et al. (ed.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14). New York: Springer, p. 385-395, 2011.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed). **The Proceddings of the 12th Internacional Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, p. 73-96, 2015.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos, 1982.

BUSSI, M. G. B. The meaning of conics: historical and didactical dimensions. In: **Meaning in mathematics education**. Springer, New York, NY, 2005. p. 39-60.

CAMPOS, I. S.; ARAÚJO, J. L. Quando pesquisa e prática pedagógica acontecem simultaneamente no ambiente de modelagem matemática: problematizando a dialética pesquisador| professor. **Acta Scientiae**, v. 17, n. 2, p. 324–339, 2015.

CARREIRA, S.; AMADO, N.; LECOQ, F. Mathematical Modelling of daily life in adult education: focusing on the notion of knowledge. Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: **ICTMA14**, p. 199-209, 2011.

CARREIRA, S.; BAIOA, A. M.; ALMEIDA, L. M. W. Mathematical models and meanings by school and university students in a modelling task. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, n. 17, p. 67-83, 2020.

CASTRO. E. M. V. **Metacognição em Atividades de Modelagem Matemática**. 2022. 229f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2022.

CAVASSANE, R. P. A crítica de Wittgenstein ao seu" Tractatus" nas" Investigações Filosóficas". **Revista de Iniciação Científica da FFC**, v. 10, n. 2, 2010.

COSTA, P. H. S.; SILVA, M. F. A. O método pragmático de Charles S. Peirce. **Μετάνοια**. São João Del-Rei. Minas Gerais, n.13, 2011.

CRUZ, W. J. **Experimentos Mentais na Educação Matemática**: uma analogia com provas matemáticas formais. Editora Appris, 2018.

CUNHA, A. G. **Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa**. Lexikon Editora, 2019.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros Elementos de Semiótica**: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal for research in mathematics education**, v. 34, n. 2, p. 110-136, 2003.

DRIGO, M. O. Comunicação e cognição: semiose na mente humana. In: **Comunicação e cognição**: semiose na mente humana. Sulinas, 2007.

FIDALGO, A.; GRADIM, A. **Manual de semiótica**, 2005.

GALBRAITH, P. Models of modelling: genres, purposes or perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.

GARNICA, A. V. M. Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. **Interface - comunicação, saúde, educação**, v. 1, p. 109-122, 1997.

GODOY, A. S. Pesquisa Qualitativa: tipos fundamentais. **Revista e Administração e Empresas. São Paulo**, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

HILLEL, J.; DREYFUS, T. What's a best fit? Construction of meaning in a linear algebra session. In: **Meaning in mathematics education**. Springer, New York, NY, 2005.

HOFFMANN, M. H. G. Learning by developing knowledge networks. **ZDM**. Berlim,

v. 36, n. 6, p.196-205, 2004.

HOWSON, G. “Meaning” and school mathematics. In: **Meaning in mathematics education**. Springer, New York, NY, 2005. p. 17-38.

HOYLES, C. Making mathematics and sharing mathematics: two paths to co-constructing meaning? In: **Meaning in mathematics education**. Springer, New York, NY, 2005. p. 139-158.

ILLERIS, K. **Teorias contemporâneas da aprendizagem**. Penso Editora, 2015.

KAISER, G; STENDER, P. Complex Modelling Problems in Co-operative, Self-Directed Learning Environments. In Stillman et al. (Eds), **Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice**, p. 277-293, 2013.

KAISER, G.; BLOMHØJ, M.; SRIRAMAN, B. Towards a didactical theory for mathematical modelling. **ZDM**. The International Journal on Mathematics Education, v. 38, n. 3, p. 82-85, 2006.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KILPATRICK, J.; HOYLES, C.; SKOVSMOSE, O.; VALERO, P. **Meaning in Mathematics Education**. New York: Springer, 2005.

KILPATRICK, J. et al. Meanings of meaning of mathematics. In: **Meaning in mathematics education**. Springer, New York, NY, 2005. p. 9-16.

KLÜBER, T.; BURAK, D. Sobre a pesquisa em modelagem na educação matemática brasileira. **Revista Diálogo Educacional**, v.14, n.41, p. 143-164, 2014.

KOHAN, W. O. Inventamos ou Erramos: um princípio para pensar a dimensão filosófica do educar? **Itinerários de Filosofia da Educação**, v. 13, p. 326-338, 2015.

LABORDE, C. The Hidden Role of Diagrams in Students’ Construction of Meaning in Geometry. In: **Meaning in mathematics education**. Springer, New York, NY, 2005. p. 159-179.

LESH, R. Tools, researchable issues & conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 2, p. 16-48, 2010.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo, EPU, 2013.

MANECHINE, S. R. S.; CALDEIRA, A. M. A. A significação e ressignificação da linguagem gráfica na compreensão de fenômenos naturais. **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Água de Lindóia: SBEM, 2006.

MENDES, T. F. **A derivada de uma função em atividades de modelagem matemática**: uma análise semiótica. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2018.

MENDES, T. F.; SURJUS, K. S.; BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P. Projeto de Desenvolvimento de Produto em uma atividade de Modelagem Matemática. **Anais da XI CNMEM**. Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. UFMG, Belo Horizonte, 2019.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2013 .

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999.

MORTIMER, E. et al. Interações entre modos semióticos e a construção de significados em aulas de ensino superior. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 16, p. 121-146, 2014.

NISS, M. Mathematical competencies and PISA. In: **Assessing mathematical literacy**: the PISA experience. Cham: Springer International Publishing, 2015.

NÖTH, W. **Panorama da semiótica**: de Platão a Peirce. 4 ed. São Paulo: Annablume, 2008.

OGDEN, C. K.; RICHARDS, I. A. **O significado de significado**: um estudo da influência da linguagem sobre o pensamento e sobre a ciência do simbolismo. Tradução de Álvaro Cabral. Segunda edição. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976.

OTTE, M. F. Meaning and mathematics. In: **Meaning in mathematics education**. Springer, New York, NY, 2005. p. 231-260.

OTTE, M. F. Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. **Educational Studies in Mathematics**. Springer, v. 61, p. 11-38, 2006.

OTTE, M. F. **Generalizing is necessary or even unavoidable**. (notas de aula). São Paulo: UNIBAN, 2014.

PEIRCE, C. S. **Semiótica e filosofia**. Editora Cultrix, 1972.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2005.

PEIRCE, C. S. **How to make our ideas clear**. In: Pragmatism. Routledge, 2020.

PEIRCE, C. S.; HARTSHORNE, C.; WEISS, P.; BURKS, A. **The Collected Papers of Charles Sanders Peirce**. InteLex Corporation, 1994.

REVISTA VC S/A. **Exame**. Editora Abril. Disponível em: https://exame.com/revistavoce-sa/. Acesso em: 12 dez. 2022.

RONCATO, C. R. **Significado em Educação Matemática e estudantes com deficiência: possibilidades de encontros de conceitos**. 231 f. Tese (Doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2021.

SANTAELLA, L. **Semiótica aplicada**. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SANTAELLA, L. **A teoria geral dos signos**: como as linguagens significam as coisas. 2. reimpr. da 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. Coleção Primeiros Passos. São Paulo: Brasiliense, 2012.

SANZOVO, D. T.; LABURÚ, C. E. Níveis significantes do significado das estações do ano com o uso de diversidade representacional na formação inicial de professores de ciências. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, p. 745-772, 2017.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. Cortez editora, 2017.

SIERPINSKA, A. Discoursing Mathematics Away. In: **Meaning in mathematics education**. Springer, New York, NY, 2005.

SILVA, C. **Aprendizagem Significativa em Atividades de Modelagem Matemática**. 2018. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2018.

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática: implicações para a atribuição de significado**. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W. Caminhos do Significado em Atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os interpretantes. **Boletim de Educação Matemática**, v. 29, p. 568-592, 2015.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W. A percepção da matemática em livros didáticos de química. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 21, 2019.

SKOVSMOSE, O. Meaning in mathematics education. In: **Meaning in mathematics education**. Springer, New York, NY, 2005. p. 83-100.

SKOVSMOSE, O. **Students' foregrounds**: hope, despair, uncertainty. Pythagoras, v. 33, n.2, 2012.

SKOVSMOSE, O. An intentionality interpretation of meaning in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 92, n. 3, p. 411-424, 2016.

SKOVSMOSE, O. Interpretações de significado em educação matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 32, p. 764-780, 2018.

SOUSA, B. N. P. A. **A matemática em atividades de modelagem matemática: uma perspectiva wittgensteiniana**. 2017. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

SOUSA, B. N. P. A.; ALMEIDA, L. M. W. Apropriação Linguística e Significado em Atividades de Modelagem Matemática. Boletim de Educação Matemática. **Bolema**, v. 33, p. 1195-1214, 2019.

SPINK, M. J. **Linguagem e produção de sentidos no cotidiano**. Rio de Janeiro: Centro Edelsteins de Pesquisas Sociais, 2010. 72p.

SPINK, M. J. **Práticas discursivas e produção de sentidos no cotidiano: aproximações teóricas e metodológicas**. Ed. Virtual. Rio de Janeiro: Centro Edelsteins de Pesquisas Sociais, 2013, p. 22-41.

SWAN, M. et al. The roles of modelling in learning mathematics. In: **Modelling and applications in mathematics education**. Springer, Boston, MA, 2007. p. 275-284.

THOM, R. **Developments in Mathematical Education**, Cambridge, 194-209, 1973.

VERTUAN, R. E. **Práticas de monitoramento cognitivo em atividades de modelagem matemática**. 2013. 247p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2013.

WILHELMI, M. R.; GODINO, J. D.; LACASTA, E. Didactic effectiveness of mathematical definitions: The case of the absolute value. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 2, n. 2, p. 72-90, 2007.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. Tradução: José Carlos Bruni. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1999.

APÊNDICES

APÊNDICE A

QUESTIONÁRIO SOBRE A ATIVIDADE PAVIMENTAÇÃO DE UM ESTACIONAMENTO

1) Na realização da atividade “Pavimentação de um Estacionamento”, você desenvolveu várias ações para atingir um objetivo, teve que pensar em várias coisas diferentes e, provavelmente aprendeu algumas coisas que você ainda não sabia. Tente se lembrar das coisas que você fez, das coisas que você pensou e das coisas que você aprendeu durante essa atividade. Descreva-as abaixo e comente as que foram mais marcantes para você.

2) O que significou para você essa atividade? Que importância você atribui a ela? Explique.

3) Considerando a atividade estudada, enumere de 1 até 5, conforme a importância que atribui a cada item, considerando como 1 a maior importância e 5 a menor importância.

( ) A aplicação da matemática.
( ) A resolução do problema.
( ) A relação da matemática com a realidade.
( ) A aprendizagem da matemática por meio da atividade.
( ) A relação com a sua prática futura enquanto professor de matemática.

4) No quadro a seguir, sua resposta pode variar de um extremo a outro.

1. Caracterize o grau de complexidade da atividade desenvolvida.
2. Sua familiaridade com os conceitos matemáticos utilizados durante o estudo das situações
3. Suas impressões sobre a atividade desenvolvida.
4. Você ficou convencido(a) da solução encontrada?
5. Qual foi a importância do trabalho colaborativo para resolução do problema.

1. Pouco complexo	1	2	3	4	5	Muito complexo
2. Pouco familiar	1	2	3	4	5	Muito familiar
3. Pouco interessante	1	2	3	4	5	Muito interessante
4. Pouco convencido(a)	1	2	3	4	5	Totalmente convencido(a)
5. Pouco importante	1	2	3	4	5	Muito importante

APÊNDICE B

QUESTIONÁRIO SOBRE A ATIVIDADE APLICAÇÃO DE PASTA ISOTÉRMICA EM PLACA DE PROCESSADOR

1) Na realização da atividade “Aplicação de Pasta Isotérmica em Placa de Processador”, você desenvolveu várias ações para atingir o seu objetivo. Tente se lembrar das coisas que você fez, das coisas que você pensou e das coisas que você aprendeu durante essa atividade. Descreva-as abaixo e comente as que foram mais marcantes para você.

2) O que significou para você essa atividade? Que importância você atribui a ela? Explique.

3) Considerando a atividade estudada, enumere de 1 até 5, conforme a importância que atribui a cada item, considerando como 1 a maior importância e 5 a menor importância.

   ( ) A aplicação da matemática.
   ( ) A resolução do problema.
   ( ) A relação da matemática com a realidade.
   ( ) A aprendizagem da matemática por meio da atividade.
   ( ) A relação com a sua prática futura enquanto professor de matemática.

4) No quadro a seguir, sua resposta pode variar de um extremo a outro.

   1. Caracterize o grau de complexidade da atividade desenvolvida.
   2. Sua familiaridade com os conceitos matemáticos utilizados durante o estudo das situações
   3. Suas impressões sobre a atividade desenvolvida.
   4. Você ficou convencido(a) da solução encontrada?
   5. Qual foi a importância do trabalho colaborativo para resolução do problema.

1. Pouco complexo	1	2	3	4	5	Muito complexo
2. Pouco familiar	1	2	3	4	5	Muito familiar
3. Pouco interessante	1	2	3	4	5	Muito interessante
4. Pouco convencido(a)	1	2	3	4	5	Totalmente convencido(a)
5. Pouco importante	1	2	3	4	5	Muito importante

APÊNDICE C

QUESTIONÁRIO SOBRE A ATIVIDADE DISTRIBUIÇÃO DE RIQUEZAS NO MUNDO

5) Na realização da atividade “Distribuição de riquezas no mundo”, você desenvolveu várias ações para atingir um objetivo, teve que pensar em várias coisas diferentes e, provavelmente aprendeu algumas coisas que você ainda não sabia. Tente se lembrar das coisas que você fez, das coisas que você pensou e das coisas que você aprendeu durante essa atividade. Descreva-as abaixo e comente as que foram mais marcantes para você.

6) O que significou para você essa atividade? Que importância você atribui a ela? Explique.

7) Considerando a atividade estudada, enumere de 1 até 5, conforme a importância que atribui a cada item, considerando como 1 a maior importância e 5 a menor importância.

   ( ) A aplicação da matemática.
   ( ) A resolução do problema.
   ( ) A relação da matemática com a realidade.
   ( ) A aprendizagem da matemática por meio da atividade.
   ( ) A relação com a sua prática futura enquanto professor de matemática.

8) No quadro a seguir, sua resposta pode variar de um extremo a outro.

   1. Caracterize o grau de complexidade da atividade desenvolvida.
   2. Sua familiaridade com os conceitos matemáticos utilizados durante o estudo das situações
   3. Suas impressões sobre a atividade desenvolvida.
   4. Você ficou convencido(a) da solução encontrada?
   5. Qual foi a importância do trabalho colaborativo para resolução do problema.

1. Pouco complexo	1	2	3	4	5	Muito complexo
2. Pouco familiar	1	2	3	4	5	Muito familiar
3. Pouco interessante	1	2	3	4	5	Muito interessante
4. Pouco convencido(a)	1	2	3	4	5	Totalmente convencido(a)
5. Pouco importante	1	2	3	4	5	Muito importante

APÊNDICE D

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Tendo em vista o desenvolvimento de parte da pesquisa de doutorado do estudante Thiago Fernando Mendes do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, orientado pela professora Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida, declaro que autorizo o uso, a partir da presente data, de registros escritos e transcrições de áudio das gravações durante as aulas bem como respostas às questões incluídas nesse instrumento sem restrições de prazos e citações, podendo divulga-las em publicações, congressos e eventos da área, com a condição de que seja garantido o anonimato, não sendo nome e nenhuma informação pessoal tornada pública. Declaro que abdico de direitos meus e de meus descendentes.

Londrina, ____ de _____ de 20__.

Nome do estudante: ____;

Assinatura:____.