Universidade Estadual de Londrina

ANA PAULA ZANIM

# UM MÉTODO PARA A ANÁLISE DE COMPETÊNCIAS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Londrina
2021

ANA PAULA ZANIM

# UM MÉTODO PARA A ANÁLISE DE COMPETÊNCIAS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Zanim, Ana Paula.
Um método para a análise de competências dos alunos em atividades de modelagem matemática / Ana Paula Zanim. - Londrina, 2021.
136 f.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3. Competências em modelagem matemática - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

ANA PAULA ZANIM

# UM MÉTODO PARA A ANÁLISE DE COMPETÊNCIAS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

______________________________
Orientadora: Profª. Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina – UEL

______________________________
Profª. Dra. Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa
Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP

______________________________
Profª. Dra. Cíntia da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – IFSULDEMINAS

______________________________
Profª. Drª. Eleni Bisognin
Universidade Franciscana de Santa Maria – UNIFRA

______________________________
Profª. Dra. Gabriele Granada Veleda
Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR

Londrina, 24 de agosto de 2021.

*A todos aqueles que posso chamar de família. Em especial a minha filha Cecília, meu marido Fábio e meus pais.*

## AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial, a minha mãe que cuidou do meu bem mais precioso, a minha Cecília. Agradeço a todos meus familiares que direta ou indiretamente contribuíram para que eu chegasse até aqui.

À Cecília, minha filha, que ainda é tão pequenina, mas que no futuro terá muito orgulho da mamãe. Obrigada por me tornar uma pessoa melhor, por me ensinar todos os dias sobre resiliência, persistência, amor incondicional. Te amo!

Ao Fábio por todo amor e companheirismo durante esses anos e principalmente nos últimos meses, por dedicar todo seu tempo e afeto para cuidar da nossa pequena bochechuda e, por repetir todos os dias que eu conseguiria. E aos seus pais Elza e Ademar, que são minha família.

À minha orientadora Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida, pela oportunidade de desenvolver essa pesquisa, pela orientação, pela paciência, por compartilhar comigo nesses anos suas experiências e seus conhecimentos. Não há palavras para agradecer a confiança em mim depositada!

Às professoras Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa, Cíntia da Silva, Eleni Bisognin e Gabriele Granada Veleda, por todas as contribuições que aprimoraram esse relatório de pesquisa.

Aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT). Neste grupo tive a oportunidade de fazer amigos que levarei para a vida, que me apoiaram, que acreditaram em mim, mesmo quando eu mesma não acreditava, que não me deixaram desistir quando eu não conseguia enxergar uma saída. Agradeço a todos pela companhia nesses anos, pelas discussões nos seminários, pelas contribuições nas discussões dessa pesquisa, pelo apoio nos momentos difíceis. É muito bom fazer parte dessa família. Jeferson, Bianca, Karina, Thiago, Rosangela, Kassiana, Silvia, Gustavo, Élida, Joice, Letícia, Bárbara, Daiany, Ademir, Tania Camila, Camila, Dirceu, Henrique, Michele e Lourdes, a vocês, muito obrigada!

Aos meus amigos: Bárbara, pelas conversas, por não me deixar desistir, por ser minha razão nos momentos que eu era só emoção, por me fazer enxergar outras possibilidades, pelas risadas e confidencias, admiro muito você, você é minha inspiração como pessoa e como pesquisadora; Juliana, minha amiga querida, que mesmo longe nunca deixou de me apoiar e de me incentivar, agradeço por toda força e companheirismo; Paulo, um amigo especial, um companheiro para todas as horas, que sempre esteve ao meu lado, nos bons momentos e nos momentos difíceis; Jeferson, por toda paciência em me ajudar, pelas discussões que me fizeram refletir, pelo incentivo; Bianca, por ser tão prestativa, atenciosa, por dividir comigo minhas aflições, pela torcida para que tudo desse certo; Gustavo, pelo carinho e incentivo, pelas discussões, pelo seu entusiasmo. A todos vocês, obrigada por me fazer acreditar, pela amizade, pelo carinho, pelo auxílio, por me tornarem uma pessoa melhor e mais feliz.

A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para realização dessa pesquisa.

*Não é sobre chegar no topo do mundo, saber que venceu*
*É sobre escalar e sentir que o caminho te fortaleceu*

Trecho da música – Trem Bala – Ana Vilela

ZANIM, Ana Paula. **Um método para a análise de competências dos alunos em atividades de modelagem matemática**. 2021. 136 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.


## RESUMO

Nesta pesquisa, considerando o quadro teórico relativo à modelagem matemática bem como ao que vem sendo estudado relativamente às competências em modelagem matemática, temos por objetivo propor um método para caracterizar e identificar competências dos alunos em atividades de modelagem matemática e usá-lo em uma pesquisa empírica que, no âmbito da pesquisa qualitativa, se caracteriza como estudo de caso. O método proposto caracterizou duas dimensões relativas às competências desenvolvidas pelos alunos, a saber: dimensão das competências relativas aos conhecimentos do *fazer modelagem matemática* e dimensão das competências relativas aos conhecimentos matemáticos. Em cada uma destas dimensões caracterizamos um conjunto de competências em que os alunos podem progredir quando desenvolvem atividades de modelagem matemática. Para investigar o desempenho dos alunos relativamente às competências caracterizadas, usamos um estudo de caso em uma pesquisa empírica. A pesquisa foi realizada no âmbito da pandemia Covid-19 quando as universidades estavam com aulas síncronas realizadas via plataforma digital, e se deu em uma universidade pública do estado do Paraná, com as turmas do 1º ano e do 4º ano de um curso de Licenciatura em Matemática. Os dados foram coletados por meio de registros escritos, gravações em áudio e vídeo pelo Google Meet, instrumentos e entrevistas com dois grupos de alunos, sendo um do 1º ano e um do 4º ano. Os resultados mostram que os dois grupos de alunos tiveram progressos em suas competências matemáticas bem como naquelas relativas ao *fazer modelagem matemática* no decorrer do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. O método proposto nesta pesquisa avalia o desempenho dos alunos considerando separadamente suas experiências com modelagem matemática e seu conhecimento matemático bem como a articulação destas experiências e conhecimento na abordagem matemática de uma situação da realidade.



**Palavras-chave:** educação matemática; modelagem matemática; competências em modelagem matemática.

ZANIM, Ana Paula. **A method for analyzing student competences in mathematical modeling activities.** 2021. 136 p. Doctoral thesis (Post-Graduation on the Teaching of Sciences and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2021.


## ABSTRACT

In this research, we consider the theoretical framework regarding mathematical modelling and the mathematical modelling competences literature that have been published in the modelling community in the last few years. The research aims to provide a method to characterize and identify students competencies in mathematical modelling activities. The proposed method it was used in an empirical research, specifically during a case study in the scope of a qualitative research. The proposed method consider two dimensions regarding the students competencies development: competencies regarding *making mathematical modelling* knowledge and competencies regarding mathematical knowledge. In each of these dimensions we characterize a set of competencies that students can progress when developing mathematical modelling activities. To investigate student competences regarding both method dimensios, we use a case study in an empirical research. The case study was carried out within the scope of the Covid-19 pandemic when universities had synchronous classes performed via digital platform. This case study took place in a State University at Paraná with students from a Mathematics Degree, in the context of first and last grade of the course. Data were collected through students written records, audio and video class recordings via Google Meet, instruments and interviews with two groups of students, one from the first year and another one from the last year of the course. The results show that both groups of students had progressed in their mathematical competencies, as well as those regarding *making mathematical modelling* during the development of mathematical modeling activities. The method proposed in this research may be used to evaluate students performance considering separately their experiences with mathematical modelling and with mathematical knowledge, as well as the articulation of these experience and knowledge in the mathematical approach of a real situation.



**Key words:** mathematics education; mathematical modelling; mathematical modelling competences.

## LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE QUADROS

## LISTA DE TABELAS

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

A modelagem matemática teve sua origem na Matemática Aplicada. Neste contexto, surgiram os primeiros conceitos e procedimentos que caracterizam atividades de modelagem matemática. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.12), esta "importação" da Matemática Aplicada possibilita para a Modelagem Matemática na Educação Matemática "[...] diferentes abordagens e têm sido realizadas segundo diferentes pressupostos em relação às concepções pedagógicas que norteiam as práticas educativas e as estruturações teóricas das pesquisas".

A investigação relativa à modelagem matemática na área de Educação Matemática já constitui um *corpus* teórico reconhecido. Esse reconhecimento pode ser percebido, por exemplo, no âmbito nacional, por meio da realização de eventos, como CNMEM (Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática) que acontece desde 1999, com encontros bianuais e no âmbito internacional o evento ICTMA (International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications) que acontece desde 1983, com encontros bianuais. Além disso, não podemos deixar de explicitar os artigos, dissertações, teses, publicações em anais de eventos, que tratam de modelagem matemática. Portanto a modelagem matemática, a sua prática, pesquisa e implicações curriculares continuam envolvendo membros da matemática e da área de Educação Matemática.

A introdução da modelagem matemática na sala de aula é vista como uma possibilidade para estudar conteúdos matemáticos, proporcionar ao aluno a abordagem de situações do seu cotidiano, bem como buscar meios para nas aulas valorizar o diálogo e a participação ativa do aluno na construção de seu conhecimento (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; BLUM, 2015; ALMEIDA, 2018; DAWN, 2018; AYDIN-GUÇ; BAKI, 2018; MEYER, 2020; CARVALHO; KLUBER, 2021; LU; HUANG, 2021; LU; KAISER, 2021; DURANDT et al, 2021).

Ao propor o desenvolvimento de atividades investigativas, em que questões relacionadas às situações da realidade são investigadas por meio da matemática, essa construção de conceitos, procedimentos e métodos matemáticos são relativos à matemática bem como à situação que está sendo investigada (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; BORSSOI; ALMEIDA, 2015; BURAK; KLUBER, 2011; LORIN; ALMEIDA, 2015).

Assim, na sala de aula a modelagem matemática pode ser uma alternativa pedagógica, em que situações-problema da realidade são investigadas por meio da matemática (ALMEIDA; SILVA, 2021). Uma atividade de modelagem matemática tem seu "início em uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 17).

Muitas pesquisas já sinalizam o desenvolvimento das competências dos alunos em atividades de modelagem matemática (MAAβ, 2006; KAISER, 2007; NISS; HΦJGAARD, 2019; LORIN; 2015, ALMEIDA; ZANIN, 2016), apontando que tanto a competências em modelagem matemática quanto competências matemáticas podem ser desenvolvidas pelos alunos. Em muitos países, a própria modelagem matemática é uma competência matemática a ser desenvolvida pelos alunos (NISS; HΦJGAARD, 2019; LU; HUANG, 2021).

Discussões relativamente ao que é ser competente em algo têm sido apontadas na literatura, tanto no âmbito educacional como fora dele. O termo *competência* surgiu na década de 1970 no âmbito empresarial e tinha como principal objetivo caracterizar o que é realizar uma tarefa de forma eficiente. McClelland (1973) define competência como uma característica do sujeito que lhe proporciona um rendimento superior no trabalho. Competência é um "sistema de conhecimentos, conceituais e procedimentais, organizados em esquemas operacionais que permitem, em algumas situações, a identificação de problemas e sua resolução mediante uma ação eficaz" (TREMBLAY, 1994 *apud* ZABALA; ARNAU, 2010, p. 34). Uma pessoa ser competente refere-se à realização de tarefas de forma eficiente, sendo essas tarefas relacionadas às especificações, habilidades e atitudes relativas a uma ocupação.

De modo geral, as habilidades requeridas das pessoas no século XXI incluem pensamento crítico, raciocínio analítico, resolução de problemas e comunicação. A demanda exige ir além do conhecimento e inclui a aplicação do conhecimento aos problemas e tarefas do dia a dia. Ou seja, a demanda é por saber e ser capaz de usar esse conhecimento no trabalho, no ensino e no contexto do engajamento com as atividades e decisões cotidianas (SHAVELSON, 2010).

O conceito de competência e a reflexão sobre o seu significado pedagógico assumem um papel de destaque na investigação em Educação (DIAS, 2010). A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2017, p.8) coloca que "competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho".

Para Niss e Højgaard (2019) ser competente em algum campo significa ser capaz de dominar aspectos essenciais desse campo e de agir efetivamente dentro dele, com base na visão geral e no julgamento bem fundamentado. Nesse sentido, "competência é a prontidão perspicaz de alguém para agir adequadamente em resposta aos desafios de determinadas situações[1]" (NISS; HØJGAARD, 2019, p. 12).

O *fazer modelagem matemática* – competência de modelagem matemática - em si é uma competência muito discutida na literatura, bem como o que o aluno desenvolve ao *fazer modelagem matemática* (MAAβ, 2006; KAISER, 2007; BLUM, 2015; AYDIN-GUÇ; BAKI, 2018; LU; HUANG, 2021, entre outros).

No *fazer modelagem matemática* os alunos podem desenvolver competências a respeito do entendimento da situação da realidade, para matematizar a situação, para construir um modelo matemático, para interpretar os resultados matemáticos perante à situação, para validar a situação, bem como ter a oportunidade de comunicar suas estratégias e procedimentos de resolução a respeito das situações investigadas para outras pessoas (MAAβ, 2006; LU; KAISER, 2021).

A caracterização de atividades de modelagem matemática é, de modo geral, baseada na interrelação da realidade e da matemática em ambas as direções (ALMEIDA, 2018). Nesse sentido, além, das competências relacionadas ao *fazer modelagem matemática*, os alunos podem desenvolver competências matemáticas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática (NISS; HØJGAARD, 2019).

Assim quando o aluno desenvolve uma atividade de modelagem matemática ele precisa lidar com questões que dizem respeito ao tratamento matemático dado à situação estudada e, nesse sentido, pode ocorrer a ativação de uma ou várias competências matemáticas, dependendo do contexto e da situação. Para além disso, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática requer a ativação de competências relacionadas ao *fazer modelagem matemática*, ou seja, competências de modelagem matemática. Nesta pesquisa, optamos por usar o termo *competência em modelagem matemática* por entendermos que as atividades de modelagem matemática

[1] Tradução nossa de: *Competence* is someone's insightful readiness to act appropriately in response to the challenges of given situations.

propiciam o desenvolvimento de outras competências, para além da competência de modelagem matemática.

O desenvolvimento de atividades de modelagem matemática se torna um campo fértil para olharmos como os alunos mobilizam seus conhecimentos para resolver uma situação não matemática. Nesse sentido, o objetivo desta pesquisa, é propor um método para caracterizar e identificar competências dos alunos em atividades de modelagem matemática e usá-lo em uma pesquisa empírica. Sendo assim, esta pesquisa abrange dois elementos: (1) a proposição de um método que visa caracterizar e identificar competências dos alunos em atividades de modelagem matemática; e (2) o uso desse método em um estudo de caso em que atividades de modelagem matemática são desenvolvidas com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. Para essa proposição, com base em um quadro teórico, primeiramente apresentamos elementos que indicam que as competências dos alunos podem ser associadas a duas dimensões. Em seguida, definimos competências relevantes para os alunos em cada uma dessas dimensões.

Ressaltamos que a finalidade do método não é propor uma maneira de avaliar os alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática, mas sim identificar o que eles são capazes de aprender mediante o desenvolvimento dessas atividades. Para o estudo de caso, usamos uma disciplina de Modelagem Matemática, que em 2020, foi ofertada no 1º ano e no 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática. Assim desenvolvemos atividades de modelagem nestas turmas e usamos o método aqui proposto para inferir sobre as competências dos alunos nessas atividades.

O relatório da pesquisa está estruturado em sete Capítulos. Na Introdução apresentamos uma contextualização da presente pesquisa, bem como seu objetivo e seu encaminhamento. O Capítulo 2, Modelagem Matemática, apresentamos aspectos relativos à modelagem matemática na área da Educação Matemática. No Capítulo 3, Competências em Modelagem Matemática, apresentamos aspectos gerais sobre esse conceito. No Capítulo 4, apresentamos a construção do método para caracterizar e identificar competências dos alunos em atividades de modelagem matemática, as especificidades do contexto da pesquisa, as circunstâncias em que a coleta de dados foi realizada, bem como o encaminhamento das análises. No Capítulo 5 apresentamos a descrição e análise das atividades desenvolvidas pelos alunos. O Capítulo 6 discorre sobre as considerações finais. E por fim, o Capítulo 7 contém as referências que utilizamos.

# 2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

## 2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

O desenvolvimento de pesquisas a respeito de modelagem matemática já constitui um *corpus* teórico reconhecido. Essas pesquisas datam de mais de trinta anos e contemplam diferentes propósitos (LORIN, 2015; PALHARINI, 2017). Autores como Araújo (2010) e Klüber e Burak (2014), apresentam um panorama das pesquisas sobre modelagem no âmbito nacional, bem como Sriraman, Kaiser e Blomhøj (2006) no âmbito internacional.

Segundo Barbosa (2001, p. 69) as atividades de modelagem são “um meio de indagar e questionar situações reais por meio de métodos matemáticos, evidenciando o caráter cultural e social da matemática”.

Bassanezi (2011, p. 24) afirma que a modelagem matemática é “um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos”, sendo assim vista como uma forma de abstração e generalização com o objetivo de realizar previsões sobre fenômenos. Segundo o autor a modelagem matemática consiste “na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual” (p. 24).

Para Niss (2015, p. 67) a modelagem matemática tem o propósito de “capturar, representar, compreender ou analisar a existência de fenômenos, situações ou domínios extramatemáticos, geralmente como um meio de responder à questão de ordem prática, intelectual e científica – e resolver problemas relacionados – pertencentes ao domínio em análise[2]”. Esse entendimento do autor é caracterizado por dois propósitos distintos, a saber: *modelagem prescritiva* que tem como objetivo conceber, organizar ou estruturar certos aspectos do domínio extra matemático, e a *modelagem descritiva* em que o foco consiste na descrição dos fenômenos.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) as atividades de modelagem matemática envolvem uma situação inicial (problemática) e uma solução para o problema denominada de situação final. Assim, para sair da situação inicial e obter uma solução

[2] Tradução nossa de: […] to capture, represent, understand, or analyse existing extra-mathematical phenomena, situations or domains, usually as a means of answering practical, intellectual or scientific questions – and solving related problems – pertaining to the domain under consideration (NISS, 2015, p. 67).

para o problema, uma série de procedimentos e ações são requeridos dos alunos. Vale ressaltar que esses procedimentos não são predefinidos e as soluções também não são previamente conhecidas de modo que é necessário que o aluno se engaje em um processo investigativo que permeia o uso de conceitos matemáticos, bem como a análise da solução.

De acordo com Pollak (1979) a modelagem matemática é um meio dos alunos entenderem quando, como e por que a Matemática funciona na aplicação. Para o autor, a formulação e resolução de problemas por meio da modelagem matemática tem um grande valor pedagógico.

A formulação de problemas é o coração da modelagem matemática, pois dá a oportunidade para os alunos idealizarem e matematizarem uma situação, bem como promove o desenvolvimento de competências em modelagem matemática (POLLAK, 2012; ENGLISH, 2012).

Além disso, formular um problema a partir de uma situação da realidade é um aspecto da idealização, que ocorre mediante a simplificação da situação, uma vez que não é possível considerar todas as facetas do mundo real, mas é preciso decidir quais são os aspectos relevantes. A situação idealizada recebe uma roupagem matemática, que requer o uso de conceitos, procedimentos e métodos matemáticos para a construção do modelo (ALMEIDA, 2018; PEREIRA JUNIOR, 2020). O modelo matemático deve fornecer resultados que são matematicamente corretos. Os resultados obtidos por meio do modelo matemático precisam ser confrontados com a realidade e sua qualidade depende não só dos resultados matemáticos, mas também a solução deve fazer sentido na situação da realidade. Esse aspecto é apontado por Pollak (2015) quando o autor pondera que o contexto real é tão importante quanto o matemático, de modo que o equilíbrio entre o uso da matemática e a consideração de aspectos do problema da realidade é fundamental no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Assumimos nessa pesquisa que no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática

> [...] o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 17).

Assim elementos como situação-problema, matemática, processo investigativo e análise interpretativa caracterizam uma atividade de modelagem matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Em cada um desses elementos é possível identificar procedimentos que são realizados pelos modeladores, a saber,

> [...] a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático), a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009, p. 121).

O uso da matemática em atividades de modelagem matemática pode permitir a leitura ou até mesmo interpretações de situações não matemáticas. Nesse sentido a modelagem matemática pode ser vista como uma atividade de construir modelos já que tais modelos norteiam nossas atividades socioculturais (BEAN, 2012).

Podemos concluir que o objetivo da modelagem matemática vai além de se buscar um modelo específico, "mas principalmente, proporcionar um ambiente para o ensino e a aprendizagem da matemática, durante o processo da busca pelo modelo, a partir de um trabalho com problemas não essencialmente matemáticos" (LORIN, 2015, p. 18).

No desenvolvimento de atividades de modelagem matemática procedimentos são requeridos, ora com vistas à situação-problema original, oras com vistas à situação-problema idealizada matematicamente (PALHARINI, 2017).

O *fazer modelagem matemática* requer dos alunos conhecimentos matemáticos e não matemáticos da situação da realidade investigada. Nesse sentido, o foco está nas ações e nos procedimentos do desenvolvimento que permeiam a relação entre matemática – modelos matemáticos – e situações da realidade, "de modo que o modelador – aquele que faz a modelagem – seja capaz de utilizar ou estabelecer uma estrutura matemática e, ainda, manter fidedignamente, características essenciais do fenômeno" (TORTOLA, 2016, p.46).

## 2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E A SALA DE AULA

São muitos os pesquisadores que defendem a implementação da modelagem matemática nas aulas de Matemática. Um dos motivos para que ocorra essa implementação está no fato de que a modelagem matemática propicia a investigação de fenômenos da realidade e que podem ser de interesse dos alunos, o que pode contribuir para apoiar a aprendizagem de métodos e técnicas matemáticas, bem como propiciar um desenvolvimento reflexivo e crítico sobre o uso da matemática e sobre o fenômeno (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; BLUM, 2009, 2015; MAAβ, 2004, 2006; BURAK, 2010).

Kaiser e Stender (2013), poderam que existem muitos objetivos e intenções para a implementação da modelagem matemática em sala de aula, em particular, segundo os autores duas dessas direções podem ser identificadas, por um lado, o uso da matemática para investigar contextos extramatemáticos é enfatizado como uma atividade importante em si mesma; e, por outro lado, o uso da matemática em contextos extramatemáticos podem apoiar a aprendizagem da matemática.

Nas últimas décadas várias descrições de objetivos para a inclusão da modelagem matemática em sala de aula foram discutidos, variando de objetivos pedagógicos, que enfatizam nas atividades de modelagem que os alunos adquirem habilidades para compreender aspectos centrais de nosso mundo para objetivos relacionados à disciplina, que pretendem estruturar processos de aprendizagem ou introduzir novos conceitos e métodos matemáticos (BLUM, 2015; KAISER; STENDER, 2013).

Nesse sentido, a implementação de atividades de modelagem matemática nas aulas de matemática podem ser feitas levando em consideração os diferentes objetivos e interesses para essa implementação, segundo Barbosa e Santos (2007)

> [...] propósitos diferentes implicam em diferenças nas formas de organizar e conduzir as atividades de Modelagem. Isso nos força a refletirmos sobre as maneiras como as práticas de sala de aula representam ou constituem perspectivas mais amplas sobre Modelagem Matemática (BARBOSA; SANTOS, 2007, p.2).

Partindo das discussões acerca da implementação da modelagem matemática, Kaiser e Sriraman (2006) apresentaram uma classificação de seis perspectivas de modelagem matemática de acordo com os seus objetivos centrais, a saber, modelagem realista ou aplicada; modelagem contextual; modelagem educacional, diferenciada em a) modelagem didática e b) modelagem conceitual; modelagem sócio-crítica; e modelagem teórica ou epistemológica.

Posteriormente Blum (2015), apresenta quatro objetivos para a inclusão da modelagem matemática no currículo e nas salas de aula: o objetivo “pragmático”, para entender e dominar as situações do mundo real; o objetivo "formativo", que visa promover o desenvolvimento de competências nos alunos em atividades de modelagem matemática; o objetivo "cultural", para mostrar as relações entre a matemática e o mundo extramatemático; e o objetivo "psicológico", que visa aumentar os interesses e motivar os alunos para sua aprendizagem da matemática.

Ainda, segundo o autor, de modo geral, existe uma dualidade nesta caracterização, enquanto o objetivo "pragmático lida com a matemática como um suporte para o mundo real, os outros três objetivos, levam à direção oposta, o mundo real como um suporte para a matemática. Buscando avançar nas ideias associadas a estes objetivos, Blum (2015) ressalta que tipos específicos de atividades são necessários, caracterizando assim sua perspectiva de modelagem matemática com um par ordenado (objetivo | atividade adequada). Para isso, seis perspectivas de modelagem são identificadas e relacionadas por Blum (2015) com a caracterização de Kaiser e Sriraman (2006): (pragmático | autêntico) "modelagem aplicada"; (formativo | cognitivamente rico) "modelagem educacional", (cultural com intenção emancipatória | autêntico) "modelagem sócio-crítica", (cultural sobre matemática | epistemologicamente rico) "modelagem epistemológica", (psicológico com intenção de propaganda | motivantes) "modelagem pedagógica", (psicológico | matematicamente rico) "modelagem conceitual".

Vale ressaltar que é possível que uma mesma atividade de modelagem matemática contemple mais do que uma perspectiva simultaneamente. Entretanto, cada perspectiva está vinculada a propósitos e interesses subjacentes à implementação de atividades de modelagem matemática nas aulas e, desse modo, a forma como o professor vai conduzir o desenvolvimento das atividades visa atender interesses e necessidades em situações de ensino e aprendizagem (ALMEIDA; VERTUAN, 2010).

> Conhecer as diferentes perspectivas e refletir sobre os aspectos relevantes em cada uma delas é potencializar a prática de Modelagem em sala de aula, uma vez que os professores podem trabalhar com estas atividades de modo contemplar diferentes perspectivas e, consequentemente, os diferentes aspectos inerentes às atividades de Modelagem (ALMEIDA; VERTUAN, 2010, p. 31).

O uso da modelagem matemática nas aulas "pode motivar e apoiar a compreensão de métodos e conteúdos da matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimentos bem como pode servir para mostrar aplicações da matemática em outras áreas do conhecimento" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012,

p. 30). Além disso, o ensino de matemática tem como um dos focos o desenvolvimento de competências nos alunos e o trabalho com a modelagem matemática propicia um campo fértil para o desenvolvimento de competências (LORIN, 2015; ALMEIDA; ZANIN, 2016; KEISAR; PELED, 2018; BLUM, 2009, 2015; MAAβ, 2004, 2006).

Para Bassanezi (2011), a modelagem matemática na sala de aula é uma estratégia em que “o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem-sucedido, mas caminhar segundo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado” (BASSANEZI, 2011, p.38).

Desse modo, conceitos, procedimentos e métodos matemáticos podem ser introduzidos pelo professor em sala de aula por meio da atividade, ou seja, “a atividade é um meio de oportunizar o estudo de novos conceitos, bem como uma oportunidade para os alunos aplicarem os conhecimentos que possuem para lidar com a atividade e, com isso, resolver problemas gerados por ela” (PEREIRA JUNIOR, 2020).

Para Bisognin e Bisognin (2013)

> No processo da Modelagem Matemática, em suas diferentes etapas de execução, os alunos necessitam analisar informações, usar diferentes modos de representação, sejam elas algébricas, gráficas, geométricas ou numéricas, estabelecer relações entre as variáveis, formular problemas, desenvolver modelos e procurar soluções, formular e justificar conjecturas, analisar e interpretar os resultados. Durante o processo de desenvolvimento de atividades de modelagem, seja individualmente ou em grupo, os alunos constroem novos conhecimentos e diferentes competências (BISOGNIN, BISOGNIN, 2013, p. 2975).

Galbraith (2012) apresenta duas abordagens relacionadas ao uso de modelagem matemática na aprendizagem da matemática: a modelagem como veículo e como conteúdo. O uso da modelagem como veículo, está voltada para o uso de contextos e modelos matemáticos como veículo para a aprendizagem de matemática, assim a modelagem matemática serve às necessidades curriculares. Já no uso da modelagem como conteúdo tem-se uma dupla finalidade, a construção de modelos para investigar fenômenos naturais e sociais sem a prescrição de conteúdos matemáticos que irão emergir e, também, para desenvolver as habilidades de modelagem dos estudantes afim de torná-los aptos para acionar seus conhecimentos matemáticos e resolver problemas.

Segundo Silva (2018), as diferentes compreensões ou os diferentes *modos* de olhar e *fazer modelagem matemática* permitem que diferentes práticas sejam realizadas. Assim cada pesquisador pode elencar etapas ou fases que norteiam a prática da modelagem matemática e diferentes representações do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática podem surgir. Na literatura essas representações são geralmente denominadas ciclos de modelagem matemática.

Na literatura existem muitos "esquemas" também denominados de ciclos que são usados para esclarecer e orientar esse caminho trilhado pelo aluno ao desenvolver atividades de modelagem matemática (MEYER, 2020; ALMEIDA; SILVA, 2021; MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013; KAISER; STENDER, 2013; MAAβ, 2004; BORROMEO FERRI, 2006).

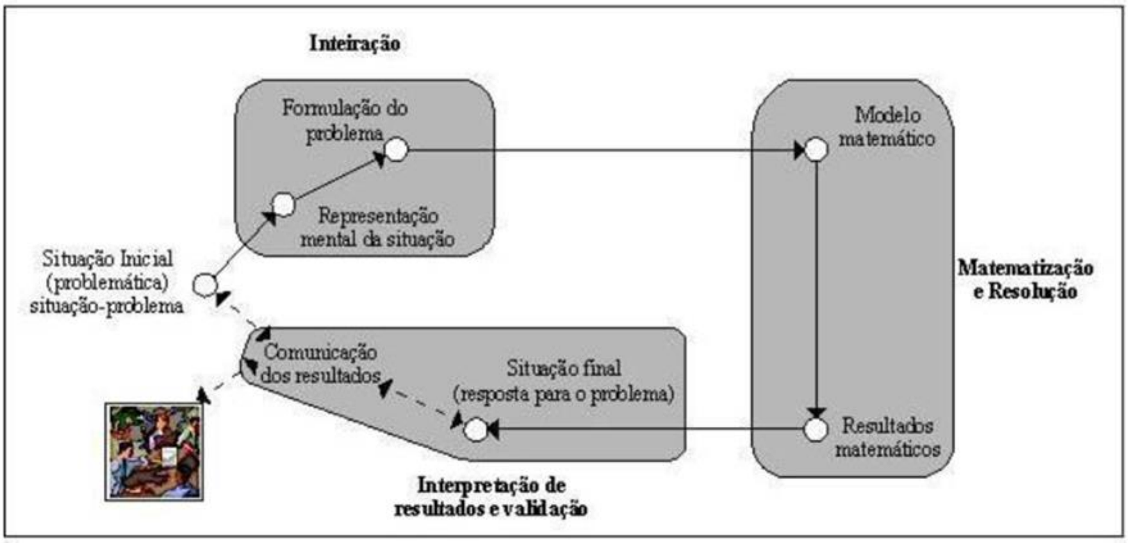
Os ciclos de modelagem têm como finalidade representar os passos percorridos pelos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, caracterizando assim um encaminhamento padrão para essas atividades (ALMEIDA; SILVA, 2021). Levando em consideração que os ciclos representam os elementos que constituem uma atividade de modelagem matemática, nas últimas décadas a relevância destes ciclos para o ensino e aprendizagem da modelagem matemática tem sido investigada, tanto teoricamente quanto em pesquisas empíricas (BORROMEO FERRI, 2006; PERRENET; ZWANEVELD, 2012; ALMEIDA; SILVA, 2021).

Um aspecto importante sobre a estruturação dos ciclos de modelagem matemática é a não linearidade das ações dos modeladores. Ou seja, "os ciclos pretendem incluir o aspecto de que idas e vindas entre as diferentes etapas são recorrentes e relevantes para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática" (ALMEIDA; SILVA, 2021, p. 5).

Para indicar o que os alunos fazem no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática Almeida, Silva e Vertuan (2012), sugerem um ciclo conforme a Figura 2.1. Nessa representação os autores apresentam as fases envolvidas no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, a saber: inteiração, matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação.

A inteiração é a fase em que se dá o primeiro contato do aluno com a situação-problema. Nessa fase o aluno pode conhecer as caraterísticas específicas do que se pretende estudar, realiza a coleta de dados quantitativos e qualitativos, formula o problema e define as metas para sua resolução. A matematização é caracterizada pelo "processo de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar as descrições matemáticas" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p. 16). A resolução envolve a construção de um modelo matemático que descreva a situação; a interpretação de resultados e validação, "visa, para além da capacidade de construir e aplicar modelos, o desenvolvimento, nos alunos, da capacidade de avaliar esse processo de construção de modelos e os diferentes contextos de suas aplicações" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p. 16). A comunicação dos resultados implica em o modelador desenvolver argumentos que possam convencer professor e colegas e àqueles aos quais esses resultados são acessíveis, que a solução apresentada é razoável e consistente, tanto do ponto de vista matemático quanto da adequação desta representação para a situação em estudo (ALMEIDA; SILVA, 2012).

**Figura 2.1** – Ciclo de modelagem matemática




**Fonte**: adaptado de Almeida e Silva (2012, p. 631)

Almeida e Silva (2021) ponderam que:

> o que se pode conjecturar a partir das indicações do ciclo é que a modelagem matemática requer disposição para explorar a situação e recomeçar sempre que necessário, para incrementar o que já se sabe sobre a situação investigada bem como para refletir sobre o que ainda não é capaz de dizer sobre ela (ALMEIDA; SILVA, 2021, p. 6)

Um outro aspecto que tem chamado a atenção dos pesquisadores com relação aos ciclos de modelagem matemática é a possibilidade de evidenciar o desenvolvimento de competências de modelagem a partir do ciclo de modelagem. Essas caracterizações tem sido foco de muitos pesquisadores (JENSEN, 2007; GREEFRATH et al., 2018; FREDJ, 2013; MAAβ, 2006; KAISER, 2007; NISS; HϕDJGAARD, 2019; KEISAR; PELED, 2018; DAWN, 2018; LU; KAISER, 2021; LU; HUANG, 2021, entre outros).

# 3 COMPETÊNCIAS EM MODELAGEM MATEMÁTICA

## 3.1 SOBRE COMPETÊNCIAS

A fim de discutir o que entendemos por competência em modelagem matemática, primeiramente apresentamos considerações a respeito do termo *competência*.

No que se refere ao significado do termo *competência*, o dicionário de Filosofia da Educação refere-se ao termo assim: “normalmente, quando alguém é capaz de fazer alguma coisa de maneira que satisfaça minimamente certo padrão ou nível de exigência, diz-se dessa pessoa que é competente naquela dada atividade” (WINCH; GINGELL, 2007, p.41).

No âmbito da Educação Matemática, Niss e Højgaard (2019) sugerem que competência em algum campo denota a capacidade de dominar os aspectos essenciais desse campo e de agir efetivamente dentro dele, com base na visão geral e no julgamento bem fundamentado. Nesse sentido, “competência é a prontidão perspicaz de alguém para agir adequadamente em resposta aos desafios de determinadas situações[3]” (NISS; HØJGAARD, 2019, p. 12).

Santos (2003) apresenta três características que estão associadas ao conceito de competência, a saber: ação, situação com certo nível de complexidade e integração. A primeira característica refere-se ao processo de utilizar conhecimentos já aprendidos em uma situação; a segunda exige a ativação de recursos próprios do aluno para uma tomada de decisões conscientes dos conhecimentos que deverão ser mobilizados frente a uma situação, de modo geral, não rotineira; e, a terceira característica é que a atividade deve ser desenvolvida como um todo e não como uma junção de partes, desse modo, o aluno ativa conhecimentos, capacidades e atitudes, entre outros recursos que não podem ser observados separadamente.

De acordo com Mischo e Maaβ (2012), o desenvolvimento de competências não está associado apenas às capacidades e habilidades, mas como os usos dessas capacidades e habilidades se refletem na vida e na vontade de coloca-las em ação.

[3] Tradução de: *Competence* is someone’s insightful readiness to act appropriately in response to the challenges of given situations (NISS; HØJGAARD, 2019, p. 12).

Levando em consideração essa conceitualização relativa a competências, voltamos agora nosso olhar para o desenvolvimento de competências pelos alunos em atividades de modelagem matemática.

### 3.2 Competências e Modelagem Matemática

Os termos competências, competências em modelagem e competências matemáticas têm sido muito discutidos na literatura. Segundo Greefrath (2020), a pesquisa sobre o ensino e a aprendizagem da modelagem matemática tem propiciado estudos que visam avaliar as competências dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática.

Nos currículos internacionais a modelagem matemática tem sido incluída como uma competência que o aluno pode desenvolver – competência de modelagem matemática (BLUM, 2015; LU; KAISER, 2021; LU; HUANG, 2021; KAISER; BRAND, 2015, entre outros). Segundo Keisar e Peled (2018) um dos objetivos dos currículos de matemática é desenvolver nos alunos a capacidade de lidar com situações ricas e complexas usando a matemática. Niss e Hϕjgaard (2019) apresentam a competência de modelagem matemática como uma das competências matemáticas que podem ser desenvolvidas pelos alunos.

Ao lidar com situações da realidade por meio da matemática o aluno pode desenvolver competências que estão intrinsicamente relacionadas às ações e procedimentos do aluno requeridas para esse desenvolvimento. Assim o aluno precisa ser capaz de analisar e organizar uma dada situação, decidir quais informações são relevantes e, se necessário, coletar mais informações, formular hipóteses, obter um modelo matemático, avaliar e validar esse modelo com base na situação investigada, bem como comunicar seus resultados (KEISAR; PELED, 2018; DAWN, 2018; GREEFRATH, 2020). Entretanto, para além dessas competências relativas ao *fazer modelagem matemática*, o aluno também desenvolve competências relativas à matemática e relativas à situação da realidade em estudo. Assim, podemos considerar competências “em” modelagem matemática que os alunos adquirem quando desenvolvem esse tipo de atividades na sala de aula.

Na literatura o debate sobre competências dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática compreende duas diferentes perspectivas: perspectiva holística e perspectiva atomística. Sob uma perspectiva holística, o termo competência é usado e interpretado em relação à experiência dos alunos relativamente às suas ações nas diferentes etapas do ciclo de modelagem matemática bem como subprocessos e subcompetências (MAAβ, 2006; KAISER, 2007). Alguns autores que adotam essa perspectiva propõem modelos de competência que incorporam diferentes níveis relativamente às ações dos alunos. Por exemplo, Henning e Keune (2011) distinguem três níveis para o desenvolvimento de competências, a saber: (1) Reconhecimento e compreensão da modelagem matemática; (2) Modelagem matemática independente; (3) Meta-reflexão sobre a modelagem matemática

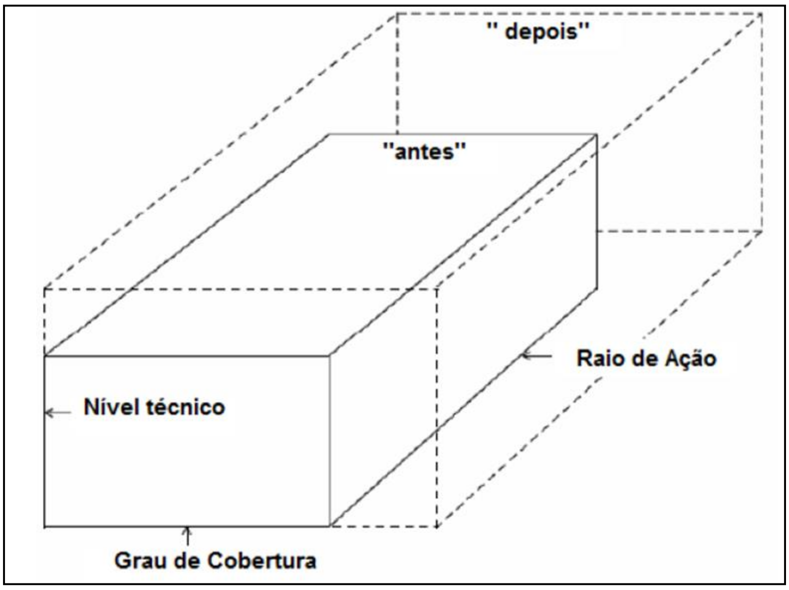
No nível 1, o aluno deve demonstrar a habilidade de reconhecer e descrever o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, distinguindo e localizando cada uma das etapas relativas a um ciclo de modelagem matemática. No nível 2, o aluno deve ser capaz de analisar e estruturar os problemas, relacionar as variáveis, adotar diferentes perspectivas, construir um modelo matemático, trabalhar matematicamente com o modelo, interpretar os resultados e validar o modelo e todo o processo de modelagem. “Os alunos que tenham atingido este segundo nível são capazes de resolver um problema de forma independente[4]” (HENNING, KEUNE, 2011, p. 4). No nível 3, ocorre a interligação entre os dois níveis anteriores. Nesse nível o aluno deve conseguir reconhecer a atividade de modelagem como possibilidade de estudar uma situação da realidade, analisar criticamente a atividade desenvolvida, caracterizar os critérios de avaliação do modelo, refletir sobre a finalidade da modelagem e refletir sobre o uso da matemática.

Jensen (2007), sugere que as competências de uma pessoa se desenvolvem relativamente ao que o autor denomina de três dimensões ao associar esse desenvolvimento com as três dimensões de um paralelepípedo. A cada uma das dimensões dessa figura se associa a evolução das competências considerando: (a) o grau de cobertura; (b) o nível técnico; (c) o raio de ação. O *grau de cobertura* indica as partes do ciclo de modelagem usadas pelos alunos e quais reflexões estão envolvidas. O *nível técnico* se refere ao tipo de conceitos e técnicas matemáticas usadas pelos alunos no desenvolvimento da atividade. O *raio de ação* diz respeito à variação dos tipos de situações e contextos em que os alunos desenvolvem atividades de modelagem matemática. O autor utiliza um modelo tridimensional para representar a posse de

[4] Tradução nossa de: Pupils who have reached this second level are able to solve a problem independently (HENNING, KEUNE, 2011, p.4)

competências de alguém e procura capturar as progressões nas competências dos alunos, conforme indica a Figura 3.1.

**Figura 3.1** – O comportamento do desenvolvimento de competências em modelagem matemática




**Fonte**: traduzido de Jensen (2007)

De acordo com esse modelo, as três dimensões podem ser vistas geometricamente, assim a posse de uma competência é representada por um volume e, desse modo, a progressão é representada por um aumento no volume. O autor pondera que há duas consequências analíticas, que estão associadas, no uso desse modelo, a primeira é que se o nível de um dos eixos é zero, isto é, a competência não foi desenvolvida ao longo de todas as dimensões, então o volume também é zero, ou seja, a competência, em sua totalidade, não foi desenvolvida. Em segundo lugar, um aumento significativo de volume, ou seja, uma progressão significativa na competência de alguém, é facilmente detectável, ao passo que um determinado volume, ou seja, um certo nível de competência, não pode ser apontado de forma única, uma vez que pode ser alcançado em um número infinito maneiras (JENSEN, 2007).

De modo geral, as pesquisas relativas às competências sob uma perspectiva holística buscam identificar essas competências dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática e não a mensuração dessas competências, ou seja, não há uma associação de nota ou pontuação para os alunos, e sim busca-se especificar os níveis de desempenho que esses alunos atingiram.

Na perspectiva atomística os pesquisadores sugerem que a competência em modelagem possa ser subdividida em diferentes subcompetências (HANKELN et al., 2019). Nessa perspectiva os alunos experienciam partes do ciclo de modelagem matemática, logo subprocessos e subcompetências específicas.

Destacamos que relacionar as diferentes subcompetências com as diferentes etapas do ciclo de modelagem, é um exemplo dessa visão dentro do debate sobre modelagem. Autores como Kaiser (2007) e Maaβ (2006) formularam definições de subcompetências necessárias para a execução de uma única etapa do ciclo de modelagem.

Kaiser (2007, p. 110) definiu as competências em modelagem em distinção a habilidades de modelagem como: “competências em modelagem incluem, em contraste com habilidade de modelagem, não só a habilidade, mas também a vontade de resolver problemas, com aspectos matemáticos tomados da realidade, por meio da modelagem matemática[5]”. A autora apresenta uma variedade de competências que parecem ser necessárias a fim de levar a cabo o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática de forma autônoma:

> • competências para entender os problemas do mundo real e construir um modelo de realidade:
> • competências para criar um modelo matemático a partir de um modelo do mundo real:
> • competências para resolver problemas matemáticos dentro de um modelo matemático;
> • competência para interpretar resultados matemáticos em um modelo do mundo real ou uma situação real;
> • competência para desafiar soluções e, se necessário, para realizar outro processo de modelagem[6] (KAISER, 2007, p. 111).

Maaß (2006), em seu estudo empírico, apresentou evidências de que os alunos precisam de competências para realizar as etapas do ciclo de modelagem matemática e que há também outras competências que não estão diretamente relacionadas a uma etapa específica, mas que são necessárias no desenvolvimento de toda a atividade de modelagem matemática. Desse modo, de acordo com Maaβ (2006) as competências em modelagem matemática contêm:

> A. Competências para realizar os passos individuais do processo de modelagem:

---

[5] Tradução nossa de: Modelling competencies include, in contrast to modelling abilities, not only the ability but also the willingness to work out problems, with mathematical aspects taken from reality, through mathematical modelling (KAISER, 2007, p. 110)

[6] Tradução nossa de: competencies to understand real-world problems and to construct a reality model;
• competencies to create a mathematical model out of a real-world model;
• competencies to solve mathematical problems within a mathematical model;
• competency to interpret mathematical results in a real-world model or a real situation;
• competency to challenge solutions and, if necessary, to carry out another modelling process emphasizes (KAISER, 2007, p. 111).

> • Competências para entender o problema real e configurar um modelo baseado na realidade.
>
> • Competências para a construção de um modelo matemático a partir de um problema não matemático.
>
> • Competências para resolver questões matemáticas dentro deste modelo matemático
>
> • Competências para interpretar os resultados matemáticos em uma situação real.
>
> • Competências para validar a solução.
> B. Competências de modelagem metacognitivas
> C. Competências para estruturar problemas do mundo real e trabalhar seguindo em direção para uma solução;
> D. Competências para argumentar em relação ao processo de modelagem e para escrever esta argumentação;
> E. Competências para ver o que a matemática oferece de possibilidades para a solução de problemas do mundo real e considerar essas possibilidades como adequadas[7] (MAAβ, 2006, p. 139).

Ressaltamos que essas subcompetências são importantes para a competência em modelagem matemática, entretanto, algumas pesquisas apontam que fatores adicionais como competências metacogniticas ou competências sociais podem ser necessárias no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática (BLOMHϕJ; JENSEN, 2003; MAAβ, 2006).

O desenvolvimento de competências em modelagem matemática abragem, nesta pesquisa, para além das competências relacionadas ao *fazer modelagem matemática*, competências matemáticas que podem ser desenvolvidas pelos alunos.

Nesse sentido, direcionamos nosso olhar para o desenvolvimento de competências matemáticas dos alunos em atividades de modelagem. De acordo com Niss e Hϕjgaard (2019) a competência matemática é "a prontidão perspicaz de alguém para agir adequadamente em resposta a todos os tipos de desafios matemáticos relativos a determinadas situações"[8] (NISS; HØJGAARD, 2019, p. 14).

Para os autores a competência matemática envolve a ativação da matemática para lidar com desafios que podem surgir de uma situação ou contexto e uma

---

[7]Tradução nossa de: A. Sub-competencies to carry out the single steps of the modelling process
• Competencies to understand the real problem and to set up a model based on reality.
• Competencies to set up a mathematical model from the real model.
• Competencies to solve mathematical questions within this mathematical model.
• Competencies to interpret mathematical results in a real situation.
• Competencies to validate the solution.
B. Metacognitive modelling competencies
C. Competencies to structure real world problems and to work with a sense of direction for a solution
D. Competencies to argue in relation to the modelling process and to write down this argumentation
E. Competencies to see the possibilities mathematics offers for the solution of real world problems and to regard these possibilities as positive (MAAβ, 2006, p. 139).

[8] Tradução nossa de: ***A** mathematical competency* is someone's insightful readiness to act appropriately in response to *a specific sort* of mathematical *challenge* in given situations (NISS; HØJGAARD, 2019, p. 14).

subcompetência matemática se concentra na ativação da matemática para lidar com um tipo específico de desafio que exige real ou potencialmente *tipos específicos de ativação* da matemática, a fim de responder perguntas, resolver problemas, entender fenômenos ou tomar uma decisão. Nesse sentido, "competência matemática é constituída por um conjunto de competências matemáticas[9]" (NISS; HØJGAARD, 2019, p. 14).

A fim de determinar os tipos de desafios e formas associadas para ativar a matemática Niss e Højgaard (2019) apresentam oito subcompetências matemáticas, separadas por dois grupos. No primeiro grupo, *colocando e respondendo perguntas em e por meio da matemática*, temos as seguintes subcompetências: competência de pensamento matemático; competência em manipular problemas matemáticos; competência em modelagem matemática e competência de raciocínio matemático. Já no segundo grupo que diz respeito a *manipulação da linguagem, construções e ferramentas da matemática* temos as seguintes subcompetências: competência de representação matemática; competência de simbolismo e formalismo; competência em comunicação matemática e competência de apoio e ferramentas matemáticas.

Ponderamos que as subcompetências apresentadas são distintas, porém não disjuntas, ou seja, elas são distintas no sentido de que cada subcompetência tem uma identidade bem definida que a destaca das outras, no entanto quando uma subcompetência está no foco de atenção, algumas ou todas as outras podem estar em funções auxiliares, dependendo da situação e do contexto (NISS; HØJGAARD, 2019).

Assim quando o aluno desenvolve uma atividade de modelagem matemática ele precisa lidar com questões que dizem respeito ao tratamento matemático dado a situação estudada e nesse sentido pode ocorrer a ativação de uma ou várias subcompetências matemáticas dependendo do contexto e da situação estudada. Para além disso, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática requer a ativação de competências que estão relacionadas ao *fazer modelagem.*

## 3.3 ESTUDOS SOBRE ANÁLISE DAS COMPETÊNCIAS DOS ALUNOS EM MODELAGEM MATEMÁTICA

Há um consenso sobre a importância da modelagem matemática na Educação Matemática e isso tem propiciado o desenvolvimento de pesquisas que visam

[9] Tradução nossa de: Mathematical competence is an edifice constituted by a set of mathematical competencies (NISS; HØJGAARD, 2019, p. 14).

analisar níveis ou estágios de desenvolvimento de competências em modelagem matemática. Como resultado dessa tendência, já foram desenvolvidos estudos visando obter meios para analisar as competências desenvolvidas pelos alunos em modelagem matemática (BORROMEO-FERRI, 2006; ZOTTL et al., 2011; SILLER et al., 2015; LUDWUING; XU, 2010; LU; HUANG, 2021).

Se assumimos que "as competências em modelagem incluem, em contraste com habilidades de modelagem, não apenas a habilidade, mas também a disposição do aluno para resolver problemas usando matemática por meio da modelagem matemática[10]" (KAISER, 2007, p.110), a análise das competências em modelagem matemática dos alunos pode ser realizada confrontando o aluno com uma amostra de situações (KLIEME et al. 2008). Este confronto pode ser feito com um teste escrito ou com a ajuda de observações ou entrevistas (MAAβ, 2006).

Se o interesse é analisar a quão competente o aluno é para percorrer todas as etapas do ciclo de modelagem é preferível usar uma abordagem holística. Agora, se a intenção do pesquisador é analisar o quão competente o aluno é com relação a alguns subprocessos da modelagem matemática, então pode-se usar abordagens atomísticas.

Alguns autores, analisam as competências desenvolvidas pelos alunos em modelagem matemática, levando em consideração que o aluno perpasse todas as etapas de uma atividade modelagem matemática, usando os trabalhos escritos dos alunos, bem como a gravação de áudio/vídeo dos processos de trabalhos dos alunos para inferir sobre seu desenvolvimento. O processo de análise dessas competências se concentra em categorizar os níveis de competência em modelagem matemática (LU; HUANG, 2021). Siller et al. (2015) apresentou quatro níveis de competência em modelagem matemática levando em consideração a natureza da situação do mundo real e a complexidade da modelagem:

> • Nível 1: Implementar uma mudança representacional entre um contexto e uma representação matemática. Usando modelos familiares e diretamente reconhecíveis para descrever uma determinada situação com uma decisão apropriada.
> • Nível 2: Descrever a situação dada por modelos matemáticos e relações matemáticas. Reconhecer e definir as condições gerais para o uso de modelos matemáticos.
> • Nível 3: Aplicação de modelos a novas situações, encontrando um ajuste adequado entre modelagem matemática e situações reais.

---

[10] Tradução nossa de: Modelling competencies include, in contrast to modelling abilities, not only the ability but also the willingness to work out problems, with mathematical aspects taken from reality, through mathematical modelling (KAISER, 2007, p. 110).

> • Nível 4: Modelagem complexa de uma determinada situação; refletir sobre as variantes da solução ou escolha do modelo e avaliar a precisão ou adequação dos métodos de solução subjacentes[11] (SILLER et al, 2015, p. 5).

Também a partir de uma perspectiva holística Ludwing e Xu (2010), apresentarem seis níveis de competência em modelagem matemática dos alunos que estão relacionados com as etapas do ciclo de modelagem matemática proposto por Blum e Leiss (2005), como segue:

> • Nível 0: O aluno não entendeu a situação e não é capaz de esboçar ou escrever nada de concreto sobre o problema.
> • Nível 1: O aluno compreende a situação real dada, mas não é capaz de estruturar e simplificar a situação ou não consegue encontrar conexões com quaisquer ideias matemáticas.
> • Nível 2: Depois de investigar a situação real dada, o aluno encontra um modelo real por meio de estruturação e simplificação, mas não sabe como transferi-lo para um problema matemático.
> • Nível 3: O aluno é capaz não apenas de encontrar um modelo real, mas também traduzi-lo em um problema matemático adequado, mas não consegue trabalhar com ele claramente no mundo matemático.
> • Nível 4: O aluno é capaz de desenvolver um problema matemático a partir da situação real, trabalhar com esse problema matemático do mundo matemático e obter resultados matemáticos.
> • Nível 5: O aluno é capaz de vivenciar o processo de modelagem matemática e validar a solução de um problema matemático em relação à situação dada[12] (LUDWING; XU, 2010, p. 79).

Já no trabalho de Lu e Huang (2021) os alunos foram convidados a realizar um teste que consiste em três tarefas de modelagem que envolvia diferentes

---

[11] Tradução nossa de: Level 1: Implementing a representational change between contexto and mathematical representation. Using familiar and directly recognizable standard models for describing a given situation with appropriate decision.
Level 2: Describing the given situation by mathematical standard models and mathematical relationships. Recognizing and
setting general conditions for the use of mathematical standard models.
Level 3: Applying standard models to novel situations, finding a suitable fit between mathematical model and real situation.
Level 4: Complex modelling of a given situation; reflection of the solution variants or model choice and assessment of the accuracy or adequacy of underlying solution methods (SILLER et al, 2015, p. 5).
[12] Tradução nossa de: Level 0: The student has not understood the situation and is not able to sketch or write anything concrete about the problem.
Level 1: The student only understands the given real situation, but is not able to structure and simplify the situation or cannot find connections to any mathematical ideas.
Level 2: After investigating the given real situation, the student finds a real model through structuring and simplifying, but does not know how to transfer this into a mathematical problem (the student creates a kind of word problem about the real situation).
Level 3: The student is able to find not only a real model, but also translates it into a proper mathematical problem, but cannot work with it clearly in the mathematical world.
Level 4: The student is able to pick up a mathematical problem from the real situation, work with this mathematical problem in the mathematical world, and have mathematical results.
Level 5: The student is able to experience the mathematical modelling process and validate the solution of a mathematical problem in relation to the given situation.

contextos, conteúdos matemáticos e níveis de dificuldade, os autores se basearam no trabalho de Blum e Kaiser (1997) usaram cinco subcompetências em modelagem e uma análise qualitativa de alguns trabalhos escritos dos alunos, usaram também uma codificação para indicar o estágio que os alunos alcançaram em cada fase de cada tarefa de modelagem, esses estágios são:

> • Estágio 0: O aluno não consegue identificar quaisquer quantidades ou relações na situação real, não tenta a tarefa ou usa números não relacionados / sem sentido na resposta
> • Estágio 1: O aluno tenta estruturar a situação real e apresenta ideias, mas é incapaz de desenvolver um modelo matemático (por exemplo, apenas lista algumas variáveis ou identifica algumas relações entre as variáveis)
> • Estágio 2: O aluno propõe algumas hipóteses razoáveis e desenvolve um modelo matemático, mas o modelo não foi desenvolvido adequadamente.
> • Estágio 3: O aluno desenvolve um modelo realista e o converte em um modelo matemático, mas não consegue chegar a uma solução matemática precisa ou resolve o modelo incorretamente
> • Estágio 4: O aluno propõe um modelo matemático adequado e obtém a solução correta, mas não interpreta a solução usando a situação real.
> • Estágio 5: O aluno desenvolve um modelo realista, converte-o em um modelo matemático e o resolve corretamente. O aluno também interpreta e verifica o modelo na situação real e avalia a lógica do modelo[13] (LU; HUANG, 2021, p. 223).

O objetivo dos trabalhos apresentados é olhar o que os alunos fizeram e não avaliar o que eles fizeram. Esses níveis ou estágios estão relacionados com o que se espera que o aluno faça no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Com a intenção de avançar e ampliar as discussões relativamente à caracterização e identificação de competências nos alunos em atividades de modelagem matemática, propomos nesta pesquisa um método para caracterizar e identificar competências dos alunos em atividades de modelagem matemática, cujo detalhamento apresentamos no capítulo a seguir.

---

[13] Tradução nossa de: Stage 0: The student cannot identify any quantities or relationships in the real situation, does not attempt the task, or uses unrelated/nonsensical numbers in the response.
Stage 1: The student attempts to structuralise the real situation and presents ideas but is unable to develop a mathematical model (e.g. only lists some variables or identifies some relationships between the variables).
Stage 2: The student proposes some reasonable hypotheses and develops a mathematical model, but the model is not properly developed.
Stage 3: The student develops a realistic model and converts it into a mathematical model but is unable to reach an accurate mathematical solution or solves the model incorrectly.
Stage 4: The student proposes a proper mathematical model and obtains the correct solution but does not interpret the solution using the real situation.
Stage 5: The student develops a realistic model, converts it into a mathematical model, and solves it correctly. The student also interprets and verifies the model in the real situation and assesses the rationale of the model

# 4 A PESQUISA DESENVOLVIDA

Neste capítulo apresentamos a construção de um método que viabiliza caracterizar e identificar competências dos alunos em atividades de modelagem matemática e usamos, mediante um estudo de caso, o método proposto para olhar sobre grupos de alunos ao desenvolver três atividades de modelagem matemática.

## 4.1 A CONSTRUÇÃO DE UM MÉTODO PARA CARACTERIZAR E IDENTIFICAR COMPETÊNCIAS

O método que propomos nesta pesquisa visa caracterizar e identificar competências dos alunos em atividades de modelagem matemática. O *caracterizar* competências dos alunos diz respeito à construção de duas dimensões que são vistas como eixos em que os alunos se desenvolvem quando realizam atividades de modelagem matemática. Considerando essas duas dimensões procuramos, pautadas na literatura, identificar quais competências os alunos podem desenvolver relativamente à cada dimensão.

Embora existam diferentes abordagens, perspectivas e entendimentos relativos à modelagem matemática, parece haver um consenso em torno do que apresenta Pollak (2015, p.267) que a ideia central sempre é "formular um problema, decidir o que manter e o que ignorar na construção de um modelo matemático, fazer uso de matemática na situação idealizada a partir da situação da realidade, e então decidir se os resultados podem, em alguma medida, ser úteis para entender a situação original".

A modelagem matemática, de modo geral, refere-se à investigação de uma situação da realidade usando matemática. Partindo de uma situação inicial (problemática) uma série de procedimentos e ações são realizadas pelos alunos a fim de buscar uma solução para o problema e validá-la, caracterizando a situação final. Vale ressaltar que esses procedimentos não são predefinidos e as soluções também não são previamente conhecidas de modo que é necessário que o aluno se engaje em um processo investigativo que permeia o uso de conceitos matemáticos, bem como a análise da solução (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Considerando que a Matemática desempenha um papel importante em muitas áreas é importante proporcionar oportunidades para a construção pessoal desses conhecimentos (ALMEIDA; SILVA, 2010).

Nesse sentido, muitos pesquisadores e professores defendem a implementação de atividades de modelagem matemática na sala de aula, justificando que atividades de modelagem matemática permitem ao aluno o trabalho com situações novas, ou a abordagem de situações de diferentes maneiras (BLUM, 2015; LU; KAISER, 2021; FIGUEIREDO; KATO, 2011; ALMEIDA; SILVA, 2021).

A utilização da modelagem matemática, buscando soluções para problemas da realidade usando a matemática, pode tornar as aulas de matemática mais atraentes e agradáveis. Além disso, pode levar o aluno a desenvolver um espírito de investigação em que ele utiliza a matemática para resolver problemas em diferentes situações, possibilitando aos alunos o entendimento e aplicações de conceitos matemáticos e suas diversas facetas (BASSANEZI, 2011; BLUM, 2015).

Mediante esse trabalho investigativo, atividades de modelagem podem favorecer o desenvolvimento de competências no aluno, “pois não torna o pensamento dos alunos uma ação técnica, pré-formatada, ao contrário, o aluno tem que adequar o conhecimento que já possui às novas situações que são propostas” (FIGUEIREDO, KATO, 2011, p. 4).

O desenvolvimento de competências relacionadas ao *fazer modelagem matemática* tem sido discutido na literatura. De modo geral, essas competências são caracterizadas a partir de um rol de subcompetências que estão relacionadas a etapas ou fases que norteiam o trabalho com atividades de modelagem matemática na sala de aula (MAAβ, 2007; KAISER, 2007).

Para identificar competências, torna-se importante olhar para como o aluno investiga uma situação da realidade usando a matemática, conforme se discute em Galbraith (2012), Blum (2015) e Almeida (2018), por exemplo, relativamente à diversidade de direções em que o aluno pode se desenvolver em atividades de modelagem e como podemos caracterizar e identificar competências dos alunos nesse desenvolvimento. Assim, por um lado, podemos caracterizar que uma dimensão relativamente às competências dos alunos refere-se às competências relativas ao *fazer modelagem matemática*. Nessa dimensão, incluem-se competências como as apontadas em Henning e Keune (2011), Maaβ (2006), Kaiser (2007), por exemplo.

Relativamente ao que incluímos nessa dimensão, Pollak (1979) pondera que é importante que o aluno possa aprender a definir um problema ao invés de só resolver problemas. Nesse sentido, os alunos podem se identificar com questões mais relacionadas ao fenômeno que está sendo abordado na situação-problema ou, podem se identificar mais com aspectos matemáticos requeridos nessa abordagem (MAAβ, 2004). Entretanto, em ambos os casos os alunos precisam transcender a situação da realidade na qual o problema é formulado, convertendo essa situação em uma estrutura organizada da linguagem matemática. Esse processo é chamado de matematização (JABLONKA; GELLERT, 2007).

A matematização é um processo relevante no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, se não a mais importante, relacionada ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática (NISS, 2010; GRIGORAS et al., 2011).

Vários estudos se dedicaram a abordar a matematização no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática (NISS, 2010; STILLMAN et al., 2015; ALMEIDA; SILVA, 2015; ALMEIDA, 2018). A relevância da matematização pode ser observada nos ciclos de modelagem matemática descritos na literatura que indicam explicitamente ou não, que a matematização é uma etapa da modelagem matemática, especialmente com relação ao que o aluno pode aprender no desenvolvimento de atividades dessa natureza. Segundo Almeida (2018 p.21), a matematização em modelagem matemática "significa por um lado, mover-se do mundo da vida para o mundo dos símbolos matemáticos, por outro lado, o uso desses símbolos é mediado pelo conhecimento matemático e extramatemático".

A partir do momento que os alunos matematizam a situação-problema o uso da matemática na situação matemática idealizada se faz presente. Assim, os alunos podem iniciar o tratamento matemático dos dados, utilizar conceitos matemáticos, procedimentos e métodos que auxiliem na busca por uma solução. Segundo Almeida, e Silva (2012) resolução é o nome da etapa em que ocorre essas ações. Nessa etapa, é possível a construção de um modelo matemático para a situação matemática idealizada e, consequentemente, para responder os questionamentos levantados na situação-problema.

O modelo matemático obtido deve responder a situação matemática idealizada bem como a situação-problema inicial. Os alunos precisam confrontar os resultados matemáticos obtidos com a realidade. De acordo com Pollak (2015, p. 268), é preciso validar estes resultados frente à situação inicial estudada e "se o resultado não faz sentido em termos da situação original no mundo real, não é uma solução aceitável[14]".

[14] Tradução nossa de: If the result does not make sense in terms of the original situation in the real world, it is not an acceptable solution (POLLAK, 2015, p. 268)

Essa etapa é denominada por Almeida e Silva (2012) de interpretação de resultados e validação.

As ações envolvidas no encaminhamento de atividades de modelagem matemática, de modo geral, são realizadas em grupos, nesse sentido, a comunicação é um aspecto importante no que se refere a dimensão do *fazer modelagem matemática*, tanto a comunicação que ocorre dentro do grupo quanto a comunicação dos resultados para o professor e demais colegas. Essa comunicação implica essencialmente o desenvolvimento de uma argumentação que possa convencer os envolvidos na atividade e os demais que a solução apresentada é razoável e é consistente, tanto em termos matemáticos quanto para a situação em estudo. Essa fase é caracterizada por Almeida e Silva (2012) como comunicação dos resultados.

De acordo com Almeida (2018), nas atividades de modelagem matemática, por um lado, os objetos e relações extramatemáticas conduzem a formulações matemáticas. Por outro lado, os objetos e relações matemáticas, são ativados para caracterizar objetos e relações extramatemáticas.

Ao lidar com atividades de modelagem matemática, o uso da matemática se faz presente, nesse sentido, competências matemáticas podem ser desenvolvidas. Segundo Niss e Hϕjgaard (2019, p. 14) a competência matemática é definida como a "prontidão perspicaz de alguém para agir adequadamente em respostas a todos os tipos de desafios matemáticos relativos a determinadas situações". Assim, para além das competências relativas ao fazer modelagem, podemos caracterizar a segunda dimensão: competências relativas aos conhecimentos matemáticos desenvolvidos pelos alunos.

Considerando essas duas dimensões direcionamos nosso olhar para as possíveis competências que podem ser desenvolvidas relativamente às especificidades dessas dimensões.

*i)* Dimensão das competências relativas aos conhecimentos do *fazer modelagem matemática*

As discussões acerca da introdução da modelagem matemática centram-se nas relações entre realidade e matemática. Nesse sentido, "a modelagem matemática é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade" (BASSANEZI, 2011, p. 24). No envolvimento com atividades de modelagem matemática, de acordo com Meyer (2020), o primeiro passo, é o de “ler o mundo”, ou seja, conhecer o problema, familiarizar-se com seus aspectos mais relevantes. Nesse sentido, faz-se necessário a busca de informações relevantes, a realização de suposições para o problema, bem como a idealização da situação (MAAβ, 2006; ALMEIDA, SILVA; VERTUAN, 2012). Assim, consideramos que *entender a situação-problema e configurar uma idealização dessa situação* é uma competência relativamente à dimensão do *fazer modelagem matemática*.

Segundo Almeida (2018), lidar com uma relação entre matemática – modelos matemáticos – e, situações da realidade não é um processo livre de idealização. Stillman et al. (2015) consideram que a idealização, dentro da estrutura da modelagem matemática, pode ser vista como a formulação de um problema ideal a partir da situação real. Nesse sentido, formular ou encontrar um problema a partir de uma situação da realidade que se deseja entender é um aspecto da idealização. Contudo, a formulação de um problema que admita uma abordagem ou análise matemática, requer que essa idealização vislumbre uma vestimenta matemática que possibilite que a situação idealizada possa ser matematizada por meio da matemática (ALMEIDA, 2018). Assim uma competência que consideramos nesta dimensão é *realizar a matematização,* ou seja, associar aos dados e ao problema uma linguagem matemática de modo que o problema a ser resolvido receba uma roupagem matemática.

No desenvolvimento de atividades de modelagem, a matematização permite a tradução de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar o tratamento matemático da situação. Esse tratamento matemático é realizado a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Nesse sentido, a matemática é usada para compreender a situação e a construção de um modelo matemático permite a análise de aspectos relevantes da situação, respondendo às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado, bem como, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). No trabalho com a modelagem matemática *a construção do modelo matemático* é uma competência relacionado ao *fazer modelagem matemática* destacado em muitos estudos (POLLAK, 1979; MAAβ, 2006; KAISER, 2007; MEYER, 2021; LU; HUANG, 2021; DURANDT; BLUM; LINDL, 2021).

A construção do modelo matemático permite uma resposta em termos matemáticos ao problema formulado. Entretanto, um processo avaliativo precisa ser realizado pelos envolvidos na atividade, a fim de que a situação da realidade seja entendida por meio do modelo construído. Nesse momento, os alunos realizam uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto à adequação da representação da situação (ALMEIDA; SILVA, 2014). De acordo com Meyer (2020, p.144-145), “os resultados da resolução ou da resolução aproximada devem ser avaliados criticamente e apenas aquilo ou aqueles resultados válidos, aproveitados – ao menos temporariamente”. Portanto, o aluno deve ser capaz de *entender a situação da realidade por meio do modelo matemático construído* (MAAβ, 2006; KAISER, 2007; LUDWIG; XU, 2010; LU; HUANG, 2021; DURANDT; BLUM; LINDL, 2021).

No trabalho com atividades de modelagem matemática, os alunos, de modo geral, se reúnem em grupos, e um aspecto importante quando se trabalha em grupo é a comunicação. A comunicação é um elemento essencial à vida dos seres humanos, principalmente no contexto educacional (ALMEIDA; FERRUZZI, 2011). Segundo Alro e Skovsmose (2006),

> Aprender é uma experiência pessoal mas ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais. E, por conseguinte, a aprendizagem depende da qualidade do contato nas relações interpessoais que se manifestam durante a comunicação entre os participantes. Em outras palavras, o contexto em que se dá a comunicação afeta a aprendizagem dos envolvidos no processo (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 12).

Nesse sentido, a comunicação no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática é importante tanto dentro do grupo quanto para o professor e os demais colegas. Pois, nesse momento de expor a solução para o problema formulado, os alunos argumentam se a solução apresentada é razoável e consistente, tanto do ponto de vista da representação matemática e dos métodos e conceitos matemáticos a ela associados, quanto da adequação dessa representação para a situação em estudo. Portanto, consideramos a competência *comunicação dos resultados para o professor e os colegas* nesta dimensão.

Assim, as competências relativas aos conhecimentos do *fazer modelagem matemática* compreende: (1) e*ntender a situação-problema e configurar uma idealização dessa situação*; (2) *realizar a matematização*; (3) *construir um modelo matemático*; (4) *entender a situação da realidade por meio do modelo matemático construído*; (5) *comunicar os resultados para o professor e os colegas*.

ii) Dimensão das competências relativas aos conhecimentos matemáticos

Nesta dimensão, estamos interessadas em olhar para o uso que o aluno faz da matemática em atividades de modelagem matemática e sobre isso Palharini (2017) pondera que

> [...] a modelagem matemática é um meio de usar Matemática na resolução de problemas cuja origem não está na Matemática. Durante a atividade de modelagem matemática, diferentes temáticas podem ser discutidas e analisadas, como por exemplo, problemas de trânsito, a situação econômica do país, agências governamentais existentes, entre outros. A Matemática está ali como um meio de analisar tais situações e lê-las utilizando de recursos e técnicas específicos à linguagem matemática. Dito deste modo, a modelagem matemática está associada ao uso de aplicações da Matemática (PALHARINI, 2017, p. 49).

Nesta dimensão o foco é olhar o uso de conceitos, procedimentos e métodos matemáticos para construir um modelo matemático e usá-los para obter uma solução para o problema identificado na situação da realidade em estudo. Também se deve considerar nesta dimensão a avaliação e validação do modelo pelo aluno, que deve decidir se este modelo é suficientemente bom, em termos matemáticos, para o estudo dessa situação.

Na literatura, o uso da matemática em atividades de modelagem matemática, de modo geral, é sinalizado quando os alunos se envolvem com a matematização, com a construção de modelos matemáticos, bem como avaliação e validação de modelos matemáticos (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN; PALHARINI, 2017; ALMEIDA; SILVA, 2015; MAAβ, 2006; KAISER, 2007; BLUM, 2015).

A primeira competência considerada nesta dimensão diz respeito ao *usar e associar adequadamente a linguagem matemática na situação-problema em estudo*. Relativamente a essa competência, os alunos precisam identificar o que a matemática tem a ver com o problema a ser resolvido. As hipóteses, as variáveis e simplificações realizadas sobre a situação extramatemática orientam a matematização, assim, a utilização da matemática é guiada pelas características da situação em estudo. Nesse sentido, Almeida (2018, p. 28) pondera que “o que se pode observar é que as atividades exigem que os alunos saibam como fazer bons julgamentos sobre quais ferramentas usar[15]”.

[15] Tradução nossa de: […] what can be observed is that the activities require that the students know how to make good judgments about what tools to use (ALMEIDA, 2018, p. 28)

No desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, o aluno se envolve com conceitos, procedimentos e métodos matemáticos que precisam ser adequados a situação abordada, na literatura, em geral, esse envolvimento está relacionado com a resolução de questões matemáticas (MAAβ, 2006; KAISER, 2007). Assim, caracterizamos a competência *usar corretamente conceitos, procedimentos e métodos matemáticos.* Ressaltamos, que os conceitos, procedimentos e métodos usados pelos alunos podem ser conhecidos por eles ou novos conceitos, procedimentos e métodos podem ser introduzidos para estudar a situação (ALMEIDA, 2018).

> Podemos sintetizar que a matematização e os usos da matemática nas atividades de modelagem matemática podem servir aos seguintes propósitos: (a) eles podem fazer com que os alunos contemplem o uso da matemática que eles já sabem; (b) podem exigir, o caminho, conceitos ou procedimentos matemáticos ainda não conhecidos, que o professor possa introduzir através da atividade; (c) há uma necessidade de incluir uma avaliação do uso da matemática na atividade, demonstrando que o conhecimento matemático e o conhecimento a respeito as situação estão relacionados[16] (ALMEIDA, 2018, p. 28).

Especialmente no mundo que estamos vivendo, a tecnologia, tem se tornado uma aliada no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, por meio de softwares educacionais, os alunos podem organizar os dados, realizar o tratamento matemático da situação da realidade, validar o modelo matemático, entre outros (GREEFRATH, 2020).

No trabalho com atividades de modelagem matemática, os alunos podem manipular diferentes tipos de recursos que podem favorecer o entendimento de uma situação da realidade por meio da matemática (BLUM, 2015; GEIGER, 2011; ALMEIDA, 2018). O uso de tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática também tem sido tema de interesse em muitas pesquisas da área como é o caso, por exemplo, Malheiros (2004), Dalla Vecchia (2012), Borssoi e Almeida (2015), Greefrath (2020), Goulart e Almeida (2020). Assim, consideramos a competência *usar a tecnologia digital para o entendimento da situação, bem como para o trabalho matemático.*

---

[16] Tradução nossa de: We can synthesize that mathematization and uses of mathematics in modeling activities can serve the following purposes: (a) They can cause students to contemplate the use of mathematics that they already know; (b) They may require, on the way, concepts or mathematical procedures not yet known, which the teacher can introduce through the activity; (c) There is a need to include an evaluation of the use of mathematics in the activity, demonstrating that mathematical knowledge and knowledge regarding the situation are linked (ALMEIDA, 2018, p.28).

Outro aspecto importante com relação a utilização da matemática em atividades de modelagem matemática, envolve a validação, o aluno precisa saber como validar em termos matemáticos um modelo. Segundo Czocher (2018, p. 137), “validar um modelo – examinar se (ou até que ponto) ele é adequado – é essencial para a modelagem matemática porque um modelo inadequado é de uso limitado[17]”. Ainda, de acordo com essa autora, existem cinco tipos de validação: a validação que verifica o resultado da análise matemática; a validação que compara a expressão matemática ao modelo da situação; a validação que compara a expressão matemática ao modelo real idealizado; a validação que compara os resultados reais com expectativa empírica e, por fim, a validação que compara os resultados reais com princípios físicos considerados no modelo real. A validação contribui para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática de duas maneiras: os alunos validam seus produtos finais (previsões ou expressões matemáticas) e podem monitorar seus modelos em evolução (CZOCHER, 2018).

A qualidade da validação de um resultado/modelo não deve ser julgada apenas pela correção matemática feita de acordo com a situação matemática idealizada inicialmente, mas também pelo sucesso do confronto com a realidade no final (POLLAK, 2015). Segundo Lu e Huang (2021) os alunos precisam saber criticar e validar seus resultados, já que essa é uma competência a ser desenvolvida pelo aluno no trabalho com a modelagem matemática. Assim, consideramos que uma competência importante nesta dimensão diz respeito a *validar o modelo matemático e a resposta do problema perante a situação.*

Portanto, as competências dos alunos relativamente à dimensão dos conhecimentos matemáticos abrangem: (1) *usar e associar adequadamente a linguagem matemática na situação-problema em estudo*; (2) *usar corretamente conceitos, procedimentos e métodos matemáticos*; (3) *usar a tecnologia digital para o entendimento da situação, bem como para o trabalho matemático*; (4) *validar o modelo matemático e a resposta do problema perante à situação*.

Na literatura, o processo de análise das competências se concentra em categorizar os níveis ou estágios das competências em modelagem matemática. No trabalho de Lu e Huang (2021), por exemplo, os autores usam uma análise qualitativa de alguns trabalhos escritos dos alunos e baseados nas cinco subcompetências de Blum e

[17] Tradução nossa de: Validating a model—examining whether (or the extent to which) it is adequate—is essential to modeling because an inadequate model is of limited use (CZOCHER, 2018, p. 137).

Kaiser (1997) usaram uma codificação para indicar o estágio de desenvolvimento que os alunos alcançaram em cada fase de cada tarefa de modelagem matemática.

Aydin-Guç e Baki (2018), elaboraram quatro critérios para analisar o desenvolvimento das competências dos alunos em MEAs[18]. Esses critérios são: nenhuma tentativa ou desempenho aceitável (critério 0); desempenho insuficiente (critério 1); desempenho aceitável (critério 2) e desempenho perfeito (critério 3).

Na presente pesquisa, consideramos que é adequado dirigir-se às ações e aos registros dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática, relativamente às suas competências relativas às dimensões: competências relativas aos conhecimentos do *fazer modelagem matemática*; competências relativas aos conhecimentos matemáticos ativados na atividade de modelagem matemática.

Para inferir sobre o desempenho dos alunos, definimos relativamente à essas competências: (1) desempenho insuficiente; (2) desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas; (3) desempenho bom.

O desempenho é insuficiente quando não podemos identificar nada que nos mostre indícios relativamente a uma competência. Por exemplo, na competência de *realizar a matematização,* o desempenho insuficiente, diz respeito, a não encontrarmos indícios sobre a transição de linguagem, sobre formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e à definição de um problema.

No desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas, temos indícios, porém o aluno apresenta algumas lacunas/falhas. Por exemplo, na competência *realizar a matematização,* é sinalizado a transição de linguagem, entretanto o aluno não identifica variáveis em relação ao problema definido

Já no nível desempenho bom, as ações e/ou registros sinalizam que na competência de *realizar a* matematização, por exemplo, o aluno apresenta adequadamente a transição de linguagem, a formulação de hipóteses, a seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido, o que permite uma abordagem matemática para a situação em estudo.

As competências relativamente às duas dimensões bem como o desempenho dos alunos em cada competência são apresentadas no Quadro 4.1.

[18] Model-Eliciting Activities

**Quadro 4.1** – Método para caracterização e identificação das competências dos alunos em atividades de modelagem matemática

| COMPETÊNCIAS RELATIVAS AOS CONHECIMENTOS DO *FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA* |
|---|
| **Entender a situação-problema e configurar uma idealização dessa situação.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Realizar a matematização** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Construir um modelo matemático** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Entender a situação da realidade por meio do modelo matemático construído** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Comunicar dos resultados com professores e colegas** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| |
| COMPETÊNCIAS RELATIVAS AOS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS ATIVADOS NA ATIVIDADE |
| **Usar e associar adequadamente a linguagem matemática na situação-problema em estudo.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Usar corretamente conceitos, procedimentos e métodos matemáticos** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Usar a tecnologia digital para o entendimento da situação, bem como para o trabalho matemático.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Validar o modelo matemático e a resposta do problema perante a situação** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |

**Fonte**: elaborado pela autora

### 4.2 O USO DO MÉTODO DESENVOLVIDO EM UM ESTUDO DE CASO

Nesta pesquisa construímos, por meio das lentes teóricas apresentadas nos Capítulos 2 e 3, um método para caracterizar e identificar as competências dos alunos em atividades de modelagem matemática. Para investigar o desempenho dos alunos relativamente às competências caracterizadas, usamos dados obtidos de uma pesquisa empírica.

A pesquisa empírica foi realizada no âmbito da pandemia Covid-19 quando as universidades estavam com aulas síncronas realizadas via plataforma digital. Em uma universidade pública do estado do Paraná, em que estava sendo ofertada a disciplina de Modelagem Matemática na Educação Matemática no 1º ano e a disciplina de Introdução a Modelagem Matemática no 4º ano, foram desenvolvidas atividades de modelagem matemática com dois grupos de alunos, sendo um de cada turma.

A disciplina Modelagem Matemática na Educação Matemática que foi ofertada para o 1º ano, possui uma carga horária total de 144h/a. A ementa e os objetivos da disciplina são apresentados na Figura 4.1.

**Figura 4.1** – Ementa e Objetivos da disciplina Modelagem Matemática na Educação Matemática

**Ementa:**
Introdução a Modelagem Matemática: histórico; natureza; ciclos e esquemas de modelagem matemática; fases ou etapas da modelagem matemática; elementos de atividades de modelagem matemática. Modelos Matemáticos: análise de modelos matemáticos clássicos; elaboração e aplicação de modelos matemáticos. Modelagem matemática na Educação Ambiental. Atividades de Modelagem Matemática: métodos de investigação em matemática – técnicas de modelagem; modelagem matemática no ensino superior; modelagem matemática na Educação Básica.
**Objetivo:**
Investigar situações-problema, de modo geral extramatemáticas, por meio da Matemática para que os licenciandos possam compreender e mobilizar um conjunto de ações e procedimentos como definição de um tema, resolução de um problema por meio de modelos matemáticos e a interpretação e comunicação dos resultados.

**Fonte**: Dados da pesquisa

Já na disciplina Introdução à Modelagem Matemática, ofertada para o 4º ano, possui uma carga horária total era de 72h/a. A ementa e os objetivos da disciplina são apresentados na Figura 4.2.

**Figura 4.2** – Ementa e Objetivos da disciplina Introdução à Modelagem Matemática

**Ementa:**
Análise de modelos clássicos e do conteúdo matemático correspondente. Elaboração de modelos alternativos. Modelagem Matemática para o Ensino Fundamental e Médio.
**Objetivo:**

Introduzir as diferentes perspectivas de modelagem matemática na Educação Matemática e suas implicações para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na Educação Básica.
Desenvolver atividades de modelagem matemática, com foco na familiarização dos alunos com a modelagem matemática.
Analisar e discutir modelos matemáticos clássicos, por meio de atividades de modelagem matemática.

**Fonte**: Dados da pesquisa

Participaram da pesquisa dois grupos de alunos. O grupo 1 constituído pelos alunos A1, B1 e C1 do 1º ano. E o grupo 2 constituído pelos alunos H2, I2 e J2 do 4º ano, que desenvolveram atividades de modelagem matemática, conforme indica a Tabela 4.1

**Tabela 4.1** – Atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos grupos

| Atividade de Modelagem | Período | Turma |
|---|---|---|
| Irrigação de Jardins | Dez/2020 | 1º e 4º |
| Evolução do preço da cesta básica x Evolução do valor do salário-mínimo nacional | Fev/2021 | 1º |
| Produção de Soja | Fev/2021 | 4º |

**Fonte:** Dados da pesquisa

Em ambas as turmas, as atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas sob a orientação da pesquisadora, havendo, entretanto, a participação do professor de cada disciplina nas aulas.

Os dados coletados consistem em registros escritos e falas dos alunos que foram obtidos por meio de: gravações em áudio e vídeo usando o Google Meet[19]; realização de entrevistas pelo Google Meet; contato via WhatsApp ou e-mail. Para o desenvolvimento da pesquisa, todos os alunos assinaram um consentimento livre esclarecido que foi disponibilizado pela pesquisadora por meio do Google Forms, conforme Apêndice A.

[19] Esse recurso é disponibilizado em: https://meet.google.com/

São instrumentos de coleta de dados:

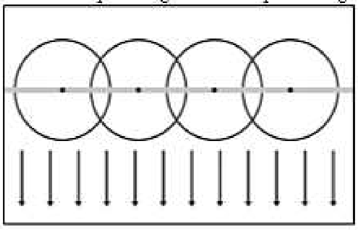
*Registros escritos*: relatórios entregues pelos alunos com o desenvolvimento de atividades de modelagem, bem como os instrumentos usados pela pesquisadora para coletar dados após o desenvolvimento das atividades. Esses instrumentos fizeram parte do método para caracterizar e identificar as competências dos alunos nas atividades desenvolvidas. A construção desses instrumentos se deu após o término das atividades e permitiu que a pesquisadora pudesse buscar indícios do que os alunos aprenderam no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Apresentamos aqui um recorte de questões abordadas no Instrumento I, conforme indica a Figura 4.3. Para maiores detalhes consultar os Apêndices B e C

*Gravações em vídeo e áudio*: como todas aulas aconteceram no ambiente remoto por meio do Google Meet, usamos o recurso “gravar reunião” para realizar as gravações das aulas e também dos grupos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. As orientações e entrevistas também foram gravadas e ocorreram no ambiente remoto via o Google Meet. O roteiro da entrevista utilizado após a finalização das atividades de modelagem matemática encontra-se no Apêndice D. A entrevista foi realizada ao término do desenvolvimento de todas as atividades com o objetivo de esclarecer quaisquer dúvidas da pesquisadora sobre o que os alunos fizeram na atividade.

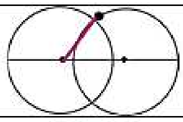
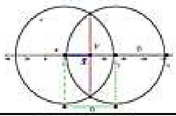
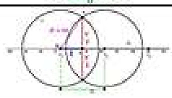
**Figura 4.3** – Exemplo de questões abordadas no Instrumento I *Irrigação de Jardins* para o 1º ano

ATIVIDADE - IRRIGAÇÃO DE JARDINS

Um sistema de irrigação consiste em um longo cano de água montado sobre rodas que o mantém acima do nível das plantas. Os bocais são colocados ao longo do tubo e cada um deles borrifa água em uma região circular. Todo o sistema se move lentamente pelo campo a uma velocidade constante, regando as plantas enquanto se move. Vamos considerar uma situação em que há 300 pés de tubo e 6 bicos disponíveis. Os bocais fornecem um spray relativamente uniforme para uma região circular de 50 pés de raio. A que distância os bicos devem ser colocados para produzir a distribuição mais uniforme de água em um campo retangular de 300 pés de largura?



1) Qual foi o problema investigado?
2) Fizeram desenho para resolver o problema?
( ) Sim ( ) Não
3) Considerando o quadro abaixo avalie qual foi a utilidade de cada desenho para resolver o problema.

| Desenho | Não ajudou | Pouco útil | Muito útil |
|---|---|---|---|
|  | ☐ | ☐ | ☐ |
|  | ☐ | ☐ | ☐ |
|  | ☐ | ☐ | ☐ |

4) A utilização do desenho contribui para a formulação de hipóteses?
( ) Totalmente de acordo
( ) De acordo
( ) Em desacordo
( ) Totalmente em desacordo

5) Para resolver o problema, você formulou hipótese (s)?
( ) Sim. Quail (s):
( ) Não.
6) Considerando a atividade estudada, enumere de 1 até 5, conforme a importância que atribui a cada item, considerando como 1 a maior importância e 5 a menor importância.
( ) A aplicação da matemática.
( ) A resolução de um problema.
( ) A relação da matemática com a realidade.
( ) A aprendizagem da matemática por meio da atividade.
( ) A relação com a sua prática futura enquanto professor de matemática.

**Fonte**: Dados da pesquisa

A partir de uma leitura criteriosa de todo material coletado, buscamos elementos nos relatórios entregue pelos alunos, nas transcrições das aulas e da entrevista bem como nos instrumentos respondidos por eles indícios que nos permitiram inferir em relação ao desempenho dos alunos relativamente às competências em modelagem matemática. Para cada competência, elencamos três níveis de desempenho esperado.

Conferimos o desempenho insuficiente quando não tinha indícios relativo àquela competência; o desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas quando tinha alguns indícios; e desempenho bom quando os indícios relativos àquela competência eram adequados.

Assim, essa pesquisa possui características da pesquisa qualitativa, como a interpretação pessoal e específica dos dados coletados; o interesse reside no processo de análise e não no resultado; é bastante descritiva; leva em consideração o arcabouço teórico estruturado nos capítulos anteriores e o objetivo da pesquisa.

Para Bogdan e Biklen (1994) a pesquisa qualitativa pode ser entendida como a tentativa de compreensão de significados e características de situações apresentadas por entrevistados ou pesquisados em relação a uma determinada situação.

A investigação qualitativa tem as seguintes características: a fonte direta de dados é o ambiente natural; é descritiva; o interesse reside mais no processo do que nos resultados ou produtos; o significado é de importância vital. Segundo Alves-Mazzotti (1999, p. 131) "a principal característica das pesquisas qualitativas é o fato de que estas seguem a tradição 'compreensiva' ou interpretativa".

> Ainda que os indivíduos que fazem investigação qualitativa possam vir a selecionar questões específicas à medida que recolhem dados, a abordagem à investigação não é feita com o objetivo de responder essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação. As causas exteriores são consideradas de importância secundária. Recolhem normalmente os dados em função de um contato aprofundado com os indivíduos, nos seus contextos ecológicos naturais (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 16).

A pesquisa empírica no âmbito da pesquisa qualitativa se caracteriza como um estudo de caso.

O estudo de caso tem caráter qualitativo e visa o exame detalhado de um ambiente, de um sujeito ou de uma situação particular. O estudo de caso procura responder às questões "como" e "por quê" certos fenômenos ocorrem (YIN, 2010).

Particularmente, na presente pesquisa, no estudo de caso, o "como" consiste nas características do método proposto enquanto o "porquê" se associa com ações e procedimentos dos alunos relativamente ao seu desempenho na análise das competências cujo desenvolvimento foi mediado pelas três atividades de modelagem matemática.

# 5 ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E AS COMPETÊNCIAS DOS ALUNOS

Neste capítulo apresentamos as três atividades de modelagem matemática e o desempenho dos alunos em relação as competências identificadas no decorrer desse desenvolvimento. No Quadro 5.1 apresentamos as atividades analisadas nesta pesquisa.

**Quadro 5.1 –** As atividades de modelagem matemática

| Temática das atividades de modelagem matemática | Turma |
| --- | --- |
| Irrigação de Jardins | 1º ano e 4º ano |
| Evolução do preço da cesta básica x Evolução do valor do salário mínimo nacional | 1º ano |
| Produção de Soja | 4º ano |

**Fonte**: elaborada pela autora.

## 5.1 OS ALUNOS DO 1º ANO

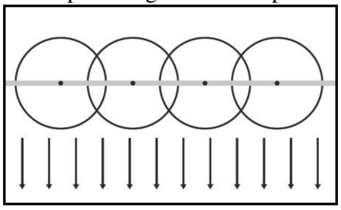
### 5.1.1 A ATIVIDADE IRRIGAÇÃO DE JARDINS

A temática *Irrigação de Jardins* foi proposta pela pesquisadora para a turma mediante informações que constam no Quadro 5.2, que foi compartilhado em tela no Google Meet. Os cinco alunos formaram dois grupos para desenvolver a atividade. A professora da turma participou da aula junto com a pesquisadora, orientando os alunos quando solicitada. Referimo-nos aqui ao desenvolvimento do grupo 1, constituído pelos alunos A1, B1 e C1.

**Quadro 5.2** – Texto entregue aos alunos para o desenvolvimento da atividade[20]

**IRRIGAÇÃO DE JARDINS**

Um sistema de irrigação consiste em um longo cano de água montado sobre rodas que o mantém acima do nível das plantas. Os bocais são colocados ao longo do tubo e cada um deles borrifa água em uma região circular. Todo o sistema se move lentamente pelo campo a uma velocidade constante, regando as plantas enquanto se move. Vamos considerar uma situação em que há 300 pés de tubo e 6 bicos disponíveis. Os bocais fornecem um spray relativamente uniforme para uma região circular de 50 pés de raio. A que distância os bicos devem ser colocados para produzir a distribuição mais uniforme de água em um campo retangular de 300 pés de largura?



**Fonte**: traduzido de GAIMME (2016, p. 58)

Apresentamos no Quadro 5.3 uma descrição abreviada dos encaminhamentos dados à situação pelo grupo 1.

**Quadro 5.3** – Descrição abreviada do desenvolvimento da atividade pelo grupo 1

**IRRIGAÇÃO DE JARDINS**

**Situação da realidade**
Um sistema de irrigação consiste em um cano de água disposto sobre quatro rodas que o mantém acima do nível das plantas.

**Problema**
A que distância os bicos devem ser colocados para produzir a distribuição mais uniforme de água em um campo rectangular de 300 pés de largura?

**Informação**
Vamos considerar 300 pés de tubo e 6 bicos disponíveis. Os bicos são colocados ao longo do tubo e cada um deles borrifa água em uma região circular de 50 pés de raio.

**Hipóteses**
$H_1$: O primeiro bocal está a 50 pés do ponto zero.
$H_2$: O último bocal está a 250 pés do ponto final.

**Matematização**
a) Simulação a partir da hipótese 1

**Construção do modelo matemático**
Processo recursivo a partir de $C_1 = 50$, conduz ao modelo matemático

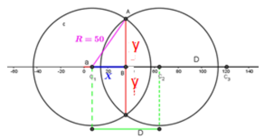
$$C_n = 50 + (2n - 2)x$$

b) Usando a hipótese 2

$$C_n = 50 + (2n - 2).x$$
$$250 = 50 + (2.6 - 2).x$$
$$250 = 50 + 10x$$
$$250 - 50 = 10x$$
$$200 = 10x$$
$$\frac{200}{10} = x$$
$$x = 20$$

Encontrando a posição dos bocais
$C_1 = 50$
$C_2 = 90$
$C_3 = 130$
$C_4 = 170$
$C_5 = 210$
$C_6 = 250$

**Olhando para a interseção das circunferências**




Usando Teorema de Pitágoras

$$R^2 = x^2 + y^2$$
$$50^2 = 20^2 + y^2$$
$$y \cong 45{,}83$$

O grupo não respondeu ao problema e não apresentou a validação e nem a interpretação.

**Fonte**: relatório dos alunos

A temática foi discutida com os alunos a partir da leitura e das informações da situação apresentadas no Quadro 5.2. Posteriormente foi disponibilizado um vídeo explicativo do processo de irrigação. Os alunos foram então convidados a resolver o seguinte problema: *A que distância os bicos devem ser colocados para produzir a distribuição mais uniforme de água em um campo retangular de 300 pés de largura?*

---

[20] Pés é uma unidade de medida de comprimento frequentemente usada nos Estados Unidos, Reino Unido e Canadá. No Brasil, a unidade de medida de comprimento padrão usada é o metro realizando a conversão temos que, 1 pé corresponde à 0,3048 m, assim 300 pés = 91,44 metros. Ao se envolverem com a situação apenas um grupo realizou a conversão das unidades a fim de compreender o problema.

Os alunos precisavam pensar onde posicionariam cada bico para que houvesse uma irrigação mais uniforme, ou seja, precisavam pensar se em algum lugar do campo ocorreria duplicação de irrigação e como a posição dos bicos reduziria essa duplicação. Para tanto, salas foram criadas no Google Meet para que os alunos pudessem desenvolver a atividade.

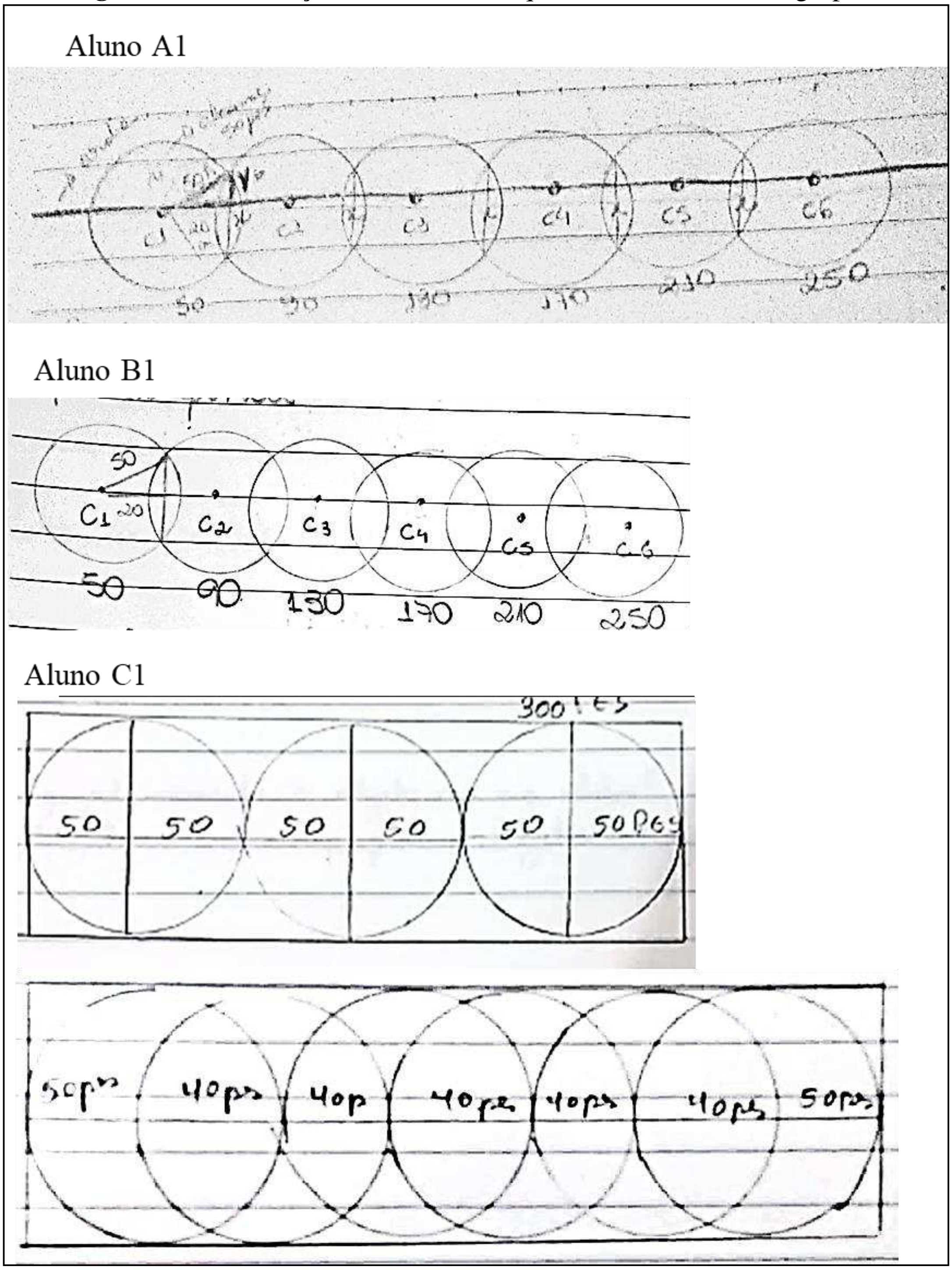
As discussões no grupo 1 iniciaram com a identificação das informações que julgavam relevantes para responder o problema. Num primeiro momento, um dos alunos do grupo sugeriu que as informações relevantes eram: 300 pés, 6 bicos e 50 pés de raio, conforme indica o diálogo.

> P: Vocês sabem me responder quais são as informações relevantes?
> C1: os 300 pés, 6 bicos e 50 pés de raio né. Essas são informações que eu tenho assim mais reais.
> [...]
> C1: Esses 50 pés de raio é cada bico que molha, é isso?
> P: O raio de alcance do bico é 50 pés.

Neste momento, o grupo procura entender a situação, familiarizar-se com os aspectos relevantes. Entretanto, o grupo não conseguiu avançar nas discussões a respeito da situação. Então, foi sugerido o uso de desenhos para os alunos iniciarem o seu trabalho e compreenderem como poderiam agir nessa situação visando determinar a posição de cada bico e uniformidade da distribuição de água.

O grupo decidiu fazer seus desenhos com lápis e papel, não usando *software* para fazer uma representação da situação, conforme a Figura 5.1. O aluno C1 fez duas simulações para a situação, uma usando três bicos e a outra usando os seis bicos.

**Figura 5.1** – Simulação com diferentes quantidades de bicos do grupo 1




**Fonte**: registro dos alunos

A representação da situação considerando essas quantidades de bicos permitiu que os alunos compreendessem aspectos da irrigação, conforme indica o diálogo.

> A1: O círculo então é o alcance da água, é isso?
> P: Isso
> A1: Agora eu entendi.
> [...]

> A1: É sempre linear, não pode ser distribuído aleatório?
> P: Os bicos estão na mangueira, então estão distribuídos linearmente
> A1: Então, não pode simplesmente dividir 300 por 6 que vai dar 50 pés cada?
> P: Será que teremos a distribuição de água mais uniforme, nesse caso? Precisamos pensar nisso.
> A1: É, eu não pensei nisso.
>
> Transcrição das aulas

Mesmo depois das simulações e da discussão de alguns aspectos o grupo apresentou dificuldades para entender como resolver o problema, conforme indica o diálogo.

> C1: Vocês chegaram em alguma conclusão?
> A1: Não, eu não, estou tentando pensar em alguma coisa.
> B1: Eu também não.
>
> Transcrição das aulas

A partir da idealização da situação o grupo ainda apresentava dificuldades para entender a situação não conseguiram pensar em como resolver o problema. Nesse sentido, entendemos que o grupo teve um desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas no que diz respeito ao *entender situação-problema e configurar uma idealização dessa situação*, pois o grupo elencou as informações relevantes, entendeu que o alcance dá água se dava de maneira circular, contudo não apresentou discussões sobre como abordar matematicamente a situação.

Podemos inferir que o desempenho com relação a essa competência pode ter ocorrido por conta da inexperiência do grupo com a modelagem matemática, e também, por ser tratar de uma atividade que envolvia conteúdos não muito familiares para eles. Posteriormente, na entrevista os alunos relatam quais dificuldades enfrentaram no desenvolvimento da atividade, conforme indica o trecho.

> P: Quais dificuldades você sentiu no desenvolvimento da atividade de irrigação?
> A1: Era entender onde usava o Pitágoras, a corda, eu não conseguia ter essa visualização no desenho.
> B1: A dificuldade que surge é com a matemática, porque nunca consigo enxergar o que usar na situação.
>
> Transcrição da entrevista

As lacunas que o grupo apresenta dizem respeito à falta de indícios nos registros e nas falas que nos permitam inferir sobre o entendimento dos alunos com relação à situação em estudo.

A formulação de hipóteses pelo grupo foi realizada a partir de discussões com a professora e a pesquisadora. Nas hipóteses os alunos apresentaram suposições com relação à posição do primeiro e do último bocal, conforme indica a Figura 5.2.

**Figura 5.2** – Formulação de hipóteses pelo grupo 1

Hipóteses – Aluno C1

• Suponho em uma área não utilizada não pode ser regada, e que os espaço resultante será dividido igualmente.
• Para cumprir a 1º hipótese tem recuar 50 pés da extremidades do retângulo.

Hipótese 1 – Aluno C1
Suponha que uma área não utilizada não pode ser regada e, que o espaço resultante será dividido igualmente.
Para cumprir a primeira hipótese tem que recuar 50 pés da extremidade

2º Hipótese - 6 bicos
• Suponha em uma área não utilizada não pode ser regada, e que os espaço resultante será dividida igualmente
• Para cumprir a 2º hipótese tem recuar 50 pés da extremidades do retângulo

Hipótese 2 – Aluno C1
Suponha que uma área não utilizada não pode ser regada e, que o espaço resultante será dividido igualmente.
Para cumprir a primeira hipótese tem que recuar 50 pés da extremidade do retângulo

Hipótese – Aluno A1

1) O 1º bocal vai ser 50 pés do ponto zero
2) O último bocal deve ser a 250 pés do ponto final

Hipóteses:
1) O primeiro bocal vai ser 50 pés do ponto zero
2) O último bocal deve ser a 250 pés do ponto final

**Fonte**: registro dos alunos

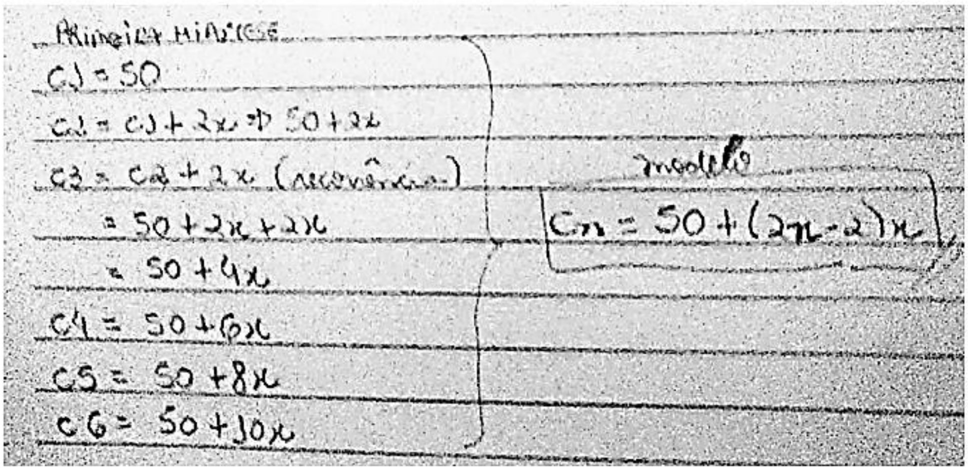
A roupagem matemática que o grupo apresentou no desenvolvimento da atividade, diz respeito às hipóteses formuladas. Essas hipóteses guiam a construção do modelo matemático pelo grupo. Assim, entendemos que na competência de *realizar a matematização* o desempenho do grupo foi aceitável, mas com lacunas/falhas, pois o grupo não identifica variáveis e como essas variáveis se relacionam para a dedução do modelo matemático. Com relação à utilização da matemática, na competência de *usar e associar adequadamente a linguagem matemática na situação-problema em estudo* o grupo parece ter um desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas, pois só associa a linguagem matemática às hipóteses, não usa a linguagem matemática para definir as variáveis envolvidas na situação.

A hipótese de que o primeiro bocal e o último bocal estavam a distâncias pré-definidas, contribuiu para que os alunos realizassem algumas simulações para a distância entre os bicos. Nas simulações apresentadas na Figura 5.1, as circunferências se cruzam. Desse modo, o grupo traçou a corda que está na interseção das duas primeiras circunferências, denotando essa corda por $y$, sendo $x$ a distância entre o bico $C_1$ e a corda $y$ assim a distância entre $C_1$ e $C_2$ seria $2x$.

As hipóteses formuladas pelos alunos indicavam uma posição inicial para o primeiro bocal e, que os outros bocais seriam colocados a partir da posição inicial do primeiro, os grupos usaram o processo de recorrência para obter o modelo matemático que indicaria as posições dos bicos, conforme indica a Figura 5.3.

**Figura 5.3** – Modelo matemático obtido pelo grupo 1

Aluno A1


PRIMEIRA HIPÓTESE

$C1 = 50$

$C2 = C1 + 2x \Rightarrow 50 + 2x$

$C3 = C2 + 2x$ (recorrência)

$= 50 + 2x + 2x$

$= 50 + 4x$

$C4 = 50 + 6x$

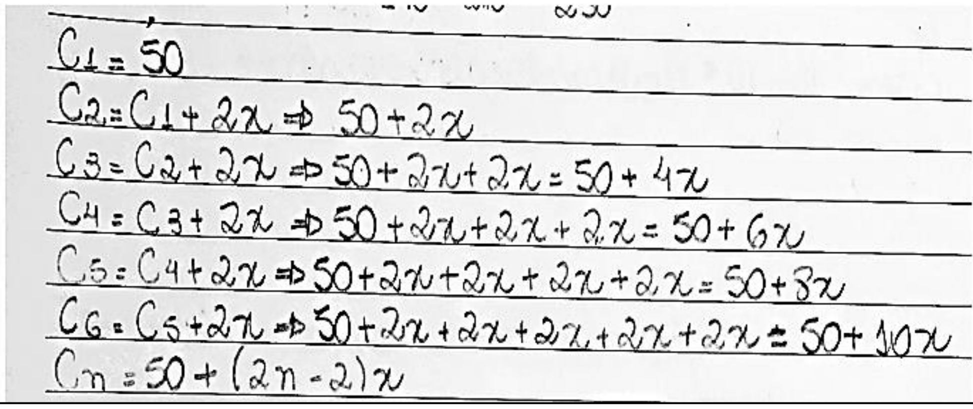
$C5 = 50 + 8x$

$C6 = 50 + 10x$

modelo

$\boxed{Cn = 50 + (2n - 2)x}$

Aluno B1


$C_1 = 50$

$C_2 = C_1 + 2x \Rightarrow 50 + 2x$

$C_3 = C_2 + 2x \Rightarrow 50 + 2x + 2x = 50 + 4x$

$C_4 = C_3 + 2x \Rightarrow 50 + 2x + 2x + 2x = 50 + 6x$

$C_5 = C_4 + 2x \Rightarrow 50 + 2x + 2x + 2x + 2x = 50 + 8x$

$C_6 = C_5 + 2x \Rightarrow 50 + 2x + 2x + 2x + 2x + 2x = 50 + 10x$

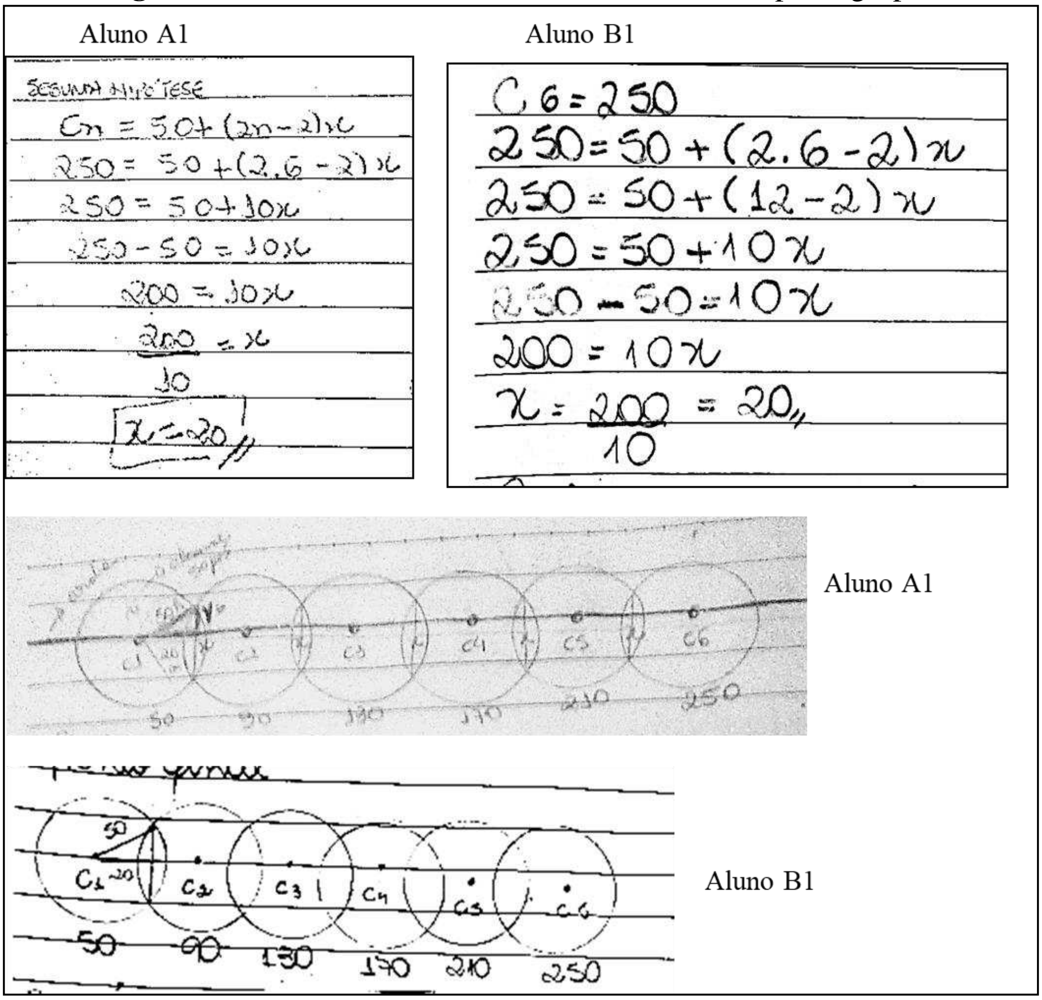
$C_n = 50 + (2n - 2)x$

**Fonte**: registro dos alunos

O uso do processo de recorrência para a construção do modelo matemático não é justificado pelo grupo em suas falas e registros. Nesse sentido, entendemos que nas competências de *construção do modelo matemático* e *usar corretamente conceitos matemáticos, procedimentos e métodos matemáticos* o desempenho é aceitável, mas com lacunas/falhas, já que não foi possível encontrar justificativas para os procedimentos realizados.

O modelo matemático, $C_n = 50 + (2n - 2).x$, construído pelo grupo e o uso da segunda hipótese – o último bocal está a 250 pés do ponto final - possibilitou que o grupo determinasse o valor de $x$ que é a distância de um bico à corda da circunferência e a distância entre os bicos que seria $2x$, conforme indica a Figura 5.4.

**Figura 5.4** – Encontrando a distância entre os bicos pelos grupos




**Fonte**: registro dos alunos

O diálogo do grupo transcrito a seguir dá indícios de como se deu o cálculo do valor de $x$.

> A1: Pelo o que eu entendi é no lugar do $C_n$ você coloca 250 e no lugar do $n$ que é $2n - 2$ você coloca o 6, tenta fazer.
> B1: Você já resolveu?
> A1: Se for desse jeito sim.
> B1: Quanto deu?
> A1: 4,67
> B1: Acho que não é isso. Deixa eu explicar, vai estar lá, $250 = 50 + 10x$, né. Aí você vai fazer $250 - 50$ e vai igualar a $10x$, não vai somar os $50 + 10x$, só somaria se fosse $50x$.
> A1: Verdade, eu fiz errado.
> B1: No meu caso, deu 20.
> A1: Essa é a distância do primeiro bocal até a interseção da corda.
> P: E, então qual a distância de um bico ao outro?
> A1: 40
> P: Isso. Agora se o $C_1$ está a 50 pés, onde está o $C_2$?
> A1: 90 pés.
> P: Isso, agora falta localizar os outros centros.

Transcrição das aulas

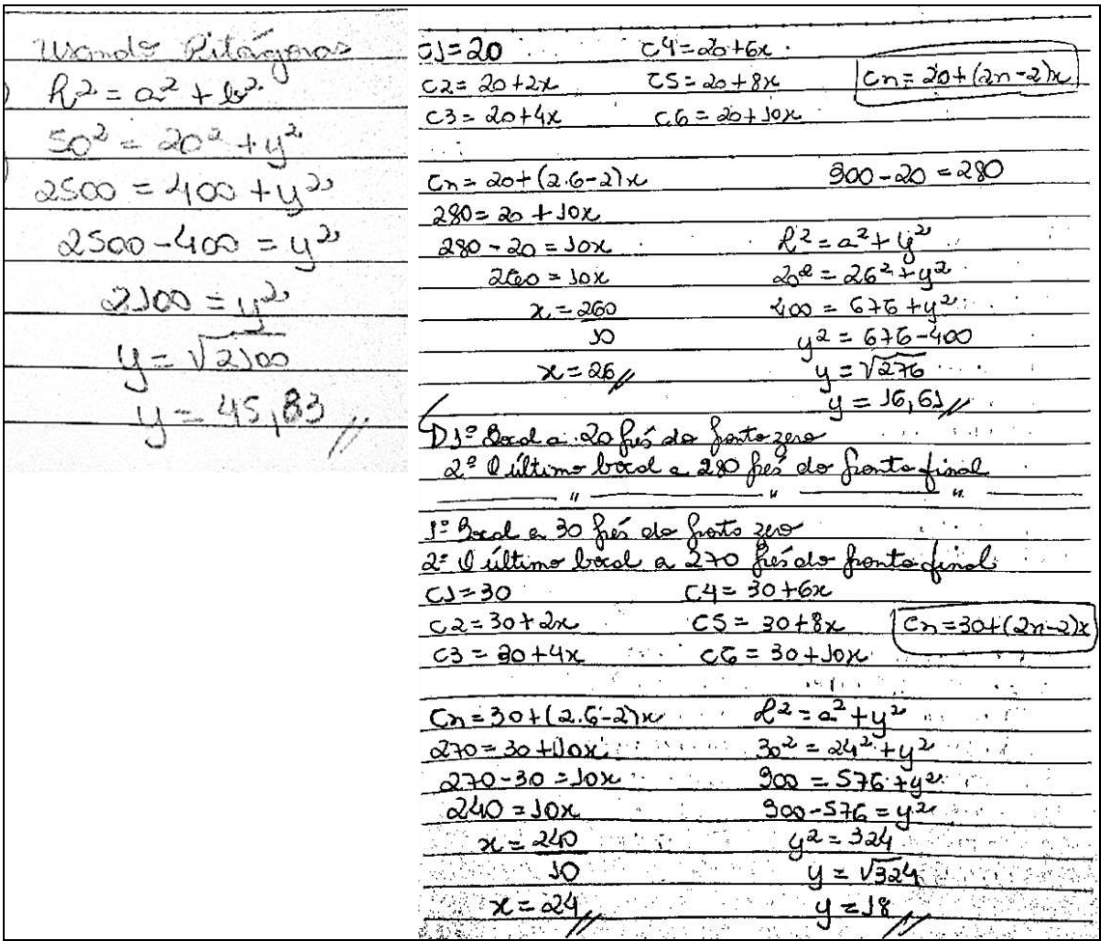
Outro aspecto abordado no problema diz respeito à distribuição uniforme da água no campo. Não foi suficiente para responder ao problema somente determinar a posição dos bicos; foi necessário analisar se aquela disposição encontrada daria uma distribuição uniforme da água. Primeiro o grupo discutiu sobre a distribuição uniforme, conforme indica o diálogo.

> P: O que vocês entendem por distribuição uniforme?
> B1: É que a água tem que cair o mesmo tanto ao redor da circunferência. Não pode ter espaço que recebe mais água e outro menos água na região circular.
> A1: Na verdade nessas interseções recebe mais água né?
> P: Sim, agora podemos analisar essas interseções. Nós temos a corda que cruza esses pontos aqui, correto? Temos o raio de irrigação que é 50 pés. Vocês precisam pensar em que relações matemáticas podem nos ajudar a encontrar o valor da corda.
>
> Transcrição das aulas

Os grupos juntamente com a pesquisadora analisaram as representações e concluíram que na interseção das circunferências a irrigação seria duplicada. A utilização do conceito de corda fez-se necessário para que os grupos estudassem a duplicação de água na interseção das regiões, bem como questões sobre proporcionalidade e o teorema de Pitágoras. Então os alunos calcularam o valor da corda para a primeira distância encontrada e fizeram simulações para outros valores, conforme as Figuras 5.5 e 5.6.

Como nas interseções das circunferências ocorre duplicação de irrigação, conforme indica o diálogo, o grupo direcionou sua atenção a buscar relações matemáticas para que pudessem analisar a situação.

**Figura 5.5 -** Obtendo o valor da corda da circunferência e simulando outros valores aluno A1



Usando Pitágoras

$h^2 = a^2 + b^2$

$50^2 = 20^2 + y^2$

$2500 = 400 + y^2$

$2500 - 400 = y^2$

$2100 = y^2$

$y = \sqrt{2100}$

$y = 45,83$

$C1 = 20$ $C4 = 20 + 6x$

$C2 = 20 + 2x$ $C5 = 20 + 8x$ $\boxed{Cn = 20 + (2n-2)x}$

$C3 = 20 + 4x$ $C6 = 20 + 10x$

$Cn = 20 + (2.6 - 2)x$ $300 - 20 = 280$

$280 = 20 + 10x$

$280 - 20 = 10x$ $h^2 = a^2 + y^2$

$260 = 10x$ $20^2 = 26^2 + y^2$

$x = \frac{260}{10}$ $400 = 676 + y^2$

$y^2 = 676 - 400$

$x = 26$ $y = \sqrt{276}$

$y = 16,61$

D) 1º Bocal a 20 pés do ponto zero

2º O último bocal a 280 pés do ponto final

1º Bocal a 30 pés do ponto zero

2º O último bocal a 270 pés do ponto final

$C1 = 30$ $C4 = 30 + 6x$

$C2 = 30 + 2x$ $C5 = 30 + 8x$ $\boxed{Cn = 30 + (2n-2)x}$

$C3 = 30 + 4x$ $C6 = 30 + 10x$

$Cn = 30 + (2.6 - 2)x$ $h^2 = a^2 + y^2$

$270 = 30 + 10x$ $30^2 = 24^2 + y^2$

$270 - 30 = 10x$ $900 = 576 + y^2$

$240 = 10x$ $900 - 576 = y^2$

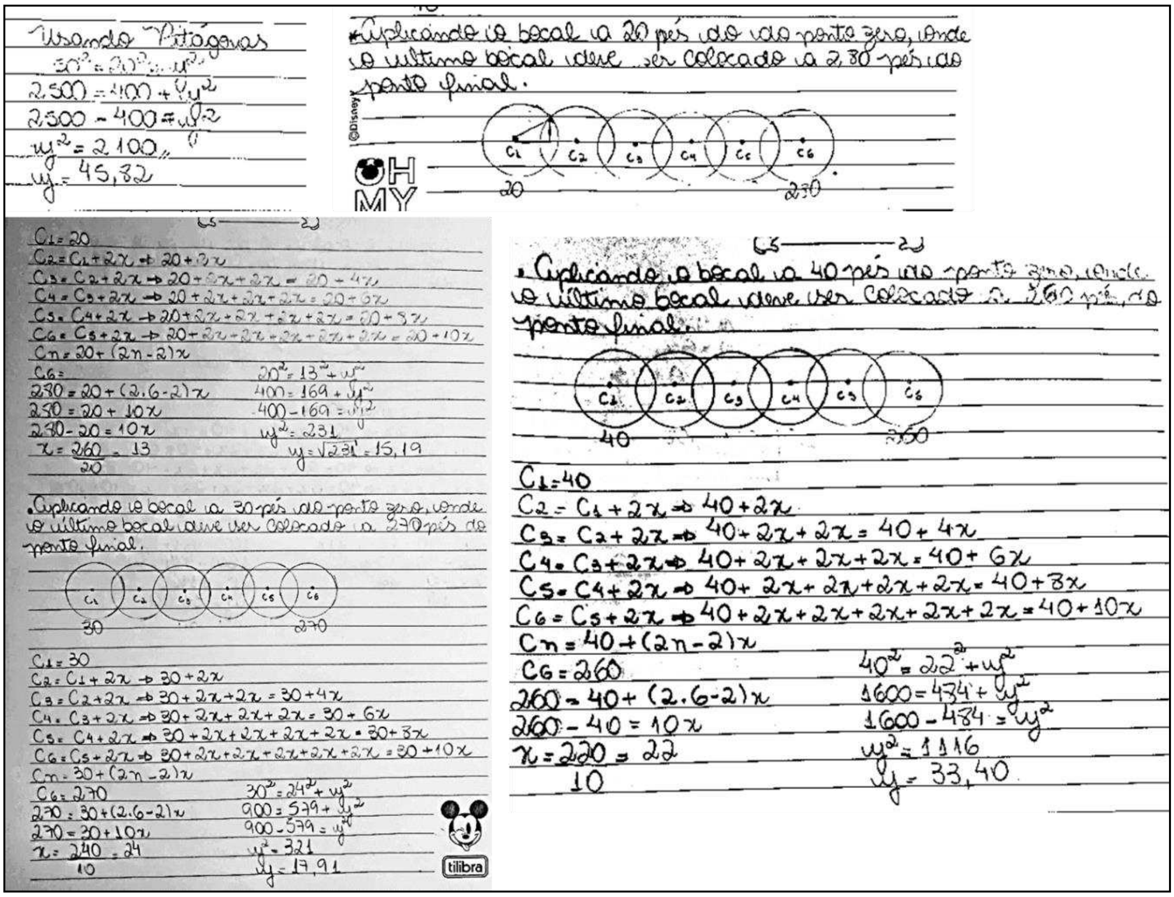
$x = \frac{240}{10}$ $y^2 = 324$

$y = \sqrt{324}$

$x = 24$ $y = 18$

**Fonte**: registro dos alunos

**Figura 5.6 -** Obtendo o valor da corda da circunferência e simulando outros valores aluno B1



**Fonte**: registro dos alunos

O grupo calculou a posição dos bicos considerando diferentes valores para o primeiro bocal e para o último, depois calcularam o tamanho da corda considerando o valor de $x$ calculado em cada uma das simulações. Entretanto, não encontramos indícios em seus registros e falas sobre qual seria a resposta do problema, sobre como entenderam o problema por meio do modelo matemático construído. Assim, consideramos que as competências *entender a situação da realidade por meio do modelo matemático* e *validar o modelo matemático e a resposta do problema perante à situação* foram pouco desenvolvidas, ou seja, houve desempenho insuficiente.

Os alunos tiveram a oportunidade de comunicar o desenvolvimento da atividade, porém não realizaram a comunicação para os demais colegas e professor. A comunicação do grupo ficou restrita ao próprio grupo, à professora e à pesquisadora durante o desenvolvimento da atividade. Entendemos que a comunicação é importante no trabalho com atividades de modelagem matemática e não deve ficar restrita somente ao grupo, pois quando o grupo comunica seu desenvolvimento, apresenta justificativas, escolhas, usando argumentos fundamentados a fim de convencer os colegas e professores de que a solução encontrada é razoável e é consistente. Portanto, consideramos desempenho insuficiente com relação à competência *comunicar os resultados para o professor e colegas*.

Com relação à competência de *usar a tecnologia digital para o entendimento da situação, bem como para o trabalho matemático* não encontramos indícios nos registros e falas dos alunos e consideramos desempenho insuficiente nessa competência.

Apresentamos no Quadro 5.4, como foi o desempenho do grupo nesta atividade a partir das competências analisadas.

**Quadro 5.4** – As competências do grupo 1 na atividade *Irrigação de Jardins*

| |
|---|
| **COMPETÊNCIAS RELATIVAS AOS CONHECIMENTOS DO *FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA*** |
| **Entender a situação-problema e configurar uma idealização dessa situação.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| (X) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Realizar a matematização** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| (X) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Construir um modelo matemático** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| (X) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Entender a situação da realidade por meio do modelo matemático construído** |
| (X) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Comunicar os resultados para o professores e colegas** |
| (X) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| |
| **COMPETÊNCIAS RELATIVAS AOS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS ATIVADOS NA ATIVIDADE** |
| **Usar e associar adequadamente a linguagem matemática na situação-problema em estudo.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| (X) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Usar corretamente conceitos, procedimentos e métodos matemáticos** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| (X) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Usar a tecnologia digital para o entendimento da situação, bem como para o trabalho matemático.** |
| (X) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |

| |
|---|
| ( ) Desempenho bom |
| **Validar o modelo matemático e a resposta do problema perante à situação** |
| (X) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |

**Fonte**: elaborado pela autora

Os alunos desenvolveram a atividade, porém muitas lacunas/falhas foram encontradas nesse desenvolvimento, o que nos leva a acreditar que o grupo não entendeu a situação-problema proposta. No trecho da entrevista transcrita a seguir, temos indícios sobre a falta de entendimento da situação.

> 2) Quais dificuldades você sentiu no desenvolvimento da atividade Irrigação de Jardins?
> B1: Eu acho que encontrar o modelo matemático, a princípio, depois foi ficando mais claro.
> P: Por que você não concluiu a atividade?
> B1: Acho que porque eu não entendi mesmo.
> Transcrição da entrevista

Podemos inferir que quando o desempenho é aceitável mas com lacunas/falhas, há indicativos de que a competência foi acionada, porém o aluno não consegue evoluir e usar essa competência para desenvolver a atividade de modelagem matemática.

### 5.1.2 A Atividade Evolução do preço da cesta básica x Evolução do valor do salário mínimo nacional

A temática dessa atividade relativa à associação do valor da cesta básica e o valor do salário-mínimo foi definida pelo grupo formado pelos alunos A1 e B1. A escolha do tema foi motivada pela atual conjuntura – a Pandemia – e, nesse sentido o grupo buscou estudar o comportamento do preço da cesta básica ao longo dos anos e do valor do salário mínimo nacional ao longo dos anos, conforme indica a fala do aluno A1.

> A1: Pensamos neste tema da cesta básica porque as coisas estão muito caras, já eram caras, mas agora com a pandemia cada vez que vamos no supermercado nos assustamos. E aí vem o questionamento de como as pessoas que sobrevivem com um salário-mínimo estão fazendo para comer né, porque o salário continua praticamente o mesmo e as coisas absurdamente caras.
> Transcrição das aulas

Apresentamos no Quadro 5.5, uma descrição abreviada dos encaminhamentos dados pelos alunos para desenvolver a atividade de modelagem matemática.

**Quadro 5.5** – Descrição abreviada do desenvolvimento da atividade pelo grupo

**EVOLUÇÃO DO PREÇO DA CESTA BÁSICA X EVOLUÇÃO DO VALOR DO SALÁRIÓ-MÍNIMO NACIONAL**

**Situação da realidade**
Diante do nosso cenário de pandemia percebemos como os preços dos alimentos tem subido de forma disparada, mais do que habitualmente sobem, então, pensamos em como as famílias que sobrevivem com salário-mínimo estão conseguindo se manter. Qual comportamento podemos associar a evolução do preço da cesta básica? E do valor do salário-mínimo? Será que em algum momento esses valores se igualam?

**Problema**
Problema 1: Verificar quais modelos matemáticos envolvem a evolução de preços da cesta básica e do valor do salário-mínimo.
Problema 2: Averiguar se em algum momento o preço da cesta básica pode se igualar ao valor do salário mínimo.

**Informação**
Coleta de dados no site do DIEESE, Censo/2019 e IBGE

**Hipóteses**
$H_1$ : No decorrer do tempo a evolução dos preços da cesta básica cresce exponencialmente
$H_2$ : No decorrer do tempo a evolução do valor do salário-mínimo cresce linearmente.

**Simplificações**
$S_1$: Será considerado a média dos preços da cesta básica.
$S_2$: Será considerado o valor do salário-mínimo nacional

**Definição de variáveis**
Variável independente: t, tempo em anos;
Variável dependente: S(t), Salário-minimo em função do tempo t
Variável dependente: C(t), Cesta básica em função do tempo t
Variável independente: n, anos;
Variável dependente: S(n), Salário-minimo em função do ano n
Variável dependente: C(n), Cesta básica função do ano n

**Matematização**
a) Análise dos dados por meio do Excel, construção dos gráficos de dispersão para o preço da cesta básica ao longo dos anos e para o valor do salário-mínimo ao longo dos anos.
b) Ajuste de curva usando o Excel
c) Tratamento dos dados usando o Excel

**Construção do modelo matemático**
A construção dos modelos matemáticos se deu por meio de sistemas de equações

$$C(t) = 226{,}93.e^{0{,}082t}$$

$$S(t) = 55{,}33t + 511{,}33$$

**Mudança de variável**

$$C(n) = 226{,}93e^{0{,}082(n-2010}$$

$$S(n) = 55{,}33n - 110708{,}67$$

**Validação**
Usaram a comparação entre os dados observados e os dados estimados pelo modelo

**Resposta do primeiro problema**
Os modelos matemáticos constrídos

**Resposta para o segundo problema**
1) Primeiro tentaram algébricamente igualar as funções
2) Usaram o Geogebra para encontrar o ponto de interseção das duas funções.
3) O ponto de interseção encontrado foi aproximadamente 2036.

**Validação**
Compararam os valores calculados no Geogebra e pelos modelos matemáticos obtidos.

**Interpretação**
Se a cesta básica continuar crescendo de forma exponencial e o salário-mínimo de forma linear, em 2036 esses valores irão se igualar e em 2037 a cesta básica terá o valor maior que o salário-mínimo. Dessa maneira, consideramos que se o aumento da cesta básica continuar assim, muitas pessoas não terão condições de manter sua alimentaçào

**Fonte**: elaborada pela autora.

A inteiração dos alunos com a situação se deu mediante leituras e pesquisas e levou-os a organizar as informações, conforme indica o Quadro 5.6.

**Quadro 5.6** – Situação inicial apresentada pelo grupo

| |
|---|
| De acordo com a reportagem do site GHZ Economia, por trás da disparada dos alimentos, há uma combinação de fatores. O dólar acima de R$ 5 é um dos ingredientes. Com a moeda norte-americana em patamar elevado, as exportações de commodities, incluindo soja e arroz, ficam mais atrativas. Os embarques acabam diminuindo os estoques dentro do país, o que tende a elevar os valores nas gôndolas dos supermercados. Um outro fator seria o distanciamento social, fazendo assim que houvesse uma procura por alimentos para receitas dentro de casa. A demanda aquecida, também estimulada pelo auxílio emergencial, pressiona os preços para cima.<br>No Brasil o salário-mínimo surgiu no século XX na década de 30, com a promulgação da Lei de nº185 em janeiro de 1936 e decreto de lei em abril de 1938. No dia 1º de Maio o então presidente Getúlio Vargas, fixou os valores do salário-mínimo que começou a vigorar no mesmo ano com o intuito de garantir que o trabalhador recebesse o rendimento mínimo pelo dispêndio dos seus esforços para atender as suas necessidades básicas. O salário-mínimo de 2021 é de R$ 1.100,00.<br>Os valores do salário-mínimo do Paraná são de 33,4% a 54,42% superiores ao Salário-Mínimo Nacional, que desde 2006, ano da criação, o salário-mínimo regional do Paraná sempre foi estabelecido em patamares superiores aos do salário-mínimo nacional. O reajuste no Estado utiliza o mesmo índice aplicado nacionalmente que é balizado na variação do Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC) do ano anterior, com aplicação adicional, a título de ganho real, da variação real do PIB nacional observada dois anos antes.<br>São quatro faixas salariais, que beneficiam técnicos de nível médio; trabalhadores de serviços administrativos do setor de serviços e vendedores do comércio em lojas e mercados; trabalhadores agropecuários, florestais, da caça e pesca; da produção de bens e serviços industriais; e de manutenção e reparo.<br>Na categoria dos trabalhadores agropecuários, florestais e da pesca, o piso sobe para R$ 1.467,40. Para o setor de serviços administrativos, serviços gerais, de reparação e manutenção e vendedores do comércio em lojas e mercados, o salário aumenta para R$ 1.524,60. Esta categoria engloba também a classe de trabalhadores domésticos.<br>Para os empregados na produção de bens e serviços industriais, o piso vai para R$ 1.577,40. Para o último grupo, na categoria de técnicos de nível médio, o piso passa a ser R$ 1.696,20. O mínimo regional não se aplica aos empregados que têm o piso salarial definido em lei federal, convenção ou acordo coletivo de trabalho, nem aos servidores públicos. |

**Fonte**: relatório dos alunos

A partir das informações sobre o tema, o grupo formulou os seguintes problemas:

> *<u>Problema 1:</u>* Verificar quais modelos matemáticos envolvem a evolução de preços da Cesta Básica e do Salário-mínimo Nacional.
> *<u>Problema 2:</u>* Averiguar se o preço da cesta básica pode se igualar ao valor do salário-mínimo nacional.
>
> Relatório dos alunos

Para a resolução desses dois problemas os alunos realizaram extensa coleta de dados. Pesquisaram no site do DIEESE[21] a composição da cesta básica, pesquisaram no Censo/2019 qual a porcentagem do salário é destinada a compra de alimentos, confrontaram esse valor com dados do DIEESE e também coletaram dados sobre o salário mínimo de Curitiba/PR. Calcularam a composição da cesta básica considerando uma família composta por 2 adultos e 2 crianças, que por hipótese,

[21] DIEESE: Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos

consomem como 1 adulto, ou seja, consideraram 3 pessoas. De posse destes dados os alunos realizaram uma simplificação calculando uma média dos preços das cestas básicas para os anos de 2010 a 2020. Outra simplificação realizada pelo grupo foi a de optarem pelo salário-mínimo nacional, conforme a Figura 5.7.

**Figura 5.7** – Simplificações realizadas pelo grupo 1

**Média das cestas básicas nos anos de 2010 e 2020**

| Ano | Média - cesta básica |
|---|---|
| 2010 | 226,93 |
| 2011 | 245,24 |
| 2012 | 264,13 |
| 2013 | 291,92 |
| 2014 | 315,73 |
| 2015 | 358,31 |
| 2016 | 412,94 |
| 2017 | 390,16 |
| 2018 | 400,64 |
| 2019 | 435,29 |
| 2020 | 506,58 |

Fonte: DIEESE – valores mensais (média realizada pelo autor)

Salário-mínimo de 2010 a 2021 (IBGE)

| ano (n) | tempo (t), em anos | Salário-Mínimo Nacional, em reais - OBSERVADO |
|---|---|---|
| 2010 | 0 | 510,00 |
| 2011 | 1 | 545,00 |
| 2012 | 2 | 622,00 |
| 2013 | 3 | 678,00 |
| 2014 | 4 | 724,00 |
| 2015 | 5 | 788,00 |
| 2016 | 6 | 880,00 |
| 2017 | 7 | 937,00 |
| 2018 | 8 | 954,00 |
| 2019 | 9 | 998,00 |
| 2020 | 10 | 1.045,00 |
| 2021 | 11 | 1.100,00 |

Fonte: IBGE (2021)

**Fonte**: relatório dos alunos

O envolvimento do grupo com a escolha do tema, coleta dos dados, formulação dos problemas foi um dos primeiros passos. Destacamos que o grupo buscou informações relevantes, realizou suposições sobre a abordagem do problema, conforme indica o diálogo.

> P: Que dados vocês coletaram?
> B1: Nós pegamos o salário-mínimo de 2011 a 2020 e, o valor da cesta básica também.
> A1: Do salário-mínimo nós meio que tínhamos os dados, porque fizemos um trabalho com a professora sobre o salário-mínimo e a casa própria, então só atualizamos os dados. Os valores da cesta básica

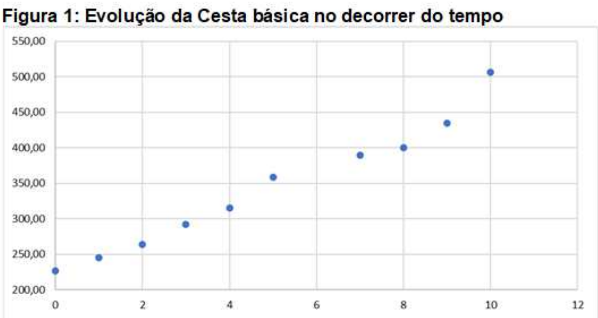
pegamos no site da DIEESE, optamos por pegar os dados de Curitiba.
P: Na atividade do salário-mínimo e a casa própria foi estudado a questão da dependência do valor do metro quadrado com o salário. Vocês pensaram em ver se tem uma relação de dependência do salário com o valor da cesta básica?
A1: Nós conversamos sobre isso também, mas não tem essa dependência porque a cesta básica não aumenta só quando aumenta o salário mínimo, tem outros fatores que influenciam.

Transcrição das aulas

Assim, entendemos que na competência de *entender a situação-problema e configurar uma idealização dessa situação* o grupo obteve um desempenho bom.

Para abordar matematicamente a situação os alunos usaram o Excel para analisar os dados, construíram gráficos de dispersão para o valor da cesta básica no decorrer do tempo, para o valor do salário-mínimo no decorrer do tempo e estudaram a variação dos dados, conforme indica a Figura 5.8.

**Figura 5.8 -** Tratamento dos dados realizada pelo grupo 1





**Análise de variação geométrica da Cesta básica**

| ano (n) | tempo (t), em anos | Cesta Básica - Curitiba/Pr, em reais C(t) | Análise de variação da Geométrica da Cesta Básica - C(t+1)/C(t) |
|---|---|---|---|
| 2010 | 0 | 226,93 | 0,93 |
| 2011 | 1 | 245,24 | 1,08 |
| 2012 | 2 | 264,13 | 1,08 |
| 2013 | 3 | 291,92 | 1,11 |
| 2014 | 4 | 315,73 | 1,08 |
| 2015 | 5 | 358,31 | 1,13 |
| 2017 | 7 | 390,16 | 1,09 |
| 2018 | 8 | 400,64 | 1,03 |
| 2019 | 9 | 435,29 | 1,09 |
| 2020 | 10 | 506,58 | |

**Análise de variação salário-mínimo: [S(t+1)-S(t)]/(t)**

| ano (n) | tempo (t), em anos | Salário-Mínimo Nacional, em reais S(t) | Análise de variação aritmética - salário-mínimo: ((S(t)+1)-S(t)/(t+1)-t)) |
|---|---|---|---|
| 2010 | 0 | 510,00 | 35,00 |
| 2011 | 1 | 545,00 | 77,00 |
| 2012 | 2 | 622,00 | 56,00 |
| 2013 | 3 | 678,00 | 46,00 |
| 2014 | 4 | 724,00 | 64,00 |
| 2015 | 5 | 788,00 | 149,00 |
| 2017 | 7 | 937,00 | 17,00 |
| 2018 | 8 | 954,00 | 44,00 |
| 2019 | 9 | 998,00 | 47,00 |
| 2020 | 10 | 1.045,00 | 55,00 |
| 2021 | 11 | 1.100,00 | |

**Fonte**: relatório dos alunos

A partir desse tratamento os alunos formularam a seguinte hipótese e definiram as seguintes variáveis:

> <u>*Hipótese 1*</u>: Supor que no decorrer do tempo a evolução dos preços da cesta básica cresce exponencialmente e o salário-mínimo cresce linearmente.
> <u>*Definição das variáveis*</u>:
> Variável independente: t, tempo em anos;
> Variável dependente: S(t), Salário-mínimo em função do tempo t
> Variável dependente: C(t), Cesta básica em função do tempo t
> Variável independente: n, anos;
> Variável dependente: S(n), Salário-mínimo em função do ano n
> Variável dependente: C(n), Cesta básica função do ano n
>
> Relatório dos alunos

Os alunos realizaram a tradução de linguagens, usaram gráficos, tabelas, símbolos para realizar o tratamento da situação em uma linguagem matemática, ou seja, realizaram a matematização da situação. Assim, entendemos que na competência *realizar a matematização* os alunos tiveram um desempenho bom.

Ao matematizar a situação, os alunos formularam uma hipótese, definiram variáveis, realizaram simplificações de maneira adequada para a situação em estudo. Para além dos indícios no desenvolvimento da atividade, também é possível inferir a adequação no uso e associação adequada da linguagem matemática na situação-problema em estudo no instrumento de coleta de dados respondido pelos alunos, conforme a Figura 5.9.

**Figura 5.9** – Usando a linguagem matemática

6) De acordo com a análise do comportamento dos dados, o valor da cesta básica e o valor do salário mínimo apresentavam um comportamento:
(x) Crescente
( ) Decrescente

7) Quais foram as hipóteses formuladas para a abordagem matemática da situação? Hipótese 1: Supor que no decorrer do tempo a evolução dos preços da cesta básica cresce exponencialmente e o salário-mínimo cresce linearmente.

8) Quais foram as simplificações realizadas na situação para possibilitar sua abordagem matemática?
1) Apesar do estado do PR ter um salário regional, iremos considerar o Salário-mínimo Nacional, pois, a maior parte dos estados o optam por ele.
2) Retirando o ano de 2016 dos dados para que informações ficassem mais aproximadas
3) Média dos valores das cestas básicas anual e média dos valores da cesta básica realizada nos supermercados da região.

**Fonte**: Instrumento III

Portanto, os alunos usaram e associaram adequadamente a linguagem matemática à situação-problema em estudo, de modo que tiveram bom desempenho nessa competência.

Para a dedução do modelo matemático os alunos usaram a análise gráfica e a análise da variação dos dados. A partir da confirmação de que os ajustes supostos eram adequados os alunos realizaram a dedução do modelo matemático, conforme indica a Figura 5.10.

**Figura 5.10** – Obtenção do modelo matemático

**Modelo Matemático – Salário-mínimo**

$2a + b = 622 \rightarrow b = 622 - 2a$

$8a + b = 954$

$8a + b = 954$ | $2a + b = 622$

$8a + 622 - 2a = 954$ | $2 * 55{,}33 + b = 622$

$6a + 622 = 954$ | $110{,}67 + b = 622$

$6a = 954 - 622$ | $b = 622 - 110{,}67$

$6a = 332$ | $b = 511{,}33$

$a = 332/6$

$a = 55{,}33$

**Modelo: S(t) = 55,33t + 511,33**

**Modelo Matemático- Cesta Básica**

$226{,}93 = b\,.\,e^{k0} \rightarrow 226{,}93 = b\,.\,e^{0} \rightarrow$ **$226{,}93 = b$**

$315{,}73 = b\,.\,e^{k4} \rightarrow 315{,}73 = b\,.\,e^{k4} \rightarrow 226{,}93 = b$

$315{,}73 = b\,.\,e^{k4}$

$315{,}73 = 226{,}93\,.\,e^{k4}$

$\ln(315{,}73 / 226{,}93) = \ln(e^{k4})$

$\ln(1{,}3913) = k4\,.\,\ln(e)$

$0{,}330 = k4\,.\,1$

$0{,}330/4 = k$

**$0{,}082 \cong k$**

**Modelo: $C(t) = 226{,}93\,.\,e^{0{,}082\,.\,t}$**

**Fonte**: relatório dos alunos

Os alunos estudaram sobre função polinomial do 1º grau, sistemas de equações, função exponencial na base $a$ e na base $e$. O ajuste da função polinomial do 1º grau era algo familiar para o grupo. Já para o ajuste da função exponencial, o grupo solicitou a orientação da professora regente. Na competência *construir um modelo matemático*, os alunos tiveram um desempenho satisfatório.

Relativamente à competência *usar corretamente conceitos, procedimentos e métodos matemáticos*, o grupo se envolveu com conceitos, procedimentos e métodos matemáticos que precisaram ser relembrados ou estudados para a abordagem da situação, conforme o diálogo.

> P: Os conhecimentos matemáticos necessários para o desenvolvimento da atividade eram coisas já aprendidas ou foi necessário algum suporte?
> Grupo: Algumas coisas sim, mas a maioria precisamos de suporte, por exemplo, na atividade final, quando chegou na função exponencial precisamos de ajuda para determinar os parâmetros.
>
> Transcrição da entrevista

No instrumento III utilizado na coleta de dados, os alunos identificaram os conteúdos aprendidos no desenvolvimento da atividade, bem como justificaram a escolha dos ajustes que realizaram, conforme indica a Figura 5.11. Portanto, entendemos que os alunos tiveram um desempenho bom nessa competência.

**Figura 5.11** – Identificando os conteúdos e justificando os ajustes

9) Assinale os conteúdos aprendidos no desenvolvimento da atividade

( x ) Progressão aritmética
( x ) Sistemas lineares
( x ) Progressão geométrica
( x ) Função linear
( x ) Função exponencial

12) Por que a função polinomial do 1º grau foi utilizada para estudar o comportamento da evolução do valor do salário mínimo no decorrer do tempo?

Porque através de todos os dados escolhidos e da análise de variação, percebemos que o salário-mínimo cresce de forma linear.

13) Por que a função exponencial foi utilizada para estudar o comportamento da evolução do valor da cesta básica no decorrer do tempo?

Porque através de todos os dados escolhidos e da análise de variação, percebemos a cesta básica cresce de forma exponencial.

**Fonte**: registro dos alunos

O grupo realizou a previsão do valor do salário-mínimo e do preço da cesta básica para o ano de 2022, mediante mudanças de variáveis e calcularam a previsão para o ano de 2022, conforme indica a Figura 5.12.

**Figura 5.12** – Mudanças de variáveis e previsão para o ano de 2022

A partir dos modelos é possível realizar previsões para os valores do salário-mínimo para 2022, por exemplo. Para isso, será preciso realizar uma alteração na variável de tempo (t) para ano (n), já que t foi a variável auxiliar utilizada na situação.

| **ano (n)** | **tempo (t), em anos** |
|---|---|
| 2010 | 0 |
| 2011 | 1 |
| 2012 | 2 |
| 2013 | 3 |
| 2014 | 4 |
| 2015 | 5 |
| 2017 | 7 |
| 2018 | 8 |
| 2019 | 9 |
| 2020 | 10 |
| 2021 | ... |
| **n** | **t = (n - 2010)** |

Realizando, então, a troca da variável na expressão, pois, t foi utilizada na variável auxiliar, chegamos no seguinte modelo matemático:

$$S(t) = 55{,}33\ (n - 2010) + 511{,}33$$
$$S(n) = 55{,}33n - 111.220 + 511{,}33$$
$$S(n) = 55{,}33n - 110708{,}67$$

Logo, o modelo encontrado é: $S(n) = 55{,}33n - 110708{,}67$

Vamos realizar a previsão para o salário-mínimo para 2022 a partir do modelo matemático encontrado:

$$S(n) = 55{,}33n - 110708{,}67$$
$$S(2022) = 55{,}33\ .\ 2022 - 110708{,}67$$
$$S(2022) = 111877{,}26 - 110708{,}67$$
$$S(2022) = 1.168{,}59$$

Portanto, a previsão do salário-mínimo para 2022 é de R$ 1.168,59.

Realizando, então, a troca da variável na expressão, pois, já usamos t na variável auxiliar, chegamos no seguinte modelo matemático:

$$C(t) = 226{,}93\ .\ e^{0{,}082\ .\ t}$$
$$C(n) = 226{,}93\ .\ e^{0{,}082\ .\ (n - 2010)}$$

Portanto, o novo modelo matemático encontrado é $C(n) = 226{,}93\ .\ e^{0{,}082\ .\ (n - 2010)}$.

Vamos realizar a previsão para da cesta básica para 2022 a partir do modelo matemático encontrado:

$$C(n) = 226{,}93\ .\ e^{0{,}082\ .\ (n - 2010)}$$
$$C(2022) = 226{,}93\ .\ e^{0{,}082\ .\ (2022 - 2010)}$$
$$C(2022) = 226{,}93\ .\ e^{0{,}082\ .\ 12}$$
$$C(2022) = 226{,}93\ .\ e^{0{,}996}$$
$$C(2022) = 611{,}12$$

**Fonte**: registro dos alunos

A validação do modelo matemático se deu a partir da comparação entre os dados observados e os dados estimados pelos modelos, conforme indica a Figura 5.13.

**Figura 5.13** – Validação do modelo matemático

| ano (n) | tempo (t), em anos | Cesta Básica - Curitiba/Pr, em reais C(t) | Cesta Básica - MODELADA - C(n) = 226,93 . $e^{0,082 \,.\, (n - 2010)}$ | Diferença - Cesta Básica - MODELADA |
|---|---|---|---|---|
| 2010 | 0 | 226,93 | 226,93 | 0,00 |
| 2011 | 1 | 245,24 | 246,46 | - 1,22 |
| 2012 | 2 | 264,13 | 267,67 | - 3,54 |
| 2013 | 3 | 291,92 | 290,70 | 1,21 |
| 2014 | 4 | 315,73 | 315,72 | 0,00 |
| 2015 | 5 | 358,31 | 342,89 | 15,42 |
| 2017 | 7 | 390,16 | 404,45 | - 14,29 |
| 2018 | 8 | 400,64 | 439,25 | - 38,61 |
| 2019 | 9 | 435,29 | 477,06 | - 41,77 |
| 2020 | 10 | 506,58 | 518,11 | - 11,53 |
| 2021 | 11 | | 562,70 | |

| ano (n) | tempo (t), em anos | Salário-Mínimo Nacional, em reais - OBSERVADO | Salário-Mínimo Nacional, em reais - MODELADO | Diferença entre o salário observado e o modelado |
|---|---|---|---|---|
| 2010 | 0 | 510,00 | 504,63 | 5,37 |
| 2011 | 1 | 545,00 | 559,96 | -14,96 |
| 2012 | 2 | 622,00 | 615,29 | 6,71 |
| 2013 | 3 | 678,00 | 670,62 | 7,38 |
| 2014 | 4 | 724,00 | 725,95 | -1,95 |
| 2015 | 5 | 788,00 | 781,28 | 6,72 |
| 2017 | 7 | 937,00 | 891,94 | 45,06 |
| 2018 | 8 | 954,00 | 947,27 | 6,73 |
| 2019 | 9 | 998,00 | 1.002,60 | -4,60 |
| 2020 | 10 | 1.045,00 | 1.057,93 | -12,93 |
| 2021 | 11 | 1.100,00 | 1.113,26 | -13,26 |
| 2022 | 12 | - | 1.168,59 | - |

**Fonte**: relatório dos alunos

Os alunos realizaram uma validação do modelo matemático relativo ao primeiro problema e na comunicação da atividade para a turma concluíram que ele é válido, conforme indica a fala do aluno na apresentação da atividade.

> B1: Nós interpretamos que os modelos são válidos porque os valores ficaram bem próximos e que realmente o valor do salário-mínimo cresce linearmente e que o preço da cesta básica cresce exponencialmente.
>
> Trecho da comunicação do grupo

Para o ano de 2021, o grupo não tinha dados referentes ao preço da cesta básica, então realizaram uma pesquisa em três supermercados delivery de Curitiba os preços dos alimentos que compõem a cesta básica de acordo com o DIEESE e, realizaram uma média dos preços, chegando a um valor de R$ 610, 52. Podemos perceber que esse valor calculado pelo grupo a partir de uma nova coleta de dados destoa do valor calculado pelo modelo matemático construído pelo grupo. A justificativa do grupo para esse fato é que:

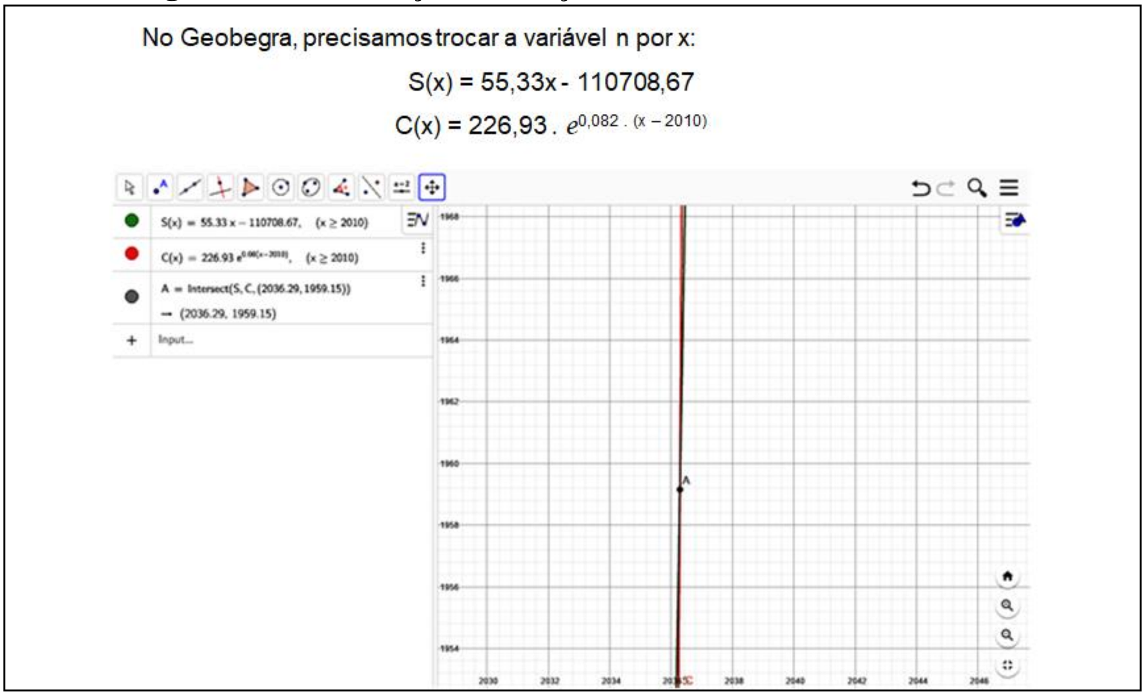
> Podemos perceber que o valor real encontrado é próximo do valor modelado, a diferença se dá por conta dos vários fatores que aumentaram os preços dos produtos frequentemente.
>
> Relatório do grupo

> Observando com o nosso valor modelado deu uma diferença de R$47,82, talvez uma diferença não tão próxima quanto gostaríamos, mas é justamente devido a esse aumento exponencial dos alimentos. Segundo o Censo, nós encontramos que 22% do salário-mínimo é gasto com a cesta básica e 23,83% no DIEESE, porém hoje, usando a regra de três, nós encontramos que cerca de 55% do salário-mínimo é utilizado para comprar a cesta básica.
>
> Trecho da comunicação do grupo

Entendemos que o grupo foi capaz de *entender a situação da realidade por meio do modelo matemático construído* e também foi capaz de *validar o modelo matemático e a resposta do problema perante à situação* e, por isso, consideramos que o desempenho do grupo foi bom nessas competências.

O segundo problema formulado pelos alunos foi: Averiguar se o preço da cesta básica pode se igualar ao valor do salário-mínimo. Para tanto, formularam a seguinte hipótese: o preço da cesta básica vai se igualar ao valor do salário-mínimo em algum momento, caso continuem crescendo dessa maneira. Os alunos usaram o Geogebra para encontrar a interseção das funções. No Geogebra fizeram uma mudança de variável de $n$ por $x$ em ambos os modelos construídos. Usaram a função de intersecção para encontrar o ponto de encontro das duas funções, conforme indica a Figura 5.14.

**Figura 5.14** – Interseção das funções salário-mínimo e cesta básica




**Fonte**: relatório dos alunos

A resposta obtida pelos alunos foi de que aproximadamente no ano de 2036 o valor do salário-mínimo seria igual ao preço da cesta básica. Assim, os alunos calcularam o valor do salário mínimo e o preço da cesta básica em 2036 usando o modelo matemático obtido anteriormente para verificarem se de fato o valor estimado pelo Geogebra era válido, conforme indica a Figura 5.15.

**Figura 5.15** – Cálculo do valor do salário-mínimo e do preço da cesta básica em 2036

**Cesta básica:**

$$C(n) = 226{,}93\ .\ e^{0{,}082\ .\ (n-2010)}$$

$$C(2036) = 226{,}93\ .\ e^{0{,}082\ .\ (2036-2010)}$$

$$C(2036) = 226{,}93\ .\ e^{0{,}082\ .\ 26}$$

$$C(2036) = 226{,}93\ .\ e^{2.1464}$$

$$\mathbf{C(2036) = 1.941{,}21}$$

**Tabela 1: Diferença em o valor da cesta encontrado no Geogebra e o valor modelado**

| ano (n) | Cesta Básica - GEOGEBRA | Cesta Básica - MODELADA $C(n) = 226{,}93\ .\ e^{0{,}082\ .\ (n-2010)}$ | Diferença |
|---|---|---|---|
| 2036 | 1959,15 | 1.941,21 | 17,94 |

**Salário-mínimo:**

$$S(n) = 55{,}33n - 110708{,}67$$

$$S(2036) = (55{,}33\ .\ 2036) - 110708{,}67$$

$$S(2036) = 112.658{,}67 - 110708{,}67$$

$$\mathbf{S(2036) = 1950{,}00}$$

**Tabela 2: Diferença em o valor da Salário encontrado no Geogebra e o valor modelado**

| ano (n) | Salário-Mínimo Nacional, em reais – Observado no GEOBEGRA | Salário-Mínimo Nacional, em reais - MODELADO: S(n) = 55,33n - 110708,67 | Diferença |
|---|---|---|---|
| 2036 | 1.959,15 | 1.950,00 | 9,15 |

**Fonte**: relatório dos alunos

Os alunos consideraram válido o ano e o valor encontrado no Geogebra, pois segundo eles os valores ficaram bem próximos. Para além disso, os alunos calcularam qual seria o valor do salário-mínimo e o preço da cesta básica em 2037, ou seja, depois do ano de interseção das funções, conforme indica a Figura 5.16.

**Figura 5.16** – Cálculo do valor do salário-mínimo e do preço da cesta básica em 2037

**Cesta básica:**

$$C(n) = 226{,}93 \;.\; e^{0{,}082\;.\;(n-2010)}$$

$$C(2037) = 226{,}93 \;.\; e^{0{,}082\;.\;(2037-2010)}$$

$$C(2037) = 226{,}93 \;.\; e^{0{,}082\;.\;27}$$

$$C(2037) = 226{,}93 \;.\; e^{2.2289}$$

$$\mathbf{C(2037) = 2.108{,}29}$$

**Salário-mínimo:**

$$S(n) = 55{,}33n - 110708{,}67$$

$$S(2037) = (55{,}33 \;.\; 2037) - 110708{,}67$$

$$S(2037) = 112.714{,}00 - 110708{,}67$$

$$\mathbf{S(2037) = 2.005{,}33}$$

**Fonte**: relatório dos alunos

E por fim, o grupo realizou a interpretação e a situação final, conforme a Figura 5.17.

**Figura 5.17** – Interpretação e situação final grupo 1

<u>Interpretação e validação</u>

Interpretando e validando os dados, podemos verificar que os modelos mostram que se a cesta básica continuar crescendo de forma exponencial e o salário-mínimo de forma linear, em 2036 esses valores irão se igualar e em 2037 a cesta básica terá o valor maior que o salário-mínimo. A validação, neste caso, se deu ao estabelecermos comparações entre os dados observados e dos estimados pelos modelos.

<u>Situação final</u>

Dessa maneira, consideramos que se os aumentos de preços dos itens da cesta básica continuarem a crescer de forma exponencial e o salário-mínimo nacional de forma linear, chegará o momento que muitas pessoas, que vivem deste pequeno rendimento, não terão condições de manter sua alimentação básica, pois, como percebemos, neste trimestre de 2021 o percentual do salário-mínimo para compra da cesta básica já é de 55,50%.

Fonte: relatório dos alunos

Reiteramos que nas competências *entender a situação da realidade por meio do modelo matemático* e *validar o modelo matemático e a resposta do problema perante à situação* são atendidos pelo grupo, nesse segundo problema, assim o desempenho bom é conferido ao grupo.

Em todo o desenvolvimento da atividade os alunos utilizaram adequadamente a tecnologia digital. Usaram para coletar os dados, para analisar os dados, para fazer gráficos, para realizar as validações dos modelos matemáticos e interpretar esses modelos. No instrumento III respondido pelos alunos também é possível perceber que eles consideraram importante a tecnologia no desenvolvimento da atividade, conforme indica a Figura 5.18. Relativamente à competência *usar a tecnologia digital para o entendimento da situação, bem como para o trabalho matemático*, desempenho bom foi conferido ao grupo.

**Figura 5.18** – Uso da tecnologia no desenvolvimento da atividade

3) Usaram algum software para analisar o comportamento dos dados:

(x) Sim. Qual? Excel

( ) Não

4) Em que o uso do software foi importante no desenvolvimento da atividade?

( x ) Para entender o fenômeno estudado

( x ) Para estudar o comportamento dos dados

( x ) Na formulação das hipóteses

( x ) Na realização do ajuste de curva

(x ) No processo de validação do modelo matemático

5) De 1 a 10 para você qual é a importância de saber usar o software no desenvolvimento da atividade? Considerando 1 como não sendo importante e 10 sendo muito importante. Justifique sua resposta.

10, pois, através do Excel realizamos a tabela, gráfico, análise de variação, enfim, todo desenvolvimento da atividade passou pelo Excel em algum momento.

15) Para você o uso do software possibilita analisar o comportamento do fenômeno por meio de diferentes representações?
(x ) Totalmente de acordo
( ) De acordo
( ) Em desacordo
( ) Totalmente em desacordo

**Fonte**: Instrumento III

O grupo realizou a comunicação de todo o desenvolvimento da atividade, argumentando por quais motivos a solução para os problemas é razoável e consistente, tanto do ponto de vista da representação matemática, dos métodos e conceitos matemáticos, quanto da adequação dessa representação para a situação em estudo. Nesse sentido, entendemos que na competência *comunicar os resultados para o professor e os colegas* os alunos tiveram um desempenho bom.

A seguir, apresentamos no Quadro 5.7 como foi o desempenho do grupo para cada uma das competências analisadas.

**Quadro 5.7** – Competências do grupo 1 na atividade *Evolução do preço da cesta básica x Evolução do valor do salário-mínimo nacional*

| |
|---|
| COMPETÊNCIAS RELATIVAS AOS CONHECIMENTOS DO *FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA* |
| **Entender a situação-problema e configurar uma idealização dessa situação.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Realizar a matematização** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Construir um modelo matemático** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Entender a situação da realidade por meio do modelo matemático construído** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X ) Desempenho bom |
| **Comunicar os resultados para o professores e os colegas** |
| () Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| |
| COMPETÊNCIAS RELATIVAS AOS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS ATIVADOS NA ATIVIDADE |
| **Usar e associar adequadamente a linguagem matemática na situação-problema em estudo.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Usar corretamente conceitos, procedimentos e métodos matemáticos** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Usar a tecnologia digital para o entendimento da situação, bem como para o trabalho matemático.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Validar o modelo matemático e a resposta do problema perante à situação** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |

**Fonte**: elaborado pela autora.

Olhando para o Quadro 5.7, nesta atividade, o desempenho do grupo foi bom para todas as competências caracterizadas.

## 5.2 OS ALUNOS DO 4º ANO

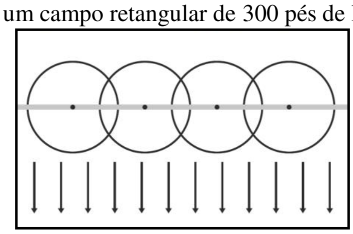
### 5.2.1 A ATIVIDADE IRRIGAÇÃO DE JARDINS

A temática *Irrigação de Jardins* foi proposta pela pesquisadora para a turma, mediante informações que constam no Quadro 5.8, que foi compartilhado em tela pelo Google Meet. O professor da turma participou da aula junto com a pesquisadora, orientando os alunos quando solicitado. Referimo-nos aqui ao desenvolvimento do grupo 2, constituído pelos alunos H2, I2 e J2.

**Quadro 5.8** – Texto entregue aos alunos para o desenvolvimento da atividade[22]

**IRRIGAÇÃO DE JARDINS**

Um sistema de irrigação consiste em um longo cano de água montado sobre rodas que o mantém acima do nível das plantas. Os bocais são colocados ao longo do tubo e cada um deles borrifa água em uma região circular. Todo o sistema se move lentamente pelo campo a uma velocidade constante, regando as plantas enquanto se move. Vamos considerar uma situação em que há 300 pés de tubo e 6 bicos disponíveis. Os bocais fornecem um spray relativamente uniforme para uma região circular de 50 pés de raio. A que distância os bicos devem ser colocados para produzir a distribuição mais uniforme de água em um campo retangular de 300 pés de largura?



**Fonte**: traduzido de GAIMME (2016, p. 58)

A temática foi discutida com os alunos a partir da leitura de informações sobre a situação apresentadas no Quadro 5.8. Posteriormente foi disponibilizado um vídeo explicativo do processo de irrigação. Os alunos foram então convidados a resolver o seguinte problema: *A que distância os bicos devem ser colocados para produzir a distribuição mais uniforme de água em um campo retangular de 300 pés de largura?* Os alunos precisavam pensar onde posicionariam cada bico para que houvesse uma irrigação mais uniforme, ou seja, precisavam pensar se em algum lugar do campo ocorreria

[22] Pés é uma unidade de medida de comprimento frequentemente usada nos Estados Unidos, Reino Unido e Canadá. No Brasil, a unidade de medida de comprimento padrão usada é o metro, realizando a conversão temos que, 1 pé corresponde à 0,3048 m, assim 300 pés = 91,44 metros. Ao se envolverem com a situação apenas um grupo realizou a conversão das unidades a fim de compreender o problema.

duplicação de irrigação e como a posição dos bicos reduziria essa duplicação. Para tanto, salas foram criadas no Google Meet para que os alunos pudessem desenvolver a atividade.

Apresentamos no Quadro 5.9, uma descrição abreviada do desenvolvimento da atividade pelo grupo 2.

**Quadro 5.9** – Descrição abreviada do desenvolvimento da atividade *Irrigação de Jardins* pelo grupo 2

**IRRIGAÇÃO DE JARDINS**

**Situação da realidade**
Um sistema de irrigação consiste em um cano de água disposto sobre quatro rodas que o mantém acima do nível das plantas.

**Problema**
A que distância os bicos devem ser colocados para produzir a distribuição mais uniforme de água em um campo rectangular de 300 pés de largura?

**Informação**
Vamos considerar 300 pés de tubo e 6 bicos disponíveis. Os bicos são colocados ao longo do tubo e cada um deles borrifa água em uma região circular de 50 pés de raio.

**Hipóteses**
$H_1$: O primeiro e o último bocal estão fixos a uma distância igual das extremidades do tudo.
$H_2$: Os bocais possuem uma distância igual entre si.
$H_3$: Quanto menor a corda da circunferência, menor o segmento $x$, ou seja, menor é a área do campo que terá duplicação.
$H_4$: Distância entre os bocais é $100-2x$

**Matematização**
a) Por meio da hipóteses formuladas e das variáveis definidas
b) Supondo que o primeiro bocal esteja a uma distância de $50-x$ da exremidade e usando recorrência.

$$x = 25$$

**Construção do modelo matemático**
Processo recursivo a partir de $C_1 = a$, conduz ao modelo matemático

$$C_1 = a$$
$$C_2 = a + 100 - 2x$$
$$C_3 = a + 2.(100-2x)$$
$$C_4 = a + 3.(100-2x)$$
$$C_5 = a + 4.(100-2x)$$
$$C_6 = a + 5.(100-2x)$$

e

$$C_6 = 300 - a$$

Então

$$x = \frac{200+2a}{10}$$

**Interpretação e validação**
Foram tomadas valores para $a$ e calculados os valores de $x$. A verificação se deu pela visualização no Geogebra

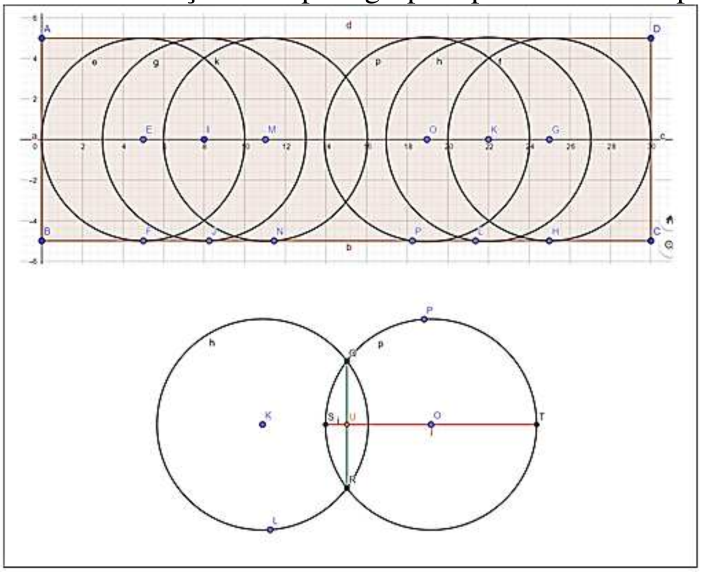
**Resposta para o problema.**
O melhor posicionamente, visualmente falando é quando $a = 20$ pés e $x = 24$ pés, ou seja, quando o primeiro e o ultimo bocal estão a 20 pés de distância da borda do tubo e a distância entre os bocais é de 24 pés.

**Fonte:** elaborada pela autora.

Os alunos iniciaram o estudo da situação fazendo simulações no Geogebra. Como se tratava de um campo com largura de 300 pés, usaram uma escala nas simulações para distribuir os bicos, conforme indica o diálogo e a Figura 5.19.

> P: Olá grupo e aí o que estão fazendo?
> H2: Olá, nós vamos ilustrar usando o Geogebra a distribuição dos bicos.
> Professor: Vocês estão usando uma escala dividida por 10?
> H2: Sim, porque é mais fácil do que usar os 300 e os 50.
>
> Transcrição das aulas

**Figura 5.19** – Simulação feita pelo grupo 2 para entender o problema



**Fonte**: relatório dos alunos

As simulações foram importantes para que pudessem entender o problema. Os alunos realizaram muitas simulações, colocando os bicos em diferentes posições e analisaram se as posições eram ou não adequadas, conforme indica o diálogo.

> H2: Realmente. Perfeito, mais uniforme que isso impossível.
> I2: Nas extremidades tem menos irrigação, vou desenhar aqui para vocês verem. Então esses cantos estão sendo menos irrigados que o centro.
> J2: No caso você fala que está sendo irrigado o dobro do canto né?
> I2: É exatamente. E também ao mesmo tempo que está sendo irrigado pouco desse lado, está sendo jogado irrigação fora, então talvez a gente precisasse diminuir um pouquinho mais a distância entre eles, de modo que o segundo círculo venha até a borda, não também não. Eu acho que esse círculo aqui tinha que pegar esses dois pontos talvez.
> H2: Diminui ali para o 5 o raio deles (dos círculos) vai ser sempre 5 né.
> I2: Entendi, entendi
> H2: Por exemplo, essas bordas de cima e de baixo, a não ser que tenha uma sobreposição aí, elas não vão ser atingidas de qualquer jeito. Se você trazer essas dos cantos mais para o extremo, os cantinhos pelo menos eles vão ser mais atingidos né.
> [...]
> H2: Quanto mais para borda do círculo, menos água vai ser distribuída naquela região, certo?
> I2 e J2: Sim.
> [...]
> J2: Só para eu entender melhor, eu preciso colocar seis circunferências que abrangem esse retângulo?
> I2: Isso e que tenha uma distribuição uniforme da água
> H2: E são seis bicos, eles têm raio de 50 pés e o campo tem 300 pés de largura. No caso é o eixo $x$ aí, o $y$ não importa.
> J2: Então no caso a circunferência não pode aumentar mais né?
> H2: o raio não.

Transcrição das aulas

Os alunos discutiram se algum lugar não seria irrigado ou se teria irrigação duplicada. Entendemos que os alunos realizaram suposições, buscaram informações relevantes para o problema. Então, na competência *entender a situação-problema e configurar uma idealização dessa situação* o desempenho do grupo é bom.

Após realizar várias simulações o grupo começou a pensar sobre a matemática, quais conceitos podem usar para resolver o problema, sempre discutindo entre si e com a professora sobre a situação, conforme indica o diálogo.

> H2: Professora uma curiosidade, pode usar conhecimentos do ensino superior ou conhecimentos do ensino básico?
> P: Qual vocês preferirem.
> H2: Tá ok. Estava pensando em derivada, em derivar a área.
> P: Por que você quer derivar a área?
> H2: Há não, derivar a distância entre eles. Por assim dizer, acho que seria o diâmetro. Na verdade a gente quer trabalhar o quanto a gente é...variar a distância entre eles para ter o máximo de irrigação né.
> P: Tá, mais quais são as hipóteses que vocês estão usando nessas simulações?
> H2: Nós estamos fixos nos dados que foi dado, que é o raio 50 e não tem como fugir disso, e a hipótese é que no centro que é a região...quanto mais para o centro do spray, mais água vai ter né, porque vai ter mais tempo ali passando e lançando água naqueles pontos e quanto mais para as bordas, no caso, no sentido do eixo x mesmo ali, porque por exemplo, quando está no eixo y, quanto mais para a borda mais água, por assim dizer, mais tempo lançando água naquela região, se pensar no eixo x ali, quanto mais para a borda do círculo menos água vai ter.
>
> Transcrição das aulas

As simulações com os dados permitiram que o grupo formulasse as hipóteses e definisse as variáveis:

> **Hipóteses**
> • O 1º e 6º bocal estão fixos a uma distância, $a$, igual das extremidades do tubo.
> • Os bocais possuem uma distância igual entre si.
> • Quanto menor a corda de circunferência $\overline{QR}$, menor o segmento $\overline{SU} = x$, ou seja, menor é a área do campo que terá dupla irrigação.
> • O spray deve ultrapassar o mínimo possível o campo.
> • Distância entre os bocais → $100 - 2x$.
>
> **Variáveis**
> • $x = \overline{SU}$ → distância entre a corda $\overline{QR}$ e a borda da circunferência
> • $a$ → distância entre a extremidade do tubo e os bocais dos extremos
>
> Relatório da atividade do grupo 2

A matematização da situação em estudo, se deu por meio das simulações realizadas que permitiu a idealização da situação, a tradução de linguagens e o uso de símbolos para realizar o tratamento matemático. O grupo se engajou nas simulações e a partir da formulação de hipóteses, definição das variáveis construiu o modelo matemático. Relativamente às competências *realizar a matematização* e *usar e associar adequadamente a linguagem matemática na situação problema em estudo* o grupo obteve um desempenho bom.

Na dedução do modelo matemático, o grupo usou o processo de recorrência para encontrar o valor de $x$ (distância entre a corda $\overline{QR}$ e a borda da circunferência) considerando que o primeiro bocal estava a uma distância $a$ do início do tubo, conforme indica a Figura 5.20. Assim, para cada valor de $a$ simulado, teriam o valor de $x$. Como por hipótese, o grupo assumiu que o segmento $\overline{QR}$ era proporcional ao segmento $\overline{SU} = x$, então quanto menor o segmento $\overline{QR}$, menor o segmento $\overline{SU} = x$, ou seja, menor seria a área do campo que tem dupla irrigação.

**Figura 5.20** – Construção do modelo matemático

Suponhamos agora que o primeiro bocal esteja a uma distância $a$ da extremidade onde $a < 25$ (pois quando $a = 25$, temos o caso acima e quando $a > 25$ terá tripla irrigação), assim, a posição dos demais bocais é dada por:

1º bocal → $a$
2º bocal → $a + 100 - 2x$
3º bocal → $a + 2 * (100 - 2x)$
4º bocal → $a + 3 * (100 - 2x)$
5º bocal → $a + 4 * (100 - 2x)$
6º bocal → $a + 5 * (100 - 2x) = 300 - a$

Assim temos

$$a + 5 * (100 - 2x) = 300 - a$$
$$a + 500 - 10x = 300 - a$$
$$2a - 10x = -200$$
$$10x - 2a = 200$$

Desse modo, temos que x é dado por:

$$x = \frac{200 + 2a}{10}$$

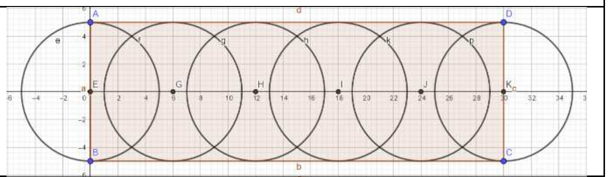
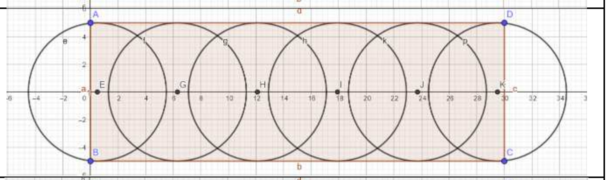
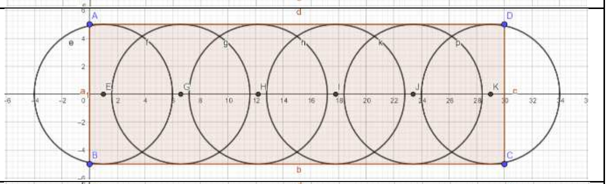
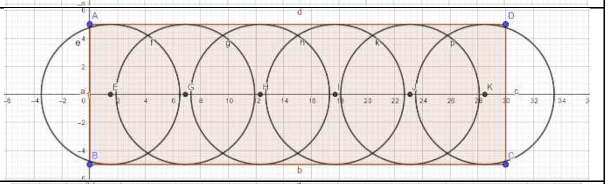
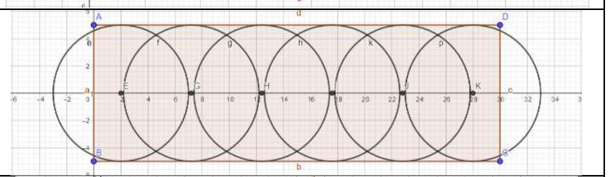
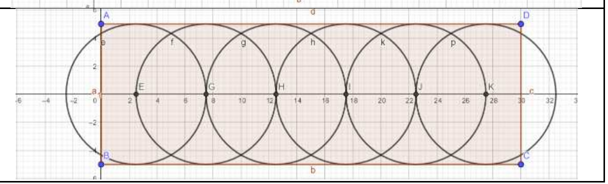
**Fonte**: relatório dos alunos

Consideramos que nas competências *construir um modelo matemático* e *usar corretamente conceitos, procedimentos e métodos matemáticos* o grupo obteve um desempenho bom.

A partir da relação que estabeleceram entre $x$ e $a$. O grupo considerou alguns valores para $a$ e encontrou o respectivo valor de $x$. A conclusão que o grupo chegou foi de que o melhor posicionamento para os bocais, visualmente falando é quando $a = 20$ pés e $x = 24$ pés, conforme indica a Figura 5.21. Entretanto, o grupo não justificou essa escolha em termos matemáticos, pois eles não testaram todas as posições de $a$, escolheram apenas algumas. O grupo não respondeu ao problema, considerando que eles precisariam retornar ao processo de recorrência para determinar a posição de cada bico e, também não encontramos indícios de discussões acerca da distribuição uniforme da água. Consideramos que nas competências *entender a situação da realidade por meio do modelo matemático* e *validar o modelo matemático e a resposta do problema perante a situação* o desempenho dos alunos é insuficiente.

**Figura 5.21** – Resposta para o problema

Vamos tomar os valores de $a$, assim temos os respectivos valores de $x$:

| a | x | |
|---|---|---|
| 0 | 20 |  |
| 5 | 21 |  |
| 10 | 22 |  |
| 15 | 23 |  |
| 20 | 24 |  |
| 25 | 25 |  |

Temos então que, para os respectivos valores de $x$ e $a$, o melhor posicionamento dos bocais, visualmente falando é quando $a = 20\ pés$ e $x = 24\ pés$, ou seja, quando o primeiro e último bocal estão a 20 pés de distância da borda do tubo, a distância $\overline{SU} = 24$ pés.

**Fonte**: relatório dos alunos

Relativamente à competência *usar tecnologia digital para o entendimento da situação, bem como para o trabalho matemático*, os alunos utilizaram o Geogebra em todo o desenvolvimento da atividade, usaram para fazer as simulações, para formular as hipóteses e para o desenvolvimento do modelo, entendemos que o uso foi adequado, então consideramos que o grupo teve um desempenho bom nessa competência.

Não há indícios sobre a comunicação do desenvolvimento da atividade para os professores e demais colegas. Nesse sentido, para à competência *comunicar os resultados para professor e os colegas* o grupo obteve um desempenho insuficiente.

A seguir, apresentamos no Quadro 5.10 como foi o desempenho dos alunos para cada uma das competências analisadas.

**Quadro 5.10** – Competências do grupo 2 na atividade *Irrigação de Jardins*

| |
|---|
| **COMPETÊNCIAS RELATIVAS AOS CONHECIMENTOS DO *FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA*** |
| **Entender a situação-problema e configurar uma idealização dessa situação.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Realizar a matematização** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Construir um modelo matemático** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Entender a situação da realidade por meio do modelo matemático construído** |
| (X) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| **Comunicar os resultados para o professor e os colegas** |
| (X) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| |
| **COMPETÊNCIAS RELATIVAS AOS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS ATIVADOS NA ATIVIDADE** |
| **Usar e associar adequadamente a linguagem matemática na situação-problema em estudo.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Usar corretamente conceitos, procedimentos e métodos matemáticos** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Usar a tecnologia digital para o entendimento da situação, bem como para o trabalho matemático.** |

| |
|---|
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Validar o modelo matemático e a resposta do problema perante à situação** |
| (X) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |

Fonte: elaborado pela autora.

Com relação ao desenvolvimento dessa atividade, os alunos apresentaram desempenho bom em três competências e desempenho insuficiente em duas competências na dimensão relativa aos conhecimentos do *fazer modelagem matemática*. Já na dimensão relativa aos conhecimentos matemáticos, os alunos apresentaram desempenho bom em três competências e desempenho insuficiente em uma delas.

### 5.2.1 ATIVIDADE *PRODUÇÃO DE SOJA*

A temática dessa atividade relativa à produção de soja foi definida pelo grupo de alunos H2, I2 e J2. Não fica claro, na explicação do grupo, o que os levou a querer investigar essa temática, na entrevista um dos alunos explica que a delimitação do tema estava relacionada com a matemática que poderia emergir, conforme indica o diálogo.

> P: Quando vocês desenvolveram a atividade voc6es pensaram na matemática primeiro ou não?
> H2: Primeiro pensamos em temas, mas em conjunto com o tema a gente já pensava numa possível resolução e quando a possível solução era uma matemática complexa a gente meio que retomara a escolha do tema. A gente meio que não chegava a trabalhar com o desenvolvimento do modelo e tudo mais, mas a gente pensava em possíveis modelos e se os modelos eram complexos nós mudávamos o tema.
>
> Transcrição da entrevista

Apresentamos no Quadro 5.11 a descrição abreviada dos encaminhamentos dados à situação pelo grupo 2.

**Quadro 5.11** – Descrição abreviada do desenvolvimento da atividade *Produção de Soja*

**PRODUÇÃO DE SOJA**

**Situação da realidade**
A lucratividade do produtor rural. Trata-se de um tema de importância visto as implicações sociais, advinda sobretudo do impacto que tem a soja no PIB brasileiro, e na economia nacional de forma geral.

**Problema**
Qual será a lucratividade, por hectare, do produtor rural com a produção de soja em 2021?

**Informação**
Custo da produção de soja
Produção anual de soja
Histórico do preço da soja no decorrer dos anos
Área plantada de soja

**Hipóteses**
$H_1$: O custo de produção da soja em função do tempo cresce linearmente.
$H_2$: A produção de sacas por hectare em função do tempo cresce linearmente.
$H_3$: A lucratividade anual em função do tempo, definido o domínio acima, é dada por uma polinomial de grau 8

**Simplificações**
$S_1$: Para a estimativa das sacas por hectare, nós excluímos o ano de 2011, pois era o único ano cuja o seguinte havia uma queda.
$S_2$: Como varia (de empresa para empresa, de contrato pra contrato, de produtor pra produtor) o preço que o produtor rural vende a saca de soja para a empresa, utilizamos para os cálculos de lucratividade, o preço da saca exportação, que é o valor que a empresa vende a saca para terceiros.

**Definição de variáveis**

**Matematização**
a) Análise dos dados por meio do Excel, construção de gráficos
b) Ajuste de curva usando o Excel

**Construção do modelo matemático**
O modelo matemático fo obtido por meio do Geogebra

**Validação**
Usaram a comparação entre os dados calculado e os dados estimados pelo modelo

**Resposta do primeiro problema**
A lucratividade do produtor no ano de 2021 será de 18,7729%
Considerando que o domínio da função lucratividade é $Dom_L = \{t \in \mathbb{R}; 0 < t < 11\}$

**Interpretação**
Acreditamos que as grandes altas e baixas na lucratividade se deve ao fato de que há mais variáveis do que nós estamos trabalhando. Por exemplo, a produtividade, envolve o clima, o tempo de planta, controle de pragas, etc. que são coisas que não foram analisadas. Assim, se diminuir a produção da soja, o preço da saca exportação irá aumentar (lei da oferta e procura). E de fato, o dado coletado com mais variação foi o do preço anual da saca.

**Fonte**: elaborada pela autora.

Os alunos realizaram uma pesquisa sobre a produção de soja e formularam o problema: *Qual será a lucratividade, por hectare, do produtor rural com a produção de soja em 2021?*

Os alunos coletaram dados sobre o custo de produção, produção anual da soja, o valor anual da soja e a área plantada, conforme indica a Figura 5.22.

**Figura 5.22** – Coleta de dados

| Custo de produção | | Produção anual da soja | | Valor anual da soja | | Área plantada | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ano | US$/há | ano | produção (1000 t) | ano | valor/t | ano | ha |
| 2008 | 625 | 2011 | 75,248 | 2010 | 384,95 | 2010 | 24181 |
| 2009 | 595 | 2012 | 67,92 | 2011 | 484,25 | 2011 | 25042,2 |
| 2010 | 636 | 2013 | 81,593 | 2012 | 537,76 | 2012 | 27736,1 |
| 2011 | 688 | 2014 | 86,397 | 2013 | 517,2 | 2013 | 30173,1 |
| 2012 | 601 | 2015 | 96,994 | 2014 | 457,81 | 2014 | 32092,9 |
| 2013 | 680 | 2016 | 96,199 | 2015 | 347,36 | 2015 | 33251,9 |
| 2014 | 740 | 2017 | 113,804 | 2016 | 362,71 | 2016 | 33909,4 |
| 2015 | | 2018 | 123,081 | 2017 | 358,82 | 2017 | 35149,2 |
| 2016 | | 2019 | 120,751 | 2018 | 342,53 | 2018 | 35874 |
| 2017 | | | | 2019 | 327 | 2019 | 36949,7 |
| 2018 | 867,19118 | | | 2020 | 349,88 | | |
| 2019 | 886,59096 | | | | | | |
| 2020 | | | | | | | |

**Fonte**: relatório dos alunos

O grupo buscou informações relevantes para a situação em estudo, assim entendemos que na competência *entender a situação-problema e configurar uma idealização dessa situação* o grupo obteve um desempenho bom.

O grupo realizou as seguintes simplificações, formulou hipóteses e definiu as variáveis:

**Simplificações**
- Para a estimativa das sacas por hectare, nós excluímos o ano de 2011, pois era o único ano cuja o seguinte havia uma queda.
- Definiremos o domínio da nossa função lucratividade com

$$Dom_L = \{t \in \mathbb{R}\,; 0 < t < 11\}$$

- Como varia (de empresa para empresa, de contrato para contrato, de produtor para produtor) o preço que o produtor rural vende a saca de soja para a empresa, utilizamos para os cálculos de lucratividade, o preço da saca exportação, que é o valor que a empresa vende a saca para terceiros.

**Hipóteses**
- O custo de produção da soja em função do tempo cresce linearmente.
- A produção de sacas por hectare em função do tempo cresce linearmente.
- A lucratividade anual em função do tempo, definido o domínio acima, é dada por uma polinomial de grau 8.

**Definição de variáveis**
$s_{ha}$ → saca por hectare
$p_s$ → preço da saca
$c$ → custo de produção
$l$ → lucro líquido $= (s_{ha} * p_s) - c$
$r$ → receita $= s_{ha} * p_s$
$L$ → lucratividade
$t$ → tempo (de um em um ano)

A matematização realizada pelo grupo, propiciou o tratamento adequado da situação em estudo. No instrumento III respondido pelos alunos encontramos indícios sobre a matematização realizada, conforme indica a Figura 5.23. Desse modo, entendemos que nas competências *realizar a matematização* e *usar e associar adequadamente a linguagem matemática na situação-problema em estudo* o grupo obteve um desempenho bom.

**Figura 5.23** – Resposta do grupo 2

2) Qual(is) dos itens tem maior impacto sobre a lucratividade do produtor?

(x) preço da saca
(x) quantidade de sacas produzida por hectare
(x) o custo para produzir a soja
(x ) o custo para transportar a soja
(x) mercado financeiro
( x ) o preço do dólar

Justifique sua(s) escolha(s): Diante dos dados pesquisados, onde temos que todos esses fatores influência na lucratividade, sendo que influenciam diretamente no preço que o produtor irá vender a soja. Além disso, de forma minimizada, a quantidade produzida por hectares, otimiza a lucratividade, já que se trata de que se pode produzir mais com menos custo pelo todo.

3) Os dados coletados foram analisados a partir de:

(x) Tabelas
(x) Gráficos
( ) Outro. Qual?

4) Quais foram as hipóteses formuladas para a abordagem matemática da situação?

-O custo de produção da soja em função do tempo cresce linearmente.
-A produção de sacas por hectare em função do tempo cresce linearmente.
-A lucratividade anual em função do tempo, definido o domínio acima, é dada por uma polinomial de grau 8.

5) Quais foram as simplificações realizadas na situação para possibilitar sua abordagem matemática?

- Exclusão de 2011, para a estimativa das sacas por hectare.
- O período de tempo é 11 anos.
- Foi utilizado o preço da saca e não o valor real da venda de empresa, pois varia de empresa para empresa.

**Fonte**: Dados da pesquisa

Para a construção do modelo matemático, inicialmente, os alunos calcularam o valor da saca por hectare ($s_{ha}$) para cada ano. Em seguida, os alunos dividram a produção em saca pela área plantada nos respectivos anos, obtendo assim a quantidade de sacas produzidas por hectare no ano. Visto que as informações coletadas sobre o preço anual da soja eram dadas em US$/tonelada, os alunos converteram o preço para US$/saca, primeiro dividindo por 1000 e depois por 60, conforme indica a Figura 5.24.

**Figura 5.24** – Cálculos do valor da saca por hectare, do preço da saca anual e da lucratividade

| produção em sacas | | |
|---|---|---|
| ano | produção (1000 t) | produção (saca 60kg) |
| 2011 | 75,248 | 1254133,333 |
| 2012 | 67,92 | 1132000 |
| 2013 | 81,593 | 1359883,333 |
| 2014 | 86,397 | 1439950 |
| 2015 | 96,994 | 1616566,667 |
| 2016 | 96,199 | 1603316,667 |
| 2017 | 113,804 | 1896733,333 |
| 2018 | 123,081 | 2051350 |
| 2019 | 120,751 | 2012516,667 |

| saca/há ($s_{ha}$) | |
|---|---|
| ano | produção |
| 2011 | 50,08079695 |
| 2012 | 40,81323618 |
| 2013 | 45,06939404 |
| 2014 | 44,86817957 |
| 2015 | 48,61576832 |
| 2016 | 47,28236615 |
| 2017 | 53,96234718 |
| 2018 | 57,18208173 |
| 2019 | 54,46638719 |

| conversão do valor por peso | | | |
|---|---|---|---|
| valor/t | valor/kg | valor/saca | ano |
| 384,945 | 0,384945254 | 23,09671526 | 2010 |
| 484,246 | 0,484245913 | 29,05475479 | 2011 |
| 537,762 | 0,537761837 | 32,2657102 | 2012 |
| 517,204 | 0,517203778 | 31,0322267 | 2013 |
| 457,814 | 0,457813519 | 27,46881112 | 2014 |
| 347,356 | 0,347355564 | 20,84133382 | 2015 |
| 362,707 | 0,362706821 | 21,76240925 | 2016 |
| 358,824 | 0,358824202 | 21,52945213 | 2017 |
| 342,528 | 0,342528247 | 20,55169482 | 2018 |
| 327,002 | 0,327002075 | 19,62012452 | 2019 |
| 349,877 | 0,349877491 | 20,99264948 | 2020 |

| preço da saca anual ($p_s$) | |
|---|---|
| ano | valor saca |
| 2010 | 23,09671526 |
| 2011 | 29,05475479 |
| 2012 | 32,2657102 |
| 2013 | 31,0322267 |
| 2014 | 27,46881112 |
| 2015 | 20,84133382 |
| 2016 | 21,76240925 |
| 2017 | 21,52945213 |
| 2018 | 20,55169482 |
| 2019 | 19,62012452 |
| 2020 | 20,99264948 |

| Lucratividade anual ($L$) | | |
|---|---|---|
| Ano | t | Lucratividade |
| 2010 | 0 | - |
| 2011 | 1 | 52,71754777 |
| 2012 | 2 | 54,36141081 |
| 2013 | 3 | 51,38007838 |
| 2014 | 4 | 39,95824094 |
| 2015 | 5 | - |
| 2016 | 6 | - |
| 2017 | 7 | - |
| 2018 | 8 | 26,20834574 |
| 2019 | 9 | 17,03537188 |
| 2020 | 10 | - |

$$L = \frac{l * 100}{r}$$

$$L = \frac{((s_{ha} * p_s) - c) * 100}{s_{ha} * p_s}$$

Onde:

→ *lucro líquido* é o rendimento real, ou seja, o que o produtor recebeu descontado o que ele investiu.

→ *receita* é o rendimento bruto, sem descontar o que foi investido para se produzir.

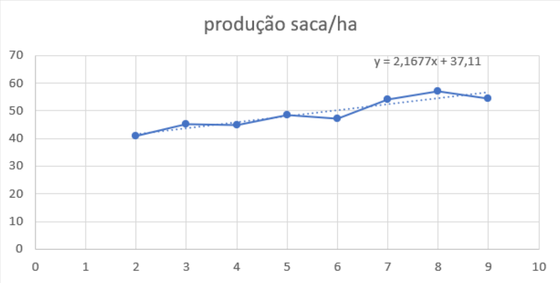
→ *lucratividade*, apurada em valor percentual, é um indicador utilizado para apontar o ganho de uma empresa em relação à atividade que ela desenvolve.

**Fonte:** registros dos alunos

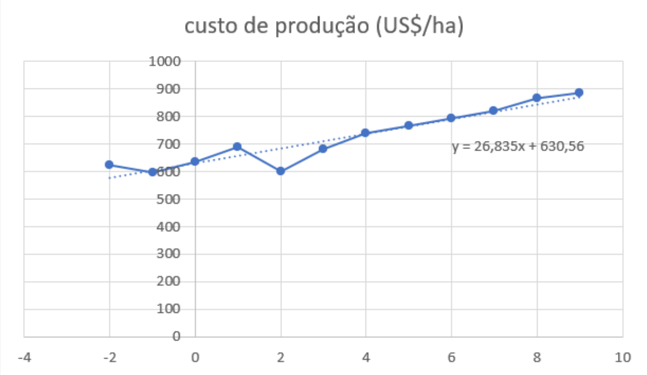
De acordo com o grupo os hifens indicam que não foi possível calcular a lucratividade em determinado ano por falta de dados. Desse modo, o grupo estimou os dados que faltavam usando o Excel e analisaram qual função se ajustaria aos pontos dados, conforme a Figura 5.25.

**Figura 5.25** – Ajuste do valor da saca por hectare e do custo de produção de soja

| saca por hectare | | |
|---|---|---|
| ano | t | |
| 2010 | 0 | 37,11 |
| 2011 | 1 | 50,08079695 |
| 2012 | 2 | 40,81323618 |
| 2013 | 3 | 45,06939404 |
| 2014 | 4 | 44,86817957 |
| 2015 | 5 | 48,61576832 |
| 2016 | 6 | 47,28236615 |
| 2017 | 7 | 53,96234718 |
| 2018 | 8 | 57,18208173 |
| 2019 | 9 | 54,46638719 |
| 2020 | 10 | 58,787 |




| custo de produção da soja | | |
|---|---|---|
| Ano | t | US$/há |
| 2008 | -2 | 625 |
| 2009 | -1 | 595 |
| 2010 | 0 | 636 |
| 2011 | 1 | 688 |
| 2012 | 2 | 601 |
| 2013 | 3 | 680 |
| 2014 | 4 | 740 |
| 2015 | 5 | 764,83 |
| 2016 | 6 | 791,686 |
| 2017 | 7 | 818,542 |
| 2018 | 8 | 867,1911773 |
| 2019 | 9 | 886,5909609 |
| 2020 | 10 | 898,91 |




Fonte: relatório da atividade do Grupo 2

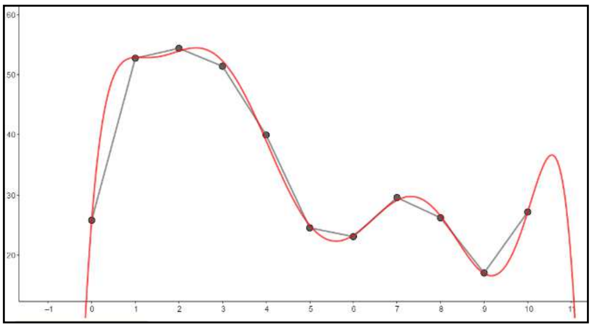
Os alunos conseguiram preencher os anos que faltavam na tabela da lucratividade e usaram a análise bivariada do Geogebra para obter o modelo matemático da lucratividade, conforme indica a Figura 5.26. Os conceitos, procedimentos e métodos matemáticos usados pelos alunos para realizar os ajustes necessários para a dedução do modelo matemático foram adequadas. Ressaltamos que a maioria dos conceitos usados pelos alunos eram conhecidos por eles, contudo, o conceito de lucratividade não era conhecido pelos alunos, precisaram estudar sobre esse conceito para que pudessem responder o problema formulado. Relativamente às competências *dedução do modelo matemático* e *usar corretamente conceitos, procedimentos e métodos matemáticos* consideramos que o grupo obteve um desempenho bom.

**Figura 5.26 –** Ajuste do modelo matemático do grupo 2

Assim, com base nessas estimativas, preenchemos os dados de lucratividade anual da tabela anterior

| **Lucratividade anual ($L$)** | | |
|---|---|---|
| Ano | t | Lucratividade |
| 2010 | 0 | 25,79794364 |
| 2011 | 1 | 52,71754777 |
| 2012 | 2 | 54,36141081 |
| 2013 | 3 | 51,38007838 |
| 2014 | 4 | 39,95824094 |
| 2015 | 5 | 24,52952769 |
| 2016 | 6 | 23,07844831 |
| 2017 | 7 | 29,56220957 |
| 2018 | 8 | 26,20834574 |
| 2019 | 9 | 17,03537188 |
| 2020 | 10 | 27,16848512 |

Com esses dados, realizamos uma análise bivariada no Geogebra, e concluímos que a linha de tendência que melhor se adequa é uma polinomial de 8º grau, considerando que a nossa previsão é a curto prazo




Assim, o GeoGebra ainda nos fornece a equação da lucratividade em função do tempo, que é

$$L(t) = -0{,}0009t^8 + 0{,}0382t^7 - 0{,}6606t^6 + 5{,}9315t^5 - 29{,}568t^4 + 81{,}8199t^3 - 122{,}2721t^2 + 91{,}7759t + 25{,}7823$$

Aplicando então a essa função $t = 11$, que corresponde ao ano de 2021, temos

| **Lucratividade anual ($L$)** | | |
|---|---|---|
| Ano | t | Lucratividade |
| 2021 | 11 | 18,7729 |

Fonte: relatório dos alunos

Por fim o grupo realizou a validação do modelo matemático e fez a interpretação dos resultados, conforme a Figura 5.27.

**Figura 5.27** – Validação e Interpretação dos resultados da atividade *Produção de Soja*

Validação

| t | Lucratividade calculada | Lucratividade modelada | erro |
|---|---|---|---|
| 0 | 25,79794364 | 25,7823 | 0,06% |
| 1 | 52,71754777 | 52,8462 | -0,24% |
| 2 | 54,36141081 | 53,9076 | 0,83% |
| 3 | 51,38007838 | 52,2571 | -1,71% |
| 4 | 39,95824094 | 39,0066 | 2,38% |
| 5 | 24,52952769 | 24,9718 | -1,80% |
| 6 | 23,07844831 | 23,293 | -0,93% |
| 7 | 29,56220957 | 29,1064 | 1,54% |
| 8 | 26,20834574 | 26,5042 | -1,13% |
| 9 | 17,03537188 | 16,9419 | 0,55% |
| 10 | 27,16848512 | 27,1806 | -0,04% |

Interpretação dos resultados

Acreditamos que as grandes altas e baixas na lucratividade se deve ao fato de que há mais variáveis do que nós estamos trabalhando. Por exemplo, a produtividade, envolve o clima, o tempo de planta, controle de pragas, etc. que são coisas que não foram analisadas. Assim, se diminuir a produção da soja, o preço da saca exportação irá aumentar (lei da oferta e procura). E de fato, o dado coletado com mais variação foi o do preço anual da saca.

**Fonte**: relatório dos alunos

Os alunos realizaram a validação do modelo matemático, usaram a comparação entre a lucratividade calculada e a lucratividade modelada, estimaram que a lucratividade modelada está bem próxima dos valores calculados. Interpretaram que essa oscilação da lucratividade pode ser pelo fato de que há mais variáveis envolvidas do que as variáveis abordadas no desenvolvimento da atividade. Os indícios desse entendimento podem ser encontrados no instrumento III respondido por eles, conforme indica a Figura 5.28.

**Figura 5.28** – Resposta dos alunos do grupo 2

7) Assinale abaixo os critérios que usaram para usar o modelo matemático sugerido pelo Geogebra

(x) A curva estava mais próxima do conjunto de dados
( ) O valor do R-quadrado
( ) Confiabilidade do software
(x) O fato de que o ajuste representava o fenômeno estudado

8) Explique porque a função ajustada pelo software foi utilizada para ajustar esse comportamento?

Função ainda atingia valores positivos e se ajustou melhor a situação.

9) O que você aprendeu com o desenvolvimento dessa atividade, tanto com relação a matemática quanto ao que diz respeito ao entendimento do fenômeno?

Em termos matemático, não foi aprendido nenhum conteúdo novo. A não ser a equação da lucratividade, que não é necessariamente um conteúdo matemático, e sim uma aplicação dela em um contexto.

10) É possível usar o modelo matemático obtido por vocês para fazer previsões sobre a lucratividade do produtor a longo prazo?

Dois anos após o período analisado, 2020-2021.

11) O que o resultado matemático encontrado reflete sobre a situação abordada na atividade?

Que haverá queda na lucratividade dos produtores.

12) Você considera que a validação do modelo matemático foi:
( ) Insatisfatória
( ) Pouco satisfatória
(x) Satisfatória
( ) Muito satisfatória

**Fonte**: Dados da pesquisa

A resposta para o problema apresentada pelo grupo é:

> O modelo obtido nos permite realizar previsões a curto prazo apenas, no caso, apenas para o ano de 2021. Portanto, responde a nossa questão problema. Ou seja, a lucratividade do produtor rural com a safra da soja em 2021 será de 18,7729%.
>
> Relatório dos alunos

Inferimos que entendem a situação por meio do modelo matemático, bem como realizam a validação do modelo matemático e a resposta do problema perante a situação. Assim, nas competências *entender a situação da realidade por meio do modelo matemático construído* e *validar o modelo matemático e a resposta do problema perante à situação* são adequados para a situação em estudo, por isso, entendemos que o grupo obteve um desempenho bom nessas competências.

Com relação ao uso de tecnologias digitais, o grupo trabalhou com os *softwares* Geogebra e Excel, tanto para entender a situação quanto para o trabalho matemático, conforme indica a Figura 5.29.

**Figura 5.29** – Resposta dos alunos do grupo 2

Instrumento III

6)De 1 a 10 para você qual é a importância de saber usar o software no desenvolvimento da atividade? Considerando 1 como não sendo importante e 10 como sendo muito importante. Justifique sua resposta.

9. Torna mais eficiente o cálculo das funções e também dos erros. Facilitando e muito o trabalho.

Entrevista

P: Vocês usaram o Geogebra e o Excel em todas as atividades. Gostaria de comentasse sobre a importância do uso desses softwares no desenvolvimento das atividades.

O Excel para mim mais do que o Geogebra eu tenho mais contato, o Excel dá alguns possíveis ajustes para os dados, dá para filtrar os caminhos que vamos usar, escolher se vamos usar uma polinomial ou outra função. Sem os *softwares*, teríamos que ficar mais tempo nos cálculos para testas os ajustes.

Fonte: Dados da pesquisa

Entendemos que na competência *usar a tecnologia digital para o entendimento da situação, bem como para o trabalho matemático* o grupo obteve um desempenho bom.

Os alunos realizaram a comunicação do desenvolvimento da atividade, argumentando por quais motivos a solução do problema é razoável, tanto do ponto de vista da matemática quanto da situação em estudo. Por isso, entendemos que na competência *comunicar os resultados para o professor e os colegas* os alunos tiveram um desempenho bom.

A seguir, apresentamos no Quadro 5.12 como foi o desempenho do grupo nesta atividade a partir das competências analisadas.

**Quadro 5.12** – Competências do grupo 2 na atividade *Produção de soja*

| COMPETÊNCIAS RELATIVAS AOS CONHECIMENTOS DO *FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA* |
|---|
| **Entender a situação-problema e configurar uma idealização dessa situação.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Realizar a matematização** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Construir um modelo matemático** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |

| |
|---|
| **Entender a situação da realidade por meio do modelo matemático construído** |
| () Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Comunicar os resultados para o professor e os colegas** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| ( ) Desempenho bom |
| |
| **COMPETÊNCIAS RELATIVAS AOS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS ATIVADOS NA ATIVIDADE** |
| **Usar e associar adequadamente a linguagem matemática na situação-problema em estudo.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Usar corretamente conceitos, procedimentos e métodos matemáticos** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Usar a tecnologia digital para o entendimento da situação, bem como para o trabalho matemático.** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |
| **Validar o modelo matemático e a resposta do problema perante à situação** |
| ( ) Desempenho insuficiente |
| ( ) Desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas |
| (X) Desempenho bom |

**Fonte**: elaborado pela autora.

Olhando para o Quadro 5.12, nesta atividade, o desempenho do grupo foi bom para todas as competências caracterizadas.

## 5.3 UMA DISCUSSÃO: AS DIMENSÕES, AS COMPETÊNCIAS EM CADA DIMENSÃO E O DESEMPENHO DOS ALUNOS

O desenvolvimento de atividades de modelagem matemática pode ser algo complexo para os alunos e uma razão para isso é que a modelagem matemática é uma atividade cognitivamente exigente, uma vez que requer ações e procedimentos diversificados (BLUM, 2015; BLUM; FERRI, 2009)

A possiblidade de desenvolvimento de competências no trabalho com modelagem matemática já é uma realidade em muitas pesquisas (JENSEN, 2007; KAISER, 2007; MAAβ, 2006; BLUM, 2015; DURANDT et al., 2021; LU; KAISER, 2021). Um aspecto que tem chamado a atenção de pesquisadores diz respeito à como caracterizar e identificar essas competências. Alguns autores, analisam o desenvolvimento das competências dos alunos por meio de uma lista de subcompetências associadas à um ciclo de modelagem matemática (BLUM; KAISER, 1997; BLUM; FERRI, 2009; KAISER, 2007, MAAβ, 2006); outros por meio da definição de níveis de desempenho ou dimensões de desenvolvimento (HENNING; KEUNE, 2011; GREER; VERSHAFFEL, 2007; JENSEN, 2007; NISS; HϕJGAARD, 2019; SILLER et al., 2015; LUDWING; XU, 2010; LU; HUANG, 2021); e, ainda autores que caracterizam e identificam usando tanto as subcompetências quanto os níveis ou dimensões relativas a esse desenvolvimento (AYDIN-GUÇ; BAKI, 2018; ZOTTL et al., 2011).

A presente pesquisa propõe um método para caracterizar e identificar as competências dos alunos em atividades de modelagem matemática. As competências foram caracterizadas relativamente à duas dimensões: a dimensão das competências relativas aos conhecimentos do *fazer modelagem matemática* e a dimensão das competências relativas aos conhecimentos matemáticos.

Em atividades de modelagem matemática problemas da realidade são resolvidos por meio da matemática e isso requer dos alunos, por exemplo, a interpretação de uma situação-problema, a formulação de hipóteses, a construção de um modelo matemático, que requerem competências relativas ao *fazer modelagem matemática*.

Todavia o trabalho com atividades de modelagem matemática está também relacionado com competências matemáticas, já que para resolver problemas da realidade o aluno precisa associar uma linguagem matemática, fazendo uso de procedimentos, métodos, conceitos, ou seja, precisa trabalhar matematicamente (MAAβ, 2006; NISS; HϕJGAARD, 2019). Consideramos que entender como o aluno faz uso da matemática no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática é importante, por isso, caracterizamos uma dimensão de competências relativas aos conhecimentos matemáticos.

As duas dimensões relativas às competências dos alunos são distintas no sentido de que cada uma lida com especificidades do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. No entanto, quando uma dimensão está no foco, a outra está na função auxiliar, dependendo da situação e do contexto. As competências alocadas a cada uma das dimensões são distintas, porém estão intimamente relacionadas. Por exemplo, quando direcionamos nosso olhar à competência *construir um modelo matemático*, relativa à dimensão do *fazer modelagem matemática*, então competência *usar adequadamente conceitos, procedimentos e métodos matemáticos* da dimensão relativa aos conhecimentos matemáticos tem uma função auxiliar.

O desempenho dos alunos nas diferentes competências não é isolado. Por exemplo, o grupo 1 de alunos na atividade *Irrigação de Jardins* obteve um desempenho insuficiente na competência *entender a situação da realidade por meio do modelo matemático construído* que está associado aos conhecimentos do *fazer modelagem matemática* e também teve um desempenho insuficiente na competência *validar o modelo matemático e a resposta do problema perante à situação*, competência relativa à dimensão do conhecimento matemático. Entendemos que essas duas competências são interdependentes, pois ao estudar uma situação da realidade por meio da matemática o aluno precisa encontrar uma solução e avaliar se ela é boa ou não perante à situação. Mas essa avaliação também precisa ocorrer em termos matemáticos uma vez que o aluno precisa validar o modelo matemático. Se essa validação não ocorre, então ele não consegue avaliar a solução do problema e o entendimento da situação fica comprometido (MEYER, 2020; POLLAK, 2015).

Pollak (2015) pondera que o modelo matemático idealizado deve fornecer resultados que são matematicamente corretos. Os resultados também devem ser interpretados em relação à situação que está sendo modelada. Assim os resultados devem ser sensatos de ambos os pontos de vista, tanto da matemática quanto da situação da realidade.

O estudo de caso se deu com duas turmas, o 1º ano e o 4º ano. A atividade *Irrigação de Jardins* foi desenvolvida pelas duas turmas. Os resultados mostram que o desempenho do grupo de alunos do 1º ano nas competências da dimensão relativa aos conhecimentos *do fazer modelagem matemática* foi aceitável, mas com lacunas/falhas relativas ao entendimento da situação-problema e configuração de uma idealização dessa situação, na matematização e na construção de um modelo matemático. Já os alunos do 4º ano tiveram desempenho bom, além disso, estes alunos também tiveram bom desempenho nas competências que se referem ao uso da tecnologia digital e às comunicações entre os alunos do grupo e com a professora.

Entretanto, os dois grupos de alunos tiveram desempenho insuficiente nessa atividade relativamente às competências de *entender a situação da realidade por meio do modelo matemático construído* e *comunicar os resultados para o professor e os colegas* que são relativas ao *fazer modelagem matemática*. O grupo 1 do 1º ano não finalizou a atividade, como já apontado na análise, pois não entendeu o problema e não conseguiu dar andamento na sua resolução.

Dificuldades como as apresentadas pelos grupos no desenvolvimento da atividade já são discutidas na literatura. De modo geral, os alunos apresentam dificuldades para fazer suposições, para realizar a transição de linguagem para a construção do modelo e para comparar de modo eficaz os resultados do modelo com o problema do mundo real (JULIE, 2020; BLUM, 2015; HAINES et al., 2001). Segundo Julie (2020) essas dificuldades estão presentes tanto nos alunos experientes como em alunos iniciantes. Na presente pesquisa, destacamos que os alunos do 4º ano apresentaram mais dificuldades com relação a comparar os resultados do modelo com o problema investigado. Em contrapartida, os alunos do 1º demonstraram menor desempenho nas competências relativas aos conhecimentos do *fazer modelagem matemática*. A falta de experiência com a modelagem matemática e com a própria matemática afetou mais as ações dos alunos do 1º ano na atividade *Irrigação de Jardins*.

Nas competências relativas aos conhecimentos matemáticos, o grupo 1 obteve um desempenho aceitável, mas com lacunas/falhas no uso e associação adequada da linguagem matemática na situação-problema em estudo, no uso dos conceitos, procedimentos e métodos matemáticos. O grupo 2 teve desempenho bom nestas competências. Destacamos que a experiência dos alunos do grupo 2 com a matemática propiciou esse uso e associação adequada da linguagem matemática bem como o uso de conceitos, procedimentos e métodos matemáticos adequados à situação em estudo.

Uma diferença no desempenho dos grupos refere-se à competência *usar a tecnologia digital para o entendimento da situação, bem como para o trabalho matemático* em que alunos do 4º ano tiveram desempenho superior aos do 1º ano. Um dos motivos é que os alunos do 4º ano já usavam *softwares* e tinham mais familiaridade com tecnologia digital. Segundo Greefrath (2020), os *softwares* educacionais podem ajudar os alunos a organizar os dados, a realizar uma idealização da situação, que no caso da atividade Irrigação de Jardins se deu por meio das simulações para distribuir os bicos. Os alunos do 4º ano puderam experimentar a situação de uma maneira mais interativa por meio do Geogebra, facilitando assim seu entendimento da situação da também abordagem matemática realizada pelo grupo.

Nas atividades cuja temáticas foram escolhidas pelos próprios alunos, eles mostraram desempenho muito próximo em relação às competências que caracterizamos.

Podemos inferir que isso pode ter ocorrido, pois como escolheram a temática, tinham um domínio maior do que estava acontecendo no desenvolvimento, conseguiram enfrentar as dificuldades e nesse momento já tinham desenvolvido outras atividades de modelagem matemática. Segundo Maaβ (2011) os alunos precisam de tempo para se familiarizar com as atividades de modelagem matemática. Almeida, Silva e Vertuan (2012) chegam a propor que os alunos devem ser familiarizados com atividades de modelagem matemática de forma gradativa. A análise realizada nessa pesquisa indica que, de fato, as competências dos alunos foram se aperfeiçoando na medida em que os alunos se familiarizam com atividades de modelagem matemática.

O encaminhamento proposto na presente pesquisa para a caracterização e identificação de competências associas a dimensão do *fazer modelagem matemática* e a dimensão dos conhecimentos matemáticos, diferentemente de outros instrumentos propostos na literatura, não se vincula diretamente às etapas, de modo geral, definidas em um ciclo de modelagem matemática.

Nesse sentido, o método proposto é inovador e viabiliza avaliar o desempenho dos alunos considerando separadamente suas experiências com modelagem matemática e o conhecimento matemático bem como a articulação desta experiência e conhecimento na abordagem matemática de uma situação da realidade.

O método proposto na presente pesquisa pode ajudar os professores a identificar os pontos fortes e fracos dos alunos, adaptar a sua instrução e atender às necessidades específicas dos alunos, viabilizando que eles aprendam matemática ao mesmo tempo em que aprendem a *fazer modelagem matemática*.

# 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelagem matemática tem demonstrado potencialidades para o desenvolvimento de competências em diferentes níveis de escolaridade. E esse tem sido o foco de muitas pesquisas. Nesta pesquisa propomos um método para caracterizar e identificar competências dos alunos em atividades de modelagem matemática e usamos em uma pesquisa empírica.

A elaboração do método foi pautada nos referenciais teóricos relativos à modelagem matemática bem como ao que se tem estudado relativamente às competências em modelagem matemática. Caracterizamos as competências relativamente à duas dimensões: do *fazer modelagem matemática* e dos conhecimentos matemáticos que podem ser ativados no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

A fim de que pudéssemos usar o método proposto, realizamos um estudo de caso em uma universidade pública do estado do Paraná nas disciplinas de Modelagem Matemática na Educação e Introdução à Modelagem Matemática, que em 2020, foram ofertadas para o 1º ano e para o 4º ano, respectivamente.

Consideramos ao final desta pesquisa, que o método proposto possibilitou a identificação das competências dos alunos nas atividades desenvolvidas, bem como podemos perceber o aprimoramento dessas competências no decorrer das atividades.

Destacamos que o método proposto, diferentemente de outros encontrados na literatura, não está associado diretamente às etapas de um ciclo de modelagem matemática, ou seja, independente da perspectiva de modelagem matemática adotada, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática requer dos alunos a investigação de uma situação da realidade e, na busca por um modelo matemático, conhecimentos matemáticos, conhecimentos do *fazer modelagem matemática* e sobre a situação estão intrinsicamente conectados.

O método permite observar a evolução dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática bem como permite que os professores possam fazer intervenções adequadas às competências a serem desenvolvidas. Também consideramos que é um método que pode ser usado nos diferentes níveis de escolaridade e independe da perspectiva de modelagem matemática adotada pelo professor.

O uso do método depende do olhar do professor que está usando a modelagem matemática, ou seja, o método não é rígido. Por exemplo, o grupo que desenvolveu a atividade da cesta básica, usou um modelo exponencial e um modelo linear para analisar a situação com esses dois modelos comparativos, nada impediria que se tivesse outro grupo, o mesmo optasse por usar modelos lineares para analisar a situação. Nesse sentido, há uma sutileza na marcação que o professor faz, pois, os dois grupos fizeram o esperado, mas com grau de dificuldade diferente, então destacamos a importância do professor mostrar que existem diferentes formas para analisar uma situação, entretanto quando se trata da matemática utilizada um grupo pode avançar mais do que outro e, neste caso, a marcação do professor pode levar em consideração seus objetivos com o desenvolvimento da atividade.

O professor ao usar o método pode olhar para o grupo todo ou olhar individualmente para cada aluno. E ainda, como não se trata de método que tem por objetivo realizar uma avaliação do aluno, o professor pode entregar o método para o aluno e/ou grupo se autoavaliar e, posteriormente, aluno e/ou grupo podem comparar as marcações com a do professor contribuindo para o processo de aprendizagem do aluno.

Destacamos a importância de todo o material utilizado na coleta de dados para que pudéssemos inferir sobre determinado desempenho dos alunos. Contudo, o fato de usarmos estes materiais em particular, não significa que outro professor ao utilizar o método faça uso dos mesmos materiais. Ressaltamos que materiais com determinadas características são necessários para que se possa usar o método. O professor pode optar por uma entrevista, por produzir algum questionário utilizando as resoluções dos alunos, tudo depende do objetivo que o professor tem ao usar o método.

O método incluiu um planejamento de como olhar as competências, ou seja, ver o que é importante quando o aluno desenvolve uma atividade de modelagem matemática e a partir disso emergiram as duas dimensões. Depois, caracterizadas essas duas dimensões elencamos o que era importante olhar em cada uma delas, de modo que fosse possível olhar em diferentes circunstâncias o uso da modelagem matemática.

Outro aspecto do método foi considerar o desempenho do aluno – insuficiente; aceitável, mas com lacunas/falhas; bom – embora na literatura já se tenha uma caracterização sobre o desempenho dos alunos em atividades de modelagem matemática, destacamos que esse desempenho é muito peculiar e depende de cada atividade desenvolvida e da sutileza do professor em realizar a marcação.

E por fim, uma questão que se coloca é o que preciso ter para assinalar determinado desempenho. Ressaltamos que o uso dos registros escritos, transcrições das aulas e da entrevista, bem como os instrumentos que os alunos responderam após o término das atividades foram fundamentais para optarmos por determinado desempenho. Então, faz parte do método para caracterizar e identificar competências dos alunos em atividades de modelagem matemática o uso de vários recursos para detectá-las nas ações dos alunos.

Entretanto queremos esclarecer que os recursos usados para buscar indícios sobre o desempenho dos alunos no desenvolvimento das atividades podem variar dependendo do professor em particular. O fato desses recursos terem sido usados nesta pesquisa não significa exatamente que outro professor vai usar os mesmos. Contudo, é importante que o professor utilize meios que possam evidenciar o desempenho dos alunos.

Com essa pesquisa, acrescentamos conhecimento à área de Modelagem Matemática na Educação Matemática no que diz respeito ao método que visa à caracterização e à identificação das competências dos alunos em atividades de modelagem matemática.

Embora nossa pesquisa contribua para o desenvolvimento da Modelagem Matemática na Educação Matemática, reconhecemos algumas fragilidades. Uma das fragilidades desta pesquisa foi o tempo de coleta de dados e a realização de uma coleta de dados remota. A coleta deveria ter começado no primeiro semestre de 2020, mas por conta da pandemia da Covid-19, foi realizada no final de 2020. Essa restrição de tempo colaborou para que a pesquisadora não conseguisse enxergar alguns procedimentos matemáticos desenvolvidos pelos alunos, alguns erros de cálculo e de abordagem com relação à situação em estudo, retomar alguns modelos matemáticos formulados, levá-los a refletir a respeito do que fizeram.

Outra fragilidade da pesquisa é que o desempenho dos alunos poderia ser diferente considerando o contexto da aula presencial, principalmente, considerando os alunos do primeiro ano em que nas aulas remotas a interação dos grupos era bem tímida. Entretanto, mesmo encontrando fragilidades nossa pesquisa pode ser mote para que outras sejam realizadas.

Refletir sobre como podemos caracterizar e identificar competências dos alunos em atividades de modelagem matemática pode auxiliar o professor no monitoramento de suas atitudes no decorrer do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática de modo a contribuir para o desenvolvimento de competências do *fazer modelagem matemática* e dos conhecimentos matemáticos.

Esperamos que o método proposto nesta pesquisa possa atingir também outros pesquisadores que, como nós, buscam compreender quais competências podem ser identificadas e como se dá o desempenho dos alunos nessas competências quando se envolvem com atividades de modelagem matemática.

**REFERÊNCIAS**


ALMEIDA, L.M.W.; SILVA, K. P. Ciclo de modelagem matemática interpretado à luz de estratégias heurísticas dos alunos. **REnCiMa,** v.12, n.2, p. 1-27, 2021.

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM,** v.50, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L.M.W.; ZANIN, A.P.L. Competências dos alunos em atividades de modelagem matemática. **Educação Matemática Pesquisa,** v.18, n.2, p. 759-782, 2016.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA. K. P.; VERTUAN, R. E. **A modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L.M.W.; VERTUAN, R. E. Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por representações semióticas. **Revista de Modelagem na Educação Matemática,** v.1, n. 1, p. 28-42, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. Uma aproximação socioepistemologica para a Modelagem matemática. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n. 2, p. 117-134, jul 2009.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, A. Por uma Educação Matemática Critica: a Modelagem Matemática como alternativa. **Educacao Matematica Pesquisa**, v. 12, n. 2, p. 221-241, 2010.

ALMEIDA, L.M.W.; FERRUZZI, E. A comunicação em atividades de Modelagem Matemática: uma relação com a teoria da atividade. **XIII CIAEM** – Conferência interamericana de Educação Matemática, p. 1-11, Recife, 2011.

ALVES-MAZZOTTI, A. O Método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWAMDSZNADJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. 2 ed. São Paulo: Pioneira, 1999.

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ARAUJO, J. L. Brazilian research on modelling in mathematics education. **ZDM**. 42, PP. 337–348, 2010.

AYDIN-GUÇ, F. BAKI, A. Evaluation of the learning environment designed to develop student mathematics teachers' mathematical modelling competencies. **Teaching Mathematics and Its Applications,** p. 1-25, 2018.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: Reunião anual da Anped, 24, 2001, Caxambu. Rio de Janeiro: ANPED,2001. CD-ROM

BARBOSA, J.C.; SANTOS, M. Modelagem Matemática, perspectivas e discussões. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 1-12. CDROM.

BEAN, D. As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos. In: **Anais do V Seminário Internacional de pesquisa em Educação Matemática**. Petrópolis, 2012.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Modelagem Matemática como possibilidade de desenvolvimento de competências com alunos de Licenciatura em Matemática. In: **Congresso Iberoamericano de Educação Matemática**, 2013, Montevidéu. Anais do VII CIBEM. Montevidéu: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, v. 1. p. 1-8, 2013.

BORROMEO FERRI, R. B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

BORSSOI, A.; ALMEIDA, L. M. W. Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias – REIEC**, v. 10, n. 2, p. 36-45, 2015

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. Encaminhamentos didático-pedagógicos no Contexto de uma Atividade de Modelagem Matemática para a Educação Básica. In L. M. W. Almeida, J. L. Araújo & E. Bisognin. **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática: relatos de Experiências e Propostas Pedagógicas**, p. 45-64, 2011.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Modelagem na Educação Matemática**. v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010.

BLOMHØJ, M. ; JENSEN, T. H. Developing mathematical modeling competence: conceptual clarification and educational planning. **Teaching Mathematics and its applications**. Volume 22, No. 3, p. 123 – 139, 2003.

BLUM, W.; KAISER, G. Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfa'higkeiten von englischen und deutschen Lernenden. Unpublished application for a DFG-sponsorship, 1997.

BLUM, W.; FERRI, R. B. Mathematical Modelling: can it be taught and learnet?. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, vol. 1, n. 1, 45-58, 2009.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed). **The Proceddings of the 12th Internacional Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, p. 73-96, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular, 2017.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Portugal: Porto Editora, 1994.

CARVALHO; F.J.R; KLUBER, T. E. Modelagem matemática e programação de computadores: uma possibilidade para a construção de conhecimento na educação básica. **Educação Matemática Pesquisa,** v.23, n.1, p. 297-323, 2021.

CZOCHER, J. A. How does validating activity contribute to the modeling process? **Educational Studies in Mathematics**, v. 99, n. 2, p. 137-159, 2018.

DALLA VECHIA, R. **A modelagem matemática e a realidade do mundo cibernético**. 275 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Rio Claro, 2012.

DAWN, NG. K. E. Towards a professional development framework for mathematical modelling: the case of Singapore teachers. **ZDM,** (50) p. 287–300, 2018.

DIAS, I. S. Competências em Educação: conceito e significado pedagógico. **Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional,** SP. Volume 14, Número 1, Janeiro/Junho de 2010, p 73-78.

DURANDT, R; BLUM, W.; LINDL, A. Fostering mathematical modelling competency of South African engineering students: which influence does the teaching design have? **Educational Studies in Mathematics**, p. 1-21, 2021.

ENGLISH, L. D. Data modelling with first-grade students. Educational Studies in Mathematics, v. 81, n. 1, p. 15–30, 2012.

FIGUEIREDO, D.; KATO, L. A. A modelagem e o desenvolvimento de competências. In: **VII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática**. Belém. 2011.

FREDJ, P. Modes of modelling assessment—a literature review. **Educational Studies in Mathematics,** p. 413-438, 2013.

GALBRAITH, P. Models of Modelling: Gneres, Purposes or Perspectives. **Jornal of Mathematical Modelling and Application,** Vol.1, No. 5, 3-16, 2012.

GEIGER, V. Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modeling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stillman (Eds). Overview. In: **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)**, p. 305 – 314. New York: Springer, 2011.

GREEFRATH, G. Mathematical modelling competence. Selected current research approaches, **AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 17, 38–51, 2020.

GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H. S. Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM,** V.50, p.233-244, 2018.

GRIGORAŞ, R., GARCÍA, F. J.; HALVERSCHEID, S. Examining mathematising activities in modelling tasks with a hidden mathematical character. In G. Kaiser et al. (Eds.), **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)**. Dordrecht: Springer, p. 85–96, 2011.

GOULART; T. C. K.; ALMEIDA, L. M. W. A tecnologia em atividades de modelagem matematica: um olhar para os recursos semióticos. **Revista Paranaense de Educacao Matematica**, v. 9, n. 19, p. 262-284, 2020.

HAINES, C., CROUCH, R. Recognizing constructs within mathematical modelling. **Teaching Mathematics and its Applications**, v.20, n. 3, p. 129-138, 2001.

HANKELN, C. ADAMEK, C. GREEFRATH, G. Assessing Sub-competencies of Mathematical Modelling—Development of a New Test Instrument. In: STILLMAN, G. BROWN, J. P. (ed). **Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education (ICME-13)**. Springer, p. 143-160, 2019.

HENNING, H.; KEUNE, M. Levels of modeling competence. In: KAISER, G. et al. (ed.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)**. New York: Springer, p. 225-232, 2011.

JENSEN, T. H. Assessing mathematical modeling competency. In Haines et al. (Eds.) **Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics** Chichester: Horwood Publishing, p. 141- 148, 2007.

JULIE, C. Modelling competencies of school learners in the beginning and final year of secondary school mathematics. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,** p. 1-15, 2020.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM** – The International Journal on Mathematics Education, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KAISER, G.; BLOMHOJ, M.; SRIRAMAN, B. Towards a didactical theory for mathematical modelling. **ZDM** – The International Journal on Mathematics Education, v. 38, n. 3, p. 82-85, 2006.

KAISER, G. Modeling and modeling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), **Mathematical modeling (ICTMA 12): Education, engineering and economics** Chichester, UK: Horwood, p. 110–119, 2007.

KAISER, G; STENDER, P. Complex Modelling Problems in Co-operative, Self-Directed Learning Environments. In Stillman et al. (Eds), **Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice**, p. 277-293, 2013.

KAISER, G. BRAND, S. Modelling competencies: Past development and further perspectives. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), **Mathematical modelling in education research and practice.** Springer, p. 129–149, 2015.

KEISAR, E. PELED, I. Investigating new curricular goals: what develops when first graders solve modelling tasks? **Research in Mathematics Education,** p. 2-20, 2018.

KLIEME, E. HARTIG, J. RAUCH, D. The Concept of Competence in Educational Contexts. In: HARTIG, J.; KLIEME, E.; LEUTNER, D. (Ed.). **Assessment of Competencies in Education Contexts**, p. 3-21, 2008.

KLÜBER, T.; BURAK, D. Sobre a pesquisa em modelagem na educação matemática brasileira. **Revista Diálogo Educacional**, v.14, n.41, p. 143-164, 2014.

LORIN, A. P. Z. **Competências dos alunos em atividades de Modelagem matemática.** 164f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

LORIN, A. P. Z. ALMEIDA, L. M. W. Competências dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. In **Anais da IX Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática**. São Carlos – SP, p. 1-15, 2015.

LU, X. HUANG, J. Mathematical Modelling in China: How It Is Described and Required in Mathematical Curricula and What Is the Status of Students' Performance on Modelling Tasks. In: XU, B.; ZHU, Y.; LU, X. **Beyond Shanghai and PISA: Cognitive and Non-cognitive Competencies of Chinese Students in Mathematics**, p. 209-233, 2021.

LU, X.; KAISER, G. Creativity in students' modelling competencies: conceptualisation and measurement. **Educational Studies in Mathematics**, p. 1-25, 2021.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 2 ed., 2018.

LUDWIG, M. XU, B. A comparative study of modelling competencies among Chinese and German students. **Journal für Mathematik-Didaktik***,* v. 31, ed.1, p. 77–97, 2010.

MAAβ, K. Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. In: BLOMHOJ, M.; BRANDELL, G.; NISS, M. (Eds). **Teaching mathematics and applications**: the 10th ICME. Conpenhagen, p. 61-74, 2004.

MAAβ, K. What are modelling competences? **ZDM**, v. 38, ed. 2, 2006.

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem**. Dissertação de Mestrado — Rio Claro: Unesp, 2004.

MEYER, J.F.C.A. Modelagem Matemática: O desafio de se ‘fazer’ a Matemática da necessidade...**Com a Palavra o Professor,** v.5, n.11, p. 140-149, 2020.

MEYER, J. F. C. A; CALDEIRA, A. D; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

MISCHO, C.; MAAβ, K. Which personal factors affect mathematical modelling? The effect of abilities, domain specific and cross domain-competences and beliefs on performance in mathematical modeling. **Journal of Mathematical Modelling and Application,** Vol. 1, No. 7, 3-19, 2012.

McCLELLAND, D.C. Testing for Competencies rather than intelligence. **American Psychologist,** v.28, p. 1-14, 1973.

NISS, M. HΦJGAARD, T. Mathematical competencies revisited. **Educational Studies in Mathematics**, p.9–28, 2019.

NISS, M. Prescriptive Modelling – Challenges and Opportunities. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p.67-80, 2015.

NISS, M. Modelling a crucial aspect of students’ mathematical modelling. In R. Lesh et al. (Eds.), *Modelling Students’ Mathematical Modelling Competencies* (*ICTMA* 13). New York: Springer, p. 43–60, 2010.

PALHARINI, B. N. **A Matemática em atividades de modelagem matemática**: uma perspectiva wittgensteiniana. 2017. 316 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2017.

PEREIRA JUNIOR, A. **O Uso da linguagem por alunos do Ensino Fundamental em atividades de modelagem matemática**. 2020. 159 f. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

PERRENET, J.; ZWANEVEL, D. The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v.1, n.1, p. 3-21, 2012.

POLLAK, H. O. The interaction between Mathematics and other school subjects, **New Trends in Mathematics Teaching**, Volume IV, Paris: UNESKO, 1979.

POLLAK, H. O. What is mathematical modeling? In: **Mathematical Modeling Handbook**. Bedfort: COMAP, 2012. Disponível em <www.comap.com>.

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, socialand cognitive influences. New York: Springer, p. 265-276, 2015.

SANTOS, L. Avaliar Competências: uma tarefa impossível? **Educação e Matemática**, n. 74, p. 16 – 21, 2003.

SILLER, H.-S.; BRUDER, R.; HASCHER, T.; LINNEMANN, T.; STEINFELD, J.; SATTLBERG, E. Competency level modelling for school leaving examination. In K. Krainer, & N. Vondrov à (Eds.), *Proceedings of the ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME*, p. 2716-2723, 2015.

SILVA, C. **Aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática**. 2018. 147f. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SILVA, K.A.P. **Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações.** (Dissertação de mestrado) – Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina,2008.

SHAVELSON, R. J. On the measurement of competency. *Empirical Research in Vocational Education and Training, 1,* 43-65, 2010.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

WINCH, C.; GINGELL, J. Dicionário de Filosofia da Educação. Tradução de: Renato Marques de Oliveira – São Paulo: Contexto, 2007.

YIN, ROBERTO, K. Estudo de caso: planejamento e métodos. 2ª ed. Porto Alegre, Bookman, 2010.

ZABALA, A.; ARNAU, L. **Como aprender e ensinar competências.** Porto Alegre, Artmed, 2010.

ZÖTTL, L. UFER, S. REISS, K. Assessing modelling competencies using a multidimensional IRT approach. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), Trends in teaching and learning of mathematical modelling. New York: Springer, p. 427–437, 2011.

.

# APÊNDICES

# APÊNDICE A
# TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Eu autorizo a pesquisadora Ana Paula Zanim, orientada pela professora doutora Lourdes Maria Werle de Almeida, matriculada no Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, a utilizar meus registros escritos e os registros de minhas discussões na realização das atividades de Modelagem Matemática no período de 10/12/2020 à 10/04/2021, bem como os registros de minhas respostas durante entrevistas, podendo utilizá-los parcial ou integralmente, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data, podendo divulgá-lo em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome não seja citado em hipótese alguma, garantindo o anonimato. Igualmente abdico dos direitos meus e de meus descendentes. Declaro ainda, que fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) quanto à investigação que será desenvolvida.

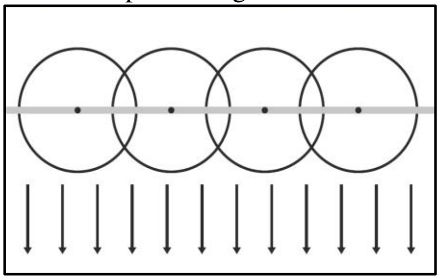
( ) Sim, eu autorizo

( ) Não, eu não autorizo

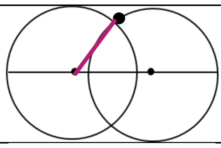
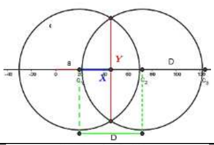
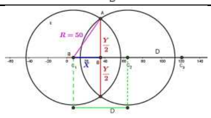
# APÊNDICE B
# INSTRUMENTOS PARA COLETA DE DADOS DO 1º ANO

## INSTRUMENTO I PARA COLETA DE DADOS DA ATIVIDADE IRRIGAÇÃO DE JARDINS – 1º ANO

Um sistema de irrigação linear consiste em um longo cano de água montado sobre rodas que o mantém acima do nível das plantas. Os bocais são colocados ao longo do tubo e cada um deles borrifa água em uma região circular. Todo o sistema se move lentamente pelo campo a uma velocidade constante, regando as plantas enquanto se move. Você tem 300 pés de tubo e 6 bicos disponíveis. Os bocais fornecem um spray relativamente uniforme para uma região circular de 50 pés de raio. A que distância os bicos devem ser colocados para produzir a distribuição mais uniforme de água em um campo retangular de 300 pés de largura?



1) Qual foi o problema investigado?
2) Fizeram desenho para resolver o problema?
( ) Sim ( ) Não
3) Considerando o quadro abaixo avalie qual foi a utilidade de cada desenho para resolver o problema.

| Desenho | Não ajudou | Pouco útil | Muito útil |
|---|---|---|---|
|  | | | |
|  | | | |
|  | | | |

4) A utilização do desenho contribui para a formulação de hipóteses?
( ) Totalmente de acordo
( ) De acordo
( ) Em desacordo
( ) Totalmente em desacordo

5) Para resolver o problema, você formulou hipótese (s)?
( ) Sim. Quail (s):
( ) Não.
6) Considerando a atividade estudada, enumere de 1 até 5, conforme a importância que atribui a cada item, considerando como 1 a maior importância e 5 a menor importância.
( ) A aplicação da matemática.

( ) A resolução de um problema.
( ) A relação da matemática com a realidade.
( ) A aprendizagem da matemática por meio da atividade.
( ) A relação com a sua prática futura enquanto professor de matemática.

7) Você considera que a utilização de software foi importante para o entendimento e a resolução da atividade?
( ) Totalmente de acordo
( ) De acordo
( ) Em desacordo
( ) Totalmente em desacordo

8) Assinale procedimentos que identificou na resolução da atividade;
( ) coleta de dados
( ) definição de variáveis
( ) definição de hipóteses
( ) definição de problema
( ) obtenção de um modelo matemático
( ) análise de uma resposta
( ) necessidade de diálogo com colegas ou professor
( ) necessidade de fazer simplificações

9) Relacione as colunas de acordo com o que foi feito na atividade e o conteúdo matemático estudado:

| | |
|---|---|
| ( a ) $\boldsymbol{C_{1=}50}$<br>$\boldsymbol{C_{2=}C_1 + 2x}$<br>$\boldsymbol{C_{3=}C_2 + 2x = 50 + 2x + 2x}$<br>$\boldsymbol{= 50 + 4x}$<br>$\boldsymbol{= C_1 + 4x}$<br>$\boldsymbol{= 50 + 4x}$<br>$\boldsymbol{C_{4=}C_3 + 2x = 50 + 2x + 2x + 2x}$<br>$\boldsymbol{= 50 + 6x}$<br>$\boldsymbol{= C_1 + 6x}$<br>$\boldsymbol{= 50 + 6x}$<br>$\boldsymbol{C_5 = C_4 + 2x = 50 + 2x + 2x}$<br>$\boldsymbol{+ 2x + 2x}$<br>$\boldsymbol{= 50 + 8x}$<br>$\boldsymbol{= C_1 + 8x}$<br>$\boldsymbol{= 50 + 8x}$<br>$\boldsymbol{C_6 = C_5 + 2x = 50 + 2x + 2x}$<br>$\boldsymbol{+ 2x + 2x + 2x}$<br>$\boldsymbol{= 50 + 10x}$<br>$\boldsymbol{= C_1 + 10x}$<br>$\boldsymbol{= 50 + 10x}$<br>$\boldsymbol{C_n = 50 + (2n - 2)x}$ | ( ) Teorema de Pitágoras |
| (b ) $\boldsymbol{R^2 = x^2 + (\frac{Y}{2})^2}$, onde $\boldsymbol{R}$ é o raio de irrigação, $\boldsymbol{x}$ é a medida do raio até a corda Y e $\boldsymbol{\frac{Y}{2}}$ é a medida da metade da corda. | ( ) Em uma circunferência, se um raio é perpendicular a uma corda então ele intercepta a corda no seu ponto médio |

| | |
|---|---|
| (c) Consideramos que a distância entre $\boldsymbol{C_1}$ e $\boldsymbol{C_2}$ é $\boldsymbol{2x}$, sendo assim, a distância de $\boldsymbol{C_1}$ a corda $\boldsymbol{Y}$ é $\boldsymbol{x}$. | ( ) Processo de Recorrência Matemática. |

10) No desenvolvimento da atividade estudamos conceitos como grandezas diretamente proporcionais - duas grandezas são chamadas de diretamente proporcionais quando o aumento na medida de uma delas causa um **aumento** na medida da outra na mesma proporção, ou quando uma **redução** na medida de uma das grandezas causa uma redução na medida da outra na mesma proporção, e grandezas inversamente proporcionais - duas grandezas são chamadas inversamente proporcionais quando o aumento na medida de uma das grandezas causa uma redução na medida da outra, e vice-versa. Assim considerando as grandezas estudadas na atividade, use essa definição para relacionar as grandezas abaixo.

a) O tamanho da corda e a área duplicada de irrigação
( ) Grandezas diretamente proporcionais
( ) Grandezas inversamente proporcionais

b) A distância do centro a corda $(x)$ e o tamanho da corda $(Y)$
( ) Grandezas diretamente proporcionais
( ) Grandezas inversamente proporcionais

11) Uma atividade de Modelagem Matemática, envolve fases relativas ao conjunto de procedimentos necessários para a configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema, as quais caracterizamos como: interação, matematização e resolução, interpretação de resultados e validação. Para cada um dos trechos, identifique qual dessas etapas corresponde.

a) Após a leitura da situação, foi possível a identificação do problema, o levantamento das informações e a realização de um desenho para entender o problema
( ) Inteiração
( ) Matematização
( ) Resolução
( ) Interpretação de resultados e Validação

b) O desenho permitiu a formulação das hipóteses, seleção das variáveis com o objetivo de determinar a distância entre os bicos para produzir uma distribuição mais uniforme de água.
( ) Inteiração
( ) Matematização
( ) Resolução
( ) Interpretação de resultados e Validação

c) Para responder ao problema, construímos um modelo matemático, usando o processo de recorrência e para determinar a irrigação mais uniforme, calculamos o tamanho da corda entre duas circunferências.
( ) Inteiração
( ) Matematização
( ) Resolução
( ) Interpretação de resultados e Validação

d) A partir dos modelos, construímos um simulador, em que é possível analisar o fenômeno para diferentes posições que colocamos o primeiro bico e o último bico. Percebemos que não há uma medida que possibilite uma uniformidade completa. Ao invés disso, é necessário estabelecer um critério de uniformidade que depende das diferentes posições que colocamos o primeiro bico e o último bico. Uma possível resposta é que o menor valor possível de $Y$ ocorre quando a distância entre os bocais é $2X = 60$. Essa resposta, no entanto, não leva em consideração o desperdício de água que haverá após as extremidades do tubo.

( ) Inteiração
( ) Matematização
( ) Resolução
( ) Interpretação de resultados e Validação

12) Sobre o fenômeno irrigação de jardins. Assinale a alternativa que descreve o seu conhecimento sobre o tema.

a) Conhecia o tema de experiências anteriores e tinha domínio sobre ele.
b) Conhecia o tema de experiências anteriores e não tinha domínio sobre ele.
c) Não conhecia o tema, mas buscou informações em materiais como internet, livros, revistas ou profissionais da área.
d) Conhecia o tema, mas buscou informações em materiais como internet, livros, revistas ou profissionais da área para entender as especificidades desse tipo de irrigação.

13) Na situação apresentada você precisava responder ao seguinte problema: A que distância os bicos devem ser colocados para produzir a distribuição mais uniforme de água em um campo retangular de 300 pés de largura? Para resolver o problema uma das hipóteses formuladas foi de que as distâncias entre os bicos eram iguais. Qual a importância dessa hipótese na resolução do problema?

14) Assinale quais aspectos foram relevantes para o entendimento o fenômeno
( ) Saber como funciona uma irrigação linear
( ) Conhecer o conteúdo matemático envolvido
( ) Fazer um desenho usando software
( ) O vídeo explicativo enviado pela professora
( ) O levantamento das informações
( ) Pesquisa na internet

15) O desenvolvimento dessa atividade possibilitou a aprendizagem de que conteúdos matemáticos?
( ) Teorema de Pitágoras
( ) Processo de recorrência
( ) Relações entre circunferências
( ) Relações métricas na circunferência

16) Considerando as opções assinaladas anteriormente comente o que foi aprendido com relação ao conteúdo matemático.

17) O que o resultado matemático significa para a situação?

**INSTRUMENTO III PARA COLETA DE DADOS DA ATIVIDADE EVOLUÇÃO DO PREÇO DA CESTA BÁSICA X EVOLUÇÃO DO VALOR DO SALÁRIO-MÍNIMO NACIONAL**

1) Qual foi o problema investigado na atividade com a temática Evolução do valor da cesta básica e do valor do salário mínimo nacional?

2) Os dados coletados foram analisados a partir de:
( ) Tabelas
( ) Gráficos
( ) Outro. Qual?

3) Usaram algum software para analisar o comportamento dos dados:
( ) Sim. Qual?
( ) Não

4) Em que o uso do software foi importante no desenvolvimento da atividade?
( ) Para entender o fenômeno estudado
( ) Para estudar o comportamento dos dados
( ) Na formulação das hipóteses
( ) Na realização do ajuste de curva
( ) No processo de validação do modelo matemático

5) De 1 a 10 para você qual é a importância de saber usar o software no desenvolvimento da atividade? Considerando 1 como não sendo importante e 10 sendo muito importante. Justifique sua resposta.

6) De acordo com a análise do comportamento dos dados, o valor da cesta básica e o valor do salário mínimo apresentavam um comportamento:
( ) Crescente
( ) Decrescente

7) Quais foram as hipóteses formuladas para a abordagem matemática da situação?

8) Quais foram as simplificações realizadas na situação para possibilitar sua abordagem matemática?

9) Assinale os conteúdos aprendidos no desenvolvimento da atividade

( ) Progressão aritmética
( ) Sistemas lineares
( ) Progressão geométrica
( ) Função linear
( ) Função exponencial

10) Para os itens assinalados na questão anterior, explique o que aprendeu sobre o conteúdo.

11) Na situação estudada por vocês, usaram o software para plotar a linha de tendência dos dados e em seguida calcularam o valor do R-quadrado, esse cálculo foi útil para:
( ) Saber se o ajuste estava adequado ao conjunto de dados.
( ) Confirmar suas hipóteses
( ) Entender o fenômeno
( ) Testar qual curva se ajustaria ao conjunto de dados

12) Por que a função polinomial do 1º grau foi utilizada para estudar o comportamento da evolução do valor do salário mínimo no decorrer do tempo?

13) Por que a função exponencial foi utilizada para estudar o comportamento da evolução do valor da cesta básica no decorrer do tempo?

14) Você considera que a validação do modelo matemático foi:
( ) Insatisfatória
( ) Pouco satisfatória
( ) Satisfatória
( ) Muito satisfatória

15) Para você o uso do software possibilita analisar o comportamento do fenômeno por meio de diferentes representações?
( ) Totalmente de acordo
( ) De acordo
( ) Em desacordo
( ) Totalmente em desacordo

16) Enumere de 1 até 11 os procedimentos que você realizou na atividade, considerando 1 o que você fez primeiro na atividade e 11 o que fez por último.
( ) Tratamento dos dados
( ) Necessidade de fazer simplificações
( ) Escolha do tema
( ) Levantamento de hipóteses
( ) Coleta dos dados
( ) Análise de uma resposta
( ) Formulação de um problema
( ) Levantamento de variáveis
( ) Obtenção de um modelo matemático
( ) Validação do modelo matemático
( ) Interpretação da resposta

17) Considerando a atividade estudada, enumere de 1 até 5, conforme a importância que atribui a cada item, considerando como 1 a maior importância e 5 a menor importância.
( ) O levantamento de hipóteses.
( ) A solução do problema.
( ) A obtenção de uma solução para o problema.
( ) A necessidade de diálogo com os professores e colegas.
( ) A relação da matemática com a realidade.
( ) A validação do modelo matemático.
( ) Interpretação do modelo com referência ao fenômeno.

18) As questões serão respondidas no quadro que se encontra no final da página. Sua resposta pode varia de um extremo a outro dependendo da sua opinião.
1) Caracterize o grau de complexidade da atividade desenvolvida.
2) Sua familiaridade com os conceitos matemáticos utilizados durante a resolução das atividades.
3) Suas impressões sobre a atividade desenvolvida.
4) Você ficou convencido(a) da validade da solução encontrada?
5) Importância da generalização da situação-problema.
6) Uso de diferentes maneiras para resolver o problema.

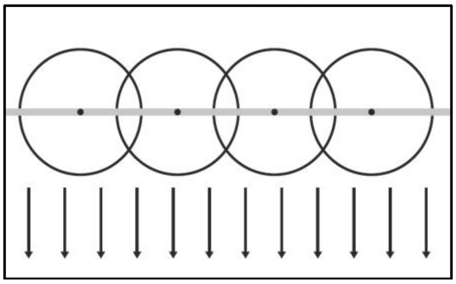
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Pouco complexo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Muito complexo |
| 2. Pouco familiar | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Muito familiar |
| 3. Pouco interessante | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Muito interessante |
| 4. Pouco convencido(a) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Totalmente convencido(a) |
| 5. Sem importância | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Muito importante |
| 6. Dispensável | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Indispensável |

**APÊNDICE C**

**INSTRUMENTOS PARA COLETA DE DADOS DO 4º ANO**

## INSTRUMENTO I PARA COLETA DE DADOS DA ATIVIDADE *IRRIGAÇÃO DE JARDINS* – 4º ANO

Um sistema de irrigação linear consiste em um longo cano de água montado sobre rodas que o mantém acima do nível das plantas. Os bocais são colocados ao longo do tubo e cada um deles borrifa água em uma região circular. Todo o sistema se move lentamente pelo campo a uma velocidade constante, regando as plantas enquanto se move. Você tem 300 pés de tubo e 6 bicos disponíveis. Os bocais fornecem um spray relativamente uniforme para uma região circular de 50 pés de raio. A que distância os bicos devem ser colocados para produzir a distribuição mais uniforme de água em um campo retangular de 300 pés de largura?

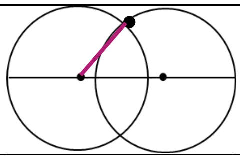
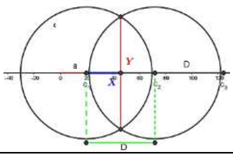
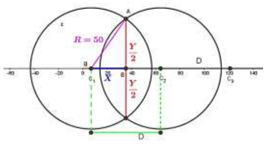


1) Qual foi o problema investigado?

2) Fizeram desenho para resolver o problema?

( ) Sim ( ) Não

3) Considerando o quadro abaixo avalie qual foi a utilidade de cada desenho para resolver o problema.

| Desenho | Não ajudou | Pouco útil | Muito útil |
|---|---|---|---|
|  | ☐ | ☐ | ☐ |
|  | ☐ | ☐ | ☐ |
|  | ☐ | ☐ | ☐ |

4) A utilização do desenho contribui para o levantamento de hipóteses?
( ) Totalmente de acordo
( ) De acordo
( ) Em desacordo
( ) Totalmente em desacordo

5) Para resolver o problema, você formulou hipótese (s)?

( ) Sim. Quail (s):
( ) Não.

6) Considerando a atividade estudada, enumere de 1 até 5, conforme a importância que atribui a cada item, considerando como 1 a maior importância e 5 a menor importância.
( ) A aplicação da matemática.
( ) A resolução de um problema.
( ) A relação da matemática com a realidade.
( ) A aprendizagem da matemática por meio da atividade.
( ) A relação com a sua prática futura enquanto professor de matemática.

7) Você considera que a utilização de software foi importante para o entendimento e a resolução da atividade?
( ) Totalmente de acordo
( ) De acordo
( ) Em desacordo
( ) Totalmente em desacordo

8) Coloque em ordem de 1 a 9 os procedimentos que usou para resolver a atividade
( ) coleta de dados
( ) definição de variáveis
( ) tratamento dos dados
( ) uso de gráfico
( ) definição de problema
( ) obtenção de um modelo matemático
( ) análise de uma resposta
( ) necessidade de fazer simplificações
( ) Interpretação da resposta

9) Relacione as colunas de acordo com o que foi feito na atividade e o conteúdo matemático estudado:

( a ) $C_{1=}50$

$C_{2=}C_1 + 2x$

$C_{3=}C_2 + 2x = 50 + 2x + 2x$

$= 50 + 4x$

$= C_1 + 4x$

$= 50 + 4x$

$C_{4=}C_3 + 2x = 50 + 2x + 2x + 2x$

$= 50 + 6x$

$= C_1 + 6x$

$= 50 + 6x$

( ) Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C_5 = C_4 + 2x} &= \mathbf{50 + 2x + 2x} \\
&\quad \mathbf{+ 2x + 2x} \\
&= \mathbf{50 + 8x} \\
&= \boldsymbol{C_1 + 8x} \\
&= \mathbf{50 + 8x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C_6 = C_5 + 2x} &= \mathbf{50 + 2x + 2x} \\
&\quad \mathbf{+ 2x + 2x + 2x} \\
&= \mathbf{50 + 10x} \\
&= \boldsymbol{C_1 + 10x} \\
&= \mathbf{50 + 10x}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{C_n = 50 + (2n - 2)x}$$

(b ) $\boldsymbol{R^2 = x^2 + (\frac{Y}{2})^2}$, onde $\boldsymbol{R}$ é o raio de irrigação, $\boldsymbol{x}$ é a medida do raio até a corda Y e $\boldsymbol{\frac{Y}{2}}$ é a medida da metade da corda.

( ) Em uma circunferência, se um raio é perpendicular a uma corda então ele intercepta a corda no seu ponto médio

(c) Consideramos que a distância entre $\boldsymbol{C_1}$ e $\boldsymbol{C_2}$ é $\boldsymbol{2x}$, sendo assim, a distância de $\boldsymbol{C_1}$ a corda $\boldsymbol{Y}$ é $\boldsymbol{x}$.

( ) Processo de Recorrência Matemática.

10) No desenvolvimento da atividade estudamos conceitos como grandezas diretamente proporcionais - duas grandezas são chamadas de diretamente proporcionais quando o aumento na medida de uma delas causa um **aumento** na medida da outra na mesma proporção, ou quando uma **redução** na medida de uma das grandezas causa uma redução na medida da outra na mesma proporção, e grandezas inversamente proporcionais - duas grandezas são chamadas inversamente proporcionais quando o aumento na medida de uma das grandezas causa uma redução na medida da outra, e vice-versa. Assim considerando as grandezas estudadas na atividade, use essa definição para relacionar as grandezas abaixo.
   c) O tamanho da corda e a área duplicada de irrigação
      ( ) Grandezas diretamente proporcionais
      ( ) Grandezas inversamente proporcionais
   d) A distância do centro a corda $(x)$ e o tamanho da corda $(Y)$
      ( ) Grandezas diretamente proporcionais
      ( ) Grandezas inversamente proporcionais

11) Relacione as colunas de acordo com o seu conhecimento sobre Modelagem Matemática

| | |
|---|---|
| (a) Inteiração | ( ) Essa fase consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação. |
| (b) Matematização | ( ) Essa fase visa a análise de uma resposta para o problema e a validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto à adequação da representação da situação. |
| (c) Resolução | (   ) Tradução da linguagem natural para a linguagem matemática. |
| (d) Interpretação de resultados e Validação | ( ) A finalidade dessa etapa é conhecer as características e especificidades da situação |

12) Sobre o fenômeno irrigação de jardins. Assinale a alternativa que descreve o seu conhecimento sobre o tema.

e) Conhecia o tema de experiências anteriores e tinha domínio sobre ele.
f) Conhecia o tema de experiências anteriores e não tinha domínio sobre ele.
g) Não conhecia o tema, mas buscou informações em materiais como internet, livros, revistas ou profissionais da área.
h) Conhecia o tema, mas buscou informações em materiais como internet, livros, revistas ou profissionais da área para entender as especificidades desse tipo de irrigação.

13) Na situação apresentada você precisava responder ao seguinte problema: A que distância os bicos devem ser colocados para produzir a distribuição mais uniforme de água em um campo retangular de 300 pés de largura? Para resolver o problema uma das hipóteses formuladas foi de que as distâncias entre os bicos eram iguais. Qual a importância dessa hipótese na resolução do problema?

14) Assinale quais aspectos foram relevantes para o entendimento o fenômeno

(  ) Saber como funciona uma irrigação linear
(  ) Conhecer o conteúdo matemático envolvido
(  ) Fazer um desenho usando software
(  ) O vídeo explicativo enviado pela professora
(  ) O levantamento das informações
( ) Pesquisa na internet

15) O desenvolvimento dessa atividade possibilitou a aprendizagem de que conteúdos matemáticos?
( ) Teorema de Pitágoras
( ) Processo de recorrência
( ) Relações entre circunferências
( ) Relações métricas na circunferência

16) Considerando as opções assinaladas anteriormente comente o que foi aprendido com relação ao conteúdo matemático.

17) O que o resultado matemático significa para a situação?

18) Faça um esquema indicando os passos ou etapas que você considera que foram usados para o desenvolvimento da atividade.

**INSTRUMENTO III DE COLETA DE DADOS DA ATIVIDADE *PRODUÇÃO DE SOJA* – 4º ANO**

1) Qual foi o problema investigado na atividade com a temática produção de soja e lucratividade do produtor?

2) Qual(is) dos itens tem maior impacto sobre a lucratividade do produtor?

   ( ) preço da saca
   ( ) quantidade de sacas produzida por hectare
   ( ) o custo para produzir a soja
   ( ) o custo para transportar a soja
   ( ) mercado financeiro
   ( ) o preço do dólar
   Justifique sua(s) escolha(s):

3) Os dados coletados foram analisados a partir de:

   ( ) Tabelas
   ( ) Gráficos
   ( ) Outro. Qual?

4) Quais foram as hipóteses formuladas para a abordagem matemática da situação?

5) Quais foram as simplificações realizadas na situação para possibilitar sua abordagem matemática?

6) De 1 a 10 para você qual é a importância de saber usar o software no desenvolvimento da atividade? Considerando 1 como não sendo importante e 10 como sendo muito importante. Justifique sua resposta.

7) Assinale abaixo os critérios que usaram para usar o modelo matemático sugerido pelo Geogebra
   ( ) A curva estava mais próxima do conjunto de dados
   ( ) O valor do R-quadrado
   ( ) Confiabilidade do software
   ( ) O fato de que o ajuste representava o fenômeno estudado

8) Explique porque a função ajustada pelo software foi utilizada para ajustar esse comportamento?

9) O que você aprendeu com o desenvolvimento dessa atividade, tanto com relação a matemática quanto ao que diz respeito ao entendimento do fenômeno?

10) É possível usar o modelo matemático obtido por vocês para fazer previsões sobre a lucratividade do produtor a longo prazo?

11) O que o resultado matemático encontrado reflete sobre a situação abordada na atividade?

12) Você considera que a validação do modelo matemático foi:

( ) Insatisfatória
( ) Pouco satisfatória
( ) Satisfatória
( ) Muito satisfatória

13) Enumere de 1 até 11 os procedimentos que você realizou na atividade, considerando 1 o que você fez primeiro na atividade e 11 o que fez por último.
( ) Tratamento dos dados
( ) Necessidade de fazer simplificações
( ) Escolha do tema
( ) Levantamento de hipóteses
( ) Coleta dos dados
( ) Análise de uma resposta
( ) Formulação de um problema
( ) Levantamento de variáveis
( ) Obtenção de um modelo matemático
( ) Validação do modelo matemático
( ) Interpretação da resposta

14) As questões serão respondidas no quadro que se encontra no final da página. Sua resposta pode varia de um extremo a outro dependendo da sua opinião.

1) Caracterize o grau de complexidade da atividade desenvolvida.
2) Sua familiaridade com os conceitos matemáticos utilizados durante a resolução das atividades.
3) Suas impressões sobre a atividade desenvolvida.
4) Você ficou convencido(a) da validade da solução encontrada?
5) Importância da generalização da situação-problema.
6) Uso de diferentes maneiras para resolver o problema.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Pouco complexo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Muito complexo |
| 2. Pouco familiar | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Muito familiar |
| 3. Pouco interessante | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Muito interessante |
| 4. Pouco convencido(a) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Totalmente convencido(a) |
| 5. Sem importância | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Muito importante |
| 6. Dispensável | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Indispensável |

15) Faça um esquema indicando os passos ou etapas que você considera que foram usados para o desenvolvimento da atividade.

# APÊNDICE D
# ROTEIRO DE ENTREVISTA

**1)** Comente sobre o que foi diferente para você com relação as atividades sugeridas pela professora e a atividade que desenvolveram sozinhos.

**2)** Quais dificuldades você sentiu no desenvolvimento da atividade da Irrigação? E da Emissão de GEE pela agropecuária? E na atividade em que você ficou responsável pela escolha do tema?

**3)** Cite três coisas que aprendeu com essas atividades de modelagem? Sobre a matemática e sobre o fenômeno estudado.

**4)** Os conhecimentos matemáticos necessários para o desenvolvimento da atividade eram coisas já aprendidas ou foi necessário algum tipo de suporte?

**5)** Quais "passos" ou "etapas" você identificou no desenvolvimento dessas atividades?

**6)** O que você considera mais importante para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática? Por quê?

**7)** O que gostou mais na atividade:
- A aplicação da matemática?
- Resolver um problema não matemático por meio da matemática?
- A aprendizagem da matemática proporcionada pelo desenvolvimento da atividade?
- A aprendizagem visando a sua atuação como professor de Matemática no futuro.

Porque?

**8)** Você saberia dizer o que é modelagem matemática?

**9)** Comente como foi fazer Modelagem Matemática no ambiente remoto.