Universidade Estadual de Londrina

RENATA APARECIDA DE FARIA

TEORIAS COM ABORDAGENS SEMIÓTICAS: A IDEIA DE CONTIGUIDADE E POSSÍVEL DIÁLOGO INTERTEÓRICO EM UMA SITUAÇÃO DA *EARLY ALGEBRA*

Londrina

2023

RENATA APARECIDA DE FARIA

TEORIAS COM ABORDAGENS SEMIÓTICAS: A IDEIA DE CONTIGUIDADE E POSSÍVEL DIÁLOGO INTERTEÓRICO EM UMA SITUAÇÃO DA *EARLY ALGEBRA*

Tese apresentada à Universidade Estadual de Londrina - UEL, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Rosana Figueiredo Salvi-UEL

LONDRINA

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

F224t Faria Renata Aparecida de.
TEORIAS COM ABORDAGENS SEMIÓTICAS: A IDEIA DE CONTIGUIDADE E POSSÍVEL DIÁLOGO INTERTEÓRICO EM UMA SITUAÇÃO DA EARLY ALGEBRA / Renata Aparecida de Faria. - Londrina, 2023.
173 f.: il.

Orientador: Rosana Figueiredo Salvi.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2023.
Inclui bibliografia.

1. Teoria da Objetivação - Tese. 2. Teoria dos Registros de Representação Semiótica - Tese. 3. *Early Algebra* - Tese. 4. Semiótica - Tese. I. Salvi, Rosana Figueiredo. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51

RENATA APARECIDA DE FARIA

TEORIAS COM ABORDAGENS SEMIÓTICAS: A IDEIA DE CONTIGUIDADE E POSSÍVEL DIÁLOGO INTERTEÓRICO EM UMA SITUAÇÃO DA *EARLY ALGEBRA*

Tese apresentada à Universidade Estadual de Londrina - UEL, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Rosana Figueiredo Salvi

Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Prof.ª Drª. Anágela Cristina Morete Felix

Secretaria Estadual de Educação Paraná- SEED

____

Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Profª. Drª. Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva

Universidade Federal da Paraíba- UFPB

____

Prof. Dr. Paulo Sérgio de Camargo Filho

Universidade Tecnológica Federal do Paraná-UTFPR

Londrina, 24 de Março de 2023.

AGRADECIMENTOS

Desenvolver essa tese foi dos maiores desafios da minha vida. Vários foram os momentos nos quais quase desisti dela. Muitas vezes foi dificílimo conciliar a Renata estudante com a mãe, a esposa, a filha, a amiga, a professora.

Como tudo na vida, porém, estar aqui foi uma escolha.

Por isso, tenho muito a agradecer.

Agradeço pelos amores da minha vida, que me disseram:

- Você tem uma história para contar.

- Acredito em você!

- Respira!

- Se acalma!

Aos meus anjos da guarda, com seus olhares de amor incondicional, abraços eloquentes, mensagens de ânimo e puxões de orelha

Um abraço infinito nos meus amigos e amigas, que tiveram paciência para me ouvir. Que vibraram a cada conquista. Que com uma simples pergunta - Como você está? - demonstraram o amor fraterno que somente a verdadeira amizade possui. Que sempre me diziam: mantenha-se impávida e mantenha o foco!

Agradeço a autores geniais como Franz Kafka e José Saramago, que me acompanham em algumas andanças e com suas palavras me transportam para universos particulares. Aos clássicos do rock, do blues e aos sons domésticos. Aos filmes e séries que permitiram reflexões e diversão.

Aos colegas de doutorado Lilian, Luana e Rafael que presencial ou virtualmente colaboraram com questionamentos e reflexões. Ao pessoal da secretaria do Programa-PECEM-, pelas informações e atendimentos.

Com carinho especial, agradeço à professora Rosana pelas dicas de estudos, pelo respeito à autonomia e pela confiança na pesquisa desenvolvida.

Por fim, um abraço à Cassiana pela fé difusa e teimosia recorrente.

Para minha família.

FARIA Renata Aparecida de. Teorias com abordagens semióticas: a ideia de contiguidade e possível diálogo interteórico em uma situação da *Early Algebra.* 2023. 172p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023

RESUMO

As teorias que nortearam esta pesquisa possuem enfoques distintos: a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida por Raymond Duval, apresenta um enfoque cognitivo em que os registros de representações são inerentes ao processo de ensino e aprendizagem de matemática e possibilitam a análise das atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão. O enfoque sócio cultural delimita os pressupostos da Teoria da Objetivação (TO), teoria em desenvolvimento proposta por Luis Radford que considera o Labor Comum como fundamental aos processos de objetivação e subjetivação, ancorados pelos meios semióticos de objetivação. A tese investiga como os elementos de duas teorias da Educação Matemática que utilizam abordagens semióticas emergem em uma situação do contexto da *Early Algebra* denominada “Quantos telefonemas?”. A pesquisa é caracterizada como qualitativa – descritiva e foi realizada com estudantes do 6◦ ano do Ensino Fundamental –Anos Finais, em um colégio da Rede Estadual situado em uma cidade do norte do Paraná. A coleta de informações ocorreu a partir das anotações no diário de campo da pesquisadora, fotos e protocolos dos estudantes dos grupos denominados G1, G2, G3e G4. A mobilização de diversos meios semióticos associados ao conceito de multimodalidade permitiu a elaboração de um instrumento de análise multissemiótica divididos em três etapas. Na primeira etapa, encontram-se a descrição dos meios semióticos utilizados (gestos, entonação vocal, artefatos, e representações) na situação “Quantos telefonemas?”. A segunda etapa da análise multissemiótica consistiu em indicar os processos de objetivação e subjetivação de cada um dos grupos, a partir dos meios semióticos mobilizados – nos quais, no grupo G3, os artefatos foram motivo de conflitos. Nesses processos de subjetividades – formas de colaboração humana –, entre os integrantes dos grupos, ocorreram também subjetividades da pesquisadora. Na terceira etapa, o meio semiótico “representações” foi considerado em seus registros na indicação das atividades cognitivas de tratamento e conversão. Dos elementos que emergiram na análise multissemiótica, decorreu a ideia de contiguidade como a disposição dos elementos lado a lado, de modo síncrono e permitiu a proposta de um possível diálogo interteórico entre aspectos das teorias: o labor comum (TO), a autonomia intelectual (TRRS), a contração semiótica (TO) e a coordenação (TRRS) entre os elementos das teorias. Quanto à situação do contexto da *Early Algebra*, identificamos a covariação – relação entre quantidade de pessoas e telefonemas – enquanto característica do Pensamento Algébrico.

Palavras - chave: *Early Algebra*, Semiótica, Teoria da Objetivação, Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

FARIA Renata Aparecida de. *Theories with semiotic approaches: the idea of contiguity and possible intertheoretical dialogue in an Early Algebra situation. 2023. 172p. Thesis (Doctorate in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2023*

ABSTRACT

The theories that guided this research have different approaches: the Theory of Semiotic Representation Registers (TRRS), developed by Raymond Duval, presents a cognitive approach in which representation registers are inherent to the teaching and learning process of mathematics and enable the analysis of the cognitive activities of formation, treatment and conversion. The sociocultural focus delimits the assumptions of the Theory of Objectification (OT), a theory under development proposed by Luis Radford that considers Common Labor as fundamental to the processes of objectification and subjectivation, anchored by semiotic means of objectification. The thesis investigates how the elements of two theories of Mathematics Education that use semiotic approaches emerge in a situation in the context of Early Algebra called "How many phone calls?" Elementary School – Early Years, in a state school located in a city in the north of Paraná. The collection of information took place from the notes in the researcher's field diary and photos and protocols of the students in the groups called G1, G2, G3 and G4. The mobilization of several semiotic means associated with the concept of multimodality allowed the development of a multisemiotic analysis instrument divided into three stages. In the first stage, there is a description of the semiotic means used (gestures, vocal intonation, artifacts, and representations) in the situation “How many phone calls?”. The second stage of the multisemiotic analysis consisted of indicating the processes of objectification and subjectivation of each of the groups, based on the mobilized semiotic means - in which, in some groups, the artifacts were the cause of conflicts. In these processes of subjectivities - forms of collaboration –, among the members of the groups, there were also subjectivities of the researcher. In the third stage, the semiotic medium “representations” was considered in their records in the indication of cognitive activities of treatment and conversion. From the elements that emerged in the multisemiotic analysis, the idea of contiguity arose as the disposition of the elements side by side in a synchronous way and allowed the proposal of a possible intertheoretical dialogue between aspects of the theories: the common work (TO), the intellectual autonomy (TRRS), the semiotic contraction (TO) and the coordination (TRRS) between the elements of the theories. As for the context of Early Algebra, we identified covariation – the relationship between the number of people and phone calls – as a characteristic of Algebraic Thinking.

***Keywords**: Early Algebra, Semiotics, Objectification Theory, Theory of Semiotic Representation Registers.*

FIGURAS

TABELAS

QUADROS

ESQUEMAS

LISTA DE SIGLAS

BNCC Base Nacional Curricular Comum

CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CREP Currículo da Rede Estadual Paranaense

DCE Diretrizes Curriculares Estaduais

EUA Estados Unidos da América

ICMI ***International Commission on Mathematical Instruction***

IREM Instituto de Pesquisa de Educação Matemática

LEAP ***Learning through Early Algebra Progression***

NCTM ***National Council of Teachers of Mathematics***

PECEM Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

PME ***Group for the Psychology of Mathematics Education***

POS Processos de Objetivação e Subjetivação

PPGCOM Programa de Pós-Graduação em Comunicação

SSSC Sistemas Semióticos de Significação Cultural

TO Teoria da Objetivação

TRRS Teoria dos Registros de Representação Semiótica

UEL Universidade Estadual de Londrina

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Durante o mestrado no PECEM - período entre 2015-2017-, iniciei o contato com a Semiótica em diferentes contextos: na Educação Científica e Educação Matemática com referenciais dos multimodos e múltiplas representações, as ideias de Charles Peirce e Ferdinand Saussure, a teoria de Raymond Duval. Enquanto estudante especial do curso de Pós-graduação no curso de Comunicação (PPGCOM) da UEL conheci outros referenciais da Semiótica nas disciplinas de Teoria das Imagens e Bases Semióticas das Linguagens.

A junção de referências tanto no contexto educacional quanto nas aulas do PPGCOM, provocou em mim, outra “leitura” do que sou enquanto docente e pesquisadora. O processo de refinamento do olhar me acompanhou até a sala de aula, em que as orientações do mestrado e discussões nos grupos de estudos foram fundamentais para a investigação dos multimodos representacionais no ensino de Função Polinomial do 1º Grau.

Após a conclusão do mestrado, surgiram mais indagações a respeito da presença da Semiótica no ensino e aprendizagem de matemática. Desse modo, o esboço de um projeto de pesquisa para o doutorado começou a se delinear.

Ao iniciar o doutorado em 2019, sob orientação da professora Dra. Rosana retomei a revisão de literatura da Teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval e aprofundei os estudos, quanto à questão epistemológica do modo de acesso aos objetos matemáticos.

Nessas leituras, um tema recorrente em inúmeras pesquisas da Educação Matemática- a investigação sobre o Pensamento Algébrico-, possibilitou o primeiro contato como termo *Early Algebra*.

Investigando o termo, percebi conexões com documentos oficiais que enfatizavam a importância do desenvolvimento do Pensamento Algébrico desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Em uma das investigações sobre problemas de partilhas (Almeida, 2016) um pesquisador sobre pensamento algébrico me chamou atenção: Luís Radford. E assim, tive o primeiro contato com a Teoria da Objetivação, em que a cada leitura, tradução de artigos, a semiótica estava presente.

Desse modo a ideia de investigar situações da *Early Algebra*, sob o viés da Teoria da Objetivação juntamente com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, foram os temas para a elaboração da hipótese, questão investigativa e objetivos, apresentados nesse trabalho.

INTRODUÇÃO

No âmbito da Educação Matemática, a discussão a respeito das teorias presentes de acordo com Prediger *et al*. (2008),Bikner-Ahsbahs *et al*. (2010) e Drijvers *et al*. (2013) indica a diversidade de construtos teóricos e a complexidade de um tema de pesquisa a partir de diálogos, reflexões, revisões e até mesmo inconclusões. De acordo com Arzarello (2010), uma teoria é uma ferramenta de análise em contínuo processo de evolução.

Cada teoria da Educação Matemática possui suas concepções de ensino e aprendizagem distintas em que "não diferem apenas na forma como conceituam e questionam atividades matemáticas e processos educacionais e o tipo de resultados que podem fornecer, mas também em seus escopos e origens" (PREDIGER *et a*l.,2008).

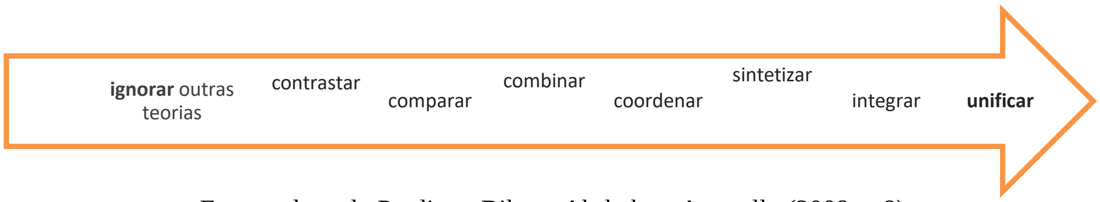
As distinções entre as teorias podem ser frutíferas no sentido em que exigem um aprofundamento dos conceitos e "forçam os pesquisadores a serem mais explícitos sobre os pressupostos centrais, o que está implícito em cada teoria, seus valores, pontos fortes e fracos" (PREDIGER; BIKNER-AHSBAHS e ARZARELLO, 2008, p.14).

A utilização de estratégia em rede – *networking* – possibilita realizar essas distinções ao permitir investigar, por exemplo, um mesmo objeto de pesquisa sob as lentes de duas ou mais teorias, dois objetos de pesquisa diferentes em um mesmo viés teórico, ou teorias com abordagens similares, porém com questões de pesquisa distintas e análises paralelas em diferentes níveis de ensino.

Um aspecto essencial da estratégia em rede é o aprofundamento dos pressupostos de cada teoria, permitindo ao mesmo tempo uma visão macro e/ou micro de um fenômeno educativo.

As estratégias em rede podem ser ilustradas no sentido da menor (ignorar) para a maior (unificar) estratégia interteórica, segundo degraus de integração analisados aos pares e em diferentes métodos investigativos.

Figura 1: Degraus das estratégias em rede (*networking*)



Fonte: adaptado Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008, p.8)

Corroborando essa ideia de diversas teorias dialogarem a respeito de um mesmo fenômeno, Sabena *et al*. ponderam que “a experiência do trabalho em rede nos ensina que o que você espera à primeira vista parece irreconciliável, pode esconder pontos de complementaridade, se não contato” (SABENA, KRAUSE, MAFFIA,2016, p.74).

Mas, como escolher as teorias para a fundamentação deste trabalho?

A resposta dessa indagação começou a se delinear a partir da definição do termo abordagem: visão de um assunto; ponto de vista sobre uma questão; maneira ou método de enfocar ou interpretar algo[1].

A abordagem semiótica é a premissa desta investigação, e para fundamentar este trabalho optamos por duas teorias que se constituem sob bases semióticas. A Semiótica é denominada a ciência dos signos e desponta em investigações na Educação Matemática nos anos 1990 enquanto abordagem de diferentes teorias relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Matemática

Dentre as teorias da Educação Matemática fundamentadas em abordagens semióticas, destacam-se as investigações em Didática da Matemática, de Bruno D’Amore; a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval; os Enfoques Ontosemióticos, de Juan D. Godino; o *Semiotcs Bundle,* de Ferdinando Arzarello; e a Teoria da Objetivação, de Luís Radford. Esses são exemplos da diversidade de referenciais.

A pertinência das pesquisas que relacionam aspectos semióticos aos processos de ensino e aprendizagem de matemática é que “toda investigação em Didática da Matemática tem que ser cognitiva e social, individual e coletiva, antropológica e cultural; mas, de agora em diante, terá que ser também semiótica” (URIBE *apud* D’AMORE, 2015, p.20).

Segundo Radford (2013, p.19), uma abordagem semiótica da educação está “ligada à maneira pela qual seus pressupostos epistemológicos e ontológicos são expressos e até transformados por conceitos e construções semióticas”.

O intuito aqui não é esgotar o tema Semiótica, mas sim destacar sua presença no contexto educativo, especificamente nas aulas de Matemática. Segundo Morey (2020, p.43), mesmo Cursos de Licenciatura e/ou Pós-Graduação em Ciências Naturais e Matemática raramente têm contato com estudos sobre semiótica.

---

[1]https://languages.oup.com/google-dictionary-pt/ acesso em 08/05/2022

A relevância dessas teorias com abordagens semióticas em relação a outras teorias do campo da Educação Matemática reside no fato de que, diferentemente de outras áreas do conhecimento, o objeto matemático não pode ser apreendido diretamente pelos sentidos (GODINO, 2018, p.7).

Essa distinção ontológica é o que dá origem ao paradoxo cognitivo[2] preconizado por Raymond Duval, em que a *noésis* (apreensão conceitual) é indissociável da *semiósis* (produção de representações).

Desse modo, o ensino e aprendizagem de matemática requerem

> o uso de signos, como símbolos e diagramas, para sua comunicação e aprendizado. Consequentemente, a semiótica, como estudo ou doutrina dos signos, ou seja, a investigação sistemática da natureza, propriedades e tipos de signos, vem recebendo grande atenção na pesquisa em Educação Matemática [3](GODINO, 2018, p.7).

A presença inerente da semiótica na vida cotidiana e consequentemente nos cenários de sala de aula é tema de investigações das teorias supracitadas. Radford & Sabena (2015) destacam que "uma simples olhada na sala de aula de matemática pode nos mostrar a variedade de signos e artefatos que circulam durante a atividade de ensino e aprendizagem".

Pesquisadores da Educação Matemática como Otte e Vergel destacam que pensar semioticamente é "reconhecer que todo conhecimento é dinâmico e construído por meio de signos". (OTTE *et al*. 2019, p.42). Dessa maneira, a semiótica permite refletir sobre a matemática enquanto construção histórica e social. Vergel (2018, p.55) assinala que os signos nos permitem refletir sobre o mundo

> (...) para considerar a semiótica não apenas em seu papel de representar objetos matemáticos, pois a atividade matemática está ancorada nos complexos simbólicos da cultura em que se desenvolve[4] (tradução dos autores).

---

[2]No item 3.1, iremos discorrer sobre a noção de paradoxo cognitivo proposto por Raymond Duval.

[3]*el uso de signos, tales como símbolos y diagramas, para su comunicación y aprendizaje. .En consecuencia, la semiótica, como el estúdio o doctrina de los signos, esto es,la investigación sistemática de la natureza , propriedades y tipos de signos, está recibiendo gran atención em la investigación em Educación matemática.*

[4]*Los signos nos permiten reflexionar sobre el mundo (...) de modo a considerar la semiótica no solo em su papel de representación de los objetos matemáticos, pues la actividad matemática está anclada em los complejos simbólicos de la cultura en que se desarrolla.*

A Semiótica não pode ser simplesmente justaposta a teorias educacionais, mas pode ajudar a enriquecê-las. Uma abordagem educacional derivada da semiótica, conforme nos alerta Radford, "não pode consistir simplesmente no amálgama de uma teoria semiótica e outra educacional" (RADFORD, 2013 p.200).

Este trabalho abordou duas teorias da Educação Matemática, caracterizadas pelo viés semiótico, que baseiam seus princípios ontológicos e epistemológicos em enfoques distintos: a Teoria da Objetivação apresenta um enfoque sociocultural, enquanto a Teoria dos Registros de Representação Semióticas tem um enfoque cognitivo.

A Teoria da Objetivação proposta por Luís Radford apresenta em seus princípios um enfoque sociocultural. Nesse referencial teórico, a mobilização dos meios semióticos é fundamental para os processos de objetivação e subjetivação, o que resulta na aprendizagem. Esses processos são simultâneos e indissociáveis.

A Teoria dos Registros de Representação Semióticas de Raymond Duval possui enfoque cognitivo, situando os registros de representação enquanto ferramentas para apreensão conceitual e modos de representar um objeto matemático. Segundo Duval (2011, p.73), o conhecimento matemático não começa com as representações semióticas dos "conceitos" ou dos objetos, mas com suas transformações.

Para indicar como são emergentes as investigações com perspectivas semióticas no ambiente da Educação Científica e Matemática, destacamos um recorte de pesquisas cujo referencial teórico é a Teoria de Objetivação (TO)[5] e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). Utilizamos como base pesquisas em nível de mestrado acadêmico, mestrado profissional e doutorado dos últimos cinco (5) anos no catálogo de teses da CAPES[6].

Tabela 1 – Quantidade de pesquisas com referencial da Teoria da Objetivação

	2017	2018	2019	2020	2021
Mestrado Acadêmico (04)	-	-	01	02	01
Mestrado Profissional (05)	01	01	01	01	01
Doutorado (03)	-	-	02	-	01

Fonte: a autora acesso em 03/05/2022 https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/

[5] A partir de agora, em diversos momentos da tese utilizaremos as siglas **TO**para Teoria da Objetivação e **TRRS** para a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

[6]Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

Tabela 2 – Quantidade de pesquisas com referencial da Teoria dos Registros de Representação Semiótica

	2017	2018	2019	2020	2021
Mestrado Acadêmico (08)	01	01	02	02	02
Mestrado Profissional (15)	02	04	06	01	02
Doutorado (13)	02	04	02	02	03

Fonte: a autora acesso em 03/05/2022 https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/

Além das dissertações e teses, destacamos as pesquisas indicadas no livro Teoria da Objetivação: Fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática, de Gobara e Radford (2020), e um *e-book* com uma compilação dos pesquisadores Moretti e Brandt (2020) a respeito da TRRS.

No livro organizado por Gobara e Radford, os aspectos teóricos, metodológicos e epistemológicos da Teoria da Objetivação constituem o foco investigativo. A obra se divide em 3 (três) seções: Aportes teóricos, Aplicações para o ensino de Ciências e Matemática: *Aprendizagem* e Aplicações para o ensino de Ciências e Matemática: *Formação de professores*, o que demonstra a abrangência da Teoria da Objetivação em diferentes níveis de ensino, temáticas e considerações a respeito da perspectiva semiótica no ensino e aprendizagem de Ciências, Geografia e Matemática.

Da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, o *e- book* compreende pesquisas realizadas em diferentes níveis de ensino no período de quinze (15) anos sob o referencial da TRRS. A abrangência das investigações contempla temas referentes a conteúdos matemáticos, prática docente, formação inicial e continuada, metodologias de ensino, tecnologias no ensino de matemática, processos de ensino e aprendizagem e modelagem matemática.

A partir das informações a respeito das pesquisas recentes com embasamento teórico da TO e da TRRS, recorremos à estratégia de rede da comparação entre as teorias para uma compreensão conceitual mais fidedigna e melhor comunicação interteórica.

Para ilustrar essa investigação[7], apresentamos uma situação do contexto da *Early Algebra*[8], na qual justificamos a importância de discussões a respeito do Pensamento Algébrico desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, conforme documentos oficiais

---

[7]Ressaltamos que o enfoque da investigação era a priori um estudo longitudinal com estudantes dos 6º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais, a respeito do Pensamento Algébrico em pelo menos 6 (seis) situações da *Early Algebra*. Porém, com a pandemia do COVID-19, foi necessário adaptarmos a investigação para uma situação, cuja coleta de informações ocorreu no final de 2019.
[8]Optamos por utilizar o termo em inglês, pois é o proposto nos textos originais.

da Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP).

Dentre os pesquisadores (BLANTON [2005, 2008], CARRAHER [2008, 2015], KAPUT [2001], KIERAN [1992, 1996]) não há consenso entre uma definição de Pensamento Algébrico. Concordamos com a afirmação de Radford (2011) de que o Pensamento Algébrico resulta de ações culturais, sendo um modo de pensamento que foi refinado sucessivamente ao longo de séculos antes de alcançar sua forma atual.

Várias são as características que podem constituí-lo: generalização, relações, funções, cálculos aritméticos. Nessa investigação, a característica do Pensamento Algébrico presente na situação da *Early Algebra* é a covariação, ou seja, a relação entre duas variáveis.

A *Early Algebra* é uma maneira de pensar que dá significado, profundidade e coerência para a compreensão matemática das crianças, aprofundando os conceitos já ensinados, de modo que haja oportunidade de generalizar relacionamentos e propriedades na matemática (BLANTON *et al*., 2007, p. 7).

O desenvolvimento do Pensamento Algébrico compreende processos de significação, o que reforça a escolha de teorias da Educação Matemática pautadas em perspectivas semióticas.

Desse modo, considerando a presença da Semiótica no processo de ensino aprendizagem de Matemática, das abordagens semióticas da Teoria da Objetivação, da Teoria dos Registros de Representação Semióticas e da relevância de investigações a respeito do Pensamento Algébrico, investigamos as informações coletadas em uma turma do 6º ano , a partir da situação "Quantos telefonemas?".

A questão investigativa que nos orienta é: "Como os elementos de teorias da Educação Matemática de abordagem semiótica com enfoques socioculturais e cognitivos emergem de uma situação do contexto da *Early Algebra* com estudantes do Ensino Fundamental – Anos Finais?".

O verbo emergir, presente na questão investigativa, vai ao encontro do que Radford (2013, p.32) afirma, de queo adjetivo "emergente" significa que a sala de aula é vista como um sistema que evolui através de "estados", e que essa evolução não pode ser determinada antecipadamente.

O objetivo geral é investigar a maneira como os elementos da Teoria da Objetivação e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica emergem a partir da situação "Quantos telefonemas?".

Quanto aos objetivos específicos, almejamos:

- ✓ Indicar as especificidades dos aspectos ontológicos e epistemológicos de cada teoria;
- ✓ Identificar os meios semióticos mobilizados;
- ✓ Verificar:

  - os indícios dos processos de objetivação e subjetivação (referentes a TO);

  - as atividades cognitivas de tratamento e conversão (referentes à TRRS);

  - as características do Pensamento Algébrico.

Os capítulos que compõem a investigação estão dispostos da seguinte maneira: o referencial teórico inicia com um panorama geral do que é a Semiótica, sua presença no ensino de matemática, e considerações sobre os objetos matemáticos.

O construto teórico contém as considerações epistemológicas e ontológicas que fundamentam a Teoria da Objetivação (TO) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).

A partir disso, temos um capítulo com as especificidades dos construtos quanto ao Pensamento Algébrico e seus princípios fundamentais, metodologia e questões paradigmáticas.

Em seguida, indicamos o contexto da *Early Algebra* juntamente a discussões a respeito do Pensamento Algébrico e à presença do tema em documentos oficiais. Nos procedimentos metodológicos, apresentamos o contexto da investigação, a coleta das informações e o instrumento da análise multissemiótica.

Desse modo, temos a análise multissemiótica composta por 3 (três) etapas, cujas inferências a partir da situação “Quantos telefonemas?”demonstram como os elementos da TO e TRRS emergem. Por fim, a contiguidade entre as teorias e um possível diálogo interteórico[9].

---

[9] Esclarecemos que a escolha desse termo é decorrente das leituras referentes as estratégias em rede .

1 O QUE É SEMIÓTICA?

Da palavra signo – do grego *semeion* – origina-se a raiz etimológica da palavra Semiótica. Segundo Nöth e Santaella o signo apresenta uma relação diádica: algo que está para algo e/ou uma relação triádica: uma coisa que, além da impressão que produz nos sentidos, faz com que outra coisa venha à mente como consequência dele (NÖTH, SANTAELLA, 2017, p.8).

A Semiótica é a ciência dos sistemas e dos processos sígnicos na cultura e na natureza. "Ela estuda as formas, os tipos, os sistemas de signos e os efeitos do uso dos signos, sinais, indícios, sintomas ou símbolos. Os processos em que os signos desenvolvem o seu potencial são processos de significação, comunicação e interpretação" (NÖTH, SANTAELLA, 2017, p.7).

Comunicar ideias, representar conceitos, produzir conteúdo nos mais diversificados contextos sociais, culturais, científicos e artísticos é ressaltado por Santaella (2015) ao afirmar que a semiótica nos ajuda a "ler "o mundo em suas inúmeras linguagens dentre elas: fotografia, pintura, mapas cartográficos, poemas, música, fórmulas algébricas em diferentes contextos científicos.

Desse modo, a semiótica é a ciência dos signos, os signos da linguagem. As linguagens estão no mundo e nós estamos na linguagem. A semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis (SANTAELLA, 1990).

Foucault (1971) demonstra que os signos e as interpretações que deles fazemos se ordenam em camadas culturais simbólicas que delimitam o que pode ser dito e o que pode ser pensado em certo momento histórico. Essas camadas formam configurações específicas de discursos e signos, que se constituem a partir de significações singulares.

O conceito de Semiótica apresenta uma evolução histórica que remete aos antigos filósofos até a época atual, situados de modo breve no Quadro 01:

Quadro 01: Evolução Histórica[10] do conceito Semiótica

Antiguidade (700 a. C- 250 d. C.)	
Platão (428-347)	Considera a relação entre nome (signo linguístico) e ideia (referente conceitual, não mental) e sombra (referente real). Para Platão, existe outra realidade além do nome, a qual os signos linguísticos fazem referência: o mundo das ideias.
Aristóteles (384-322)	Afirma que os sons da voz são símbolos das afeições da alma (eventos mentais, conceitos), enquanto os signos escritos (as palavras escritas) são símbolos do som da voz. A expressão *symbolon* é utilizada para indicar equivalência ou de possível substituição mútua entre signos linguísticos (palavras) e conceitos. O signo (*semeion*) seria um fato ou evento mediante uma relação de implicação e que podem indicar possíveis consequências. Reforça a distinção entre signo linguístico *(symbolon)* e signo não linguístico *(semeion*).
Estóicos (-IV século/ -III século)	A relação triádica significante-significado-referente (*semainon-semainómenon-tyncházon)* caracteriza as relações linguísticas. A tradição estóica considera o termo *semeion* (signo) e de *lektón* (dito) unificando a teoria da linguagem com a teoria dos signos.
Epicuristas (-IV século)	O signo cumpre uma função fundamental, qual seja a de obter a partir de objetos conhecidos, isto é, daquilo que é acessível aos sentidos (o que aparece),objetos não imediatamente ou não diretamente acessíveis aos sentidos (o que não aparece). O signo (linguístico) tem para os Epicuristas uma natureza diádica: palavra (significante) e objeto (referente, identificado como uma sensação), sem conceber o conceito de *lektón* dos estóicos, ou seja, a existência de coisas intermediárias (entre palavras e objetos) veiculadas pelos signos.
Euclides (325 a. C)	Em Os Elementos de Euclides, o termo *(semeion)* é utilizado para designar o ente fundamental em geometria: o ponto, que transmite a ideia de algo acessível aos sentidos que faz referência a outra coisa (não diretamente acessível aos sentidos).
Agostinho de Hipona (354- 430)	As teorias da linguagem (modelada em termos de equivalência (significante ≡ significado) e a teoria dos signos considerada em termos de inferência ou de implicação *(se p então q*) se unem em uma única teoria e estende a concepção do signo (*semeion*) de maneira a incluir as palavras. O significado de um signo pode ser estabelecido ou expresso por meio de outros signos, utilizando outras palavras, indicando algo por meio de gestos. A teoria do signo de Agostinho baseia-se em uma definição de signo muito ampla, ao incluir o signo indexical (um gesto, por exemplo) como signo linguístico convencional constituindo assim uma mudança fundamental na história da semiótica.
Era Medieval (250- 1500)	
	Um signo constitui alguma coisa que faz com que algo diferente se faça presente ao conhecimento. a semiótica medieval faz distinção entre signo natural (*signumnaturale*) e signo convencional *(signum ad*

[10]As denominações históricas foram adaptadas do Livro da Filosofia (Globo Livros, 2016).

Semiótica Medieval	*placitum*) ou intencional. Os conceitos se referem diretamente as coisas em uma relação triádica *termo, conceito* e *res* (coisa). Apresenta o problema do signo no âmbito das interpretações religiosas, com três vertentes quanto a semiótica: o realismo semiótico -,cujo expoente é Tomas de Aquino -em que os elementos constitutivos dos signos são entidades mentais; o nominalismo semiótico sugere que os signos são apenas nomes sem qualquer relação com a realidade e o conceitualismo semiótico considera a dimensão semântica do signo como dependente da mente não possuindo uma realidade externa.
Renascimento (1500- 1750)	
Descartes (1596-1650)	Considera uma estrutura triádica do signo, constituída por um aspecto material (os sons das palavras), um aspecto mental que está diretamente relacionado às palavras (o significado) e os fenômenos da realidade que as palavras representam. Porém, não existe uma relação direta entre palavras e coisas, a linguagem é considerada uma instituição, ou seja, é arbitrária. Os signos enquanto representações- não cópias – das coisas refletem para Descartes tanto o dualismo mente-corpo como a prioridade da experiência intelectual sobre aquela perceptiva.
Era das Revoluções (1750-1900)	
Kant (1724-1804)	Para Kant, os conceitos são representações mediadas do objeto de conhecimento por meio de signos, traços distintivos ou características comuns de tais objetos (ou de suas intuições)., as intuições se referem aos objetos da experiência. A cognição comporta tanto um elemento conceitual como um elemento sensível (*uma intuição sensível*), ou conhecimento imediato por meio dos sentidos, em que esse último nos conduz a uma representação particular. A relação existente entre o elemento conceitual (geral) e o elemento sensível (particular) é garantida pelo *esquema*. Um esquema é entendido não como uma imagem, mas como um procedimento universal, um método ou uma regra para produzir uma imagem, um método ou uma regra para a aplicação de um conceito, relacionando conhecimento e ação, atividade mental interna e mundo da experiência sensível, geral e particular.
Era Moderna (1900 – 1950)	
Peirce[11] (1839-1914)	Considerado o fundador da semiótica moderna, Charles Sanders Peirce ressalta na sua teoria dos signos que a cognição, o pensamento e até mesmo o ser humano possuem uma natureza essencialmente semiótica. Os signos são meios utilizados para representar algo para alguém, são meios de compreensão, raciocínio e aprendizagem. Apresenta a relação triádica *representamen* (signo), *interpretante* (signo na mente de alguém) e o *objeto (*considerado como *imediato* – tal qual é representado pelo signo e *dinâmico* – o objeto eficiente, mas não imediatamente presente). A relação sígnica*(representamen, objeto, interpretante*) fundamenta a fenomenologia de Peirce: a *Primeiridade* (qualidade pura, sensação), a *Secundidade* (reação, fato, realização) e a *Terceiridade* (representação, mediação lei, generalidade). Em geral, um

[11]No próximo item apresentaremos um pouco da relação de Pierce e Saussure com a Matemática.

	signo *(representamen*) possui uma relação simbólica com seu objeto se a relação entre o signo (*representamen)* e o objeto for estabelecida por uma convenção. Em síntese há 3 (três) relações que um signo pode ter com um objeto ao qual se refere: *icônica* (Primeiridade-relação de semelhança), *indexical* (Secundidade-relação de causa e efeito) e *simbólica* (Terceridade-relação estabelecida por uma convenção).
Saussure (1857-1913)	Ferdinand Saussure é considerado o fundador da linguística moderna a partir da construção de uma ciência dos signos denominada *semiologia*. O signo para Saussure não é uma entidade concreta, nem uma referência a uma entidade concreta, mas o resultado da combinação de um *conceito* e de uma *imagem acústica*. O signo é diádico: o *significante* ou *imagem acústica* (componente fonética) de um lado e o *significado* ou *conceito* (ideia, aquilo que se "pensa") do outro lado, unindo de maneira indissolúvel significante e o significado, que não estão em relação com qualquer objeto externo à língua. Além da estrutura diádica, a teoria do signo (linguístico) é: a concepção mentalista, a exclusão do referente (nada existe além do significante e significado), a concepção estrutural (a rede de relações internas, de oposições, diferenças e valores que caracterizam o sistema de signos) a arbitrariedade e o convencionalismo.
Vygotsky[12] (1896-1934)	Busca analisar os processos mentais humanos examinando o ambiente social no qual os indivíduos se desenvolvem e, em particular, os signos e os instrumentos que mediam seus processos mentais. A capacidade de utilizar signos naturais e produzir signos artificiais para Vygotsky é o que distingue os seres humanos de outros animais- citando a "*plasticidade semiótica*" da mente humana, isto é, a capacidade da mente humana de ser modificada pelo uso de signos. O signo funciona como instrumento da atividade psíquica do mesmo modo que a ferramenta de trabalho, ou seja, é um mediador entre o indivíduo e o contexto, além de um contentor de significado, configurando-se como meio de transformação das funções psíquicas do indivíduo, e que permite a passagem dos objetos de conhecimento do plano social ao individual, do intersubjetivo ao intrassubjetivo, do interpsicológico ao intrapsicológico.
Mundo C**ontemporâneo (1950-dias atuais)**	
Eco (1932-2016)	Descreve a semiótica não como uma disciplina específica ou uma ciência "dura", mas um campo interdisciplinar, um campo de estudos no qual é possível fazer convergir diferentes enfoques disciplinares como a linguística, as ciências cognitivas, a filosofia, em uma interrelação entre todos os signos. Eco combina a tradição linguística de Saussure (perspectiva estruturalista) com a filosófica de Peirce (perspectiva semiótico-interpretativa e distingue a *semiótica geral* (natureza filosófica) que busca as condições gerais de significação, das *semióticas aplicadas* que procuram identificar as regras internas de diferentes sistemas de signos.

[12] A noção de signo de Vygotsky será enfatizada no capítulo referente à Teoria da Objetivação.

	A *semiótica da comunicação* estuda todos os processos culturais como processos de comunicação e a *semiótica da significação* estudam os sistemas de significação, em que o signo assume uma natureza de inferência, em que o processo inferencial regula nossas atividades cognitivas e interpretativas.

Fonte: Adaptado D'Amore, Pinilla, Iori (2015, p.29- 97)

Diferentes definições de signo foram elaboradas em distintos contextos históricos. Concordamos "com D'Amore, Pinilla, Iori (2015) quando afirmam que "os signos possuem um papel que é múltiplo". Nessa tese, consideramos signo como o sinal indicativo de algo[13]; indício, símbolo, vestígio.

A seguir indicamos as relações que permitem utilizar a noção de Semiótica enquanto perspectiva para investigações no ensino e aprendizagem de Matemática.

1.1 Matemática e Semiótica: uma relação indissociável

A Semiótica possibilita abordar os processos de significação nos quais se lançam os estudantes quando procuram compreender as formas de raciocínio matemático histórico e culturalmente constituído.

Segundo Radford (2015), a Semiótica permite compreender que tais processos não são realizados simplesmente por meio do simbolismo matemático, além de podermos apreciar o fato de que nesses processos intervêm outros tipos de signos, como os gestos, as palavras, a entonação, o ritmo e outros signos corporais.

Do ponto de vista da Semiótica Cultural[14]

> (...) a matemática aparece como reflexão e ação específica sobre o mundo, realizada em e através dos signos mundanos, corporais e científicos (gráficos, diagramas, fórmulas, etc.) criando assim complexas redes de significados que se renovam no terreno da vida prática e concreta. (RADFORD, 2015, p.16)

[13] https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/ acesso em 22/05/2022

[14] A Semiótica da Cultura (SC) é um referencial teórico desenvolvido por um grupo de pesquisadores da antiga União Soviética, chamado Escola de Tártu - Moscou/ETM. Essa corrente abrange um legado de discussões, que se dobra sobre aspectos sociais, filosóficos, tecnológicos que, de alguma forma, têm influência sobre a produção sígnica de determinada cultura e dão conta dos processos de significação e de comunicação de um grupo social. (VELHO, 2009, p.249)

A Semiótica como disciplina é considerada jovem[15] (...) irrompeu com grande força na Didática da Matemática justamente devido aos problemas específicos, provocadores e urgentes, que o ensino-aprendizagem da matemática levantou e continua levantando nas escolas do mundo inteiro (D'AMORE, 2015, p. 27).

A revolução semiótica se manifestou com a emergência e a rápida predominância das equações em álgebra, das fórmulas em física e das representações gráficas permitindo explorar as novas curvas como as curvas mecânicas. O *folium*[16] de Descartes, das escritas simbólicas na análise, em resumo com aquilo que começamos a denominar "a linguagem matemática", aquela que permite estudar a natureza.

A diversidade dos signos na Matemática e sua função no funcionamento da atividade científica e comunicação, segundo Duval (2011, 2015) ocorre no final do século XIX, com 3 (três) modelos de análise distintos propostos sucessivamente por Peirce, Saussure e Frege. A diferenciação entre esses modelos para análise dos signos e sua utilização consiste no domínio conceitual de cada pesquisador.

Peirce fundamenta a Teoria Geral dos Signos a partir da lógica e ciências em geral e classifica as representações em semióticas e não semióticas relacionando-as a partir da experiência concreta. Saussure considera a linguística em relação ao signo : um signo não é o tal , a não ser através de suas relações de oposição ou de ligação com outros signos, relações essas que demonstram o poder da expressão . Para Frege[17] a Matemática parte do exemplo das linguagens simbólicas e formais e explica como os processos semióticos são produtores de novos conhecimentos em Matemática.

Duval (2001) contrapõe as idéias de Peirce, Saussure e Frege questionando qual deles é mais apropriado para a análise das produções dos alunos na aprendizagem de Matemática.

A análise de Saussure substitui o sistema semiótico que constitui uma língua, pelo signo eliminando a diversidade de enunciados que a língua permite assim como as operações discursivas que essa produção requer.

---

[15]O sentido de caráter de ciência foi reconhecido e afirmado pela comunidade científica apenas a partir do século XIX. (D 'AMORE, 2015, p.27

[16]O folium (folha, em latim) de Descartes é uma curva originada a partir de uma equação de 3º grau $x^3 + y^3 - 3axy = o$.A curva faz um laço no primeiro quadrante com um ponto duplo na origem e assíntota $x + y + a = 0$,sendo a curva simétrica para $y = x$.

[17] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (Wismar, 8 de novembro de 1848 — BadKleinen, 26 de julho de 1925) foi um matemático, lógico e filósofo alemão.
Trabalhando na fronteira entre a filosofia e a matemática, Frege foi o principal criador da lógica matemática moderna.https://sites.google.com/site/filosofiapopular/filosofos/frege Acesso em 10/08/2019.

A classificação triádica de Peirce, segundo Duval, se limita a propriedade comum às representações e aos signos “se colocar no lugar de...” e ignora a propriedade específica do signo (sua relação com o objeto é uma relação de referência e não de efeito e causa).

Frege diferencia-se de Peirce e Saussure ao propor uma ideografia conceitual, e ao invés de uma definição de signos, ele introduz a distinção entre sentido (*Sinn*) de uma expressão e referência (*Bedeutung*) dessa expressão. *Sinn* e *Bedeutung* seriam as duas faces da significação de uma expressão e a diferença entre significante e significado.

Desse modo, duas expressões podem ter dois sentidos diferentes, mas representam o mesmo objeto- por exemplo, o número 12 – ser indicado por: 3+9; $\sqrt{144}$; 3x4; etc. Frege considerou as escritas simbólicas utilizadas em álgebra e análise como modelo para as representações matemáticas, sem considerar outras representações.

Duval (2011) questiona: “Esses modelos são generalizáveis”? “Podem ser utilizados para analisar a riqueza e a variedade das representações e das transformações de representações que constituem a atividade matemática”? .

O autor assevera que nas considerações de Peirce, Saussure e Frege há contribuições a respeito da análise dos signos e representações no conhecimento geral, porém são insuficientes na análise do processo ensino e aprendizagem de Matemática

1.2 As representações no ensino de Matemática

Uma representação caracteriza-se pela relação entre um signo e um objeto. Segundo Eco (1975) “a semiótica se ocupa com qualquer coisa que possa ser *considerada* um signo. Signo é qualquer coisa que possa ser substituto de algo”. (*apud* D’AMORE, PINILLA, IORI, 2015, p.92) grifo autor

> (...) “estar no lugar de” não quer dizer que o signo substitui completamente o objeto ao qual ele se refere. Pelo contrário, o signo nunca pode estar, de fato, no lugar do objeto, seja este presente ou ausente. Nem a palavra pato, nem a imagem dele podem substituir um pato real. O pato real pode nadar e voar, a palavra não. Na definição do signo acima “estar por ou para” significa representar. (NÖTH, SANTAELLA, 2017, p.9)

Representações podem ser estabelecidas socialmente (no caso da Matemática por um gráfico cartesiano ou uma equação) ou constituir-se de forma singular, idiossincrática em que o sujeito dota de significados próprios uma determinada situação problema.

O NCTM[18] sublinha a importância das representações particulares como meio de aprendizagem para as representações convencionais[19].

> (...) representações idiossincráticas construídas pelos alunos, à medida que resolvem problemas e investigam ideias matemáticas, podem desempenhar um papel bastante importante ajudando os alunos na compreensão e na resolução de problemas, e proporcionando formas significativas para registrar um método de resolução e para descrevê-lo a outros. Ao observar as suas representações, os professores poderão conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos. Sempre que adequado, poderão ainda estabelecer ligações entre as representações pessoais dos alunos e representações mais convencionais (NCTM, 2000, p. 76).

Segundo D'Amore (2015, p.119) é necessário saber utilizar várias representações semióticas, pois cada representação semiótica evidencia um conceito distinto do objeto matemático[20]. Por exemplo, a representação de uma reta *r* (objeto matemático) no registro de representação algébrica, pode apresentar as seguintes formas em que se evidenciam os coeficientes, se a reta é crescente ou decrescente e uma função linear:

$x + 2y - 2 = 0$ $\qquad\qquad$ $y = \frac{-x+2}{2}$ $\qquad\qquad$ $f(x) = \frac{-1}{2}\ x + 1.$

Outras representações semióticas da reta *r* comumente utilizadas são as representações no registro gráfico (no plano cartesiano- Figura 02 e tabular- Figura 03.

Figura 02: Representação Gráfica da reta r

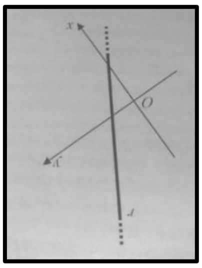


Figura 03: Representação Tabular reta r

x	y
0	1
2	0

Fonte: Excerto D'Amore, 2015, p. 118

[18] *National Council of Teachers of Mathematics*

[19] Entendemos por representação convencional as fórmulas, algoritmos, gráficos. Nessa tese, optamos por identificar essas representações como regulares.

[20] O acesso aos objetos matemáticos (independente de qual objeto matemático- geométrico, aritmético, algébrico) só pode ocorrer a partir de diferentes registros de representações semióticas, já que os mesmos são abstratos, não concretos, não reais. (D'AMORE, 2015)

No registro descritivo escrito, a reta *r*- Figura 02 e Figura 03-, apresenta-se como lugar geométrico ao ser representado na frase: o conjunto dos pontos do plano cartesiano cujas ordenadas são obtidas fazendo um menos a metade das correspondentes abscissas.

A multiplicidade de representações semióticas de um objeto matemático em diferentes registros, de acordo com D'Amore (2006) enriquecem o significado, o conhecimento, a compreensão do objeto, mas também sua complexidade.

Considerando essa complexidade, o psicólogo cognitivista Raymond Duval em meados dos anos 1990, assegurou um questionamento de ordem epistemológica que desde então tem sido discutido em pesquisas da Educação Matemática.

Como não confundir objeto matemático com suas representações?

> (…) Por um lado, o aprendizado de objetos matemáticos só pode ser um aprendizado conceitual e, por outro, é somente através de representações semióticas que uma atividade sobre objetos matemáticos é possível. Este paradoxo pode constituir um verdadeiro ciclo vicioso de aprendizagem.[21] (DUVAL *apud* D'AMORE *et al* 2015, p.180)

Esse paradoxo cognitivo é reforçado por Duval como uma exigência epistemológica fundamental que é de jamais confundir o objeto com sua representação e passa a ser mais forte, se a atividade matemática é identificada com a atividade conceitual e se as representações semióticas são consideradas secundárias ou extrínsecas. (DUVAL *apud* D'AMORE *et a*l 2015, p.180)

Duval reforça o paradoxo cognitivo ao questionar, como os sujeitos em fase de aprendizagem não iriam confundir o objeto matemático com suas representações, se é somente através delas que se pode ter acesso direto aos mesmos. Em contrapartida, indaga como o aluno pode adquirir o domínio na utilização das representações semióticas, se não possuem o domínio conceitual dos objetos matemáticos.

Os registros produzem representações não somente do ponto de vista matemático, mas também cognitivo DUVAL (2011). D'Amore *et al* (2015) ressalta os antecedentes históricos e filosóficos desse paradoxo, inferindo que esse tema não é recente e remonta aos filósofos antigos.

---

[21] *(…) por un lado, el aprendizaje de los objetos matemáticos solo puede ser una aprendizaje conceptual y, por el otro, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta parado já puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje.*

As representações de modo geral são inerentes à Matemática e em uma aula de Matemática. Ressaltamos que as representações regulares e idiossincráticas nesse trabalho foram fundamentais para a análise sob as lentes da TO e da TRRS.

1.3 As especificidades dos objetos matemáticos

O que é um teorema? Como indicar o que é uma função exponencial? O que é um quadrado circunscrito em uma circunferência?

Questionamentos desse tipo indicam a diferenciação de outras áreas do conhecimento em comparação a Matemática. A Matemática apresenta uma situação epistemológica diferente de outras Áreas do Conhecimento (como a Biologia e a Química, por exemplo, em que uma célula pode ser observada em um microscópio ou na combinação de substâncias verifica-se reações químicas).

Os objetos de conhecimento (objetos matemáticos) são abstratos, imperceptíveis fisicamente.

> Não importam qual a idade de nossos estudantes, eles, necessariamente, enquanto aprendizes humanos tenderão a confundir o objeto matemático (abstrato, não concreto, não real) com a representação semiótica que lhe estamos propondo. (...) existe um objeto de Saber abstrato que conhecemos e o estamos representando de múltiplos modos (D'AMORE, 2015, p.170).

Ao tratar das questões ontológicas pertinentes aos objetos matemáticos, diferentes autores D'AMORE (2015); DUVAL (2009); GODINO (2007); RADFORD (2008) explicitam a importância do componente semiótico no ensino e aprendizagem de matemática, independentemente do tipo de enfoque analítico (semiótico -cognitivo semiótico- cultural, ontosemiótico).

Para D'Amore (2006) os objetos matemáticos se constituem a partir da *práxis* humana, sendo apresentado, em certo sentido, como único, mas em outro sentido, como múltiplo. Então, qual é a natureza do objeto matemático?

> "Você pode sobreviver bem fazendo matemática sem adotar uma ontologia explícita, ou seja, uma teoria que lida com a natureza de objetos matemáticos. (...) A situação é profundamente diferente quando vamos falar de conhecimento matemático. (...) Questões teóricas sobre o conteúdo do conhecimento e a maneira pela qual um conteúdo é transmitido, adquirido ou construído nos levou ao ponto em que não podemos mais evitar considerar seriamente a ontologia. (D'AMORE, 2006, p. 559-560)

Segundo Godino; Batanero; Font (2007) objeto matemático é qualquer entidade ou coisa a qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária. O enfoque ontosemiótico de Godino (2002) estabelece uma caracterização dos significados quanto aos objetos matemáticos, sejam pessoais sejam institucionais.

A identificação de diferentes tipos de objetos matemáticos em: pessoal/ institucional, ostensivo / não – ostensivo, extensivo / intensivo, elementar / sistêmico, expressão / conteúdo, que emergem da atividade matemática também é estabelecida, considerando atributos contextuais bem como características com relação à própria natureza dos objetos (se são elementos lingüísticos, se são algoritmos, se são situações-problema, por exemplo).

Além dos aspectos configurados como dualidade, D'Amore apresenta tipos de objetos matemáticos considerando aspectos e características sintetizados no Quadro 02:

Quadro 02: Tipos de objetos matemáticos

Quanto à	Características
Linguagem	Termos, expressões, notações nos registros escritos, oral, gestos.
Situações	Problemas, aplicações extra matemáticas, exercícios.
Ações	Operações, algoritmos, procedimentos de cálculo.
Conceitos	Introduzidos por definições ou descrições- linha, ponto, número, função.
Propriedades	Declarações sobre conceitos.
Argumentos	Utilizados para validar ou explicitar declarações por dedução dentre outras formas.

Fonte: Adaptado D'Amore, 2006.

Segundo Iori (2015) a noção de objeto matemático é muito debatida, não inteiramente compartilhada, sobretudo porque varia de acordo com o ponto de vista adotado em matemática, filosofia, história e epistemologia da matemática, bem como na Educação Matemática.

1.4 Uma pequena digressão: obras de Arte e os objetos matemáticos

Raymond Duval no livro Ver e ensinar a Matemática de outra forma (2011) apresenta a obra de Joseph Kosuth (1945-) artista conceitual americano onde instiga o espectador a observar se há uma ou três cadeiras: um objeto real, uma representação visual e outra escrita.

A sequência dos elementos justapostos que compõem a Figura 04 e suas descrições deles: a cadeira contra a parede é o próprio objeto ao qual temos acesso independente de suas representações; a fotografia é uma imagem produzida por uma máquina fotográfica e a definição do que é uma cadeira é a descrição verbal presente em um dicionário.

Figura 04: Obra "Uma e três cadeiras", de Joseph Kosuth (1965)

Fonte: Disponível em: <http//teoriadaarte-t2.blogspot.com.br/2013/07/da-arte-como-conceito-e-do-conceito-de.html>. Acesso em: 01 maio de 2019.

A obra seria uma analogia quanto aos objetos matemáticos. O reconhecimento do objeto (cadeira) não é confundido em nenhuma das representações, seja na fotografia ou no texto escrito. Os objetos materiais permitem acesso direto ao objeto, sendo possível realizar a justaposição de suas diversas representações.

Reforçamos a ideia de justaposição das representações apresentada com a obra de Kosuth, com dois exemplos do artista belga surrealista René Magritte (1898-1967). Ao criar uma obra, Magritte tinha a preocupação em desafiar o observador a questionar os pontos de vista marcados pela rotina.

Figura 05: Obra La trahison des images (René Magritte- 1929)

http://ideophone.org/magritte-on-words-and-images/ acesso em 01/05/2019

Suas artes demonstram, intrinsecamente, que existe sim uma relação lógica entre o objeto central e o nome a ele dado, de fato que ele nunca representa o que o objeto é na realidade[22].

Exemplificamos a ideia de que um objeto nunca faz a mesma coisa que seu nome ou sua imagem (tradução Figura 06) com um exemplo que Magritte propôs no estudo de 1928 denominado As palavras e as imagens (*lês mots et lês images*).

Magritte explora todas as possibilidades poéticas oferecidas pela associação, à substituição, a superposição, a fusão de uma palavra com o objeto que se supõe designar numa relação arbitrária que também dá origem a um novo significado[23].

Figura 06: Les mots et les images(René Magritte- 1928)

https://www.researchgate.net/figure/Les-Mots-et-les-images-By-Rene-Magritte-in-a-1929-issue-of-La-Revolution-surrealiste_fig4_306040740 Acesso em 23/07/2019

Em outra obra famosa- Figura 04- (*La trahison des images*), o artista traz a imagem de um cachimbo seguido da frase *Ceci n'est pas une pipe* (Isto não é um cachimbo), em que provoca uma aparente contradição, mas que se trata da imagem de um cachimbo e não o objeto real – cachimbo.

Nessa perspectiva, os objetos matemáticos - a reta r -do início do capítulo não devem ser confundidos com as representações semióticas dos registros algébrico, gráfico, descritivo escrito, dentre outros.

[22]http://lounge.obviousmag.org/taberna_das_artes/2013/03/surrealismo-por-rene-magritte.html#ixzz5uEGSEumF Acesso em 20/07/2019.
[23]http://www.extra- u.be/Theme08?PHPSESSID=c5fb3e73fb688aa9b7a7342828f16095

2 PENSAMENTO ALGÉBRICO

Pesquisadores nacionais e internacionais Kaput (2008); Kieran (1992, 2004, 2006); Lins (1997); Radford (2015) no início dos anos 1990 propõem-se a investigar o Pensamento Algébrico quanto a sua constituição, metodologias apropriadas e em que sentido mudanças e/ou adaptações curriculares nos diferentes níveis de ensino são necessárias.

Essas investigações corroboram o que Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) questionam de forma crítica a respeito de o Pensamento Algébrico estar reduzido à linguagem algébrica, de um simbolismo já constituído, e por vezes destituídos de significados.

A definição do que é o Pensamento Algébrico e suas possíveis caracterizações, não encontra respostas similares dentre os investigadores do tema, pois depende do que o pesquisador considera relevante para o ensino e aprendizagem da Álgebra Escolar. Porém, um aspecto que a maioria das pesquisas converge, é quanto à generalização ser a “mola-mestra” do Pensamento Algébrico, ou o coração da Matemática conforme reforça metaforicamente (MASON, 2007 *apud* MESTRE, 2014, p.20).

Inúmeros autores dentre eles Vergel (2016), Radford (2011), Ponte *et al.* (2009) investigam a generalização em situações de comunalidade entre padrões, sequencias recursivas e sequencias não recursivas; em que destacam as situações propostas para a promoção da capacidade de abstração, comunicação, raciocínio matemático, mobilização e produção de representações.

Segundo Blanton (2008) o objetivo central do Pensamento Algébrico é

> (...) conseguir que os alunos pensem sobre, descrevam e justifiquem o que acontece *em geral* numa situação matemática. Ou seja, pretende-se que os alunos desenvolvam a generalização: *uma afirmação* que descreva uma verdade geral matemática sobre um determinado conjunto de dados (grifo autor).

Dentre as pesquisas, destacamos também considerações a respeito da aritmética, situando um “diálogo” entre aritmética e Álgebra e não a primazia de uma em relação à outra, o processo de significação e a importância de estimular atividades que possibilitem o desenvolvimento do Pensamento Algébrico desde a Educação Básica.

Há autores como Kaput (2000); Blanton et. al (2018) que julgam a Aritmética como potencializadora para a Álgebra , enquanto outros como Filloy, Rojano, Puig (2008) explicitam a transição da Aritmética para a Álgebra, como uma ruptura.

2.1 Caracterizações do Pensamento Algébrico

A amplitude do conceito de Pensamento Algébrico envolve ideias de padrões, regularidades, sequências, raciocínio, equações, cálculos aritméticos, expressões, fórmulas, relação entre termos, valor desconhecido, modelos matemáticos, variações.

Carolyn Kieran desde o início da década de 1990 investiga processos de ensino e aprendizagem da Álgebra com ênfase na generalização e uso de tecnologias que desencadeiam questionamentos sobre fenômenos algébricos.

A categorização proposta por Kieran (1996) consiste em atividades geracionais[24]·, atividades transformacionais e atividades meta-nível globais. As atividades de meta- nível global abrangem as outras, sendo o cerne dessa categoria, o processo de construção de significados - fundamental para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

A pesquisadora ressalta que essas atividades podem ser realizadas sem usar a letra-simbólica, e que eles podem ser mais elaborados a qualquer momento (...) para conceituar uma abordagem não-simbólica ou pré- simbólica ao Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais.

Um dos aspectos dessas atividades é a possibilidade de ensino e aprendizagem da Álgebra escolar cujo enfoque é "experiências" com funções em situações de relações quantitativas descritas por modelos (KIERAN, 1996, p.239).

Podemos sintetizar brevemente as ideias de Kieran na afirmação quanto ao Pensamento Algébrico que o mesmo

> (...) pode ser interpretado como uma abordagem para situações quantitativas que enfatiza os aspectos relacionais gerais com ferramentas que não são necessariamente letras-símbolos, mas que pode ser usado como apoio cognitivo para introduzir e sustentar o discurso mais tradicional de Álgebra escolar. (KIERAN, 1996, p. 275)

James Kaput e Maria Blanton pioneiros nas investigações a respeito do desenvolvimento do Pensamento Algébrico apontam que a generalização é o cerne principal na constituição do Pensamento Algébrico.

---

[24]Exemplos de atividades geracionais em https://link.springer.com/article/10.1007/BF00311062

Esses autores destacam a importância de diferentes linguagens (natural, numérica, simbólica), representações, gestos e consideram a experiência do aluno, a partir de situações de ensino em que o mesmo vivenciou cenários de generalizações, e não necessariamente o aluno com mais idade e/ou séries finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

> O processo no qual os alunos generalizam as ideias matemáticas a partir de um conjunto de instâncias particulares e estabelecem essas generalizações através do discurso da argumentação e as expressa de maneiras mais formais e adequadas a sua idade.[25] (BLANTON; KAPUT, 2005, p.413)

Kaput (2008) destaca os pensamentos representacionais e simbólicos ambos referentes à generalização e essenciais no desenvolvimento do Pensamento Algébrico. A partir desses tipos de pensamento, o autor apresenta 3 (três) categorias :a Aritmética Generalizada, o Pensamento Funcional e a Modelação.

A Aritmética Generalizada (ou Pensamento Aritmético) evidencia o emergente caráter algébrico da aritmética e explora aspectos tais como: as propriedades e relações entre números, as operações numéricas – a comutatividade da adição e multiplicação, por exemplo: a relação de identidade; e a relação entre quantidades – igualdade; resolução de expressões numéricas com números desconhecidos; a ênfase no número generalizado considerando sua estrutura e não seu valor, ou seja, tratar o número algebricamente.

A relação da Aritmética para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico aponta que se faz necessário um ajuste considerável no desenvolvimento de um modo de pensar algébrico, que inclui, mas não restringe as relações (e não somente o cálculo aritmético e/ou um valor numérico); operações aritméticas e seus inversos- incluindo os aspectos relacionais-; representações; utilizações de letras sendo que as mesmas podem às vezes ser desconhecidas, variáveis ou parâmetros; expressões literais não fechadas como respostas; comparações de expressões para equivalência baseada em propriedades e o redirecionamento do significado do sinal de igual[26].

---

[25]*Process in which generalize mathematical ideas from a set of particular instances establish those generalization through the discurse of argumentation, and express them in increasingly form aland age – apppropriate ways.*

[26]A expressão 8 + 3= 11, por exemplo, pode ser considerada enquanto expressão algébrica, se o estudante perceber que o sinal de igualdade corresponde a uma equivalência entre termos.

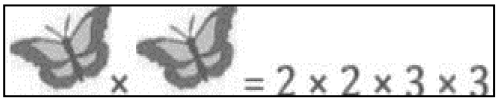
O Pensamento Funcional considera a generalização de padrões para descrever relações funcionais envolvendo a percepção de variações e covariações em que a generalização surge pela ideia de função.

Nesse sentido, o autor elenca vários aspectos que podem ser realizados pelos alunos: simbolizar quantidades e operar com expressões simbólicas; representar dados graficamente; estabelecer relações funcionais; identificar e descrever padrões em sequencias recursivas e não recursivas; prever resultados desconhecidos.

A Modelação compreende a generalização a partir de situações e/ou fenômenos não necessariamente matemáticos. O autor enfatiza que modelar uma situação não se limita a linguagem algébrica - podem ser consideradas outras representações (simbólicas, imagéticas, gestos) - e que a utilização da linguagem algébrica tem que ter significado para o aluno.

Cyrino e Oliveira (2011) investigaram caracterizações do Pensamento Algébrico no ensino básico de Portugal onde uma das características é o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada), ou seja, a exploração de propriedades e relações entre números, de identidade como uma relação entre quantidades; resolução de sentenças com números desconhecidos; tratamento algébrico do número; pensamento aditivo e multiplicativo (CYRINO; OLIVEIRA 2011, p.120). Uma das situações propostas é analisada sob o viés da aritmética generalizada, indicada por um aluno do 4º ano:

Figura 07: Situação Aritmética Generalizada



Fonte: Adaptado de Cyrino, Oliveira (2011, p.106)

> “Este 2 (aponta para o primeiro 2 da expressão 2x2x3x3) vem para esta (aponta para a primeira borboleta) e este 2 (aponta para o segundo 2 da expressão 2x2x3x3) vem para esta (aponta para a segunda borboleta). Este 3 (aponta para o primeiro 3 da expressão 2x2x3x3) vem para esta (aponta para a primeira borboleta), e este 3 (aponta para o segundo 3 da expressão 2x2x3x3) vem para esta (aponta para a segunda borboleta). (CYRINO, OLIVEIRA,2011, p.106)

Conforme descrições das características do Pensamento Algébrico, compilamos no Quadro 03 indícios quanto a essas características em forma de questionamentos que não são limitantes podendo ocorrer outros no desenvolvimento de investigações sobre o tema.

Quadro 03: Síntese das Características do Pensamento Algébrico

Características do Pensamento Algébrico	**Indícios das Características**
Padrões / Regularidades	Identifica e descreve um padrão numérico?
Generalização	Apresenta indícios de generalização?
	Utiliza linguagem sincopada?
Cálculos Aritméticos	Explora propriedades das operações com números?
	Demonstra raciocínio multiplicativo?
	Expressa raciocínio aditivo?
Variação /Covariação	Encontra uma relação funcional?
	Estabelece uma correspondência entre quantidades?
Relações entre Termos	Explora a igualdade como uma relação entre termos?
Valor desconhecido	Resolve sentenças com números desconhecidos?
Modelos Matemáticos	Justifica, representa e demonstra suas ideias?
Linguagem simbólica	Utiliza letras para representar quantidades desconhecidas?

Fonte: a autora

A característica do Pensamento Algébrico que investigamos é a **covariação**. O termo é recorrente no âmbito da Estatística[27] e nessa pesquisa assumimos a forma como a variação de uma variável se relaciona com a variação de uma segunda variável, ou seja, a covariação enquanto a correlação entre a variação simultânea de variáveis[28]

2.2 O Pensamento Algébrico nos Documentos Oficiais

[27]- Tendência à variedade simultânea, em grandeza e sinal, dos termos de duas séries cronológicas. https://www.dicio.com.br/covariacao/acesso em 02 /03/2022.
[28]Dicionário Priberam da Língua Portuguesa, https://dicionario.priberam.org/covaria%C3%A7%C3%A3o acesso em 02/03/2022.

A partir da necessidade de repensar o ensino da Álgebra Escolar e o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, indicamos o que os documentos oficiais sugerem no âmbito educacional para os profissionais envolvidos com a Educação (pedagogos e gestores) e para professores de Matemática em diferentes níveis do ensino básico.

Os documentos oficiais internacionais NCTM[29] (2008) e nacionais BNCC[30] (BRASIL, 2018), CREP[31], (PARANÁ, 2020) sugerem situações problemas inseridas no contexto do Pensamento Algébrico desde os Anos Iniciais, como forma de propiciar aos estudantes mais jovens o contato com diferentes maneiras de produzir significados, a fim de que ao ingressar nos Anos Finais do Ensino Fundamental e posterior Ensino Médio, o estudante considere situações que envolvam ideias de generalização, regularidades, simbolismos com naturalidade.

> A introdução do Pensamento Algébrico pode ser um contexto especial para examinar como as ideias e métodos da matemática elementar estão relacionados com outros que são tratados em anos mais avançados. Não se pretende, contudo, defender a ideia de que a aprendizagem matemática segue uma trajetória fixa, mas assume-se a dependência do desenvolvimento dessa aprendizagem com a estrutura curricular e as abordagens de ensino (MESTRE, 2014, p.14).

O NCTM no início dos anos 2000 propôs novos encaminhamentos para o ensino de Álgebra, a partir dos *Principles and Standards for School Mathematics*, cujo destaque para o ensino de Álgebra é o desenvolvimento de habilidades para o Pensamento Algébrico da pré-escola até o 12º ano[32].

As habilidades elencadas no documento são: compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações e estruturas matemáticas utilizando símbolos algébricos e usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; analisar a variação em diversos contextos. (NCTM, 2008, p. 39)

> A Álgebra é mais bem aprendida como um conjunto de conceitos e técnicas vinculados à representação de relações quantitativas e como um estilo de pensamento matemático para formalizar padrões, funções e generalizações. Embora muitos adultos

---

[29]*National Council of Teachers of Mathematics*
[30] Base Nacional Curricular Comum
[31] Currículo da Rede Estadual do Paraná
[32]O equivalente no Brasil ao Ensino Médio.

> pensem que a Álgebra é uma área da matemática mais adequada para alunos do ensino médio ou do ensino médio, até crianças pequenas podem ser incentivadas a usar o raciocínio algébrico ao estudar números e operações e ao investigar padrões e relações entre conjuntos de números. No Padrão de Álgebra, as conexões da Álgebra com as situações numéricas e cotidianas são estendidas nas faixas da série posterior para incluir ideias geométricas[33]. (tradução nossa)

O desenvolvimento do Pensamento Algébrico é processual, e nesse sentido consideramos que o iniciar da Álgebra simbólica nos 8º/9º anos do Ensino Fundamental Anos Finais em que os estudantes tem por volta dos 13/14 anos, pode vir a inibir a produção de significados.

Os documentos da Base Nacional Curricular Comum (BNCC) apresentam orientações quanto ao ensino de Álgebra nos Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental. Destacamos aqui algumas das considerações quanto aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Muitas dessas orientações vão ao encontro do que está postulado no NCTM e indicam que o trabalho com a Álgebra, no início da escolaridade, contribui para que estudantes desenvolvam um tipo de raciocínio específico, denominado Pensamento Algébrico.

Essa ideia diferencia-se de uma ideia de Álgebra escolar como um processo de manipulação de símbolos. Nessa perspectiva, algumas dimensões do trabalho com a Álgebra estão presentes nos processos de ensino e de aprendizagem, desde os anos iniciais, como as ideias de regularidade, de generalização e de equivalência. (BRASIL 2016, p. 278)

A unidade da Álgebra, nessa etapa dos anos iniciais, está associada à capacidade de identificar atributos e regras de formação de sequências, uma das primeiras evidências de organização do pensamento. Pode-se também reconhecer mudanças e relações, primeiros indícios da ideia de função. (BRASIL, 2016, p.252)

---

[33] *Algebra is best learned as a set of concepts and techniques tied to the representation of quantitative relations and as a style of mathematical thinking for formalizing patterns, functions, and generalizations. Although many adults think that algebra is an area of mathematics more suited to middle school or high school students, even young children can be encouraged to use algebraic reasoning as they study numbers and operations and as they investigate patterns and relations among sets of numbers. In the Algebra Standard, the connections of algebra to number and everyday situations are extended in the later grade bands to include geometric ideas (NCTM, 2000, emphasis added CARRAHER, SCHLIEMANN, 2018, p.*2).

A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – Pensamento Algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.

Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados.

As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência, proporcionalidade, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade.

> No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1, então 2 + 3 = 4 + 1. (BRASIL, 2018, p. 270)

No Paraná [34] o Currículo da Rede Estadual do Paraná (CREP) corrobora as propostas presentes na BNCC, e desde o 1º ano do Ensino Fundamental até os Anos finais indica na Unidade Temática (Números e Álgebra) nos Objetos de Conhecimento e respectivos Objetivos de Aprendizagem: o ensino de regularidades e padrões em sequencias recursivas e numéricas, regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural, problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos seja desconhecido, propriedades da igualdade, valores desconhecidos na resolução de problema que

[34] Estado onde foi desenvolvida essa tese.

envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas. (adaptado PARANÁ[35], 2020 p.3 -130)

As indicações presentes nos documentos oficiais denotam a importância do Pensamento Algébrico desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental e convergem para as características que apresentamos enquanto possibilidades de desenvolvimento do mesmo.

2.3 *Early Algebra*: o início das discussões

Até aproximadamente a 12º ICMI[36] em 2001, realizada na Austrália as pesquisas relacionadas à *Early Algebra* tendiam a investigações quanto aos conteúdos contemplados nessa fase, que de acordo com Kieran (2004) envolvia a utilização de letras simbólicas como ferramenta para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Nos anos posteriores o campo de estudo da *Early Algebra* foi sendo delineado até o momento presente, a partir de diferentes investigações de educadores matemáticos sugere-se alternativas de conceituar a área de Álgebra Escolar - por exemplo-, Kaput (1998).

Parte considerável deste trabalho emana do *Early Algebra Research Group* apoiado pelo Departamento de Educação dos EUA no início e meados dos anos 90 (Kaput *et al*.,2008), bem como as iniciativas do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM , 2000).

Na Conferência da Agenda de Pesquisa de 1987 sobre Álgebra (Wagner e Kieran 1989) uma das áreas consideradas extremamente carentes de atenção das pesquisas foi quanto ao Pensamento Algébrico.

Ao mesmo tempo em que o movimento da *Early Algebra* estava começando nos EUA, desenvolvimentos paralelos estavam ocorrendo, por exemplo, em experimentos nas escolas primárias da Rússia e no ensino primário chinês.

Reflexões sobre o interesse internacional mais amplo nesse campo emergente foram também indicadas por trabalhos apresentados nas conferências da Sociedade de Pesquisa em Educação Matemática e de Psicologia da Educação Matemática (PME).

---

[35] http://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2020-02/crep_matematica acesso em 04/04/2020.
[36] *International Commission for Mathematical Instruction*

Das investigações ocorridas nestes eventos, surge uma das caracterizações do Pensamento Algébrico inicial cuja ênfase é a expressão da generalidade. Em contraste com o ensino tradicional de Álgebra por volta dos 12/13 anos, a proposta da *Early Algebra* concentra-se em crianças de 6 a 12 anos.

Uma das justificativas dos pesquisadores Kieran (1992); Rojano e Sutherland, (2001); Wagner e Kieran (1989) foram que estudantes de 12 a 15 anos apontaram algumas das dificuldades na "transição" da aritmética para o raciocínio algébrico, ou seja, quando os alunos experimentam Álgebra pela primeira vez nos anos finais do *Elementary School* e *High School*[37].

Decorrente dos apontamentos, os pesquisadores forneceram estímulos para explorar se certos tipos de situações, com foco no que passa a ser genericamente referido como Pensamento Algébrico , pode ser acessível a estudantes mais jovens e, assim, ajudar a fazer a eventual transição para o estudo mais formal de Álgebra.

Outro aspecto é o questionamento a respeito do ensino de Aritmética ser anterior ao ensino da Álgebra, ressaltando que o objetivo não é ensinar a Álgebra primeiro, mas sim reconhecer o caráter algébrico da aritmética. Além da faixa etária mais jovem, nesse corpo de trabalho há uma mudança sutil na ênfase da caracterização tradicional da Álgebra - centrada no conteúdo- para a promoção dos processos e representações do raciocínio matemático.

Em particular, os principais temas ao longo dos anos - desde o início dos anos 2000 -, incluem: (i) generalização relacionada à atividade de padronização, (ii) generalização relacionada a propriedades de operações e estrutura numérica, (iii) representar relações entre quantidades e (iv) introduzir notações alfanuméricas gradualmente.

Uma crítica de Kieran *et al* (2016,p.3) é que apesar de propostas de atividades do tipo de descoberta de padrões serem constantes nos currículos de Matemática dos anos iniciais, é que segundo Blanton e Kaput (2004) deveriam estender as situações para atividades que contemplassem também o pensamento funcional.

Esses autores apresentaram estudos realizados no jardim de infância até a 5ª série e descobriram que estudantes tão jovens quanto os do jardim de infância poderiam se envolver em pensamento covariacional e alunos da 1ª série poderiam descrever como as

[37] Equivalentes ao Ensino Fundamental e Ensino Médio no Brasil.

quantidades são correspondentes. Esta pesquisa foi precursora e influenciou nos anos seguintes, estudos iniciais de Álgebra envolvendo números, operações e propriedades.

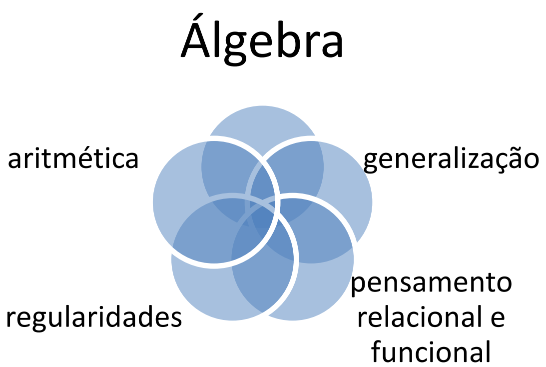
Kieran *et al* (2016, p.5) também ressalta outras pesquisas[38]envolvendo generalização sobre relações numéricas. Fujii (2003) investigou junto a jovens estudantes japoneses, o Pensamento Algébrico através de expressões numéricas generalizáveis, usando números como quase variáveis, por exemplo, com frases numéricas como 78 - 49 + 49 = 78, que são verdadeiras, independentemente do número que for retirado e, em seguida, adicionado de volta .

Segundo Fujii (*apud* Kieran *et al*, 2016, p.6) essas expressões permitem que os professores construam uma ponte de problemas aritméticos existentes a oportunidades de pensar algebricamente, sem ter que confiar no conhecimento prévio de formas simbólicas literais.

Carraher *et al*. (2007) indicam que a *Early Algebra* não significa simplesmente o ensino da Álgebra mais cedo, é antes uma nova abordagem que envolve uma mudança conceptual. Isso não significa que conceitos e técnicas aritméticas sejam manifestamente algébricos, mas que são potencialmente algébricas, e tampouco que a aritmética deva ser preterida, ou que devam ser ensinados conteúdos de séries subseqüentes.

A ideia é que a partir dos conteúdos dos Anos Iniciais ocorra a integração e destaque dos aspectos algébricos, indicados na Figura 08. Segundo Mestre (2014, p.11) (...) “esta perspectiva impele-nos a considerar que os tópicos ou conceitos isolados da aritmética podem fazer parte de ideias e conceitos mais gerais e abstratos”.

Figura 08: Aritmética como parte da Álgebra



Adaptado de Mestre (2014, p.11)

[38]https://www.springer.com/series/14352acesso em 18/04/2020Kieran C., Pang J., Schifter D., Ng S.F. (2016) *Survey of the State of the Art. In: Early Algebra*. ICME-13 Topical Surveys. Springer, Cham

Lins e Gimenez (1997) apontam que o entendimento de como a Álgebra e Aritmética se conecta é fundamental no contexto educacional dos anos iniciais, ou seja, "buscar a coexistência da educação algébrica com aritmética, de modo que uma esteja implicada no desenvolvimento da outra" (p. 159).

Carraher e Schliemann (2015) caracterizam o Pensamento Algébrico inicial em termos de formas básicas de raciocínio que expressam relações entre número ou quantidades, em particular relações funcionais.

Nestes estudos e em outros, considera-se que as relações matemáticas, os padrões e as estruturas aritméticas estão no centro do Pensamento Algébrico inicial. Apresenta considerações sobre a *Early Algebra* questionando sobre as características do Pensamento Algébrico inicial,

> Quais são as principais características específicas do pensamento algébrico inicial? Se procurarmos respostas na história da matemática, podemos notar, como muitos outros (por exemplo, Parshall, 2008), que a Álgebra surgiu de tentativas de resolver problemas particulares com respostas específicas: o cálculo da parte do pão de cada pessoa, a área de um edifício, o comprimento de um segmento. Nessas empreitadas, a Álgebra se oferece como uma ferramenta para resolver incógnitas ou, como os alunos às vezes expressam, "encontrar o x"[39]. (CARRAHER, SCHLIEMANN, 2018, p.3)

Os autores ressaltam que a *Early Algebra* não deve ser considerada uma ponte entre a aprendizagem da aritmética antes da Álgebra, pois consideram a aritmética como sendo inerente ao Pensamento Algébrico, tampouco o ensino de equações para alunos da Educação Infantil.

2.4 LEAP[40]– Learning Through an Early Algebra Progression

A proposta do programa LEAP em promover o desenvolvimento do Pensamento Algébrico em crianças a partir da Educação Infantil até o 5º ano do Ensino Fundamental tem o intuito de possibilitar uma aprendizagem de Álgebra de maneira mais natural nos anos finais do Ensino Fundamental e Médio.

---

[39]*What are specific key features of early algebraic thinking? If we look for answers in the history of mathematics, we may note, as many others have (e.g. Parshall, 2008), that algebra arose out of attempts to solve particular problems having specific answers: the computation of each person's share of bread, the area of a building, the length of a segment. In such endeavors, algebra offers itself as a tool for solving for unknowns or, as students sometimes express it, "finding the x*".

[40] Aprendendo através de uma progressão precoce de Álgebra - projeto longitudinal desenvolvido em Massachusetts /EUA, cuja principal pesquisadora é Maria Blanton.

A proposta do LEAP segundo Blanton (2020) foi projetada para ser:

- ✓ Coerente: utiliza uma estrutura abrangente para o Pensamento Algébrico orientando o design do currículo.
- ✓ Conectada: reflete uma progressão curricular de ideias cada vez mais sofisticadas de uma série para outra.
- ✓ Acessível: incorpora princípios de projetos que apóiam alunos com dificuldades de aprendizagem.
- ✓ Transformativa: possibilita a adequação da aprendizagem de Álgebra na transição dos estudantes para o ensino médio.

Blanton[41] (2020) (em 8: 41) em um vídeo institucional disponibilizado no QR CODE abaixo, reforça que a *Early Algebra* não significa Álgebra *Early*, ou seja, não se propõe uma antecipação da Álgebra- são motivos diferentes -, sendo que a proposta da *Early Algebra* é o desenvolvimento de características do Pensamento Algébrico**.**

Outro aspecto relevante que Blanton destaca refere-se a *Keys Practices*, uma espécie de *framework* da *Early Algebra*: generalização, representações com justificação, raciocínio com estrutura e relações matemáticas.

Desse modo, o movimento da *Early Algebra* requer dos professores (BLANTON e KAPUT, 2008) um olhar diferenciado no que tange aos aspectos do Pensamento Algébrico: a generalização, o pensamento relacional e funcional em suas diversas caracterizações. Questionar os estudantes sobre como indicaram tal solução e/ou se a mesma funcionaria em outros casos; pode auxiliar nas propostas sugeridas no contexto da *Early Algebra*.

Nessa pesquisa[42] reitera-se que o Pensamento Algébrico é uma maneira de pensar, refletir a respeito de diferentes situações matemáticas, de modo que as características como-regularidades, generalização, cálculos aritméticos, variação e covariação, valor

---

[41]QR CODE entrevista Maria Blanton acesso em 08/04/2020.

[42] No Anexo 01 apresentamos exemplos de situações propostas no contexto da *Early Algebra*.

desconhecido, modelos matemáticos e linguagem simbólica-, possam ser contempladas e dotadas de significado pelo/ para o estudante, desde os Anos Iniciais.

3 TEORIAS COM ABORDAGENS SEMIÓTICAS: A TRRS e a TO

Nesse capítulo apresentamos as concepções teóricas da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e da Teoria da Objetivação com destaque para a concepção semiótica adotada de cada teoria, além das concepções ontológicas e epistemológicas de cada uma.

Antes, porém, uma observação importante quanto ao termo **atividade**[43] que consta em inúmeras etapas dessa pesquisa. Esclarecemos que o sentido atribuído na TRRS é para designar as ações de formação, tratamento e conversão – **atividades cognitivas**-, enquanto que na TO se refere a conceitos do materialismo dialético e da Teoria da Atividade proposta por Leontiev.

3.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A partir do desenvolvimento de suas pesquisas no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo na França (1970-1995) Raymond Duval apresenta a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) cujo enfoque são os Registros de Representações Semióticas e as **atividades cognitivas** decorrentes dos diferentes tipos de Registros dos objetos matemáticos.

Considerar o vínculo entre a atividade cognitiva (segundo a qual se “faz matemática”) e a transformação de representações semióticas (que ao mesmo tempo permite o “acesso” aos objetos matemáticos e a realização de tratamentos) permitiu a Duval propor em meados dos anos 1990, o paradoxo cognitivo de que ‘(...) não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação. É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas, etc., com suas representações. (DUVAL, 2009, p.14).

As representações semióticas, ou seja, as produções constituídas pelo emprego de regras de sinais (enunciado em língua natural, fórmula algébrica, gráfico, figura geométrica) parecem apenas ser o meio de que o indivíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais e contemplariam apenas as funções de comunicação.

Na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, os conceitos de *noésis* e *semiósis* são fundamentais na compreensão do processo de aprendizagem.

[43] Grifo autora.

> Se chamarmos de *semiósis* a apreensão ou produção de uma representação semiótica e *noésis* os atos cognitivos como a compreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência pareceria então evidente admitir que a *noésis* seja independente da *semiósis*. (DUVAL, 2009, p.15) grifo do autor

O papel da semiose no funcionamento do pensamento não é o emprego de um ou outro tipo de signo e sim a variedade de signos que podem ser usados e a *noésis* seria a apreensão dos conceitos.

Sendo atribuída a necessidade das representações semióticas para certas funções cognitivas fundamentais e a implicação recíproca das representações mentais e das representações semióticas, parece legítimo avançar a hipótese contrária: Não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*. (DUVAL, 2009, p.17)

Na obra *Semiósis* e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais, o autor traz a lei fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento: Não há *noésis* sem *semiósis*, quer dizer não há *noésis* sem o recurso a uma pluralidade ao menos potencial de sistemas semióticos, recurso que implica sua coordenação para o próprio sujeito. (DUVAL, 2009, p.18)

> A passagem de um sistema de representação a outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e espontâneo para a maior parte dos alunos (...). (DUVAL, 2009, p. 18)

Os registros de representação (aritmético, algébrico, gráfico) são sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo criadores de representações sempre novas. Segundo Duval, (2011, p.70) "é um sistema semiótico particular que não funciona nem como código ,nem como sistema formal. Ele se caracteriza , essencialmente, pelas operações cognitivas específicas que permite efetuar".

Esse aspecto segundo os pressupostos da TRRS é fundamental para o ensino e aprendizagem de Matemática, pois justifica porque em certas situações de ensino de Função Polinomial do 1◦ Grau , o estudante pode apresentar mais "facilidade' ao mobilizar representações no registro gráfico do que o algébrico.

3.1.1 Tipos de representações e suas funções

Para que ocorra a aprendizagem dos objetos conceituais (*noésis*) são necessárias representações semióticas, ou seja, sem *semiósis* não há *noésis*. Duval utiliza um recorte temporal de três (3) momentos para indicar diferenças a respeito da **noção de representação.**

Entre os anos de 1924-1926, o termo surge como **representação mental** para evocar um objeto ausente e ocorre quando o sujeito objetiva algo, ou seja, produz significados próprios a partir do que lhe é proposto.

Por volta de 1955-1960 há indicação do termo **representação computacional** (privilegiando o tratamento e a codificação da informação) por um sistema de informações recebidas de forma a produzir uma resposta adaptada, ocorre de maneira quase intuitiva, sem considerar normas ou formatações, ou seja, são espontâneas..

A partir de 1960, aparece como **representação semiótica** privilegiando as conversões e significações diferentes. Além disso, formam sistemas de registros, a partir do uso de signos utilizados no ensino e aprendizagem de Matemática.

No Quadro 04, os tipos de representações e suas características estão elencados. Concordamos com Brandt e Moretti (2016) de que as representações mentais, as representações computacionais e as representações semióticas não são espécies diferentes de representações, uma vez que estão imbricadas, ainda que realizando trabalhos diferentes.

Quadro 04: Tipos de representações e características

Tipos de Representações	Características
Mentais	Apresentam um caráter intencional e, portanto são **conscientes** e **internas**.
Computacionais	Acontecem de maneira automática. São **inconscientes** e **internas**.
Semióticas	São **conscientes** e **externas** e cumprem também a função de objetivação[44] associadas às expressões e intencionalidade.

Fonte: Adaptado Duval (2004)

[44]Para Duval a função de objetivação da representação deve ser, em definitivo, analisada para se compreender seu papel no funcionamento cognitivo do pensamento (Duval, 2009, p. 82), diferente da proposta por Luis Radford na Teoria da Objetivação que será abordada no item 3.2.

De outra maneira, podemos dizer que as representações podem ser convertidas em representações similares ou equivalentes em outro sistema semiótico, podendo ter significados diferentes para as pessoas que o utilizam.

Duval (2009) alerta para a importância das representações semióticas na atividade cognitiva e sinaliza que as funções desempenhadas pelas representações semióticas vão além da comunicação, ou de simples suporte para as representações mentais.

Brandt e Moretti (2006) afirmam que as representações semióticas

> “(...) não são apenas exteriorização das representações mentais necessárias para se estabelecer uma comunicação uma vez que o indivíduo que aprende necessita delas também para elaborar o conhecimento. Portanto, elas desempenham funções de cognição: tratamento, conversão e representação”. (BRANDT, MORETTI, 2016, p.93)

Os Registros de Representações Semióticas permitem os graus de liberdade que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para comunicá-las a um interlocutor. (DUVAL, 2009, p37).

Em Matemática, temos os registros de representação tais como o: registro algébrico, registro gráfico, registro aritmético - dentre outros -, nos quais se fundamenta o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Os tipos de registros, de acordo com a TRRS, podem ser classificados segundo sua natureza – discursiva ou não -discursiva - e forma - monofuncional ou multifuncional.

Quadro 05: Classificação dos Registros Semióticos segundo a TRRS

<table>
<tr><th></th><th>Registros Discursivos</th><th>Registros
Não Discursivos</th></tr>
<tr><td>Registros
Multifuncionais</td><td rowspan="2">Produções escritas e orais</td><td rowspan="2">Configurações geométricas</td></tr>
<tr><td>Os tratamentos são não algoritmizáveis</td></tr>
<tr><td>Registros
Monofuncionais</td><td rowspan="2">Sistemas de numeração, escrita algébrica, línguas formais</td><td rowspan="2">Gráficos Cartesianos, interpolação
Esquemas</td></tr>
<tr><td>As transformações de expressões são algoritmizáveis</td></tr>
</table>

Adaptado Duval (2011, p.118)

Um registro é um produtor de representações, uma ferramenta que possibilita do ponto de vista cognitivo (...) a análise de todas as representações semióticas para poder nelas reconhecer as unidades de sentido que a elas são matematicamente pertinentes. (DUVAL, 2011, p.150)

O registro de uma representação pode ser considerado semiótico quando permitir as atividades cognitivas fundamentais de representação ligadas à *semiósis* ao possibilitar ações específicas de identificação, transformações em um mesmo sistema semiótico e mobilização de novas representações em diferentes registros do mesmo objeto matemático.

> "A primeira das ações é a constituição de um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado; a segunda a transformação das representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma representação de conhecimento em comparação às representações iniciais e a última a conversão das representações produzidas, em um sistema, em representações em outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado" (DUVAL, 2009, p. 36-37)

As atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão são o cerne do sucesso ou fracasso do ensino e aprendizagem da Matemática. (DUVAL, 2004, 2009, 2011).

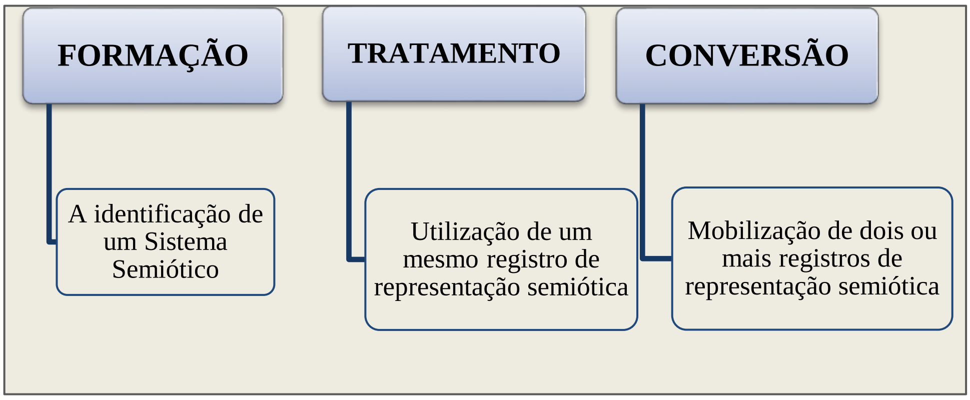
3.1.2 Atividades Cognitivas relacionadas à *Semiósis* e os Registros de Representações Semióticas

Segundo Duval (2009, p.53) as três (3) atividades cognitivas destacadas anteriormente são necessárias à *semiósis*, ou seja, a produção de representações. Cada uma dessas atividades apresenta regras de funcionamento próprias:

- ✓ A **formação de representações e conformidade às regras de um sistema semiótico;**
- ✓ **O tratamento de representações semióticas e expansão informal e**
- ✓ **A conversão de representações e mudança de registro e a coordenação.**

As atividades cognitivas serão detalhadas a seguir, enquanto no Quadro 06 temos uma síntese do que caracteriza cada uma:

Quadro 06: Atividades Cognitivas proposta pela TRRS



Fonte: Adaptado Duval, 2011

A **formação** é a atividade cognitiva em que a compreensão dos signos que compõem a representação semiótica, possibilita a identificação, a partir de um sistema de representação estabelecido socialmente, como a enunciação de uma frase, a composição de um texto, o desenho de uma figura geométrica ou um gráfico cartesiano.

A identificação própria de cada registro definidos pelas regras de conformidade estabelecem: a determinação de unidades elementares (símbolos, vocabulários), as combinações admissíveis de unidades elementares (regras de formação em um registro específico), gramática quanto às línguas naturais e as condições para que uma representação seja pertinente e completa (regras próprias a um gênero literário, por exemplo, ou um tipo de produção em determinado registro). (DUVAL, 2009, p.55).

Por exemplo, na representação no registro algébrico da função $f(x) = -x^2 + 5$ identifica-se uma Função Polinomial do 2º Grau, a partir do expoente 2 (dois).

> As regras de conformidade permitem identificar um conjunto de elementos físicos ou de traços como sendo uma representação de qualquer coisa num sistema semiótico: seja um enunciado em alemão, um cálculo, uma fórmula de física, uma figura geométrica (...). *Elas permitem então o reconhecimento das representações como representações num registro determinado*. (DUVAL, 2009, p.56, grifo autor)

O **tratamento** é uma transformação interna a um registro sem que haja mobilização de um novo sistema de representação (outro registro). São transformações de representações dentro de um mesmo sistema de representação.

Por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação. Do mesmo modo que a formação possui regras de conformidade, o tratamento acontece por intermédio de regras de expansão informacional que garantem a representação do registro final no mesmo registro de partida.

Duval (2009) indica as regras de derivação, de natureza dedutiva, no quadro da lógica; as regras de produção de natureza inferencial, no quadro da inteligência artificial; as regras de coerência temática, de natureza linguística, no quadro das línguas naturais e; as regras associativas de similitude, de natureza cognitiva, no quadro das ideias, por permitir a expansão discursiva e a mobilização de representações mentais.

Os procedimentos de justificação do objeto de estudo matemático dentro de um mesmo registro são considerados como tratamento, ao efetuar um cálculo somente na escrita aritmética, ou a resolução de um sistema de equações do 1° Grau no registro de representação algébrico.

O exemplo presente no Quadro 07 indica a resolução do objeto matemático-produto notável-, somente no registro de representação algébrico.

Quadro 07- Exemplo Atividade Cognitiva de Tratamento

Registro de "saída"	Resolução	Registro de "chegada"
$(x+3)^2$	$(x+3)(x+3)$	$x^2\ +6x+9$

Fonte : a autora

Por vezes, o tratamento é a atividade cognitiva mais recorrente ao apresentar a "vantagem" da economia e rapidez diante das situações propostas em sala de aula. Porém, conforme destacaremos adiante, estimular um monorregistro inibe a atividade de conversão.

A **conversão** consiste em uma transformação **externa em relação ao registro da representação de partida**. (DUVAL, 2009, p.59 grifo autor). As conversões[45] são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados.

A atividade cognitiva de conversão das representações é uma operação não reversível. Converter em um sentido não implica necessariamente na possibilidade de o

[45]Uma consideração essencial é que a conversão ocorre entre as representações e não entre registros, pois não se converte o registro, mas a representação do objeto matemático em questão de um registro para outro. (HENRIQUES, ALMOULOUD, 2016, p.471.)

aluno fazê-lo no sentido inverso. Em outros termos, a operação de conversão se revela ser nem trivial nem cognitivamente neutra (DUVAL, 2009, p.35).

O aluno ao transitar de uma representação no registro gráfico para uma representação no registro algébrico, pode não apresentar o mesmo sucesso que transitar da representação registro algébrico para a representação no registro gráfico. Um exemplo de conversão seria, a expressão *"um número ao quadrado menos um*" (representação no registro discursivo) estar indicada em $x^2 - 1$; (representação no registro algébrico).

3.1.3 Congruência entre Conversões: Aspectos essenciais para a Coordenação

A **coordenação** é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer um mesmo objeto, a partir da mobilização dos dois ou mais registros de representação distintos.

Concordamos com a citação a seguir, pois entendemos que independentemente do nível de ensino, objeto matemático e metodologia adotada, o ensino de Matemática é indissociável dos registros de representações e que nessa investigação indicaremos as possíveis atividades cognitivas no processo de análise multissemiótica.

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros pertencentes a diferentes sistemas de representação, além da possibilidade de conversão, a todo o momento, de representação de um objeto matemático em diferentes registros (DUVAL, 2003, p.14).

O ensino de Matemática focado em monorregistros permite o tratamento interno dos objetos matemáticos, e um pseudossucesso, pois o estudante pode realizar corretamente os algoritmos necessários para resolver um sistema de equações lineares, representado, por exemplo, no Registro Aritmético. Porém, pode não identificar as mesmas equações do sistema linear em uma representação no registro gráfico ou tampouco representar graficamente esse sistema de equações.

Duval (2004) traz o termo enclausuramento como crítica ao tratamento em monorregistros, ou seja, de uma maneira mais geral uma compreensão monorregistro é uma compreensão que não permite nenhuma transferência.

Quando se privilegia um único registro de representação, a limitação da aprendizagem de um conceito matemático pode ocorrer ao solicitar que o aluno realize a conversão.

O paradoxo cognitivo inerente a atividade matemática é reforçado por Duval ao destacar que a

> "Compreensão não é decodificar uma sequência de palavras ou frases, mas discriminar as unidades de significado [unidades de conteúdo] de acordo com os diferentes níveis de organização dos discursos e em outras palavras, **não pode confundir um objeto matemático com qualquer uma de suas possíveis representações semióticas (exigência epistemológica fundamental)** quando somos capazes de reconhecer o mesmo objeto em pelo menos dois registros, ou seja, quando somos capazes de converter uma representação de um registro para outro (DUVAL, 1995 , grifo autor).

Deste modo, realizar a conversão não implica um sucesso quanto a *noésis* , ou seja, a apreensão conceitual. O fenômeno de congruência – e consequentemente de não-congruência- conforme aponta Duval (2009, p.66) é de suma importância para a coordenação e compreensão integrativa.

Um estudante pode realizar a conversão, a partir de uma tabela com valores referentes a uma função polinomial do 2º Grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, em um registro gráfico, e esboçar uma parábola com concavidade para baixo.

A mobilidade de representações dos registros (tabular para o gráfico) indica conversão, mas não necessariamente uma apreensão conceitual no sentido proposto por Duval (2009) em que

> (...) se pode compreender um conceito, mas não saber operacionalizar a representação em termos de outra representação por falta dos critérios de congruência entre os registros. A relevância do fenômeno de congruência consiste em transpor os obstáculos que surgem na mudança entre registros.

Para que ocorra a congruência na conversão entre registros, Duval (2009, p.68) apresenta 3 (três) critérios : **correspondência semântica** dos elementos significantes em que a cada unidade significativa no registro de partida em língua natural encontra uma unidade significativa no registro algébrico de chegada correspondência (de caráter semântico) ; **univocidade semântica** terminal onde cada unidade significativa no registro algébrico encontra seu par no registro em língua natural numa conversão reversa (univocidade semântica) e **organização das unidades significantes** é a mesma em ambos os registros (organização sintática).

A conversão da frase dada inicialmente na representação no registro descritivo escrito “o triplo de um número diminuído de nove dezenas é igual a esse número subtraído duas centenas”, em uma representação no registro algébrico $3x - 90 = x - 200$, apresenta congruência ao contemplar os três (3) critérios de:

- ✓ correspondência semântica – ou seja, “ o triplo de um número “ registro de saída em $3x$ no registro de chegada;
- ✓ univocidade semântica (90) referente a nove dezenas;
- ✓ organização sintática : o triplo de um número $(3x)$ diminuído $(-)$ de nove dezenas (90) é igual $(=)$ a esse número (x) subtraído$(-)$ duas centenas (200).

Desse modo, a verificação dos critérios de congruência na mobilização de diferentes registros de representação, auxilia na coordenação e compreensão conceitual.

Duval (2009) ressalta que a discriminação das unidades, não implica necessariamente na aquisição de conceitos. Concordamos com o autor quando ressalta que a escolha de uma “boa” representação, ou mesmo a multiplicação de representações são ajudas enganosas.

Propor ao estudante uma profusão de registros de representação pode induzir ao paradoxo cognitivo, se o aluno vir a considerar cada representação como o objeto matemático em estudo, visto que “ as “boas” representações não podem ser associadas aos objetos matemáticos que elas representam, porque esses não são acessíveis direta ou empiricamente” (DUVAL, 2011, p.49)

Vimos que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica nos permite analisar o processo de ensino e aprendizagem em Matemática de modo cognitivo – que estuda os problemas e processos de compreensão -, e o funcionamento do pensamento em Matemática. Destacamos que os critérios relacionados à compreensão se diferenciam sob o ponto de vista cognitivo e matemático.

> A teoria dos registros deve ser avaliada com base nas contribuições relacionadas à riqueza, às novidades das observações, bem como às novidades das atividades de aprendizagem que as variáveis cognitivas permitem definir. (D’AMORE,2017,p.83)[46]

[46] *La teoría de los registros debe ser valorada basándo se en los aportes relativos ala riqueza, a las novedades de las observaciones, así como a las novedades de las actividades de aprendizaje que las variables cognitivas permiten definir.*

Duval alerta que a distinção das atividades relacionadas à *semiósis* é essencial tanto para a análise cognitiva das tarefas quanto para a as condições de uma aprendizagem conceitual " (DUVAL,2009,p. 61).

O que estamos fazendo quando fazemos matemática? , questiona Duval. Matematicamente, segundo Duval (2011) a compreensão começa com a validação, justificação, demonstração das situações propostas. Do ponto de vista cognitivo duas condições são imprescindíveis conforme já indicamos aqui: o modo de acesso aos objetos e a natureza da atividade matemática.

Dizer que ao fazer matemática estamos somente resolvendo problema seria ignorar que a transformação de representações semióticas é o processo que encontramos em todas as formas de atividade matemática e que (...) quando se trata de explorar situações, resolver problemas ou demonstrar conjecturas, ela constitui a dinâmica de progressão. (DUVAL, 2011, p.66)

Essa afirmação nos parece fundamental, pois, a importância das atividades de formação, tratamento, conversão e coordenação residem no fato de ser intrínseco ao processo de ensinar e aprender matemática, os diversos registros com suas possibilidades representacionais

3.2 Teoria da Objetivação

A Teoria da Objetivação que está sendo desenvolvida por Luis Radford[47] apresenta o enfoque semiótico como essencial no ensino e aprendizagem de Matemática. O autor esclarece que a elaboração da Teoria da Objetivação começou no início dos anos 2000, com reflexões a respeito de conceitos como: saber, conhecimento, aprendizagem e o papel dos professores e estudantes no processo educativo.

Uma diferenciação da Teoria da Objetivação de outras teorias pertencentes ao escopo da Educação Matemática é a concepção de que a mesma é mediada por um esforço político, societal, histórico e cultural de modo processual e dinâmico na qual a construção de conhecimentos – a partir da concepção do materialismo dialético[48] -, é uma síntese cultural, dialética e sensorial das pessoas (RADFORD, 2015).

Tal esforço visa à criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionem criticamente em práticas matemáticas constituídas histórica e culturalmente, ponderando e deliberando sobre novas possibilidades de ação e pensamento. O que a Teoria da Objetivação trata não é, portanto, apenas o reino do saber, mas também o reino do tornar se. (RADFORD, 2017, p.242)

Uma das justificativas do autor para a elaboração da TO[49] é que a mesma funciona enquanto alternativa às correntes individualistas que permeiam os educadores matemáticos em sua práxis. A intenção da Teoria da Objetivação é ir além de posturas individuais – conforme as pedagogias centradas no estudante que constrõem seu próprio conhecimento.

---

[47]Professor da School of Education Sciences na Laurentian University em Ontário, Canadá, na qual leciona desde 1992 no programa de formação de professores da École des Sciences de l' Éducation e coordena o Laboratório de Pesquisa em Semiótica Cultural e Pensamento Matemático.

[48]Esclarecemos que nosso intuito é situar o leitor quanto aos filósofos citados por Radford e algumas de suas concepções, e não esgotar o tema. Radford busca inspiração em Hegel e Marx quanto ao materialismo dialético. Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) filósofo germânico cuja obra baseou-se na dialética do singular, particular e universal, configurando a noção de antítese-tese-síntese. A dialética é, assim, a própria forma como as coisas ocorrem, e é também o meio pelo qual podemos alcançar a verdade, onde o desenvolvimento da história está na superação das contradições. Karl Marx (1818-1883), por sua vez ressalta que a história humana se desenvolve a partir da ação concreta dos seres humanos em sociedade. Essa ação é motivada por necessidades concretas; sendo a base desta teoria a dialética de Hegel, mas diferentemente deste autor, que se utilizava da dialética do idealismo, Marx elaborou sua dialética com base no materialismo, que explica os fenômenos naturais e sociais. Ao contrário do que pensava Hegel, Marx dizia que o ser humano não podia ser pensado de forma abstrata, pois ele era formado a partir das relações sociais. A dialética se torna um método científico, sendo aceita como um método de análise da realidade, assim no materialismo dialético nada está pronto.https://www.todoestudo.com.br/filosofia/hegelacesso em 22/05/2020.

Radford propõe a partir do conceito de saber e em uma perspectiva cultural e histórica , um equilíbrio entre as teorias construtivistas e antropológicas, em que a posição ontológica e epistemológica da TO, afasta-se das ontologias platonistas e realistas, das concepções de objetos matemáticos como objetos eternos que precedem a atividade dos indivíduos e também da ontologia racionalista , com suas concepções de mentes que funcionam sobre si mesma de acordo com a lógica (RADFORD,2008).

Apresenta em sua epistemologia uma dimensão sociocultural de aprendizagem com influência de intelectuais russos, dentre eles Lev Vygotsky (Abordagem histórico-cultural) e Alexei Leontiev (Teoria da Atividade) com destaque ao conceito de alteridade proposto por Emmanuel Lévinas.

Ou seja, na TO o foco muda de como os estudantes recebem saber (ensino tradicional) e como os estudantes constroem seu próprio saber (construtivismo), para como professores e estudantes produzem o saber em sala de aula tendo como pano de fundo, a cultura e a história. Contudo, "o foco também se desloca para a forma como os professores e estudantes coproduzem a si mesmos como sujeitos, em geral, e como sujeitos da educação, em particular" (RADFORD, 2017, p.243).

Mesmo dentre as teorias de Educação Matemática com enfoques semióticos, como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (vide item 3.1), em que as representações são responsáveis pelo acesso aos objetos do conhecimento (objeto matemático), conforme indicaremos na Teoria da Objetivação, as representações se constituem como um dos meios semióticos de materialização do saber em conhecimento.

Para a elaboração de uma teoria de aprendizagem, Radford (2008,2015) aponta que uma metodologia clara é essencial na elaboração de uma teoria de aprendizagem , onde a metodologia (M) tem que estar de acordo com os princípios teóricos (P) e com as questões de pesquisas (Q), que tal teoria provoca. Há uma interconexão entre esses 3 (três) componentes , ou seja, P não é anterior a M ou a Q e cada um deles altera os outros.

Os princípios teóricos que norteiam a Teoria da Objetivação são elencados em 5 (cinco) conceitos nessa ordem:

Quadro 08: Pressupostos da Teoria da Objetivação

Pressupostos	**Características**

Filosófico	O pensamento é elaborado de maneira não - mentalista, o materialismo dialético.
Psicológico	O pensamento é elaborado enquanto práxis social.
Ontológico	Os objetos matemáticos resultantes das atividades reflexivas decorrente da prática sociológica mediada por artefatos.
Ontogenético	A objetivação e seu par, a subjetivação de natureza semiótica e cognitiva como forma de operacionalizar a teoria.
Epistemológico	Considera o processo de ensino e aprendizagem, como um produto cultural da atividade humana, a partir dos sistemas semióticos de significação cultural.

Fonte: Adaptado Radford, 2008.

Segundo Radford (2008), a Teoria da Objetivação fornece uma estrutura ampla, mas suficientemente específica para acompanhar os alunos na aquisição progressiva das formas culturais do ser e do pensamento matemático. Apresentamos a seguir os princípios da TO e suas implicações no ensino e aprendizagem de matemática.

3.2.1 O movimento contínuo do Saber, Conhecimento e Aprendizagem

Para a Teoria da Objetivação o conhecimento parte da concepção materialista-dialética baseado na distinção entre duas categorias ontológicas aristotélicas[50], que embora relacionadas sejam diferentes: potência e atos.

A distinção entre os conceitos chaves de saber e conhecimento, segundo o autor é que " o saber é potencialidade cultural, potencialidades (de algo que pode acontecer), de pensar o mundo e que serão atualizadas pelo conhecimento através da prática social (ato)" (RADFORD,2015,p.252).

Neste sentido, a TO considera formas de fazer, pensar e refletir como um processo histórico, social e cultural, como por exemplo, quando os alunos " encontram" o objeto do conhecimento – a generalização de padrões – e entram em relação com uma forma de saber historicamente constituído na forma da equação $y = ax + b$.

[50]A concepção de ato e potência se relaciona ao ser, para Aristóteles na medida em que o ser pode ser compreendido como ser em ato, e o não-ser compreendido como o ser em potência. (...) o exemplo claro de ato e potência se dá instrumentalmente com uma caneta. A caneta só a é, de fato, em ato, quando realiza sua finalidade de escrever. Enquanto produz, através da tinta, formas, a caneta realiza plenamente o que sua essência prescreve. Todavia, enquanto não está escrevendo, a caneta apenas é em potência.http://pensamentoextemporaneo.com.br/?p=2730 Acesso em 30/07/2019.

Morey (2020, p.61) destaca que para a Teoria da Objetivação o conhecimento é a materialização do saber implicando em:

a) o saber como entidade geral;

b) o processo pelo qual o saber se atualiza ou materializa;

c) o conhecimento como a materialização ou atualização do saber.

> "O conhecimento é um sistema codificado de processos corporais, sensíveis e materiais de ação e reflexão, constituídos histórica e culturalmente. No caso da aritmética, esses processos podem ser de reflexão, expressão e ação que emergiram na Mesopotâmia a partir de atividades humanas específicas, como contagem de gado ou grãos ou medição de campos" (Radford, 2017, p.101).

Desse modo, o foco do processo de ensinar e aprender, não é só o conhecimento matemático, e sim o individuo que aprende, o indivíduo em devir[51]. A TO sugere que os objetos matemáticos são historicamente gerados durante a atividade matemática dos indivíduos , constituindo-se como padrões fixos das interações humanas, a partir de reflexões e incrustados no mundo em constante movimento.

A aprendizagem não consiste em construir ou reconstruir um conhecimento, mas sim na significação dos objetos matemáticos em decorrência do conhecimento "depositado" nos artefatos e das interações sociais. Ocorre a conscientização a respeito de "algo" já existente, "algo" potencial e que em outros contextos históricos e sociais os diferentes sistemas semióticos de significação culturais foram legitimados e ressignificados.

De acordo com Radford, a aprendizagem é o ponto crucial no processo de objetivação, como algo de que viemos participar e que objetivar é um fenômeno de "algo que está ali e que aparece frente ao sujeito". (RADFORD, 2014, p.141)

A materialização do saber em conhecimento pode não ser aparente para os alunos, "eles aprendem por meio de processos de objetivação - um termo que adquire um significado específico em nossa abordagem e do qual a abordagem toma emprestado seu nome". (RADFORD, 2013, p.195)

O autor da teoria ressalta que objetivar, se relaciona ao latim *objectare – opor , colocar no caminho de* – ou seja, a potencialidade do saber (uma equação, um teorema,

---

[51]Verbo intransitivo; dar-se, suceder, acontecer, acabar por vir.
[Filosofia] Movimento permanente pelo qual as coisas passam de um estado a outro, mudança https://dicionario.priberam.org/devir (Acesso em 06/07/2019).

um algoritmo) , que é colocado frente o aluno e que ainda não está “visível” para o estudante.

Na Teoria da Objetivação a semiótica desempenha papel fundamental, pois possibilita os processos de significação nos quais se lançam os estudantes quando procuram compreender as formas de raciocínio matemático histórico e culturalmente constituído.

Segundo Radford (2015, p.15) a Semiótica, permite compreender que tais processos não são realizados simplesmente por meio do simbolismo matemático (...) “nesses processos intervém outros tipos de signos, como os gestos, as palavras, a entonação, o ritmo e outros signos corporais, enquanto meios semióticos de objetivação”.

Ressaltamos que para a TO, o signo tem importância como elemento de entrelaçamento entre o objetivo e o subjetivo, pois é considerado [...] simultaneamente subjetivo (no sentido de que é produzido por um indivíduo e expressa as suas intenções) e objetivo (no sentido de que a expressividade do signo está inserida num sistema cultural de expressões e valores). (RADFORD *apud* PAIVA, 2019, p.39)

A noção de signo assumida pela TO é a proposta por Vygotsky que enfatiza o papel funcional dos signos – não meros auxiliares para executar uma tarefa ou resolver um problema-, mas sim (...) como ferramenta psicológica e mediadora cultural.

> A transformação da mente humana que os signos efetivam está relacionada ao seu papel sociocultural-histórico. Ou seja, depende de como os signos significam e são usados coletivamente na sociedade. O conceito vygotskiano de signo nos fornece pistas para entender os processos que de fato ocorrem no ensino e aprendizagem. (MOREY, 2020, p.53)

Nesse sentindo, o aspecto semiótico relaciona a objetivação a partir do processo social de tomada de consciência, de algo que não era “notado”, e a subjetivação como indissociável da objetivação enquanto ação contínua e histórica de criação do eu, do ser social. A subjetivação assim seria o devir do eu.

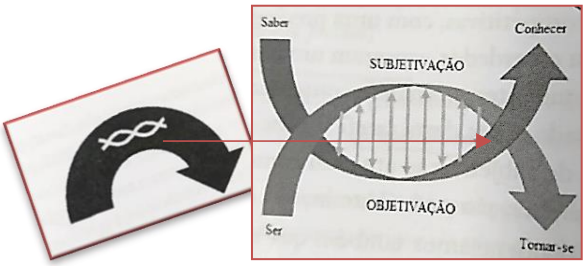
O processo de subjetivação é a instanciação do ser, único, singular de cada indivíduo em formação, em constante mudança. Assinalamos que durante o processo educativo a subjetivação pode passar despercebida, ou não ser considerada relevante para o ensino e aprendizagem de matemática. Esse processo é caracterizado por idiossincrasias e reflexões, que não são meramente contemplativas por meio da qual

> (...) A consciência individual é uma forma especificamente humana de reflexão subjetiva sobre a realidade concreta, durante a qual formamos sensibilidades culturais para ponderar, refletir, compreender, discordar, objetar e sentir os outros, a nós mesmos e a nosso mundo (RADFORD, 2017, p. 122)

Reforçamos a ideia que os processos de objetivação e subjetivação estão em movimento, entrelaçados dentro da Atividade que media simultaneamente a materialização do saber (conhecimento) e do ser (subjetividade) (RADFORD, 2017, p.148).

Consideramos esse movimento como simbiótico, em que há retroalimentação de ambos de modo contínuo. Paiva e Noronha (2020) destacam a influência mútua e recíproca que ocorre nos processos de objetivação e subjetivação, de acordo com a Figura 09.

Figura 09 : Dinâmica e Conexão entre os P. O. S



Adaptado Paiva e Noronha (2020, p.170)

A percepção dessa coinfluência – Saber, Conhecer, Ser e Tornar-se- , segundo as autoras auxilia o professor, pois "é importante especialmente para o professor que atua no labor comum na sala de aula,". (PAIVA e NORONHA, 2020, p.170)

Os processos de objetivação e subjetivação (P. O.S) enquanto relações dialéticas do saber / conhecimento e do ser/ subjetividade, em que ambos acontecem de modo indissociável, ou seja, não há objetivação sem subjetivação, pois assim como há relação dialética entre saber e conhecimento, também no *being* e *becoming* (RADFORD, 2006).

Figura 10- Relações no P. O.S

Fonte: a autora

Concordamos com o autor quando afirma que por meio de processos prolongados de objetivação e subjetivação, os alunos se envolvem em formas cada vez mais elaboradas de trabalho conjunto e estruturas cada vez mais complexas de intersubjetividades "dando origem a elaboradas formas culturais de percepções, imaginação, discursividade, simbolização e pensamento". (RADFORD, 2015, p.76)

3.2.2 Movimento Dialético entre os Elementos da Teoria da Objetivação

Permeando os processos inseparáveis de objetivação e subjetivação encontra-se os Sistemas Semióticos de Significação Cultural (SSSC), a Atividade e o Pensamento. Essa tríade – presente na Figura 11- se relaciona em uma dinâmica singular, contextual e contínua, frente à potencialidade de um objeto matemático (o saber) materializado pelos meios semióticos (o conhecimento) a partir da objetivação e a coprodução de subjetividades entre professores e estudantes.

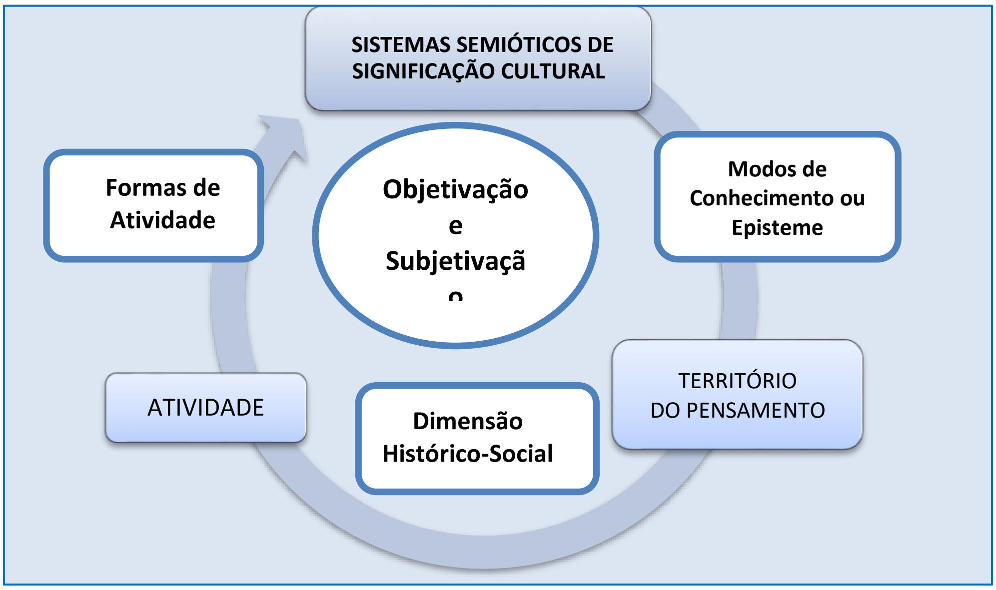
A conexão entre os elementos - SSSC, Atividade e Pensamento-, ocorre de maneira dinâmica, não hermética tendo a dimensão histórica, cultural e social como base para aos processos de objetivação e subjetivação.

Um Sistema Semiótico de Objetivação Cultural

> "(...) tem um modo singular e específico de conhecimentos, que permitem a identificação de situações ou problemas interessantes e os métodos de raciocínio que serão considerados culturalmente como válidos". (RADFORD, 2008, p.220)

As Atividades são concebidas de uma maneira particular, idiossincrática de cada momento histórico com seus objetivos, ações, divisões de tarefas. Quanto ao Pensamento, este é mediado pelos Meios Semióticos de Objetivação: artefatos, sinais, gestos, entonação da voz, registros orais e escritos, desenhos, esquemas.

Figura 11 : Movimento dialético entre os conceitos da TO



Adaptado Radford , 2008

Indicamos a covariação na situação "Quantos Telefonemas?", como característica do Pensamento Algébrico, em que a Álgebra se constitui como um SSSC, a Atividade como unidade de análise e o Pensamento sendo mediado pelos meios semióticos mobilizados durante o desenvolvimento da situação proposta.

3.2.3 Os Sistemas Semióticos de Significação Cultural (SSSC)

Os Sistemas Semióticos Culturais são superestruturas simbólicas e dinâmicas que incluem concepções culturais sobre o mundo e os indivíduos (Radford, 2008). Para produzir significações, os SSSC propiciam reflexões a respeito de crenças e concepções sobre os objetos conceituais, métodos de indagações e formas legítimas de representação do conhecimento, dentre outros. Segundo D'Amore (2015) os Sistemas Semióticos de Significação Cultural salientam o aspecto epistemológico dos objetos matemáticos, visto que esses são dependentes da práxis humana.

Radford e Empey (2007) recorrem a esses sistemas para investigar a criação histórica de novas formas culturais de compreensão matemática e novas formas de subjetividade, em que se procura estudar as maneiras pelas quais os estudantes se tornam progressivamente conscientes de formas de pensar e agir histórica e culturalmente constituídas, e enquanto subjetividades em formação, o modo como professores e alunos se posicionam em práticas matemáticas.

Gomes (2016, p.71) se refere aos SSSC, como um conjunto semiótico que funciona como operador atribuindo significados específicos aos signos constituídos historicamente de acordo com a cultura de um grupo social - porém não são limitados a um contexto -, as significações é que são contextuais ; o signo pode ser o mesmo , com outras significações em outros contextos. Um Sistema Semiótico de Significação Cultural desempenha 3 (três) funções assim elencadas

> (1) Uma que tem a ver com as ideias que uma cultura faz a respeito da natureza do mundo (dimensão ontológica) e como o mundo pode ser (ou não) objeto de conhecimento; (2) a segunda função oferece formas de conduta e de ação (às vezes implícitas ou não) que são produtoras de significados ; (3) a maneira como a cultura organiza e legitima as relações dos indivíduos com o mundo e eles mesmos. (RADFORD, 2013, p.141)

O autor ainda salienta que os significados do SSSC contemplam concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem de matemática- e a legitimação do mesmo-, a relação entre estudante e professor, a percepção dos indivíduos enquanto seres sociais.

O ensino e a aprendizagem da matemática diferem à medida que passamos de um período histórico para outro (...) “o ensino e a aprendizagem de matemática eram muito diferentes na Casa dos Escribas da Mesopotâmia, na época de Platão, nas escolas renascentistas de Ábaco e hoje”. (RADFORD, PRESMEG, 2016, p.23).

3.2.4 Meios Semióticos: Mediadores dos Processos de Objetivação e Subjetivação

Conforme já destacado, para a TO é a concepção de signo proposta por Vygotsky, que mais se adequa aos pressupostos dos Sistemas Semióticos de Significação Cultural. Morey (2020, p.53) enfatiza a noção de signo para Vygotsky em “seu papel funcional: como meio externo ou material de regulação e autocontrole, vindo mais tarde a desenvolver a ideia do signo como ferramenta psicológica e mediadora cultural”.

A partir dessa concepção, a maneira como os signos são usados coletivamente na sociedade – a escrita algébrica, por exemplo - é fundamental no processo de constituição e materialização do saber. Dessa maneira o acesso aos objetos matemáticos na Teoria da Objetivação, ocorre com a mobilização de diferentes signos.

Todos os recursos semióticos que os estudantes mobilizam para tomar consciência de tais formas históricas de pensamento e ações são denominadas *meios semióticos de objetivação* (RADFORD, 2003).

Os meios semióticos de objetivação podem incluir: fórmulas algébricas, gráficos, objetos, gestos, atividade perceptiva, linguagem escrita, fala posição corporal dos alunos e do professor.

Radford salienta que em situações em que ocorre uma coordenação de meios semióticos (gestos, escritas, desenhos) pelos envolvidos – estudantes e professor-, há o denominado nó semiótico considerado um fenômeno coletivo, do qual uma estrutura algébrica, por exemplo, aparece em uma consciência coletiva sensível. Segundo Radford (2003) o nó semiótico

> É um segmento de trabalho conjunto no qual ocorre um encontro progressivo com a matemática. O encontro é descrito em termos de perceber, apreender, fazer sentido, consciência, tornar-se consciente. É por isso que os nós semióticos se concentram na atenção, na intenção e na criação de significado (RADFORD, PRESMEG, 2016, p.22).

Deste modo, os meios semióticos de objetivação não operam isolados uns dos outros. Pelo contrário, operam através de uma coordenação complexa de modalidades sensoriais e registros semióticos que os alunos e professores mobilizam em um processo de objetivação, na materialização do saber em conhecimento.

A identificação dos meios semióticos de objetivação nessa investigação é essencial para a análise multissemiótica e no que tange a mobilização dos registros de representação mobilizados na situação proposta “Quantos telefonemas”?

3.2.5 Mobilização de Meios Semióticos e a Multimodalidade : ações integradas

Inspirado na Teoria da Objetivação de Radford, a partir da variedade de signos mobilizados durante a aula de Matemática, a noção de multimodalidade surge em pesquisas com a noção de Pacote Semiótico (*Semiotcs Bundle*) proposta por Ferdinand Arzarello.

O Pacote Semiótico é uma ferramenta de microanálise para processos dinâmicos que envolvem vários sinais a partir das análises sincrônicas e diacrônicas. As questões de pesquisa propostas pelo Pacote Semiótico são referentes às diferentes relações que podem existir entre recursos semióticos utilizados durante a atividade matemática da sala de aula (SABENA, KRAUSE, MAFFIA 2016, p.22).

O termo "multimodalidade" surgiu no campo neurocientífico para indicar uma característica da cognição humana, oposta à "modularidade" e enfatizando uma profunda integração entre aspectos que tradicionalmente eram considerados como neuronais separados, como ação e percepção (SABENA, 2018, p.187)

Além do contexto educacional- no campo da comunicação, por exemplo -, o termo se refere às múltiplas maneiras que podemos explorar para comunicar e expressar significados aos nossos interlocutores: palavras, sons, imagens e assim por diante.

> (...) há uma variedade de recursos semióticos usados por estudantes e professores, como gestos, olhares, desenhos e modos extralinguísticos de expressão e a maneira pela qual esses diferentes registros são ativados é multimodal (ARZARELLO, 2006, p.269).

Segundo Sabena (2018) o termo **multimodalidade** despontou em pesquisas no ensino de Matemática para se referir à relevância e coexistência mútua de uma variedade de aspectos cognitivos, materiais e perceptivos de modalidades ou recursos presentes no processo de ensino e aprendizagem: a comunicação simbólica oral e escrita, bem como desenho, gestos, manipulação de artefatos físicos e eletrônicos e vários tipos de movimento corporal (RADFORD, EDWARDS & ARZARELLO, 2009, p. 91-92).

Conforme ressalta Presmeg (2016)

> (...) os meios semióticos de objetivação não operam isolados um dos outros. Pelo contrário operam através de uma coordenação complexa de várias modalidades sensoriais, que os alunos e professores mobilizam em processos de objetivação.

Os meios semióticos de acordo com a Teoria da Objetivação permitem a atualização do saber (potencialidade) em conhecimento . A questão da multimodalidade se torna fundamental, ao considerarmos a totalidade de meios semióticos mobilizados que permearam o contexto de uma aula de Matemática, sob o prisma de abordagens semióticas.

3.2.6 A Atividade e a sala de aula sob a perspectiva da Teoria da Objetivação

Um aspecto fundamental para a TO é o conceito de professor e de estudante, não como seres autossuficientes e feitos por si próprios, que já conhecem seus assuntos, mas conceitualizados também quanto as suas subjetividades.

O destaque na dinâmica da sala de aula , sob o enfoque da Teoria da Objetivação, é o conceito de Atividade. Conforme Radford (2017,p.255) o conceito se reconceitualiza como o **labor comum,** para trazer à tona a importância ontológica e epistemológica da Atividade como uma forma de vida. (grifo nosso)

Ressaltamos que a Atividade para a Teoria da Objetivação não é simplesmente "fazer algo", *la actividad no es um mecanismo causal entre ser y subjetividad* Radford (2017 , p.144), mas aquela Atividade que coloca em movimento e transforma a potencialidade (o saber) de cada objeto do conhecimento, em objeto de consciência tornando-se progressivamente familiarizados com os significados historicamente constituídos.

Permeando as interações sociais entre os envolvidos na Atividade (professor e estudantes), há os processos de objetivação e subjetivação inerente a cada sujeito, de maneira idiossincrática, respeitando o momento de "tornar-se" frente ao objeto de conhecimento.

A dinâmica proposta pela Teoria da Objetivação permite que haja um engajamento, um despreendimento de noções de pertencimentodo objeto de conhecimento , e sim de fazer algo junto.

A materialização do saber em conhecimento, através dos artefatos e meios semióticos, ou seja, a dialética entre o saber e conhecimento é permeada pela Atividade que na Teoria da Objetivação assume a noção de *Tätigkeit*(atividade do indivíduo) proposta por Leontiev, que relaciona a consciência do indivíduo - não como uma "tábula" rasa e compartimentalizada-, mas sim em constante formação.

> "É o movimento interno de seus "elementos formativos" voltados para o movimento geral da atividade que afeta a vida real do indivíduo na sociedade. A atividade do homem é a substância de sua consciência "(LEONTIEV, 2009, p. 26).

Desse modo, a Atividade sob o viés da Teoria da Objetivação é considerada em sua estrutura (a intenção pedagógica é indicada pela letra grega **θ**), em que o *design* das atividades, sua estrutura "conduz" ao objeto a partir dos objetivos:

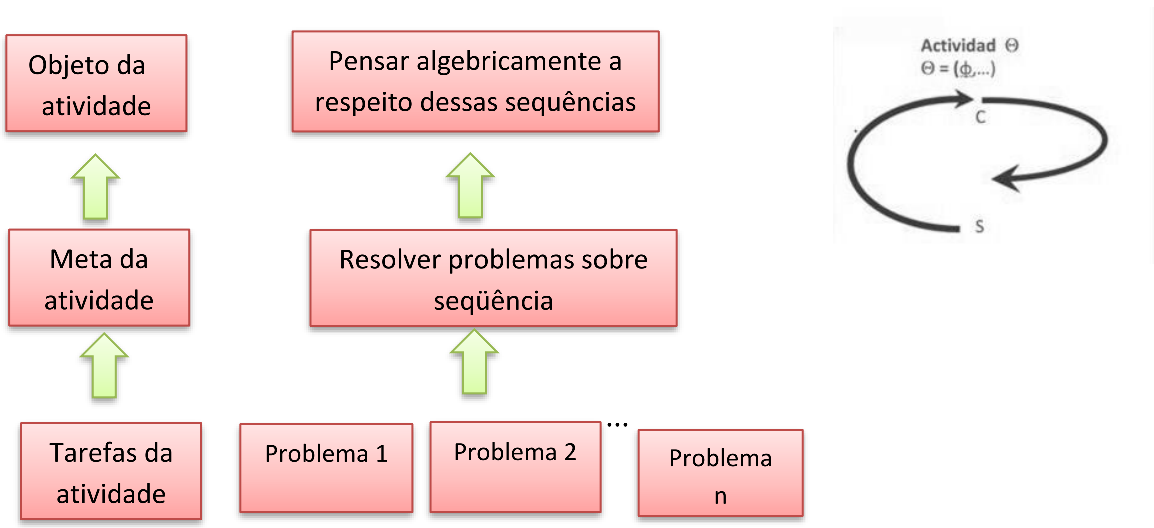
objeto do conhecimento → objetivo da atividade → tarefas da atividade

.

Radford (2018) apresenta a letra grega **θ** como a Atividade propriamente dita, entendida como atividade de ensino e aprendizagem que possibilita a atualização do saber em conhecimento. Essa noção de atividade como estrutura didática e como processo propriamente dito está indicado na Figura 12.

Figura 12: A Atividade à luz da Teoria da Objetivação

Estrutura da Atividade propriamente dita θ



Adapatado Radford (2017,p.126)

A partir de pesquisas desenvolvidas ao longo do tempo, o autor indica como selecionar situações problemas (design da Atividade) com base em uma lista de trabalho que : leve em consideração o que os alunos sabem; seja interessante do ponto de vista dos alunos; propicie um espaço de reflexão crítica e interação através de pequenos grupos; ofereça aos alunos a oportunidade de refletir matematicamente de diferentes maneiras; torne significativos os conceitos matemáticos e “ que sejam organizados de tal forma que haja um fio condutor conceitual orientado para o nível de complexidade matemática”. (RADFORD, 2015, p.554).

O objeto da atividade é dinâmico, multifacetado , em constante mudança e que não “aparece” para cada aluno com a mesma clareza e entendimento (RADFORD,2008, p.228).

A Teoria da Objetivação sugere a ideia do eu comunitário- no sentido da alteridade-, ocupado em aprender como interagir com os outros para abrir-se à compreensão de outras vozes e outras consciências. Para produzir “evidências” de aprendizado, se investiga a maneira pelas quais os alunos encontram formas culturalmente constituídas de “pensar, imaginar, intuir, simbolizar e agir” (RADFORD, 2015,p.564).

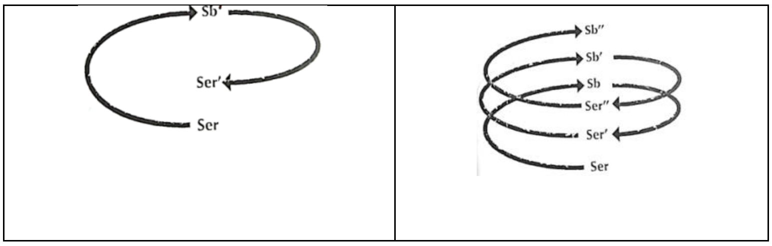
A natureza intrinsecamente social do conhecimento e do pensamento matemático concebe a sala de aula como uma comunidade de aprendizagem, cujo funcionamento é orientado para a objetivação do conhecimento e subjetivação do Ser.

Desse modo, seus membros trabalham para que haja: realização pessoal de cada indivíduo; respeito entre os envolvidos; flexibilidade em expor ideias e formas de expressão; compartilhamento de metas; envolvimento em ações de sala de aula e comunicação com os outros.

Radford (2017) reforça que as diretrizes acima não são simplesmente códigos de conduta, mas, ao contrário, são indícios de modos de ser em matemática (e, portanto, de conhecimento de matemática) no sentido mais estrito do termo.

Retornando a Figura 12 , temos em θ, o saber (S) sendo atualizado em conhecimento (C) em um movimento contínuo, dialético derivando continuamente saberes, conhecimento e subjetividades (Figura 13).

Figura 13: Sistema Dialético- Ser-Atividade – Subjetividade



Adaptado : Radford (2017,p.144)

Na Atividade a cada atualização do saber (objetivação) juntamente à subjetivação (Ser), tem-se uma subjetividade (Sb) .Com a atualização constante do Ser’ - a partir da noção de devir- há uma nova subjetividade (Sb’) e assim sucessivamente.

Radford (2017,p.144) cita o exemplo histórico , onde a expansão da manufatura do período medieval, produziu novas subjetividades nas relações comerciais de modo geral, distintas daquelas do meio rural. Essas novas subjetividades, passam a ser codificadas como válidas e legítimas , em um novo SSSC.

Conforme Leontiev 2009 (*apud* Radford , 2017, p.144)

> A atividade é uma unidade molar, não uma unidade aditiva da vida física, material do sujeito... a atividade não é uma reação nem uma totalidade de reações, mas um sistema que tem estrutura, suas próprias transições e transformações internas, seu próprio desenvolvimento[52].

Os Sistemas Semióticos de Significação Cultural (SSSC) relacionam esse movimento inacabado e dinâmico da relação ser/subjetividade do ponto de vista do desenvolvimento cultural , em que formas codificadas apresentam validações, valorações e legitimidades conforme os contextos históricos.

Do ponto de vista metodológico, a Atividade não é uma entidade homogênea e sim um fenômeno individual e social , em que professores e alunos tem compreensões distintas do objeto do conhecimento em questão, mutuamente de forma ética, crítica e solidária, percebem as formas de objetivação e subjetivação culturalmente legitimadas.

3.2.7 O Labor Comum

A categoria ontológica principal da Teoria da Objetivação é o **labor comum** - um processo de inscrição dos indivíduos no mundo social e a produção de sua própria existência.

Radford (2018, p.13) afirma que o individuo não pode ser concebido como uma entidade substancial - produzida no interior-, tal como se articulam tanto as tendências racionalistas quanto as tendências empiristas humanistas, que constituem a maioria das teorias educativas contemporâneas-, mas sim de maneira consubstancial.

Na Teoria da Objetivação , o indivíduo é uma entidade histórico-cultural que vai além da pele, é relacional do princípio ao fim. Nesse processo, a atividade[53] da sala de aula é a unidade de análise, em que o papel da linguagem, dos signos, dos artefatos e do corpo não é descartado nos processos de conhecimento e evolução e sim entendido não como mediador, mas como parte da atividade dos indivíduos.

Em um nível prático, o conceito de labor comum permite conceber o ensino e a aprendizagem em sala de aula não como duas atividades separadas, uma realizada pelo

---

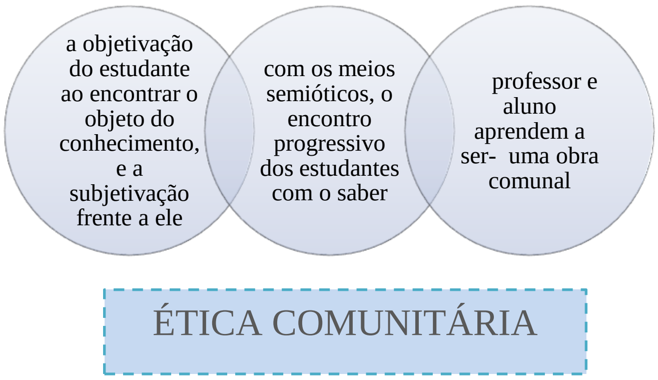
[52]*La actividad es uma unidad molar no una unidad aditiva de la vida fisica, material del sujeto... la actividad no es ni uma reacción ni uma totalidad de reacciones ,sino un sistema que tiene estructura, sus proprias transiciones y transformaciones internas , su proprio desarrollo.*

[53]Indicamos o termo situação para a proposta "Quantos Telefonemas"? de modo a evitar possíveis confusões com o termo atividade, usualmente utilizado no ensino.

professor (atividade do professor) e outra pelo aluno (atividade do aluno), mas como uma atividade única: o labor comum entre professor-aluno(s).

A noção de labor comum exige uma reformulação de atitudes por parte do professor e da Educação Matemática de maneira geral. O autor sublinha que nessa perspectiva , o professor não apresenta resposta “ pronta” ao aluno, nem espera a “construção” do entendimento do objeto matemático sozinho.

Figura 14 : Processo do Labor Comum



O Labor Comum é sustentado por uma ética comunitária

Fonte: Adaptado Radford, 2017

Roth& Radford (2011) sugerem a ideia de “*togethering*” que é um termo inexistente em inglês e formado pela junção do verbo “*together*” (juntos) com o sufixo “*ing*” que denota a ideia de ação. Segundo Radford (2017, p.138) a tradução de *togethering* como “*haciendo o trabajando juntos, em la misma dirección, hombro com hombro”.*

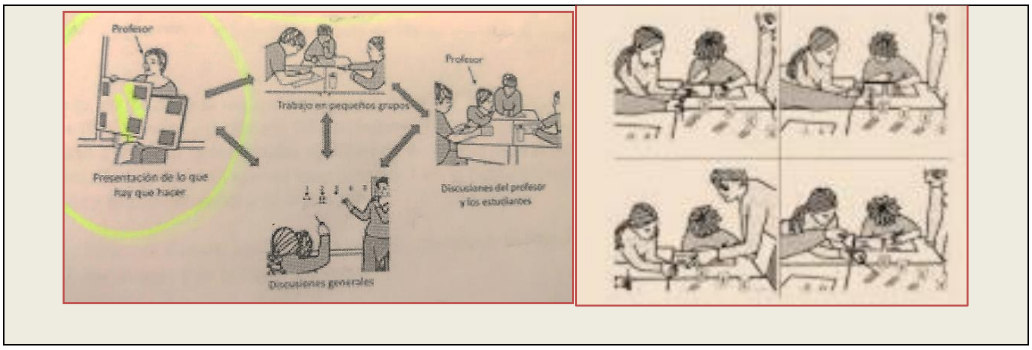
Ao respeitar as subjetividades que os alunos produzem , o professor produz as suas, ancorado nos meios semióticos dos gestos, ritmos, representações, artefatos, esquemas, desenhos . Assim, a sala de aula não é somente um local de pessoas alocadas dentro de um estabelecimento de ensino, cada qual com seus números de chamada e atividades burocráticas a cumprir. É antes

> (...) um espaço de encontros, dissidência e subversão, no qual professores e estudantes se tomam indivíduos que são mais do que seres no mundo, eles são indivíduos com um interesse investido no outro e em sua empreitada comum; indivíduos que intervêm, transformam, sonham, apreendem, sofrem e esperam juntos (RADFORD, 2017, p.254).

Radford (2020) esclarece que em meados dos anos 2000, ao propor os primeiros conceitos da Teoria da Objetivação no Canadá - após reforma curricular-, um dos questionamentos em cursos de formação continuada com professores, foi justamente quanto à organização da sala de aula e o enfoque nas interações sociais.

A apresentação da proposta pelo docente, divisão dos alunos em pequenos grupos, estímulo às interações entre grupos, e em seguida retomar as discussões no coletivo, não era novidade para os professores presentes.

Figura 15: Fases e exemplo do Labor Comum



Adaptado (Radford, 2017, p.159)

O autor sublinha que não é simplesmente dar ‘voz’ ao aluno, tampouco a interação entre grupos e professor, que indica a objetivação. Segundo Radford (2020), a dimensão social não é somente um momento específico no cenário de uma aula, mas a essência do labor comum

> (...) a dimensão social não é mediadora da aprendizagem. É parte integrante do aprendizado. A dimensão social, a dimensão da transformação de alunos e professores, é um fim em si mesma[54].(RADFORD,2020, p.31)

A concepção sistêmica do labor comum é a produção de subjetividades, porém no desenrolar da aula há nuances - os alunos nos grupos podem estar envolvidos com discussões relacionadas a interesses pessoais, por exemplo-, a serem consideradas e se tais subjetividades advêm de posturas éticas e críticas.

3.2.7.1 Indicação do labor comum: episódio Sra. Giroux

[54](...)*La dimensión social no es mediadora del aprendizaje. es parte entera del aprendizaje. La dimensión social, la dimensión de la tranformación de los estudiantes y professores, es un fin em si.*

Para ilustrar o labor comum entre estudantes e professor (a) utilizamos o episódio da Sra. Giroux - decorrente de um texto de Radford-, em uma turma com estudantes entre 9 e 10 anos, em que foi proposta a seguinte situação:

Quadro 09: Situação Cofrinho

Para seu aniversário, Marc recebe um cofrinho com um dólar. Ele economiza dois dólares por semana. No final da primeira semana ele tem três dólares; no final da segunda semana ele tem cinco dólares, e assim por diante.

Fonte: Radford, 2017

Aos estudantes foram fornecidas fichas azuis e vermelhas e copos para indicar as semanas. A professora (Sra. Giroux) propõe aos estudantes que determinem as quantias na semana 1, 2, etc., e em seguida nas semanas 10,15 e 25. Apresentamos a seguir um excerto das interações dialógicas presentes em Radford (2017, p.236):

22. Sra. Giroux: O que eu acho interessante aqui é que [no seu modelo] você tem fichas de bingo de duas cores. O que isso significa?
23. Krysta: Porque o azul era o que ele já tinha.
24. Manuel: Sim, porque [o problema da história] diz que o cofre tinha um dólar.
25. Albert: O cofre tinha um dólar, então aqueles (ele aponta em sequência para todas as fichas de bingo azuis das semanas 1 a 5) são todos os dólares que ele já tinha (agora, ele aponta para as fichas de bingo vermelhas das semanas 1 a 5) somados a 2, 4, 6, 8, 10.
26. Sra. Giroux: Está bem, está bem. O que aconteceria se fosse a semana 10?
27. Albert: Bem (ele aponta para a semana 5.), acrescentamos tudo isso novamente ele faz um gesto arrebatador: veja a Figura 3, fotos 1 e 2), porque sabemos que 5 + 5 = 10, então . . .
28. Krysta: (Interrompendo) Mais... Nós adicionamos. Nós adicionamos tudo isso (ela aponta para as fichas de bingo vermelhas na semana 5, não o azul (ela aponta para a ficha de bingo azul).
29. *Sra. Giroux: (Tentando tornar <u>perceptível</u> para os estudantes a estrutura co-variacional) O que você observa sobre a semana 5 (ela mostra o copo correspondente à semana 5) e (ela aponta para as fichas de bingo vermelhas, veja a Figura 3 , imagem 4) o número de fichas de bingo? (Ela faz as mesmas ações) A quarta semana e o número de fichas de bingo?*
30. Albert: É sempre duas vezes....
31. Sra. Giroux: (Repetindo) é sempre duas vezes.
32. Krysta: É o dobro do que você. Não! (Ela observa os artefatos intensamente por um tempo) Estou confusa! (...)
37. Albert: (Ele aponta para as fichas de bingo na semana 5) 5 + 5, 10.
38. Krysta: Legal. É duas vezes a semana. ...
39. Sra. Giroux: Então, se os vermelhos são duas vezes [o número da semana], o que acontece com a ficha de bingo [azul] . . . (Ela aponta para a ficha de bingo azul na semana 5)?
40. Krysta: Mais 1.

O destaque da linha 29 indica o momento em que a Sra. Giroux “convida” os estudantes a perceberem a relação covariacional da situação. A Sra. Giroux sabe que a expressão algébrica da situação é $y = 2x + 1$, mas que isso, não fará os estudantes indicarem essa expressão sozinhos. Faz-se necessário o convite, a aceitação do outro, a mobilização de meios semióticos: gestos, apontamentos, fichas, copos, palavras, expressões e desenhos.

Nesse exemplo, segundo Radford (2017, p.242) a aparência sensível de uma forma de pensamento algébrico, ou seja, -o saber -, decorre da tensão dialética entre os envolvidos, da dinâmica dos questionamentos, do labor comum.

Por exemplo, pensar algebricamente é o que ocorre no processo de Atividade. O que se está revelando na consciência no curso dessa atividade não é todo o saber algébrico, mas uma forma de desenvolvimento singular: sua materialização ou atualização, isto é, o conhecimento (RADFORD, 2017)

> (...) Vendo o episódio do cofrinho através das lentes da TO, a Sra. Giroux aparece como engajada com Albert, Krysta e Manuel. A Sra. Giroux não está fazendo a mesma coisa que os estudantes. No entanto, eles parecem trabalhar juntos, tentando trazer à tona uma forma de pensamento covariacional sobre sequências. O que eles estão fazendo é a criação do que Hegel (1837[2001]) chamou, em um contexto mais geral, um labor comum. (RADFORD, 2017, p.242)

Como sugerem as transcrições, a objetivação ocorreu por meio de uma intensa interação entre modalidades sensoriais e diferentes signos. Essas modalidades e signos corporificados são epistemologicamente fundamentais para fazer o geral aparecer por meio do particular, ou, em outras palavras, para fazer do evento (isto é, a atividade conjunta professor-aluno) o modo de existência do geral.

Para a Teoria da Objetivação, a materialidade corporal de nossas ações são condições da existência do conhecimento. Sem o primeiro, o último não pode existir (RADFORD, 2013, p.199).

A complexidade da Atividade no contexto de sala de aula reforça a necessidade de análise de pequenos segmentos dela, para contemplar as particularidades perante as situações propostas.

Segundo Herrera (2020, p.123) quando há o encontro com os processos singulares durante a Atividade com o conhecimento escolar e processos progressivos encarnados, simbólicos, materiais, discursivos, subversivos e afetivos, falamos de "trabalho em conjunto", ou seja, quando há presença de ética comunitária.

3.2.8 Ética comunitária

Radford (2020) concebe a ética, não somente como uma questão pedagógica, mas também da didática da matemática enquanto um relacionamento fluído, pessoal e cultural de responsabilidade entre um e outro: ou, de maneira mais geral, como forma de *alteridade* (grifo autor, p.33). A relação do professor com o estudante, geralmente é investigada sob o enfoque do ensino e da aprendizagem, em que o olhar para e/com o outro, por vezes pode ser considerado irrelevante para os processos do ensinar e do aprender.

Conforme destaca Ortega (2004, p.5)

> Esquece-se que a percepção do professor de seu relacionamento como educador com o aluno, sua atitude em relação a ele é uma variável decisiva no processo educacional, se ele pretende fazer "algo mais" do que transmitir conhecimento e ensinar habilidades [55].

Baktin (*apud* Radford 2020) salienta que é na relação mútua de constituição, que se situa a alteridade e que reconhecer a dialogia é encarar a diferença, uma vez que é a palavra do outro que nos traz o mundo exterior.

A concepção de ética proposta pela Teoria da Objetivação diferencia-se da concepção de ética de Hobbes e Kant[56]. Radford (2020) justifica que a ética na TO se afasta de tais filósofos, se aproximando de uma concepção diferente de indivíduo, de ordem social e relação entre ambos, no que denomina ética comunitária.

> (...) de fato, o labor comum é definido com base na ética da comunidade. Sem ele, não há trabalho comum; pode haver outro

---

[55](...) *pero se olvida que la percepción que el profesor tiene de su relación de educador com el educando , su actitud ante él es una variable decisiva em el processo educativo, si pretende hacer "algo más' que transmitir conocimientos y enseñar destrezas o habilidades*.

[56] Thomas Hobbes (1588-1679) filósofo metafísico cuja obra Leviatã, apresenta a ética como um ramo da filosofia natural e que, por sua vez, seria contratual,se estabelecendo de fato no Estado, ou seja, quando há um soberano que é capaz de determinar o que é bem e mal para o seu povo, .
Immanuel Kant (1724 – 1804) também filósofo metafísico cuja ética deontológica dá-nos um princípio da moral que pode ser aplicado a todas as questões morais. Kant enuncia-o de várias maneiras com o objetivo de esclarecer as suas implicações. Segundo Kant, a capacidade que o homem tem de diferenciar o certo do errado é inata, ou seja, já nasce com ele. Sendo assim, a moral humana independe da experiência, pois já nascemos com ela. Trata-se de uma questão de dever, ou seja, é dever do ser humano agir moralmente, faz parte de sua natureza.
http://hdl.handle.net/1843/BUBD-9RUH94 acesso em 26/04/2020.
http://www.eses.pt/usr/ramiro/docs/etica_pedagogia/Ética_de_kant.pdf acesso em 26/04/2020.

> tipo de trabalho, mesmo compartilhado, mas não o senso de labor comum[57] (RADFORD, 2019, comunicação pessoal)

A ética comunitária está estruturada, segundo Radford (2017, 2020) em 3 (três) vetores: a responsabilidade, o compromisso e o cuidado com o outro. Esses elementos da ética comunitária, segundo o autor, não ocorrem a partir de uma evolução natural, que *no es cognitiva o racional* (Radford,2017, p.157), sendo construtos a partir da forma de alteridade de indivíduos inscritos em certo contexto histórico e cultural.

A responsabilidade segundo Lévinas (2004) é a estrutura primeira frente ao chamado do Outro, sendo continuamente produtora de subjetividades e reafirmação do Ser. A responsabilidade segundo Radford (2020, p.35) se constitui de subjetividades, união, conexão e enlace com o outro, que se expressa na resposta que temos ao chamado do outro.

No episódio da Sra. Giroux – item 3.2.7.1-, quando o estudante responde ao convite da professora, ou seja, aceita seus questionamentos e apontamentos, segundo Radford (2017, p.148) há responsabilidade.

O compromisso é o ato de fazer todo o possível, no transcorrer do labor comum, na realização da obra comum - a produção do saber -, em que professores e estudantes produzem juntos em sala de aula. É o que Radford (2017, 2020) denomina como *o hombro com hombro*, o esforço e a promessa de fazer tudo o que for possível e mesmo o impossível no decorrer da atividade para realização coletiva da obra comum (RADFORD, 2017).

O cuidado do Outro requer o reconhecimento da necessidade do outro e a ação solidária intersubjetiva correspondente. Longe de ser um ato de condescendência, o cuidado é a possibilidade de ver a nós mesmos no outro; de reconhecer nossa vulnerabilidade na vulnerabilidade do outro (RADFORD, 2017, p. 157).

É uma forma de estar - com o outro, em um movimento permeado de sensibilidade, vontade e vulnerabilidade

> “(...) ainda que cuidar do outro abra a possibilidade de nos vermos no outro; de reconectar nossa vulnerabilidade na vulnerabilidade do outro, a importância de cuidar do outro é nos puxar e nos arrastar poderosamente para o mundo e nos posicionarmos ali, como-o-outro, para girar nosso centro para focar na experiência do outro” [58]. (RADFORD, 2020, p.36)

---

[57]*En efecto,el trabajo común se define a partir de la ética comunitaria. Sin ella, no hay trabajo común; puede haber otro tipo de trabajo, incluso compartido, pero no el sentido de la labor conjunta.*

[58] (...) *aun que el cuidado del outro abre la possibilidade de vernos a nosostros mismo sem el outro; de reconhecer nuestra vulnerabilidade em la vulnerabilidaddel outro, la importância del cuidado del outro es de jalarnos y arrastrarmos poderosamente hacia el mundo y de posicionarmos allí , com -el- outro , de facer pivotar nuestro centro para centrarmos en la experiencia del otro*

Nogueira (2019) em sua tese de doutorado destaca que na análise das informações da investigação, ocorreram indícios de responsabilidade, cuidado e compromisso, mas não de maneira concomitante e propõe a categoria denominada Posturas Éticas na qual inclui o vetor respeito , cuja descrição é a forma ética de se posicionar diante de posturas e ideias do Outro expressas no curso de uma atividade coletiva de produção de conhecimentos (p.163)

A ética comunitária permeia o labor comum -conforme Figura 12- e seus intrínsecos processos de objetivação e subjetivação, culminando na criação de um espaço ético em que emergem novas formas de subjetividade consistentes com nosso projeto educacional e a abordagem histórico-cultural. (RADFORD, 2020, p.38).

Os vetores constituintes da ética comunitária, não aparecem de maneira espontânea em sala de aula, sendo necessário propiciar condições para que ocorra. Podemos considerar cenários em que haja a responsabilidade, mas não o compromisso - por exemplo-, ou seja, os elementos basilares não são excludentes e podem ocorrer de maneira não simultânea.

4 ESPECIFICIDADES DA TRRS E DA TO

A abordagem semiótica na qual se fundamenta a Teoria da Objetivação e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a *priori* não indica uma aproximação, tampouco a noção de contigüidade proposta nessa tese, mas sim a base na qual se assenta cada teoria.

Na identificação das especificidades, a diferenciação entre cada teoria se torna essencial, pois traz à tona as especificidades de cada uma. De acordo com Gomes (2016, p.34) optar em escolher mais de uma teoria em Educação Matemática permite verificar "como as teorias fornecem ferramentas para investigar, analisar, compreender, descrever e até mesmo explicar ou prever fenômenos na Educação Matemática".

A diferenciação entre as teorias - TO e TRRS -, não tem como objetivo validar uma teoria em prol da outra. Concordamos que apresentar os princípios ontológicos e metodológicos, além das questões que orientam cada teoria, longe de serem redundantes, auxilia na verificação e refinamento investigativo dos elementos de cada teoria na situação "Quantos telefonemas"?.

Drijvers *et al* (2013,p.24) ressalta que "é interessante comparar resultados de análises de um mesmo fenômeno sob a ótica de diferentes abordagens e investigar se elas levam a achados complementares ou mesmo conflitantes". Destacamos também, uma consideração fundamental de Bikner-Ahsbahs *et al* (2010, p.168) " o encontro de abordagens teóricas não prossegue sem dificuldade".

Apresentamos a seguir breves considerações[59] a respeito dos objetos matemáticos para a TO e TRRS; do Pensamento Algébrico e indicações quanto aos elementos de cada teoria.

4.1 Objetos Matemáticos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica

De acordo com Duval (2009) o aspecto primordial em relação aos objetos matemáticos é o denominado paradoxo cognitivo (p.34), que é a terceira das 3 (três) necessidades fundamentais diferentes e específicas que a palavra " objeto" incorpora: a **necessidade prática** de manipulação, **a necessidade fenomenológica** de todo ato de

---

[59]Optamos por apresentar nesse capítulo as considerações dos objetos matemáticos e pensamento algébrico de cada teoria, além dos apresentados nos capítulos 3 e 4.

consciência e a **necessidade epistemológica** comum a todo conhecimento : o de não confundir os objetos do conhecimento com suas representações.

O autor conceitua o termo "objeto" no contexto educacional em quatro realidades diferentes (DUVAL, 2009 *apud* IORI, 2015, p.15):

- **o objeto como uma coisa** (em grego: πρᾶγμα [pragma], em latim: res), ou seja, o objeto concreto, físico, acessível através dos sentidos, direta ou instrumentalmente;
- **o objeto intencional,** isto é, cuja atenção é focada, o que é percebido imediatamente e diretamente (propriedade, forma, cor, som etc., ou seja, aspectos estruturais ou simbólicos sobre o objeto, e aspectos qualitativos ou concretos não inerentes ao objeto) de cada vez que a atenção é direcionada para algo, que é o objeto de um ato (intencional) de significação;
- **o objeto fenomenológico**, isto é, o objeto como aparece na consciência e que permite ao sujeito reconhecê-lo em suas ocorrências;
- **o objeto do conhecimento**, isto é, o invariante, independentemente de sua possível maneira de "existir", em múltiplas possíveis representações, em especial:
  - ✓ **o objeto experimental**, que é o invariante causal de uma multiplicidade de fenômenos observados (representações não semióticas);
  - ✓ **o objeto matemático**, que é o invariante operativo ou lógico-discursivo de uma multiplicidade de representações semióticas.

4.2 Objetos Matemáticos na Teoria da Objetivação

Questionamentos do tipo: Como podemos alcançar o conhecimento dos objetos matemáticos?ou Quais são os meios para mostrar o objeto matemático? são propostos por Radford (2005,p.203) quanto à natureza geral dos objetos matemáticos.

A primeira questão sinaliza que os objetos matemáticos são concebidos como 'modelos fixos' de atividade, uma antropologia epistemológica considerando a prática histórica, social, cultural, mediada de maneira reflexiva em um movimento de tornar algo aparente, em dar sentido a algo.

Segundo Radford (2013) essa mediação ocorre semioticamente por conta de tomada progressiva e crítica de consciência de sistemas de ideias, significados culturais, formas de pensamento etc. O autor afirma que "são os sistemas culturais de significação (espécies de superestruturas simbólicas) que oferecem um contexto comum de leitura, interpretação e ação" (RADFORD, 2015, p.14).

Para a segunda indagação, o autor denomina os meios semióticos de objetivação. Eles são objetos, artefatos, termos linguísticos,signos gerais que são usados para tornar uma intenção visível e para completar uma ação.

Embora abstratos, a Teoria da Objetivação concebe os objetos matemáticos como entes sócio-histórico-culturais, produzidos através do trabalho social (atividade) e pertencentes precisamente à categoria de potencialidades, e como tal, são abstratos ou gerais (RADFORD, 2015).

4.3 Pensamento Algébrico para a Teoria da Objetivação

O entrelaçamento de diferentes meios semióticos- pedras, riscos, axiomas, escrita alfanumérica e algébrica-, são decorrentes dos Sistemas Semióticos de Significação Cultural (SSSC), que são uma espécie de superestrutura (...) em que estes sistemas validam ou não, o conhecimento construído e suas formas de representação (GOMES, 2016, p.72).

Nesse sentido, o desenvolvimento histórico da Álgebra - a Álgebra simbólica do Renascimento, por exemplo-, "expressa à postura teórica da razão instrumental do Ocidental século XVI e as abstrações sociais apresentadas pelo capitalismo mercantilista emergente". (RADFORD, 2017, p.250).

A Álgebra configura-se como um exemplo de SSSC, que segundo a Teoria da Objetivação é indicado por 3 (três) funções: a ontológica, da produção de significado e da organização do indivíduo com o mundo (RADFORD, 2013). Desse modo, ao assumirmos a Álgebra - enquanto construção historicamente coletiva -, reiteramos que

> "(...) O pensamento algébrico como um modo de pensar culturalmente codificado foi desenvolvido e refinado no decorrer da História Cultural. Ela preexiste em uma forma ideal desenvolvida antes que os alunos participem das atividades de aula" [60]. (VERGEL,2018, p.59).

[6060] (...)"*el pensamiento algebraico como forma cultural codificada de pensamiento, ha sido desarrollado y refinado en el curso de la historia cultural. Èste pre-existe em uma forma ideal desarrollada antes de que los estudiantes participen de atividades de classe".*

Para Radford, o Pensamento Algébrico é processual e constituído de 3 (três) elementos específicos e interrelacionados denominados:pensamento algébrico factual, pensamento algébrico contextual e pensamento algébrico padrão.

Ao longo desse item iremos exemplificar esses elementos, porém de maneira breve. No pensamento algébrico factual o senso de indeterminação compreende as incógnitas, variáveis, parâmetros; o pensamento algébrico contextual considera os objetos desconhecidos e os modos particulares de designar esses objetos indo além de situações particulares para situações gerais e pôr fim o pensamento algébrico padrão que consiste na significação dos fenômenos de maneira específica, como uma expressão algébrica.

Podemos afirmar que a Teoria da Objetivação considera o indeterminado como “conhecido”, pois o desconhecido não denota o pensar algébrico. É essa indeterminação em contraste a uma determinação numérica que possibilita escolher uma variável ou incógnita por outra. Desse modo, “não faz sentido fazer a substituição de 3 por 3 em aritmética, mas em Álgebra , faz sentido a substituição de uma incógnita por outra, sob determinadas condições”. (ALMEIDA, 2016, p.72)

As heurísticas presentes como tentativa e erro (indução), ou percepção da comunalidade em sequencias de padrões, por exemplo, podem indicar que os estudantes qualificam o mesmo e o diferente em uma sequencia proposta de diversas formas, uns entendem de maneira verbal, enquanto outros recursivamente.

Para o aluno “iniciante” perceber a semelhança não é algo que acontece de repente. Pelo contrário, é um processo gradual sustentado por uma distinção dinâmica entre o mesmo e o diferente (RADFORD, 2006, p.4) (destaque do autor).

Radford (2006) apresenta em um artigo[61]e tomando por base que os currículos contemporâneosfavorecem o simbolismo algébrico, se propõe a investigar a generalização algébrica a partir do uso de diferentes meios semióticos no processo de produção de significados .

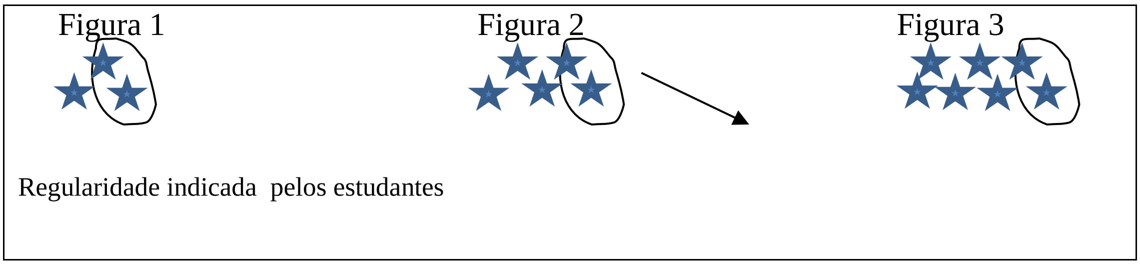
O autor assegura que

> (...)Oconhecimento algébrico abrange possibilidades, de se pensar em coisas indeterminadas e que só pode se tornar objeto de pensamento e interpretação apenas se colocado em movimento e ser transformado em um objeto de sentidos e consciência através de atividades específicas de solução de problemase mediadas por diferentes meios semioticos(RADFORD,2015).

[61]Resultante de um estudo longitudinal desenvolvido no início anos 2000 em Ontário , Canadá.

Um dos exemplos propostos aos alunos desse estudo investiga a percepção da regularidade nos termos em uma sequência recursiva imagética, conforme indicação a seguir:

Figura 16: Sequência recursiva



Fonte:(Adaptado Radford ,2006)

A percepção da regularidade subjacente aos termos de um padrão pode ocorrer a partir de diferentes meios semióticos, indicando ao mesmo tempo semelhanças e diferenças. Nessa proposta, um dos meios semióticos apresentado pelo autor na resolução da proposta, foi a indicação feita por um aluno de uma regularidade - ao destacar com um lápis as figuras adicionais em diagonal - constante em cada figura ou quando o estudante diz: *aumenta de dois em dois...*, indicando o **pensamento álgebrico factual**.

O **pensamento álgebrico contextual** pode ser ilustrado quando o estudante indica de maneira oral e/ou escrita que a quantidade de desenhos da proxima figura da sequencia *é duas vezes a figura mais um.*

A partir da notação algébrica $2\ \text{x}n + 1$, Radford destaca o **pensamento álgebrico padrão**, que nesse nível de generalidade - a escrita algébrica - há justaposição de 5 (cinco) signos: “2”, “n “, “x”, ” +”, “1 “, em que cada um deles assumiu uma significação distinta.Para determinar a Figura 100 , por exemplo, há um alerta quanto a um determinado meio semiótico, que ás vezes torna-se insuficente para a generalização. Radford sublinha que a fórmula algébrica é a cristalização de um processo semiótico dotado de uma história, em que a expressão padrão da fórmula $f(n) = 2n + 1$, ainda não foi simplificada pelos alunos pois :

> (...) a fórmula ainda está por trás dos remanescentes do lado narrativo da Álgebra, onde os signos desempenham o papel de narrar uma história e onde a fórmula ainda não atingiu a autonomia de um artefato simbólico destacado (RADFORD, 2002).

Para a teoria da Objetivação os meios semióticos mobilizados pelo estudante ao se referir ao indeterminado , indica o pensar algébrico.

4.4 Pensamento Algébrico para a Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Quanto ao ensino e aprendizagem de Álgebra, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica destaca que do ponto de vista cognitivo, os conceitos matemáticos não constituem a parte mais importante, mas sim os gestos intelectuais, pois permitem a conceitualização tendo por referência os objetos algébricos (DUVAL, 2013).

Outra questão essencial para a aprendizagem da Álgebra, considerando um ensino conduzido de um ponto de vista cognitivo, se refere às funções discursivas e suas respectivas operações cognitivas. De acordo com Duval, os objetos algébricos utilizam os registros discursivos em 3 (três) representações: a língua natural, a linguagem numérica e a linguagem algébrica.

Os registros discursivos são utilizados primeiramente para representar relações operatórias entre números e letras recorrendo a funções discursivas e suas respectivas operações cognitivas; dentre elas, a designação[62] da função referencial (DUVAL, 2004).

De acordo com o autor, a designação dos padrões de regularidade e de diferentes formas permite as apreensões necessárias para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Temos aqui uma consideração de Duval, que vai ao encontro do que apresentamos no Capitulo 3 , que para alguns autores,o pensamento algébrico não se caracteriza como uma extensão do pensamento aritmético.

Ao considerar o Pensamento Algébrico, a designação é fundamental e intrínseca à atividade cognitiva de conversão e decorrente congruência com suas especificidades assinaladas por Brandt e Moretti

> a operação cognitiva da conversão vai exigir colocar em correspondência as unidades de sentido de duas representações semióticas de naturezas diferentes, que representam o mesmo objeto; identificar as unidades de sentido de cada uma das representações;distinguir, em uma transformação, a

[62]A designação é uma das funções dos registros discursivos composta de 4(quatro) funções: referencial validar do ponto de vista lógico, social ou epistêmico, apofântica em que as ações são voltadas para compor enunciados, a função de expansão discursiva que mobiliza ações para expandir osdiscursos por meio da acumulação de informações ou substituições e a função de reflexividade discursiva formadas por ações que representam leis ou propriedades validadas na comunidade científica.

> transformação de partida e a de chegada(BRANDT e MORETTI, 2008, p.10).

Uma questão que Duval (2015) ressalta em relação ao uso das letras em situações do contexto algébrico em sala de aula é: Porque devo utilizar letras,se posso utilizar números? Dependendo dos registros semióticos escolhidos -e consequentemente as representações mobilizadas- a designação ocorrerá ao utilizar letras, para indicar cálculos e utilizar algoritmos.

> Os registros discursivos irão exigir o cumprimento das funções discursivas, as quais exigem, por sua vez, as capacidades de observar padrões de regularidade expressos por meio de relações entre números articulados por operações aritméticas. Além disso, é necessário explicitar esses padrões com a utilização de sistemas semióticos. (BRANDT e MORETTI, 2018, p.25)

O desenvolvimento da capacidade de designar evidencia a importância da função discursiva de designação, que pode contribuir segundo a TRRS para o ensino e aprendizagem da Álgebra ao possibilitar que as relações entre números e operações aritméticas sejam indicadas em representações nos registros da língua natural, da linguagem algébrica, do registro gráfico e imagético.

4.5 Os elementos da TO e TRRS: indicativos e distinções

A abordagem semiótica é o alicerce tanto para a Teoria da Objetivação, quanto da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Porém, a noção de signo de cada uma se diferencia de maneira sutil.

Na TRRS, a mobilização dos signos[63] é explicita ao recorrer aos registros. Os signos desempenham a função de **comunicação** e **expressão** dotando de significados os objetos do saber (objetos matemáticos).

São considerados em termos de registros de representação – aritmético, algébrico, gráfico-, e são de uso explícito no ensino e aprendizagem de matemática. Desse modo, “os signos preenchem uma função cognitiva para produzir novas informações ou para estabelecer novos conhecimentos”. (DUVAL, 2011, p. 26)

---

[63] A palavra signo nesse parágrafo é utilizada enquanto correspondente das representações semióticas.

Na TO, a noção de signo é mais implícita, permeada pelas relações dialéticas das **formas de produção do saber** e de **colaboração humana**. Para a TO a mobilização de diferentes signos é um processo tênue. Os signos

> “participam de todo o processo de ensino e aprendizagem: no processo de refinamento das forças de pensar e agir que levam à constituição do saber; labor comum que conduz à materialização do saber em conhecimento, no esforço para objetivar as formas culturais de pensamento e ação; nos processos de objetivação e subjetivação”. (MOREY, 2020, p.67)

De acordo com a TRRS, um gesto indicativo “no ar” de uma reta - em uma situação que contemple o objeto matemático Função Polinomial do 1◦ Grau-, é irrelevante, enquanto que para a TO o gesto é um meio semiótico de objetivação da materialização do saber desse objeto matemático.

Ao investigarmos uma situação sob lentes teóricas distintas - e a maneira como os elementos das teorias emergem -, fez-se necessário a indicação de especificidades para um “refinamento” na análise e para fornecer uma base de **comunicação interteórica**[64] (ARZARELLO *et al*. 2008, p.9).

Diante do exposto, compilamos no Quadro 10 as indicações dos princípios, metodologia e questões paradigmáticas da Teoria da Objetivação e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

[64] Grifo nosso.

Quadro 10: Especificidades de cada teoria

	Teoria da Objetivação	**Teoria dos Registros de Representação Semiótica**
Princípios	A Teoria da Objetivação pressupõe que o conhecimento é uma construção humana que deriva das relações dialéticas legitimadas de maneira sociais, histórica e culturalmente constituídas. O processo de objetivação está intrinsecamente relacionado ao processo de subjetivação. As subjetividades coproduzem-se não na contemplação, mas nas formas de colaboração humana, permeada pelos vetores da ética comunitária: compromisso, cuidado e responsabilidade.	O denominado Paradoxo Cognitivo emerge como inevitável devido à ubiquidade dos signos na matemática, (MOREY, 2020, p.45). Por conta da característica epistemológica fundamental da Matemática- o modo de acesso aos objetos do conhecimento-, dois requisitos fundamentais e opostos decorrem desse modo de acesso: para realizar qualquer atividade matemática, as representações semióticas são imprescindíveis e, no entanto os objetos matemáticos não devem ser confundidos com as representações semióticas. Ou seja, a *noésis* (apreensão conceitual) é inseparável da *semiósis* (representações).

Metodologia	Do ponto de vista metodológico, a TO afirma que a **atividade** não é uma entidade homogênea. Para a TO não é simplesmente estar em pequenos grupos que potencializa as formas de colaboração humana e produção de subjetividades. Faz-se necessário, o Labor Comum permeado pelas vertentes da ética comunitária proposto por Radford: a responsabilidade, o compromisso e o cuidado com o Outro. Não é a atividade de um aluno isolado ou a atividade de um professor isolado, mas um fenômeno individual-social que se move em direção a um objeto (o objeto da atividade), mesmo que tal objeto não apareça para cada aluno com a mesma clareza e a mesma compreensão. O objeto da atividade é multifacetado e sempre mudando na consciência de cada aluno. (Radford, 2015). A estrutura objeto – objetivo-tarefa é, portanto, uma parte central do design da sala de aula, visto que a cada produção de saberes, as formas de colaboração humana ocorrem de modo indissociável.	Os procedimentos metodológicos da TRRS diferenciam a análise cognitiva em relação à análise matemática. A análise matemática – **face explicita** da matemática - se baseia “em função dos conhecimentos particulares que os alunos devem mobilizar nas atividades e nos problemas que são propostos” (DUVAL, 2011, p.148). A análise cognitiva da produção dos estudantes- a partir de dispositivos de observação do pesquisador-, ocorre em função dos registros mobilizados de modo coordenado. A ferramenta de análise é a separação da resolução das propostas quanto ao tratamento e a conversão. De acordo com Duval, a análise cognitiva (...) “apresenta duas vantagens metodológicas. Ela permite analisar com precisão não apenas tudo o que um aluno faz,diz,ou tenta, mas igualmente tudo o que ele não faz, ou o que ele não observa mesmo no que ele faz. Ela permite, em seguida, comparar as produções de um mesmo aluno em problemas que mobilizam conhecimentos matemáticos muito diferentes”. (DUVAL, 2011, p.149) Segundo os pressupostos da TRRS, que o professor deve ter consciência da **face oculta** da Matemática, ou seja,o reconhecimento imediato de um mesmo objeto matemático em duas representações

		semióticas bem diferente; e a conscientização da maneira específica que cada registro pode se transformar em novas representações, as representações semióticas produzidas. Desse modo, é preciso organizar o ensino de matemática privilegiando a face oculta e propiciando aos estudantes os meios para uma autonomia intelectual total. (DUVAL, 2016, p, 35)
Questões Paradigmáticas	✓ De que maneira os estudantes tomam consciência do conhecimento constituído a partir dos sistemas semióticos de significação cultural? ✓ Quais os meios semióticos utilizados que permitem a materialização do saber (potencial) em conhecimento? ✓ Como a ética comunitária se manifesta no contexto da sala de aula?Quais implicações da ética comunitária nos processos de objetivação e subjetivação?	✓ Como a análise cognitiva da produção dos estudantes auxilia no entendimento das dificuldades de aprendizagem em matemática? ✓ Qual a importância da utilização de diferentes registros de representação semiótica, no ensino e aprendizagem de matemática? ✓ Como estimular a coordenação entre os registros de representação semiótica, em situações de ensino? ✓ Por que o ensino monorregistro pode dificultar a aprendizagem de Matemática?

Fonte: a Autora

No capítulo 3 (três) indicamos os aspectos de cada teoria. Enquanto a Teoria da Objetivação é considerada uma teoria com abordagem semiótica /social, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica se pauta em uma abordagem semiótica /cognitiva.

Retomando a noção de semiótica- enquanto ciência que trata dos processos de significação -, a *priori*, a ideia de signo para a TO tem a função de objetivação, e para a TRRS a função de comunicação.

A partir das distinções presentes no Quadro 10, podemos perceber como os elementos de cada teoria possuem características próprias, evidenciando os aspectos sociais e cognitivos pertencentes a cada uma.

Ressaltamos que somente uma justaposição entre duas perspectivas teóricas não é suficiente para "vir" à tona as potencialidades de cada abordagem. Ao verificarmos as distinções, reafirmamos que (...) a diferenciação auxilia a tomar consciência das suposições das próprias teorias. (BIKNER-AHSBAHS *et al* , 2010, p.167) e dessa maneira, a compreensão de cada teoria em seus aspectos epistemológicos e ontológicos foi mais abrangente.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Descrevemos o caminho metodológico da investigação subsidiado pelos instrumentos analíticos, o modo da coleta de informações, o contexto do estabelecimento de ensino e características da turma aqui retratada, seguida da descrição do desenvolvimento da situação proposta. Por fim, as etapas da análise multissemiótica.

A investigação apresentada situa-se nos pressupostos da pesquisa qualitativa-descritiva. Nesse tipo de abordagem a análise e interpretação das informações coletadas ocorrem de modo mais profundo e proporcionam novas perspectivas a respeito de um determinado fenômeno.

As características da pesquisa qualitativa segundo Ludke e André(2013) consistem:

- *Na utilização do ambiente natural como fonte direta de coleta de informações.* A coleta de informações ocorreu no estabelecimento de ensino em que a pesquisadora leciona;
- *Na predominância descritiva das informações.* No item 5.4 indicamos a descrição detalhada no desenvolvimento da situação nos grupos.
- *No destaque maior ao processo do que ao produto*. A investigação dos elementos da TRRS e TO nos proporcionaram diferentes inferências do contexto da sala de aula;
- *Tem o pesquisador como instrumento fundamental para esta coleta*. A pesquisadora também é professora de matemática da turma do 6 TA.

A metodologia escolhida veio ao encontro do referencial teórico e dos objetivos da pesquisa, na investigação dos elementos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Teoria da Objetivação, além de uma característica do Pensamento Algébrico – a covariação - na situação “Quantos telefonemas”?

5.1 Contexto da Investigação e coleta de informações

O estabelecimento de ensino escolhido para o desenvolvimento da proposta foi o Colégio Estadual Antônio Raminelli na cidade de Cambé no estado do Paraná. O colégio-local de exercício da pesquisadora desde 2004 -, se localiza no bairro Ana Rosa e no ano letivo de 2019 contava com dezesseis (16) turmas de Ensino Fundamental Anos Finais e dez (10) turmas de Ensino Médio.

A turma da 6ª série do Ensino Fundamental Anos Finais era composta por trinta e um (31) estudantes, dos quais participaram da proposta vinte e nove (29) estudantes com idades entre 10 e 11 anos. A partir de maio de 2019, cinco (5) estudantes faziam parte da Mais Aprendizagem [65] no intuito de auxiliar no processo de aprendizagem de Matemática deles.

Quando foi proposta a situação investigada nesse trabalho, os estudantes prontamente se mobilizaram para constituir os grupos, somente verificando a sugestão da pesquisadora de ter no mínimo dois (2) integrantes e no máximo cinco (5).

No total foram formados oito (8) grupos: seis (6) grupos com quatro (4) estudantes; uma dupla e um trio denominados grupos G1, G2,..., G8. Esclarecemos que investigamos quatro (4) grupos G1, G2, G3 e G4, pois todos os integrantes participaram dos momentos distintos do desenvolvimento da proposta

A coleta de informações ocorreu durante três (3) aulas de cinquenta (50) minutos cada cuja sequência de ações está indicada no Quadro 11.

A pesquisadora sugeriu que os estudantes poderiam se reunir nas mesas do pátio do colégio - por ser um local maior, arejado, com boa iluminação e quadro de giz.

O recolhimento das informações ocorreu por meio de fotografias, gravações em áudio em cada grupo com aparelhos *smartphones* e gravadores de áudio, anotações em diários da pesquisadora e protocolos dos grupos.

Quadro 11: Detalhes das Ações

Data	Quantidade de aula(s)	Local	Ações desenvolvidas
27/11/2019	01	Sala de aula	✓ Formação dos grupos. ✓ Apresentação da proposta ✓ Discussão preliminar a respeito da quantidade de telefonemas.
28/11/2019	02	Pátio do colégio	✓ Discussões sobre quantidade de telefonemas ✓ Mobilizações de meios semióticos

[65]O Projeto Mais Aprendizagem (PMA) acolhe estudantes com dificuldades em disciplinas variadas e recebe alunos de todas as séries do ensino fundamental - anos finais e do ensino médio. Objetivo: Atividades em contraturno que visam a fazer com que o aluno cumpra sua trajetória escolar com o aprendizado esperado para cada série e no tempo previsto.Público-alvo: Estudantes com dificuldades escolares.https://www.educacao.pr.gov.br/Pagina/Programas-e-Projetosacesso em 26/07/2021.

5.2 Situação do Contexto da *Early Algebra*

Ressaltamos que a partir do 2º trimestre do ano letivo de 2019 constava no PTD[66] da referida turma, sugestões de situações problemas com enfoque no Pensamento Algébrico sugeridas pela BNCC, DCE e CREEPS -, descritos no capítulo 2.

Nesse sentido ao propormos a situação do contexto da *Early Algebra*, os estudantes já haviam sidos apresentados a outras situações como, por exemplo, a identificação de padrões em sequencias recursivas, sequencias não-recursivas[67].

Após a definição dos grupos foi entregue uma folha de sulfite contendo a seguinte proposta:

Quadro 12: Situação "Quantos telefonemas"?

Considere que 5 amigos desejam ligar uns para os outros para desejar Feliz Ano Novo. Quantas ligações podem ser feitas?

Fonte:Adaptado Canavarro (2007,p.82)

Esclarecemos que a denominação "Quantos telefonemas"? foi sugerida pela estudante I . que após receber a folha com a situação perguntou :

-Então é pra saber quantos telefonemas?

A pesquisadora assentiu e anotou no diário de informações essa sugestão para nomear a proposta.

Inicialmente a resolução de muitos grupos foi de cinco (5) telefonemas como resolução da proposta. Assim, sugerimos aos estudantes irem ao quadro e indicarem suas resoluções, o que foi prontamente aceito.

Com o compartilhamento do total de ligações – as soluções foram 5, 10 e 20 ligações respectivamente e os grupos G2 e G3 refizeram a proposta utilizando diferentes materiais: papéis coloridos, cola branca, tesouras, copos de plástico, pedaços de papelão, lápis e canetas diversas, tintas.

[66] Plano de Trabalho Docente.
[67] Exemplo presente no Anexo 02.

No item a seguir, apresentamos uma descrição detalhada da situação "Quantos telefonemas"? , com os quatro (4) grupos G1, G2, G3 e G4 da turma do 6◦ ano[68], utilizada para a coleta de informações e subsídios para posterior análise multissemiótica.

Na codificação dos integrantes, utilizamos a inicial do nome de cada estudante e letra maiúscula – em caso de iniciais repetidas atribuiu-se a letra subsequente do nome em letra minúscula- e a letra P para indicação da pesquisadora nas interações dialógicas.

5.3 Estrutura da Análise Multissemiótica

A opção pelo termo análise multissemiótica de acordo com Radford e Sabena (2015); Sabena, Krause e Maffia (2016); Vergel (2019); Noroño (2020) decorre da diversidade de meios semióticos mobilizados na investigação e favorecendo os objetivos propostos nessa investigação.

O consequente diálogo interteórico resulta da ideia de contiguidade entre as teorias de abordagem semiótica – Teoria da Objetivação e Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

O instrumento a seguir ilustra como a análise multissemiótica foi conduzida na investigação dos elementos que emergiram durante a situação "Quantos telefonemas"? sob o enfoque da TO e da TRRS e para isso optamos por dividir a análise multissemiótica em 3 (três) etapas.

Quadro 13: Estrutura da Análise Multissemiótica

[68]A escolha dos grupos ocorreu devido a participação dos estudantes nas (três) 3 aulas e da posterior análise pormenorizada , evitando assim uma extensão de informações.

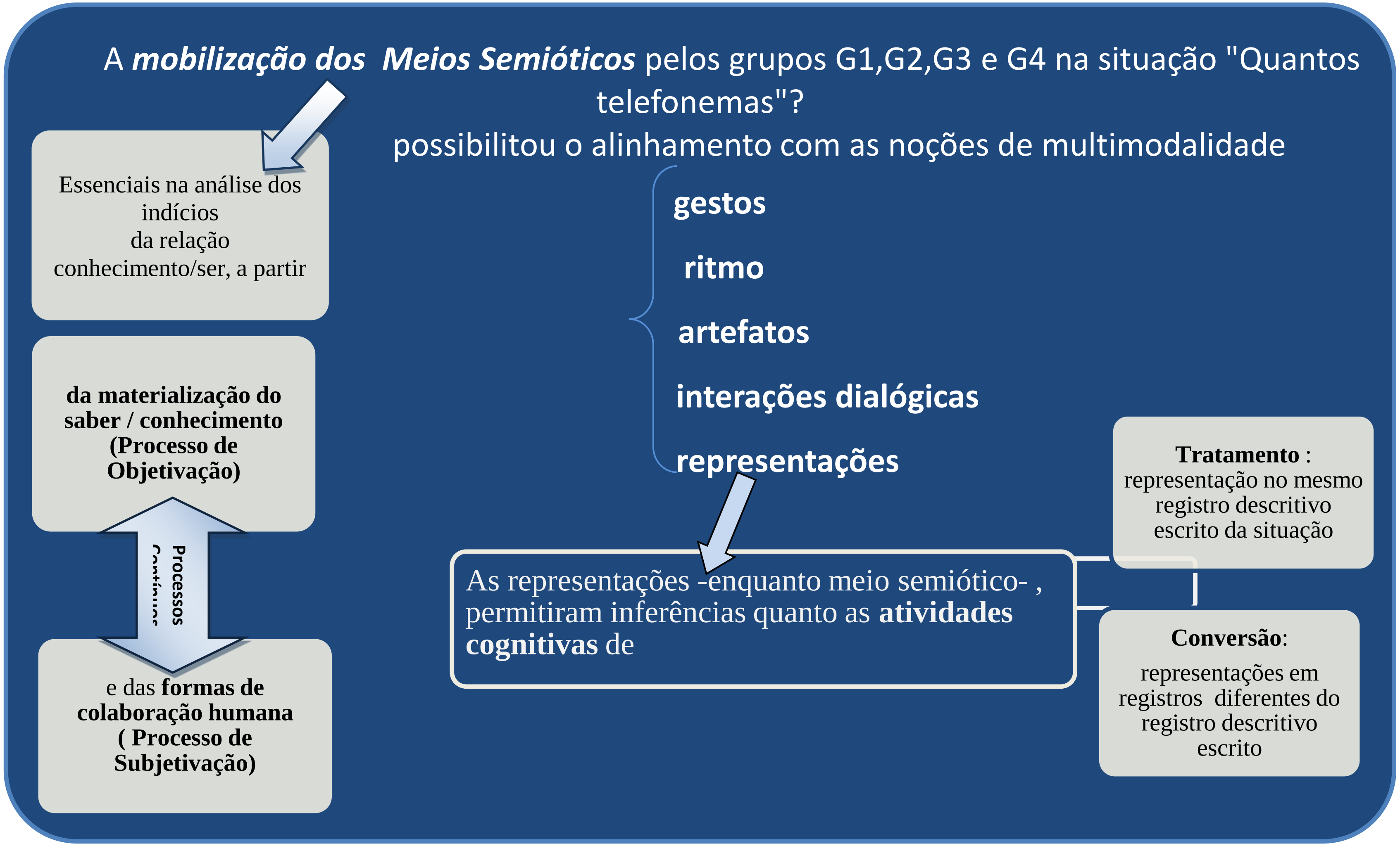
Fonte: a autora

Na primeira etapa temos as inferências considerando os **meios semióticos** mobilizados – gestos , ritmo, artefatos , interações dialógicas, representações-, onde a articulação com o conceito de multimodalidade veio ao encontro das informações coletadas na situação.

Na segunda etapa apresentamos a análise referente aos elementos da Teoria da Objetivação , os **processos de objetivação** e **subjetivação ,** ou seja, as formas de produção de saberes e de colaboração humana, nos quais os meios semióticos são essenciais.

A terceira etapa contém as inferências quanto às **atividades cognitivas** de **tratamento** , isto é, resoluções no mesmo registro descritivo escrito no qual a proposta foi sugerida-, e a **conversão**- mobilização de registros distintos do registro descritivo escrito-, foram analisadas a partir das representações – enquanto meio semiótico- em diferentes registros, indicados segundo os pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

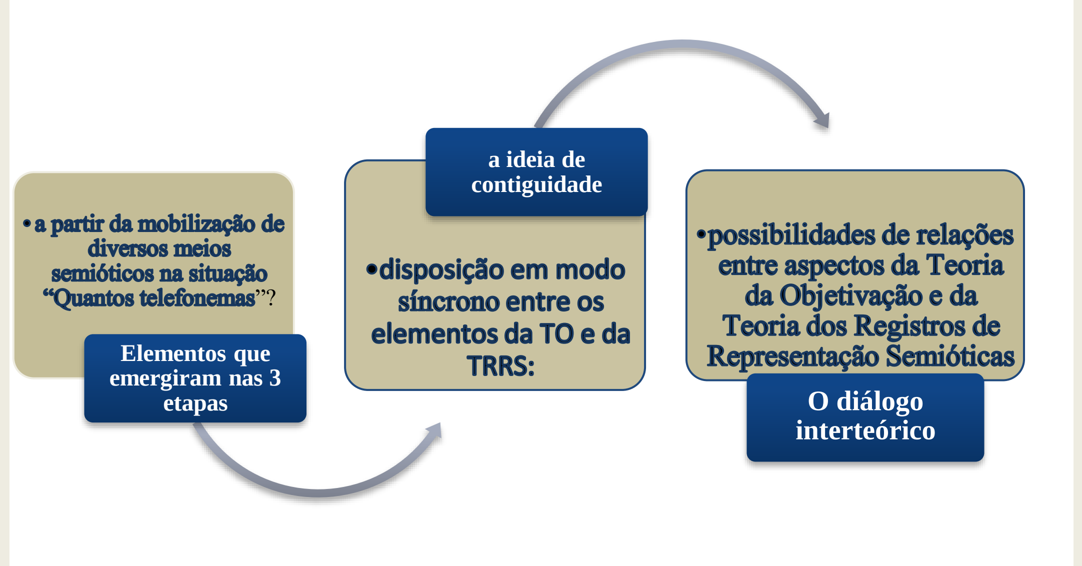
Quadro 14: Análise Multissemiótica: junção das 3 etapas



Fonte: a autora

O Quadro 14 contém a junção das 3 (três) etapas da análise multissemiótica relacionando os meios semiótico-: gestos, ritmo, artefatos , interações dialógicas e representações-, e a noção de multimodalidade.Em seguida, as inferências dos **processos de objetivação e subjetivação** a partir de **todos** os meios semióticos. No encadeamento seguinte , temos a análise das **atividades cognitivas** de **tratamento** e **conversão**, a partir do meio semiótico- representações- mobilizadas em diferentes registros.

Quadro 15:Contiguidade e Diálogo interteórico



Fonte: a autora

O esquema do Quadro 15 indica que a partir das inferências dos elementos que emergiram de acordo com as 3 (três) etapas da Análise Multissemiótica, elaboramos considerações de acordo com a ideia de contiguidade e um possível diálogo entre as teorias .

A seguir, apresentamos a descrição da resolução da situação proposta, com destaque às interações dialógicas entre os integrantes de um mesmo grupo, entre grupos diferentes e com a pesquisadora, confecção de artefatos e representações.

5.4 Descrição da situação

A pesquisadora também atuava como docente da disciplina de matemática dessas turmas. Consideramos que isso auxiliou no entendimento teórico proposto, corroborado pela vivência e vínculos decorrentes das cinco (5) aulas semanais de matemática.

No contato inicial com a situação (27/11/2019) os integrantes do grupo G1 abrem seus estojos e começam a tirar vários lápis de cor. Nisso, os estudantes vêm até a mesa da pesquisadora e começam a espalhar os lápis (Figura 17).

Estudante A: A gente pode usar os lápis para ser as cinco (5) pessoas?

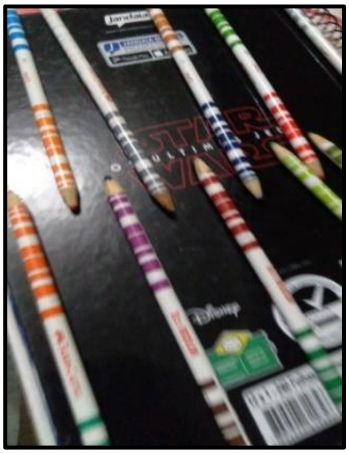
P: Como vocês pensam em fazer?

Estudante Do: Assim... cada pessoa são(cinco (5) lápis! (e olha para o estudante A que acena com a cabeça afirmativamente).

O estudante Di olha para a pesquisadora e para o estudante E que se mantém quieto observando os lápis de cor e diz:

Estudante Di: Dá pra cada pessoa ser uma cor... tipo azul...(em seguida coloca cinco (5) lápis de diferentes cores lado a lado).

Figura 17: Indicações com lápis de cor



Fonte: Protocolo do grupo G1

Nesse momento, integrantes de outros grupos param as discussões e olham para os lápis dispostos na mesa. Do fundo da sala a estudante I diz:

Estudante I: Ué... assim dá 25 telefonemas!!

A pesquisadora olha para os estudantes e percebe que o estudante Do de repente fica calado - parecendo estar desconfortável. O estudante Pi de um terceiro grupo pergunta:

Estudante Pi: A gente podia fazer usando umas fichas, né ?

P: O que você pensou?

O estudante Pi indica a estudante R do seu grupo que prontamente diz:

Estudante R: Assim, cada pessoa que liga a gente faz uma ficha em papel pra ver quantos telefonemas...

Nesse momento, a pesquisadora vai até o centro da sala, e pergunta para a turma:

- *O que vocês acham dessa ideia de utilizar fichas, lápis?*

Um burburinho toma conta dos grupos que rapidamente esboçam ideias de como poderiam indicar a resposta da situação "Quantos telefonemas"? . Como a aula já estava terminando, a pesquisadora propõe que na próxima aula os grupos que quisessem, poderiam trazer materiais diversos, como papéis coloridos, lápis de cor, canetas hidrográficas, cola, tesoura.

No dia seguinte (28/11/2019) com duas aulas geminadas, já ao adentrar na sala a pesquisadora observa que vários estudantes estão com materiais como: copinhos de plástico, papelão, cartolina, tintas, pincel, tesoura.

A pesquisadora solicita a presença de uma integrante da equipe pedagógica e pergunta se há possibilidade de ir com os estudantes até o pátio da escola, por ser mais espaçoso que a sala de aulas com mesas grandes, bancos e bebedouros com torneiras. Após confirmação com a equipe gestora, a pesquisadora orienta os grupos a se dirigirem ao pátio.

Cada grupo escolhe uma mesa e os 4 (quatro) grupos que haviam levado materiais diversos começam rapidamente a espalhar criando estratégias iniciais em esboços. Os outros grupos começam a "rascunhar" suas ideias em folhas de sulfite e/ ou caderno.

A pesquisadora começa a circular entre as mesas fazendo anotações no diário de campo, fotografando com aparelho *smartphone* e gravando as interações dos grupos. Inicialmente, se aproxima do grupo G1- estudantes A, Di, Do e E -, que na aula anterior propôs a indicação com os lápis de cor. Os integrantes do grupo não haviam trazido outros materiais e discutia avidamente qual estratégia seguir. A pesquisadora pergunta:

P: Então, como vocês estão pensando em indicar a quantidade de telefonemas?

O estudante Do olha os outros integrantes do grupo e diz:

Estudante Do: Acho que tava errado com os lápis ontem...

(Enquanto isso, o estudante A faz um olhar de desagrado e disfarça como se estivesse procurando algo no estojo).

P: E porque estava errado?

Quase que simultaneamente o estudante Di e Do justificam:

Estudante Do: (um pouco titubeante) *Se a pessoa que seria o "lápis azul" ligasse para 4 pessoas...* (o estudante Di olha o colega e rapidamente diz) *e as outras pessoas seguissem a lógica, a pessoa azul ia acabar ligando pra ela mesma.*

P: Qual seria o total de telefonemas?

O estudante E se manifesta dizendo que seriam vinte e cinco (25) telefonemas (e aponta com o dedo a estudante I) que na aula anterior já havia falado essa quantidade.

P: E como vocês irão indicar o total, então?

Os estudantes se entreolham e então o estudante A diz:

- *A gente vai ver, mas não pode ser vinte e cinco (25) ligações*... (em seguida olha o caderno do estudante Di que estava desenhando telefones).

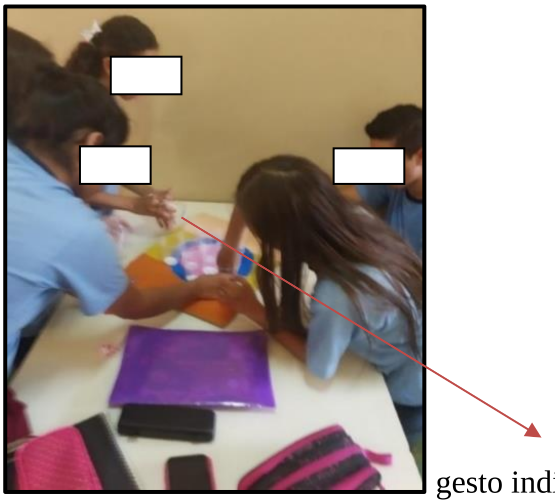
A estudante Ga (do grupo G2) se aproxima e diz que o grupo dela está com dúvidas do que fazer com o material que trouxeram. A pesquisadora se afasta e vai em direção ao grupo, onde há um papelão revestido de folhas coloridas com copinhos em cima.

P: Olha só ... qual ideia de vocês?

Estudante Ga: Ahhh... a gente pensou nos nomes dos amigos e fez as cores e os copinhos pra cada um .

Estudante E : No primeiro copo são quatro (4) fichas , depois vai diminuindo e - conforme Figura 18- *faz um gesto indicando que em cada copinho teria a quantidade de fichas demostrando quantas ligações cada um realizaria.*

Figura 18 :Estudantes Grupo G2 e indicação modelo com copos



gesto indicativo estudante E

Fonte:Protocolo do grupo G2

A estudante N olha para a pesquisadora e pergunta se podem fazer mais coisas para ver a resposta e a estudante E pergunta se é para fazer alguma " conta". Prontamente, a pesquisadora responde que podem indicar de quantas maneiras quiserem, inclusive com algoritmos.

Em seguida, a pesquisadora volta a circular entre os grupos quando é solicitada no grupo (G3) composto pelas estudantes I e R e os estudantes Pi e F, que estavam rascunhando em uma cartolina.

P: Então, vocês já decidiram o que fazer?

O estudante Pi olha para a colega I e diz que ela vai explicar a ideia , enquanto a aluna acena afirmativamente e diz que estão recortando fichas com desenhos de pessoas e depois mostra a cartolina com retângulos sendo esboçados lado a lado por Fa e Pi.

P: E quantas fichas com desenhos vocês fizeram?

A estudante R pega as fichas e conta rapidamente 10 (dez) fichas . A pesquisadora indaga se essa é a quantidade de ligações .

O estudante Pi , ainda esboçando os retângulos diz que sim, pois eles sabem (olha sorridente para os colegas) que a primeira pessoa liga para outras 4 (quatro) pessoas e depois cada uma liga para outra diminuindo.

A pesquisadora mostra os retângulos perguntando quantas fichas terá em cada retângulo. Nesse instante a estudante I , olha para a cartolina e diz:

Estudante I: Acho que vamos usar isso (apontando os retângulos) *tipo só para o rascunho.*

O estudante Fa coloca a lapiseira na mesa dizendo então para fazerem só um desenho, pois as 10 fichas seriam desnecessárias. A estudante R, olha séria para ele e pergunta:

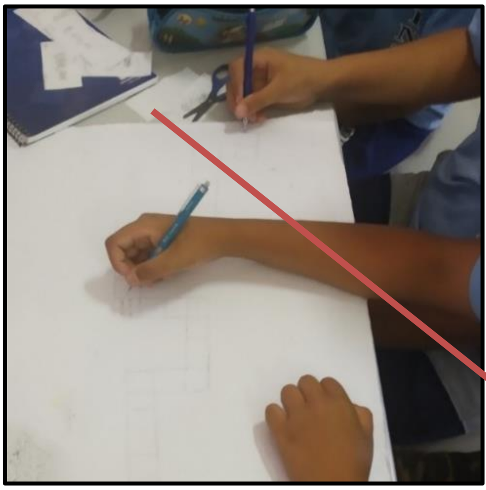
Estudante R: Ué, não são 10 fichas? Uma cada telefonema?

Quase em uníssono , os outros integrantes do grupo concordam a respeito da quantidade de telefonemas, porém ficam em dúvida quanto a continuar com o modelo indicado na cartolina e as fichas.

A pesquisadora então sugere que o grupo poderia partir da ideia das figuras desenhadas nas fichas , e indicar a resposta . O estudante Fa , abre uma pasta , retira uma folha de sulfite e diz ao grupo:

Estudante Fa: Vamos fazer uns retângulos com desenho e ver como mostrar...

Figura 19 : Estudantes Pi e Fa



fichas com desenhos

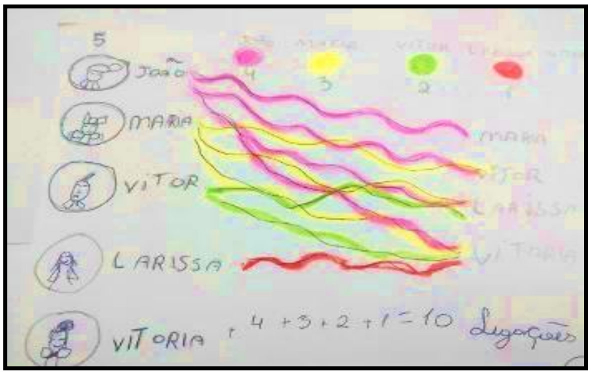
Fonte: Protocolo do grupo G3

O estudante Pi e as colegas concordam com as ideias , porém o estudante Pi diz que vai fazer primeiro um rascunho nos retângulos já desenhados na cartolina. A pesquisadora concorda e deixa os estudantes discutirem os procedimentos futuros.

Nesse ínterim, outros grupos estão indicando resoluções diversas para a situação “Quantos telefonemas”?. A pesquisadora é novamente chamada ao grupo G2 que havia feito mais uma resolução além do modelos com os copinhos.

A nova resolução (Figura 20) era composta de desenhos nominados , legenda colorida para cada pessoa e um algoritmo de adição .

Figura 20: Resolução Desenhos Nominados



Fonte: Protocolo grupo G2

P: Que bacana a resolução de vocês!!! A pesquisadora se manisfesta quanto à nova resolução e questiona se há relação com o modelo anterior dos copinhos, no que a estudante M -que durante a interação inicial com o modelo dos copinhos ficou sem manifestar-se- diz:

Estudante M: Tem sim...foi só contar quantas ligações (indica com o dedo a quantidade de papéis em cada copo e as "linhas'"coloridas)...

Estudante E: Daí foi "ligando" cada pessoa e a cor com quem ia falar , tipo (mostra para a pesquisadora com o lápis a resolução) *, o João com o rosa ligou 4 vezes , então 4 "linhas"!!*

P: E se fossem mais pessoas?

Estudante C: Só desenhar mais alguém e contar ...

Nesse instante , a estudante Ga intervém e reafirma as explicações dadas pela colega E e o estudante C, e diz olhando para a pesquisadora .

Estudante Ga: É assim : 5 pessoas tem aqui (indica a resolução do grupo), *então 6 junta 5+4+3+2+1, né?* .

A estudante Ga olha para os outros integrantes demonstrando um pouco de insegurança ,como se de repente estivesse em dúvida sobre o algoritmo. A estudante M diz assertivamente:

Estudante M: Sim ... sempre o depois soma uma pessoa mais !

A estudante E que estava tirando fichas dos copinhos , se vira em direção a colega M e diz de repente: - *Que " depois"?*

A estudante M solicita a folha com a resolução que estava com Ga e diz indicando com o lápis para a a colega E:

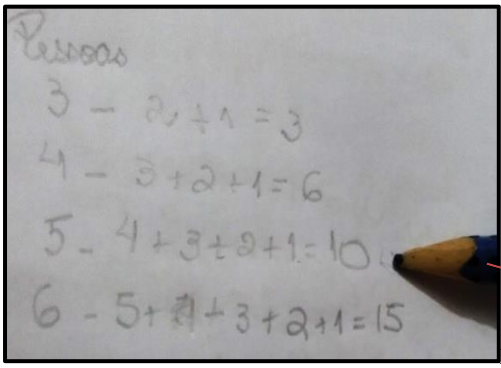
Estudante M: Assim ... 5 pessoas dá 10 (mostra as linhas e o algoritmo no final da resolução) *, e pra saber 6 pessoas soma 5 pessoas de antes com os 10 telefonemas....*

Após essa fala, o estudante C diz para a colega M , que ela estava repetindo o que a estudante Ga tinha explicado.O estudante olha para o grupo um pouco confuso , fica um instante reflexivo e aponta que para determinar a quantidade de ligações de outras quantidades de pessoas , deveria começar pela quantidade proposta diminuído de um (1) e então somar o resultado da quantidade anterior.

A pesquisadora indaga ao grupo se concordam com os algoritmos indicados na Figura 20. A estudante E , que havia voltado a colocar fichas nos copinhos ,se dirige para a colega M e ressalta:

Estudante E: Não é que soma mais uma pessoa !!! -diz enfaticamente a palavra uma- olha aqui !! (mostra a 3 linha do algoritmo que para 5 pessoas : 4+3+2+1=10). *Dá certo pra outras pessoas, mas tem que juntar o total de antes* (apontando para a terceira linha da Figura 21).

Figura 21 :Resolução algoritmos grupo G2



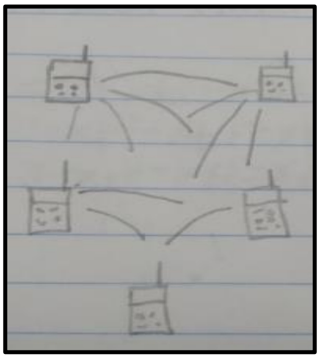
indicação com lápis

Fonte: Protocolo grupo G2

Integrantes do grupo G1, ficam curiosos com a discussão do grupo G2 e se aproximam para verificar as resoluções com exclamações entusiasmadas sobre o modelo com os copos , a resolução com os desenhos, legenda , linhas e algoritmos. O estudante A do grupo G1 , diz que o grupo só fez um “ desenhinho”...

A pesquisadora se disponibiliza a ir até o grupo G1 acompanhada pelos estudantes A e E e verificar a resolução (Figura 21). Os outros integrantes do grupo estavam dispersos com outras conversas e ao perceber a aproximação da pesquisadora , o estudante Di indica o desenho que fizeram e justifica:

Figura 22: Resolução Grupo G1



Fonte: Protocolo do grupo G1

Estudante Di: A gente já sabia pelos lápis que não podia dar 25 ligações... então cada telefone do desenho é uma pessoa...

P: E qual a quantidade total?

Estudante Do: São dez (10) ligações e mostra as“ linhas” de cada telefone dizendo sincronamente quatro (4) , depois três(3), duas (2) e uma ligação .Quando questionados se fossem mais pessoas pela pesquisadora, o estudante E sugere ir somando as ligações para cada pessoa a mais.

O estudante A intevém afirmando e apontando em direção ao grupo G2: Nem precisa fazer a conta igual eles. Quanto mais gente , mais ligações... é so desenhar mais telefones e ir aumentando as ligações de cada um!!

Em seguida, a pesquisadora é solicitada por uma dupla composta pelas integantes do grupo G4, estudantes So e Ca.Ao se aproximar, percebe folhas de sulfite com desenhos nominados (Figura 23) indicando cada pessoa da situação“Quantos telefonemas”?

Figura 23 : Resolução Desenho nominado G4

Fonte :Protocolo do grupo G4

P:Vocês fizeram desenhos? Descobriam quantas ligações?

As integrantes do grupo se entreolham de modo um pouco tímido , enquanto a estudante So diz em tom baixo: - *A gente sabe que vai dar dez (10) ligações* ....A estudante Ca percebendo a insegurança da colega So e justifica :

Estudante Ca: A gente foi explicando uma pra outra que Alice (indica com o dedo a resolução) *liga pra Ana, depois pro João, a Camila e o Pedro ...e daí dá quatro (4) ligações*...(segue falando de modo ritmado) *Ana liga pra três (3) João , Camila e Pedro , João liga duas vezes: Camila e Pedro , a Camila só uma vez pro Pedro e o Pedro não precisa ligar pra ninguém , porque já falou com todo mundo!!*

Ambas integrantes do grupo G4 olham para a pesquisadora- como que aguardando uma validação da resposta -, que é confirmada . Ainda assim , se percebe uma insegurança e a pesquisadora então indaga:

P: Vocês explicaram a resposta muito bem! Como será que podem indicar o total de 10 ligações? E se fossem mais pessoas na situação?

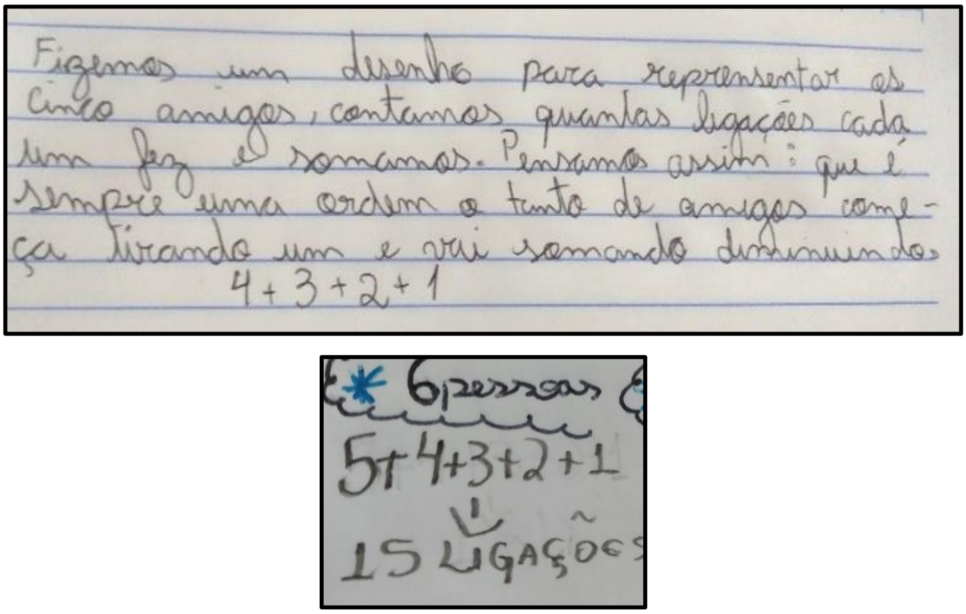
A estudante So, anima-se e diz para a pesquisadora esperar um pouco. Retira um pedaço de sulfite e começa a escrever o que a colega Ca havia explanado (Figura 23). Concomitantemente , a estudante Ca faz um algoritmo considerando seis (6) pessoas na situação "Quantos telefonemas"? .

Ao terminarem as resoluções, perguntam se tá certo o que escreveram e que para seis (6) pessoas seriam quinze (15) telefonemas).

P: Muito bem!!! Está correto sim !!

Estudante Ca: Que bom que deu pra entender aqui (indica a resolução escrita) *e na conta também!!!*

Figura 24: Resoluções Grupo G4



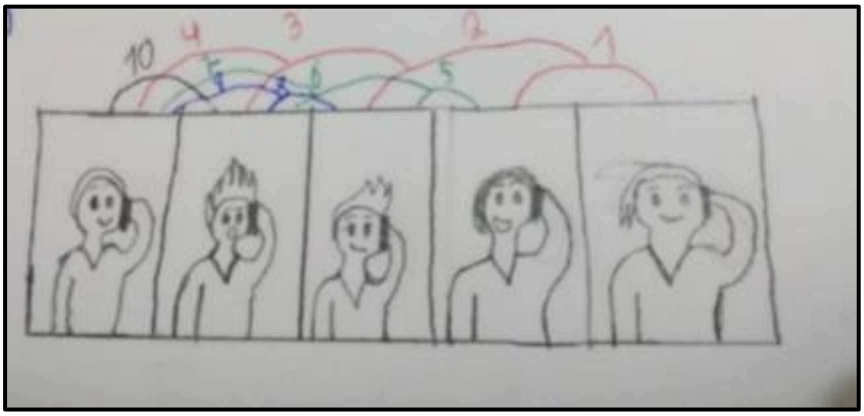
Fonte: Protocolos do grupo G4

Após a interação com as estudantes do grupo G4, a pesquisadora orienta os grupos a guardarem os materiais, recolher qualquer papéis , pois a aula já estava para acabar.

Quando alguns grupos já saem do pátio e se encaminham para a sala de aula, o estudante Pi do grupo G3 se aproxima da pesquisadora e diz que no fim ficaram com problemas, que questiona o que havia ocorrido.

Estudante Pi: A gente sabia que ia dar dez (10) ligações.Mas deu confusão , porque elas não quiseram deixar as fichas!!!! ....(mostra as integrantes do grupo- as colegas I e R -, que haviam se levantado e estavam voltando para sala) .*Daí, a gente*(indica o estudante Fa com um gesto de vai e vem) *fez um desenho* (Figura 25) - *mostrando em cada cor o tanto de ligações - deu dez (10) telefonemas. Elas, não ajudaram no desenho!!! Só ficaram conversando...*

Figura 25 : Resolução Grupo G3



Fonte : Protocolo grupo G3

Ao final das resoluções os grupos entregaram as folha com as resoluções e guardaram os artefatos em uma sala de estudos , para posterior exposição na biblioteca durante a Semana Cultural e Científica do Colégio .

6 ANÁLISE MULTISSEMIÓTICA

6.1 Primeira Etapa: A mobilização dos Meios Semióticos

A opção de iniciar a análise das informações nessa etapa pelos meios semióticos se deve ao fato das teorias (TO e TRRS) possuírem a abordagem semiótica como basilar. Além disso, a mobilização e/ou produção dos meios semióticos permitiu inferências amplas dos processos de objetivação e subjetivação.

As representações regulares (tabelas, gráficos) e idiossincráticas (desenhos, esquemas)- enquanto meio semiótico – , em diferentes registros possiblitaram as inferências das atividades cognitivas.

Descrevemos a seguir os meios semióticos mobilizados pelos grupos G1, G2, G3 e G4.

6.1.1 Gestos

Em cada grupo, verificamos que um dos meios semióticos mais utilizados foram os gestos denominados dêiticos, ou seja, gestos que indicam um objeto ou evento cuja interpretação depende do contexto em questão.

Quando a estudante M do grupo G2 mostra no modelo construído que o copinho de plástico (Figura18, p.104) contém a quantidade de fichas referentes aos telefonemas de cada pessoa e às linhas coloridas, ela recorre aos gestos dêiticos como forma de legitimar a nova resolução composta de desenhos, linhas coloridas e algoritmo de adição (Figura 21).

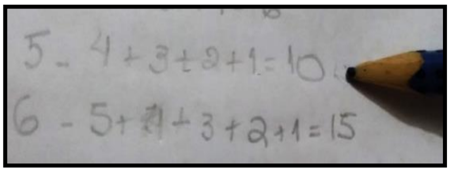
Do mesmo modo, a estudante I do grupo G3, ao apontar os retângulos desenhados na cartolina (Figura 19, p.107), e a estudante Ca (G4), ao indicar a resolução com as pessoas nominadas (Figura 23) e a resolução escrita (Figura24), utiliza o gesto dêitico – geralmente com o dedo indicador – para reforçar suas interações com outros integrantes do grupo e/ou com a pesquisadora.

Inferimos que os gestos dêiticos, além de serem utilizados como forma de validação das resoluções da situação "Quantos telefonemas?", também foram empregados para mostrar a indisposição entre os integrantes do grupo G3. Isso se evidenciou na descrição do estudante Pi, ao mostrar as estudantes I e Ra voltando para a sala de aula e fazer o gesto de vai e vem para indicar que a resolução ficou por conta dele e do estudante Fa.

Segundo Vergel (2018),o gesto como um meio semiótico de objetivação desenvolve um papel importante na expressão das intencionalidades dos sujeitos e seu processo de conceitualização.

Destacamos também os gestos dêiticos realizados com o uso do lápis- Figura 26-, ou lapiseira na identificação das variáveis (pessoas e telefonemas). Por exemplo, a estudante E do grupo G2, que sublinha a frase "Daí foi 'ligando' cada pessoa e a cor com quem ia falar (...)" com o lápis de escrever e indica a resolução do algoritmo 4+3+2+1 para as 5 (cinco) pessoas da situação.

Figura 26 – Indicação com lápis



Protocolo G2

Os gestos mobilizados pelos estudantes, sob a ótica de ações multimodais, se articulam com as resoluções, os diálogos e os conflitos decorrentes das interações entre os integrantes dos grupos – ou seja, "o conjunto de linguagens faladas, prosódicas, atividade entonacional, gestual, postural e facial em que os participantes se envolvem quando 'conversam" (CALBRIS, 2011, p. 2 *apud* SABENA, 2018, p.187). Grifo dos autores.

6.1.2 Postura, olhares e ritmos

Além dos gestos, destacamos outros meios semióticos, como a entonação vocal[69], o ritmo, olhares dos integrantes do grupo para o próprio grupo, para outros estudantes e para a pesquisadora.

Por ser natural das interações humanas a expressividade de emoções e sensações por meio de olhares, postura corporal e entonação vocal, às vezes esses elementos podem parecer intuitivos no processo educativo, descaracterizados de qualquer relação com a aprendizagem.

[69]Ressaltamos que gestos, olhares, posturas, entonação vocal e ritmo são imprescindíveis para os processos de objetivação e subjetivação e que na análise desses processos retomaremos alguns exemplos supracitados.

A pausa na fala do estudante Do (grupo G1) indica a percepção – que seria confirmada na aula posterior – de que a utilização do artefato lápis de cor não corresponderia à resolução correta.

O olhar para a validação de uma ideia também se fez presente entre os integrantes do grupo G1. Por exemplo, o estudante Di,ao identificar a insegurança do colega Do, olha para ele e prontamente diz "(...) se as outras pessoas seguissem a lógica, a pessoa azul ia acabar ligando pra ela mesma".

A entonação vocal como meio semiótico é percebida quando a estudante E (grupo G2) dá ênfase à palavra *uma* para indicar que, ao considerar outras quantidades de pessoas, não seria somente somar mais uma (1) pessoa.

O ritmo também auxilia na compreensão conceitual, seja usando a voz, seja acompanhando com gestos, que são outros artefatos dentre os meios semióticos.A estudante Ca utiliza ritmo cadenciado para mostrar à pesquisadora a relação entre as pessoas nominadas e os respectivos telefonemas "(...) Ana liga pra três (3): João, Camila e Pedro; João liga duas vezes: Camila e Pedro; Camila, só uma vez pro Pedro; e o Pedro não precisa ligar pra ninguém, porque já falou com todo mundo!!".

Segundo os pressupostos da TO, esses meios semióticos corporais auxiliam na materialização do saber – no caso, da proposta "Quantos telefonemas?". Essa é uma das características do Pensamento Algébrico, a covariação.

6.1.3 Artefatos

A Teoria da Objetivação apresenta a tríade Sistemas Semióticos de Significação Cultural, Atividade e Pensamento, em que este último elemento é mediado pelos meios semióticos. Os artefatos são utilizados de maneiras distintas na materialização dos objetos matemáticos, ou seja, enquanto mediadores do saber em conhecimento. Pedras, réguas de cálculo e ábaco são exemplos de artefatos produzidos e utilizados em diferentes contextos históricos e culturais.

Segundo Radford (2005), além do pensamento ser mediado pelo corpo, artefatos e signos, ele também se localiza *no* corpo, *nos* artefatos e *nos* signos.

Os modelos referentes à situação "Quantos telefonemas?" estão entre os meios semióticos mobilizados pelos grupos G1, G2 e G3.

Recordamos que a ideia da construção de modelos surgiu espontaneamente por iniciativa do grupo G1 ao utilizar lápis de cor para resolver a situação. Apesar de, no decorrer da resolução, o grupo G1 não ter dado continuidade à ideia, foi a partir do ocorrido que a pesquisadora sugeriu a utilização de materiais diversos nas aulas posteriores.

Consideramos esses modelos – Figura 27-, como artefatos que mediaram o pensamento no sentido proposto pela TO. Quando a estudante E do grupo G2 diz que “No primeiro copo são quatro (4) fichas; depois vai diminuindo”, ao utilizar o artefato (modelo em que cada copinho de plástico representa uma pessoa e as fichas de papel a quantidade de telefonemas), a noção de relação entre as variáveis telefonemas e pessoas se evidencia.

Figura 27 - Artefatos copos plásticos e fichas de papel

Protocolos grupos G2 e G3

Outro artefato seria as fichas confeccionadas pelo grupo G3, que a princípio indicaria a quantidade de ligações em cada retângulo desenhado na cartolina.

Os artefatos produzidos apresentaram diferentes propósitos. No grupo G2, o modelo com os copinhos plásticos e fichas funcionaram como uma extensão para a resolução com os desenhos, linhas coloridas e algoritmo.

O grupo G1, ao utilizar os lápis de cor, criou um conflito inicial quanto ao total de ligações entre os integrantes do grupo,sendo descartada a ideia do uso dos lápis. Já no grupo G3, o artefato (fichas + retângulos na cartolina) auxiliou na resolução da solução proposta; porém, foi utilizado como um rascunho para a elaboração da resolução seguinte.

De acordo com Nemirovsky (2003, p. 108), “aprender uma abordagem diferente para o que parece ser a ‘mesma’ ideia, longe de ser redundante, muitas vezes requer um engajamento de recursos perceptuo-motores[70] completamente diferentes”. Desse modo,

[70]São os recursos que incidem no processo de aprendizado que é estruturado a partir de um ato motor e perceptivo que, elaborado corticalmente, origina a chamada cognição. E é a maturação do córtex que permite o aprimoramento das funções motoras, bem como os estímulos ambientais que a criança recebe. http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-4862017000100004
acesso em 07/06/2022.

consideramos os artefatos enquanto um recurso multimodal ao estar integrado aos gestos e outros meios semióticos.

6.1.4 Desenhos, esquemas, algoritmos: as representações

Um dos meios semióticos mais utilizados por estudantes e professores durante uma aula de Matemática, independentemente do nível de ensino, é o de representações.

Situações do contexto da Álgebra escolar de modo geral, e aqui especificamente da *Early Algebra*, possibilitam a mobilização e/ou produção[71] de representações, pelo fato de o Pensamento Algébrico possuir características abrangentes (conforme descrito no Quadro 03).

A diversidade e criatividade das representações na resolução da situação "Quantos telefonemas?" pelos estudantes do vem ao encontro do que afirma Goldin

> Uma representação pode ser uma configuração que poderá, por exemplo, agir em lugar de, ser interpretado como, corresponder a, denotar, retratar, encarnar, codificar, evocar, rotular, ligar, significar, produzir, referir-se, assemelhar, servir como metáfora, substituir, sugerir, ou simbolizar o elemento representado (GOLDIN, 2002, p.208).

A multiplicidade de representações é escopo de inúmeras investigações no âmbito do ensino de Ciências e Matemática e pode ser entendida como a integração de diferentes modos de representar o raciocínio, os processos e as descobertas científicas com a finalidade de apropriação do significado dos conceitos, conforme ocorre a compreensão das variadas maneiras de representar esse discurso (LABURÚ, BARROS e SILVA,2011).

Shaaron Ainsworth (1999, 2006) propôs uma taxonomia[72] para o uso de múltiplas representações em ambientes virtuais de aprendizagem que, a princípio, foi utilizada para orientar os designers produtores de ambientes digitais. Denominada de DefT, cuja sigla indica:*designer*(De), considerando a maneira como a informação é

---

[71]Optamos por considerar em momentos do texto o termo mobilização como relacionado às representações regulares e produção, às representações idiossincráticas.

[72]Nosso objetivo não é a classificação das representações produzidas pelos estudantes; porém, consideramos relevante a taxonomia no que tange à ideia de multiplicidade representacional enquanto meio semiótico.

representada;*Functions*(F) são as diferentes funções pedagógicas[73] que as Múltiplas Representações podem possuir; e *Task* (T) são as tarefas que o aluno realiza durante as interações com Múltiplas Representações.

Enquanto meio semiótico denominaremos as representações mobilizadas como Representações Regulares e Representações Idiossincráticas. As Representações Regulares são aquelas de utilização recorrente em outras situações matemáticas – ou seja, representações descritivas escritas, tabulares, gráficas, aritméticas, algébricas.

As Representações Idiossincráticas, como desenhos, diagramas e esquemas, são construídas pelos estudantes e produzidas de maneira singular, à medida que resolvem problemas e investigam ideias matemáticas.

Segundo Mestre (2014, p.44), as representações idiossincráticas "podem desempenhar um papel bastante importante, ajudando os estudantes na compreensão e na resolução de problemas e proporcionando formas significativas para registrar um método de resolução e para descrevê-lo a outros".

6.1.5 Representações Regulares

As representações regulares mobilizadas na situação "Quantos telefonemas?" foram algoritmos de adição, descrição escrita e tabelas, conforme Quadro 16.

A escolha das tabelas pelo grupo G5 – segundo a estudante J: "A gente lembrou o livro...", em referência ao uso de tabelas de dupla entrada na resolução de situações-problema discutidas anteriormente– corrobora a presença da representação tabular em diferentes disciplinas e contextos extraescolares. As tabelas são representações que permitem a característica relacional e funcional do Pensamento Algébrico a partir da indicação e visualização das variáveis em linhas e colunas.

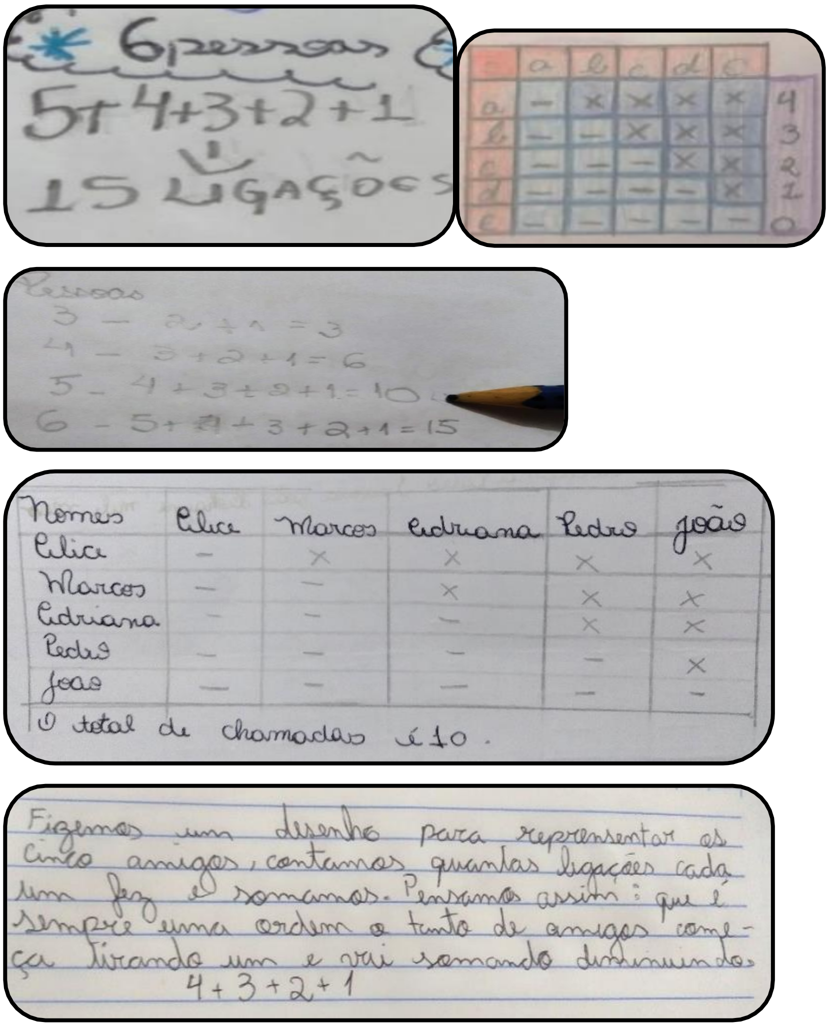
A representação aritmética na resolução da situação foi utilizada pelos grupos G2 e G3. O grupo G2 fez dois algoritmos de adição.

A representação aritmética foi mobilizada como uma justificativa durante as explicações dos integrantes do grupo à pesquisadora. Estudante E: "Não é que soma mais uma pessoa!!!(...) Dá certo pra outras pessoas, mas tem que juntar o total de antes".O

[73]As Funções Pedagógicas quanto ao conhecimento de uma nova representação podem complementar a partir de processos e informações complementares, restringir por familiaridade e/ou propriedades inerentes e aprofundar um conhecimento a partir de abstração, extensão ou relação (AINSWORTH, 1999, p. 134).

grupo G3 fez o algoritmo como um reforço da descrição escrita da situação "começa tirando um e vai somando diminuindo" (Figura25).

Quadro 16: Representações Regulares



Fonte: Protocolo dos Grupos

A nova representação do algoritmo pode ser considerada complementar, pois, segundo Ainsworth (2006), há o apoio aos processos cognitivos e soma das vantagens na utilização das múltiplas representações quanto aos benefícios individuais de cada representação e as estratégias na resolução das tarefas.

A descrição escrita utilizada pelo grupo G3, conforme comentário da estudante So: "Quase não escreve em matemática...", indica que esse tipo de representação não é frequentemente estimulado na resolução de situações do contexto matemático.

6.1.6 Representações Idiossincráticas

Identificamos várias Representações Idiossincráticas produzidas pelos estudantes na resolução da proposta. Possibilitar a elaboração de representações singulares aos estudantes permite uma significação própria do objeto matemático, corroborando o princípio da Semiótica quanto a significar o signo.

Quadro 17: Representações Idiossincráticas

Fonte: Protocolo dos estudantes

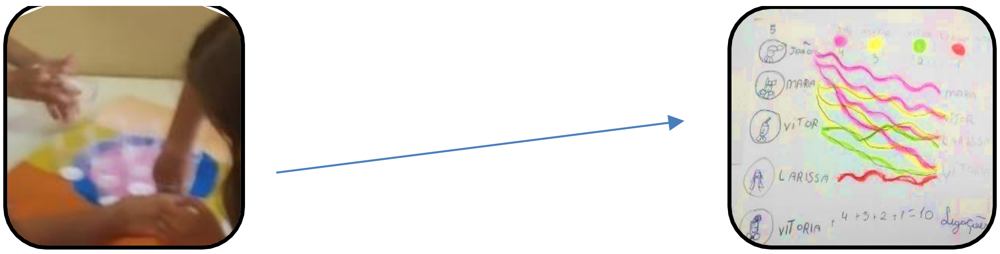
O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) ressalta a importância das representações idiossincráticas pelos alunos, ao proporcionar (...) formas significativas para indicar e descrever resoluções. O NCTM ainda indica que os professores, ao estarem atentos paras as diferentes representações dos estudantes, podem relacionar as mesmas com representações mais convencionais, regulares.

> É importante que os alunos tenham oportunidades para aprender formas de representação convencionais, quer para criar, aperfeiçoar e utilizar as suas próprias representações, enquanto ferramentas que suportam a aprendizagem e a produção de matemática (NCTM, 2000, p. 76).

Conforme indicado no Quadro 17, as representações idiossincráticas dos grupos permitiram a identificação da característica do Pensamento Algébrico de variação/covariação, indícios da determinação de uma relação funcional e correspondência entre quantidades.

Além desse aspecto, as representações idiossincráticas funcionaram como uma metarrepresentação (Figura 26) – ou seja, a representação do artefato (modelo construído com copos de plástico e fichas de papel) pelo grupo G2.

Figura 28: Relação Artefato e Representação Idiossincrática



Fonte: Protocolos grupo G2

Na interação, a pesquisadora pergunta se há relação entre o artefato e a representação idiossincrática. A afirmativa da estudante M mostra a relação entre a quantidade de papéis em cada copo e as linhas coloridas: “Tem sim...foi só contar quantas ligações(...)”,ao que elaindica com o dedo a quantidade de papéis em cada copo e as “linhas” coloridas.

Vimos que os diversos meios semióticos – gestos, ritmos, interações dialógicas, artefatos, representações – vêm ao encontro da noção de multimodalidade. Concordamos com Vergel (2018) quando afirma que:

> Essa multimodalidade tem razão de ser na medida em que temos um espectro de recursos semióticos que são mobilizados,

> sincronizados ou não. Ou seja, o multissemiótico se refere à diversidade de recursos semióticos que são ativados ou mobilizados na atividade matemática e, claro, está em estreita conexão com o pensamento multimodal. (VERGEL, 2018, p.97), tradução dos autores.

A mobilização dos meios semióticos possibilitou aos grupos o entendimento conceitual, a relação entre as variáveis: pessoas e telefonemas.

6.2 SegundaEtapa: Os processos de Objetivação e Subjetivação

As teorias de abordagens socioculturais, como é o caso da TO, consideram que “(...) os seres humanos são consubstanciados com a cultura na qual vivem e não relacionados a ela simplesmente”. (MORETTI, CEDRO, 2017, p.231).

Segundo Radford (2018), os processos de objetivação são sociais na medida em que o estudante é apresentado de modo gradual e crítico a formas de ação e pensamento histórica e culturalmente constituídas.

Na concepção epistemológica da Teoria da Objetivação, os processos de ensino e aprendizagem de matemática são vistos como um produto cultural decorrente da atividade humana com a criação dos Sistemas Semióticos de Significação Cultural (SSSC) – como o desenvolvimento da Álgebra, por exemplo.

A atividade na TO, conforme apresentada no capítulo 3, é o Labor Comum que envolve estudantes e professores em um movimento contínuo, dinâmico, singular. Esse movimento, por vezes, é envolvido por tensões provocadas pelas relações dialéticas entre Saber/Conhecimento e Ser/Subjetividade, reforçando que os processos de objetivação e subjetivação são simultâneos (RADFORD, 2017, 2018, 2020).

O aspecto semiótico é fundamental para esses processos, pois a produção e/ou mobilização de diferentes signos, integrados em movimentos de reflexões e legitimados por gerações, atuam na materialização do saber e consequente aprendizagem.

Radford (2017, p.64) ressalta que a “aprendizagem é o processo social, semiótico e corporificado, de discernimento criativo e crítico, familiarização e conversação com formas históricas e culturais de expressão, ação e reflexão ”.

As formas de produção de saberes e de colaboração humana estão relacionadas respectivamente ao Processo de Objetivação (Saber/Conhecimento) e de Subjetivação (Ser/Subjetividade). A mobilização dos Meios Semióticos e as ações integradas à ideia de multimodalidade descritas no item 6.1foram fundamentais para a análise dos POS.

Neste item, iremos apresentar inferências quanto à investigação do que emerge em uma turma do 6º ano durante uma situação do contexto da *Early Algebra* sob o enfoque da Teoria da Objetivação, considerando os 2 (dois) eixos[74] constituintes do Labor Comum (Radford,2020) – o eixo das formas de produção de saberes e o eixo das formas de colaboração humana.

6.2.1 Formas de Produção de Saberes: processos de objetivação frente à situação "Quantos telefonemas?"

A Teoria da Objetivação ressignifica a noção de saber e conhecimento. Para a TO o saber é potencialidade no sentido proposto por Aristóteles, como item, algo que indica a capacidade e a essência do que pode vir a ser. De acordo com D'Amore e Radford (*apud* MOREY, 2020, p.57) "o saber é uma entidade ontológica dinâmica, ou seja, está sempre em transformação".

Nesta investigação, o saber em potencial é a covariação entre a quantidade de pessoas e telefonemas, enquanto característica do Pensamento Algébrico. A produção de saberes a partir da situação "Quantos telefonemas?" nos grupos analisados – G1, G2, G3 e G4 – ocorreu de modo distinto.

A situação proposta correspondeu ao que Radford (2008) assegura a respeito do objeto da situação ser (...) dinâmico, multifacetado, em constante mudança e que não "aparece" para cada aluno com a mesma clareza e entendimento

Os integrantes dos grupos, enquanto seres sociais envolvidos em uma atividade coletiva evidenciam que a noção de atividade proposta pela TO não é simplesmente um grupo de pessoas fazendo alguma coisa. É o ser, o devir, a produção conjunta de saberes, o labor comum.

6.2.1.1 Processos de Objetivação dos grupos

Os estudantes do grupo G1 foram responsáveis pelo uso do artefato (lápis) para determinar a quantidade de telefonemas, o que permitiu à pesquisadora sugerir aos outros grupos a utilização/confecção de artefatos.

---

[74]Os processos de objetivação e subjetivação ocorrem simultaneamente; porém, ressaltamos que a análise dos eixos será apresentada separadamente para contemplar com minúcia os aspectos de cada processo.

A indicação de que seriam vinte e cinco (25) telefonemas ocasionou dúvidas logo de início – de acordo com a intervenção da estudante I do G3 –, uma vez que cada pessoa ligaria para ela mesma.

Após verificação de integrantes do grupo quanto ao total de telefonemas, os estudantes Do e A afirmam respectivamente que “(...) tava errado com os lápis ontem...” e “(...) A gente vai ver, mas não pode ser 25 ligações...”. Inferimos que há um processo de objetivação em curso na observação de que o total de ligações está incorreto.

A ação seguinte do grupo foi desenhar cinco telefones (Figura 21), indicando para cada um a quantidade de linhas (ligações). Corroboramos a inferência do processo de objetivação em outra afirmação do estudante Do: “(...) São dez ligações”, mostrando as “linhas” de cada telefone e dizendo de modo sincronizado: “quatro, depois três, duas e uma ligação”.

A atualização do saber no G1 é inferida na junção dos meios semióticos com os artefatos (lápis), representação imagética, gestos, olhares, por vezes mobilizados de modo simultâneo. Além disso, a utilização dos lápis e posterior desenho com os cinco (5) telefones possibilitaram indícios de subjetividades, conforme será apresentado no item 6.2.2.1.

O labor comum, enquanto condição basilar para o processo de objetivação e componente principal da TO, pode ser exemplificado nos momentos em que a pesquisadora indaga a respeito da utilização dos lápis e amplia a situação proposta para mais pessoas.

O estudante E então sugere somar as ligações para “cada pessoa a mais”, seguido da corroboração do estudante A, que diz “(...) Quanto mais gente, mais ligações... é só desenhar mais telefones e ir aumentando as ligações de cada um!!”.

No processo dialético que envolve pesquisadora e estudantes, há uma interação dinâmica em que a pesquisadora aponta estratégias, ouve com atenção e sensibilidade as sugestões dos estudantes, amplia as discussões para o coletivo da sala de aula, em uma descoberta constante que culmina na produção do saber matemático constituído coletivamente, ressignificando-o.

> O conceito de labor comum torna a ideia operacional de professores e estudantes, [...] como indivíduos que trabalham juntos. Este conceito sugere uma perspectiva educacional que visualiza o ensino e a aprendizagem não como duas atividades separadas, mas como uma única e mesma atividade: aquela na quais professores e estudantes, embora sem fazer as mesmas coisas, empenham-se em conjunto, intelectual e emocionalmente,

> para a produção do que chamamos um labor comum (RADFORD, 2017, p. 252).

Na análise do grupo G2, observamos que a objetivação no sentido destacado por Radford - *objectare*, estar frente à – foi se constituindo à medida que os meios semióticos foram mobilizados, como a confecção do artefato composto pelos copos plásticos e fichas coloridas, interações entre pesquisadora e estudantes, elaboração do desenho com linhas coloridas e o algoritmo.

Radford sinaliza a importância da criatividade nos processos de objetivação, que consiste em "devolver algo viável ao reino da atenção e da compreensão. A aparição do objeto na consciência do sujeito[75]" (RADFORD, 2018, p.67).

Os estudantes mostram e explicam para a pesquisadora que a quantidade de fichas nos copos corresponde à quantidade de telefonemas de cada pessoa e que o desenho nominado com legendas coloridas possui relação com o artefato dos copos e fichas. A estudante M indica gestualmente que cada copo seria uma pessoa do desenho nominado, e as fichas em cada copo seriam as linhas coloridas em que a primeira pessoa realizaria quatro (4) telefonemas.

Ao recorrerem ao algoritmo e aos desenhos com legendas – ou seja, a cada meio semiótico mobilizado – para indicar o total de ligações, ocorre a atualização do saber de modo contínuo. Quando questionados a respeito da quantidade de telefonemas para mais pessoas, a potencialidade do saber e a materilização em conhecimento são ilustradas nos recortes das interações a seguir :

Quadro 18: Interações dialógicas e inferências grupo G2

Interações dialógicas	**Indícios de atualização do saber**
Estudante Ga...*É assim: 5 pessoas tem aqui (indica a resolução do grupo), então 6 junta 5+4+3+2+1, né?*	A noção de covarição em que o total de telefonemas t e a quantidade p de pessoas pode ser indicada por $t(p) = p - 4 + p - 3 + p - 2 + p - 1$,para $p = 5$.
Estudante M: *Sim... sempre o depois soma uma pessoa mais!* Estudante E:*Que "depois"?* Estudante M: *Assim... 5 pessoas dá 10 (mostra as linhas e o algoritmo no final da resolução), e pra saber 6 pessoas*	As considerações das estudantes M e E indicam o processo de atualização do saber – covariação –, materializado pelos meios semióticos: gestos indicativos, desenhos nominados em que para cada pessoa soma-se o resultado da quantidade anterior mais a nova P(quantidade de pessoas menos 1).

[75] *"volver algo viable al ámbito de la atención y del comprensión. El o aparecimento del objeto en la conciencia del sujeito"*.

soma 5 pessoas de antes com os 10 telefonemas...	
Estudante E: *Não é que soma mais uma pessoa!!!* Algoritmo que para 5 pessoas: *4+3+2+1=10). Dá certo pra outras pessoas, mas tem que juntar o total de antes.*	Na afirmativa do estudante E, de que não é somente "somar 1", indicamos que materialiazção do saber está em curso em que uma possível generalização da situação seria $t(p) = 4p - 10$, para $p = 5$.

Fonte : informações do Gupo G2

No grupo G2, inferimos a presença dos nós semióticos – a mobilização de diversos meios semióticos – na justaposição do processo de objetivação com a multiplicidade de meios semióticos: arterfatos, gestos, desenhos nominados, algoritmo.

Segundo Radford (2003, p.56), os nós semióticos são "peças da atividade semiótica do aluno, onde a ação, os gestos e a palavra trabalham juntos para alcançar a objetivação do saber".

Quanto ao grupo G3, já de início, a estudante I questiona a quantidade de 25 telefonemas ao observar os lápis utilizados pelo grupo G1, observando que uma pessoa não telefona para ela mesma. O "encontro" com o saber está em curso, pois a estudante dá índicos da covariação entre pessoas e telefonemas.

Os integrantes do grupo G3 elaboraram um artefato com fichas e retângulos desenhados em cartolina. O estudante Fa contesta o uso das fichas colocadas sob os retângulos na cartolina, após a estudante I dizer que os retângulos desenhados para cada pessoa seriam utilizados como rascunho.

A mobilização desse meio semiótico foi causadora de discussões quanto à sua utilização e de uma "ruptura" no grupo G3, incidindo em dois (2) subgrupos: as estudantes I e Ra e os estudantes Pi e Fa.

A partir dessa interação, percebemos um clima de animosidade entre os integrantes do grupo, em que as estudantes I e Ra se ocupam de outros temas não relacionados à situação proposta.

Todos os integrantes do grupo G3 dão mostras de reconhecimento do saber potencial, ao indicarem a quantidade de 10 telefonemas. A associação entre Saber e

Conhecimento presente nos processos de objetivação durante o labor comum, conforme assevera Radford (2018), também apresenta tensões e controvérsias:

> O labor comum como aqui o concebemos, não é necessariamente uma atividade pacífica. (...) O objetivo não é, portanto, remover ou clarear essas tensões; o objetivo é examinar criticamente essas diferenças para entender os mecanismos que as sustentam[76]. (RADFORD,2017, p.161).

Destacamos a iniciativa dos estudantes P e Fa em seguir juntos na elaboração de uma resolução, mobilizando o meio semiótico – desenho nominado com linhas coloridas – para identificar o total de ligações.

O enfoque semiótico relaciona a objetivação a partir do processo social de tomada de consciência, de algo que não era "notado" – a relação entre quantidade de pessoas e telefonemas. Nesse sentido, inferimos que o conflito instalado a partir do meio semiótico artefato composto de fichas e cartolina no grupo G3 não interferiu na percepção do saber – covariação –, incidindo, porém, na produção de subjetividades.

As estudantes So e Ca do grupo G4 mobilizaram diferentes meios semióticos, de acordo com o item 5.3. Durante a produção de saberes, o labor comum entre estudantes e pesquisadora ocorreu progressivamente.

A estudante So, de modo inseguro, diz inicialmente que "elas" sabem que o total de telefonemas seria 10. Ao perceber a insegurança das estudantes, a pesquisadora estimula o diálogo. Em seguida a estudante Ca indica o desenho nominado, descrevendo as etapas de ligações entre as pessoas.

Na Teoria da Objetivação, professores e estudantes atuam juntos na atualização do saber e, consequentemente, na materialização do conhecimento. A combinação dos meios semióticos – gestos indicativos e ritmados, desenhos, entonação vocal, algoritmos– com os questionamentos da pesquisadora denota o que Radford considera como o ombro a ombro, ilustrado pelo autor com o termo *togethetring*– junção de *together +ing.*

> Poderíamos tentar traduzir "juntos" como "fazendo ou trabalhando juntos, na mesma direção, ombro a ombro juntos". Isso significa que não há linha de demarcação entre o professor e o aluno. Embora o professor não esteja no mesmo nível que o aluno em termos de familiarização com o conhecimento matemático, os dois trabalham juntos para a revelação ou

[76]*La labor conjunta como la concebemos aqui, no es necesariamente una actividad pacífica.(...) El objetivo no es, pues, remover o despejar essas tensiones; el objetivo es examinar criticamente esas diferencias para comprenderlos mecanismos que las sustentan*

> atualização do conhecimento matemático[77](RADFORD,2017, p.138).

A pesquisadora, que tem noção do saber potencial – covariação –, se dispõe e instiga as estudantes a desvendar esse saber. Cada situação proposta aos estudantes traz consigo a potencialidade de algo geral, ocasionando o particular por diferentes meios semióticos mobilizados, materializando o saber em conhecimento.

Radford (2013) utiliza a noção de Geral (o saber) e Particular (o conhecimento) proposta por Hegel, para indicar que o processo de objetivação é uma parte central do "particular" hegeliano, em que estudantes e pesquisadora estão engajados.

Desse modo, a aprendizagem

> (...) envolve algo antigo e algo novo. É antigo no sentido de que o conhecimento é histórico e cultural. Ele precede cada um de nós. É novo, pois a cada atividade de aprendizagem sempre aparece de forma diferente. Em outras palavras, conhecer – como modo de existência do conhecimento – é sempre particular. É um acontecimento e, como tal, está situado no tempo e no espaço. É único. (RADFORD, 2013, p.195).

Ao recorrerem à descrição escrita para determinar o total de ligações no sentido geral ("antigo") em que afirmam haver uma ordem – ou seja, a adição entre a quantidade de pessoas subtraída de (um) 1 –, as estudantes indicam a atualização do saber em conhecimento em algo particular ("novo").

A pesquisadora demonstra entusiasmo: "Vocês explicaram a resposta muito bem!",e expande a proposta para mais pessoas: "Como será que podem indicar o total de 10 ligações? E se fossem mais pessoas na situação?".

As estudantes, de modo mais desenvolto, consideram a sugestão e escrevem o algoritmo $5+4+3+2+1=15$ para indicar o total de telefonemas. Isso vem ao encontro da afirmação de Radford (2015) de que a objetivação é um processo inacabado e interminável.

De acordo com Radford (2018), durante o processo de objetivação, a aprendizagem não consiste na construção ou reconstrução de um conhecimento, mas sim na significação e ressignificação dos objetos matemáticos.

---

[77]*Togethering supone que no hay línea de demarcación entre el docente y el estudiante. Aun que el docente no está al mismo nivel que el estudiante encuanto a su familiarización com los saberes matemáticos, los dos trabajan juntos hacia la revelación o actualización del saber matemático*

Conforme apresentamos, a produção de saberes na tomada de consciência do que é geral (saber) em algo particular (a materialização em conhecimento) foi coletiva, envolvendo integrantes do mesmo grupo, de grupos diferentes e pesquisadora. Assim, evidencia que a atividade – o labor comum – se constitui de aspectos sociais, cognitivos e semióticos.

6.2.2 Formas de Colaboração Humana: processos de subjetivações frente à situação "Quantos telefonemas?"

Os processos de subjetivação investigam as transformações pelas quais o sujeito está passando nesses momentos em que ele está encontrando o objeto cultural. (MORETTI & RADFORD, 2018, p.237).

Consequentemente, a produção de subjetividades que ocorre durante uma aula de matemática por vezes é desconhecida dos docentes e das investigações na Educação Matemática.

Radford assinala que a relevância da subjetivação é de fácil compreensão: "(...) Assim que resistimos à tentação de reduzir a matemática à sua dimensão técnica e nos conscientizamos de que o aprendizado é sobre conhecer e ser". (RADFORD, 2008, p.226).

O autor afirma que Ser, em Matemática, (Radford, 2018) vai além da aprendizagem de conteúdos matemáticos. É a partir das formas de colaboração humana, embasadas por uma ética comunitária que propicia o devir, que se estabelece a relação dialética entre Ser e Subjetividades.

Nesse sentido, apresentamos nesse item as inferências quanto aos indícios de subjetividades constituintes dos processos de subjetivação, formas de colaboração humana e os vetores da ética comunitária.

Os grupos foram formados pelos estudantes por conta própria, conforme relatamos no item 5.4 "Descrições". Ao estimular a autonomia nessa constituição, o coleguismo que os estudantes demonstravam entre si e o compartilhamento quase imediato das ideias advindas do grupo G1 indicam disposição e respeito da pesquisadora com a iniciativa dos estudantes.

A ética comunitária em seus vetores – responsabilidade, cuidado e compromisso - que envolvem o desenrolar da situação proposta "Quantos telefonemas?" desde seu início não surge de modo espontâneo no percurso da aula. É fruto de um processo, uma construção dinâmica que envolve a manutenção de vínculos, respeito, confiança.

> Como o labor comum e a ética comunitária não são algo que vai aparecer na sala de aula de forma natural ou mágica, temos que criar as condições para que apareçam. A ética subjacente ao trabalho em conjunto não surgiu do nada. Isso foi cultivado ao longo de meses, culminando na confiança mútua[78]. (RADFORD, 2017, p.158).

6.2.2.1 Processos de subjetivação dos grupos

Na primeira resolução do grupo G1 com a utilização dos lápis, o estudante A toma a iniciativa ao colocar os lápis na mesa da pesquisadora e confirmar com aceno de cabeça a ideia verbalizada pelo estudante Do. O estudante E se mantém calado, em dúvida quanto ao uso dos artefatos, e nesse momento a estudante I, de outro grupo, diz que na indicação do grupo G1 seriam 25 telefonemas. Percebe-se, então, uma tensão, em que o estudante Do de repente fica quieto.

A manifestação da estudante I indica que, seguindo o raciocínio do grupo G1, seriam 25 telefonemas – ou seja, que cada pessoa telefonaria para si mesma. No comentário da estudante I, há indícios de responsabilidade como vetor primordial da ética no sentido proposto pela TO: "atender ao apelo do outro faz parte da responsabilidade" (RADFORD, 2018, p.34).

Mesmo a estudante não sendo integrante do grupo G1, ela se posiciona frente ao fato de que não seria correto o total de telefonemas. Interpretamos esse posicionamento como uma subjetividade emergente da estudante I no contexto dos lápis.

Nas aulas seguintes, como os estudantes já estavam dispostos nos grupos (no grupo G2 e G3 com materiais para confecção de artefatos), verificamos indícios dos vetores da ética comunitária e consequentes subjetividades dos integrantes do grupo G1.

Os estudantes se encontravam titubeantes quanto à utilização dos lápis. Porém, quando questionados pela pesquisadora, os estudantes Di e Do indicam apoio e cuidado um com o outro, ao dizerem quase simultaneamente que se cada pessoa ligasse para outras quatro (4) pessoas (...) e as outras pessoas seguissem a lógica, a pessoa (indicada pelo lápis azul) ia acabar ligando pra ela mesma.

---

[78]*Dado que el trabajo conjunto y la ética comunitaria no son algo que van a aparecer em el aula de manera natural o por arte de magia, tenemos que crear las condiciones para su aparición. La ética que subyace al trabajo conjunto no ha surgido de la nada. Ésta há sido cultivada a lo largo de meses, culminando en una confianza mutua*

Concordamos com Nogueira (2019, p.162) acerca dos indícios de cuidado como vetor da ética comunitária, ao “inserir o outro menos participativo no diálogo em curso; repetir um esforço, ideia ou proposta na velocidade que o outro possa acompanhar e entender para poder participar”.

Ainda em relação ao grupo G1, o estudante E aponta para a estudante I e recorda o comentário feito na aula anterior, indicando que iriam encontrar outra resolução da situação proposta. Após um tempo, o estudante A diz que o grupo só fez um ”desenhinho” em comparativo a outros grupos. Percebemos uma atitude de defesa, quando ele afirma que não precisa fazer “continha”, em uma espécie de depreciação da resolução de outros grupos.

A subjetividade do estudante A está ocorrendo ao se posicionar quanto à resolução final do seu grupo – recordando que foi ele o proponente quanto à utilização dos lápis –, em que a atualização do Ser é intrínseca à subjetividade, ocorrendo também em momentos de tensões e frustrações.

Temos um exemplo em Radford (2018) onde ilustra a subjetividade em curso, a partir de conflitos gerados por alunos da Educação Infantil envolvidos em uma situação aritmética. O autor ressalta que “essa é a natureza dialética da atividade e dos participantes por meio da qual o Ser é revelado. Na sua revelação, as crianças e a professora sentem e vivenciam socialmente raiva, frustração, empatia, colaboração, responsabilidade, solidariedade.” (RADFORD,2018,p.31).

A estudante Ga, do grupo G2, demonstra dúvidas em relação ao artefato com os copos plásticos e fichas coloridas. Há explanação dos integrantes do grupo em relação às fichas coloridas indicar a quantidade de telefonemas, porém a estudante N pergunta se podem fazer mais representações, como desenhos e/ou algoritmos.

Nesse instante, a pesquisadora poderia dizer ao grupo que o artefato produzido com os copos plásticos e as fichas coloridas já era suficiente para indicar a quantidade de telefonemas.

No entanto, a pesquisadora diz que fica a critério do grupo, ao perceber a insegurança dos integrantes do grupo G2 e a necessidade de utilizarem outros meios semióticos. A pesquisadora considera essa insegurança, com apoio e cuidado ao outro, ao responder sugestões, dúvidas, questionamentos (NOGUEIRA, 2019).

> Cada subjetividade é diferente de outras subjetividades (como flores nunca são idênticas umas às outras), mas todas as subjetividades são a transformação de algo (ou seja, Ser) que

> nunca é totalmente dado, mas sempre em processo de mudança, algo indefinido, potencial (RADFORD, 2018, p.25).

Ao expor suas dúvidas e serem ouvidos, os estudantes do G2 e pesquisadora estão em Labor Comum, colaborando uns com os outros com compromisso e responsabilidade, seja no compartilhamento das dúvidas ou nas suas resoluções. As subjetividades dos envolvidos são contínuas, singulares, inacabadas.

O grupo G3, com suas ideias dos desenhos na cartolina e fichas, determinaram a quantidade correta de telefonemas para (cinco) 5 pessoas. Porém, em certo momento da resolução da proposta, os estudantes entraram em conflito em relação à representação da situação na cartolina e utilização das fichas.

Quando a estudante R diz que as fichas seriam desnecessárias, o estudante Fa deixa a lapiseira em uma postura de indiferença ao que havia sido realizado coletivamente até aquele momento. A pesquisadora percebe a postura assertiva da estudante R e a reatividade do estudante Fa, mas não interfere; apenas sugere que poderiam utilizar as fichas e cartolina de algum outro modo.

A estudante R, ao perceber que fazer as fichas e desenhar os retângulos na cartolina seria desnecessário, age com seriedade e compromisso que, segundo Radford (2017), se caracteriza como o esforço para a realização coletiva da situação. Inferimos que, nesse caso, o compromisso da estudante R e sua forma de colaboração humana incidem em uma atitude prática, mesmo que essa postura tenha provocado desconforto em outros integrantes do grupo.

Após esse episódio, o grupo G3 implicitamente se dividiu em 2 (dois) subgrupos: das estudantes I e R e dos estudantes Pi e Fa. Quando a pesquisadora retorna e pergunta como o grupo reconsiderou a utilização das fichas e cartolina, as estudantes já estão se encaminhando à sala de aula. O estudante Pi indica as estudantes e afirma, de modo irritado:“(...) elas não ajudaram no desenho!!! Só ficaram conversando...”.

Recordamos que a percepção da estudante I na relação quantidade de telefonemas e pessoas estava correta e que a aluna na aula anterior questionou com clareza a respeito da quantidade de ligações indicadas com os lápis pelo grupo G1.

A postura da estudante, longe de ser considerada dispersa ou indiferente quanto aos outros estudantes do grupo (Pi e Fa), indica que as subjetividades são constantes e singulares, pois um mesmo indivíduo pode agir de acordo com vetor(es) da ética comunitária e, em outros momentos, se posicionar de maneira diferente; inclusive, pode optar por não se posicionar.

A frustração do estudante Pi com as atitudes das estudantes I e R é compartilhada pelo estudante Fa, quando este coloca a lapiseira de lado, decidindo não desenhar mais. Isso demonstra as particularidades no processo de subjetivação com estudantes que inicialmente se dispuseram a pensar, criar, a estar juntos por escolha própria, embora no desenrolar da proposta o esforço coletivo tenha gerado conflitos.

> As tensões que sustentam os processos de subjetivação a partir dos quais as subjetividades estão sendo produzidas não são defeitos de um projeto de tarefa. São parte integrante dos processos de subjetivação e revelação de Ser. (RADFORD, 2018, p.30).

Mesmo com as tensões, o compromisso dos estudantes Pi e Fa prosseguiu com a situação proposta e com eles mesmos, evidenciado pelo gesto de vai-e-vem do estudante Pi ao mostrar o desenho elaborado com 5 (cinco) pessoas e linhas coloridas para a o total de ligações.

As integrantes do grupo G2 (estudantes So e Ca) demonstraram engajamento na resolução da proposta. Inicialmente, ao serem questionadas pela pesquisadora, demonstraram insegurança em relação à quantidade de telefonemas.

A estudante So timidamente olha para a colega, como se solicitasse um auxílio. A estudante Ca responde a esse “olhar” e justifica que uma foi explicando a covariação para a outra a partir do desenho; começa a dizer de modo ritmado a quantidade de ligações – ou seja, age com responsabilidade ao “atender ao apelo do outro”. (RADFORD, 2018, p.34).

A pesquisadora sugere às estudantes indicarem outras resoluções da situação “Quantos telefonemas?”: “(...) E se fossem mais pessoas na situação?”.

Nesse momento, estudantes e pesquisadora estão “ombro a ombro”, em um esforço comum para verificar a quantidade de telefonemas – além da situação inicial–, demonstrando empatia e compromisso com o grupo G4 ao legitimar as respostas e elogiar a iniciativa das estudantes em indicar a resolução descritiva e os algoritmos para (cinco) 5 e (dez) 10 pessoas.

A Teoria da Objetivação concebe os professores e os estudantes como “seres humanos em fluxo, como projetos inacabados, em busca de si mesmos, empenhados num mesmo esforço onde sofrem, lutam e encontram satisfação juntos”. (RADFORD, 2017, p.242).

Nesse sentido, as integrantes aceitam a sugestão da pesquisadora e pouco a pouco ficam mais desenvoltas ao compartilharem suas resoluções. Enquanto a estudante So escreve a explicação de como determinar a quantidade de telefonemas para (cinco) 5 pessoas, a estudante Ca indica o algoritmo com o total de ligações para (dez) 10 pessoas, demonstrando compromisso para com a colega So. Compromisso esse que, segundo Radford (2020, p.35), é (...) “fazer todo o possível, na realização do labor comum”.

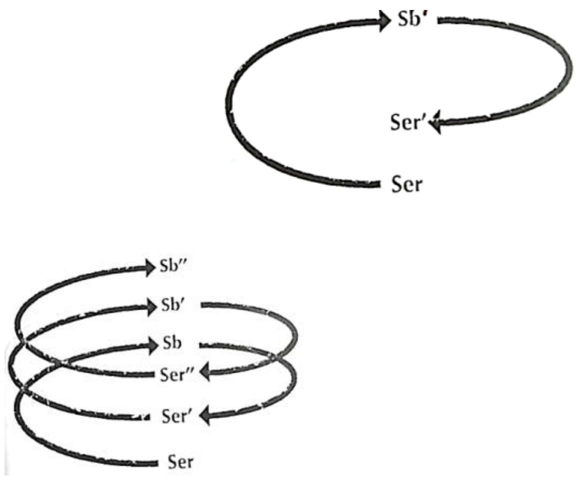
Concordamos com os pressupostos da TO de que não é somente dispor os estudantes em pequenos grupos e dar “voz” aos mesmos, e sim questionar qual tipo de “voz” propiciar, estimular.

De acordo com o exposto no item 3.2.8, essa voz surge em uma relação de respeito, solidariedade e desenvolvimento de formas de colaboração humana não alienantes, de modo a alcançar posturas éticas e críticas.

As subjetividades reveladas desde a apresentação da proposta entre pesquisadora e estudantes nos processos de subjetivação estão envolvidas em tensões, contradições, dúvidas, incertezas, singularidades.

A interação entre professor e estudante, conforme destaca Ortega (2004, p.5), “é uma variável decisiva no processo educacional, se ele pretende fazer ‘algo mais’ do que transmitir conhecimento e ensinar habilidades”.

Esse “algo mais” é a coprodução durante o Labor Comum de subjetividades contínuas, em que o Ser é atualizado (Ser’) pelas subjetividades (Sb’), ilustradas na figura da espiral (Figura 12).



Para Morey (2020, p.63), “as subjetividades estão sempre em um processo de vir a ser”.

> A criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em práticas matemática histórica e culturalmente constituídas e que refletem sobre novas possibilidades de ação e pensamento. Com isso, a atenção não se concentra apenas no conteúdo matemático (a dimensão do conhecimento), mas também no ser (no devir do ser, ou seja, na dimensão do sujeito) [79]·. (RADFORD, 2017).

. A coprodução de subjetividades constituiu os processos de subjetivação, e na análise dos grupos aqui apresentada, os vetores da ética comunitária ocorreram em maior ou menor frequência.

Assinalamos que o Labor Comum evidenciou frustrações, tensões entre alguns estudantes, além de que o cuidado com o outro não é sinônimo de condescendência, que o compromisso é esforço e a responsabilidade é o estar junto.

Conforme pontua Radford (2017, p.161), “o trabalho conjunto, como o concebemos aqui, não é necessariamente uma atividade pacífica (...);o objetivo é examinar criticamente essas diferenças para compreender os mecanismos que as sustentam”. Segundo Radford (2018, p.20),“(...) o que é aprendido e como é aprendido são os fios dos quais subjetividades são feitas”.

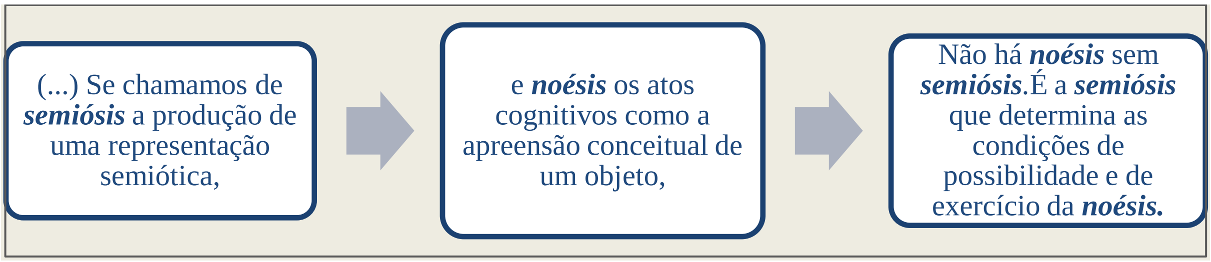
Nesse sentido, os grupos aqui descritos apresentaram indícios de colaboração humana, de subjetividades complexas e contínuas frente ao que é potencial na situação proposta – a covariação entre quantidade de pessoas e telefonemas.

6.3 Terceira Etapa: As atividades cognitivas de tratamento e conversão

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) proposta por Duval sinaliza a relação essencial entre a noção de *semiósis* e *noésis:*

Figura 29: Relação *Semiósis* e *Noésis*

[79]*To creación dialética de sujeitos reflexivos y éticos que se posicionan criticamente em prácticas matemáticas constituídas histórica y culturalmente, y que reflexionan sobre nuevas possibilidades de acción y pensamento. Como resultado, La atención no se centra unicamente en el contenido matemático (la diménsion del saber) sino también en el ser (em el devenir del ser, es decir la dimension del sujeito*)



Fonte: Adaptado Duval (2009, p.17)

Dessa relação decorre o pressuposto ontológico da TRRS, no qual o acesso aos objetos matemáticos somente ocorre por meio das representações, que não são o objeto matemático. A partir disso, Duval indica o paradoxo cognitivo ao questionar como não confundir um objeto matemático com sua(s) representação (ões) em diferentes registros.

> Na abordagem semi-cognitiva de Duval, um objeto matemático é o invariante (operativo ou lógico-discursivo) de uma multiplicidade de representações semióticas. O objeto do conhecimento, portanto, emerge do reconhecimento de que duas ou mais representações são representações de um "mesmo objeto" independentemente do seu conteúdo. (IORI, 2012, p.60)

Na situação “Quantos telefonemas?”, o objeto matemático – a covariação entre as variáveis pessoas e telefonemas – foi apresentado a partir de diversas representações. Para fins de análise sob a ótica da TRRS, indicaremos as representações regulares e idiossincráticas pelos registros.

6.3.1 Os registros de representação semiótica na situação “Quantos telefonemas?”

Independentemente do nível de ensino, inúmeros registros de representação são mobilizados no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Os estudantes mobilizaram em sua maioria representações idiossincráticas no registro denominado imagético, ou seja, aquele que compreende figuras, esquemas, fluxogramas. Os grupos produziram desenhos nominados (grupos G2 e G4), legendas coloridas (G2 e G3), desenho de telefones (G1), esquemas (G3).

Destacamos que outros estudantes mobilizaram e/ou produziram representações no registro imagético, além dos quatro grupos indicados, conforme o Quadro 17 (representação idiossincrática), como as tabelas mobilizadas por estudantes (Quadro 16), que são de uso recorrente em outras áreas do conhecimento.

> Gráficos, símbolos, figuras, fórmulas, desenhos, conceitos e outros são representações significativas, uma vez que a sua

> utilização permite a comunicação entre as pessoas e as atividades cognitivas do pensamento, garantindo diferentes registros de representação para um mesmo objeto matemático. (VIZOLLI, SOARES, 2015, p.93)

Os grupos G2 e G3 recorreram ao registro de representação aritmética para indicar a quantidade de telefones da situação proposta. O estudante A do grupo G1 questiona a necessidade de representar nesse registro, ao comparar as representações do seu grupo com o grupo G2: "(...) Nem precisa fazer a conta igual eles. Quanto mais gente, mais ligações...".

Os algoritmos desse registro desempenham um reforço, uma validação de outros registros, sejam imagéticos, discursivos orais e/ou escritos.

Ressaltamos que uma das representações da situação "Quantos telefonemas?" no registro algébrico seria a função $\boldsymbol{f(n) = \frac{n^2-n}{2}}$ **.** Porém,o objetivo de situações do contexto da *Early Algebra* não são as escritas algébricas formais.

A proposta "Quantos telefonemas?" foi apresentada no registro descritivo escrito, e somente o grupo G4 recorreu a esse registro para ressaltar o que haviam desenhado e explicado oralmente para a pesquisadora .

O registro discursivo oral (língua materna) permeou a resolução da situação por todos os grupos analisados. A reflexão e verbalização do objeto matemático em questão "auxilia o professor – pesquisador a perceber se o aluno consegue identificar as variáveis em jogo, as quantidades e a incógnita, assim como as relações estabelecidas ou não." (VIZOLLI, SOARES, 2016, p.95).

Duval (2009) destaca a presença do registro oral em relação aos outros registros em face da função metadiscursiva da língua natural na comunicação, pois a língua natural"se traduz em todos os indivíduos, por uma espontaneidade discursiva que serve de ponto de ancoragem a toda aprendizagem ligada a um ensino" (DUVAL,2009, p.106).

Um outro aspecto referente aos registros, de acordo com Duval (2015), é a classificação segundo a natureza e forma de cada registro – ou seja,em multifuncionais e monofuncionais, discursivos e não discursivos.

Os registros multifuncionais são aqueles em que os tratamentos[80] não são algoritmizáveis, como é o caso dos registros de representações descritivo escrito,

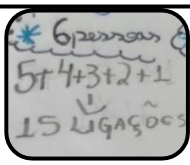
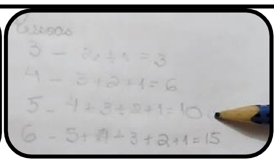
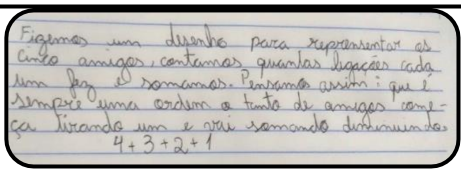
[80]Atividade cognitiva em que as mudanças de representação ocorrem no mesmo registro inicial.

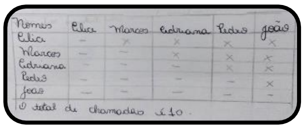
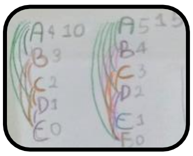
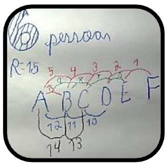
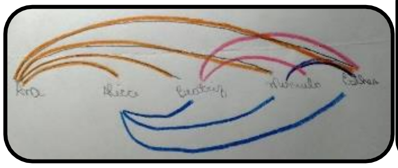
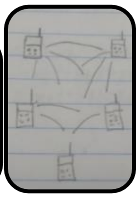
descritivo oral e imagético.Um registro multifuncional pode ser discursivo ou não discursivo – o registro imagético, por exemplo.

Outra combinação são os registros monofuncionais, nos quais os tratamentos são realizados por meio de algoritmos e tem como representação os sistemas de escrita – o registro de representação aritmética– que também é discursivo. Um exemplo de registro monofuncional e não discursivo seria os gráficos cartesianos, que não foram utilizados.

A variedade de registros utilizados pelos estudantes, além de significar a situação “Quantos telefonemas?”, ressalta a característica inerente da articulação dos registros de representação semiótica na compreensão conceitual, enquanto “(...) constante do desenvolvimento dos conhecimentos tanto sobre o ponto de vista individual quanto científico ou cultural” (DUVAL, 2009, p. 81).

Quadro 19: Classificação Registros e Representações

Registros	**Grupos**	**Representações**	**Classificação (natureza / forma)**
Aritmético	**G2 e G4**	 	Monofuncional/ Discursivo
Descritivo escrito	**G4**		Multifuncional/ Discursivo
Descritivo oral	**G1, G2,G3 e G4**	*G1:Se a pessoa que seria o “lápis azul” ligasse para 4 pessoas...e as outras pessoas seguissem a lógica, a pessoa azul ia acabar ligando pra ela mesma.* *G2:É assim:5 pessoas tem aqui, então 6 junta 5+4+3+2+1, né?* *G3: A gente sabia que ia dar dez (10) ligações.* *G4: A gente foi explicando uma pra outra que Alice (...) liga pra Ana, depois pro João, a Camila e o Pedro ...e daí dá quatro (4) ligações(...) Ana liga pra três (3) João, Camila e Pedro, João liga duas vezes: Camila e Pedro, a Camila só uma vez pro Pedro e o Pedro não precisa ligar pra ninguém, porque já falou com todo mundo!!*	Mutifuncional/ Discursivo

Imagético	**G1, G2, G3 e G4**	         	Multifuncional/ Não Discursivo

Fonte : protocolos grupos

> Os registros são uma ferramenta para avaliar a pertinência cognitiva de sequencias de atividades , isto é, sua adequação às condições necessárias para desenvolver a compreensão. Eles pemitem definir o CAMPO DE TRABALHO COGNITIVAMETE REQUERIDO para que os alunos possam atingir a compreensão dos conhecimentos matemáticos a adquirir. Eles permitem igualmente analisar suas produções e colocar em evidência seus pontos de bloqueio. (DUVAL, 211, p. 141), grifo do autor.

6.3.2 Tratamento e conversão: as atividades cognitivas na situação “Quantos telefonemas”?

Segundo pressupostos da TRRS, as atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão são inerentes a *semiósis*. Essas atividades cognitivas podem ocorrer durante o processo de ensino e aprendizagem de Matemática; porém, muitas vezes o docente pode escolher metodologias centradas somente em um tipo de registro, privilegiando o tratamento. Duval (2011,p.150) aponta que as atividades cognitivas de conversão e tratamento “comandam a compreensão em Matemática”.

Identificamos as atividades de tratamento e conversão, já que a formação envolve a identificação, por exemplo, de uma reta no registro gráfico. Como a situação proposta foi apresentada no registro descritivo escrito,as regras de conformidade que permitem identificar um conjunto de elementos físicos ou de traços não ocorreram.

6.3.2.1 Indicação da atividade cognitiva tratamento no Grupo G4

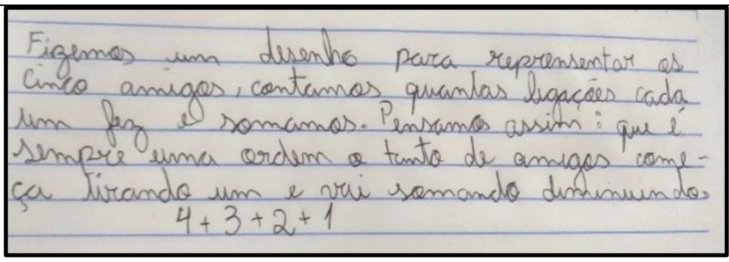
O tratamento consiste na transformação de representações dentro de um mesmo registro, o que corresponde a uma expansão informacional (Duval,2009). A atividade cognitiva do tratamento se caracteriza pela economia e rapidez na resolução de situações propostas, como a preferência do registro algébrico na resolução de um sistema de equações lineares do 1º Grau em relação à representação desse sistema de equações no registro gráfico. Como ressalta Duval (2011, p.45), a escolha de um determinado registro “(...) depende das possibilidades de tratamento que ele oferece”.

O ensino pautado somente em monorregistros, ao mesmo tempo que prioriza a mobilização de um registro específico por permitir efetuar certos tratamentos de uma maneira muito mais ecônomica e mais possante que outro registro (DUVAL,2009,p.81), pode limitar a possibilidade de reconhecimento do mesmo objeto matemático em registros diversos[81], além de resultar na não dissociação entre objeto e representação.

O grupo G4 foi o único que, além das conversões, apresentou a atividade cognitiva de tratamento ao mobilizar o registro descritivo escrito – o mesmo em que a situação “Quantos telefonemas?” foi apresentada (registro de saída). O tratamento inferido aqui ocorreu enquanto validação das representações em registros anteriores – descritivo oral e imagético.

[81]O reconhecimento ç~p.=89do mesmo objeto matemático em diferentes registros de representação é denominado pela TRRS de coordenação.

Quadro 20:Tratamento Grupo G4

Utilização do registro descritivo escrito da situação “Quantos telefonemas?”
 Fizemos um desenho para representar os cinco amigos, contamos quantas ligações cada um fez e somamos. Pensamos assim: que é sempre uma ordem o tanto de amigos come-ça tirando um e vai somando diminuindo. 4+3+2+1 Registro Descritivo Escrito

Fonte: protocolo grupo G4

As integrantes do grupo G4 comentam que “Quase não escreve em matemática...”, seguida da indagação “(...) mas, pode escrever?”. Em seguida, recorrem ao registro descritivo escritivo. Quando a estudante So diz que“escrever” em Matemática não é recorrente, se deve ao fato de que o registro descritivo escritivo pode demandar mais tempo na resolução das situações propostas.

Entretanto, consideramos que estimular a mobilização desse registro no ensino de Matemática contribui para a apreensão conceitual – *noésis*– e para os demais campos do conhecimento, visto que o mesmo é multifuncional. Nesse sentido, a escolha do registro descritivo escrito pelo grupo G4 vem ao encontro da afirmação de Duval (2009, p.37):

> Registros constituem um grau de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor.

Uma consideração de Duval quanto a atividade cognitiva de tratamento é que, se um sujeito no qual a coordenação dos registros é encontrada suficientemente desenvolvida, pode muito bem se ater às representações de um só registro. (DUVAL, 2009, p.,91).

6.3.2.2 Conversão: Atividade cognitiva fundamental

A mobilização de dois ou mais registros de representação do objeto matemático – covariação entre as quantidades de pessoas e telefonemas – na situação da *Early Algebra* pelos estudantes indica a atividade cognitiva de conversão.

Para que ocorra a atividade cognitiva da conversão, é necessária a utilização de registros diferentes em relação ao registro inicial.

Segundo Duval (2009), a conversão não é trivial ou espontânea, pois há um custo cognitivo diferente quando um estudante realiza, por exemplo, a conversão de um objeto matemático representado algebricamente para o registro gráfico, mas não conseguir fazer o contrário (do registro gráfico para o algébrico) com o mesmo sucesso.

A questão epistemológica no ensino e aprendizagem de Matemática para Duval é o modo de acesso aos objetos matemáticos. Por exemplo, se oestudante, ao realizar a conversão de representações entre diversos registros, não reconhecer o mesmo objeto matemático em cada registro ou confundir o objeto com sua representação,poderá evidenciar o paradoxo cognitivo.

> (…) Por um lado, o aprendizado de objetos matemáticos só pode ser um aprendizado conceitual e, por outro, é somente através de representações semióticas que uma atividade sobre objetos matemáticos é possível. Este paradoxo pode constituir um verdadeiro ciclo vicioso de aprendizagem. (DUVAL *apud* D'AMORE *et al*. 2015, p.180)

A atividade matemática com sua especificidade requer do professor, segundo Iori (2015), uma gestão semiótica sobre a construção cognitiva dos objetos matemáticos presentes no ensino e aprendizagem em Matemática.

Desse modo, ficamos atentas a essa questão epistemológica ao indicar aos estudantes que os regitros de representação – aritmético, descritivo escrito e oral, imagético – se referiam ao mesmo objeto matemático na proposta "Quantos telefonemas?". Essa indicação não ocorreu de maneira "formal", ou seja, não nomeávamos os tipos de registros; porém, chamávamos a atenção para sua mobilização.

Os grupos analisados realizaram a atividade de conversão, ao considerarmos o registro de saída – descritivo escrito –, conforme as representações nos distintos registros apresentados no Quadro 05.

No grupo G1, a conversão se deu com o desenho de 5 telefones e as "linhas", determinando a quantidade de ligações que cada pessoa realizou. Os comentários do estudante A – de que o grupo só fez um "desenhinho" e não fez "continha" (se referindo ao grupo G2) – demonstram que a escolha dos registros utilizados pelos alunos pode ocorrer de maneira intuitiva; ou seja, são comuns aos estudantes (o registro imagético) ao determinar o total de ligações, sem necessidade de mobilizar o registro aritmético.

O grupo G2 se valeu dos registros imagético e aritmético, sendo que esse último foi mobilizado para indicar a explicação verbal dos integrantes do grupo quanto ao algoritmo na determinação de ligações. De acordo com a TRRS,(...)é necessário possibilitar "a exploração de todas as variações possíveis de uma representação num registro fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes e representação em outro registro". (DUVAL,2009,p.101), grifo do autor.

O desenho de 5 (cinco) pessoas com linhas coloridas (Figura 20) representando a quantidade de ligações individuais – ao mesmo tempo, o total de ligações realizadas – foi apresentado pelo grupo G3.

Inferimos a atividade cognitiva de conversão no grupo G4 em diferentes momentos. Primeiramente, na produção do desenho nominado para indicar a proposta feita no registro descritivo escrito. Em seguida, o registro descritivo oral como explicação do desenho e identificação do total de ligações. As estudantes do grupo finalizaram com o registro descritivo escrito, enquanto uma validação dos registros descritivo oral e imagético.

De acordo com Duval

> (...) o controle das produções escritas abre para o indivíduo um circuito de atividade cognitiva bem mais amplo e mais potente que o circuito constituído apenas pelas produções orais e mentais(...). (DUVAL, 2011,p. 135).

Um aspecto essencial na atividade de conversão (que segundo Duval é responsável pelo insucessso na aprendizagem de Matemática) é a congruência e nãocongruência entre os registros de saída e de chegada .

A *semiósis*, enquanto produção de representações de um objeto matemático, pode se constituir no que Duval denomina de problema essencial da semiótica, "(...) aquele da diversidade dos sistemas de representação e aquele dos fenômenos de não-congruência que resultam para a conversão das representações". (DUVAL, 2009, p.21).

De acordo com o Quadro 05, cada tipo de registro de representação tem as características monofuncionais e multifuncionais,discursivos e nãodiscursivos, o que influencia diretamente nos fenômenos de congruência e não congruência.

Podemos ilustrar o fenômeno da não congruência quando é solicitado ao estudante mobilizar o registro algébrico para indicar a representação gráfica de uma reta. O registro de saída e chegada são monofuncionais; porém, o algébrico é discursIvo e o gráfico, nãodiscursivo, não correspondendo aos três critérios de conguência[82] propostos por Duval.

As conversões realizadas pelos grupos são não congruentes, por não contemplar os critérios estabelecidos por Duval. Nosso objetvo não é analisar os fenômenos de congruência e não congruência; porém, ressaltamos a importância da verificação em relação aos mesmos por parte do professor na sua ação docente.

6.3.3 Pluraridade de Registros e as atividades cognitivas

Na análise multissemiótica aqui proposta, as representações como meio semiótico ”automaticamente” pertencem a vários registros e indicam as atividades cognitivas de tratamento e conversão – inerentes ao ensino e aprendizagem de Matemática – de acordo com os pressupostos da TRRS.

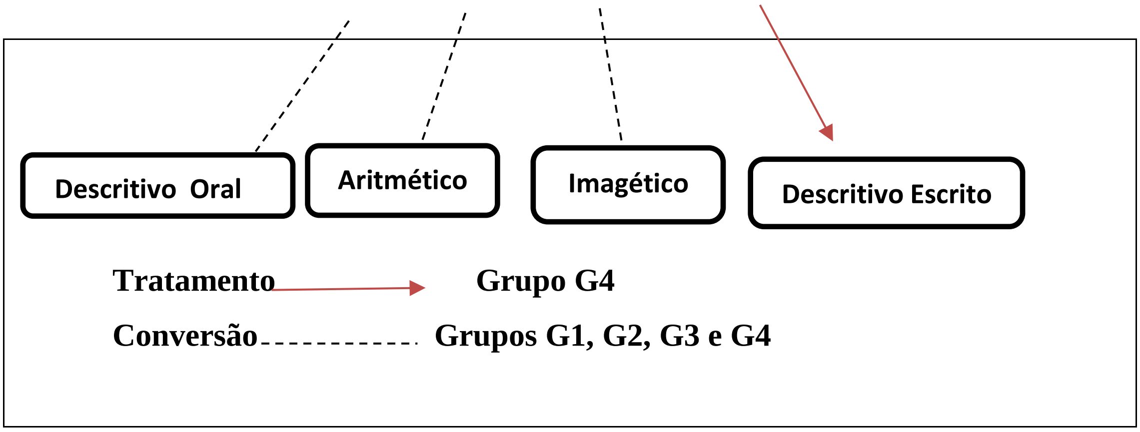
Duval sinaliza que o ensino e aprendizagem pautados exclusivamente em monorregistros não exclui a compreensão conceitual. Mas, a longo prazo, ao ser apresentado a outros registros, o estudante pode se revelar incapaz de mobilizar os conhecimentos adquiridos, os quais, no entanto, "ele sabe" (DUVAL, 2009, p. 98),grifo do autor.

A pluralidade de registros de representações mobilizados pelos estudantes no decorrer da situação "Quantos telefonemas?" permitiu a verificação do tratamento (representação no mesmo registro de saída) e conversão (representações em 2 [dois] ou mais registros distintos). As atividades cognitivas do tratamento e conversão estão indicadas respectivamenteno Quadro 21 por ⟶ e - - - - - -

Quadro 21: Indicação dasAtividades Cognitivas

Considere que 5 amigos desejam ligar uns para os outros para desejar Feliz Ano Novo. Quantas ligações podem ser feitas? **Registro de Saída (Descritivo Escrito)**

[82]Os critérios de congruência propostos por Duval (2009) são a correspondência de caráter semântico, a univocidade semântica e organização sintática entre os registros mobilizados na conversão.



Fonte : a autora

Quando a estudante Ca do grupo G4 indica a representação no registro descritivo escrito e, satisfeita,diz para a pesquisadora:“Que bom que deu pra entender aqui (...)”,e também ao afirmar que é “(...) Tudo a mesma coisa e na conta também!!!”, identificamos indício de coordenação no reconhecimento da covariação entre quantidade de pessoas e telefonemas representadas nos registro descritivo escrito e aritmético.

Desse modo, segundo Duval, o funcionamento cognitivo subjacente à produção de conhecimentos não se pauta sob “critérios de sucesso [obtenção de uma ‘boa’[83] resposta], mas sobre critérios de ‘maturidade’: rapidez de tratamento, espontaneidade das conversões , potência das transferências”. (Duval, 2009, p.92).

O autor ressalta que uma compreensão integrativa(Duval, 2009,p.98) ocorre a partir da coordenação, ou seja, da capacidade de reconhecer o mesmo objeto matemático em representações de diferentes registros, fundamental no entendimento conceitual.

[83]Grifo do autor.

7 A IDEIA DE CONTIGUIDADE

Nas três etapas da Análise Multissemiótica, a indicação das inferências ocorreu de modo análogo a um "mergulho" dos aspectos de cada teoria, ancorados pelos meios semióticos.

Nessas considerações submergimos, e, antes da superfície, outro olhar surgiu. Inferimos que os elementos de cada teoria estão em harmonia, um ao lado do outro, em contiguidade. A partir disso, um possível diálogo interteórico se fez presente.

A abordagem semiótica possibilitou o modo como percebemos as teorias "fluírem" no decorrer da situação proposta. A disposição dos elementos que emergiram durante a situação "Quantos telefonemas?" ilustra o modo simultâneo entre os aspectos da TO e da TRRS.

Figura 30: A ideia de contiguidade

Fonte: a autora

O termo contiguidade segundo o dicionário Aulete[84] significa: 1. Qualidade ou estado de contíguo; adjacência; proximidade; vizinhança. 2. Proximidade imediata entre pessoas; contato, convívio.

[84]https://www.aulete.com.br/contiguidade acesso em 28/05/2021

Encontramos o termo contiguidade também em campos de estudos da Psicologia e Filosofia. No âmbito da Psicologia[85], contiguidade é a relação de proximidade temporal entre dois eventos, sejam eles dependentes um do outro ou não. Na Filosofia[86], o termo remonta ao filósofo empirista David Hume[87], em que a associação de contiguidade é uma ideia que associa percepções de impressões, porém dá a uma impressão uma correlação de continuação contida na percepção observada anteriormente.

Considerando as definições e aplicações do termo contiguidade, reforçamos a proximidade com que emergem os elementos da Teoria da Objetivação e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Para ilustrar a ideia de contiguidade, retomamos recortes dos meios semióticos mobilizados nos grupos G1, G2, G3 e G4, além de representações diversas elaboradas por outros grupos e trechos das interações dialógicas de estudantes entre si e com a pesquisadora.

---

[85] https://www.redepsi.com.br/2008/05/04/contig-idade/ acesso em 28/05/2021
[86] file:///C:/Users/Asus/AppData/Local/Temp/5376-Texto%20do%20Artigo-17261-1-10-20080731.pdf acesso em 29/05/2021
[87] Filósofo britânico (1711-1776)

Esquema 01 – A Contiguidade

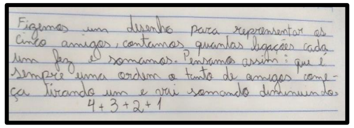
Considere que 5 amigos desejam ligar uns para os outros para desejar Feliz Ano Novo. Quantas ligações podem ser feitas?

Registro multifuncional não discursivo

Conversão: da representação em registro descritivo escrito para representação em registro tabular

Pensamento algébrico: exemplo de SSSC

Registro discursivo: função de designação

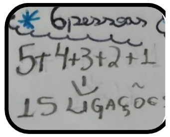

Fizemos um desenho para representar os cinco amigos, contamos quantas ligações cada um fez e somamos. Pensamos assim: que é sempre uma ordem o tanto de amigos começa tirando um e vai somando diminuindo.
4+3+2+1

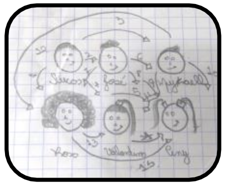
Registro Multifuncional e Discursivo

Estudante Ca: Que bom que deu pra entender aqui (indica a resolução escrita) *e na conta também!!!*

Indício de coordenação

Noésis: apreensão conceitual





Forma colaboração humana

Estudante E: Não é que soma mais uma pessoa !!! -diz enfaticamente a palavra uma- olha aqui !! **(mostra** a 3 linha do algoritmo para 5 pessoas : 4+3+2+1=10). *Dá certo pra outras pessoas, mas tem que juntar o total de antes.*

Estudante I: Ué... assim dá 25 telefonemas!!
A pesquisadora olha para os estudantes e percebe que o estudante Do de repente fica calado- parecendo estar desconfortável.
Artefato com o lápis – insuficiente para a objetivação

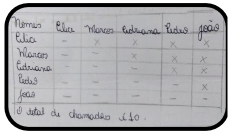
O estudante Pi olha para a colega I e diz que ela vai explicar a ideia , enquanto a aluna acena afirmativamente e diz que estão recortando fichas com desenhos de pessoas e depois mostra a cartolina.
Artefato insuficiente... "ativou" conflitos

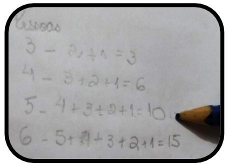
Estudante Pi: A gente sabia que ia dar dez (10) igações. Mas deu confusão , porque elas não quiseram deixar as fichas!!!! ....

Como será que podem indicar o total de 10 ligações? E se fossem mais pessoas na situação?

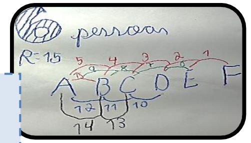
Semiósis: produção de representações

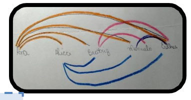
Objeto matemático: covariação



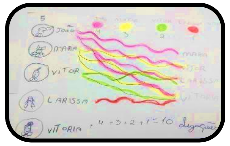


Geral e Particular





Processos de significação



Que bacana a resolução de vocês!!! Manifestação da pesquisadora quanto à nova resolução e questionamento quanto a relação com o modelo anterior dos copinhos

Coprodução de saberes e subjetividades

Mobilização de outros meios semióticos – representação no registro imagético decorrente da recusa das alunas para com o artefato das fichas.

Registros monofuncional e multifuncional

No esquema 01, esclarecemos que a margem delimita o espaço físico. A situação "Quantos telefonemas?" possui o destaque da cor como diferencial e "ponto de partida" da ideia de contiguidade.

Os itens na cor indicam aspectos teóricos, enquanto os meios semióticos se encontram no formato.

Os traços pontilhados que contornam os elementos das teorias que emergiram e os meios semióticos – interações dialógicas, artefatos, representações – designam a contiguidade, o "estar ao lado", ao mesmo tempo. Esses traços também permitem indicar que um mesmo aspecto teórico se coaduna com diferentes grupos, ou ao contrário, que dentro de um mesmo grupo aspectos das duas teorias despontam juntos.

7.1 Semiótica, *Early Algebra* e aspectos da TO e TRRS dispostos em contiguidade

A definição de Semiótica enquanto processo de significação permeou nossa pesquisa e, na ideia de contiguidade, a abordagem semiótica que perpassa ambas as teorias é visível.

No item 1.1 dessa investigação, indicamos a relação indissociável da semiótica com a matemática. De acordo com D'Amore, "A semiótica e a matemática nasceram e cresceram juntas, uma ao lado da outra, ajudando-se e sustentando-se mutuamente, sem ninguém saber". (D'AMORE, 2015, p.27), grifo nosso. Arriscamos dizer que essa citação se assemelha à ideia de contiguidade que aqui propomos.

Além disso, a disposição em contiguidade com destaque à situação proposta reafirma a noção de o Pensamento Algébrico ser uma forma peculiar de pensar – fato esse reafirmado pelas concepções de Pensamento Algébrico apresentadas no capítulo 3.

A iniciativa da *Early Algebra* é justamente propiciar aos estudantes, desde o início de sua escolarização, situações que possam estimular processos de significação singulares e possíveis significações mais abrangentes.

A noção de Geral e Particular[88] que vimos na Teoria da Objetivação nos parece inerente ao Pensamento Algébrico e, consequentemente, à *Early Algebra*. Nesta investigação, exemplificamos o Geral no objeto matemático – covariação e o Particular como os meios semióticos mobilizados.

[88]O Geral é mera possibilidade e o Particular é um passo à frente na concretização do geral.(Radford, 2013).

De acordo com Vergel (2018), a atualização do Geral em Particular no cenário da sala de aula – e em investigações – não pode ser determinada a *priori*. Ocorrem a partir do envolvimento de estudantes, professores e pesquisadores durante as situações propostas, que incidirá ou não no Labor Comum.

Concordamos com Radford quanto ao Labor Comum ser permeado por subjetividades múltiplas, ser único e constante, o que nos remete à Figura 12 ("espiral de subjetividades").

Os indícios da coprodução de subjetividades ocorreram de modo dinâmico e entrelaçado entre os integrantes de:

- ✓ Um mesmo grupo
- ✓ Diferentes grupos
- ✓ Um mesmo grupo com a pesquisadora
- ✓ Diferentes grupos com a pesquisadora.

Nesse "entrelaçamento", os vetores da ética comunitária – responsabilidade, cuidado e compromisso – ocorreram às vezes de maneira sutil, outras vezes explicitamente. Recordamos que os artefatos utilizados pelos grupos G1 (lápis de cor) e G3 (fichas de cartolina) foram insuficientes para a produção de saberes. Porém, evidenciaram subjetividades durante as manifestações de desagrado, irritação e pouco comprometimento. Segundo Radford (2017), o Labor Comum é permeado de tensões!

Ainda a respeito da confecção dos diversos artefatos, arriscamos dizer que estes poderiam pertencer a um registro específico: o registro de representações em 3D. Duval (2009, 2011) refere-se à complementaridade em que os registros de representação (aritmético, algébrico, gráfico) são sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo criadores de representações sempre novas. Dessa maneira, o artefato do grupo G2 (copinhos) permitiu de modo concreto a visualização das dez fichas correspondentes aos dez telefonemas.

Os seres envolvidos no ensinar e aprender são sociais singulares com vivências distintas e que, no decorrer da situação "Quantos telefonemas?", estão frente a um questionamento, cuja resolução pode ser indicada e/ou significada de diferentes modos.

Desenhar, descrever escrita e/ou oralmente uma situação, manipular objetos, gesticular, tabular informação, calcular algoritmos, confeccionar artefatos foram ações que ocorreram simultaneamente aos conflitos entre os integrantes do grupo G3-por exemplo-, aos indícios de objetivação, ao tratamento, à conversão.

Não há delimitações entre as subjetividades e a mobilização de registro(s) de representação (ões) na objetivação de um objeto matemático. A identificação da covariação durante a situação proposta permeia tudo isso. Nada é estático. Tudo é fluído.

7.2 Possível Diálogo[89]Interteórico

As teorias da Educação Matemática discutidas apresentam especificidades (Quadro 10) quanto ao ensino e aprendizagem de matemática, o que delimita as concepções e metodologia de cada uma.

A Teoria da Objetivação se aproxima de concepções histórico-culturais, pois não se concentra exclusivamente na dimensão do saber (conteúdos matemáticos), mas também na dimensão do ser, priorizando "sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em práticas matemáticas constituídas histórica e culturalmente e que refletem sobre novas possibilidades de ação e pensamento". (RADFORD, 2020, p.16).

Para a TRRS, a *semiósis*, a apreensão ou produção de uma representação semiótica (Duval, 2009, p.15), é inerente ao pensamento humano e, em concordância com a situação epistemológica da matemática,reforça a importância da análise cognitiva a partir da mobilização dos registros de representação semiótica.

As informações presentes quanto às possibilidades de estratégias em rede (Prediger *et al*., 2008;Bikner-Ahsbahs *et al*., 2010) e a maneira como os elementos teóricos emergiram em contiguidade nos fez propor um diálogo entre pressupostos da TO e da TRRS: labor comum,autonomia intelectual, contração semiótica e coordenação.

Os fundamentos da TRRS quanto ao aspecto cognitivo, ou seja, a autossuficiência do estudante frente à multiplicidade de registros de representações semióticas em matemática pode parecer contraproducente se recordarmos que Radford, com a elaboração da TO, destaca outros meios semióticos além dos sistemas semióticos propostos por Duval e ressalta a necessidade de estarmos em coletividade, imersos em uma ética comunitária (RADFORD, LASPRILLA, 2020).

A possibilidade de um diálogo interteórico ocorre justamente nessas "diferenças". Quando a estudante N do grupo G2 questiona se podem fazer mais desenhos, reconhece o mesmo objeto matemático – a relação entre as variáveis – no algoritmo, no desenho

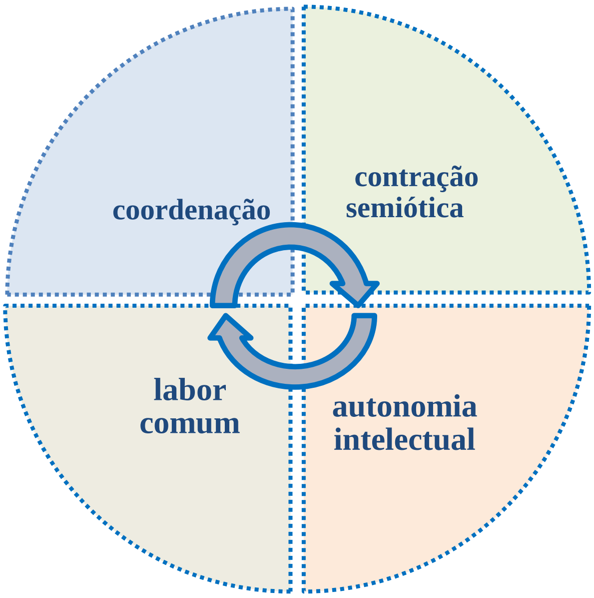
[89] Optamos pela definição de diálogo enquanto fala, em que há a interação entre dois ou mais indivíduos; colóquio, conversa. https://languages.oup.com/google-dictionary-pt/ Acesso em 28/12/2022

com linhas coloridas (Figura 20) e no artefato dos copinhos (Figura 18). Ou seja, a estudante apresenta, segundo os pressupostos da TRRS, indícios de coordenação.

Segundo Duval (2016), é a superação dos dois patamares – a evidência do aspecto epistemológico da matemática e o paradoxo cognitivo – que indica a aprendizagem em matemática.

Na Figura 31, as linhas dos setores estão pontilhadas como referência à permeabilidade presente no possível diálogo interteórico.

Figura 31: Diálogo Interteórico



Fonte: a autora

O estudante ao adquirir a autonomia intelectual, desenvolve uma confiança em si mesmo frente a situações propostas. O manejo de diferentes registros de representação semiótica, a conversão, ou a opção de permanecer no mesmo registro – o tratamento – é uma escolha do estudante.

Inferimos que a coordenação está diretamente relacionada aos nós semióticos e, consequentemente, à contração semiótica[90]. A coordenação é o reconhecimento do objeto matemático em diferentes registros. A contração semiótica é o refinamento dos meios semióticos. Ao refinar os meios semióticos, o aluno apresenta indícios de coordenação ao relacionar o mesmo objeto de conhecimento.

---

[90] A contração semiótica resulta em (...) *una vinculación más refinada de los recursos semióticos. Implica un nível más profundo de la conciencia y la inteligibilidad del problema em cuestión y es um síntoma de aprendizaje y de desarrolo conceptual.* (RADFORD apud VERGEL 2018, p.71).

O gesto intelectual de coordenação da estudante N do grupo G2 colaborou para a mobilização dos meios semióticos, no movimento do Labor Comum.

Desse modo, a autonomia intelectual auxilia o labor comum, pois, ao ter confiança quanto às atividades cognitivas exclusivas de cada registro, o estudante – que está imerso no contexto de sala de aula com outras pessoas em labor comum – pode auxiliar seu grupo, considerando os vetores da ética comunitária: responsabilidade, cuidado e compromisso com o outro.

Ser em matemática é isso. Estar no processo de ensino aprendizagem que não existe fora das conexões humanas, relações dialéticas e a inevitabilidade da ética comunitária (RADFORD, LASPRILLA, 2020).

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Teorias são ferramentas que permitem analisar fenômenos em diferentes contextos. No âmbito da Educação, várias são as teorias que investigam o processo de ensino e aprendizagem. As questões paradigmáticas de cada teoria, a metodologia e os aspectos epistemológicos e ontológicos influenciam os desdobramentos de estudos e aplicabilidades.

No campo específico da Educação Matemática, encontramos teorias que possuem em seus construtos referências a noções de Semiótica, enquanto campo de estudo dos processos de significação.

Considerando o aspecto inerente de compreensão dos objetos do conhecimento em matemática e da necessidade das representações, nesse trabalho optamos por duas teorias que recorrem a uma abordagem semiótica: A Teoria da Objetivação, proposta por LuisRadford, e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval.

Cada teoria indica os processos de ensinar e aprender matemática de maneira singular. A Teoria da Objetivação traz em seus construtos enfoques históricos e socioculturais, enquanto a Teoria dos Registros de Representação Semiótica tem como base um enfoque cognitivo.

A tese aqui são as possibilidades de análise de uma mesma situação em que, mesmo com enfoques distintos, as teorias se manifestam simultaneamente. Desse modo, o objetivo geral foi investigar como os elementos da Teoria da Objetivação e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica emergem em uma situação do contexto da *Early Algebra* com estudantes do 6◦ ano de uma escola pública situada no Norte do Paraná.

O percurso da investigação acompanhou os objetivos específicos de identificar os meios semióticos mobilizados, indicar as especificidades de cada teoria, e apresentar os indícios dos elementos constituintes de cada teoria e característica do Pensamento Algébrico. No decorrer da investigação, um novo objetivo específico se fez presente: refletir a respeito de um possível diálogo interteórico.

A opção de investigar uma situação do contexto da *Early Algebra* reforça a importância de propostas com vistas ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Conforme apresentado, o Pensamento Algébrico é abrangente e, mesmo dentre os pesquisadores, não possui uma definição única.

As características do Pensamento Algébrico são múltiplas e não excludentes – o que reforça os processos de significação. Na situação[91] "Quantos telefonemas?", apresentou a noção de covariação, ou seja, a relação entre as variáveis pessoas e telefonemas indicada de diferentes maneiras, conforme análise dos 4 grupos de estudantes.

Para a Teoria da Objetivação, o "indeterminado" que constitui o Pensamento Algébrico é indicado pelos meios semióticos mobilizados pelos estudantes. Na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, os gestos intelectuais decorrentes de conceitualização de situações do Pensamento Algébrico recorrem aos registros discursivos.

Além das considerações de cada teoria quanto ao Pensamento Algébrico, destacamos nesta tese que cada uma recorre à abordagem semiótica de modo distinto: enquanto na teoria de Duval a utilização das representações semióticas em diferentes registros é fundamental para as atividades cognitivas de tratamento e conversão, na teoria de Radford as representações semióticas se constituem como mais um meio semiótico para os processos de objetivação e subjetivação.

As especificidades de cada teoria são indicadas pelas considerações a respeito dos processos de ensino e aprendizagem de matemática, dos objetos matemáticos, do estudante, do professor e do contexto da sala de aula.

O aspecto sociocultural da Teoria da Objetivação ressalta as relações dialéticas entre saber/conhecimento e ser/subjetividade permeados pela ética comunitária. Na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, o aspecto cognitivo se evidencia ao reforçar a noção que o pensamento – não somente o matemático – é representacional.

A partir disso, optamos por uma análise multissemiótica em 3 (três) etapas enquanto percurso metodológico dessa investigação. As etapas da análise multissemiótica foram a identificação dos meios semióticos mobilizados pelos grupos, as inferências quantos aos processos de objetivação e subjetivação e as atividades cognitivas de tratamento e conversão.

Na primeira etapa, identificamos diferentes meios semióticos na resolução da situação "Quantos telefonemas?" e articulamos breves considerações a respeito da multimodalidade, enquanto inerente à utilização dos meios semióticos. Os gestos, ritmo, expressões corporais, artefatos, algoritmos, tabelas e representações mobilizados pelos

---

[91] A situação proposta questiona a respeito de quantos telefonemas 5 (cinco) pessoas poderiam fazer entre si.

estudantes dos grupos G1, G2, G3 e G4 evidenciaram os processos de significação e entendimento conceitual da relação entre as variáveis pessoas e telefonemas.

Recordamos que os lápis utilizados pelos estudantes do grupo G1 (enquanto artefato) foram insuficientes para esse entendimento, sendo necessária uma representação (desenho) para indicar a quantidade correta de 10 (dez) telefonemas. No entanto, os copinhos com fichas do grupo G2 auxiliaram na mobilização de outros meios semióticos. Já no grupo G3, o artefato fichas de cartolina deu início a tensões entre os integrantes do grupo.

O meio semiótico - representações - foi indicado como representações regulares (ou seja, de utilização recorrente em matemática: tabelas, algoritmos, descrição escrita e oral) e representações idiossincráticas, exclusivas de cada estudante e/ou grupo (o desenho com linhas indicativas do grupo G2, os telefones do grupo G1 as 'pessoas" nominadas do G3 e G4). Reiteramos que as representações foram fundamentais nas inferências quanto às atividades de tratamento e conversão.

A segunda etapa da análise multissemiótica se constituiu das indicações quantos aos Processos de Objetivação e Subjetivação de acordo com os pressupostos da Teoria da Objetivação. Os meios semióticos indicados anteriormente permitiram as inferências quantos a esses processos.

Nessa teoria, a aprendizagem de matemática é decorrente da atividade humana, aqui denominada Labor Comum. Vimos que nos grupos analisados ocorreram indícios de Labor Comum entre os envolvidos – integrantes dos grupos e pesquisadora.

Os vetores da ética comunitária se manifestam de início, quando o grupo G1 sugere a utilização dos lápis e a integrante do grupo G4 indaga se o total de 25 telefonemas seria o correto, ou quando a pesquisadora questiona as integrantes do grupo G4 quanto à quantidade de telefonemas caso houvesse mais pessoas e sugere aos alunos da turma sobre a confecção de artefatos ou mobilização de outros meios semióticos.

As formas de produção de saberes – ou seja, o processo de objetivação ancorado pelos meios semióticos – permitiu a materialização do saber potencial (a covariação) em conhecimento.

As subjetividades dos envolvidos foram únicas, singulares, permeadas por conflitos, colaborações humanas, tensões, dúvidas. Desse modo, a coprodução de subjetividades permitiu a atualização do Ser de modo contínuo, dinâmico e concomitante ao processo de objetivação.

Na terceira etapa da análise multissemiótica, o meio semiótico de representações foi considerado pertencente aos registros de representações semióticas de acordo com a teoria de Duval.

As representações foram consideradas quanto aos registros descritivos escrito, descritivo oral, aritmético e imagético. Cada um desses registros foi identificado quanto à sua natureza e forma – mono ou multifuncional e discursivo ou não discursivo.

De acordo com essa etapa da análise, os grupos G1, G2, G3 e G4 mobilizaram representações no registro descritivo oral (indicados nas interações dialógicas) e no registro imagético (com os desenhos nominados e esquemas). Os grupos G2 e G4 também recorreram à representação no registro aritmético na indicação da covariação.

Somente o grupo G4 mobilizou o registro descritivo escrito.Desse modo, inferimos a atividade cognitiva de tratamento – resolução em representações em um mesmo registro –, pois a situação "Quantos telefonemas?" foi proposta no registro descritivo escrito.

Todos os grupos realizaram a conversão, ou seja, a mobilização de representações em registros distintos ao registro inicial. Além disso, alguns estudantes do grupo G2 e as integrantes do grupo G4 apresentaram indícios de coordenação – ou seja, reconhecimento do mesmo objeto matemático representados em registros distintos.

Situações no contexto da *Early Algebra* permitem essa multiplicidade, evidenciando que, além da pluralidade representacional auxiliar na compreensão conceitual, também se coaduna com as noções de multimodalidade do pensamento.

A partir das inferências das 3 (três) etapas da análise multissemiótica, retomamos a questão investigativa de como os elementos da Teoria da Objetivação e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica emergiram na resolução da situação "Quantos telefonemas?".

A covariação como característica do Pensamento Algébrico permeou os processos de significação considerando indicações dos meios semióticos, das formas de colaboração humana e de produção de saberes, vetores da ética comunitária, coprodução de subjetividades, representações em registros mono e multifuncionais, representações em registros discursivos e não-discursivos, atividades cognitivas de tratamento e conversão, *semiósis* e *noésis* e indícios de coordenação.

A ideia de contiguidade surge como ilustração da disposição dos elementos teóricos específicos de modo síncrono e próximos. Indicamos que um aspecto teórico desponta simultaneamente em diferentes grupos e/ou também dentro de um mesmo grupo.

Por exemplo, ao mesmo tempo em que integrantes do grupo G3 mobilizam diferentes meios semióticos – olhares, fichas com cartolina, interações dialógicas, desenho nominado –, ocorre a conversão concomitante a tensões, devido ao conflito ocasionado pelo artefato. No grupo G1, o artefato é insuficiente, o que demanda a mobilização de outros meios semióticos, evidenciando a coprodução de subjetividades e produção de saberes.

A possibilidade de um diálogo interteórico ocorreu devido às inferências da análise multissemiótica somada à contiguidade. Apesar da abordagem semiótica, a Teoria da Objetivação e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica se constituem de princípios distintos, quando não opostos.

Os processos de objetivação e de subjetivação são indissociáveis, onde os seres sociais estão inseridos em uma inevitável ética comunitária. Propomos que durante o labor comum, a autonomia intelectual do aluno (seus gestos intelectuais durante as atividades cognitivas de tratamento e conversão) está implícita; desse modo, o estudante influencia na coprodução de subjetividades e formas de produção de saberes.

O diálogo também pode ser exemplificado ao relacionarmos a coordenação proposta pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica com a contração semiótica da Teoria da Objetivação.

Quanto ao refinamento dos meios semióticos, por exemplo, quando a estudante do grupo G4 diz a quantidade de telefonemas a partir do desenho nominado, inferimos que ao mesmo tempo em que há contração semiótica, ocorre a coordenação enquanto reconhecimento do mesmo objeto matemático representado em registros múltiplos.

A contiguidade e a possibilidade de um diálogo interteórico permitiram reflexões da pesquisadora enquanto ser social inserida na situação proposta “Quantos telefonemas?”, na condição de professora de matemática dos anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Nessa investigação, o olhar atento sob as lentes dos referenciais teóricos reforçou a condição única de acesso aos objetos matemáticos, a relevância de um ensino multirrepresentacional de matemática e a importância da relação dialética entre saber/conhecimento e ser/subjetividades.

O cuidado com o outro, o compromisso e a responsabilidade permearam a coprodução de subjetividades da pesquisadora, que foi constante, sutil e por vezes quase passou despercebida.

Essas reflexões são válidas pelo contexto educacional atual no qual a pesquisadora está inserida. O sistema vigente prioriza os resultados de provas institucionais verticalizadas e currículos que permitem pouca ou nenhuma adaptação. O processo educacional é transformado em mercadoria, e o desempenho individual dos estudantes retroalimenta os índices que validam as instituições de ensino e têm o potencial de alienar o docente quanto à sua práxis.

Recordamos que situações para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico e do contexto da *Early Algebra* são propícias para a produção de significados. Ponderamos que um fator limitante nessa investigação foi somente ter informações de uma situação do contexto da *Early Algebra*.

Outra ponderação é quanto ao instrumento de análise multissemiótica e a ideia de contiguidade virem a contribuir para outras pesquisas, em outros níveis de ensino, além de estudos na formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática.

O termo diálogo traz em si a disposição em "estar junto a". À luz das especificidades, a possibilidade do diálogo interteórico aqui apresentado nos indica que o ensinar e aprender matemática se beneficia quando construtos teóricos distintos são utilizados na investigação desses processos.

REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

AINSWORTH, S. The functions of multiple representations. Computers& Education, Pergamon Press, n. 33, p. 131-152, 1999.

AINSWORTH, S. DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. Learning and Instruction, v. 16, n. 3, p. 183-198, jun. 2006.

ALMEIDA, J. R. Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. 202 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

ALMOULOUD, S. A.; HENRIQUE, A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. Ciência e Educação, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

ARZARELLO, F.; PAOLA, D.; ROBUTTI, O. *et al*. Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom, Palgrave Studies in alternative education, v.70, p. 97-109, 2009. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z

BAUMGART, J. K. Álgebra. Editora Atual, São Paulo, 1992. Coleção Tópicos em sala de aula para uso em sala de aula – Volume 4. Tradução de Higino H. Domingues. 112p.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promote algebraic reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, v.36, n.5, p.412-446, 2005.

BLANTON, M. L. Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking Transforming Practice. Portsmouth, NH: Heinemann, 2008.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. Journal for research in mathematics education, Washington, v. 36, n. 5, p. 412- 446, nov. 2005.

BLANTON, M. L. et al. Implementing a Framework for Early Algebra. In: Kieran C. (eds) Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs; Springer, 2018https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

BAKHTIN, M. Estética da criação verbal. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1997.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Características da investigação qualitativa. Investigação qualitativa em educação uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, p. 47- 51, 1994

BRANDT C. F.; MORETTI M. T. Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa. Celia Finck Brandt, Méricles Thadeu Moretti (Org.). Ponta Grossa: Ed. UEPG, 2016. 307 p.

BRASIL. Base Nacional Curricular Comum. 2018. BRASIL. Base Nacional Curricular Comum. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf acesso em 18/08/2019.

BRASIL. Base Nacional Curricular Comum. 2ª versão revista. Ministério da Educação, Brasília, 2016.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. Portugal, Quadrante, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMMAN, A. Early álgebra and algebraic reasoning. https://www.researchgate.net/publication/292696143 Acesso em abril de 2020.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. Early Algebra and mathematical generalization. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, v.40, p.3-22, 2008.

CYRINO, M. C. C.O; MARGARIDA, H. Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. Boletim de Educação Matemática BOLEMA, v.28, p.97-126, 2011.

DUVAL, R. Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. Em MACHADO, Silvia D. A. (Org.). Aprendizagem em matemática registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, p. 11-33, 2003.

DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle - Instituto de Educación y Pedagogía. Santiago de Cali, Colombia Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. Semiósis e pensamento humano registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Fascículo I. São Paulo: Livraria da Física, 2009

DUVAL, R. Ver e ensinar a Matemática de outra forma - Entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. v 1. São Paulo: Proem, 2011.

DUVAL, R. Duval Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática REVEMAT. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p.1-78, 2016. http://dx.doi.org/10. 5007/1981-1322.2016v11n2p1

D’AMORE, B. Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In L. Radford& B. D’Amore (Eds.), Semiotics, Culture and Mathematical Thinking [Special Issue]. Revista Latino americana de Investigación en Matemática Educativa, v. 9, n. 1, p. 177-195, 2006.

D’AMORE, B. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. Bolema. Boletim de Educação Matemática, v. 20, n. 28, p. 1179-1205, 2007.

D'AMORE, B. Primeiros Elementos de Semiótica sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

D'AMORE, B.; RADFORD, L. Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Énfasis Libros de la serie Énfasis. Doctorado Interinstitucional em Educación, 2017.

DRIJVERS, P. *et al*. Digital resources inviting changes in mid-adopting teachers' practices and orchestrations. ZDM, v. 45, p. 987-1001, 2013.

FILLOY, E. PUIG, L.; ROJANO, T. El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. Enseñanza de las Ciencias, v. 25, n. 3, p. 327-342, 2008.

FIORENTINI, D. ; MIORIM, M. Â . , MIGUEL, A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? 3. ed. Pro-Posições, 1992.

FIORENTINI, D. ; MIORIM, M. Â ., MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... A educação algébrica elementar. 4. ed.,ed. Pro-Posições, 1993

FOUCAULT, M. A ordem do discurso. São Paulo: Edições Loyola. 1971.

FUJII, T. Probing Students' Understanding of Variables through Cognitive Conflict Problems: Is the Concept of a Variable So Difficult for Students to Understand? In: PATEMAN, A.; DOUGHERTY, B. J.; ZILLIOX, J. T. (Eds). Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (pp.49-65). PME, Honolulu, 2003.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, v.39, n. 1-2,jan.2007.Disponível em:<http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ontosemiotic_approach.pdf>.Acesso em: 25/07/2019

GOLDIN, G. Representation in mathematical learning and problem solving. Handbook of International Research in Mathematics Education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2002

GOMES, S. C. Teorias de aprendizagem em matemática: um estudo comparativo à luz da Teoria da Objetificação. 2016.134 f.Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

HERRERA, A. L. Reflexiones sobre aspectos éticos presentes em uma actividad. In: Shirley, GOBARA; Luis, RADFORD. Teoria da Objetivação: Fundamentos e Aplicações para o Ensino de Ciências e Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p.117- 134

IORI, M. La consapevolezza dell' insegnante dela dimensione semio-gognitiva dell ápprendimento dela matemática – Tese Dottorato di ricerca in Storia e diadattica dele matematiche, Storia e didattica dela Fisica,Storia e Didattica dela Chimica –

dipartimento di matemática e informática – Università degli Studi di Palermo, 2015, 375f.

IORI, M. Objetos, signos e representações na análise semiocognitiva dos processos envolvidos no ensino e aprendizagem de matemática: uma perspectiva duvaliana. Education Studies Mathematics, v. 94, n. 275, 2017. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9726-3

KAPUT, J. J. Teaching and Learning a New Algebra with Understanding. Washington, DC.; National Science Foundation, 2000.

KAPUT, J. J. Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. von Glasersfeld (Ed.), Constructivism in mathematics education (pp. 53-74). Dordrecht, 1991

KAPUT, J. J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M (Eds). Algebra in the early grades. Lawrence Erbaum Associates. New York, 2008.

KIERAN, C. The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), 8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales, 1996

KIERAN, C. The Learning and Teaching of school Algebra. In: GROWS, D. A. (ed). Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning. New York: Macmillan, 1992.

KIERAN, C.Algebraic thinking in the early grades: What is it? In; The Mathematics Educator, v. 8, p. 139-151, 2004.

KIERAN, C. Research on the learning and teaching of algebra. Handbook of research on the psychology of mathematics education, p.11-49, 2006.

LABURU, C. E.; BARROS, M. A.; SILVA, O. H. M. Multimodos e múltiplas representações, aprendizagem significativa e subjetividade: três referenciais conciliáveis da educação científica. Ciência & Educação, v. 17, n. 2, p. 469-487, 2011.

LÉVINAS, E. Entre nós: ensaios sobre a alteridade. 3 ed. Petrópolis: Vozes, 2004.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. Perspectivas em Aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas: Papirus, 1997.

MESTRE, C. O desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2014. p.357.

MORETTI, V. D. ; CEDRO, W. L. Educação Matemática e a Teoria Histórico-Cultural. Campinas: Mercado das Letras, 2017.

MORETTI, M. T.; BRANDT, F. C. Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semi-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. Organizadores, Méricles Thadeu Moretti, Celia Finck Brandt. Florianópolis: Ed. REVEMAT/UFSC,

2020. 485 p. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982. Acesso em janeiro de 2021

MOREY, B. Abordagem semiótica na Teria da Objetivação. In: GOBARA, S.; RADFORD L. Teoria da Objetivação: Fundamentos e Aplicações para o Ensino de Ciências e Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p.43-67

NCTM. Principles and standards for school mathematics, 2008. http://www.nctm.org/standards/ Acesso em abril de 2020

NEMIROVSKY, R.; BORBA, M. Perceptuo motor activity and imagination in mathematics learning. In: INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. PME 27, v. 1, p. 103-104, 2003

NOROÑO, I.V. S. *et al*.Sobre os processos de objetivação de saberes geométricos. Análise de uma experiência de elaboração de simuladores com o Geogebrazación: Educación matemática, v. 32, n. 1, p. 99-131, 2020. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7506118

NOGUEIRA, M. L. G. A. Diálogos entre ciências e ficção científica: uma estratégia para discutir ética científica baseada na teoria da objetivação. 2019. 210f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

OKADA, A. L. P. Desafios para EAD – Como fazer emergir a colaboração e a cooperação em ambientes virtuais de aprendizagem. In: SILVA, M.(org.). Educação online: teorias, práticas, legislação, formação corporativa. São Paulo: Loyola, p.273-291, 2003.

OTTE, M. F.; SANTANA, G. F. S.; PAULA, L.; BARROS, L. L. G. X. Reasons for a semiotic approach to mathematics education. Revista Prática Docente, v. 4, n. 1, p. 24-41, 2019. http://periodicos.cfs.ifmt.edu.br/periodicos/index.php/rpd/article/view/350.

PAIVA, J. P. A. A. A teoria da objetivação e o desenvolvimento da orientação espacial no ensino-aprendizagem de geometria. 2019. 208f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

PAIVA, J. P. A.A; NORONHA, C. A.O entrelaçamento entre os processos de objetivação e subjetivação no labor conjunto em uma tarefa sobre orientação espacial para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. In: GOBARA, S.; RADFORD, L. Teoria da Objetivação: Fundamentos e Aplicações para o Ensino de Ciências e Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p.153- 173.

PONTE, J. P. *et al*. Álgebra no Ensino Básico. Ministério da Educação de Portugal; 2009.

PRESMEG, N.; RADFORD, L.; ROTH, W.; KADUNZ, G. Semiotics in Mathematics Education, 2016.https://www.springer.com/gp/book/9783319313696
Acesso em junho de 2019.

ORTEGA, P. La educación moral como pedagogia de la alteridad. Revista Española de Pedagogia, v.227, p.5-30, 2004

RADFORD, L. The Seen, the Spoken and the Written: A Semiotic Approach to the Problem of Objectification of Mathematical Knowledge. For the Learning of Mathematics, v. 22, n. 2, p. 14-23, 2002

RADFORD, L. Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. Mathematical Thinking and Learning, v. 5, n. 1, p. 37-70, 2003.

RADFORD, L. Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification. In Helen L.; Chick , J. L., Vincent (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Melbourne, Australia, v. 1, p.143-145, 2005.

RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, p. 103-129, 2006.

RADFORD, L. The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. S.; Seeger F. (Eds.). Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture.p.215-234.2008. Rotterdam: Sense Publishers.

RADFORD, L. Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In Ubuz, B. (Ed.), Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 4,p. 17-24. Ankara, Turkey: PME, 2011.

RADFORD, L. Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. Journal of Research in Mathematics Education, v. 2, n. 1, p. 7-44, 2013.

RADFORD, L. Sobre o papel das representações e artefatos no saber e aprender. Education Studies Mathematics, v.85, p. 405, 2014. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9527-x

RADFORD, L. Introduction: The phenomenological, epistemological, and semiotic components of generalization. PNA, v. 9, n. 3, p. 129-141, 2015.

RADFORD, L.Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. DIE - Doctorado Interinstitucional em Educación, Énfasis matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, 2017

RADFORD, L. Un recorrido atraves de la Teoria de la Objetivación. In: GOBARA, S.; RADFORD L. Teoria da Objetivação: Fundamentos e Aplicações para o Ensino de Ciências e Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p.15-42

RADFORD, L.; EMPEY, H. Culture, knowledge and the self: mathematics and the formation of new social sensibilities in the renaissance and medieval Islam. Revista Brasileira de História da Matemática. 2007.

RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F. Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture. Rotterdam: Sense Publishers, 2008.

RADFORD, L.; SABENA, C. The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. Approaches to qualitative research in Mathematics education, p. 157-182, 2015

ROJANO, T., SUTHERLAND R. Arithmetic World-Algebraic World. In: Chick H.; Stacey K.; Vincent J.; Vincent J. (eds.). Proceedings of the Twelfth ICME Study Conference: The Future of the Teaching of Algebra and Learning of Algebra, Vol. 2, p. 515-522. Melbourne, Australia, 2001.

ROTH, W.M.; RADFORD, L. A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning. Springer Science & Business Media, 2011.

SABENA, C. Multimodality and the Semiotic Bundle Lens: A Constructive Resonance with the Theory of Objectification. Segundo monográfico sobre Teoría de la Objetivación, v. 12, n. 4, p. 185-208, jul.2018.

SABENA, C.; KRAUSE, C.; MAFFIA, A. L'analisi semiotica in ottica multimodale: dalla costruzione di quadro teoricoal networking con alter teorie - Relazione al XXXIII Seminario Nazionale di ricerca 2016. https://scholar.google.com/scholar?oi=bibs&cluster=6495347790114289557&btnI=1&hl=deAcessoemmaio de 2020.

SANTAELLA, L. Matrizes da linguagem e pensamento: sonora, visual, verbal: aplicações na hipermídia. São Paulo: Iluminuras, FAPESP, 2005.

SANTAELLA, L. O que é semiótica? Editora Brasiliense, 1990.

VELHO, A. P. M. Revista de Estudos da Comunicação, v. 10, n. 23, p. 249-257, 2009.

VERGEL, R.; GÁRZON, P. J. R. Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2018.

VERGEL, R. Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico. In: CIAEM, 15, 2019, Medellín, Colômbia. Anais[...].Medellín:, 2019. p. 1-18. https://conferencia.ciaem-edumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/1072/571>

VIZOLLI, I.; SOARES, M. T. C. Registros orais e escritos: um estudo com alunos e Professores de educação de jovens e adultos ao solucionarem problemas de proporção-porcentagem. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (orgs.). Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa [online]. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016, p.82-117.

WAGNER, S.; KIERAN, C. (Eds.). Research issues in the learning and teaching of algebra, v. 4. Lawrence Erlbaum Associates, Inc; National Council of Teachers of Mathematics, 1989

APÊNDICE

Universidade Estadual de Londrina

COMUNICADO

Srs Pais e /ou Responsáveis

Meu nome é Renata, sou professora de Matemática do seu filho (a) e faço doutorado na Universidade Estadual de Londrina. Tendo em vista, a necessidade de coleta de informações para o desenvolvimento do Projeto de Pesquisa sobre o Pensamento Algébrico e Teorias Semióticas , e sob orientação da **Prof.ª Dra. Rosana Figueiredo Salvi**, gostaria de informar que as atividades realizadas com os estudantes durante a próxima semana aqui no Colégio Estadual Antônio Raminelli poderão ser gravadas em áudio e/ou vídeo.

Atenciosamente

____

Prof.ª Me. Renata Aparecida de Faria (Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina)
renata.faria73@hotmail.com

Cambé, _____ de ________ 2019.

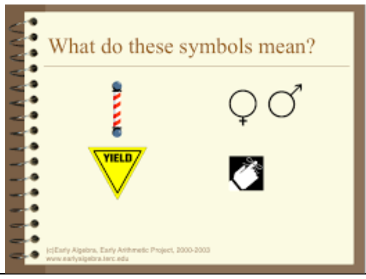
____

Assinatura pais e/ou responsáveis

ANEXO 01

Exemplos de situações propostas no âmbito da *Early Algebra*

1- Descrição de símbolos



02 - Problema de gastos[92]: Ahmad tem quatro vezes tanto dinheiro quanto Betty. Depois que Ahmad gastou US $ 160 e Betty gastou US $ 40, cada um tinha quantidades iguais de dinheiro. Quanto dinheiro Ahmad tinha a princípio?

03 - Problema da parada[93]: Há 900 pessoas em um desfile. Existem 40 homens a mais que mulheres. Há o dobro de crianças como existem homens. Quanta criança há no desfile?
Adaptado Kieran *et al* (2016, p.25)

04-Mike tem US $ 8 na mão e o restante do dinheiro está na carteira. Robin tem exatamente três vezes mais dinheiro que Mike em sua carteira. que você pode dizer sobre as quantias de dinheiro que Mike e Robin têm[94]?

9 AdaptadoCarraher, Schliemann (2018, p.14)

---

[92]Spending problem: Ahmad has four times as much money as Betty. After Ahmad spent $160 and Betty spent $40, they each had equal amounts of money. How much money did Ahmad have at first?

[93]Parade problem: There are 900 people at a parade. There are 40 more men than women. There are twice as many children as there are men. How many children are there?

1.1 [94]Mike has $8 in his hand and the rest of his money is in his wallet; Robin has exactly 3 times as much money as Mike has in his wallet.What can you say about the amounts of money Mike and Robin have?

ANEXO 02

Regularidades e Sequencias

1. Repara nas nove primeiras figuras da sequência que o António criou para a sua decoração de Natal.

1.1. Qual é o próximo símbolo da sequência?

1.2. Identifica o menor grupo de símbolos que se repete ao longo da sequência.

1.3. Se se construir uma sequência com cinco estrelas quantas bolas terá?

1.4. Qual é o símbolo que aparece na posição 50?

1.5. Imagina que a sequência tem 900 figuras no total. Quantas dessas figuras são estrelas?

2. Escreve os quatro próximos termos de cada uma das seguintes sequências numéricas:

2.1. 5; 18; 31; 44; ___; ___; ___; ___ .

2.2. 7; 21; 63; 189; ___; ___; ___; ___ .

2.3. 0,8; 0,4; 0,2; 0,1; ___; ___; ___; ___ .

2.4. $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 1; 3; ___; ___; ___; ___ .

2.5. 1; 4; 9; 16; ___; ___; ___; ___ .

Adaptado https://pt.scribd.com/document/429832165/Ficha-de-Trabalho-Sequencias acesso maio de 2019