Universidade Estadual de Londrina

OSVALDO INAREJOS FILHO

POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Londrina
2023

OSVALDO INAREJOS FILHO

POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Professora Doutora Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, por meio do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

O85p Inarejos, Osvaldo.

Possíveis contribuições do Pensamento Matemático Avançado para o ensino de Matemática na Educação Básica / Osvaldo Inarejos. - Londrina, 2023.
222 f. : il.

Orientadora: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2023.

Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Pensamento Matemático Avançado - Tese. 3. Matemática Escolar - Tese. 4. Conhecimento Matemático para o Ensino - Tese. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

OSVALDO INAREJOS FILHO

POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Prof. Dr. Christian James de Castro Bussmann
Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP

____
Prof. Dra. Eleni Bisognin
Universidade Franciscana – UFN

____
Prof. Dr. Henrique Rizek Elias
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

____
Prof. Dra. Ligia Bittencourt Ferraz de Camargo
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 17 de fevereiro de 2023.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, pela oportunidade, confiança, conselhos, colaboração com esta tese e por me integrar ao GEPPMat.

Ao GEPPMat, pelo acolhimento, companheirismo, discussões profícuas e pela leitura e apontamentos com relação aos meus trabalhos.

Aos membros da banca examinadora, titulares e suplentes, pela leitura, sugestões, críticas construtivas, provocações reflexivas e apontamentos em geral.

Aos estudantes participantes da pesquisa, pela aceitação da participação e pelo envolvimento.

Aos professores do PECEM, pelos ensinamentos e reflexões proporcionadas em suas aulas.

Aos colegas que conheci nas disciplinas do programa, pela colaboração e interesse para aprendermos juntos.

À minha esposa, pelo apoio e pelos auxílios nas revisões.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

INAREJOS, Osvaldo. **Possíveis contribuições do Pensamento Matemático Avançado para o ensino de Matemática na Educação Básica**. 2023. 222 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

RESUMO

O Pensamento Matemático Avançado (PMA) possui caracterizações apresentadas por diferentes autores, com convergências e algumas divergências, indicando diferentes perspectivas de PMA. Nesta tese, tem-se por objetivo discutir e elencar, a partir de diferentes perspectivas de PMA, possíveis contribuições desse pensamento matemático e de seu referencial teórico para o ensino de Matemática na Educação Básica. Para isso, realiza-se um cotejo de diferentes caracterizações do PMA de forma a se identificar e nomear perspectivas desse pensamento. Apresenta-se um levantamento de pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA e envolveram professores ou futuros professores, interpretando-se, a partir das considerações dos autores, possíveis relações entre o PMA e o ensino de Matemática na Educação Básica. Com base nas relações interpretadas no levantamento, foram reunidas possibilidades de contribuições do referencial teórico e do PMA dos professores para o ensino na Educação Básica, que foram organizadas em uma pesquisa teórica e especulativa. Algumas articulações teóricas são realizadas, tais como entre o desenvolvimento do PMA e a aprendizagem em Matemática Avançada, além de relações entre o Pensamento Matemático Elementar (PME) e o PMA (em uma perspectiva de PMA nomeada como do pensamento formal-axiomático) com a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica. São apresentados exemplos de situações hipotéticas em que o PMA dos professores pode contribuir para o ensino de Matemática na Educação Básica. Das possíveis contribuições do PMA dos professores elencadas nesta tese, pode-se destacar, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, a formulação de justificativas inspiradas em demonstrações e a organização das ideias em uma sequência lógica em situações como mediação de diálogos e validação de conjecturas. Na perspectiva nomeada como da complexidade dos processos de pensamento, pode-se destacar possíveis contribuições do PMA dos professores para a autorregulação de seu pensamento matemático e garantia da validade geral de um resultado. Na perspectiva nomeada como das concepções dos conceitos, o pensamento proceitual flexível pode contribuir para que os professores pensem matematicamente a respeito de resoluções dos estudantes, para compreendê-las, imaginar possibilidades e orientá-los. Conclui-se que, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, as possíveis contribuições do PMA dos professores para o ensino de Matemática que foram elencadas estão especialmente vinculadas às deduções lógicas características desse pensamento matemático, pouco se remetendo a uma abordagem axiomática rígida ou às estruturas gerais características da Matemática Acadêmica.

Palavras-chave: Conhecimento Matemático para o Ensino. Educação Matemática. Matemática Acadêmica. Matemática Escolar. Pensamento Matemático Avançado.

INAREJOS, Osvaldo. **Possible contributions of Advanced Mathematical Thinking to Mathematics teaching in Basic Education**. 2023. 222 f. Thesis (Doctorate in Science Teaching and Mathematics Education) – Center of Exact Sciences, State University of Londrina, Londrina, 2023.

ABSTRACT

Advanced Mathematical Thinking (AMT) has characterizations presented by different authors, with convergences and some divergences, indicating different perspectives of AMT. In this thesis, the aim is to discuss and list, from different AMT perspectives, possible contributions of this mathematical thinking and its theoretical framework to Mathematics teaching in Basic Education. For this, a comparison of different characterizations of the AMT is carried out in order to identify and name perspectives of this thinking. A survey of studies that used the AMT theoretical framework and involved teachers or prospective teachers is presented and, based on the authors' considerations, possible relationships between the AMT and the teaching of Mathematics in Basic Education are interpreted. Based on the relations interpreted in the survey, possibilities of contributions from the theoretical framework and the AMT of teachers for teaching in Basic Education were gathered, which were organized in a theoretical and speculative research. Some theoretical articulations are carried out, such as between the development of AMT and learning in Advanced Mathematics, as well as relations between Elementary Mathematical Thinking (EMT) and AMT (in a AMT perspective named as formal-axiomatic thinking) with School Mathematics and Academic Mathematics. Examples of hypothetical situations in which teachers' AMT can contribute to the teaching of Mathematics in Basic Education are presented. Of the possible contributions of the AMT of the teachers listed in this thesis, it can be highlighted, in the perspective of formal-axiomatic thinking, the formulation of justifications inspired by demonstrations and the organization of ideas in a logical manner in situations such as mediation of dialogues and validation of conjectures. In the perspective named as the complexity of thinking processes, possible contributions of the AMT of the teachers for the self-regulation of their mathematical thinking and guarantee of the general validity of a result can be highlighted. In the perspective named as conceptions of concepts, flexible proceptual thinking can help teachers to think mathematically about students' resolutions, to understand them, imagine possibilities and guide them. It is concluded that, from the perspective of formal-axiomatic thinking, the possible contributions of the teachers' AMT to the Mathematics teaching that were listed are especially linked to the logical deductions characteristic of this mathematical thinking, referring little to a rigid axiomatic approach or to the general structures characteristic of the Academic Mathematics.

Key-words: Academic Mathematics. Advanced Mathematical Thinking. Mathematical Education. Mathematical Knowledge for Teaching. School Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CCK	Conhecimento Comum do Conteúdo
GEPPMat	Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático
HCK	Conhecimento do Conteúdo no Horizonte
KCC	Conhecimento do Conteúdo e Currículo
KCS	Conhecimento do Conteúdo e Estudantes
KCT	Conhecimento do Conteúdo e Ensino
MKT	Conhecimento Matemático para o Ensino
PECEM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
PMA	Pensamento Matemático Avançado
PME	Pensamento Matemático Elementar
SCK	Conhecimento Especializado do Conteúdo

SUMÁRIO

1 SOBRE ESTA TESE

No início da minha[1] graduação, licenciatura em Matemática[2], eu me indagava a respeito da utilidade dos assuntos abordados nas disciplinas do curso. Participando do Projeto Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), comecei a perceber relações entre a matemática trabalhada na Educação Básica e a que eu estudava. Passados alguns anos, como professor no Ensino Superior, percebi o quanto precisava pensar matematicamente em sala de aula. Essa percepção só aumentou quando atuei na Educação Básica, utilizando definições e deduções aprendidas na graduação para me organizar ao ensinar Matemática. Contudo, eu sentia uma dificuldade em analisar esse pensamento matemático[3] e discursar a respeito, apresentar exemplos e levar essa questão a discussão. Com a oportunidade de integrar-me no Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPMat), passei a estudar temas que se relacionam a essa inquietação.

Dentre esses temas, estão algumas pesquisas que utilizaram o referencial teórico do Pensamento Matemático Avançado (PMA) e envolveram professores ou futuros professores de Matemática, tais como Bertolazi (2012), Bianchini e Machado (2013, 2015), Broetto e Santos-Wagner (2017a), Flôres, Fonseca e Bisognin (2020), Fonseca e Henriques (2018), Fontenele (2018), Gualandi (2019), Jesus e Savioli (2019), Jorge (2017), Kirnev (2012), Lopes (2019), Menezes (2018), Sousa e Almeida (2017), Proença (2019), Teófilo, Lima e Menezes (2020) e Vieira, Souza e Imafuku (2020). Percebemos que essas pesquisas, em geral, visaram contribuir para o conhecimento matemático dos professores, ou seja, o desenvolvimento do PMA nos professores ou futuros professores costuma ser visto nas pesquisas da área, a nosso ver, como um meio para que os professores

[1] A primeira pessoa do singular será utilizada nesta tese para se referir às declarações do autor. A primeira pessoa do plural será utilizada para se referir aos discursos do autor e de sua orientadora.
[2] Nesta tese, utilizamos a palavra Matemática em maiúsculo ao nos referirmos à Matemática como todo o corpo de conhecimentos matemáticos, constituindo um nome próprio. Por vezes, nos referimos a uma matemática, em minúsculo, por se tratar de alguma matemática entre outras que existem. Algumas dessas matemáticas são especificadas e assim constituem nome próprio, como a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica, sendo assim escritas em maiúsculo. O mesmo critério é adotado para diferenciar pensamento matemático (em minúsculo) de alguns pensamentos matemáticos com nome próprio, como o Pensamento Matemático Avançado e o Pensamento Matemático Elementar.
[3] Conforme Dreyfus e Eisenberg (1996, p. 254, tradução nossa), entendemos o pensamento matemático como "[...] o tipo de processo de pensamento usado para fazer matemática", que consideramos, conforme Dreyfus (2002), como uma atividade mental ligada à atividade matemática.

aprendam conteúdos matemáticos presentes em sua formação inicial ou continuada.

Conforme Shulman (1987), Tardif (2012) e Ball, Thames e Phelps (2008), o ensino de Matemática requer dos professores[4] uma diversidade de saberes ou conhecimentos que vai além do conhecimento do assunto. Dessa forma, consideramos refletir se o PMA pode contribuir com o ensino na Educação Básica para além do aprendizado dos professores de conceitos matemáticos. Essa possível contribuição não foi foco das pesquisas que encontramos no levantamento.

Isso nos leva a indagar a respeito de que contribuições um pensamento possivelmente desenvolvido durante a aprendizagem de conteúdos de Matemática Avançada[5] poderia oferecer ao ensino de Matemática na Educação Básica[6]. Essa indagação nos levou a articular esse tema do PMA com a teorização de Moreira e David (2007) a respeito da Matemática Escolar e da Matemática Acadêmica.

Além disso, tal reflexão a respeito de possíveis contribuições do PMA requer que pontuemos a que pensamento matemático "avançado" nos referimos. Por exemplo, trata-se de um pensamento matemático em que o pensamento é considerado, de acordo com determinados critérios, como avançado[7], ou no qual a matemática envolvida que é caracterizada como avançada? (HAREL; SOWDER, 2005).

Por isso, precisamos identificar diferentes perspectivas de PMA para especificar a qual ou quais pensamentos matemáticos nos referimos ao discutir suas possíveis contribuições. Além disso, ao invés de focarmos em uma dessas perspectivas que pretendemos identificar, escolhemos abordar diferentes perspectivas de PMA, visando enriquecer a discussão quanto a pensamentos matemáticos de professores de Matemática.

Assim, pretendemos discutir e elencar, a partir de diferentes perspectivas de PMA, possíveis contribuições desse pensamento matemático e de seu referencial teórico para o ensino de Matemática na Educação Básica.

---

[4] Para evitar repetições, escrevemos 'professores' nos referindo a professores de Matemática.

[5] Adotaremos o termo Matemática Avançada como o corpo de conhecimentos matemáticos estudados em nível de graduação, pós-graduação ou pesquisa.

[6] Nesta tese, focada no ensino por parte de professores de Matemática, nos referimos à Educação Básica como a educação escolar nas etapas do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio.

[7] A palavra "avançado" será utilizada algumas vezes nesta tese. Entendemos como "avançado" algo que depende de um avanço, ou seja, que depende de algo anterior, estando à frente cronologicamente. Nesse sentido, algo "mais avançado" não necessariamente seria "melhor" ou "superior".

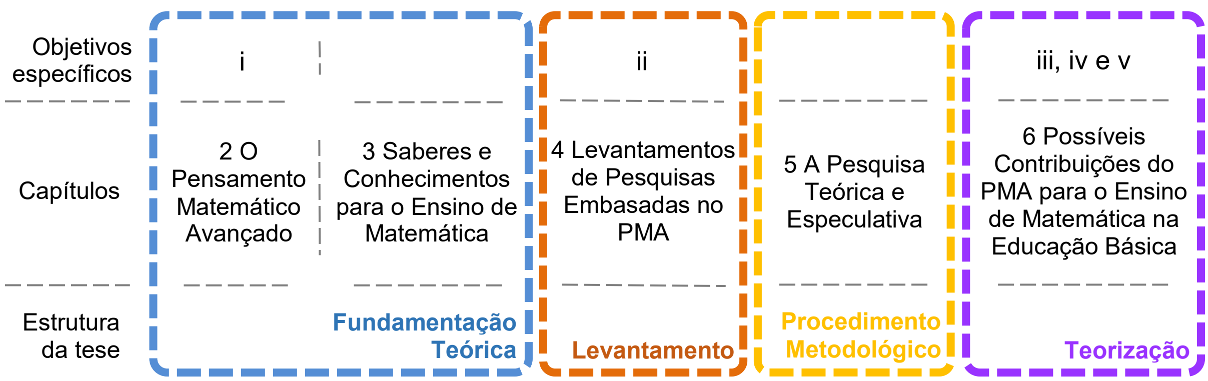
Considerando esse objetivo, esclarecemos que a expressão “possíveis contribuições do Pensamento Matemático Avançado” no título desta tese refere-se tanto a possíveis contribuições do PMA dos professores de Matemática quanto de conhecerem o referencial teórico.

Desse modo, estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

i. cotejar diferentes caracterizações do PMA para identificar e nomear algumas perspectivas desse pensamento matemático;
ii. analisar pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA e envolveram professores ou futuros professores, de forma a interpretar, a partir das considerações dos pesquisadores, possíveis relações entre o PMA e o ensino de Matemática na Educação Básica;
iii. explicitar relações entre o desenvolvimento do PMA e a aprendizagem em Matemática Avançada;
iv. relacionar o Pensamento Matemático Elementar (PME) e o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, com a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica;
v. apresentar exemplos de situações hipotéticas em que o PMA dos professores pode contribuir para o ensino de Matemática na Educação Básica.

Na Figura 1, apresentamos a forma como a tese está estruturada com relação a esses objetivos e aos capítulos.

Figura 1 – Estrutura da tese com relação aos objetivos e capítulos



Fonte: os autores.

Dessa forma, cotejamos, no Capítulo 2, diferentes caracterizações do PMA, bem como identificamos algumas perspectivas que nomeamos para utilização posterior. No Capítulo 3, abordamos os conceitos de Matemática Acadêmica e Matemática Escolar de Moreira e David (2007), bem como o Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), complementando, assim, a fundamentação teórica desta tese. No Capítulo 4, apresentamos levantamentos que realizamos de trabalhos relacionados e nossas interpretações, a partir das considerações dos pesquisadores, de possíveis relações entre o PMA e o ensino de Matemática na Educação Básica, o que nos ajudou a identificar potenciais contribuições do PMA para esse ensino. No Capítulo 5, dissertamos a respeito da pesquisa teórica e especulativa, descrevendo o procedimento metodológico adotado nesta tese, especialmente no Capítulo 6, em que teorizamos a respeito de possíveis contribuições do PMA para o ensino de Matemática na Educação Básica.

2 O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Alguns autores, tais como Tall (2002) e Dreyfus (2002), apresentam caracterizações do Pensamento Matemático Avançado (PMA) em suas teorizações. Outras teorizações, como as de Resnick (1987), Tall e Vinner (1981) e Sfard (1987, 1991), são associadas ao referencial teórico do PMA (DOMINGOS, 2006; TALL, 2002, 2013).

Desse modo, alguns autores, tais como Domingos (2003, 2006) e Savioli (2016), se dedicaram a analisar diferentes teorizações e elencar semelhanças entre elas, reunindo assim diversas caracterizações do PMA[8].

Outros pesquisadores focaram em algumas caracterizações, embasadas por um autor ou dois, e fizeram sua pesquisa considerando tais características do PMA[9].

Neste capítulo, cotejamos diferentes caracterizações do PMA. Percebemos convergências e divergências nessas caracterizações, que podem indicar diferentes perspectivas de PMA, cada uma reunindo características que não se contradizem.

Nesta tese, estamos considerando que cada uma dessas perspectivas pode ser utilizada em pesquisas e, para discutir possíveis contribuições do PMA para o ensino de Matemática na Educação Básica, podemos dissertar a respeito de mais de uma perspectiva de PMA, visando enriquecer a discussão quanto a pensamentos matemáticos de professores de Matemática. Para tanto, precisamos especificar, ao longo dessa discussão (especialmente no Capítulo 6), a qual perspectiva nossas declarações se referem. Por isso, neste capítulo, identificamos e nomeamos algumas perspectivas de PMA.

Uma maneira de especificar perspectivas de PMA ao trabalhar com mais de uma em conjunto seria diferenciá-las pelo nome de seus autores. Desse modo, teríamos, por exemplo, o PMA de Tall. No entanto, comparando as diferentes caracterizações que os autores propõem do PMA, verificamos que muitas das

[8] Marins (2014), por exemplo, obteve características em comum de três diferentes autores e aplicou a síntese realizada na análise de registros escritos de estudantes.
[9] Por exemplo, Bianchini e Machado (2013, 2015), Bussmann, Klaiber e Silva (2017), Bussmann e Savioli (2020), Elias, Barbosa e Savioli (2011), Flôres, Fonseca e Bisognin (2020), Fontenele (2018), Inarejos *et al*. (2022), Jesus e Savioli (2019), Jorge (2017), Kirnev (2012), Klaiber (2019), Lopes, G. L. O. (2017), Lopes (2019), Menezes (2018), Proença (2019), Sousa e Almeida (2017) e Vieira, Souza e Imafuku (2020).

características do PMA condizem-se, de forma que podemos identificar perspectivas de PMA e aproveitar, em cada uma, contribuições de diversos autores. Desse modo, identificamos três perspectivas de PMA, que nomeamos ao final deste capítulo.

Sendo assim, apresentamos, neste capítulo, uma pesquisa histórico-bibliográfica, em que promovemos uma metanálise. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 71), a pesquisa histórico-bibliográfica "se propõe a realizar análises históricas e/ou revisão de estudos ou processos tendo como material de análise documentos escritos e/ou produções culturais garimpados a partir de arquivos e acervos".

Não elaboramos um estado da arte, por não pretender descrever tendências gerais da área, mas sim uma metanálise, pois realizamos "uma análise crítica de um conjunto de estudos já realizados tentando extrair deles informações adicionais que permitam produzir novos resultados, transcendendo aqueles anteriormente obtidos" (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 71). Pretendemos apresentar a nossa visão do PMA, elucidando-a pela forma como identificamos suas características de acordo com algumas perspectivas. Segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 183), "a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras".

Além disso, está inclusa neste capítulo e no próximo a fundamentação teórica que será utilizada nos capítulos seguintes.

Sendo assim, abordamos caracterizações do PMA propostas por diferentes autores (Seção 2.1), para depois comparar as características abordadas (Seção 2.2) e então identificar e nomear perspectivas desse pensamento (Seção 2.3). A seguir, na Seção 2.1, apresentamos um resumo de ideias de alguns autores em ordem cronológica. Cada autor inclui em seus trabalhos exemplos que ilustram suas caracterizações e processos de PMA descritos. Porém, neste texto, reduzimos a apresentação de exemplos e enfatizamos aspectos teóricos, porque são essas ideias mais gerais que são utilizadas no cotejo que realizamos e nas perspectivas que identificamos.

2.1 Caracterizações do Pensamento Matemático Avançado

O encontro anual do *International Group for the Psychology of*

Mathematics Education, ocorrido em 1985 em *Noordwijkerhout*, na Holanda, marcou o início das pesquisas do PMA, com a criação do *Advanced Mathematical Thinking Group*. Os pesquisadores desse grupo fundamentaram-se na Psicologia da Educação, em especial nos trabalhos de Jean Piaget[10] e Lev Vygotsky[11], visando ampliá-la a questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de pessoas adultas (ALMEIDA; IGLIORI, 2013; PINTO, 2002).

As discussões do *Advanced Mathematical Thinking Group* culminaram no livro *Advanced Mathematical Thinking*, organizado por David Tall em 1991 e republicado em 2002. Por ser um marco histórico das pesquisas do PMA e conter uma parte considerável das caracterizações do PMA que utilizamos nesta tese, organizamos o texto desta seção com base no antes e depois da publicação desse livro. Assim, antes de explorarmos seu conteúdo, mencionamos na Subseção 2.1.1 alguns estudos realizados anteriormente e relacionados ao pensamento matemático que foram importantes para essas caracterizações do PMA.

2.1.1 Alguns Conceitos Anteriores ao Termo ‘Pensamento Matemático Avançado’

Tall e Vinner (1981) apresentaram as ideias de conceito imagem e conceito definição[12]. Essas ideias não são específicas do PMA, mas são utilizadas por Tall (2002) para descrever a forma como matemáticos experientes conseguem vincular conhecimentos com argumentos dedutivos, como explicaremos na Subseção 2.1.2, bem como podem indicar elementos do pensamento matemático de um estudante de acordo com a complexidade e coerência de seu conceito imagem e conceito definição, conforme explicaremos nesta subseção e relacionaremos a outras ideias na Seção 2.2.

Esses autores consideram que o cérebro humano não é puramente lógico (TALL, 2002; TALL; VINNER, 1981). Ao conceito matemático é associada uma estrutura cognitiva que inclui todas as imagens mentais, propriedades e

---

[10] Jean Piaget foi um psicólogo e epistemológico suíço, precursor do enfoque construtivista à cognição humana (MOREIRA, 1999).

[11] Lev Vygotsky foi um psicólogo bielorrusso que enfatizou as origens sociais dos processos psicológicos (MOREIRA, 1999).

[12] Tall e Vinner (1981) introduziram os termos *concept image* e *concept definition*. Alguns autores os traduzem para *imagem conceitual* e *definição conceitual*, tal como Amorim *et al*. (2020), ou *imagem de conceito* e *definição de conceito*, tal como Soares e Cury (2017) e Lopes, L. M. L. (2017). Outros autores, tais como Almeida (2013) e Domingos (2003, 2006), utilizam os termos *conceito imagem* e *conceito definição*, conforme escolhemos adotar.

processos que emergem na mente do estudante quando o conceito é estimulado por sua consciência (TALL, VINNER, 1981). Para descrever essa estrutura mental, Tall e Vinner (1981) utilizam o termo ‘conceito imagem’. De acordo com Tall e Vinner (1981), estímulos diferentes podem ativar diferentes partes do conceito imagem, e essas imagens podem ou não conflitar umas com as outras. O conceito imagem de um indivíduo, segundo os autores, é constituído e modificado no decorrer do tempo.

Por exemplo, o conceito de limite pode emanar a imagem dinâmica de um gráfico em que x se aproxima de a fazendo $f(x)$ se aproximar de um valor L, de um cálculo algébrico que envolve simplificações para se calcular um limite, a definição de limite, ou mesmo alguns exemplos que se tornaram marcantes (TALL, VINNER, 1981).

Tall e Vinner (1981) utilizam o termo ‘conceito definição’ para uma descrição precisa utilizada para especificar um conceito. Essa descrição pode ser uma reconstrução pessoal que um estudante faz de uma definição. Assim, de acordo com Tall e Vinner (1981), o conceito definição varia por indivíduo e é parte do conceito imagem que um estudante possui de um objeto matemático, diferente da definição formal de um conceito que é necessariamente aceita por uma comunidade de matemáticos.

De acordo com Tall e Vinner (1981), acontece de os estudantes usarem conceitos imagem diferentes e conflitantes sem perceber, se forem evocados em momentos diferentes. Os estudantes podem até trabalhar com conceitos imagens diferentes e resolver problemas, desde que cada um seja evocado em um contexto específico. Mas quando ocorre de dois serem estimulados ao mesmo tempo, o conflito é exposto, e pode se tornar o que Tall e Vinner (1981) chamam de fator de conflito cognitivo.

Por exemplo, segundo os autores, alguns estudantes consideram $\sqrt{2}$ como um número real e $\sqrt{2} + 0i$ como um número complexo. Nesse caso, esses números são “[...] convenientemente considerados como entidades distintas ou iguais, dependendo das circunstâncias, sem causar qualquer conflito cognitivo. Eles só se tornam fatores de conflito *cognitivo* quando evocados simultaneamente” (TALL; VINNER, 1981, p. 4, tradução nossa, grifo dos autores).

Assim, Tall e Vinner (1981) consideram importante, para a aprendizagem matemática, que os estudantes possuam conceitos imagem fortalecidos e coerentemente relacionados entre si. Além disso, os autores discutem a importância de o conceito definição estar de acordo com a definição formal, especialmente para a realização de provas (demonstrações matemáticas). Por meio das análises que mencionaremos na Seção 4.2 do Capítulo 4, realizadas em Inarejos e Savioli (2022), essas características são identificadas como indícios de PMA de estudantes considerados por pesquisadores. Por exemplo, Teófilo, Lima e Menezes (2020, p. 11) consideram:

> [...] importante entender que se o aluno apenas verbalizar uma Definição Conceitual Formal não podemos dizer que aquele conceito foi entendido por ele. Para que haja traços de construção de conhecimento o estudante deve possuir construções de Conceitos Imagens, ou seja, projetar em sua mente esquemas, experiências ou propriamente imagens sobre determinado conceito, como também, apresentar Conceito Definição Pessoal que esteja de acordo com a definição formal.

Relacionaremos, na Seção 2.2, a importância de conceitos imagem fortalecidos e coerentemente relacionados entre si (TALL; VINNER, 1981) com algumas caracterizações de Dreyfus (2002) e de outros autores a respeito do PMA. Ainda, na Seção 2.3, relacionaremos essa importância às caracterizações de PMA nas perspectivas identificadas. Antes disso, voltaremos a tratar de conceito imagem e conceito definição na próxima subseção, na caracterização de PMA de Tall (2002). Consideremos agora outras teorizações relacionadas ao PMA.

Resnick (1987) aborda o Pensamento de Ordem Superior (*High Order Thinking*), que pode ser reconhecido por meio de algumas características principais, tais como não ser algorítmico, a tendência a ser complexo, frequentemente levar a múltiplas soluções, além de envolver julgamento e interpretação sutis, aplicação de múltiplos critérios, incerteza, autorregulação do processo de pensamento, atribuição de significado e esforço mental. O Pensamento de Ordem Superior pode estar presente além da Matemática, tal como em uma leitura ou na resolução de problemas científicos.

Segundo Resnick (1987), os estudantes de Matemática com esse pensamento empenham-se em comportamentos mais metacognitivos do que procedimentais, como checar seu próprio entendimento de procedimentos, monitorar sua consistência, tentar relacionar novos assuntos a conhecimentos anteriores, procurar por abordagens alternativas e gerar subproblemas resolvíveis.

Cabe observar que o livro *Education and Learning to Think*

(RESNICK, 1987) discute as possibilidades de desenvolvimento das habilidades de ordem superior (*high order skills*) nas escolas e não especificamente um pensamento matemático. No entanto, as características que Resnick atribui ao Pensamento de Ordem Superior são utilizadas por alguns pesquisadores (BERTOLAZI, 2012; DOMINGOS, 2006; GERETI, 2014; KIRNEV, 2012; MARINS, 2014; SAVIOLI, 2016) para destacar características do PMA, tal como pretendemos utilizá-las.

Sfard (1987) combina a Filosofia com a Psicologia da Matemática, e propõe que há uma dualidade nos conceitos matemáticos, que podem ser vistos operacionalmente ou estruturalmente. Segundo a autora, essa dualidade é semelhante às ideias de *operativo* e *figurativo* de Piaget (1970, apud Sfard, 1991).

Segundo Sfard (1987, 1991), a concepção operacional ocorre quando o conceito é produto de um processo ou é identificado ele mesmo como o processo, enquanto a concepção estrutural ocorre quando o conceito matemático é uma estrutura estática, como se fosse um objeto real.

Por exemplo, uma função f pode ser entendida operacionalmente como um processo que gera um $y = f(x)$ para cada x em um domínio, onde x é a variável de entrada (*input*, na computação) e y é a variável de saída (*output*), e também pode ser entendida estruturalmente como o conjunto de pares ordenados (x, y) onde $y = f(x)$ e $(x, y) = (x, z)$ implica $y = z$. Essa concepção estrutural pode ser representada geometricamente por um gráfico no plano cartesiano (SFARD, 1991).

Os conceitos de função e conjuntos numéricos são apresentados pela autora como exemplos na História da Matemática em que a abordagem operacional precedeu a estrutural. Assim, Sfard (1987) sugere que a abordagem operacional preceda a estrutural em sala de aula. Nesse sentido, Sfard (1991) distingue três passos do processo de formação do conceito:

> […] se a conjectura das origens operacionais dos objetos matemáticos é verdadeira, primeiro deve haver um processo executado nos objetos já familiares, então deve surgir a ideia de transformar esse processo em uma entidade autônoma e, finalmente, deve ser adquirida a capacidade de ver essa nova entidade como um todo integrado, como um objeto. Vamos chamar esses três estágios no desenvolvimento do conceito de *interiorização*, *condensação* e *reificação*, respectivamente. (SFARD, 1991, p. 18, tradução nossa, grifo da autora).

Assim, a fase de interiorização envolve a familiarização com os processos e a condensação requer "[...] 'espremer' longas sequências de operações em unidades mais gerenciáveis" (SFARD, 1991, p. 19, tradução nossa, grifo da autora). No estágio de condensação, de acordo com Sfard (1991), o estudante se torna mais capaz de pensar um processo como um todo, facilitando a realização de comparações e generalizações.

Segundo Sfard (1991), a reificação ocorre quando a pessoa já está familiarizada com uma noção gerada por processos executados em objetos conhecidos e passa repentinamente a vê-la como um novo objeto completo e autônomo; envolve "uma capacidade repentina de ver algo familiar sob uma luz totalmente nova" (SFARD, 1991, p. 19, tradução nossa), após um esforço extenuante (e possivelmente um descanso):

> [...] nem sempre se pode esperar que o *insight* seja uma recompensa imediata pelas tentativas diretas de uma pessoa de entender uma nova ideia. A reificação, que traz a compreensão relacional, é difícil de ser alcançada, exige muito esforço, e pode vir quando menos se espera, às vezes num *flash* repentino. [...] um 'efeito de iluminação' que pode ocorrer após um período de trabalho intensivo seguido de dias de descanso ('período de incubação'). (SFARD, 1991, p. 33, tradução nossa, grifo da autora).

Segundo Sfard (1991), na Matemática Avançada, as diferenças entre a Matemática e outras ciências e as peculiaridades do pensamento abstrato se tornam mais evidentes. Com base nessas teorizações, consideramos que os estudos da natureza do conhecimento matemático reforçam que o pensamento matemático merece um tratamento próprio, diferente de outras formas de pensamento.

Comentadas as teorizações de Tall e Vinner (1981), Resnick (1987) e Sfard (1989, 1991), passemos às caracterizações de PMA publicadas no *Advanced Mathematical Thinking*.

2.1.2 O Livro *Advanced Mathematical Thinking*

Considerado como um estado da arte das pesquisas na área até então (ALMEIDA, 2013), o livro *Advanced Mathematical Thinking* reuniu pesquisas de autores como David Tall, Tommy Dreyfus, Gontran Ervynck, Shlomo Vinner, Edward Dubinsky, Gila Hanna, Bernard Cornu, Michèle Artigue, dentre outros.

Destacamos os capítulos que desenvolvem elementos teóricos do PMA: Tall (2002), Dreyfus (2002), Vinner (2002) e Dubinsky (2002)[13].

Tall (2002) considera a natureza do PMA do ponto de vista psicológico, e foca em analisar o pensamento do matemático em seu trabalho profissional como pesquisador e professor, além de suas implicações no ensino e aprendizagem. Segundo Tall (2002, p. 3, tradução nossa):

> [...] muitas das atividades que ocorrem nesse ciclo [de atividade do pensamento matemático avançado – desde a formulação de conjecturas até a elaboração de provas] também ocorrem na resolução de problemas de matemática elementar, mas a possibilidade de definição e dedução formal é um fator que distingue o pensamento matemático avançado.

Assim, para Tall (2002), embora o Pensamento Matemático Elementar (PME) e o PMA tenham muitos processos em comum, o que os diferencia é que o:

> [...] pensamento matemático elementar carece do processo de abstração formal e não inclui a 'fase de precisão' final em sua aparência mais formal.
> A mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da *descrição* à *definição*, do *convencimento* à *prova* de maneira lógica com base nessas definições. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva que é vista durante a luta inicial dos estudantes universitários com abstrações formais ao enfrentar o primeiro ano da universidade. É a transição da *coerência* da matemática elementar para a *consequência* da matemática avançada, baseada em entidades abstratas que o indivíduo deve construir por meio de deduções a partir de definições formais. (TALL, 2002, p. 20, tradução nossa, grifo do autor).

Ao considerar que essa transição pode ocorrer com estudantes do

---

[13] O livro *Advanced Mathematical Thinking* contém outros capítulos relevantes para a psicologia do pensamento matemático e o ensino de matemática em níveis avançados, mas que não destacamos nesta tese para focarmos nos capítulos que trazem caracterizações a respeito do PMA, considerando nossos objetivos. De fato, após o capítulo introdutório escrito por David Tall, a respeito da psicologia do PMA, que detalhamos nesta tese, a primeira parte do livro trata da natureza do PMA; essa primeira parte conta com o capítulo de Tommy Dreyfus a respeito dos processos envolvidos, que utilizamos nesta tese, o capítulo de Gontran Ervynck, que caracteriza a criatividade matemática e o de Gila Hanna, que aborda a prova em Matemática; a segunda parte explora teorias cognitivas do PMA; nessa segunda parte, além dos capítulos que abordamos de Shlomo Vinner e Edward Dubinsky, a respeito da definição concebida por estudantes e da abstração reflexiva, respectivamente, Guershon Harel e James Kaput tratam de entidades conceituais na Matemática Avançada e seus símbolos; a terceira e última parte explora o progresso de pesquisas quanto ao ensino e aprendizagem da Matemática em níveis avançados; Aline Robert e Rolph Schwarzenberger comentam pesquisas na área e diferenças no ensino de Matemática na escola básica e na faculdade ou universidade; outros capítulos tratam de assuntos mais específicos do ensino de Matemática, como funções, limites, Análise Real, concepções de infinito, prova e a utilização do computador.

primeiro ano da graduação em Matemática ao começarem a lidar com abstrações formais, Tall (2002) caracteriza o PMA como um pensamento matemático voltado à Matemática Avançada[14], especificamente à matemática que indicamos nesta tese como Matemática Acadêmica[15], baseada em abstrações, definições e deduções formais.

Após analisar aspectos sociais, de conteúdo matemático, de avaliação, psicológicos e cognitivos entre o ensino e a aprendizagem de Matemática na escola básica e na faculdade ou universidade, Robert e Schwarzenberger (2002) corroboram com essa distinção de Tall (2002) para a mudança de pensamento matemático requerida na graduação, ainda que não haja, segundo Robert e Schwarzenberger (2002), tantas diferenças sociais e de outros aspectos entre os estudantes do Ensino Médio e do Ensino Superior[16].

> A busca por características únicas que sejam específicas para o aprendizado de matemática avançada mostra-se inconclusiva. Muitos recursos propostos são vistos, em um exame mais detalhado, como demonstrando forte continuidade com o aprendizado da matemática em idades mais jovens. No entanto, parece que, quando todos esses recursos são tomados em conjunto, há uma mudança quantitativa: mais conceitos, menos tempo, necessidade de maiores poderes de reflexão, maior abstração, menos problemas significativos, mais ênfase na prova, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior necessidade de controle pessoal sobre a aprendizagem. A confusão causada por novas definições coincide com a necessidade de um pensamento dedutivo mais abstrato. Tomadas em conjunto, essas mudanças quantitativas engendram uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado. (ROBERT; SCHWARZENBERGER, 2002, p. 133, tradução nossa).

Tall (2002) considera que o ciclo completo de pensamento matemático envolve trabalho e descanso, síntese e análise, e prova. Segundo o autor, a prova é o estágio final do processo de desenvolvimento cognitivo que leva ao pensamento matemático. Por meio da prova, as ideias do matemático “são ordenadas em um desenvolvimento lógico, tanto para verificar a natureza dos relacionamentos quanto para apresentá-los para aprovação da comunidade matemática” (TALL, 2002, p. xiii, tradução nossa).

---

[14] Nesta tese, entendemos a Matemática Avançada como o corpo de conhecimentos matemáticos estudados em nível de graduação, pós-graduação ou pesquisa, o qual inclui a Matemática Acadêmica caracterizada por Moreira e David (2007).

[15] Nesta tese, entendemos como Matemática Acadêmica o corpo de conhecimentos matemáticos tal como é produzido e concebido pelos matemáticos, que utiliza do formalismo e do método axiomático, conforme detalharemos no Capítulo 3 com base em Moreira e David (2007).

[16] Adotamos a expressão ‘Ensino Superior’ como sinônimo de ensino em nível de graduação, ou *undergraduate teaching*, conforme utiliza Tall (2002).

> Para os matemáticos pesquisadores, a resolução de problemas é uma atividade mais criativa [do que para os graduandos], que inclui a formulação de uma provável conjectura, uma sequência de atividades testando, modificando e refinando até que seja possível produzir uma prova formal de um teorema bem especificado. (TALL, 2002, p. 18, tradução nossa).

Assim, Tall (2002) defende que o ensino da Matemática Acadêmica considere que a prova é o estágio final da atividade matemática, de forma que a prova não seja apenas lógica, mas possua um princípio geral que forneça um significado intuitivo a seu funcionamento.

Na seção anterior, descrevemos como conceitos imagens conflitantes podem gerar conflitos cognitivos (TALL, VINNER, 1981). Segundo Tall (2002), matemáticos profissionais também passam por tais conflitos, mas conseguem vincular os conceitos em sequências de argumentos dedutivos. Considerando que as características do PMA de Tall (2002) emergem do trabalho do matemático, interpretamos que a competência para resolver conflitos cognitivos por meio de um sequenciamento lógico-dedutivo é um indício de PMA.

Para Tall (2002), a intuição e o rigor não são tão disjuntos como os matemáticos costumam considerar.

> Intuição é o produto dos conceitos imagem do indivíduo. Quanto mais instruído o indivíduo estiver no pensamento lógico, maior a probabilidade de que os conceitos imagem do indivíduo ressoem com uma resposta lógica. (TALL, 2002, p. 14, tradução nossa).

Outros processos cognitivos discutidos por Tall (2002) são os de síntese e análise, generalização e abstração. Apoiando-se em Poincaré[17], Tall afirma que:

> A síntese começa com o ato consciente da fase inicial para começar a reunir ideias, seguido por uma atividade mais intuitiva, na qual ocorre a interação subconsciente entre os conceitos imagem, até que uma ressonância poderosa força os conceitos recém-vinculados a emergir novamente na consciência. A análise, por outro lado, é uma atividade consciente muito mais fria e lógica que organiza as novas ideias em forma lógica e as refina para fornecer declarações e deduções precisas. (TALL, 2002, p. 15, tradução nossa).

Segundo Tall (2002), o ensino para crianças pequenas enfatiza a síntese do conhecimento, partindo de conceitos simples, passando da experiência e

---

[17] Henri Poincaré foi um matemático francês, fonte de inspiração de algumas teorizações do PMA por ser, segundo Dreyfus (2002), um dos poucos a escrever a respeito de como os matemáticos trabalham.

exemplos para conceitos mais gerais. Já na universidade, de acordo com o autor, costuma-se enfatizar a análise do conhecimento, começando com abstrações gerais e formando cadeias de dedução a partir delas, posteriormente as aplicando em contextos específicos (TALL, 2002). Segundo Tall (2002, p. 15, tradução nossa), “É provável que se exija a síntese do conhecimento para construir teorias cognitivamente, bem como a análise do conhecimento para dar à estrutura total uma coerência lógica”.

Assim, considerando que o PMA de Tall (2002) baseia-se na atividade do matemático e sua competência para organizar o conhecimento em uma estrutura lógica, concluímos que o PMA, segundo esse autor, envolve os processos de síntese e análise, enquanto um processo de PME pode envolver apenas síntese. Analogamente, o PMA envolve intuição e rigor, com inspiração em conceitos imagem e formalização baseada em conceitos definição (TALL, 1995), enquanto o PME pode envolver apenas intuição e conceitos imagem.

Para explicar os processos de generalização e abstração, Tall (2002) utiliza um exemplo de espaços vetoriais. Segundo o autor, generalizamos os espaços de soluções de equações lineares $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, obtendo $\mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, e abstraímos desse contexto a noção de espaço vetorial. Nesse processo, produzimos dois diferentes objetos mentais, a generalização $\mathbb{R}^n$ e a abstração: um espaço vetorial V sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$. Assim,

> Os termos ‘generalização’ e ‘abstração’ são utilizados na matemática tanto para denotar processos nos quais os conceitos são vistos em um contexto mais amplo quanto os produtos desses processos.
> [...]
> Enquanto o primeiro envolve simplesmente uma extensão de processos familiares, o segundo requer uma reorganização mental maciça. (TALL, 2002, p. 11, tradução nossa, grifo do autor).

Tall (2002) explica diferentes tipos de generalização de acordo com as atividades cognitivas envolvidas, além de diferentes tipos de abstração que não detalhamos. Contudo, cabe enfatizarmos a presença dos processos de pensamento no PMA segundo Tall (2002). “Como vimos, a natureza do pensamento matemático está intrinsecamente interconectada com os processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático” (TALL, 2002, p. 14, tradução nossa).

Essa caracterização do PMA possui algumas implicações didáticas. Tall (2002) defende que o ensino da Matemática na graduação favoreça o processo de pensamento matemático ao estudante, e não somente o produto desse pensamento. Assim, Tall (2002) critica a forma como comumente o conteúdo matemático é apresentado no Ensino Superior, mais próximo a uma teoria acabada do que a uma forma que permita ao estudante participar do ciclo criativo.

> [...] existe um enorme abismo entre a maneira como as ideias são construídas cognitivamente e a maneira como elas são organizadas e apresentadas em uma ordem dedutiva. Isso nos adverte que simplesmente apresentar uma teoria matemática como uma sequência de definições, teoremas e provas (como acontece em um curso universitário típico) pode mostrar a estrutura lógica da matemática, mas falha em permitir o crescimento psicológico da mente humana em desenvolvimento. (TALL, 2002, p. xiv, tradução nossa).

Portanto, segundo Tall (2002, p. 3, tradução nossa), “uma apresentação lógica pode não ser apropriada para o desenvolvimento cognitivo do estudante”. Em contrapartida, o autor defende sequências didáticas desenvolvidas para ajudar o estudante a construir ativamente os conceitos matemáticos.

Essas implicações didáticas do PMA são corroboradas por Dreyfus (2002), que foca nos processos característicos do PMA.

Dreyfus (2002) justifica o interesse dos pesquisadores nos processos envolvidos na aprendizagem da Matemática Avançada. Uma razão é obter conhecimento teórico básico do que acontece na mente dos estudantes. Ademais, de acordo com o autor, os processos que os professores esperam que sejam desenvolvidos podem não ocorrer espontaneamente ou de forma consciente por parte dos estudantes. Assim, o estudo dos processos envolvidos na aprendizagem da Matemática Avançada, de acordo com Dreyfus (2002), pode ajudar os professores a se tornarem mais conscientes do que acontece na mente dos estudantes durante esses processos.

> [...] o pensamento matemático avançado consiste em uma grande sequência de componentes de processos interagindo. É importante que o professor de matemática esteja consciente desses processos, a fim de compreender algumas das dificuldades que seus estudantes enfrentam. (DREYFUS, 2002, p. 30, tradução nossa).

Assim, o PMA, segundo Dreyfus (2002), é um processo complexo que envolve um grande número de processos que interagem de formas intrincadas. Por isso, "Um lugar para procurar ideias sobre como encontrar formas de melhorar a compreensão dos estudantes é a mente do matemático trabalhando" (DREYFUS, 2002, p. 29, tradução nossa).

Segundo Dreyfus (2002), há semelhanças importantes entre o processo de aprendizagem e o processo de pesquisa. Em ambos os casos, “o indivíduo precisa manipular, investigar e descobrir mentalmente objetos dos quais seu conhecimento é muito parcial e fragmentado" (DREYFUS, 2002, p. 20, tradução nossa). De acordo com o autor, ambos são complexos e envolvem a compreensão de vários componentes de processos.

Com isso, Dreyfus (2002) critica a apresentação da Matemática como um produto polido com formalismos convenientes, comumente na sequência teorema-prova-aplicação, uma vez que, em contrapartida, o trabalho do matemático frequentemente conta com tentativa e erro, formulações intuitivas e imprecisões por meio de desenhos que tentam apresentar visualmente partes da estrutura matemática sendo pensada (DREYFUS, 2002).

Assim, de acordo com o autor, o que os estudantes aprendem em seus cursos de Matemática é:

> [...] realizar um grande número de procedimentos padronizados, expressos em formalismos precisamente definidos, para obter respostas para classes claramente delimitadas de questões de exercícios. Eles adquirem então a capacidade de executar, embora muito mais lenta, o tipo de operação que um computador pode realizar [...]. (DREYFUS, 2002, p. 28, tradução nossa).

Dessa forma, de acordo com Dreyfus (2002), os estudantes não ganham o *insight* dos processos que levaram os matemáticos a criá-los, e não conseguem "usar seus conhecimentos de maneira flexível para resolver problemas de um tipo desconhecido" (DREYFUS, 2002, p. 28, tradução nossa).

Assim como Tall (2002), Dreyfus (2002) também considera que existe uma ligação entre a Matemática e a Psicologia em cada processo de PMA. Essa ligação entre a Matemática e a Psicologia “torna os processos interessantes e relevantes para a compreensão da aprendizagem e do pensamento em matemática avançada” (DREYFUS, 2002, p. 26, tradução nossa).

Segundo Dreyfus (2002), a reflexão sobre a experiência matemática, no ato de pensar ou contar como se resolveu um problema, é importante na solução de problemas não triviais e é uma característica do PMA. Dreyfus (2002) afirma que gostaria de ver mais essa reflexão nos estudantes de Matemática Avançada e nos professores de colégios. Essa reflexão, de acordo com o autor, não é comum em estudantes da Matemática Elementar[18], mas isso não significa que os processos de PMA sejam sempre exclusivos de matemáticos, estudantes de Matemática Avançada e professores.

"Não há uma distinção nítida entre muitos dos processos de pensamento matemático elementar e avançado, embora a matemática avançada esteja mais focada nas abstrações de definição e dedução" (DREYFUS, 2002, p. 26, tradução nossa). Para Dreyfus (2002), os processos de PMA podem ocorrer na Matemática Elementar ou mesmo em outras áreas do conhecimento, tais como Física, Psicologia, Economia e Artes.

Mas o autor descreve os processos relevantes para o PMA, com foco naqueles cujas características tornam avançado o pensamento matemático. "Uma característica distintiva entre o pensamento avançado e o elementar é a complexidade e como ela é gerenciada" (DREYFUS, 2002, p. 26, tradução nossa). Segundo Dreyfus (2002), os processos de PMA, em particular a abstração e a representação, possibilitam o gerenciamento dessa complexidade, pois esses processos permitem que se mova de um nível de detalhe a outro.

Assim, Dreyfus (2002) e Tall (2002) consideram não existir uma dicotomia rígida entre o PME e o PMA, bem como atribuem à Matemática Avançada um foco maior nas deduções e definições. A principal diferença, na nossa interpretação, quanto às caracterizações de PMA desses autores, é que Tall (2002) toma esse foco da Matemática Avançada nas definições e deduções como o fator distintivo do PMA, enquanto Dreyfus (2002) caracteriza o PMA pela complexidade dos processos de pensamento, não o vinculando totalmente à Matemática Avançada.

Antes de apresentarmos os processos descritos por Dreyfus (2002), observamos semelhanças com ideias de Sfard (1991). Ver um conceito matemático como objeto exige, segundo Dreyfus (2002), um processamento prévio do conceito com repetidas fases de generalização, abstração e formalização, enquanto Sfard (1991) aborda as fases de interiorização e condensação na concepção operacional, necessárias para a reificação. Segundo Sfard (1991), a condensação favorece o processo de generalização, a realização de comparações e mudanças de representações. Ainda de acordo com Sfard (1991), essa fase comprime as

[18] Adotamos o termo Matemática Elementar para nos referirmos à matemática da Educação Básica.

sequências de operações em unidades mais gerenciáveis. Segundo Dreyfus (2002), os processos de generalização e síntese[19] são característicos do PMA e o gerenciamento da complexidade é uma característica distintiva entre o Pensamento Matemático Avançado e o elementar.

Os processos de PMA mencionados por Dreyfus (2002) consistem em representar, transformar, visualizar, verificar, deduzir, especializar, generalizar, abstrair, formalizar, classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, traduzir e modelar. Alguns desses processos são detalhados em seu capítulo no *Advanced Mathematical Thinking*, especialmente os processos que envolvem representação e abstração.

Representações são sinais com significado (DREYFUS, 2002). Segundo o autor, representar um conceito é gerar uma instância, uma imagem do mesmo. De acordo com Dreyfus (2002), essa instância pode ser simbólica ou mental.

> Uma representação simbólica é escrita ou falada externamente, geralmente com o objetivo de facilitar a comunicação do conceito. Uma representação mental, por outro lado, refere-se a esquemas internos ou quadros de referência que uma pessoa usa para interagir com o mundo externo. É o que ocorre na mente quando se pensa naquela parte específica do mundo externo e pode diferir de pessoa para pessoa. (DREYFUS, 2002, p. 31, tradução nossa).

Por isso, consideramos que a representação mental é parte do conceito imagem que a pessoa tem de um conceito matemático. Como já mencionamos a respeito do conceito imagem (TALL; VINNER, 1981), as diversas representações mentais podem se completar ou entrar em conflito (DREYFUS, 2002).

> Em casos mais favoráveis, várias representações mentais para o mesmo conceito podem se complementar e, eventualmente, podem ser integradas em uma única representação desse conceito. Esse processo de integração está relacionado com a abstração [...]. (DREYFUS, 2002, p. 32, tradução nossa).

De acordo com Dreyfus (2002), as representações mentais são criadas na mente com base em representações concretas.

> [...] o ato de gerar uma representação mental baseia-se em sistemas de representação, isto é, artefatos concretos, externos, que podem ser materialmente realizados. No caso de funções, os gráficos são

[19] O processo de síntese permite compor partes em uma única imagem (DREYFUS, 2002).

> um desses artefatos, fórmulas algébricas são outro, diagramas de setas e tabelas de valores ainda outras. (DREYFUS, 2002, p. 31, tradução nossa).

A visualização é esse processo pelo qual as representações mentais podem surgir (DREYFUS, 2002).

Dreyfus (2002) destaca que uma representação é rica se contiver muitos aspectos ligados ao conceito, permitindo flexibilidade na resolução de problemas.

Segundo o autor, o processo de mudança de representações também é útil na resolução de problemas. Dreyfus (2002) o caracteriza como um processo difícil de ensinar e de aprender, pois envolve o domínio de cada representação e a ligação entre elas, ou seja, muita informação a ser tratada, tornando-se uma estrutura complexa.

Ligado à mudança de representações está o processo de tradução, que ocorre quando se move entre diferentes formulações ou declarações de um problema, como no caso de problemas aplicados (DREYFUS, 2002). A modelagem, de modo semelhante, é o processo de encontrar uma representação matemática para um objeto não matemático, de acordo com Dreyfus (2002).

Comentados os processos relacionados à representação apresentados por Dreyfus (2002), passemos aos processos relacionados à abstração.

> [...] o mais importante entre esses processos avançados é a abstração. Se um estudante desenvolve a capacidade de conscientemente fazer abstrações de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado de pensamento matemático. Alcançar essa capacidade de abstrair pode bem ser o objetivo individual mais importante de educação matemática avançada. (DREYFUS, 2002, p. 34, tradução nossa).

No processo de abstração, o estudante ou matemático considera apenas as relações entre os objetos, permitindo-se tirar conclusões que são geralmente válidas, independente das propriedades específicas intrínsecas de cada objeto (DREYFUS, 2002). Assim, os resultados que podem ser obtidos são gerais. Por isso, de acordo com Dreyfus (2002), o processo de abstração é intimamente ligado à generalização. Todavia, a generalização comumente envolve uma expansão na estrutura de conhecimento do indivíduo, enquanto a abstração pode envolver uma reconstrução mental, conforme Tall (2002).

Para Dreyfus (2002, p. 35, tradução nossa), "Generalizar é derivar ou induzir a partir de casos particulares, para identificar pontos em comum, para expandir domínios de validade". Dreyfus (2002) descreve que, nesse processo, o estudante precisa fazer uma transcrição a partir de casos particulares, identificar condições em comum, conjecturar e estabelecer que um domínio de validade pode ser expandido.

Além de estar relacionado com a generalização, o processo de abstração permite descrever de uma forma unificadora uma grande quantidade de situações que sem a abstração seriam consideradas separadamente e independentes uma da outra (DREYFUS, 2002). Assim, a abstração favorece a realização de sínteses: "Sintetizar significa combinar ou compor partes de tal maneira que elas formam um todo, uma entidade. Esse todo, então, muitas vezes equivale a mais do que a soma de suas partes" (DREYFUS, 2002, p. 35, tradução nossa). No processo de síntese, vários conteúdos anteriormente não relacionados "[...] se fundem em uma única imagem, dentro da qual todos eles são incluídos e inter-relacionados" (DREYFUS, 2002, p. 35, tradução nossa).

Segundo Dreyfus (2002), é necessária uma grande quantidade de trabalho com os conceitos e operações para ser capaz de começar a sintetizar. O autor afirma que o matemático, que já passou pelo processo de síntese, encontra dificuldade para colocar-se no estado de espírito do estudante que ainda não atingiu essa síntese.

Com relação à prática de sala de aula, de acordo com Dreyfus (2002), não é comum se colocar ênfase suficiente no processo de síntese. Segundo o autor, mesmo que professores resumam os conteúdos fazendo algumas sínteses, pode ser que esse processo não seja realizado ativamente pelos estudantes, que continuam a exercitar as partes de um conteúdo separadamente em exercícios padrão.

Segundo Dreyfus (2002), a abstração requer que o estudante realize a explicitação das conexões entre os conceitos. Por exemplo, quando:

> [...] o estudante é obrigado a concentrar-se nas relações que existem entre os números de modo a ser capaz de captar o que um corpo é, em vez dos próprios números, e da mesma forma para outras noções tais como a função, grupo e espaço vetorial.
> A abstração contém, assim, o potencial tanto para generalização quanto para síntese; e vice-versa, ela recebe o seu propósito, principalmente, a partir desse potencial de generalização e síntese. A

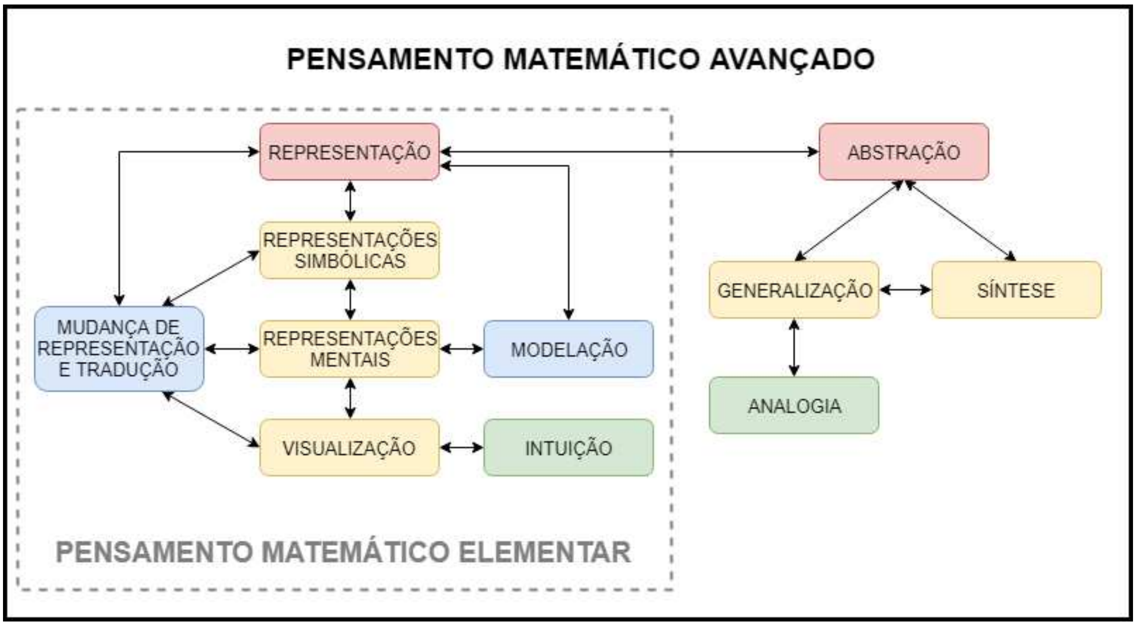
> natureza do processo mental de abstrair é, no entanto, muito diferente da de generalização e de sintetização. A abstração é antes de tudo um processo construtivo – a construção de estruturas mentais de estruturas matemáticas, ou seja, a partir de propriedades e de relações entre os objetos matemáticos. Esse processo é dependente do isolamento de propriedades e relações apropriadas. Ele exige a capacidade de desviar a atenção do próprio objeto para a estrutura das suas propriedades e relações. Tal atividade mental construtiva por parte de um estudante é fortemente dependente da atenção do estudante sendo focalizada sobre essas estruturas que devem fazer parte do conceito abstrato, e afastada das que são irrelevantes no contexto pretendido; a estrutura torna-se importante, enquanto detalhes irrelevantes são omitidos, reduzindo assim a complexidade da situação. (DREYFUS, 2002, p. 37, tradução nossa).

Nota-se que o processo de síntese descrito por Dreyfus (2002) não trata da mesma síntese descrita por Tall (2002). Tall (2002) considera a síntese como a reunião de ideias e os vínculos estabelecidos entre conceitos imagem no subconsciente, algo enfatizado na Educação Básica segundo esse autor, em que os estudantes aprendem conceitos de formas diversas, como fração e números racionais na forma decimal, e depois juntam essas ideias que podem emergir em simultâneo na resolução de uma situação-problema. Já a síntese de Dreyfus (2002) vai além disso, com a reunião das ideias em uma imagem, envolve enxergar todas as relações entre diversos conceitos, em processos complexos como de generalização, especialização, abstração e mudanças de representação que podem envolver o reconhecimento de isomorfismos, como acontece quando se entende as relações entre vetores (elementos de um espaço vetorial), matrizes e transformações lineares.

Os processos de abstração que ambos descrevem são compatíveis, mas há uma diferença sutil quanto ao foco da descrição. Dreyfus (2002) considera a abstração como a construção de estruturas mentais de estruturas matemáticas a partir de propriedades e de relações que foram apropriadamente isoladas; Tall (2002) considera que a abstração envolve tanto o processo de abstrair propriedades quanto o produto do processo: um conceito definido formalmente a partir das propriedades. Assim, ambas as concepções de abstração envolvem estruturas matemáticas a partir de propriedades e relações abstraídas; mas a descrição de Dreyfus (2002) é focada nas estruturas mentais e a de Tall (2002) é focada em um pensamento formal-axiomático, em que as estruturas matemáticas são definidas pelas propriedades em um alto grau de generalidade.

Alguns dos processos de PMA descritos por Dreyfus (2002), como o de representação mental, ocorrem em qualquer nível de pensamento matemático, alguns são comuns até em crianças pequenas, de acordo com o autor. Outros processos, como abstração, generalização e síntese, “[...] assumem uma importância adicional à medida que a experiência e as habilidades matemáticas dos estudantes se desenvolvem e à medida que os conteúdos matemáticos com os quais lidam se tornam mais avançados” (DREYFUS, 2002, p. 34, tradução nossa). Esses são processos específicos do PMA, enquanto outros são processos de PMA e também de PME, como ilustrado por Klaiber (2019) no diagrama da Figura 2.

Figura 2 – Diagrama com alguns processos de Pensamento Matemático Avançado conforme Dreyfus



Fonte: Klaiber (2019, p. 55).

Analisando Dreyfus (2002), concluímos que o autor considera que alguns processos de PMA são mais propícios a ocorrerem em nível de Matemática Avançada, embora possam ocorrer na Matemática Elementar. Não somente os processos relacionados com a abstração, mas também, por exemplo, ao afirmar que a reflexão a respeito da experiência matemática não é esperada em estudantes de Matemática Elementar:

> Essa reflexão é uma característica do pensamento matemático avançado. Geralmente, não esperaríamos que um estudante de matemática elementar parasse, após ter resolvido um problema, e pensasse ou contasse como foi que ele resolveu esse problema. No entanto, definitivamente nós gostaríamos de ver muito mais disso em nossos estudantes avançados e, em particular, em nossos

> professores de colégios. (DREYFUS, 2002, p. 25, tradução nossa).

Apesar de haver processos mais comuns na Matemática Avançada, Dreyfus (2002) apresenta uma caracterização do PMA que não o considera disjunto do PME, mas que inclui esse pensamento elementar no avançado, conforme a representação de Klaiber (2019) apresentada na Figura 2. As ideias de Tall (2002), por outro lado, indicam uma distinção desses pensamentos, com alguns processos em comum, na qual as deduções e definições formais (características do PMA) são fatores divisores.

Dos demais capítulos do *Advanced Mathematical* Thinking, abordaremos os de Vinner (2002) e Dubinsky (2002).

Vinner (2002) aborda o papel das definições no ensino e na aprendizagem de Matemática. Segundo o autor, as definições são pouco importantes para a pedagogia da Matemática no dia a dia e pouco utilizadas pelos estudantes, embora sejam enfatizadas em materiais didáticos. Uma preocupação maior com as definições ocorre em contextos técnicos, para prevenir desentendimentos (VINNER, 2002). Entretanto, o autor descreve algumas evidências experimentais para respaldar a afirmação de que a maioria dos estudantes não utiliza definições, mesmo ao trabalhar em tarefas cognitivas em contextos técnicos.

Assim, Vinner (2002) propõe que uma abordagem de ensino não deve começar do modo técnico, mas de aspectos intuitivos para formar o conceito imagem. Segundo o autor, na Educação Básica, apenas os estudantes interessados a seguir para a Matemática Avançada devem ser capacitados para utilizar a definição como critério definitivo nas tarefas matemáticas, sendo necessário apontar conflitos entre o conceito imagem e a definição formal e, mais profundamente, discutir os exemplos peculiares.

Em todo caso, Vinner (2002) considera que o conceito imagem[20] é necessário para o entendimento de um conceito:

> Assumimos que adquirir um conceito significa formar um conceito imagem para ele. Saber de cor a definição de um conceito não garante a compreensão do conceito. Entender, assim acreditamos, significa ter um conceito imagem. Certo significado deve ser associado às palavras. Saber, por exemplo, que o conjunto das

[20] Estrutura cognitiva que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos que emergem na mente do estudante quando o conceito é estimulado por sua consciência (TALL, VINNER, 1981).

> partes de um determinado conjunto é o conjunto de todos os subconjuntos desse conjunto dado, não significa nada, a menos que se possa construir alguns conjuntos das partes de conjuntos dados. (VINNER, 2002, p. 69, tradução nossa).

No capítulo em questão do livro *Advanced Mathematical Thinking*, Vinner (2002) descreve o conceito imagem e o conceito definição como duas células distintas na estrutura cognitiva, diferente da concepção de Tall (2003), em que o conceito definição de um indivíduo é parte do conceito imagem. Tall e Vinner (1981) denominam o conceito imagem de uma definição como '*concept definition image'* (imagem da definição do conceito).

Nesta tese, adotamos a concepção de Tall (2003) em que o conceito definição é parte do conceito imagem e possivelmente diferente da definição formal do conceito, o que torna obsoleto o termo '*concept definition image'* e equivalentes as ideias de 'conceito definição' e 'conceito definição pessoal', essa última adotada por Tall e Vinner (1981) para distingui-la da definição formal do conceito.

Por exemplo, um indivíduo pode ter como conceito imagem de função alguns gráficos, diagramas que representam funções, fórmulas, tabelas, pares ordenados, modelagem de alguns problemas específicos, a ideia de relação entre grandezas, além de funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas. Ao descrever o que é uma função, esse indivíduo a considera como uma relação entre duas grandezas. Esse é o conceito definição pessoal desse indivíduo (VINNER, 2002), que chamamos apenas de conceito definição, conforme Tall (2003). Ele faz parte do conceito imagem (TALL; VINNER, 1981) e não se trata, necessariamente, da definição formal de função, encontrada nos livros de Matemática.

O próximo capítulo que comentamos do *Advanced Mathematical Thinking* é o de Dubinsky (2002), que se baseia na abstração reflexiva de Piaget. Segundo Dubinsky (2002), a abstração reflexiva é a coordenação geral das ações de um indivíduo, sendo completamente interna ao sujeito.

A abstração reflexiva é utilizada por Piaget para descrever a construção de estruturas lógico-matemáticas por um indivíduo durante seu desenvolvimento cognitivo, especialmente por crianças desenvolvendo a coordenação de estruturas sensório-motoras (DUBINSKY, 2002). Contudo, Dubinsky (2002) considera, conforme Piaget, que a mesma abordagem pode ser expandida a tópicos avançados.

> Na maior parte de sua própria obra, no entanto, Piaget concentrou-se no desenvolvimento do conhecimento matemático nas primeiras idades, raramente indo além da adolescência. O que achamos empolgante é que, como ele sugeriu, essa mesma abordagem pode ser estendida a tópicos mais avançados na graduação em matemática e além. (DUBISNKY, 2002, p. 95, tradução nossa).

Assim, Dubinsky (2002) propõe que a abstração reflexiva pode ser uma ferramenta poderosa no estudo do PMA, tanto para entendê-lo quanto para ajudar os estudantes a desenvolvê-lo.

Desse modo, embora Dubinsky (2002) utilize a expressão “pensamento matemático avançado” para designar o pensamento em Matemática Avançada, o aspecto cognitivo do desenvolvimento do PMA é considerado pelo autor como similar ao desenvolvimento do pensamento matemático em tópicos elementares. Uma das passagens que indicam o entendimento do PMA como um pensamento próprio da Matemática Avançada no capítulo de Dubinsky (2002) é a seguinte:

> A fim de tentar desenvolver a noção de abstração reflexiva para o pensamento matemático avançado, vamos isolar o que parecem ser as características essenciais da abstração reflexiva, refletir sobre seu papel na matemática superior e reorganizá-las ou reconstruí-las para formar uma teoria coerente do conhecimento matemático e sua construção (DUBISNKY, 2002, p. 102, tradução nossa).

Desse modo, consideramos que as contribuições de Dubinsky (2002) para o PMA, embora desenvolvidas focando-se no ensino de Matemática Avançada, não se limitam a essa matemática, de forma que a Teoria APOS, proposta pelo autor, compreende um avanço no pensamento matemático gradual em qualquer nível de ensino.

A Teoria APOS (DUBINSKY, 2002) diz respeito ao desenvolvimento de construções mentais por meio de ação (A), processo (P), objeto (O) e esquema (S). Dubinsky (2002) considera que um conceito matemático não possui uma única decomposição genética[21] e nem todo indivíduo aprenderá por esse caminho, mas sua teoria é um caminho possível para o planejamento do ensino.

Dubinsky (2002) descreve cinco tipos de abstração reflexiva como método de construção dos conceitos matemáticos: a construção de processos internos como forma de perceber um fenômeno (interiorização), a coordenação de

[21] Uma decomposição genética, segundo Dubinsky (2002), é uma descrição da matemática envolvida e de como um sujeito pode realizar as construções necessárias para compreendê-la.

dois ou mais processos para construir um novo, o encapsulamento de processos como objetos (o mais importante para matemáticos e mais difícil para estudantes, segundo o autor), a generalização de esquemas (quando um esquema é aplicado a uma coleção mais ampla de fenômenos) e a reversão de um processo. Assim, conforme menciona Sfard (1994), Dubinsky (2002)[22] utiliza o termo 'encapsulamento' para um ato de criação de entidades abstratas similar à reificação, ou seja, para a transição entre uma concepção operacional e um esquema estrutural corporificado.

Conforme Dubinsky (2002), as ações com objetos conhecidos são interiorizadas em processos, quando o indivíduo responde a uma situação construindo um processo mental relacionado ao processo matemático. A interiorização permite que o indivíduo esteja consciente das ações, reflita a respeito e as combine com outras ações. Além da interiorização de ações, é possível construir processos a partir de outros processos, como na reversão ou coordenação de processos.

Por sua vez, os processos são encapsulados em objetos, que podem integrar ações a serem interiorizadas em processos em um nível superior. Um dos exemplos citados por Dubinsky (2002) é a definição da função logarítmica como $\log(x) = \int_0^x \frac{1}{t} dt$, para $x > 0$. Para compreendê-la, de acordo com Dubinsky (2002), o estudante precisa entender o processo de estimar a área sob uma curva com somas e tomar o limite para, então, encapsular esse processo como um objeto e variar um dos parâmetros da integral em um novo processo. Os objetos:

> [...] abrangem toda a gama de objetos matemáticos: números, variáveis, funções, espaços topológicos, topologias, grupos, vetores, espaços vetoriais, etc., cada um dos quais deve ser construído por um indivíduo em algum ponto de seu desenvolvimento matemático. (DUBINSKY, 2002, p. 106, tradução nossa).

Para Dubinsky, a abstração reflexiva é "a construção de objetos mentais e ações mentais sobre esses objetos" (DUBINSKY, 2002, p. 102, tradução nossa). De acordo com o autor, essas construções assimilam-se ou acomodam-se[23] em esquemas.

> Um esquema é uma coleção de objetos e processos mais ou menos coerente. A tendência de um sujeito de invocar um esquema para

[22] Relembrando que o *Advanced Mathematical Thinking* foi primeiramente publicado em 1991.

[23] Na teoria cognitivista de Piaget, na qual Dubinsky (2002) se baseia, a assimilação envolve novos dados incorporados pelo indivíduo, ao passo que a acomodação é um processo em que a estrutura cognitiva precisa ser modificada (MOREIRA, 1999).

> entender, lidar, organizar ou dar sentido a uma situação-problema percebida é seu conhecimento de um conceito individual em matemática. (DUBINSKY, 2002, p. 102, tradução nossa).

Segundo Dubinsky (2002), um indivíduo possui uma variedade de esquemas, com esquemas dentro de esquemas e esquemas inter-relacionados em uma organização complexa. Segundo o autor, o conhecimento matemático consiste em uma coleção de esquemas.

Ainda de acordo com Dubinsky (2002), quando um sujeito consegue lidar com uma nova situação, a assimila a seu esquema. Quando não consegue, os esquemas podem ser acomodados para conseguir lidar com a nova situação.

À medida que novos processos são encapsulados e os objetos são acionados em um nível superior, o esquema que o sujeito possui de um assunto é modificado e por vezes generalizado (DUBINSKY, 2002). Assim, compreendemos que o pensamento matemático é desenvolvido, de acordo com a Teoria APOS, no sentido de uma espiral, com processos sendo encapsulados em objetos e objetos sendo acionados e interiorizados em processos em um nível superior.

Com isso, finalizamos nossa síntese de ideias teóricas do PMA contidas no livro *Advanced Mathematical Thinking*. Comentamos, na seção a seguir, algumas teorizações posteriores.

2.1.3 Teorizações a Partir do Pensamento Matemático Avançado

Nesta seção, focamos em teorizações realizadas posteriormente à publicação do *Advanced Mathematical Thinking* em 1991, que trazem detalhamentos ou aprofundamentos para o quadro teórico do PMA.

Gray e Tall (1994) consideram a dualidade entre processo e conceito em Matemática, além do simbolismo utilizado para a representação de ambos. Sendo assim, os autores apresentam o termo ‘proceito’[24], que une os termos ‘processo’ e ‘conceito’[25], para fornecer a combinação cognitiva de processo e conceito em sua própria terminologia.

Antes de explicarmos o que os autores entendem por proceito, precisamos diferenciar o que entendem por procedimento, processo e conceito. Procedimento é um algoritmo específico, ou seja, uma sequência específica de

---

[24] Tradução nossa para ‘*procept*’.
[25] ‘*Process*’ e ‘*concept*’, respectivamente.

passos (GRAY; TALL, 1994). Já processo, segundo Gray e Tall (1994), é a representação cognitiva de uma operação matemática. O processo não precisa ser realizado de maneira única, podendo associar-se a vários procedimentos alternativos (GRAY; TALL, 1994). Já o conceito, de acordo com Gray e Tall (1994), envolve uma entidade estática, como na compreensão estrutural (SFARD, 1987, 1991), ou seja, um objeto, nos termos de Dubinsky (2002).

Por exemplo, para efetuar uma soma, como 3+4, uma criança pode realizar o procedimento de contar todos os elementos de um conjunto que une três e quatro elementos, possivelmente com o auxílio dos dedos. Um procedimento alternativo, de acordo com Gray e Tall (1994), é contar quatro unidades a partir de três; assim, a contagem se resume a ‘quatro’, ‘cinco’, ‘seis’, ‘sete’, em que cada palavra numérica é proferida sucessivamente até que a última palavra seja identificada como o resultado da soma. Segundo Gray e Tall (1994), uma criança pode perceber que é mais rápido contar a partir do maior, e mais tarde que, independentemente do procedimento realizado, o resultado será o mesmo. Assim, ‘3+4’ passa a ter o significado do processo de se somar três e quatro, cujo resultado é 7, independente do procedimento. Então, ‘3+4’ pode ser encapsulado/reificado e visto como uma das formas de representar o conceito 7, tal como ‘5+2’, ‘10-3’ e inúmeras outras. O mesmo símbolo ‘3+4’ representa tanto o processo quanto o conceito (GRAY; TALL, 1994).

Deste modo, Gray e Tall (1994) definem um ‘proceito elementar’ como um amálgama de um processo, um objeto e um símbolo que representa ambos; segundo os autores, um proceito é uma coleção de proceitos elementares de um mesmo objeto. Em nosso exemplo, o proceito 7 é uma coleção de proceitos elementares, tais como ‘3+4’, ‘5+2’ e ‘10-3’. Esses símbolos representam o mesmo objeto, mas indicam a maneira flexível pela qual o proceito 7 pode ser decomposto e recomposto utilizando-se diferentes processos em uma rica estrutura conceitual na qual o símbolo 7 expressa todos esses vínculos.

Os autores consideram que a ambiguidade na interpretação do simbolismo de maneira flexível está na raiz do pensamento matemático (GRAY; TALL, 1994). Tal como Tall (2002) e Dreyfus (2002), Gray e Tall (1994) consideram o pensamento de matemáticos para entender o pensamento matemático de estudantes:

> [...] em vez de ter que lidar conscientemente com a dualidade de conceito e processo, o bom matemático pensa ambiguamente a respeito do simbolismo para produto e processo. Defendemos que o matemático simplifica situações substituindo a complexidade cognitiva da dualidade processo-conceito pela conveniência de notação da ambiguidade processo-produto. (GRAY; TALL, 1994, p. 121, tradução nossa).

Assim, o pensamento proceitual é a combinação de pensamento conceitual e procedimental, de forma que os vínculos conceituais, procedimentais, os processos e o produto desses processos são expressos por um único proceito, que combina essas diferentes formas em uma rica estrutura conceitual (GRAY; TALL, 1994).

A ausência desse pensamento, segundo Gray e Tall (1994), leva a utilizações exageradas de procedimentos, que são lembrados como dispositivos separados em seu próprio contexto. Gray e Tall (1994) investigaram métodos de realização de exercícios de Aritmética com crianças de sete a doze anos de duas escolas inglesas, e notaram uma divisão entre aquelas que conseguiam comprimir fatos conhecidos e utilizá-los para derivar novos fatos e as que estavam presas a procedimentos acumulados que complicam a realização de um exercício. A essa diferença deram o nome de ‘divisão proceitual’. Segundo os autores, enquanto alguns apresentam técnicas proceituais mais flexíveis, incluindo a seleção de procedimentos mais apropriados, outros contam com métodos procedimentais de contagem menos flexíveis, em que os símbolos são utilizados apenas como entidades concretas a serem manipuladas.

A divisão proceitual tem um efeito cumulativo, pois o pensador procedimental se depara com a coordenação cada vez mais complicada de processos sequenciais acumulados (GRAY; TALL, 1994). Por outro lado, o pensamento proceitual envolve o que Gray e Tall (1994) chamam de compressão mental, a utilização significativa de fatos conhecidos para chegar a soluções por meio de fatos derivados.

Essa capacidade de produzir fatos novos a partir de antigos por meio de estratégias flexíveis atua como um gerador autônomo de conhecimento (GRAY; TALL, 1994). “O pensamento proceitual é caracterizado pela capacidade de comprimir estágios na manipulação de símbolos até o ponto em que os símbolos são vistos como objetos que podem ser decompostos e recompostos de maneiras flexíveis” (GRAY; TALL, 1994, p. 132, tradução nossa).

A ideia de compressão mental é retomada por Tall (1995, 2004, 2008, 2013), em pesquisas que abordam o desenvolvimento de longo prazo das ideias matemáticas.

> O pensamento matemático envolve a *compressão* de estruturas matemáticas em *conceitos pensáveis* conectados em *estruturas de conhecimento* que são *misturadas*, levando a *conceitos cristalinos* sofisticados que possuem uma estrutura matemática inevitável. (TALL, 2013, p. 133, tradução nossa, grifo do autor).

Segundo Tall (2013, p. 14, tradução nossa, grifo do autor), “A *compressão do conhecimento* ocorre quando um fenômeno de algum tipo é concebido na mente de uma maneira mais simples ou mais eficiente”. Assim, a compressão permite se pensar em situações complicadas de maneira simples. Desse modo, a compressão mental está relacionada a um gerenciamento da complexidade de uma situação matemática, permitindo que consideremos a compressão mental como uma característica do PMA de acordo com a caracterização de Dreyfus (2002).

Tall (1995) aborda o desenvolvimento do pensamento matemático de crianças pequenas até a Matemática Avançada, considerando que o crescimento cognitivo ocorre a partir de ‘percepções de’ e ‘ações sobre’ objetos no ambiente. Segundo o autor, as ‘percepções de’ objetos levam a representações viso-espaciais, cujo suporte verbal crescente leva a provas verbais em Geometria. As ‘ações sobre’ objetos levam ao encapsulamento progressivo do processo ao conceito, utilizando representações simbólicas de forma flexível como proceitos, especialmente em Aritmética e Álgebra.

De acordo com Tall (1995), a transição do PME para o PMA requer reconstruções cognitivas significativas. Como exemplos fornecidos pelo autor, no desenvolvimento cognitivo a partir das ‘percepções de’ objetos, a prova euclidiana requer a organização sistemática e a dedução verbal para prova visualmente inspirada; em outro exemplo, a partir das ‘ações sobre’ objetos, a Álgebra Avançada envolve a ideia de quatro ou mais dimensões, que rompe com a ligação visual entre as equações e a Geometria; além disso, a partir das interações entre ambos os desenvolvimentos paralelos, a passagem para o Cálculo envolve dificuldades com o conceito de limite. “No entanto, há um salto ainda maior a ser dado no pensamento matemático avançado para definições formais (que alteram o status dos objetos que estão sendo estudados) e dedução formal (que altera a natureza da prova)” (TALL, 1995, p. 169, tradução nossa).

Tall (1995) evita definir com precisão os tópicos matemáticos que delimitam a transição do PME para o PMA.

> O pragmatismo sugere que seria pertinente incluir a geometria euclidiana, o cálculo e a álgebra avançada acima da linha. No entanto, enquanto cada um desses assuntos tem suas próprias dificuldades idiossincráticas, a mudança cognitiva universal ocorre com a introdução do método axiomático, onde os objetos matemáticos têm um novo status cognitivo como conceitos definidos construídos a partir de definições verbais. Esse é, portanto, um lugar mais natural para traçar a linha entre o pensamento matemático elementar e o avançado. É essencialmente uma mudança no estágio cognitivo do equilíbrio de convicção visual e manipulação proceitual para objetos definidos e dedução formal. (TALL, 1995, p. 171-172, tradução nossa).

Assim, Tall (1995) inicia uma abordagem que separa o desenvolvimento cognitivo em Matemática em três diferentes ‘mundos’, um que envolve representações viso-espaciais, um que envolve manipulação proceitual e outro, exclusivo do PMA, que envolve definição e dedução formal com o método axiomático.

Na mesma esteira, Gray e Tall (2001) adicionaram ao simbolismo proceitual uma outra forma de construção mental em Matemática: por meio de configurações corporificadas. Essas duas formas não são excludentes entre si:

> Uma de nossas hipóteses é que o encapsulamento (ou reificação) teorizado de um processo como um objeto mental está frequentemente ligado a uma configuração corporificada correspondente dos objetos sobre os quais atua (que doravante nos referimos como *objetos de base*). Observamos que as configurações corporificadas são mais primitivamente significativas do que os objetos mentais encapsulados e ainda carecem da flexibilidade e do poder da essência destilada do simbolismo que se liga duplamente ao conceito matemático e ao processo matemático. (GRAY; TALL, 2001, p. 66, tradução nossa, grifo dos autores).

Considerando, ainda, as teorias logicamente construídas com base nos axiomas, Gray e Tall (2001) listaram três diferentes tipos de conceitos matemáticos: objetos corporificados, proceitos simbólicos e conceitos axiomáticos.

A partir desses três tipos de conceitos, Tall (2004) define os Três Mundos da Matemática: Corporificado, Simbólico-Proceitual e Formal-Axiomático. Esses mundos são baseados, respectivamente, em percepções, ações e propriedades (TALL, 2004). Segundo o autor, o Mundo Corporificado envolve tanto as percepções de objetos físicos quanto as concepções internas que envolvem imaginação viso-espacial. O Mundo Simbólico-Proceitual é o mundo dos símbolos utilizados para cálculo e manipulações, a partir de ações que geram proceitos para permitir um pensamento operacional flexível. O Mundo Formal-Axiomático utiliza propriedades como definições formais para especificar estruturas matemáticas, dos quais outras propriedades podem ser deduzidas pela prova formal e novos conceitos definidos em uma teoria logicamente dedutiva. O termo 'formal' deve-se ao formalismo de David Hilbert[26], que Tall (2002, 2008) associa ao PMA.

"O mundo formal-axiomático surge de uma combinação de concepções corporificadas e manipulação simbólica, mas o reverso pode acontecer e acontece" (TALL, 2004, p. 31, tradução nossa). De acordo com Tall (2008, 2013), o sistema formal-axiomático tem propriedades que fornecem corporificações novas e mais sofisticadas, como 'teoremas de estrutura'[27]. Assim, "Em um nível superior, teoremas de estrutura provados em teorias axiomáticas ligam-se a formas mais sofisticadas de corporificação e simbolismo, revelando uma relação íntima entre os três mundos" (TALL, 2008, p. 5, tradução nossa).

O Mundo Formal-Axiomático inverte a sequência de construção de significado dos conceitos, pois estabelece conceitos formais baseados em definições da teoria dos conjuntos, ao invés de definições baseadas em objetos conhecidos (TALL, 2008). Conforme as caracterizações que comentamos na Subseção 2.1.2, a mesma inversão ocorre na transição do PME para o PMA (TALL, 2002).

Desse modo, entendemos os Três Mundos da Matemática como uma expansão da transição do PME para o PMA teorizada por Tall (1995, 2002), explicando desde o aprendizado de crianças pequenas até a pesquisa em Matemática. Assim, nesta tese, aproveitamos as ideias de Tall (2004, 2008, 2013) que estão em trabalhos focados nos Três Mundos da Matemática e no desenvolvimento de longo prazo do pensamento matemático, articulando-as com o PMA; contudo, evitamos focar nesse quadro teórico mais amplo, para não nos deslocarmos do nosso foco principal: o PMA.

Finalizando essa seção, comentamos os trabalhos de Domingos

[26] David Hilbert foi um matemático prussiano que apresentou uma axiomatização para a geometria euclidiana e defendeu que todos os ramos da Matemática deveriam se fundamentar em estudos rigorosos caracterizados "[...] pela ênfase na abstração, aritmetização e desenvolvimento lógico de conceitos e teorias matemáticas" (MERZBACH; BOYER, 2011, p. 557, tradução nossa).

[27] Por exemplo, qualquer corpo ordenado completo é isomórfico a $\mathbb{R}$. Assim, a reta numérica é uma corporificação de um dado corpo ordenado completo (TALL, 2013).

(2003) e Harel e Sowder (2005), para então, na seção seguinte, compararmos as teorizações do PMA que elencamos.

Domingos (2003) analisou a compreensão dos conceitos de sequências, funções e Cálculo Diferencial de estudantes do primeiro ano de cursos de graduação, caracterizando desempenhos escolares típicos de alguns estudantes com base na teoria da reificação de Sfard (1987), na Teoria APOS (DUBINSKY, 2002), no pensamento proceitual (GRAY; TALL, 1994), em caracterizações e processos de PMA (DREYFUS, 2002; TALL, 1995, 2002) e no conceito imagem e no conceito definição (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 2002).

A partir de categorias formadas na análise de dados, Domingos (2003) estabeleceu três níveis de conceito imagem: incipientes; instrumentais; e relacionais. Esses níveis foram utilizados em algumas pesquisas do nosso levantamento (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017a; RODRIGUES, 2019).

Segundo Domingos (2003), o conceito imagem incipiente é incompleto e refere-se a objetos elementares que não traduzem o conceito pretendido; na maior parte das vezes, refere-se apenas a algumas características mais notórias do objeto matemático, dificilmente estabelecendo relações significativas.

O conceito imagem instrumental, de acordo com Domingos (2003) permite a utilização de objetos matemáticos que estão na base do conceito em estudo, possibilitando processos que possam conduzir à construção dos novos conceitos; no entanto, esses objetos são muitas vezes insuficientes para que os processos sobre eles levem às fases de interiorização e condensação que conduzem à reificação do conceito, no sentido de Sfard (1991).

O conceito imagem relacional, segundo Domingos (2003), representa uma situação ótima em termos de aprendizagem, em que os estudantes manifestam uma compreensão efetiva dos conceitos. As propriedades são enunciadas com compreensão, representando objetos matemáticos (concepção estrutural) e verbalizadas a partir de definições formais.

Harel e Sowder (2005) argumentam que pode ser vantajoso ver o PMA como o pensamento avançado em Matemática, potencialmente iniciado a partir do Ensino Fundamental. Para enfatizar essa perspectiva, os autores inseriram um hífen em Pensamento-Matemático Avançado, diferenciando-o de Pensamento Matemático-Avançado. Embora esses termos designem duas perspectivas para interpretar o PMA, não os utilizamos nesta tese porque os autores criam uma nova definição para o Pensamento-Matemático Avançado, baseada em condições para um obstáculo ser epistemológico.

Uma vez que pretendemos utilizar as ideias dos diferentes autores que caracterizam o PMA e estamos diante de um problema de divergência em possíveis características desse pensamento, por haver pequenas diferenças entre elas, utilizar mais caracterizações não contribui para identificarmos aproximações nas ideias dos autores. Aproveitamos as caracterizações que os teóricos em que estamos nos embasando já propuseram, e com base nelas identificamos perspectivas. Assim, na Seção 2.2, cotejamos essas características do PMA, para depois nomear algumas perspectivas na Seção 2.3.

2.2 UM COTEJO DE CARACTERIZAÇÕES DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Na seção anterior, procuramos incluir diversas caracterizações e autores que conhecemos a respeito do PMA. No entanto, alguns detalhes dessas ideias e teorizações de outros autores podem ter sido suprimidos. Por mais que tentássemos aproveitar ao máximo as ideias do PMA, um recorte se faz necessário para viabilizar a produção desta tese.

Por isso, cabe explicitarmos o *corpus* de análise para esta seção e para a seção posterior. Tratam-se dos trabalhos de Resnick (1987), Tall e Vinner (1981), Sfard (1987, 1991), Tall (1995, 2002, 2004, 2008, 2013), Gray e Tall (1994, 2001), Dreyfus (2002) e Dubinsky (2002).

Os principais critérios para a escolha desses trabalhos são as ideias teóricas que contribuem para o quadro do PMA e as citações a esses autores que encontramos nos levantamentos (Capítulo 4) de trabalhos que se embasaram nesse referencial teórico em pesquisas envolvendo professores ou futuros professores.

Antes de discutirmos comparações de caracterizações do PMA, cabe descrevermos nosso entendimento quanto aos termos ‘processos’[28] e ‘indícios’ de PMA, bem como algumas relações entre eles.

Os processos de PMA são processos mentais e matemáticos que ocorrem durante a atividade matemática (DREYFUS, 2002), e podem ser aferidos

[28] Não confundir os processos de pensamento matemático com os processos matemáticos (operações) referentes a teorias de processo-objeto, tal como a Teoria APOS de Dubinsky (2002).

apenas pelos registros da atividade matemática, já que não temos acesso à mente de um indivíduo. Sendo assim, Dreyfus (2002, p. 26, tradução nossa) esclarece que os processos são tanto matemáticos quanto psicológicos:

> Por exemplo, quando você constrói um gráfico de uma função, você está executando um processo matemático, seguindo certas regras que podem ser enunciadas em linguagem matemática; ao mesmo tempo, porém, é muito provável que você esteja gerando uma imagem mental visual desse gráfico; em outras palavras, você está visualizando a função de uma forma que mais tarde pode ajudá-lo a raciocinar sobre a função. As imagens mentais e matemáticas estão intimamente ligadas aqui. Nenhum pode surgir sem o outro, e eles são de fato gerados pelo mesmo processo; são, respectivamente, os aspectos matemáticos e psicológicos desse processo.

Temos acesso apenas ao aspecto matemático do processo. Consideremos, como exemplo, o processo de generalização ocorrendo na mente de um estudante ao realizar a expansão de um domínio de validade (DREYFUS, 2002). Não é possível averiguá-lo em seu aspecto psicológico, na mente do estudante, mas os registros da atividade matemática podem indicar que o estudante realizou a expansão de um domínio, provavelmente compreendendo a abstração envolvida.

Nesse caso, o processo de generalização averiguado em um registro de atividade matemática também opera como um indício de PMA, pois a generalização é um processo característico do PMA, conforme Dreyfus (2002). Assim, nesta tese, entendemos os indícios de PMA como indicativos da existência desse pensamento, entre eles os processos característicos do PMA em seus aspectos matemáticos.

Realizadas essas observações iniciais, passemos a comparar as ideias do PMA apresentadas na seção anterior. Primeiramente, discutimos algumas relações entre as caracterizações do PMA que foram resumidas[29]. Posteriormente, elencamos características do PMA comuns entre todos os teóricos do *corpus* e características compartilhadas por alguns autores e não por outros, que podem demarcar divergências. Essas divergências são importantes para identificarmos algumas perspectivas de PMA na próxima seção.

Primeiramente, agrupamos algumas teorizações no que chamamos

[29] Na Seção 2.1, já estabelecemos algumas relações entre as caracterizações do PMA comentadas. Consideramos o papel do conceito imagem e do conceito definição (TALL; VINNER, 1981) na abordagem de Tall (2002). Observamos semelhanças das etapas de interiorização, condensação e reificação de Sfard (1991) com a caracterização do PMA de Dreyfus (2002). Comparamos as caracterizações do PMA de Tall (2002) e Dreyfus (2002), bem como diferenças na descrição de alguns processos.

de teorias de processo-objeto, conforme Almouloud (2017, p. 29, grifo do autor):

> A teoria APOS (DUBINSKY, 1991) e a teoria da reificação (SFARD, 1991) podem ser encaixadas num grupo chamado teorias de processo-objeto. Estas duas teorias conjecturam que o aprendizado se dá por meio da *encapsulação* ou *reificação* (respectivamente) de um processo em um objeto.

Com base em Almouloud (2017), Pegg e Tall (2005) e Tall (2013), incluímos a teoria proceitual (GRAY; TALL, 1994) no mesmo grupo. Tall (2013) utiliza o termo ‘teorias de compressão’. Pegg e Tall (2005) articulam alguns referenciais teóricos de crescimento cognitivo e elaboram um ‘ciclo fundamental de construção dos conceitos’. Para os propósitos desta tese, consideramos suficiente comparar os termos adotados por Sfard (1987, 1991), Dubinsky (2002) e Gray e Tall (1994), conforme o Quadro 1 a seguir:

Quadro 1 – Concepções dos conceitos de acordo com algumas teorias de processo-objeto

<table>
<tr><th>Sfard</th><th>Dubinsky</th><th>Gray e Tall</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Concepção operacional</td><td rowspan="2">Ação</td><td>Procedimento</td></tr>
<tr><td>Procedimentos alternativos</td></tr>
<tr><td>Processo</td><td>Processo</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Concepção estrutural</td><td rowspan="3">Objeto</td><td>Conceito</td></tr>
<tr><td>Proceito elementar</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pensamento proceitual</td></tr>
<tr><td>Esquema</td></tr>
</table>

Fonte: os autores, inspirado em Pegg e Tall (2005) e Tall (2013).

No Quadro 1, alinhamos horizontalmente concepções similares, mas há alguns detalhes divergentes, principalmente quanto à ordem e generalidade das concepções.

Sfard (1987, 1991) propõe que a abordagem operacional preceda a estrutural em sala de aula. Os estágios de interiorização, condensação e reificação permeiam o desenvolvimento do conceito matemático entre as concepções operacional e estrutural.

Dubinsky (2002) propõe que se siga a ordem ação-processo-objeto-esquema, em que cada concepção engloba as anteriores, formando ciclos de forma que os objetos são utilizados em ações em um esquema de nível superior. Nesses ciclos, as ações são interiorizadas em processos, que também podem ser construídos por reversão e coordenação, os processos são encapsulados como objetos e os esquemas podem ser generalizados (DUBINSKY, 2002).

Já Gray e Tall (1994, 2001) não consideram que essa ordem seja sempre a melhor, conforme explica Tall (1999), que recomenda uma noção corporificada precedendo a abordagem procedimental em alguns casos. Assim, embora Dubinsky (2002) considere que a concepção de objeto englobe o processo e a ação, Gray e Tall (1994, 2001) consideram que a concepção de um conceito pode preceder os processos e até os procedimentos (ações sobre objetos conhecidos). Os proceitos elementares envolvem um processo que produz um objeto (e, portanto, também envolve o objeto) e um símbolo que representa o processo e o objeto. Finalmente, o proceito envolve todos os proceitos elementares de um objeto, englobando todas as outras concepções.

As teorias de processo-objeto resumem um dos dois caminhos que Tall (1995) elenca de desenvolvimento cognitivo que levam ao PMA: o de ações sobre objetos, em que as ações são simbolizadas como processos e encapsuladas como proceitos. No outro caminho de desenvolvimento cognitivo, de percepções de objetos, os protótipos viso-espaciais (representações pictóricas, não somente para objetos específicos, mas para outros de uma classe) tornam-se sucessivamente mais verbais-dedutivos, culminando na prova em Geometria Euclidiana (TALL, 1995, 2008, 2013). Esses dois caminhos, embora se cruzem indefinidas vezes, resumem a ponderação de Tall (1999) de que nem sempre a ordem processo-objeto ocorre na aprendizagem matemática. Gray e Tall (2001) consideram que os objetos ligados a uma configuração corporificada são mais significativos do que os objetos obtidos somente por encapsulamento de processos.

Ainda, esses caminhos de desenvolvimento cognitivo delineados por Tall (1995), juntamente com o PMA, “inspirado por conceitos imagem, formalizado por conceitos definição e deduções lógicas” (TALL, 1995, p. 4, tradução nossa), estão diretamente relacionados com os Três Mundos da Matemática: Corporificado, Simbólico e Formal. Assim, podemos dizer que as teorias de processo-objeto enquadram-se no Mundo Simbólico do quadro teórico de Tall (2004, 2008, 2013).

Tall e Vinner (1981) não abordam exatamente o PMA. Todavia, as noções de conceito imagem e conceito definição contribuem em vários pontos nesse quadro teórico. Em Tall (1995, 2002), o conceito imagem age na intuição e o conceito definição no rigor do pensamento matemático. Assim, o PMA é inspirado em conceitos imagem e formalizado pelos conceitos definição (TALL, 1995).

À luz das teorias de processo-objeto, podemos afirmar que o conceito definição define um objeto (uma concepção estrutural), mesmo que não seja com a definição formal, pois se trata da definição na concepção do estudante. O conceito imagem, por sua vez, resume a concepção que um estudante possui de um conceito matemático, que pode ser procedimental ou estrutural. Uma concepção proceitual envolve tanto processos quanto um objeto gerado pelos processos (GRAY; TALL, 1994) e, desse modo, podemos associar a concepção proceitual, principalmente em um nível mais avançado, com uma concepção em que o conceito definição está de acordo com as outras partes do conceito imagem, que envolvem os processos.

Segundo Tall e Vinner (1981), é importante que o conceito imagem seja fortalecido e coerente. À luz de Tall (2002), consideramos que essa qualidade é importante para uma intuição acurada. Considerando a caracterização de Resnick (1987), o Pensamento de Ordem Superior envolve lidar com múltiplas abordagens para conseguir resolver situações complexas, em que não há um caminho trivial a ser seguido. E de acordo com Dreyfus (2002), é desejável, para o sucesso na aprendizagem matemática, que se tenha uma riqueza de representações mentais de um conceito. O conceito imagem não se limita a uma diversidade de representações, mas pode incluí-las. Dessa forma, a importância de uma riqueza de representações dada por Dreyfus (2002) é coerente com a importância do conceito imagem fortalecido conforme Tall e Vinner (1981).

Além disso, similar aos conceitos imagem conflitantes, representações mentais conflitantes também podem gerar conflitos cognitivos, conforme Dreyfus (2002, p. 32, tradução nossa):

> Várias representações mentais concorrentes de um conceito podem coexistir na mente de alguém, e pode ser vantajoso acionar diferentes representações mentais ao considerar diferentes situações matemáticas. No entanto, diferentes representações mentais também podem entrar em conflito [...].

Dentre essas representações mentais, pode haver concepções de um conceito como objeto ou como processo, nos permitindo associar as representações mentais com as teorias de processo-objeto. Dreyfus (2002) cita um exemplo do conceito de função, em que o estudante possui uma noção limitada a processos, como computação ou mapeamento, enquanto o professor entende uma função em uma integral como um objeto a ser transformado, discrepâncias que podem prejudicar um diálogo.

Agora, elencaremos características do PMA em comum nas interpretações do *corpus* que realizamos. Nas caracterizações do PMA que discutimos (DREYFUS, 2002; DUBINSKY, 2002; RESNICK, 1987; SFARD, 1987, 1991; TALL, 1995, 2002, 2004, 2008, 2013; TALL; VINNER, 1981) encontramos, de acordo com nossas interpretações, elementos para respaldar que o PMA:

- envolve autonomia e autorregulação, o processo de ensino-aprendizagem é centrado no aluno; envolve reflexão ou metacognição, ou seja, uma investigação ativa do próprio conhecimento;
- é não algorítmico;
- frequentemente leva a múltiplas soluções;
- envolve julgamento e interpretação sutis;
- envolve a aplicação de múltiplos critérios;
- envolve conceitos imagem fortalecidos e coerentemente relacionados entre si;
- envolve atribuição de significado;
- valoriza as ideias que constroem a Matemática e não a Matemática pronta; considera a Matemática como uma atividade humana;
- considera a Psicologia e a cognição; sua complexidade está associada à complexidade da estrutura cognitiva.

Para elencar essas características do PMA que interpretamos como comuns aos teóricos do *corpus*, criamos um quadro auxiliar e listamos, na primeira coluna, características do PMA que encontramos nos textos. Na primeira linha, inserimos os diversos autores citados. Assim, em cada célula marcamos ‘sim’ caso o autor referente à coluna da célula contemple a característica do PMA referente à linha da célula, na nossa interpretação. As linhas em que todas as células foram marcadas com ‘sim’ correspondem a características do PMA que interpretamos como comuns entre os teóricos. Agrupamos algumas características similares e, assim, elaboramos a lista que citamos.

Nesse quadro auxiliar, filtramos as linhas em que nem todas as células foram marcadas com ‘sim’ e as apresentamos no Quadro 2 a seguir.

Quadro 2 – Características do PMA (em que nem todas as células da linha correspondente foram marcadas com ‘sim’)

Características do PMA	Pensamento de Ordem Superior de Resnick	PMA de Tall	PMA de Dreyfus	PMA e Teoria APOS de Dubinsky	Reificação de Sfard	Pensamento proceitual de Gray e Tall	PMA nos Três Mundos da Matemática de Tall	Conceito imagem e definição de Tall e Vinner
envolve a competência para resolver conflitos cognitivos	sim	**sim**	sim	inconclusivo	inconclusivo	sim	sim	sim
tende a ser complexo	**sim**	sim	sim	inconclusivo	inconclusivo	sim	sim	sim
frequentemente envolve incerteza	**sim**	sim	inconclusivo	inconclusivo	inconclusivo	inconclusivo	sim	sim
envolve esforço mental	**sim**	sim	sim	inconclusivo	**sim**	sim	sim	sim
é diferente do elementar	sim	**sim**	em parte	em parte	em parte	em parte	inconclusivo	sim
engloba o elementar ou são disjuntos	disjuntos	alguns processos de PMA ocorrem no PME	**sim, o PMA inclui o PME**	o esquema inclui as outras concepções	o processo faz parte do objeto	o proceito engloba o processo e o objeto	o quadro todo engloba o PMA e o PME	disjuntos
exclusivo de matemáticos e estudantes de Matemática	não	**sim**	não	sim	sim	sim	sim	sim
exclusivo da Matemática Avançada	não	**sim**	não	PMA sim, APOS não	não	não	sim	não
relacionado com a axiomática e o formalismo	não	**sim**	não	não	não	não	sim	sim
envolve organizar as ideias em uma sequência lógica	inconclusivo	**sim**	inconclusivo	não	não	não	sim	sim
relacionado com processos mentais	**sim**	sim	**sim**	não	inconclusivo	não	sim	não
se diferencia pela complexidade dos processos	inconclusivo	não	**sim**	não	não	não	não	não
está relacionado com as concepções dos conceitos	não	sim	sim	sim	**sim**	sim	sim	**sim**
se diferencia pelas concepções dos conceitos	não	não	não	sim	**sim**	sim	não	**sim**
se inspira no trabalho de matemáticos	não	**sim**	**sim**	não	não	sim	sim	sim
envolve transformar uma sequência de operações em unidades mais gerenciáveis; compressão; informação compactada.	inconclusivo	sim	sim	sim	**sim**	**sim**	sim	inconclusivo

Fonte: os autores

No Quadro 2, algumas células foram marcadas com ‘não’, caso a teorização do autor referente à coluna da célula não contemple a característica referente à linha da célula, e algumas foram marcadas com ‘inconclusivo’, para o caso de não termos encontrado respaldo suficiente para concluirmos que o PMA possui essa característica no referencial teórico correspondente. Um ‘sim’ em negrito indica que o autor correspondente a essa coluna foi o que nos inspirou a listar essa característica.

Esse procedimento para comparar as caracterizações do PMA nos levou a questionamentos que não tivemos anteriormente, como se o PMA segundo Tall (2002) é exclusivo de matemáticos e estudantes de Matemática (consideramos que sim, pois Tall (2002, 2008) considera que alguns processos de PMA ocorrem no PME, mas não disserta quanto a outras áreas do conhecimento; ainda, esse autor considera a natureza peculiar de um símbolo tanto como processo quanto como objeto e teoriza os Três Mundos da Matemática, conceitos específicos da Matemática, além de inspirar a teorização do PMA no trabalho de matemáticos), se o PMA segundo Dreyfus (2002) frequentemente envolve incertezas (consideramos inconclusivo, por não encontrarmos suporte nas afirmações do autor para concluir que o PMA frequentemente envolve incertezas) e se o PMA segundo a Teoria APOS de Dubinsky (2002) envolve esforço mental (consideramos inconclusivo, mas que essa teoria é compatível com tal característica; o pensamento matemático na teorização de Dubinsky (2002) avança como em uma espiral, a cada passo há um avanço, e quando se tem um esquema, o próximo passo é de ação em que o esquema é um objeto da ação; Dubinsky (2002) considera que esses passos possivelmente não são fáceis, mas não temos respaldo para afirmar que concepções mais avançadas exijam maior esforço para serem obtidas; talvez esse desenvolvimento requeira um esforço contínuo de longo prazo). Assim, com o procedimento de cotejo adotado, conseguimos aprofundar nossos estudos e discussões a respeito do PMA. Além disso, utilizamos quadros similares ao Quadro 2 para identificar características do PMA referentes a cada perspectiva que descrevemos na seção seguinte.

Por meio do Quadro 2, observamos características do PMA compartilhadas por alguns autores e não por outros, algumas que podem indicar contradições e outras em que apenas podemos afirmar que alguns autores embasam uma característica e não podemos afirmar o mesmo quanto aos outros. Considerando a importância dessas características embasadas por alguns autores para o delineamento das perspectivas na próxima seção, as listamos especificando os autores que as embasam e comentando cada uma:

- o PMA envolve a competência para resolver conflitos cognitivos (DREYFUS, 2002; GRAY; TALL, 1994; RESNICK, 1987; TALL, 1995, 2002, 2008; TALL; VINNER, 1981);

Essa característica está relacionada com a autonomia, autorregulação e a metacognição que listamos como características do PMA segundo todos os autores do *corpus*. Ainda, de acordo com Resnick (1987), o Pensamento de Ordem Superior permite que se encontre uma estrutura em uma aparente desordem. A competência para resolver conflitos cognitivos não é uma característica que expõe contradições de Dubinsky (2002) e Sfard (1987, 1991) com os outros autores. Porém, resolver conflitos cognitivos, no sentido de Tall (2002) e Tall e Vinner (1981), envolve ir além de refletir a respeito do próprio pensamento matemático, regular as próprias ações para aprendizagem e lidar com autonomia em uma situação-problema; envolve organizar as ideias em uma sequência lógica, com o conceito definição coerente, para resolver contradições no conceito imagem.

- o PMA tende a ser complexo (DREYFUS, 2002; GRAY; TALL, 1994, 2001; RESNICK, 1987; TALL, 1995, 2002, 2004, 2008, 2013; TALL; VINNER, 1981);

Essa característica pode ter sentidos diferentes e também não indica contradições entre os discursos dos diferentes teóricos. No sentido de Resnick (1987), envolve caminhos para se resolver uma situação que não são totalmente ‘visíveis’ de algum ponto de vista vantajoso. No sentido de Dreyfus (2002), a complexidade dos processos de PMA se dá pela quantidade de informações que são tratadas e pelo gerenciamento de uma situação matemática. No sentido de Gray e Tall (1994, 2001) e Tall (1995, 2002, 2004, 2008, 2013), o avanço do pensamento matemático leva a uma gama de processos que são comprimidos em proceitos pensáveis, que geram novos processos em um nível superior, até chegar ao PMA, em que os conceitos são precisamente definidos e as relações deduzidas de maneira lógica, provando resultados mais gerais com base nos axiomas, levando a uma complexidade maior da quantidade de informações que são comprimidas nesses resultados gerais. O conceito imagem e o conceito definição (TALL; VINNER, 1981) complementam essa ideia de complexidade, pois o conceito imagem fica cada vez mais diverso e com mais relações estabelecidas entre as imagens mentais e, finalmente, deduzidas das definições.

- o PMA frequentemente envolve incerteza (RESNICK, 1987; TALL, 1995, 2002, 2008, 2013; TALL; VINNER, 1981);

Além da caracterização de Resnick (1987), o desenvolvimento do PMA, de acordo com Tall (1995, 2002, 2008, 2013), retomando os conceitos de Tall e Vinner (1981), envolve situações complexas em que fatores de conflitos cognitivos podem surgir e serem superados à medida que se desenvolve um pensamento mais formal e lógico. Não encontramos sustentação para essa característica nos textos dos outros autores, mas ela não indica uma contradição nos discursos.

- o PMA envolve esforço mental (DREYFUS, 2002; GRAY; TALL, 1994; RESNICK, 1987; SFARD, 1987, 1991; TALL, 1995, 2002, 2004, 2008, 2013; TALL; VINNER, 1981);

Segundo Resnick (1987), o Pensamento de Ordem Superior requer elaboração, adição de complexidade, ir além do dado para construir novas formulações de questões, pesar várias alternativas e, às vezes, aceitar a incerteza, o que exige esforço e autorregulação. Além disso, segundo a autora, esse pensamento requer saber quando certas estratégias são apropriadas e ter motivação para aplicá-las, mesmo que possam envolver mais esforço do que as performances de rotina. Conforme Sfard (1991), a reificação requer esforço, ou seja, muito trabalho e possivelmente um descanso ('período de incubação').

Além disso, muita informação a ser tratada (DREYFUS, 2002), fases de interiorização e condensação (SFARD, 1991), resolução de situações complexas (RESNICK, 1987) e reconstrução da estrutura cognitiva (TALL, 1995, 2002, 2004, 2008, 2013; TALL; VINNER, 1981) são questões que envolvem esforço de um estudante; o que não contradiz as teorizações de outros autores. Por exemplo, Dubinsky (2002) considera que as etapas da APOS podem não ser fáceis para os estudantes; não é o mesmo que dizer que concepções mais elevadas envolvam esforço mental, mas é compatível com essa possível característica do PMA.

- há diferenças nítidas entre o PMA e o PME (RESNICK, 1987; TALL, 1995, 2002; TALL; VINNER, 1981);

As características que Resnick (1987) elenca do Pensamento de Ordem Superior o distinguem nitidamente de um pensamento elementar. Tall (1995, 2002) considera a precisão do formalismo matemático como um fator distintivo entre o PME e o PMA. Para que o conceito definição de Tall e Vinner (1981) seja coerente com a definição formal é necessário um estudo da definição formal, que pode envolver um PMA no sentido de Tall (2002).

Além disso, podemos analisar, nas caracterizações de cada autor, como o PME se relaciona com o PMA. Segundo Tall (2002), alguns processos de PMA ocorrem no PME, mas o PMA se diferencia pela abstração e precisão das definições e deduções formais.

Segundo Dreyfus (2002), os processos de PME ocorrem no PMA, conforme nossa interpretação que inclui o PME no PMA (Figura 2), sendo esse segundo mais abrangente.

Tall (2008) insere o pensamento mais voltado ao formalismo matemático em um dos Três Mundos da Matemática, incluindo tanto o PME quanto o PMA nesse quadro.

Nas teorias de processo-objeto, o entendimento total de um conceito inclui os entendimentos mais elementares; de fato, o esquema inclui as concepções de ação, processo e objeto (DUBINSKY, 2002), o processo faz parte do objeto em Sfard (1987, 1991) e o proceito envolve o entendimento de um conceito matemático tanto como processo quanto como objeto (GRAY; TALL, 1994).

Desse modo, podemos observar diferenças possivelmente contraditórias nas caracterizações de diferentes autores quanto a essas relações entre o pensamento elementar e o avançado.

- o PMA é exclusivo de matemáticos e estudantes de Matemática (DUBINSKY, 2002; GRAY; TALL, 1994; SFARD, 1987, 1991; TALL, 1995, 2002, 2004, 2008, 2013; TALL; VINNER, 1981);

Essa é outra questão que distingue os discursos dos teóricos. Resnick (1987) e Dreyfus (2002) afirmam, respectivamente, que o Pensamento de Ordem Superior e o PMA ocorrem em outras áreas do conhecimento. Os demais teóricos do *corpus* construíram sua teorização considerando as peculiaridades da construção dos objetos matemáticos. Tall (1995, 2002), por exemplo, considera o formalismo da Matemática Avançada e a transição para o PMA a partir de situações mais elementares que envolvem percepções de objetos corporificados e ações sobre objetos por meio de representações simbólicas que se tornam proceitos, fenômenos que ocorrem especialmente na Matemática.

- o PMA é exclusivo da Matemática Avançada (TALL, 1995, 2002, 2004, 2008, 2013);

Essa é outra característica distintiva entre as teorizações, que demarca o PMA de Tall (1995, 2002, 2008, 2013) como relacionado à Matemática Avançada, especialmente à Matemática Acadêmica, enquanto as teorizações de outros autores (DREYFUS, 2002; GRAY; TALL, 1994; RESNICK, 1987; SFARD, 1987, 1991; TALL; VINNER, 1981) consideram que os processos ou indícios de

PMA podem ocorrer em qualquer nível de ensino.

Na nossa interpretação, Dubinsky (2002) associa o PMA à Matemática Avançada, conforme argumentamos na Subseção 2.1.2. Porém, não encontramos respaldo para afirmar que algumas concepções da Teoria APOS (como objeto e esquema) são exclusivas de Matemática Avançada e, ao associar essa teoria de processo-objeto com outras (Quadro 1), consideramos que essas concepções podem ocorrer em qualquer nível de ensino, tal como o pensamento proceitual flexível de Gray e Tall (1994).

- o PMA está relacionado ao formalismo matemático e à axiomática; envolve organizar as ideias em uma sequência lógica (TALL, 1995, 2002, 2004, 2008, 2013; TALL; VINNER, 1981);

Essas são outras duas características que demarcam o PMA de Tall (1995, 2002, 2004, 2008, 2013), conforme descrevemos na Seção 2.1. O conceito definição de Tall e Vinner (1981), ainda que possa ser entendido em qualquer nível de ensino, relaciona o pensamento matemático a uma abordagem mais formal da Matemática e a uma organização lógica das ideias matemáticas.

- o PMA está relacionado com processos mentais (DREYFUS, 2002; RESNICK, 1987; TALL, 1995, 2002, 2004, 2008, 2013);

Tall (1995, 2002, 2004, 2008, 2013) considera os processos de pensamento matemático em sua teorização, incluindo alguns que são específicos do PMA, como a abstração, que envolve a definição formal de um conceito com base em propriedades que são abstraídas de casos particulares. Assim, essa consideração pelos processos de pensamento matemático não contradiz as ideias do autor de como o PMA se diferencia do PME. Por outro lado, Dreyfus (2002) considera que o PMA se diferencia pela complexidade dos processos de pensamento, caracterizando-o de maneira diferente e, por vezes, divergente das caracterizações de outros teóricos.

- o PMA está relacionado com as concepções dos conceitos matemáticos (DUBINSKY, 2002; GRAY; TALL, 1994, 2001; SFARD, 1987, 1991; TALL, 1995, 2002, 2004, 2008, 2013; TALL; VINNER, 1981);

Tall (1995, 2002, 2004, 2008, 2013) considera as concepções dos conceitos em sua teorização, especialmente quanto à concepção de proceito (GRAY; TALL, 1994) e quanto ao conceito imagem e o conceito definição que um estudante possui de um conceito matemático (TALL; VINNER, 1981).

Tall e Vinner (1981), Sfard (1987, 1991), Dubinsky (2002) e Gray e Tall (1994) consideram o avanço na concepção dos conceitos como o próprio avanço no pensamento matemático. Essa progressão no pensamento matemático indicada pelas concepções dos conceitos matemáticos é uma característica que distingue as concepções desses teóricos, podendo se contradizer com concepções de outros.

- a teorização do PMA se inspira no trabalho de matemáticos (DREYFUS, 2002; GRAY; TALL, 1994, 2001; TALL, 1995, 2002, 2004, 2008, 2013; TALL; VINNER, 1981);

Essa característica difere entre os autores sem trazer contradições nas caracterizações do PMA; essa inspiração para o desenvolvimento do quadro teórico do PMA é interessante para esta tese porque ressalta a Matemática como uma atividade humana, desenvolvida por matemáticos. Entender o pensamento dos matemáticos nos ajuda a entender o pensamento dos estudantes e os processos que precisam mobilizar para aprender Matemática (DREYFUS, 2002; TALL, 2002). Assim, essa caraterística revela uma concepção construtivista do ensino de Matemática.

- o PMA envolve transformar uma sequência de operações em unidades mais gerenciáveis (DREYFUS, 2002; DUBINSKY, 2002; GRAY; TALL, 1994, 2001; SFARD, 1987, 1991; TALL, 1995, 2004, 2008, 2013);

As fases de interiorização e condensação, descritas por Sfard (1991), transformam as sequências de operações em unidades mais gerenciáveis, possibilitando a reificação do conceito. Nas teorias de processo-objeto, o objeto comprime os processos que o envolvem em unidades mais gerenciáveis. Dreyfus (2002) considera a quantidade de informações que são compactas em alguns processos. Por exemplo, o processo de síntese comprime e relaciona vários fatos anteriormente não relacionados (DREYFUS, 2002). Tall (1995, 2004, 2008, 2013) considera que os processos matemáticos podem ser comprimidos para ocupar pouca atenção consciente. Essa característica é compatível com as ideias de todos os autores do *corpus*, apesar de não termos encontrado respaldo explícito em Tall e Vinner (1981) e Resnick (1987).

Dessas divergências a respeito das características do PMA, as que apontamos como possivelmente contraditórias nos impedem de obter uma caracterização do PMA que simplesmente reúna todas as ideias dos teóricos que abordamos. Assim, na seção a seguir, identificamos algumas perspectivas que reúnem certas características de forma a evitar contradições.

2.3 ALGUMAS PERSPECTIVAS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Nesta seção, identificamos e nomeamos três perspectivas de PMA. Mostramos como cada perspectiva permite lidarmos com as divergências elencadas na seção anterior.

Nas características do PMA compartilhadas por alguns autores e não por outros, listadas na seção anterior, podemos perceber que as características que indicam contradições entre teorizações são as que definem uma exclusividade do PMA (como ser exclusivo de Matemática ou de Matemática Avançada) ou que determinam como o PMA se distingue do PME (pelo formalismo, pela complexidade dos processos de pensamento ou pelas concepções dos conceitos matemáticos). Focamos na distinção entre o PMA e o PME para evitar contradições em cada perspectiva, de forma que uma possível exclusividade do PMA será uma consequência nas características das perspectivas que identificamos.

Desse modo, consideramos uma questão central para identificar algumas perspectivas de PMA: quais critérios devemos tomar para distinguir se um pensamento matemático é avançado? A partir desse critério, tomamos como foco alguma ou algumas características do PMA que se agrupam em uma perspectiva, ou seja, uma forma de entender o PMA que enfatiza algumas características em relação a outras.

Assim, visando não diferir muito das caracterizações do PMA adotadas pelos teóricos, partimos dos critérios que alguns autores propõem para o que define o pensamento matemático como avançado e identificamos três perspectivas de PMA em que as ideias de diversos autores podem ser entendidas segundo essa perspectiva. Não excluímos a possibilidade de haverem outras perspectivas; apenas são as três que conseguimos identificar no momento.

A primeira perspectiva que identificamos é a de que o PMA é um pensamento que ocorre na Matemática Acadêmica. A chamamos de perspectiva do pensamento formal-axiomático[30]. Essa perspectiva está de acordo com Tall (1995, 2002, 2004, 2008, 2013), ao considerar que as deduções e definições formais distinguem o PMA do PME, e com a importância do conceito definição coerente com a definição formal do conceito, conforme Tall e Vinner (1981).

Assim, os aspectos valorizados nessa perspectiva são a distinção entre os pensamentos envolvidos na Matemática Elementar e na Matemática Acadêmica, entre os pensamentos matemáticos voltados à corporificações ou simbolismos corporificados e os pensamentos matemáticos voltados ao método dedutivo e à axiomática, bem como as dificuldades características dos estudantes de Matemática que ocorrem no Ensino Superior, devido à transição do PME para o PMA esperada nesse nível de ensino[31]. Por isso, utilizamos essa perspectiva no Capítulo 6 ao discutirmos o PMA em questões envolvendo a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica (MOREIRA; DAVID, 2007).

A segunda perspectiva que identificamos considera que o pensamento matemático é avançado se os processos de pensamento envolvidos são complexos o suficiente para gerenciar a complexidade de uma situação matemática. A chamamos de perspectiva da complexidade dos processos de pensamento. Essa perspectiva está de acordo com Dreyfus (2002).

Os aspectos valorizados nessa perspectiva são os processos de pensamento, sua complexidade e as dificuldades envolvidas na execução desses processos.

A terceira perspectiva que identificamos e, por hora, a última, é a de que o pensamento matemático é avançado se os conceitos matemáticos são pensados de forma flexível e coerente como processo e objeto. A chamamos de perspectiva das concepções dos conceitos. Essa perspectiva está de acordo com as teorias de processo-objeto (DUBINSKY, 2002; GRAY; TALL, 1994; SFARD, 1987, 1991) e relacionada com as imagens mentais de um conceito (TALL; VINNER, 1981).

Essa perspectiva tem como foco os conceitos matemáticos e suas imagens mentais, valorizando o aspecto psicológico do PMA, do conhecimento como

---

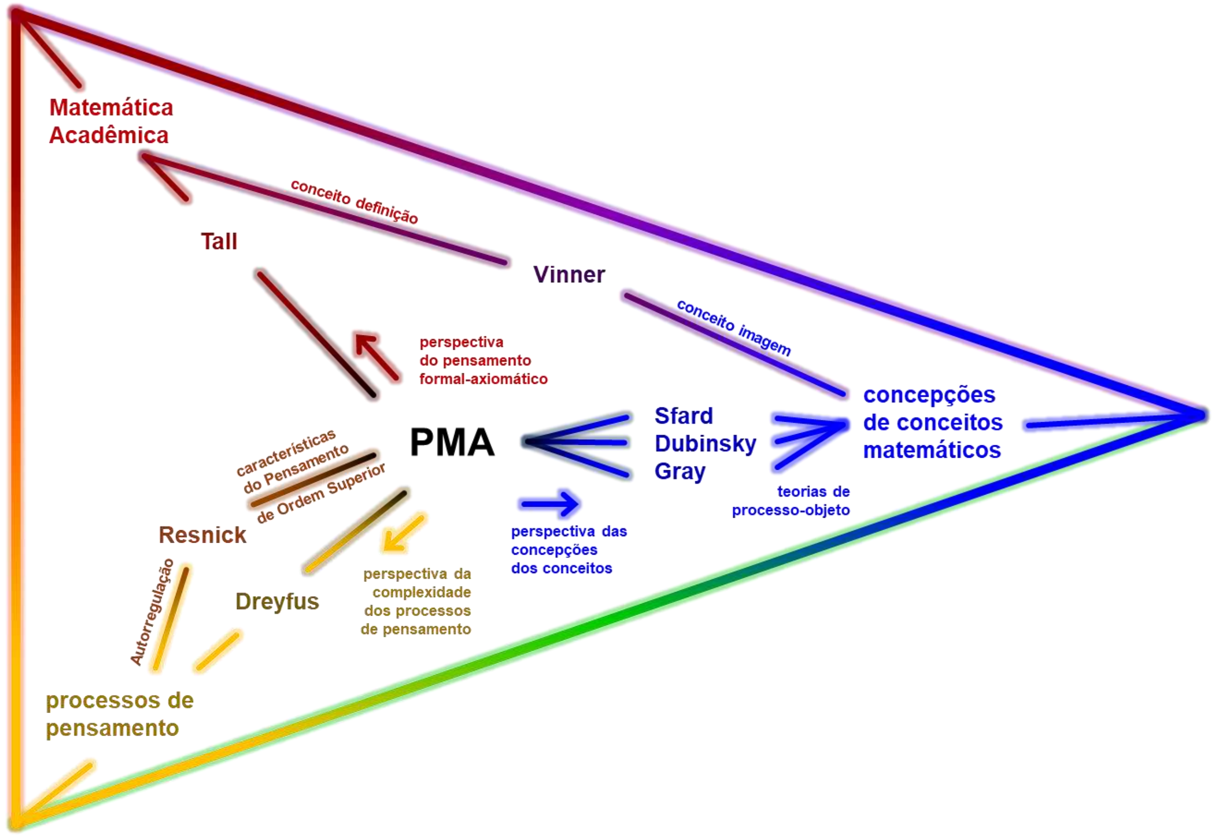
[30] Esse nome foi inspirado no Mundo Formal-Axiomático do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática de Tall (2004).

[31] Com base em Tall (2002), consideramos que essa transição pode ocorrer no primeiro ano da graduação, e o PMA (na perspectiva do pensamento formal-axiomático) pode ser desenvolvido ao longo dessa graduação, nos estudos da Matemática Acadêmica, de acordo com o curso.

uma rede de relações, a dualidade processo-objeto dos conceitos matemáticos, bem como a coerência e diversidade dos conceitos imagem.

Assim, elaboramos três perspectivas: uma mais focada na Matemática Acadêmica; outra nos processos de pensamento; e outra nas concepções dos conceitos matemáticos. A seguir, apresentamos um diagrama (Figura 3) em que dispomos os principais autores do PMA e a principal característica de cada perspectiva, de forma a aproximarem-se mais ou menos dos três vértices de um triângulo, representando a proximidade de cada autor com cada perspectiva que elencamos.

Figura 3 – Diagrama que dispõe os principais teóricos do PMA e perspectivas de PMA



Fonte: os autores

Ressalvamos que imagem alguma pode representar as relações entre as ideias de todos os autores, porque algumas disposições que parecem opostas no diagrama não representam autores realmente com ideias opostas. Por exemplo, Tall (2002) descreve o PMA como um pensamento voltado à Matemática Acadêmica, mas engloba as teorias de processo-objeto em seu quadro teórico como uma forma de transição para o PMA (TALL, 1995), além de descrever processos de pensamento. Outro exemplo dessa “falsa oposição” é a relação das representações mentais de Dreyfus (2002) com o conceito imagem (TALL; VINNER, 1981), que comentamos na Seção 2.2. A ideia da Figura 3 é apenas ilustrar como as perspectivas podem demarcar lados a se enfatizar no quadro teórico do PMA.

Sendo assim, devemos considerar certa flexibilidade nas posições de cada nome ao interpretar o diagrama da Figura 3. Consideramos que ‘Tall’ está mais próximo da Matemática Acadêmica em sua caracterização do PMA (TALL, 2002), embora sua teorização englobe processos de pensamento e concepções de conceitos matemáticos. As contribuições de ‘Vinner’ aproximam-se tanto da Matemática Acadêmica, principalmente quanto ao conceito definição em coerência com a definição formal (TALL, VINNER, 1981), quanto da concepção dos conceitos inclusa no conceito imagem; por outro lado, suas contribuições focam nas concepções matemáticas e, assim, distanciam-se um pouco dos processos de pensamento. As caracterizações de Resnick (1987) para o Pensamento de Ordem Superior nos motivaram a colocar ‘Resnick’ em uma posição entre a Matemática Acadêmica, principalmente por enfatizar uma ‘Ordem Superior’ no pensamento matemático, e os processos de pensamento, que são autorregulados pelo indivíduo no Pensamento de Ordem Superior; ainda, a autora considera, em suas características desse pensamento, o desenvolvimento de processos mentais, além de que esses processos não são exclusivos da Matemática, aproximando-se mais de ‘Dreyfus’ e menos da perspectiva das concepções dos conceitos matemáticos que são estabelecidas a partir desses processos.

A distribuição em três perspectivas nos permitiu utilizar uma paleta de cores na Figura 3 procurando facilitar a interpretação das posições. Ao invés das cores primárias subtrativas magenta, ciano e amarelo, optamos por representar as perspectivas em cores mais fortes: vermelho escuro, azul e amarelo âmbar, para deixar os textos visíveis no fundo branco. Utilizamos a cor preta (sobreposição das cores primárias subtrativas) para o PMA em geral, que está em toda a região triangular e por isso demarcado como ‘PMA’ ao centro. Os gradientes de cores permitem interpretarmos posições entre as perspectivas, como ‘Vinner’ próximo a um tom de roxo e ‘Resnick’ em amarelo-alaranjado escuro.

Ainda quanto à Figura 3, observamos que não temos linhas divisórias dentro da região triangular. As perspectivas não são rigidamente separadas umas das outras. Além das características em comum do PMA nessas três perspectivas e relações que discutimos na Seção 2.2, alguns indícios ou processos de PMA são comuns a mais de uma perspectiva, conforme discutimos na sequência.

Passemos, então, a detalhar como podemos entender as características do PMA em cada perspectiva, a partir das quais explicamos como cada perspectiva lida com as divergências elencadas na seção anterior para não ter contradições em si.

Ao discutir a generalização e a abstração, com o exemplo dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, que citamos na Subseção 2.1.2, Tall (2002) considera o processo de definição do espaço vetorial abstrato descrito por Dreyfus (2002):

> Como Dreyfus discutirá com mais detalhes no capítulo 2, o processo de definição do espaço vetorial abstrato deve ser seguido por uma sequência de teoremas deduzindo as propriedades de um espaço vetorial que decorrem dos axiomas. Cognitivamente este não é apenas um processo de *dedução*, mas um processo de *construção* em que o aprendiz está construindo propriedades do objeto abstrato, por exemplo, que os axiomas garantem as propriedades “usuais” de adição de vetores e multiplicação por escalares, que um conjunto linearmente independente de vetores conterá no máximo o mesmo número de vetores que um conjunto gerador, que um espaço com um conjunto gerador finito tem uma ‘dimensão’ precisa dada em termos de um conjunto gerador linearmente independente, ou ‘base’, e assim por diante. (TALL, 2002, p. 11, tradução nossa, grifo do autor).

Desse modo, Tall (2002) considera descrições de processos de PMA segundo Dreyfus (2002), porém, não considera como fator distintivo do PMA o gerenciamento da complexidade matemática pelos processos, o que contraditaria o seu modo de distinguir o PMA do PME pela precisão das definições e deduções da Matemática Acadêmica. A perspectiva do pensamento formal-axiomático que descrevemos segue essa ideia. Utilizamos processos e ideias de outros autores, mas a distinção entre PMA e PME será considerada conforme Tall (2002).

Assim, a descrição dos processos de PMA realizada por Dreyfus (2002) pode ser utilizada na perspectiva do pensamento formal-axiomático, com uma diferença: nessa perspectiva, um processo de pensamento matemático é de PMA se envolve um pensamento matemático com definições e deduções formais.

Por exemplo, os processos de abstração, generalização e síntese[32], conforme descritos por Dreyfus (2002), são processos de PMA na perspectiva do pensamento formal-axiomático. Porém, nessa perspectiva, não é o gerenciamento de uma situação matemática que os classifica como avançados, e sim o fato de estarem relacionados com as abstrações e deduções formais características da Matemática Acadêmica.

O quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2004, 2008, 2013) auxilia a situarmos as teorias de processo-objeto (DUBINSKY, 2002, GRAY; TALL, 1994; SFARD, 1987, 1991) na perspectiva do pensamento formal-axiomático. Enquanto o PMA é mais voltado ao Mundo Formal-Axiomático, essas teorias envolvem abstrações no Mundo Simbólico-Proceitual, contribuindo significativamente para a transição do PME para o PMA, principalmente na Álgebra e na Aritmética. Tall (1999) considera que nem sempre esse é o caminho para o desenvolvimento cognitivo, principalmente em estudos de espaço e forma (que ocorrem, por exemplo, na Geometria e nas noções intuitivas do Cálculo) em que os conceitos podem ser entendidos inicialmente como objetos. Tall (1995) resume essas duas formas de transição para o PMA, uma mais voltada à Geometria com corporificação dos conceitos e outra mais voltada à Álgebra e Aritmética com o encapsulamento dos processos como proceitos pensáveis.

O conceito definição (TALL, VINNER, 1981) tem um papel importante na perspectiva do pensamento formal-axiomático, pois o formalismo depende das definições precisas. Assim, um indício de PMA, nessa perspectiva, é o conceito definição coerente com as definições formais. O conceito imagem dos estudantes pode ser um suporte ou, em caso de imagens insatisfatórias ou conflitantes, torna-se um fator de conflito potencial para as abstrações em níveis avançados, conforme Tall (2002).

As características de Resnick (1987) do Pensamento de Ordem Superior são todas aplicáveis ao PMA na perspectiva do pensamento formal-axiomático, com a ressalva de que o Pensamento de Ordem Superior não é exclusivo da Matemática Avançada e nem mesmo da Matemática, sendo, portanto, um conceito mais geral.

---

[32] Por conta das diferenças na definição de 'síntese' em Tall (2002) e Dreyfus (2002), especificamos qual estamos mencionando com a referência ao autor. No parágrafo em questão, estamos considerando a definição de síntese dada por Dreyfus (2002), considerando esse processo como de PMA de acordo com a perspectiva do pensamento formal-axiomático.

Desse modo, além das características que interpretamos como comuns aos autores do *corpus* (Seção 2.2), o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, tem as seguintes características:

- envolve a competência para resolver conflitos cognitivos;
- tende a ser complexo;
- frequentemente envolve incerteza;
- envolve esforço mental;
- é diferente do PME, embora tenha processos em comum;
- é exclusivo de matemáticos e estudantes de Matemática;
- é exclusivo da Matemática Acadêmica, com definições e deduções formais;
- está relacionado com a axiomática e o formalismo matemático; envolve organizar as ideias em uma sequência lógica;
- está relacionado com alguns processos mentais e com as concepções dos conceitos, embora esses não sejam fatores distintivos;
- se inspira no trabalho de matemáticos;
- envolve transformar uma sequência de operações em unidades mais gerenciáveis.

Das características elencadas na seção anterior, as únicas que o PMA não contempla na perspectiva do pensamento formal-axiomático são as que definem de forma diferente a transição do PME para o PMA, ou seja, de que o PMA se diferencia pela complexidade dos processos de pensamento ou se diferencia pelas concepções dos conceitos.

Na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, os processos de pensamento matemático descritos por Tall (2002) podem ser considerados, observando que o que determina um processo de pensamento matemático como de PMA é o gerenciamento da complexidade de uma situação Matemática. Assim, o PMA, nessa perspectiva, não é exclusivo da Matemática Avançada.

O processo de análise (TALL, 2002), por exemplo, é um processo de PMA na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, pois possibilita o refinamento e a organização das ideias matemáticas. Outros processos de PMA, de acordo com esse critério, definidos por Tall (2002), são os processos de generalizar, abstrair, definir e construir, alguns também descritos por Dreyfus (2002). Todos os processos descritos por Dreyfus (2002) são importantes nessa perspectiva. Também a intuição bem desenvolvida é um indício de PMA, pois indica conceitos imagem fortalecidos que permitem estabelecer relações e gerenciar uma situação matemática de uma maneira lógica. Do mesmo modo, conceitos imagem diversos e coerentes entre si (TALL; VINNER, 1981), enriquecendo a intuição (TALL, 2002), são indícios de PMA nessa perspectiva.

Além disso, para que um indivíduo consiga gerenciar a informação utilizada na resolução de um problema, Dreyfus (2002) considera fundamental o domínio das diversas representações de um conceito e que essas representações sejam corretamente e fortemente conectadas. Desse modo, no PMA, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, as representações e outras características do conceito presentes no conceito imagem (TALL; VINNER, 1981) não somente são diversas como também fortemente conectadas, para que o indivíduo consiga trabalhar com toda a informação envolvida.

Quanto às teorias de processo-objeto (DUBINSKY, 2002; GRAY; TALL, 1994; SFARD, 1987, 1991), a perspectiva da complexidade dos processos de pensamento tem foco nos processos desenvolvidos quando o estudante lida com os conceitos matemáticos. Ações com objetos conhecidos e procedimentos desenvolvidos a partir das ações são processos de pensamento matemático relativamente elementares. À medida que o indivíduo condensa os processos matemáticos e passa a reificá-los como objetos e manipulá-los como proceitos, os procedimentos vão sendo compactados em unidades mais gerenciáveis, caracterizando um pensamento matemático mais avançado. Quando um estudante entende o processo, mas não o objeto, ou vice-versa, a respeito de um conceito que está sendo utilizado, podem ocorrer dificuldades de aprendizagem, como Dreyfus (2002) exemplifica com o conceito de função:

> Você já perguntou a matemáticos que trabalham em diferentes áreas o que lhes vem à mente quando pensam em funções? Quando você também pergunta a professores e estudantes de Matemática, essas diferenças se tornam não apenas mais pronunciadas, mas também muito mais importantes. Por exemplo, a noção de uma função de um aluno pode ser limitada a processos (de computação ou mapeamento), enquanto o professor que ensina integrais indefinidas pode pensar na função na integral como um objeto a ser transformado. Tais discrepâncias levam facilmente a situações em

> que os estudantes não conseguem entender seus professores. (DREYFUS, 2002, p. 31, tradução nossa).

À luz de Dreyfus (2002), o entendimento de um conceito como processo ou como objeto, conforme as teorias de processo-objeto, está relacionado com as representações mentais que o indivíduo possui do conceito, que podem ser mobilizadas em processos de PME ou de PMA.

As características que Resnick (1987) elenca para o Pensamento de Ordem Superior são aplicáveis ao PMA na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, com exceção de que o Pensamento de Ordem Superior sempre envolve incerteza. Porém, relacionada a essa característica, há a reflexão a respeito da própria atividade matemática, que é uma característica do PMA (DREYFUS, 2002) na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento. Ainda, Resnick (1987) caracteriza o Pensamento de Ordem Superior de forma que o separa de um pensamento matemático elementar, enquanto consideramos, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, que os processos de PME também são processos que ocorrem no PMA.

Desse modo, além das características que interpretamos como comuns aos autores do *corpus* (Seção 2.2), o PMA, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, tem as seguintes características:

- envolve a competência para resolver conflitos cognitivos;
- tende a ser complexo;
- envolve esforço mental;
- inclui os processos elementares;
- está relacionado com processos mentais e se difere do PME pela complexidade dos processos de pensamento matemático;
- se inspira nos processos desenvolvidos por matemáticos;
- envolve transformar uma sequência de operações em unidades mais gerenciáveis.

Na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PMA não é exclusivo de matemáticos e estudantes de Matemática, nem da Matemática Avançada; não há uma relação direta com a axiomática e o formalismo matemático, embora o pensamento matemático em deduções formais provavelmente requer processos de PMA; o PMA, nessa perspectiva, também não se distingue pelas concepções dos conceitos e não podemos afirmar que frequentemente envolva incerteza.

Na perspectiva das concepções dos conceitos, focamos no entendimento que os indivíduos possuem dos conceitos matemáticos. Os processos de pensamento matemático são como instrumentos para os aprendizes manipularem os conceitos matemáticos e evoluírem seu entendimento a respeito, como os processos de generalização, abstração, formalização e síntese (DREYFUS, 2002) presentes nas fases de interiorização e condensação dos processos matemáticos (SFARD, 1991). À medida que os processos com conceitos conhecidos são realizados e reificados em proceitos pensáveis e manipuláveis (GRAY; TALL, 1994; SFARD, 1991), esses são condensados em objetos para serem manipulados em uma nova estrutura de ordem superior (DUBINSKY, 2002). Assim, o avanço no pensamento matemático, nessa perspectiva, se dá na forma das relações que os objetos vão estabelecendo entre si na estrutura cognitiva, formando uma estrutura de rede com aspecto fractal, como descreve Machado (2000) quanto à concepção de conhecimento como rede.

O conceito imagem (TALL; VINNER, 1981) envolve todas as imagens que o estudante possui do conceito, que podem ser categorizadas de acordo com as diferentes decomposições genéticas (DUBINSKY, 2002; GRAY; TALL, 1994; SFARD, 1987, 1991) comparadas no Quadro 1. Um conceito imagem fortalecido, de forma que o indivíduo desenvolva um pensamento proceitual que relaciona processos e o objeto envolvidos, conseguindo transitar entre essas formas de entendimento, revela uma concepção de esquema (DUBINSKY, 2002) do conceito.

Relacionada ao conceito imagem fortalecido está a diversidade de representações mentais. Desse modo, embora a perspectiva das concepções dos conceitos tenha as concepções como foco, alguns processos descritos por Dreyfus (2002) podem ser considerados nessa perspectiva.

As representações mentais (DREYFUS, 2002) são parte da concepção que um indivíduo possui de um conceito matemático. Como já mencionamos, essas representações podem estar associadas mais a uma concepção operacional ou mais a uma concepção estrutural. O processo de síntese descrito por Dreyfus (2002) envolve o entendimento de toda uma estrutura, relacionando vários objetos; assim, é um processo que revela um avanço considerável no pensamento matemático (na perspectiva das concepções dos conceitos), já que há um avanço em cada conceito relacionado que é visto como objeto, formando uma espécie de esquema de esquemas.

A transição para o PMA, nessa perspectiva, se dá no entendimento de esquema dos conceitos, que passam a operar como conceitos básicos em um novo nível. O avanço do pensamento matemático se dá continuamente em cada etapa, não há uma única transição para o PMA. Os processos passam a ser entendidos como objetos, que passam a integrar processos em um próximo nível, num desenvolvimento que pode ser visualizado imaginando-se uma espiral, de forma que as etapas das teorias de processo-objeto se repetem em cada nível da espiral.

Desse modo, nessa perspectiva, não se considera que a precisão das definições e deduções da Matemática Acadêmica seja o fator distintivo do PMA, como em Tall (2002). Portanto, não se considera o PMA como exclusivo da Matemática Avançada. Todavia, o pensamento matemático envolvendo definições e deduções, depende, na perspectiva das concepções dos conceitos, de um entendimento dos conceitos como objetos. De fato, uma definição de um conceito o considera como um objeto. Assim, o conceito definição (TALL; VINNER, 2002) está relacionado, na perspectiva das concepções dos conceitos, a um nível de pensamento matemático em que tais conceitos já são vistos no mínimo como objetos.

A perspectiva das concepções dos conceitos não considera que o PMA frequentemente envolva incerteza, mas, de resto, considera que o PMA possui as características elencadas por Resnick (1987) para o Pensamento de Ordem Superior.

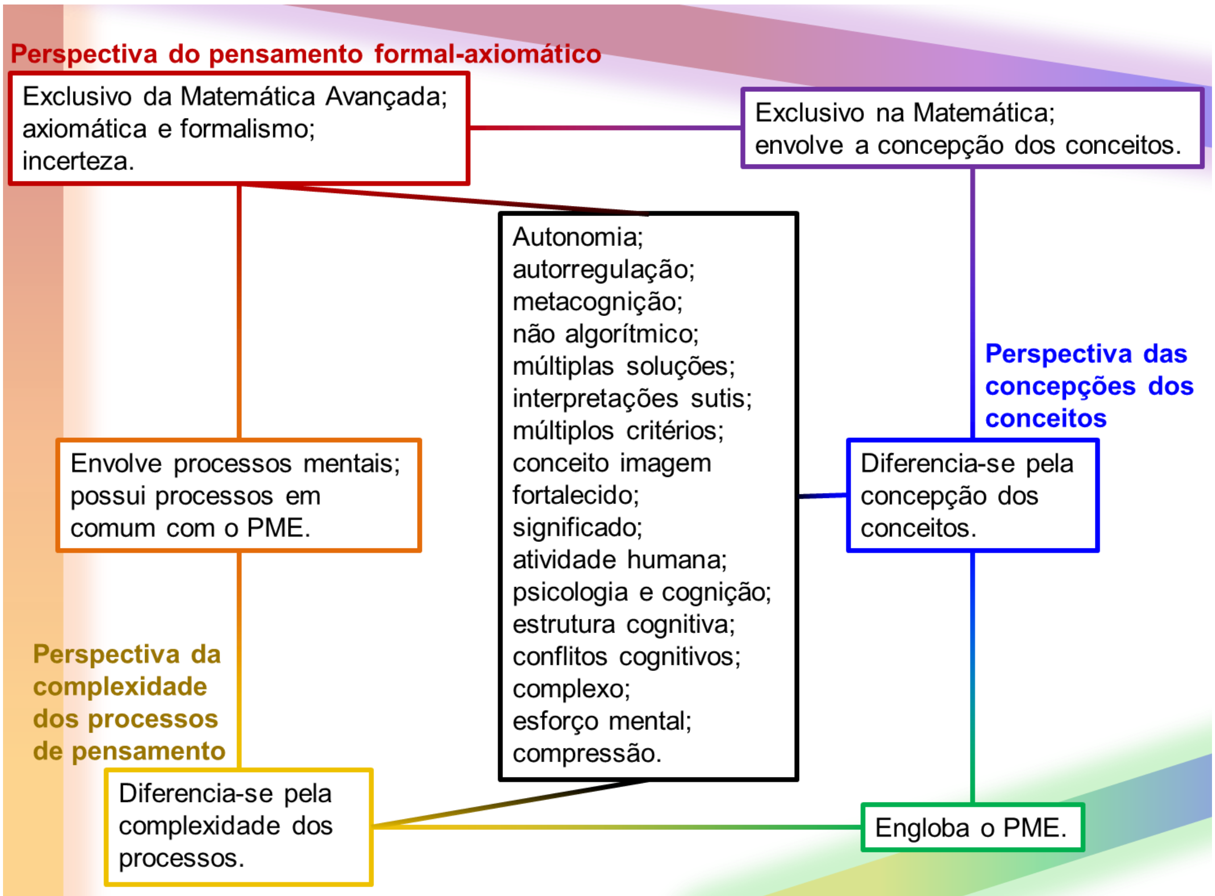
Desse modo, além das características que interpretamos como comuns aos autores do *corpus* (Seção 2.2), o PMA, na perspectiva das concepções dos conceitos, tem as seguintes características:

- envolve a competência para resolver conflitos cognitivos;
- tende a ser complexo;
- envolve esforço mental;
- avança em cada etapa; a concepção de esquema engloba todas as outras concepções, assim como o proceito engloba o processo e o objeto;

- é exclusivo em matemáticos e estudantes de Matemática;
- se diferencia de um pensamento elementar pelas concepções dos conceitos;
- se inspira parcialmente na forma como os matemáticos alternam flexivelmente entre processos e concepções estruturais;
- envolve transformar uma sequência de operações em unidades mais gerenciáveis.

Na perspectiva das concepções dos conceitos, o PMA não é exclusivo da Matemática Avançada; não há uma relação direta com a axiomática e o formalismo matemático, embora o pensamento matemático em aspectos formais provavelmente requer concepções avançadas dos conceitos; o PMA, nessa perspectiva, também não está relacionado necessariamente a processos de pensamento e não necessariamente envolve incerteza.

Figura 4 – Características do PMA de acordo com as três perspectivas identificadas



Fonte: os autores

Apresentamos, na Figura 4, um diagrama com as características do

PMA dispostas de acordo com as três perspectivas que descrevemos, com as características comuns às três perspectivas (possivelmente não comum a todos os autores analisados) inseridas ao centro do diagrama no retângulo de cor preta. As características exclusivas de cada perspectiva estão nos retângulos de cores vermelha escura, azul e amarelo âmbar. Os retângulos de cores roxa, laranja e verde resumem as características em comum entre exatamente duas perspectivas. Ao fundo, esses retângulos estão dispostos dentro do 'triângulo do PMA' ilustrado na Figura 3, de forma que as posições dos retângulos e disposições de cores dos retângulos e gradientes das linhas coincidem com as posições e cores esperadas nessa região triangular, possibilitando associações entre as características elencadas na Figura 4 e os autores dispostos na Figura 3. Embora tenhamos utilizado retângulos com contornos de traços sólidos, os segmentos de reta que os unem representam as relações e transições contínuas entre eles.

Utilizamos tais perspectivas de forma a ter clareza nas declarações desta tese, permitindo indicarmos em qual perspectiva algo é característico do PMA. Considerando nosso objetivo de discutir e elencar possíveis contribuições do PMA para o ensino de Matemática na Educação Básica, podemos adiantar que, nas perspectivas da complexidade dos processos de pensamento e das concepções dos conceitos, em que o PMA pode ocorrer na aprendizagem de Matemática na Educação Básica, algumas potenciais contribuições desse pensamento bem desenvolvido por professores podem ser respaldadas de uma forma mais direta: se é desejável que os estudantes da Educação Básica desenvolvam o PMA, então os professores poderão utilizar-se desse pensamento bem desenvolvido para ajudá-los. Cabe discutirmos com maior especificidade essas potenciais contribuições, conforme as organizamos no Capítulo 6. Por outro lado, a perspectiva do pensamento formal-axiomático não possui uma relação com a aprendizagem de Matemática na Educação Básica, por estar mais voltada à Matemática Avançada, exigindo uma análise mais complicada de suas possíveis contribuições para o ensino. De todo modo, abordamos essas três perspectivas na discussão teórica apresentada no Capítulo 6.

A seguir, completamos a fundamentação teórica desta tese com questões relacionadas aos saberes e conhecimentos para o ensino de Matemática, que ajudam a respaldar nossas discussões quanto a possíveis contribuições para a prática docente.

3 SABERES E CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, realizamos uma pesquisa histórico-bibliográfica (FIORENTINI; LORENZATO, 2006), em que selecionamos alguns referenciais teóricos voltados a saberes e conhecimentos para o ensino de Matemática, complementando a fundamentação teórica que será utilizada nos capítulos seguintes.

Nesta tese, entendemos ‘conhecimento’ “[...] como um conjunto de informações, teorias, práticas e princípios armazenados pela humanidade, compondo domínios científicos específicos” que são “[...] consolidados, convencionados, consensuados e compartilhados por uma comunidade científica” (BATISTA, 2016, p. 16). Já o ‘saber’, tomamos como um “[...] conjunto de conhecimentos específicos adquiridos por um indivíduo a partir de sua interação com os vários tipos de conhecimentos” (BATISTA, 2016, p. 17).

Assim, consideramos que os conhecimentos de um indivíduo são partes do saber desse indivíduo. Por isso, o fato de Moreira (2004) utilizar esses termos de forma indistinta não entra em conflito com esse entendimento nas citações que faremos, pois os conhecimentos dos professores são saberes desses indivíduos. Transcrevemos um trecho de Moreira e David (2007) que ilustra essa utilização: “São muitas as concepções que servem de base para a análise dos saberes profissionais docentes, mas em grande parte delas o conhecimento matemático [...] é tomado como o saber fundamental [...]. Os demais componentes, ainda que reconhecidos como saberes complexos e importantes, conformam um conjunto de conhecimentos de caráter basicamente acessório ao processo de transmissão do saber disciplinar”.” (MOREIRA, DAVID, 2007, p. 15)[33].

A seguir, na Seção 3.1, discorremos a respeito dos conceitos de Matemática Escolar e Matemática Acadêmica (MOREIRA; DAVID, 2007), que serão utilizados para discutirmos possíveis relações entre o PMA (na perspectiva do pensamento formal-axiomático) e os saberes associados à prática dos professores de Matemática da Educação Básica. Além disso, a teorização de Moreira e David

[33] Nessa passagem, Moreira e David (2007) problematizam a ênfase dada ao ‘conhecimento da disciplina’ (Matemática Acadêmica) como o ‘saber’ a partir do qual os outros saberes associados à prática docente passam a fazer sentido, o que exterioriza da formação matemática a construção de vínculos com a prática. A trouxemos aqui apenas como exemplo de frases em que as palavras ‘saber’ e ‘conhecimento’ são utilizadas no mesmo sentido pelos autores.

(2007) nos fundamenta para questionarmos o quanto um conhecimento matemático de fato contribui para o ensino de Matemática nas escolas. Na Seção 3.2, relacionamos a Matemática Escolar com o Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), cujos domínios utilizamos no Capítulo 6 para organizar possíveis contribuições do PMA para o ensino de Matemática e justificar a importância de determinados conhecimentos para os professores. Especificamente, utilizamos o domínio do Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (BALL; BASS, 2009), que descrevemos na Subseção 3.2.1, para aprofundar a discussão quanto à extensão do conhecimento de Matemática Avançada que pode pertencer ao Conhecimento Matemático para o Ensino dos professores da Educação Básica. Na Seção 3.3, continuamos essa discussão com base em pesquisas que envolveram o Conhecimento Matemático Avançado (ZAZKIS; LEIKIN, 2010). Tal discussão se aproxima dos nossos objetivos por meio das relações que discutiremos nesta tese entre a aprendizagem de Matemática Avançada e o desenvolvimento do PMA.

3.1 A Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica

Moreira e David (2007) discutem relações entre duas faces de saberes matemáticos, diferenciando o conjunto de significados que a comunidade científica identifica como Matemática e o conjunto de saberes especificamente associados à educação escolar em Matemática. Para isso, os autores utilizam os termos Matemática Acadêmica e Matemática Escolar. A Matemática Acadêmica se refere “à Matemática como um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais” (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 20). Já a Matemática Escolar se refere “ao conjunto dos saberes ‘validados’, associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática” (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 20, grifo dos autores).

> Com essa formulação, a Matemática Escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos etc. Dessa forma, distanciamo-nos, em certa medida, de uma concepção de Matemática Escolar que a identifica como uma disciplina ‘ensinada’ na escola, para tomá-la como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente. (MOREIRA, DAVID, 2007, p. 20, grifo dos autores).

Desse modo, a concepção de Moreira e David (2007) se distancia tanto da concepção de que a Matemática Escolar é uma adaptação da Matemática Acadêmica à escola (CHEVALLARD, 1991, apud MOREIRA; DAVID, 2007), quanto de que a Matemática Escolar é constituída estritamente de práticas que se desenvolvem no interior da escola (CHERVEL, 1990, apud MOREIRA; DAVID, 2007). Os autores consideram a Matemática Escolar como uma construção histórica que reflete múltiplos condicionantes, externos e internos à escola, tais como lutas políticas, econômicas e socioculturais. O currículo é um exemplo, abordado pelos autores, de um estágio do processo de constituição dos saberes associados à prática dos professores de Matemática que possui influência de agentes externos, incluindo da Matemática Acadêmica. Contudo, a Matemática Escolar não fica totalmente definida por essa disputa que se desenvolve externamente à escola. “Há que se considerar, ainda, o que a prática escolar vai produzir a partir das prescrições vencedoras, ou seja, como estas vão se acomodar dentro do processo histórico de produção dos saberes associados à docência escolar” (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 38).

Sendo assim, uma vez que a Matemática Escolar se constitui de saberes validados associados à atuação dos professores na Educação Básica, contribuições validadas da Matemática Acadêmica para essa atuação fariam parte da Matemática Escolar. Assim, consideramos a possibilidade de haver interseção da Matemática Escolar com a Matemática Acadêmica. No entanto, precisamos de cautela para discutir essa possível interseção. Segundo Moreira e David (2007), a Matemática Escolar não está sujeita a uma ‘vigilância epistemológica’ da Matemática Acadêmica. De acordo com os autores, justificativas menos formais podem ser aceitas na Educação Básica. Nessa perspectiva, a Matemática Acadêmica é apenas um dos múltiplos condicionantes da Matemática Escolar, dentre outros como a política e o currículo. Como um dos condicionantes, entendemos que a ela é permitida contribuir e, se realmente contribuir, constituirá saberes que são parte da Matemática Escolar. No entanto, a Matemática Acadêmica não pode impor sua lógica à Matemática Escolar, seguindo a perspectiva de Moreira e David (2007).

Por essa razão, ao discutirmos (no Capítulo 6) possibilidades de contribuição do PMA articulado com a Matemática Acadêmica para o ensino na Educação Básica (especialmente na perspectiva de PMA do pensamento formal-axiomático), consideramos que, mesmo que tais possibilidades se concretizem em práticas escolares (e, portanto, constituam saberes da Matemática Escolar), essas estão limitadas a contribuições e impossibilitadas de serem vistas como uma habilidade necessária à prática profissional docente.

A partir dessa relação entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica, importantes questões põem-se em discussão na condição de problema de investigação. Por exemplo:

> [...] em que medida e de que maneira concreta o conhecimento da Matemática, na forma e nos valores associados à Matemática Acadêmica, poderia contribuir efetivamente para o desempenho profissional no trabalho docente na escola básica? (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 36).

Como apontado por Moreira e David (2008, p. 38, tradução nossa), evidências indicam “[...] que o conhecimento matemático acadêmico nem sempre (e naturalmente) é um instrumento útil para o professor na prática escolar. Entretanto, pode (ou não, em alguns casos) ser transformado em tal instrumento”. Em alguns casos, a Matemática Acadêmica pode ser conflitante com a Matemática Escolar, como nos exemplos de conjuntos numéricos abordados pelos autores (MOREIRA; DAVID, 2007). Complementando, Moreira (2012) considera que um dos desafios quanto a essa questão é:

> [...] desenvolver estudos fundamentados que permitam entender melhor o papel da matemática acadêmica na formação do professor da escola básica. Essa questão tem sido tratada, desde há muito, na base da tradição e de forma essencialmente opinativa [...]. (MOREIRA, 2012, p. 1148).

Desse modo, Moreira (2012) considera que o papel da Matemática Acadêmica na formação dos professores precisa ser objeto de estudos investigativos. Voltaremos a comentar, Seção 3.3, a respeito da falta de um consenso quanto à importância da Matemática Avançada para o ensino na Educação Básica.

A partir dos termos de Moreira e David (2007) que adotamos, cabe elucidarmos diferenças com relação aos termos Matemática Elementar e Matemática Avançada que por vezes utilizamos.

Entendemos a Matemática Avançada conforme a caracterização de Conhecimento Matemático Avançado de Zazkis e Leikin (2010), que abordaremos adiante. Desse modo, a Matemática Avançada é entendida nesta tese como o corpo de conhecimentos matemáticos estudados em nível de graduação, pós-graduação ou pesquisa, o qual inclui a Matemática Acadêmica, mais voltada ao formalismo e à axiomática. Consideramos que essa descrição da Matemática Avançada faz sentido com o referencial teórico do PMA, conforme Tall (2002), Dreyfus (2002) e Dubinsky (2002), por exemplo, que se refere à Matemática Avançada como a matemática universitária, por vezes relacionando-a a assuntos abordados de forma que não consideramos de Matemática Acadêmica no sentido de Moreira e David (2007), como Cálculo e Geometria Analítica.

De acordo com essa descrição da Matemática Avançada, entendemos a Matemática Elementar como a matemática estudada na Educação Básica. Assim, a Matemática Elementar está incluída na Matemática Escolar, que se trata de saberes associados à prática docente escolar (MOREIRA; DAVID, 2007). Embora não seja comum uma Matemática Avançada na escola básica, nada impede que tópicos de Matemática Elementar sejam trabalhados na graduação, fazendo parte da Matemática Avançada.

Na sequência, relacionamos a Matemática Escolar (MOREIRA; DAVID, 2007) com os domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

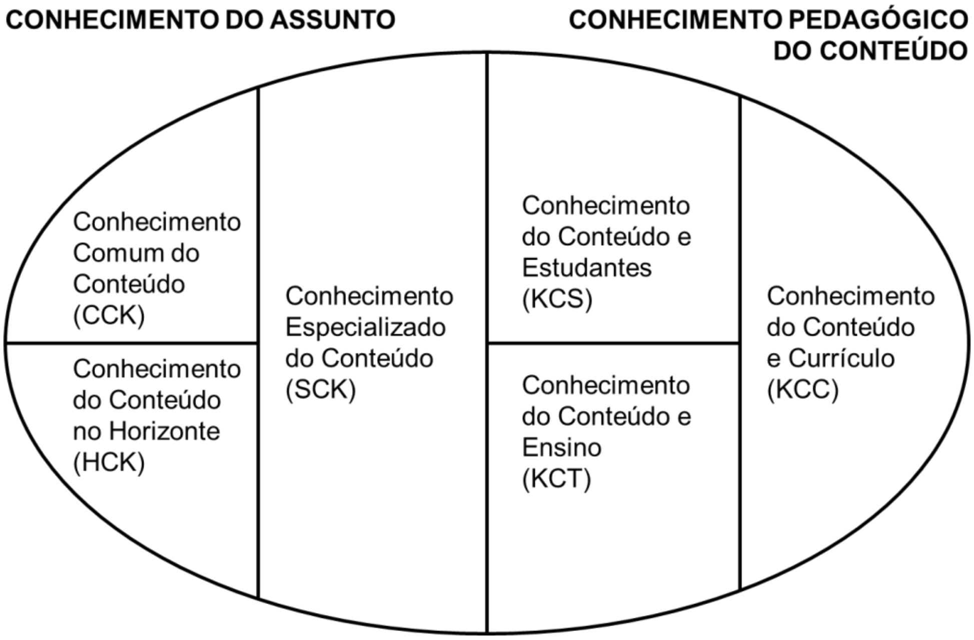
3.2 O Conhecimento Matemático para o Ensino

As pesquisas quanto aos conhecimentos para o ensino frequentemente remetem-se a Shulman (1986, 1987), que organizou um repertório de conhecimentos necessários à prática docente: conhecimento pedagógico geral, conhecimento dos estudantes e suas características, conhecimento de contextos educacionais, conhecimentos de fins educacionais, objetivos, valores e motivos, conhecimento do conteúdo, conhecimento do currículo e conhecimento pedagógico do conteúdo. Outra referência conhecida na área é o trabalho de Tardif (2012), que considera a diversidade dos saberes docentes, identificando-os como saberes disciplinares, curriculares, profissionais e experienciais.

Alguns pesquisadores desenvolveram modelos teóricos referentes a conhecimentos específicos para o ensino de Matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; CARRILLO *et al.*, 2013; FENNEMA; FRANKE, 1992; GODINO *et al.*, 2017; ROWLAND, 2013). Nesta tese, utilizamos o referencial teórico do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), de Ball, Thames e Phelps (2008). Tais autores reconhecem que o trabalho de Shulman (1986, 1987) foi importante para mostrar que ensinar é um trabalho profissional, que possui uma base de conhecimento profissional única. No entanto, Ball, Thames e Phelps (2008, p. 394, tradução nossa) consideram que as ideias referentes aos conhecimentos dos professores “[...] se mantiveram teoricamente dispersas, deficientes de clara definição", e propõem um refinamento das categorias ‘conhecimento do conteúdo’ e ‘conhecimento pedagógico do conteúdo’ de Shulman (1987), com uma abordagem focada no trabalho docente e em como demanda raciocínio, discernimento, compreensão e habilidade matemática.

Assim, Ball, Thames e Phelps (2008) definem os seguintes domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT): Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK), Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), Conhecimento do Conteúdo e Estudantes (KCS), Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT), Conhecimento do Conteúdo e Currículo (KCC)[34]. Esses domínios agrupam-se em Conhecimento do Assunto e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (traduções nossas), conforme ilustrado na Figura 5:

Figura 5 – Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino



Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, tradução nossa).

[34] Mantivemos as siglas referentes às iniciais dos termos na língua inglesa, pois a tradução dos termos resulta em iniciais que geram siglas idênticas. Para poupar o leitor de ter que memorizá-las ou consultá-las com frequência, limitamos sua utilização e as relembramos em algumas oportunidades.

Quanto ao Conhecimento do Assunto, o domínio do Conhecimento Comum do Conteúdo refere-se a conhecimentos e habilidades matemáticos que são utilizados em outros contextos além do ensino, como a capacidade de resolver problemas matemáticos corretamente. O Conhecimento Especializado do Conteúdo refere-se a conhecimentos e habilidades matemáticos específicos para ensinar, que não são tipicamente necessários para outros propósitos, como diferentes interpretações dos conceitos matemáticos que não precisam ser explicitadas pelos estudantes. E o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte é a consciência dos professores de como os tópicos matemáticos estão relacionados ao longo da Matemática contida no currículo, incluindo conexões com ideias matemáticas posteriores (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Referente ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, o domínio do Conhecimento do Conteúdo e Estudantes combina conhecimento a respeito dos estudantes e da Matemática. Esse conhecimento contribui para que os professores antecipem as dificuldades dos estudantes e assim escolham exemplos apropriados (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). O Conhecimento de Conteúdo e Ensino combina conhecimento a respeito da Matemática e do ensino. Refere-se às decisões dos professores a respeito das atividades propostas, o conhecimento a respeito de possíveis vantagens e desvantagens das representações e exemplos utilizados, de métodos e procedimentos de ensino, além da coordenação entre a Matemática e as opções instrucionais para tomar decisões em sala de aula. Por fim, o Conhecimento de Conteúdo e Currículo refere-se à categoria de Shulman (1986) do conhecimento do currículo, tanto vertical (a familiaridade com tópicos matemáticos de séries anteriores e posteriores) quanto lateral (familiaridade com tópicos abordados simultaneamente em outras disciplinas), incluindo indicações e materiais instrucionais disponíveis nos programas curriculares (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Conforme nossas concepções de saber e conhecimento, esses domínios do MKT (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) são parte da Matemática Escolar (MOREIRA; DAVID, 2007), por serem conhecimentos dos professores (e, portanto, saberes) associados à prática de ensino na Educação Básica.

Na perspectiva de PMA das concepções dos conceitos (Capítulo 2), podemos observar uma relação entre o PMA e o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK). O PMA envolve muita informação compactada e a habilidade de descompactá-la para um pensamento flexível, incluindo abordagens processuais e estruturais. Os professores precisam dessa estrutura descompactada para explicitar características de conteúdos específicos, conforme Ball, Thames e Phelps (2008, p. 400, tradução nossa) consideram com relação ao SCK:

> O ensino envolve o uso de conhecimento matemático descomprimido que pode ser ensinado diretamente aos estudantes à medida que eles desenvolvem compreensão. No entanto, com os estudantes o objetivo é desenvolver fluência com conhecimento matemático comprimido. No final, os estudantes devem ser capazes de usar ideias e procedimentos matemáticos sofisticados. Os professores, no entanto, devem ter um conhecimento matemático descompactado, porque o ensino envolve tornar as características de um conteúdo específico visíveis e apreensíveis pelos estudantes.

Nesse sentido, Moreira e David (2007) consideram que a Matemática Acadêmica envolve definições formais em que os conceitos já são apresentados de forma estrutural, enquanto na Matemática Escolar o aspecto operacional precede o estrutural, o que requer, conforme Sfard (1991), as fases de interiorização e condensação para se chegar à reificação dos conceitos. Segundo Moreira e David (2007), essa precedência do aspecto operacional em relação ao estrutural destaca uma insuficiência e inadequação de uma visão do conhecimento matemático como um sistema formal-dedutivo para o ensino na Educação Básica.

Articulando essa distinção entre os aspectos operacionais e estruturais com a descompactação abordada por Ball, Thames e Phelps (2008), consideramos que as concepções estruturais dos professores relacionam-se ao seu Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) em uma espécie de complementaridade, por envolver estruturas compactadas, enquanto o SCK requer que os professores descomprimam[35] estruturas. É possível que concepções estruturais sejam desenvolvidas no estudo da Matemática Acadêmica; no entanto, conforme Moreira e David (2007), a lógica da construção dos conceitos nessa matemática não é adequada para a construção escolar a partir dos aspectos operacionais.

Além disso, é possível que alguns tópicos da Matemática Acadêmica sejam incluídos no Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK), por serem tópicos posteriores relacionados aos estudados na Educação Básica. No entanto, como destacaremos ainda neste capítulo, para estar presente na Matemática

[35] Termo baseado em Ball e Bass (2000).

Escolar (e no HCK), esse conhecimento matemático compactado necessita de articulação com a Matemática Elementar, de forma que os professores tenham flexibilidade para trabalhar com os conhecimentos descompactados, que permitem acompanhar o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes desde os procedimentos a serem interiorizados e condensados.

No Capítulo 6, elencamos possíveis contribuições do PMA para o ensino de Matemática, relacionando-as com os domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Uma vez que o PMA pode contribuir para o aprendizado em Matemática Avançada (conforme argumentamos no Capítulo 6) e esse pode se relacionar ao HCK dos professores, daremos uma atenção especial a esse domínio na subseção a seguir.

3.2.1 O Conhecimento do Conteúdo no Horizonte

O domínio do Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK) foi particularmente investigado por alguns pesquisadores. Ball e Bass (2009) refinaram a definição de HCK por meio de quatro elementos constituintes: uma percepção do ambiente matemático em torno da 'localização' atual na instrução; principais ideias e estruturas disciplinares; principais práticas matemáticas; valores e sensibilidades matemáticas fundamentais.

Segundo Ball e Bass (2009, p. 5-6, tradução nossa, grifo nosso), "[...] o ensino requer uma noção de como a Matemática 'em jogo' agora está relacionada a ideias, estruturas e princípios matemáticos mais amplos". Nesse sentido, o HCK é uma consciência:

> [....] da grande paisagem matemática na qual a experiência e a instrução presentes estão situadas. Ele envolve aqueles aspectos da matemática que, embora talvez não estejam contidos no currículo, são úteis para o aprendizado atual dos estudantes, que iluminam e conferem um sentido compreensível do significado maior do que pode ser apenas parcialmente revelado na matemática do momento. (BALL; BASS, 2009, p. 6, tradução nossa).

Com isso, Ball e Bass (2009) citam algumas responsabilidades docentes que podem ser orientadas pelo HCK: realizar julgamentos a respeito da importância matemática; entender o significado matemático no discurso dos estudantes; destacar pontos importantes; antecipar e realizar conexões; perceber oportunidades; e captar possíveis precursores de dificuldades.

Zazkis e Mamolo (2011) argumentam que Ball e Bass (2009) se referem ao horizonte dos estudantes, e questionam: e o horizonte dos professores? Ao focar nos professores, as autoras consideram que “o conhecimento no horizonte dos professores está, para nós, profundamente conectado ao seu conhecimento de matemática avançada (a nível universitário ou de graduação)” (ZAZKIS; MAMOLO, 2011, p. 9, tradução nossa).

Agregando essas perspectivas, nesta tese, entendemos que o HCK abrange os conhecimentos matemáticos que se relacionam a um determinado conteúdo ensinado na Educação Básica, tanto de Matemática Elementar quanto de Matemática Avançada, dentro ou fora do currículo escolar, desde que possam contribuir para os professores em sua prática de ensino. Nesse entendimento, o HCK, tal como os demais domínios do MKT, está incluso na Matemática Escolar, pois trata-se de um conjunto de conhecimentos voltado ao exercício da profissão docente.

Conforme Jakobsen *et al*. (2012, p. 4635, tradução nossa, grifo dos autores), “[...] um horizonte indiscriminável que inclui tudo ‘por aí afora’ é também inútil aos professores ou impraticável no tempo limitado e segundo as demandas do ensino profissional”.

> Isso significa que os professores não devem aprender matemática em um nível mais avançado do que o que eles ensinam? Nossa resposta é não. Contudo, estamos convencidos que a matemática avançada para professores precisa ser demonstrativamente relacionada ao trabalho de ensinar na escola. (JAKOBSEN *et al*., 2012, p. 4636, tradução nossa).

Jakobsen *et al*. (2012) examinaram episódios de ensino que demandam um conhecimento que se apoia num ‘horizonte’ matemático e os utilizaram para desenvolver uma definição de HCK. Segundo Jakobsen *et al*. (2012), o HCK trata-se de estar familiarizado com a Matemática Avançada, mas em uma maneira que permita ouvir, ver, sentir e fazer para o ensino. Com isso, os autores afirmam que o HCK requer que se veja o cenário maior em termos de compreender relações com ideias que surgem no conteúdo sendo ensinado e aprendido na escola e que se situe a Matemática Avançada dentro de um maior conjunto de questões matemáticas.

Os autores consideram que os “Professores não precisam do mesmo grau de tratamento formal necessário àqueles que usam ideias matemáticas de outras formas” (JAKOBSEN *et al*., 2012, p. 4641, tradução nossa). Segundo Jakobsen *et al*. (2012), a compreensão e a familiaridade com estruturas avançadas são importantes para que as conexões entre conteúdos avançados e escolares sejam percebidas e aproveitadas.

Os episódios de ensino examinados por Jakobsen *et al*. (2012) buscaram capturar circunstâncias realistas de ensino em que os autores hipotetizaram vínculos com a utilização do HCK por professores.

No primeiro episódio, a respeito de uma situação de igualdade de áreas, uma estudante desenha um retângulo dividido por três linhas paralelas (não paralelas aos lados do retângulo) e afirma que é possível mover as linhas divisórias até que as áreas se tornem iguais. O professor, então, pode mobilizar o seu conhecimento a respeito de continuidade e do Teorema do Valor Intermediário para compreender a sugestão da estudante, decidir se era uma sugestão sensata, se valeria a pena abordá-la e como abordá-la de uma forma que os estudantes aprendessem matemática.

> Não seria apropriado ensinar a estudantes do segundo ano explicitamente sobre continuidade, mas uma fundamentação matemática firme fornece a um professor uma base para evitar plantar sementes de más concepções, assim como um professor com uma visão melhor da matemática futura pode evitar dizer a um jovem estudante: ‘Não podemos subtrair um número maior de um menor’. (JAKOBSEN *et al*., 2012, p. 4638, tradução nossa, grifo dos autores).

No segundo episódio apresentado por Jakobsen *et al*. (2012), pergunta-se qual seria o maior e o menor canil possível a ser construído com 64 metros de cerca. Embora só esperasse soluções retangulares, a professora sabia, pelo seu conhecimento de Cálculo, que o canil com maior área possível seria circular. Por conta dessa compreensão, a professora procurou não dar aos estudantes apenas ferramentas que reduziriam o escopo do problema. Nas discussões com os estudantes, a professora mobilizou seu conhecimento a respeito de provas em Matemática, levando os estudantes a entenderem que o fato de o canil quadrado ter sido o maior encontrado pela turma não faria dele o maior possível. Ao comparar diferentes retângulos, um estudante percebeu que poderia criar um canil com espaço quase nulo ao fazer uma largura próxima de zero e um comprimento próximo de 32 metros. Percebendo a relação com limites, a professora decidiu explorar a questão. Nessa exploração, um estudante observou que não existia um espaço mínimo para o canil (JAKOBSEN *et al*., 2012).

Essa percepção da professora do episódio de Jakobsen *et al*. (2012), que levou à decisão de explorar a questão, está de acordo com uma utilização do HCK mencionada por Ball e Bass (2009), de forma a antecipar o prosseguimento em que uma situação pode levar. Ball e Bass (2009) apresentam um exemplo disso com uma discussão em sala de aula a respeito de número pares e ímpares, em que a professora percebe o potencial da dúvida de um estudante e permite que a explorem, levando a conjecturas que se relacionam com divisibilidade e congruência modular.

A partir dos episódios descritos, Jakobsen *et al*. (2012, p. 4641, tradução nossa, grifo dos autores) consideram que o "[...] conhecimento do conteúdo no horizonte prepara um professor para falar e agir com sensibilidade à disciplina. É sobre estar familiarizado com matemática 'avançada', mas de maneira que sustenta ouvir, ver, sentir e fazer para o ensino". Além disso, os autores argumentam que:

> [...] os professores precisam de um tratamento de matemática avançada que seja conduzido de uma 'perspectiva elementar', que forneça uma compreensão do papel de importantes tópicos na disciplina, um controle intuitivo de conceitos e os recursos necessários para reconhecer e utilizar tal conhecimento no ensino. (JAKOBSEN *et al*., 2012, p. 4643, tradução nossa, grifo dos autores).

Assim, Jakobsen *et al*. (2012) consideram que os professores devem ter um conhecimento da Matemática Avançada voltado para o ensino, não sendo necessário se especializar em questões que não fornecem diretamente alguma utilidade ao trabalho docente.

Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013) apresentam um episódio de ensino que retomaremos no Capítulo 6, em que os estudantes discutem a irracionalidade de $2\sqrt{2}$. Nesse episódio, o professor precisa decidir se o argumento apresentado por um estudante está correto e se vale a pena explorá-lo, pois o argumento extrapola os objetivos do Ensino Fundamental ao utilizar-se da demonstração por redução ao absurdo. Desse modo, de acordo com Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013), o HCK fornece aos professores a consciência das potencialidades de certas situações e sugere possibilidades para lidar com o conteúdo matemático ensinado.

Segundo Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013), algumas decisões dos professores requerem um Conhecimento do Assunto que não faz parte do currículo ensinado. Consequentemente, esse conhecimento não é especializado ou comum, pois não envolve representações, explicações e conhecimento desempacotado do conteúdo sendo ensinado. O conhecimento de prova por contradição e a competência para utilizá-lo no ensino, por exemplo, trata-se de um Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, que, segundo os autores, pode contribuir para os professores ouvirem seus alunos, compreenderem além dos tópicos sendo ensinados e tomarem decisões em situações de ensino.

Na seção seguinte, damos continuidade a essa discussão quanto ao conhecimento para o ensino abordando pesquisas que se referiram ao conhecimento de Matemática Avançada dos professores de Matemática.

3.3 O Conhecimento Matemático Avançado

Zazkis e Leikin (2010) definem o Conhecimento Matemático Avançado como o conhecimento matemático adquirido em cursos de graduação. As autoras utilizaram essa definição para analisar as percepções de professores do ensino secundário (correspondente aos Anos Finais do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio no Brasil) em relação a utilizarem o Conhecimento Matemático Avançado em sua prática de ensino.

Os participantes dessa pesquisa foram cinquenta e dois professores que ensinam Matemática no ensino secundário (referente ao Ensino Fundamental no Brasil). Zazkis e Leikin (2010) apresentaram aos professores a definição de Conhecimento Matemático Avançado e perguntaram em que medida o utilizam no ensino escolar, solicitando exemplos de tópicos matemáticos, situações de ensino e problemas ou tarefas do currículo escolar em que o Conhecimento Matemático Avançado é essencial ou útil para os professores.

Essa pesquisa apontou uma variação no quanto os professores afirmaram utilizar o Conhecimento Matemático Avançado em sua prática. Parte dos professores afirmou que esse conhecimento é utilizado o tempo todo; porém, a maioria não apresentou exemplos específicos. Alguns professores citaram exemplos gerais de tópicos matemáticos, como Cálculo e Estatística, mas não conseguiram especificar situações ou problemas (ZAZKIS; LEIKIN, 2010).

Sendo assim, Zazkis e Leikin (2010) destacaram, nas respostas dos professores, exemplos de utilização do Conhecimento Matemático Avançado não vinculadas a conteúdos específicos, tais como: formas de pensar; ‘boa percepção’ para ensinar; capacidade de fazer conexões entre os conteúdos dentro e além do currículo; capacidade de responder às perguntas dos estudantes; agilidade; habilidade de ver uma ‘imagem melhor’ ou uma ‘imagem completa’ do assunto; ‘sensação de terreno’[36]; conforto e confiança (autonomia); e domínio de ‘temas transversais’ ou ‘questões metamatemáticas’, das quais destacam-se prova, rigor de linguagem e ‘precisão e estética’ (elegância da solução).

> A lacuna entre a matemática universitária e a matemática ensinada na escola secundária é ainda evidenciada pela dificuldade que muitos professores experimentam quando solicitados a articular exemplos específicos do uso de seu AMK [Conhecimento Matemático Avançado]. Nós nos perguntamos se essa lacuna é inevitável ou é resultado dos currículos implementados tanto na universidade quanto no ensino médio. (ZAZKIS; LEIKIN, 2010, p. 280, tradução nossa).

Considerando a definição de Conhecimento Matemático Avançado de Zazkis e Leikin (2010), entendemos que ele pode se relacionar aos três domínios do Conhecimento do Assunto (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Embora Zazkis e Leikin (2010) o pressupõem como um conhecimento especializado para o ensino, sua definição, como um conhecimento adquirido em nível universitário, permite que englobe também conhecimentos matemáticos comuns ou no horizonte. O Conhecimento Comum do Conteúdo da Educação Básica pode ser trabalhado na graduação. Além disso, o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte está relacionado ao domínio do conteúdo ao longo do currículo, possivelmente encontrando o Conhecimento Matemático Avançado como um conteúdo à frente, seja ou não de Matemática Acadêmica. Mas ressalvamos que nem todo Conhecimento Matemático Avançado é um Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, pois esse último, na caracterização que adotamos, precisa estar relacionado à prática de ensino na Educação Básica, tal como os outros domínios do MKT.

Ainda com relação a esse conhecimento de Matemática Avançada, Leikin e Zazkis (2010) basearam-se em Tall e Vinner (1981), dentre outros autores, e solicitaram a futuros professores de Matemática exemplos de definições de conceitos de diferentes áreas da Matemática. As autoras consideram que o conceito imagem consistente com a definição formal do conceito faz parte do conhecimento

---

[36] A ‘sensação de terreno’ é mencionada pelos entrevistados de Zazkis e Leikin (2010) como uma ‘visão’ da direção que o ensino está tomando, no mesmo sentido de ver uma ‘imagem melhor’ do assunto.

do assunto, conforme Shulman (1986).

> O conhecimento do assunto dos professores compreende o conhecimento dos professores de matemática [...]. Está associado a definições e inclui o conhecimento da estrutura da matemática, o lugar e o papel dos axiomas, definições e teoremas dentro dessa estrutura, compreensão de conceitos matemáticos (incluindo definições pessoais e conceitos imagem consistentes com conceitos definição formais) e compreensão do significado de definir e provar. O conhecimento do assunto também inclui elementos metamatemáticos como a compreensão do que é uma definição, como ela é diferente de um axioma ou teorema e quais são suas propriedades e estrutura lógica. (LEIKIN; ZAZKIS, 2010, p. 454, tradução nossa).

Com base nas respostas obtidas, Leikin e Zazkis (2010) sugeriram que os futuros professores de Matemática não relacionam a Matemática que estudam na universidade com a Matemática que estudaram e que ensinarão na escola.

Zazkis e Mamolo (2011) sugerem que o Conhecimento Matemático Avançado possibilita uma ampla visão do horizonte a respeito das características específicas de um objeto e das ideias e estruturas disciplinares que envolvem o objeto. Assim, as autoras relacionam o Conhecimento Matemático Avançado ao ‘conhecimento no horizonte matemático’ e, com isso, apresentam exemplos de situações em que o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte contribui no ensino de Matemática na Educação Básica.

Wiley (2014) examinou como três professores da Educação Básica percebem e descrevem sua utilização do Conhecimento Matemático Avançado no ensino e obteve conclusões similares à de Zazkis e Leikin (2010), tal como ‘confiança’ e ‘hábitos da mente’ percebidos por professores.

Outras pesquisas tiveram temas similares ao Conhecimento Matemático Avançado. Por exemplo, Wasserman (2016) investigou como conhecimentos de Álgebra Abstrata podem transformar o entendimento de professores do conteúdo que ensinam, de forma a modificar sua prática de ensino. Para isso, o autor analisou conteúdos curriculares, conversas e entrevistas com professores e observações em sala de aula, que embasaram exemplos de como conexões entre a Álgebra Abstrata e a matemática da escola básica podem ser implementadas em sala de aula. Cofer (2015) também investigou contribuições da Álgebra Abstrata para o ensino na Educação Básica.

Em resumo ao que comentamos nesta seção e na Subseção 3.2.1, percebemos, com base nas pesquisas citadas, que pouco foi observado empiricamente do Conhecimento Matemático Avançado de professores utilizado para lecionar na Educação Básica. Zazkis e Leikin (2010) e Leikin e Zazkis (2010) apontam uma lacuna entre os conhecimentos de Matemática Avançada e de Matemática Elementar dos participantes. Pesquisas como a de Ball e Bass (2009), Jakobsen *et al*. (2012), Zazkis e Mamolo (2011) e Wasserman (2016) apresentam situações hipotéticas em que esses conhecimentos são mobilizados por professores de forma a contribuir para o ensino.

Isso nos leva à indagação de o quanto do Conhecimento Matemático Avançado é realmente importante para os professores da Educação Básica, conforme questionam Moreira e David (2007) com relação à Matemática Acadêmica. Conforme já comentamos com base em Moreira (2012), o papel desses conhecimentos na prática dos professores precisa ser objeto de investigações.

De acordo com Zazkis e Zazkis (2011), mais estudos são necessários para esclarecer como o conhecimento matemático pode afetar o trabalho docente, talvez até de forma inconsciente:

> Seu conhecimento tácito de matemática provavelmente os afeta de maneira mais profunda e subconsciente. Por exemplo, orientar as discussões em sala de aula sobre o ensino de conceitos elementares, bem como as escolhas de tarefas para os estudantes, pode ter influência do conhecimento de conceitos mais avançados, mas relacionados. Mais pesquisas são necessárias para explorar se essa influência existe e quais aspectos do ensino ela afeta. (ZAZKIS; ZAZKIS, 2011, p. 261-262, tradução nossa).

No mesmo sentido, Wasserman (2016) questiona o quanto de Matemática Avançada os professores precisam conhecer:

> [...] reconhecemos que exatamente o que os professores devem saber sobre essas ideias avançadas e como eles devem conhecê-las para posteriormente impactar sua instrução não foi examinado. Por exemplo: basta que os professores estejam cientes de algumas dessas ideias e de suas aplicações? Ou eles precisam de conhecimento mais fluido do que consciência, incluindo a capacidade de gerar exemplos e contraexemplos de conceitos? Quais são as melhores maneiras de os professores adquirirem esse conhecimento de forma que tenham um impacto positivo em sua prática de ensino, em vez de se tornarem um obstáculo ou um ponto cego? (WASSERMAN, 2016, p. 42, tradução nossa).

Seguindo a ideia de Jakobsen *et al*. (2012), a parte da Matemática

Avançada que é importante para os professores é a que estiver demonstrativamente relacionada ao trabalho de ensinar na escola. Contudo, pouco sabemos de que parte dessa matemática está demonstrativamente relacionada ao ensino na Educação Básica. O que temos, por enquanto, são possibilidades de contribuição desse conhecimento.

Resumindo algumas dessas possibilidades, retomamos que Jakobsen *et al*. (2012) citam a contribuição para os professores compreenderem sugestões dos estudantes, decidirem se uma sugestão é sensata, se vale a pena abordá-la e como abordá-la. Segundo os autores, o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte permite aos professores falarem e agirem com sensibilidade à disciplina, ouvirem os alunos e tomarem decisões nas situações de ensino (JAKOBSEN; THAMES; RIBEIRO, 2013).

Por sua vez, Leikin e Zazkis (2010) consideram que o conhecimento dos professores das definições matemáticas afeta suas decisões didáticas, incluindo a maneira como apresentam o conteúdo.

Zazkis e Mamolo (2011) citam exemplos de utilização do Conhecimento Matemático Avançado no ensino de Matemática como forma de verificar as respostas dos estudantes, esclarecer possíveis confusões, responder a questionamentos e até mesmo aprimorar a compreensão dos professores. Esses exemplos envolvem simetria rotacional, divisibilidade, princípio fundamental da contagem, estrutura de grupos, conexão entre área da superfície e volume, inversos e a impossibilidade de divisão por zero.

Um professor entrevistado por Wiley (2014) mencionou tópicos de Álgebra Linear e Teoria dos Números, bem como o entendimento de propriedades matemáticas, conectados a assuntos da Educação Básica.

Wasserman (2016) destaca alguns exemplos de áreas de conteúdos matemáticos em que o conhecimento dos professores de Álgebra Abstrata pode impactar no ensino na Educação Básica: propriedades aritméticas, inversos, estrutura de conjuntos e resolução de equações.

Zazkis e Leikin (2010) apresentam declarações de professores de que o Conhecimento Matemático Avançado permite maior confiança e agilidade com o conhecimento matemático para, por exemplo, responder a perguntas dos estudantes. Dentre os exemplos específicos de tópicos matemáticos em que o Conhecimento Matemático Avançado contribui para o ensino, os professores participantes citaram matrizes, sistemas de equações, teoria dos números e combinatória, aritmética modular, sequências e séries, números complexos, logaritmos, o número transcendental e, além de exemplos genéricos como Cálculo, probabilidade e estatística e otimização.

Com relação a essa confiança e agilidade, a Matemática envolve uma grande compressão mental (GRAY; TALL, 1994; TALL, 1995, 2004, 2008, 2013), de forma que o aprendizado em um nível superior requer muita informação compactada. Isso indica que o aprendizado de conceitos mais avançados do que os conceitos a se ensinar pode levar a uma maior facilidade para lidar com o assunto. Porém, para que isso ocorra, entendemos que seja necessário que os conceitos ‘avançados’ realmente compactem os conceitos ‘elementares’ a ensinar e, além disso, que os professores tenha um pensamento proceitual flexível para descompactar esses conceitos, conforme mencionamos com base em Ball, Thames e Phelps (2008). Por isso, consideramos que não é todo conhecimento mais ‘avançado’ que realmente poderá contribuir no ensino. É possível que alguns contribuam e outros não. Novamente, não saímos da questão de ser necessário investigar quais tópicos da Matemática Avançada realmente contribuem para o ensino na Educação Básica.

Embora essa questão não seja o foco desta tese, ela influencia nossas conclusões, pois discutimos (no Capítulo 6) possíveis contribuições do PMA dos professores para o ensino de Matemática na Educação Básica, com algumas relacionadas ao conhecimento em Matemática Avançada. Por isso, observamos que a concretização dessas contribuições está atrelada a uma contribuição de fato da Matemática Avançada para o ensino, algo que ainda não é consenso na literatura.

Com essa observação, encerramos as discussões da fundamentação teórica desta tese. Por isso, antes de passarmos aos levantamentos (Capítulo 4), apresentamos, a seguir (Seção 3.4), uma lista com termos que utilizamos, abordados no Capítulo 2 e neste Capítulo 3.

3.4 Termos Utilizados

Finalizando os capítulos de fundamentação teórica desta tese, apresentamos o Quadro 3 com caracterizações de alguns termos que utilizamos, visando evitar dubiedade entre termos semelhantes.

Quadro 3 – Caracterização dos termos utilizados

Termo	Caracterização
Pensamento Matemático Avançado (PMA)	Pensamento matemático que envolve autonomia, autorregulação, metacognição, interpretações sutis, atribuição de significado (RESNICK, 1987), resolução de conflitos cognitivos, complexidade, compressão de conhecimentos, dentre outras características que elencamos no Capítulo 2. Na perspectiva do pensamento formal-axiomático, o PMA envolve incerteza, organizar as ideias em uma sequência lógica e está relacionado à axiomática e formalismo característicos da Matemática Acadêmica, a definições e a deduções formais, conforme Tall (1995, 2002, 2004, 2008, 2013) e Tall e Vinner (1981). Na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PMA requer processos que permitem gerenciar a complexidade de uma situação matemática, como abstração, generalização e síntese (DREYFUS, 2002). Na perspectiva das concepções dos conceitos, o PMA permite a alternância flexível entre concepções processuais e estruturais, conforme Dubinsky (2002), Gray e Tall (1994) e Sfard (1987, 1991).
Conhecimento Matemático Avançado	Conhecimento de Matemática Avançada, ou seja, conhecimentos matemáticos que são estudados a partir da graduação (ZAZKIS; LEIKIN, 2010)[37].
Matemática Avançada	Corpo de conhecimentos matemáticos estudados em nível de graduação, pós-graduação ou pesquisa, o qual inclui a Matemática Acadêmica.
Matemática Acadêmica	Corpo de conhecimentos concebido pelos matemáticos (MOREIRA; DAVID, 2007).
Matemática Escolar	Conjunto de saberes associados à prática docente escolar (MOREIRA; DAVID, 2007), incluindo o conhecimento da Matemática Elementar.
Matemática Elementar	Matemática estudada na Educação Básica, que pode estar presente no Ensino Superior.
Pensamento Matemático Elementar (PME)	Pensamento matemático focado em descrições, exemplos, representações, ações (DUBINSKY, 2002) e procedimentos (GRAY; TALL, 1994). Na perspectiva do pensamento formal-axiomático, o PME carece da precisão das definições e deduções formais, focando em descrições e convencimento (TALL, 2002). Na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PME envolve processos que não são suficientes para gerenciar a complexidade de situações matemáticas (DREYFUS, 2002). Na perspectiva das concepções dos conceitos, o PME está relacionado a concepções meramente operacionais, conforme Sfard (1991).

Fonte: Gray e Tall (1994), Dreyfus (2002), Dubinsky (2002), Moreira e David (2007), Resnick (1987), Sfard (1987, 1991), Tall (1995, 2002, 2004, 2008, 2013), Tall e Vinner (1981) e Zazkis e Leikin (2010).

[37] Essa caracterização está envolvida com o contexto da graduação. Nesta tese, estamos focados no ensino na Educação Básica, especialmente no Brasil, e assim consideramos os contextos escolares e de graduação brasileiros.

A seguir, apresentamos levantamentos de pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA e envolveram professores ou futuros professores, interpretando possíveis relações entre o PMA e o ensino de Matemática na Educação Básica.

4 LEVANTAMENTOS DE PESQUISAS EMBASADAS NO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Neste capítulo, pretendemos analisar pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA e envolveram professores ou futuros professores, de forma a interpretar, a partir das considerações dos pesquisadores, possíveis relações entre o PMA e o ensino de Matemática na Educação Básica. Essas interpretações, embora tenham, por vezes, pouco respaldo para tornarem-se afirmações, são importantes para identificarmos possibilidades de contribuições do PMA para o ensino de Matemática, a serem discutidas no Capítulo 6. Embora nosso foco seja em contribuições para o ensino na Educação Básica, este levantamento envolveu trabalhos com futuros professores, especialmente com licenciandos, por conta da relação da formação inicial com o desenvolvimento de conhecimentos para o ensino. Além disso, apresentamos, neste capítulo, levantamentos que apontam algumas das inspirações para este trabalho.

Estes levantamentos foram realizados por meio de pesquisas bibliográficas. Segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 183), a finalidade da pesquisa bibliográfica "é colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto". Assim, por meio deste capítulo, aprofundamos a justificativa desta tese e evitamos tentar reinventar algo já consolidado.

Realizamos algumas buscas e não encontramos trabalhos acadêmicos cujo propósito teria sido relacionar o PMA de professores com a sua atuação no ensino de Matemática na Educação Básica[38]. Poucos trabalhos, como o de Machado e Bianchini (2013), investigaram o referencial teórico do PMA como um aporte ao trabalho de professores (ver Seção 4.3). Por haver poucos trabalhos que relacionem enfaticamente o PMA com o ensino de Matemática, analisamos, em seções à parte, trabalhos que possuem alguma similaridade com o nosso tema, como os que relacionam o PMA com outro referencial teórico – tal como Schastai (2017) e Bussmann e Savioli (2020) – (Seção 4.1) e os que utilizaram o referencial

[38] Essas buscas iniciais foram realizadas no segundo semestre de 2019, por meio do Google Acadêmico, do portal de periódicos e do catálogo de teses e dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e do acervo digital de teses e dissertações do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM).

teórico do PMA e envolveram professores em formação continuada ou futuros professores, em específico, licenciandos em Matemática (Seção 4.2).

Nas pesquisas que envolveram professores em formação inicial ou continuada, esperávamos encontrar discussões que relacionassem o PMA possivelmente desenvolvido pelos formandos com conhecimentos esperados de serem desenvolvidos por eles como futuros professores, para interpretarmos possíveis contribuições do PMA para o ensino de Matemática na Educação Básica. Apesar de não termos encontrado tais discussões em trabalhos que envolveram licenciandos em Matemática, foi possível interpretarmos concepções que relacionam o PMA dos estudantes com a aprendizagem em Matemática com base em considerações dos autores, conforme as análises apresentadas em Inarejos e Savioli (2022) e resultados que comentamos na Seção 4.2.

Após vários testes que realizamos para buscas, com algumas palavras-chave apresentando resultados muito genéricos, consideramos que a palavra-chave ‘licenciatura’ é adequada para as buscas focadas em trabalhos que envolvem futuros professores, embora direcione para a formação inicial. Palavras como ‘professores’ e ‘ensino’ geravam resultados diversos e fora do nosso foco. Assim, pudemos realizar um levantamento mais sistemático e detalhado descrito na Seção 4.2, enquanto os levantamentos descritos nas seções 4.1 e 4.3 são resultado de seleções menos sistemáticas.

Desse modo, na Seção 4.1, comentamos trabalhos que relacionaram o PMA com algum outro referencial teórico. Na Seção 4.2, descrevemos o levantamento de trabalhos que se embasaram no referencial teórico do PMA e envolveram licenciandos em Matemática (ou questões referentes ao curso de licenciatura em Matemática). Por fim, na Seção 4.3, promovemos uma discussão com relação a trabalhos que fizeram considerações relacionadas a possíveis contribuições do PMA para professores de Matemática para além da aprendizagem de Matemática Avançada.

4.1 TEORIZAÇÕES EMBASADAS NO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Nesta seção, comentamos algumas pesquisas que estabeleceram relações teóricas do PMA com outros referenciais teóricos, buscando ideias para apoiar nossa pesquisa teórica e especulativa. Assim, destacamos como o PMA foi relacionado com os outros referenciais teóricos.

Reis (2001) investigou a relação entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise Real, mediante a análise de livros didáticos e entrevistas com professores-pesquisadores. O autor não utilizou a noção de intuição como produto do conceito imagem (TALL, 2002; TALL; VINNER, 1981), optando por focar em outros referenciais teóricos. No entanto, ao discutir o pensamento flexível na formação de professores de Matemática, Reis (2001) relacionou elementos do PMA com a relação entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise.

> Retomando os trabalhos da linha cognitivista de TALL acerca da construção do pensamento matemático avançado, dois aspectos são apontados como fundamentalmente complementares pelo autor na elaboração de conceitos e resultados: a criatividade ao se gerar novas idéias e conceitos e o convencimento da validade de um certo resultado através da prova matemática. Eis aqui mais uma visão da possibilidade de complementariedade entre a intuição presente na criação de novos resultados e o rigor no seu estabelecimento formal, quer seja através de uma prova ou de uma definição formal de um conceito. (REIS, 2001, p. 86).

Reis (2001) retoma a ideia de proceito (GRAY; TALL, 1994) para criticar a ênfase em procedimentos formais (regras e algoritmos) isolados dos conceitos subjacentes ao processo. Essa ênfase isolada não contribui para a flexibilidade do pensamento em Matemática que, segundo o autor, deve ser considerada fundamental por todos os professores de Matemática em todos os níveis.

> Na prática de sala de aula, o professor deve procurar explorar todos os elementos da forma o mais dinâmica possível. Mas, isto só será possível caso ele, em sua formação inicial ou continuada, vivenciar as possibilidades desta interação dinâmica em sua experiência discente. (REIS, 2001, p. 89).

Reis (2001) forneceu exemplos de atividades que privilegiam o conhecimento procedimental e atividades que privilegiam o conhecimento conceitual, estabelecendo uma conexão entre o conhecimento procedimental e a intuição e entre o conhecimento conceitual e o rigor. O autor considera que o conhecimento procedimental deve estar fundamentado no conhecimento conceitual para que o estudante conheça as regras e também entenda como funcionam.

Miranda (2010) investigou a utilização de um software em conjunto com a aplicação de atividades analisadas na perspectiva da aprendizagem significativa, utilizando o referencial teórico do PMA na elaboração da proposta de ensino e aprendizagem de funções reais de duas variáveis e gráficos tridimensionais (na Seção 4.2, abordamos pesquisas que elaboraram propostas com base no PMA). Para isso, o autor relacionou caracterizações do PMA, conforme Tall (2002), com a aprendizagem significativa de Ausubel. Por exemplo, Miranda (2010) recomenda uma reconciliação integradora, nos termos de Ausubel, para resolver conflitos cognitivos de estudantes e professores que são causados, conforme Tall (2002), pela inconsistência nos conceitos transmitidos de geração em geração.

Outra relação estabelecida por Miranda (2010) foi entre conceito imagem e conceito definição (TALL; VINNER, 1991) e subsunçores (ideias existentes na estrutura cognitiva de um indivíduo). Segundo Miranda (2010), a aprendizagem se torna significativa quando o aprendiz estabelece por si próprio os novos conceitos com os subsunçores existentes na sua estrutura cognitiva. Assim, o autor considera que o conceito imagem e o conceito definição, ao estabelecerem relações associadas ao conceito, permitem a identificação de alguns tipos e formas existentes na aprendizagem significativa segundo Ausubel. Miranda (2010) ainda estabeleceu relações quanto à intuição e ao papel da visualização na resolução de problemas, culminando na proposta de se utilizar a tecnologia computacional para auxiliar na visualização e favorecer interações entre conceito imagem e conceito definição.

Tirosh, Tsamir e Levenson (2011) argumentaram que as ideias de Tall e Vinner (1981) e de Ball, Thames e Phelps (2008) podem ser combinadas para desenvolver o conhecimento dos professores para o ensino de conceitos de Geometria em nível pré-escolar. As autoras consideram relevante introduzir a teoria de Tall e Vinner (1981) para que os professores possam incentivar as crianças a construir conceitos imagem em concordância com as definições.

Com foco em objetos geométricos, especialmente triângulos, Tirosh, Tsamir e Levenson (2011) consideram que as crianças precisam de orientação para avaliar quais atributos são críticos na identificação de uma figura.

O quadro teórico ‘combinado’ apresentado por Tirosh, Tsamir e Levenson (2011) considera oito células, uma para o conceito imagem e uma para o conceito definição em cada um de quatro conhecimentos para o ensino: Conhecimento Comum do Conteúdo, Conhecimento Especializado do Conteúdo, Conhecimento do Conteúdo e Estudantes e Conhecimento do Conteúdo e Ensino. Por exemplo, a célula que combina conceito definição com Conhecimento do

Conteúdo e Ensino envolve o conhecimento de exemplos e contraexemplos que podem encorajar as crianças a aplicarem a definição.

Tirosh, Tsamir e Levenson (2011) consideram que seu quadro teórico pode contribuir tanto para formadores concentrarem-se no conhecimento específico a ser promovido quanto para professores, quando apresentado explicitamente, para focarem no conhecimento que estão construindo e sua utilização no ensino.

Ainda, Tirosh, Tsamir e Levenson (2011) trabalharam explicitamente o seu quadro teórico com professores do jardim de infância em um curso de formação continuada. Segundo as autoras, o curso permitiu aos professores desenvolverem seu Conhecimento Especializado do Conteúdo, especialmente quanto ao conceito definição de triângulos. Os professores participantes reconheceram que nem toda definição pode ser adaptada para crianças pequenas. Além disso, os professores investigados passaram a articular seu Conhecimento do Conteúdo e Estudantes com a tensão entre o conceito imagem e o conceito definição discutida a partir do referencial teórico e, assim, repensaram formas de abordagem para a superação dos obstáculos por parte das crianças, ampliando o seu próprio Conhecimento do Conteúdo e Ensino.

Bussmann, Klaiber e Silva (2017) realizaram uma discussão teórica a respeito da teoria de Dreyfus (2002) com relação ao desenvolvimento de processos de PMA e da abordagem metodológica do Ensino Aprendizagem Exploratório que, segundo os autores, tem a intenção de proporcionar a reflexão e a aprendizagem por meio da resolução de tarefas que fazem emergir as ideias matemáticas a serem sistematizadas em discussão coletiva. Segundo os autores:

> [...] para que a mobilização de experiências durante a aprendizagem possam promover a construção e o desenvolvimento de tais processos [de PMA], bem como a reflexão, é importante que as estratégias utilizadas nas aulas proporcionem momentos em que os estudantes sejam oportunizados a construírem tais relações e reflexões.
> Sob essa ótica, o ambiente das aulas precisa valorizar o estudante de forma que este seja um sujeito ativo no processo de aprendizagem, deixando de ser um mero ouvinte, ainda, o desenvolvimento desses processos mentais requer aulas que permitam discussões e reflexões em grupo – justificando a necessidade da ação de ‘Antecipação’ do professor, proposta no Ensino Aprendizagem Exploratório, para a elaboração dos objetivos e a escolha das tarefas –, sendo o diálogo coletivo, proposto no momento de discussão da tarefa, fundamental para a troca de

> experiências e a sistematização de ideias.
> Logo, trazemos para essa discussão o Ensino Aprendizagem Exploratório [...] como uma alternativa frutífera a fim de ser implementada durante as aulas, podendo otimizar o desenvolvimento do pensamento matemático e, consequentemente, a construção de processos mentais. (BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017, p. 12).

Essa conexão do PMA com a atividade exploratória está de acordo com as implicações didáticas das ideias do PMA que comentamos no Capítulo 2 e que observamos em algumas pesquisas que investigaram o PMA com futuros professores de Matemática, conforme comentaremos na Seção 4.2.

Bussmann, Klaiber e Silva (2017) concluem que os professores, para que possam realizar intervenções adequadas para maximizar a aprendizagem dos estudantes, precisam ter consciência das teorias que investigam como os indivíduos aprendem e das abordagens de ensino.

Schastai (2017) aproximou as ideias de David Tall com a Educação Matemática Realística[39]. A autora identificou a aprendizagem com significado como fio condutor comum, a partir do qual traçou um paralelo entre os princípios desses referenciais teóricos. Essa aprendizagem com significado refere-se à ideia de construção/reelaboração do conhecimento matemático pelo estudante. Conforme Schastai (2017) argumenta, essa construção liga a Matemática enquanto corpo de conhecimento historicamente produzido ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática Escolar.

Dentre os pontos de semelhança entre o pensamento matemático de Tall e a Educação Matemática Realística estabelecidos por Schastai (2017), estão a ideia de que a Matemática é uma atividade humana e pode ser aprendida por todos, relações estabelecidas pela autora entre os Três Mundos da Matemática e os processos de matematização horizontal e vertical, bem como a importância da linguagem, do contexto das situações matemáticas e do entrelaçamento dos conceitos matemáticos.

Segundo Schastai (2017), o desenvolvimento do pensamento matemático tem relação direta com a ação dos professores e dos estudantes em sala de aula, não somente no planejamento, mas em cada minuto de aula.

Lopes, G. L. O. (2017) elaborou um modelo teórico para apontar algumas categorias criativas na obra *Arithmetica Infinitorum*, de John Wallis, e

[39] Conforme Schastai (2017, p. 19), "A Educação Matemática Realística é uma abordagem de ensino idealizada pelo matemático alemão Hans Freudenthal (1905-1990)".

embasar potenciais pedagógicos, especialmente para o Cálculo Diferencial e Integral na licenciatura em Matemática. Para isso, a autora associou princípios dos processos de PMA descritos por Dreyfus (2002) com noções de criatividade.

Segundo Lopes, G. L. O. (2017), a criatividade requer que o indivíduo tenha conhecimento do domínio em que deseja atuar, e “as representações mentais e simbólicas são os dois primeiros processos que devem ser desenvolvidos por um indivíduo na direção de dominar as regras e procedimentos simbólicos que constituem o domínio” (LOPES, G. L. O., 2017, p. 53). Os estudantes se desafiarem e terem espaço para elaborar conjecturas é um movimento que a autora considera necessário para um exercício de criatividade e o desenvolvimento dos processos de PMA.

Além da formulação de conjecturas, Lopes, G. L. O. (2017) destaca a reflexão sobre a própria experiência matemática como uma característica do PMA e outro fator que requer que o indivíduo se familiarize com o domínio para compreender os processos mentais que estão envolvidos em seu desenvolvimento.

> No caso particular da criatividade Matemática, o exercício criativo de um matemático ocorre quando o Pensamento Matemático Avançado no indivíduo foi desenvolvido, a tal ponto, que este alcançou o grau de representação e abstração que o possibilita compreender o domínio e reconhecer os processos de seleção do campo. (LOPES, G. L. O., 2017, p. 58-59).

Ao discutir potenciais pedagógicos da obra *Arithmetica Infinitorum,* Lopes, G. L. O. (2017) a considerou uma fonte de atividades que contemplam os processos de PMA propostos por Dreyfus (2002), como atividades de exploração, especulação, investigação e atividades que envolvem processos de generalização, síntese e representação.

Menezes (2018) investigou como a relação da Sequência Fedathi com a teoria do PMA pode alicerçar o ensino de Cálculo Diferencial e Integral dos estudantes de um grupo de estudos. Outras pesquisas, algumas das quais comentaremos na seção seguinte (FONTENELE, 2018; TEÓFILO; LIMA; MENEZES, 2020), utilizaram os referenciais teóricos do PMA e da Sequência Fedathi. Entretanto, escolhemos destacar aqui a de Menezes (2018) por realizar aproximações teóricas entre esses dois referenciais e utilizar essas aproximações em uma caracterização docente. O autor elaborou caracterizações de ‘bom professor’ e ‘bom aluno’, correspondentes a posturas docentes e discentes adequadas de acordo com a Sequência Fedathi e o referencial teórico do PMA. Algumas dessas posturas referem-se a considerações dos teóricos a respeito da mediação docente em sala de aula, conforme comentamos no Capítulo 2, tais como estimular o pensamento do estudante ao invés de fornecer o produto final do pensamento matemático; valorizar o erro, a investigação; e valorizar o ato criativo, da formulação de conjecturas ao estágio final de refinamento e prova (TALL, 2002; DREYFUS, 2002).

Bussmann e Savioli (2020) teorizaram o Pensamento Matemático-Computacional, unindo concepções de Pensamento Computacional e do PMA conforme Dreyfus (2002), embasados em uma metodologia de pesquisa teórica e especulativa. Essa teorização tomou as caracterizações de Dreyfus (2002) como linha mestra para a discussão, a partir dos quais os autores adicionaram concepções de Pensamento Computacional e seus entendimentos de cada fase envolvida nas construções simbólicas e construções mentais. Por exemplo, a partir da necessidade do estudante construir seus símbolos para representar um objeto matemático (DREYFUS, 2002), os autores agregaram um dos entes do Pensamento Computacional, a linguagem, que possui sua notação, concluindo que a notação apresenta uma utilidade que deve ser construída. Resumidamente, a relação entre conceito e simbologia, as representações concretas, as inteirações e observação de padrões, as ações que envolvem padrões, reflexões, diálogo e arguição, as conexões entre os assuntos da disciplina, a experienciação da evolução do pensamento científico, a construção da notação e o sistema de representações são algumas características do Pensamento Matemático-Computacional (BUSSMANN; SAVIOLI, 2020).

Broetto e Santos-Wagner (2021) discutiram três questões relacionadas aos saberes mobilizados na atividade docente. A primeira questão trata da natureza e especificidades do conhecimento matemático escolar. Os autores concordam com Moreira e David (2007) que o conhecimento matemático escolar "não se constitui apenas como uma reorganização didática do conhecimento científico nem como uma construção original da escola, mas como um conjunto de saberes associados à profissão docente" (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2021, p. 109). A segunda questão que os autores discutem é relativa aos saberes necessários para o desempenho da atividade docente. A terceira questão envolve os impactos que as duas primeiras provocam na formação dos professores de

Matemática. Os autores concordam com Tardif (2012) que os saberes difundidos nas universidades ainda não estão de acordo com os saberes construídos na prática docente, embora reconheçam avanços em diretrizes curriculares.

Os autores relacionaram essas questões a pesquisas que desenvolveram anteriormente (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017a, 2017b). Essas pesquisas envolveram a identificação de conceitos imagem de estudantes de licenciatura em Matemática a respeito de números irracionais e a consequente identificação de obstáculos de aprendizagem. Assim, Broetto e Santos-Wagner (2021) estabeleceram uma relação entre o reconhecimento de conceitos imagem (TALL; VINNER, 1981) e o conhecimento dos professores:

> Shulman (1986) também aponta para a necessidade do conhecimento das concepções e preconcepções trazidas pelos alunos, frequentemente equivocadas, que demandarão que os professores criem estratégias frutíferas para reorganizar o entendimento dos aprendizes. Porém, trabalhar a partir das imagens construídas pelos estudantes não é algo simples, visto que elas são 'psicologicamente resistentes' [...]. (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2021, p. 127, grifo dos autores).

Broetto e Santos-Wagner (2021) defendem uma abordagem para a formação de professores que vise à prática docente na Educação Básica e a superação das dificuldades trazidas pelos licenciandos ao ingressarem no curso, considerando que, mesmo com a ruptura de uma abordagem mais formal:

> [...] o futuro professor de matemática pode ter dificuldades com a matemática básica escolar se suas imagens conceituais conflitantes e/ou incoerentes não forem detectadas e trabalhadas apropriadamente ao longo de sua formação inicial. (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2021, p. 129).

Inarejos *et al.* (2022), relacionaram referenciais teóricos de PMA (DREYFUS, 2002; TALL, 2002; TALL; VINNER, 1981), criatividade matemática (ERVYNCK, 2002; NADJAFIKHAH; YAFTIAN; BAKHSHALIZADEH, 2012), Atividade Matemática Avançando (RASMUSSEN; ZANDIEH; KING; TEPPO, 2005) e Conhecimento Matemático Avançado (ZAZKIS; LEIKIN, 2010). Os autores apresentaram uma análise de produção escrita em que ilustraram algumas contribuições que cada referencial teórico pode oferecer ao ser utilizado em uma pesquisa.

As principais similaridades identificadas por Inarejos *et al.* (2022) nesses referenciais teóricos dizem respeito à Matemática como atividade humana a ser reconstruída em sala de aula, à criatividade matemática envolvida em todos esses referenciais teóricos, à inspiração que algumas teorias buscaram no pensamento de matemáticos e aos processos e indícios de PMA que permeiam outros referenciais. A principal divergência diz respeito à ênfase dada pelos termos e conceitos caracterizados no referencial teórico. Assim, os autores concluíram que "Nenhum deles ilumina todo o pensamento mobilizado na atividade, mas cada um foca em determinados aspectos" (INAREJOS *et al.*, 2022, p. 240), sugerindo situações em que cada um desses referenciais teóricos pode ser mais adequado à análise de uma produção escrita:

> O PMA destaca processos de pensamento desenvolvidos pela estudante, mas não evidencia as tentativas 'falhas', a diversidade de resoluções exploradas, a evolução do pensamento durante a realização da atividade ou os conhecimentos avançados mobilizados. A Criatividade Matemática, por sua vez, salienta as várias tentativas de solução e o pensamento matemático envolvido na comparação entre elas e procura por uma mais simples, além do pensamento envolvido em soluções que se destacam por serem mais diferentes do usual. A Atividade Matemática Avançando ressalta as etapas percorridas e a forma como a resolução foi organizada e pensada, além da evolução do pensamento durante a resolução, incluindo a formulação e investigação de conjecturas. O Conhecimento Matemático Avançado é interessante para se discutir elementos do currículo da graduação que foram mobilizados. (INAREJOS *et al.*, 2022, p. 240, grifo dos autores).

As pesquisas comentadas nesta seção nos serviram de inspiração para organizarmos nossas ideias para uma teorização, no Capítulo 6, a partir do PMA e de referenciais teóricos que envolvem saberes e conhecimentos para o ensino de Matemática. A seguir, apresentamos um levantamento focado em pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA e envolveram futuros professores de Matemática.

4.2 O Pensamento Matemático Avançado em Pesquisas que Envolveram Futuros Professores de Matemática

Utilizando 'licenciatura' como uma das palavras-chave, foi possível realizarmos buscas sistemáticas que nos permitiram fazer um levantamento extenso e encontrar trabalhos relacionados ao nosso tema, incluindo alguns não analisados nesta seção, como os que utilizaram o referencial teórico do PMA e envolveram professores formados.

Realizamos buscas por meio do mecanismo de pesquisa do Google Acadêmico, no portal de periódicos e no catálogo de teses e dissertações da CAPES, posteriormente, nos periódicos de Qualis A1 e A2 específicos da Educação Matemática (Apêndice A) e nos acervos digitais de teses e dissertações dos programas de pós-graduação em Educação Matemática que se destacaram nas buscas iniciais (no caso de ao menos duas pesquisas de um programa terem sido selecionadas).

Esse levantamento foi realizado no período de fevereiro a junho de 2021. Em todos os mecanismos de busca, utilizamos as palavras-chave ‘pensamento matemático avançado’ e ‘licenciatura’ e depois as palavras-chave ‘*advanced mathematical thinking*’ e ‘*prospective teachers*’, além de ‘*advanced mathematical thinking*’ e ‘*pre-service teacher education*’[40].

Nos resultados gerados por essas buscas, utilizamos o seguinte critério de seleção: selecionamos as pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA e envolveram estudantes de licenciatura em Matemática (ou questões referentes ao curso de licenciatura em Matemática) ou de algum curso em nível de graduação voltado à formação de professores de Matemática (especialmente em pesquisas realizadas no exterior).

Para realizar as seleções, verificamos o título e o resumo dos resultados encontrados. Se isso não fosse suficiente para decidir quanto à seleção (de acordo com o critério descrito), verificamos a introdução e os procedimentos metodológicos.

Considerando que o nosso objetivo diz respeito ao ensino de Matemática na Educação Básica, descartamos pesquisas que estudaram o PMA no Ensino Superior em geral, até mesmo que promoveram estudos em cursos de licenciatura em Matemática e em algum outro curso, pois, ao ampliarem seu escopo para outros cursos e formações de outros profissionais, essas pesquisas não focaram nos futuros professores de Matemática da Educação Básica. Os trabalhos de levantamento encontrados foram reservados para verificarmos as pesquisas citadas.

Essas buscas são descritas resumidamente em Inarejos e Savioli (2022).

---

[40] Testamos diferentes palavras-chave em inglês no Google Acadêmico para procurar trabalhos que envolvam a formação inicial de professores, na falta de uma tradução precisa para ‘licenciatura’.

Sendo assim, com esses mecanismos de busca e por meio do critério de seleção descrito, selecionamos oitenta e três trabalhos que estudaram o PMA e envolveram licenciandos em Matemática ou questões referentes ao curso, sendo nove teses de doutorado, vinte e oito dissertações de mestrado, vinte e nove artigos de periódicos e dezessete artigos de anais de eventos; sessenta e seis trabalhos brasileiros, quinze estrangeiros e dois luso-brasileiros.

A fim de exibir alguns resultados encontrados em um quadro, fornecendo uma ideia da forma das pesquisas levantadas, filtramos os trabalhos mais recentes (a partir de 2017). Assim, no Quadro 4, sintetizamos alguns aspectos gerais desses trabalhos publicados entre 2017 e 2021 (data do levantamento).

Quadro 4 – Aspectos gerais das pesquisas mais recentes selecionadas

Autores (ano): Amorim, Pietropaolo, Powell e Silva (2020). **Título:** Concepções de Estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática sobre Argumentações e Provas. **Objetivo:** Discutir as concepções e o conceito imagem de futuros professores a respeito de argumentações e provas para ensinar e aprender Matemática. **Procedimentos metodológicos:** Os autores aplicaram um questionário e realizaram entrevistas com estudantes de licenciatura em Matemática, que foram analisados com base em Tall e Vinner, relativamente ao conceito imagem, e em Ponte, relativamente à ideia de Concepção.
Autores (ano): Broetto e Santos-Wagner (2017a). **Título:** Conhecimentos relativos a números racionais e irracionais de uma aluna ingressante na Licenciatura em Matemática. **Objetivo:** Fazer um diagnóstico dos conhecimentos referentes a números racionais e irracionais trazidos por uma aluna ingressante de um curso de licenciatura em Matemática. **Procedimentos metodológicos:** O artigo é parte de uma pesquisa de doutorado que teve uma fase inicial de diagnóstico, composta por dois questionários, e uma fase posterior de intervenção pedagógica, envolvendo alguns experimentos de ensino. No artigo, os autores focaram na fase de diagnóstico do estudo principal e analisaram os dados referentes a uma participante.
Autores (ano): Broetto e Santos-Wagner (2017b). **Título:** Um modelo para analisar a imagem do conceito de estudantes universitários: o caso dos números irracionais. **Objetivo:** Construir um modelo de análise de dados que articula as teorias de conceito imagem, exemplos protótipos e compreensão instrumental e relacional. **Procedimentos metodológicos:** Consiste em um trabalho teórico em que os autores desenvolvem um modelo e exemplificam sua utilização no diagnóstico de conceito imagem de números racionais e irracionais de uma estudante.
Autoras (ano): Flôres, Fonseca e Bisognin (2020). **Título:** Processos do pensamento matemático avançado revelados nas resoluções de tarefas envolvendo números racionais. **Objetivo:** Analisar quais processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) são mobilizados por estudantes de um curso de formação inicial de professores de Matemática ao realizarem tarefas exploratórias envolvendo alguns aspectos da representação de números racionais. **Procedimentos metodológicos:** Coleta de dados na produção escrita dos participantes, por meio da proposição de tarefas relacionadas à representação decimal finita de números racionais.
Autores (ano): Fonseca e Henriques (2018). **Título:** Compreensão da Definição Formal de Limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. **Objetivo:** Analisar a compreensão evidenciada por estudantes de um curso de formação inicial de professores de Matemática a respeito da definição formal de limite de uma função num ponto, no decorrer de uma intervenção didática. **Procedimentos metodológicos:** Observação participante com gravação em áudio e vídeo das aulas lecionadas e produções escritas dos estudantes na resolução das tarefas

propostas em sala de aula, que foram analisadas considerando os significados, as representações de limite e a sua aplicação na resolução de problemas.
Autores (ano): Fonseca e Henriques (2020). **Título:** *Learning with Understanding the Continuity Concept: A Teaching Experiment with Brazilian Pre-service Mathematics Teachers*. **Objetivo:** Analisar a compreensão de professores de Matemática do conceito de continuidade de uma função, no contexto de um experimento de ensino baseado em um modelo teórico de aprendizagem com compreensão. **Procedimentos metodológicos:** A pesquisa envolveu participantes de um curso de pré-cálculo. As aulas seguiram uma abordagem exploratória. Os autores realizaram uma análise qualitativa e interpretativa de dados coletados por observação participante com gravação de áudio e vídeo das aulas, trabalho escrito e digital dos estudantes referente às tarefas propostas e entrevistas.
Autora (ano): Fontenele (2018). **Título:** Contribuições da Sequência Fedathi para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado: uma análise da mediação docente em aulas de Álgebra Linear. **Objetivo:** Compreender como a mediação docente, apoiada na Sequência Fedathi, influencia no desenvolvimento do PMA de estudantes de licenciatura em aulas de Álgebra Linear. **Procedimentos metodológicos:** Estudo de caso; a investigação de campo dividiu-se em três etapas: (a) observação de uma disciplina de Álgebra Linear; (b) realização de um curso de extensão, procurando identificar na mediação docente possíveis relações com o desenvolvimento do PMA; e (c) grupo de estudos, em que os estudantes puderam conhecer a Sequência Fedathi e expor suas impressões sobre a experiência vivenciada.
Autores (ano): Jesus e Savioli (2019). **Título:** Concepções manifestadas por licenciandos em matemática ao lidarem com tarefas envolvendo o conceito de anel. **Objetivo:** Identificar e discutir, por meio da Teoria APOS, as concepções manifestadas por licenciandos em Matemática ao lidarem com tarefas envolvendo o conceito de Anel. **Procedimentos metodológicos:** Coleta de dados por meio de cinco tarefas aplicadas a licenciandos concluintes da disciplina de Estruturas Algébricas. A partir dos registros escritos obtidos, os autores identificaram as concepções (ação, processo, objeto, esquema) de cada um deles.
Autor (ano): Jorge (2017). **Título:** Teoria de Conjuntos: Processos Manifestados do Pensamento Matemático Avançado. **Objetivo:** Verificar tarefas desenvolvidas por estudantes do curso de licenciatura em Matemática para identificar processos de Pensamento Matemático Avançado em relação à Teoria de Conjuntos. **Procedimentos metodológicos:** Estudantes do segundo ano da licenciatura em Matemática foram convidados a resolver as tarefas propostas. O autor observou características dos processos de PMA envolvidos nas produções escritas, além de analisar quais e quantos processos cada estudante demonstrou a respeito da Teoria de Conjuntos.
Autora (ano): Lopes, G. L. O. (2017). **Título:** A criatividade matemática de John Wallis na obra *Arithmetica Infinitorum*: contribuições para ensino de cálculo diferencial e integral na licenciatura em matemática. **Objetivo:** Examinar de que forma as ideias de John Wallis, emergentes na obra *Arithmetica Infinitorum*, apresentaram inovações que podem contribuir para o encaminhamento conceitual e didático de noções de Cálculo no curso de licenciatura em Matemática. **Procedimentos metodológicos:** Com base nos princípios de criatividade elaborados por Mihaly Csikszentmihalyi e nos processos de PMA propostos por Dreyfus, a autora formulou um modelo para examinar a obra *Arithmetica Infinitorum* e indicou seus potenciais pedagógicos.
Autores (ano): Lopes e Lopes (2017). **Título:** Número de Ouro: Uma Interessante Aplicação da História da Matemática à Análise Matemática. **Objetivo:** Elaborar atividades matemáticas, aderentes à disciplina de Análise, que fogem de uma abordagem lógico-formal-dedutiva e levem em consideração os aspectos históricos do conteúdo; dar subsídios para o formador de professores de Matemática da Educação Básica utilizar em seu trabalho na Licenciatura. **Procedimentos metodológicos:** Pesquisa bibliográfica e investigação de uma proposta de abordagem preparatória dos conteúdos que permeiam os fundamentos da Análise Real.
Autora (ano): Lopes, L. M. L. (2017). **Título:** Imagem de conceito e definição de conceito: um olhar sobre o ensino de Geometria Analítica no ensino superior. **Objetivo:** Analisar as possibilidades que a teoria do PMA oferece para o ensino de Geometria Analítica no ensino superior. **Procedimentos metodológicos:** A autora do projeto pretende utilizar um Experimento de Ensino como

procedimento metodológico de coleta dos dados, utilizar de questionário e observação como instrumentos para a coleta de dados, e realizar uma análise qualitativa dos discursos dos estudantes para tentar responder às questões norteadoras da pesquisa.
Autora (ano): Lopes (2019). **Título:** Formação e reelaboração de imagens e definições de conceito relacionadas ao ensino de vetores em geometria analítica. **Objetivo:** Apresentar as contribuições de atividades de Geometria Analítica na formação de conceito imagem e conceito definição relacionados a vetores por estudantes de licenciatura em Matemática. **Procedimentos metodológicos:** Experimento de ensino; coleta de dados por meio de grupos de atividades, observação e questionário com discentes do curso de licenciatura em Matemática.
Autores (ano): Mateus-Nieves e Jimenez (2020). **Título:** *Mathematical generalization from the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory*. **Objetivo:** Oferecer aos estudantes um espaço de formação disciplinar adicional que lhes permita aprofundar o processo de generalização matemática; identificar como alguns conceitos básicos da Teoria dos Nós permitem o desenvolvimento de habilidades de PMA a partir do processo de generalização matemática em estudantes da licenciatura em Matemática. **Procedimentos metodológicos:** A pesquisa envolveu estudantes do curso de Matemática que cursavam do terceiro ao sexto semestre. Os autores assumiram a pesquisa-ação a partir de três fases: exploratória, de intervenção e de resultados. Com ênfase na segunda fase (intervenção), articularam o esquema holístico da Teoria dos Nós com o PMA.
Autor (ano): Menezes (2018). **Título:** O ensino do cálculo diferencial e integral na perspectiva da Sequência Fedathi: caracterização do comportamento de um bom professor. **Objetivo:** Investigar como a relação da Sequência Fedathi com a teoria do PMA pode alicerçar os processos de ensino de Cálculo Diferencial e Integral dos estudantes de um grupo de estudos, respondendo de que maneira isso contribui para a aprendizagem de conceitos e procedimentos nessa disciplina, e como pode ser feita a caracterização do docente em amparo nesses conceitos. **Procedimentos metodológicos:** Sessões didáticas foram trabalhadas com a Sequência Fedathi como metodologia para elaboração e condução no ensino do conteúdo. O ensaio delineou-se num grupo de estudos criados em um curso de Matemática e os participantes foram os estudantes inscritos e o professor que mediou os encontros. No decorrer da experimentação, as perguntas da pesquisa foram respondidas e colhidos resultados que serviram como embasamento para a classificação de bons professores e bons alunos.
Autor (ano): Proença (2019). **Título:** Generalização de padrões algébricos no ensino via resolução de problemas: compreensão de licenciandos em Matemática. **Objetivo:** Analisar a compreensão de licenciandos em Matemática no processo de generalização de padrões algébricos, voltado ao trabalho que envolve o ensino via resolução de problemas. **Procedimentos metodológicos:** O autor realizou um estudo exploratório e descritivo nas aulas de uma disciplina de um curso de licenciatura em Matemática, frequentada por estudantes do quarto ano, os quais vivenciaram o processo de generalização de padrões de conteúdos do Ensino Médio.
Autora (ano): Rodrigues (2019). **Título:** Contribuições de uma Sequência de Atividades para a Compreensão do Conceito de Comprimento de Curva. **Objetivo:** Investigar as possíveis contribuições da aplicação de uma sequência de atividades, elaborada de acordo com a Engenharia Didática, para a compreensão do conceito de comprimento de curvas planas por estudantes de um curso de licenciatura em Matemática. **Procedimentos metodológicos:** Foi utilizada a Engenharia Didática, de acordo com Michele Artigue. A autora realizou uma análise dos livros didáticos utilizados pelos professores e aplicou um teste diagnóstico com estudantes de um curso de licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina de Cálculo II. Os resultados da análise dos livros e do teste diagnóstico serviram de subsídios para elaboração de uma sequência de atividades para construção do conceito de comprimento de curva. O levantamento de dados foi realizado por meio dos registros feitos pela pesquisadora em seu diário de campo, dos registros das resoluções das atividades realizadas pelos estudantes e por gravações em áudio.
Autores (ano): Santos e Domingos (2017). **Título:** *Mathematics in Pre-service Teacher Education and the Quality of Learning: an Experience with Papers Planes, Smartphones and Geogebra*. **Objetivo:** Apresentar um exemplo de modelagem matemática feita por estudantes em uma atividade de geometria de um curso de formação de professores, analisando a atividade por um

modelo desenhado para acessar o pensamento matemático e a qualidade da aprendizagem dos estudantes. **Procedimentos metodológicos:** No estudo, os estudantes utilizaram aviões de papel, smartphones e um software de geometria dinâmica para encontrar a equação que descreve a trajetória de voo dos aviões de papel. Os dados foram analisados com um modelo analítico que destaca os três diferentes caminhos adotados pelos estudantes e integra a taxonomia SOLO com as teorias de PMA e Teoria da Atividade.
Autoras (ano): Sousa e Almeida (2017). **Título:** *Mathematical thinking in mathematical modelling activities*. **Objetivo:** Investigar a questão “Os processos cognitivos que ocorrem durante as atividades de modelagem matemática conduzem os alunos ao pensamento matemático avançado?". **Procedimentos metodológicos:** Análise qualitativa e interpretativa do progresso de um estudante de um curso de licenciatura em Matemática durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, com dados coletados em gravações de áudio, vídeo e registros escritos entregues.
Autores (ano): Teófilo, Lima e Menezes (2020). **Título:** Cálculo diferencial e integral: da Sequência Fedathi ao Pensamento Matemático Avançado. **Objetivo:** Entender se a utilização da metodologia de ensino Sequência Fedathi, por parte dos docentes, pode desenvolver aspectos do PMA na construção de raciocínio por parte dos discentes. **Procedimentos metodológicos:** Estudo de caso. Os participantes eram estudantes de um grupo de estudos. Para análise dos resultados, os autores observaram categorias estabelecidas com base no referencial teórico do PMA.
Autores (ano): Trindade e Soares (2017). **Título:** O Conceito de Sequências Numéricas: Análise de um Livro do Ensino Superior. **Objetivo:** Analisar uma seção específica de uma obra de Cálculo presente nas ementas de um curso de licenciatura em Matemática, a fim de verificar a abordagem do conceito de sequências numéricas. **Procedimentos metodológicos:** Análise documental e a técnica da análise de conteúdo. Os autores observaram o rigor matemático na seção analisada, bem como a abordagem do conceito sob a ótica do PMA.
Autoras (ano): Vidotti e Kato (2018). **Título:** Um Estudo sobre Conflitos no Processo de Aprendizagem de Limite de Funções de Várias Variáveis. **Objetivo:** Investigar possíveis causas para os erros cometidos pelos estudantes do curso de licenciatura em Matemática em um teste diagnóstico sobre limite de funções de várias variáveis. **Procedimentos metodológicos:** As autoras utilizaram um teste diagnóstico constituído por questões abertas envolvendo a definição e propriedades do limite em que identificaram algumas das possíveis causas para os erros manifestados pelos estudantes. Realizaram um questionário com acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática de três universidades paranaenses.
Autores (ano): Vieira, Souza e Imafuku (2020). **Título:** Sobre Justificativas em Questões do Tipo Verdadeiro/Falso de Estudantes de Licenciatura em Matemática. **Objetivo:** Analisar percepções de um grupo de estudantes de um curso de licenciatura em Matemática a respeito de prova e justificativa em Matemática, com foco em sequências numéricas. **Procedimentos metodológicos:** Entrevista com sete docentes que ministram essas disciplinas para o curso de licenciatura em Matemática para a elaboração dos instrumentos de coleta de dados; aplicação de duas questões do tipo Verdadeiro/Falso e entrevistas semiestruturadas, em dois momentos distintos do curso.

Fonte: os autores.

No Quadro 4, procuramos aproveitar as descrições dos objetivos ou procedimentos metodológicos para evidenciar questões como instrumentos de coleta, participantes e referencial teórico, mas sem desprender muito espaço com questões de contexto como local de aplicação e quantidade de participantes.

Nas oitenta e três pesquisas selecionadas, verificamos que quarenta e duas basearam-se no conceito imagem e conceito definição de Tall e Vinner

(1981), dezoito nas caracterizações do PMA propostas por David Tall, quatro em caracterizações do PMA propostas por Tommy Dreyfus, vinte e três em processos de PMA descritos por Dreyfus (2002), seis na Teoria APOS, proposta por Dubinsky (2002), cinco na divisão proceitual, proposta por Gray e Tall (1994), quatro nas concepções e fases de formação dos conceitos matemáticos, propostas por Sfard (1987, 1991) e duas nas ideias de compreensão incipiente ou níveis de conceito imagem, propostas por Domingos (2003), considerando que muitas delas utilizaram mais de um desses referenciais.

Embora o Quadro 4 apresente apenas um recorte das pesquisas que encontramos, nele podemos observar que alguns desses trabalhos utilizaram o referencial do PMA para verificar indícios desse pensamento em produções de estudantes, futuros professores.

Assim, lemos os trabalhos levantados e pensamos em separar esses que verificaram indícios de pensamento matemático nas produções dos estudantes, pois a avaliação da aprendizagem em Matemática dos estudantes com o referencial teórico do PMA pode indicar possíveis relações entre o desenvolvimento do PMA e essa aprendizagem. Nosso interesse nessas relações se deve à procura por possibilidades de contribuições do PMA para o ensino, considerando, conforme Ball e Bass (2009), que o ensino requer o compromisso com a aprendizagem de cada estudante e o fornecimento de oportunidades para tal.

Como normalmente acontece em uma pesquisa qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1991; FIORENTINI; LORENZATO, 2006), nossos critérios de seleção e análise foram se modificando e ganhando consistência conforme realizávamos o levantamento e percebíamos similaridades e possíveis dualidades na classificação dos trabalhos encontrados. Inicialmente, pretendíamos analisar separadamente os trabalhos que avaliaram a aprendizagem por meio de indícios de PMA e os demais. No entanto, tornou-se cada vez mais difícil diferenciar esses trabalhos dos que verificaram processos de PMA na produção escrita de estudantes, utilizando o referencial teórico para justificar a importância do desenvolvimento desses processos de pensamento para a aprendizagem. Além disso, gostaríamos de analisar (nesses trabalhos realizados com estudantes de licenciatura) discussões com relação a possíveis contribuições do PMA para os futuros professores de Matemática, mas não encontramos (nesses que verificaram indícios de PMA) nada que não fosse relacionado à aprendizagem matemática.

Sendo assim, resolvemos analisar separadamente pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA para verificar indícios de pensamento matemático em produções de estudantes (futuros professores) que entendemos como forma de avaliar a aprendizagem em Matemática ou discutindo o PMA dos estudantes como um aporte para a aprendizagem. Das sessenta e seis pesquisas que satisfizeram esse critério, selecionamos as dezessete completas e mais recentes (realizadas nos últimos cinco anos da data do levantamento, ou seja, a partir de 2017). Nessas pesquisas, examinamos os critérios de avaliação do pensamento matemático dos estudantes e possíveis relações entre os indícios de PMA e a aprendizagem de conceitos matemáticos, que interpretamos a partir de considerações dos autores.

Essas análises podem ser vistas em Inarejos e Savioli (2022). Resumidamente, foram interpretadas concepções[41] de que o PMA contribui ou é mesmo necessário para a aprendizagem de conceitos (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017a, 2017b; FONSECA; HENRIQUES, 2020; FONTENELE, 2018; JESUS; SAVIOLI, 2019; JORGE, 2017; LOPES, 2019; SOUSA; ALMEIDA, 2017; TEÓFILO; LIMA; MENEZES, 2020; VIDOTTI; KATO, 2018); a aprendizagem de conceitos pode ser inferida pelo desenvolvimento do PMA (AMORIM *et al.*, 2020; FONSECA; HENRIQUES, 2018, 2020; JESUS; SAVIOLI, 2019; JORGE, 2017; MENEZES, 2018; TEÓFILO; LIMA; MENEZES, 2020; VIEIRA; SOUZA; IMAFUKU, 2020); a aprendizagem de conceitos contribui para o desenvolvimento do PMA (JESUS; SAVIOLI, 2019; JORGE, 2017; SOUSA; ALMEIDA, 2017; VIEIRA; SOUZA; IMAFUKU, 2020); a finalidade de uma abordagem pode ser o desenvolvimento do PMA (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020; FONTENELE, 2018; JORGE, 2017; MATEUS-NIEVES; JIMENEZ, 2020; SOUSA; ALMEIDA, 2017; VIEIRA; SOUZA; IMAFUKU, 2020); a aprendizagem de conceitos e o desenvolvimento do PMA ocorrem juntos (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020; JESUS; SAVIOLI, 2019; JORGE, 2017) ou contribuem um para o outro (JESUS; SAVIOLI, 2019; JORGE, 2017; SOUSA; ALMEIDA, 2017); e o referencial teórico do PMA pode auxiliar os professores no diagnóstico de dificuldades (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017a,

[41] Essas concepções foram interpretadas com base nas afirmações dos autores em seus trabalhos, referindo-se a considerações que por vezes vão além das conclusões das investigações realizadas. Assim, enfatizamos que essas pesquisas não tiveram o objetivo de estabelecer essas relações entre o desenvolvimento do PMA e a aprendizagem em Matemática. No entanto, aproveitamos essas concepções interpretadas para reunir ideias que nos auxiliaram a estabelecer relações teóricas entre o PMA e o ensino de Matemática na Educação Básica no Capítulo 6.

2017b; JESUS; SAVIOLI, 2019; JORGE, 2017; VIDOTTI; KATO, 2018) ou no embasamento do processo de ensino-aprendizagem (AMORIM *et al.*, 2020; FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020; FONTENELE, 2018; JESUS; SAVIOLI, 2019; LOPES, 2019; MATEUS-NIEVES; JIMENEZ, 2020; MENEZES, 2018; RODRIGUES, 2019).

Essas concepções não se contradizem, de forma que podemos reuni-las em uma única concepção a respeito da relação do desenvolvimento do PMA com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, conforme argumentaremos no Capítulo 6 com relação à aprendizagem em Matemática Avançada.

Além disso, essas relações entre os indícios de PMA e a aprendizagem de conceitos nos indicam possíveis contribuições do PMA para professores de Matemática, como a aprendizagem de conteúdos matemáticos, o entendimento de como os estudantes aprendem Matemática e considerações do referencial teórico para um processo de ensino favorável à aprendizagem. Ainda, essas relações indicam a utilização desse referencial teórico pelos pesquisadores em avaliações, algo que poderia dar suporte a professores para avaliarem seus alunos; porém, para isso, os professores precisariam estudar o referencial teórico do PMA, como abordaremos na Seção 6.1.

Nas pesquisas levantadas que utilizaram o referencial teórico do PMA de uma forma diferente de verificar indícios de pensamento matemático nas produções dos estudantes, buscamos entender como os autores utilizaram esse referencial, procurando por possíveis relações que essas utilizações estabelecem entre o PMA e contribuições para os futuros professores, o que pode nos indicar contribuições do PMA para o ensino de Matemática na Educação Básica.

Considerando a importância dessas relações para o objetivo da tese e uma quantidade menor de trabalhos a analisar, não nos limitamos a um recorte de tempo para a análise dessas pesquisas selecionadas, diferente do critério de recorte adotado em Inarejos e Savioli (2022). Desse modo, o *corpus* de análise desta seção é formado por dezessete trabalhos: três teses, duas dissertações, quatro artigos de periódicos e oito publicações em anais de eventos. Os autores mais utilizados foram Tall, em nove pesquisas, Tall e Vinner, em oito e Dreyfus, em sete.

Identificamos formas de utilizar o referencial teórico do PMA e concluímos que, dos dezessete trabalhos que compõem o *corpus*, sete deles utilizaram para embasar a elaboração de propostas didáticas, quatro para a justificativa da pesquisa (incluindo dois que também embasaram o entendimento de um termo adotado), três para discutir dificuldades dos estudantes (mas só um deles utilizou o referencial do PMA exclusivamente para isso), dois para analisar materiais didáticos, dois utilizaram esse referencial em alguma discussão teórica e um utilizou na justificativa para uma disciplina. Ressaltamos que alguns deles conferem com mais de uma utilização[42].

Iniciamos comentando os trabalhos que embasaram a elaboração de uma proposta didática com o referencial teórico do PMA.

Brito (2010) e Brito e Reis (2011) justificam que o rigor deve ser compatível ao contexto de ensino, tendo suas particularidades na licenciatura em Matemática. Assim, a proposta didática produzida pelos autores se fundamenta na necessidade de uma abordagem dialética dos aspectos intuitivos e rigorosos no ensino de Análise Real na licenciatura. Fundamentados em Reis (2001), os autores consideram a necessidade de um rompimento com o ensino formalista atual, tendo em vista a formação de professores de Matemática com multiplicidade e flexibilidade de conhecimentos específicos. Defendem, assim, que "[...] o rigor é fundamental no ensino de Análise Real, mas que deve ser buscado de forma gradativa, levando-se em consideração todo o contexto da sala de aula" (BRITO, 2010 , p. 78).

As pesquisas de Brunet, Leivas e Leyser (2009), Lopes e Lopes (2017), Lopes, L. M. L. (2017), Miranda (2010) e Santos e Domingos (2011) utilizaram o PMA como um embasamento para a elaboração de propostas visando o aprendizado dos estudantes quanto aos conteúdos de Matemática Avançada, sem outra relação, por nós identificada, com conhecimentos específicos dos professores de Matemática. Entretanto, pensando além da importância do aprendizado em Matemática Avançada na licenciatura, essas pesquisas evidenciam o potencial da teoria do PMA para a elaboração de planos de aula, por conta das implicações

[42] Alguns trabalhos que não fazem parte desse *corpus* por causa de verificarem indícios de PMA na produção de estudantes, sendo que os mais recentes foram analisados em Inarejos e Savioli (2022), também utilizaram o referencial teórico em formas como essas. Por exemplo: Amorim (2011) avaliou a contribuição de uma proposta de ensino para a aprendizagem de licenciandos após cursarem Análise Real e utilizou o conceito imagem e o conceito definição na análise de uma produção de estudantes; Dietrich (2010) utilizou a teoria de Tall e Vinner (1981) na análise de livros didáticos, na análise de um teste diagnóstico aplicado com os estudantes, na construção de uma sequência didática a partir dos dados das análises prévias e na análise das resoluções; Mateus-Nieves e Jimenez (2020) articularam o PMA com a Teoria dos Nós, propuseram um seminário com base nessa articulação e identificaram processos de PMA desenvolvidos pelos estudantes durante sua realização; e Vieira, Souza e Imafuku (2020) utilizaram o PMA para justificar a pesquisa e para analisar uma produção de estudantes.

didáticas discutidas nessa teoria, algumas das quais ressaltamos no Capítulo 2. Por exemplo, Lopes e Lopes (2017, p. 5) consideram que:

> É desejável para o sucesso do aluno, com relação ao aprendizado de um conteúdo matemático em uma determinada componente curricular, que ocorra a substituição da atividade do estudante meramente ligada à execução de procedimentos padronizados baseados na repetição, por aquela ligada à abstração, à representação e à análise do conteúdo. Para Dreyfus [...] uma longa sequência de atividades de aprendizagem é a base para a compreensão dos conceitos matemáticos. A realização dessas atividades implica a execução de uma variedade de processos que se interagem.

Analogamente, Santos e Domingos (2011) apontam, em suas considerações finais, para a importância de um ambiente investigativo na formação de professores:

> Esta actividade aponta para a necessidade de envolver mais os estudantes neste ambiente investigativo, mas é necessário mais trabalho de forma a flexibilizar e integrar estas actividades não só na realidade da experiência matemática de futuros professores, mas que estes transportem essas experiências para a sua prática profissional. (SANTOS; DOMINGOS, 2011, p. 12).

Essas contribuições do referencial teórico do PMA, que encontramos nas pesquisas do *corpus* que fundamentaram a elaboração de uma proposta didática (BRITO, 2010; BRITO; REIS, 2011; BRUNET; LEIVAS; LEYSER, 2009; LOPES; LOPES, 2017; LOPES, L. M. L., 2017; MIRANDA, 2010; SANTOS; DOMINGOS, 2011), convergem com considerações indicadas em Inarejos e Savioli (2022) e com outras pesquisas analisadas nesta seção (ELIAS; BARBOSA; SAVIOLI, 2011; FRANCO; SOARES, 2013; PRADO, 2016; TRINDADE; SOARES, 2017) que fizeram considerações quanto ao embasamento do processo de ensino-aprendizagem. Essas contribuições referem-se a ideias do referencial teórico do PMA, especialmente quanto a Tall e Vinner (1981), Tall (2002) e Dreyfus (2002), com relação ao processo de ensino-aprendizagem, que podem contribuir para o ensino de Matemática.

Considerando os trabalhos que, na nossa interpretação, utilizaram o PMA para justificar a sua pesquisa, temos Bozkurt e Koç (2012), que utilizaram as noções de conceito imagem e conceito definição e argumentaram que o pensamento geométrico de nível superior requer ao menos uma compreensão básica do conceito definição. Os autores consideram que "[...] os professores devem entender a geometria que ensinam e também preparar os alunos para níveis avançados" (BOZKURT; KOÇ, p. 2950, tradução nossa). Desse modo, interpretamos que essa ideia é utilizada pelos autores para justificar a pesquisa com os futuros professores.

Ko e Knuth (2009) trabalharam com declarações verdadeiras ou falsas, para analisar provas e contraexemplos. O instrumento foi elaborado com cinco declarações modificadas de livros didáticos e testes seletivos, planejado para avaliar conceitos de diferenciação. O referencial teórico do PMA foi utilizado na justificativa para a pesquisa com provas. Nas conclusões, os autores fizeram considerações a respeito do conhecimento dos professores e de seu desenvolvimento na graduação:

> Como é esperado que os futuros professores de matemática desenvolvam fluência com prova e contraexemplos em cursos de graduação para seu ensino futuro, com relação às recomendações de prova e raciocínio nas reformas atuais, os professores de matemática e de educação matemática devem considerar como se comunicar melhor entre si, para conectar melhor seus cursos e envolver os alunos no desenvolvimento de conhecimentos e na promoção da compreensão de provas e contraexemplos. (KO; KNUTH, 2009, p. 266, tradução nossa).

Proença (2019) considera que um dos objetivos do ensino de Matemática na escola é levar os estudantes a desenvolverem o pensamento algébrico e, com isso, o autor fez alguns apontamentos quanto ao conhecimento dos professores:

> Nesse sentido, é importante que na formação de professores e, especificamente para este artigo, na formação inicial de professores que ensinam Matemática, seja abordado o trabalho para favorecer conhecimentos direcionados ao ensino e à aprendizagem para tratar do processo de generalização de padrões algébricos. (PROENÇA, 2019, p. 420).

Proença (2019) considera o processo de generalização de padrões como um conhecimento do assunto, no que se refere à constituição de conhecimentos necessários ao trabalho docente, proposta por Shulman (1986). A caracterização do processo de generalização, proposta por Dreyfus (2002), foi utilizada, dentre outras, para embasar o entendimento a respeito do processo de generalização. Assim, interpretamos que a importância atribuída a esse processo para o conhecimento dos professores compôs a justificativa dessa pesquisa.

Leikin e Zazkis (2010) utilizaram Tall e Vinner (1981), dentre outros autores, para embasar o entendimento a respeito de definição em Matemática. A importância da definição em Matemática integra a justificativa de tal pesquisa. Conforme comentamos no Capítulo 3, Leikin e Zazkis (2010) afirmam que o conceito imagem consistente com a definição formal do conceito faz parte do conhecimento do assunto, conforme Shulman (1986). Ainda, as autoras relacionam esse conhecimento dos professores com a importância de envolverem os estudantes na construção dos conceitos, conforme discutimos no Capítulo 2.

> A pesquisa educacional indica que o conhecimento dos professores das definições matemáticas afeta suas decisões didáticas [...]. Esses estudos argumentam que o conceito imagem dos professores e sua compreensão da noção de definição influenciam as maneiras pelas quais os professores apresentam o conteúdo matemático a seus alunos. Um fio condutor comum na pesquisa em Educação Matemática é a crítica à apresentação de produtos acabados aos estudantes e uma forte recomendação de envolvê-los no processo de definição [...]. (LEIKIN; ZAZKIS, 2010, p. 454, tradução nossa).

Leikin e Zazkis (2010) concluem que:

> Os futuros professores de Matemática tiveram dificuldade em reter definições de um conceito matemático específico, conforme ilustrado por T9 acima, que não se ‘lembrava’ das definições ‘da universidade’ que não foram aprendidas na escola, apesar do fato de que seus estudos na universidade estavam mais próximos da época do nosso estudo. O argumento, no entanto, foi típico da maioria dos participantes. Sugerimos que essa afirmação indica que os futuros professores de Matemática não relacionam a Matemática que estudam na universidade com a Matemática que estudaram e que ensinarão na escola. (LEIKIN; ZAZKIS, 2010, p. 464, tradução nossa, grifo das autoras).

Desse modo, essas pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA na justificativa para seu estudo destacaram a importância de certas habilidades matemáticas ou de pensamento matemático para os futuros professores de Matemática. Isso indica possíveis contribuições do referencial teórico do PMA no embasamento dessa importância.

Conforme Inarejos e Savioli (2022), é recorrente as pesquisas que avaliam a aprendizagem dos licenciandos por meio de indícios de PMA utilizarem o referencial teórico para discutir as dificuldades esperadas ou observadas, o que é coerente com a atividade de avaliar. Em algumas pesquisas do *corpus* desta subseção, também encontramos discussões quanto às dificuldades dos futuros professores em um determinado conteúdo de Matemática Avançada, ainda que essas discussões não tenham se baseado na análise de indícios de PMA dos estudantes.

Já comentamos os trabalhos de Brito (2010) e Brito e Reis (2011) quanto à elaboração de uma proposta didática. Além de embasarem a elaboração da proposta, o conceito imagem e o conceito definição (TALL; VINNER, 1981) foram utilizados para embasar a discussão a respeito de algumas dificuldades dos estudantes. Os autores observaram a influência do conceito definição e de conflitos no conceito imagem na dificuldade dos estudantes em descrever o pensamento matemático.

Franco e Soares (2013) identificaram diversos conflitos de aprendizagem com estudantes de Álgebra Abstrata. Algumas considerações dos autores estão em concordância com Tall (2002) e Tall e Vinner (1981), por exemplo, ao conjecturarem que “[...] a definição formal, pelo menos num primeiro momento, não foi suficiente para que os alunos formassem uma imagem conceitual, digamos ‘significativa’, da compreensão desses conceitos matemáticos” (FRANCO; SOARES, 2013, p. 168, grifo dos autores). Franco e Soares (2013) completam que somente a partir de exemplificações de conjuntos numéricos os estudantes formaram conceitos imagem do objeto, e esses exemplos eram expressos sempre que os conceitos definição eram solicitados. Os autores sugerem que sejam realizados, em sala de aula, exercícios que explorem o conceito definição, para que os estudantes expressem seu conceito imagem e fatores de conflitos sejam identificados.

Essas pesquisas que lidaram com a dificuldade dos estudantes revelam que o referencial teórico do PMA pode contribuir para professores formadores prever dificuldades em um assunto e para entenderem dificuldades verificadas, para assim delinearem estratégias didáticas e intervenções que visem a superação dessas dificuldades. Discutiremos, no Capítulo 6, a possibilidade dessa contribuição do referencial teórico do PMA se estender ao ensino na Educação Básica.

Ainda, com relação aos futuros professores de Matemática da Educação Básica, as dificuldades que emergem no estudo dos conceitos matemáticos da graduação, discutidas nas pesquisas, estão relacionadas à sua aprendizagem em Matemática Avançada.

Elias, Barbosa e Savioli (2011) e Trindade e Soares (2017) analisaram materiais didáticos à luz do aporte teórico do PMA. Essa utilização está vinculada ao ensino da Matemática Avançada na licenciatura em Matemática. Esses autores fizeram considerações quanto ao ensino e à aprendizagem fundamentadas no referencial teórico do PMA. Por exemplo, Elias, Barbosa e Savioli (2011) apoiaram-se nas ideias de Tall (2002) quanto à transição do PME para o PMA para investigar como os livros didáticos apresentam o conceito de números naturais:

> Acreditamos que, enquanto na matemática elementar – no Ensino Médio - é feita a descrição do conjunto dos números naturais, apresentando apenas a noção do que é o conjunto dos números naturais e de suas propriedades, na matemática avançada – no Ensino Superior – é feita a construção deste conceito e de suas propriedades, exigindo do estudante um pensamento matemático avançado. Esta modificação na maneira de tratar o objeto matemático – transição curricular - exige do estudante iniciante em matemática avançada uma mudança na maneira de encarar esses objetos matemáticos, exige um novo estado cognitivo.
> (ELIAS; BARBOSA; SAVIOLI, 2011, p. 6).

Lopes, G. L. O. (2017) e Reis (2001) utilizaram o PMA em discussões teóricas, que abordamos na Seção 4.1.

Prado (2016) procurou compreender a Álgebra Linear ensinada na licenciatura em Matemática como um saber voltado para os futuros professores. Para isso, o autor realizou análises documentais e entrevistas com docentes de universidades, que foram analisadas com base em pressupostos de um estudo por saturação. Quanto ao PMA, o estudo baseou-se nos processos descritos por Dreyfus (2002). O autor identificou processos de PMA nas falas dos professores formadores quanto à contribuição da Álgebra Linear para a formação profissional dos licenciandos. Assim, interpretamos que a possibilidade de desenvolver no estudante vários processos de PMA emergiu como uma das justificativas para a disciplina no curso. Além disso, o autor argumentou que o conhecimento explícito do PMA por parte dos professores (ver Seção 4.3) pode lhes oferecer um suporte no ensino de noções de Matemática Básica.

Na próxima seção, retomaremos as considerações de Prado (2016) com relação ao conhecimento do referencial teórico do PMA para o ensino de Matemática na Educação Básica.

4.3 O Pensamento Matemático Avançado para além da Aprendizagem dos Professores em Matemática Avançada

Na seção anterior, analisamos pesquisas que trouxeram contribuições do PMA para professores de Matemática, geralmente focadas no aspecto formativo da aprendizagem em Matemática Avançada. Não negamos que essa formação possa contribuir para a atuação dos professores de Matemática, mas estamos interessados em conhecer outras formas de contribuições do PMA para o trabalho dos professores de ensinar Matemática na Educação Básica. Além disso, para efeito de realizar buscas sistemáticas, realizamos, na Seção 4.2, um recorte que focou na licenciatura. Atentemo-nos, agora, a pesquisas que vão além desses limitantes: pesquisas que não utilizaram o PMA somente para avaliar indícios de aprendizagem em Matemática Avançada, nem para embasar questões referentes a essa aprendizagem, mas que trouxeram, mesmo que não por objetivo, outros indícios de como o PMA pode contribuir para a prática dos professores de Matemática. Algumas delas estudaram o PMA de professores que atuam na Educação Básica em processo de formação continuada.

Em resumo, reunimos, nesta seção, discussões baseadas em trabalhos que evidenciaram contribuições para professores de Matemática que vão além do aprendizado em Matemática Avançada, considerando tanto trabalhos encontrados nas buscas sistemáticas descritas na seção anterior quanto alguns encontrados em demais buscas ou por outras formas de localização, como sugestões de colegas de pesquisa e leituras diversas. Desse modo, procuramos destacar, nos comentários a respeito de cada pesquisa, possíveis contribuições que encontramos do PMA para o ensino de Matemática na Educação Básica.

Iniciemos com algumas investigações realizadas com professores em formação continuada.

Gualandi (2019) investigou processos de PMA, de acordo com Dreyfus (2002), com professores em formação continuada. A pesquisa baseou-se nas etapas da engenharia didática, com o objetivo de investigar os reflexos de uma formação continuada na prática de professores que ensinam Matemática. Os professores participantes realizaram tarefas envolvendo generalização de padrões, que foram analisadas à luz do pensamento algébrico e do PMA. O autor considerou que o envolvimento dos professores com os processos de pensamento matemático indica um aperfeiçoamento quanto ao seu 'conhecimento matemático especializado' (GUALANDI, 2019). Alguns professores adaptaram as tarefas e aplicaram em suas turmas no Ensino Fundamental:

> Entendemos que o momento em que relataram a adaptação da tarefa frente à realidade de sua turma é bastante propício para

> desenvolver a autonomia desses professores, que aos poucos vão construindo situações favoráveis ao trabalho que envolve processos do pensamento algébrico, pode promover a autonomia e o desenvolvimento profissional. (GUALANDI, 2019, p. 108).

A partir das observações de Gualandi (2019), interpretamos que o desenvolvimento do pensamento matemático dos professores pode contribuir para sua autonomia, ao passarem a se sentir mais confiantes para mudar a sua prática e adaptar questões conforme considerem necessário ao contexto de sua turma, o que, por sua vez, contribui para a sua prática de ensino.

Gualandi (2019) observou que alguns professores passaram a discutir questões de livros didáticos e definições de forma crítica, percebendo que o curso contribuiu para que se tornassem professores mais reflexivos e críticos. Podemos nos indagar a respeito do papel do PMA nesse processo. É plausível pensar que o PMA, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, favorece a articulação dos conceitos e a confiança e competência que os professores precisam para analisar criticamente o livro didático e adaptar questões conforme considerem necessário para o desenvolvimento do pensamento matemático de seus alunos.

Além disso, o autor relaciona o processo de resolução de problemas em que os professores participantes trabalharam com as ideias de Dreyfus (2002) a respeito da capacidade de comunicação relacionada à flexibilidade na mudança de representações: “O uso de símbolos matemáticos de forma criativa desenvolve a capacidade de comunicar-se matematicamente, promovendo mais interação frente à resolução de problemas” (GUALANDI, 2019, p. 116).

Bisognin e Bisognin (2013) também investigaram uma proposta de ensino com professores em formação continuada. As autoras embasaram-se no referencial teórico do PMA para justificar a proposta com Resolução de Problemas, em uma pesquisa com professores da Educação Básica em um curso de mestrado. Segundo as autoras, uma:

> [...] proposta pedagógica como a apresentada nesse artigo permite a aprendizagem dos próprios professores, pois a metodologia da Resolução de Problemas propicia uma interação entre professor e alunos num processo dinâmico de construção do conhecimento. (BISOGNIN; BISOGNIN, 2013, p. 747).

As ideias do referencial teórico do PMA foram utilizadas por Bisognin e Bisognin (2013) para embasar a proposta com Resolução de Problemas:

> Nesta direção [em que se propõe situações desafiadoras para a construção dos conceitos com diferentes conceitos imagem], acredita-se que, por meio da Resolução de Problemas, é possível a criação de imagens do conceito que podem contribuir para a aprendizagem de novos conceitos matemáticos. As múltiplas representações, que o processo de resolução de problemas pode proporcionar, permitem que os alunos, em diferentes momentos, possam evocá-los e assim novos conteúdos podem se aprendidos. (BISOGNIN; BISOGNIN, 2013, p. 742).

Nesse sentido, a pesquisa de Bisognin e Bisognin (2013) aproxima-se das pesquisas analisadas na Seção 4.2 que observaram aspectos didáticos amparados no referencial teórico do PMA, especialmente quanto ao caráter exploratório de uma abordagem. As autoras também abordaram o desenvolvimento da autonomia dos professores vinculado à forma de ensino proposta:

> A situação desafiadora apresentada permitiu que eles falassem, argumentassem, discutissem e escrevessem os resultados matemáticos encontrados, contribuindo dessa forma com a sua autonomia.
> A aplicação dessa atividade trouxe, também, um impacto sobre a prática docente, pois problemas que favorecem os alunos a se expressarem de modo escrito e oral permitem a identificação do raciocínio desenvolvido por eles ao solucionarem o problema proposto. (BISOGNIN; BISOGNIN, 2013, p. 747).

Wright, Murray e Basu (2016) estudaram como professores e futuros professores fazem conexões entre conceitos algébricos elementares e avançados, e como a instrução em Álgebra Abstrata impacta na forma como os professores abordam Álgebra no Ensino Fundamental. Os participantes cursavam um mestrado em Educação Matemática. Os autores utilizaram a Teoria APOS (DUBINSKY, 2002) para investigar o entendimento do conteúdo e o Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) para discutir abordagens didáticas.

Sendo assim, apesar de ter utilizado a Teoria APOS principalmente para caracterizar o entendimento de um conteúdo matemático, Wright, Murray e Basu (2016) discutiram questões envolvendo esse entendimento na prática docente. Os autores ainda consideram que os professores precisam aprender ‘hábitos matemáticos da mente’ e ‘práticas matemáticas’, como:

> [...] procurar padrões, fazer conjecturas, atender à precisão, utilizar visualizações e conectar representações. Esses hábitos e práticas no pensamento e na aprendizagem matemática se estendem por áreas de conteúdo e níveis de estudo matemático. Portanto, à medida que consideramos como o conteúdo matemático avançado afeta o conhecimento e a compreensão dos professores do ensino e da

> aprendizagem da matemática secundária, é importante considerarmos hábitos e práticas que também podem influenciar como as ideias avançadas são aprendidas e interpretadas para o ensino. (WRIGHT; MURRAY; BASU, 2016, p. 483, tradução nossa).

Essas práticas matemáticas coincidem com os processos de PMA, conforme Dreyfus (2002); e, segundo Wright, Murray e Basu (2016), permitem enxergarmos as conexões entre a Álgebra Abstrata e a matemática da Educação Básica como algo além do conhecimento da Matemática:

> Este estudo procura mostrar como as conexões podem ser não apenas matemáticas por natureza e relacionadas diretamente com o conhecimento do assunto, mas também ilustrar como as conexões podem ir além do conhecimento *da* matemática e abranger o engajamento *na* matemática por meio das lentes do conhecimento matemático para o ensino, hábitos matemáticos da mente, e práticas matemáticas. (WRIGHT; MURRAY; BASU, 2016, p. 483, tradução nossa, grifo dos autores).

No Conhecimento Matemático para o Ensino, Wright, Murray e Basu (2016) focaram no domínio do Conhecimento do Conteúdo e Ensino, que ilumina a interação entre o conhecimento matemático específico e a compreensão de questões pedagógicas (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Alguns autores identificam as relações que os estudantes estabelecem entre conceitos avançados e elementares com o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (BALL; BASS, 2009; JAKOBSEN *et al.*, 2012; ZAZKIS; MAMOLO, 2011). Wright, Murray e Basu (2016) não ignoram o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, mas relacionam os efeitos do conhecimento mais avançado em questões da Matemática Básica com o Conhecimento do Conteúdo e Ensino, argumentando que as relações entre o conteúdo avançado e o elementar possuem implicações na prática dos professores:

> […] descobrimos que nossos participantes se conscientizaram da importância de manter uma progressão adequada dos conceitos matemáticos relacionados para uma prática eficaz de ensino e aprendizagem. Essa percepção sobre o sequenciamento de conceitos matemáticos está alinhada ao CCE [Conhecimento do Conteúdo e Ensino] (Ball et al., 2008). Segundo o CCE, o ensino eficaz é o resultado da combinação perfeita de conhecimento de ensino e conteúdo. (WRIGHT; MURRAY; BASU, 2016, p. 494, tradução nossa).

Esses autores utilizam o conceito de inverso, à luz da Teoria APOS (DUBINSKY, 2002), para exemplificar concepções diferentes que ocorrem em diferentes níveis de ensino e afetam a docência. No Ensino Fundamental e no Ensino Médio, o inverso é determinado em operações que anulam os efeitos das outras; em contrapartida, no nível avançado da graduação, a abordagem operacional muda para uma abordagem funcional (WRIGHT; MURRAY; BASU, 2016).

Wright, Murray e Basu (2016) desenvolveram uma unidade instrucional focada na resolução de equações, observando como os estudantes consideravam as propriedades matemáticas utilizadas nas resoluções e as relacionavam a estruturas algébricas, antes e depois da exposição aos conceitos algébricos abstratos. Pelas discussões geradas nas resoluções das equações, os autores verificaram que a maioria dos participantes possuía concepções de inversos em nível de ação ou processo antes da introdução da Álgebra Abstrata. Após a exposição a conceitos dessa disciplina, alguns participantes evidenciaram concepções de inversos como objetos.

Uma vinheta foi apresentada aos participantes com uma situação de ensino de equação de segundo grau, a partir da qual responderam algumas perguntas. Os participantes concordaram que as palavras do professor na vinheta teriam que ser mais precisas, por exemplo, há diferença entre "não existe solução" e "não existe solução real" (WRIGHT; MURRAY; BASU, 2016).

Assim, investigando o quanto a instrução em Álgebra impacta a forma como professores abordam Matemática Básica, Wright, Murray e Basu (2016) encontraram participantes focando-se no uso da linguagem em sala de aula e seu impacto na aprendizagem dos estudantes. No entanto, os autores ressalvam que há benefícios na linguagem ambígua na sala de aula para o desenvolvimento dos conceitos, sendo que os estudantes da Educação Básica devem ter a oportunidade de expandir seu entendimento particular das palavras, como ‘solução’, à medida que seu conhecimento matemático avança:

> [...] cabe ao professor enfrentar as ambiguidades de forma produtiva que permita aos estudantes desenvolver uma compreensão mais profunda de um conceito. No contexto de soluções, isso pode significar que os próprios estudantes podem questionar a ideia de não haver solução e chegar a entender que as soluções das equações estão intimamente relacionadas ao domínio sobre o qual a equação está sendo resolvida. (WRIGHT; MURRAY; BASU, 2016, p. 494, tradução nossa).

Santos (2008) utilizou o referencial teórico do PMA, entre outros, para embasar a proposta de uma ferramenta computacional. A pesquisa envolveu professores e futuros professores. Segundo o autor, o recurso é capaz de modificar a prática de professores e contribui para o conceito imagem de seus alunos.

> Defendemos neste trabalho que, utilizando estes construtores, o professor torna-se um ‘pesquisador em ação’ – desenvolvedor de sua própria prática –, capaz de produzir ambientes corporificados que auxiliem o aluno a ter um aprendizado significativo, que possa expandir a sua imagem de conceito referente aos assuntos abordados em ‘sala de aula’. (SANTOS, 2008, p. 5, grifo do autor).

Nessa forma de ensino, Santos (2008) considera que os professores operam diretamente sobre o conceito imagem dos seus alunos e de si próprio ao elaborar e aplicar as tarefas. Algumas implicações didáticas das ideias do PMA são apontadas por Santos (2008), que conclui, com base nos dados coletados, que a utilização da ferramenta:

> [...] pode interferir positivamente sobre a prática docente, [...] transpondo os saberes matemáticos em saberes ensinados de modo eficiente e questionador, conduzindo o aluno a, por meio da experimentação e da visualização, compreender os detalhes e as relações entre os elementos contidos nas atividades propostas, ao mesmo tempo em que permite ao aluno propor conjecturas, visando posterior abstração e formalização, acerca dos conteúdos, servindo assim de ‘ponte’ entre o mundo corporificado e o mundo simbólico, no sentido de TALL [41]. (SANTOS, 2008, p. 74, grifo do autor).
>
> [...] permitem ao professor [...] utilizar a tecnologia disponível em prol de uma mudança na abordagem tradicional do ensino de Matemática, migrando da cadeia formal (‘definição → teorema → demonstração → corolário (aplicações)’) para a cadeia empírica (‘exploração → conjectura → tentativa de demonstração → conclusão e aplicação’); (SANTOS, 2008, p. 75, grifo do autor).

Pires e Silva (2014) embasaram-se em Sfard (1991) para investigar as concepções de estudantes e professores (de Ensino Médio e Superior, incluindo de quatro licenciaturas em áreas distintas) do conceito de função.

Por se tratar de um estudo que envolve concepções tanto de estudantes quanto de professores, é interessante levarmos em consideração a relação entre as concepções dos dois grupos observada pelos autores: “Os resultados mostram que muito do que é feito pelo estudante é reflexo da prática do professor, e, além disso, que no Ensino Médio as concepções dos alunos transitam entre a operacional e a estrutural” (PIRES; SILVA, 2014, p. 1). Desse modo, não somente o desenvolvimento do pensamento matemático, mas o modo como professores concebem um conceito matemático influencia no processo de ensino. Com essas concepções, os professores, segundo Pires e Silva (2014), carregam outras crenças e saberes que vão sendo incorporados à sua prática.

Dias (2002) investigou o conceito imagem de propriedades da reta real de professores do Ensino Fundamental e Médio, em exercício e em formação continuada. A autora comparou os resultados, obtidos de um teste diagnóstico e um questionário, com concepções de estudantes relatadas na literatura, confirmando a hipótese de que as concepções dos professores seriam as mesmas dos estudantes nesse segmento de ensino. “Desse modo, é possível sugerir que *o conceito imagem* do professor reflita em sua prática docente, repercutindo em seus alunos” (DIAS, 2002, p. 77, grifo da autora), conclusão similar à de Pires e Silva (2014), ainda que a pesquisa de Dias (2002) seja mais antiga.

Ainda, a pesquisa envolveu entrevistas com alguns professores no qual a autora investigou fatores de conflito cognitivo, concluindo que o *“Conceito definição* próximo ao formal, apresentado na entrevista, mostrou-se decisivo para o sujeito resolver uma situação duvidosa, conflitante com *conceito imagem”* (DIAS, 2002, p. 77, grifo da autora). Outro participante sentiu a necessidade de reformular o seu conceito definição ao considerá-lo insuficiente em certa situação.

De acordo com Tall e Vinner (1981), conceitos imagem conflitantes geram fatores de conflito potencial, e esses podem ser tornar fatores de conflito cognitivo se essas imagens forem evocadas simultaneamente, como nas entrevistas realizadas por Dias (2002). Ocorrendo com professores em sala de aula, esses conflitos podem levar a situações de confusão e prejudicar a aprendizagem dos estudantes, além de pôr em cheque a autoridade do professor como especialista na disciplina que leciona, um problema que pode repercutir em aulas posteriores.

Santos e Domingos (2013) investigaram como futuros professores operacionalizam conceitos de aritmética racional (formal) aprimorando a qualidade de seu aprendizado matemático. Não mencionamos o trabalho dos autores na Seção 4.2 devido ao recorte de tempo das pesquisas analisadas em Inarejos e Savioli (2022), no entanto, o comentamos aqui devido a questões dos saberes de professores que identificamos na leitura. De fato, os autores afirmam que o currículo na formação de professores deve oferecer uma matriz matemática forte e flexível o suficiente para capacitar os futuros professores em manipular e criar as condições para ensinar Matemática com qualidade. Nesse sentido, os professores precisam de um pensamento matemático flexível, capaz de transitar entre o pensamento formal e prático, entre as concepções de objeto e processo, para criar condições de aprendizagem a seus estudantes.

Os autores identificaram diferentes formas de pensamento matemático em futuros professores de Portugal. Para isso, se fundamentaram na divisão proceitual (GRAY; TALL, 1994), ou seja, na “[...] diferença entre aqueles que relacionam e comprimem os procedimentos aritméticos e aqueles que permanecem na rotina aprendendo os procedimentos aritméticos passo a passo [...]” (SANTOS; DOMINGOS, 2013, p. 3237, tradução nossa).

Por fim, comentamos algumas pesquisas que consideram relevante para o ensino de Matemática que os professores conheçam o referencial teórico do PMA.

Machado e Bianchini (2013) investigaram, com professores de Matemática em formação continuada, possíveis aportes do conhecimento de processos de PMA, conforme Dreyfus (2002), para a reflexão dos professores sobre seu próprio saber.

> Partimos da ideia de que o conhecimento sobre os processos do PMA possibilita ao professor de matemática aprofundar sua relação com o saber matemático e assim, criar e avaliar situações propícias para que seus alunos se mobilizem para aprendizagem de matemática. (BIANCHINI; MACHADO, 2015, p. 37).

Os participantes das pesquisas desenvolvidas pelas autoras (BIANCHINI; MACHADO, 2013, 2015; MACHADO; BIANCHINI, 2013) resolveram situações-problema e foram solicitados a descrever tipos de recursos mentais e representacionais empregados. Posteriormente, após estudarem um texto de Dreyfus (2002), os professores em formação continuada revisaram suas análises das resoluções. Em um estudo semelhante, Bianchini e Machado (2013) solicitaram ainda que os participantes descrevessem os diferentes usos da variável (incógnita, número genérico ou relação funcional) presentes em suas resoluções. Machado e Bianchini (2013) concluíram que o estudo do PMA permitiu aos professores passarem de uma reflexão inicial focada em procedimentos algorítmicos para uma reflexão mais profunda sobre os próprios saberes. Bianchini e Machado (2013, 2015) obtiveram conclusões semelhantes em análises envolvendo outras situações-problema.

De acordo com Dreyfus (2002, p. 30, tradução nossa), “É importante para o professor de Matemática estar consciente desses processos para compreender algumas das dificuldades que seus alunos enfrentam”. Machado e Bianchini (2013) relacionam essa importância dos processos de PMA para a compreensão de dificuldades com a reflexão dos professores sobre o próprio saber. Segundo as autoras, a mudança que os participantes da pesquisa observaram em sua forma de avaliar "[...] reforça a sugestão de Dreyfus sobre a importância da reflexão do professor sobre seu próprio fazer matemático, *para consciente dos processos do PMA ele possa compreender algumas das dificuldades que seus alunos enfrentam* [...]" (MACHADO; BIANCHINI, 2013, p. 604, grifo das autoras). Desse modo, entendemos que a reflexão sobre o próprio saber por meio dos processos de PMA é um caminho apontado pelas autoras para que professores se tornem conscientes dos processos de PMA envolvidos em suas aulas.

Assim, além das reflexões sobre o próprio saber, Bianchini e Machado (2015) consideram que o conhecimento dos processos de PMA contribui para o trabalho docente na avaliação de seus estudantes e na elaboração de atividades:

> Dessa forma, o conhecimento sobre os processos do PMA possibilita ao professor de matemática avaliar, tanto as dificuldades inerentes aos conceitos e ideias que deseja desenvolver com seus alunos, como também aquelas apresentadas pela falta de hábito dos alunos com a utilização dos processos do PMA requeridos na construção de tais conhecimentos. [...] o conhecimento explícito dos processos do PMA pode auxiliar o professor a elaborar atividades que visem à apropriação desses processos por seus alunos. (BIANCHINI; MACHADO, 2015, p. 29).

Com relação à avaliação, Bianchini e Machado (2015) consideram que o conhecimento dos processos de PMA contribui para que professores analisem os processos do fazer matemático do estudante, indo além da vistoria de procedimentos automatizados:

> [...] quando um professor de matemática é instado a analisar os conhecimentos mobilizados em sua resolução de uma situação-problema, ele enfoca e descreve principalmente os procedimentos matemáticos, muitas vezes já automatizados, e algumas vezes tacitamente aceitos. Tal fato dificulta sua percepção sobre os processos vivenciados, como a ocorrência de tentativa e erro, idas e vindas, visualizações, validações, generalizações etc., que fazem parte de seu saber sobre o fazer matemático [...]. (BIANCHINI; MACHADO, 2015, p. 29).

Tais autoras partem de uma perspectiva de que o PMA ocorre em qualquer nível de ensino (DREYFUS, 2002; HAREL; SOWDER, 2005), compatível com a perspectiva que nomeamos como da complexidade dos processos de pensamento. Desse modo, segundo Bianchini e Machado (2013), o conhecimento dos processos de PMA contribui para que professores avaliem e selecionem situações-problema visando o desenvolvimento do PMA de seus alunos:

> Isso nos levou a investigar o potencial de propiciar ao professor, tanto a conscientização da importância da seleção de situações-problema que possibilitem o aluno a vivenciar diferentes usos da variável, quanto compreender quais as situações favoráveis ao aluno para o desenvolvimento de processos do pensamento matemático avançado – PMA – ademais compreender melhor algumas das dificuldades que seus alunos enfrentam ao serem expostos a essas situações. (BIANCHINI; MACHADO, 2013, p. 1288).

Com relação ao planejamento e ao processo de ensino, Bianchini e Machado (2015) os vinculam com a reflexão dos professores sobre o próprio saber:

> Os resultados desta pesquisa fornecem indícios de que o conhecimento dos processos do PMA propicia o aprofundamento da reflexão do professor sobre seu saber matemático. Essa reflexão, por sua vez, pode levar o professor a criar situações nas quais esses processos podem ser desenvolvidos e reconhecidos por seus alunos. (MACHADO; BIANCHINI, 2013, p. 604).
>
> Os resultados da pesquisa permitem inferir que a reflexão sobre o próprio saber embasada nos principais processos do PMA auxilia o professor de matemática a avaliar que atividade é propícia para o desenvolvimento desses processos na construção de conhecimentos matemáticos de seus alunos. Além disso, propicia ao professor antecipar o que os estudantes podem apresentar de dificuldade para aprender além de lhes fornecer modelos alternativos ou explicações para mediar essas dificuldades. (BIANCHINI; MACHADO, 2015, p. 39).

Prado (2016) investigou a Álgebra Linear como um saber voltado para professores de Matemática, conforme comentamos na Seção 4.2. O autor considera que o desenvolvimento dos processos de representação e abstração é parte do objetivo da disciplina de Álgebra Linear, e devem ser desenvolvidos ao construir noções elementares que sustentam a disciplina, como processos norteadores. Prado (2016) também considera que as disciplinas de Matemática Acadêmica devem construir noções matemáticas que são parte e não o objetivo único da disciplina, devendo ser relacionadas com a interface pedagógica. Assim, podemos pensar que talvez o desenvolvimento do PMA possa contribuir como parte desse estudo e possivelmente atuar como elemento norteador, possibilitando que relações sejam estabelecidas entre a matemática da Educação Básica e a Matemática Avançada.

Entre os elementos que podem contribuir para os saberes dos licenciandos observados na pesquisa, Prado (2016) considerou que o PMA pode oferecer um suporte ao ensino de noções de Matemática Básica. O autor identificou o PMA "[...] como sendo uma possível referência para ‘instrumentalizar’ parte dessa construção profissional [dos professores de matemática], a partir das noções de Álgebra Linear" (PRADO, 2016, p. 225-226, grifo do autor). Assim, as noções de Matemática que são ensinadas na Educação Básica podem, segundo o autor, serem abordadas à luz do PMA. Prado (2016) justifica que:

> [...] ao compreender quais e como os processos envolvidos na construção de uma noção matemática, por um indivíduo, esse professor de Matemática terá condições de refletir sobre as ações necessárias, para que seus alunos, diante das dificuldades enfrentadas, possam aprender a estudar Matemática e aprendê-la. (PRADO, 2016, p. 206).

Percebemos, assim, uma aproximação das ideias de Prado (2016) e Machado e Bianchini (2013) quanto ao PMA como um ‘instrumento’ que professores possam utilizar para desenvolver os conceitos com seus alunos, sabendo quais processos de PMA são necessários na construção desses conceitos. Nesse sentido, os professores, conhecendo o referencial teórico do PMA, possuem condições de refletir sobre o próprio saber e construir estratégias didáticas baseadas nessa reflexão, avaliar conforme os processos de pensamentos desenvolvidos, compreender as dificuldades dos estudantes e intervir adequadamente para que seus alunos desenvolvam os processos de PMA e assim construam seus próprios saberes.

Domingos (2006), após apresentar as principais caracterizações apontadas em referenciais teóricos do PMA, considerou que:

> A tomada de consciência da existência deste tipo de pensamento matemático pode ser bastante útil para o ensino. Ao ter em conta os diferentes processos envolvidos na construção dos conceitos é possível desenhar modelos pedagógicos que valorizem a compreensão e não apenas a memorização e a repetição de procedimentos realizada muitas vezes sem compreensão. (DOMINGOS, 2006, p. 26).

Essa perspectiva se aproxima à de Machado e Bianchini (2013) e Prado (2016) quanto ao estudo explícito do referencial teórico do PMA ser relevante para os professores. Segundo Domingos (2006), essa abordagem deve envolver os estudantes em tarefas de pesquisa e descoberta.

> O ensino e a aprendizagem podem assim beneficiar duma abordagem que contemple as questões relacionadas com o pensamento matemático avançado na medida em que pode alterar

> muitos dos processos de ensino e modelos pedagógicos em vigor nas nossas escolas. (DOMINGOS, 2006, p. 26).

Aproveitamos essas considerações na síntese que apresentamos a seguir.

4.4 Síntese do Capítulo

Finalizando este capítulo, que trouxe os levantamentos relevantes para a construção da tese, relembramos que realizamos, na Seção 4.1, um levantamento de teorizações que relacionaram o PMA com outro referencial teórico. Na Seção 4.2, investigamos pesquisas que utilizaram o PMA e envolveram licenciandos em Matemática ou questões referentes ao curso. E, na Seção 4.3, destacamos as contribuições de algumas pesquisas para pensarmos o papel do PMA no ensino Matemática para além da aprendizagem dos professores em Matemática Avançada, onde incluímos pesquisas realizadas com professores ou futuros professores e que, desse modo, não satisfizeram os critérios de seleção da Seção 4.2.

Considerando a forma sistemática de busca do levantamento das pesquisas que estudaram o PMA envolvendo licenciandos em Matemática (Seção 4.2), podemos passar a impressão de que esse levantamento possa ter sido priorizado. No entanto, consideramos as três seções deste capítulo igualmente importantes para esta tese. Reiteramos que o procedimento metodológico adotado na Seção 4.2 foi possibilitado principalmente devido à conveniência de “licenciatura” como palavra-chave. Nas outras seções tivemos maior dificuldade com palavras-chave e realizamos buscas menos sistemáticas, com menos resultados aproveitados em cada tentativa, além de seleções de trabalhos que conhecemos por diversos meios.

Resumimos, no Quadro 5, os métodos de busca, os critérios de seleção e recorte para obtenção do *corpus*, o foco que tivemos para analisar e selecionar os pontos a destacar das pesquisas e alguns resultados obtidos para cada um dos levantamentos realizados.

Quadro 5 – Síntese dos levantamentos

<table>
<tr><td>Seção</td><td>4.1</td><td colspan="2">4.2</td><td>4.3</td></tr>
<tr><td>Métodos de busca e seleção</td><td>Seleções menos sistemáticas, buscas variadas.</td><td colspan="2">Buscas e seleções sistemáticas, seguindo com rigor os procedimentos descritos em Inarejos e Savioli (2022).</td><td>Seleções menos sistemáticas, buscas variadas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Critérios de seleção e recorte</td><td rowspan="2">Pesquisas que estabeleceram relações teóricas do PMA com outros referenciais teóricos.</td><td colspan="2">Trabalhos que utilizaram o referencial teórico do PMA e envolveram estudantes de licenciatura em Matemática (ou questões referentes ao curso) ou de algum curso em nível de graduação voltado à formação de professores de Matemática.</td><td rowspan="2">Trabalhos que evidenciaram contribuições para professores de Matemática que vão além do aprendizado em Matemática Avançada.</td></tr>
<tr><td>Pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA para verificar indícios de pensamento matemático nas produções dos estudantes, a partir de 2017.</td><td>Pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA de outras formas, sem recorte de tempo.</td></tr>
<tr><td>Foco de análise</td><td>Destacamos como o PMA foi relacionado com os outros referenciais teóricos, tal como os conceitos relacionados.</td><td>Em Inarejos e Savioli (2022), foram interpretadas relações entre indícios de PMA e a aprendizagem em Matemática.</td><td>Buscamos entender como os autores utilizaram o referencial teórico do PMA e relações com conhecimentos para o ensino na Educação Básica.</td><td>Possíveis contribuições que encontramos nas pesquisas embasadas no PMA para a prática dos professores de Matemática na Educação Básica.</td></tr>
<tr><td>Alguns resultados</td><td>Destacamos algumas relações do PMA com outros referenciais teóricos, como relações com teorias didáticas que sugerem a reconstrução do conhecimento matemático pelo estudante e relações com os domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino, que utilizaremos no Capítulo 6. As pesquisas comentadas serviram de inspiração para organizarmos</td><td>Concepções interpretadas de que o PMA contribui para a aprendizagem de conceitos matemáticos, a aprendizagem de conceitos pode ser inferida pelo desenvolvimento do PMA, a finalidade de uma abordagem pode ser o desenvolvimento do PMA, a aprendizagem de conceitos e o desenvolvimento do PMA contribuem um para o outro e de que o referencial teórico do PMA</td><td>Os pesquisadores utilizaram o PMA principalmente para embasar a elaboração de propostas didáticas, justificar a pesquisa, discutir dificuldades dos estudantes e analisar materiais didáticos. O referencial teórico do PMA pode contribuir na elaboração de procedimentos de ensino que valorizam as ideias que desencadeiam os conceitos, além de ter potencial para justificar a importância das</td><td>O desenvolvimento do PMA pode contribuir para a autonomia dos professores, para seu aprendizado dos conceitos matemáticos e suas concepções, para aspectos como reflexão, criticidade, comunicação, interação, pensamento matemático flexível, saber relacionar conceitos elementares e avançados, e resolver uma situação duvidosa. O conhecimento explícito do</td></tr>
</table>

	nossas ideias para uma teorização a partir do PMA e das questões que envolvem saberes e conhecimentos para o ensino de Matemática.	pode auxiliar professores no diagnóstico de dificuldades ou no embasamento do processo de ensino-aprendizagem.	definições, argumentações, provas e relações entre as matemáticas estudadas na graduação e na escola.	referencial teórico do PMA pode contribuir para a criação e avaliação de situações propícias de aprendizagem.

Fonte: os autores.

No Quadro 5, procuramos enfatizar uma comparação entre a forma como selecionamos trabalhos e fizemos os recortes para o *corpus* de análise de cada seção. Para a Seção 4.2, em que separamos os trabalhos que foram analisados em Inarejos e Savioli (2022) e os analisados nesta tese, dividimos em duas colunas, pretendendo esclarecer as diferenças entre os critérios de recorte e os focos de análise. Os resultados descritos no Quadro 5 são um resumo do que consideramos que foi mais utilizado nas discussões seguintes desta tese.

A seguir, dissertamos a respeito da pesquisa teórica e especulativa, descrevendo procedimentos metodológicos adotados nesta tese, em especial na pesquisa deste tipo realizada no Capítulo 6, em que pretendemos elencar possíveis contribuições do PMA para o ensino de Matemática na Educação Básica.

5 A PESQUISA TEÓRICA E ESPECULATIVA

Esta tese é uma pesquisa de natureza qualitativa, conforme Bogdan e Biklen (1991). Os dados recolhidos são na forma de texto. Abordamos os dados com a ideia de que "[...] tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo" (BOGDAN, BIKLEN, 1991, p. 49).

Uma característica da pesquisa qualitativa em que prezamos nesta tese é o interesse "[...] mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (BOGDAN, BIKLEN, 1991, p. 49). Nosso objetivo é discutir e elencar, a partir de diferentes perspectivas de PMA, possíveis contribuições desse pensamento matemático e de seu referencial teórico para o ensino de Matemática na Educação Básica. Consideramos que essa discussão é interessante independente das potenciais contribuições que forem elencadas, se forem muitas ou poucas ou se concluirmos que algumas são inviáveis em determinado contexto. Além disso, não tivemos hipóteses construídas previamente. Valorizamos o processo de construir essa discussão, tal como as articulações realizadas entre os referenciais teóricos que utilizamos.

Com relação aos objetivos, esta pesquisa pode ser caracterizada como exploratória ou diagnóstica (FIORENTINI, LORENZATO, 2006), por buscar informações ou esclarecer uma temática pouco conhecida, que é a possibilidade de contribuições do PMA dos professores de Matemática (nas perspectivas que adotamos) para a sua prática de ensino. No Capítulo 4, apresentamos levantamentos que apontam que esse assunto ainda foi pouco investigado. Sendo assim, discutindo e elencando possíveis contribuições do PMA para o ensino de Matemática na Educação Básica, pretendemos iniciar investigações a respeito desse pensamento no trabalho dos professores.

Com relação ao processo de coleta de dados, esta pesquisa é bibliográfica (FIORENTINI, LORENZATO, 2006). A pesquisa bibliográfica está intrinsecamente relacionada aos dois primeiros objetivos específicos da tese: cotejar diferentes caracterizações do PMA para identificar e nomear algumas perspectivas desse pensamento matemático; além de interpretar, no levantamento, possíveis relações entre o PMA e o ensino de Matemática na Educação Básica, a partir das considerações de pesquisadores. Essas etapas da pesquisa forneceram ideias de potenciais contribuições do PMA (nas três perspectivas que adotamos) para o ensino de Matemática e de articulações entre o desenvolvimento do PMA e a aprendizagem em Matemática Avançada, bem como do PME e do PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, com a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica, contribuindo, assim, com o objetivo da tese e os demais objetivos específicos.

Com o objetivo de discutir e elencar, a partir de diferentes perspectivas de PMA, possíveis contribuições desse pensamento matemático e de seu referencial teórico para o ensino de Matemática na Educação Básica, promovemos uma pesquisa teórica e especulativa.

> [...] a pesquisa especulativa visa produzir afirmações teóricas a partir de outras afirmações teóricas. Ao contrário da pesquisa de campo, ela não trabalha a partir de dados empíricos; a escrita, o texto constitui, portanto, a fonte primária de suas declarações. Uma segunda observação nos permite especificar que esse tipo de pesquisa não consiste em uma demonstração realizada com base em um ‘real’ observável e mensurável; ela visa antes a mostrar, a encenar, a pesar os prós e os contras, a fazer escolhas e a apoiá-las com argumentação. (MARTINEAU; SIMARD; GAUTHIER, 2001, p. 4, tradução nossa, grifo dos autores).

Van der Maren (2004) afirma que a pesquisa especulativa, embora não trabalhe com dados empíricos, não pode começar do zero. Ela precisa de material, de outras declarações teóricas produzidas anteriormente. Assim, é necessária a constituição prévia do *corpus* de enunciados de base (VAN DER MAREN, 2004).

Essa primeira tarefa da pesquisa teórica e especulativa, de selecionar os enunciados teóricos a partir dos quais as reflexões serão construídas, foi realizada nos capítulos 2 e 3. Atentamo-nos aos critérios de validade propostos por Van der Maren (2004): modalidade no acesso às fontes (utilizamos fontes primárias, ou seja, textos originais dos teóricos do PMA[43], do Conhecimento Matemático para o Ensino[44] e referentes à Matemática Escolar e à Matemática Acadêmica[45]), integridade (buscamos extrair todas as informações do *corpus* relevantes para esta pesquisa, incluindo as que pudessem trazer dificuldades, contradições ou nuances, com o cuidado para não isolar uma frase de seu contexto),

[43] Resnick (1987), Tall e Vinner (1981), Sfard (1987, 1991), Tall (1995, 2002, 2004, 2008, 2013), Gray e Tall (1994, 2001), Dreyfus (2002) e Dubinsky (2002).
[44] Ball, Thames e Phelps (2008).
[45] Moreira (2012) e Moreira e David (2007).

atualidade (confrontamos as ideias do PMA desde quando inicialmente desenvolvidas até as discussões mais recentes; verificamos que as questões da Matemática Escolar postas por Moreira e David (2007) se mantêm no discurso de trabalhos atuais em Educação Matemática no Brasil) e autenticidade (novamente, a importância de se fazer referência direta às fontes primárias, com atenção ao ano e local da publicação para se considerar o contexto da escrita).

O *corpus* de enunciados de base de uma pesquisa teórica e especulativa pode ser único, intertextual ou contrastante. Trabalhamos com um *corpus* de pesquisa intertextual, por contar com enunciados oriundos de diferentes discursos. Identificamos as diferenças nas produções desses enunciados e construímos os enunciados por meio da interação de informações. “Consequentemente, a interpretação correta e matizada de um enunciado só será possível pelo exame concomitante das diferenças entre as formas dos enunciados e as diferenças entre os contextos” (VAN DER MAREN, 2004, p. 135, tradução nossa).

No Capítulo 2, poderíamos ter adotado um *corpus* contrastante, e enfatizar as diferenças nas caracterizações do PMA, das tensões. No entanto, optamos por uma perspectiva mais interativa, e buscamos construir uma concepção do PMA que viesse da convergência das caracterizações de vários autores agrupadas em perspectivas de PMA, de forma a aproveitar diferentes caracterizações e adequar-se ao nosso objetivo. No Capítulo 3, identificamos um fio condutor que nos permitiu reunir referenciais teóricos que apresentam exemplos de modo a defender uma utilidade do conhecimento de Matemática Avançada para professores da Educação Básica (BALL; BASS, 2009; JAKOBSEN *et al*., 2012; WASSERMAN, 2016; ZAZKIS; MAMOLO, 2011) com referenciais teóricos que apresentam exemplos que trazem objeções para esse conhecimento trabalhado na formação inicial (MOREIRA; DAVID, 2007): a parte da Matemática Avançada que é importante para os professores é a que estiver demonstrativamente relacionada ao trabalho de ensinar na escola (JAKOBSEN *et al.*, 2012). No Capítulo 6, cujo *corpus* se baseia nos capítulos 2 e 3, também pretendemos construir uma análise que se adeque aos enunciados dos autores da fundamentação teórica, identificando possíveis contrastes, mas não os tomando por base.

De acordo com Martineau, Simard e Gauthier (2001), a pesquisa teórica e especulativa é um trabalho intelectual e de hermenêutica, que consiste em três eixos fundamentais: interpretar, argumentar e contar. A hermenêutica é a arte de interpretar, necessária para evitar desentendimentos à medida que a distância geográfica, temporal ou cultural separa um texto de seu leitor (MARTINEAU, SIMARD, GAUTHIER, 2001).

> Pesquisadores que realizam pesquisas teóricas e especulativas são confrontados com os textos (livros, artigos, comunicações) de outros pesquisadores que se dirigiram ao mesmo assunto. Assim, antes mesmo de produzir seu próprio texto, os pesquisadores devem, portanto, interpretar esses textos anteriores, a fim de ter uma visão do campo investigado, para especificar sua questão de pesquisa e para formular um problema original. Essa permanência na literatura especializada é um exercício de interpretação, um trabalho de hermenêutica e análise conceitual. (MARTINEAU, SIMARD, GAUTHIER, 2001, p. 12, tradução nossa).

Segundo Martineau, Simard e Gauthier (2001, p. 16, tradução nossa), “a partir da análise conceitual, ele [o pesquisador] manterá em memória a necessidade de definir corretamente os conceitos”, algo que nos preocupamos na fundamentação teórica (capítulos 2 e 3) e precisamos corresponder na discussão do Capítulo 6.

Segundo Van der Maren (2004, p. 139, tradução nossa), “A análise conceitual visa identificar o significado e possibilidades de aplicação de um conceito ou noção, identificando constituintes do campo semântico desse conceito ou noção e suas interações com outros campos”. Nesse sentido, visamos identificar possibilidades do PMA, nas três perspectivas adotadas, com o ensino de Matemática na Educação Básica.

Assim, a análise conceitual forma uma base para a teorização, pois permite identificar a quais assuntos, situações ou sujeitos um conceito se aplica e os significados conduzidos por essas aplicações (VAN DER MAREN, 2004).

Martineau, Simard e Gauthier (2001) destacam que duas falsas doutrinas devem ser evitadas na análise conceitual: a definição operacional e a arbitrariedade linguística. A primeira considera que um conceito é o resultado de uma medição, o que significaria eliminar tudo o que é vago nele, mas não contribui para sua compreensão. A segunda considera que a definição de um termo é um simples resultado de uma convenção, o que ignora a riqueza da realidade que ele descreve (MARTINEAU, SIMARD, GAUTHIER, 2001). Nesta tese, os conceitos são mais caracterizados do que definidos, como nas caracterizações do PMA de acordo com cada perspectiva identificada. Com as caracterizações baseadas em diversos autores do referencial teórico, procuramos evitar tanto a rigidez da medição absolutamente precisa quanto da arbitrariedade de convenções. As caracterizações dos principais conceitos utilizados nesta tese foram resumidas no Quadro 3, ao final do Capítulo 3.

De acordo com Martineau, Simard e Gauthier (2001), o trabalho do pesquisador em uma pesquisa teórica e especulativa envolve um vaivém entre a coleta de dados e a análise do material, na maioria das vezes sem saber o que procura exatamente. Nesse processo, o problema e a metodologia são construídos ao longo da pesquisa.

Isso exige que o pesquisador 'resida' em seu campo, característica da pesquisa qualitativa (BOGDAN, BIKLEN, 1991), com a diferença que, segundo Martineau, Simard e Gauthier (2001), no caso da pesquisa teórica e especulativa, esse campo se trata da literatura especializada. Assim, o pesquisador se envolve com trabalhos que abordam o tema antes de ter uma ideia clara do que o preocupa, encontrando autores que lhe serão úteis e obtendo acesso a uma rede de textos.

Passamos por esse processo, buscando inicialmente construir uma tese que relacionasse o PMA com referenciais teóricos voltados a saberes para o ensino de Matemática, especialmente com relação à Matemática Escolar e à Matemática Acadêmica (MOREIRA; DAVID, 2007). Realizamos os levantamentos apresentados no Capítulo 4 e fomos refinando o problema e a metodologia enquanto analisávamos os textos e as ideias para a tese anotadas durante a sua construção.

> [...] o pesquisador 'teórico' é sua própria ferramenta metodológica. Além disso, seu trabalho é mais ou menos solitário. Ele não deve apenas extrair o significado oculto de um conjunto de textos tomados isoladamente, mas também encontrar a estrutura profunda que liga esses textos (mesmo que esta 'ligação' seja uma oposição). (MARTINEAU, SIMARD, GAUTHIER, 2001, p. 8, tradução nossa, grifo dos autores).

As ideias de possíveis relações entre os referenciais teóricos foram sendo anotadas em um diário. De acordo com Martineau, Simard e Gauthier (2001), o diário serve para que não se perca nenhuma informação e como uma ferramenta de objetificação, onde são escritas subjetividades, como impressões e sentimentos. À medida que nos aproximamos do objetivo de elencar possíveis contribuições do PMA para o ensino de Matemática na Educação Básica, as anotações no diário foram ficando mais coerentes com esse objetivo. Após reunir potenciais contribuições, começamos a organizá-las para construir uma discussão a respeito.

Na pesquisa teórica e especulativa, o eixo de argumentar envolve a retórica. Uma vez que não há uma demonstração para assuntos dessa matéria, o pesquisador em Ciências da Educação deve argumentar pela sua tese de forma a prever contra-argumentos que possam vir de seu público-alvo (MARTINEAU; SIMARD; GAUTHIER, 2001).

> Ao contrário da demonstração, o argumento visa a persuasão e convicção de seu público; ela é, portanto, concebível apenas em um determinado contexto social. Longe de acontecer de forma abstrata como a demonstração, o argumento deve se adaptar ao seu público. Se a demonstração fornece provas convincentes, o argumento oferece razões a favor ou contra uma tese particular. (MARTINEAU; SIMARD; GAUTHIER, 2001, p. 18, tradução nossa).

Trata-se, portanto, de se pesar os prós e os contras e construir uma argumentação retórica (que, no nosso caso, seja convincente perante a comunidade de pesquisadores em Educação Matemática e estudantes interessados na leitura desta tese). Os argumentos utilizados serão válidos em um contexto social específico, não sendo generalizáveis ou atemporais, o que está de acordo com o posicionamento epistemológico desta tese de natureza qualitativa.

No eixo de contar, destacamos ser necessário propor uma nova análise, com base na interpretação de textos anteriores e em um discurso coerente:

> [...] as pesquisas teóricas e especulativas são, por um lado, ocasião de um diálogo com uma determinada literatura e, por outro lado, o local de uma argumentação que visa convencer um público. No entanto, essas duas atividades só podem atingir seu objetivo dentro de um texto capaz de despertar e manter um interesse constante no leitor. Daí a importância de uma boa narrativa; e, portanto, da escrita. Além disso, tanto quanto a argumentação, a narrativa constitui um fator de coerência discursiva. Na verdade, uma das questões centrais da pesquisa teórica e especulativa reside em sua capacidade para produzir uma problemática inédita, para propor uma nova análise com base em interpretação de textos anteriores e argumentação rigorosa. (MARTINEAU; SIMARD; GAUTHIER, 2001, p. 20, tradução nossa).

Por fim, na pesquisa teórica e especulativa, a análise pode ser do tipo conceitual, crítica ou inferencial (VAN DER MAREN, 2004). Além da análise conceitual referente aos capítulos anteriores, realizamos, no Capítulo 6, uma análise inferencial, por se tratar do desenvolvimento ou extensão de uma teorização.

Segundo Van der Maren (2004, p. 148, tradução nossa), na análise inferencial "o desenvolvimento de uma nova teoria em um determinado domínio é obtido pela transferência de uma teoria de outro domínio como resultado da percepção de uma analogia entre domínios". Nesta tese, procuramos fazer uma ‘extensão’ do domínio de algumas teorias, no sentido de “adicionar alguns elementos teóricos que tornem possível aplicar a teoria a um domínio reestabelecido (ou aumentar o escopo, ou restringi-lo pela especificação de condições)” (VAN DER MAREN, 2004, p. 149, tradução nossa). Assim, pretendemos discutir se o PMA (em diferentes perspectivas), além de ter sua importância no trabalho de matemáticos e na aprendizagem em Matemática Avançada, também pode contribuir no ensino de Matemática na Educação Básica. Além disso, ao relacionarmos o PME e o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, com a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica, percebemos uma analogia entre domínios, que nos permite ter ideias de possíveis contribuições do PMA dos professores (nessa perspectiva) para o ensino com base em possíveis contribuições da Matemática Acadêmica, e vice-versa (Subseção 6.2.2).

Por se tratar de uma extensão externa, as inferências prosseguem principalmente por analogias, ou seja, por semelhanças e a possibilidade de expressar afirmações teóricas de um domínio em outro (VAN DER MAREN, 2004). Segundo Van der Maren (2004), uma vez formulada essa transferência hipotética, surge a questão de saber se a validade das afirmações de uma teoria se mantém ao serem formuladas em outra.

Seguimos as recomendações de Van der Maren (2004) para organizar as análises conceitual e inferencial, mas considerando os métodos empregados em uma pesquisa do tipo teórica e especulativa são dinâmicos e pouco restritivos. De fato, nossa perspectiva se alinha à de Martineau, Simard e Gauthier (2001, p. 6, tradução nossa), em que “[...] o problema é construído ao longo da pesquisa, ao mesmo tempo em que a metodologia é refinada”. Por isso, tomamos liberdade tanto para modificar questões a serem investigadas quanto para repensar o método de investigação durante a pesquisa.

No capítulo a seguir, apresentamos as discussões referentes a esta teorização.

6 POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo, discutimos e elencamos, a partir de diferentes perspectivas de PMA, possíveis contribuições desse pensamento matemático e de seu referencial teórico para o ensino de Matemática na Educação Básica, por meio de uma pesquisa teórica e especulativa, mais especificamente pelos eixos de argumentar e contar (MARTINEAU; SIMARD; GAUTHIER, 2001).

Escolhemos abordar tanto possíveis contribuições do PMA dos professores quanto do estudo do referencial teórico do PMA, porque as discussões e etapas de pesquisa que realizamos (especialmente no Capítulo 4) ajudaram a elencarmos contribuições referentes a ambos. Ainda que escolhêssemos um deles como foco, não havia como prevermos para qual encontraríamos relações entre o PMA e o ensino de Matemática na Educação Básica nas pesquisas do levantamento, que foram importantes para reunirmos ideias de potenciais contribuições do PMA para então argumentarmos a respeito neste capítulo.

Assim, na Seção 6.1, discutimos e elencamos possíveis contribuições do referencial teórico do PMA para os professores no ensino de Matemática na Educação Básica. Relacionamos essas contribuições com diferentes caracterizações do PMA presentes no referencial teórico, agrupando-as, ao final da seção, pelas perspectivas que nomeamos no Capítulo 2.

Na Seção 6.2, discutimos e elencamos, a partir de diferentes perspectivas de PMA, possíveis contribuições do PMA dos professores para o ensino de Matemática na Educação Básica e apresentamos exemplos de situações hipotéticas para algumas dessas potenciais contribuições.

Na Subseção 6.2.1, relacionamos o desenvolvimento do PMA com a aprendizagem em Matemática Avançada, nas três perspectivas de PMA adotadas.

Para discutirmos relações do PMA com a matemática da Educação Básica na perspectiva do pensamento formal-axiomático (algo que é mais imediato nas outras perspectivas), relacionamos (na Subseção 6.2.2) o PME e o PMA, nessa perspectiva, com a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica (MOREIRA; DAVID, 2007). Embora essa relação esteja focada em tal perspectiva de PMA, envolvemos, neste capítulo, as três perspectivas que identificamos no Capítulo 2, pretendendo discutir e elencar possíveis contribuições do PMA para o ensino de

Matemática na Educação Básica referentes às três. Em alguns trechos, pode parecer que focamos a discussão mais na perspectiva do pensamento formal-axiomático, porém, isso se deve ao fato de suas potenciais contribuições envolverem uma argumentação mais complicada, enquanto as perspectivas da complexidade dos processos de pensamento e das concepções dos conceitos estão mais diretamente relacionadas à aprendizagem matemática (e, portanto, ao ensino) na Educação Básica.

Em cada seção deste capítulo, organizamos os argumentos após categorizá-los com o auxílio do modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), inspirados na Análise de Conteúdo (BARDIN, 1977).

6.1 Possíveis Contribuições do Referencial Teórico do Pensamento Matemático Avançado

Um dos trabalhos que encontramos no levantamento, mas que não foi analisado em Inarejos e Savioli (2022) devido ao recorte de tempo, foi o de Amorim (2011). A autora avaliou a contribuição de uma proposta de ensino baseada em conceitos imagem, relacionada ao conceito de limite de uma função, para a aprendizagem de licenciandos após cursarem Análise Real.

Em suas considerações finais, Amorim (2011) destacou que o trabalho com o conceito imagem dos estudantes, realizado com uma turma de Análise, trouxe contribuições para o professor da disciplina, como "entender e situar o momento em que os alunos se deparam com o ensino de limites agora em Análise e avaliar a bagagem trazida do Cálculo", além de "perceber a importância de identificar eventuais imagens conceituais equivocadas que os alunos trazem, as quais podem gerar situações de conflitos" (AMORIM, 2011, p. 126).

Embora essas conclusões tenham sido proferidas quanto ao professor da disciplina de Análise Real, elementos de intuição e conceito imagem estão presentes na Matemática Elementar, o que nos permite considerar que tais contribuições poderiam ser aproveitadas por professores de Matemática da Educação Básica.

Outras conclusões da autora quanto a contribuições no trabalho de professores estão mais relacionadas ao Ensino Superior e não nos permitem essa mudança de contexto, como contribuições envolvendo o trabalho com definições formais.

No entanto, na Seção 4.3, comentamos que Domingos (2006), Machado e Bianchini (2013) e Prado (2016) consideram que o conhecimento explícito do referencial teórico do PMA, ao contribuir para reflexões dos professores da Educação Básica sobre o próprio saber matemático, pode contribuir para a criação e avaliação de situações propícias de aprendizagem, o que se relaciona ao Conhecimento do Conteúdo e Ensino.

De acordo com Machado e Bianchini (2013) e Bianchini e Machado (2015), a reflexão sobre o próprio saber proporcionada pelo estudo do referencial teórico do PMA possibilita aos professores de Matemática da Educação Básica criar e avaliar situações propícias para que seus alunos se mobilizem para a aprendizagem matemática. As autoras baseiam-se em Dreyfus (2002), com uma perspectiva de PMA dada pela complexidade dos processos de pensamento na nossa interpretação, e consideram que o estudo dos principais processos de PMA auxilia professores de Matemática a avaliar atividades que sejam propícias para o desenvolvimento desses processos.

Segundo Prado (2016), o estudo do referencial teórico do PMA pode contribuir para que os professores da Educação Básica compreendam os processos envolvidos na construção de uma noção matemática por um indivíduo, tal como as noções de Álgebra Linear que o autor abordou, permitindo a reflexão a respeito de ações para contribuir com a aprendizagem dos estudantes.

Desse modo, o referencial teórico do PMA (que embasa as três perspectivas de PMA que adotamos) pode auxiliar os professores da Educação Básica a refletirem sobre o próprio saber, entenderem os conhecimentos matemáticos que precisam ter domínio e diferenciá-los do que precisa ensinar, desenvolvendo seu Conhecimento do Conteúdo e Ensino. Nas caracterizações do PMA voltadas à perspectiva do pensamento formal-axiomático, o referencial teórico ajuda a esclarecer as diferenças na estruturação do conteúdo e na lógica de sua construção, como em Tall (1995, 2002). Quanto à perspectiva das concepções dos conceitos, o referencial teórico enfatiza diferentes concepções, como em Sfard (1991) e Dubisnky (2002). Enfim, nas caracterizações voltadas à perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, tal como em Dreyfus (2002) e Resnick (1987), o referencial teórico enfatiza os processos de pensamento matemático envolvidos e como eles auxiliam professores na reflexão do próprio saber.

Ainda com relação à reflexão dos professores sobre o próprio saber, Tirosh, Tsamir e Levenson (2011), conforme abordamos na Seção 4.3, propõem um modelo que articula quatro domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) com o conceito imagem e o conceito definição (TALL; VINNER, 1981) e, segundo os autores, auxilia os professores do jardim de infância a focarem no conhecimento que estão construindo e sua utilização no ensino. Com o estudo do referencial teórico, os professores participantes desenvolveram seu Conhecimento Especializado do Conteúdo e Conhecimento do Conteúdo e Ensino (TIROSH; TSAMIR; LEVERSON, 2011).

Seguindo a ideia de Tirosh, Tsamir e Levenson (2011), o modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) de Ball, Thames e Phelps (2008) possui seis domínios de conhecimento que possivelmente estão relacionados a cada conceito matemático. Uma vez que um conceito pode ser desmembrado conforme alguma decomposição genética (especialmente proceitos em Aritmética e Álgebra[46]), podemos tentar detalhar conhecimentos relacionados a cada domínio do MKT para cada etapa de uma decomposição genética de um dado conceito matemático. Não é algo que pretendemos explorar a fundo nesta tese, mas é possível comentarmos um exemplo com um conceito específico, nos limitando a alguns domínios do MKT e a uma decomposição genética.

Tomemos, como exemplo, o conceito de função, as concepções operacional e estrutural de Sfard (1991) e três domínios do MKT: Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), Conhecimento do Conteúdo e Estudantes (KCS) e Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT). Na concepção operacional, o CCK incluir saber relacionar duas grandezas, calcular valores de uma função, determinar pares ordenados e desenhar gráficos. Nessa mesma concepção, o KCS possivelmente inclui o conhecimento de que os estudantes podem ter dificuldade em identificar as grandezas e qual variável é a dependente, qual é a independente. O KCS também inclui o conhecimento de exemplos relacionados ao cotidiano dos estudantes[47]. O KCS pode contribuir com o KCT, que inclui o conhecimento de

---

[46] Conforme Tall (1995, 1999, 2004, 2008, 2013).

[47] Lecionando no sexto ano do Ensino Fundamental, certa vez cometi a gafe de utilizar o troco, em relação a uma quantidade de pães comprados, como um exemplo que pensei ser familiar aos estudantes. Não me atentei que as crianças da turma não estavam acostumadas a irem à padaria com dinheiro a pedido dos pais, como era comum na minha infância. Percebi que pontuação e dano em jogos eletrônicos eram exemplos mais familiares aos estudantes daquela turma.

exemplos cujo contexto seja familiar aos estudantes e permitem explorar os conceitos. Já na concepção estrutural, o CCK inclui ver a função como um objeto que relaciona duas grandezas, saber que relações são ou não uma função, enxergar o gráfico como um conjunto de pares ordenados, uma fórmula como uma relação estabelecida entre as variáveis e não somente um comando de cálculo, bem como relacionar diferentes representações. Nessa concepção, o KCS pode incluir o conhecimento de que os estudantes talvez tenham dificuldade em alternar entre as diferentes representações e observar de forma mais rápida propriedades como domínio, imagem, injetividade e sobrejetividade, e que pode ser comum esquecerem-se de verificar se para cada elemento da variável independente existe um único elemento da variável dependente relacionado. O KCT, na concepção estrutural, pode incluir problemas ou exemplos que envolvem diferentes representações para uma mesma função, para tentar evidenciar a estrutura e o que se pode interpretar em cada representação. Ainda, pode incluir a estratégia de solicitar que verifiquem se em cada representação pode-se observar que cada elemento do domínio corresponde a um único elemento da imagem.

Essa decomposição dos conhecimentos voltados a um conteúdo específico pode ser útil para os professores da Educação Básica organizarem seus conhecimentos, como Tirosh, Tsamir e Levenson (2011) exemplificam com o KCT sendo construído a partir da consciência que os professores têm da cisão entre conceito imagem e conceito definição e do conhecimento que possuem dos estudantes (KCS). Essa seria uma forma de se apoiar no referencial teórico do PMA, especialmente voltado à perspectiva das concepções dos conceitos (DUBINSKY, 2002; GRAY; TALL, 1994; SFARD, 1987, 1991; TALL; VINNER, 1981), para a reflexão dos professores sobre o próprio saber. Porém, tal decomposição envolve muito estudo de referenciais teóricos, o que prejudica sua viabilidade.

Com relação ao Conhecimento Especializado do Conteúdo, o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte e o Conhecimento do Conteúdo e Ensino, o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, envolve trabalhos com definições e provas na Matemática Acadêmica. Na Matemática Escolar[48], as descrições e justificativas podem ser diferentes.

Um exemplo de provas e justificativas diferentes ocorre com as

[48] Conforme abordamos no final do Capítulo 3, entendemos, nesta tese, a Matemática Escolar como o conjunto de saberes associados à prática docente escolar.

regras de sinal, que podem ser provadas, na Matemática Acadêmica, com base nas propriedades dos conjuntos numéricos, e justificadas, na Educação Básica, com base em desenhos, padrões, interpretações contextualizadas da multiplicação, ou outros recursos, conforme aborda Tall (2013). Esse é um exemplo em que é difícil associar a Matemática Acadêmica com a Matemática Escolar.

Outro exemplo é que na Matemática Acadêmica há uma cópia de $\mathbb{Z}$ contida em $\mathbb{Q}$ e, na Matemática Escolar, entende-se que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Nesse último caso, é possível aproveitar de uma noção da Matemática Acadêmica para uma explicação da inclusão no ensino de Matemática na Educação Básica, identificando o conjunto das frações $\frac{a}{1}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ como o próprio conjunto $\mathbb{Z}$. Mas isso exige cuidado, pois a Matemática Escolar não está sob uma 'vigilância epistemológica' da Matemática Acadêmica (MOREIRA; DAVID, 2007). Formalmente, o conjunto dos números racionais é definido como um conjunto de classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros. Nesse conjunto, existem as classes de equivalência da forma $\overline{(a, 1)}$, que formam um subconjunto de $\mathbb{Q}$ com a mesma estrutura de $\mathbb{Z}$. Na Educação Básica, a classe de equivalência pode ser desconsiderada, e o conjunto $\mathbb{Q}$ ser definido como frações de inteiros $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, no qual $\frac{a}{1} = a \in \mathbb{Z}$. Assim, é possível aproveitar ideias de justificativas da Matemática Acadêmica sem, no entanto, exigir que sua abordagem formal rigorosa seja transposta à Matemática Escolar.

É possível que o conhecimento de referenciais teóricos[49] que ajudam a identificar diferenças no modo como a Matemática é construída na Educação Básica e na Matemática Acadêmica possa contribuir para decisões dos professores em situações como essas, ao favorecer o entendimento das diferentes formas de justificativas matemáticas e da lógica interna de cada uma.

Assim, conhecer explicitamente o referencial teórico do PMA, especialmente nas caracterizações voltadas à perspectiva do pensamento formal-axiomático (TALL, 1995, 2002, 2004, 2008, 2013), pode auxiliar professores a compreenderem essas diferenças e saberem até que ponto seu conhecimento de Matemática Avançada pode ser utilizado, explicitamente ou implicitamente, na Matemática Escolar. Desse modo, o Conhecimento Especializado do Conteúdo e até mesmo o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte que os professores possuem

[49] Tal como Tall (1995, 2002, 2008, 2013) e Moreira e David (2007).

pode ser articulado e utilizado em suas decisões no ensino, contribuindo, assim, para o seu Conhecimento do Conteúdo e Ensino.

Inarejos e Savioli (2022) interpretaram concepções de pesquisadores de que a aprendizagem de conceitos pode ser inferida pelo desenvolvimento do PMA (FONSECA; HENRIQUES, 2018, 2020; JESUS; SAVIOLI, 2019; JORGE, 2017; MENEZES, 2018; TEÓFILO; LIMA; MENEZES, 2020) e o PMA permite o diagnóstico de dificuldades dos estudantes (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017a, 2017b; JESUS; SAVIOLI, 2019; JORGE, 2017; VIDOTTI; KATO, 2018). Na Seção 4.2, analisando pesquisas que não verificaram indícios de PMA na produção de estudantes, encontramos algumas pesquisas que utilizaram do referencial teórico para discutir dificuldades (BRITO, 2010; BRITO; REIS, 2011; FRANCO; SOARES, 2013). Esses trabalhos se desenvolveram na licenciatura em Matemática, envolvendo avaliações no Ensino Superior, e em alguns casos suas considerações não podem ser aproveitadas na Educação Básica. Por exemplo, as considerações de Franco e Soares (2013), que comentamos na Seção 4.2, dizem respeito ao conceito imagem desenvolvido no trabalho com a definição formal, algo que está além da matemática da Educação Básica.

Contudo, considerando as perspectivas da complexidade dos processos de pensamento e das concepções dos conceitos, podemos afirmar que o referencial teórico do PMA pode ser utilizado por professores para diagnosticar dificuldades dos estudantes ou inferir aprendizagem com base em indícios de PMA, pois, nessas perspectivas, o PMA pode ocorrer na Educação Básica, e assim os indícios de PMA podem ser analisados como nas pesquisas mencionadas.

Essa ideia é respaldada por Dreyfus (2002), que afirma que a discussão dos processos de pensamento matemático pode auxiliar os professores a se tornarem mais conscientes do que está acontecendo durante esses processos. “Esperamos que isso ajude os professores a introduzir tal ação explicitamente em suas salas de aula” (DREYFUS, 2002, p. 25, tradução nossa).

Machado e Bianchini (2013) baseiam-se em Dreyfus (2002), e consideram que a consciência dos processos de PMA pode contribuir para os professores compreenderem as dificuldades que seus estudantes enfrentam, tanto dificuldades inerentes aos conceitos e ideias que pretendem desenvolver, quanto pela falta de hábito com o desenvolvimento dos processos requeridos em sua construção (BIANCHINI; MACHADO, 2015).

Além disso, segundo Bianchini e Machado (2015), a reflexão sobre o próprio saber embasada no estudo dos processos de PMA propicia aos professores anteciparem o que os estudantes podem apresentar de dificuldade, o que se relaciona, conforme Ball, Thames e Phelps (2008), ao Conhecimento do Conteúdo e Estudantes.

Desse modo, nas caracterizações do PMA referentes à perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o referencial teórico do PMA (DREYFUS, 2002) pode contribuir para que os professores da Educação Básica avaliem, de acordo com os processos de PMA, o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e suas dificuldades para desenvolver esses processos, contribuindo para o seu Conhecimento do Conteúdo e Estudantes.

Do mesmo modo, as concepções dos conceitos, decompostas, por exemplo, de acordo com a Teoria APOS (DUBINSKY, 2002), favorecem a análise do entendimento dos estudantes. Assim, na perspectiva das concepções dos conceitos, o estudo do referencial teórico do PMA pode contribuir para que os professores da Educação Básica interpretem as concepções dos estudantes e avaliem sua aprendizagem, contribuindo, assim, para o Conhecimento do Conteúdo e Estudantes por meio de um Conhecimento Especializado do Conteúdo: as decomposições genéticas dos conceitos.

Embora tenhamos foco, nesta seção, em contribuições do referencial teórico do PMA, cabe observar que essa possível contribuição para professores interpretarem dificuldades e concepções de seus alunos e avaliarem a aprendizagem pelos processos desenvolvidos requer não apenas o conhecimento do referencial teórico, como também o domínio dos processos envolvidos, ou seja, requer um desenvolvimento do PMA nas perspectivas da complexidade dos processos de pensamento e das concepções dos conceitos.

Na perspectiva do pensamento formal-axiomático, não é esperado que os estudantes da Educação Básica manifestem indícios de PMA (um pensamento voltado à Matemática Acadêmica), não sendo possível uma avaliação com base nesses indícios. Porém, tanto nessa perspectiva quanto nas outras, o referencial teórico contribui para o entendimento do Pensamento Matemático Elementar (PME).

Por exemplo, Tall (1995, 2004, 2008, 2013) descreve o crescimento cognitivo por meio de formas corporificadas e simbólicas, que ocorre desde crianças pequenas. Além de possibilitar a professores entenderem o pensamento matemático das crianças, o conhecimento dessas formas de crescimento cognitivo pode auxiliar o planejamento de atividades com vistas a favorecer o desenvolvimento desse pensamento, contribuindo para o Conhecimento do Conteúdo e Ensino dos professores. Ainda, o Conhecimento do Conteúdo e Currículo pode ser mobilizado para que os professores situem o momento adequado em que ocorre cada etapa desse desenvolvimento.

Similarmente, os processos de pensamento matemático a serem desenvolvidos para o aprendizado de cada conteúdo possibilitam aos professores tanto entenderem o pensamento matemático dos estudantes quanto planejarem atividades que visam o desenvolvimento desses processos[50]. Dessa forma, o conhecimento do referencial teórico do PMA, no que se refere a caracterizações voltadas à perspectiva da complexidade dos processos de pensamento (DREYFUS, 2002), pode contribuir para o Conhecimento do Conteúdo e Estudantes e o Conhecimento do Conteúdo e Ensino dos professores de Matemática da Educação Básica.

Com relação a essa possibilidade, Inarejos e Savioli (2022) interpretaram uma concepção de que o referencial teórico do PMA pode auxiliar os professores no diagnóstico de dificuldades ou no embasamento do processo de ensino-aprendizagem, de acordo com Broetto e Santos-Wagner (2017a, 2017b), Jorge (2017), Fontenele (2018), Menezes, (2018), Vidotti e Kato (2018), Jesus e Savioli (2019), Lopes (2019), Rodrigues (2019), Amorim *et al.* (2020), Flôres, Fonseca e Bisognin (2020) e Mateus-Nieves e Jimenez (2020). Ainda, na Seção 4.2, observamos que essas considerações quanto ao processo de ensino-aprendizagem convergem com considerações de Brunet, Leivas e Leyser (2009), Brito (2010), Miranda (2010), Brito e Reis (2011), Elias, Barbosa e Savioli (2011), Santos e Domingos, (2011), Franco e Soares (2013), Prado (2016), Lopes e Lopes, (2017), Lopes, L. M. L. (2017) e Trindade e Soares (2017). Além disso, na Seção 4.1, resumimos uma ideia de Schastai (2017), que se baseia em Tall (2013) para fundamentar a aprendizagem com significado referente à ideia de construção/reelaboração do conhecimento matemático pelo estudante.

Sendo assim, as pesquisas apontam a necessidade de os

[50] Consideramos, conforme Fontenele (2018, p. 138), que "[...] é possível estimar os principais processos que deverão ser mobilizados para que haja uma compreensão do conteúdo".

professores saberem que o estudante precisa desenvolver ativamente os processos de pensamento matemático. Essa necessidade respalda algumas metodologias. Por exemplo, Fontenele (2018), Menezes (2018) e Teófilo, Lima e Menezes (2020) utilizaram o referencial teórico do PMA para embasar a metodologia da Sequência Fedathi, enquanto Bussmann, Klaiber e Silva (2017) o relacionam com o Ensino Aprendizagem Exploratório, bem como Bisognin e Bisognin (2013) utilizaram esse referencial teórico para respaldar o ensino com a Resolução de Problemas.

Desse modo, nas três perspectivas de PMA adotadas nesta tese, o conhecimento do referencial teórico do PMA pode contribuir para o Conhecimento do Conteúdo e Ensino dos professores da Educação Básica, ao saberem que o estudante precisa desenvolver ativamente os processos de pensamento matemático e possibilidades para esse desenvolvimento, como o conhecimento dos processos vinculados ao aprendizado de cada conteúdo.

Na perspectiva das concepções dos conceitos, o referencial teórico do PMA indica caminhos para suas construções, tais como a interiorização, condensação e reificação (SFARD, 1991), bem como a compressão mental que ocorre dos procedimentos aos proceitos pensáveis (GRAY; TALL, 1994). Assim, o referencial teórico do PMA pode contribuir para o Conhecimento do Conteúdo e Ensino dos professores da Educação Básica, ao conhecerem caminhos para a construção dos conceitos, envolvendo um Conhecimento Especializado do Conteúdo dado pelas suas concepções.

Por exemplo, o conceito de função pode ser definido como uma relação, ou seja, um conjunto de pares ordenados, subconjunto de um produto cartesiano. Essa definição, bem como o gráfico, que pode ser definido pelo mesmo conjunto e representado geometricamente, acompanham uma concepção estrutural de função que não é facilmente abordada na Educação Básica.

Conforme expressa uma estudante entrevistada por Domingos (2003, p. 131): “eu não sei em concreto o que é uma função. Não se pode dizer que é um gráfico pois não? É um… Onde há pontos do domínio, onde há pontos que têm imagens”. Outro estudante entrevistado por Domingos (2003, p. 135) afirmou que “uma função é uma expressão. Uma expressão constituída por constantes e variáveis e que vai ser modificada através dessas variáveis. Aaa… que podem tornar a função… Aaa… já ia falar em gráficos. (…) Pode ter uma representação gráfica, pode ter uma representação analítica…”.

Esses são exemplos em que o conteúdo é entendido de forma isolada pelo estudante, sem entender as relações entre setas no diagrama de Venn-Euler, gráficos e expressões algébricas. Assim, para que seja desenvolvida uma concepção estrutural de função, consideramos importante relacionar as representações de funções que favorecem essa concepção. Por exemplo, as setas no diagrama de Venn-Euler que representam uma função passam uma ideia dessa concepção de que a função é um conjunto de "ligações" entre dois conjuntos. O trabalho dessa noção de função relacionada à construção do gráfico, que representa cada seta como um par ordenado no plano cartesiano, pode contribuir para que os estudantes da Educação Básica interiorizem esses processos e condensem as relações entre eles, para que consigam reificar o conceito de função.

Amorim (2011) fez alguns apontamentos que cabem à nossa discussão. Nas contribuições destacadas pela autora para o professor de Análise Real no trabalho com conceito imagem, "A pesquisa mostrou a necessidade de uma (re)construção das imagens conceituais dos alunos, tornando-as coerentes, a partir de elementos intuitivos significativos, especialmente aqueles presentes nos aspectos gráficos" (AMORIM, 2011, p. 127). Assim, a proposta baseada em conceitos imagem (TALL, VINNER, 1981) mostrou a importância de o professor explorar elementos intuitivos para a construção de um conceito imagem coerente para os estudantes. Embora tenha se realizado no Ensino Superior, o trabalho de Amorim (2011) destaca algumas possíveis vantagens de os professores conhecerem alguns conceitos do referencial teórico do PMA para o seu Conhecimento do Conteúdo e Ensino.

De acordo com Jesus (2016), é importante que os professores conheçam decomposições genéticas para os conceitos matemáticos, pois isso os auxilia a planejar o ensino para que superem suas dificuldades e aprendam, contribuindo, assim, para o Conhecimento do Conteúdo e Ensino dos professores.

> A decomposição genética pode e deve ser usada de maneira que forneça estratégias pedagógicas que levem os estudantes a fazerem as construções necessárias e usá-las na resolução de problemas diversos. Os professores e os futuros professores podem refletir sobre o modo como seus alunos constroem o conceito, ou construir suas próprias decomposições genéticas. (JESUS, 2016, p. 125).

Entendemos que conhecer uma decomposição genética de um conteúdo específico é um Conhecimento Especializado do Conteúdo, pois é um conhecimento específico de professores quanto ao conteúdo matemático. O referencial teórico do PMA pode contribuir com esse conhecimento, nas caracterizações mais voltadas à perspectiva das concepções dos conceitos (DUBINSKY, 2002; GRAY; TALL, 1994; SFARD, 1987, 1991; TALL; VINNER, 1981). O conhecimento das decomposições genéticas, como a Teoria APOS (DUBINSKY, 2002), pode ser aliado ao Conhecimento do Conteúdo e Currículo para que os professores da Educação Básica situem, na série em que lecionam, as etapas da construção do conceito que lhe cabem, o que também é importante para seu Conhecimento do Conteúdo e Ensino.

Na Figura 6, elencamos as possíveis contribuições do referencial teórico do PMA para o ensino de Matemática que foram discutidas nesta seção. Entre parênteses, inserimos as siglas dos domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) vinculados às respectivas possíveis contribuições:

Figura 6 – Possíveis contribuições do referencial teórico do PMA para os professores no ensino de Matemática na Educação Básica

- entender os conhecimentos matemáticos que precisa dominar (SCK, HCK) e a diferença para o que precisa ensinar (CCK, KCT);
- saber lidar com definições e provas e sua diferença na Matemática Elementar e na Avançada (SCK, HCK, KCT);
- ter conhecimento de como o PME se desenvolve, com formas corporificadas e simbólicas (SCK, KCT, KCC);
- saber que os estudantes precisam desenvolver ativamente os processos de pensamento matemático (KCT).

Referentes a caracterizações voltadas à perspectiva do pensamento formal-axiomático

Referentes a caracterizações voltadas à perspectiva das concepções dos conceitos

- refletir sobre o próprio saber e entender os conhecimentos matemáticos que precisa dominar (CCK, SCK) e a diferença das concepções que precisa ter para as que precisa ensinar (KCT);
- interpretar as concepções dos estudantes (KCS) e avaliar a aprendizagem pelas concepções (SCK);
- saber que os estudantes precisam desenvolver ativamente os processos de pensamento matemático (KCT);
- conhecer caminhos para o desenvolvimento do conceito, dos procedimentos aos proceitos pensáveis (SCK, KCT);
- conhecer uma decomposição genética do conceito (SCK, KCT) e sua disposição no currículo (KCC).

- refletir sobre o próprio saber e entender os conhecimentos matemáticos que precisa dominar (CCK, SCK) e diferenciar do que precisa ensinar (KCT);
- interpretar as dificuldades dos estudantes (KCS) e avaliar a aprendizagem pelos processos desenvolvidos (SCK);
- saber os processos de pensamento que precisam ser desenvolvidos em cada conteúdo (SCK, KCT);
- saber que os estudantes precisam desenvolver ativamente os processos de pensamento matemático (KCT).

Referentes a caracterizações voltadas à perspectiva da complexidade dos processos de pensamento

Fonte: os autores.

Na Figura 6, agrupamos as possíveis contribuições do PMA discutidas nesta seção de acordo com os referenciais teóricos que caracterizam o PMA nas três perspectivas que adotamos.

As similaridades entre algumas possíveis contribuições referentes a cada perspectiva de PMA foram o motivo pelo qual não separamos o texto por perspectiva, mas por contribuições do referencial teórico do PMA organizadas com base no MKT (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Assim, na Figura 6, elencamos possíveis contribuições do referencial teórico do PMA separadamente referentes a caracterizações mais voltadas a cada perspectiva para especificar a qual ou quais delas se referem essas potenciais contribuições.

Como identidade, podemos notar, na Figura 6, a possível contribuição quanto a professores saberem que os estudantes precisam desenvolver ativamente os processos de pensamento, consequência das caracterizações do PMA dadas pelos referenciais teóricos que embasam as três perspectivas de PMA que identificamos no Capítulo 2.

Ainda na Figura 6, podemos notar como similar o entendimento dos professores da Educação Básica a respeito do que precisam dominar e do que ensinar, que, com foco no referencial teórico que embasa a perspectiva da complexidade dos processos de pensamento (DREYFUS, 2002; RESNICK, 1987), está relacionado à reflexão sobre o próprio saber e, no referencial teórico que embasa a perspectiva das concepções dos conceitos, envolve diferentes formas de conceber um conteúdo, como em Dubinsky (2002), Gray e Tall (1994) e Sfard (1987, 1991). Outra similaridade é quanto à interpretação das dificuldades dos estudantes, que de acordo com a perspectiva de PMA pode estar mais relacionada aos processos desenvolvidos ou às concepções manifestadas.

Na seção seguinte, focamos no PMA dos professores da Educação Básica.

6.2 Possíveis Contribuições do Pensamento Matemático Avançado dos Professores

Nesta seção, abordamos possíveis contribuições do desenvolvimento do PMA dos professores para o ensino de Matemática na Educação Básica. Apresentamos exemplos de situações hipotéticas em que o PMA pode contribuir para a prática docente. Algumas questões relacionadas a esses exemplos foram discutidas e resolvidas por estudantes de um curso de licenciatura em Matemática em minhas aulas[51], e aproveitamos algumas dessas resoluções como inspiração para discutir encaminhamentos que possivelmente seriam dados a essas situações hipotéticas.

Primeiramente, façamos alguns apontamentos com relação ao Conhecimento Comum do Conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Em um desses dias em que eu estava escrevendo este texto, um aluno meu, licenciando em Matemática, veio-me com uma pergunta após a aula, que dizia ele não ser de Matemática, mas que estava o incomodando. Queria saber como faria para atuar como professor, tendo defasagem em assuntos de Matemática Elementar. Ele disse estar preocupado em não saber o conteúdo que teria que ensinar. Estávamos estudando trigonometria, e eu respondi que muitos dos assuntos ele poderá aprender durante o curso, como o que estávamos estudando. Ele insistiu em indagar-me para o caso de não estudar algum assunto que terá que ensinar. Eu gostaria de poder dizer que ele estudaria todos os assuntos de Matemática da Educação Básica, mas percebi que essa resposta não seria convincente. Lembrei-me de alguns assuntos que tive que estudar para ensinar, pois não havia estudado antes ou não me recordava. Um deles era a redução ao primeiro quadrante, que iríamos abordar nas próximas aulas. Então o tranquilizei dizendo que não saber um assunto ou outro pode não ser um problema se você conseguir aprendê-lo com facilidade ao preparar a aula e que eu mesmo já passei por isso muitas vezes. Ele pareceu mais confiante de que o curso o ajudaria a aprender muitos assuntos e

[51] No Apêndice A, apresentamos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido assinado pelos licenciandos participantes da pesquisa. Cumprindo com o estabelecido no termo, não divulgaremos qualquer informação que permita identificá-los.

desenvolver essa facilidade em aprender conteúdos matemáticos que não foram estudados, resolvendo sua preocupação, e com isso encerramos a conversa. Mas esse episódio me deixou com algumas inquietações.

Ainda que o currículo da licenciatura não seja o foco desta tese, consideramos, conforme Moreira e David (2007), que a formação inicial dos professores de Matemática deve considerar os conhecimentos necessários para a prática docente escolar. Por outro lado, sem qualquer intenção de propor que o desenvolvimento de habilidades para própria aprendizagem substitua a abordagem direta de assuntos de Matemática Elementar no tempo limitado da licenciatura em Matemática, cabe refletirmos a respeito de o que poderia influenciar nessa facilidade para aprender conteúdos matemáticos. Sendo assim, essa reflexão não se trata da propositura de uma “solução” para o preenchimento de lacunas no contexto do currículo da licenciatura em Matemática, mas de uma discussão quanto a algo que pode contribuir para os professores de Matemática, conforme nossos objetivos.

Focando em possíveis contribuições do PMA, percebemos algumas características desse pensamento relacionadas a essa habilidade. Por exemplo, a autonomia e autorregulação (RESNICK, 1987) podem contribuir para que os professores tenham mais facilidade em aprender sozinhos. Na perspectiva do pensamento formal-axiomático, a facilidade com deduções pode contribuir para organizar as ideias matemáticas e entendê-las. Na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, a habilidade de desenvolver processos matemáticos complexos pode contribuir para que esses processos sejam desenvolvidos na aprendizagem de novos conceitos.

Na perspectiva das concepções dos conceitos, em contrapartida, a construção dos esquemas está relacionada aos conceitos específicos e, nesse caso, não podemos considerar que o PMA está bem desenvolvido para um conceito que não foi aprendido e, reciprocamente, um esquema do conceito, conforme Dubisnky (2002), ou um pensamento proceitual flexível, conforme Gray e Tall (1994), significa que tal conceito foi estudado. No entanto, professores possuírem esquemas em que o novo esquema pode se assimilar evita a necessidade de uma nova acomodação para aprender um conceito. No exemplo de redução ao primeiro quadrante, esquemas para o ciclo trigonométrico e funções periódicas facilitaram minha assimilação de um esquema para o entendimento das fórmulas de redução.

Reiteramos que consideramos que o Conhecimento Comum do

Conteúdo é indispensável aos professores, conforme Ball, Thames e Phelps (2008). Sendo assim, o ideal seria que os professores da Educação Básica tivessem estudado todos os conteúdos que ensinam, de forma que a preocupação do licenciando mencionada nem faria sentido. No entanto, mesmo nessa situação ideal, temos que considerar as limitações de nossa memória humana. Não podemos descartar a possibilidade dos professores precisarem, por vezes, relembrar um assunto ao preparar uma aula. Conforme Domingos (2003, p. 20):

> Quando o conhecimento está altamente estruturado o novo conhecimento pode ser relacionado e incorporado nas redes de conhecimento já existente. O conhecimento estruturado é menos susceptível de ser esquecido e proporciona vários caminhos para a sua recuperação, enquanto que peças de informação isoladas são mais difíceis de lembrar.

Nesse caso, o PMA, nas três perspectivas que adotamos nessa discussão, pode contribuir para o preenchimento de lacunas no Conhecimento Comum do Conteúdo.

Ainda, nas perspectivas da complexidade dos processos de pensamento e das concepções dos conceitos, o desenvolvimento do PMA está relacionado ao aprendizado em Matemática na Educação Básica. Nesse sentido, o PMA pode contribuir para que os professores auxiliem os estudantes a desenvolverem esse pensamento.

Quanto à perspectiva das concepções dos conceitos, Amorim *et al*. (2020) consideram necessário que os professores desenvolvam seu conceito imagem relativo a argumentações e provas:

> [...] entendemos que uma imagem conceitual rica dos licenciandos, relativa a provas, resultante possivelmente de experiências vivenciadas ao longo de sua formação inicial e, talvez, como estudantes da educação básica, seria condição necessária para proporcionar aos seus futuros alunos a oportunidade de construção de uma imagem conceitual igualmente rica sobre esse tema. (AMORIM *et al.*, 2020, p. 390).

Para que os futuros professores desenvolvam esse conceito imagem relativo a provas, Amorim *et al*. (2020) consideram que um caminho favorável seria um que envolvesse experimentações para testar conjecturas, verificação empírica, tentativa e erro. Dessa forma, os autores consideram que os professores precisam vivenciar a atividade matemática de validação de seus resultados para que possam proporcionar essa construção a seus alunos, considerando que essa experiência faz parte da Educação Básica.

Do mesmo modo, de acordo com Reis (2001), como comentamos na Seção 4.1, os professores precisam desenvolver uma interação dinâmica entre os elementos na prática em sala de aula, para propiciar essa interação aos estudantes. Segundo o autor, o conhecimento procedimental deve estar fundamentado no conhecimento conceitual para que os estudantes entendam como as regras funcionam.

Na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, os professores precisam dominar os processos de pensamento matemático que pretendem que os estudantes desenvolvam. Conforme mencionamos na Seção 4.2, Proença (2019) considera a generalização de padrões algébricos como conhecimento do assunto (SHULMAN, 1986). Na Seção 6.1, consideramos que o conhecimento do referencial teórico do PMA pode contribuir para que os professores da Educação Básica conheçam os processos de pensamento matemático a serem desenvolvidos para o aprendizado de cada conteúdo, conforme Fontenele (2018), para entender o pensamento matemático dos estudantes e planejar atividades que visem o desenvolvimento desses processos. Contudo, mesmo sem conhecer explicitamente o referencial teórico e saber classificar tais processos, é necessário que os professores os dominem ao esperarem que os estudantes os desenvolvam, o que requer um PMA na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento.

A esse domínio está relacionada uma autonomia na atividade matemática, ou seja, os professores serem capazes de falar, argumentar, discutir e escreverem resultados matemáticos, conforme Bisognin e Bisognin (2013) apontam que a Resolução de Problemas de sua pesquisa ajudou a desenvolver essas capacidades.

Vieira, Souza e Imafuku (2020, p. 7) consideram:

> [...] ser essencial que exista uma interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais para que um sujeito possa se apropriar de conceitos e técnicas e resolver problemas com autonomia. Além disso, a disciplina Análise deveria retomar o estudo de sequências numéricas[52] para possibilitar o desenvolvimento de processos como generalização e síntese, essenciais para a formação de professores de Matemática.

Os processos de generalização e síntese (DREYFUS, 2002) são

[52] Sequências e Séries é uma disciplina à parte de Introdução à Análise Real no curso em que os autores desenvolveram a pesquisa (VIEIRA; SOUZA; IMAFUKU, 2020).

importantes para a composição de conhecimentos inicialmente fragmentados, tal como a interação entre aspectos dos conceitos mencionada por Vieira, Souza e Imafuku (2020), podendo enriquecer o Conhecimento Comum do Conteúdo dos professores da Educação Básica.

Conforme levantamento apresentado na Seção 4.3, Gualandi (2019) também aborda a autonomia de professores, referente a adaptações que os professores participantes da pesquisa foram capazes de realizar frente à realidade de sua turma, com tarefas envolvendo generalizações de padrões e o pensamento algébrico. O autor observou que alguns professores passaram a discutir questões de livros didáticos e definições de forma crítica. Na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PMA pode favorecer a articulação de conceitos de Matemática Elementar e a competência que os professores precisam para analisar criticamente o material.

Desse modo, é possível que o PMA, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, contribua para que os professores tenham autonomia para analisar criticamente os materiais didáticos, resolver problemas, adaptar questões e decidir abordagens.

O pensamento proceitual flexível contribui para se compreender uma resolução inesperada apresentada por um estudante, imaginar possibilidades[53] e orientá-lo, caso ele não saiba como prosseguir. O domínio dos processos de pensamento matemático também pode contribuir para que os professores compreendam a resolução do estudante e imaginem possibilidades de prosseguimento.

Em algumas situações, é proveitoso que essa compreensão e orientação do professor sejam realizadas na hora, pois, "[...] em uma sala de aula, os estudantes não podem esperar enquanto o professor quebra-cabeças sobre a matemática" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 397, tradução nossa). Por exemplo, em uma investigação matemática ou resolução de problemas, em que os estudantes precisam de auxílio, principalmente se a turma for grande e o tempo

[53] Imaginar possibilidades de dar sequência a uma resolução inclui possibilidades para uma resolução incorreta. Recomendamos a leitura de Ball e Bass (2009), que apresentam um exemplo, envolvendo números pares e números ímpares, no qual uma concepção incorreta de um estudante leva a uma discussão profícua a respeito de divisibilidade e conjecturas relacionadas. Nesse exemplo apresentado em Ball e Bass (2009), a percepção rápida do professor de para onde essa discussão do erro vai levar é fundamental para decidir se explora essa discussão ou apenas corrige a concepção equivocada do estudante.

limitado, uma assistência mais rápida do professor pode ajudá-lo a dar maior atenção a todos.

Na perspectiva das concepções dos conceitos, o PMA envolve uma grande compressão mental (GRAY; TALL, 1994; TALL, 1995, 2004, 2008, 2013), o que pode contribuir para que os professores da Educação Básica tenham um pensamento matemático flexível e uma maior facilidade para lidar com os conceitos base já comprimidos, o que está relacionado à confiança e agilidade dos professores, conforme sugerido pelos participantes da pesquisa de Zazkis e Leikin (2010).

Desse modo, nas perspectivas das concepções dos conceitos e da complexidade dos processos de pensamento, o PMA pode contribuir para que professores pensem matematicamente ao realizar uma intervenção e orientar seus alunos, mobilizando seu Conhecimento Comum do Conteúdo e contribuindo para suas decisões didáticas, o que se relaciona ao Conhecimento do Conteúdo e Ensino.

Comentaremos agora algumas possíveis contribuições do PMA dos professores para o preparo de uma aula para a Educação Básica. Primeiramente, consideremos a tarefa de elaborar ou adaptar questões ou exemplos. Essa tarefa envolve conhecimentos específicos, tais como o de números adequados para serem utilizados, conforme abordam Ball, Thames e Phelps (2008). Por isso, tais conhecimentos estão no domínio do Conhecimento Especializado do Conteúdo. Modificar os valores de uma questão pode ser interessante, por exemplo, para elaborar uma prova com questões similares, mas não idênticas, às trabalhadas em sala de aula.

Uma questão que envolve um processo a ser realizado – no sentido de Dubinsky (2002) – requer que o professor pense o processo inverso para elaborá-la, e possivelmente encapsule esse processo inverso em uma relação entre o valor esperado na resposta e os valores a serem fornecidos no enunciado.

Por exemplo, ao adaptar uma questão envolvendo juros compostos, pretendendo-se que os estudantes mobilizem o conhecimento de logaritmos para calcular um expoente, pode ser necessário escolher os valores de aplicação, montante e taxa de juros para que o resultado seja um tempo de aplicação. Uma possibilidade seria inserir vários desses valores em uma planilha para encontrar números para o enunciado. Faz sentido que um investimento seja de um valor redondo, por exemplo, R$ 20.000,00. Em uma coluna da planilha, pode-se inserir o tempo de aplicação variando com valores inteiros, enquanto em outra coluna da planilha calcular o montante, processo inverso ao exigido na questão. Ao modificar a taxa de juros e observar os valores, chega-se a possibilidades dos valores para o enunciado. Por exemplo, com uma taxa de juros de 15% ao ano, compatível com algumas taxas de investimento pré-fixadas, aplicada por 13 anos, gera-se um montante de aproximadamente R$ 123.055,75. Assim, é possível perguntar em quantos anos se terá um total capitalizado de no mínimo R$ 123.000,00.

Utilizando planilhas dessa forma, é possível modificar os valores a serem enunciados. Desse modo, ao adaptar questões com um cuidado para que os valores sejam realistas e ao mesmo tempo possam simplificar os cálculos, a depender dos objetivos da questão, os professores podem mobilizar os processos inversos aos requeridos na questão. Se esses processos forem, ainda, encapsulados como objetos e relacionados a esquemas diversos, é possível que os professores mobilizem um PMA nessa tarefa, na perspectiva das concepções dos conceitos.

A elaboração ou modificação de questões que envolvem funções ou Geometria Analítica, por exemplo, pode exigir mudanças de representação e conexões entre conceitos diversos, possivelmente requerendo um processo de síntese no sentido de Dreyfus (2002). Assim, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PMA pode contribuir para isso. Essa modificação está relacionada à autonomia que mencionamos, de forma que os professores possam analisar criticamente um livro didático e adaptar questões, conforme Gualandi (2019) observou com os participantes de sua pesquisa.

Outra possível contribuição para o ensino na Educação Básica é o domínio de caminhos que levam à construção de conceitos. Na perspectiva das concepções dos conceitos, o PMA envolve esse domínio, com concepções operacionais que levam a concepções estruturais, conforme Sfard (1991). No modelo de Dubinsky (2002), por meio de ação, processo, objeto e esquema, os professores precisam dominar as ações e processos que pretendem que os estudantes desenvolvam para chegarem e uma concepção de objeto e construírem esquemas. Enquanto os estudantes da Educação Básica podem desenvolver concepções mais avançadas e superar outras mais elementares, os professores precisam dominar todo o caminho para esse desenvolvimento, mantendo o conhecimento matemático descompactado, motivo pelo qual se trata de um Conhecimento Especializado do Conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Tanto a capacidade para adaptar questões quanto o domínio de caminhos para a construção dos conceitos são importantes para que os professores possam elaborar ou escolher sequências de ensino, buscando formas intuitivas de construção dos conceitos. Assim, esse Conhecimento Especializado do Conteúdo pode contribuir para um Conhecimento do Conteúdo e Ensino.

O PMA, na perspectiva das concepções dos conceitos, pode contribuir para essas elaborações ou escolhas a partir da ideia de construir conceitos encapsulando processos em objetos (DUBINSKY, 2002), que pode estar presente na abordagem.

Ainda, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PMA pode contribuir para essa elaboração por meio dos processos de pensamento matemático que os professores precisam realizar para relacionar conceitos e diferentes representações de modo a encontrar formas intuitivas de abordá-los.

Nas três perspectivas que adotamos, o PMA envolve um conceito imagem fortalecido, incluindo exemplos peculiares, que podem contribuir para o Conhecimento Especializado do Conteúdo dos professores ao serem utilizados para evitar más concepções dos estudantes no ensino na Educação Básica. A habilidade para pensar em exemplos e contraexemplos se articula com o Conhecimento do Conteúdo e Estudantes e colabora com o Conhecimento do Conteúdo e Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Além disso, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, o PMA pode contribuir para que os professores reconheçam quando duas ou mais definições são ou não equivalentes, conforme Tirosh, Tsamir e Levenson (2011) abordam com relação à definição de triângulo. A pesquisa de Leikin e Zazkis (2010) sugere que os futuros professores de Matemática não costumam relacionar definições entre diferentes áreas da Matemática. No entanto, uma das tarefas matemáticas para o ensino na Educação Básica elencadas por Ball, Thames e Phelps (2008) é inspecionar equivalências. As deduções permitem que as definições equivalentes sejam reduzidas umas às outras, o que é um indício de PMA segundo Tall (2002).

Leikin e Zazkis (2010) consideram o conhecimento de diferentes definições como conhecimento do conteúdo curricular (SHULMAN, 1986):

> O conhecimento do conteúdo curricular dos professores inclui o conhecimento das sequências de aprendizagem em que várias definições de conceitos matemáticos são usadas e as conexões entre vários tópicos curriculares em que diferentes definições de conceitos matemáticos podem aparecer. Por exemplo, os professores [...] devem conhecer as diferenças nas definições de uma linha tangente em várias junções do currículo [...], e as diferentes definições equivalentes de um círculo (como de outras seções cônicas) em geometria euclidiana, geometria analítica e álgebra. (LEIKIN; ZAZKIS, 2010, p. 454,455, tradução nossa).

Assim, as conexões entre definições envolvem o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, o Conhecimento Especializado do Conteúdo e o Conhecimento do Conteúdo e Currículo, devido às definições que podem aparecer em diferentes partes do currículo, ao conhecimento de definições adequadas para contextos específicos de ensino e a orientações curriculares envolvidas.

Ainda, o conceito definição de acordo com a definição formal, bem como conceitos imagem coerentes entre si e com o conceito definição (TALL, VINNER, 1981), podem contribuir para que os professores consigam avaliar se os conceitos imagem dos estudantes estão coerentes, enriquecendo seu Conhecimento do Conteúdo e Estudantes. Mesmo que a definição formal não seja trabalhada em determinado assunto na Educação Básica, professores podem mobilizar o seu conceito definição e o seu conceito imagem para relacioná-los com um conceito imagem diferente que um estudante possa apresentar, e assim decidir se tal concepção está ou não coerente com as consolidadas. Essa utilização da definição em um sequenciamento lógico é característica do PMA na perspectiva do pensamento formal-axiomático.

Segundo Tall (2002), os matemáticos maduros ordenam as ideias em uma sequência lógica e assim resolvem conflitos cognitivos (conceitos imagem contraditórios que emergem em simultâneo). Nesse sentido, o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, pode contribuir para que professores organizem as ideias em uma sequência lógica para resolver situações que pareçam contraditórias para os estudantes.

No ensino de Matemática na Educação Básica, essa habilidade pode ser requisitada para se explicar erros que possam aparecer devido a uma ‘circularidade lógica’[54], quando duas soluções para um problema contradizem uma a outra, para abordar falsas conjecturas que são ‘provadas’ por meio de exemplos e podem ser refutadas considerando suas consequências para elaborar um contraexemplo, ou mesmo para resolver situações de conflito entre os conceitos imagem.

Observei um exemplo de circularidade lógica em uma questão que abordei como professor com estudantes de licenciatura em Matemática. Ao serem perguntados, por escrito, se o número inteiro 3 pertence aos números racionais, alguns estudantes afirmaram que os conjuntos estão incluídos uns nos outros na ordem $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, e concluíram “pela ordem” que o fato de 3 ser inteiro faz com que 3 pertença aos outros conjuntos. Mas o que faz com que a ordem seja válida, se não a inclusão dos elementos de um conjunto nos conjuntos sucessivos? Com o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, um professor tem condições de entender que para ocorrer tal ordem de inclusão, é preciso garantir que cada elemento de $\mathbb{N}$ esteja em $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, de forma que a justificativa não pode ser “pela ordem”, já que a ordem está sendo posta em questão. Uma dificuldade que os estudantes enfrentam na transição para o PMA é provar algo que parece óbvio, sem poder utilizar o próprio resultado na prova (TALL, 2002). Abordando essa questão com futuros professores de Matemática, alguns deles mobilizaram uma definição de $\mathbb{Q}$, a nosso ver, coerente com a Matemática Escolar, registrando que 3 pode ser escrito na forma de fração de inteiros como $\frac{3}{1}$, e por isso $3 \in \mathbb{Q}$.

Um exemplo de conflito cognitivo que pode surgir de uma dúvida de estudantes da Educação Básica é a confusão de divisibilidade com divisão. Um estudante poderia perguntar: “por que 0 é divisível por qualquer número e eu não tenho divisão por 0?”. Mais especificamente: “por que 0 é divisível por 0, mas eu não tenho $0/0$?”. Para resolver esse conflito, pode-se mobilizar a definição de divisibilidade e colocar as ideias em uma sequência lógica, mostrando que 0 é divisível por 0 pois existe (pelo menos um) inteiro k tal que $0 = 0 \cdot k$. Por outro lado,

[54] A expressão ‘circularidade lógica’ é utilizada por Moreira e David (2007) para se referir a uma possível dificuldade em justificativas menos formais. Para ilustrar o que entendemos como circularidade lógica, considere uma sentença C justificada a partir de uma sentença B, que por sua vez é justificada por uma sentença A justificada por C. Assim temos $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{A}$. O equívoco da circularidade lógica seria considerar que A, B ou C são verdadeiras com base nessa sequência de implicações, sem que nenhuma das três sentenças tenha sua validade previamente aceita.

para mostrar que $0/0$ não existe é possível considerar uma abordagem mais formal, em que 0 não possui inverso multiplicativo (uma vez que não existe um número que multiplicado por 0 resulte em 1, elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{R}$) ou uma abordagem menos rigorosa, como mostrar que aproximações sucessivas de 0 no divisor e no dividendo podem levar a valores diversos no quociente.

Dessa forma, alguns conflitos cognitivos podem não ser resolvidos pelos estudantes sem o auxílio de um professor que consiga mobilizar o seu conceito definição e colocar as ideias em uma sequência lógica, algo em que o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, pode contribuir.

Além da falta de sequenciamento lógico, outras situações podem envolver erros em que os professores possuem melhores condições de identificá-los. Um exemplo é a resolução da equação $-3x = 6$, em que é comum estudantes resolvê-la como $x = 6/3$, devido à regra “ao passar para o outro lado, muda de sinal”. Para entender o erro, é preciso identificar que o “passar para o outro lado” é efeito de realizar a mesma operação em ambos os membros (a multiplicação por um inverso) para que se obtenha o elemento neutro da multiplicação como primeira parcela do produto no membro esquerdo da equação, levando ao isolamento da variável x. Os estudantes podem entender que se deve realizar a mesma operação em ambos os membros, mas talvez não enxergar que é necessário operar com um elemento inverso multiplicativo para isolar um dos membros do produto. Professores possuem maior clareza na distinção entre as regras de “passar para o outro lado”, possivelmente por conhecer melhor os motivos que as fundamentam, em especial as propriedades de inversos e elementos neutros. Nesse exemplo, não estamos afirmando que seja necessário ter o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, para ter essa clareza, mas que alguns elementos desse pensamento, como um domínio mais rigoroso das propriedades, bem como a abstração requerida para entendê-las de forma generalizada a qualquer equação, são elementos que contribuem para resolver uma situação de conflito cognitivo como essa.

Além disso, ao envolver a competência de resolver conflitos cognitivos, o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, pode contribuir para que os professores da Educação Básica resolvam dúvidas que podem surgir com eles mesmos. Conforme abordamos na Seção 4.3, Dias (2002) e Pires e Silva (2014) sugerem que o conceito imagem dos professores reflete em sua prática docente. Portanto, é importante que os professores resolvam fatores de conflito em potencial para que não se tornem fatores de conflito cognitivo em sala de aula se essas imagens forem evocadas simultaneamente.

Outro aspecto em que o PMA pode contribuir para o conhecimento dos professores, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, é a compreensão a respeito do pensamento dos matemáticos. No entanto, Moreira, Cury e Vianna (2005) questionam a importância do acesso à cultura matemática para a prática de professores na Educação Básica. Os autores analisaram respostas de matemáticos quanto à importância da disciplina de Análise Real na licenciatura em Matemática e agruparam, em uma categoria, a ideia de que a disciplina possibilita ao professor pensar matematicamente, observar como os matemáticos pensam e ter acesso a uma cultura específica: a cultura matemática. Segundo Moreira, Cury e Vianna (2005), o trabalho docente não se identifica com a profissão do matemático e a escolarização básica não corresponde à ideia de dotar os estudantes de uma ótica específica como a dos matemáticos profissionais.

Embora concordemos que há uma grande diferença entre essas profissões, ressalvamos uma possível contribuição desse conhecimento: para evitar que uma compreensão equivocada a respeito da Matemática e da validade dos resultados matemáticos se reproduza na comunidade escolar, conforme comentaremos na Seção 6.2.2. Para isso, os professores não precisam conhecer os conceitos matemáticos conforme a Matemática Avançada, mas o conhecimento, por exemplo, do método dedutivo, pode lhes ser profícuo.

Ainda, esse conhecimento a respeito de como a Matemática está estruturada pode contribuir para que professores entendam a importância de uma definição e da precisão necessária ao definir um conceito. Além da definição, as provas também são importantes nessa estrutura.

Amorim *et al*. (2020) consideram importante que os professores tenham um conceito imagem bem desenvolvido com relação a provas e argumentações, para proporcionar a seus alunos imagens igualmente bem desenvolvidas. Ko e Knuth (2009) também consideram importante que os professores dominem provas e contraexemplos, relacionando-as à comunicação, conexão entre os cursos e envolvimento dos alunos na compreensão de provas e contraexemplos.

Assim, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, o PMA, que envolve definições e deduções formais (TALL, 2002), pode contribuir para que os professores da Educação Básica compreendam estruturas da Matemática como provas, contraexemplos e definições.

Ainda na perspectiva do pensamento formal-axiomático, o PMA pode contribuir para que os professores sejam coerentes e tenham precisão, especialmente na utilização dos termos.

Com base em caracterizações do PMA de Tall (2002, 2013) e em outros referenciai teóricos, Schastai (2017) considera a importância da linguagem para o desenvolvimento do pensamento matemático. Conforme comentamos na Seção 4.3, Wright, Murray e Basu (2016) fizeram observações quanto à linguagem em sala de aula e seu impacto na aprendizagem dos estudantes. Segundo Wright, Murray e Basu (2016), os estudantes da Educação Básica devem ter a oportunidade de expandir seu entendimento particular das palavras à medida que seu conhecimento matemático se desenvolve.

Assim, conhecendo a formalização dos conceitos, professores podem evitar incoerências com o que os estudantes ainda poderão estudar, para não confundi-los enquanto expandem seu entendimento (como o entendimento de um domínio de validade ao passar de “não existe solução” para “não existe solução real”). Para isso, o professor pode utilizar o seu Conhecimento do Conteúdo no Horizonte para delinear suas ações de ensino.

Com relação à comunicação, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PMA contribui para a flexibilidade na mudança de representações (DREYFUS, 2002), o que, conforme Gualandi (2019), envolve a capacidade de comunicar-se matematicamente, permitindo maior interação em uma resolução de problemas com a utilização de símbolos matemáticos de forma criativa. Entendemos que essa flexibilidade pode estar relacionada a um Conhecimento Especializado do Conteúdo e contribui para o Conhecimento do Conteúdo e Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

A seguir, na Figura 7, elencamos as possíveis contribuições do PMA dos professores para o ensino de Matemática que foram discutidas nesta seção, ainda sem necessariamente envolver uma articulação com a Matemática Avançada. Entre parênteses, inserimos as siglas dos domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) vinculados às respectivas possíveis contribuições:

Figura 7 – Possíveis contribuições do PMA dos professores para o ensino de Matemática na Educação Básica, sem necessariamente considerar articulações com a Matemática Avançada

- aprender Matemática Elementar (CCK);
- ter um conceito imagem fortalecido, com exemplos peculiares (SCK, KCS, KCT);
- saber quando duas ou mais definições são equivalentes (SCK, HCK, KCC);
- avaliar se os conceitos imagem dos estudantes estão coerentes (CCK, KCS, KCT);
- colocar as ideias em uma sequência lógica para resolver situações que pareçam contraditórias para os estudantes (SCK);
- entender o que é uma definição e como a Matemática é estruturada (HCK);
- ser coerente e preciso (KCT), evitando incoerências com o que os estudantes ainda poderão estudar (HCK).

Referentes à perspectiva do pensamento formal-axiomático

Referentes à perspectiva das concepções dos conceitos

- aprender Matemática Elementar com a associação de esquemas (CCK);
- auxiliar o desenvolvimento do PMA dos estudantes (CCK);
- pensar matematicamente a respeito da resolução de um estudante, para compreendê-la, imaginar possibilidades e orientá-lo (CCK, KCT);
- elaborar ou adaptar questões (SCK, KCT);
- dominar caminhos que levam à construção de conceitos (SCK, KCT);
- elaborar ou escolher sequências de ensino, buscando formas intuitivas de construção dos conceitos; (SCK, KCT);
- ter um conceito imagem fortalecido, com exemplos peculiares (SCK).

- aprender Matemática Elementar (CCK);
- auxiliar o desenvolvimento do PMA dos estudantes (CCK);
- ter autonomia no desenvolvimento dos processos (CCK);
- pensar matematicamente a respeito da resolução de um estudante, para compreendê-la, imaginar possibilidades e orientá-lo (CCK, KCT);
- elaborar ou adaptar questões (SCK, KCT);
- elaborar ou escolher sequências de ensino, buscando formas intuitivas de construção dos conceitos; (SCK, KCT);
- ter representações mentais ricas, com exemplos peculiares (SCK);
- comunicar-se por meio da flexibilidade na mudança de representações (SCK, KCT).

Referentes à perspectiva da complexidade dos processos de pensamento

Fonte: os autores.

Tal como na seção anterior, as similaridades entre as contribuições para cada perspectiva de PMA foram o motivo pelo qual não separamos o texto por perspectiva, mas por contribuições do PMA dos professores organizadas com base no MKT (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Assim, na Figura 7, elencamos possíveis contribuições do PMA dos professores separadamente para cada perspectiva de forma a especificar a qual ou quais perspectivas se referem essas potenciais contribuições.

Repete-se, na Figura 7, a possível contribuição para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes da Educação Básica, o pensamento matemático para compreender a resolução de um estudante e orientá-lo e a elaboração ou adaptação de questões e de sequências de ensino. O motivo dessas possíveis contribuições do PMA dos professores se repetirem com as perspectivas das concepções dos conceitos e da complexidade dos processos de pensamento é que tais perspectivas caracterizam o PMA como um pensamento que pode ocorrer com a matemática da Educação Básica. Outra identidade diz respeito a ter um conceito imagem fortalecido, que é uma característica do PMA nas três perspectivas adotadas, com referência às representações mentais na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento. Ainda na Figura 7, podemos observar o aprendizado em Matemática Elementar[55] por parte dos professores, em comum nas três perspectivas, que na perspectiva das concepções dos conceitos foi discutido com relação à associação de esquemas.

A seguir, dividimos o restante desta seção em três subseções: na Subseção 6.2.1, dissertamos a respeito do papel do PMA para a aprendizagem de Matemática Avançada; na Subseção 6.2.2, partimos do referencial teórico de Moreira e David (2007) e relacionamos o PME e o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, com a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica, para discutirmos relações do PMA com o ensino de Matemática na Educação Básica; por fim, na Subseção 6.2.3, utilizamos os argumentos desenvolvidos nas subseções anteriores para dissertar a respeito do papel do PMA na articulação dos diferentes conhecimentos matemáticos possivelmente envolvidos nesse ensino.

[55] Conforme abordamos no final do Capítulo 3, entendemos, nesta tese, a Matemática Elementar como a matemática da Educação Básica.

6.2.1 Aprendizagem de Matemática Avançada

Nesta subseção, discutimos contribuições do PMA para o aprendizado de Matemática Avançada[56] por parte de professores. Deduzir que essas contribuições são importantes para o ensino de Matemática na Educação Básica exige cuidado, visto que há incertezas quanto a contribuições concretas da Matemática Avançada para o ensino de Matemática na Educação Básica, conforme discutimos no Capítulo 3. Seguindo a perspectiva de Jakobsen *et al*. (2012), entendemos que assuntos de Matemática Avançada demonstrativamente relacionados ao trabalho docente de ensinar na escola estão no domínio do Conhecimento do Conteúdo no Horizonte dos professores. Portanto, os professores desenvolverem o PMA traz possíveis contribuições para sua prática se esse pensamento matemático os auxiliar em um aprendizado de Matemática Avançada que esteja relacionado à prática docente escolar.

Algumas concepções que relacionam o PMA e o aprendizado em Matemática Avançada foram apresentadas no Capítulo 4, em que realizamos um levantamento de pesquisas fundamentadas no referencial teórico do PMA que envolveram estudantes de licenciatura em Matemática. Na Seção 4.2, apresentamos os resultados das análises de pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA para verificar indícios de pensamento matemático em produções de estudantes (INAREJOS; SAVIOLI, 2022), procurando entender como essas pesquisas relacionam a aprendizagem em Matemática com os indícios de pensamento matemático. Desse modo, encontramos pesquisas que, na nossa interpretação, conceberam o PMA como um elemento que contribui ou é mesmo necessário para a aprendizagem dos conceitos (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017a, 2017b; FONSECA; HENRIQUES, 2020; FONTENELE, 2018; JESUS; SAVIOLI, 2019; JORGE, 2017; LOPES, 2019; SOUSA; ALMEIDA, 2017; TEÓFILO; LIMA; MENEZES, 2020; VIDOTTI; KATO, 2018). Outros pesquisadores nos indicaram uma concepção de que a aprendizagem de conceitos pode ser inferida pelo desenvolvimento do PMA (AMORIM *et al.*, 2020; FONSECA; HENRIQUES, 2018,

---

[56] Conforme abordamos no final do Capítulo 3, entendemos, nesta tese, a Matemática Avançada como o corpo de conhecimentos matemáticos estudados em nível de graduação, pós-graduação ou pesquisa, no qual está inclusa a Matemática Acadêmica, que, por sua vez, é o corpo de conhecimentos concebido pelos matemáticos (MOREIRA; DAVID, 2007). Com essa caracterização, a Matemática Avançada também pode incluir assuntos de Matemática Elementar, se esses forem estudados na graduação.

2020; JESUS; SAVIOLI, 2019; JORGE, 2017; MENEZES, 2018; TEÓFILO; LIMA; MENEZES, 2020; VIEIRA; SOUZA; IMAFUKU, 2020). Ainda, interpretamos concepções de que a aprendizagem de conceitos e o desenvolvimento do PMA ocorrem juntos (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020; JESUS; SAVIOLI, 2019; JORGE, 2017) ou contribuem um para o outro (JESUS; SAVIOLI, 2019; JORGE, 2017; SOUSA; ALMEIDA, 2017), conforme entendemos e pretendemos respaldar nesta seção, de acordo com as três perspectivas de PMA que adotamos.

Vieira, Souza e Imafuku (2020) investigaram percepções de prova por parte de licenciandos em Matemática, considerando sua importância para o desenvolvimento do PMA:

> Entendemos que é fundamental, para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991), a elaboração de provas, justificativas e contraexemplos de afirmações matemáticas e exploramos isso com os participantes, em questões do tipo Verdadeiro/Falso, acompanhadas de justificativas que julgassem pertinentes. (VIEIRA; SOUZA; IMAFUKU, 2020, p. 2).

Nesse sentido, os autores argumentam como as dificuldades na elaboração de provas dificultam o desenvolvimento do PMA:

> Entendemos que todas as incompreensões, erros e limitações dos estudantes na elaboração de justificativas e argumentações em Matemática são dificultadores do desenvolvimento de processos mais sofisticados do Pensamento Matemático Avançado, como generalização e síntese, uma vez que tendem a restringir a expansão de resultados e de domínios de validade e inviabilizam a composição de conhecimentos fragmentados. (VIEIRA; SOUZA; IMAFUKU, 2020, p. 16).

Assim, Vieira, Souza e Imafuku (2020) consideram que os processos de generalização e síntese requerem a expansão de resultados e de domínios de validade e a composição de conhecimentos fragmentados, conforme Dreyfus (2002). Com base nesse entendimento, além da importância de justificativas e argumentações que os autores apontam, consideramos importante que os estudantes compreendam os conceitos matemáticos e relações entre eles para dominarem tais processos.

Reciprocamente, consideramos importante que os estudantes dominem esses processos para comporem os conhecimentos e compreenderem suas relações, pois, sem o desenvolvimento do PMA, a aprendizagem dos conceitos será fragmentada e incompleta.

O processo de abstração, que está relacionado aos processos de generalização e síntese, requer o isolamento de propriedades e relações apropriadas, bem como a construção de estruturas mentais a partir de propriedades e de relações entre os objetos matemáticos (DREYFUS, 2002). Desse modo, para desenvolver o processo de abstração, é necessário que o estudante mobilize o conhecimento dos conceitos, propriedades e relações. É um processo que exige a capacidade do estudante de desviar a atenção do próprio objeto para a estrutura das suas propriedades e relações, um pensamento característico da Matemática Acadêmica.

Reciprocamente, o processo de abstração permite que o estudante descreva de uma forma unificadora uma grande quantidade de situações que, sem a abstração, seriam consideradas separadamente e independentes (DREYFUS, 2002). Assim, a abstração contribui para o aprendizado da Matemática Acadêmica.

Portanto, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o desenvolvimento do PMA e a aprendizagem em Matemática Avançada contribuem um para o outro.

Ainda nessa perspectiva, os processos característicos do PMA estão relacionados aos benefícios que Zazkis e Leikin (2010) observaram, no discurso de professores, do Conhecimento Matemático Avançado[57] para o ensino na Educação Básica. Um dos benefícios mencionados é a ‘boa percepção’ para ensinar, que envolve a compreensão das conexões entre as ideias matemáticas, conforme Zazkis e Leikin (2010). Essas conexões estão relacionadas ao processo de síntese (DREYFUS, 2002), que possibilita a ‘sensação de terreno’[58] que os professores entrevistados mencionaram, permitindo uma visão do direcionamento do ensino.

Relações similares entre os benefícios apontados por Zazkis e Leikin (2010) e os processos de PMA (DREYFUS, 2002) foram estabelecidas por Inarejos *et al.* (2022, p. 229, grifo dos autores):

> As conexões com contextos mais amplos estão relacionadas aos processos de generalização e síntese, que são característicos do PMA de acordo com Dreyfus (2002). De fato, a generalização envolve a expansão de um domínio de validade, enquanto que a síntese significa combinar partes de tal maneira que elas formam um

[57] Tal como abordamos no final do Capítulo 3, consideramos como Conhecimento Matemático Avançado o conhecimento de Matemática Avançada, ou seja, conhecimentos matemáticos que são estudados a partir da graduação (ZAZKIS; LEIKIN, 2010).
[58] A ‘sensação de terreno’ é mencionada pelos entrevistados de Zazkis e Leikin (2010) como uma ‘visão’ da direção que o ensino está tomando.

> todo. Quando o professor consegue ver o todo em uma única imagem, consegue criar conexões entre os elementos dentro e fora do currículo a que estão relacionados. Assim, o processo de síntese se relaciona à competência do professor para fazer conexões entre os conteúdos dentro e além do currículo, em ver uma 'imagem completa' do assunto e ter sensação de terreno, que são benefícios do CMA [Conhecimento Matemático Avançado] segundo os professores entrevistados por Zazkis e Leikin (2010).

A visão de uma 'imagem completa' do assunto está também relacionada ao PMA na perspectiva das concepções dos conceitos, à medida que diferentes imagens, operacionais e estruturais, são relacionadas nessa compreensão ampla dos professores. Assim, na perspectiva das concepções dos conceitos, o PMA se desenvolve ao tempo em que os esquemas dos conceitos são construídos e relacionados, condição necessária e suficiente para a aprendizagem na Matemática Avançada.

Zazkis e Leikin (2010) elencaram 'questões metamatemáticas', como 'prova', 'linguagem' e 'precisão e estética', apresentadas por professores da Educação Básica como benefícios do Conhecimento Matemático Avançado. Essas questões estão relacionadas com o PMA na perspectiva do pensamento formal-axiomático. Novamente, aproveitamos algumas relações estabelecidas por Inarejos *et al*. (2022, p. 229, grifo dos autores):

> O processo de prova é visto por Tall (2002) como o estágio final do desenvolvimento do pensamento matemático, no qual as ideias ganham precisão. Nesse estágio, a linguagem necessita de precisão para que as ideias sejam organizadas em uma sequência lógica baseadas em definições, evitando inconsistências. A estética observada por Zazkis e Leikin (2010, p. 274) diz respeito a 'belas soluções', o que está relacionado à Criatividade Matemática, pois envolve a busca por soluções diferentes e valorização das mais criativas.

Essas relações entre benefícios do Conhecimento Matemático Avançado e o PMA reforçam a nossa concepção de que a aprendizagem de Matemática Avançada contribui para o desenvolvimento do PMA. Por outro lado, parte do referencial teórico do PMA foi desenvolvido considerando os processos que ocorrem na mente dos matemáticos realizando pesquisas e dos estudantes enquanto aprendem conceitos matemáticos avançados (TALL, 2002; DREYFUS, 2002). Assim, o desenvolvimento dos processos ou das concepções dos conceitos favorece a aprendizagem da Matemática Avançada.

> [...] os processos de pensamentos matemáticos funcionam como

> meios para ativarmos as capacidades cognitivas e assim construir novos conhecimentos que nos levam a novas reflexões, e desse modo continuar o infindável ciclo do aprender e do ensinar! (BERTOLAZI, 2012, p. 212).

Portanto, nessas três perspectivas de PMA, consideramos que o desenvolvimento do PMA e a aprendizagem em Matemática Avançada podem ocorrer simultaneamente, um contribuindo para o outro.

Apenas esclarecemos que, nas perspectivas da complexidade dos processos de pensamento e das concepções dos conceitos, isso não significa que o PMA se desenvolve exclusivamente por meio da Matemática Avançada, pois, nessas perspectivas, esse pensamento pode se desenvolver por meio de outras matemáticas. Na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, alguns processos de PMA se desenvolvem até mesmo em outras áreas do conhecimento, conforme Resnick (1987) e Dreyfus (2002).

Contudo, para a aprendizagem da Matemática Avançada, o PMA se faz necessário, considerando as três perspectivas que adotamos. Caso contrário, nas perspectivas das concepções dos conceitos e da complexidade dos processos de pensamento, não seriam estabelecidas as devidas relações e conexões entre os conceitos, constituindo uma "aprendizagem" mecânica e fragmentada. Na perspectiva do pensamento formal-axiomático, a precisão formal requerida no PMA está intrinsecamente relacionada à Matemática Acadêmica (MOREIRA; DAVID, 2007), conforme exploramos na seção a seguir.

6.2.2 Pensamento Matemático Elementar e Avançado

Lembramos que, nesta tese, consideramos o Pensamento Matemático Elementar (PME) como o pensamento matemático focado em descrições, exemplos, representações, ações (DUBINSKY, 2002) e procedimentos (GRAY; TALL, 1994). No final do Capítulo 3, elencamos algumas características mais específicas para cada perspectiva de PMA. Com essas caracterizações, o PME é fundamental para a prática docente na Educação Básica, pois está intimamente relacionado à aprendizagem de Matemática Elementar. Cabe, então, pensarmos em como e até que ponto o desenvolvimento do PMA pode contribuir no desenvolvimento desse PME.

Para aprofundar essa questão, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, identificamos relações entre o PME e a Matemática Escolar, bem como entre o PMA e a Matemática Acadêmica, conforme Moreira e David (2007).

De fato, a Matemática Acadêmica, segundo Moreira e David (2007), é a matemática que a comunidade científica dos matemáticos identifica como Matemática:

> Os tipos de objetos com os quais se trabalha, os níveis de abstração em que se colocam as questões e a busca permanente de máxima generalidade nos resultados fazem com que a ênfase nas estruturas abstratas, o processo rigorosamente lógico-dedutivo e a extrema precisão de linguagem sejam, entre outros, valores essenciais associados à visão que o matemático profissional constrói do conhecimento matemático. (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 21).

Ainda de acordo com Moreira e David (2007, p. 22-23), a Matemática Acadêmica possui uma estrutura axiomática com "[...] provas que se desenvolvem apoiadas nas definições e nos teoremas anteriormente estabelecidos [...]".

Logo, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, o PMA é um pensamento intrinsecamente ligado à precisão formal da Matemática Acadêmica.

Por sua vez, a Matemática Escolar aceita "[...] justificativas menos formais, mais 'livres', que se desenvolvem tomando como postulados e elementos primitivos tácitos certos conhecimentos provenientes da vida cotidiana [...]", que podem levar "[...] a uma compreensão mais aprofundada das relações matemáticas em discussão" (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 27). Assim, em vez da prova formal, com argumentos irrefutáveis logicamente alinhados, a Matemática Escolar envolve o desenvolvimento de uma convicção profunda a respeito da validade de um resultado:

> A questão fundamental para a Matemática Escolar [...] refere-se à aprendizagem, portanto ao desenvolvimento de uma prática pedagógica visando à compreensão do fato, à construção de justificativas que permitam ao aluno utilizá-lo de maneira coerente e conveniente na sua vida escolar e extra-escolar. (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 23).

Ainda, com relação à generalidade, enquanto a Matemática Acadêmica procura por estruturas mais gerais, como, por exemplo, a de um corpo ordenado completo, a Matemática Escolar tem foco em objetos particulares, como, por exemplo, a representação decimal (MOREIRA; DAVID, 2007).

Essa diferença entre Matemática Escolar e Matemática Acadêmica é semelhante à que Tall (2002) considera entre o PME e o PMA. O PME, segundo Tall (2002), tem foco na descrição, no convencimento e na coerência da Matemática Elementar. Portanto, consideramos o PME como um pensamento relacionado à Matemática Escolar.

Desse modo, embora na perspectiva do pensamento formal-axiomático o PME e o PMA sejam distintos, apenas com processos em comum, potenciais contribuições da Matemática Acadêmica para a Matemática Escolar podem nos auxiliar a identificar possíveis contribuições do PMA dos professores para o ensino de Matemática.

A fim de explorar essa questão, ainda na perspectiva do pensamento formal-axiomático, primeiramente levamos em consideração as três possíveis formas de relacionar a Matemática Escolar com a Matemática Acadêmica elencadas por Moreira e David (2007).

Há uma concepção de que a Matemática Escolar é mera adaptação da Matemática Acadêmica à escola. Não somente rejeitamos essa concepção, tal como Moreira e David (2007) a recusam, como renegamos a concepção de que o PME é a parte elementar e simples do PMA. O PME é suficiente para o aprendizado da Matemática Elementar, da matemática prática e é fundamental para o crescimento cognitivo que pode levar ao desenvolvimento do PMA (TALL, 1995, 2008, 2013). Talvez o único apontamento que poderíamos usufruir relacionado a essa ideia é de que o PME envolve um pensamento menos rigoroso e, assim, o desenvolvimento do PMA, com suas precisões e consequências lógicas, torna relativamente fácil a mobilização de um PME, que se satisfaz com coerência e convencimento. Mas, considerando dessa forma, todo pensamento que exige mais que o PME contribuiria para esse PME.

Há, ainda, uma concepção de que a Matemática Escolar não é influenciada pela Matemática Acadêmica. Novamente, em conjunto com Moreira e David (2007), recusamos essa concepção. Quanto ao PME, embora não envolva a fase de precisão e dedução formal, pode se apoiar em processos que ocorrem também no PMA, como os processos de conjecturar e representar, o processo de síntese descrito por Tall (2002), além de aceitar argumentos lógicos no convencimento.

Logo, traçando um paralelo com a concepção de Moreira e David (2007) em que a Matemática Escolar possui múltiplos condicionantes, o pensamento matemático característico da Matemática Escolar (o PME) possui tanto características inerentes a suas especificidades como possivelmente a influência de outros pensamentos diversos, nas quais, para citar um exemplo, podemos incluir o Pensamento Matemático-Computacional (BUSSMANN; SAVIOLI, 2020), e, é claro, o PMA.

Considerando essa concepção, passemos a destacar algumas diferenças entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica, para termos certos cuidados ao discutir possíveis contribuições do PMA para o PME na perspectiva do pensamento formal-axiomático.

Moreira e David (2007) entendem, tal como Vinner (2002), que a definição formal pode não ser adequada no contexto da Educação Básica, em que os objetos devem ser definidos de forma que os estudantes os entendam, de modo que a definição formal pode ser desnecessária ou inconveniente. “As características da prática escolar tendem a favorecer um modo mais flexível de caracterização dos objetos matemáticos, muitas vezes através de referências descritivas ou imagens intuitivas, no lugar de definições formais” (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 30). Exemplos disso são as definições dos conjuntos numéricos.

De acordo com Moreira e David (2007) e Vinner (2002), a definição formal pode gerar um conflito entre a estrutura Matemática e os processos cognitivos de aquisição dos conceitos. A definição expressa o que é o objeto matemático, enquanto o conhecimento do objeto pelo estudante parece se desenvolver, segundo Moreira e David (2007), pela construção de um ‘mosaico’ de representações pessoais do objeto, o qual pode ou não incluir a definição formal entre suas peças.

Ainda de acordo com Moreira e David (2007), a construção formal dos conceitos, como no caso dos conjuntos numéricos, produz uma abstração que fornece características essenciais do objeto, o que valoriza a estrutura do conjunto construído. Por outro lado, na Matemática Escolar, a “[...] aquisição da noção abstrata de número racional parece estar associada a um longo processo de construção e re-elaboração, quase que elemento a elemento” (MOREIRA, 2004, p. 96). Segundo esses autores, os professores da escola básica precisam trabalhar com os significados concretos dos números racionais.

Nesse sentido, a compactação de informação que ocorre na Matemática Acadêmica, que condensa uma variedade de ideias matemáticas em alguns enunciados formais, contrasta com a forma descompactada que essas ideias se tornam operativas na prática docente na Educação Básica, ao ponto que o objeto de ensino escolar não pode ser identificado como a parte elementar do objeto formalizado (MOREIRA; DAVID, 2007).

Ainda que existam essas diferenças entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar, consideramos que, para o ensino de Matemática na Educação Básica, uma flexibilidade descuidada das caracterizações dos objetos e das argumentações matemáticas pode gerar complicações, conforme Moreira e David (2007) pontuam:

> Por certo, argumentações de tipo menos formal não estão isentas de complicações e questionamentos dentro do trabalho pedagógico na escola básica. Exemplos de dificuldades a ser contornadas seriam:
>
> - A possiblidade de estímulo a um relaxamento exagerado de modo a se fazer despercebida a utilização de circularidade lógica (algumas vezes mais evidente, outras vezes sutil) nos raciocínios empregados nas justificativas;
> - A possiblidade de promoção de uma compreensão equivocada do papel e da necessidade de validação dos resultados e das sentenças matemáticas no contexto da educação escolar básica [...].
> - A possibilidade de reforçar certas concepções inadequadas [...].
>
> (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 27).

Desse modo, entendemos que as justificativas precisam seguir uma lógica no ensino de Matemática na Educação Básica, mesmo que não tenha a precisão formal da Matemática Acadêmica. Por exemplo, na Matemática Escolar, é possível partir de resultados em que os estudantes acreditam, mesmo que não sejam provados, para justificar resultados que estão sendo estudados, com o cuidado para não cair em uma circularidade lógica. Moreira (2020) sugere essa abordagem na justificativa para a unicidade da decomposição em números primos a partir do Lema de Euclides[59], por sua vez justificado pela multiplicidade entre os numeradores e denominadores em uma fração equivalente, um fato, segundo o autor, aceito pelos estudantes da escola básica.

> Em suma, nossa visão *não* é a de que, ao se priorizar o didático e o pedagógico nas argumentações matemáticas na escola, fica eliminada a necessidade de desenvolver um raciocínio lógico consistente para justificar a validade de um fato matemático não reconhecido como verdadeiro pelos alunos. Muito pelo contrário, gastamos um espaço razoável neste texto para defender a ideia de que a unicidade da fatoração em primos não é nada evidente e, por isso mesmo, apresentamos [...] uma justificativa de sua validade que

[59] Termo que adotamos com base em Domingues e Iezzi (2003).

> é logicamente consistente e, a nosso ver, compatível com o ensino escolar do tema no sexto ano. (MOREIRA, 2020, p. 242, grifo do autor).

Além dessa necessidade de justificativas, atentamos para o possível reforço a concepções inadequadas causadas por conceitos imagem conflitantes:

> Assim como nas demonstrações, também aqui podem surgir problemas com essa flexibilização no processo de caracterização dos objetos matemáticos [restrita ao conceito imagem] operada em determinadas circunstâncias pela matemática escolar. Embora a formação de conceitos matemáticos esteja fortemente associada a um processo que envolve a construção de um conjunto de ***imagens***, estas podem ser, para um mesmo indivíduo e para um mesmo conceito, contraditórias, limitadas e mesmo, em certos aspectos, conflitantes com a definição formal do objeto a que se referem. (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 31, grifo dos autores).

Embora a definição formal possa ser por vezes inadequada de ser abordada explicitamente na Educação Básica, se o pensamento matemático dos professores se mantiver restrito ao conceito imagem, carecerá da capacidade para resolver conflitos cognitivos. Isso porque podem surgir imagens contraditórias, limitadas, conflitantes. Conforme Tall e Vinner (1981) e Moreira e David (2007), um conceito imagem inadequado pode levar a uma solução correta e se tornar um reforço e uma resistência a modificá-la.

Uma vez que o conceito imagem tende a ser “psicologicamente resistente”, “[...] a simples exposição do indivíduo à definição rigorosa não é suficiente para provocar uma re-organização ou re-estruturação desse mosaico” (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 31). Assim, Moreira e David (2007), bem como Vinner (2002), consideram que a definição formal não desempenha um papel significativo na construção dos conceitos pelos estudantes da Educação Básica.

Por outro lado, consideramos que o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, não envolve apenas o conhecimento isolado de definições formais, mas a mobilização do conceito definição (que pode ser ou não a definição formal) e organização das ideias em uma sequência lógica. De acordo com Tall (2002), o PMA envolve vincular os conceitos em sequências de argumentos dedutivos e com isso resolver conflitos cognitivos. Assim, nessa perspectiva, consideramos que o PMA possa contribuir para que os professores resolvam conflitos cognitivos que possam surgir em sala de aula, pois permite que os diferentes conceitos imagem para um mesmo objeto sejam identificados como equivalentes ou contraditórios.

Se esses conflitos não forem resolvidos, concepções inadequadas podem ser reforçadas. Isso pode ocorrer ao surgir uma conjectura ou a partir de uma pergunta de um aluno em sala de aula. Ainda, em situações como essas, raciocínios pouco rigorosos empregados nas justificativas podem levar a empasses ou a uma circularidade lógica, conforme lembram Moreira e David (2007). Empasses podem ocorrer em uma situação na qual alguns alunos apresentam exemplos que reforçam uma ideia e outros apresentam exemplos que a desvigoram. Uma vez que os estudantes, desenvolvendo seu PME, podem apresentar dificuldades para resolver esse conflito, os professores podem mobilizar seu PMA e promover uma mediação, convictos da validade proporcionada pelo sequenciamento lógico de seus argumentos.

Portanto, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, o PMA pode ser pouco requisitado no desenvolvimento do PME, com sua contribuição se reduzindo a fazer com que o PME pareça mais fácil de desenvolver, acrescentar argumentos lógicos ao convencimento e favorecer alguns processos de pensamento. No entanto, para a prática dos professores de Matemática, o PMA pode contribuir para o preenchimento de lacunas originadas de um pensamento matemático unicamente elementar, tais como dúvidas quanto à validade de resultados, conjecturas ou concepções em que o PME isolado não fornece uma certeza absoluta e não permite resolver conflitos gerados por imagens conflitantes.

Essas possíveis contribuições referem-se ao Conhecimento do Conteúdo e Estudantes, principalmente quanto às concepções inadequadas que costumam surgir em sala de aula, e ao Conhecimento Especializado do Conteúdo que permite aos professores validarem ou invalidarem conjecturas.

Outra contribuição do PMA dos professores que identificamos na perspectiva do pensamento formal-axiomático, inspirados nas afirmações de Moreira e David (2007), consiste em evitar a promoção de uma compreensão equivocada da validação das sentenças matemáticas na Educação Básica, o que se relaciona ao Conhecimento do Conteúdo no Horizonte dos professores. Embora não seja simples delimitar o que seria uma compreensão equivocada da validação das sentenças matemáticas no contexto da Educação Básica, Moreira e David (2007, p. 27) afirmam que um caso extremo seria considerar que “basta eu acreditar para se considerado verdadeiro”. Por outro lado, exigir que as justificativas na Educação

Básica sejam formais como na Matemática Acadêmica recairia na vigilância epistemológica (MOREIRA; DAVID, 2007). Assim, consideramos que uma compreensão adequada da validação das sentenças matemáticas na Educação Básica é que essa validação exige justificativas logicamente consistentes e convincentes, embora não tão rigorosas e organizadas em um sistema formal-axiomático como são requisitadas pelos matemáticos.

Com isso, ponderamos que, embora o PMA (na perspectiva do pensamento formal-axiomático) e o conhecimento de Matemática Acadêmica possam contribuir para que os professores evitem promover a concepção de que a Matemática aceita resultados sem justificativas, eles não são suficientes para o juízo do quanto de rigor e raciocínio lógico são satisfatórios na validação dos resultados na Educação Básica.

Passemos a comentar algumas possíveis contribuições do PMA para o PME conforme outras perspectivas desses pensamentos.

Retomando um assunto que discutimos na Seção 3.2 do Capítulo 3, de acordo com Moreira e David (2007), a Matemática Acadêmica associa-se a uma visão do conhecimento matemático como um sistema formal-dedutivo, em que as definições formais representam os conceitos diretamente no seu aspecto estrutural, o que oculta as etapas de interiorização e condensação importantes para a reificação. Segundo os autores, essa visão é insuficiente e inadequada para a Matemática Escolar, em que o aspecto operacional precede o estrutural, conforme Sfard (1991).

Concordamos com Moreira e David (2007) que essa visão do conhecimento matemático unicamente como um sistema formal-dedutivo oculta a importância das fases de interiorização, condensação e reificação para o ensino na Educação Básica. Contudo, isso não significa que o conhecimento de concepções estruturais dos conceitos seja incompatível com concepções operacionais.

Na perspectiva das concepções dos conceitos, o PMA envolve um pensamento proceitual flexível, não apenas a concepção estrutural (seja da Matemática Acadêmica ou da Matemática Elementar). Nessa perspectiva, o PMA bem desenvolvido requer esquemas que envolvem concepções operacionais e estruturais, além da transição flexível entre elas.

Essa transição está relacionada ao processo de síntese, no qual as concepções são comprimidas e inter-relacionadas (DREYFUS, 2002). De acordo com Dreyfus (2002), uma vez experienciado o *insight* que permite ver os objetos comprimidos, o processo é irreversível.

> [...] portanto, é muito difícil para o matemático se colocar no estado de espírito do estudante que ainda não alcançou essa síntese, e ver não apenas quanto detalhe está envolvido no aprendizado de conceitos e operações simples, mas quanto trabalho detalhado com esses conceitos e operações é necessário para poder começar a sintetizar. (DREYFUS, 2002, p. 35-36, tradução nossa).

Sendo assim, de acordo com Dreyfus (2002) e Ball e Bass (2000), cabe aos professores essa difícil tarefa de descomprimir o que já foi aprendido, revelando detalhes que foram sendo esquecidos. "Para fazer isso [reorganizar o que se sabe em resposta a um contexto particular], é necessário ser capaz de desconstruir o próprio conhecimento matemático em uma forma menos polida e formal, em que componentes elementares são acessíveis e visíveis” (BALL; BASS, 2000, p. 98, tradução nossa). Ball e Bass (2000) chamam isso de *decompression*, que traduzimos para descompressão. De acordo com os autores, os professores precisam fazer o caminho de volta do entendimento compactado do conteúdo para desempacotar seus elementos constituintes.

Ball, Thames e Phelps (2008), abordando o Conhecimento Especializado do Conteúdo, apresentam alguns exemplos de modos nas quais os professores da Educação Básica trabalham com o conhecimento matemático descomprimido: para ensinar valor posicional, o que requer uma compreensão do sistema numérico posicional além do Conhecimento Comum do Conteúdo; abordar como a linguagem matemática é utilizada; escolher representações adequadas a cada situação; explicar ideias matemáticas específicas. McCrory *et al*. (2012) abordam o processo de descompressão no ensino de Álgebra e mencionam professores que descomprimiram o significado das identidades, explicando em detalhes por que equações que produziam resultados como $0 = 0$ quando simplificadas são verdadeiras para todos os números reais.

Nesse sentido, o PMA, na perspectiva das concepções dos conceitos, pode contribuir para a descompressão do conhecimento de aspectos estruturais para aspectos operacionais a serem abordados com os estudantes da Educação Básica, pois envolve a compreensão de ambos e a flexibilidade de transição entre eles. Tal descompressão, conforme Ball, Thames e Phelps (2008), é própria dos professores, o que a caracteriza como um Conhecimento Especializado do Conteúdo.

Por fim, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PMA envolve tanto processos de PME quanto alguns mais complexos (tais como processos relacionados com abstração), característicos do PMA (DREYFUS, 2002).

Nessa perspectiva, a linha entre o PMA e o PME é tão tênue que é difícil dizermos quais processos são de PMA. Por exemplo, na Figura 2 (Capítulo 2), observamos que Klaiber (2019) considera os processos relacionados com representação no PME. No entanto, Dreyfus (2002) destaca a complexidade da mudança de representação, que pode envolver muita informação a ser tratada, bem como Klaiber (2019) observa a relação entre a integração de diferentes representações e o processo de síntese. Assim, ao descrever tal figura, a autora esclarece que:

> O quadro pontilhado abrangendo os processos e subprocessos relacionados ao processo de *representação* simboliza que tais processos estão presentes tanto no PME quanto no PMA, e que a fronteira entre estes dois tipos de pensamento não é tão clara e definida, como foi exposto por Dreyfus (2002). (KLAIBER, 2019, p. 55, grifo da autora).

Assim, consideramos que uma análise mais específica de cada mudança de representação poderia fornecer melhores indícios de um processo desse tipo ser ou não de PMA.

De todo modo, podemos concluir que o PMA contribui para o domínio de diversos processos de pensamento matemático, incluindo os de PME.

Na próxima subseção, aproveitamos essas relações que discutimos entre o PME e o PMA para abordarmos possíveis contribuições do PMA dos professores para a articulação entre diferentes conhecimentos matemáticos.

6.2.3 Articulação Matemática

A prática dos professores de Matemática envolve Conhecimento Comum do Conteúdo da matemática da Educação Básica, Conhecimento Especializado do Conteúdo, característico da profissão que exercem, e Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, que envolve conhecimentos matemáticos ao longo do currículo e pode incluir conhecimentos de Matemática Avançada (BALL;

THAMES; PHELPS, 2008; JAKOBSEN *et al.*, 2012). No entanto, relacionar esses diversos conhecimentos matemáticos, ainda com os conhecimentos do conteúdo vinculados a estudantes, ensino e currículo, de forma a utilizá-los para compreender os estudantes e tomar decisões em sala de aula, pode ser algo complexo. Nesta seção, finalizamos a argumentação teórica deste capítulo com possibilidades que o PMA confere para essa articulação entre os conhecimentos matemáticos dos professores.

Primeiramente, em procedência das ideias discutidas na subseção anterior, temos alguns apontamentos quanto a possíveis contribuições do PMA (nas perspectivas da complexidade dos processos de pensamento e das concepções dos conceitos) para um conhecimento mais profundo da Matemática Elementar.

Moreira e David (2007) apresentam alguns exemplos de conhecimentos a respeito de números necessários à prática docente na Educação Básica. Entre eles, destacamos a lógica dos algoritmos das operações básicas:

> O uso dos algoritmos formais para as operações básicas, diferentemente do uso das calculadoras, traz à tona a questão da lógica do seu funcionamento e coloca, para o professor da escola, a necessidade de uma percepção clara dos princípios em que se baseia a sua justificativa, ou seja, a explicação das razões pelas quais eles fornecem os resultados corretos. (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 58)

De acordo com os mesmos autores, os tipos de dificuldades que os estudantes da Educação Básica costumam demonstrar com as operações são muito diferentes, do ponto de vista do ensino. Uma formação focada na Matemática Acadêmica pode ignorar essas questões importantes, segundo Moreira e David (2007).

Com relação ao PMA, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o domínio das propriedades dos conjuntos numéricos, do sistema de representação e suas relações com os algoritmos favorece, aos professores, o entendimento da lógica operacional para as operações aritméticas básicas. O processo de generalização permite o entendimento de como os algoritmos sempre funcionam, a partir das propriedades.

Esse entendimento permite que, a partir dos tipos de erros dos alunos, como dificuldades quando ‘vai 1’, os professores identifiquem lacunas no saber discente que geram o erro. Por isso, esse é um Conhecimento Especializado do Conteúdo, conforme Ball, Thames e Phelps (2008):

> [...] ensinar envolve mais do que identificar uma resposta incorreta. O ensino habilidoso requer a capacidade de avaliar a origem de um erro matemático. Além disso, esse é um trabalho que os professores devem fazer rapidamente, muitas vezes na hora, porque, em uma sala de aula, os estudantes não podem esperar enquanto o professor quebra-cabeças sobre a matemática. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 397, tradução nossa).

Outro exemplo que destacamos são as representações decimais infinitas, principalmente as não-periódicas. Nesse assunto, Moreira e David (2007) indicam complicações para a concepção estrutural de número real na Matemática Escolar. Formalmente, um decimal infinito é uma soma infinita que converge para um número real. É comum de os estudantes da Educação Básica possuírem a ideia de que os decimais infinitos não especificam exatamente o valor do limite, desenvolvendo uma ideia de aproximação e não de precisão do valor do número. Por um lado, a abordagem escolar favorece essa concepção inadequada. Por outro, o enfoque da Matemática Acadêmica, que define a representação decimal pelo limite de uma série, dificilmente pode ser adaptado para o contexto escolar (MOREIRA; DAVID, 2007). Uma argumentação convincente, proposta pelos autores, diz respeito à representação geométrica:

> É preciso que se venha a conceber o que seja o fim de um processo que, em última instância, não tem fim. É preciso conceber a soma de infinitas parcelas como um ***objeto*** e abandonar, pelo menos provisoriamente, a percepção dela como um ***processo***. Quando se interpreta o conjunto dos reais como pontos da reta orientada, desenvolvendo-se uma representação geométrica para eles, pode-se mostrar que qualquer forma decimal infinita, além de se traduzir numa soma de infinitas parcelas, representa um único ponto da reta e, portanto, um número real. (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 96, grifo dos autores).

Nesse sentido, podemos afirmar que, na perspectiva das concepções dos conceitos, o desenvolvimento do PMA (concepções estruturais) é importante para os estudantes da Educação Básica, e pode ser apoiado, no caso dos decimais infinitos, pela representação geométrica dos números reais. Para os professores, um esquema a respeito do número real e suas representações pode ser fortalecido pelo conhecimento de convergência de séries, apoiando a sua concepção estrutural da representação decimal infinita. Assim, o PMA pode favorecer o Conhecimento Especializado do Conteúdo dos professores da Educação Básica e sua articulação com o Conhecimento Comum do Conteúdo.

Ainda com relação a essa articulação, na Matemática Escolar, a forma decimal é mais que uma representação, ela é vista como o próprio número. Moreira e David (2007) destacam que essa identificação com a representação concreta é uma fase importante do aprendizado. No entanto, conforme apontam os autores, os professores não podem ter uma percepção confusa da distinção entre a noção abstrata de número real e uma de suas formas concretas de representação. Necessitam de uma flexibilidade que ora permita tomar a forma concreta, ora a forma abstrata. Na perspectiva das concepções dos conceitos, essa flexibilidade é uma característica do PMA.

Considerando que os conhecimentos profissionais dos professores não se reduzem a uma “Matemática certa” (a Matemática Acadêmica), Moreira e David (2007) complementam:

> Uma vez que, na prática escolar, o professor estará lidando com alunos de diferentes séries e ciclos do Ensino Básico, o processo de apreensão dos conceitos vai se encontrar em diferentes estágios de elaboração entre esses alunos. O desenvolvimento de uma visão flexível e multifacetada do conhecimento matemático pode contribuir decisivamente para que o professor seja capaz de dialogar com seus alunos, de reconhecer e validar, quando for o caso, certos pontos de partida adotados para a construção de um conceito ou de avaliar uma determinada elaboração conceitual como adequada para certo estágio, ainda que se mostre necessária uma reelaboração em estágios posteriores. (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 53).

Essa visão multifacetada requer um conceito imagem fortalecido, com imagens coerentes entre si (TALL; VINNER, 1981), que permite lidar com um conceito de diferentes formas sem contradizê-las.

Além disso, essa visão flexível do conhecimento matemático pode contribuir para que os professores articulem seus conhecimentos de Matemática Avançada e Elementar. Mas essa articulação não é trivial. Investigando o conhecimento de definições matemáticas de futuros professores de Matemática, Leikin e Zazkis (2010) observaram uma lacuna entre o que é aprendido na universidade e a matemática da escola básica. A exemplo disso, consideremos o conhecimento dos números em sua estrutura lógico-formal que, segundo Moreira e David (2007), elimina tudo o que considera não essencial, incluindo o significado concreto dos objetos no ensino escolar.

Como discutimos no Capítulo 3, ainda não há consenso na Educação Matemática quanto a contribuições da Matemática Avançada para o ensino na Educação Básica. Em um contexto de formação inicial de professores, conforme analisam Moreira e David (2007), questões importantes da formação podem ser deixadas de lado se a licenciatura priorizar a construção da estrutura lógico-formal da Matemática Acadêmica em detrimento do significado concreto dos objetos da Matemática Escolar.

Contudo, havendo possibilidades de contribuição da Matemática Avançada para o ensino na Educação Básica, faz sentido que o estudo dessa matemática seja realizado por professores, desde que não prejudique o conhecimento dos aspectos mais diretamente vinculados ao trabalho de ensinar na escola.

Sendo assim, em um possível contexto propício para que os professores estudem a estrutura formal da Matemática Acadêmica, consideramos que uma articulação entre o PMA e o PME (especialmente na perspectiva do pensamento formal-axiomático) pode contribuir para que os professores tenham flexibilidade entre a abstração da Matemática Acadêmica e a corporificação dos conceitos presente na matemática da Educação Básica.

Focando na perspectiva do pensamento formal-axiomático, uma articulação entre o PME e o PMA seria, interpretando as caracterizações de Tall (2002), uma articulação entre as descrições e as definições formais, de forma que as definições possam enriquecer as descrições, além de uma articulação entre a consequência e a coerência, entre a prova e o convencimento, de forma que as ideias da prova e da lógica que estrutura as deduções matemáticas possam contribuir para ideias que dão coerência e convencimento da validade das sentenças.

Quanto ao Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, essa articulação envolve a flexibilidade para professores verem um ‘quadro maior’ quando estiverem ensinando um assunto na escola básica, conforme (JAKOBSEN *et al*., 2012, p. 4641, tradução nossa):

> [...] o conhecimento do conteúdo do horizonte requer ter maneiras de pensar sobre ideias com pinceladas mais amplas - ver o quadro maior em termos de entender as relações entre matemática avançada específica e ideias específicas que surgem no conteúdo sendo ensinado e aprendido na escola e de situar isso matemática avançada dentro de um conjunto mais amplo de questões matemáticas.

A capacidade de ver um ‘quadro maior’ está relacionado ao processo de síntese (característico do PMA na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento), uma vez que envolve a composição de partes que permite formar única imagem, conforme caracterizado por Dreyfus (2002). Isso envolve um processo de abstração, como, por exemplo, no reconhecimento da situação de deslizar uma linha por um retângulo até formar duas partes de mesma área iguais como uma aplicação do Teorema do Valor Intermediário, abordada por Jakobsen *et al*. (2012).

Há, ainda, a possibilidade de lacunas no conhecimento de Matemática Elementar dos professores (Conhecimento Comum do Conteúdo), conforme discutimos no início desta Seção 6.2, mas que nesta Subseção 6.2.3 consideramos a possibilidade de um suporte da Matemática Avançada. É possível que professores não se lembrem de um detalhe ou outro de algum tópico específico, mas consigam mobilizar o que sabem de conhecimentos mais avançados em seu Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, como uma definição formal, e utilize-os para realizar deduções que permitam concluir a validade de alguma proposição. Essa dedução é um processo de PMA, nas perspectivas do pensamento formal-axiomático e da complexidade dos processos de pensamento.

Nem sempre a definição formal é trabalhada explicitamente na Educação Básica. Em alguns casos, o PMA pode contribuir para professores adaptarem a definição formal para o contexto da Educação Básica, mobilizando seu Conhecimento do Conteúdo e Estudantes e do currículo. Entendemos, de acordo com Moreira e David (2007), que essa adaptação não possa ser de forma a impor a lógica da Matemática Acadêmica à Matemática Escolar, mas em muitos casos as definições são compatíveis, como nas definições de função, quadrilátero, equação do segundo grau, polinômios e outras.

É comum, na Matemática Escolar, definições que descrevem melhor os conceitos, diferente da formalização, que, por sua vez, prima pela minimalidade das informações contidas na definição, conforme sustenta Vinner (2002). Com o PMA (na perspectiva do pensamento formal-axiomático), o professor terá melhores condições de avaliar se uma definição com descrições a mais que o necessário é equivalente à definição mais resumida.

Na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PMA envolve a reflexão e autorregulação do próprio pensamento matemático. Segundo Resnick (1987), o Pensamento de Ordem Superior só é reconhecido quando o indivíduo ‘chama o jogo’ em cada passo (toma iniciativa), pois envolve autonomia e autorregulação. De acordo com Dreyfus (2002), a reflexão a respeito da própria experiência matemática é importante na resolução de problemas não triviais e um aspecto importante da metacognição, sendo uma característica do PMA.

Portanto, o PMA pode contribuir para que os professores da Educação Básica possam refletir e autorregular o próprio pensamento matemático. Isso envolve a relação dos professores com o seu Conhecimento do Assunto.

Ainda com relação a articulações no conhecimento matemático dos professores da Educação Básica, podemos destacar algumas questões envolvendo justificativas.

Segundo Moreira e David (2007), os professores de Matemática possuem tarefas delicadas, como identificar argumentos convincentes e adaptáveis ao estágio de desenvolvimento cognitivo dos estudantes, além de analisar deficiências na forma como o assunto é desenvolvido no livro adotado.

Para identificar argumentos de Matemática Avançada que possam ser utilizados na Educação Básica, é necessário domínio desses argumentos, em um grau de abstração que permita relacioná-los com outros argumentos semelhantes, e um conhecimento dos estudantes para decidir se os argumentos adaptados da Matemática Avançada podem ser compreendidos pelos estudantes do contexto de ensino. Essa abstração é característica do PMA nas perspectivas do pensamento formal-axiomático e da complexidade dos processos de pensamento.

De acordo com Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013, p. 3128, tradução nossa, grifo dos autores), “o HKC inclui o conhecimento explícito de caminhos e ferramentas para conhecer, na disciplina, os tipos de conhecimento e suas garantias, e de onde as ideias vêm e como a ‘verdade’ ou validade é determinada”.

Embora o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, foque em provas, consequências, e o PME em justificativas, coerência (TALL, 2002), há casos em que a prova pode ser a justificativa. Há, ainda, casos em que é possível que a prova formal sustente uma justificativa menos rigorosa, desde que a generalidade do argumento seja bem entendida pelos professores:

> A estratégia de trabalhar com exemplos particulares para mostrar a validade geral de um processo matemático (ou de uma afirmação) precisa ser muito bem entendida pelo professor, porque se, por um lado, tem a grande vantagem de evitar o uso de uma notação carregada, que pode até impossibilitar o acompanhamento da

> argumentação por parte do aluno, por outro, não deve induzir o entendimento de que basta verificar que o processo funcione (ou que a afirmação seja válida) em um determinado número de casos particulares para se poder concluir que vale sempre. O aluno precisa entender que, mesmo que o teste dê certo em um milhão de casos, nada garante que dará certo sempre, a não ser que se faça uso de um argumento geral, que não dependa das particularidades dos números presentes nos exemplos testados. (MOREIRA, 2020, p. 243).

Assim, para elaborar explicações referenciadas em exemplos numéricos, mas observando que o argumento utilizado é geral, os professores precisam entender a demonstração geral para utilizar seu argumento na justificativa particular, o que pode ter suporte do PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático. Precisam, ainda, ter domínio da generalização, um processo de PMA nas perspectivas da complexidade dos processos de pensamento e do pensamento formal-axiomático.

Como exemplo, consideremos justificar o Lema de Euclides: “se um número primo p divide um produto de inteiros $a \cdot b$, então p divide a ou b”. Moreira (2020) utiliza essa sentença para justificar a unicidade da decomposição em fatores primos com exemplos numéricos:

> Suponhamos que alguém alegasse ser possível encontrar uma fatoração em primos de 15.400, na qual figurasse, por exemplo, o fator primo 3. Ora, neste caso sabemos que 3 seria um divisor (primo) de 15.400 = 2x7.700. Então, pelo que mostramos [...], 3 deveria dividir 7.700 (já que não pode dividir o 2, por ser maior que 2). No entanto, como 7.700 = 2x3.850, o 3 deveria, pelas mesmas razões, dividir 3.850. Prosseguindo do mesmo modo, podemos concluir que 3 teria que dividir 1.925, o que não acontece, uma vez que para chegar à fatoração de 15.400 na seção anterior, testamos a divisibilidade de 1.925 por 3 antes de passarmos ao fator 5. Então podemos concluir que 3 não pode aparecer em nenhuma fatoração de 15.400. (MOREIRA, 2020, 243).

Para justificar o Lema de Euclides sem cair em uma circularidade lógica e sem ter que utilizar o Princípio de Indução Matemática ou a Identidade de Bezout[60], Moreira (2020) propõe a seguinte prova para o sexto ano do Ensino Fundamental: da hipótese $p \cdot m = a \cdot b$ para algum m inteiro, então as frações a/p e m/b são equivalentes e, sendo a/p irredutível (se o primo p não divide a), segue que m e b são múltiplos, respectivamente, de a e p, o que implica que p divide b. Dessa forma, a justificativa se baseia na implicação “se uma fração é equivalente a uma

[60] Se dois números inteiros a e b são primos entre si, então existem inteiros x e y tais que $ax + by = 1$ (DOMINGUES; IEZZI, 2003; MOREIRA, 2020).

irredutível, seu numerador e denominador são múltiplos do numerador e do denominador da irredutível" (MOREIRA, 2020, p. 240), que pode ser provada na Matemática Avançada pelo Lema da Divisão de Euclides, mas é reconhecida como verdadeira por estudantes do Ensino Fundamental, segundo Moreira (2020), o que dispensa sua demonstração na Educação Básica.

De acordo com o autor, "a simbologia usada precisaria ser adaptada ao estágio de desenvolvimento da formação matemática escolar dos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental" (MOREIRA, 2020, p. 240). Façamos uma adaptação: o número inteiro 3 divide 8736, que é igual a 96×91, pois $3 \times 2912 = 8736$. Podemos concluir que 3 divide 96 ou 91? Como $3 \times 2912 = 96 \times 91$, segue que $2912/96 = 91/3$ (aqui é preciso ter cuidado com a escolha do fator a dividir, considerando que na prova geral uma das frações possui como fatores o número primo e o fator que não é divisível por ele). Assim, se 3 não divide um dos fatores, o 91, então a fração $91/3$ é irredutível e segue que 3 divide 96, pois o denominador de $2912/96$ é múltiplo do denominador de $91/3$.

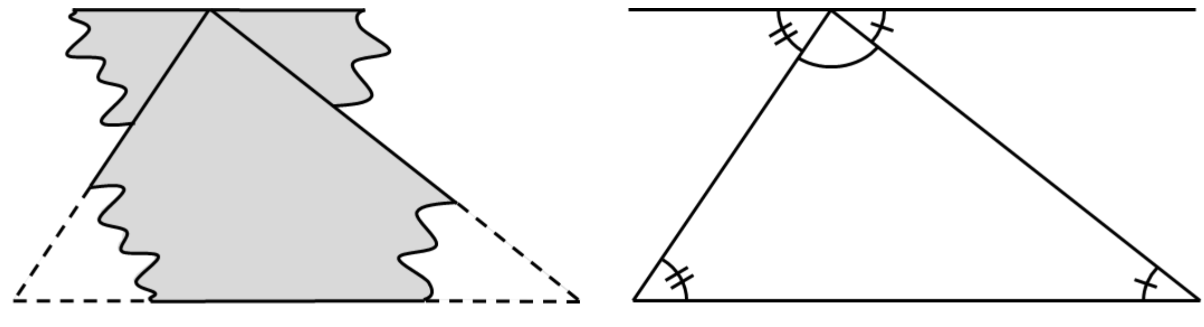
Além da dedução e do sequenciamento lógico que foram mobilizados, características do PMA na perspectiva do pensamento formal-axiomático, destacamos a generalização mobilizada para que se entenda que o argumento é geral. Não basta observar que os números são uma particularidade da demonstração geral, é preciso reconhecer a forma dessa justificativa particular para concluir que a argumentação utilizada foi independente dos números escolhidos, de forma a evitar o entendimento de que a verificação de um exemplo prova uma sentença. Isso ilustra possíveis contribuições do PMA nas perspectivas do pensamento formal-axiomático e da complexidade das concepções dos conceitos para a elaboração de justificativas e para o delineamento do ensino na Educação Básica, portanto, para o Conhecimento do Conteúdo e Ensino.

Ainda com relação a justificativas, Tall (2013) considera que uma prova não é somente uma forma de validação, mas uma questão de juntar as ideias em uma maneira matematicamente coerente que faz sentido para o indivíduo. Juntar as ideias em uma maneira matematicamente coerente é um indício de PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático.

Abordando diferentes provas para uma fórmula, Tall (2013) considera que a prova formal por indução contribui menos para os estudantes do que provas corporificadas ou simbólicas, porque não explica o porquê da fórmula ser verdadeira. Sendo assim, consideramos importante que os professores entendam qual prova é melhor para convencer matemáticos e qual é melhor para dar sentido aos conceitos entre os estudantes.

Conhecendo essas diferentes formas de validação na Matemática, os professores podem validar ou não as provas dos estudantes, sabendo até onde os argumentos com provas semelhantes são válidos, e explicando porque uma prova é válida e outra não. Consideremos agora um exemplo em Geometria. Se os estudantes do Ensino Fundamental forem solicitados a construir diferentes triângulos e investigar a soma de seus ângulos, alguns podem argumentar que a soma será sempre 180° porque isso se verifica nos triângulos construídos, mas um exemplo não prova o caso geral. Por outro lado, se alguns pensarem em juntar os ângulos de um triângulo, como na Figura 8(a), isso se aproxima da prova euclidiana pela igualdade dos ângulos alternos internos entre retas paralelas, conforme a Figura 8(b). Essa igualdade decorre do postulado das paralelas. Na Educação Básica, é possível recorrer à simetria para justificar que os ângulos alternos internos são congruentes, justificando a validade do argumento para qualquer triângulo.

Figura 8 – Soma dos ângulos internos de um triângulo



(a) (b)

Fonte: Tall (2013).

De acordo com Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013, p. 3131, tradução nossa):

> Experiências com prova no geral, e prova por contradição em particular, no contexto do ensino, fornece ao professor recursos para ouvir as ideias matemáticas por trás do argumento de Ben – ideias relacionadas às maiores estruturas e desenvolvimentos da disciplina, outra parte da nossa definição de HCK [Conhecimento do Conteúdo no Horizonte] em construção. Um professor precisa tomar decisões sobre como lidar com discussões que ocorrem em sala de aula, e fazer isso numa forma íntegra conforme os estudantes aprendam

matemática adicional.

Aproveitamos a discussão em sala de aula envolvendo o hipotético estudante Ben, de Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013), para formular a questão apresentada no Quadro 6 que abordei com alunos de licenciatura em Matemática.

Quadro 6 – Questão utilizada para discutir a situação apresentada por Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013) com futuros professores de Matemática

Em uma situação hipotética de ensino apresentada por Jakobsen, Thames e Ribeiro no artigo *Delineating Issues Related to Horion Content Knowledge for Mathematics Teaching*, de 2013, o professor Sr. Lee pede a seus alunos que forneçam exemplos de números racionais ou irracionais aprendidos anteriormente. Um estudante, Jay, sugere $2\sqrt{2}$. Ao passo que o professor pergunta: "E $2\sqrt{2}$ é racional ou irracional?". Para sua surpresa, Jay responde que é racional, e passa a ter o seguinte diálogo com outro estudante Ben:
Jay: Se você tem um número racional e um número irracional e os multiplica, o produto será um racional e você ainda terá uma fração.
Ben: Eu acho que não, porque quando multiplicamos um racional por um inteiro, ainda temos um racional – acho que é o mesmo... o produto de um irracional e um racional será irracional.
Jay: Olha..., digamos que você tenha um racional a/b e multiplique pelo irracional v, você obtém av/b, que é racional, viu?
Ben: Não, isso não pode ser... se for racional… isso só é possível se a/b for zero, e não foi o caso.
Jay: O que?… Como assim?
Ben: Ah, agora eu entendo porque você está dizendo que é racional... você estava se esquecendo de algo... bem..., se o produto é racional, então v também é racional, e não pode ser porque dissemos no início que é irracional...
Com base nessa situação hipotética de ensino, responda:
a) Quais argumentos apresentados pelos estudantes estão coerentes e quais estão equivocados? Justifique-os.
b) Se estivesse no lugar do Sr. Lee, como você mediaria esse diálogo?

Fonte: os autores, com diálogo transcrito e traduzido de Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013).

Segundo Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013), para lidar com essa situação, o professor precisaria decidir se o argumento apresentado por Ben está correto, se vale a pena persegui-lo, em especial por conta de o argumento ir além dos objetivos do Ensino Fundamental. Situações como essa exigem que os professores coloquem em prática todo o seu conhecimento intuitivo (JAKOBSEN; THAMES; RIBEIRO, 2013).

Os argumentos de Jay (Quadro 6) foram refutados por alguns dos futuros professores, participantes da pesquisa. Um deles dissertou: "Jay está equivocado ao afirmar que a multiplicação de um número racional por um irracional o produto do mesmo será uma fração e por isso ele é irracional. Pela definição de número racional, precisamos garantir que tanto o numerador quanto o denominador sejam números inteiros, logo, quando Jay nos dá o exemplo temos que o numerador é um produto de um inteiro por um irracional, ou seja, o produto será um número irracional". Outros preferiram utilizar a notação de Jay, por exemplo: "racional $\frac{a}{b}$ multiplicado pelo irracional $v = \frac{av}{b}$. [temos que] $\frac{av}{b} \notin \mathbb{Q}$ pois um número $\frac{x}{y}$ é racional se x e $y \in \mathbb{Z}$ [e] $av \notin \mathbb{Z}$". Apesar de dificuldades com a notação e de não verificarem o caso $a = 0$, há um sequenciamento lógico nos argumentos e mobilização da definição de $\mathbb{Q}$ para essas refutações ao argumento de Jay.

Analisando agora o segundo argumento de Ben, temos que o produto de um racional a/b por um número irracional v ser um número racional c/d significa que $\frac{av}{b} = \frac{c}{d}$. Supondo $a \neq 0$, isso leva a $v = \frac{bc}{ad}$, com $bc, ad \in \mathbb{Z}$. Segue que v é racional, uma contradição, conforme observada por Ben.

Sendo assim, nessa situação hipotética apresentada por Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013), um estudante utiliza um argumento de redução ao absurdo em uma discussão em sala de aula. Na perspectiva do pensamento formal-axiomático, o PMA contribui para o sequenciamento lógico da demonstração por contradição. Assim, com o PMA, os professores poderão compreender a validade desse raciocínio e explicá-lo aos estudantes. Nesse tipo de situação, os professores decidem se é possível explicar o argumento avançado aos estudantes de alguma forma ou se é melhor validar o argumento do estudante, mas explicá-lo de outra forma. Por isso, essas situações exigem preparo dos professores quanto ao Conhecimento do Conteúdo e Estudantes e ao Conhecimento do Assunto, incluindo a lógica matemática.

De todo modo, utilizando ou não o que conhecem de Matemática Acadêmica para fornecer uma explicação aos estudantes, os professores têm o desafio de compreender os argumentos e validá-los. Entendemos, portanto, que o PMA pode contribuir para os professores da Educação Básica utilizarem seu Conhecimento do Conteúdo no Horizonte de forma eficaz no ensino, o articulando ao conteúdo trabalhado.

Além dessa compreensão da lógica dos argumentos, outro ponto que podemos destacar é a compreensão de processos de pensamento matemático desenvolvidos pelos estudantes. Mesmo sem conhecer o referencial teórico do PMA, o desenvolvimento do PMA dos professores, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, favorece a compreensão de processos desenvolvidos pelos estudantes. Nessa perspectiva, os processos de PMA desenvolvidos por estudantes da Educação Básica podem estar relacionados ao Conhecimento Comum do Conteúdo ou mesmo a algo além do que está sendo estudado. Por exemplo, a generalização da soma dos ângulos internos de um triângulo a partir da junção dos ângulos (Figura 8) está associada ao Conhecimento Comum do Conteúdo na Matemática Escolar. No entanto, caso algum estudante perceba que se forma uma reta paralela à base do triângulo passando pelo vértice oposto, é uma oportunidade para o professor mobilizar seu Conhecimento do Conteúdo no Horizonte para validar essa generalização, promovendo uma explicação convincente para a turma. Em casos como esse, a capacidade dos professores em desenvolver processos de PMA é mobilizada para compreender os processos desenvolvidos pelos estudantes e compreender o pensamento matemático de seus alunos.

Assim, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PMA pode contribuir para que os professores compreendam processos de pensamento matemático desenvolvidos pelos estudantes, possivelmente mobilizando seu Conhecimento do Conteúdo no Horizonte e desenvolvendo o Conhecimento do Conteúdo e Estudantes.

Soluções inesperadas podem exigir do pensamento matemático dos professores. Atualmente, o avanço no acesso a informação torna ainda mais provável que novos conhecimentos se confrontem com os que professores esperam mobilizar em sala de aula. Ou ainda, com esse acesso à informação, é possível os próprios professores considerem abordar tais conhecimentos. Porém, isso requer algumas competências dos docentes.

Consideremos um exemplo disso relacionado à divisibilidade dos números inteiros, ensinada no 6º ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018).

Uma página de internet publicou a notícia: “Nigeriano de 12 anos é premiado após descobrir nova fórmula de dividir [sic] na matemática” (SANTOS, 2019, s. p.). Nela, é explicado um método encontrado por uma criança de 12 anos para verificar se um número inteiro é divisível por 7. O método consiste em multiplicar o número formado pelo algarismo das unidades por 5 e somar com o restante do número obtido ignorando-se as unidades e tornando as dezenas unidades, as centenas dezenas, e assim por diante. A reportagem afirma que se o novo número obtido for divisível por 7, então o número original é divisível por 7.

Por exemplo, o número 987 será divisível por 7 se o número 98 + 5×7 = 133 for divisível por 7. Analogamente, o número 133 será divisível por 7 se o número 13 + 5×3 = 28 for divisível por 7. Como 28 é divisível por 7, concluímos que 133 e 987 são divisíveis por 7.

Além disso, na reportagem é descrito que o menino também descobriu que o teste funciona se o último algarismo for multiplicado por 12, 19, 26, e assim por diante. Por exemplo, 133 é divisível por 7 pois 13 + 12 × 3 = 49 é divisível por 7.

A reportagem traz muitos exemplos que podem convencer um leitor comum de que o método será sempre válido. Mas muitos exemplos não garantem a validade de uma sentença matemática. Um professor de Matemática da Educação Básica, ao ler a reportagem, pode ver uma oportunidade de ensinar o critério de divisibilidade por 7 em suas aulas, que é um critério deixado de lado em alguns livros didáticos que abordam os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10. No entanto, precisa ter certeza de que o método sempre vai funcionar antes de levá-lo à sala de aula. Seria adequado ter uma prova, ou ao menos uma informação de fonte confiável (como um artigo científico ou de um livro didático) de que esse é um método comprovado.

Tratando-se de um método novo, o professor não tem acesso à prova, podendo contar apenas com a afirmação da reportagem de que a 'fórmula' foi provada algebricamente por um professor de Matemática.

Aqui, o PMA pode mudar a forma como o professor vai lidar com a situação. O PMA desenvolvido, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, pode auxiliar um professor a elaborar uma demonstração, possivelmente como no Quadro 7:

Quadro 7 – Demonstração de um critério de divisibilidade por 7

Um número inteiro n maior que 9 pode ser escrito como $n = 10n_1 + n_2$, onde n_2 é o número formado pelo último algarismo de n e n_1 é o número formado pelos outros algarismos. Assim, o que pretendemos provar é que $7\|(10n_1 + n_2)$ se, e somente se, $7\|(n_1 + 5n_2)$. Mas $7\|(10n_1 + n_2)$ equivale a dizer que $7\|(50n_1 + 5n_2)$, sendo que o fato de 5 e 7 serem primos entre si garante a volta. Por sua vez, temos que $7\|(49n_1 + n_1 + 5n_2)$ se, e somente se, $7\|(n_1 + 5n_2)$, pois é sempre válido que $7\|49n_1$.

Fonte: os autores

O professor precisará analisar o nível de abstração da demonstração para decidir se é possível adaptá-la a uma forma que os estudantes compreendam ou fornecer outro argumento para validar o critério na escola básica. Nesse caso, é possível recorrer a exemplos numéricos, decompondo números até que os estudantes entendam que o mesmo argumento pode ser aplicado aos outros números inteiros, como mencionamos anteriormente com base em Moreira (2020) em um exemplo envolvendo decomposição de números primos. No caso da divisibilidade por 7, pode ser explicado aos estudantes do Ensino Fundamental que $273 = 27 \times 10 + 3$ é divisível por 7 se $27 \times 50 + 3 \times 5 = 27 \times 49 + 27 + 3 \times 5$ é divisível por 7, que por sua vez é divisível por 7 se $27 + 3 \times 5$ for divisível por 7. Depois de trabalhados mais alguns exemplos, os estudantes poderão perceber a regularidade do argumento, marcada pela multiplicação por 5 e separação em $(49 + 1)$ vezes o número obtido pelos algarismos a partir da casa das dezenas, compreendendo a validade do critério de divisibilidade na Matemática Escolar, mesmo sem ainda dominarem o processo de abstração necessário para a compreensão da prova formal. Nessa possível abordagem, a explicação na Educação Básica surge da formalização da Matemática Acadêmica, o que pode se apoiar no PMA dos professores para formulá-la, na perspectiva do pensamento formal-axiomático.

Outro método conhecido para verificar a divisibilidade por 7 é subtrair o dobro do número formado pelo último algarismo do número formado pelos algarismos restantes, ou seja, dado $n = 10n_1 + n_2$, verificar se $n_1 - 2n_2$ é divisível por 7. Esse método é amplamente divulgado na internet e encontrado em alguns livros didáticos. No entanto, ele possui alguns problemas, como quando a subtração resulta um número negativo, considerando que os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental aprendem divisibilidade sem terem ainda estudado números inteiros, tal como disposto na BNCC (BRASIL, 2018). O professor pode mobilizar seu Conhecimento do Conteúdo e Currículo quanto a essa questão. Talvez seja esse um dos motivos de alguns livros didáticos não abordarem esse critério de divisibilidade.

Esse último método citado é compreendido na generalização observada pelo menino nigeriano, de que podemos multiplicar o último algarismo por 12, 19, 26, etc., sendo que nesse caso o fator é –2. Essa generalização pode ser provada como no Quadro 8.

Quadro 8 – Demonstração do critério geral de divisibilidade por 7

Já provamos que um número inteiro n é divisível por 7 se, e somente se, é divisível por $n_1 + 5n_2$, em que n_2 é o último algarismo de n e n_1 é o número formado pelos outros algarismos. Isso é equivalente a dizer que $7\|(n_1 + 5n_2 + 7kn_2)$, sendo k um número inteiro. Logo, n é divisível por 7 se, e somente se $7\|(n_1 + (5 + 7k)n_2)$, com k inteiro. Portanto, podemos utilizar qualquer número inteiro congruente a 5 em módulo 7 no teste de divisibilidade, incluindo o -2.

Fonte: os autores

Esse é um exemplo de como o PMA dos professores de Matemática pode contribuir para o ensino na Educação Básica, especialmente nas perspectivas do pensamento formal-axiomático e da complexidade dos processos de pensamento, devido às deduções e generalizações. Os professores podem se deparar com sentenças que não são comprovadas pela academia e, um dos possíveis suportes para que se assegurem dessa validade, decidindo se a integram à sua aula, poderia ser o PMA. Além disso, a intuição acurada para avaliar a validade de conjecturas que podem surgir em sala de aula é um indício de PMA, conforme as três perspectivas que abordamos no Capítulo 2, associada a conceitos imagem ricos e fortemente relacionados (DREYFUS, 2002; TALL, 2002; TALL; VINNER, 1981).

Hoje em dia, é comum métodos como esses serem encontrados na internet sem uma justificativa formal, apenas com exemplos. Não somente os professores podem se deparar com esses métodos, mas também os estudantes. Os estudantes da Educação Básica possuem, em geral, um acesso a informações, mas podem não possuir os saberes necessários para lidar com as informações e validá-las. Por isso, é importante que os professores os guiem em meio às informações, considerando a possibilidade de definições e conclusões equivocadas presentes nos endereços eletrônicos.

Um conhecimento matemático como esse, encontrado na internet, pode surgir em sala de aula pela expressão de um estudante. Abordei essa possibilidade com licenciandos em Matemática, por meio da questão enunciada do Quadro 9 a seguir:

Quadro 9 – Questão utilizada para discutir um critério de divisibilidade por 7 com futuros professores de Matemática

Em uma aula hipotética no sexto ano do Ensino Fundamental, foram abordados os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10. O professor justificou todos os critérios abordados. Por exemplo, ao justificar o critério de divisibilidade por 3, o professor utilizou exemplos em que os números eram decompostos de acordo com as casas decimais, como: $123 = (100 \times 1) + (10 \times 2) + (1 \times 3)$ $= (99 \times 1) + (9 \times 2) + (1 + 2 + 3)$ Assim, considerando que $(99 \times 1) + (9 \times 2)$ é divisível por 3, 123 será divisível por 3 pois $1 + 2 + 3$ é divisível por 3. Após vários exemplos, estabeleceu-se que um número é divisível por 3 se a soma de seus algarismos é divisível por 3.   Na aula seguinte, um estudante questionou o professor: – Professor! Porque não estudamos um critério de divisibilidade por 7? Eu encontrei alguns na internet. Olha esse! É só multiplicar o número formado pelo algarismo das unidades por 5 e somar com o restante do número obtido. Se o novo número obtido for divisível por 7, então o número original é divisível por 7. Por exemplo, eu 'pego' o número 273 e faço 27 + 5×3 = 42. Como 42 é divisível por 7, então 273 é divisível por 7.   Com base nessa situação hipotética de ensino, responda: a) O método apresentado pelo estudante é válido para determinar se um número inteiro qualquer é divisível por 7?   b) Como você, no papel de docente no sexto ano do Ensino Fundamental, validaria ou invalidaria o método apresentado pelo estudante?

Fonte: os autores.

A letra 'a' da questão apresentada no Quadro 9 exige uma dedução lógica conforme o Quadro 7, ou ao menos uma justificativa generalizável. Abordando-a em sala de aula com futuros professores, obtive uma demonstração semelhante de um licenciando. Respondendo à questão b, esse futuro professor afirmou que pediria um tempo para pesquisar e voltar com a validação ou não do método, reconhecendo a dificuldade de uma determinação rápida da validade da conjectura.

Com a possibilidade de pesquisarem na internet, alguns dos futuros professores participantes da pesquisa afirmaram que invalidariam o método, por terem encontrado outro: "Não. A melhor forma de confirmar se um número é divisível por 7 é usar o critério de divisibilidade por 7, que é multiplicar o último algarismo por 2 e o resultado subtrair com os números que restaram (menos o último algarismo que for multiplicado). Se o resultado for divisível por 7, logo esse número é divisível por 7 também". Outra resposta foi: "Não, nem sempre será divisível por 7, pois a regra de divisibilidade do 7 é diferente da apresentada pelo aluno". Esse licenciando invalidaria o método e apresentaria a "forma correta". Um participante afirmou que

"Nem sempre o método do aluno funcionará, pois o critério de divisibilidade por 7 é: Se o número for divisível por 7, o dobro do seu último algarismo subtraído do número, sem esse último algarismo, resulta em um número divisível por 7". Esse participante respondeu à letra 'b' dizendo que invalidaria o método e apresentaria um contraexemplo para facilitar o entendimento.

O PMA dos professores, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, pode contribuir para evitar que tenham essa concepção inadequada de que um método invalida outro, além de contribuir, por meio da dedução formal, para a verificação de equivalência entre métodos, como no Quadro 8. O processo de síntese pode ser mobilizado para que o professor compreenda diferentes formas de resolução para uma mesma situação, o que pode mudar ao longo do currículo. Essa é uma possível contribuição do PMA para o ensino na Educação Básica na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento.

Quanto à possibilidade de existir um contraexemplo, alguns dos futuros professores participantes, apesar de não terem conseguido formular uma prova formal, apresentaram concepções coerentes a respeito. Um deles respondeu que "para provar que o método é inválido bastaria um exemplo falso. Porém com os argumentos apresentados junto ao exemplo ele também não prova que o método será [...] válido [para qualquer inteiro] precisaria de uma prova para comprovar o método". Esse licenciando afirmou que recomendaria o algoritmo básico da divisão para verificar a divisibilidade por 7 no sexto ano do Ensino Fundamental. Tais respostas não são o suficiente para validar ou não a conjectura, mas mostram um cuidado para não passar concepções equivocadas de validade das sentenças matemáticas na Educação Básica. Nem todos apresentaram esse entendimento, alguns afirmaram que o método é válido por não terem conseguido encontrar um exemplo em que ele não funciona, outros o confirmaram por exemplos.

Uma possível resposta à letra 'b' da questão apresentada no Quadro 9 seria, conforme um participante respondeu, uma validação utilizando "demonstrações com números", tal como exemplificamos com o número $273 = 27 \times 10 + 3$, que é divisível por 7 se, e somente se, $27 \times 50 + 3 \times 5$ também o for, sendo esse número igual a $27 \times 49 + 27 + 3 \times 5$. Esse último, por sua vez, é divisível por 7 se, e somente se, $27 + 3 \times 5$ também o for. Repetindo com outros exemplos, é possível concluir que esse padrão ocorre com qualquer número natural, de forma que a divisibilidade por 7 será garantida quando a soma de cinco vezes o número formado pelo algarismo das unidades com o restante do número obtido ignorando-se as unidades for divisível por 7. Isso recai em uma possível contribuição do PMA (na perspectiva do pensamento formal-axiomático) que já mencionamos, quanto aos professores elaborarem explicações referenciadas em exemplos numéricos, mas observando que o argumento utilizado é geral.

Na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, há também uma possibilidade do PMA ser mobilizado na compreensão de soluções inesperadas e na decisão quanto a integrá-las à aula. Nos exemplos que utilizamos envolvendo justificativas em que o argumento é geral, é possível que o estudante tenha um bom argumento, mas só o professor consiga observar se ele é generalizável. Isso pode ocorrer, por exemplo, no caso dessas justificativas para os diversos critérios de divisibilidade no 6º ano do Ensino Fundamental.

Tal como abordamos no início desta Seção 6.2, nas perspectivas da complexidade dos processos de pensamento e das concepções dos conceitos, o PMA pode contribuir para os professores compreenderem a solução de um estudante e orientá-lo. Aqui, destacamos também possíveis contribuições do PMA dos professores para discutir com os estudantes possibilidades para a resolução de um problema, pois essa tarefa pode envolver uma articulação entre os conhecimentos matemáticos dos professores. Essa articulação, integrada a um pensamento proceitual flexível e o domínio dos processos de pensamento matemático, pode contribuir para que os professores da Educação Básica verifiquem soluções e auxiliem os estudantes que precisam de uma dica pra continuar uma resolução.

Para isso, é preciso entender o caminho que a solução do estudante está tomando e as possibilidades para continuá-lo. Isso depende da criatividade matemática dos professores, ou seja, da capacidade para pensar em várias soluções para os problemas matemáticos (ERVYNCK, 2002; INAREJOS *et al*., 2022; NADJAFIKHAH; YAFTIAN; BAKHSHALIZADEH, 2012). O PMA frequentemente leva a múltiplas soluções, conforme destacamos no Capítulo 2 com base em todos os autores do *corpus* adotado para o cotejo de caracterizações do PMA. Pensar em várias soluções não somente pode contribuir para orientar os estudantes, responder perguntas, optando pela resposta a abordar, além de preparar tarefas, imaginando as resoluções que podem surgir e possibilidades para o prosseguimento da aula, o que faz parte do Conhecimento do Conteúdo e Ensino dos professores. Ainda, as previsões de como os estudantes podem prosseguir mobiliza o Conhecimento do Conteúdo e Estudantes e o Conhecimento do Conteúdo e Currículo.

Na perspectiva do pensamento formal-axiomático, o PMA também pode contribuir nessa tarefa de pensar em várias soluções com possíveis justificativas que podem ser utilizadas em uma situação matemática.

Considerando agora uma possibilidade de abordagem explícita da Matemática Avançada na Educação Básica, relembramos, conforme comentamos na Seção 4.2, que Bozkurt e Koç (2012) consideram que os professores devem preparar os estudantes para níveis avançados. Segundo Machado e D'Ambrosio (2014), se um estudante está interessado em conhecer algum assunto mais avançado, como Cálculo Diferencial e Integral, não é adequado ao professor uma resposta evasiva. Os autores sugerem que o professor explore tal interesse em benefício do crescimento intelectual do estudante. O professor pode explicar alguns tópicos e aspectos gerais da área de interesse, com cuidado para não exceder em pormenores que não podem ser compreendidos pelos estudantes, nem subestimar sua capacidade de compreensão (MACHADO; D'AMBROSIO, 2014).

Nesse caso, conforme Machado e D'Ambrosio (2014), cabe ao professor a escolha de uma escala adequada para abordar o tema que, segundo os autores, está relacionada à maturidade e à competência didática do professor em identificar as possibilidades e interesses da turma, o que entendemos como um Conhecimento do Conteúdo e Estudantes.

Considerando essa competência importante para o ensino, trata-se de uma mobilização do Conhecimento do Conteúdo no Horizonte para explorar o interesse de estudantes. O PMA pode contribuir com essa mobilização na escolha da escala feita pelo professor, que decide até que ponto abordar o assunto, em diferentes perspectivas. Na perspectiva do pensamento formal-axiomático, o PMA contribui para o entendimento de um assunto do ponto de vista da Matemática Acadêmica, e isso pode ajudar o professor a pensar se consegue promover uma adaptação ou se a formalização é incoerente com a Matemática Escolar, o que requer outra abordagem. Na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PMA envolve o processo de síntese, descrito por Dreyfus (2002), que permite relacionar conteúdos sendo estudados com outros mais avançados e possibilita abordar relações. A síntese também permite que o professor tenha uma visão ampla do assunto, permitindo a decisão a respeito da escala adequada para abordar o tema. Na perspectiva das concepções dos conceitos, o PMA favorece uma articulação flexível entre formas de compreender um conceito matemático.

Por fim, destacamos a possibilidade do PMA dos professores contribuir para sua confiança em sala de aula, especialmente para lidar com situações diferentes do ensino tradicional. Conforme destacamos na Seção 6.1, o referencial teórico do PMA aponta para a necessidade de que os estudantes sejam ativos no processo de aprendizagem. No entanto, permitir que os estudantes investiguem pode levar a situações não previstas pelo professor, diferente de um ambiente de aula expositiva em que os professores têm controle do curso da aula. Podem surgir resoluções inesperadas, conjecturas, perguntas inesperadas ou conceitos matemáticos que não estavam previstos serem relacionados. Assim, essas situações relacionam-se a muitas das possíveis contribuições do PMA dos professores para o ensino de Matemática na Educação Básica que elencamos nesta seção (nas três perspectivas que estamos abordando), relacionando-se aos diversos domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

A seguir, na Figura 9, elencamos as possíveis contribuições do PMA dos professores para o ensino de Matemática que foram discutidas nas subseções 6.2.1, 6.2.2 e 6.2.3, separadas, respectivamente, por linhas tracejadas nos balões referentes a cada perspectiva de PMA. Por envolverem, em alguns casos, articulações com a Matemática Avançada, ressaltamos que, para que essas contribuições tornem-se efetivas, é necessário que essa matemática possa de fato contribuir para a prática docente escolar. Seguindo o formato das figuras anteriores, inserimos entre parênteses as siglas dos domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) vinculados às respectivas possíveis contribuições:

Figura 9 – Possíveis contribuições do PMA dos professores para o ensino de Matemática na Educação Básica, considerando potenciais articulações com a Matemática Avançada

- aprender Matemática Avançada (HCK);

- resolver conflitos cognitivos e evitar que concepções inadequadas sejam reforçadas (SCK, KCS);
- validar ou invalidar conjecturas (SCK, HCK);
- resolver empasses e evitar 'circularidade lógica' (SCK, HCK);
- evitar a promoção de uma compreensão equivocada da validação das sentenças matemáticas (HCK);

- aprender Matemática Avançada (HCK) e articulá-la com a Matemática Elementar (CCK, SCK);
- saber adaptar uma definição (KCS, KCT, KCC);
- formular justificativas inspiradas em demonstrações (SCK, HCK, KCT);
- elaborar explicações referenciadas em exemplos numéricos, mas observando que o argumento utilizado é geral (SCK, HCK, KCT);
- compreender e validar argumentos que estão por trás das ideias dos estudantes (CCK, SCK, HCK, KCS);
- compreender, interpretar e relacionar uma solução inesperada que pode surgir em sala de aula, decidindo como integrá-la à aula (SCK, HCK, KCT, KCC);
- assegurar a validade de um resultado (HCK);
- evitar a concepção inadequada de que um método invalida outro (CCK, SCK, KCC);
- pensar em várias soluções para os problemas matemáticos (CCK, SCK, KCS, KCT, KCC);
- articular o conteúdo com o que os estudantes ainda poderão estudar (HCK, KCS, KCC);
- ter confiança para lidar com situações diferentes (CCK, SCK, HCK, KCS, KCT, KCC).

Referentes à perspectiva do pensamento formal-axiomático

Referentes à perspectiva das concepções dos conceitos

- aprender Matemática Avançada (HCK);

- dominar concepções operacionais e estruturais (CCK, HCK);
- descomprimir o próprio conhecimento matemático (SCK);

- saber Matemática e ter um pensamento matemático flexível (CCK, SCK, HCK);
- discutir com os estudantes possibilidades para a resolução de um problema (CCK, SCK, HCK, KCS, KCT);
- pensar em várias soluções para os problemas matemáticos (CCK, SCK, HCK, KCS, KCT, KCC);
- articular o conteúdo com o que os estudantes ainda poderão estudar (HCK, KCS, KCC);
- ter confiança para lidar com situações diferentes (CCK, SCK, HCK, KCS, KCT, KCC).

- aprender Matemática Avançada (HCK);

- dominar os processos de PME e de PMA (CCK);

- aprender mais profundamente a Matemática Elementar (SCK) e articular com o que vai ensinar (CCK, SCK);
- aprender Matemática Avançada (HCK) e articulá-la com a Matemática Elementar (CCK, SCK);
- refletir e autorregular o próprio processo de pensamento (CCK, SCK, HCK);
- formular justificativas inspiradas em demonstrações (SCK, HCK, KCT);
- elaborar explicações referenciadas em exemplos numéricos, mas observando que o argumento utilizado é geral (SCK, HCK, KCT);
- compreender os processos de pensamento matemático desenvolvidos pelos estudantes (CCK, SCK, HCK, KCS);
- compreender, interpretar e relacionar uma solução inesperada que pode surgir em sala de aula, decidindo como integrá-la à aula (SCK, HCK, KCT, KCC);
- assegurar a validade de um resultado (HCK);
- evitar a concepção inadequada de que um método invalida outro (CCK, SCK, KCC);
- discutir com os estudantes possibilidades para a resolução de um problema (CCK, SCK, HCK, KCS, KCT);
- pensar em várias soluções para os problemas matemáticos (CCK, SCK, HCK, KCS, KCT, KCC);
- articular o conteúdo com o que os estudantes ainda poderão estudar (HCK, KCS, KCC);
- ter confiança para lidar com situações diferentes (CCK, SCK, HCK, KCS, KCT, KCC).

Referentes à perspectiva da complexidade dos processos de pensamento

Fonte: os autores.

Ressaltamos, novamente, que as similaridades entre as contribuições para cada perspectiva de PMA foram o motivo pelo qual não separamos o texto por perspectiva, mas por contribuições do PMA dos professores organizadas com base no MKT (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Assim, na Figura 9, elencamos contribuições do PMA dos professores separadamente para cada perspectiva de forma a especificar a qual ou quais perspectivas se referem essas possíveis contribuições.

Das possíveis contribuições discutidas na Subseção 6.2.3, algumas são idênticas nas perspectivas do pensamento formal-axiomático e da complexidade dos processos de pensamento: articular a Matemática Avançada com a Matemática Elementar; formular justificativas inspiradas em demonstrações; elaborar explicações referenciadas em exemplos numéricos com um argumento válido para o caso geral;

além de compreender uma solução inesperada, decidir como integrá-la à aula, assegurar a validade de um resultado e evitar a concepção inadequada de que um método invalida outro. A existência dessas identidades é coerente, uma vez que alguns processos de pensamento matemático, como generalização e abstração, são processos de PMA em ambas as perspectivas. Ainda, uma possível contribuição do PMA similar nessas perspectivas diz respeito a compreender os estudantes, em que enfatizamos, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, os argumentos que os estudantes podem apresentar e, na perspectiva das concepções dos conceitos, os processos de pensamento matemático desenvolvidos pelos estudantes.

A discussão com os estudantes quanto a possibilidades para a resolução de um problema é uma possível contribuição do PMA tanto na perspectiva das concepções dos conceitos quanto na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, pois envolve resoluções dos estudantes da Educação Básica, que podem desenvolver um PMA nessas perspectivas.

Além disso, nas três perspectivas, algumas possíveis contribuições que elencamos são idênticas: pensar em várias soluções; articular o assunto com conteúdos que os estudantes poderão estudar futuramente; e ter confiança para lidar com situações diferentes. Essas possibilidades envolvem amplas articulações, em que muito do pensamento matemático e dos conhecimentos dos professores pode ser exigido.

Ainda, as possíveis contribuições do PMA, na perspectiva das concepções dos conceitos, para os professores dominarem concepções operacionais e estruturais e para descomprimirem o próprio conhecimento matemático (Figura 9) são semelhantes a uma possível contribuição elencada na Figura 7: quanto aos professores dominarem caminhos que levam à construção de conceitos. No início da Seção 6.2, enfatizamos esse domínio para a elaboração de questões ou sequências de ensino. Já na Subseção 6.2.2, enfatizamos a flexibilidade entre as concepções dos conceitos e a descompressão do conhecimento matemático.

A seguir, apresentamos algumas considerações finais.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta tese, objetivamos discutir e elencar, a partir de diferentes perspectivas de PMA, possíveis contribuições desse pensamento matemático e de seu referencial teórico para o ensino de Matemática na Educação Básica.

Para isso, cotejamos diferentes caracterizações do PMA e identificamos três perspectivas desse pensamento matemático no Capítulo 2.

Realizamos, no Capítulo 4, um levantamento de pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA e envolveram professores ou futuros professores, para interpretarmos possíveis relações entre o PMA e o ensino de Matemática na Educação Básica. Com base nas relações interpretadas e ideias que foram sendo anotadas em um diário de pesquisa, inclusive de discussões e resoluções realizadas com estudantes de um curso de licenciatura em Matemática, reunimos ideias de possíveis contribuições do referencial teórico do PMA e do PMA dos professores para o ensino na Educação Básica, que organizamos em uma discussão teórica no Capítulo 6.

Além disso, no Capítulo 6, realizamos algumas articulações entre os referenciais teóricos utilizados nesta tese. De fato, explicitamos relações entre o desenvolvimento do PMA e a aprendizagem em Matemática Avançada que, na nossa concepção, ocorrem juntos, contribuindo um para o outro, nas três perspectivas de PMA que discutimos. Essa concepção indica que contribuições da Matemática Avançada para o ensino na Educação Básica, se constatadas em pesquisas, estarão relacionadas a contribuições do PMA dos professores. Também relacionamos o PME e o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, com a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica, o que nos ajudou a organizar possíveis contribuições do PMA dos professores para o seu PME.

Ao final da Seção 6.1, elencamos possíveis contribuições do referencial teórico do PMA para os professores no ensino de Matemática na Educação Básica, por meio da Figura 6. Na Seção 6.2, listamos possíveis contribuições do PMA dos professores para o ensino de Matemática na Educação Básica sem necessariamente considerar articulações com a Matemática Avançada (Figura 7) e, ao final de tal seção, elencamos outras dessas potenciais contribuições considerando a possibilidade de articulações com a Matemática Avançada (Figura 9). Ainda no Capítulo 6, apresentamos exemplos de situações hipotéticas em que o

PMA dos professores pode contribuir para o ensino de Matemática na Educação Básica, das quais podemos destacar a elaboração de uma justificativa referenciada em exemplos numéricos para o Lema de Euclides, a mediação de um diálogo envolvendo números irracionais e a validação de um critério de divisibilidade.

Quanto às possíveis contribuições do referencial teórico que discutimos, enfatizamos, conforme já apontado por alguns pesquisadores (BIANCHINI; MACHADO, 2015; DOMINGOS, 2006; FONTENELE, 2018; JESUS, 2016; JESUS; SAVIOLI, 2019; PRADO, 2016), a possível contribuição do referencial teórico do PMA para que os professores da Educação Básica procurem utilizar formas de ensino em que os estudantes desenvolvam ativamente os processos de pensamento matemático, o que relaciona o referencial teórico com outras tendências da Educação Matemática (SCHASTAI, 2017).

Conforme Dreyfus (2002), Bianchini e Machado (2015) e Prado (2016), o conhecimento dos processos de PMA pode contribuir para os professores interpretarem as dificuldades dos estudantes e avaliá-los, além de planejarem tarefas que busquem levar ao desenvolvimento dos processos vinculados a determinados conteúdos (FONTENELE, 2018). Do mesmo modo, o conhecimento das teorias de processo-objeto (DUBINSKY, 2002; GRAY; TALL, 1994; SFARD, 1987, 1991) pode contribuir para os professores interpretarem as concepções dos estudantes e assim avaliá-los, além de conhecerem caminhos para a construção dos conceitos na Educação Básica, de concepções operacionais a estruturais.

Também podemos ressaltar a reflexão sobre o próprio saber que pode ser estimulada por esse referencial teórico (BIANCHINI; MACHADO, 2013, 2015), para que os professores identifiquem conhecimentos matemáticos que precisam dominar e que precisam ensinar. O quadro teórico de Tall (1995, 2002, 2004, 2008, 2013), em especial, enfatiza a diferença das definições e provas no contexto escolar e no trabalho de matemáticos.

Quanto às possíveis contribuições do PMA dos professores que discutimos, podemos destacar, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, a utilização de deduções lógicas para saberem quando duas ou mais definições são equivalentes, avaliarem se os conceitos imagem dos estudantes estão coerentes e colocarem as ideias em uma sequência lógica para resolver situações que pareçam contraditórias para os estudantes, além de evitarem circularidade lógica nos argumentos.

Nas perspectivas da complexidade dos processos de pensamento e das concepções dos conceitos, em que o PMA pode ocorrer na aprendizagem da Matemática Elementar, podemos destacar a possível contribuição para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes da Educação Básica, para um pensamento matemático dos professores que possibilite compreender a resolução dos estudantes e orientá-los, bem como para a elaboração ou adaptação de questões e de sequências de ensino. Ainda, na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PMA dos professores pode favorecer sua comunicação por meio da mudança de representações e sua autonomia no desenvolvimento dos processos.

Considerando potenciais articulações com a Matemática Avançada, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, o PMA pode contribuir, por exemplo, para a elaboração de justificativas inspiradas em demonstrações e explicações referenciadas em exemplos numéricos, observando-se que o argumento utilizado é geral. Na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento, o PMA pode contribuir para a autorregulação do próprio processo de pensamento e articulações entre conceitos matemáticos. Na perspectiva das concepções dos conceitos, o PMA pode contribuir para a descompressão do próprio conhecimento para auxiliar os estudantes com concepções mais elementares. Identificamos contribuições do PMA que consideramos possível em mais de uma perspectiva, como discutir com os estudantes possibilidades para a resolução de problemas e pensar em várias soluções para os problemas matemáticos.

Uma situação que pode ocorrer em sala de aula relacionada a algumas das possíveis contribuições do PMA dos professores que elencamos é a formulação de uma conjectura por parte dos estudantes. Quando um estudante faz uma pergunta ou levanta uma conjectura inesperada, o pensamento matemático do professor pode fazer a diferença para determinar sua resposta, sua validade geral ou particular. Nas perspectivas do pensamento formal-axiomático e das concepções dos conceitos, o PMA pode contribuir para que, nessas situações de ensino, o professor possa validar ou invalidar conjecturas, articular tópicos de Matemática Avançada com a matemática da Educação Básica, formular justificativas inspiradas em demonstrações, compreender e validar argumentos ou o pensamento matemático dos estudantes, compreender, interpretar e relacionar uma solução inesperada que pode surgir em sala de aula, decidindo como integrá-la à aula, bem como para ter confiança para lidar com situações diferentes. Por vezes, é necessário postergar a resposta, pesquisar a respeito e abordar o assunto em outra aula. Porém, acreditamos que a forma recorrente como um professor responde a questionamentos pode impactar até mesmo na confiança dos estudantes no professor como autoridade no assunto que leciona.

Embora tenhamos concluído (na Subseção 6.2.2) que o PMA, na perspectiva do pensamento formal-axiomático, é um pensamento intrinsecamente ligado à precisão formal da Matemática Acadêmica, devido à sua associação com as definições, deduções e abstrações formais (TALL, 2002), algumas possíveis contribuições para o ensino de Matemática que elencamos estão relacionadas exclusivamente a uma mobilização desse pensamento matemático com a matemática da Educação Básica, tal como para resolver conflitos cognitivos ou saber quando duas definições são equivalentes.

De modo geral, observamos, ainda na perspectiva do pensamento formal-axiomático, que as potenciais contribuições do PMA dos professores para o ensino de Matemática na Educação Básica que elencamos estão especialmente vinculadas às deduções lógicas características desse pensamento. Encontramos poucas possíveis contribuições do PMA, nessa perspectiva, voltadas ao que Moreira (2020, p. 241) chama de “valores típicos de uma abordagem axiomática rígida (o mínimo de postulados, a elegância da organização lógico-dedutiva da teoria, o nível atual do rigor, sempre sob escrutínio dos pares etc.)”. Quanto à abordagem axiomática característica da Matemática Acadêmica, o mais próximo que discutimos de uma possível contribuição dessa estrutura é a organização das ideias em uma sequência lógica, que evita circularidade nos argumentos, pois, na abordagem axiomática, é necessário que os argumentos se apoiem em sentenças já validadas.

Ainda que as possíveis contribuições que elencamos do PMA (na perspectiva do pensamento formal-axiomático) não se relacionem com as estruturas gerais características da Matemática Acadêmica, para que seja viável uma contribuição dessas estruturas no ensino de Matemática na Educação Básica, consideramos a necessidade de um pensamento proceitual flexível (GRAY; TALL, 1994), que permita a descompressão dessas estruturas em concepções mais elementares (uma possível contribuição do PMA que elencamos na perspectiva das concepções dos conceitos), permitindo que os esquemas enriquecidos pelas concepções estruturais e gerais sejam mobilizados com relação à Matemática

Elementar. Além disso, para que essas relações entre estruturas gerais e conceitos de Matemática Elementar sejam estabelecidas, podem ser necessários processos de generalização, síntese ou de mudanças de representação, característicos do PMA na perspectiva da complexidade dos processos de pensamento.

Sendo assim, considerando a articulação que promovemos entre o PMA (na perspectiva do pensamento formal-axiomático) e a Matemática Acadêmica (MOREIRA; DAVID, 2007), consideramos que algumas características do PMA (nessa perspectiva), tais como as deduções formais, possuem um potencial maior para contribuir para a prática dos professores de Matemática da Educação Básica com relação a outras caracterizações relacionadas à Matemática Acadêmica, ainda que mais pesquisas sejam necessárias para se investigar a respeito da (im)possibilidade de contribuição da axiomática e das estruturas gerais para a Matemática Escolar.

Também consideramos importante o desenvolvimento de pesquisas que investiguem a possibilidade de existência, na prática de ensino na Educação Básica, de contribuições do PMA e de outros pensamentos matemáticos. Reconhecemos que há uma dificuldade quanto à coleta de informações que permitam identificar indícios de PMA de professores atuando no ensino. Elaboramos questões (Quadro 6 e Quadro 9) que foram discutidas com estudantes de licenciatura em Matemática, futuros professores, que nos permitiram ter ideias de possíveis abordagens dos professores frente a essas questões. Porém, consideramos interessante, para pesquisas futuras, investigar encaminhamentos sugeridos por professores de Matemática, para analisar potenciais mobilizações do PMA e articulá-las com as possibilidades que elencamos nesta tese.

Contudo, não somente pesquisas que investiguem possíveis contribuições para o ensino observadas em sala de aula ou com professores que atuam na Educação Básica que consideramos importantes, pois, a nosso ver, essa exclusividade presumiria a aceitação da perpetuação da prática atual, ao considerar que os saberes que contribuem para o ensino estejam restritos aos mobilizados atualmente pelos professores. Da mesma forma, os saberes observados na prática docente escolar não são obrigatoriamente identificados como necessários para o ensino.

> [...] os conhecimentos qualificados como *envolvidos nas questões que se colocam para o professor em sua prática docente escolar* não

> se identificam imediatamente com aqueles estritamente necessários à prática do professor na escola básica, pois isto seria equivalente a postular que a prática do professor não pode passar por outros caminhos.
> Do mesmo modo que não consideramos os conhecimentos envolvidos nas questões da prática como saberes estritamente necessários ao exercício profissional docente, também não podemos afirmar que eles sejam, em sua totalidade, efetivamente mobilizados na ação pedagógica do professor, pois isso implicaria considerar a prática docente escolar como uma instância auto-suficiente de formação profissional. O fato é que não tomamos os resultados da nossa pesquisa como saberes normativos para a ação prática do professor em sala de aula. [...] O nosso pressuposto é o de que o conhecimento envolvido nas questões que se colocam para o professor de matemática na prática escolar deve ser objeto de consideração cuidadosa nos processos de formação. (MOREIRA, 2004, p. 11, grifo do autor).

Moreira (2004) não considera que os conhecimentos mobilizados na prática docente escolar sejam normativos para o ensino de Matemática, mas que um conjunto de pesquisas indica que os conhecimentos envolvidos na ação prática do professor em sala de aula estão associados a questões que se referem diretamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar em Matemática.

Nessa perspectiva, ainda que comprovássemos na prática algumas contribuições do PMA dos professores para o ensino (dentre as que elencamos ou, talvez, outras), não poderíamos considerar que elas devem ser utilizadas pelos professores, mas poderíamos procurar compreender como podem ocorrer na prática em sala de aula e possivelmente contribuir para o ensino de Matemática. Acreditamos que os professores possuem autonomia em seu trabalho de ensinar na escola. Novamente, cabem considerações de Moreira (2020):

> No entanto, é importante destacar que, com esses comentários, não estamos defendendo que o professor de matemática, em todos os níveis da Educação Básica, se veja na obrigação de justificar tudo e sempre, ou seja, mostrar as razões pelas quais são válidos todos os resultados matemáticos referidos em suas aulas e discutir, necessariamente, os fundamentos de todos os procedimentos ensinados. Isso seria uma receita fácil de prescrever, mas difícil de cumprir. Temos claro que a decisão última sempre cabe ao professor, dentro da autonomia que rege o trabalho docente. Assim, no exercício da sua autonomia, o professor desenha ou escolhe as estratégias de abordagem para cada tópico, de acordo com o que considere mais adequado a cada turma e em acordo também com as diretrizes e orientações próprias de cada escola. (MOREIRA, 2020, p. 235).

O que podemos concluir é que o PMA, nas perspectivas que adotamos, pode dar suporte a professores da Educação Básica para que tenham essa autonomia, conforme as possíveis contribuições que destacamos no Capítulo 6, tal como a possível contribuição do PMA (nas perspectivas do pensamento formal-axiomático e da complexidade dos processos de pensamento) para a formulação de justificativas, sendo que a necessidade ou não de elaborar justificativas é determinada, em última instância, pelos professores.

Enfatizamos que a discussão aqui apresentada é uma teorização inicial a respeito do PMA no ensino de Matemática, com ideias que pretendemos refinar. Não encontramos nos levantamentos (Capítulo 4) pesquisas que tivessem como foco possíveis contribuições do pensamento matemático de professores para além do aprendizado de conceitos matemáticos presentes em sua formação. Assim, realizando uma pesquisa teórica e especulativa, produzimos declarações teóricas a partir de outras declarações teóricas (MARTINEAU, SIMARD, GAUTHIER, 2001), procurando contribuir para as pesquisas da área com uma argumentação a respeito de possíveis contribuições do PMA para o ensino de Matemática na Educação Básica. Outra possibilidade para pesquisas futuras seria utilizar de outros referenciais teóricos, por exemplo, de pensamento algébrico, para discutir o pensamento matemático de professores no ensino.

Essas possibilidades nos levam a novos questionamentos. Por exemplo, que pensamento matemático é requerido dos professores para o ensino na Educação Básica? As possíveis contribuições do PMA de professores que elencamos produzem melhoras efetivas no ensino? O quanto esse pensamento pode contribuir? O quanto de seu desenvolvimento é necessário para que seja utilizado? Levantam-se, portanto, questões importantes a serem investigadas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. A. **Um Panorama de Artigos sobre a Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva de David Tall**. 2013. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

ALMEIDA, M. V.; IGLIORI, S. B. C. Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 718-734, 2013.

ALMOULOUD, S. A. Fundamentos norteadores das teorias da Educação Matemática: perspectivas e diversidade. **Amazônia**, local, v. 13, n. 27, p. 5-35, 2017.

AMORIM, L. I. F. **A (re)construção do conceito de limite do cálculo para a análise**: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática. 2011. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

AMORIM, M. E.; PIETROPAOLO, R. C.; POWELL, A. B.; SILVA, A. F. G. Concepções de Estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática sobre Argumentações e Provas. **Práxis Educacional**, v. 16, n. 38, p. 386-401, 2020.

BALL, D. L.; BASS, H. Interweaving Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Mathematics. *In*: BOALER, J. **Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning**. Westport: Ablex Publishing, 2000. p. 83–104.

BALL, D. L.; BASS, H. With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *In*: JAHRESTAGUNG DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK, 43, 2009, Oldenburg. **Proceedings** [...]. Oldenburg, 2009.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, Michigan, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 70ª ed. Lisboa: Presses Universitaires de France. 1977.

BATISTA, I. L. **Conhecimentos e Saberes na Educação em Ciências e Matemática**. Londrina: UEL, 2016.

BERTOLAZI, K. S. M. **Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas de equações lineares**. 2012. 227 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. Reflexões de professores de Matemática sobre os processos do Pensamento Matemático Avançado. *In*: CIBEM, VII, 2013, Montevideo, Uruguay. **Anais** [...]. Montevideo, 2013. p. 1287-1294.

BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. Em busca de elementos que propiciem ao professor de Matemática a reflexão sobre seu saber. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 17, n. 1, p. 28-39, 2015.

BISOGNIN, E; BISOGNIN, V. Explorando conceitos de Otimização com professores da Educação Básica em um curso de formação continuada: possibilidades para um trabalho em sala de aula. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 735-749, 2013.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1991.

BOZKURT, A.; KOÇ, Y. Investigating First Year Elementary Mathematics Teacher Education Students' Knowledge of Prism. **Educational Sciences: Theory & Practice**, v. 12, n. 4, p. 2949-2952, 2012.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, [2018]. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/. Acesso em: 14 ago. 2022.

BRITO, A. B. **Questionando o ensino de conjuntos numéricos em fundamentos de análise real**: da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática. 2010. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

BRITO, A. B.; REIS, F. S. Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII, 2011, Recife. **Anais [...]**. Recife: IACME, 2011. p. 1-11.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Conhecimentos relativos a números racionais e irracionais de uma aluna ingressante na Licenciatura em Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v.8, n.1, p.67-82, 2017.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Um modelo para analisar a imagem do conceito de estudantes universitários: o caso dos números irracionais. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 335-354, 2017.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Saberes docentes para ensinar Matemática e os impactos na formação de professores – o caso dos números irracionais. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 26, n. 73, p. 109-131, 2021.

BRUNET, A. R. G.; LEIVAS, J. C. P.; LEYSER, M. Intuição, visualização e tecnologia no ensino de limites na licenciatura em Matemática. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2009, Ijuí. **Anais [...]**. Ijuí: SBEM-RS, 2009. p. 1-9.

BUSSMANN, C. J. C.; KLAIBER, M. A.; SILVA, D. P. Processos Mentais de Dreyfus (2002) e o Ensino Exploratório (2005): discussão e possível intervenção em sala de aula. *In*: EPREM, XIV, 2017, Cascavel. **Anais** [...]. Cascavel, 2017. p. 1-13.

BUSSMANN, C. J. C.; SAVIOLI, A. M. P. D. Pensamento Matemático-Computacional. **Cadernos UniFOA**, Volta Redonda, v.15, n. 42, p. 91-100, 2020.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C. Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In: CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 8, 2013, Antalya. **Anais** [...]. Antalya: Erme, 2013, p. 2981-2994.

COFER, T. Mathematical Explanatory Strategies Employed by Prospective Secondary Teachers. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**. v. 1, p. 63–90, 2015.

DIAS, M. S. **Reta real: conceito imagem e conceito definição**. 2002. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

DIETRICH, P. S. **Ensino e Aprendizagem da Integral Definida**: Contribuições da Engenharia Didática. 2010. 127 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2010.

DOMINGOS, A. M. D. **Compreensão de Conceitos Matemáticos Avançados - a Matemática no Início do Superior**. 2003. 407 f. Tese (Doutorado em Ciências da Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.

DOMINGOS, A. Teorias cognitivas e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados. *In*: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17, 2006, Setúbal. **Atas** [...]. Setúbal: Associação de Professores de Matemática, 2006. p. 51-81.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4ª ed. São Paulo: Atual, 2003.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Process. *In:* TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

DREYFUS, T.; EISENBERG, T. On Different Facets of Advanced Mathematical Thinking. *In:* STERNBERG, R. J.; BEN-ZEEV, T. **The Nature of Mathematical Thinking**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 1996. p. 253-284.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2002. p. 95-123.

ELIAS, H. R.; BARBOSA, L. N. S. C; SAVIOLI, A. M. P. D.; Matemática elementar e avançada em livros didáticos: o conceito dos números naturais. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII, 2011, Recife. **Anais** [...]. Recife: IACME, 2011. p. 1-12.

ERVYNCK, G. Mathematical Creativity. *In:* TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 42-53.

FENNEMA, E.; FRANKE, M. L. Teachers' Knowledge and Its Impact. *In*: GROUWS, D. A. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1992. p. 147-164.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 1ª ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

FLÔRES, M. V.; FONSECA, J. A.; BISOGNIN, E. Processos do pensamento matemático avançado revelados nas resoluções de tarefas envolvendo números racionais. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 7, n. 1, p. 217-238, 2020.

FONSECA, V.; HENRIQUES, A. Compreensão da Definição Formal de Limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 1030-1049, 2018.

FONSECA, V. G.; HENRIQUES, A. C. C. B. Learning with Understanding the Continuity Concept: A Teaching Experiment with Brazilian Pre-service Mathematics Teachers. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, n. 3, p. 1-17, 2020.

FONTENELE, F. C. F. **Contribuições da Sequência Fedathi para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado**: uma análise da mediação docente em aulas de Álgebra Linear. 192 f. Tese (Doutorado em Educação, Currículo e Ensino) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

FRANCO, H. J. R.; SOARES, C. A. S. Conflitos de aprendizagem na disciplina de Álgebra Abstrata. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, n. 2, p. 160-178, 2013.

GERETI, L. C. V. **Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do Enade**. 2014. 136 f. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V. Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 90-113, 2017.

GRAY, E. M.; TALL, D. O. Duality, Ambiguity, and Flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 25, n. 2, p. 116-140, 1994.

GRAY, E. M.; TALL, D. O. Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF LEARNING MATHEMATICS, 25, vol. 3, 2001, Utrecht. **Proceedings** [...]. Utrecht, 2001. p. 65-72.

GUALANDI, J. H. **Os reflexos de uma formação continuada na prática profissional de professores que ensinam matemática**. 2019. 169 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São

Paulo, São Paulo, 2019.

HAREL, G.; SOWDER, L. Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and its Development. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 7, n. 1, p. 27-50, 2005.

INAREJOS, O.; KIRNEV, D. C. B.; CONSANI. A. C. C.; SAVIOLI, A. M. P. D. Alguns Referenciais Teóricos Relacionados ao Pensamento Matemático Avançado. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n. 3, p. 216-243, 2022.

INAREJOS, O.; SAVIOLI, A. M. P. D. Relações entre os indícios de Pensamento Matemático Avançado e a aprendizagem interpretadas a partir de pesquisas na licenciatura em Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-25, 2022.

JAKOBSEN, A.; THAMES, M. H.; RIBEIRO, C. M.; DELANEY, S. Using practice to define and distinguish horizon content knowledge. *In:* INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12, 2012, Seoul. **Anais** [...]. Seoul, 2012. p. 4635-4644.

JAKOBSEN, A.; THAMES, M. H.; RIBEIRO. Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematics teaching. *In:* CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 8, 2013, Antalia. **Proceedings** […]. Antalia, 2013, p. 3125-3134.

JESUS, M. S. **Um estudo das concepções de licenciandos em Matemática, à luz da Teoria APOS, a respeito do conceito de Anel**. 2016. 134 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

JESUS, M. S.; SAVIOLI, A. M. P. D. Concepções manifestadas por licenciandos em matemática ao lidarem com tarefas envolvendo o conceito de anel. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 1, p. 1-24, 2019.

JORGE, J. L. **Teoria de Conjuntos**: processos manifestados do Pensamento Matemático Avançado. 2017, 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

KIRNEV. D. C. B. **Dificuldades evidenciadas em registros escritos a respeito de demonstrações matemáticas**. 2012. 113 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

KLAIBER, M. A. **Introdução à Álgebra Linear em um curso de licenciatura em química**: o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado por meio de uma Experiência de Ensino. 2019. 329 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

KO, Y.-Y.; KNUTH, E. Problems Manifested in Prospective Secondary Mathematics Teachers' Proofs and Counterexamples in Differentiation. In: ICMI STUDY CONFERENCE, 19, 2009, Taipei. **Proceedings [...]**, vol. 1. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, 2009. p. 262-267.

LEIKIN, R.; ZAZKIS, R. On the content-dependence of prospective teachers' knowledge: a case of exemplifying definitions. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 41, n. 4, p. 451-466, 2010.

LOPES, G. L. O. **A criatividade matemática de John Wallis na obra Arithmetica Infinitorum**: contribuições para ensino de cálculo diferencial e integral na licenciatura em matemática. 2017. 198 f. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

LOPES, G. L. O.; LOPES, J. S. Número de Ouro: uma interessante aplicação da História da Matemática à Análise Matemática. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, IV, 2017, João Pessoa. **Anais** [...]. Campina Grande: Editora Realize, 2017. p. 1-12.

LOPES, L. M. L. Imagem de conceito e definição de conceito: um olhar sobre o ensino de Geometria Analítica no ensino superior. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XXI, 2017, Pelotas. **Anais** [...]. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 2017. p. 1-11.

LOPES, L. M. L. **Formação e reelaboração de imagens e definições de conceito relacionadas ao ensino de vetores em geometria analítica**. 2019. 99 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2019.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática**: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 4ª ed. São Paulo: Cortez, 2000.

MACHADO, N. J.; D'AMBROSIO, U. **Ensino de matemática**. São Paulo: Summus Editorial, 2014.

MACHADO, S. D. A.; BIANCHINI, B. L. Aportes dos processos do Pensamento Matemático Avançado para a reflexão do professor sobre sua "forma" de pensar a Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 590-605, 2013.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5 ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2003.

MARINS, A. S. **Pensamento Matemático Avançado em tarefas envolvendo Transformações Lineares**. 2014. 169 f. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

MARTINEAU, S.; SIMARD, D.; GAUTHIER, C. Recherches théoriques et spéculatives: considérations méthodologiques et épistémologiques. **Recherches qualitatives**, v. 22, n. 3, p. 3-32, 2001.

MATEUS-NIEVES, E. JIMENEZ, C. A. R. Mathematical generalization from the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 22, n. 3, p. 65-82, 2020.

MCCRORY, R.; FLODEN, R.; FERRINI-MUNDY, J.; RECKASE, M. D.; SENK, S. L. Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 43, n. 3, p. 584-615, 2012.

MENEZES, D. B. **O ensino do cálculo diferencial e integral na perspectiva da Sequência Fedathi**: caracterização do comportamento de um bom professor. 2018. 128 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

MERZBACH, U. C.; BOYER, C. B. **A History of Mathematics**. 3ª ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.

MIRANDA, A. M. **As tecnologias da informação no estudo do cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa**. 2010. 152 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999.

MOREIRA, P. C. 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1137-1150, 2012.

MOREIRA, P. C. Formação Matemática na Licenciatura e Prática Docente na Escola: o caso da unicidade da decomposição em primos. **Hipátia**, v. 5, n. 2, p. 230-245, 2020.

MOREIRA; P. C. **O Conhecimento Matemático do Professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica**. 2004. 202 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

MOREIRA; P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que análise real na licenciatura? **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 23, p. 11-42, 2005.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2007.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 11, n. 1, p. 23-40, 2008.

NADJAFIKHAH, M.; YAFTIAN, N.; BAKHSHALIZADEH, S. Mathematical creativity: some definitions and characteristics. **Procedia - Social and Behavioral Sciences**, v. 31, p. 285-291, 2012.

PEGG, J. TALL, D. The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. **ZDM**, v. 37, n. 6, p. 468-475, 2005.

PINTO, M. M. F. Educação matemática no ensino superior. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, p. 223-238, 2002.

PIRES, F. R.; SILVA, B. A. Função: concepções daquele que ensina e daquele que aprende. **Em teia**, v. 5, n. 3, p. 1-25, 2014.

PRADO, E. A. **Álgebra linear na licenciatura em Matemática**: contribuições para a formação do profissional da educação básica. 2016. 254 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

PROENÇA, M. C. Generalização de padrões algébricos no ensino via resolução de problemas: compreensão de licenciandos em Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 419-437, 2019.

RASMUSSEN, C.; ZANDIEH, M.; KING, K.; TEPPO, A. Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 7, n. 1, p. 51-73, 2005.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de calculo e analise**: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

RESNICK, L. B. **Education and learning to think**. Washington: National Academy Press, 1987.

ROBERT, A.; SCHWARZENBERGER, R. Research in Teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level. *In:* TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 127-139.

RODRIGUES, E. B. **Contribuições de uma Sequência de Atividades para a Compreensão do Conceito de Comprimento de Curva**. 2019. 94 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Franciscana, Santa Maria, 2019.

ROWLAND, T. The Knowledge Quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. **Journal of Education**, Lisboa, v. 1, n. 3, p. 15-43, 2013.

SANTOS, F. L.; DOMINGOS, A. Resolução de Equações de 2º grau recorrendo à folha de cálculo. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XXII, 2011, Lisboa. **Anais [...]**. Lisboa: Instituto da Educação da Universidade de Lisboa, 2011. p. 2-13.

SANTOS, F. L.; DOMINGOS, A. Mathematics in Pre-Service Teacher Education and the Quality of Learning: the proceptual divide. In: CERME, 8, 2013, Antália. **Anais [...]**. Ancara: Middle East Technical University, 2013. p. 3237-3246.

SANTOS, F. L.; DOMINGOS, A. Mathematics in Pre-service Teacher Education and the Quality of Learning: an Experience with Papers Planes, Smartphones and Geogebra. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN MATHEMATICS TEACHING, 13, 2017, Lyon. **Proceedings** [...]. Lyon: Université Claude Bernard Lyon, 2017. p. 188-189.

SANTOS, R. F. **Nigeriano de 12 anos é premiado após descobrir nova formula**

de dividir na matemática. Disponível em: https://portalrapmais.com/nigeriano-de-12-anos-e-premiado-apos-descobrir-uma-nova-formula-de-dividir-na-matematica. Acesso em: 20 nov. 2019.

SANTOS, V. C. P. **Mathlets: possibilidades e potencialidades para uma abordagem dinâmica e questionadora no ensino de Matemática**. 2008. 101 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SAVIOLI, A. M. P. D. Considerações acerca do pensamento matemático avançado. *In*: BATISTA, I. L. **Conhecimentos e Saberes na Educação em Ciências e Matemática**. Londrina: UEL, 2016. p. 227-236.

SCHASTAI, M. B. **Tall e Educação Matemática Realística**: algumas aproximações. 2017. 179 f. Tese (doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

SFARD, A. Two conceptions of mathematical notions: operational and structural. *In*: ELEVENTH INTERNATIONAL CONFERENCE OF PME, 1987, Montreal. **Proceedings** [...], vol. 3. Montreal: International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1987. p. 162–169.

SFARD, A. On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. **Educational Studies in Mathematics**, Holanda, v. 22, n. 1, p. 1-36, 1991.

SFARD, A. Reification as the Birth of a Metaphor. **For the Learning of Mathematics**, Vancouver, v. 14, n. 1, p. 44-55, 1994.

SOARES, G. O.; CURY, H. N. As ideias de David Tall em um mapeamento de artigos de periódicos brasileiros. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Itabaiana, v. 2, n. 1, p. 1-16, 2017.

SOUSA, B. N. P. A.; ALMEIDA, L. M. W. Mathematical thinking in mathematical modelling activities. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 19, n. 5, p. 709-724, 2017.

TALL, D. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF LEARNING MATHEMATICS, 19, vol. 1, 1995, Recife. **Proceedings** [...]. Recife, 1995. p. 161-175.

TALL, D. Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 23, 1999, Haifa. **Proceedings** [...]. Haifa: Israel Institute of Technology, 1999. p. 111-118.

TALL, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. *In*: ______. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 3-21.

TALL, D. Building Theories: The Three Worlds of Mathematics. **For the Learning of Mathematics**, Kingston, v. 24, n. 1, p. 29-32, 2004.

TALL, D. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, v. 20, n. 2, p. 5-24, 2008.

TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically**: exploring the tree worlds of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. **David Tall Academic Page**. 2003. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html. Acesso em: 19 jun. 2022.

TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 12, p. 151–169, 1981.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 13ª ed. Petrópolis: Vozes, 2012.

TEÓFILO, K. M. Á.; LIMA, F. L. S.; MENEZES, D. B. Cálculo diferencial e integral: da sequência fedathi ao pensamento matemático avançado. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 7, p. 1-19, 2020.

TIROSH, D.; TSAMIR, P.; LEVENSON, E. Using Theories to Build Kindergarten Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching. *In:* ROWLAND, T.; RUTHVEN, K. **Mathematical Knowledge in Teaching**. Dordrecht: Springer, 2011. p. 231-250.

TRINDADE, D. S.; SOARES, M. A. S. O Conceito de Sequências Numéricas: análise de um livro do Ensino Superior. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, VII, 2017, Canoas – RS. **Anais** [...] Canoas: Universidade Luterana do Brasil, 2017. p. 1-13.

VAN DER MAREN, J.-M. Les stratégies de la recherche spéculative. *In*: ______. **Méthodes de recherche pour l'éducation**. 2ª ed. Bruxelles: De Boeck and Larcier, 2004. p. 133-156.

VIDOTTI, D. B.; KATO, L. A. Um Estudo sobre Conflitos no Processo de Aprendizagem de Limite de Funções de Várias Variáveis. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 5, p. 930-949, 2018.

VIEIRA, W.; SOUZA, V. H. G.; IMAFUKU, R. S. Sobre Justificativas em Questões do Tipo Verdadeiro/Falso de Estudantes de Licenciatura em Matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 26, p. 1-17, 2020.

VINNER, S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. *In:* TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 65-81.

WASSERMAN, N. H. Abstract Algebra for Algebra Teaching: influencing school mathematics instruction. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, Ontario, v. 16, n. 1, p. 28-47, 2016.

WILEY, K. E. **Middle school mathematics teachers' use of advanced mathematical knowledge in practice: an interpretative phenomenological analysis**. 2014. 164 f. Tese (Doutorado em Educação) - College of Professional Studies, Northeastern University, Boston, 2014.

WRIGHT, M.; MURRAY, E.; BASU, D. Impact of Abstract Algebra Knowledge on the Teaching and Learning of Secondary Mathematics. *In*: ANNUAL CONFERENCE ON RESEARCH IN UNDERGRADUATE MATHEMATICS EDUCATION, 19, 2016, Pittsburgh. **Anais** [...]. Pittsburgh, SIGMAA on RUME, 2016. p. 481-495.

ZAZKIS, R.; LEIKIN, R. Advanced Mathematical Knowledge in Teaching Practice: perceptions of secondary mathematics teachers. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 12, n. 4, p. 263-281, 2010.

ZAZKIS, R.; MAMOLO, A. Reconceptualising knowledge at the mathematical horizon. **For the Learning of Mathematics**, Edmonton, v. 31, n. 2, p. 8-13, 2011.

ZAZKIS, R.; ZAZKIS, D. The significance of mathematical knowledge in teaching elementary methods courses: perspectives of mathematics teacher educators. **Educational Studies in Mathematics**, v. 76, p. 247-263, 2011.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Revistas com Qualis A1 ou A2

Nas buscas mencionadas na Seção 4.2, a fim de levantar artigos de periódicos, procuramos na Plataforma Sucupira por revistas da área de Ensino e selecionamos as revistas de classificação Qualis A1 ou A2, classificadas no quadriênio 2013-2016 (avaliação disponível no período da consulta), da área de Educação Matemática ou que aceitam artigos na área, listadas no Quadro 10.

Quadro 10 – Revistas selecionadas para o levantamento

Qualis	Nome do Periódico	ISSN
A1	Bolema: Boletim de Educação Matemática (online)	1980-4415
	Ciência & Educação	1980-850X
	Educação e Pesquisa	1678-4634
	International Journal of Mathematical Education in Science and Technology	0020-739X
	International Journal of Science and Mathematical Education	1571-0068
	Pro-posições (Unicamp. Online)	1980-6248
	Revista Brasileira de Educação	1809-449X
	Teaching Mathematics and its Applications	0268-3679
	The Journal of Mathematical Behavior	0732-3123
A2	Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas (online)	2317-5125
	Educação Matemática em Revista	2317-904X
	Educação Matemática em Revista – RS	1518-8221
	Educação Matemática Pesquisa (online)	1983-3156
	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	2176-5634
	PNA : Revista de Investigación en Didática de la Matemática	1887-3987
	REDIMAT- Revista de Investigación en Didática de las Matemáticas	2014-3621
	RENCIMA	2179-426X
	Research in Mathematics Education	1479-4802
	REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática	1981-1322
	Revista Acta Scientiae	2178-7727
	Revista de Educação, Ciências e Matemática	2238-2380
	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa	1665-2436
	Vidya (Santa Maria. Online)	2176-4603
	Zetetiké (online)	2176-1744

Fonte: os autores.

APÊNDICE B

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Com o objetivo de realizar pesquisas na área de Educação Matemática, solicito sua autorização para análise e divulgação das atividades desenvolvidas na disciplina de __________________. Esclareço que suas informações serão utilizadas apenas para fins de pesquisa acadêmica e comprometo-me a garantir o seu anonimato nos relatos de pesquisas, ou seja, seu nome, caligrafia, ou qualquer elemento que possa lhe identificar, será mantido em sigilo. Sua autorização é totalmente voluntária, você é livre para recusá-la, sem precisar se justificar e sem que isto leve a qualquer penalidade. Disponho-me a informar a respeito de como as atividades poderão ser analisadas e divulgadas, além esclarecer qualquer dúvida. Agradeço pela colaboração!

Professor Osvaldo Inarejos Filho.

Londrina, 17 de outubro de 2022.

CONSENTIMENTO:

Mediante compromisso ético de manter preservada minha identidade, autorizo a análise e divulgação dos dados coletados.

NOME	ASSINATURA