Universidade
Estadual de Londrina

ANNA FLÁVIA MAGNONI VIEIRA

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA:

AÇÕES DE UMA DISCIPLINA DE ENSINO DE GEOMETRIA

Londrina
2023

ANNA FLÁVIA MAGNONI VIEIRA

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA:

AÇÕES DE UMA DISCIPLINA DE ENSINO DE GEOMETRIA

Texto apresentado à Banca Examinadora como requisito parcial para aprovação no exame de defesa de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

Orientadora: Profª. Drª. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

Londrina
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

V658D Vieira, Anna Flávia Magnoni.

O desenvolvimento do pensamento geométrico na formação inicial de professores de matemática : ações de uma disciplina de Ensino de Geometria / Anna Flávia Magnoni Vieira. - Londrina, 2023.

177 f. : il.

Orientador: Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2023.

Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Pensamento geométrico - Tese. 3. Formação inicial - Tese. I. Cyrino, Márcia Cristina de Costa Trindade. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

ANNA FLÁVIA MAGNONI VIEIRA

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA:

AÇÕES DE UMA DISCIPLINA DE ENSINO DE GEOMETRIA

Texto apresentado à Banca Examinadora como requisito parcial para aprovação no exame de defesa de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientadora: Profª. Drª. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

____
Gabriel dos Santos e Silva
Instituto Federal do Paraná - IFPR

____
Mariana Moran
Universidade Estadual de Maringá - UEM

____
Sérgio Carrazedo Dantas
Universidade Estadual do Paraná - Unespar

Londrina, 17 de fevereiro de 2023.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força em todos os momentos.

À minha mãe, Sandra, pelo amor e pelo incentivo na realização de meus objetivos, e ao meu pai, João Carlos (*in memoriam*), por tudo o que representou em minha vida.

A meu esposo Raphael, meu companheiro de vida, pelo apoio e incentivo em todos os percursos desta caminhada, que, sempre apoiou incondicionalmente minhas decisões e, com muito amor e paciência, cedeu momentos em que eu poderia estar em sua companhia para a realização deste estudo.

À minha filha Clara, que, apesar de ainda não conseguir compreender a dimensão da importância que este trabalho representa para mim, foi minha maior fonte de amor e de estímulo para querer me capacitar ainda mais.

A minha sogra, Lourdes Lúcia, por me acolher em sua família e cuidar tão bem da Clara nos momentos em que estive ausente.

À professora Márcia, que me aceitou como orientanda, por tudo que me ensinou durante essa caminhada e por compartilhar comigo todas as etapas da pesquisa, e pela paciência, apoio e confiança.

Aos professores, André Luis Trevisan, Gabriel dos Santos e Silva, Mariana Moran e Sérgio Carrazedo Dantas, pelo carinho e atenção, pela leitura cuidadosa da tese e pelas valiosas contribuições no exame de qualificação.

As professoras e alunos da disciplina de Ensino de Geometria de 2021, por aceitarem participar desta minha pesquisa e contribuírem com ela.

Aos membros do Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática (Gepefopem) por todas as contribuições dadas a este trabalho, pelas aprendizagens e cafés compartilhados.

À Loreni, por sempre lutar muito para eu chegar até aqui, desde a orientação do meu trabalho de conclusão de curso, até a realização deste estudo. Obrigada por tudo, palavras nunca serão suficientes para agradecê-la.

À Fernanda Caroline, por sempre estar ao meu lado, por ouvir todos os meus choros e me ajudar a organizar minhas ideias em momentos que nada fazia sentido.

A Ana Claúdia, Beatriz, Daiane, Júlio Cezar e Talisson, por todo apoio durante essa trajetória e pelos momentos de desabafos.

À Adriele, por ser uma amiga tão fiel e companheira de caminhada.

À Clara e ao Raphael, minha família.
Eles bem compreenderam o meu empenho na
realização deste trabalho e a minha
consequente ausência, em muitos momentos
de suas vidas, durante o período de doutorado.

RESUMO

MAGNONI-VIEIRA, Anna Flávia. **O desenvolvimento do pensamento geométrico na formação inicial de professores de matemática:** ações de uma disciplina de Ensino de Geometria. 2023. 176 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

O estudo do pensamento geométrico na formação inicial de professores de matemática é um tema emergente que pode reverberar no ensino de geometria na Educação Básica. Nesta pesquisa, buscou-se responder à seguinte questão: *que elementos formativos, no contexto de uma disciplina de Ensino de Geometria, oferecem oportunidades para o desenvolvimento do pensamento geométrico de futuros professores de matemática?* Para tanto, foi realizada uma pesquisa de natureza qualitativa, de caráter interpretativo, que contou com a participação de 24 futuros professores de matemática (FPM) integrantes de uma disciplina de Ensino de Geometria em um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná - Brasil. Os dados dessa investigação referem-se às ações de formação registradas em vídeo, à produção escrita dos FPM promovidas por tarefas propostas no decorrer dessas ações e aos registros da pesquisadora em diário de campo. Os resultados evidenciaram que as ações de formação promoveram elementos formativos que oferecem oportunidades para o desenvolvimento do pensamento geométrico de FPM associados a conhecimentos teóricos e a conhecimentos inerentes à prática profissional desses futuros professores. No que se refere aos conhecimentos teóricos, os FPM tiveram oportunidade de refletir a respeito: dos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico; das apreensões em geometria discutidas por Duval; da capacidade de o professor *reconhecer*, *interpretar* e *decidir* sobre aspectos geométricos a serem considerados para o desenvolvimento do pensamento geométrico; e dos conceitos e propriedades geométricas de figuras planas. No que concerne a conhecimentos inerentes à prática profissional, os FPM refletiram a respeito: do papel do professor na prática em sala de aula para o desenvolvimento do pensamento geométrico; da busca de conexões entre as apreensões envolvidas no processo de resolução de tarefas de geometria; das potencialidades e das limitações de tarefas para o desenvolvimento do pensamento geométrico; da capacidade de o professor *reconhecer*, *interpretar* e *decidir* sobre implicações do desenvolvimento do pensamento geométrico para o processo de ensino e de aprendizagem de geometria. Assim, concluiu-se que as ações, como resolução, elaboração e discussão de tarefas de geometria, estudo e discussão de textos teóricos sobre o ensino de geometria e o pensamento geométrico, devem ser consideradas na formação inicial de professores de matemática, uma vez que apresentam potencial para suscitar elementos formativos que oportunizam ao FPM desenvolver o seu pensamento geométrico.

Palavras-chave: educação matemática; formação inicial de professores; pensamento geométrico.

ABSTRACT

MAGNONI-VIEIRA, Anna Flávia. **The development of geometric thinking in prospective mathematics teachers' education:** actions of a geometry teaching discipline. 2023. 176 p. Thesis (Doctorate's degree in the Teaching of Science and Mathematical Education) – Londrina State University, Londrina, 2023.

The study of geometric thinking in the prospective mathematics teachers' education is an emerging theme that can reverberate in the teaching of geometry in Basic Education. In this research, we sought to answer the following question: *which educational elements, in the context of a Geometry Teaching discipline, offer opportunities for the development of geometric thinking in prospective mathematics teachers?* To this end, a qualitative, interpretative research was carried out, with the participation of 24 prospective mathematics teachers (PMT), who are part of a Geometry teaching discipline in a Mathematics degree course at a public university in the state of Paraná - Brazil. The data of this investigation refer to the educational actions recorded on video, the written production of the PMT promoted by tasks proposed during these actions and the researcher's records in a field diary. The results showed that the actions promoted educational elements that offer opportunities for the development of PMT geometric thinking associated with theoretical knowledge and knowledge inherent to the professional practice of these prospective teachers. With regard to theoretical knowledge, the PMT had the opportunity to reflect on: the levels of thinking proposed in the van Hiele model for the development of geometric thinking; the apprehensions in geometry discussed by Duval; the teacher's ability to *recognize, interpret* and *decide* on geometric aspects to be considered for the development of geometric thinking; and the geometric concepts and properties of flat figures. With regard to knowledge inherent to professional practice, the PMT reflected on: the role of the teacher's practice in the classroom for the development of geometric thinking; the search for connections between the apprehensions involved in the process of solving geometry tasks; the potentialities and limitations of tasks for the development of geometric thinking; the teacher's ability to *recognize, interpret* and *decide* on implications of the development of geometric thinking for the process of teaching and learning geometry. Thus, it was concluded that the actions, such as resolution, elaboration and discussion of geometry tasks, study and discussion of theoretical texts on the teaching of geometry and geometric thinking, should be considered in prospective mathematics teachers' education, since they have the potential to raise educational elements that allow PMT to develop their geometric thinking.

Key words: mathematics education; prospective teachers' education; geometric thinking.

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO EXPANDIDA

Figura 1 - Diferentes organizações perceptivas de figuras............................28

Figura 2 - Apreensão discursiva de uma figura: identificação de outras propriedades 29

Figura 3 - Problema OBMEP..30

Figura 4 - Reconfiguração com a divisão em quadrados unitários.................31

Figura 5 - Passos de construção de um retângulo 32

Figura 6 - Organização da tese no formato *multipaper* 51

CAPÍTULO-ARTIGO 1

Figura 1 - Níveis de pensamento - Relação objeto-produto 61

CAPÍTULO-ARTIGO 2

Figura 1 - Construção de FPM3 no *GeoGebra* – Tarefa do triângulo............97

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO EXPANDIDA

Quadro 1 - Os níveis de pensamento de van Hiele 24

Quadro 2 - Síntese das ações formativas desenvolvidas na disciplina 42

CAPÍTULO-ARTIGO 1

Quadro 1 - Descrição das tarefas propostas pela PF.....................................63

Quadro 2 - Reflexões dos FPM manifestadas a respeito dos níveis de pensamento geométrico 65

Quadro 3 - Respostas e justificativas fornecidas à questão 1 do teste 71

Quadro 4 - Respostas e justificativas fornecidas à questão 2 72

Quadro 5 - Classes dos quadriláteros apresentadas pela PF 75

Quadro 6 - Aspectos do pensamento geométrico identificados a partir das reflexões...78

CAPÍTULO-ARTIGO 2

Quadro 1 - Ações formativas..91

Quadro 2 - Tarefa do triângulo 93

Quadro 3 - Uma possível resolução da Tarefa do triângulo 98

Quadro 4 - Tarefa elaborada por FPM5 e FPM7...99

Quadro 5 - Tarefa elaborada por FPM4 e FPM9..102

CAPÍTULO-ARTIGO 3

Quadro 1 - Síntese das ações formativas 120

Quadro 2 - Questões presentes no questionário..122

Quadro 3 - Respostas dos FPM à primeira questão 124

Quadro 4 - Respostas dos FPM à segunda questão.......................................129

Quadro 5 - Respostas dos FPM à terceira questão 131

Quadro 6 - Respostas dos FPM à quarta questão 133

Quadro 7 - Noticing profissional de FPM a respeito do pensamento geométrico 135

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FPM	Futuros professores de matemática
GEPEFOPEM	Grupo de Ensino e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática
IF	Investigadora formadora
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
MOODLE	Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PE	Produções escritas
PEM	Professores que ensinam matemática
PPC	Projeto Pedagógico do Curso
PF1	Professora formadora 1
PF2	Professora formadora 2
SF	Sessão formativa
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UNESPAR	Universidade Estadual do Paraná

SUMÁRIO

1 **INTRODUÇÃO** 15

2 **O PENSAMENTO GEOMÉTRICO: PERSPECTIVAS TEÓRICAS** 20

2.1 As Teorias de Van Hiele e Duval no Contexto da Aprendizagem de Geometria 23

2.2 Pensamento Geométrico: Algumas Considerações para Formação Inicial de Professores de Matemática 34

3 **ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS** 38

3.1 Questão Geral de Investigação e Objetivos Específicos da Pesquisa 38

3.2 Descrição do Contexto Investigado 39

3.3 Sobre a Professora Formadora (PF1) 46

3.4 Coleta das Informações 47

3.5 Análise dos Dados 48

4 **ORGANIZAÇÃO DA TESE** 49

5 **REFERÊNCIAS** 52

CAPÍTULO/ARTIGO 1 - PENSAMENTO GEOMÉTRICO: REFLEXÕES MANIFESTADAS POR FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM ESTUDOS DO MODELO DE VAN HIELE 57

Introdução 57

O Modelo de Van Hiele 59

Contexto e Procedimentos Metodológicos 62

Reflexões Manifestadas por FPM no Trabalho com Tarefas Apoiadas nos Aportes Teóricos de Van Hiele 65

Reflexões Relacionadas aos Níveis de Pensamento Proposto no Modelo de Van Hiele para o Desenvolvimento do

Pensamento Geométrico 65
Reflexões Relacionadas ao Papel do Professor na Prática em Sala de Aula para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico 68
Reflexões Relacionadas a Conceitos Geométricos Quanto às Propriedades Geométricas de Figuras Planas 71
DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 76
CONSIDERAÇÕES FINAIS 79
REFERÊNCIAS 80

CAPÍTULO/ARTIGO 2 - EXPLORAÇÃO DE TAREFAS POTENCIAIS PARA MOBILIZAR APREENSÕES EM GEOMETRIA NA FORMAÇÃO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA 83
INTRODUÇÃO 83
AS APREENSÕES DE RAYMOND DUVAL NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA 85
O TRABALHO COM TAREFAS MATEMÁTICAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES 88
CONTEXTO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA 90
EXPLORAÇÃO DE TAREFAS COM POTENCIAL PARA A MOBILIZAÇÃO DAS APREENSÕES EM GEOMETRIA EM UMA DISCIPLINA DE ENSINO DE GEOMETRIA 93
Tarefa do Triângulo 93
Tarefa Elaborada por FPM5 e FPM7 99
Tarefa Elaborada por FPM4 e FPM9 102
CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO COM TAREFAS DE GEOMETRIA PARA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA..............................104
CONSIDERAÇÕES FINAIS 107
REFERÊNCIAS 108

CAPÍTULO/ARTIGO 3 - NOTICING PROFISSIONAL DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE O PENSAMENTO GEOMÉTRICO 111

Introdução 111
Pensamento Geométrico e a Formação Inicial de Professores de Matemática 113
O Noticing Profissonal do Professor a Respeito do Pensamento Matemático dos Alunos 117
Contexto e Procedimentos Metodológicos da Pesquisa 119
Noticing Profissional de Futuros Professores de Matemática a Respeito do Pensamento Geométrico 123
Noticing Profissional de FPM Relacionado à sua Compreensão de Pensamento Geométrico e suas Implicações para o Processo de Ensino e de Aprendizagem..123
Noticing Profissional de FPM Relacionado às Potencialidades de Tarefas para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico...131
Discussão dos Resultados 134
Considerações Finais...140
Referências...142

CONSIDERAÇÕES FINAIS 147
Elementos Formativos para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Futuros Professores de Matemática 148
Ações Formativas para a Promoção do Pensamento Geométrico na Formação Inicial de Professores de Matemática 151
Conclusão e Implicações Futuras 152

APÊNDICES...154
APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido 155
APÊNDICE B – Pré-Teste 157
APÊNDICE C – Tarefa Apreensões de Duval 159
APÊNDICE D – Questionário Texto Van de Walle (2009)....................160

ANEXOS 161

ANEXO A – Plano de Ensino 162
ANEXO B – Texto “Apreensões Geométricas, Segundo Raymond Duval” 165

1 INTRODUÇÃO

Pesquisas no âmbito da Educação Matemática revelam dificuldades que muitos professores enfrentam ao trabalhar com conteúdos geométricos na Educação Básica (CALDATTO; PAVANELLO, 2015; CREAGER, 2022; FERNER; SOARES; MARIANI, 2020; NACARATO; PASSOS, 2003; RAMATLAPANA; BERGER, 2018; SANTOS; TELES, 2021; WINER; BATTISTA, 2022).

Há décadas, diversos autores no contexto de pesquisas brasileiras apontam o abandono do ensino da geometria nas escolas brasileiras e relatam dificuldades enfrentadas por professores de matemática no trabalho com ela (GAZIRE, 2000; LORENZATO, 1995; PAVANELLO, 1993). Dentre as principais causas desse abandono está o Movimento da Matemática Moderna[1] e a falta de formação adequada do professor em relação a conteúdos geométricos (BARBOSA, 2011).

Contudo, de acordo com Pavanello (1993), o ensino da geometria já apresentava problemas relacionados ao conhecimento geométrico do professor e suas práticas pedagógicas, mesmo antes do movimento modernista. Porém, a autora afirma que, de certa forma, ele influenciou os professores a elaborarem seus próprios programas de ensino, os quais, muitas vezes, se limitavam ao desenvolvimento da aritmética e das noções de conjunto.

Lorenzato (1995), ao destacar que existe uma omissão geométrica e que são diversos fatores que contribuem para que isso ocorra, concorda com Pavanello (1993) que uma possível causa para essa omissão seja muitos professores não deterem os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas, acarretando no insucesso do aluno na aprendizagem destes conhecimentos, visto que "ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece" (LORENZATO, 1995, p. 5). Almouloud *et al* (2004), ao observarem essa precariedade no trabalho com a geometria, na Educação Básica, defendem mais discussões e reflexões sobre questões específicas do ensino e da aprendizagem de geometria em programas de formação inicial. Os autores apontam para uma necessária revisão dos modelos de formação de professores para a efetiva implantação de alternativas que complementem tais diagnósticos e

[1] É a expressão utilizada no âmbito dos estudos sobre o ensino da Matemática, que caracteriza um período em que se elaboraram novas referências para o ensino da disciplina. (VALENTE, 2008).

provoquem discussões a respeito do que, como e quando ensinar determinado conteúdo.

Pesquisas mais recentes também evidenciam essa questão. Nunes e Onuchic (2019) indicam que boa parte dos professores que atuam na Educação Básica, quando questionados quanto ao ensino de geometria, expõem que não se sentem preparados para trabalhar com essa temática e relatam a necessidade de aprofundar seus conhecimentos por meio de cursos de extensão que promovam reflexões de suas práticas pedagógicas. Dessa maneira, as autoras defendem que, durante a formação inicial, os futuros professores de matemática (FPM) sejam conduzidos a uma aprendizagem significativa, visto que precisam "entender 'o que sabem', 'o que aprendem' 'porquê aprendem' e 'como aprendem', para que, então, com segurança, como professores, possam guiar seus alunos na construção de novos conhecimentos" (NUNES; ONUCHIC, p. 53, 2019, grifos das autoras).

No entanto, de modo geral, o conjunto de conhecimentos pedagógicos, didáticos, de conteúdo e tecnológicos é trabalhado na formação inicial de professores de matemática de modo desarticulado, tal como ocorre com os conteúdos de geometria, muitas vezes, não relacionados às discussões pedagógicas ou ao uso de novas tecnologias (LIMA; SILVA, 2015). Lopes, Manrique e Macêdo (2022) salientam que, em muitos casos, esses conhecimentos são vistos de forma estanque, em disciplinas distintas, na expectativa de que, na prática, o FPM seja capaz de associar todos esses conhecimentos. Esse modo de trabalhar pode acarretar sérias lacunas no conhecimento geométrico dos FPM e na sua capacidade de raciocinar em contextos geométricos, como exemplo, apresentar dificuldades para levantar conjecturas, realizar generalizações e fazer inferências ao lidar com situações envolvendo a geometria (BRUNHEIRA; PONTE, 2019).

Santos e Teles (2021) afirmam que as fragilidades do conhecimento conceitual de geometria, ensinado na formação inicial, influenciam de forma significativa as práticas dos professores, gerando insegurança, ao trabalharem tais conceitos em sala de aula. No entanto, as autoras destacam que ações formativas que privilegiem a constituição de conhecimentos geométricos, por meio de, por exemplo, grupos de estudo, de trabalhos colaborativos e de oficinas, durante o processo de formação inicial de professores, podem colaborar com a ressignificação da prática de ensino de geometria. Nacarato e Passos (2003) defendem ainda que o FPM deve ter a oportunidade de vivenciar situações da prática pedagógica que possam favorecer a formação do seu próprio pensamento geométrico.

Assim, Livy e Downton (2018) defendem que, na formação inicial, sejam promovidas ações que permitam ao futuro professor de matemática vivenciar situações nas quais, além de desenvolver o seu pensamento geométrico, possa discutir abordagens pedagógicas que apoiem o desenvolvimento do pensamento geométrico de seus alunos.

Considerando a necessidade de uma formação inicial capaz de promover a constituição de conhecimentos geométricos e o desenvolvimento do pensamento geométrico de FPM, o GEPEFOPEM – Grupo de Ensino e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática, grupo do qual fazemos parte, tem desenvolvido estudos e pesquisas acerca desta temática, dentre eles, os de Cybulski (2022) e Cybulski, Magnoni-Vieira e Cyrino (no prelo). Essas pesquisas fornecem um panorama a respeito da geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática (PEM), a partir da realização de mapeamentos de dissertações e teses brasileiras (CYBULSKI, 2022) em periódicos tanto brasileiros quanto internacionais (CYBULSKI; MAGNONI-VIEIRA; CYRINO, no prelo). Há outras pesquisas em andamento sobre esta temática, porém no contexto da formação continuada de PEM.

Cybulski (2022) fez um mapeamento de teses e dissertações brasileiras, defendidas no período 2009-2020, oriundas de Programas de Pós-graduação brasileiros *stricto sensu,* das Áreas de Educação e Ensino, na plataforma digital do Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e no catálogo da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, totalizando 18 trabalhos, com o objetivo de mapear, descrever e discutir indicativos de geometria na formação inicial de PEM, presentes nesses trabalhos.

Os resultados apontados pela autora destacam que as pesquisas que investigaram contextos da formação inicial de professores de matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio se propuseram a analisar estratégias associadas às aprendizagens dos futuros professores em geometria e relações estabelecidas, a partir de conhecimentos já constituídos por eles, e que entre os referenciais adotados nessas pesquisas, sobre geometria, predominaram Duval e van Hiele.

Cybulski (2022), com base em suas análises, evidenciou que a geometria na formação inicial de PEM ainda é relativamente pouco pesquisada, tem ênfase em abordagens metodológicas, especialmente material manipulável e softwares como o *GeoGebra*, e na Geometria Euclidiana. As figuras geométricas são o principal meio de acesso aos objetos geométricos, estando presentes em todos os trabalhos. Em vista disso, a autora sugere que outros aspectos sejam investigados em futuras pesquisas, dentre eles, o impacto da presença de uma disciplina específica do Ensino de Geometria na formação inicial de PEM.

Cybulski, Magnoni-Vieira e Cyrino (no prelo) realizaram um levantamento em periódicos brasileiros e internacionais que incidem sobre a geometria na formação inicial de PEM, com o objetivo de discutir suas temáticas e principais resultados. Foram identificados 14 artigos publicados no período 2017-2021 em 8 periódicos[2], brasileiros e internacionais, cujas temáticas estavam relacionadas a estratégias de ensino de geometria e à aprendizagem de conceitos geométricos na formação inicial de PEM.

Os resultados pontuam que os artigos investigados, em relação às estratégias de ensino na formação inicial de PEM, evidenciam temáticas como *noticing* profissional, pensamento geométrico e conhecimento pedagógico do ensino de geometria e, no que diz respeito à aprendizagem de conceitos geométricos, emergiram questões associadas a aspectos de objetos geométricos, operações geométricas, definições, argumentações e provas em geometria. As autoras sinalizam que o ensino de geometria na formação inicial de PEM ainda é pouco investigado. É preciso, ainda, discutir que conhecimento de geometria seria necessário ao (futuro) PEM e que implicações o trabalho com pensamento/raciocínio geométrico traria para a formação inicial de PEM.

Em particular, observamos que estas pesquisas acenaram para a pouca ênfase em investigações envolvendo questões acerca do ensino de geometria e do pensamento geométrico no âmbito da formação inicial de professores de matemática, e ainda, a necessidade de estudos a respeito do impacto da presença de uma disciplina específica do Ensino de Geometria nesse contexto. Desse modo,

---

[2] *Journal of Mathematical Behavior*, *International Journal of Science and Mathematics Education*, *Educational Studies in Mathematics*, *Mathematics Education Research Journal*, *Journal of Mathematics Teacher Education*, *Bolema*, *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia* e *Educação Matemática Em Revista*.

o objetivo geral deste estudo é *investigar e discutir elementos formativos, para o desenvolvimento do pensamento geométrico de futuros professores de matemática, desencadeados por ações de uma disciplina de Ensino de Geometria na formação inicial.* Chamamos de elementos formativos como um produto das ações formativas promovidas na disciplina. Deste modo, nesta tese, defendemos que, durante a formação inicial de professores de matemática, sejam promovidos momentos nos quais os FPM possam refletir sobre o desenvolvimento do seu pensamento geométrico, reverberando em sua futura prática profissional. Tendo em vista o objetivo enunciado, procuramos responder às seguintes questões: *que reflexões, a respeito do pensamento geométrico, são manifestadas por futuros professores de matemática ao trabalharem com tarefas apoiadas no modelo teórico de van Hiele? Que contribuições o trabalho com elaboração, resolução e discussão de tarefas, com potencial para mobilizar apreensões em geometria, proporciona para a formação inicial de professores de matemática? Que aspectos do pensamento geométrico são reconhecidos e interpretados pelos FPM nas ações da disciplina? Que elementos os FPM consideram relevantes nas ações formativas para à promoção do pensamento geométrico?*

Na sequência, apresentaremos uma revisão da literatura a respeito de perspectivas teóricas de pensamento geométrico e suas implicações na formação inicial de professores de matemática, os aportes teóricos utilizados em nossa investigação acerca do pensamento geométrico, seguidos dos encaminhamentos metodológicos e do formato de apresentação desta tese.

2 O PENSAMENTO GEOMÉTRICO: PERSPECTIVAS TEÓRICAS

Alguns pesquisadores da Educação Matemática têm se dedicado, nas últimas décadas, a investigar o pensamento geométrico, em especial, aspectos relacionados à sua natureza e ao seu desenvolvimento (CLEMENTS; BATTISTA, 1992; COSTA, 2020; DUVAL, 1998; FUJITA, 2012; GARRIDO; LEYVA, 2005; GRAVINA, 2001; LEIVAS, 2009; PAIS, 1996; PARZYSZ, 1988; VAN DE WALLE; 2009; VAN HIELE, 1984).

No entanto, estudos apontam a falta de consenso do que seja pensamento geométrico (COSTA, 2020; CYBULSKI; CYRINO, 2022; PAIVA, 2021). Assim na busca de compreendermos elementos essenciais do pensamento geométrico, apresentaremos nesta seção algumas caracterizações ou definições presentes na literatura.

Gravina (2001) sugere que a natureza evolutiva do pensamento geométrico se inicia com o pensamento empírico e culmina no pensamento hipotético-dedutivo. O pensamento empírico é aquele que "constitui-se a partir das impressões e experiências proporcionadas pelo mundo sensível imediato" (GRAVINA, 2001, p. 1), podendo ser mobilizado a partir das primeiras medições e manipulações empíricas, as quais suportam a primeira identificação de propriedades geométricas. Por sua vez, o pensamento hipotético-dedutivo é aquele que mobiliza conhecimentos em que a geometria é um modelo teórico, organizado por via de axiomas, teoremas e demonstrações.

Assim, a autora compreende o pensamento geométrico como "os raciocínios de natureza dedutiva e visual quando [os estudantes] manipulam desenhos inseridos num quadro conceitual bem definido" (GRAVINA, 2001, p. 2), sendo que esse pensamento pode conduzir a constituição do conhecimento, a geometria concebida como modelo teórico do mundo em que vivemos. Dessa maneira, Gravina (2001) considera que a constituição do pensamento geométrico ocorre com base na análise das formas que são, inicialmente, abstraídas do mundo em que vivemos, bem como por meio da dedução de teoremas e demonstrações, mediante inferência lógica. Afirma também que um dos pontos cruciais na constituição do pensamento geométrico é entender a diferença entre validações empíricas e argumentações hipotéticas-dedutivas, bem como a necessidade dessas argumentações.

Leivas (2009), por sua vez, defende que a imaginação, a intuição e a visualização se constituem como uma tríade fundamental no processo de constituição do pensamento geométrico. O autor, em sua tese de doutoramento[3], discute a existência de um pensamento geométrico avançado, que, segundo ele, se caracteriza como "um processo capaz de construir estruturas geométricas mentais a partir de imaginação, intuição e visualização, para a aquisição de conhecimentos matemáticos científicos" (LEIVAS, 2009, p. 136).

A imaginação, segundo Leivas (2009), está diretamente ligada com a abstração, assim como com a intuição. O autor considera a imaginação como uma forma de concepção mental de um conceito matemático, podendo ser expressa por um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação deles, com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito. Para ele, a intuição é como "um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto" (LEIVAS, 2009, p. 21). E a visualização, como "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos" (LEIVAS, 2009, p. 22).

Costa (2020), ao investigar a constituição do pensamento geométrico pautado nos pressupostos teóricos de Gravina (2001) e Leivas (2009), discute a natureza do pensamento geométrico, partindo de questionamentos sobre a existência de um pensamento geométrico elementar. Segundo o autor, então, o desenvolvimento do pensamento geométrico pode dar-se sem a escolarização, isto é, antes de a criança frequentar ambientes escolares, ou seja, por meio da observação do espaço, do contato e da compreensão de objetos que fazem parte do seu meio, sem a preocupação de considerar o campo geométrico como um modelo teórico. Assim esse tipo de pensamentos desenvolvidos nesse contexto constitui o pensamento geométrico de natureza elementar. Esse pensamento geométrico de natureza elementar é definido por Gravina (2001) como pensamento geométrico empírico.

Com base em Leivas (2009), Costa (2020) também considera que o pensamento geométrico, de natureza avançada, tem como foco o estudo de objetos

[3] Intitulada por "Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura em Matemática" e defendida em 2009.

geométricos mais complexos, por exemplo, a Geometria Fractal, a Geometria Hiperbólica, a Geometria Esférica, a Topologia, entre outros, bem como a integração de axiomas e teoremas no modelo teórico que constitui a Geometria Euclidiana. O autor destaca que a vivência sistemática com essas diferentes geometrias pode impulsionar o desenvolvimento do pensamento geométrico avançado, pontuando ainda que esse tipo de pensamento é o que Gravina (2001) entende por pensamento hipotético-dedutivo. Por fim, Costa (2020, p. 92) apresenta a seguinte definição de pensamento geométrico

> O pensamento geométrico é a capacidade mental de produzir conhecimentos em Geometria; de mobilizar, de forma coerente, os instrumentos geométricos[4] na resolução de problemas; é a capacidade de entender a complexidade dos fenômenos e de realizar inferência sobre eles; de reconhecer e verificar a relevância da Geometria como um instrumento para compreensão do mundo físico e como um modelo em Matemática para entendimento do mundo teórico.

Garrido e Leyva (2005), assim como Costa (2020) e Gravina (2001), também sugerem que o desenvolvimento do pensamento geométrico pode iniciar-se desde as primeiras explorações da criança com objetos do mundo físico, até as sistematizações e as generalizações de conteúdos geométricos durante sua vida escolar. Defendem eles, ainda que, para o desenvolvimento do pensamento geométrico, cumpre articular três capacidades: visão espacial, representação espacial e imaginação espacial, todas intimamente relacionadas entre si. Assim como Leivas (2009), os autores defendem que a capacidade da imaginação espacial é fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico, visto que permite analisar o plano e suas relações com o espaço por meio de seus conceitos e leis, de modo a estabelecer a comunicação de uma ideia matemática.

De acordo com Garrido e Leyva (2005), o pensamento geométrico representa uma forma de pensar em situações que requerem conhecimento, habilidades e capacidades geométricas. Levam em conta, ainda, também a concepção de níveis para o desenvolvimento do pensamento geométrico, defendendo-a como uma premissa essencial no processo de ensino e aprendizagem da geometria, uma vez que “pode permitir ao professor um diagnóstico real do

[4] Por instrumentos geométricos, o autor considera tanto os processos mentais utilizados para resolver problemas ou compreender um assunto em geometria, bem as ferramentas tecnológicas, como régua, compasso, software de Geometria Dinâmica e outros, que são utilizadas nessas situações (COSTA, 2019, p. 118).

domínio conceitos e procedimentos geométricos" (GARRIDO; LEYVA, 2005, p. 4, tradução nossa).

No entanto, diferente do modelo proposto por van Hiele[5], o qual estabelece cinco níveis de pensamento capazes de fornecer insights quanto às diferenças no pensamento geométrico e como essas diferenças são estabelecidas (VAN DE WALLE, 2009), o modelo sugerido por Garrido e Levya (2005) é constituído por três níveis, perpassando desde uma percepção sensorial até a resolução de problemas. Os níveis são: nível 1– *materialização*, o estudante requer percepção sensorial direta de objetos material ou materializado que lhe permite memorizar características essenciais, significados e relações; nível 2 – *reconhecimento*, o estudante observa e, por meio de perguntas, ativa sua memória, estabelece significados e relações entre significados; e o nível 3 – *elaboração*, o estudante raciocina em situações de relativa complexidade e em alguns casos resolve problemas.

Com base nos estudos apresentados, explorar e interpretar objetos geométricos; articular a visualização, a imaginação e a intuição, de modo a construir modelos para resolver problemas em geometria, bem como realizar inferências sobre eles, é capital para desenvolver o pensamento geométrico.

Tendo em conta que, por grande parte das investigações, envolvendo o pensamento geométrico no âmbito da formação inicial, estar embasada teoricamente em van Hiele (1984) e Raymond Duval (1994), conforme apontado por Cybulski (2022), e por julgarmos que essas teorias fornecem subsídios para identificarmos elementos centrais relacionados ao pensamento geométrico, na sequência apresentaremos aspectos teóricos referentes a tais teorias.

2.1 AS TEORIAS DE VAN HIELE E DUVAL NO CONTEXTO DA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

O modelo teórico de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico considera que a aprendizagem em geometria ocorre por meio da evolução do conhecimento do estudante, perpassando por cinco níveis

[5] Pierre van Hiele foi um renomado pesquisador do ensino de geometria que, juntamente com sua esposa, Dina van Hiele-Geldof, investigaram o desenvolvimento do pensamento geométrico, cujos primeiros resultados começaram a ser publicados em 1959. Todavia, como Dina morreu logo após a publicação de seus trabalhos iniciais, foi Pierre quem reformulou e desenvolveu a teoria.

diferentes, os quais são hierárquicos e descrevem "*como* pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sobre as quais pensamos mais do que a quantidade de conhecimento ou de informação que temos a cada nível" (VAN DE WALLE, 2009, p. 439, grifo do autor).

Tal modelo é sustentado de acordo com o seguinte aspecto: há níveis de compreensão, cada um com suas próprias características, e os níveis anteriores devem ser totalmente compreendidos para alcançar um próximo (VAN HIELE, 1984). Na literatura, os níveis de pensamento de van Hiele são, nomeadamente: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor (KALEFF *et al*., 1994; VAN DE WALLE, 2009). As ideias criadas em cada nível se tornam o objeto de pensamento do nível seguinte, isto é, o produto de pensamento de cada nível (VAN DE WALLE, 2009). O Quadro 1 ilustra os níveis de pensamento de van Hiele.

Quadro 1 – Os níveis de pensamento de van Hiele

Níveis	Descrição	Objeto de pensamento	Exemplo
1.º nível Visualização	As figuras são julgadas por sua aparência, e o seu reconhecimento passa a ser feito pela distinção das formas e não por suas propriedades.	Os agrupamentos de formas parecidas.	Um estudante é capaz de reproduzir diferentes formas, caso alguém já tenha lhe mostrado tais figuras, no entanto, não consegue estabelecer relações referentes às propriedades dessas formas.
2.º nível Análise	As figuras são reconhecidas por suas propriedades, contudo, tais propriedades ainda não estão ordenadas de forma lógica.	As classes das formas.	Um estudante é capaz de pensar sobre, por exemplo, o que leva um objeto geométrico a ser classificado como um retângulo e que outras formas podem ser agrupadas com esse objeto, a fim de que tenham as mesmas propriedades dentro de determinada classe.
3.º nível Dedução informal	As propriedades das formas podem ser ordenadas e deduzidas umas das outras, contudo, o significado intrínseco da dedução ainda não é compreendido.	As propriedades das formas.	Um estudante é capaz de acompanhar e apreciar um argumento lógico sob um caráter intuitivo.

4.º nível Dedução	O pensamento está centrado no significado da dedução.	As relações entre as propriedades dos objetos geométricos.	Um estudante é capaz tanto de trabalhar com sentenças abstratas sobre as propriedades geométricas quanto de estabelecer conclusões baseadas mais na lógica do que na intuição.
5.º nível Rigor	As figuras são definidas apenas por símbolos ligados por relações.	Os sistemas dedutivos axiomáticos para a geometria.	Um estudante é capaz de fazer uma apreciação das distinções e das relações entre diferentes sistemas axiomáticos.

Fonte: Elaborado pela autora, a partir de van Hiele (1984) e van de Walle (2009)

Com base nesse quadro, podemos observar que os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico obedecem a uma hierarquia, isto é, um estudante para alcançar um nível mais avançado deve ter passado por níveis mais simples. De acordo com van Hiele (1984), cada nível possui características próprias, como seu vocabulário específico, além de relações com os objetos geométricos que se diferenciam entre os níveis.

O autor ressalta ainda que, em geral, o professor e o estudante pensam em níveis diferentes, o que pode dificultar a comunicação entre eles. Então, por conta disso, para que se estabeleça um verdadeiro diálogo ao nível de pensamento dos estudantes, o professor deve, muitas vezes, após a aula, questionar-se sobre as respostas de seus alunos e se esforçar para compreender seu significado. De acordo com van Hiele (1984), o amadurecimento, que leva o estudante a alcançar níveis superiores de pensamento, deve ser considerado, sobretudo, como um processo de aprendizagem e não como um fator de ordem biológica. Portanto, é primordial que o professor tenha consciência e saiba diferenciar em que nível cada estudante se encontra e entenda o processo de passagem de um nível para o outro. E, em vista disso, proponha tarefas adequadas que auxiliem o estudante a encontrar o caminho para a progressão de níveis, visto que se trata de um processo contínuo, e suas instruções poderão auxiliar ou dificultar a passagem de um nível a outro.

Nesse sentido, van Hiele (1984) aponta cinco fases hierárquicas, no processo de aprendizagem, que determinam a passagem de um nível a outro superior, por parte do estudante. São elas:

- **Investigação**: os estudantes vão explorar e descobrir certas estruturas por meio dos materiais apresentados pelo professor.
- **Orientação direta:** o estudante explora o campo de investigação por meio do material, o qual deve ser escolhido de tal maneira que as estruturas características apareçam gradualmente.
- **Explicitação:** o estudante já conhece nomenclaturas próprias do contexto e é incentivado pelo professor a usá-las em suas conversas e trabalhos escritos sobre geometria.
- **Orientação livre:** grande parte do contexto já é conhecida pelo estudante. Ele, não orientado pelo professor, deve ser capaz de elaborar estratégias de resoluções, de tarefas que demandam diferentes formas de serem realizadas.
- **Integração:** o estudante possui uma visão global de todos os métodos utilizados e vivenciados, tendo à sua disposição um sistema de relações que se relacionam com todo o domínio explorado neste nível. Ao final desta fase o estudante alcança um novo nível de pensamento.

Identifica-se no modelo de van Hiele uma aprendizagem progressiva e gradual, que destaca a importância do papel do professor em: planejar e propor tarefas que apoiem o estudante na passagem de um nível de pensamento para o seguinte; direcionar a atenção dos estudantes para as propriedades geométricas das formas; introduzir nomenclaturas próprias das estruturas de modo a promover novas formas de comunicação e assim conduzi-los a novos significados; e construir conceitos à medida que os estudantes vivenciem experiências de aprendizagem (VAN HIELE, 1999).

Diferentemente do modelo de van Hiele, Duval (1998) defende que não existe uma hierarquia de desenvolvimento do pensamento entre os diferentes tipos de atividades cognitivas: visualização, raciocínio discursivo natural, teorização do raciocínio dedutivo, provas axiomáticas e entre outras. O autor entende que, desde a fase representativa (cerca de 2-3 anos de idade) até as fases mais maduras, a pessoa já tem essas diferentes atividades cognitivas, porém a maneira de trabalhá-las não é a mesma. A cada fase, elas vão se tornando mais e mais complexas (DUVAL, 1998).

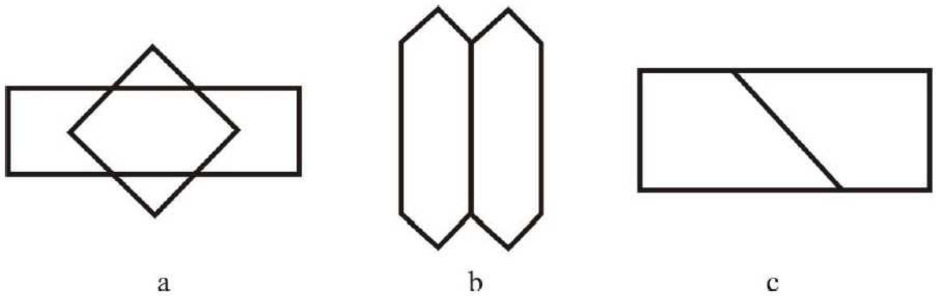
Duval (1994) sugere uma teoria para analisar e desenvolver os processos cognitivos que envolvem a aprendizagem em geometria e as apreensões cognitivas presentes neste processo para resolver problemas geométricos. Para Duval (1994), apreensões em geometria são atividades cognitivas responsáveis pela compreensão das representações geométricas, ou seja, são as interpretações autônomas realizadas pelo sujeito na interação com tais representações (MORAN, 2015), e se distinguem em quatro tipos: *apreensão perceptiva*, *apreensão operatória, apreensão discursiva* e *apreensão sequencial*.

Apreensão perceptiva

A *apreensão perceptiva* permite identificar ou reconhecer, imediatamente, uma forma ou objeto, seja no plano ou no espaço. Essa identificação de formas se dá por meio de leis da *Gestalt*[6] de organização ou por indicadores intrafigurais tais como: simetrias, contornos, convexidade, diferenças de tamanho, orientação, entre outros. Esta apreensão cumpre a função epistemológica de identificação de objetos em duas ou três dimensões, limita-se às observações das características de uma figura, e, em algumas situações, tais observações podem ser o único processo para conduzir à resolução de um problema, além de permitir a interpretação da forma que uma figura está organizada independente do enunciado (DUVAL, 1994, 1998). Para Duval (2012), uma figura é uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo, sendo eles: pontos, traços (retas) ou zonas (regiões). Os pontos e os traços são caracterizados por serem discretos e contínuos, já as zonas se caracterizam por sua forma, isto é, pelo seu contorno: um traço fechado ou uma sequência de pontos suficientes para destacar uma zona de um campo homogêneo. No caso de os elementos figurais serem traços, a organização perceptiva de uma figura segue a lei do fechamento e da continuidade: quando diferentes traços geram um contorno simples e fechado (DUVAL, 2012). Por exemplo, na Figura 1:

[6] A teoria da Gestalt foi criada por Wertheimer, Köhler, Koffka e Lewin e descreve o funcionamento de nossa percepção e compreensão do mundo externo. De acordo com esta teoria, nossa mente configura, por meio de certas leis, os elementos que chegam até nós pelos canais sensoriais ou da memória (FÁLCON, 2010).

Figura 1 - Diferentes organizações perceptivas de figuras



Fonte: Duval (2012, p. 121)

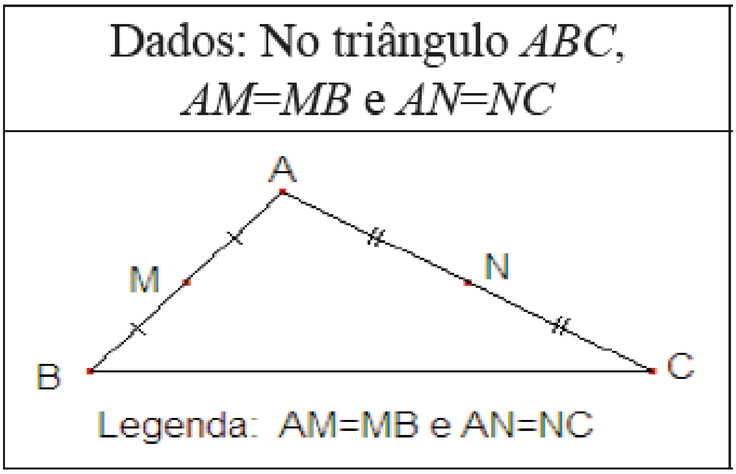
Segundo essa lei de fechamento e da continuidade, podemos observar que a figura 1a é resultado da superposição entre um retângulo e um quadrado; a figura 1b é imediatamente reconhecida como duas formas iguais com um lado em comum; e a figura 1c mostra um retângulo dividido em duas partes (DUVAL, 2012). No entanto, essa lei exclui organizações perceptivas mais simples, impedindo a visualização de outras formas (DUVAL, 2012). Como exemplo, na figura 1a, ao invés de se reconhecerem dois polígonos regulares, 1 quadrado e 1 retângulo, poderiam ser reconhecidos cinco formas poligonais: dois triângulos, dois pentágonos e um hexágono (MORAN, 2015).

De acordo com Duval (2012), a diferença entre a interpretação discursiva de uma figura exigida por uma situação geométrica e a apreensão perceptiva tem sua origem, em grande parte, nas leis de organização perceptiva.

Apreensão discursiva

A *apreensão discursiva* tem como função epistemológica a interpretação de enunciados e a demonstração. Tem natureza dedutiva e corresponde à explicação do sujeito para certas propriedades matemáticas de uma figura, para além das indicadas nos enunciados, nas legendas ou nas hipóteses que a acompanham. Envolve o conhecimento do sujeito a respeito das propriedades matemáticas que não "aparecem" na figura. Essa explicação pode estar pautada num discurso natural ou teórico. O natural se refere à nomeação, à descrição ou à argumentação; e o teórico, às definições e aos teoremas que levam a uma organização dedutiva do discurso (DUVAL, 1994, 1998). A Figura 2 exemplifica esse tipo de apreensão.

Figura 2 - Apreensão discursiva de uma figura: identificação de outras propriedades



Fonte: Adaptado de Jahn e Bongiovanni (2019, p. 247)

A situação matemática exemplificada na Figura 2 abrange um triângulo e os pontos médios de dois de seus lados. Supondo que seja necessário provar a semelhança entre os triângulos AMN e ABC, nesse caso, seria preciso explicar ao sujeito outras propriedades matemáticas, além das explicitadas em seu enunciado. Como exemplo: $BC = 2.MN$ e $A\hat{M}N \equiv A\hat{B}C$ e $A\hat{N}M \equiv A\hat{C}B$, e portanto, $\overline{BC}//\overline{MN}$, logo os triângulos são semelhantes, pelo caso lado, ângulo, lado (LAL).

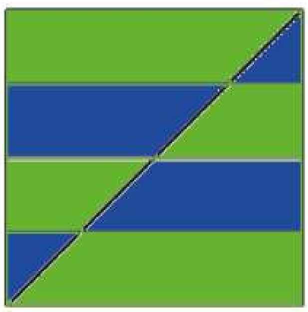
Duval (1994) destaca que não há figura geométrica sem legenda ou sem um texto que a caracterize, portanto, o autor denomina de figura geométrica a conexão entre a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva. Considera que uma representação figural ou um desenho é constituído de elementos referentes ao enunciado, à sua legenda e aos conhecimentos do sujeito que o interpreta, para além dos aspectos visuais imediatos, que podem trazer ambiguidades (JAHN; BONGIOVANNI, 2019).

Para Duval (2012), quando uma figura é representada em uma tarefa matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática (apreensão perceptiva), e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva de elementos figurais (apreensão discursiva). Estas duas atitudes geram um conflito, porque a figura mostra objetos que se destacam independente do enunciado, que podem ser relevantes ou não para chegar-se à solução da situação geométrica. Em contrapartida, os objetos nomeados no enunciado das hipóteses nem sempre são necessariamente aqueles que aparecem de forma espontânea. E ainda, em alguns casos, a apreensão perceptiva sobrepõe à apreensão discursiva, fazendo com que as hipóteses levantadas nos enunciados sejam deixadas de lado pela maioria dos estudantes.

Apreensão operatória

As organizações perceptivas das figuras geométricas podem conduzir o sujeito a outra apreensão, a *apreensão operatória*, que tem a função epistemológica de exploração heurística, ou seja, durante a exploração de uma figura podem ser percebidas subconfigurações excedentes, isto é, aquelas que não foram explicitamente mobilizadas na construção da figura ou mencionadas nas hipóteses. Este excedente é o que cria o poder heurístico das figuras e pode fornecer a ideia principal para solucionar uma situação geométrica, (DUVAL, 1998). A seguir apresentamos um problema, retirado do banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), elaborado por Jahn e Bongiovanni (2019), para exemplificar uma situação matemática que pode ser resolvida por meio da apreensão operatória.

Figura 3 - Problema OBMEP

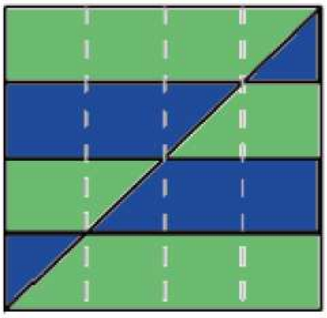


Para fazer um quadro bem moderno para sua escola, Roberto divide uma tela quadrada de 16 cm² em 8 partes com 4 faixas de mesma largura e a diagonal, como na figura. Ele pinta o quadro de azul e verde, de modo que duas partes vizinhas tenham cores diferentes. No final, ele repara que usou mais verde do que azul. Qual a área da figura pintada de verde?

Fonte: Jahn e Bongiovanni (2019, p. 252)

Os autores ilustram uma possível forma de solucionar o problema, por meio da apreensão operatória, a qual consiste em modificar a figura inicial (Figura 3), realizando uma reconfiguração dela, ou seja, dividir o quadrado inicial em um quadriculado, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 - Reconfiguração com a divisão em quadrados unitários



Fonte: Jahn e Bongiovanni (2019, p. 252)

Assim, a figura inicial é dividida em 16 quadrados de área 1 cm² cada (Figura 4), de modo a tornar visível que a área verde corresponda a 10 quadrados (8 quadrados completos + 4 metades de quadrados), logo a área pedida será de 10 cm².

Deste modo, a apreensão operatória refere-se às modificações figurais realizadas em uma figura na busca da modificação heuristicamente relevante para solucionar um problema (DUVAL, 1994). Tais modificações se subdividem em: modificação mereológicas – divisão de uma figura em partes a fim de as recombinar em uma outra figura (como o caso da Figura 4); modificação óptica – modificação do tamanho ou da inclinação da figura inicial. Consiste em ampliar, reduzir ou inclinar. Pode conservar a forma inicial ou alterá-la. É uma modificação que permite ver em profundidade, útil para compreender a homotetia; e modificação posicional – alteração da posição da figura inicial no plano, utilizando, por exemplo, as operações de reflexão, translação e rotação.

Apreensão sequencial

A *apreensão sequencial* tem como função epistemológica fornecer um modelo, o qual pode ser modificado com o uso de certos instrumentos de construção geométrica, a fim de conduzir à solução do problema. Este tipo de apreensão é "explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura" (DUVAL, 2012, p.120) e não depende somente de propriedades matemáticas, mas de restrições técnicas dos instrumentos utilizados na construção, como régua e compasso e/ou softwares de geometria. A Figura 5 representa uma ordem de construção de um retângulo, como um exemplo da apreensão sequencial:

Figura 5 - Passos de construção de um retângulo

Passo 1: trace uma reta *s* passando por dois pontos quaisquer;
Passo 2: trace duas retas paralelas entre si e perpendiculares à reta *s*;
Passo 3: trace uma reta paralela à reta *s*;
Passo 4: construa um polígono convexo com vértices nos pontos de intersecção entre as retas construídas.

Fonte: Cybulski (2022, p. 36)

Esse tipo de apreensão pode servir como base para outras apreensões da figura, em particular a discursiva, como no caso de uma demonstração. Assim, a apreensão operatória "além do domínio dos passos de construção a serem realizados, permite melhor caracterizar os objetos geométricos numa dada situação, relacionando-os às propriedades utilizadas em sua construção" (JAHN; BONGIOVANNI, 2019, p.247).

Como visto, cada apreensão cumpre uma função epistemológica diferente, porém tais apreensões não aparecem de forma isolada ou desarticulada na resolução de um problema em geometria. Cada uma pode ser mobilizada em maior ou menor grau na resolução de um problema geométrico, não existindo uma hierarquia entre elas, mas uma subordinação de uma à outra, dependendo da situação geométrica proposta (MORETTI; BRANDT, 2015).

Assim, Duval (1998) defende que aprender geometria envolve a sinergia entre três processos cognitivos: *visualização*, *construção* e *raciocínio*, os quais envolvem tais apreensões. A *visualização* é composta pela *apreensão perceptiva* e *operatória*, pois abrange o processo de criar imagens mentais visuais, para investigar e generalizar informações de uma situação geométrica por meio de explorações heurísticas[7]. Uma situação geométrica pode ser representada por

[7] A exploração heurística de uma figura ocorre quando há a visibilidade de subconfigurações excedentes, as quais são relevantes para solução de um problema geométrico ou para uma prova em

figuras geométricas, que têm um papel importante nos processos de ensino e de aprendizagem em geometria, pois podem auxiliar na busca de solução de um problema. Uma figura geométrica apresenta mais formas constituintes e mais possíveis subconfigurações[8] do que as que foram explicitamente mobilizadas em sua construção ou que são mencionadas nas hipóteses. A *construção* é composta pela *apreensão sequencial,* abarcando a produção de configurações geométricas por meio de ferramentas, que podem funcionar como um modelo para representar objetos matemáticos (DUVAL, 1998). Já *raciocínio* é composto pela *apreensão discursiva*, visto que engloba o processo relacionado às atividades discursivas para extensão do conhecimento, como provas e explicações (DUVAL, 1998), e a elaboração de argumentos, conjecturas e justificativas, de modo a criar conexões para o processamento de informações (RAMATLAPNA; BERGER, 2018).

Esses diferentes processos cognitivos podem ser realizados de forma independente, porém estão intimamente conectados, e sua sinergia é cognitivamente fundamental para a aprendizagem em geometria (DUVAL, 1998). Por exemplo, a visualização não depende da construção, pode-se acessar uma figura independente da forma como foi construída, e mesmo que a construção conduza à visualização, os processos que a envolvem dependem somente das conexões entre as propriedades matemáticas e as restrições técnicas das ferramentas utilizadas. A visualização pode servir como ajuda intuitiva para encontrar uma prova, mas o raciocínio depende exclusivamente do *corpus* de proposições disponíveis e, em alguns casos, a visualização pode ser enganosa ou até mesmo impossível. Nesse sentido, Duval (1998) aponta que é necessário trabalhar a diferenciação entre esses três tipos de processos no currículo e que a coordenação entre esses diferentes processos só é possível se primeiramente forem diferenciados.

Portanto, tanto o modelo de van Hiele quanto o de Duval fornecem subsídios para analisar o processo de aprendizagem em geometria dos estudantes, sobretudo o desenvolvimento do pensamento geométrico. O primeiro se baseia na

---

geometria (DUVAL, 1998). Em uma figura geométrica há mais formas constituintes e mais possíveis subconfigurações do que as que foram explicitamente mobilizadas para a sua construção ou que são explicitamente mencionados nas hipóteses (subconfigurações excedentes).

[8] Entendemos como as formas constituintes de uma figura.

ideia de que o pensamento geométrico se desenvolve em cinco níveis, de forma sequencial e hierárquica, desde a primeira relação com figuras geométricas até a compreensão de provas e demonstrações geométricas. E o outro propõe uma teoria para analisar e desenvolver os processos cognitivos e as apreensões que envolvem a aprendizagem em geometria.

Na próxima seção, apresentaremos algumas considerações acerca do pensamento geométrico na formação inicial de professores de matemática, presentes em pesquisas brasileiras e internacionais, no âmbito da Educação Matemática.

2.2 Pensamento Geométrico: Algumas Considerações para Formação Inicial de Professores de Matemática

Estudos sinalizam pouca ênfase no pensamento geométrico em pesquisas no contexto da formação inicial de PEM (CARVALHO; FERREIRA, 2015; CYBULSKI, 2022; CYBULSKI; MAGNONI-VIEIRA; CYRINO, no prelo; PAIVA, 2021). Cybulski, Magnoni-Vieira e Cyrino (no prelo) realizaram um mapeamento de artigos, publicados em periódicos brasileiros e internacionais no período de 2017-2021, na busca de investigar resultados e possíveis lacunas em investigações que incidem nessa temática. As autoras sugerem que investigações a respeito do pensamento geométrico, na formação inicial de PEM, podem caracterizar-se como “uma vertente promissora para compreender o papel da geometria na formação; para identificar que conhecimentos de geometria são necessários ao (futuro) professor; bem como para analisar o ensino de geometria na Educação Básica” (CYBULSKI; MAGNONI-VIEIRA; CYRINO, no prelo, p. 11).

Nesta direção, Baldini e Rodrigues (2022, p. 73) defendem que “refletir sobre o pensamento geométrico implica problematizar o ensino de geometria, porque fazem parte de um mesmo espectro, ou seja, refletir sobre um, implica sobre o outro” (p. 73). Deste modo, estudos indicam que, na formação inicial de professores de matemática, sejam desenvolvidas ações que permitam a eles discutir e refletir a respeito dessa forma de pensar em geometria (ALEX; MAMMEN, 2018; BRUNHEIRA; PONTE, 2019; ERDOGAN, 2020; LIVY; DOWNTON, 2018; RAMATAPLANA; BERGER, 2018; VASCONCELOS *et al.*, 2021).

Ações que promovam a compreensão e o uso adequado de nomenclaturas de conceitos geométricos são fundamentais para compreender a geometria e auxiliar na comunicação de ideias matemáticas de forma clara e precisa (ALEX; MAMMEN, 2018; GARRIDO; LEYVA, 2005; VASCONCELOS *et al*. 2021). De acordo com Vasconcelos *et al.* (2021), entender os conceitos geométricos é um caminho para os (futuros) professores desenvolverem o pensamento geométrico e as habilidades para expressar tais conceitos por diferentes meios de representação, como o escrito, pictórico e oral. Os autores defendem uma formação pautada em práticas, crenças e/ou concepções de (futuros) PEM, com o intuito de gerar reflexões e diálogos que ultrapassem a explicação de conceitos matemáticos e a exposição de métodos de ensino.

Alex e Mammen (2018), ao analisarem as habilidades de FPM ao lidarem com tarefas de geometria, envolvendo uma descrição visual como uma descrição verbal de alguns conceitos geométricos, constataram que as terminologias associadas a conceitos geométricos como: retas, círculos, triângulos e quadriláteros, são reconhecidas pelos FPM, tanto as apresentadas visualmente quanto aquelas representadas verbalmente. O autor, pautado na teoria de van Hiele (1984), sugere que o pensamento geométrico se desenvolve gradativamente, começando pelo reconhecimento de figuras, passando pela diferenciação até o surgimento do raciocínio dedutivo, no entanto, defende que, para isso ocorrer, é necessário desenvolver ações formativas que oportunizem aos FPM compreenderem de forma significativa os conceitos geométricos.

O trabalho com tarefas de geometria, seja a elaboração/adaptação ou a resolução de tarefas, por parte do FPM, configura-se também como uma importante ação a ser promovida na formação inicial de professores de matemática, uma vez que pode propiciar a ele constituir conhecimentos geométricos necessários para a sua futura prática profissional (ERDOGAN, 2020; RAMATLAPANA; BERGER, 2018) e, ainda, fornecer indícios sobre o conhecimento do conteúdo de geometria e a capacidade de fazer conexões geométricas dos FPM (RAMATLAPANA; BERGER, 2018).

Erdogan (2020), ao investigar as habilidades de FPM ao formularem problemas, voltados para o Ensino Médio, a partir dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele, identificou que esses FPM apresentam dificuldades em articular os conhecimentos teóricos a respeito dos níveis de van Hiele com a formulação de problemas em diferentes níveis de pensamento, como proposto no modelo. O autor afirma que uma das razões para esses resultados pode ser a falta de experiência dos FPM com a elaboração de problemas relacionados à geometria.

Ao analisarem as resoluções de FPM para uma tarefa baseada em conhecimento de geometria, Ramatlapana e Berger (2018) buscaram compreender as apreensões perceptivas e discursivas mobilizadas pelos estudantes, ao estabelecerem conexões matemáticas entre representações, propriedades e teoremas durante os processos de visualização e raciocínio. Os autores apontam que os FPM apresentam dificuldades em organizar de forma adequada e sistemática a linguagem geométrica para descrever as propriedades e os teoremas envolvidos no problema e, também, para estabelecer conexões entre os processos de visualização e raciocínio. Além disso, sinalizam a necessidade de mais pesquisas que investiguem como os comportamentos e os processos de pensamento são construídos e organizados por FPM, ao lidarem com tarefas potenciais para o ensino de geometria, de forma a suscitar evidências que apoiem o reconhecimento das conexões estabelecidas entre as apreensões no processo de resolução de um problema.

Brunheira e Ponte (2019), ao investigarem a evolução do aprendizado da classificação hierárquica de figuras geométricas a partir de um experimento de formação inicial de professores de matemática, que inclui a classificação de quadriláteros e prismas e segue uma abordagem exploratória de ensino, apontam a dificuldade de FPM em trabalhar com tarefas que exigem o processo de classificação de objetos geométricos, destacando a errônea conceitualização de alguns quadriláteros, na maioria das vezes relacionadas a imagens prototípicas. Os autores ressaltam que tal dificuldade pode ser oriunda, principalmente, da falta de experiência dos FPM em lidar com tarefas que abarquem esse processo de classificação. Destacam também que os FPM, “ainda apresentavam mal-entendidos, na maioria das vezes, relacionados à interpretação do discurso e ao raciocínio lógico do que a conceitos figurativos limitados” (BRUNHEIRA; PONTE, 2019, p. 65). Visto isso, eles salientam a importância de que, na formação inicial de professores de matemática, sejam propostas tarefas que proporcionem reflexões sobre a influência que a posição de uma figura pode exercer no processo de resolução de um problema, bem como a relevância de serem trabalhados problemas que explorem situações diferentes de exemplos prototípicos.

Mediante ao exposto, advogamos que a formação inicial de professores de Matemática deve configurar-se como um espaço formativo capaz de promover ações que propiciem ao FPM interações de modo que seja possível a verbalização de seus raciocínios, a elaboração de argumentos e o debate de ideias divergentes, o engajamento ativo na constituição de conhecimentos geométricos e a vivência com situações nas quais, além de desenvolver o seu pensamento geométrico, possa discutir e refletir a respeito de abordagens pedagógicas que apoiem o desenvolvimento do pensamento geométrico de seus alunos (BRUNHEIRA; PONTE, 2019; LIVY; DOWNTON, 2018).

Na próxima seção, apresentaremos os encaminhamentos metodológicos dessa pesquisa.

3 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

O caminho metodológico definido para a investigação é a pesquisa qualitativa, com caráter interpretativo[9]. Em conformidade com Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa é aquela que fornece informações essencialmente descritivas, na qual os investigadores procuram entender o processo pelo qual as pessoas constroem significados e os descrevem, partindo geralmente de questões mais amplas, que só vão tomando uma forma mais definida à medida que se desenvolve o trabalho.

A pesquisadora, além de observar e analisar as ações desenvolvidas na disciplina, também participou do seu planejamento, propôs e desenvolveu ações formativas, assumindo, desta forma, um papel ativo nesse contexto. Tais fatores caracterizam esta investigação como uma pesquisa-intervenção, visto que abarca a união entre o campo da prática e o da pesquisa, isto é, "esse tipo de pesquisa é principalmente orientado a processos e contextualizado, gerado por meio de interação e comunicação contínuas com a prática" (KRAINER, 2003, p. 98).

Seguem nossa questão geral de investigação, os objetivos específicos, a descrição do grupo investigado, a coleta de informações e o procedimento para a análise dos dados.

3.1 Questão Geral de Investigação e Objetivos Específicos da Pesquisa

A confluência das experiências oriundas deste processo de formação junto com as experiências pessoais e profissionais, os estudos desenvolvidos sob a luz dos referenciais teóricos e metodológicos adotados, nos levaram à seguinte questão de investigação: *que elementos formativos, no contexto de uma disciplina de Ensino de Geometria, oferecem oportunidades para o desenvolvimento do pensamento geométrico de FPM?*

Ancorados na questão geral de investigação, delineamos os seguintes objetivos específicos:

[9] Detalhes mais específicos sobre os procedimentos metodológicos são apresentados no decorrer dos artigos.

i. Analisar reflexões manifestadas por futuros professores de matemática, no trabalho com tarefas apoiadas no modelo teórico de van Hiele para desenvolver o pensamento geométrico.
ii. Discutir contribuições da exploração de tarefas com potencial para mobilizar apreensões em geometria para a formação inicial de professores de matemática.
iii. Discutir o *noticing* profissional a respeito de aspectos do pensamento geométrico, manifestados por futuros professores de matemática após o desenvolvimento de ações formativas promovidas em uma disciplina de Ensino de Geometria.

Desta forma, cada objetivo específico subsidiará um capítulo/artigo desta tese, de modo a respondermos à questão de investigação e defendermos a nossa tese. Na busca para compreender elementos formativos para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos FPM, esta pesquisa está inserida no contexto de uma disciplina de Ensino de Geometria, que descreveremos a seguir.

3.2 Descrição do Contexto Investigado

Esta pesquisa tem como contexto a disciplina de Ensino de Geometria, ofertada para o segundo ano do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Unespar – Campus Apucarana, no ano de 2021. A disciplina compõe a estrutura curricular do curso[10], no núcleo de formação – Estudos de formação geral, das áreas específicas e interdisciplinares, e do campo educacional, seus fundamentos e metodologias, e das diversas realidades educacionais – juntamente com outras disciplinas, dentre elas: Didática Geral, Educação e diversidade, Ensino de Funções, Ensino de Geometria, Ensino de Números e Álgebra, Ensino de Probabilidade e Estatística, Filosofia da Educação, Libras, Políticas Educacionais, Psicologia da Educação e Sociologia da Educação. Cada disciplina de Ensino específico[11] tem uma carga horária de 120 horas anual,

[10]Informações presentes no Projeto Pedagógico do Curso de Matemática (PPC) – Campus Apucarana.
[11]No decorrer do texto, ao escrevermos disciplina de Ensino específico nos referimos às disciplinas de Ensino de Funções, Ensino de Geometria, Ensino de Números e Álgebra, Ensino de Probabilidade e Estatística.

por conta da curricularização da extensão[12], dessas 120 horas, 60 horas são trabalhadas em projetos de extensão[13] desenvolvidos de modo concomitante com a disciplina.

A disciplina de Ensino de Geometria, assim como as demais disciplinas de Ensino específico, foi implementada na matriz curricular do curso de licenciatura em Matemática a partir do ano 2019. Consta no Projeto Pedagógico do Curso, a seguinte ementa da disciplina:

> Análise das propostas curriculares oficiais relacionadas ao ensino de geometria no Ensino Fundamental e Médio. Apreciação de materiais didáticos e paradidáticos. Discussão e articulação entre os conteúdos que permeiam os currículos da escola básica e a ciência matemática. Identificação de dificuldades tanto para o ensino como para a aprendizagem de geometria. Preparação, elaboração e desenvolvimento de propostas inovadoras de aulas e/ou oficinas de matemática relacionadas ao conteúdo de geometria. Elaboração de material didático. (UNESPAR, 2018, p.24)

As disciplinas constantes do núcleo – Aprofundamento e diversificação de estudos das áreas de atuação profissional – como Geometria Plana, Geometria Analítica e Geometria Espacial, também foram trabalhadas no decorrer do Curso, sendo as duas primeiras ministradas antes da disciplina de Ensino de Geometria, e a última de forma simultânea ou anterior a ela. Essa organização curricular, a depender da forma que for trabalhada pelos formadores, pode colaborar para articular as disciplinas específicas e pedagógicas, a fim de estabelecer uma ponte entre os conteúdos específicos da disciplina do Ensino Superior e os conteúdos a serem ensinados na Educação Básica (LIMA; SILVA, 2015; VIEIRA; FONSECA; SOUZA, 2019).

Ao longo de 2021, período em que ocorreu a coleta de informações desta investigação, a disciplina foi ministrada na modalidade de Ensino Remoto Emergencial, em razão do isolamento físico provocado pela pandemia da COVID-19, sendo organizada em um ambiente virtual de aprendizagem, o *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment* (*Moodle*). As aulas ocorreram de forma síncrona, via *Google Meet,* em horário regular no período noturno e com duração

---

[12]Ação prevista pelo Conselho Nacional de Educação, que consiste na adequação dos PPC visando garantir um percentual de no mínimo, 10% (dez por cento) do total da carga horária curricular estudantil dos cursos de graduação, para as atividades de extensão tipificadas no Art. 8.º da Resolução nº 7/2018, as quais deverão fazer parte da matriz curricular dos cursos.

[13]Os estudantes são envolvidos em projetos de extensão de professores do colegiado que visam atender necessidades formativas de alunos da Educação Básica, bem como, em projetos de formação continuada de professores de matemática (UNESPAR, 2018).

média de 90 minutos semanais, isto é, duas aulas de 45 minutos sequenciais. Participaram dessa disciplina 24 estudantes[14], nomeados[15] neste estudo como FPM1, FPM2 [...] FPM24; duas professoras formadoras; e a investigadora formadora (IF) que assumiu um papel ativo no planejamento e na implementação de ações formativas. No primeiro semestre, o curso ficou a cargo da professora formadora 1 (PF1) e, no segundo, da professora formadora 2 (PF2). As ações formativas analisadas nesta pesquisa foram elaboradas, propostas e implementadas pela PF1[16] e, em alguns momentos, pela IF.

O Plano de Ensino[17], elaborado por PF1, apresenta o seguinte objetivo geral da disciplina "Promover na formação dos futuros professores de Matemática reflexões, discussões e ações sobre o Ensino de Geometria no contexto do Ensino Fundamental e Médio" (PLANO DE ENSINO, 2021, p. 1) e que tem como um dos objetivos específicos "Fomentar situações potenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico" (PLANO DE ENSINO, 2021, p.1). Desse modo, observamos uma preocupação com o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A fim de atender aos objetivos propostos para a disciplina, foram fomentadas diversas ações, previstas no planejamento, durante o ano letivo, tais como: resolução e discussão de tarefas de geometria; estudo e discussão de textos a respeito do ensino de geometria; discussão de livros didáticos da Educação Básica associada a estratégias de ensino como resolução de problemas; investigação matemática e uso de materiais manipuláveis; apresentação de seminários; articulação entre conteúdos que permeiam os currículos da Educação Básica; elaboração de oficinas sobre Geometrias não euclidianas; análise das propostas curriculares oficiais, relacionadas ao ensino de geometria no Ensino Fundamental e Médio. Por conta da substituição de PF1, algumas das ações formativas supracitadas foram desenvolvidas por PF2.

Apresentamos, no Quadro 2, uma síntese destas ações formativas, destacando o período em que ocorreram e a(s) formadora(s) responsável(is) pelo seu desenvolvimento.

---

[14]No início do ano letivo de 2021, 3 dos 27 estudantes matriculados desistiram do curso.
[15]De modo a preservar o anonimato dos participantes, utilizamos siglas para representá-los, conforme acordado no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice A).
[16]Apresentaremos mais informações na próxima seção.
[17]Anexo A.

Quadro 2 – Síntese das ações formativas desenvolvidas na disciplina

Ações formativas	Tarefas	Descrição	Período	Formadora
Resolução e discussão de tarefas de geometria	Tarefa 1: Pré-teste[18]	Tarefa constituída por seis questões de geometria, para ser realizada em duplas. Para a discussão das resoluções, foram selecionadas aquelas que apresentavam diferentes estratégias de resoluções. A intenção com esta ação foi verificar como os FPM lidam com algumas questões de geometria, utilizando seus conhecimentos prévios.	Março/2021	PF1
	Tarefa 2: Teste de van Hiele[19]	Teste constituído por 15 questões de geometria plana, proposto antes de qualquer estudo sobre o modelo teórico de van Hiele. Posteriormente, os resultados dos testes foram apresentados e discutidos pela PF1, de modo a promover a reflexão e a sistematização dos conceitos geométricos envolvidos no teste. O propósito era analisar os conhecimentos geométricos mobilizados pelos FPM.	Maio-Junho/2021	PF1
	Tarefa 3: Tarefa apreensões de Duval[20]	Tarefa composta por quatro questões de geometria, plana e espacial. O objetivo foi discutir diferentes estratégias de resoluções, de modo a evidenciar as apreensões geométricas mobilizadas pelos FPM ao resolvê-las.	Junho/2021	IF

[18]Apêndice B
[19]Teste constituído por 15 questões de Geometria Plana, retirado de Nasser e Santanna (1997, p. 85-87).
[20]Apêndice C

Estudo e discussão de textos a respeito do ensino de geometria	Texto 1:" Por que não ensinar geometria?" (LORENZATO, 1995)	Texto selecionado com a intencionalidade de discutir aspectos históricos a respeito do ensino de geometria nas escolas brasileiras. De modo a promover a discussão do texto, foi solicitado a cada um dos FPM elaborar três questões referentes ao texto, para posterior discussão com os demais colegas.	Março/2021	PF1
	Texto 2: "O Pensamento e os Conceitos Geométricos" (VAN DE WALLE, 2009)	Texto indicado para desencadear discussões acerca do pensamento geométrico, em especial, o modelo de van Hiele. Na sequência, foi proposto aos FPM responderem um questionário,[21] referente ao texto, o qual também foi discutido em aula.	Maio/2021	PF1
	Texto 3: "Apreensões geométricas, segundo Raymond Duval"[22]	Texto sugerido com a finalidade de os FPM conhecerem e discutirem sobre as apreensões em geometria de Duval. Após o estudo, eles apresentaram suas dúvidas, as quais foram discutidas, de forma simultânea, à discussão da Tarefa 3.	Julho/2021	IF
	Texto 4: "Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria" (BRITO; ALMEIDA, 2021)	Texto proposto com o objetivo de discutir práticas de modelagem matemática para a aprendizagem da geometria apresentadas no texto. Os FPM realizaram a leitura do texto individualmente e apresentaram em grupos partes do texto pré-selecionadas por PF2.	Setembro/ 2021	PF2
		Foi solicitado, por IF, aos FPM que elaborassem		

[21]Apêndice D.

[22]O presente texto é resultado das reflexões e discussões dos estudos de Duval (1994, 1998, 2005, 2012) no grupo de estudos do Pensamento Geométrico do Gepefopem – Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Formação de Professores que ensinam Matemática (Anexo B).

Elaboração de tarefas de geometria		uma proposta de tarefas de geometria, com vistas à mobilização das apreensões em geometria. Tais propostas foram discutidas e analisadas junto a PF1 e IF.	Julho/2021	
Análise e discussão de capítulos de livros didáticos, da Educação Básica, referentes a geometria	Capítulo-Ensino Fundamental	Foi apresentada aos FPM uma tarefa sobre a classificação de sólidos geométricos entre poliedros e não poliedros, com a intenção de discutir possíveis encaminhamentos deste conteúdo para sala de aula. Na sequência, foi analisado como este conteúdo é abordado em livros didáticos. Como exemplo, foi utilizado um livro de 6.ºano. O propósito dessa ação foi promover discussões a respeito do papel do professor de matemática na condução e na adaptação de tarefas propostas pelo livro didático.	Maio/2021	PF1
	Capítulo-Ensino Médio	Para abordar conteúdos referentes ao Ensino Médio, os FPM se envolveram em uma tarefa sobre o conceito de pirâmides. De modo semelhante ao anterior, após a realização e a discussão da tarefa indicada, foi analisado um capítulo de livro do 2.ºano do Ensino Médio, envolvendo o volume de sólidos geométricos.	Maio/2021	PF1
Apresentação de seminários	Seminário sobre os textos científicos[23]	Os seminários, apresentados em grupos, deveriam discutir as ideias centrais de cada texto. A intenção era discutir não só sobre	Julho/2021	PF1

[23]Os textos utilizados foram: “A conversão 2D-3D em geometria: uma análise no nono ano do ensino fundamental” (SANTOS; CARGNIN, 2019); “Introdução ao estudo da geometria: estudo de padrões

		o ensino de geometria, a partir de textos científicos, como também sobre a escrita e a organização de um texto científico.		
Análise das propostas curriculares oficiais	Análise dos documentos: Diretrizes Curriculares da Educação Básica e a Base Nacional Comum Curricular	Foram analisadas, junto com os FPM, indicações para o ensino de geometria, presentes nos documentos oficiais norteadores da Educação Básica, com a finalidade de apresentar e discutir abordagens de ensino e propostas constantes nestes documentos.	Outubro /2021	PF2 e IF
Elaboração de oficinas sobre geometria não euclidiana	Oficinas as geometrias: elíptica ou esférica, projetiva, hiperbólica, de fractais e topológica	Essas oficinas foram elaboradas em grupos e desenvolvidas com toda a turma. Cada oficina foi comporta de duas partes: uma breve apresentação de aspectos teóricos a respeito da geometria não euclidiana, selecionada para o seu grupo; e uma parte prática, a qual se constitui na proposição e no desenvolvimento de tarefas que pudessem ser realizadas com estudantes da Educação Básica. A ideia foi que os FPM explorar outras geometrias.	Novembro e dezembro/2021	PF2

Fonte: Elaborado pela autora

Para efetivar o projeto de extensão, desenvolvido na disciplina, foi indicada por PF1 a elaboração de um produto educacional, envolvendo geometria, a ser trabalhado na Educação Básica. Ele teve como objetivo promover a extensão

fractais no ensino fundamental" (SANTOS; KRIPKA, 2019); "Desafios do ensino de geometria no Ensino Médio" (LOBATO; ANDRADE, 2019); "Jogos e criatividade no ensino da geometria: o uso do lego digital designer como recurso didático na educação matemática" (BRAIDA; VERTUAN; ANDRADE, 2019); "O ensino de geometria sob a luz da resolução de problemas e das mídias tecnológicas" (CYBULSKI; MARTINS, 2017); "Explorando área e perímetro" (BERGER, 2013).

universitária, vinculada à disciplina de Ensino de Geometria, na elaboração de materiais didáticos e propostas de ensino de geometria, contemplando diferentes tendências metodológicas da Educação Matemática. E na intenção de atender aos critérios estabelecidos no Projeto Pedagógico para a curricularização da extensão, os materiais produzidos neste contexto deveriam ser apreciados por professores da Educação Básica e pesquisadores da área da Educação Matemática, de maneira que pudessem contribuir com críticas e sugestões. Assim, o desenvolvimento deste produto foi orientado por PF1, durante o primeiro semestre, e por PF2, no decorrer do segundo semestre e, ao final da disciplina, os FPM apresentaram seus produtos educacionais à PF2 e à IF, a qual, por atuar como professora no Ensino Médio, representou os professores da Educação Básica naquele momento. Após discussões e reflexões acerca dos pareceres fornecidos por PF2 e IF e do aprimoramento dos materiais didáticos, os produtos educacionais produzidos foram compartilhados com a comunidade acadêmica da Unespar.

3.3 Sobre a Professora Formadora[24] (PF1)

A PF1 concluiu sua licenciatura em matemática no ano de 1991, fez uma especialização em Educação Matemática em 1998, mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática no ano de 2004, e o doutorado em 2014, também em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual de Londrina.

Desde 1992, PF1 atuou como professora na rede estadual de ensino com os anos finais do Ensino Fundamental, o Ensino Médio e a Educação de Jovens e Adultos e, no Ensino Superior, de 2005 até meados de 2021, trabalhando com a formação inicial de PEM. Em 2020, a PF1 aposentou-se, mas continuou como professora colaboradora no Ensino Superior até julho de 2021.

No contexto da formação inicial de PEM, PF1 foi professora na Faculdade de Apucarana nos cursos de Licenciatura em Matemática com Ênfase em Informática, Administração e Pedagogia. Nesse período, coordenou o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), o qual foi constituído a partir das disciplinas de Geometria Plana e Geometria Espacial, ministradas por ela no curso de Licenciatura

[24]Todas as informações contidas nessa seção constam no currículo Lattes de PF1. Endereço para acessá-lo: http://lattes.cnpq.br/4552882922342231.

em Matemática, e desenvolvidas atividades utilizando softwares, materiais didáticos manipuláveis, jogos matemáticos voltados para o ensino da matemática, em especial, o ensino de geometria, os quais foram elaborados por professores e futuros professores[25]. Além disso, foi professora colaboradora no curso de Especialização em Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), ministrando as disciplinas de Geometria e Informática. Atuou ainda em diversas Secretarias de Educação Municipal com formação de professores que trabalham de 1.º a 5.º ano. E por fim, foi professora colaboradora na Universidade Estadual do Paraná – Unespar – Campus Apucarana, nos cursos de Licenciatura em Matemática, Administração e Serviço Social. Dentre as disciplinas lecionadas, destacamos o Ensino de Geometria, além disso, PF1 coordenou dois projetos de Ensino[26], também voltados para o ensino de geometria.

3.4 Coleta das Informações

Para a coleta de informações desta pesquisa, os instrumentos utilizados foram:

- as produções escritas dos FPM, as quais abrangem as resoluções das tarefas propostas e desenvolvidas ao longo das aulas, as propostas de tarefas elaboradas pelos FPM e as respostas fornecidas aos questionários[27];
- os registros em diário de campo, os quais correspondem às informações descritas por IF com base em suas observações e descrições de episódios e/ou das ações, e de impressões pessoais registradas no decorrer da disciplina;
- gravações de sessões formativas registradas em vídeo (*Google Meet*), das quais foram selecionados excertos das falas dos FPM provenientes de discussões realizadas no decorrer destas sessões.

---

[25] IF participou deste projeto como estudante do Curso de Licenciatura em Matemática com Ênfase em Informática da Faculdade de Apucarana.

[26] Intitulados como: Elaboração de materiais didáticos para o ensino de Geometrias em articulação com os pressupostos da Educação Matemática; e Práticas de ensino de Geometria: atravessando os muros da Universidade.

[27] Nos referimos tanto ao questionário sobre o estudo realizado sobre o texto de van de Walle (2009), quanto ao questionário elaborado por IF a respeito do pensamento geométrico.

3.5 Análise dos Dados

As unidades de análises estabelecidas nos capitulos/artigos que compõem esta tese assumiram aspectos de uma abordagem interpretativa (ERICKSON, 1986) e foram desenvolvidas a partir de algumas etapas. Na primeira etapa, identificamos padrões nas produções escritas dos FPM e nas sessões de formação ocorridas, a fim de evidenciarmos aspectos que tivessem relação com o desenvolvimento do pensamento geométrico dos FPM. Para tanto, revisitamos as gravações de cada aula, organizadas no ambiente virtual de aprendizagem *Moodle*, para realizarmos a transcrição dos episódios das aulas necessárias à investigação.

Na segunda etapa, realizamos um exame detalhado destes dados para identificarmos características específicas das informações, convergentes ou não, com a intenção de agrupá-las em unidades de análise que caracterizassem os aspectos identificados, baseados em similaridades, convergências ou particularidades. Na terceira etapa, analisamos os dados agrupados, enfatizando os resultados obtidos com base na fundamentação teórica assumida, e procedemos à discussão dos resultados evidenciados, a fim de respondermos à questão de investigação apresentada a seguir.

E, por fim, as conclusões e as interpretações que obtivemos com base nas análises e nos resultados; as limitações da pesquisa e as questões que ficaram abertas para pesquisas futuras.

Na próxima seção, apresentaremos a organização de nossa tese.

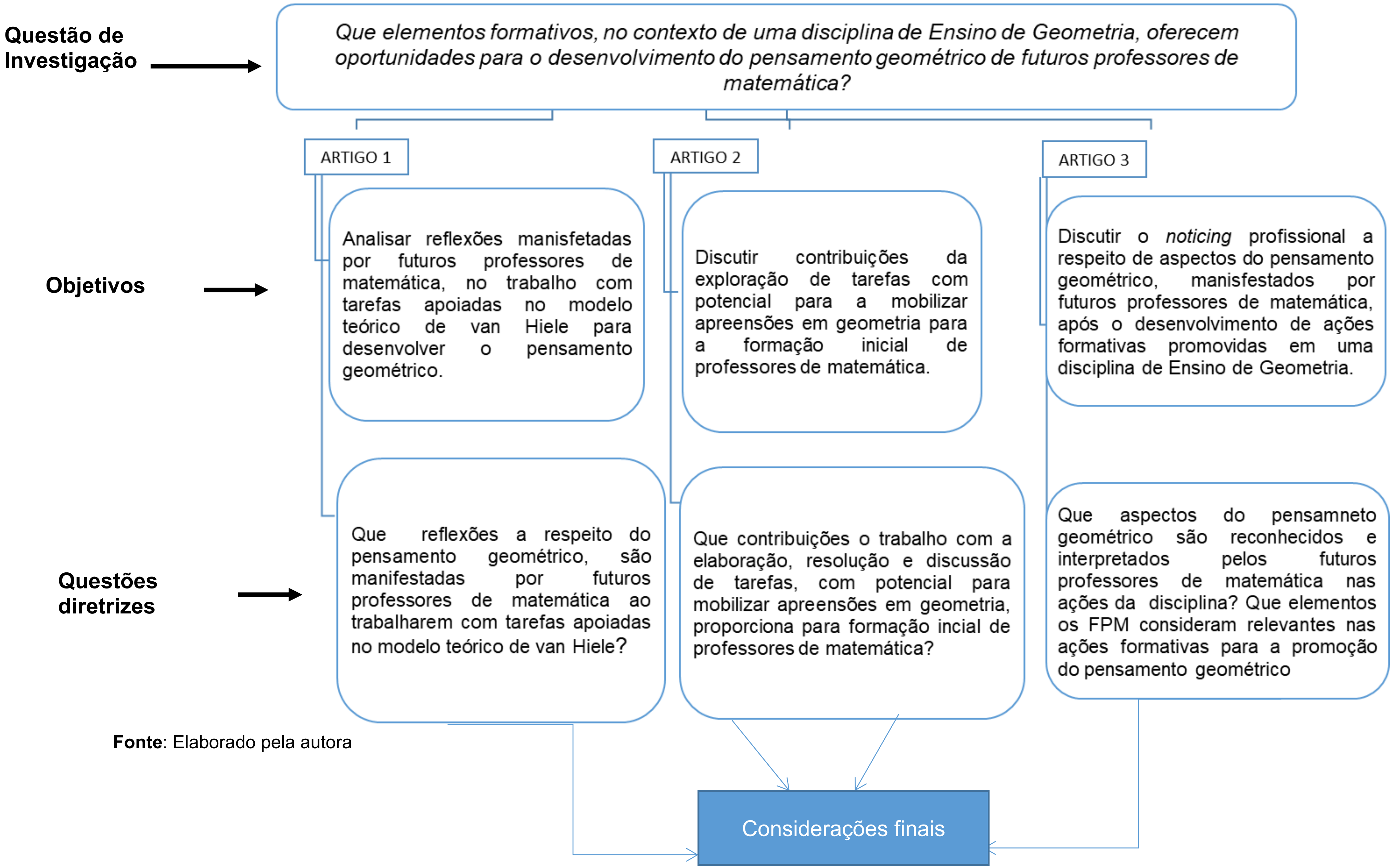
4 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Optamos por construir nossa tese no formato *multipaper*, que é alternativo ao "modo predominante de apresentar os trabalhos finais de cursos de pós-graduação *stricto sensu*" (BARBOSA, 2015, p. 349), e insubordinado, porque não é uma prática recorrente nas pesquisas no âmbito da Educação Matemática (BARBOSA, 2015, p. 351).

A organização de uma pesquisa redigida neste formato se dá por meio de um conjunto de artigos que, de alguma forma, "guardam, entre si, certa independência, mas configuram algo que se pretende coeso, com cada um dos textos auxiliando na formação de um objeto" (GARNICA, 2011, p. 8), cuja conjugação tem como propósito responder à problemática geral da pesquisa. Além disso, o autor pode agregar capítulos de introdução, que circunstancie o estudo, e capítulos finais, podendo retomar e globalizar resultados relatados nos artigos (BARBOSA, 2015).

A Figura 6 ilustra uma visão geral da tese por meio de um organograma, inspirado na organização proposta por De Paula (2018), que contém a questão de investigação geral do estudo, os objetivos específicos e a questão de investigação de cada um dos capítulos/artigos.

Figura 6 - Organização da tese no formato *multipaper*



Fonte: Elaborado pela autora

Além dessa Introdução Expandida, nossa tese está estruturada em três capítulos/artigos, cujos objetivos específicos se articulam de modo a responder nossa questão de investigação, e uma seção de considerações finais que conecta os resultados dos capítulos/artigos.

5 REFERÊNCIAS

ALEX, J; MAMMEN, K. J. Students' understanding of geometry terminology through the lens of Van Hiele theory. **Pythagoras**, *[S. l.]*, v. 39, n. 1, p. 1–8, 2018. DOI: 10.4102/pythagoras.v39i1.376.

ALMOULOUD, S. A *et al*. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, s.v, n. 27, p. 94-108, 2004. DOI:10.1590/S1413-24782004000300007

BALDINI, L. A. F; RODRIGUES, P. H. O pensamento geométrico e o vestibular da Universidade Estadual de Londrina: uma análise de produções escritas registradas na revista *Diálogos Pedagógicos*. *In*: BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira; MORAN, Mariana (org.). **Geometria**: práticas e aprendizagens. São Paulo: Livraria da Física, 2022. p. 73-91.

BARBOSA, C. P. **O pensamento geométrico em movimento**: um estudo com professores que lecionam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2011. 187 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. *In*: D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (Org.). **Vertentes da subversão na produção científica em Educação Matemática**. Campinas: Mercado de Letras, v. 1, p. 347-367, 2015.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação:** uma introdução às teorias e aos métodos. Porto: Ed. Porto, 1994.

BRUNHEIRA, L; PONTE, J. P. From the classification of quadrilaterals to the classification of prisms: An experiment with prospective teachers. **Journal of Mathematical Behavior**, *[S. l.]*, v. 53, p. 65-80, 2019. DOI: 10.1016/j.jmathb.2018.06.004.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais**. Quadrante**, Lisboa, Portugal, v. XXIV, n. 1, p. 103-128, 2015.

CARVALHO, H. A. F.; FERREIRA, A. C. Visualização espacial e pensamento geométrico: um panorama da produção brasileira em programas de Pós-Graduação nos últimos anos. *In*: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2015, São João Del Rei/MG. **Anais EMEM**, 2015.

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. T. Geometry and spatial reasoning. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**, v. 420, p. 464, 1992.

COSTA, A. P. **A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do**

pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros notáveis. 2019. 401 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

COSTA, A. P. O pensamento geométrico em foco: construindo uma definição. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**, v. 6, n. 16, p. 77-94, 2020.

CREAGER, M. A. Geometric Refutations of prospective secondary mathematics teachers. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology**, v.10, n.1, p. 74–99, 2022. DOI: 46328/ijemst.1594.

CYBULSKI, F. C. **Geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática:** indicativos de dissertações e teses brasileiras. 2022. 152f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

CYBULSKI, F. C.; CYRINO, M. C. C. T. Geometria e pensamento geométrico na formação inicial de professores que ensinam matemática: o que revelam pesquisas brasileiras entre 2009 e 2020. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.11, n.26, p. 44-65, 2022.

CYBULSKI, F. C.; MAGNONI-VIEIRA, A. F.; CYRINO, M. C. C. T. Ensino de geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática: um panorama de artigos brasileiros e internacionais. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2022, São Paulo. **Anais [...].** [S. L.]: Cibem, no prelo.

DE PAULA, E. F. **Identidade profissional de professores que ensinam matemática**: indicativos de pesquisas, elementos e ações para elaboração de uma proposta investigativa. 2018. 227 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d’une figure dans une démarche géométrique. **Repères**, n.17, p.121-138, 1994.

DUVAL, R. Geometry from a cognitive point of view. *In*: MAMMANA, C.; VILLANI, (orgs.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century**: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer, p. 37-52, 1998.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.

ERDOGAN, F. Prospective Middle School Mathematics Teachers’ Problem Posing Abilities in Context of Van Hiele Levels of Geometric Thinking. **International Online Journal of Educational Sciences**, *[S. l.]*, v. 12, n. 2, p. 132–152, 2020. DOI: 10.15345/iojes.2020.02.009.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), **Handbook of research on teaching**. Nova Iorque: MacMillan, p. 119-161, 1986.

FALCÓN, J. A.. Aplicação das leis da Gestalt para a detecção de padrões rítmico-melódicos na música Kashmir de Led Zeppelin e seu uso como ferramenta analistica. **Revista eletrônica de musicologia**, v. 13, 2010

FERNER, D. L; SOARES, M. A. S; MARIANI, R. D. C. P. Conceitos de geometria espacial de posição: tratamentos figurais mobilizados por futuros professores de matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.9, n.19, p.237-261, jul./out, 2020. DOI**:** 10.33871/22385800.2020.9.19.237-261.

FUJITA, T. Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 31, n.11, p. 60–72, 2012. DOI: 10.1016/j.jmathb.2011.08.003.

GARNICA, A. V. M. Apresentação. *In*: SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um Grupo Escolar**. 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP de Rio Claro: São Paulo, 2011.

GARRIDO, Y. P.; LEYVA, L. M. Pensamiento geométrico em los escolares primarios: un modelo didáctico para estimularlo. *In*: CONGRESO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA E COMPUTACIÓN, Holguín, 2005. **Anais eletrônicos[...].** Holguín, 2005.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 237f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias**. 2000. 217 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

JAHN, A. P.; BONGIOVANNI, V. Apreensão Operatória de Figuras em Situações Geométricas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 12, n. 3, p. 245-257, 2019. DOI: 10.17921/2176-5634.2019v12n3p245-257.

KALEFF, A. M. *et al*. Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: o modelo de van Hiele. **Bolema**, Rio Claro, v. 9, n. 10, p. 21-30, 1994.

KRAINER, K. Team, communities & networks. **Journal of Mathematics Teacher Education, Netherlands**, v. 6, n. 2, p. 93-105, jun. 2003.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LIMA, G. L.; SILVA, M. J. F. Conhecimentos docentes para o ensino de geometria em um curso de licenciatura em matemática. **Vidya**, *[S. l.]*, v. 35, n. 2, p. 159–177, 2015.

LIVY, S.; DOWNTON, A. Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. **Journal of Mathematical Behavior**, *[S. l.]*, v. 51, p. 150–160, 2018. DOI: 10.1016/j.jmathb.2017.11.004.

LOPES, L. R. P.; MANRIQUE, A. L.; MACÊDO, J. A. Revelaciones sobre la presencia de la geometría en la formación de profesores de matemáticas en Brasil (2001-2019). **Paradigma,** São Paulo, v.48, n.1, p. 117 - 137, 2022.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, p. 3-13, 1995.

MORAN, M. **As apreensões em Geometria:** um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais. 2015. 248f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

MORETTI, M. T; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação, Matemática, Pesquisa**, *[S. l.]*, v. 17, n. 3, p. 597–616, 2015.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores, **EdUFSCar**, São Carlos, p. 9-74, 2003.

NASSER, L.; SANTANNA, N. P. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. Rio de Janeiro: Instituto de matemática – UFRJ. Projeto Fundão, 1997.

NUNES, C. B.; ONUCHIC, L. R. O uso das transformações geométricas através da resolução de problemas na formação de futuros professores de matemática**. Interfaces da Educ**, v. 10, n.30, p. 30-56, 2019.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, v. 4, n. 2, p. 64-74, 1996.

PAIVA, S. M. **A conceituação do pensamento geométrico**: aspectos históricos, filosóficos e as visões presentes em teses e dissertações no brasil. 2021. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos Formativos) - Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2021.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, n. 1, p. 7-17, 1993.

PARZYSZ, B. “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational studies in mathematics**, v. 19, n. 1, p. 79-92, 1988.

RAMATLAPANA, K.; BERGER, M. Prospective Mathematics Teachers' Perceptual and Discursive Apprehensions when Making Geometric Connections. **African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education**, *[S. l.]*, v. 22, n. 2, p. 162–173, 2018. DOI: 10.1080/18117295.2018.1466495.

SANTOS, L. F.; TELES, R. A. M. Conhecimento dos professores sobre geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: um estado da arte. **Educação Matemática Pesquisa:** Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [s.l.], v. 23, n. 1, p. 79-111, 11 abr. 2021.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática**. Apucarana, 2018.

VALENTE, W. R.; Osvaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, v. 8, n. 25, p. 583-613, set./dez. 2008.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores em sala de aula. 6. ed. Tradução de: Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009. 583p.

VAN HIELE, P. M. A child's thought and geometry. *In*: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Eds.). **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele**. Brooklyn: Brooklyn College, p. 243-252,1984.

VAN HIELE, P. M. Developing Thinking through Activities That Begin with Play.**Teaching Children Mathematics**. v. 6, p. 310-316, fev. 1999.

VASCONCELOS, L. O. *et al*. Rede de aprendizagem e desenvolvimento da docência: Expressões do pensamento geométrico de professoras que ensinam Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema**, v. 35, n.70, p. 708-726, 2021. DOI: 10.1590/1980-4415v35n70a08.

VIEIRA, J. E. L.; FONSECA, L. S.; SOUZA, D. Professores de matemática frente ao processo formativo para ensinar geometria na educação básica. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 63, p. 18-33, 2019.

WINER, M. L.; BATTISTA, M. T. investigating students' proof reasoning: analyzing students' oral proof explanations and their written proofs in High School Geometry. **International Electronic Journal of Mathematics Education,** v. 17, n. 2, p. 1-21, 2022. DOI: 10.29333/iejme/11713.-

CAPÍTULO/ARTIGO 1

PENSAMENTO GEOMÉTRICO: REFLEXÕES MANIFESTADAS POR FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM ESTUDOS DO MODELO DE VAN HIELE

Resumo: O presente estudo tem como objetivo analisar reflexões manifestadas por futuros professores de matemática (FPM), no trabalho com tarefas apoiadas no modelo teórico de van Hiele para desenvolver o pensamento geométrico. A natureza do estudo é qualitativa, de cunho interpretativo, e foi investigado um grupo constituído por 24 FPM, integrantes de uma disciplina de Ensino de Geometria em um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná - Brasil. A análise dos dados incidiu sobre as reflexões manifestadas pelos FPM a respeito do trabalho com tarefas envolvendo pensamento geométrico, considerando os níveis de reflexão propostos por Muir e Beswick (2007). Os resultados evidenciam reflexões descritivas, deliberadas e críticas, com diferentes níveis de incidência, associadas: (I) aos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele; (II) ao papel do professor na prática em sala de aula; e (III) a conceitos geométricos e a propriedades de figuras planas. A promoção de ações formativas que privilegiam discussões e reflexões a respeito do pensamento geométrico pode oportunizar aos FPM a busca de conexões entre conhecimentos de geometria, de pensamento geométrico e de sua futura prática docente.

Palavras-chave: Formação inicial de professores de matemática; Geometria; Pensamento Geométrico; van Hiele.

INTRODUÇÃO

Vários estudos sugerem que, na formação inicial de professores que ensinam matemática, sejam desenvolvidas tarefas que envolvam o pensamento geométrico, de modo que os futuros professores possam refletir e projetar o trabalho com essa temática em sua futura prática profissional (BRUNHEIRA; PONTE, 2019; ERDOGAN, 2020; LIVY; DOWNTON, 2018).

A geometria é um sistema de representação usado para visualizar conceitos, formas de raciocínio e ambientes espaciais (BATTISTA, 2007). Espera-se que o seu ensino contribua para desenvolver habilidades de visualização; de pensamento crítico; de capacidades de raciocinar, argumentar, demonstrar, fazer suposições e inferências lógicas, reduzir objetos tridimensionais a duas dimensões, de perceber que as ideias geométricas são úteis na representação e na resolução de problemas (BATTISTA, 2007; NCTM, 2000).

Apesar da sua relevância, no Brasil a geometria é, por vezes, pouco trabalhada ou abordada sem significados com estudantes da Educação Básica. Muitos professores que atuam nesse nível de ensino não se sentem preparados para ensinar a geometria devido à precariedade de sua formação em relação a esse conteúdo (LORENZATO, 1995; NUNES; ONUCHIC, 2019). De acordo com Almouloud *et al*. (2004), em alguns casos, a formação inicial pouco contribui para que os futuros professores reflitam a respeito de questões específicas do ensino e da aprendizagem de Geometria, e sinalizam para a necessidade de que esse espaço de formação possa promover a compreensão do quê, como, porquê e quando lecioná-la.

Professores relatam que, durante sua formação, o trabalho com a Geometria foi reduzido ao reconhecimento de figuras geométricas, ao uso de fórmulas e procedimentos sem significados, à Geometria Métrica, sem, por exemplo, distinguir aspectos figurais de conceitos geométricos; enfim sem terem vivenciado um ensino de geometria que permitisse pensar geometricamente (NACARATO; PASSOS, 2003).

Livy e Downton (2018) defendem que, na formação inicial de professores de Matemática, sejam vivenciadas situações nas quais o futuro professor, além de desenvolver o seu pensamento geométrico, possa discutir abordagens pedagógicas que apoiem o desenvolvimento do pensamento geométrico de seus alunos. Nesse sentido, alguns pesquisadores (BRUNHEIRA; PONTE, 2019; FERREIRA; BARBOSA, 2013) destacam a importância de criar espaços formativos capazes de promover interações entre formador e futuros professores de Matemática (FPM), de modo que estes possam verbalizar seu raciocínio, debater ideias divergentes, construir argumentos, se engajar ativamente na constituição de conhecimentos geométricos.

Um dos modelos teóricos mais utilizados nas pesquisas acerca do pensamento geométrico, em contextos de formação inicial de professores que ensinam matemática, é o de van Hiele (CYBULSKI; CYRINO, 2022). Nesse modelo, considera-se que a aprendizagem de geometria ocorre por meio da evolução do conhecimento do estudante, perpassando por cinco níveis hierárquicos de pensamento, sendo que cada deles descreve os processos de pensamento utilizados em contextos geométricos (VAN DE WALLE, 2009).

Assim, ressaltamos a necessidade de analisar reflexões manifestadas por FPM no trabalho com tarefas envolvendo pensamento geométrico, apoiadas no modelo teórico de van Hiele, em uma disciplina de Ensino de Geometria em um curso de licenciatura em Matemática. É de especial relevância que a formação inicial de professores dê atenção à promoção do pensamento geométrico dos FPM, no caso do modelo teórico de van Hiele, na determinação de habilidade de pensamento. Sustentam esse modelo teórico três aspectos principais: há níveis de compreensão, cada nível tem suas próprias características, e os níveis anteriores devem ser totalmente compreendidos para atingir um próximo (KNIGHT, 2006). O estudo desse modelo orientou parte do trabalho de uma disciplina de Ensino de Geometria na formação de FPM, a partir do qual se concretiza a presente investigação, cujo objetivo é analisar reflexões manifestadas por futuros professores de matemática, no trabalho com tarefas apoiadas no modelo teórico de van Hiele para desenvolver o pensamento geométrico.

Na sequência, apresentamos um quadro teórico sobre o modelo teórico de van Hiele, o contexto e os procedimentos metodológicos da pesquisa, os resultados, as discussões e algumas considerações.

O MODELO DE VAN HIELE

O modelo teórico proposto pelo casal de educadores matemáticos holandeses van Hiele[28] tem fornecido insights quanto às diferenças no pensamento geométrico e como essas diferenças são estabelecidas (VAN DE WALLE, 2009). A ontogênese do pensamento geométrico dos indivíduos consiste em cinco níveis hierárquicos e consecutivos, nomeadamente: visualização, análise, dedução informal, dedução e rigor (ALEX; MAMMEN, 2018). Esses cinco níveis de pensamento se caracterizam pela hierarquia estabelecida entre eles e descrevem:

> [...] *como* pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sobre as quais pensamos mais do que a quantidade de conhecimento ou de informação que temos a cada nível. Uma diferença significativa de um nível ao seguinte

[28]Pierre van Hiele foi um renomado pesquisador do ensino de geometria que, juntamente com sua esposa, Dina van Hiele-Geldof, investigaram o desenvolvimento do pensamento geométrico, cujos primeiros resultados começaram a ser publicados em 1959.

> são os *objetos de pensamento* – sobre os quais somos capazes de *pensar* [operar] geometricamente (VAN DE WALLE, 2009, p. 440, ênfases do autor).

No primeiro nível, o da visualização, os objetos de pensamento são as formas e “o que elas parecem” (VAN DE WALLE, 2009). Nele, as figuras são julgadas por sua aparência, e o seu reconhecimento passa a ser feito pela distinção das formas e não por suas propriedades. Por exemplo, uma criança é capaz de reproduzir diferentes formas, caso alguém já tenha lhe mostrado tais figuras, no entanto, não consegue estabelecer relações referentes às propriedades dessas formas (VAN HIELE, 1984). Assim o professor poderá explorar as semelhanças e as diferenças entre elas, com o objetivo de usar essas ideias para criar classes de formas (VAN DE WALLE, 2009). Propriedades presentes nessas classes, como lados paralelos, ângulos retos e simetrias, podem ser incluídas neste nível, porém, de forma informal e observacional. Então, o produto de pensamento, isto é, as ideias criadas em um nível se tornam o foco ou o objeto de pensamento do nível seguinte, sendo nesse nível as classes ou o agrupamento de formas parecidas (VAN DE WALLE, 2009).

No segundo nível, o da análise, os objetos de pensamento são as classes de formas, mais do que as formas individuais (VAN DE WALLE, 2009). As figuras são reconhecidas por suas propriedades, contudo, tais propriedades ainda não estão ordenadas, de modo que, por exemplo, “um quadrado não é necessariamente identificado como sendo um retângulo” (VAN HIELE, 1984, p. 245). Assim, o professor poderá propor tarefas nas quais o estudante é convidado a pensar sobre, por exemplo, o que leva um objeto geométrico a ser classificado como um retângulo e que outras formas podem ser agrupadas com esse objeto, a fim de que tenham as mesmas propriedades dentro de determinada classe. Desta maneira, as ideias a respeito de uma forma individual podem ser generalizadas para todas as formas que se alinhem em uma mesma classe. Os produtos de pensamento, nesse nível, são as propriedades das formas (VAN DE WALLE, 2009).

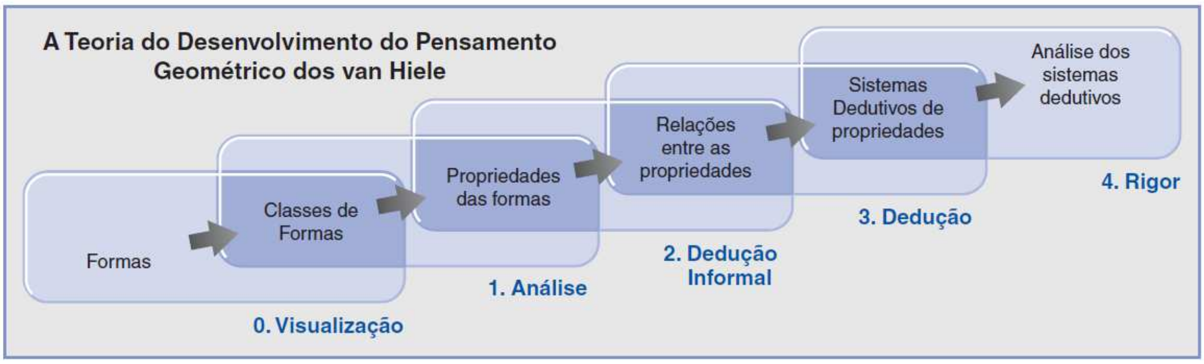
No terceiro nível, o da dedução formal, os objetos de pensamento são as propriedades das formas (VAN DE WALLE, 2009), que podem ser ordenadas e deduzidas umas das outras. Apesar de o significado intrínseco da dedução ainda não ser compreendido pelos estudantes (VAN HIELE, 1984), eles já são capazes de acompanhar e apreciar um argumento lógico sob um caráter intuitivo. No entanto, não compreendem uma apreciação da estrutura axiomática num sistema dedutivo formal (VAN DE WALLE, 2009). Os produtos de pensamento nesse nível são relações entre as propriedades de objetos geométricos (VAN DE WALLE, 2009).

No quarto nível, o da dedução, os objetos de pensamento são relações entre as propriedades dos objetos geométricos (VAN DE WALLE, 2009). O pensamento está centrado no significado da dedução (VAN HIELE, 1984). Nesse nível, os estudantes "são capazes de trabalhar com sentenças abstratas sobre as propriedades geométricas e estabelecer conclusões baseadas mais na lógica do que na intuição" (p. 443). Os produtos de pensamento desse nível são sistemas axiomáticos dedutivos para a geometria (VAN DE WALLE, 2009).

Por fim, no último nível, o do rigor, os objetos de pensamento são os sistemas dedutivos axiomáticos para a geometria (VAN DE WALLE, 2009). Neste nível, "as figuras são definidas apenas por símbolos ligados por relações" (VAN HIELE, 1984, p. 248-249), e o estudante – geralmente um especialista em Matemática no Ensino Superior – faz uma apreciação das distinções e das relações entre diferentes sistemas axiomáticos (VAN DE WALLE, 2009). Assim, os produtos de pensamento nesse nível são comparações e confrontos entre os diferentes sistemas axiomáticos da geometria.

Os produtos de pensamento em cada nível se tornam os objetos de pensamento do nível seguinte, ou seja, as ideias criadas em um nível se tornam o foco ou objeto de pensamento do subsequente (VAN DE WALLE, 2009). Essa relação objeto-produto entre os níveis é ilustrada na Figura 1.

Figura 1 - Níveis de pensamento - Relação objeto-produto



Fonte: van de Walle (2009)

Para van Hiele (1999), o desenvolvimento do pensamento do estudante depende mais dos tipos de experiências que lhe são oferecidas do que da idade ou do amadurecimento biológico. O autor afirma que a instrução para promover a transição de um nível a outro perpassa cinco fases[29], incluindo sequências de tarefas, que começam pela fase exploratória e permitem a construção gradual de conceitos. Também expõe que o professor deve estar consciente dessa transição, a qual ocorre de forma contínua, pois suas instruções são decisivas para que o estudante obtenha sucesso nesse processo (VAN HIELE, 1984).

O modelo proposto por van Hiele identifica uma aprendizagem progressiva, isso porque a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica avançam de forma gradativa e global. Também entende que o conhecimento geométrico implica em experiências anteriores, uma vez que propicia ao estudante, à medida que vivencia experiências diferentes, constituir ideias matemáticas de aprendizagem (MATTOS; SERRAZINA, 1996).

CONTEXTO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta investigação[30], de natureza qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994), tem como contexto uma disciplina de Ensino de Geometria[31], ofertada para o segundo ano de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná, Brasil. Participaram dessa disciplina 24 FPM, a professora formadora (PF)[32] da disciplina e a investigadora formadora (IF). A disciplina foi organizada em um ambiente virtual de aprendizagem, o *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment* (*Moodle*), e as aulas ocorreram semanalmente, de forma síncrona, via *Google Meet*, em horário regular no período noturno e com duração média de 90 minutos[33] ao longo de 2021.

A IF, além de observar e analisar as ações desenvolvidas na disciplina assumiu um papel ativo nas discussões junto com os participantes da

[29]As fases descritas por van Hiele (1984, 1999) são: investigação, orientação direta, explicitação, orientação livre e integração.
[30] Aprovada pelo Comitê de Ética (Parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231).
[31] A carga horária total prevista para a disciplina era de 120 horas.
[32] Neste artigo a PF1 será tratada como PF.
[33] Foi estabelecida uma carga horária menor no ano letivo de 2021, que permaneceu na modalidade de Ensino Remoto Emergencial, em razão da pandemia da COVID-19.

pesquisa. Tais fatores caracterizam esta investigação como uma pesquisa-ação. Nesse tipo de investigação, o pesquisador, inserido no ambiente de pesquisa, pode "observá-lo, compreendê-lo, mas, sobretudo mudá-lo em direções que permitam a modificação das práticas e maior liberdade de ações e de aprendizagem dos participantes" (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 112).

No Plano de Ensino da disciplina, elaborado pela PF, apresenta-se como objetivo geral: promover reflexões, discussões e ações na formação dos FPM sobre o Ensino da Geometria no contexto da Educação Básica. E como objetivo específico: fomentar situações promotoras do desenvolvimento do pensamento geométrico. Em assim sendo, a PF propôs tarefas (Quadro 1) com a intencionalidade de desencadear reflexões nos FPM, tendo em conta perseguir tais objetivos.

Quadro 1 - Descrição das tarefas propostas pela PF

TAREFAS	DESCRIÇÃO
Tarefa 1: Proposição do teste de van Hiele	A PF propôs aos FPM a realização de um teste de van Hiele[34], constituído por 15 questões de geometria plana, antes de qualquer estudo dessa Teoria. Com o objetivo de verificar os conhecimentos geométricos dos FPM, ela solicitou que eles apresentassem justificativas para suas respostas.
Tarefa 2: Estudo teórico	O texto "O Pensamento e os Conceitos Geométricos" (VAN DE WALLE, 2009) foi estudado antecipadamente pelos FPM, discutido durante a aula em pequenos grupos (quatro grupos com cinco FPM cada e um grupo com quatro, aqui representados por G1, G2, G3, G4 e G5) e, na sequência, com todos os participantes da disciplina.
Tarefa 3: Proposição de um questionário referente ao texto estudado	A PF solicitou que os FPM, nos mesmos grupos da Tarefa 2, respondessem a um questionário sobre as características e os níveis de pensamento; a importância de o professor compreender como esses níveis de pensamento influenciam no processo de aprendizagem em Geometria; e a avaliação em termos do desenvolvimento do pensamento geométrico do estudante.
Tarefa 4: Apresentação e discussão da Tarefa 3	Cada grupo apresentou suas considerações a respeito das respostas dadas ao questionário (Tarefa 3), as quais foram seguidas de discussões com todos os participantes da disciplina.

[34] Nasser e Santanna (1997, p. 85-87).

Tarefa 5: Apresentação e discussão dos resultados do teste de van Hiele	Os resultados dos testes dos FPM foram apresentados pela PF que discutiu com eles conceitos geométricos de figuras planas envolvidos em suas respostas, assim como respostas dadas por estudantes da Educação Básica para esse mesmo teste e possíveis práticas pedagógicas para o ensino desses conceitos.

Fonte: Elaborado pela autora

Participaram da presente investigação 24 FPM, no entanto, vale ressaltar que apenas 18 realizaram a Tarefa 1, mas em relação as demais tarefas, todos os 24 FPM participaram. Os dados dessa investigação referem-se às sessões de formação registradas em vídeo (*Google Meet*), à produção escrita dos FPM na resolução das tarefas (Quadro 1) e aos registros em diário de campo. Com a intenção de preservar o anonimato dos participantes, na apresentação dos resultados utilizamos as siglas: FPM1, FPM2 [...] FPM24, para representar cada um deles.

Na análise das informações, identificamos padrões na produção escrita dos FPM e nas discussões ocorridas nas aulas. A seguir, fizemos um exame detalhado destes dados, para identificar aspectos do pensamento geométrico constantes nas reflexões manifestadas pelos FPM durante o desenvolvimento das tarefas.

Assumimos os níveis de reflexão, propostos por Muir e Beswick (2007), como a lente das análises das reflexões emergentes dos dados nesta investigação, por concordarmos que a reflexão constitui um dos suportes para a aprendizagem de (futuros) professores (MUIR; BESWICK, 2007). Para as autoras, os níveis de reflexão são: a descrição técnica, a reflexão deliberada e a reflexão crítica. No nível de descrição técnica, o participante descreve relatos gerais da prática em sala de aula, muitas vezes com foco em aspectos técnicos, sem ponderar o valor das experiências. No nível de reflexão deliberada, o participante identifica incidentes críticos[35] e justifica ou explica a ação ou o comportamento. Por fim, no nível de reflexão crítica, o participante vai além da identificação de incidentes críticos, ele fornece explicações para considerar as perspectivas dos outros e oferecer alternativas. Tendo em conta esse referencial, os resultados evidenciam reflexões descritivas, deliberadas e críticas, com diferentes níveis de incidência,

[35]Para Muir e Beswick (2007), incidentes críticos são eventos particulares, envolvendo comentários específicos do professor ou do estudante, que parecem fornecer exemplos claros de algum aspecto da prática ou característica do pensamento do estudante.

associadas: (I) aos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico; (II) ao papel do professor na prática em sala de aula para o desenvolvimento do pensamento geométrico; e (III) a conceitos geométricos relacionados a propriedades de figuras planas.

REFLEXÕES MANIFESTADAS POR FPM NO TRABALHO COM TAREFAS APOIADAS NOS APORTES TEÓRICOS DE VAN HIELE

Nesta seção, apresentamos as reflexões manifestadas pelos FPM no trabalho com tarefas apoiadas nos aportes teóricos de van Hiele, associadas aos níveis de reflexão propostos por Muir e Beswick (2007).

Reflexões relacionadas aos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico

Nesta subseção, discutimos as reflexões manifestadas pelos FPM (Quadro 2) na discussão do texto (Tarefa 2) sobre os níveis de pensamento para desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo o modelo teórico proposto por van Hiele.

No Quadro 2, apresentaremos excertos que foram discutidos pelos grupos ao apresentarem suas reflexões a respeito de um dos níveis (p.e., G1 sobre Nível 0; G2 sobre o Nível 1, etc.). Os trechos em negrito acentuam os tipos de ideias geométricas as quais os estudantes são capazes de pensar (operar) geometricamente em cada nível.

Quadro 2 - Reflexões dos FPM manifestadas a respeito dos níveis de pensamento geométrico

Níveis de pensamento[36]	Evidências de reflexões manifestadas pelos FPM
Nível 0	*O nível 0 está relacionado com a parte da observação. A percepção do estudante que a figura é um quadrado, um triângulo. Depende muito da observação do estudante,* ***dele analisar a diferença de uma figura para outra por meio da observação*** *(G1).*

[36] A numeração, utilizada para ordenar os níveis de pensamento propostos por van Hiele, foi sugerida por van de Walle (2009).

Nível 1	*No nível 1, o estudante continua utilizando a visualização das propriedades, mas, neste nível,* ***ele vai criando um senso de começar a classificar as propriedades****. Por exemplo, ele* ***já é capaz de analisar que um cubo tem seis faces, e essas faces são congruentes*** *(G2).*
Nível 2	*No nível 2, o da dedução informal, o estudante começa a desenvolver o pensamento de modo quase que formal.* ***Os estudantes começam a pensar nas propriedades dos objetos geométricos sem as restrições de um objeto em particular, começando a desenvolver as relações entre as propriedades****. Por exemplo, se os quatro ângulos de uma figura são retos, isso implica que a forma é um retângulo. Nesse segundo nível* ***os estudantes já são capazes de fazer essas deduções de modo informal em relação às propriedades*** *(G3).*
Nível 3	*No nível 3,* ***os estudantes entendem a geometria como um sistema dedutivo****.* ***Eles são capazes de examinar mais do que as propriedades das formas****. O pensamento, desenvolvido anteriormente, permitiu estabelecer relações entre as propriedades. Nesse nível de pensamento,* ***os estudantes são capazes de pensamentos mais lógicos do que intuitivos*** *(G4).*
Nível 4	*O nível 4, do rigor, é o mais elevado dessa hierarquia. O objetivo de atenção são os próprios sistemas axiomáticos e não apenas as deduções como nos níveis anteriores, e geralmente é um nível de especialistas em matemática.* ***Eu acredito que esse nível seja o nível da pesquisadora, porque ela está estudando Geometria no doutorado*** *(G5).*

Fonte: Elaborado pela autora

Os FPM denotaram reflexões de natureza deliberativa, ao identificarem elementos centrais referentes aos níveis de pensamento, e explicaram os tipos de ideias geométricas as quais os estudantes são capazes de pensar (operar) geometricamente em cada nível (VAN DE WALLE, 2009). A ênfase dada pelos FPM do que se deve “esperar” do estudante em cada nível pode ter ocorrido por estarem inseridos em um contexto de formação inicial de professores.

Discussões sobre os objetos e os produtos de pensamento de cada nível foram promovidas por meio das tarefas. Por exemplo, foi solicitado aos FPM que: descrevessem os primeiros três níveis do pensamento geométrico da teoria dos van Hiele (Níveis 0, 1 e 2); indicassem em suas descrições o objeto e o produto de pensamento de cada nível; e percebessem como essas ideias estabelecem uma progressão de um nível para o seguinte. A seguir, apresentamos as respostas do G1, representativas dos outros grupos, para a Tarefa 3 (questionário).

Nível 0 – o objeto é a visualização.
Os produtos de pensamento do Nível 0 são classes ou agrupamentos de formas que são “parecidas”. As propriedades

> *estão inclusas de forma informal e observacional.* ***Os alunos precisam analisar se casos particulares podem ser generalizados, são propostas atividades de agrupamento de formas, preparando os alunos para o Nível 1.***
>
> *Nível 1 – o objeto é a análise.*
> *Os produtos do pensamento são as propriedades das formas. Os alunos terão contato com as propriedades das figuras, conseguirão* ***aplicar as ideias a uma classe inteira de figuras. Nesse nível, estarão em desenvolvimento o pensamento crítico e o raciocínio, através desse desenvolvimento, eles estarão sendo preparados para o Nível.***
>
> *Nível 2 – o objeto é a dedução informal.*
> *Os produtos de pensamento são as relações entre as propriedades de objetos geométricos. Os alunos são encorajados a* ***elaborar e testar hipóteses, argumentos lógicos, e usam a linguagem informal. Através dessas experiências serão preparados para o próximo Nível.***

Os FPM identificaram e descreveram o objeto e os produtos de pensamento associados em cada nível, fornecendo indícios de reflexões de natureza descritiva. Porém, ao indicarem alternativas para o trabalho com estudantes (negrito), quais sejam ações capazes de promover a transição de um nível de pensamento para o seguinte, evidenciaram reflexões de dimensão crítica. Esse nível reflexivo é considerado o nível mais elevado de reflexão (MUIR; BESWICK, 2007), podendo desencadear um processo reflexivo por parte dos FPM, que, ancorados na teoria, podem expressar aspectos que revelam uma percepção holística do processo de ensino e aprendizagem da geometria, nomeadamente do pensamento geométrico.

Durante as discussões da Tarefa 4, os FPM também destacaram a relação existente entre objeto-produto dos níveis, presente na teoria de van Hiele. Esse reconhecimento é importante para eles perceberem que os “objetos devem ser criados em um nível de modo que as relações entre esses objetos possam se tornar o foco do nível seguinte” (VAN DE WALLE, 2009, p. 443). Reconhecer essa relação se torna essencial, visto que, para que ocorra o desenvolvimento do pensamento geométrico, de acordo com este modelo teórico, cabe ao professor ter consciência de que suas orientações são decisivas para que o estudante obtenha sucesso nesse processo (VAN HIELE, 1984).

Ainda na Tarefa 3 foi solicitado aos FPM que descrevessem as quatro características dos níveis de pensamento de van Hiele. Para ilustrar, elegemos a resposta do G4, uma vez que, de modo geral, os outros grupos apontaram para as mesmas características.

> *Os níveis são sequenciais (...) Os níveis não são dependentes da idade no sentido dos estágios de desenvolvimento de Piaget (...) A experiência geométrica é o fator simples de maior influência sobre o avanço ou desenvolvimento através dos níveis (...). Quando o ensino ou a linguagem está em um nível superior ao do estudante, haverá uma falta de comunicação.*

Os FPM denotaram reflexões essencialmente descritivas associadas a aspectos gerais e aos níveis de pensamento, como o fato de o movimento de um nível para o outro ser sequencial, gradativo e contínuo. Segundo van Hiele (1984), para desenvolver o pensamento geométrico, a transição de um nível para o seguinte só acontece se forem acumulados símbolos suficientes que levem a este novo nível, ou seja, após tantos conceitos terem sido condensados nos símbolos, esses podem ser usados como guia para o nível seguinte.

Reflexões relacionadas ao papel do professor na prática em sala de aula para o desenvolvimento do pensamento geométrico

Nesta subseção, apresentamos as reflexões manifestadas pelos FPM relacionadas ao papel do professor na prática em sala de aula, sobretudo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento geométrico. Essas reflexões foram evidenciadas em diferentes momentos no desenvolvimento das tarefas. Por exemplo, na Tarefa 3, os FPM foram questionados sobre o que eles podem fazer quando os estudantes estiverem em diferentes níveis de pensamento geométrico. O G3 apresentou a seguinte resposta ao questionário:

> *Em primeiro momento, temos que descobrir em qual nível está cada estudante, por meio de atividades deve-se examinar as falas dos estudantes e através delas e da constante observação, podemos caracterizar o seu nível de pensamento. Após, deve-se aplicar atividades adequadas a cada nível; podemos apresentar até mesmo atividades que contemplem dois níveis de pensamento; o trabalho em equipe também tem grande importância, pela troca de conhecimentos e diálogo entre os estudantes. Assim, buscamos que o estudante alcance um nível superior de pensamento geométrico e também poder desenvolver a turma de forma integral (G3).*

No momento em que discutiram as respostas dadas ao questionário (Tarefa 4), o G5 desvelou a seguinte reflexão:

> *é importante que o professor compreenda o nível no qual os estudantes se encontram com a finalidade de poder intervir de maneira positiva no processo de aprendizagem do estudante, levando em consideração os conhecimentos já adquiridos para que posteriormente possa prosseguir para o próximo nível compreendendo as* ***progressões das ideias e como elas se constituem por meio da observação e classificação das mesmas****. (G5).*

Os FPM sublinharam aspectos significativos acerca de suas ideias sobre o papel do professor e das práticas de ensino que favorecem o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Além disso, dão indícios de reflexões de natureza deliberada, ao identificarem incidentes críticos como: o nível de pensamento mobilizado por eles; a oportunidade de todos progredirem em termos de desenvolvimento de pensamento em níveis hierárquicos; a organização dos conteúdos de modo a contemplar as necessidades dos estudantes; os conhecimentos prévios dos estudantes; a utilização de um vocabulário adequado ao contexto em cada nível; e a aprendizagem por meio de tarefas que promovam a evolução do estudante de um nível para outro. Todavia, ao sinalizarem a importância destas práticas de ensino como alternativa para o trabalho com o pensamento geométrico em sala de aula, sugerem reflexões de dimensão crítica, corroborando a questão proposta pela PF, que potencializou esse tipo de reflexão.

Em contrapartida, surgiram também discussões voltadas às práticas de ensino que desfavorecem a aprendizagem progressiva em relação aos níveis de pensamento, proposto por van Hiele. Durante a discussão do texto (Tarefa 2), os FPM mobilizaram reflexões, como:

> *Se o professor utilizar linguagens ou compreensões que estão acima do nível do estudante, ou que ainda não foram desenvolvidas com os mesmos, isso apenas* ***estimula um aprendizado de forma mecânica****. (...) se o professor escolher um estudante que está no nível 0 ou 1 e perguntar a ele sobre axiomas, coisas que ele ainda não conhece, ao invés de ele desenvolver seu pensamento ele vai só* ***decorar e reproduzir aquilo que ele ouviu*** *(FPM9).*

Reflexões em torno dessas práticas de ensino também apareceram nas respostas dadas ao questionário (Tarefa 3). Por exemplo:

> *Como, de acordo com o van Hiele, a aprendizagem da geometria ocorre em níveis hierárquicos então se lhes forem passados ensinamentos que vão além dos já aprendidos o estudante* ***não irá conseguir fixar corretamente o conceito*** *(...). Os níveis são sequenciais (...) quando o ensino ou a linguagem está em um nível superior ao do estudante, haverá uma* ***falta de comunicação*** *(G4).*

Os FPM ressaltaram a questão do trabalho com tarefas não condizentes ao nível de pensamento apresentado pelo estudante e como isso pode afetar o desenvolvimento do pensamento geométrico, gerando a falta de comunicação entre o professor e os estudantes e, consequentemente, uma aprendizagem sem atribuição de significados para conceitos geométricos. Isso denota reflexões de natureza deliberada, que justificam as ações do professor e as relacionam às atividades dos estudantes, no contexto do desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo o modelo de van Hiele.

As práticas avaliativas foram, ainda, alvo de discussões no decorrer da disciplina. Foi perguntado aos FPM como um professor pode avaliar os estudantes em termos de seu desenvolvimento geométrico geral ou de seu senso espacial. A seguir, vemos as respostas ao questionário (Tarefa 3), fornecidas pelo G1 e G4, representativas dos outros grupos.

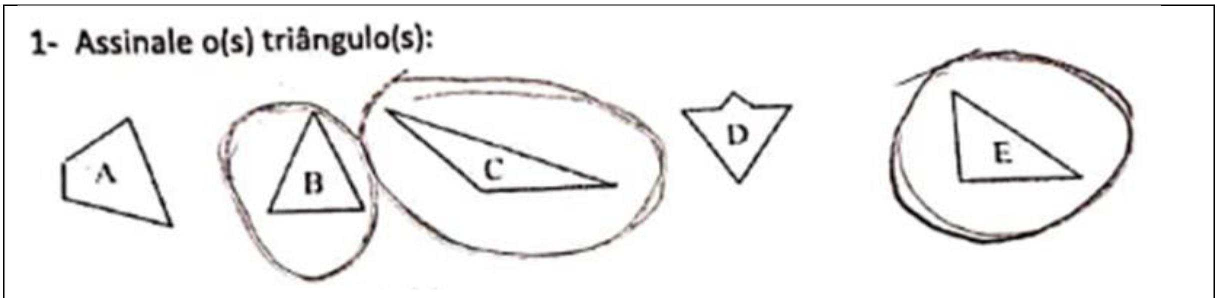
> *Para que o professor possa avaliar o desenvolvimento dos estudantes, ele deve analisar a maneira como eles pensam as formas geométricas, como eles compreendem e associam as propriedades e conceitos, a maneira de* ***aplicar os conhecimentos adquiridos nas resoluções de problemas*** *(G4).*
>
> *Assumindo que a teoria de van Hiele esteja correta, nota-se que dentro de uma única turma pode existir estudantes em diferentes níveis. Sendo assim, é preciso avaliá-los de maneira que seja possível distinguir cada nível de cada estudante. Nesse caso, pode-se* ***usar materiais concretos, desenhos e modelos computacionais****, assim enquanto o professor aplica a atividade ele precisa estar atento e escutar os tipos de observações de seus estudantes. É de extrema importância saber em que nível cada estudante está, porque só assim será possível ajudá-lo a avançar para o nível seguinte (G1).*

Os FPM apontaram que, ao avaliar o estudante em termos do desenvolvimento do pensamento geométrico, o professor deve observar a forma como ele compreende os conceitos matemáticos construídos no decorrer das aulas e, para que isso ocorra, é importante escutá-lo. Ressaltaram a importância de utilizar um material manipulável e visual como ferramenta para o ensino de geometria. Essas reflexões têm natureza crítica, pois, além de identificarem como avaliar em termos do desenvolvimento do pensamento geométrico, eles propuseram alternativas para que a ação de avaliar sirva para o professor entender em qual nível cada estudante se encontra, possibilitando, assim, sua tomada de decisões. Como bem afirma van de Walle (2009), todo professor, ao avaliar, deve ser capaz de perceber, ao longo do ano trabalhado, algum indício de desenvolvimento no pensamento geométrico do estudante.

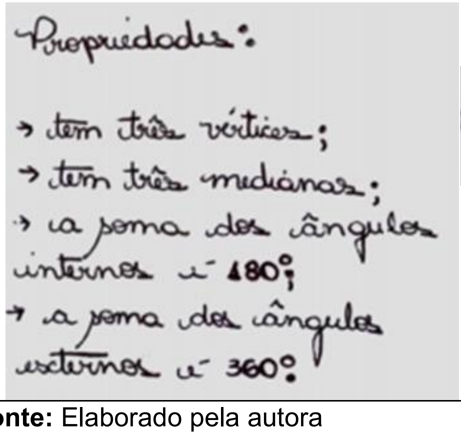
Reflexões relacionadas a conceitos geométricos quanto às propriedades de figuras planas

As discussões ocorridas durante o desenvolvimento da Tarefa 5 proporcionaram aos FPM reflexão de conceitos geométricos associados a propriedades de figuras planas (triângulos e quadriláteros). Ilustramos algumas respostas e justificativas dadas às questões presentes na Tarefa 1, as quais foram selecionadas pela PF para discutir a Tarefa 5 (Quadro 3).

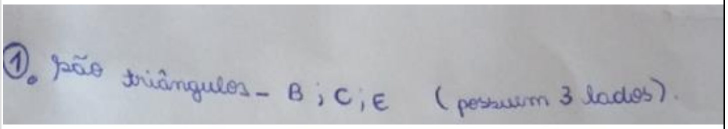
Quadro 3 - Respostas e justificativas fornecidas à questão 1 do teste

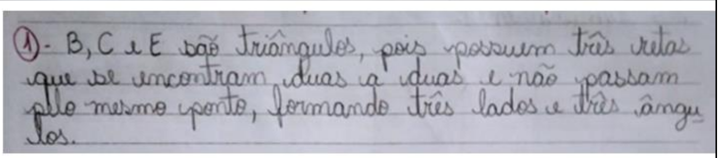


Frequência das respostas: 17 FPM marcaram B, C e E e um marcou B, C, D e E.


Propriedades:
→ tem três vértices;
→ tem três medianas;
→ a soma dos ângulos internos é 180º;
→ a soma dos ângulos externos é 360º

Algumas justificativas dos FPM:


1. São triângulos – B; C; E (possuem 3 lados).


1- B, C e E são triângulos, pois possuem três retas que se encontram duas a duas e não passam pelo mesmo ponto, formando três lados e três ângulos.

Fonte: Elaborado pela autora

Além das justificativas apresentadas no Quadro 3, a PF ressaltou em sua fala aquelas que foram mais recorrentes: i) B, C, E são triângulos, pois possuem três vértices; ii) são triângulos pois possuem três ângulos; e iii) são polígonos formados por 3 lados. Comentou também que o FPM que assinalou a alternativa D registrou que ficou com dúvida e escreveu, de modo incorreto, que "se dividir a figura, temos dois triângulos". No entanto, tal "divisão" não poderia ser considerada, pois teriam que analisar a figura como um todo.

Destacamos também a seguinte justificativa: B, C, E são triângulos, pois possuem três faces (Discussão do questionário-FPM12). A partir dessa justificativa, um diálogo foi estabelecido entre a PF e a turma:

PF: *O triângulo tem faces?*
FPM7: *Não.*
PF: *Por que não?*
FPM7: *Porque não é uma figura espacial.*

(Discussão do teste – Tarefa 5)

Ao responder à questão levantada pela PF, a princípio o FPM7 não justificou sua resposta, no entanto, provocado pela PF, forneceu uma explicação, denotando, desta forma, uma reflexão de natureza deliberativa.

Para a discussão da questão 2 (Tarefa 1), a PF selecionou as seguintes respostas e justificativas (Quadro 4):

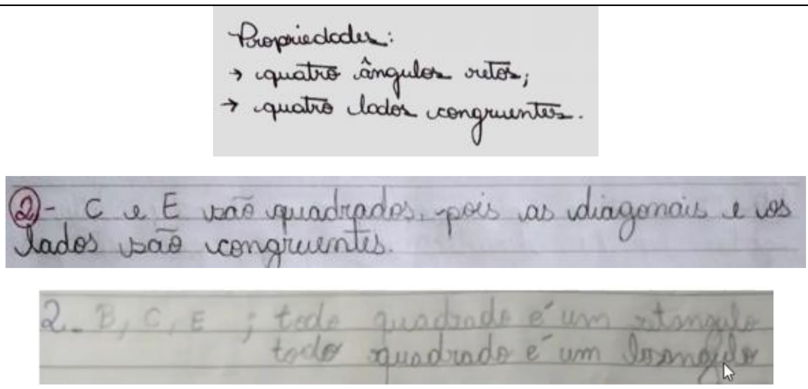
Quadro 4 - Respostas e justificativas fornecidas à questão 2

2- Assinale o(s) quadrado(s):

Frequência das respostas: Sete FPM marcaram C; cinco marcaram B, C e E; cinco marcaram C e E; e um marcou B e C.

<u>Algumas justificativas dos FPM:</u>

2) B, C, E. O quadrado possui os lados quatros congruentes.


Propriedades:
→ quatro ângulos retos;
→ quatro lados congruentes.

2- C e E são quadrados, pois as diagonais e os lados são congruentes.

2_ B, C, E ; todo quadrado é um retângulo
todo quadrado é um losango

Fonte: Elaborado pela autora

Para provocar a discussão, PF convidou os FPM a interpretarem as respostas (Quadro 4) dizendo que tinham sido apresentadas por estudantes da Educação Básica, para não submeter os que erraram a uma situação de vulnerabilidade.

PF: *O que vocês entendem quando os estudantes da Educação Básica assinalaram as formas B, C e E?*

FPM8: *Entendo que os estudantes sabem pouco sobre a definição de quadrado.* ***Acham que para ser um quadrado basta ter quatro lados. Então qualquer figura que tem quatro lados é um quadrado.***

PF: *E o estudante que marcou só a C, o que ele pode saber**?***

FPM8: *Aí ele já sabe que os lados opostos têm que ser iguais (mesma medida) e que todos os lados têm que ser iguais.*

PF: *E os estudantes que assinalaram a C e E?*

FPM8: *Eles têm uma noção melhor de quadrado.*

FPM7: *Professora, eu penso que os estudantes que assinalaram B, C e E, não, necessariamente, sabem a definição de quadrado.* ***Eles podem ter pensado que é um retângulo, se a gente "cortar" ao meio ele vira dois quadrados****.*

PF: *Mas veja o enunciado, ele é bem consistente, pede para assinalar os quadrados, ele não pede para fazer uma secção. E qualquer retângulo que dividir ao meio, ele se tornar dois um quadrado?*

FPM7: *Não.*

FPM8: ***A figura E parece um losango, mas não podemos afirmar que os quatro lados são iguais olhando só na figura, pois todo quadrado é***

um losango, mas nem tem todo losango é um quadrado. *Então quem assinalou essa figura pressupôs que o losango é um quadrado.*

PF: *É realmente não dá para afirmar, pois aquela figura está meio suspeita, pode ter acontecido alguma deformação ao recortar na hora de montar o teste. Mas é como você falou, o losango é uma figura que tem quatro lados com a mesma medida. Então se o estudante conhece essa definição, pode ser que ele tenha pensado nisso, mas ele pode ter olhado só pela aparência da figura. Isso é bom, pois às vezes os estudantes só pensam em quadrado quando são apresentados como o da letra C, mas se girarmos a figura ele não perde as propriedades. E geralmente nas salas de aulas e nos livros didáticos os quadrados são apresentados como na letra C, dificilmente eles apresentam como na letra E.*

(Discussão do teste – Tarefa 5)

As reflexões manifestadas pelos FPM decorrem da tentativa de compreender ideias e raciocínios manifestados pelos estudantes da Educação Básica, o que funcionou como estímulo e aprofundamento de seus próprios conhecimentos geométricos relacionados às propriedades de figuras planas, considerando que FPM, ao assinarem a figura B (retângulo) como um quadrado, evidenciaram dificuldades em relação ao reconhecimento de propriedades de figuras planas.

O FPM8 manifestou reflexões de natureza deliberativa, ao afirmar que, como os estudantes podem saber pouco a respeito da definição de quadrado, consideram que toda figura que tem quatro lados é um quadrado.

Por outro lado, o FPM7 dá uma possível justificativa para a resposta dos estudantes que assinalaram C e E, o que evidencia uma reflexão crítica. No entanto, a justificativa dele demonstra sua fragilidade em relação a esse conteúdo de geometria. Esse tipo de experiência pode propiciar aos FPM aprendizagens a respeito de geometria e de como ensinar geometria.

Com vista a explorar as propriedades de figuras planas, a PF provocou uma discussão para sistematizar as propriedades dos quadriláteros e agrupá-los em classes.

PF: *O quadrado tem lados opostos e congruentes?* ***E os retângulos? E os***

losangos?

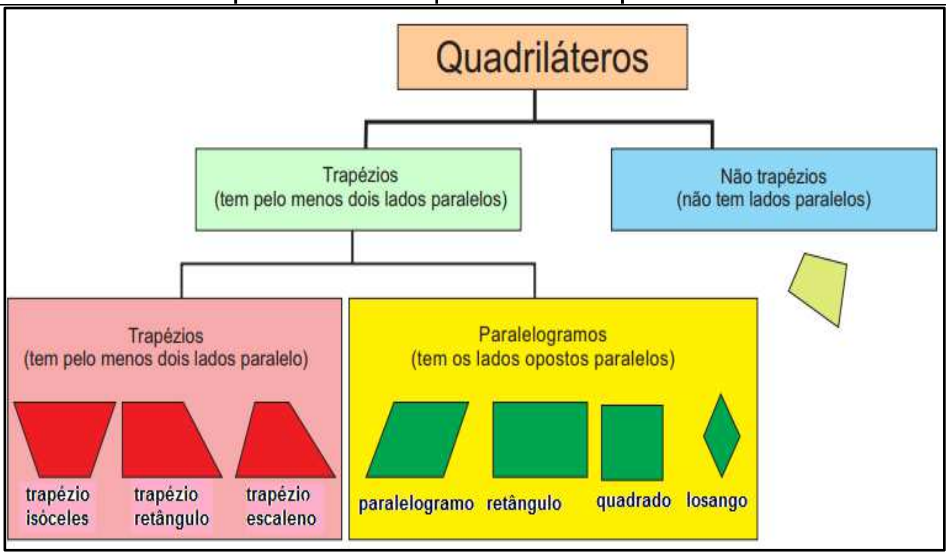
FPM8: *Nem sempre. Pensando na definição do quadrado, ele também é considerado um paralelogramo.*

PF: *E os paralelogramos apresentam lados opostos paralelos e congruentes**. Então eles são trapézios?***

(Discussão do teste – Tarefa 5)

A provocação da PF conduziu os FPM a reflexões críticas sobre a sistematização de propriedades de quadriláteros, o que pode favorecer o aprofundamento de compreensões e esclarecer equívocos acerca da inclusão de classes de quadriláteros. Cumpre observar que, quando a PF problematiza a respeito do trapézio, os FPM não responderam ao questionamento, o que a levou a apresentar propriedades do trapézio para que eles concluíssem que todos os paralelogramos são trapézios[37] (Quadro 5).

Quadro 5 - Classes dos quadriláteros apresentadas pela PF



Paralelogramos:

• Possuem lados opostos congruentes.

• Possuem ângulos opostos congruentes.

• Possuem ângulos adjacentes suplementares.

• As diagonais de um paralelogramo intersectam-se em seus pontos médios.

Fonte: Elaborado pela PF

[37] Vale ressaltar que há autores que consideram que trapézios e paralelogramos são conjuntos disjuntos, por definição. Porém, PF adotou definições que levam a essa conclusão.

A partir da sistematização realizada no desenvolvimento da Tarefa 5, evidenciamos que as reflexões oriundas dessa discussão forneceram evidências de constituição de conceitos geométricos relacionados a figuras planas, como: definição e propriedades de triângulos, definição e propriedades de quadriláteros, e a inclusão de classes dos quadriláteros notáveis.

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

As reflexões emergentes no desenvolvimento das tarefas a respeito do pensamento geométrico foram identificadas, em sua maioria, como deliberadas e críticas, o que revela que espaços formativos, como o promovido nesta disciplina, podem ser promissores para que futuros professores reflitam sobre a prática (MUIR; BESWICK, 2007) no ensino de geometria. Os FPM, ao vivenciarem situações da prática pedagógica promovidas no trabalho com as tarefas, puderam refletir a respeito do quê, como, porquê e quando ensinar geometria.

Considerando que a geometria promove o pensamento lógico e a compreensão matemática, os professores de Matemática têm um papel crucial no processo de ensino e de aprendizagem dessa temática (VAN HIELE, 1999). Portanto, o conhecimento de uma perspectiva teórica, para desenvolver o pensamento geométrico – como a de van Hiele, por exemplo – na formação inicial, pode oportunizar aos FPM discutirem e refletirem sobre aspectos relevantes do pensamento geométrico, de modo, a buscarem meios de apoiar esse tipo de pensamento de seus futuros estudantes (LIVY; DOWNTON, 2018; NACARATO; PASSOS, 2003).

As reflexões manifestadas a respeito dos níveis de pensamento sugerem o reconhecimento dos objetos e dos produtos de pensamento propostos de cada nível e a identificação de características gerais do modelo teórico estudado. Tais reflexões foram, em sua maior parte, deliberadas. Apoiados nos estudos teóricos (Tarefa 2), os FPM identificaram elementos centrais de cada nível proposto no modelo de van Hiele e explicaram de que maneira um estudante poderia pensar/operar em cada um destes níveis.

As reflexões geradas, a partir da discussão a respeito do papel do professor na prática em sala de aula foram, em sua maioria, deliberadas e críticas. A experiência prática de analisar equívocos, ideias, registros e estratégias dos estudantes, bem como as suas próprias, como proposto na Tarefa 5, facultaram aos FPM compreenderem possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes no desenvolvimento do pensamento geométrico. Ao analisarem as respostas apresentadas, da perspectiva de um professor, puderam observar diferentes abordagens e estratégias, concebendo diferentes maneiras de fornecer instruções apropriadas para desencadear a transição entre níveis de pensamento de seus estudantes (LEE; LEE, 2020). As discussões promovidas sobre conhecimentos pedagógicos do conteúdo, nesse caso de conhecimentos do conteúdo de geometria, corroboram a ideia de que o modelo de van Hiele é um importante recurso, ao fornecer uma rica base, para a compreensão do (futuro) professor sobre geometria e como os estudantes aprendem geometria (ALEX; MAMMEN, 2018; ERDOGAN, 2020).

Nesse sentido, os FPM destacaram aspectos relevantes, como práticas de ensino que favorecem ou desfavorecem o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes e de como avaliar essa forma de pensar. Assim, ao identificarem a relevância e implicações destas práticas de ensino no trabalho com a geometria em sala de aula e ao oferecerem alternativas para apoiar o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes, em uma futura prática profissional, os FPM evidenciaram reflexões de dimensão crítica. Advogamos que o desenvolvimento do pensamento geométrico do estudante depende dos tipos de experiências que lhe são oferecidas, cabendo ao professor reconhecer o nível de pensamento no qual o estudante se encontra para, então, propor tarefas adequadas e oportunizar a constituição gradual de conceitos geométricos (VAN HIELE, 1999).

No que tange à constituição de conceitos geométricos relacionados a figuras planas, identificamos, em sua maioria, reflexões de natureza deliberativas, que demonstraram que os FPM mobilizaram conhecimentos geométricos referentes às definições e às propriedades de triângulos, de quadriláteros, e a inclusão de classes de quadriláteros notáveis. Assim, privilegiar intencionalmente conhecimentos específicos da geometria, como dos quadriláteros, propiciou aos FPM um conhecimento mais amplo deste conteúdo. Muitas vezes, a ausência ou pouca frequência do ensino da geometria na Educação Básica está relacionada com as fragilidades de professores de Matemática em relação, por exemplo, ao raciocínio dedutivo, à incompreensão do processo de classificação dos quadriláteros (BRUNHEIRA; PONTE, 2019; COSTA; SANTOS; 2016, FUJITA, 2012). Tais fragilidades sinalizam para a importância de processos formativos e de pesquisas que desenvolvam estratégias para mitigá-las, apoiando FPM no desenvolvimento do seu próprio pensamento geométrico (BRUNHEIRA; PONTE, 2019).

A execução das tarefas e a dinâmica estabelecida pela PF no processo formativo oportunizaram aos FPM reconhecerem e atribuírem significados para conceitos e propriedades geométricas, além de outras ações que dão indícios de desenvolvimento do pensamento geométrico. O Quadro 6 ilustra uma síntese dos aspectos de pensamento geométrico identificados, tendo por base as reflexões manifestadas pelos FPM nesse processo formativo associadas: (I) aos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele; (II) ao papel do professor na prática em sala de aula; e (III) a conceitos geométricos e propriedades de figuras planas.

Quadro 6 - Aspectos do pensamento geométrico identificados a partir das reflexões

Reflexões associadas:	Aspectos do pensamento geométrico
Aos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele	• Analisar diferenças de uma forma geométrica para outra por meio da visualização. • Classificar propriedades de formas geométricas, de modo particular. • Estabelecer relações entre diferentes objetos geométricos, de modo a deduzir propriedades informalmente. • Realizar generalizações, construção de classes de objetos geométricos com características em comum. • Trabalhar com sentenças abstratas sobre as propriedades geométricas. • Entender a complexidade dos fenômenos e realizar inferências sobre eles. • Reconhecer os objetos geométricos por meio de processos dedutivos, mobilizando propriedades desses objetos que passam agora a compor o mundo abstrato.
Ao papel do professor na prática em sala de aula	• Fornecer indícios de que a reprodução mecânica não potencializa o desenvolvimento do pensamento geométrico. • Observar se os estudantes atribuem significados aos conceitos geométricos, de modo a mobilizá-los, de forma coerente, na resolução de problemas.

A conceitos geométricos relacionados a propriedades de figuras planas	• Reconhecer elementos constituintes de formas geométricas e propriedades • Estabelecer diferenças entre elementos de figuras planas e espaciais • Definir um objeto geométrico, para além de apenas observar suas características. • Incluir quadriláteros em classes de acordo com suas propriedades.

Fonte: Elaborado pela autora

Tais aspectos podem constituir um modo de compreender a geometria e seu ensino. Os conhecimentos manifestados pelos FPM na resolução de problemas podem ser úteis para entender fenômenos do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento, desde a exploração sensorial de objetos presentes ao seu redor até o reconhecimento da geometria como óculos para a compreensão de objetos que compõem o mundo teórico (COSTA, 2020).

Considerações Finais

As análises e as discussões manifestadas pelos FPM permitem-nos concluir que os momentos de socialização nas aulas – nas dificuldades encontradas em razão do contexto pandêmico vivenciado – foram enriquecidos por experiências proporcionadas pelas tarefas e pela dinâmica estabelecida pela PF. Essas tarefas e as discussões viabilizaram reflexões para uma formação docente mais crítica e ampla sobre conhecimentos teóricos a respeito do pensamento geométrico, de práticas de sala de aula e da constituição de conceitos geométricos.

Os diferentes níveis de reflexão em que se alicerçou o quadro analítico mostraram-se promissores para esclarecer diferentes modos – numa estrutura hierárquica e inter-relacionada – pelos quais a reflexão, assentada no trabalho com tarefas bem delineadas, influencia e oferece condições para fomentar aprendizagens de FPM acerca do pensamento geométrico.

As reflexões emergentes demostraram que, ao operar no nível mais elevado de reflexão, nível crítico, o FPM pode ser capaz de vislumbrar possibilidades de práticas futuras para o ensino de geometria. Durante o processo de formação inicial, por vezes, são poucos os momentos em que isso é contemplado. Assim sendo, ações formativas, como as desencadeadas nesse processo de formação, podem contribuir para minimizar a dicotomia entre as dificuldades que o futuro professor tem em aprender conteúdos geométricos e aprender a ensinar geometria.

A PF, ao estabelecer a comunicação a partir das interações com os FPM e a promoção da interação entre eles, proporcionou a verbalização de seus raciocínios, o debate de ideias divergentes, a investigação de propriedades e a constituição/sistematização de conceitos geométricos com significados.

Ações formativas que oportunizam ao futuro professor perpassar por diferentes níveis reflexivos podem resultar num processo de aprendizagem capaz de permitir o desenvolvimento do pensamento geométrico necessários para a sua futura prática profissional. Investigações futuras, incidentes na observação e na promoção dessas ações formativas, apoiadas em outros modelos teóricos, podem oferecer elementos necessários para esclarecer outros aspectos do pensamento geométrico.

Referências

ALEX, J; MAMMEN, K. J. Students' understanding of geometry terminology through the lens of Van Hiele theory. **Pythagoras**, *[S. l.]*, v. 39, n. 1, p. 1–8, 2018. DOI: 10.4102/pythagoras.v39i1.376.

ALMOULOUD, S. A. *et al*. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, [S.L.], n. 27, p. 94-108, dez. 2004. DOI: 10.1590/s1413-24782004000300007.

BATTISTA, M. T. The development of geometric and spatial thinking. In: LESTER, F. K. (ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**: a project of the national council of teachers of mathematics. Charlotte: Information Age Publishing, 2007. p. 843-908.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Ed. Porto. 1994.

BRUNHEIRA, L; PONTE, J. P. Da. From the classification of quadrilaterals to the classification of prisms: An experiment with prospective teachers. **Journal of Mathematical Behavior**, *[S. l.]*, v. 53, p. 65–80, 2019. DOI: 10.1016/j.jmathb.2018.06.004.

COSTA, A. P. O pensamento geométrico em foco: construindo uma definição. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**, Mossoró, v. 6, n. 16, p. 77-94, 2020.

COSTA, A. P; SANTOS, M. C. O pensamento geométrico de professores de matemática do ensino básico: um estudo sobre os quadriláteros notáveis. **Revista Educação Online**, Rio de Janeiro, s.v, n.22, p. 108-126, 2016.

CYBULSKI, F. C.; CYRINO, M. C. C. T. Geometria e pensamento geométrico na formação inicial de professores que ensinam matemática: o que revelam pesquisas brasileiras entre 2009 e 2020. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S.L.],* v. 11, n. 26, p. 44-65, 1 dez. 2022. DOI: 10.33871/22385800.2022.11.26.44-65.

ERDOGAN, F. Prospective Middle School Mathematics Teachers' Problem Posing Abilities in Context of Van Hiele Levels of Geometric Thinking. **International Online Journal of Educational Sciences**, *[S. l.]*, v. 12, n. 2, p. 132–152, 2020. DOI: 10.15345/iojes.2020.02.009.

FERREIRA, A. C.; BARBOSA, C. P. Saberes Profissionais e Pensamento Geométrico: o caso de uma professora dos anos iniciais do ensino fundamental. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 15, n. 1, p. 93-112, jan./abr. 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012. (Coleção Formação de Professores).

FUJITA, T. Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. **Journal of Mathematical Behavior**, v. *31, n.1*1, p. 60–72, 2012. DOI: 10.1016/j.jmathb.2011.08.003.

KNIGHT, K. C. **An investigation into the change in the Van Hiele levels of understanding geometry of pre-service elementary and secondary mathematics teachers**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Universidade de Maine, Orono, 2006.

LEE, M. Y.; LEE, J. E. Spotlight on Area Models: Pre-service Teachers' Ability to Link Fractions and Geometric Measurement. **International Journal of Science and Mathematics Education**, *[S. l.]*, v. 19, n. 5, p. 1079-1102, 2020. DOI: 10.1007/s10763-020-10098-2.

LIVY, S.; DOWNTON, A. Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. **Journal of Mathematical Behavior**, *[S. l.]*, v. 51, p. 150–160, 2018. DOI: 10.1016/j.jmathb.2017.11.004.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

MATTOS, J. M.; SERRAZINA, M. D. L. Didáctica da matemática. **Universidade Aberta**. p. 191-212, 1996.

MUIR, T.; BESWICK, K. Stimulating reflection on practice: Using the supportive classroom reflection process. **Mathematics Teacher Education and Development**, s.v, n. 8, p. 74-93, 2007.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. **EdUFSCar**, São Carlos, p.9-74, 2003.

NASSER, L.; SANTANNA, N. P. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. Rio de Janeiro: Instituto de matemática – UFRJ. Projeto Fundão, 1997.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

NUNES, C. B.; ONUCHIC, L. R. O uso das transformações geométricas através da resolução de problemas na formação de futuros professores de matemática**. Interfaces da Educ**, v. 10, n.30, p. 30-56, 2019.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores em sala de aula. 6. ed. Tradução de: Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009. 583p.

VAN HIELE, P. M. A child's thought and geometry. *In*: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Eds.). **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele**. Brooklyn: Brooklyn College, p. 243-252,1984.

VAN HIELE, P. M. Developing Thinking through Activities That Begin with Play. **Teaching Children Mathematics**. v. 6, p. 310-316, fev. 1999.

CAPÍTULO/ARTIGO 2

EXPLORAÇÃO DE TAREFAS POTENCIAIS PARA MOBILIZAR APREENSÕES EM GEOMETRIA NA FORMAÇÃO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Resumo: O presente estudo tem como objetivo discutir contribuições da exploração de tarefas de geometria para a formação inicial de professores de matemática. Foi realizada uma investigação qualitativa de cunho interpretativo de ações de formação que envolveram resolução, elaboração e discussão de tarefas, com potencial para a mobilizar apreensões em geometria, em uma disciplina de Ensino de Geometria que contou com a participação de 24 futuros professores de matemática (FPM). Os resultados evidenciam que os FPM tiveram a oportunidade de refletir a respeito de conhecimentos teóricos e práticos acerca das apreensões em geometria; estabelecer conexões entre as apreensões envolvidas no processo de resolução de tarefas de geometria; discutir sobre a importância do papel do professor no reconhecimento de potencialidades e limitações de tarefas a serem trabalhadas em sala de aula na Educação Básica; e sistematizar conceitos geométricos. As reflexões sobre aspectos relacionados à aprendizagem e ao ensino de geometria podem contribuir para desenvolver o pensamento geométrico dos FPM, reverberando em sua própria prática profissional em experiências futuras.

Palavras-chave: Tarefas de geometria. Apreensões cognitivas de Duval. Formação inicial de Professores de matemática.

INTRODUÇÃO

Estudos, no âmbito da Educação Matemática, têm acenado para a importância de se promoverem ações formativas que oportunizem ao futuro professor de matemática (FPM) se familiarizar com conteúdos de geometria e atribuir significados a eles, de modo a permitir reflexões sobre o seu ensino em sua futura prática profissional (ALEX; MAMMEM, 2018; BRUNHEIRA; PONTE, 2019; ERDOGAN, 2020; LEE; LEE, 2020; LIVY; DOWNTON, 2018; RAMATLAPANA; BERGER, 2018).

Erdogan (2020) sugere que, durante a formação inicial, os FPM vivenciem experiências envolvendo a elaboração de tarefas de geometria, que propiciem reflexões tanto a respeito de aspectos referentes ao processo de elaboração de um problema, quanto ao conhecimento de conceitos geométricos nele envolvidos. Ramatlapana e Berger (2018) defendem ainda que o reconhecimento, por parte dos FPM, de tarefas potenciais para o ensino de geometria[38] pode fornecer insights sobre conhecimentos do conteúdo da disciplina e conhecimentos pedagógicos.

Ações formativas, como as indicadas por esses autores, podem ser profícuas no processo de formação inicial de professores de matemática, considerando que algumas dificuldades relacionadas à aprendizagem da geometria podem estar associadas à complexidade cognitiva subjacente da atividade geométrica necessária para a resolução de uma tarefa de geometria (DUVAL, 1998). Duval (1994) afirma que há lacunas entre o que o professor propõe e o que o estudante pensa ou faz durante o processo de resolução de uma tarefa de geometria. Destaca ainda que o ensino de geometria envolve uma complexidade cognitiva subjacente da atividade geométrica e, na maioria das vezes, é menos bem-sucedido do que ensinar operações numéricas ou álgebra elementar, porém pode desenvolver diferentes modos de pensar, e isso deve ser o propósito principal para o seu ensino (DUVAL, 1998).

Moretti (2013) defende a necessidade de compreendermos os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da geometria, tendo em conta as ideias desenvolvidas por Duval (1994, 1998) acerca das apreensões envolvidas na resolução de um problema geométrico. O autor destaca que tais apreensões de Duval apresentam outro modo de ver o ensino da geometria. Muitos problemas que parecem semelhantes podem diferenciar-se de forma significativa por conta dos tipos de apreensões requeridas em sua resolução, e isso pode representar um “tempero” nas atividades em matemática.

No contexto educacional, o entendimento sobre o papel das apreensões no funcionamento de uma figura na abordagem de uma situação geométrica, pode trazer elementos que auxiliem os professores na identificação e análise de certas dificuldades dos estudantes em olhar matematicamente para as figuras, de forma a constituírem verdadeiras ajudas heurísticas na resolução de problemas (JAHN; BONGIOVANNI, 2019).

No entanto, Ramatlapana e Berger (2018) apontam ser preciso mais pesquisas que investiguem como os comportamentos e os processos de pensamento são construídos e organizados por FPM, ao lidarem com tarefas

[38] Tarefas que proporcionam ao estudante atribuir significados a conceitos geométricos.

potenciais para o ensino de geometria, de forma a suscitar evidências que apoiem o reconhecimento das conexões estabelecidas entre as apreensões[39] no processo de resolução de um problema.

O trabalho com tarefas com diferentes demandas cognitivas[40] representa oportunidades de aprendizagem para o estudante, visto que “algumas têm o potencial de mobilizá-lo às formas complexas de pensamento e outras não” (JESUS; CYRINO; OLIVEIRA, 2018, p. 22). As autoras sinalizam a importância de se promoverem, na formação de professores de matemática, reflexões sobre o trabalho com essas tarefas em sala de aula.

Deste modo, na presente investigação discutimos contribuições da exploração de tarefas com potencial para a mobilização de apreensões em geometria para a formação inicial de professores de matemática.

Na sequência, apresentamos um quadro teórico sobre as apreensões de Raymond Duval e o trabalho com tarefas na formação de professores, o contexto e os procedimentos metodológicos da pesquisa, os resultados, as discussões e algumas considerações.

AS APREENSÕES DE RAYMOND DUVAL NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

O conhecimento matemático pode ser analisado por meio da exploração do modo como os estudantes organizam as estruturas cognitivas matemáticas. Assim, os processos cognitivos podem ser entendidos na forma como eles reconhecem as representações figurais por meio de apreensões cognitivas (RAMATLAPNA; BERGER, 2018). Para Duval (1994), as apreensões geométricas são atividades cognitivas responsáveis pela compreensão das representações em geometria, e distinguem-se em quatro tipos: *apreensão perceptiva*, *apreensão operatória, apreensão discursiva* e *apreensão sequencial*. Duval defende a ideia de que não há uma hierarquia entre os diferentes tipos de apreensões, mas uma subordinação de uma à outra, dependendo da situação geométrica proposta (MORETTI, 2013).

As apreensões perceptiva e operatória são dois níveis de

[39] No trabalho referido, os autores investigaram apenas as apreensões discursivas e perceptivas.
[40] Segundo Stein e Smith (1998, p. 17, tradução nossa), “as demandas cognitivas das tarefas de ensino de matemática estão relacionadas com o nível e o tipo de aprendizagem dos alunos”.

compreensão das figuras geométricas, vinculadas com os tratamentos figurais. Ambas se aproximam, pois independem do discurso e de propriedades matemáticas, porém se encontram em níveis de processamento diferentes (BRANDT; MORETTI; NOVAK, 2018). A primeira cumpre a função epistemológica de identificar os objetos em duas ou três dimensões, por meio de um processamento cognitivo que é imediato e automático, limita-se a observações das características de uma figura. Em algumas situações, tais observações podem ser o único processo para conduzir à resolução de um problema. E permite, também, interpretar a forma que uma figura está organizada, independente do enunciado (DUVAL, 1994, 1998, 2005). Porém tais organizações perceptivas das figuras geométricas podem conduzir o sujeito a outro nível de apreensão, a operatória, a qual tem como função epistemológica a exploração heurística, ou seja, quando, durante a exploração de uma figura, ocorre à visibilidade de subconfigurações excedentes[41], as quais são relevantes para a solução de um problema geométrico ou para uma prova em geometria (DUVAL, 1998). A apreensão operatória compreende as modificações figurais realizadas em uma figura na busca da modificação heuristicamente relevante para solucionar um problema (DUVAL, 1994; 1998), centrando-se nas “modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações” (DUVAL, 2012, p. 125).

As modificações figurais podem ser de três tipos: mereológica, óptica e posicional. A modificação mereológica ocorre em função da relação parte e todo. Consiste em dividir uma figura em partes que sejam como várias subfiguras e recombinar essas partes em outra figura, de modo que ela se torne uma subfigura. Essa divisão de uma figura juntamente com sua reorganização é o que dá origem a operação de reconfiguração intermediária, como, por exemplo, transformar um retângulo em um paralelogramo (DUVAL, 2005). A operação de reconfiguração intermediária possibilita a produtividade heurística da figura na resolução de problemas geométricos. Segundo Duval (2012, p. 125), a “produtividade heurística de uma figura, em um problema de geometria, está ligada a existência da congruência entre uma destas operações e um dos tratamentos matemáticos

[41]São subconfigurações excedentes de uma figura geométrica, aquelas que não foram explicitamente mobilizadas para a sua construção ou mencionados nas hipóteses, sendo este excedente o que cria o poder heurístico das figuras e fornece a ideia principal para a solução de uma situação geométrica (DUVAL, 1998).

possíveis para o problema proposto".

A modificação óptica transforma uma figura em outra, chamada sua imagem. Esta transformação significa modificar o tamanho ou a inclinação da figura inicial, isto é, ampliar, reduzir ou inclinar e pode conservar a forma inicial ou alterá-la, útil para compreender a homotetia. E a modificação de posição, ou posicional, consiste em alterar a posição da figura inicial no plano, utilizando, por exemplo, as operações de reflexão, translação e rotação (DUVAL, 2012).

Outra apreensão, denominada de sequencial, é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura (DUVAL, 2012). Este tipo de apreensão envolve a ordem de construção de uma figura e a atividade de descrição dela, no sentido de descrever os passos utilizados para reproduzir a ordem dos elementos que possibilitam a sua construção. Corresponde a um reconhecimento, por parte do sujeito, da ordem dos passos que o levem à construção de uma figura, que não depende somente de propriedades matemáticas, mas de outras restrições técnicas, ligadas ao uso de instrumentos, que possibilitem construí-la, como: régua e compasso e/ou softwares de geometria. Sua função epistemológica é fornecer um modelo e aparece de forma clara com o uso de certos instrumentos de construção geométrica, do qual as ações (modificações feitas) sobre o seu representante podem conduzir à solução do problema.

Por outro lado, a apreensão discursiva fundamenta-se em compreender os elementos da construção geométrica em que o enunciado, por meio das hipóteses, determina quais pressupostos teóricos serão úteis para resolver o problema proposto (BRANDT; MORETTI; NOVAK, 2018). A apreensão discursiva tem como função epistemológica a interpretação de enunciados e a demonstração. Tem natureza dedutiva e corresponde à explicação que o sujeito dá para certas propriedades matemáticas de uma figura, para além das indicadas em enunciados, legendas ou hipóteses que a acompanham, ou seja, envolve o conhecimento do sujeito a respeito das propriedades matemáticas, as quais não "aparecem" na figura. Essa explicação pode estar pautada num discurso natural ou teórico (DUVAL, 1994, 1998). Deste modo, a apreensão sequencial se difere da apreensão discursiva, pois ela não se trata de um enunciado em que há um problema a ser resolvido.

Apesar de cada apreensão desempenhar funções epistemológicas diferentes, elas não aparecem de forma isolada na resolução de um problema. Cada uma pode ser apreendida em maior ou menor grau na resolução de um problema geométrico (MORETTI; BRANDT, 2015). Assim, de acordo com Moretti e Brandt (2015) as conexões estabelecidas entre as diferentes apreensões na resolução de um problema podem gerar:

- **uma figura geométrica**: resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva, é preciso ver a figura geométrica a partir das hipóteses e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes. A apreensão discursiva é subordinada pela apreensão perceptiva;
- **a visualização**: resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória, e, apesar da visualização não exigir nenhum conhecimento matemático, ela pode comandar a apreensão operatória;
- **a heurística** e a **demonstração**: resultados da conexão entre as apreensões operatória, (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e discursiva;
- **a construção geométrica**: resultado da conexão entre as apreensões discursiva e sequencial, que também requerem a apreensão perceptiva.

Moretti e Brandt (2015) afirmam que por conta destas conexões descritas acima, é possível percebermos a importância da apreensão perceptiva na aprendizagem da geometria, visto que, as apreensões operatória, discursiva e sequencial subordinam-se, em maior ou menor grau, dependendo do tipo de problema, à apreensão perceptiva.

O Trabalho com Tarefas Matemáticas na Formação de Professores

As tarefas representam oportunidades de aprendizagem para os estudantes, por isso é indispensável entender o papel do professor no trabalho com elas, visto que suas ações podem influenciar o modo como os estudantes aprendem a pensar matematicamente (STEIN; SMITH, 1998). Deste modo, cumpre que o professor “esteja preparado para selecionar de forma esclarecida as tarefas a propor aos alunos e apoiá-los no seu trabalho, sem reduzir a complexidade da tarefa” (JESUS; CYRINO, 2015, p. 1).

Jesus e Cyrino (2015) defendem a importância de propiciar uma formação aos professores de matemática que lhes oportunize pensar e refletir a respeito tanto do papel significativo das tarefas para os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, quanto papel do professor no trabalho com elas.

Gafanhoto e Canavarro (2011) afirmam que a seleção, a adaptação ou a criação de boas tarefas para a sala de aula são um desafio para muitos professores, isso porque muitos deles, ao planejarem suas aulas, acabam frequentemente selecionando somente tarefas semelhantes àquelas já propostas anteriormente em sala de aula, tornando-as listas de exercícios. Nesse caso, o trabalho dos estudantes se limita a resolvê-las de forma mecânica e, em algumas vezes, tendo como ponto de partida um modelo explicado anteriormente pelo professor e reproduzido posteriormente por eles (CYRINO; JESUS, 2014).

Cyrino e Jesus (2014) destacam que a reflexão sobre as tarefas e sua relevância nos processos de ensino e de aprendizagem pode permitir ao professor: escolher tarefas adequadas a seus objetivos de ensino; iniciar um processo de ensino que priorize tarefas desafiadoras nas quais o aluno pode estabelecer conexões com significados ou com ideias e conceitos matemáticos; reconhecer que as tarefas podem expressar mais do que o conteúdo; perceber como as tarefas influenciam o seu ensino e, consequentemente, a aprendizagem dos estudantes; proporcionar um ambiente de aprendizagem durante as aulas de matemática; perceber qual o impacto de suas ações no processo de ensino e de aprendizagem.

Nesta direção, Stein e Smith (1998) destacam que é fundamental o papel do professor nessa fase, uma vez que suas escolhas metodológicas são determinantes para limitar ou potencializar as oportunidades de aprendizagem criadas a partir da tarefa proposta. Assim, o conhecimento do professor é imprescindível tanto no momento da escolha da tarefa, como em seu desenvolvimento em sala de aula. Ele até pode propor uma tarefa interessante aos seus alunos, mas se ela não for bem explorada, suas “potencialidades podem ser diminuídas e traduzir-se em experiências matemáticas pouco ricas para os alunos”

(RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2014, p. 354).

As potencialidades de uma tarefa podem estar associadas ao nível de demanda cognitiva exigida para a sua realização e também ao tipo de aprendizagem proporcionada aos estudantes. Stein e Smith (1998) classificam as tarefas em quatro tipos, quanto ao nível de demanda cognitiva: *de memorização, de procedimentos sem conexão com significados, de procedimentos com conexão com significados* e *de fazer matemática*.

Os dois primeiros tipos de tarefas são considerados tarefas de baixo nível de demanda cognitiva, isto é, são aquelas que requerem reprodução, memorização e elaboração de procedimentos, sem estabelecer conexão com as ideias matemáticas: as de memorização são aquelas que podem ser resolvidas pela simples aplicação de regras memorizadas; as de procedimentos sem conexão com significados são aquelas em que se utilizam algoritmos que solucionam a tarefa de forma mecânica, sem atribuir significado para o estudante. Já os dois últimos tipos de tarefas representam as de alto nível de demanda cognitiva, visto que exigem o estabelecimento de conjecturas, comparações, relações e justificações matemáticas: as de procedimentos com conexão com significados são aquelas que apresentam um contexto que ajuda a desenvolver certa ideia matemática por meio de ideias subjacentes presentes na tarefa; as de fazer matemática possibilitam aos estudantes pensarem e elaborarem sua própria forma de resolver o que é solicitado.

Portanto, escolher, adaptar e elaborar uma tarefa pautada no nível de demanda cognitiva requer do professor um olhar criterioso, para adequá-la a aspectos relacionados ao perfil dos estudantes de sua turma, como idade, ritmo de aprendizagem, nível de escolaridade, experiências anteriores.

Contexto e Procedimentos Metodológicos da Pesquisa

A presente investigação, de natureza qualitativa e de cunho interpretativo, foi desenvolvida no contexto da disciplina Ensino de Geometria[42], ofertada para FPM no segundo ano do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná, Brasil. A disciplina foi organizada em um ambiente virtual de aprendizagem, o *Modular Object-Oriented Dynamic Learning*

[42]A carga horária total prevista para a disciplina era de 120 horas.

Environment (*Moodle*), e as aulas ocorreram semanalmente, com duração média de 90 minutos[43], de forma síncrona, via *Google Meet,* em horário regular no período noturno ao longo de 2021. Participaram da disciplina 24 FPM, duas professoras formadoras[44] e a investigadora formadora (IF), que, juntamente com as formadoras, assumiu um papel ativo no planejamento e na implementação de ações formativas.

As ações formativas (Quadro 1), analisadas nesta investigação, foram desencadeadas a partir da exploração de tarefas de geometria propostas pela IF, a qual, em alguns momentos da disciplina, assumiu o papel de formadora junto da professora formadora (PF). O trabalho com essas ações teve duração de aproximadamente 20 horas, distribuídas em 10 aulas ocorridas durante os meses de julho e agosto de 2021.

Quadro 1 - Ações formativas

Ação formativa proposta pela pesquisadora	**Ações realizadas pelos FPM**
Ação 1 - Proposição de tarefas de geometria	Resolução de quatro tarefas, utilizando seus conhecimentos prévios de geometria. Detalharam suas estratégias matemáticas, a fim de justificar suas ideias, conforme solicitado pela investigadora formadora. Posteriormente, fotografaram suas resoluções e postaram na plataforma. A tarefa poderia ser realizada em duplas.
Ação 2 - Proposição de estudo do texto: Apreensões geométricas segundo Raymond Duval[45]	Estudo do texto e elaboração de possíveis dúvidas que surgiram durante o estudo.
Ação 3 - Discussão das resoluções das tarefas propostas e do texto estudado	Discussão das diferentes estratégias de resoluções referentes a cada tarefa proposta, juntamente com as formadoras. Para tanto, levantaram questionamentos de conceitos geométricos ali envolvidos e discutiram a respeito das apreensões geométricas estudadas no texto, apontando, durante as discussões, que apreensões seriam possíveis de serem mobilizadas por um sujeito ao resolver tal tarefa.

[43]Foi estabelecida uma carga horária menor no ano letivo de 2021, que permaneceu na modalidade de Ensino Remoto Emergencial, em razão da pandemia da COVID-19.

[44]O primeiro semestre foi ministrado por uma professora e, por questões internas da Universidade, as aulas, a partir do segundo semestre, foram assumidas por outra professora. A maior parte dos dados desta investigação foi coletada no primeiro semestre.

[45]O presente texto é resultado das reflexões e discussões dos estudos de Duval (1994, 1998, 2005, 2012) no grupo de estudos do Pensamento Geométrico do Gepefopem – Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Formação de Professores que ensinam Matemática.

Ação 4 - Elaboração de tarefas para o ensino da geometria	Criação ou adaptação de quatro tarefas voltadas para a mobilização das apreensões em geometria, seguindo as solicitações feitas pela IF: ser elaborada em duplas e para cada tarefa apresentar estratégias de resolução, objetivo e justificar a escolha da tarefa, de acordo com as apreensões que poderiam ser mobilizadas.
Ação 5 - Discussão das propostas elaboradas pelos FPM	Análise, em pequenos grupos, das tarefas elaboradas pelos colegas, identificando qual(is) apreensão(ões) poderiam ser mobilizadas no processo de resolução. Neste momento, não tiveram acesso a objetivos, resoluções e justificativas presentes nas propostas. Na sequência, discutiram com toda turma o que identificaram. Nessa ocasião, a IF os organizou de modo que fosse possível confrontar a análise feita por cada grupo com o que foi proposto na tarefa e com as justificativas fornecidas pelas duplas que as elaboraram.

Fonte: Elaborado pela autora

Dos 24 FPM, somente 15 se envolveram efetivamente nas ações formativas descritas no Quadro 1 e, portanto, optou-se por analisar apenas suas produções. A fim de preservar o anonimato dos participantes, utilizamos os códigos: FPM1, FPM2, [...], FPM15 para representar cada um dos FPM.

Para processo de análise, selecionamos produções escritas dos FPM, resultantes da resolução e elaboração de tarefas representativas das ações de formação; episódios registrados em vídeo (*Google Meet*) das discussões dessas tarefas; e o diário de campo da pesquisadora. Foram selecionadas as tarefas que desencadearam mais discussões, em relação às estratégias de resolução adotadas pelos FPM, durante as ações formativas e, por conseguinte, mais elementos para a análise, por isso as denominamos de *tarefas representativas.* Após exame detalhado dos registros, utilizamos como lente teórica de análise as ideias de Duval (1994, 1998, 1999) acerca de apreensões em geometria; os níveis de demanda cognitiva de tarefas matemáticas discutidas por Stein e Smith (1998); e o papel do professor no trabalho com tarefas matemáticas de Cyrino e Jesus (2014). Considerando tais referenciais, buscamos responder à nossa questão de pesquisa: *que contribuições o trabalho com resolução, elaboração e discussão de tarefas, com potencial para mobilizar apreensões em geometria, proporciona para a formação inicial de* *professores de matemática?*

EXPLORAÇÃO DE TAREFAS COM POTENCIAL PARA A MOBILIZAÇÃO DAS APREENSÕES EM GEOMETRIA EM UMA DISCIPLINA DE ENSINO DE GEOMETRIA

Nesta seção, descrevemos e analisamos a exploração de três tarefas, desenvolvidas em uma disciplina de Ensino de Geometria, com potencial para a mobilização de apreensões geométricas. Tais tarefas foram escolhidas por representarem ações de elaborar, resolver e discutir, que permitiram aos FPM tanto refletir a respeito de diferentes tipos de apreensões em geometria e como estas se articulam no processo de resolução de uma tarefa, quanto vivenciar situações da prática pedagógica, como o planejamento e a discussão de tarefas matemáticas potenciais para o ensino de geometria.

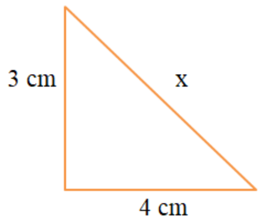
Tarefa do triângulo

No Quadro 2, mostramos a Tarefa do triângulo, proposta pela IF na Ação 1, seguida de duas resoluções apresentadas pelos FPM. A primeira resolução representa a estratégia adotada por 14 FPM, e a segunda foi a única resolução diferente das demais.

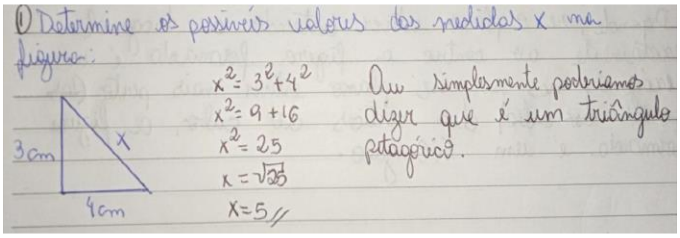
Quadro 2 - Tarefa do triângulo

Resolva as questões a seguir e apresente suas justificativas (resoluções)

01) Determine os possíveis valores das medidas x na figura a seguir.

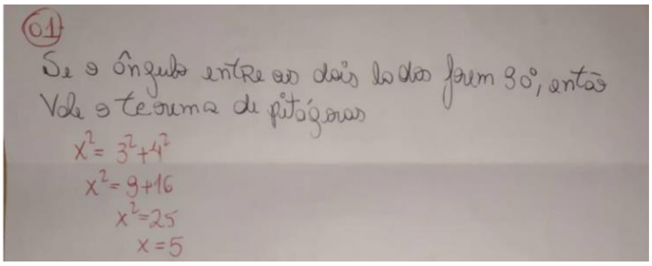


1.ª resolução



Resolvida por FPM1 e FPM10

2.ª resolução



Resolvida por FPM4

Fonte: Dados da investigação

Na Ação 3, ao discutir as resoluções da Tarefa, a IF questionou os FPM sobre o enunciado do problema.

IF: *Que estratégias vocês utilizaram para resolver a questão 1?*

FPM1: *A questão 1 era simples, bastou aplicar o teorema de Pitágoras para determinar o valor de x.*

FPM2: *Nem precisava resolver, poderíamos lembrar-nos do triângulo pitagórico 3,4,5.*

IF: *Há diferença nas resoluções apresentadas?*

FPM3: *Sim, a segunda coloca como condição que o triângulo é retângulo.*

IF: *FPM4, por que você sentiu a necessidade de colocar essa condição em sua resolução?*

FPM4: *Pois nem no enunciado e nem na figura há afirmação que o* *triângulo é retângulo, então resolvemos a questão pressupondo que fosse um triângulo retângulo. Como a colega citou, no caso temos um triângulo cujos catetos medem 3 e 4 e a hipotenusa mede 5, assim pressupomos que podemos aplicar o teorema de Pitágoras.*

IF: *Mas a medida de x só pode ser 5?*

FPM4: *Não, mas como temos lados igual a 3 e 4, como a colega citou, já supomos que a medida de x é igual 5 e assim o ângulo entre os catetos é de 90º.*

IF: *Vocês acham importante essa condição que o FPM4 estabeleceu em sua resolução?*

FPM3: *Sim, porque não dá para ter certeza, só olhando para a figura. Não tem o símbolo que indica que ângulo é de 90º.*

PF: *Olhando somente pela aparência da figura realmente nos convencemos que o triângulo é retângulo, mas na resolução FPM4 ele coloca uma condição.*

IF: *Em relação ao enunciado da questão, o que é possível observar? Tentem olhar somente para o enunciado, esqueçam a figura.*

FPM1: *Pede os possíveis valores e não o possível valor.*

IF: *Vocês consideraram isso ao resolver? O que chamou mais atenção no momento da resolução da questão?*

FPM5: *Batemos o olho na figura e foi automático pensar no teorema de Pitágoras, nem nos atentamos ao enunciado.*

FPM3: *Eu confesso que até reparei nesta questão do enunciado, mas acabei não levando em consideração, pois achei muito difícil pensar em valores que não considerassem esse triângulo sem ser retângulo.*

FPM4: *Eu já pensei logo de cara em ser o triângulo retângulo, mas depois cogitei a ideia de ser outro ângulo diferente de 90º, então teria que usar lei dos senos ou dos cossenos e daria muito trabalho.*

PF: *O que essa expressão “os possíveis valores” indica para esse problema?*

FPM5: *Que pode ter mais de um resultado correto.*

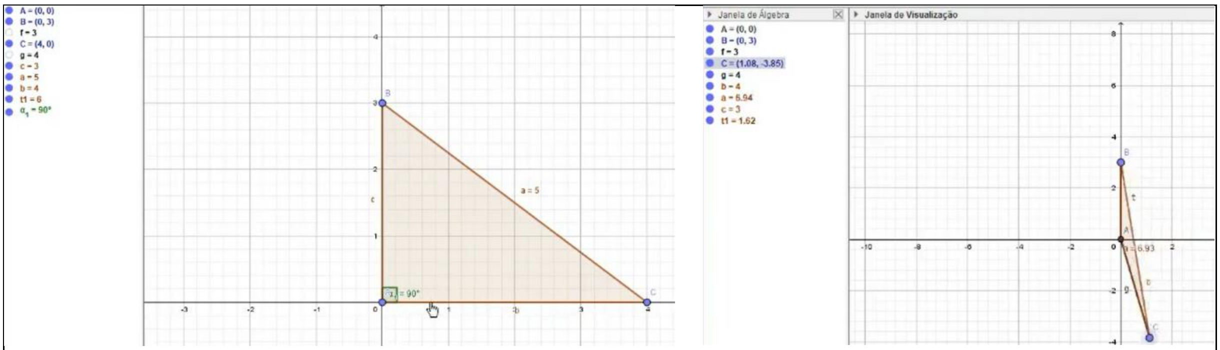
FPM2: *Que não precisamos ter um valor exato. Pode ser aproximado.*

Com base na 1.ª resolução e no diálogo (“*Batemos o olho na figura e foi automático pensar no teorema de Pitágoras, nem nos atentamos ao enunciado*”), podemos observar que grande parte dos FPM demonstrou ter “identificado”, de forma imediata e automática, que a figura representa um triângulo retângulo, o que nos indica a mobilização da apreensão perceptiva. Na sequência, por meio de uma apreensão discursiva, a identificação dos elementos da figura os conduziu a aplicar o Teorema de Pitágoras.

Já com a 2.ª resolução e com o diálogo, percebemos que o FPM4 levou em conta uma condição (“*Pois nem no enunciado e nem na figura há afirmação que o triângulo é retângulo, então resolvemos a questão pressupondo que fosse um triângulo retângulo*” *FPM4*) que, se verdadeira, permitiria a aplicação do Teorema de Pitágoras. Com isso, durante a discussão, alguns dos FPM consideraram que a figura representada na Tarefa, não necessariamente, representaria um triângulo retângulo e que, para resolver o problema, isso deveria ser atendido.

Tanto por meio das resoluções como das discussões, provenientes desta Tarefa, inferimos que a apreensão perceptiva foi enganosa e sobrepôs a apreensão discursiva. Duval (2012) destaca que uma figura desenhada em um contexto de uma situação matemática é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva, e outra que seria a interpretação discursiva de elementos da figura. Moretti e Brandt (2015) apontam que, nessa situação, a posição do triângulo induz os estudantes, pela apreensão perceptiva da figura, à aplicação do Teorema de Pitágoras. Nesse sentido, *a posição prototípica do triângulo* sugere fortemente um ângulo reto e, de forma automática, a tríade pitagórica 3, 4 e 5 é lembrada por ser conhecida por muitos estudantes, o que leva à desconsideração do enunciado da tarefa “Determine **os possíveis valores** das medidas x na figura”. Assim, apesar de a discussão ter proporcionado aos FPM reflexões acerca das estratégias de resolução da tarefa e, principalmente, dos aspectos que não foram considerados por eles e que são fundamentais para resolução, como o fato de o enunciado solicitar “possíveis valores”, os FPM não manifestaram estratégias que realmente resolvessem o problema proposto. Entretanto, num outro momento, na Ação 3, na discussão de um texto a respeito das apreensões em geometria segundo Duval (1998), o FPM3 relatou ter investigado, com o auxílio do *GeoGebra,* uma possível solução para esta Tarefa. A Figura 1 ilustra a solução apresentada pelo FPM3 à turma.

Figura 1 - Construção de FPM3 no *GeoGebra* – Tarefa do triângulo



(a) (b)

Fonte: Dados da investigação

O FPM3, ao compartilhar sua resolução com a turma, forneceu a seguinte explicação:

> *Primeiro criei dois segmentos de retas de tamanho fixos, 3 e 4, para representar os lados do triângulo. Com isso eu consegui movimentar os pontos B e C, gerando assim ângulos diferentes para $\hat{A}$, variando o tamanho do lado $\overline{BC}$(valor de x). Esse lado varia no intervalo de 1 até 7, mas ele não chega nem no 1 e nem no 7,* ***porque se eu arrastar o ponto C até o ponto (0,-4) ou (0,4) ele deixa de ser um triângulo e se aproxima de uma reta****.*

O FPM3, ao explicar sua resolução, descreveu os passos de sua construção, os quais o conduziram à solução do problema. Essa descrição da ordem, que deve ser seguida para uma construção geométrica, nos permite inferir a mobilização da apreensão sequencial, a qual depende das ferramentas de construção utilizadas, – nesse caso o software –, e de conhecimentos geométricos necessários para construir a figura (DUVAL, 1994): três pontos colineares formam uma reta. Destacamos ainda que FPM3, durante sua construção, ao movimentar os pontos B e C gerando ângulos diferentes e consequentemente, triângulos diferentes, realiza modificações ópticas na figura, a qual consiste em modificar o tamanho ou a inclinação da figura inicial, isto é, ampliar, reduzir ou inclinar e pode conservar a forma inicial ou alterá-la.

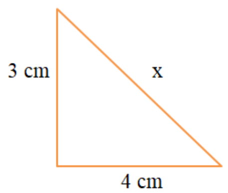
Observamos que a utilização do software*,* por propiciar a exploração dinâmica da figura, pode facilitar o processo de visualização envolvido na resolução do problema e, inclusive, o reconhecimento de conceitos matemáticos, como na justificativa para o intervalo variar entre 1 e 7. Assim, de certo modo, a apreensão operatória atuou como apoio para a mobilização da apreensão discursiva, pois, ao explorar a figura por meio da movimentação dos pontos B e C, a fim de investigar o que aconteceria com a medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo, o FPM3 realizou modificações ópticas na figura, o que caracteriza uma apreensão operatória.

Apesar de o FPM3 chegar à solução do problema, verificamos que, durante as discussões, os FPM não formalizaram o conhecimento do conteúdo de geometria envolvido neste problema, ou seja, não explicitaram uma organização sistemática da linguagem geométrica para descrever as propriedades envolvidas na resolução do problema. Diante disso, a IF apresentou para a turma uma possível solução algébrica para o problema (Quadro 3), sem o uso do recurso *Geogebra,* discutindo-a em seguida.

Quadro 3 - Uma possível resolução da Tarefa do triângulo

Solução:

Para determinar os possíveis valores de x, devemos considerar que, para construir um triângulo, é necessário que a medida de qualquer um dos lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois e maior que o valor absoluto da diferença entre essas medidas (condição de existência).



Logo, temos que:

$x < 3 + 4 \quad e \quad 4 < x + 3$

$x < 7 \qquad\qquad\quad 1 < x$

Dessa forma, os possíveis valores de x pertencem ao intervalo $1 < x < 7$.

Fonte: Elaborado pela autora

Ao discutir esta resolução com os FPM, a IF, sistematizou o conteúdo de geometria, condição de existência de um triângulo. Porém, vale ressaltar que as discussões promovidas acerca da resolução realizada por FPM3 permite também a sistematização de outros conteúdos geométricos.

Tarefa elaborada por FPM5 e FPM7

No Quadro 4, expomos a tarefa elaborada ou adaptada por FPM5 e FPM7, na ação 4, assim como as estratégias de resolução, justificativas e objetivos, descritas em suas propostas de ensino, conforme solicitado pela IF na Ação 4.

Quadro 4 - Tarefa elaborada por FPM5 e FPM7

Apreensão Perceptiva.

1) Separe os objetos em dois grupos e descreva o que os difere. Apresente as características de cada grupo.

Objetivos:

• Classificar objetos, que estejam no cotidiano dos alunos, de acordo com suas características.

• Reconhecer formas geométricas.

• Diferenciar os objetos por suas características visuais.

Justificativa:

• Essa tarefa foi elaborada com o objetivo de os alunos utilizarem a visualização para resolvê-la, apontando as características que consideraram relevantes para a separação dos grupos. Entendemos que, na apreensão perceptiva, a visualização pode ser o único processo para conduzir a resolução.

• Se essa tarefa for adaptada, por exemplo, solicitar que os alunos além de separar os objetos, detalhem suas propriedades. A apreensão discursiva pode ser mobilizada também. Dependendo do objetivo que o professor quer alcançar, ele pode adaptar a tarefa.

Resolução na Apreensão Perceptiva:

Grupo 1

• Bola;

• Laranja;

• Lata de coca cola;

• Xampu;

• Copo.

Grupo 2

• Barra de chocolate;

• Tupperware;

• Sulfite;

• Caixa de sapato;

• Tijolo.

Diferenças dos dois grupos:

No grupo 1, os objetos foram separados, de acordo com a característica de serem corpos arredondados, em que a superfície é arredondada. Já no grupo 2, os objetos são formados por faces planas.

Fonte: Dados da investigação

Os objetivos descritos pela dupla: *diferenciar os objetos por suas características visuais,* e a justificativa fornecida: *a visualização pode ser o único processo para conduzir a resolução*, indicam preocupação dos FPM em propor uma tarefa com potencial para a mobilização da apreensão perceptiva. Destacamos também a coerência entre o que foi solicitado no enunciado da Tarefa e os objetivos pretendidos por meio dela.

A Tarefa também foi analisada e discutida pelos demais colegas, primeiro em pequenos grupos e, na sequência, com a turma toda (Ação 5). Essa dinâmica utilizada pela IF teve a intenção de proporcionar reflexões sobre o potencial das tarefas elaboradas em cada proposta, acerca da mobilização das apreensões. Para tanto, recorreu-se aos estudos teóricos e as discussões, realizadas anteriormente com os FPM a respeito desta temática. Para ilustrar tal situação, temos o episódio a seguir.

IF: *Que tipos de apreensões podem ser mobilizadas, pelo aluno, ao resolver esta tarefa?*

FPM6: *A apreensão perceptiva, pois os alunos por meio da percepção conseguiriam separar os objetos. Mas eu acho que a* [apreensão] *discursiva também, porque eu pensaria em separar os poliedros dos corpos redondos.*

IF: *Mas no enunciado da tarefa está solicitando isso ou é algo que você faria?*

FPM6: *Não professora, o enunciado só pediu para separar.*

IF: *Mas caso a intenção fosse à mobilização da apreensão discursiva, como deveria ser o enunciado?*

FPM2: *Poderia pedir algo mais específico, tipo separar em poliedros e corpos redondos. Penso que a tarefa do jeito que está só pode ser resolvida observando a diferença ou semelhança entre os objetos. Por exemplo, a barra de chocolate é mais parecida com o tijolo do que com a laranja.*

IF: *Quem elaborou a tarefa, concorda que ela também é potencial para mobilizar a apreensão discursiva?*

FPM5: *Sim, foi como justificamos. A tarefa em si deve ser alterada para que a apreensão discursiva seja mobilizada. Poderia solicitar uma classificação entre esses dois grupos, aí os alunos teriam que explorar mais as propriedades matemáticas.*

A discussão em torno da análise da tarefa (Ação 5) desencadeou reflexões acerca da potencialidade da tarefa para a mobilização das apreensões. Notamos que a intencionalidade da dupla, ao elaborar a tarefa, foi mobilizar a apreensão perceptiva. Porém, a FPM6 também reconhece a potencialidade da tarefa para mobilizar a apreensão discursiva, corroborando a ideia de Duval (1999) que as apreensões mobilizadas no desenvolvimento de uma tarefa dependem do sujeito que a realiza. A tarefa é apenas o meio para que isso ocorra.

Os FPM reconheceram e distinguiram as apreensões perceptiva e a discursiva e refletiram quanto ao enunciado da tarefa, com vista ao objetivo pretendido ao propô-la. Tais reflexões são consonantes ao que Cyrino e Jesus (2014) apontam a respeito da atenção que o professor deve ter, ao escolher tarefas adequadas aos seus objetivos. No entanto, destacamos a necessidade de o enunciado da Tarefa ter explicitado que a separação dos objetos em dois grupos deveria ser feita quanto a suas formas, visto que há a possibilidade de um estudante separar os objetos em dois grupos, como os comestíveis e os não comestíveis, por exemplo e, nesse caso, não haveria nenhum tipo de apreensão a explorar, uma vez que não envolveria aspectos da geometria, mas as características do objeto.

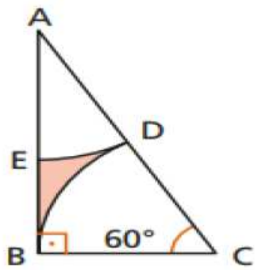
Tarefa elaborada por FPM4 e FPM9

O Quadro 5 mostra outra tarefa, oriunda da ação 4, elaborada pelos FPM4 e FPM9.

Quadro 5 - Tarefa elaborada por FPM4 e FPM9

Tarefa: Área colorida (Apreensão Discursiva e Operatória)

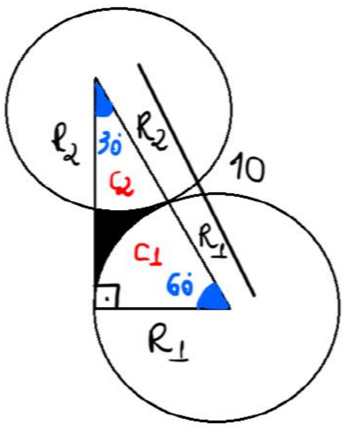
Determine a área sombreada na figura abaixo, sabendo que a hipotenusa do triângulo retângulo ABC mede 10 cm.

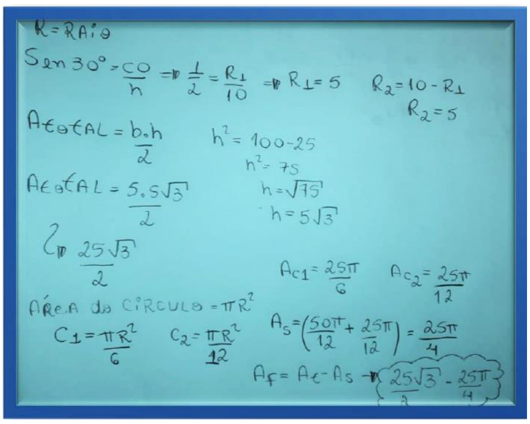


Justificativa

• Nesta tarefa, são feitas modificações figurais em uma figura em busca da modificação heuristicamente relevante, isto é, aquela que será útil para solucionar um problema além da explicação de outras propriedades matemáticas, para além das explicitadas na figura.

Resolução:





Fonte: Dados da investigação

Observamos que a intenção da dupla foi apresentar uma tarefa potencial para a mobilização das apreensões discursiva e operatória. No entanto, apesar de a justificativa e a resolução acenarem para a possibilidade da realização de modificações figurais e para o conhecimento de propriedades matemáticas, que abarcam a resolução do problema, a dupla não fornece uma explicação de como tais apreensões poderiam ser mobilizadas neste processo.

Deste modo, a IF levantou alguns questionamentos, durante a discussão, promovendo o seguinte diálogo:

IF: *Esta tarefa pode ser potencial para a mobilização de quais tipos de apreensões?*

FPM5: *As apreensões perceptiva, discursiva e operatória.*

IF: *De que modo isso pode acontecer?*

FPM5: *A apreensão perceptiva auxilia na percepção e reconhecimento da figura, mas a que mais se utiliza é a operatória e a discursiva porque vai além da perceptiva. É preciso saber algumas propriedades e conceitos para resolver o problema.*

IF: *Nesse caso vocês acham que mobilizando somente a apreensão perceptiva não é possível chegarmos à solução do problema?*

FPM8: *Não, acho que precisa do conhecimento de conteúdos de geometria também.*

IF: *Para a dupla que elaborou a questão, vocês apresentaram uma justificativa, mas gostaria que explicassem como as apreensões podem ser mobilizadas no processo de resolução do problema.*

FPM4: *Nós pensamos bastante na apreensão operatória, por conta das modificações que precisam ser feitas na figura para encontrar a solução, no caso o desenho dos círculos, e a apreensão discursiva porque o aluno tem que ter o conhecimento de alguns conteúdos, como colocamos na resolução.*

Os FPM, envolvidos no diálogo, explicitaram reconhecer as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, as quais poderiam ser mobilizadas pelo sujeito ao realizar a tarefa. A perceptiva por ser aquela imediata e responsável pela *"percepção e reconhecimento da figura"* (FPM5), a discursiva, por ser necessário o conhecimento de conteúdos matemáticos, como exemplo, as relações trigonométricas no triângulo retângulo e áreas de figuras planas, e por fim, a operatória, *"por conta das modificações que precisam ser feitas na figura para encontrar a solução, no caso o desenho dos círculos"* (FPM4). Dessa forma, FPM4 justificou as relações estabelecidas pela dupla, entre os procedimentos adotados no processo de resolução do problema e as apreensões que julgaram ser possíveis de ser mobilizadas. Esse reconhecimento acerca das apreensões é importante para que os FPM possam compreender as conexões que podem ser estabelecidas, entre as apreensões, na resolução de um problema geométrico.

Cumpre observar que apesar da justificava e resolução apresentadas por FPM4 e FPM9 serem coerentes com as apreensões indicadas como passíveis de serem mobilizadas, chamamos a atenção para o enunciado da Tarefa proposta. Notamos que o enunciado não determina que os pontos A e C são centros dos círculos (A, R2) e (C, R1), porém a resolução apresentada pela dupla parte desta premissa.

Contribuições do Trabalho com Tarefas de Geometria para Formação Inicial de Professores de Matemática

O FPM ao elaborar, resolver, discutir tarefas com potencial para mobilizar apreensões geométricas teve a oportunidade de: refletir a respeito de conhecimentos teóricos e práticos, referentes às apreensões; estabelecer conexões entre as apreensões envolvidas no processo de resolução de um problema geométrico; discutir sobre a importância do papel do professor no reconhecimento de potencialidades e limitações de tarefas a serem trabalhadas em sala de aula na Educação Básica; e sistematizar conceitos geométricos.

Identificamos, por meio das resoluções e das discussões oriundas das tarefas apresentadas, que os FPM valeram-se das quatro apreensões apresentadas por Duval (1994): perceptiva, discursiva, sequencial e operatória. As tarefas propostas pela IF viabilizaram aos FPM estabelecer conexões, entre duas ou mais apreensões em sua resolução, ratificando a literatura, no sentido de que as apreensões mobilizadas na resolução de um problema em geometria não aparecem de forma isolada. As quatro apreensões podem ser mobilizadas, algumas em maior ou menor grau, dependendo do problema (JAHN; BONGIOVANNI, 2019; MORETTI; BRANDT, 2015).

O engajamento na Tarefa do triângulo, sugerida pela IF, fez com que a maioria dos FPM estabelecesse conexões entre a figura fornecida, nesse caso uma figura prototípica, e o Teorema de Pitágoras para fornecer a ideia matemática por trás do problema, evocada pelas apreensões perceptiva e discursiva. Corroborando a ideia de Duval (1998), de que é fundamental ver a figura, a partir do que é dito e não das formas que se destacam ou das propriedades evidenciadas, destacamos a importância de que, na formação inicial de professores de matemática, sejam propostas tarefas que suscitem reflexões sobre a influência que a posição de uma figura pode exercer no processo de resolução de uma tarefa, bem como a relevância de serem trabalhados problemas que explorem situações diferentes de exemplos prototípicos (BRUNHEIRA; PONTE, 2019).

Por outro lado, o FPM3, ao resolver a tarefa com o auxílio do *GeoGebra,* se envolveu num processo de investigação e generalização da situação geométrica proposta, por meio de explorações heurísticas. Este processo, denominado por Duval (1998) de *visualização*, é resultante da conexão estabelecida entre as apreensões perceptiva e operatória (DUVAL, 1998). E ao realizar *construções geométricas* com o auxílio do *GeoGebra* para solucionar a tarefa, estabeleceu conexões entre as apreensões perceptiva, discursiva e sequencial, ao realizar suas construções e, ainda, conexões entre as apreensões operatória e discursiva para obter uma possível solução para o problema investigado, ou seja, chegar a um possível intervalo correspondente aos possíveis valores de x.

Duval (1994) afirma que, apesar de a apreensão operatória exercer a função de exploração heurística de uma figura numa abordagem geométrica, para mostrar a "ideia" da solução do problema, ainda é a apreensão que apresenta maior dificuldade de compreensão por parte dos estudantes. O autor destaca que a apreensão discursiva, associada a tarefas de demonstração, e a apreensão sequencial, associada a tarefas focadas apenas nos passos de uma construção, representam pouco valor heurístico, resultando na pouca transferência para desenvolver a apreensão operatória. Duval (1998) aponta também que as tarefas matemáticas propostas em sala de aula são, em sua maioria, concebidas como se as percepções perceptivas, discursivas e operativas fossem inseparáveis, o que pode resultar a inibição da apreensão operatória e a falta de interação entre apreensão perceptual e discursiva, por parte dos estudantes.

Ainda sobre a resolução apresentada pelo FPM3, Dantas (2022, p. 14) salienta que tarefas que permitem uma construção de um caso particular, de modo a obter uma generalização, as quais instigam os estudantes a resolverem um problema, mesmo em momentos extraclasse com o auxílio de múltiplos recursos, podem “favorecer a construção de conhecimentos matemáticos e o desenvolvimento de repertórios na resolução de problemas”.

Acenamos também para a importância de ações formativas, como a promovida pela IF, ao apresentar, discutir e sistematizar o conceito de condição de existência de um triângulo. As discussões ocorridas em torno da Tarefa do triângulo desencadearam reflexões sobre o conteúdo geométrico, e o modo como o raciocínio dedutivo é organizado. Duval (1998) indica ser preciso que os estudantes compreendam a organização dedutiva do raciocínio, pois, mesmo que essa organização não seja visível em enunciados em linguagem natural, é a partir dela que se pode tomar consciência dessa organização específica do raciocínio.

Cumpre, portanto, propor situações geométricas, como a Tarefa do triângulo, que favoreçam a descoberta da solução do problema, sem a necessidade de o professor indicar pistas ou sugestões, mas sim, possibilitar o desenvolvimento de um trabalho focado em apreensões operatórias e na visualização das figuras em jogo, podendo este ser implementado com o apoio de softwares como o *Geogebra* (JAHN; BONGIOVANNI, 2019).

Ambientes de Geometria Dinâmica, como o *GeoGebra,* podem auxiliar fortemente na resolução de problemas em geometria (MORAN, 2015; SALAZAR; ALMOULOUD, 2015) e no desenvolvimento das apreensões perceptiva, discursiva e, sobretudo, operatória, permitindo aos estudantes a exploração heurística de uma figura de forma experimental e exploratória, viabilizando sua visualização em diversas posições, bem como incrementá-la com diferentes elementos (JAHN; BONGIOVANNI, 2019).

No que tange à análise e às discussões a respeito das Tarefas elaboradas pelos FPM (Quadro 4 e 5), evidenciamos, por meio de suas justificativas, tanto em seus registros escritos como em excertos de suas falas, que os FPM se mostraram capazes de selecionar tarefas, tendo em conta a mobilização de diferentes tipos de apreensões. As estratégias de resoluções, objetivos e justificativas apresentadas, na maior parte, foram coerentes às escolhas realizadas, o que pode revelar seu reconhecimento do potencial de tarefas para o ensino de geometria, com vistas à mobilização das apreensões. Concordamos com a ideia de Gafanhoto e Canavarro (2011) sobre a importância do papel do professor na seleção/elaboração/adaptação de tarefas, de modo que, ao propô-las, possam assegurar aos estudantes ricas experiências matemáticas.

As ações formativas, como elaboração e discussão de tarefas para o ensino da geometria, são cruciais na formação inicial de professores de matemática, visto que, ao planejar tarefas de geometria, eles podem fornecer indícios sobre seu conhecimento de conteúdo de geometria e sua capacidade de fazer conexões geométricas, usando ideias de geometria (RAMATLAPANA; BERGER, 2018). Uma vez que o trabalho com tarefas matemáticas representa oportunidades de aprendizagem para os estudantes, torna-se primordial que o professor domine como trabalhar com elas (STEIN; SMITH, 1998).

Em suma, a dinâmica estabelecida pela IF permitiu aos FPM analisarem de forma minuciosa suas propostas e resoluções de tarefas, em relação tanto ao reconhecimento das apreensões em geometria e como estas podem ser mobilizadas na resolução de um problema geométrico, quanto ao planejamento e à planificação de tarefas para o ensino de geometria.

Considerações Finais

As resoluções das tarefas propostas pela IF evidenciaram que, na maioria dos casos, a apreensão perceptiva sobrepôs à discursiva, mesmo se tratando do trabalho com FPM; e que a apreensão operatória atuou como uma facilitadora por permitir a exploração e modificações da figura na busca de soluções para o problema, favorecendo a discussão de conceitos geométricos.

O uso do *GeoGebra,* apesar de não estar previsto pelas formadoras, tornou-se um instrumento fundamental para promover a visualização das soluções dos problemas propostos, possibilitando à turma confrontar as ideias discutidas e sistematizadas dos conceitos geométricos envolvidos nos problemas e, ainda, favorecer o desenvolvimento da autonomia dos FPM. O trabalho com tarefas de geometria, atreladas ao uso de softwares de Geometria Dinâmica, como o *GeoGebra*, pode contribuir para desenvolver os processos cognitivos que envolvem a aprendizagem em geometria, segundo Duval (1998).

Discutir as resoluções das tarefas configurou-se como um espaço oportuno, para que os FPM pudessem compartilhar e discutir suas estratégias de resoluções, o que desencadeou reflexões das apreensões e da sistematização de conteúdos relacionados a conceitos geométricos, que possivelmente não ocorreriam, caso as resoluções não fossem debatidas de forma conjunta. Portanto, advogamos que ambientes como este, de uma disciplina de Ensino de Geometria, voltada para a formação inicial do professor, podem favorecer aos FPM a aprendizagem de geometria, ao propor e resolver tarefas e ao discutir as resoluções uns dos outros.

Ao elaborarem e discutirem a resolução de tarefas, os FPM tiveram a oportunidade de: perceber a importância da seleção/elaboração/adaptação de tarefas para que seus objetivos, quanto aos processos de ensino e de aprendizagem da geometria, fossem atingidos; identificar que uma tarefa potencialmente desafiadora pode mobilizar diferentes conteúdos; reconhecer a necessidade de priorizar tarefas nas quais os estudantes possam estabelecer conexões com significados ou com ideias e conceitos geométricos; e perceber o papel do professor na exploração de tarefas e como suas ações podem influenciar no processo de ensino e, por conseguinte, na aprendizagem dos estudantes (CYRINO; JESUS, 2014).

Sendo assim, concluímos que espaços formativos, como o promovido nesta disciplina, podem contribuir para que o FPM reflita sobre os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem em geometria, tendo em conta as conexões estabelecidas entre as diferentes apreensões durante o processo de resolução de uma tarefa de geometria, e sobre a relevância do papel do professor para promover processos de ensino e de aprendizagem no trabalho com tarefas de geometria. Indubitavelmente, tais reflexões podem favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico dos FPM, reverberando na sua própria prática profissional em experiências futuras.

REFERÊNCIAS

ALEX, J; MAMMEN, K. J. Students’ understanding of geometry terminology through the lens of Van Hiele theory. **Pythagoras**, *[S. l.]*, v. 39, n. 1, p. 1-8, 2018. DOI: 10.4102/pythagoras.v39i1.376.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T.; NOVAK, F. I. L. O desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em geometria segundo Raymond Duval: uma articulação com o ambiente dinâmico GeoGebra. **Olhar de Professor**, *[S. l.]*, v. 21, n. 1, p. 98-115, 2018. DOI: 10.5212/olharprofr.v.21i1.0008.

BRUNHEIRA, L; PONTE, J. P. Da. From the classification of quadrilaterals to the classification of prisms: An experiment with prospective teachers. **Journal of Mathematical Behavior**, *[S. l.]*, v. 53, p. 65-80, 2019. DOI: 10.1016/j.jmathb.2018.06.004.

CYRINO, M. C. C. T; JESUS, C. C. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência & Educação (Bauru)**, *[S. l.]*, v. 20, n. 3, p. 751-764, 2014. DOI: 10.1590/1516-73132014000300015.

DANTAS, S. C. A Geometria Escolar e os pensamentos matemático e computacional. *In*: BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira; MORAN, Mariana (org.). **Geometria**: práticas e aprendizagens. São Paulo: Livraria da Física, 2022. p. 19-51.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères**, n.17, p.121-138, 1994.

DUVAL, R. Geometry from a Cognitive Point of View. *In*: MAMMANA, C.; VILLANI, (orgs.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century**: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer, p. 37-52, 1998.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *In*: HITT, F.; SANTOS, M. (Ed.). **Proceeding of the 21st Annual Meeting of the 228 North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Mexico, p. 3-26, oct., 1999.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *In*: **Annales de didactique et de sciences cognitives**. 2005. p. 5-53.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.

ERDOGAN, F. Prospective middle school mathematics teachers' problem posing abilities in context of Van Hiele Levels of Geometric Thinking. **International Online Journal of Educational Sciences**, *[S. l.]*, v. 12, n. 2, p. 132-152, 2020. DOI: 10.15345/iojes.2020.02.009.

GAFANHOTO, A.; CANAVARRO, A. P. Utilização e conciliação de diversas representações das funções em sala de aula. *In*: NUNES, C. *et al.* (eds.). *In*: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 22. **Atas** [...]. Lisboa: APM, 2011. p. 1-15.

JAHN, A. P.; BONGIOVANNI, V. Apreensão Operatória de Figuras em Situações Geométricas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, *[S. l.]*,

v. 12, n. 3, p. 245-257, 2019. DOI: 10.17921/2176-5634.2019v12n3p245-257.

JESUS, C. C.; CYRINO, M. C. C. T. Formação de professores que ensinam matemática: um repensar da prática pedagógica por meio da análise de tarefas matemáticas. *In*: REUNIÃO NACIONAL DA ANPED, 37, 2015, **Anais** [...]. [s.l: s.n.] p. 1-14.

JESUS, C. C; CYRINO, M. C. C. T; OLIVEIRA, H. Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, *[S. l.]*, v. 20, n. 2, p. 21-46, 2018. DOI: 10.23925/1983-3156.2018v20i2p21-46.

LEE, M. Y.; LEE, J. E. Spotlight on Area Models: Pre-service Teachers' Ability to Link Fractions and Geometric Measurement. **International Journal of Science and Mathematics Education**, *[S. l.]*, v. 19, n. 5, p. 1079-1102, 2020. DOI: 10.1007/s10763-020-10098-2.

LIVY, S.; DOWNTON, A. Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. **Journal of Mathematical Behavior**, *[S. l.]*, v. 51, p. 150-160, 2018. DOI: 10.1016/j.jmathb.2017.11.004.

MORAN, M. **As apreensões em Geometria:** um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais. 2015. 248f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

MORETTI, M. T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Acta Scientiae**, *[S. l.]*, v. 15, n. 2, p. 289-303, 2013.

MORETTI, M. T; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação, Matemática, Pesquisa**, *[S. l.]*, v. 17, n. 3, p. 597-616, 2015.

RAMATLAPANA, K.; BERGER, M. Prospective Mathematics Teachers' Perceptual and Discursive Apprehensions when Making Geometric Connections. **African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education**, *[S. l.]*, v. 22, n. 2, p. 162—173, 2018. DOI: 10.1080/18117295.2018.1466495.

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. Tarefas matemáticas no ensino da álgebra. *In:* ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais EIEM** Sesimbra, 2014. p. 353-367.

SALAZAR, J. V. F.; ALMOULOUD, S. A. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. **Educação Matemática Pesquisa**, *[S. l.]*, v. 17, n. 5, p. 919-941, 2015.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, *[S. l.]*, v. 3, n. 4, p. 268-275, 1998.

CAPÍTULO/ARTIGO 3

NOTICING PROFISSIONAL DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE O PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Resumo: O objetivo do presente artigo é discutir o *noticing* profissional a respeito de aspectos do pensamento geométrico, manifestados por futuros professores de matemática (FPM) após o desenvolvimento de ações formativas promovidas em uma disciplina de Ensino de Geometria. A natureza do estudo é qualitativa, de cunho interpretativo, e contou com a participação de 24 FPM de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná - Brasil. Os resultados revelam as capacidades do *noticing* profissional dos FPM de aspectos do pensamento geométrico, nomeadamente, *reconhecer, interpretar e decidir,* associadas: à compreensão de pensamento geométrico e suas implicações para o processo de ensino e de aprendizagem e às potencialidades de tarefas para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Deste estudo emergem a relevância da promoção de ações formativas que oportunizem ao FPM constituir conhecimentos geométricos necessários para a futura prática profissional de professores de matemática e desenvolver suas capacidades do *noticing* profissional em relação ao pensamento geométrico do aluno, em especial, a capacidade de *decidir.*

Palavras-chave: *Noticing* profissional. Formação inicial de professores de matemática. Pensamento geométrico.

INTRODUÇÃO

Pesquisas apontam a necessidade de que, na formação inicial de professores de matemática, sejam promovidas ações que oportunizem ao futuro professor discutir e refletir a respeito do pensamento geométrico (ALEX; MAMMEN, 2018; BRUNHEIRA; PONTE, 2019; ERDOGAN, 2020; LIVY; DOWNTON, 2018; RAMATAPLANA; BERGER, 2018; VASCONCELOS *et al*., 2021). Desse modo, contextos formativos que proporcionem ao FPM engajar-se ativamente na constituição de conhecimentos geométricos, vivenciar situações nas quais, além de desenvolver o seu pensamento geométrico, possa refletir sobre abordagens pedagógicas que apoiem o desenvolvimento do pensamento geométrico de seus alunos na Educação Básica (BRUNHEIRA; PONTE, 2019; LIVY; DOWNTON, 2018), são férteis para desenvolver sua autonomia e, sobretudo, sua percepção acerca de aspectos do pensamento geométrico inerentes à prática em sala de aula.

Estudos, como os de van Hiele[46] (1984), apontam que a percepção do professor sobre o nível de pensamento em que seu aluno se encontra é fundamental para que ele possa fornecer instruções necessárias, de modo a apoiá-lo no processo de desenvolvimento do pensamento geométrico. Essa percepção relaciona-se com o seu *noticing* (percepção) profissional do pensamento geométrico do aluno.

Há, na literatura, diversas caracterizações de *noticing* profissional. Neste estudo, esse conceito representa o que o professor observa e como compreende situações importantes em sala de aula, de modo a estabelecer conexões entre essas situações e os princípios mais amplos de ensino e aprendizagem (VAN ES; SHERIN, 2002), e inclui ainda sua capacidade em tomar decisões sobre ações de ensino (JACOBS; LAMB; PHILIPP, 2010; MASON, 2002).

O *noticing* profissional pode influenciar significativamente as práticas do professor e, em consequência, ter um efeito positivo nas aprendizagens dos alunos (CABRAL; MENDES; OLIVEIRA, 2022). König *et al.* (2022) afirmam que o *noticing* profissional do professor se desenvolve em diferentes estágios por meio da cognição e da reflexão relativas às práticas e às experiências de ensino. Assim, os programas de formação inicial devem oferecer oportunidades para que os FPM entendam o que e como os alunos pensam em uma situação matemática em ambientes educacionais estruturados (MASON, 2002; STOCKERO *et al*., 2017).

Apesar de um corpo considerável de pesquisas se concentrar em diversos elementos do *noticing* profissional de FPM em relação ao pensamento matemático do aluno, poucas têm levado em conta as características específicas de domínios matemáticos (RODRIGUES; CYRINO; OLIVEIRA, 2019; TEKIN-SITRAVA; KAISER; IŞIKSAL-BOSTAN, 2022). Em particular, o pensamento geométrico tem sido pouco explorado no contexto do *noticing* profissional de futuros professores de matemática (CYBULSKI; MAGNONI-VIEIRA; CYRINO, no prelo). Uma vez que o *noticing* profissional não acontece naturalmente, cumpre efetivá-lo de forma intencional, para que ele faça parte do desenvolvimento profissional do professor (MASON, 2002).

[46]Pierre van Hiele foi um renomado pesquisador do ensino de geometria que, juntamente com sua esposa, Dina van Hiele-Geldof, investigou o desenvolvimento do pensamento geométrico, cujos primeiros resultados começaram a ser publicados em 1959. Todavia, como Dina morreu logo após a publicação de seus trabalhos iniciais, foi Pierre quem reformulou e desenvolveu a teoria.

Diante da necessidade de ampliar o quadro de pesquisas acerca deste tema, este estudo busca discutir o *noticing* profissional a respeito de aspectos do pensamento geométrico, manifestados por futuros professores de matemática após o desenvolvimento de ações formativas promovidas em uma disciplina de Ensino de Geometria. Neste sentido, procuramos responder às seguintes questões de investigação: *que aspectos do pensamento geométrico são reconhecidos e interpretados pelos FPM nas ações da disciplina? Que elementos os FPM consideram relevantes nas ações formativas para à promoção do pensamento geométrico?*

A seguir, apresentaremos aportes teóricos acerca do pensamento geométrico e suas implicações na formação inicial de professores de matemática; a perspectiva de *noticing* profissional de professores de matemática assumida nesse artigo; e, na sequência, o contexto e os encaminhamentos metodológicos da pesquisa, as análises, a discussão e as considerações finais da presente investigação.

Pensamento Geométrico e a Formação Inicial de Professores de Matemática

Pesquisas no âmbito da Educação Matemática têm se dedicado a investigar o pensamento geométrico, em especial, aspectos relacionados à sua natureza e ao seu desenvolvimento (CLEMENTS; BATTISTA, 1992; COSTA, 2020; DUVAL, 1998; FUJITA, 2012; GARRIDO; LEYVA, 2005; GRAVINA, 2001; LEIVAS, 2009; PAIS, 1996; PARZYSZ, 1988; VAN DE WALLE, 2009; VAN HIELE, 1984). Alguns pesquisadores apontam a falta de consenso do que seja pensamento geométrico (COSTA, 2020; CYBULSKI; CYRINO, 2022; PAIVA, 2021). Assim, a fim de compreendermos elementos essenciais do pensamento geométrico, discutiremos nesta seção algumas caracterizações ou definições de pensamento geométrico constantes na literatura.

Costa (2020), na busca de construir uma definição de pensamento geométrico, apoia-se nos estudos de Gravina (2001) e Leivas (2009). O autor afirma que definir o pensamento geométrico é uma atividade bastante complexa, visto que, apesar de os autores investigados, por exemplo, concordarem que ele é a capacidade mental de produzir conhecimentos geométricos, não há consenso desses autores quando se trata da maneira como esse pensamento é produzido. Por fim, Costa (2020, p.92) define o pensamento geométrico como a

> [...] capacidade mental de produzir conhecimentos em Geometria; de mobilizar, de forma coerente, os instrumentos geométricos na resolução de problemas; é a capacidade de entender a complexidade dos fenômenos e de realizar inferência sobre eles; de reconhecer e verificar a relevância da Geometria como um instrumento para compreensão do mundo físico e como um modelo em Matemática para entendimento do mundo teórico.

Gravina (2001) sugere que o pensamento geométrico tem natureza evolutiva, iniciando-se com o pensamento empírico e culminando no pensamento hipotético-dedutivo. A autora defende que sua construção ocorre, inicialmente, por conta das impressões e das experiências abstraídas do mundo em que vivemos, podendo ser mobilizadas a partir das primeiras medições e manipulações empíricas, evoluindo para a mobilização de conhecimentos em que a geometria é um modelo teórico, organizado por via de axiomas, teoremas e demonstrações. Segundo Gravina (2001), um dos pontos determinantes na constituição do pensamento geométrico é compreender a diferença entre validações empíricas e argumentações hipotético-dedutivas, assim como a necessidade delas.

De acordo com Garrido e Leyva (2005), o pensamento geométrico representa uma forma de pensar em situações que requerem conhecimento, habilidades e capacidades geométricas. Os autores defendem ainda que, para desenvolver o pensamento geométrico, cumpre articular três capacidades: visão espacial, representação espacial e imaginação espacial, todas intimamente associadas entre si. Segundo os autores, a capacidade da imaginação espacial é fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico, visto que permite analisar o plano e suas relações com o espaço por meio de seus conceitos e leis, de modo a estabelecer a comunicação de uma ideia matemática. Assim como Costa (2020) e Gravina (2001), também sugerem que o desenvolvimento do pensamento geométrico pode se iniciar desde as primeiras explorações da criança com objetos do mundo físico, indo até as sistematizações e as generalizações de conteúdos geométricos durante sua vida escolar. Consideram, até mesmo, a concepção de níveis[47] para desenvolver o pensamento geométrico, defendendo-a como uma

[47]Garrido e Leyva (2005) sugerem um modelo constituído por três níveis: nível 1- *materialização*, o aluno requer percepção sensorial direta de objetos material ou materializado que lhe permite

premissa fundamental no processo de ensino e aprendizagem da geometria, uma vez que "pode permitir ao professor um diagnóstico real do domínio conceitos e procedimentos geométricos" (GARRIDO; LEYVA, 2005, tradução nossa, p. 4).

Leivas (2009) defende que a constituição do pensamento geométrico deriva da imaginação, da intuição e da visualização. A imaginação, segundo o autor, está diretamente ligada à abstração, assim como à intuição. A imaginação, para ele, é como uma forma de concepção mental de um conceito matemático, podendo ser expressa por um símbolo ou por um esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação deles, com a finalidade de comunicar determinado conceito para o próprio indivíduo ou para outros. Já a intuição seria como "um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto" (LEIVAS, 2009, p.21), e a visualização, como "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos" (LEIVAS, 2009, p. 22). De acordo com Leivas (2009) essa tríade, fundamental para construir o pensamento geométrico, pode ser desenvolvida na formação inicial do professor "como uma das possibilidades para a melhoria da qualidade do ensino na educação básica, particularmente na busca de melhorar o *desempenho* do professor que atua naquele nível educacional" (LEIVAS, 2009, p. 155, grifo do autor).

No entanto, algumas pesquisas apontam a pouca ênfase do pensamento geométrico em estudos no contexto da formação inicial de professores que ensinam matemática (CARVALHO; FERREIRA, 2015; CYBULSKI; CYRINO, 2022; CYBULSKI; MAGNONI-VIEIRA; CYRINO, no prelo; PAIVA, 2021). Cybulski, Magnoni-Vieira e Cyrino (no prelo, p. 11) indicam que investigações acerca desta temática podem caracterizar-se como "uma vertente promissora para compreender o papel da geometria na formação; para identificar que conhecimentos de geometria

---

memorizar características essenciais, significados e relações; nível 2 – *reconhecimento*, o aluno observa e, por meio de perguntas, ativa sua memória, estabelece significados e relações entre significados; e o nível 3 –*elaboração*, o aluno raciocina em situações de relativa complexidade e, em alguns casos, resolve problemas.

são necessários ao (futuro) professor; bem como para analisar o ensino de geometria na Educação Básica".

Há uma predominância de estudos envolvendo as teorias de van Hiele (1984) e Raymond Duval (1994, 1998) (BARRETO *et al.,* 2021; CARVALHO; FERREIRA, 2015; CYBULSKI; CYRINO, 2022) nas pesquisas voltadas ao pensamento geométrico, no âmbito da formação inicial de professores que ensinam matemática.

A teoria de van Hiele propõe um modelo teórico para desenvolver o pensamento geométrico do estudante. Nesse modelo, a aprendizagem de geometria ocorre por meio da evolução do conhecimento do aluno, perpassando por cinco níveis[48] hierárquicos de pensamento, nomeadamente: visualização, análise, dedução informal, dedução e rigor. Cada um desses níveis descreve os processos de pensamento utilizados em contextos geométricos (VAN DE WALLE, 2009) e são sustentados de acordo com os seguintes aspectos: há níveis de compreensão, cada um com suas próprias características, e os níveis anteriores devem ser totalmente compreendidos para se atingir um próximo (VAN HIELE, 1984).

Por sua vez, Duval (1994) propõe uma teoria para analisar e desenvolver processos cognitivos que envolvem a aprendizagem em geometria, e as apreensões cognitivas[49] presentes na resolução de problemas geométricos, distinguindo-as em quatro tipos: apreensão perceptiva, apreensão operatória, apreensão discursiva e apreensão sequencial. Para o autor, aprender geometria abrange a sinergia entre três processos cognitivos: *visualização*, *construção* e *raciocínio*. A *visualização* – uma atividade cognitiva intrinsicamente semiótica[50],

[48]No nível da *visualização*, as figuras são julgadas por sua aparência, e o seu reconhecimento passa a ser feito pela distinção das formas e não por suas propriedades; no nível da *análise*, as figuras são reconhecidas por suas propriedades, contudo, tais propriedades ainda não estão ordenadas, de modo que, por exemplo, um quadrado não é necessariamente identificado como sendo um retângulo; no nível da *dedução informal*, as propriedades das formas, podem ser ordenadas e deduzidas umas das outras, apesar de o significado intrínseco da dedução ainda não ser compreendido pelos estudantes; no nível da *dedução,* o pensamento está centrado no significado da dedução, sendo possível trabalhar com sentenças abstratas sobre as propriedades geométricas; e no nível do rigor, as figuras são definidas apenas por símbolos ligados por relações, o objeto de pensamento está centrado nos sistemas axiomáticos dedutivos (VAN HIELE, 1984).

[49]Atividades cognitivas responsáveis pela compreensão das representações geométricas, ou seja, são as interpretações autônomas realizadas pelo sujeito na interação com tais representações (MORAN, 2015).

[50]As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem intervenções próprias de signos e de funcionamento (DUVAL, 2012).

segundo Duval (1998) – é composta pela *apreensão perceptiva* e *operatória.* A *construção* é composta pela *apreensão sequencial* e abarca construções de configurações geométricas por meio de ferramentas, que podem funcionar como um modelo para representar objetos matemáticos (DUVAL, 1998). Por fim, o *raciocínio,* composto pela *apreensão discursiva,* é o processo relacionado às atividades discursivas para extensão do conhecimento, como provas e explicações (DUVAL, 1998), incluindo a construção de argumentos, conjecturas e justificativas, de modo a criar conexões para o processamento de informações (RAMATLAPNA; BERGER, 2018).

Tais estudos foram utilizados como lente teórica de análise nesta investigação, na busca de identificarmos aspectos centrais do pensamento geométrico, reconhecidos e interpretados pelos FPM.

O *Noticing* Profissional do Professor a Respeito do Pensamento Matemático dos Alunos

Diversos estudos têm procurado compreender o *noticing* profissional de professores e futuros professores sobre o pensamento matemático do aluno, de modo a fornecer evidências sobre como eles reconhecem e interpretam situações específicas, envolvendo o processo de ensino e aprendizagem de matemática, e que decisões tomam nesse contexto (CALLEJO; ZAPATERA, 2017; JACOBS; LAMB; PHILIPP, 2010; SHERIN; VAN ES, 2009).

Embora a caracterização de *noticing* profissional varie de estudo para estudo, parece haver um consenso de que esse conceito abrange dois elementos essenciais: atender a situações específicas de sala de aula, sendo necessário prestar atenção a algumas e excluir outras; e dar sentido a estes eventos interpretando os episódios e caracterizando-os em termos do processo de ensino e aprendizagem (SHERIN; JACOBS, 2011).

Jacobs, Lamb e Philipp (2010) conceituam o *noticing* profissional do professor do pensamento matemático do aluno como um conjunto de três capacidades inter-relacionadas:

i) *Reconhecer* - prestar a atenção nas estratégias utilizadas pelos alunos;

ii) *Interpretar* - buscar entender as estratégias utilizadas pelos alunos; e

iii) *Decidir* – escolher a melhor maneira de responder, com base na compreensão dos alunos.

Portanto, a primeira capacidade envolve *reconhecer* os aspectos matemáticos nas estratégias adotadas pelos alunos; a segunda consiste em *interpretar* a compreensão matemática do aluno de modo coerente às estratégias utilizadas por ele; e a terceira se refere à mobilização feita pelo professor para *decidir,* com base nas compreensões dos alunos, qual seria a resposta mais adequada naquela ocasião, ou seja, optar pelas potenciais respostas que se vinculem a outras capacidades de reconhecer e interpretar o pensamento matemático dos alunos (JACOBS; LAMB; PHILIPP, 2010).

Alguns pesquisadores têm se dedicado a investigar como os professores atendem a diversas situações envolvendo o processo de ensino e aprendizagem e tomam decisões no contexto da sua prática profissional sobre domínios matemáticos específicos (JACOB; LAMB; PHILIPP, 2010; VAN ES; SHERIN, 2002; 2021). Entre eles, a álgebra e o pensamento algébrico, em particular (CALLEJO; ZAPATERA, 2017; LLINARES, 2019; RODRIGUES; CYRINO; OLIVEIRA, 2019), raciocínio aritmético inicial (JACOBS; LAMB; PHILIPP, 2010), raciocínio proporcional (FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2013), derivativo (SÁNCHEZ-MATAMOROS; FERNÁNDEZ; LLINARES, 2019), aspectos específicos do campo da Álgebra (CALLEJO; ZAPATERA, 2017; RODRIGUES; CYRINO; OLIVEIRA, 2019; WALKOE, 2015) e no contexto da geometria (HAJ-YAHYA, 2022; ULUSOY; ÇAKIROĞLU, 2021).

Para investigar o *noticing* profissional de FPM, Ulusoy e Çakiroğlu (2021) propuseram que eles analisassem individualmente vídeos que retratavam situações de sala de aula, envolvendo o trabalho com conceito de trapézio e, em seguida, discutissem em grupos. Nas análises individuais, os autores constataram que os FPM, ao examinarem as respostas dos alunos para as tarefas indicadas, nem sempre foram capazes de interpretá-las. Já nas discussões coletivas, os FPM forneceram interpretações da compreensão matemática dos alunos para conceitos de trapézios e possibilidades de práticas pedagógicas, influenciadas, muitas vezes, por ideias e observações manifestadas por seus pares. Haj-Yahya (2022) investigou o *noticing* profissional de professores de matemática em relação ao pensamento geométrico. Para tanto, sugeriu a eles, inicialmente, que analisassem uma tarefa específica de geometria e, na sequência, apresentou-lhes estudos teóricos e empíricos acerca do pensamento geométrico, os quais giravam em torno da análise de vídeos referentes a uma aula extraída do projeto VIDEO-LM e artigos científicos sobre a temática. A intenção do autor foi analisar se, após o contato destes professores com tais informações, isso afetaria suas capacidades de: *reconhecer, interpretar* e *decidir*. Para tanto, utilizou um questionário com questões abertas, a respeito da tarefa em questão. Os resultados evidenciaram que os professores apresentaram um maior foco nas dificuldades específicas inerentes à tarefa e suas subsequentes interpretações. As respostas a essas dificuldades também foram mais específicas do que antes da intervenção.

Neste estudo, assumimos o *noticing* profissional do (futuro) professor de matemática na perspectiva de Jacobs, Lamb e Philipp (2010). No nosso caso, pelo fato de os FPM não estarem desenvolvendo ações em sala de aula, ou seja, não estarem exercendo o papel de professor, mas participando de discussões no contexto de uma disciplina, adaptamos a estrutura de análise desses autores para nosso contexto. O processo de análise será apresentado na próxima seção.

CONTEXTO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

A presente pesquisa, qualitativa de cunho interpretativo, foi desenvolvida no contexto de uma disciplina de Ensino de Geometria, ofertada para o segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná, Brasil. A disciplina, de 120 horas, foi organizada em um ambiente virtual de aprendizagem[51], o *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment* (*Moodle*). As aulas ocorreram de forma síncrona, via *Google Meet,* em horário regular no período noturno e com duração média de 90 minutos semanais, isto é, duas aulas de 45 minutos sequenciais, durante o ano de 2021. Os dados desta pesquisa foram coletados no segundo semestre, durante quatro aulas.

[51]Em virtude do isolamento físico provocado pela pandemia da COVID-19, a disciplina foi ministrada na modalidade de Ensino Remoto Emergencial.

Participaram da pesquisa 24 estudantes[52], nomeados neste estudo como FPM1, FPM2 [...] FPM24, a formadora[53] (PF2) que assumiu o papel de observadora; e a investigadora formadora (IF) que promoveu as ações formativas desenvolvidas no período investigado.

Um dos objetivos do Plano de Ensino da disciplina foi "Fomentar situações potenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico" (PLANO DE ENSINO, 2021, p.1). Desse modo, na busca para alcançar tal objetivo, foram desenvolvidas diversas ações formativas durante o ano letivo[54], cuja síntese e o período em que ocorreram constam do Quadro 1.

Quadro 1 – Síntese das ações formativas

Ações formativas	Descrição	Período
Proposição de um Pré-teste	Tarefa constituída por seis questões de geometria, para ser realizada em duplas. Para a discussão das resoluções, foram selecionadas aquelas que apresentavam diferentes estratégias de resoluções. A intenção com esta ação foi verificar como os FPM lidam com algumas questões de geometria, utilizando seus conhecimentos prévios.	Março-2021
Resolução e discussão das tarefas de geometria que compõem o teste de van Hiele	Foi proposto, por PF1, aos FPM o teste de van Hiele[55], antes de qualquer estudo referente à Teoria de van Hiele, com a intenção de verificar os conhecimentos geométricos prévios deles. Posteriormente, os resultados dos testes foram apresentados e discutidos pela PF1, de modo a promover a discussão e a sistematização dos conceitos geométricos	Maio/junho - 2021

[52]De modo a preservar o anonimato dos participantes, utilizamos siglas para representá-los, conforme acordado no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.
[53]Essa disciplina, no primeiro semestre (meados de julho), ficou a cargo da professora PF1 e, no segundo (início de agosto), da PF2.
[54]Exceto a elaboração de oficinas sobre geometria não euclidiana, análise das propostas curriculares oficiais relacionadas ao ensino de geometria no Ensino Fundamental e Médio, todas as outras ações foram desenvolvidas no primeiro semestre do ano de 2021.
[55]Teste constituído por 15 questões de Geometria Plana, retirado de Nasser e Santanna (1997, p. 85-87).

	envolvidos no teste.	
Estudo do texto: “O Pensamento e os Conceitos Geométricos” (VAN DE WALLE, 2009)	O estudo do texto foi sugerido por PF1, com o propósito de discutir o pensamento geométrico, em especial, o modelo de van Hiele, abordado neste texto. Na sequência, foi proposto pela PF1 um questionário referente ao texto, o qual também foi discutido em aula.	
Resolução e discussão de tarefas de geometria acerca das apreensões de Duval	Em um primeiro momento, foi solicitado, pela IF, aos FPM que resolvessem quatro tarefas de geometria, detalhando suas estratégias de resolução, a fim de justificar suas ideias. Na sequência, houve a discussão destas tarefas, de modo a evidenciar as diferentes estratégias de resoluções.	Julho e agosto - 2021
Estudo do texto: “Apreensões geométricas, segundo Raymond Duval”[56]	Foi indicado aos FPM, por IF, o estudo do texto e a elaboração de possíveis dúvidas a respeito dele. A discussão do texto ocorreu paralelamente à discussão das tarefas.	
Elaboração de tarefas de geometria	Foi solicitado, por IF, aos FPM que elaborassem uma proposta de tarefas de geometria, com vistas à mobilização das apreensões em geometria. Tais propostas foram discutidas e analisadas junto com a PF1 e IF.	

Fonte: Elaborado pela autora

Para a coleta de informações, realizamos um questionário (Quadro 2) (*Google Forms*), proposto pela IF no mês de setembro de 2021. A intenção era recolher informações descritivas, na linguagem dos próprios participantes

[56]O presente texto é resultado das reflexões e discussões dos estudos de Duval (1994, 1998, 2005, 2012) no grupo de estudos do Pensamento Geométrico do Gepefopem – Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Formação de Professores que ensinam Matemática.

(BOGDAN; BIKLEN, 1994), que permitissem identificar aspectos do pensamento geométrico que foram reconhecidos e interpretados pelos FPM, após o desenvolvimento das ações formativas supracitadas.

Quadro 2 - Questões presentes no questionário

1) Se vocês tivessem que explicar o que é pensamento geométrico, o que diriam? *2) Quais aspectos conceituais vocês consideram essenciais, quando tratamos de pensamento geométrico?* *3) Que tipos de tarefas são potenciais para oportunizar o estudante a desenvolver o pensamento geométrico?* *4) Essa concepção adotada na primeira questão foi por alguma ação ocorrida até o momento na disciplina de Ensino de Geometria? Se sim, qual ação ou ações propiciaram essa concepção sobre o pensamento geométrico? Justifique*

Fonte: Elaborado pela autora

Durante a leitura de modo sistematizado das respostas fornecidas pelos FPM, em alguns momentos, sentimos a necessidade de solicitar alguns esclarecimentos sobre as respostas fornecidas ao questionário. Para tanto, foi organizada uma sessão formativa (*Google Meet*), com a intencionalidade de discutir tais respostas e apresentar caracterizações de pensamento geométrico presentes na literatura. Essa sessão ocorreu em fevereiro de 2022, conforme planejamento da disciplina. Sendo assim, os dados analisados nesta pesquisa incidem sobre as produções escritas (PE) dos FPM, acerca das respostas fornecidas ao questionário, e a gravação das discussões promovidas na sessão formativa (SF) registrada em vídeo. Apenas 17 FPM responderam ao questionário, muito embora os 24 FPM estivessem presentes na SF.

No processo de análise, inicialmente identificamos tanto na PE quanto nas discussões da SF as capacidades do *noticing* profissional dos FPM, e buscamos elementos para associá-las ao conjunto de três capacidades inter-relacionadas, adaptadas de Jacobs, Lamb e Philipp (2010):

(i) *Reconhecer* - o que os FPM reconhecem (o que lhes chama a atenção) em relação aos aspectos do pensamento geométrico, tendo em conta as ações desenvolvidas na disciplina.

(ii) *Interpretar* - como interpretam esses aspectos que lhes chamam a sua atenção.

(iii) *Decidir* - que *decisões*[57] os FPM manifestam que poderiam ser tomadas, com base em suas *interpretações,* para desenvolver o pensamento geométrico dos alunos em sua futura prática letiva.

Deste modo, para identificarmos os aspectos do pensamento geométrico relacionados às capacidades de *reconhecer*, *interpretar* e *decidir* dos FPM, utilizamos como lente teórica de análise os estudos de: Costa (2020), Duval (1994, 1998, 2012), Garrido e Leyva (2005), Gravina (2001), Leivas (2009) e van Hiele (1984) sobre pensamento geométrico.

Após identificarmos esses aspectos do pensamento geométrico referentes às capacidades do *noticing* profissional adaptadas ao nosso contexto, buscamos agrupá-los por pontos em comum e pontos de divergência, a fim de responder nossas questões de investigação. Para tanto, descrevemos e analisamos tais aspectos, os quais se associaram: à compreensão de pensamento geométrico e suas implicações para o processo de ensino e de aprendizagem; e às potencialidades de tarefas para o desenvolvimento pensamento geométrico.

NOTICING PROFISSIONAL DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA A RESPEITO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Nesta seção apresentamos e discutimos o *noticing* profissional mobilizados por FPM a respeito do pensamento geométrico após o desenvolvimento de ações formativas promovidas em uma disciplina de Ensino de Geometria, nomeadamente aspectos associados: à compreensão de pensamento geométrico e suas implicações para o processo de ensino e de aprendizagem; e às potencialidades de tarefas para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

***Noticing* profissional de FPM relacionado à sua compreensão de pensamento geométrico e suas implicações para o processo de ensino e de aprendizagem**

Nesta subseção, descrevemos e analisamos trechos da PE dos FPM e excertos oriundos das discussões na SF, que evidenciam aspectos do pensamento

---

[57]Pautamos em excertos, tanto da PE quanto das discussões na SF, que nos permitissem inferir como os FPM fariam para promover o pensamento geométrico em sala de aula diante das compreensões de seus alunos.

geométrico associados ao conjunto de capacidades do *noticing* profissional[58] dos FPM. Constam no Quadro 3 algumas das respostas[59] fornecidas na PE referentes à primeira questão: *se vocês tivessem que explicar o que é pensamento geométrico, o que diriam?*

Quadro 3 - Respostas dos FPM à primeira questão

O pensamento geométrico é ***capacidade de desenvolver os problemas*** *de formas no espaço e solucionarmos usando conhecimentos matemáticos, aspectos de visualização, lógica e construção de outras formas geométricas que podem nos auxiliar a solução do problema (FPM1).*   *O pensamento geométrico é a* ***capacidade mental de visualizar e construir conhecimentos geométricos.*** *Sendo capaz de relacionar a geometria com situações da realidade, utilizando os instrumentos geométricos para resolver problemas até mesmo do cotidiano (FPM3).*   *É a* ***capacidade mental de desenvolver pensamentos geométricos****, sem precisar de nenhum instrumento físico, usando só a mente, esses pensamentos seriam noções espaciais, desenhos geométricos, figuras planas e espaciais, ou seja, a capacidade de pensar em geometria e todos os seus elementos (FPM4).*   *O* ***pensamento em que o aluno desenvolve para aplicar conceitos geométricos em um problema****, por exemplo, os níveis de van Hiele, que é separado em cinco níveis onde o aluno pode desenvolver e aprofundar seus conhecimentos. Mesmo que não concorde, pois podemos ter um aluno de 8º ano que pode “estar” no nível4, neste processo de ensino geométrico (FPM5).*   *Pensamento geométrico é a* ***capacidade de "enxergar além do que pode ser visto",*** *poder perceber formas antes de estarem representadas, por exemplo, perceber que triângulos poder representar faces de uma pirâmide (FPM6).*   *Pensamento geométrico é a* ***capacidade de construir conhecimentos geométricos para resolver problemas,*** *identificar e aplicar de modo coerente os instrumentos geométricos na resolução de problemas. Além disso, identificar objetos de natureza geométrica no contexto social em que se vive, como estudado existem vários níveis de pensamento geométrico. Na perspectiva dos van Hiele, o pensamento geométrico é desenvolvido a partir cinco níveis e na perspectiva de Duval é construído por meio das apreensões (FPM7).*

[58]A partir desta seção estamos nos referindo ao conjunto de capacidades do *noticing* profissional dos FPM que adaptamos ao nosso contexto.

[59]O critério de escolha das respostas e excertos no decorrer deste texto pautou-se nos que representavam todo o conjunto e forneciam mais elementos para análise.

*É a **forma de construir mentalmente conhecimento geométrico** para aplica-los de modo coerente nas resoluções de problemas (FPM8).*

Fonte: Dados da pesquisa

A partir das respostas fornecidas pelos FPM, evidenciamos que FPM5 e FPM7, ao explicitarem suas compreensões de pensamento geométrico, estabelecem relações com estudos realizados anteriormente, no caso, o modelo teórico de van Hiele (1984) e as apreensões em geometria, segundo Duval (1994, 2012). FPM5 *reconhece* que o pensamento geométrico pode ser desenvolvido em cinco níveis, *interpretando* que estes níveis podem permitir ao aluno "*desenvolver e aprofundar seus conhecimentos".* Além disso, manifesta-se de forma crítica sobre aspectos do modelo de van Hiele, ao discordar da ideia de que um aluno dos anos finais do Ensino Fundamental não possa progredir para níveis mais elevados, como o nível da dedução (quarto nível). Essa compreensão explicitada por FPM5, apesar de sucinta, pode estar relacionada com as discussões realizadas no decorrer da disciplina a respeito da hierarquia estabelecida entre os níveis neste modelo. Por sua vez, FPM7 também *reconhece* que o pensamento geométrico pode ser desenvolvido em níveis hierárquicos, segundo o modelo teórico de van Hiele (1984) e destaca, ainda, o desenvolvimento deste tipo de pensamento por meio das apreensões em geometria, segundo Duval (1998).

Foi possível observar também que FPM3, FPM4 e FPM8 *reconhecem* o pensamento geométrico como uma "*capacidade mental de construir/mobilizar conhecimentos geométricos"*. Observamos que a maioria das respostas apresentadas revela que os FPM *interpretam* que esse pensamento é mobilizado na resolução de problemas de geometria, ou, em algumas respostas, problemas inseridos num contexto da realidade de quem o resolve. Assim, na busca de fomentar discussões para compreender o *noticing* profissional dos FPM a respeito do pensamento geométrico como uma capacidade mental, durante as discussões na SF, IF levantou o seguinte questionamento:

IF*:* *Sobre trechos das respostas fornecidas ao questionário, "Pensamento geométrico é a capacidade de enxergar além do que pode ser visto" e "usando só a mente", qual o entendimento de vocês sobre estas respostas?*

FPM5: *Penso que seja no sentido da geometria trazer a questão que nem tudo que observamos é realmente aquilo, podemos ver um quadrado e com algumas propriedades da geometria dividi-lo ao meio e gerarmos dois triângulos.* ***Precisamos enxergar coisas além daquilo que só estamos vendo.***

IF: *Essa resposta guarda relação com alguma coisa que vocês já estudaram?*

FPM8*:* *Acho que com a questão da* ***percepção do aluno****, algo no sentido de* ***visualizar propriedades que pode usar em um problema****.*

IF: *Aproveitando essa resposta, notei que vocês utilizaram bastante esse termo, visualização. O que entendem por visualização?*

FPM9: *Considerando o que já estudamos, acredito que a visualização tem dois significados, a* ***visão mesmo (de ver aquilo) e a visão mental****. Por exemplo, ao estudar um teorema você lendo aquelas afirmações, começa a desenvolver algo na sua cabeça, tenta imaginar imagens dentro da sua cabeça, e essa visão desenvolve um raciocínio. Para mim isso é a visualização, essa capacidade mental. E o outro significado é a própria visão mesmo, vemos as construções, como na Grécia Antiga, a questão da proporção, era tudo construído de forma proporcional, muito bonito de se ver, e ali percebemos a geometria ao olhar.*

FPM5: *Baseada no que já estudamos sobre os níveis de van Hiele, penso também que a questão do "além que gente pode enxergar" está relacionada com a visualização, que é a primeira percepção de um objeto ou de alguma situação da geometria, ou seja, o primeiro nível. Penso que aprender sobre a visualização e os níveis de van Hiele foram essenciais para termos uma direção e entendermos o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno.*

Nesses excertos, observamos que mesmo antes de a IF referir-se à *visualização*, FPM5 e FPM8 oferecem em suas respostas (trechos em negrito) indícios de que *reconhecem a visualização* como um aspecto do pensamento geométrico. No entanto, ao serem questionados quanto ao seu entendimento desse conceito, FPM9 manifesta a seguinte compreensão de visualização: "*como a própria visão"* (no sentido de enxergar) *"e como visualização"* (visão mental)*.* Sobre esse aspecto, Kaleff (2015) ressalta a importância de não confundir visualização (*ver com os olhos da mente)* com ver sua imagem real, visual ou tátil do objeto físico (*ver o objeto*), e afirma que a visualização em geometria pode permitir ao aluno executar diversas operações mentais, as quais podem gerar outras imagens mentais ou representações do objeto.

Por sua vez, FPM5 relaciona a expressão *"além que gente pode enxergar"* com o conceito de visualização, porém, *interpreta* esse conceito como *"a primeira percepção de um objeto ou de alguma situação da geometria, ou seja, o primeiro nível do modelo teórico de van Hiele"*. Ela *reconhece* ainda, a relevância de o futuro professor ter em sua formação a oportunidade de conhecer e estudar sobre visualização e teorias como a de van Hiele, e *interpreta* que esse tipo de conhecimento pode reverberar em sua futura prática profissional no trabalho com a geometria. Esses apontamentos revelam o *noticing* profissional desses FPM tanto em relação à sua compreensão de visualização, quanto à importância do conhecimento teórico de aspectos do pensamento geométrico para sua futura prática profissional (ERDOGAN, 2020; RAMATLAPANA; BERGER, 2018).

Notamos ainda que os FPM utilizaram de forma recorrente em suas respostas os termos *conhecimento geométrico* e *conceito geométrico,* diante disso a IF, durante as discussões na SF, questionou-os:

IF: *O que vocês entendem por conhecimento geométrico?*

FPM9: *Entendo que é um* ***conhecimento construído sobre a geometria****, que pode ir desde um conhecimento mais simples até os mais complexos, como o conhecimento de teoremas, axiomas e etc. O sujeito que detém esse estudo sobre a geometria e consegue associa-lo a coisas do seu dia a dia, se ele não tivesse estudado talvez não conseguisse fazer essas associações e reconhece-los de modo geral.*

FPM5: *Discordo, penso que* ***não necessariamente esse conhecimento seja aprendido na escola****, o sujeito pode ter uma percepção e conhecimentos que foram desenvolvidos por outras vivências também.*

IF: *Conhecimento geométrico e conceito geométrico são sinônimos? Se existe diferença, quais são?*

FPM5: *Conceito geométrico, por exemplo, é saber o teorema de Pitágoras e como aplicá-lo, mas pode ser algo decorado. Já o conhecimento não, o* *sujeito construiu aquele conhecimento, sabe usar em uma situação sem precisar decorar nenhum conceito.*

FPM8: Eu acho que são diferentes, ***conhecimentos, é conhecer algo como identificar um quadrado, conceito entra nas partes das regras da geometria, penso que essa seja diferença.***

FPM10: ***Acho que não é só algo decorado, conceito****. Não aprendemos somente decorando, podemos construir o conhecimento por meio da aprendizagem de um conceito. Acho que eles se relacionam, um faz parte do outro,* ***podemos obter um conhecimento aprendendo um conceito.***

IF: Vamos pensar em um pedreiro, que não tenha frequentado a escola, ele pode ter conhecimentos geométricos?

FPM8: Com certeza, ***para construir uma casa ele tem que ter muito conhecimento geométrico, por exemplo, de angulação, medidas e entre outros.*** *Mesmo sem ter estudo sobre aquilo, mas tem muito conhecimento. Ele pode não saber que é um ângulo de 90º ou perpendiculares, e só sabe que a parede deve ser reta e qual o procedimento que deve utilizar para que isso aconteça.*

A *compreensão* de conhecimento geométrico manifestada por FPM9 vai ao encontro da definição apresentada por Zanella (2018, p. 213), que "os conhecimentos geométricos envolvem axiomas, definições, proposições, teoremas, como também enunciar, explicar, descrever, conjecturar, argumentar e demonstrar resultados acerca dos objetos em estudo". Por outro lado, FPM5 e FPM8 explicitam uma compreensão de conhecimento geométrico divergente de FPM9, *interpretando* que a aprendizagem de um conhecimento geométrico não necessariamente envolve, *a priori*, um conhecimento sistematizado. Esses apontamentos remetem a Garrido e Leyva (2005), esses autores defendem que o processo de aprendizagem dos conhecimentos geométricos acontece em duas etapas: a primeira compreende a etapa sensório-perceptiva, que tem início nas primeiras relações da criança com o meio em que vive, e a segunda ocorre quando o aluno começa a desenvolver a capacidade de internalizar as propriedades matemáticas observadas. Para esses autores, é assim que se dá o processo de constituição do conhecimento geométrico.

Ao explicitarem sua compreensão a respeito de conhecimento geométrico e conceito geométrico, observamos que os FPM *reconhecem* a questão da origem do conhecimento geométrico construído pelo sujeito, o que revela seu *noticing* profissional sobre esse tipo de conhecimento ser construído, a partir do contato do sujeito com a escola ou com experiências oriundas de seu contato com o mundo em que vivemos (GARRIDO; LEYVA, 2005; GRAVINA, 2001).

Na sequência, o Quadro 4 ilustra algumas das respostas advindas da PE, referente à segunda questão: *quais aspectos conceituais vocês consideram essenciais, quando tratamos de pensamento geométrico?*

Quadro 4 - Respostas dos FPM à segunda questão

Visualização, construção mental, conhecimento de propriedades geométricas (FPM1). *A visualização do objeto, por exemplo, se o aluno não tiver noção de um sólido ele não pode imaginar um sólido. Identificar algumas propriedades desses sólidos, que seriam as características deles. Relacionar quais polígonos compõem esses sólidos. A planificação de um sólido também é importante, porque ela mostra exatamente os polígonos que formam esse sólido (FPM2).* *Visualização e identificação de elementos e propriedades matemáticas e etc. Todos os conhecimentos matemáticos que o aluno constrói e utiliza na resolução de problemas são essenciais, pois contribuem para o desenvolvimento do pensamento geométrico (FPM3).* *Aspectos relacionados à forma de mobilizar seu pensamento na resolução do exercício, como de modo experimental ou intuitivo podem colaborar no desenvolvimento do pensamento geométrico (FPM13).* *As habilidades de ligar a álgebra com a geometria (FPM7).* *A consciência dos níveis em que os alunos estão, como a visualização, análise, dedução informal, dedução, rigor, apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial (FPM6).* *Noção de espaço, visualização de figuras geométricas planas e sólidos geométricos, noção de perspectiva (FPM4).* *É essencial um bom domínio do conteúdo por parte do professor, uma boa didática, para que os alunos consigam entender e é preciso que os alunos estejam com vontade de aprender (FPM8).*

Fonte: Dados da pesquisa

Entre os aspectos matemáticos apontados pelos FPM, ressaltamos a ênfase na visualização, aqui eles a *reconhecem* como um aspecto conceitual e essencial do pensamento geométrico, entre outros, como: "*o conhecimento de propriedades matemáticas, a articulação entre a Álgebra e Geometria, os demais níveis de pensamento e a intuição*". Verificamos ainda que, mesmo não se configurando como um aspecto conceitual, e, sim, pedagógico, os FPM *reconhecem,* como um aspecto importante, *"o papel do professor para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos"*. Eles compreendem que o professor deve ter consciência dos níveis de pensamento de seu aluno, ter conhecimento pedagógico e do conteúdo a ser ensinado, desvelando assim seu *noticing* profissional em relação aos aspectos que julgam essenciais, quando tratamos de pensamento geométrico. Durante a SF, ocorreram discussões nesse contexto.

IF: *Nessas respostas [Quadro 4] vocês apontam o seguinte aspecto "As habilidades de ligar a Álgebra com a Geometria"? E porque vocês acham que essa habilidade é importante?*

FPM5: *Acho importante, porque para resolver um problema de geometria às vezes a álgebra pode ajudar.*

IF: *E o aluno enxerga de forma natural essa articulação?*

FPM5: *Sim, acho que seja algo involuntário.*

IF: *Involuntário em que sentido?*

FPM5*:* *Por exemplo, quando eu vou montar um problema, tipo aquele da tarefa do lado triângulo*[60] *eu já coloco um x ali para representar aquele lado. Então eu preciso montar alguma coisa [equação] para eu encontrar a medida do lado do triângulo, aqui já entra a Álgebra. Penso que a Geometria e Álgebra andam lado a lado, muitos conceitos da Álgebra ficam mais práticos quando se eles se ligam com a geometria, penso que desse jeito o aluno pode conseguir enxergar algumas relações matemáticas.*

IF: *E os outros, concordam?*

FPM8: *Não. Lembro de uma discussão que tivemos em aulas passadas, sobre a potência elevada ao quadrado, o que será que o aluno pensa sobre esse*

[60]Tarefa, cujo enunciado solicitava a determinação das possíveis medidas do lado de um triângulo dado as medidas dos outros dois lados.

“ao quadrado”e sobre os produtos notáveis, será que ao aquele produto, por exemplo, o quadrado da soma, o aluno enxerga que aquele resultado tem relação com a área do quadrado. Então, acho que depende muito da forma como o professor vai abordar, se ele vai abordar esse conteúdo usando a Álgebra e a Geometria ou não.

IF: *E como você, no caso desse exemplo dos produtos notáveis, acha que o professor poderia fazer para que o aluno enxergue essa articulação?*

FPM8: *Eu explicaria mostrando para o aluno o quadrado, **visualmente eu acho que para ele bem mais fácil**, então desenho um quadrado de lado igual a (A+B) e desenvolveria sua área explicando o passo a passo.*

FPM5 e FPM8 tecem *interpretações* quanto à capacidade de o aluno desenvolver de forma natural ou não essa articulação entre Álgebra e a Geometria em determinadas situações matemáticas. Notamos que FPM5, ao considerar que essa articulação ocorre de forma natural para o aluno, defende seu ponto de vista baseada em suas experiências, ou seja, como para ela é algo “*involuntário*”, provavelmente para o aluno também assim seria. Já no caso do FPM8, ao relembrar discussões promovidas no decorrer da disciplina, justifica sua opinião, fornecendo uma explicação de como abordaria o conteúdo de produtos notáveis, de modo a oportunizar ao aluno desenvolver essa articulação, revelando desta forma sua capacidade de *decidir* com base em suas interpretações sobre o pensamento geométrico.

***Noticing* profissional de FPM relacionado às potencialidades de tarefas para o desenvolvimento do pensamento geométrico**

Nesta subseção, descrevemos e analisamos trechos da PE dos FPM e excertos das discussões na SF, promovidas em torno da potencialidade de tarefas para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Apresentamos, no Quadro 5, algumas respostas (PE) fornecidas à terceira questão: *que tipos de tarefas são potenciais para oportunizar o estudante a desenvolver o pensamento geométrico?*

Quadro 5 - Respostas dos FPM à terceira questão

Tarefas com materiais manipuláveis *e problemas envolvendo objetos usados no dia-a-dia podem estimular a maioria dos aspectos destacados na questão 2 (FPM1).* ***Tarefas que permitam a visualização, construção de sólidos, construção de conceitos, identificação de elementos e propriedades, entre várias outras. É de extrema importância que o professor elabore tarefas que relacionem a geometria com situações do cotidiano do aluno****, desse modo ele será capaz de desenvolver seus próprios conceitos, aplicando-os na resolução de problemas. A utilização de materiais diversos também auxiliam no desenvolvimento desse pensamento e despertam o interesse do aluno (FPM3).* *Acho que, principalmente,* ***tarefas que envolvam objetos manipuláveis****, pois com o contato físico é possível realmente entender na prática algumas noções abstratas que quando passadas do jeito tradicional não fica tão claro. Tarefas que tragam o contato direto com a geometria, não só tarefas de cálculo, mas também tarefas de construção de figuras e sólidos. Um recurso interessantíssimo para desenvolver esse pensamento, são os* ***softwares de ensino de geometria, como o GeoGebra****, por exemplo, o intuito é sempre tentar mostrar cada detalhe especifico da geometria, os detalhes fazem a diferença no pensamento geométrico (FPM4).* *Tarefas que proporcionem* ***o uso da Geometria para demonstrações*** *e o* ***uso de material manipulável*** *pronto ou para confeccionar. Tarefas em que o aluno observe e construa relações geométricas sem o uso de fórmulas (FPM5).* ***Tarefas que mobilizem vários níveis de pensamento****, desde o mais básico até um nível mais complexo, primeiro seriam atividades que permitam a visualização, depois a dedução, a identificação de propriedade e a elaboração de modificações de objetos, além de construções geométricas (FPM7).* ***Tarefas com materiais manipuláveis ou então a utilização de softwares*** *para facilitar o entendimento dos alunos (FPM8).* ***Utilizando a tecnologia,*** *podemos considerá-la como uma grande ferramenta, pois vivemos em um século modernizado então adaptar o ensino através de software e jogos online, é uma grande ferramenta (FPM12).*

Fonte: Dados da pesquisa

Os FPM *reconhecem,* como potencialidades de tarefas para o desenvolvimento do pensamento geométricos, aquelas que envolvem a: "*construção de sólidos geométricos, visualização e identificação de propriedades matemáticas".* Julgam ainda que o **"***uso de materiais manipuláveis e softwares, como GeoGebra",* representa um valioso recurso didático no trabalho com a geometria, desvelando assim seu *noticing* profissional a respeito de tarefas que podem oportunizar aos alunos constituir conceitos e propriedades geométricas; desenvolver a visualização em geometria por meio da observação e da manipulação de representações de objetos matemáticos; e verificar e validar hipóteses possíveis de serem determinantes na resolução de problemas de geometria.

Outro aspecto também *reconhecido* pelos FPM em relação às potencialidades de tarefas para o desenvolvimento do pensamento geométrico foi a "*importância do papel do professor na elaboração destas tarefas"*. FPM3 *compreende* que o professor deve propor tarefas que permitam ao aluno, "*relacionar a geometria com situações do seu cotidiano",* oportunizando-lhe atribuir significados para os conceitos geométricos envolvidos nas tarefas, demonstrando, desse modo, seu *noticing* profissional acerca do papel do professor diante do desenvolvimento do pensamento geométrico de seus alunos.

Na sequência, o Quadro 6 reproduz algumas respostas dadas na PE referentes à quarta questão: *a concepção de pensamento geométrico adotada na primeira pergunta foi por alguma ação ocorrida até o momento na disciplina de Ensino de Geometria? Se sim, qual ação ou ações propiciaram essa concepção sobre o pensamento geométrico? Justifique.*

Quadro 6 - Respostas dos FPM à quarta questão

Sim, o estudo sobre as apreensões de Duval e os níveis de van Hiele pude perceber o quão complexo é a forma que pensamos e solucionamos diversos problemas que envolvem geometria (FPM1). *Sim. A Geometria é bem complexa, e muitas vezes em um problema a falta de interpretação nos faz querer fugir da geometria, ainda mais se não conseguimos chegar a um resultado. Ao longo da disciplina, ao resolver diversos problemas de geometria, aprendi que em qualquer problema matemático temos que usar os nossos conhecimentos e fazer tentativas, mesmo que pareça complexo. Assim, com certeza o desenvolvimento de tarefas que envolvam o cotidiano do aluno, faz toda diferença no desenvolvimento do pensamento geométrico (FPM2).* *Sim, principalmente durante os debates das resoluções das atividades e apreensões discutidas em sala (FPM3).* *Sim, o estudo de diversos textos e as discussões de metodologias de ensino para a compreensão da geometria, como os níveis de van Hiele. Porém sinto que seja necessário o estudo de mais textos de pensamento geométrico para aprofundar algumas concepções e evoluir (FPM5).* *Sim. Como já falei em uma pergunta anterior, os níveis de van Hiele me*

ensinaram muito sobre o pensamento geométrico, para mim foi à ação que mais marcou em relação ao pensamento geométrico (FPM8).

Fonte: Dados da pesquisa

FPM2 *reconhece* que sua experiência com a resolução de problemas de geometria, proporcionada ao longo da disciplina, permitiu-lhe encarar com mais naturalidade o processo de resolução destes problemas, sendo necessário em algumas situações realizar tentativas para chegar a uma solução. Ela reconhece também que a "*falta de interpretação pode ser um obstáculo"* para entender os problemas no contexto da geometria. Em vista disso, avalia que tarefas, abrangendo o cotidiano do aluno, podem auxiliá-lo no desenvolvimento do seu pensamento geométrico. Essa compreensão da FPM2 denota sua capacidade de *decidir,* uma vez que, ao reconhecer a importância de tarefa relativa ao cotidiano do aluno, é possível que, em sua futura prática letiva, trabalhe com tarefas deste tipo com vistas a promover o desenvolvimento do pensamento geométrico de seus alunos.

De modo geral, as respostas fornecidas pelos FPM indicam que eles *reconhecem* que ações promovidas na disciplina, como a proposição de tarefas envolvendo: estudos e discussões de aspectos teóricos sobre o pensamento geométrico, resolução e discussão de problemas geométricos, foram potenciais para a constituição de suas concepções de pensamento geométrico.

Tais apontamentos destacam o *noticing* profissional dos FPM em relação às potencialidades de tarefas para apoiar o desenvolvimento do pensamento geométrico de seus futuros alunos (ALEX; MAMMEN, 2018; ERDOGAN, 2020; LIVY; DOWNTON, 2018; RAMATLAPANA; BERGER, 2018).

Discussão dos Resultados

Na busca de discutirmos o *noticing* profissional a respeito de aspectos do pensamento geométrico que foram reconhecidos e interpretados pelos FPM após o desenvolvimento de ações formativas promovidas em uma disciplina de Ensino de Geometria, identificamos a partir da análise de suas PE e discussões da SF, que os FPM são capazes de *reconhecer* aspectos significativos referentes ao pensamento geométrico e manifestar *interpretações* consistentes sobre estes aspectos, muitas vezes estabelecendo relações com ações formativas promovidas no decorrer da disciplina. No entanto, notamos que a capacidade de *decidir* foi pouco evidenciada nesse estudo. Uma possível razão para isso ter ocorrido pode estar relacionada ao fato de essa capacidade ser considerada um desafio nesta etapa de formação, tendo em conta que os FPM, em sua maioria, ainda não tinham tido experiência de sala de aula (RODRIGUES; CYRINO; OLIVEIRA, 2019).

No Quadro 7, apresentamos uma síntese do *noticing* profissional dos FPM, tendo em conta as capacidades de *reconhecer, interpretar* e *decidir,* referentes aos aspectos do pensamento geométrico e às potencialidades de tarefas para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Quadro 7 - *Noticing* profissional de FPM a respeito do pensamento geométrico

Agrupamentos	***Reconhecer* - O que os FPM reconhecem em relação aos aspectos do pensamento geométrico**	***Interpretar* - Que interpretações os FPM apresentam sobre o que reconheceram**	***Decidir* - Que decisões os FPM manifestam com base em suas interpretações**
Quanto à compreensão de pensamento geométrico e suas implicações para o processo de ensino e de aprendizagem	Pensamento geométrico como uma capacidade mental de construir/mobilizar conhecimentos geométricos.	Essa capacidade mental pode ser mobilizada na resolução de problemas de geometria, os quais podem estar inseridos num contexto da realidade de quem os resolve. O conhecimento geométrico não necessariamente envolve um conhecimento sistematizado, a partir das experiências vivenciadas num contexto escolar.	
		A visualização pode ser compreendida como a própria visão	

	A visualização em geometria	(no sentido de enxergar) e também como visão mental (criar imagens mentais). E ainda, como a primeira percepção de um objeto ou de alguma situação da geometria, ou seja, o primeiro nível do modelo teórico de van Hiele. É importante o futuro professor ter em sua formação a oportunidade de conhecer e estudar sobre a visualização em geometria, visto sua relevância no processo resolução de problemas geométricos.	
	O papel do professor no desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno	O professor deve ter consciência dos níveis de pensamento de seu aluno, ser capaz de articular a Álgebra e a Geometria, ter conhecimento pedagógico e do conteúdo a ser ensinado, a fim de apoiar o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno. O professor deve elaborar tarefas que permitam ao aluno relacionar a geometria com situações do seu cotidiano, oportunizando-lhe	FPM8, ao explicar como, em sua futura prática letiva, abordaria o conteúdo de produtos notáveis de modo a propiciar ao aluno uma aprendizagem significativa.

		atribuir significados para os conceitos geométricos envolvidos nas tarefas.	
Quanto às potencialidades de tarefas para o desenvolvimento do pensamento geométrico	Estudos e discussões de textos teóricos e resolução, elaboração e discussão de tarefas geométricas como ações formativas que contribuem para a compreensão de aspectos do pensamento geométrico.	Ações como essas são fundamentais para a compreensão dos FPM de características do pensamento geométrico e de como pode ser desenvolvido.	FPM2, ao revelar a importância de trabalhar com tarefas, envolvendo o cotidiano do aluno, com vistas a promover o desenvolvimento do seu pensamento geométrico.
	Tarefas sobre a construção de representações de sólidos geométricos, visualização e identificação de propriedades matemáticas e o uso de materiais manipuláveis e softwares como o *GeoGebra*.	Essas tarefas podem oportunizar aos alunos a constituição de conceitos e propriedades geométricas e o desenvolvimento da visualização em geometria.	

Fonte: Elaborada pela autora

O *noticing* profissional dos FPM sobre a compreensão de pensamento geométrico revela que eles *reconhecem* esse tipo de pensamento como uma "*capacidade mental de construir/mobilizar conhecimentos geométricos"*. Esse raciocínio vai, parcialmente, ao encontro da definição apresentada por Costa (2020), visto que o autor considera o pensamento geométrico como uma capacidade mental de produzir conhecimentos geométricos, e de mobilizá-los de forma coerente na resolução de problemas. Porém, segundo sua definição, é ainda a capacidade de compreender a complexidade dos fenômenos do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento, podendo realizar inferências sobre eles, além reconhecer a relevância da Geometria como modelo em Matemática para a compreensão do mundo teórico.

No decurso das discussões da SF, com o apoio da IF para incentivar as interpretações mais fundamentadas sobre a compreensão de pensamento geométrico, os FPM discutiram sobre *conhecimento geométrico* e *conceito geométrico*, gerando ideias centradas no conhecimento geométrico ser constituído a partir de experiências vivenciadas ou não na escola, o que revelou o *noticing* profissional dos FPM em relação à origem do conhecimento geométrico construído pelo sujeito (GARRIDO; LEYVA, 2005; GRAVINA, 2001). Discussões como essas podem propiciar aos FPM reflexões sobre o processo de constituição do pensamento geométrico e impulsioná-los para aprofundar seus conhecimentos referentes a essa temática, e ainda, auxiliá-los para desenvolver as capacidades de seu *noticing* profissional nesse contexto. Van Es e Sherin (2021) defendem que *interpretar* não é uma capacidade que requer apenas tentar dar sentido a um determinado fenômeno, mas envolve também o uso de conhecimentos e experiências adquiridas em determinadas situações. Assim, as autoras afirmam que, quando os professores assumem uma postura de investigação, eles estão, em essência, assumindo um novo quadro epistemológico para o trabalho de *reconhecer,* podendo, desta forma, produzir *interpretações* mais sofisticadas aos fenômenos observados.

Em relação aos aspectos do pensamento geométrico que foram *reconhecidos* pelos FPM, destacamos o foco no *noticing* profissional referente à *visualização em geometria.* Eles manifestaram seu entendimento de visualização, estabelecendo relações com as teorias estudadas no decorrer da disciplina sobre pensamento geométrico. FPM5, ao *interpretar* a visualização como a "*primeira percepção do aluno"* mediante uma situação no contexto da geometria, estabelece uma associação com o primeiro nível de pensamento proposto no modelo de van Hiele. Segundo este modelo, neste nível as figuras são julgadas pela sua aparência, e o seu reconhecimento passa a ser feito pela distinção das formas e não por suas propriedades (VAN DE WALLE, 2009). Uma criança é capaz de reproduzir diferentes formas, caso alguém já tenha lhe mostrado tais figuras, no entanto não consegue estabelecer relações referentes às propriedades dessas formas (VAN HIELE, 1984). E FPM9 *interpreta* a visualização, segundo a concepção de Duval (1998), a qual considera a visualização como um processo cognitivo que envolve os processos de criação de imagens mentais visuais, para investigar e generalizar informações de uma situação geométrica por meio de explorações heurísticas.

Ainda em relação à visualização em geometria, os FPM *reconhecem* a importância de se trabalhar com tarefas, envolvendo" *a construção de representações de sólidos geométricos e a identificação de propriedades matemáticas"* e enfatizam o auxílio de recursos como por exemplo, materiais manipuláveis e softwares como o *GeoGebra,* desvelando assim seu *noticing* profissional quanto à potencialidade de tarefas para desenvolver a visualização em geometria e, consequentemente, o pensamento geométrico (ALEX; MAMMEN, 2018; ERDOGAN, 2020; RAMATLAPANA; BERGER, 2018).

Nesta direção, Moran (2015) afirma que o uso de material manipulável viabiliza a representação de objetos geométricos tridimensionais, de modo a preservar sua dimensão, o que pode contribuir na identificação de seus elementos figurais e na manipulação dos objetos para visualizá-los em diferentes perspectivas. Contudo, Lorenzato (2006) ressalta que o uso de material manipulável deve ter como foco a atividade mental do aluno, o que exige uma proposta pedagógica planejada, a qual requer do professor uma atenção especial à passagem do concreto ao abstrato, para a formalização do conteúdo (LORENZATO, 2006). Pesquisas apontam que Ambientes de Geometria Dinâmica, como o *GeoGebra*, podem auxiliar eficazmente na resolução de problemas em geometria (MORAN, 2015; SALAZAR; ALMOULOUD, 2015) e no desenvolvimento das apreensões em geometria, permitindo aos alunos a exploração heurística de uma figura de forma experimental e exploratória, desencadeando o desenvolvimento da visualização (JAHN; BONGIOVANNI, 2019).

Corradi e Franco (2020) explicam que a habilidade de visualização deve ser investigada e incentivada no contexto da formação inicial de professores de matemática, visto sua importância no ensino e na aprendizagem de geometria. Assim, consideramos que as ações formativas desenvolvidas na disciplina, como exemplo, as discussões associadas ao uso de materiais manipuláveis e a utilização de softwares como o *GeoGebra*, para o ensino de geometria e o trabalho com tarefas apoiadas no modelo de van Hiele e nas apreensões de Duval, contribuíram para que os FPM vivenciassem situações na prática que lhes permitiram desenvolver esta habilidade, bem como discutir possíveis dificuldades enfrentadas pelos alunos em relação à visualização no processo de resolução de problemas geométricos.

Os FPM, ao apontarem conhecimentos necessários ao professor no trabalho com a geometria, para elaborar tarefas potenciais para a atribuição de significados a conceitos geométricos, relevaram seu *noticing* profissional a respeito do papel do professor no desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno, o qual está atrelado a reflexões, discussões promovidas na disciplina sobre os processos de ensino e aprendizagem de geometria e, por conseguinte, ao papel do professor neste contexto.

Assim, julgamos que espaços formativos como este podem propiciar ao FPM o desenvolvimento de suas capacidades do *noticing* profissional acerca do pensamento geométrico, já que este desenvolvimento não é nato, mas, sim, intencional e parte integrante do desenvolvimento profissional do professor (MASON, 2002), principalmente, no contexto da formação inicial.

Considerações Finais

O *noticing* profissional manifestado pelos FPM revelou a capacidade deles de *reconhecer*, *interpretar e decidir* aspectos do pensamento geométrico e suas implicações no ensino e aprendizagem da geometria. Tais capacidades estão atreladas a conhecimentos constituídos por eles no desenvolvimento de ações formativas no contexto de uma disciplina de Ensino de Geometria, as quais proporcionaram aos FPM estudar e discutir sobre aspectos teóricos do pensamento geométrico, bem como vivenciar situações da prática pedagógica, como a resolução, a elaboração e a discussão de tarefas potenciais para o ensino de geometria, sobretudo, para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Em assim sendo, destacamos que os estudos e as discussões de perspectivas teóricas que indicam aspectos relevantes a serem considerados para a aprendizagem da geometria, como os descritos por van Hiele e Raymond Duval, no contexto da formação inicial, oportunizaram que os FPM *reconhecessem* e *interpretassem* aspectos centrais do pensamento geométrico relativos: à compreensão de pensamento geométrico (COSTA, 2020), à visualização (DUVAL, 1998; LEIVAS, 2009; VAN HIELE, 1984), ao papel do professor no trabalho com a geometria, e a tarefas potenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico (ERDOGAN, 2020; RAMATPLANA; BERGER, 2018). Assim, defendemos que ações como essas, desenvolvidas nesta disciplina, sejam promovidas com maior frequência na formação inicial de professores de matemática, e de preferência em todas as disciplinas que envolvam a Geometria como área de conhecimento. Espaços formativos que promovam ações, como as que foram desenvolvidas nessa disciplina, podem configurar-se como um campo fértil para a constituição de conhecimentos geométricos necessários para a futura prática profissional de professores de matemática, especialmente, no desenvolvimento do seu *noticing* profissional em relação ao pensamento geométrico dos alunos.

As capacidades de *reconhecer* e *interpretar* foram evidenciadas com maior frequência, principalmente, quando os FPM tiveram a oportunidade de examinar e explicar suas respostas durante as discussões promovidas pela IF. Porém, constatamos que a capacidade do *noticing* profissional de *decidir* esteve pouco evidente em suas respostas fornecidas ao questionário e tampouco nos momentos de discussão. Inferimos que, além do fato de os FPM estarem menos suscetíveis a desenvolverem essa capacidade (SÁNCHEZ-MATAMOROS; FERNÁNDEZ; LLINARES, 2019), o instrumento de análise utilizado, no caso o questionário, pode ter influenciado neste resultado. Isso sugere prestar mais atenção ao desenvolvimento dessa capacidade na formação inicial de professores e nas pesquisas dessa área. Assim, reiteramos a significância de ações formativas que permitam ao FPM vivenciar, na prática, situações específicas de sala de aula, como exemplo, o Estágio Supervisionado do PIBID e os projetos de extensão.

Enfim, entendemos que este trabalho reforça a pertinência de enfatizar ações formativas, no âmbito da formação inicial de professores, que promovam reflexões sobre aspectos teóricos e práticos do pensamento geométrico, em especial, o desenvolvimento de suas capacidades do *noticing* profissional nesse contexto. Como sugestão para pesquisas futuras, indicamos estudos que possam fornecem evidências mais consistentes em relação à capacidade de *decidir* do futuro professor, posicionando-os como professores em uma aula de matemática, diante de situações que envolvam o trabalho com a geometria, em particular, com o pensamento geométrico.

REFERÊNCIAS

ALEX, J; MAMMEN, K. J. Students' understanding of geometry terminology through the lens of Van Hiele theory. **Pythagoras**, *[S. l.]*, v. 39, n. 1, p. 1–8, 2018. DOI: 10.4102/pythagoras.v39i1.376.

BARRETO, M. C. *et al.* Estado da arte em pesquisas acadêmicas brasileiras, de 2010 a 2019, sobre o ensino de geometria desenvolvidas no Nordeste. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 39, n. 1, p. 1-22, jan./mar. 2021. DOI: 10.5007/2175-795X.2021.e71085

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação**: uma introdução às teorias e aos métodos. Porto: Ed. Porto, 1994.

BRUNHEIRA, L; PONTE, J. P. Da. From the classification of quadrilaterals to the classification of prisms: An experiment with prospective teachers. **Journal of Mathematical Behavior**, *[S. l.]*, v. 53, p. 65–80, 2019. DOI: 10.1016/j.jmathb.2018.06.004.

CABRAL, J; MENDES, F; OLIVEIRA, H. A capacidade de noticing do pensamento algébrico dos alunos: um estudo na formação inicial. **Quadrante**, v. 31, n. 1, p. 28-53, 2022.

CALLEJO, M. L; ZAPATERA, A. Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 20, n.4, 309-333, 2017. DOI: 10.5965/2357724X08162020032.

CARVALHO, H. A. F.; FERREIRA, A. C. Visualização espacial e pensamento geométrico: um panorama da produção brasileira em programas de Pós-Graduação nos últimos anos. *In*: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2015, São João Del Rei/MG. **Anais EMEM,** 2015.

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. T. Geometry and spatial reasoning. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**, v. 420, p. 464, 1992.

CORRADI, R. P.; FRANCO, V. S. Visualização em Geometria, aproximações entre as perspectivas de Duval e Gutiérrez: um estudo com acadêmicos de um curso de licenciatura em Matemática. **Boletim online de Educação Matemática,** v. 8, n. 16, p. 32-51, 2020. DOI: 10.5965/2357724X08162020032

COSTA, A. P. O pensamento geométrico em foco: construindo uma definição. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**, v. 6, n. 16, p. 77-94, 2020.

CYBULSKI, F. C.; CYRINO, M. C. C. T. Geometria e pensamento geométrico na formação inicial de professores que ensinam matemática: o que revelam pesquisas brasileiras entre 2009 e 2020. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.11, n.26, p.44-65, 2022.

CYBULSKI, F. C.; MAGNONI-VIEIRA, A. F.; CYRINO, M. C. C. T. Ensino de geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática: um panorama de artigos brasileiros e internacionais. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2022, São Paulo. **Anais [...].** [S. L.]: Cibem, no prelo.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères**, n.17, p.121-138, 1994.

DUVAL, R. Geometry from a Cognitive Point of View. *In*: MAMMANA, C.; VILLANI, (orgs.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century**: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer, p. 37-52, 1998.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *In*: **Annales de didactique et de sciences cognitives,** v. 10, p. 1, p. 5 – 53, 2005.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.

ERDOGAN, F. prospective middle school mathematics teachers' problem posing abilities in context of Van Hiele Levels of Geometric Thinking. **International Online Journal of Educational Sciences**, *[S. l.]*, v. 12, n. 2, p. 132–152, 2020. DOI: 10.15345/iojes.2020.02.009.

FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S.; VALLS, J. Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. **The Mathematics Enthusiast**, v. 10, n. 1, p. 441-468, 2013.

FUJITA, T. Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 31, n.11, p. 60–72, 2012. DOI: 10.1016/j.jmathb.2011.08.003.

GARRIDO, Y. P.; LEYVA, L. M. Pensamiento geométrico em los escolares primarios: un modelo didáctico para estimularlo. *In*: CONGRESO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA E COMPUTACIÓN, Holguín, 2005. **Anais eletrônicos [...].** Holguín, 2005.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 237f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

HAJ-YAHYA, A. Using theoretical and empirical background information to affect noticing of geometrical thinking. **Educational Studies in Mathematics**, v. 111, n. 3, p. 493-513, 2022.

JACOBS, V. R.; LAMB, L. L. C.; PHILIPP, R. A. Professional noticing of children's mathematical thinking. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, US, v. 41, n. 2, p. 169-202, 2010.

JAHN, A. P.; BONGIOVANNI, V. Apreensão Operatória de Figuras em Situações Geométricas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 12, n. 3, p. 245-257, 2019. DOI: 10.17921/2176-5634.2019v12n3p245-257.

KALEFF, A. M. M. R. Formas, Padrões, Visualização e Ilusão de Ótica no Ensino da Geometria. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 18, 2015.

KÖNIG, J. *et al*. Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice. **Educational Research Review**, p. 100-453, 2022.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LLINARES, A. Z. Descriptores del Desarrollo de la Mirada Profesional en el Contexto de la Generalización de Patrones. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 33, p. 1464-1486, 2019.

LIVY, S.; DOWNTON, A. Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. **Journal of Mathematical Behavior**, *[S. l.]*, v. 51, p. 150-160, 2018. DOI: 10.1016/j.jmathb.2017.11.004.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MASON, J. **Researching your own practice**: The discipline of noticing. London: Routledge-Falmer, 2002.

MORAN, M. **As apreensões em Geometria:** um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais. 2015. 248f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

NASSER, L.; SANTANNA, N. P. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. Rio de Janeiro: Instituto de matemática – UFRJ. Projeto Fundão, 1997.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, v. 4, n. 2, p. 45-63,1996.

PARZYSZ, B. "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational studies in mathematics**, v. 19, n. 1, p. 79-92, 1988.

PAIVA, S. M. **A conceituação do pensamento geométrico**: aspectos históricos, filosóficos e as visões presentes em teses e dissertações no brasil. 2021. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos Formativos) - Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2021.

RAMATLAPANA, K.; BERGER, M. Prospective Mathematics Teachers' Perceptual and Discursive Apprehensions when Making Geometric Connections. **African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education**, *[S. l.]*, v. 22, n. 2, p. 162-173, 2018. DOI: 10.1080/18117295.2018.1466495.

RODRIGUES, R. V; CYRINO, M. C; OLIVEIRA, H. Percepção profissional de futuros professores sobre o pensamento algébrico dos alunos na exploração de um caso multimídia. **Quadrante**, v. 28, n. 1, p. 100-123, 2019.

SALAZAR, J. V. F.; ALMOULOUD, S. A. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. **Educação Matemática Pesquisa**, *[S. l.]*, v. 17, n. 5, p. 919-941, 2015.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; FERNÁNDEZ, C; LLINARES, S. Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. **Educ Stud Math**, v.100, s.n, p. 83-99, 2019. DOI: 10.1007/s10649-018-9855-y.

SHERIN, M; JACOBS, V. R. Situating the study of teacher noticing. **Mathematics teacher noticing**. Routledge, p. 33-44, 2011.

SHERIN, M. G., VAN ES, E. A. Effects of video club participation on teachers' professional vision. **Journal of Teacher Education**, v.60, n.1, p. 20–37, 2009.

STOCKERO, S. L. *et al*. Noticing distinctions among and within instances of student mathematical thinking. **Teacher noticing:** Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks, p. 467-480, 2017.

TEKIN-SITRAVA, R; KAISER, G; IŞIKSAL-BOSTAN, M. Development of prospective teachers' noticing skills within initial teacher education. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 20, n. 7, p. 1611-1634, 2022.

ULUSOY, F., ÇAKIROĞLU, E. Exploring prospective teachers' noticing of students' understanding through micro-case videos. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 24, n.3, p. 253-282, 2021. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09457-1.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores em sala de aula. 6. ed. Tradução de: Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN ES, E. A.; SHERIN, M. G. Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. **Journal of technology and teacher education**, v. 10, n. 4, p. 571-596, 2002.

VAN ES, E. A.; SHERIN, M. G. Expanding on prior conceptualizations of teacher noticing. **ZDM Mathematics Education**, Springer, p. 17–27, 2021.

VAN HIELE, P. M. A child's thought and geometry. *In*: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Eds.). **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele**. Brooklyn: Brooklyn College, p. 243-252,1984.

VASCONCELOS, L.O. *et al*. Rede de aprendizagem e desenvolvimento da docência: Expressões do pensamento geométrico de professoras que ensinam Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema**, v. 35, n.70, p. 708-726, 2021. DOI: 10.1590/1980-4415v35n70a08

WALKOE, J. Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v.18, n.6, p. 523-550, 2015.

ZANELLA, I. A. **Diferentes representações na geometria euclidiana por meio do uso do geogebra**: um estudo com futuros professores de matemática. 2018. 229 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste estudo, discutimos a necessidade de uma formação inicial capaz de promover o desenvolvimento do pensamento geométrico de futuros professores de matemática (FPM). Assim, propusemo-nos a investigar e discutir elementos formativos, para o desenvolvimento do pensamento geométrico de futuros professores de matemática, desencadeados por ações de uma disciplina de Ensino de Geometria na formação inicial. Consideramos elementos formativos como um produto das ações formativas promovidas na disciplina.

Nossa tese está estruturada no formato *multipaper*, na qual elaboramos três capítulos/artigos, com objetivos específicos, de modo que, a partir de seus resultados, pudéssemos evidenciar e discutir tais elementos formativos:

Objetivo 1: analisar reflexões manifestadas por futuros professores de matemática, no trabalho com tarefas apoiadas no modelo teórico de van Hiele, para desenvolver o pensamento geométrico.

O trabalho com tarefas apoiadas no modelo teórico de van Hiele para desenvolver o pensamento geométrico oportunizou aos FPM refletirem a respeito: dos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico; do papel do professor na prática em sala de aula para o desenvolvimento do pensamento geométrico; e de conceitos geométricos quanto às propriedades geométricas de figuras planas.

Objetivo 2: discutir contribuições da exploração de tarefas com potencial para mobilizar apreensões em geometria para a formação inicial de professores de matemática.

A exploração de tarefas com potencial para mobilizar apreensões em geometria permitiu aos FPM: refletir a respeito de conhecimentos teóricos e práticos acerca das apreensões em geometria; estabelecer conexões entre as apreensões envolvidas no processo de resolução de tarefas de geometria; discutir sobre a importância do papel do professor no reconhecimento de potencialidades e nas limitações de tarefas a serem trabalhadas em sala de aula na Educação Básica; e sistematizar conceitos geométricos.

Objetivo 3: Discutir o *noticing* profissional a respeito de aspectos do pensamento geométrico, manifestados por futuros professores de matemática após o desenvolvimento de ações formativas promovidas em uma disciplina de Ensino de Geometria.

Ao discutir o *noticing* profissional a respeito de aspectos do pensamento geométrico, manifestados pelos FPM, evidenciamos como elementos formativos suas capacidades de *reconhecer*, *interpretar e decidir* aspectos do pensamento geométrico, relacionados: à compreensão de pensamento geométrico e suas implicações para o processo de ensino e de aprendizagem; e às potencialidades de tarefas para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A partir desses resultados, identificamos elementos formativos, que ofereceram oportunidades para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos FPM. Esses elementos serão vistos e discutidos na próxima seção.

Elementos Formativos para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Futuros Professores de Matemática

Na sequência, apresentaremos e discutiremos os elementos formativos evidenciados no processo de análise. Para fins analíticos, cada um desses elementos será tratado separadamente, no entanto, eles podem se inter-relacionar, uma vez que é possível estabelecer articulações entre eles. Os elementos formativos identificados foram:

- **Reflexões a respeito de conhecimentos teóricos associados:**
  - ✓ aos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico;
  - ✓ às apreensões em geometria discutidas por Duval;
  - ✓ à capacidade de o professor *reconhecer, interpretar* e *decidir* sobre aspectos geométricos a serem considerados para o desenvolvimento do pensamento geométrico;
  - ✓ a conceitos e propriedades geométricas de figuras planas.

- **Reflexões a respeito de conhecimentos práticos para o ensino de geometria associados:**
  - ✓ ao papel do professor na prática em sala de aula para o desenvolvimento do pensamento geométrico;

- ✓ à busca de conexões entre as apreensões envolvidas no processo de resolução de tarefas de geometria;
- ✓ às potencialidades e às limitações de tarefas para o desenvolvimento do pensamento geométrico;
- ✓ à capacidade de o professor *reconhecer*, *interpretar* e *decidir* sobre implicações do desenvolvimento do pensamento geométrico para o processo de ensino e de aprendizagem de geometria.

Em relação às reflexões quanto *aos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico*, identificamos que os FPM reconheceram os objetos e os produtos de pensamento de cada nível de pensamento geométrico, segundo o modelo de van Hiele, além de assinalarem características gerais deste modelo, fornecendo explicações sobre a maneira que um aluno poderia pensar/operar em cada um destes níveis, bem como possíveis dificuldades enfrentadas por eles na transição de um nível para o outro.

A respeito *das apreensões em geometria discutidas por Duval*, destacamos que os FPM, ao discutirem as diferentes estratégias de resoluções referentes às tarefas propostas pela investigadora formadora, apontaram quais apreensões seriam possíveis de serem mobilizadas por um sujeito, ao resolver cada uma das tarefas discutidas, reconhecendo, desta forma, características centrais de cada tipo de apreensão.

Quanto às reflexões suscitadas referentes *à capacidade de o professor reconhecer, interpretar e decidir sobre aspectos geométricos a serem considerados para o desenvolvimento do pensamento geométrico,* observamos que os FPM reconheceram a visualização como um aspecto essencial do pensamento geométrico, enfatizando sua importância no processo de resolução de problemas geométricos. Discutiram, ainda, sobre conhecimento geométrico e conceito geométrico, gerando ideias centradas no conhecimento geométrico ser constituído a partir de experiências vivenciadas ou não na escola.

Por fim, no que concerne às reflexões relacionadas *a conceitos e propriedades geométricas de figuras planas*, os FPM, ao se envolverem com tarefas de geometria, mobilizaram conhecimentos geométricos referentes às definições e às propriedades de triângulos, de quadriláteros, e à inclusão de classes de quadriláteros notáveis.

No que tange às reflexões a respeito de conhecimentos práticos associada *ao papel do professor na prática em sala de aula para o desenvolvimento do pensamento geométrico*, os FPM sinalizaram a importância de o professor: ter consciência dos níveis de pensamento de seu aluno para assim auxiliá-los a progredir em termos de níveis hierárquicos; organizar os conteúdos de modo a contemplar as necessidades de seus alunos; utilizar um vocabulário adequado ao contexto dos alunos; elaborar tarefas que permitam ao aluno relacionar a geometria com situações do seu cotidiano, oportunizando-lhe atribuir significados para os conceitos geométricos envolvidos nas tarefas, e consequentemente, apoiar o desenvolvimento do pensamento geométrico de seus alunos; e ser capaz de reconhecer potencialidades e limitações de tarefas para o ensino de geometria.

Em relação *à busca de conexões entre as apreensões envolvidas no processo de resolução de tarefas de geometria,* destacamos o engajamento de FPM3, ao realizar construções geométricas com o auxílio do *GeoGebra* para solucionar as tarefas propostas. Observamos que o futuro professor estabeleceu conexões entre as apreensões perceptiva, discursiva e sequencial, ao realizar suas construções e, ainda, conexões entre as apreensões operatória e discursiva para obter uma possível solução para o problema investigado.

No que diz respeito às *potencialidades e às limitações de tarefas para o desenvolvimento do pensamento geométrico*, os FPM apontaram que tarefas envolvendo o uso de materiais manipuláveis e softwares como o *GeoGebra*, por exemplo, e a construção de representações de sólidos geométricos para a identificação de propriedades matemáticas, podem oportunizar os alunos o desenvolvimento da visualização em geometria. E que trabalhar com tarefas que envolvam situações do cotidiano do aluno pode facilitar sua interpretação dos enunciados, visto que isso geralmente representa um obstáculo para eles.

Por fim, quanto *à capacidade de o professor reconhecer, interpretar e decidir sobre implicações do desenvolvimento do pensamento geométrico para o processo de ensino e de aprendizagem de geometria*, os FPM discutiram sobre diferentes abordagens e estratégias de resoluções em tarefas de geometria, com isso conceberam diferentes maneiras de fornecer instruções apropriadas para desencadear a transição entre níveis de pensamento dos alunos. Eles analisaram equívocos, ideias, registros em suas estratégias de resoluções em tarefas abrangendo geometria plana e espacial.

Considerando os elementos discutidos anteriormente e sua importância na promoção do desenvolvimento do pensamento geométrico dos FPM, a próxima seção volta-se para algumas reflexões sobre as ações formativas promovidas na disciplina que suscitaram tais elementos.

Ações Formativas para a Promoção do Pensamento Geométrico na Formação Inicial de Professores de Matemática

A partir do pressuposto de que o FPM deve ter a oportunidade, na sua formação inicial, de refletir a respeito de conhecimentos teóricos e práticos para o ensino de geometria, discutiremos as ações formativas que foram analisadas e o papel das formadoras nesse contexto.

A *resolução, a elaboração e a discussão de tarefas de geometria* foi uma ação constante na disciplina. As tarefas propostas foram: o pré-teste, as tarefas de geometria que compõem o teste de van Hiele e a tarefas acerca das apreensões de Duval. De um modo geral, o trabalho com essas tarefas, seja em momentos de resolução, discussão ou elaboração, propiciou aos FPM reflexões tanto sobre aspectos relacionados ao conteúdo matemático envolvido nas questões, quanto a aspectos referentes ao ensino destes conceitos e, ainda, forneceu indícios sobre o conhecimento do conteúdo de geometria dos FPM. A professora formadora (PF1) e a investigadora formadora (IF) buscaram propor tarefas que desafiassem os FPM na busca por procedimentos para a resolução. Em virtude disso, um aspecto relevante para a formação foi instigar os FPM para buscarem resolver as tarefas. Durante as discussões dessas tarefas, PF1 suscitou reflexões sobre a importância de o professor discutir diferentes estratégias de resoluções dos alunos, encarar as resoluções incorretas como oportunidade de aprendizagem para o aluno, e sistematizar conceitos geométricos a partir das resoluções apresentadas por eles.

Outra ação importante da disciplina foi o *estudo e a discussão de textos teóricos sobre o ensino de geometria e o pensamento geométrico.* Os estudos propostos e as discussões desencadearam reflexões sobre aspectos históricos a respeito do ensino de geometria nas escolas brasileiras, sobre o modelo teórico de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico e sobre a aprendizagem em geometria por meio das apreensões de Duval, além de viabilizarem reflexões para uma formação docente mais crítica e ampla sobre conhecimentos teóricos acerca do pensamento geométrico, de práticas de sala de aula e da constituição de conceitos geométricos.

Destacamos o papel desempenhado pela professora formadora (PF1) diante das ações supracitadas, que, mesmo nas dificuldades encontradas em razão do contexto pandêmico vivenciado, se dedicou para manter um ambiente propício à aprendizagem dos futuros professores, os quais, em muitas situações, esperavam uma resposta e, ao invés disso, ela lhes colocava uma nova questão que gerasse outras reflexões. Sua intervenção cuidadosa para não constranger os FPM possibilitou estabelecer a comunicação a partir das interações com os FPM e promover interação entre eles, deixando-os à vontade para verbalizar seus raciocínios, debater ideias, investigar propriedades e sistematizar conceitos geométricos com significados.

No entanto, embora tenha sido observado que o ambiente colaborou para que os FPM se desenvolvessem profissionalmente, percebemos que alguns se mostraram mais envolvidos que outros. Logo, podemos inferir que o engajamento é essencial, tanto para a aprendizagem do futuro professor como para seu desenvolvimento profissional. Esses aspectos foram essenciais para desvelar os elementos formativos, já destacados, que forneceram indícios do desenvolvimento do pensamento geométrico dos FPM.

Conclusão e Implicações Futuras

A despeito de ser papel do professor propor ações que promovam o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, é vital que ele saiba como fazê-lo. Diante disso, defendemos a implementação de uma formação inicial que promova ações capazes de suscitar elementos formativos como os apresentados nesta investigação, de modo a oportunizar ao FPM vivenciar situações da prática pedagógica que contribuam para o desenvolvimento do seu pensamento geométrico, e, sobretudo, proporcione reflexões sobre conhecimentos teóricos e práticos relativos ao pensamento geométrico para sua futura prática profissional.

Ressaltamos também que é imprescindível que haja uma articulação entre as disciplinas específicas e as pedagógicas, a fim de integrar conhecimento teórico e prático, o que pode acontecer em espaços formativos promotores de discussões e reflexões a respeito do quê, como, porquê e quando ensinar Geometria.

Esperamos que os elementos formativos apresentados neste trabalho se constituam em alvos de reflexões para indicar outras formas de planejar e promover ambientes de formação inicial, em particular, no que tange ao ensino de geometria e ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Contudo os resultados desta pesquisa, desenvolvida no âmbito da formação inicial de professores de matemática, não esgotam todas as possibilidades de ações formativas para o desenvolvimento do pensamento geométrico de futuros professores. Em assim sendo, sugerimos que novas pesquisas sejam empreendidas, em especial investigando o papel do formador no trabalho com o pensamento geométrico em contextos de formação inicial e continuada.

APÊNDICES

APÊNDICE A
Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

“FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA”

Prezado(a) Senhor(a):

Gostaríamos de convidá-lo (a) para participar da pesquisa **“FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA”**, a ser realizada pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática (Gepefopem) da **Universidade Estadual de Londrina - UEL.** O objetivo da pesquisa é “Investigar processos de aprendizagem de professores e futuros professores que ensinam Matemática (PEM), no desenvolvimento de tarefas que envolvem o pensamento geométrico e o pensamento algébrico, em espaços colaborativos**”.** Sua participação é muito importante e ela se dará da seguinte forma: durante as aulas da disciplina Ensino de Geometria, serão desenvolvidos empreendimentos envolvendo tarefas matemática que permitam articulação de conhecimentos teóricos e práticos, a respeito do pensamento geométrico. Os futuros professores terão suas atividades gravadas por meio de filmagem e áudio (google meet) e as tarefas serão analisadas a partir de suas produções escritas. As referidas tarefas envolverão situações de sala de aula associadas a outros elementos, tais como, plano de aula, suas produções escritas, questões problematizadoras e textos.

Esclarecemos que sua participação é totalmente voluntária, podendo o (a) senhor (a): recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Esclarecemos, também, que suas informações serão utilizadas somente para os fins de pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Ao término das pesquisas as gravações serão deletadas.

Quanto aos riscos, buscaremos minimizar ao máximo os riscos nas dimensões física, psíquica, moral, intelectual, social, cultural ou espiritual dos participantes. Faremos todo o esforço para que não ocorram constrangimentos, diretos ou indiretos, por parte dos investigados. Caso os investigados sejam submetidos à alguma condição de risco, daremos todo o apoio para atender às suas necessidades.

Esclarecemos ainda, que o(a) senhor(a) não pagará e nem será remunerado(a) por sua participação. Garantimos, no entanto, que todas as despesas decorrentes da pesquisa serão ressarcidas, quando devidas e decorrentes especificamente de sua participação.

Os benefícios esperados são: a produção de material bibliográfico de educação matemática a ser utilizado em programas e cursos de formação em serviço de professores de matemática dos ensinos fundamental, médio e superior, bem como a elaboração de propostas alternativas para formação de professores de Matemática. Quanto aos riscos, faremos todo o esforço para que não ocorram constrangimentos por parte dos investigados.

Caso o(a) senhor(a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos poderá nos contatar (Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, Rua Caracas, 377 Apto 2103, CEP 86050-070, Telefone: (43) 3351 4506 ou 9102-8776, Londrina/PR, marciacyrino@uel.br, Profa. M.ª. Anna Flávia Magnoni Vieira, Rua Bandeirantes, 735, CEP 86800-060, Telefone: (43) 99614-4387, Apucarana/PR, anna_flavia_magnoni@hotmail.com) ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Londrina, situado junto ao LABESC – Laboratório Escola, no Campus Universitário, telefone 3371-5455, e-mail: cep268@uel.br.

Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas devidamente preenchida, assinada e entregue ao (à) senhor(a).

Apucarana, ___ de ________de 2021.

Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

RG: 9962947-9 – SSP/PR

Anna Flávia Magnoni Vieira

RG: 10173349-1 – SSP/PR

____, tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo em participar **voluntariamente** da pesquisa descrita acima.

Assinatura (ou impressão dactiloscópica):______________________________

Data:____________________

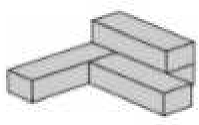
APÊNDICE B

Pré-teste

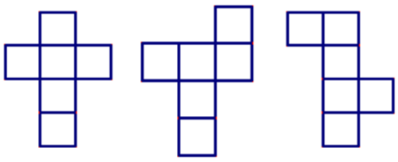
Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR – Campus Apucarana
Disciplina: Ensino de Geometria – Professora: PF1 – Data Março/2021
Aluno (a)
____

Resolva as Questões abaixo apresentando as Justificativas (resoluções)

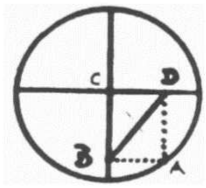
01. Quatro caixas iguais sem pintura são coladas para formar a estrutura ao lado. Um litro de tinta é necessário para pintar o exterior de cada uma dessas caixas. Quantos litros de tinta são necessários para pintar o exterior da estrutura?



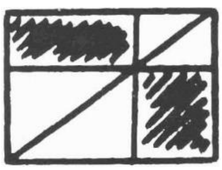
02. Tomem essas duas planificações e coloque pontos de 1 a 6 (como no dadinho) de modo que a soma das faces opostas seja 7.



03. Dado um círculo de raio conhecido e um retângulo conforme a figura, quanto mede a diagonal BD? Apresente as justificativas.



04. Compare as áreas dos retângulos escurecidos, na figura. E justifique sua resposta.

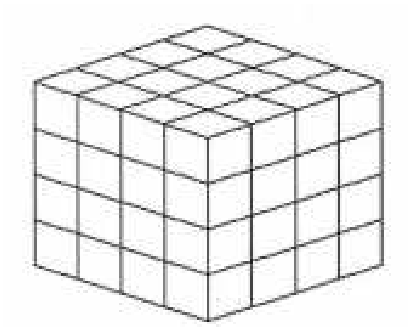


05. Um retângulo cinza e um retângulo preto sobrepõem-se. A figura mostra essa situação em quatro casos. Representando por C a área da região cinza não

comum e por P a área da região preta também não comum, qual das seguintes afirmações é verdadeira sobre o valor de C –P?

(A) No caso 1, o valor de C – P é maior do que nos outros casos.
(B) No caso 2, o valor de C – P é maior do que nos outros casos.
(C) No caso 3, o valor de C – P é maior do que nos outros casos.
(D) No caso 4, o valor de C – P é maior do que nos outros casos.
(E) O valor de C – P é o mesmo em todos os casos.

06. Um cubo é formado por 64 cubinhos iguais. Três faces desse cubo grande serão pintadas. Qual é a maior quantidade possível de cubinhos que terão exatamente uma face pintada?



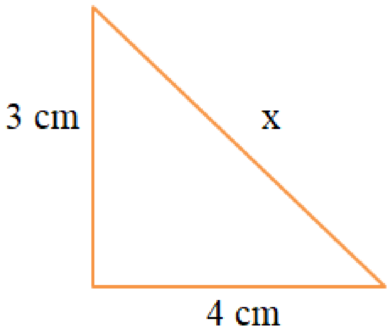
APÊNDICE C
Tarefa Apreensões de Duval

Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR – Campus Apucarana
Disciplina: Ensino de Geometria
Data Junho/2021

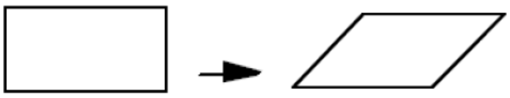
Aluno (a) ____

Resolva as questões abaixo apresentando as justificativas (resoluções)

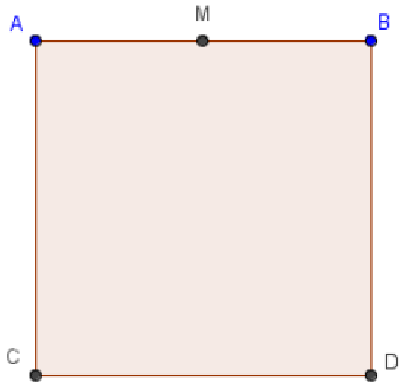
01) Determine os possíveis valores das medidas x na figura.



02) Transformar o retângulo em um paralelogramo (desenhe os passos da transformação)



03) Fazer a partição deste quadrado em três partes iguais, a partir do ponto médio do lado $\overline{BD}$:



04) Ao traçar um plano perpendicular à diagonal do cubo, qual figura geométrica é formada pela intersecção do plano com o cubo?

APÊNDICE D

Questionário Texto van de Walle (2009)

Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR – Campus Apucarana
Disciplina: Ensino de Geometria – Professora: PF1 – Data Maio/2021
Aluno (a) ____

1.Descreva em suas próprias palavras, os primeiros três níveis do pensamento geométrico da teoria dos van Hiele (Níveis 0, 1e 2). Indique em suas descrições o objeto e o produto de pensamento de cada nível. Como essas ideias estabelecem uma progressão de um nível para o seguinte?

2. Descreva as quatro características dos níveis de pensamento de van Hiele. Para cada característica, reflita sobre porque cada característica pode ser importante para professores.

3. Como as atividades voltadas para os Níveis 0, 1 e 2 diferem entre si?

4. Descreva brevemente a natureza do conteúdo em cada um dos quatro temas da geometria caracterizados nesse capítulo e nos Padrões: formas e propriedades, localização, transformações e visualização. Em sua descrição, indique uma progressão ao longo dos níveis dos van Hiele.

5. As atividades 21.1, 21.2 e 21.3 no início do capítulo foram usadas para destacar as diferenças em três níveis de pensamento geométrico dos van Hiele. Selecione três exemplos diferentes da seção formas e propriedades, um para cada nível. O que torna cada atividade apropriada para aquele nível? Repita esse exercício mais três vezes, selecionando três atividades representantes dos temas transformação, localização e visualização do conteúdo geométrico.

6. O que você pode fazer quando os alunos em sua turma estiverem em diferentes níveis de pensamento geométrico de Van Hiele?

7.Encontre um dos applets sugeridos para geometria ou um exemplo de software em geometria e explique como ele pode ser usado. Quais as vantagens de usar o computador no ensino de geometria em vez dos correspondentes desenhos ou materiais concretos?

8.Como um professor pode avaliar os alunos em termos de seu desenvolvimento geométrico geral ou de seu senso espacial? Assumindo que a teoria dos van Hiele esteja correta, por que é importante compreender onde seus estudantes estão em termos dessa teoria?

ANEXOS

ANEXO A

Plano de Ensino

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ

Credenciada pelo Decreto nº 9.538 de 05/12/2013, publicado no D.O.E. de 05/12/2013

Recredenciada pelo Decreto nº 2.374 de 14/08/2019, publicado no D.O.E. de 14/08/2019

UNESPAR

PLANO DE ENSINO

Ano Letivo:	2021
Campus:	Apucarana
Curso:	Licenciatura em Matemática
Grau:	Graduação
Disciplina:	Ensino de Geometria
Série / Período:	2º. ano
Turma:	única
Carga Hor. Total:	120
Turno:	Noturno
Teórica:	60
Prática:	10 (APCC)
Carga Hor. Semanal:	04
Carga Hor. Extensão:	60
Oferta da Disciplina:	anual
Docente:	PF1
Titulação/Área:	Doutora

EMENTA

Análise das propostas curriculares oficiais relacionadas ao ensino de geometria no Ensino Fundamental e Médio. Apreciação de materiais didáticos e paradidáticos. Discussão e articulação entre os conteúdos que permeiam os currículos da escola básica e a ciência matemática. Identificação de dificuldades tanto para o ensino como para a aprendizagem de geometria. Preparação, elaboração e desenvolvimento de propostas inovadoras de aulas e/ou oficinas de matemática relacionadas ao conteúdo de geometria. Elaboração de material didático.

OBJETIVOS

Geral

Promover na formação dos futuros professores de Matemática reflexões, discussões e ações sobre o Ensino da Geometria no contexto do Ensino Fundamental e Médio.

Específico

1- Refletir sobre as dificuldades relacionadas ao ensino e a aprendizagem de Geometria.
2- Fomentar situações potenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico.
3- Promover reflexões teóricas sobre a Geometria e seu ensino.
4- Discutir perspectivas metodológicas da Educação Matemática em torno dos conceitos de Geometria.
5- Analisar abordagens e proposta para o ensino de geometria nos documentos oficiais.
6- Investigar, analisar e utilizar softwares para o ensino de geometria.
7- Analisar capítulos de livros de Matemática que abordam a Geometria.
8- Analisar e elaborar materiais didáticos manipulativos para o ensino de geometria.
9- Elaborar propostas e oficinas de geometria articuladas com as perspectivas de ensino da Educação Matemática.

UNESPAR

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO
1. O desenvolvimento do pensamento geométrico. 2. Reflexões sobre as indicações presentes nos documentos oficiais para o ensino de geometria no ensino Fundamental Médio. 3. Análise de materiais didáticos, paradidáticos, manipulativos, softwares para o ensino de Geometria. 4. Discussão e articulação entre os conteúdos de geometria que permeiam os currículos do ensino Fundamental e Médio de Matemática. 5. As dificuldades para o ensino e para a aprendizagem de geometria. 6. Preparação, elaboração e desenvolvimento de propostas de aulas e/ou oficinas de matemática relacionadas ao conteúdo de geometria. 7. Articulação entre as Geometrias Euclidianas e as não euclidianas.

METODOLOGIA DE ENSINO
A metodologia de ensino tanto presencial ou na forma remota utilizando ferramentas da plataforma Moodle ou Google será através das perspectivas de ensino da Educação Matemática utilizando: 1- aulas exploratórias e investigativas; 2- aulas de resolução de problemas específicos de geometria; 3 - trabalhos individuais e em grupo com base em leituras de textos e pesquisas; 4 – seminários/oficinas utilizando diferentes recursos como tecnologias digitais, materiais manipuláveis; 5- resolução de problemas com régua e compasso. **APCC** A Atividade Prática como Componente Curricular presencial ou forma remota, estará vinculada as ações do projeto de extensão "Elaboração de materiais didáticos para o ensino de Geometrias em articulação com os pressupostos da Educação Matemática". Será realizada em grupo de no máximo quatro alunos. O trabalho será através de atividades orientadas, envolvendo estudos em apostilas e livros didáticos utilizados no Ensino Fundamental e/ou Médio, bem como dissertações ou teses, com o objetivo de identificar abordagens e relacioná-las com as presentes nos documentos oficiais que indicam a geometria, para posteriormente realizar a produção de materiais didáticos específicos para o Ensino Fundamental ou Médio.

RECURSOS DIDÁTICOS
Quadro, giz, datashow, laboratórios de computação, dispositivos móveis, materiais manipuláveis, plataforma Moodle, ferramentas do Google, softwares de Matemática.

CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO
As atividades desenvolvidas pelos alunos, presencialmente ou na forma remota, serão consideradas para pontuação em cada bimestre. A organização dos critérios de avaliação acontecerá de acordo com as características de cada atividade e da turma. Entre os instrumentos de avaliação a serem utilizados pelos estudantes, destacam-se: • provas escritas, com ou sem consulta, em uma ou mais fases; • trabalhos escritos individuais ou em grupo; • relatórios de participação nas aulas, resumos e resenhas; • apresentação de seminários ou oficinas; • fichamento de textos. **Exame** O exame se dará por meio de uma prova que abordará os conteúdos estudados durante o desenvolvimento da disciplina. Para a realização do exame o aluno terá que ter realizado satisfatoriamente o projeto de extensão (frequência no mínimo 75%, realização das atividades e entrega do material didático).

UNESPAR

BIBLIOGRAFIA BÁSICA
BORTOLOSSI, H. PAQUINI, R. **Simetria – História de um Conceito e suas Implicações no Contexto Escolar**, LF Editorial, 2015 BRASIL. PCNEM Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação.** Brasília: SEMT/MEC, 1999. BRASIL. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília: **Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica**, 2002. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Introdução à Geometria Espacial**. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002. DOLCE, Osvaldo; POMPEO, Jose Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. 8. ed. São Paulo: Ed. Atual, 2005. DOLCE, Osvaldo; POMPEO, Jose Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial, Posição e Métrica**. 6. ed. São Paulo: Ed. Atual, 2005. LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria.** Coleção Professor de Matemática, SBM, 2001.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR
BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular. Brasília:** MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 02/03/2021. EVES, Howard. **História da Geometria** / Houward Eves; trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1992. FONSECA, Maria, C.F.R, et al. **O Ensino de geometria na escola fundamental.** 2.ed. Belo Horizonte: Autentica, 2002. KALEFF, Ana Maria M. R. **Vendo e entendendo poliedros**: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF, 1998. LIMA, Elon L. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: Copyright ©. 1991. LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria?. **Educação Matemática em Revista**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM – p. 4 – 13, Ano III, nº 4 – 1º sem. 1995.

APROVAÇÃO DO COLEGIADO
Aprovado em reunião do Colegiado de Curso em: 05/03/2021 Ata nº **2021-04**

Assinaturas

Docente	Coordenação do Curso

ANEXO B

Texto “Apreensões geométricas, segundo Raymond Duval”

Universidade Estadual de Londrina

GEPEFOPEM
Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática

Apreensões geométricas segundo Raymond Duval

As figuras geométricas têm um papel importante nos processos de ensino e de aprendizagem da geometria, pois podem auxiliar na busca de solução de problemas. Essas figuras podem representar uma situação geométrica de forma geral, ao contrário de quando apresentada numa declaração verbal.

A prática de sala de aula e alguns estudos evidenciam que algumas dificuldades dos estudantes em aprender geometria estão associadas à ausência de figuras na busca de métodos de investigação baseados em aproximações progressivas necessárias para a solução de um problema (heurística da resolução de um problema).

No entanto, a existência de uma figura não garante a efetiva compreensão do problema ou de sua heurística de resolução. Segundo Duval, existe uma lacuna entre o que uma figura “mostra” a um estudante e o que “mostra” ao professor, assim como entre a apreensão imediata e espontânea e a forma matemática de apreensão de suas informações. As propriedades matemáticas necessárias para a resolução de um problema que envolve uma situação geométrica não “estão” na figura em si, mas no sujeito que as mobiliza a partir da sua exploração. Ou seja, os conhecimentos necessários para a resolução de um problema geométrico dependem do sujeito e não do problema proposto ou da figura apresentada.

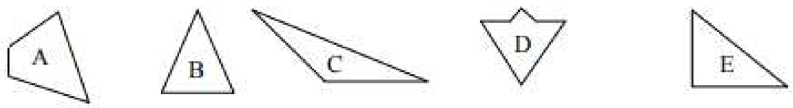
Segundo Duval (1994) as apreensões geométricas são atividades cognitivas responsáveis pela compreensão das representações em geometria, e são distinguidas em quatro tipos: apreensão perceptiva, apreensão operatória, apreensão discursiva e apreensão sequencial.

Apreensão perceptiva

A apreensão perceptiva é aquela global, que permite identificar ou reconhecer, imediatamente, uma forma ou objeto, seja no plano ou no espaço, isto é, tem a função epistemológica de identificação de objetos em duas ou três dimensões. É independente de propriedades matemáticas, assim, em algumas situações a visão pode ser o único processo para conduzir à resolução, como no exemplo a seguir.

Figura 1

Assinale o(s) triângulo(s):



Fonte: Teste van Hiele

Porém, em vista dessa atitude imediata, a apreensão perceptiva pode ser enganosa em algumas situações geométricas e insuficiente de modo que o sujeito necessita recorrer a outras apreensões para chegar a uma solução. Uma apreensão é considerada perceptiva quando ela não dependente de restrições técnicas de instrumentos de construção (compasso, régua, etc) e nem da mobilização de propriedades geométricas, explicitadas por meio do discurso.

Apreensão discursiva

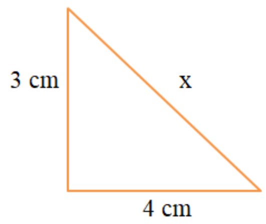
A apreensão discursiva tem natureza dedutiva, corresponde à explicação que o sujeito dá para certas propriedades matemáticas de uma figura, para além das indicadas nos enunciados, legendas ou hipóteses que a acompanham, ou seja, envolve o conhecimento do sujeito a respeito das propriedades matemáticas, as quais não “aparecem” na figura. Essa explicação pode estar pautada, num discurso natural ou teórico. O discurso natural se dá por meio de uma nomeação, descrição ou argumentação, já o discurso teórico está pautado em definições, teoremas que levam a uma organização dedutiva do discurso. Sua função epistemológica é a da demonstração.

Quando uma figura é representada numa tarefa matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, apreensão perceptiva, que permite identificar ou reconhecer uma forma ou objeto, e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva de elementos figurais.

Estas duas atitudes geram um conflito, porque a figura mostra objetos que se destacam independente do enunciado, que podem ser relevantes ou não para chegar-se a solução da situação geométrica, e em contrapartida os objetos nomeados no enunciado das hipóteses nem sempre são necessariamente aqueles que aparecem de forma espontânea. E ainda, em alguns casos a apreensão perceptiva sobrepõe à apreensão discursiva fazendo com que hipóteses levantadas nos enunciados sejam deixadas de lado pela maioria dos estudantes. No exemplo a seguir, temos uma situação geométrica em que a apreensão perceptiva pode ser enganosa.

Figura 2

Determine os possíveis valores das medidas x na figura.



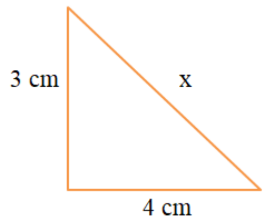
Fonte: Autores

Nesse exemplo, os alunos são levados à aplicação do Teorema de Pitágoras ao visualizarem um “triângulo retângulo”, devido à sua percepção em relação à posição da figura, de “parecer” possuir um ângulo reto, e ainda, a clássica questão do triângulo pitagórico com lados medindo 3, 4 e 5. Dizemos nesse caso, que a apreensão discursiva é sobreposta pela apreensão perceptiva, já que ao pensar que o lado do triângulo mede 5 cm, o estudante ignora a premissa imposta do enunciado “os possíveis valores de x”. Veja a solução a seguir.

Figura 2

Solução:

Para determinar os possíveis valores de x, devemos considerar que para construir um triângulo é necessário que a medida de qualquer um dos lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois e maior que o valor absoluto da diferença entre essas medidas (condição de existência).



Logo, temos que:

$x < 3+4$ e $4 < x+3$

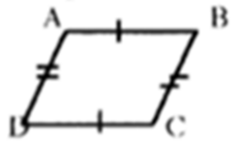
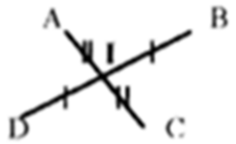
$x < 7$ $1 < x$

Dessa forma, os possíveis valores de x pertencem ao intervalo $1<x<7$.

Fonte: Autores

No quadro a seguir, apresentam-se as diferentes apreensões de uma figura.

Quadro 1

Apreensão perceptiva	**Apreensão discursiva de uma figura**: associação de gestalts e declarações que determinam o objeto representado	
I. Visual	**(mudança de ancoragem)** II a. Visual → Discursivo	II b. Discursivo → Visual
	 “ABCD é um paralelogramo” • A representação geométrica é dada através das relações entre as formas constituintes	“ABCD um paralelogramo”  

Fonte: Adaptado de Duval (1998)

A figura I apresenta uma forma que pode representar qualquer objeto: telhado, tampo de uma mesa, um retângulo dependendo da sua perspectiva. Já as figuras IIa e IIb a mesma forma é declarada como um paralelogramo, ou seja, deixa de ser vista como um objeto qualquer e passa a representar um objeto matemático[61]. Na visualização IIa, vemos primeiro a figura e depois temos uma declaração discursiva, a qual declara que a figura ABCD é um paralelogramo, já na figura IIb, temos primeiro a declaração discursiva e na sequencia duas configurações diferentes do mesmo objeto matemático, no caso o paralelogramo. Na primeira configuração da IIb temos implícita a ideia de que os lados opostos paralelos têm a mesma medida (“Um dos critérios usados para classificar um quadrilátero como paralelogramo baseia-se nos seus lados: se um quadrilátero possui lados opostos paralelos e congruentes, então, ele é um paralelogramo), e na segunda configuração da IIb temos que as diagonais se interceptam no ponto médio (Propriedade: “As diagonais de um paralelogramo cruzam-se em seus pontos médios”).

[61] Segundo Duval (1998), para uma figura representar um objeto matemático, deve cumprir dois requisitos específicos: ser uma configuração, ou seja, ser uma junção ou uma fusão de várias formas/imagens com relação entre elas, e estar ancorada em uma declaração pautada em algumas propriedades representadas pelas formas/imagens (hipóteses).

Apreensão operatória

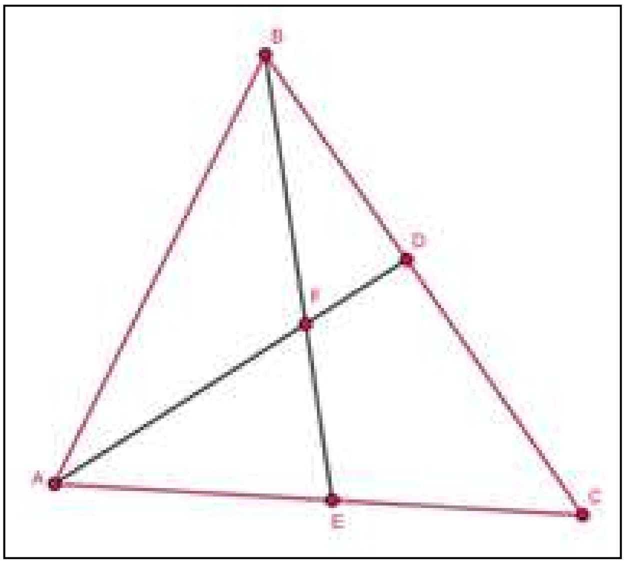
Na apreensão operatória são feitas modificações figurais em uma figura em busca da modificação heuristicamente relevante, isto é, aquela que será útil para solucionar um problema. Assim, sua função epistemológica é a heurística.

No entanto, são modificações que não alteram a dimensão e nem o registro da figura inicial, isto é, quando alteramos a representação de um objeto matemático no registro das figuras geométricas para um registro simbólico já não temos mais uma modificação figural.

A apreensão operatória é a que mais se aproxima da apreensão perceptiva, mesmo que em níveis de processamento diferentes. Além disso, é independente do discurso e de propriedades matemáticas.

Por exemplo, um sujeito pode dividir o polígono abaixo em quatro partes quaisquer sem saber o que é um triângulo e quais são suas propriedades, da mesma forma que o paralelogramo, que vem em seguida, isto é, posso “recortar” um “pedaço” e “colá-lo” em outro lugar, sem necessariamente saber o que está sendo feito matematicamente. No entanto, muitas vezes a apreensão operatória é utilizada em conjunto com as propriedades matemáticas para resolver problemas geométricos.

Figura 3



Fonte: Autores

O triângulo ABC, acima, foi dividido em quatro partes. Assim, podemos identificar algumas subconfigurações dessa figura inicial, como os polígonos: ABF, BFD, ABD, CDFE, AFBC, entre outros.

As figuras, inicialmente, são constituídas por muitas subconfigurações, que podem ser mais ou menos visíveis dependendo de certos fatores, como por exemplo, a orientação vertical ou horizontal, ou a convexidade da figura.

As modificações figurais podem ser de três tipos: mereológica, ótica e posicional. A modificação mereológica é a mais utilizada e consiste em dividir a figura inicial, como feito na Figura 2. Essa modificação trabalha com as noções de parte e todo e sua operação mais conhecida é a reconfiguração, isto é, dividir uma figura inicial e recombinar (ou não) suas partes formando outra figura, como nos casos das Figuras 4 e 5.

Figura 3

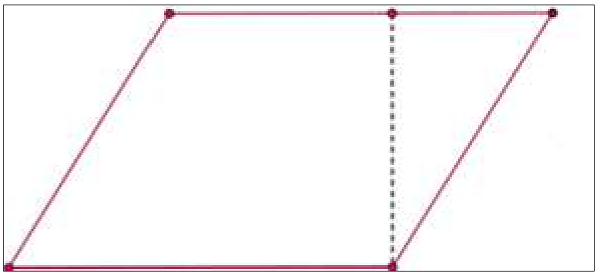
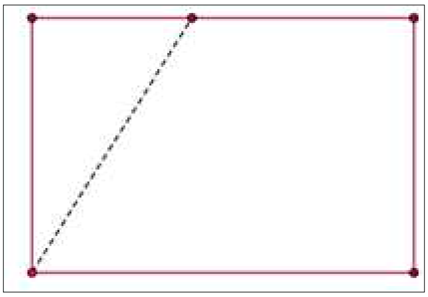


Figura 4



Fonte: Autores

Esse tipo de modificação é facilitado se as subconfigurações necessárias e relevantes para resolver um problema já estiverem indicadas na figura inicial, como exemplo a convexidade ou complementaridade.

A modificação ótica consiste em modificar o tamanho ou a inclinação da figura inicial, isto é, ampliar, reduzir ou inclinar (Figuras 5 e 6)

Figura 5

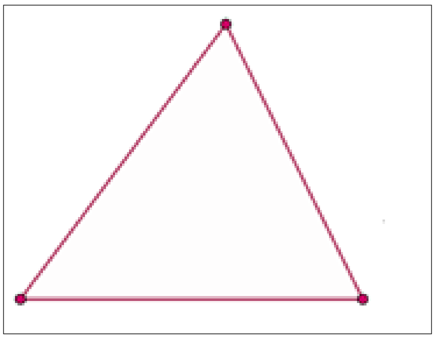
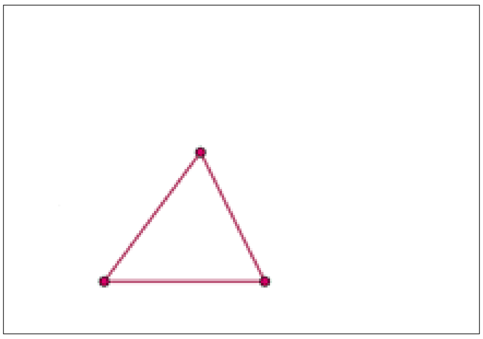


Figura 6

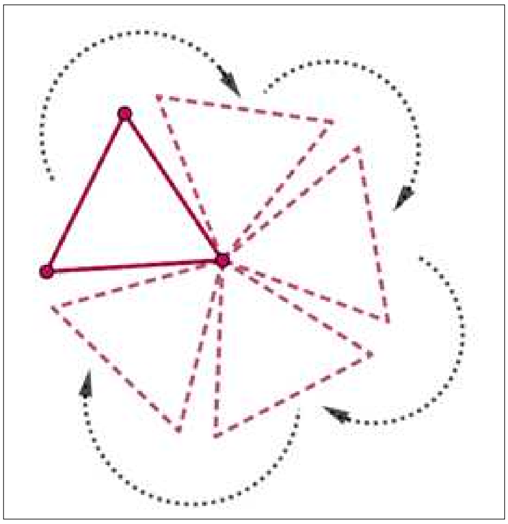


Fonte: Autores

Essa modificação é muito utilizada em problemas de perspectiva e homotetia, onde é necessário trabalhar com pontos de fuga e linhas de perspectiva.

A modificação de posição, ou posicional, consiste em alterar a posição da figura inicial no plano, utilizando, por exemplo, as operações de reflexão, translação e rotação (Figura 7).

Figura 7



Fonte: Autores

Esse tipo de modificação é facilitado dependendo da orientação da figura inicial, privilegiando as orientações comumente utilizadas, ou se as linhas de perspectiva forem distintas dos lados da figura, entre outros fatores.

Apreensão sequencial

A apreensão sequencial está ligada à ordem de construção de uma figura e à atividade de descrição dela, no sentido de descrever os passos utilizados para reproduzir a ordem dos elementos que possibilitam a sua construção. Assim, a apreensão sequencial corresponde a um reconhecimento, por parte do sujeito, da ordem dos passos que o levem a construção de uma figura, que não depende somente de propriedades matemáticas (definições, teoremas, axiomas, ...), mas de outras restrições técnicas que estão ligadas ao uso de instrumentos que possibilitem construí-la, como: régua e compasso e/ou softwares de geometria.

Veja o exemplo da construção a seguir.

Problema: Construa um triângulo retângulo ABC, conhecendo-se a hipotenusa e um cateto.

Figura 8

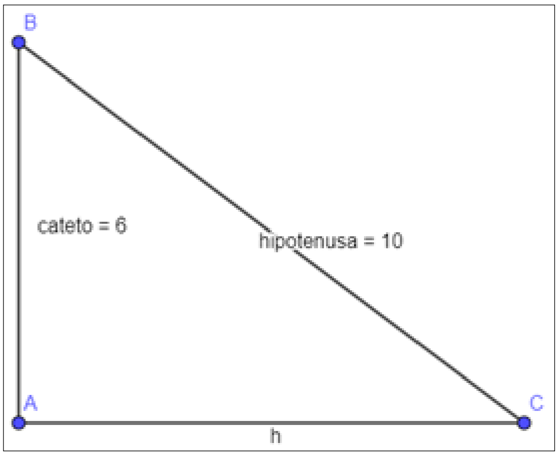
Fonte: Autores

Figura 9

Fonte: Autores

Primeiramente, pode ser construído um esboço (Figura 10) da situação proposta destacando os elementos que estão descritos no enunciado, no intuito de reconhecer os passos para a construção da figura.

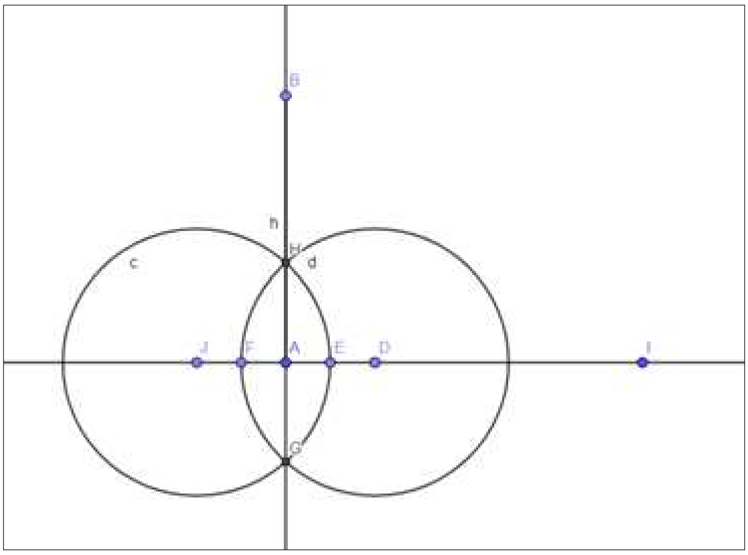
Figura 10



Fonte: Autores

O esboço permite observar a necessidade de construir o cateto do triângulo retângulo que mede 6 cm para então construir a hipotenusa que tem medida igual a 10 cm. Para construir o cateto, o indivíduo necessita conhecer alguns conceitos geométricos, como reta perpendicular, segmento de reta, arco e ponto. Na figura 11, temos a construção do cateto que tem a medida de 6 cm, e a seguir os passos para a sua construção.

Figura 11 - Construção do Cateto de medida de 6 cm



Fonte: Autores

Passos

1º) Construir uma reta r qualquer e sobre ela marcamos dois pontos quaisquer A e B.

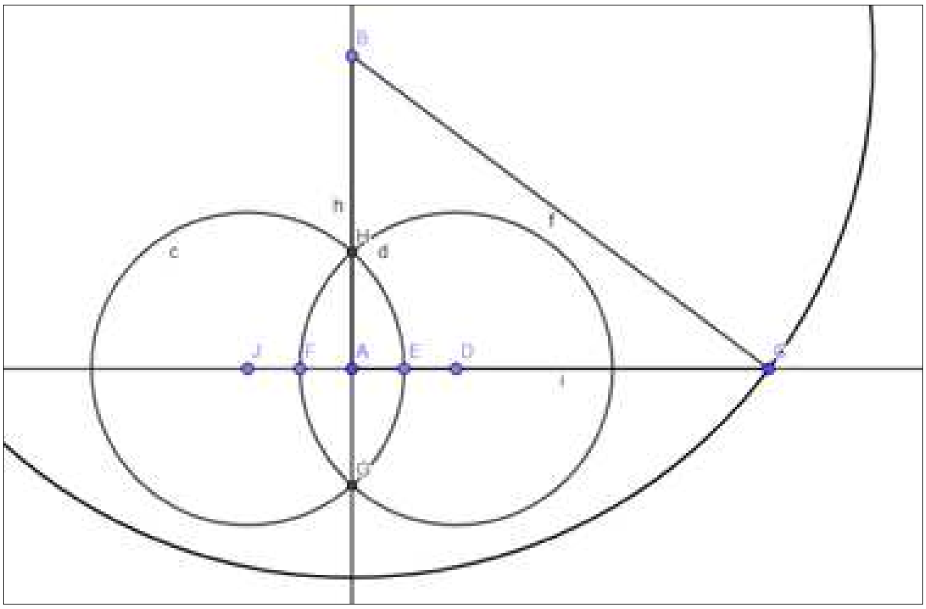
2º) Construir uma reta perpendicular que passe pelo ponto A.

3º) Nesta reta perpendicular, marcamos o ponto B que corresponde a medida de 6 cm que é a medida dada de um dos catetos do triângulo retângulo.

4º) Marcamos o segmento AB como o cateto do triângulo retângulo que mede 6 cm.

O próximo passo na resolução do exercício é a construção da hipotenusa do triângulo retângulo que tem medida igual a 10 cm. Para isso, devemos utilizar o compasso para transportar a medida para a figura.

Figura 12 - Construção da Hipotenusa com medida de 10 cm



Fonte: Autores

Passos

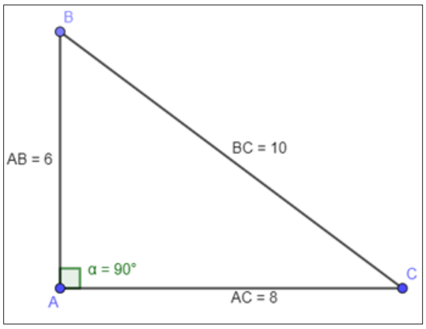
1º) Utilizando um compasso, transportaremos a medida de 10 cm correspondente a medida da hipotenusa, dado no enunciado da questão.

2º) Com ponta seca no ponto B e abertura igual a 10 cm, marcamos sobre a reta r um ponto C.

3º) Ligar o ponto B ao ponto C e o ponto A ao ponto C.

4º) O triângulo ABC corresponde ao triângulo retângulo de cateto e hipotenusa medindo, respectivamente, 6 cm e 10 cm.

Figura 13 – Triângulo solicitado no problema



Fonte: Autores

Esse tipo de apreensão permite melhor caracterização dos objetos matemáticos, relacionando-os às propriedades que foram abordadas em sua construção. Sua função epistemológica é de fornecer um modelo e aparece de forma clara com o uso de certos instrumentos de construção geométrica, do qual as ações (modificações feitas) sobre o seu representante permite obter seu (chegar ao) resultado.

Na sequência apresenta-se uma sistematização das principais características e função epistemológica de cada apreensão apresentada no texto.