



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

ROSÂNGELA MARIA KOWALEK

**VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM
MATEMÁTICA**

Londrina
2022

ROSÂNGELA MARIA KOWALEK

**VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM
MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Kowalek, Rosangela maria .

Validação em atividades de modelagem matemática / Rosangela maria Kowalek. - Londrina, 2022.
81 f. : il.

Orientador: Lourdes maria werle de Almeida .

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2022.

Inclui bibliografia.

1. Educação matemática - Tese. 2. Modelagem matemática - Tese. 3. Validação em atividades de modelagem matemática - Tese. I. Almeida , Lourdes maria werle de . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51

ROSÂNGELA MARIA KOWALEK

**VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM
MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof.^a Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof.^a Dra. Daiany Cristiny Ramos
Faculdades Integradas do Norte do Paraná – UNOPAR

Prof.^a Dra. Michele Regiane Dias Veronez
Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

Londrina, 29 de março de 2022.

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível por ter pessoas especiais em minha vida e que estiveram presentes em todos esses anos.

Então só me resta agradecer...

aos meus pais, por sempre me incentivar a lutar pelos meus sonhos, me apoiando em todas as situações quando eu precisava e em situações nem sempre tão necessárias com muito amor e zelo.

à minha irmã, que sempre esteve presente me ouvindo e me incentivando.

aos meus avós que mesmo contrários a algumas das minhas decisões nunca deixaram de apoiar.

ao meu namorado por me fazer acreditar que tudo era possível e que eu era capaz de fazer qualquer coisa; por ter me feito continuar quando tudo que eu queria era desistir.

à Éliada por ser minha companheira nesta caminhada, por todas as nossas conversas, por todos os incentivos, por todos os puxões de orelha, pelo companheirismo e parceria. Muito obrigada por estar sempre me “orientando” e por ter estando presente nessa caminhada que como sabemos não é nada fácil.

à todos os meus amigos, que não vou me arriscar citar nomes para não esquecer ninguém, mas que foram importantes nessa caminhada, sempre me ouvindo seja nas lamentações, nos choros, nas minhas angústias, me incentivando, mostrando possibilidades e buscando me distrair sempre que necessários. A todos vocês minha enorme gratidão por poder tê-los como amigos neste momento.

à minha orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida, pela oportunidade, pelos puxões de orelha; pelas palavras de incentivo quando foi necessário; por compartilhar comigo durante todos esses anos suas experiências e seus conhecimentos, aprendi muito com você.

às professoras Daiany Cristiny Ramos e Michele Regiane Dias Veronez que dispensaram tempo para analisar e, com isso, contribuir significativamente na construção desta pesquisa.

aos colegas do GRUPEMMAT por todas as nossas terças-feiras de estudo. Agradeço a todos pela companhia, pelos conselhos, pelas brincadeiras.

aos alunos do quarto ano de Licenciatura em Matemática, pelo companheirismo e pela participação na pesquisa.

a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

*Por vezes sentimos que aquilo que
fazemos não é senão uma gota de
água no mar. Mas o mar seria
menor se lhe faltasse uma gota.*

Madre Teresa de Calcuta

KOWALEK, Rosângela Maria. **Validação em atividades de modelagem matemática**. 2022. 81 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

RESUMO

Nesta pesquisa abordamos a temática validação em atividades de modelagem matemática. Optamos por um relatório no formato *multipaper*, composto por dois artigos que tratam da temática escolhida. Assim, no primeiro artigo buscamos elucidar, por meio de uma pesquisa inventariante, como a validação em atividades de modelagem matemática vem sendo entendida e realizada em atividades de modelagem matemática na sala de aula. Para isso, buscamos indicativos de validação nos documentos oficiais que norteiam o ensino de Matemática no Brasil, seguida por uma revisão sistemática na literatura sobre a validação em atividades de modelagem matemática e perguntas realizadas a três professores da área de Modelagem Matemática. Os resultados dessa investigação evidenciam duas abordagens para a validação, a validação pode (e deve) se dar no decorrer de todo o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e a validação que se concentra em fases (ou etapas) específicas de uma atividade de modelagem matemática. No segundo artigo investigamos de que modo os alunos realizam a validação em atividades de modelagem matemática e o que dela decorre para a aceitação ou elaboração das respostas para o problema investigado na atividade de modelagem matemática. Os resultados inferidos a partir de uma pesquisa empírica conduzem a construção de um *framework* para a validação, o qual elucida elementos constitutivos da validação em atividades de modelagem matemática. A partir dos resultados dos artigos, identificamos uma caracterização de validação em atividades de modelagem matemática, em que os entendimentos de validação e as ações dos alunos permeiam uma análise, verificação, revisão, checagem, avaliação dos elementos da atividade de modelagem matemática de acordo com as necessidades que emergem durante o desenvolvimento, ou ao final, visando a confiabilidade da atividade desenvolvida.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Validação. Atividades de modelagem matemática.

KOWALEK, Rosângela Maria. **Validation in mathematical modeling activities**. 2022. 81 f. Dissertation (Master in Teaching Science and Mathematical Education) – State University of Londrina, Londrina, 2021.

ABSTRACT

In this research, we approach about validation in mathematical modelling activities. We organized the results into two papers. In the first paper, after doing inventory survey, we discussed how validation on mathematical modelling activities is being understood and how it is doing at classroom. For this, we studied official Brazilian documents on teaching Mathematics, mathematical modelling literature and then, we applied a questionnaire to three mathematical modelling teachers. The results of this investigation show two approaches to validation, validation can (and should) take place throughout the development of the mathematical modeling activity and validation that focuses on specific phases (or steps) of a mathematical modeling activity. In the second paper, we investigated how students perform validation in mathematical modelling activities and what follows from that for students to accept or elaborate answers to the mathematical modelling problem. After empirical research, the outcome allows us organized a framework with some elements about validation in mathematical modelling activities. After both papers, we recognize that validation in mathematical modelling activities and the students' actions include analyses, verification, reviewing, checking, and evaluation about mathematical modelling activities elements. All of this appears while the students perform in mathematical modelling activities, or at the end of the activity, when the students looking for a reliable result.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modeling. Validation. Mathematical modeling activities.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1- FASES DA MODELAGEM MATEMÁTICA.....	17
FIGURA 2- ETAPAS DA MODELAGEM MATEMÁTICA.....	18
FIGURA 3- FASES DA MODELAGEM MATEMÁTICA.....	31
FIGURA 4- DIFERENTES TIPOS DE VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM.....	40
FIGURA 5- ENTENDIMENTO DE VALIDAÇÃO IDENTIFICADO NA PESQUISA.....	48
FIGURA 6- FASES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	55
FIGURA 7- TIPOLOGIA DE VALIDAÇÃO NO CICLO DE MODELAGEM.....	57
FIGURA 8- ATIVIDADE VAI E VEM DAS MARÉS NA CIDADE DE BALNEÁRIO CAMBORIÚ.....	60
FIGURA 9- SÍNTESE DA VALIDAÇÃO NA ATIVIDADE VAI E VEM DAS MARÉS NA CIDADE DE BALNEÁRIO CAMBORIÚ.....	63
FIGURA 10- PORTAL DA CIDADE DE CIANORTE.	64
FIGURA 11- ATIVIDADE DO ZÍPER NO MONUMENTO DO PORTAL DA CIDADE DE CIANORTE.	64
FIGURA 12- O MODO DE VALIDAÇÃO USADO PELOS ALUNOS.....	67
FIGURA 13- FRAMEWORK PARA A VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	69

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - RESPOSTAS DOS PROFESSORES PARA A PRIMEIRA QUESTÃO	43
TABELA 2 - RESPOSTAS DOS PROFESSORES PARA A SEGUNDA QUESTÃO	44
TABELA 3 - RESPOSTAS DOS PROFESSORES PARA A TERCEIRA QUESTÃO	45
TABELA 4 - ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	59
TABELA 5 - ENTENDIMENTO DOS ALUNOS SOBRE O QUE É VALIDAÇÃO.....	61
TABELA 6 - IMPORTÂNCIA DA VALIDAÇÃO NA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA ..	61
TABELA 7 - MODOS DE REALIZAÇÃO DA VALIDAÇÃO	62
TABELA 8 - VALIDAÇÃO DO TAMANHO DO ZÍPER	65
TABELA 9 - VALIDAÇÃO DO MODELO.....	65
TABELA 10 – VALIDAÇÃO DA RESPOSTA.....	66

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1- PALAVRAS-CHAVE IDENTIFICADAS NAS DISCIPLINAS DE MODELAGEM	
MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	35
QUADRO 2- ARTIGOS CIENTÍFICOS.....	37
QUADRO 3- CARACTERIZAÇÃO DA VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM	
MATEMÁTICA E AS AÇÕES DOS ALUNOS REFERENTES À VALIDAÇÃO.....	77

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	14
1.1 INTRODUÇÃO AO TEMA E JUSTIFICATIVA	14
1.2 O QUE SERÁ INVESTIGADO.....	21
1.3 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO DA PESQUISA	21
1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	24
1.5 REFERÊNCIAS.....	25
CAPÍTULO 2 – ARTIGO 1: VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: BUSCA POR UM ENTENDIMENTO	29
RESUMO	29
PARA INICIAR: UMA INCURSÃO NAS IDEIAS RELATIVAS À VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	29
O PROBLEMA DE PESQUISA	32
O CAMINHO METODOLÓGICO	32
A PESQUISA EM DOCUMENTOS.....	34
A VALIDAÇÃO EM ARTIGOS CIENTÍFICOS DA ÁREA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	37
A ANÁLISE DETALHA.....	38
O QUE PENSAM OS PROFESSORES/PESQUISADORES SOBRE VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	43
AGRUPANDO IDEIAS RELATIVAS À VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	45
CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
REFERÊNCIAS.....	50
CAPÍTULO 3 – ARTIGO 2: COMO OS ALUNOS REALIZAM A VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	53
RESUMO	53
INTRODUÇÃO.....	53
MODELAGEM MATEMÁTICA	54
VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	56
ASPECTOS METODOLÓGICOS	58
AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	60
DISCUSSÃO E RESULTADOS.....	67
CONSIDERAÇÕES FINAIS	69
REFERÊNCIAS.....	71
CAPÍTULO 4 - CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
REFERÊNCIAS.....	78
APÊNDICE A.....	79
APÊNDICE B.....	80

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO AO TEMA E JUSTIFICATIVA

A modelagem matemática vem sendo campo de pesquisas e investigações na área da Educação Matemática há alguns anos, mais especificamente desde a década de 1980 (BARBOSA, 2004). Com o passar dos anos essas pesquisas apresentaram e continuam apresentando contribuições com resultados pertinentes que visam aprimorar a utilização da modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática.

Diante disso, pesquisas mostram que a modelagem matemática pode aprimorar e inovar o ensino e a aprendizagem da matemática, considerando também ponderações de Freudenthal (1968) e de Pollak (1969), de que é relevante dar visibilidade às aplicações da matemática (BASSANEZI, 2002; BLUM, 2015; BORROMEO FERRI, 2018; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013; VIANA, VERTUAN, 2021).

Uma tentativa inicial de explicitar compreensões relativas à introdução da modelagem matemática em aulas de matemática, foi realizada por Kaiser e Meßmer (1989) em que os autores argumentam sobre as várias perspectivas de modelagem da época, destacando duas correntes principais: (i) uma perspectiva pragmática, cujo foco está na aplicação de matemática para a resolução de problemas da realidade; (ii) uma perspectiva científico-humanista em que o foco é a aprendizagem da matemática decorrente da investigação de relações entre matemática e realidade.

Destas duas correntes, foram desencadeados novos debates sobre a inclusão da modelagem no contexto educacional, direcionando a novos olhares e compreensões acerca dessa abordagem. Kaiser e Sriraman (2006, p. 304) categorizam seis perspectivas de modelagem matemática:

i) Modelagem Realística ou Aplicada: tem por base as situações problema autênticas, que são originárias da indústria ou da ciência, e tem por objetivo o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas aplicados, está assim ligada essencialmente aos aspectos pragmático-utilitários.

ii) Modelagem Contextual: considera a inclusão da modelagem matemática na sala de aula por meio de situações-problema reais, com o intuito de motivar os alunos e desse modo promover a aprendizagem. Está relacionada à interpretação de enunciados, sendo a obtenção do modelo matemático uma tarefa de resolução de problemas.

iii) Modelagem Educacional: uma perspectiva que considera situações-problema autênticas ao mesmo tempo em que se preocupa com o desenvolvimento da teoria matemática. Seus objetivos podem ser classificados em didáticos, quando relacionados com a estrutura e desenvolvimento dos processos de aprendizagem, ou conceituais, referentes à introdução de novos conceitos ou ao desenvolvimento de conceitos já apresentados aos alunos.

iv) Modelagem Sócio-crítica: enfatiza o pensamento crítico sobre o papel e a natureza dos modelos matemáticos e a função da matemática na sociedade. Tem por objetivo desenvolver uma visão crítica do mundo.

v) Modelagem Epistemológica ou teórica: aborda situações-problema estruturadas com o intuito de desenvolver conceitos matemáticos. Sendo assim, o objetivo principal desta perspectiva é o desenvolvimento de teorias matemáticas.

vi) Modelagem Cognitiva: esta perspectiva pode ser descrita como uma meta-perspectiva, seus objetivos são:

- a) Análise dos processos cognitivos que ocorrem durante os processos de Modelagem e compreensão desses processos cognitivos. Objetivos psicológicos:
- b) promoção dos processos de pensamento matemático pelo uso de modelos como imagens mentais ou mesmo imagens físicas ou pela Modelagem enfatizada como um processo mental, tais como abstração ou generalização (KAISER, SRIRAMAN, 2006, p.304, tradução nossa).

Considerar uma perspectiva para a modelagem matemática, implica em estabelecer diferentes objetivos para a sua utilização e, conseqüentemente, discutir a inclusão de atividades de modelagem matemática na sala de aula. Desse modo, estudos de Blum e Niss (1991) e Blum (2015) apresentam cinco argumentos relativos à inclusão da modelagem na sala de aula:

- i. Argumento formativo: considera que atividades de modelagem matemática constituem meios adequados para o desenvolvimento de competências e atitudes dos alunos, ao passo que exigem que eles sejam auto confiantes para explorar, desenvolver a criatividade e utilizar diversas estratégias para resolver problemas.
- ii. Argumento competência crítica: como objetivo as atividades de modelagem matemática desenvolvem nos alunos a capacidade de julgar, reconhecer, compreender,

analisar e avaliar situações reais em que a matemática é utilizada, ou seja, o uso real da Matemática para resolver problemas que têm significado social. Esse argumento, consiste ainda, em

preparar os alunos para viver e agir com integridade como cidadãos privados e sociais, possuindo uma competência crítica em uma sociedade cuja forma e funcionamento estão sendo cada vez mais influenciados pela utilização da matemática por meio de aplicações (BLUM; NISS, 1991, p. 43).

- iii. Argumento da utilidade: as atividades de modelagem matemática podem preparar os alunos para utilizar a matemática na resolução de problemas ou descrever aspectos de áreas e situações extra-matemáticas específicas, seja referente a outras disciplinas ou seja para contextos do cotidiano ou do mundo real. O aspecto principal nesse argumento é de que a modelagem matemática pode evidenciar que a matemática pode ser aplicada em situações extra-matemáticas, e que essa aplicação, muitas vezes, é implícita, o que requer preparação para utilizá-la.
- iv. Argumento imagem da matemática: a Modelagem Matemática deve ser um componente essencial no currículo de Matemática, uma vez que seu uso permite aos alunos “uma imagem rica e abrangente da matemática em todas as suas facetas, como ciência, como campo de atividade na sociedade e na cultura” (BLUM; NISS, 1991, p. 45).
- v. Argumento promovendo a aprendizagem da matemática: defende que a incorporação de aspectos e atividades de modelagem matemática

é adequada para ajudar os alunos a adquirir, aprender e manter conceitos, noções, métodos e resultados matemáticos, fornecendo motivação para a relevância dos estudos matemáticos. Esse trabalho também contribui para treinar os alunos a pensar matematicamente e selecionar e executar técnicas matemáticas dentro e fora da matemática (BLUM; NISS, 1991, p. 46).

Reflexões sobre as perspectivas de modelagem matemática e os argumentos relativos a sua inclusão em sala de aula indicam diferentes modos de compreender a modelagem matemática ou de indicar e defender seus usos, no entanto, sinalizam compreensões comuns de que a modelagem matemática visa explorar e entender relações entre a matemática e o resto do mundo (BLUM, 2015).

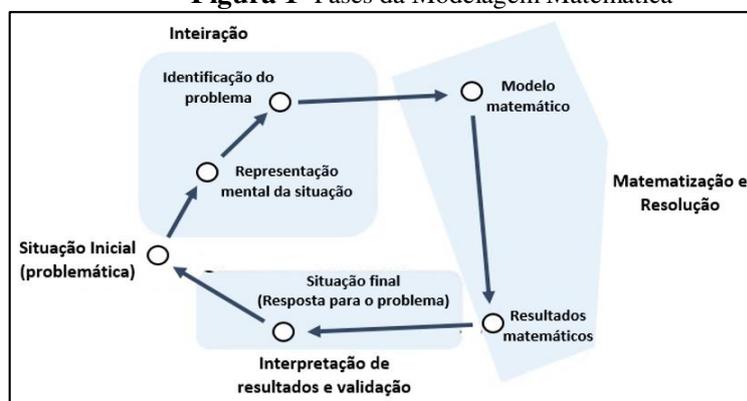
Pesquisas que versam sobre a utilização de atividades de modelagem matemática em sala de aula sugerem que atividades dessa natureza podem fomentar a aprendizagem de matemática (MENDONÇA, NETO, 2020; COSTA, PONTAROLO 2019; SILVA, 2017; BRITO, ALMEIDA, 2021). Neste cenário, Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 15) caracterizam a modelagem matemática como uma “possibilidade de abarcar a

cotidianidade ou a relação com aspectos externos à matemática, caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema”. Assim, segundo esses autores, na sala de aula, a modelagem matemática constitui-se em “alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, uma situação-problema não matemática” (2013, p. 11). Nesta perspectiva, em atividade de modelagem ocorre a busca por uma solução para um problema que surgiu de um dado contexto e que possibilita o envolvimento com conceitos e procedimentos matemáticos.

Neste cenário, a dinâmica de uma atividade de modelagem matemática em sala de aula, de modo geral, se inicia com uma situação-problema que pode ser sugerido pelos professores, ou definida pelos alunos, seguida por procedimentos, configuração, estruturação e resolução, em que se definem as estratégias de ação dos alunos, destacam-se como momentos decisivos e importantes para o desenvolvimento da atividade (BLUM, 2015; STILLMAN et al.,2007). Assim, alguns encaminhamentos são sugeridos para a condução de atividades dessa natureza em sala de aula, tais encaminhamentos são nomeado por autores da área de diferentes maneiras, sendo representados em ciclos que ilustram, de modo geral, como pode ocorrer o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Almeida, Silva e Vertuan (2013) compreendem os encaminhamentos como fases assim nomeadas: inteiração, matematização, resolução, interpretação dos dados e validação. Tais fases compõem um ciclo de modelagem matemática (Figura 1).

Figura 1- Fases da Modelagem Matemática



Fonte: adaptado de Almeida; Silva e Vertuan (2013)

A fase inteiração refere-se ao primeiro contato com a situação problema, definida como o ato de inteirar-se. Significa que nessa fase é momento de informar-se, tornar-se ciente, tomar conhecimento a respeito da situação. Essa fase da atividade de modelagem

matemática acontece a partir da escolha do tema e tem como foco a busca por informações, com vistas a conhecer características da situação em estudo.

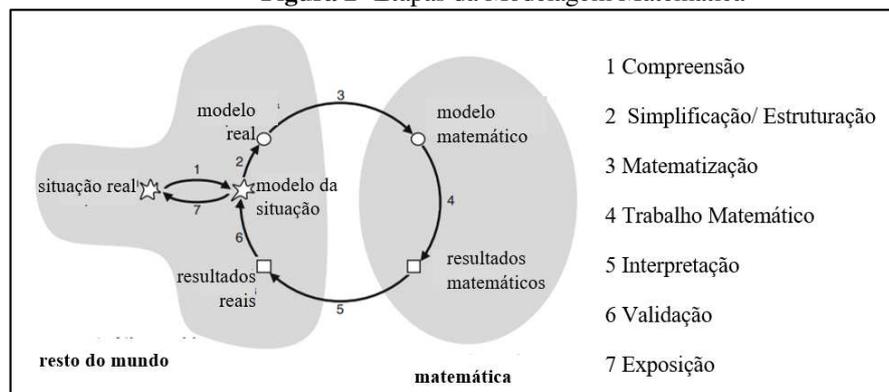
A matematização prioriza a descrição matemática do problema, requer a seleção de variáveis, o levantamento de hipóteses e o encaminhamento da elaboração do modelo matemático, levando em consideração aspectos da situação inicial, entendidos como relevantes para o problema investigado (VERTUAN, 2013). A descrição matemática da situação, nesse sentido, possibilita atribuir significado matemático à organização da realidade, ou seja, a matematização pode ser descrita como uma tradução de linguagens que permite retratar a realidade por meio de regras, métodos e teorias matemáticas.

A resolução é a fase que consiste na elaboração de um modelo matemático com o objetivo de descrever e analisar aspectos relevantes da situação, responder às questões e à problemática admitida na situação inicial, sendo possível, em alguns casos, realizar previsões para o problema em foco.

A fase caracterizada como interpretação de resultados e validação, leva em consideração os procedimentos matemáticos e a resposta obtida no sentido de analisar se é adequada. É também nessa fase que se avalia o processo de construção de modelos e se valida o(s) resultado(s) para o problema, para, posteriormente, avaliar a resposta quanto a sua validade e adequação para o problema.

Outros autores também apresentam encaminhamentos para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, dentre eles destacamos Blum (2015) que sugere que uma atividade de modelagem seja realizada seguindo uma sequência de etapas, que denomina de “esquema de sete passos” (Figura 2), sendo eles: construção, simplificação/estruturação, matematização, trabalho matemático, interpretação, validação, expondo resultados.

Figura 2- Etapas da Modelagem Matemática



Fonte: adaptado de Blum (2015)

De modo geral, os encaminhamentos sugeridos para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática em sala de aula evidenciam alguns aspectos relevantes em atividades dessa natureza, por exemplo, a escolha de temas e problemas relacionados à realidade dos alunos, buscar por soluções utilizando conteúdos matemáticos, bem como certificar-se e validar a resolução e os resultados, os quais possuem diferentes características e particularidade.

Há na literatura, estudos que se dedicam a compreender os pormenores no desenvolvimento de atividades de modelagem, ou seja, escolha do tema (HERMÍNIO, 2008), os problemas (SANTOS; VERONEZ, 2021) o desenvolvimento da resolução para o problema (SCHUKAJLOW; KOLTER; BLUM, 2015), o modelo matemático (SOUZA; TORTOLA, 2021) a matematização (ALMEIDA; SILVA, 2015). No entanto, um aspecto que ainda é relativamente pouco discutido diz respeito à validação em modelagem matemática, mesmo sendo um encaminhamento presente nas fases e etapas.

Em Almeida, Silva e Vertuan (2013) a validação é uma fase que visa uma avaliação do modelo matemático, tanto em termos de procedimentos matemáticos quanto em relação à sua adequação para a situação. Assim, validar requer uma análise das informações adotadas, das variáveis escolhidas e das hipóteses assumidas, do modelo construído e da resposta final encontrada.

Blum e Leiß (2006) indicam que a validação é o processo que visa avaliar e analisar se os resultados encontrados, modelo e respostas são satisfatórias, ou seja, estão condizentes com a situação da vida real posta para o estudo inicialmente.

Para outros autores a validação também está presente no desenvolvimento de atividades de modelagem. Por exemplo, em Bassanezi (2002) a validação consiste na etapa que desencadeia ações de olhar para os resultados matemáticos encontrados, sendo uma “comparação entre a solução obtida via resolução do modelo matemático e os dados reais. É um processo de decisão, de aceitação ou não do modelo inicial. O grau de aproximação desejado será o fator preponderante na decisão” (BASSANEZI, 2002, p. 27). Em Burak e Kluber (2011) os autores descrevem que analisar as soluções criticamente é um momento importante na modelagem para se analisar e discutir os resultados encontrados, investiga-se a coerência e consistência da solução encontrada, o que possibilita um aprofundamento de aspectos matemáticos e não matemáticos presentes na resolução.

Alinhada com essa compreensão, Czocher (2013) apresenta discussões sobre a validação em atividades de modelagem matemática, argumentando que a validação é tida

como um processo de analisar atividades de modelagem matemática desenvolvidas, tendo como focos centrais o modelo e os resultados. No entanto, a autora, infere que na sala de aula, muitas vezes, os alunos demonstram realizar validações sobre outros aspectos de atividades de modelagem.

Relativo às outras formas de validação manifestas pelos alunos, Czocher (2018) apresenta uma tipologia da validação que descreve esta fase da modelagem matemática como um processo que ocorre no decorrer do desenvolvimento da atividade. No entanto, as ações de validar dos alunos se dão no sentido de comparar o que foi ou estava sendo feito entre duas fases ou etapas da atividade, na busca por uma certificação do que está sendo realizado para continuar a resolução.

Desse modo, Czocher (2018) apresenta três papéis centrais para a validação em atividades de modelagem matemática: validar e analisar a parte matemática; validar as suposições feitas e encaminhamentos assumidos para estruturar e desenvolver a atividade; validar os resultados de modo empírico, levando em consideração também a teoria e a situação real elencada para o estudo.

No que se refere a analisar e validar a parte matemática, uma discussão sobre *verificação* e *validação* vem à baila. Abarcada de modo mais incisivo em Czocher, Stillman e Brown (2018), a utilização e compreensão de ambos os termos é sinalizada como campo ainda nebuloso que causa confusão relativo ao que compete à validação e à verificação.

De acordo com Pace (2004), Marchi (2015), Czocher, Stillman e Brown (2018) e Elaasar (2018), a verificação é o processo que mede o quão o modelo matemático é adequado numericamente, sendo assim, processo que analisa as características e adequação do modelo do ponto de vista matemático. Já a validação é um processo de avaliação para determinar se o modelo e a resposta são satisfatórios para a situação em estudo na atividade de modelagem matemática.

Assim, de acordo com esses autores a validação e a verificação podem ser diferenciadas, em linhas mais gerais, como sendo a verificação parte de um processo da validação que tem como foco o modelo matemático e a validação como sendo o processo que visa avaliar todas as componentes envolvidas e o resultado perante o fenômeno real.

Galbraith, Stillman (2006) e Stillman, Brown, Galbraith (2010) defendem que a validação é parte importante de atividades de modelagem. Em suas pesquisas percebem que na sala de aula a validação é um aspecto muito desafiador para os alunos e estes muitas

vezes demonstram dificuldade para validar o que obtém. De maneira semelhante, Blum e Leiß (2006) e Blum (2015) também indicam que em suas pesquisas empíricas a validação é realizada pelos alunos muito brevemente com inferências tímidas ao final das atividades.

Trazendo a discussão para o contexto brasileiro, ainda há escassez de pesquisas sobre validação em atividades de modelagem matemática, uma vez, que em trabalhos de âmbito nacional a validação é discutida em trabalhos que possuem outros focos de investigação (FREIRE, 2017; TORTOLA, 2016; KOGA, 2020, entre outros). De modo geral, estas pesquisas mencionam a validação como parte do processo de desenvolvimento da modelagem matemática, mas sem muita inferência sobre o assunto. Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) argumentam que em atividades de modelagem matemática no âmbito da sala de aula a validação é um processo ainda pouco explorado e discutido em relação a seus entendimentos e encaminhamentos nas pesquisas brasileiras.

Desse modo, considerando este cenário, na presente pesquisa, o foco é a investigação da validação em atividades de modelagem matemática.

1.2 O QUE SERÁ INVESTIGADO

Na presente pesquisa estamos interessados em investigar a validação em atividades de modelagem matemática. Desse modo, a nossa problemática de pesquisa diz respeito à investigação de como se caracteriza a validação em atividades de modelagem matemática e que ações dos alunos são referentes à validação.

Organizamos nosso relatório de pesquisa no formato *multipaper*, de modo que nossas deliberações a respeito desta problemática de pesquisa são apresentadas em dois artigos científicos, cada um direcionando por um objetivo específico de pesquisa, os quais são:

- 1- Investigar como a validação em atividades de modelagem matemática vem sendo entendida e realizada em atividades de modelagem matemática na sala de aula.
- 2- Investigar de que modo os alunos realizam a validação em atividades de modelagem matemática e o que dela decorre para a aceitação ou elaboração das respostas para o problema investigado na atividade de modelagem matemática.

1.3 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Visando os objetivos que permeiam a problemática dessa investigação, realizamos uma pesquisa que se caracteriza como qualitativa, na perspectiva de Garnica (1997), já que o olhar para a investigação volta-se à qualidade e aos elementos significativos relativamente à problemática.

Garnica (2011) pontua que em pesquisas de natureza qualitativa há uma

impossibilidade de serem focadas, numa pesquisa, todas as instâncias que nela própria se vislumbram e que, nitidamente, estão ligadas a entornos que, por sua vez, têm outras ramificações que exigem compreensão (GARNICA, 2011, p.100).

Os encaminhamentos da presente pesquisa também estão alinhados ao que Bogdan e Biklen (1994, p.47-50), apresentam como características da pesquisa qualitativa, em que

a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; [...] A investigação qualitativa é descritiva; [...] os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; [...] Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; [...] O significado é de vital importância.

Para investigar a validação consideramos a perspectiva de Garnica (2011), de modo que, a pesquisa foi estruturada no formato *multipaper*, sendo os resultados apresentados por meio de dois artigos.

No artigo 1 a opção metodológica é de uma pesquisa inventariante em que buscamos investigar como a validação em atividades de modelagem matemática vem sendo entendida e realizada em atividades de modelagem matemática na sala de aula. Reconhecendo a validação como um aspecto importante em atividades de matemática, conforme aponta Ikeda (2013), buscamos inicialmente investigar como o ato de validar vem sendo incluído na escolarização dos alunos. Selecionamos assim, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como documento a ser pesquisado relativamente a indicação da validação nas atividades de sala de aula.

Para conhecer como os cursos de Licenciatura em Matemática do estado do Paraná que têm a disciplina de Modelagem Matemática na grade curricular lidam com a validação no desenvolvimento das atividades de modelagem, optamos por utilizar os documentos dos Projetos Político-Pedagógicos (PPPs) desses cursos em universidades paranaenses.

Considerando o campo de práticas e de pesquisas relativas à modelagem matemática, temos a intenção de investigar como nos relatos dessas práticas vem sendo discutida e realizada a validação em atividades de modelagem matemática. Com essa finalidade dirigimos a atenção a artigos científicos publicados em periódicos da área de Educação Matemática visando identificar como abordam a validação em atividades de

modelagem matemática. Para a seleção dos artigos utilizamos a amostragem intencional, a qual consiste na seleção estratégica de uma amostra que seja relevante para a questão investigada (BRYMAN, 2012).

Para localizar os artigos utilizamos a ferramenta *pesquisa avançada do Google Acadêmico* em que inserimos os termos Verificação, Validação, Verification e Validation no campo destinado a palavras que deveriam aparecer nos títulos. Em seguida, nos artigos encontrados, realizamos uma busca, no corpo do texto, pelas palavras modelagem matemática, educação matemática e *mathematical modeling*, *mathematics education*. Os artigos que continham essas palavras foram selecionados para compor a amostra.

Para a análise dos artigos nos apoiamos nos encaminhamentos metodológicos de revisão sistemática. De acordo com Bryman (2012), a revisão sistemática inclui quatro etapas: (i) definição do propósito da revisão; (ii) busca por estudos relevantes; (iii) análise preliminar do material selecionado; (iv) análise detalhada do material selecionado e uma síntese das ideias.

Inicialmente foram selecionados seis artigos que atenderam aos critérios de seleção, no entanto, todas as pesquisas eram internacionais. Assim, pelo fato da primeira seleção não contemplar trabalhos brasileiros e, considerando que tais trabalhos seriam pertinentes para a nossa pesquisa, realizamos uma segunda busca incluindo os termos de busca também no resumo dos artigos. Com essa busca encontramos mais sete artigos. Assim, a amostra inicial é constituída por treze artigos.

Por fim, buscando conhecer e elucidar o entendimento de validação em atividades de modelagem matemática de professores que, em suas práticas docentes, usam atividades de modelagem matemática, convidamos três professores, aqui identificados como Lucas, Pedro e Paulo, para responder a três perguntas relativas ao seu entendimento de validação e como encaminham a validação em atividades de modelagem matemática. Os professores têm mais de vinte anos de experiência.

No artigo 2 consideramos a pesquisa qualitativa com caráter interpretativo, de modo que não nos preocupamos em quantificar os resultados obtidos, mas valorizar o desenvolvimento e as ações dos sujeitos no ambiente natural em que estão inseridos (BOGDAN; BIKLEN, 2010).

A investigação no artigo 2 se dirige a atividades de modelagem matemática que foram desenvolvidas por 24 alunos do 4º ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública, durante aulas da disciplina de Modelagem Matemática na

Perspectiva da Educação Matemática. A coleta de dados realizou-se no decorrer do segundo semestre de 2021, por meio de gravações das aulas no *Google Meet* e relatórios das atividades entregues no *Google Classroom*.

Analisamos, à luz do referencial teórico de modelagem matemática e validação, duas atividades desenvolvidas pelos alunos, as quais foram selecionadas por apresentarem discussões dos alunos referentes a como realizaram a validação nas atividades de modelagem desenvolvidas.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A estrutura do relatório que constitui essa dissertação segue as diretrizes do formato *multipaper*. Esta escolha se deu por inspiração em estudos como de Garnica (2011), Costa (2014), Barbosa (2015), Duck e Beck (1999), Paltrifge (2002), Badley (2009) e Mutti e Kluber (2018) que chamam a atenção da comunidade acadêmica sobre as possibilidades que emergem da construção de dissertações e teses no formato *multipaper*, destacando, argumentos favoráveis à sua adoção no contexto das pesquisas qualitativas e, especificamente, no campo da Educação Matemática.

Para Duke e Beck (1999) o formato *multipaper* permite aos pesquisadores analisar múltiplos aspectos em sua pesquisa, com base em diferentes dados e propósitos. Esta flexibilidade permite compreensões de distintos aspectos sobre o objeto de pesquisa, que se conectam entre si em relação a um mesmo tema e problema de pesquisa.

Diante disso, organizamos o presente relatório de pesquisa em quatro capítulos, como detalhamos na sequência.

O Capítulo 1 compreende a *Introdução*, no qual apresentamos argumentações iniciais sobre modelagem matemática e validação em modelagem, realizando uma discussão a respeito de pesquisas que versam sobre a validação em atividades de modelagem matemática. Em seguida descrevemos os objetivos da dissertação bem como os aspectos metodológicos que norteiam esta pesquisa.

O Capítulo 2 compreende o primeiro artigo: “*Validação em atividades de modelagem matemática: busca por um entendimento*”. Caracterizado como uma pesquisa inventariante, tem por objetivo investigar como a validação em atividades de modelagem matemática vem sendo entendida e realizada em atividades de modelagem matemática na sala de aula. Para tanto, realizamos uma investigação inicial em documentos oficiais que norteiam o ensino de Matemática no Brasil, por possíveis indícios da necessidade de atos

de avaliar ou validar respostas em atividades matemáticas realizadas em salas de aulas. Seguida por uma revisão sistemática, na literatura, sobre a validação em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula. E por fim, perguntas realizadas a três professores da área de Modelagem Matemática que elucidam aspectos de suas compreensões sobre validação.

No Capítulo 3 apresentamos o segundo artigo “*Como os alunos fazem validação em atividades de modelagem matemática*” no qual temos o objetivo de investigar de que modo alunos sinalizam a validação em atividades de modelagem matemática e o que dela decorre para a elaboração das respostas ao problema investigado nas atividades de modelagem matemática. Para tanto, realizamos uma investigação empírica em que alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática desenvolvem atividades de modelagem matemática.

O Capítulo 4 *Considerações finais* contém os resultados e nossas reflexões sobre como se caracteriza a validação em atividades de modelagem matemática. Para tanto, pautados nos resultados particulares de cada artigo, estabelecemos articulações a fim de evidenciar a caracterização da validação em atividades de modelagem matemática, apresentando assim, contribuições desta pesquisa para o Ensino da Matemática por meio da modelagem matemática.

1.5 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2013.

ALMEIDA, L. M. W.; DA SILVA, H. C. A matematização em atividades de modelagem matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 8, n. 3, p. 207-227, 2015.

BADLEY, G.. Academic writing: contested knowledge in the making?. **Quality Assurance in Education**, v. 17, n. 2, p. 104-117, 2009.

BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. Campinas: Mercado de Letras, v. 1, p. 347-367, 2015.

BARBOSA, M. A. **O Insucesso no Ensino e Aprendizagem na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. 2004. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 4. ed., 1ª reimpressão – São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BLUM, W.; LEISS, D. How do students and teachers deal with modelling problems? The example “Filling up.” In: *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood Publishing Limited. Chichester: Horwood: HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S., 2006. p. 222–231.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. **Educational studies in mathematics**, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, 2015. p. 73 – 96.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORROMEO FERRI, R. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Picassoplatz, Switzerland: Springer, 2018, p. 13 – 39.

BRYMAN, A. **Social research methods**: 4º ed. Oxford: Oxford University Press, 2012.

BRITO, Dirceu dos Santos; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. **Actualidades Investigativas en Educación**, v. 21, n. 1, p. 169-198, 2021.

BURAK, Dionísio; KLÜBER, Tiago Emanuel. Encaminhamentos didático-pedagógicos no contexto de uma atividade de modelagem matemática para a educação básica. **Práticas de modelagem matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas**. Coord (s). ALMEIDA, LMW de, p. 45-64, 2011.

COSTA, W. N. G. Dissertações e teses Multipaper: uma breve revisão bibliográfica. **Anais...** Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática, v. 8, n. 1, 2014.

COSTA, D. de; PONTAROLO, E. Aspectos da educação ambiental crítica no ensino fundamental por meio de atividades de modelagem matemática. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 100, p. 149-168, 2019.

CZOCHER, J. A. **Toward a description of how engineering students think mathematically**. 2013. Tese de Doutorado. The Ohio State University.

CZOCHER, J. A. How does validating activity contribute to the modeling process?. **Educational Studies in Mathematics**, v. 99, n. 2, p. 137-159, 2018.

CZOCHER, J.; STILLMAN, Gloria; BROWN, Jill. Verification and Validation: What Do We Mean?. **Mathematics Education Research Group of Australasia**, 2018.

- DUKE, N. K.; BECK, S.W. Research news and comment: Education should consider alternative formats for the dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.
- ELAASAR, M. Definition of modeling vs. programming languages. In: **International Symposium on Leveraging Applications of Formal Methods**. Springer, Cham, 2018. p. 35-51.
- FREIRE, T. B. P. et al. **Uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo de equações diferenciais ordinárias**. 2017. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- FREUDENTHAL, H. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational studies in mathematics**, p. 3-8, 1968.
- GALBRAITH, P.; STILLMAN, G. Uma estrutura para identificar bloqueios de alunos durante as transições no processo de modelagem. **ZDM**, v. 38, n. 2, pág. 143-162, 2006.
- GARNICA, A. V. M. Apresentação. In: SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um Grupo Escolar**. 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP de Rio Claro: São Paulo, 2011.
- GARNICA, A. V. M. Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. **Interface-comunicação, saúde, educação**, v. 1, p. 109-122, 1997.
- HERMÍNIO, P. H. **Matemática Financeira: um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem**. 2008. 244 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.
- IKEDA, T. Pedagogical reflections on the role of modelling in mathematics instruction. In: **Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice**. Springer, Dordrecht, 2013. p. 255-275.
- KAISER, G.; B. SRIRAMAN. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.
- KAISER, G. MEBMER. Aktuelle Richtungen innerhalb der Diskussion um Anwendungen im Mathematikunterricht. **Journal für Mathematik-Didaktik**, v. 10, n. 4, p. 309-347, 1989.
- KOGA, T. M. et al. **O fazer modelagem matemática em um curso de licenciatura em química: análise de estratégias e ações**. 2020. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- MENDONÇA, A. F.; NETO, H. B. Uso de recursos didáticos em atividades de Modelagem Matemática: uma análise de relatos de experiência. **Educação Matemática Debate**, v. 4, n. 10, p. 1-24, 2020.
- MENDONÇA, A. F.; NETO, H. B. Uso de recursos didáticos em atividades de Modelagem Matemática: uma análise de relatos de experiência. **Educação Matemática Debate**, v. 4, n. 10, p. 1-24, 2020.

- MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- MUTTI, G. de S. L.; KLÜBER, T. E. Formato multipaper nos programas de pós-graduação stricto sensu brasileiros das áreas de educação e ensino: um panorama. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS, SIPEQ, 5, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais**, Foz do Iguaçu: SEPQ; UNIOESTE, 2018.
- PACE, D. K. Modeling and simulation verification and validation challenges. **Johns Hopkins APL technical digest**, v. 25, n. 2, p. 163-172, 2004.
- PALTRIDGE, B. **Thesis and dissertation writing: an examination of published advice and actual practice**. English for Specific Purposes, 21(2), 125-143, 2002.
- POLLAK, H. O. How can we teach applications of mathematics?. **Educational studies in mathematics**, p. 393-404, 1969.
- SANTOS, S.; VERONEZ, M. Emergência e reconhecimento de um problema a investigar em modelagem matemática por alunos do Ensino Fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 2, p. 1-21, 1 mar. 2021.
- SCHUKAJLOW, Stanislaw; KOLTER, Jana; BLUM, Werner. Modelagem matemática de andaimes com um plano de solução. **ZDM**, v. 47, n. 7, pág. 1241-1254, 2015.
- SILVA, K. A. P Tarefas que Emergem em Atividades de Modelagem Matemática em um Ambiente Educacional de Cálculo Diferencial e Integral. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 10, n. 1, p. 23-40, 2017.
- SOUSA, B.; TORTOLA, E. Modelos Matemáticos em Atividades de Modelagem Matemática: considerações a partir da filosofia da linguagem de Wittgenstein. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 2, p. 1-25, 1 mar. 2021.
- STILLMAN, G.; BROWN, J.; GALBRAITH, P. **Researching applications and mathematical modelling in mathematics learning and teaching**. 2010.
- STILLMAN, G. et al. A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. **Mathematics: Essential research, essential practice**, v. 2, p. 688-697, 2007.
- TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.
- VIANA, E.; VERTUAN, R. Modelagem Matemática e Criatividade: algumas confluências. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 2, p. 1-23, 1 mar. 2021.

CAPÍTULO 2 – ARTIGO 1

VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: BUSCA POR UM ENTENDIMENTO

RESUMO

O objetivo do artigo consiste em investigar como a validação em atividades de modelagem matemática vem sendo entendida e realizada em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula. Os resultados que apresentamos resultam de uma pesquisa inventariante que busca elucidar indicativos de validação nos documentos oficiais que norteiam o ensino de Matemática no Brasil, seguida por uma revisão sistemática na literatura sobre a validação em atividades de modelagem matemática e perguntas realizadas a três professores da área de Modelagem Matemática. A análise do material nos leva a identificar três aspectos que se sobressaem dos entendimentos de validação em atividades de modelagem matemática: a validação contínua, a validação do resultado e a verificação do modelo.

Palavras-Chave: Modelagem Matemática; Validação; Revisão Sistemática.

Para iniciar: uma incursão nas ideias relativas à validação em atividades de modelagem matemática

Indicações para a condução do ensino de matemática com referência em situações da realidade são recorrentes em documentos e pesquisas de diversos países. No cenário nacional, os documentos oficiais brasileiros (BRASIL, 1997; PARANÁ, 2008) ressaltam a importância do uso de situações contextualizadas nas quais os alunos utilizem conceitos matemáticos para lidar com problemas da realidade.

No âmbito da Educação Matemática, no que se refere às diferentes metodologias de ensino que preconizam a investigação e o protagonismo do aluno na sala de aula, a modelagem matemática tem sido considerada uma possibilidade que propõe o ensino dos conteúdos programáticos curriculares mediante situações da realidade que podem ser matematizadas (BARBOSA, 2004; ENGLISH, 2003).

De acordo com Blum (2015) a modelagem matemática se configura como uma atividade que busca resolver problemas do mundo real com o auxílio da matemática. Neste sentido, a modelagem pode ser uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da matemática na sala de aula (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013).

Na compreensão da modelagem como alternativa pedagógica os encaminhamentos conduzem ao entendimento de que uma atividade de modelagem matemática se inicia em uma situação inicial e problemática, para a qual, mediante um conjunto de procedimentos, se obtém a situação final que corresponde à uma solução. Na transição da situação inicial

para a situação final, diversos processos são empreendidos pelos estudantes, caracterizando as denominadas fases¹ da modelagem.

As fases da modelagem matemática, em alguma medida, sinalizam como é a configuração do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Almeida, Silva e Vertuan (2013) caracterizam quatro fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

Dentre as fases da modelagem matemática a validação é considerada, de modo geral, um procedimento avaliativo do modelo matemático associado ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto à adequação do modelo para a obtenção de uma resposta para o problema identificado na situação da realidade.

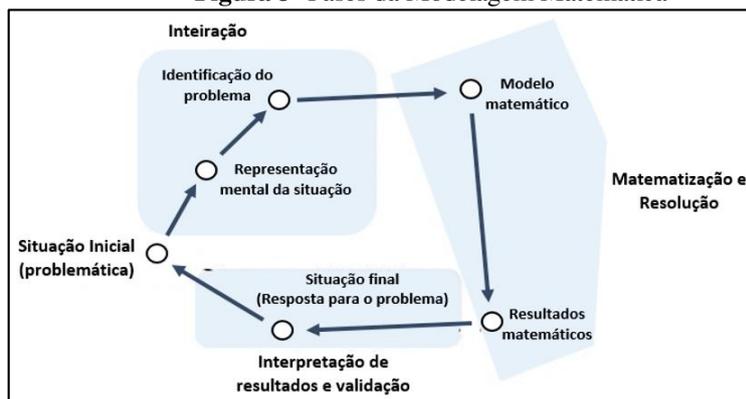
Na tentativa de caracterizar a validação, Czocher (2013) sugere um delineamento da validação como um momento para realizar reflexões sobre os procedimentos matemáticos e a resposta obtida visando analisar sua adequação e pertinência. Por meio da validação, para além da resposta ao problema, todo o desenvolvimento da atividade de modelagem pode ser admitido como satisfatório ou não.

De acordo com um dicionário clássico da língua brasileira (FERREIRA, 2009) a *validação* remete ao ato ou efeito de validar. O ato de validar, segundo o mesmo dicionário, significa dar validade a, tornar válido, tornar legítimo ou legal; legitimar.

Já para Thacker *et al.* (2004, p.2) a validação “é um processo para quantificar e construir confiança (ou credibilidade) para modelos [matemáticos]”. Assim, a validação confere confiança à capacidade preditiva do modelo, seja por comparação com dados experimentais, seja por observações da concordância entre as previsões do modelo ou consulta a dados de experimentos apropriadamente projetados e conduzidos.

De modo geral, na modelagem matemática a validação surge como parte integrante de ciclos de modelagem. Em Almeida Silva e Vertuan (2013) a validação é apresentada como uma das fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática (Figura 3) que objetiva analisar o modelo matemático encontrado, a sua precisão e também o resultado apresentado para o problema em estudo.

¹ Alguns autores se referem a etapas aos passos associados ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Figura 3- Fases da Modelagem Matemática

Fonte: adaptado de Almeida; Silva e Vertuan (2013)

No entanto, apesar da validação ser parte integrante de atividades de modelagem e ser decisiva na conclusão dessas atividades, uma vez que analisar a solução para o contexto da situação inicial denota um processo avaliativo (que pode ter natureza iterativa), Ikeda (2013) evidencia que ainda existem lacunas sobre o seu entendimento bem como sobre a forma como é realizada a validação.

Nesse sentido, pesquisas e estudos começaram a ser desenvolvidos nos últimos anos com vistas a argumentar sobre a validação na modelagem matemática. Czocher (2018) sinaliza que entendimentos relativos à validação em atividades de modelagem incluem: (i) um julgamento no final da atividade levando em consideração se as respostas estão corretas ou não e pode levar à aceitação, revisão ou rejeição das respostas; (ii) uma atividade de validação contínua durante todo desenvolvimento da atividade de modelagem, requerendo a tomada de decisão contínua dos alunos. A autora pontua também que, em ambientes educacionais, a validação é considerada uma ação para julgar se os processos de modelagem foram realizados corretamente.

No entanto, embora esses dois entendimentos tenham surgido a partir de uma pesquisa empírica realizada em Czocher (2018), Czocher, Stillman e Brown (2018) identificaram que ainda há falta de clareza relativamente à caracterização da validação em atividades de modelagem matemática. Segundo estas autoras, elementos não esclarecidos incluem: a) um conflito conceitual relativo à falta de clareza sobre qual é o objeto a ser validado; b) divergências metodológicas em relação a como a validação deve ser realizada; c) um conflito teórico relativamente aos modos como os alunos validam, considerando que validar requer processos cognitivos e metacognitivos, certo grau de intuição bem como a reflexão dos alunos.

O problema de pesquisa

Levando em consideração, por um lado, as indicações na literatura relativas à relevância da validação em atividades de modelagem matemática e, por outro lado, as diferentes lacunas relativas ao que se entende por validação e como ela pode ser realizada em atividades de modelagem matemática, na presente pesquisa temos como objetivo investigar como a validação em atividades de modelagem matemática vem sendo entendida e realizada em atividades de modelagem matemática na sala de aula.

O caminho metodológico

O percurso metodológico do artigo segue encaminhamentos de uma pesquisa inventariante que, de acordo com Soares (2000), a partir do levantamento do estado da arte, busca preencher lacunas detectadas relativamente a um campo de conhecimento investigado.

Particularmente, a busca por entendimentos, justificativas e procedimentos para a validação em atividades de modelagem matemática no presente artigo se dirige a três fontes de busca: i) documentos oficiais que norteiam o ensino de Matemática no Brasil; ii) artigos científicos publicados em periódicos da área de Educação Matemática; iii) considerações de professores que utilizam a modelagem matemática em suas práticas.

Considerando o exposto nos estudos realizados por Kim e Kasmer (2006), os quais, reconhecem e defendem que aspectos importantes da matemática devem ser incluídos nos documentos curriculares para serem valorizados e promovidos em sala de aula, e sendo a validação um aspecto importante em atividades de matemática (IKEDA, 2013), buscamos inicialmente identificar como o ato de validar é reconhecido ou sinalizado em atividades de matemática desde a Educação Básica. Com essa finalidade buscamos indícios da indicação da validação no documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que trata-se de “um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica” (BRASIL, 2018, p. 7)

No que se refere particularmente à validação em atividades de modelagem matemática, inicialmente dirigimos nossa atenção à disciplina de Modelagem Matemática ofertada em cursos de Licenciatura em Matemática. Assim, mediante uma análise do Projeto Político-Pedagógico (PPP) desses cursos, identificamos a oferta de uma disciplina

relativa a modelagem matemática, e nesta disciplina, buscamos indícios da recomendação relativa à validação.

Visando reconhecer como a validação vem sendo abordada e realizada nas práticas de modelagem matemática na sala de aula, inicialmente fazemos uma análise de publicações relativas a modelagem matemática em revistas científicas da área de Modelagem Matemática.

Para a análise dos artigos científicos nos apoiamos nos encaminhamentos metodológicos de revisão sistemática. De acordo com Bryman (2012), a revisão sistemática inclui quatro etapas: (i) definição do propósito da revisão; (ii) busca por estudos relevantes; (iii) análise preliminar do material selecionado; (iv) análise detalhada do material selecionado e uma síntese das ideias.

Para a seleção dos artigos utilizamos a amostragem intencional, a qual consiste na seleção estratégica de uma amostra que seja relevante para a questão investigada (BRYMAN, 2012). Assim, para buscar os artigos utilizamos a ferramenta *pesquisa avançada do Google Acadêmico* em que inserimos os termos Verificação, Validação, Verification e Validation no campo destinado a palavras que deveriam aparecer nos títulos. Em seguida, nos artigos encontrados, realizamos uma busca no corpo do texto pelas palavras modelagem matemática, educação matemática e *mathematical modeling, mathematics education*. Os relatos de pesquisas que continham essas palavras foram selecionados para compor a amostra.

Foram selecionados seis artigos que atenderam aos critérios de seleção, no entanto, todas as pesquisas eram internacionais. Assim, pelo fato da primeira seleção não contemplar trabalhos brasileiros e, considerando que tais trabalhos seriam pertinentes para a nossa pesquisa, realizamos uma segunda busca incluindo os termos de busca também no resumo dos trabalhos. Com essa busca encontramos sete trabalhos. Assim, a amostra inicial é constituída por treze artigos.

Por fim, com o intuito de conhecer o entendimento de validação em atividades de modelagem matemática de professores que, em suas práticas docentes, usam atividades de modelagem matemática, convidamos três professores, aqui identificados como Lucas, Pedro e Paulo, para responder a três perguntas relativas ao seu entendimento de validação e como encaminham a validação em atividades de modelagem matemática. O professor Lucas trabalha com a modelagem no Ensino Superior há cerca de 47 anos. O professor Pedro trabalhou com modelagem matemática na Educação Básica por 4 anos e há 20 anos

leciona disciplinas no Ensino Superior. O professor Paulo usa a modelagem matemática em suas aulas na Educação Básica há mais de 20 anos.

A pesquisa em documentos

Buscamos em documentos educacionais que norteiam o ensino de Matemática no Brasil, BNCC relativamente à Educação Básica e os PPPs dos cursos de Licenciatura em Matemática no nível do Ensino Superior, possíveis indícios da necessidade de atos de avaliar ou validar respostas em atividades matemáticas desenvolvidas em salas de aula.

Para tanto, realizamos uma busca nos textos que compõem os documentos pelo termo validação e por termos relacionados ao ato de validar, indicados por Czocher, Stillman e Brown (2018), como sendo: comparar, controlar, analisar, tirar conclusões, estimar, justificar, identificar limitações, prever, reconhecer a razoabilidade, refletir, validar, verificar, avaliar.

A busca realizada identifica que as palavras, comparar, analisar, estimar, justificar, reconhecer a razoabilidade ou a validade, verificar e avaliar são competências e habilidades que os alunos devem desenvolver e manifestar ao se envolver nas atividades de Matemática. Os termos, na BNCC, se referem a ações que se espera que os alunos manifestem ao trabalhar com problemas e conteúdos relacionados à Matemática, consideradas como ações necessárias para análise de cálculos e resultados encontrados para um problema, subsidiando a conclusão da atividade matemática desenvolvida.

De modo mais específico, algumas palavras são empregadas na BNCC referindo-se ao resultado matemático encontrado, às respostas, aos cálculos, ao problema em estudo, ao raciocínio matemático dos alunos. Na unidade temática Probabilidade e Estatística, por exemplo, “*avaliar e comparar resultados*” são habilidades que alunos do Ensino Fundamental - Anos Finais devem apresentar para observar se os resultados matemáticos satisfazem o objetivo desejado, e caso já existam resultados sobre o assunto, observar se são semelhantes. Já “*verificar a razoabilidade das respostas*” é uma habilidade presente na unidade temática Números que explicita a necessidade de alunos do 6º ano serem capazes de olhar para seus resultados e para o problema com a finalidade de compreender se o resultado encontrado responde ao problema.

A habilidade “*interpretar e analisar dados*” presente na unidade temática Probabilidade e Estatística, remete a ações que alunos do 7º ano devem apresentar perante os dados de uma determinada situação-problema em estudo, observando o que das

informações e dados será pertinente para a resolução e adequação para a problemática. Já na unidade temática Números e Álgebra “*Analisar criticamente o que é produzido*” é uma habilidade que alunos do Ensino Médio devem apresentar aos trabalharem com atividades de matemática.

De modo particular “*analisar os fundamentos e propriedades dos modelos*” e “*validade dos modelos existentes para o problema*” são habilidades que alunos do Ensino Médio devem manifestar quando trabalham com modelos matemáticos para concluir e argumentar sobre o quanto o modelo encontrado é adequado para responder ao problema matemático que está sendo estudado.

Outras habilidades identificadas foram: “*justificar as soluções apresentadas para o problema, e o raciocínio utilizado*” e “*justificar os resultados*”, indicam a necessidade da criticidade dos alunos do Ensino Fundamental e Médio em relação ao problema, aos resultados, às respostas, bem como à compreensão e indicação do caminho realizado para resolverem problemas, salientando portanto, que atividades de Matemática requerem que os alunos analisem, justifiquem a resolução e os resultados encontrados.

A investigação realizada na BNCC nos leva a concluir que atos de validar são sinalizados na Educação Matemática, uma vez que esses atos são indicados nas habilidades e competências. Portanto, devem se fazer presentes em atividades de matemática nas salas de aula.

Para investigar os indícios da recomendação relativa à validação presente nas disciplinas de Modelagem Matemática ofertadas em cursos de Licenciatura em Matemática foram selecionamos 17 PPPs que ofertam a disciplina de Modelagem Matemática. Dessas disciplinas, apenas 10 contém palavras que indicam ações de validação em atividades de modelagem matemática (Quadro 1). Nas demais disciplinas não há indicações explícitas na ementa ou nos objetivos relativos à validação em atividades de modelagem.

Quadro 1- Palavras-chave identificadas nas disciplinas de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática dos cursos de Licenciatura em Matemática

Universidade	Campus	Disciplina	Palavras encontradas na ementa ou nos objetivos das disciplinas
UFPR	Jandaia do Sul	Modelagem Matemática	Análise de modelos matemático.
	Palotina	Modelagem Matemática	Análise de resultados
	Pontal do Paraná		
UTFPR	Curitiba	Modelagem Matemática no ensino	Validação do modelo
	Pato Branco	Modelagem Matemática	Comparar, analisar e ajustar modelos matemático; Revisão de resultados

	Cornélio Procópio	Modelagem Matemática	Analisar modelos matemáticos
	Toledo	Modelagem Matemática	Analisar a evolução de modelos matemático.
UEL	Londrina	Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática	Análise de modelos matemáticos
UNICENTRO	Guarapuava	Modelagem Matemática na Educação Matemática I e II	Análises das atividades
UENP	Cornélio Procópio	Modelagem Matemática na Educação Matemática	Análise de modelos matemáticos
	Jacarezinho	Introdução à Modelagem Matemática	Análise de métodos clássicos; análise de fenômenos.

Fonte: as autoras

Nas disciplinas de Modelagem Matemática identificamos indícios da recomendação relativa à validação presente na ementa e nos objetivos como ações que permeiam a análise da atividade, dos modelos, resultados matemáticos, validação do modelo, revisão dos resultados. Tais ações são indicadas nas disciplinas como aspectos a serem desenvolvidos pelos alunos quando envolvidos com as atividades de modelagem matemática, compreendendo a validação no âmbito de atividades de modelagem como alunos mas também, como futuros professores que irão desenvolver práticas de modelagem matemática em sua prática docente.

Consideramos que as disciplinas de Modelagem Matemática explicitam a relevância da validação em atividades de modelagem matemática, uma vez que grande parte das palavras identificadas estão empregadas nas seções de objetivos da disciplina, o que sinaliza que validar resoluções, modelos e resultados é algo esperado em atividades de modelagem matemática.

Destacamos também que os documentos indicam a validação como parte do fazer modelagem em alguns casos, e em outros como um processo que deve ser compreendido e aprendido pelo aluno, devido a sua importância em determinar a conclusão da atividade desenvolvida, bem como para suas práticas futuras utilizando modelagem matemática em sala de aula.

Em suma, a BNCC apresenta atos de validação como habilidades necessárias a serem desenvolvidas pelos alunos da Educação Básica, sinalizando que a validação em atividades de matemática permite uma criticidade sobre as resoluções e resultados bem como reflexões de análises durante a resolução de problemas. Já na disciplina de Modelagem Matemática em cursos de Licenciatura em Matemática há indicativos de que a validação permeia, de modo geral, a análise dos modelos matemáticos obtidos e dos

resultados encontrados, estabelecendo relações mais diretas com características de atividades de modelagem matemática.

A validação em artigos científicos da área de Educação Matemática

A busca usando as palavras Verificação, Validação, *Verification* e *Validation* no título e nos resumos dos trabalhos por meio da ferramenta “pesquisa avançada do Google Acadêmico”, seguida por uma busca no corpo do texto pelas palavras modelagem matemática, educação matemática e *mathematical modeling*, *mathematics education*, levou a identificação de treze artigos.

A análise inicial desses artigos consiste em uma leitura, dando ênfase para os aspectos relativos à validação em atividades de modelagem matemática. Foram selecionados desta análise os artigos em que os autores sinalizam o entendimento de validação em modelagem matemática e como esta foi realizada nas atividades apresentadas nos textos.

Dessa amostra de treze artigos selecionamos nove para um estudo mais acurado. Um dos artigos não tem como foco a validação em modelagem matemática, mas sim a validação de um instrumento a ser utilizado em atividade de modelagem. Outros três não sinalizam ou discutem a validação na atividade ou ao longo do artigo. Dos nove artigos selecionados, cinco têm como objetivo a validação, e quatro, embora não tenham a validação como objetivo da investigação, apresentam apontamentos e indícios pertinentes sobre a validação em atividades de modelagem matemática.

A cada artigo foi atribuído um código A_i em que i indica a numeração do artigo selecionado. No Quadro 2 identificamos os nove artigos resultantes da análise inicial.

Quadro 2- Artigos científicos

Código	Título	Autores	Revista e ano de publicação
A ₁	Verification and Validation: What Do We Mean? (Verificação e validação: o que queremos dizer?)	Jennifer Czocher; Gloria Stillman; Jill Brown	Mathematics Education Research Group of Australasia, 2018.
A ₂	How does validating activity contribute to the modeling process? (Como a atividade de validação contribui para o processo de modelagem?)	Jennifer A. Czocher	Educational Studies in Mathematics, 2018.
A ₃	Conceptualization of Approaches and Thought Processes Emerging in Validating of Model in Mathematical Modeling in Technology Aided Environment. (Conceituação de Abordagens e Processos de Pensamento Emergentes na Validação de Modelo em Modelagem Matemática em Ambiente Tecnológico.)	Çağlar Naci Hidiroğlu; Esra Bukova Güzel	Educational Sciences: Theory and Practice, 2013.

A ₄	Conditions for teaching materials that support learners' validation: an analysis of 8 th -grade students' mathematical problem-solving processes (Condições para materiais didáticos que apoiam a validação dos alunos: uma análise dos processos de resolução de problemas matemáticos dos alunos do 8º ano.)	Ippo Ishibasshi; Yusuke Uegatani	JSSE Research Report, 2018.
A ₅	Creation of possible fictional worlds as a process of validation in mathematical word problem-solving and mathematical modeling activities (Criação de mundos fictícios possíveis como um processo de validação em atividades de resolução de problemas de palavras matemáticas e modelagem matemática)	Ippo Ishibasshi; Yusuke Uegatani	JSSE Research Report, 2019.
A ₆	Modelagem Matemática e uma Proposta de Trajetória Hipotética de Aprendizagem.	Pamela Emanuelli Karina Alessandra Pessoa da Silva	Bolema: Boletim de Educação Matemática, 2019
A ₇	As implicações de uma prática de modelagem matemática desenvolvida a partir da cobertura de uma casa.	Márcia Jussara Hepp; Italo Gabriel Neide; Wolmir José Böckel; Karina Azambuja	Atos de Pesquisa em Educação, 2019.
A ₈	Aprender com modelagem: relações entre modelagem (matemática) e processos criativos	Zulma Elizabete de Freitas Madrugá; Valderez Marina do Rosário Lima	Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2019.
A ₉	Os saberes não matemáticos articulados às práticas sociais com matemática	Cláudia Fernandes Andrade do Espírito Santo; Saddo Ag Almouloud	REMATEC, 2019.

Fonte: as autoras

A análise detalhada

A análise detalhada dos nove artigos consiste em uma leitura minuciosa dos textos visando identificar como os autores entendem a validação em modelagem matemática e quais encaminhamentos foram dados para validar em atividades de modelagem matemática em cada artigo.

O artigo A₁ Verification and Validation: What Do We Mean? (Verificação e validação: o que queremos dizer?) associa a validação com ações que visam olhar para os procedimentos usados ao longo da atividade de modelagem e avaliar a necessidade de rever ou analisar passo (s) ou procedimento (s) realizado (s), a fim de tomar alguma decisão. Este entendimento se ampara na investigação teórica que traz à baila uma discussão sobre *verificação* e *validação* em problemas de modelagem matemática, ancorados em um estudo sobre a presença de tais termos em documentos norteadores do

currículo da Califórnia e dos Estados Unidos, bem como em relatos de pesquisas envolvendo modelagem matemática.

Como pontos importantes da validação, A₁ pontua que não há um rigor quando se trata do entendimento conceitual, metodológico e teórico. Entretanto, a autora atenta que os termos verificação e validação não podem ser entendidos como um único processo. Segundo a autora, a verificação e a validação desempenham papéis diferentes em atividades de modelagem, sendo a verificação parte da validação e que tem como intenção analisar os cálculos matemáticos e o modelo obtido no desenvolvimento da atividade.

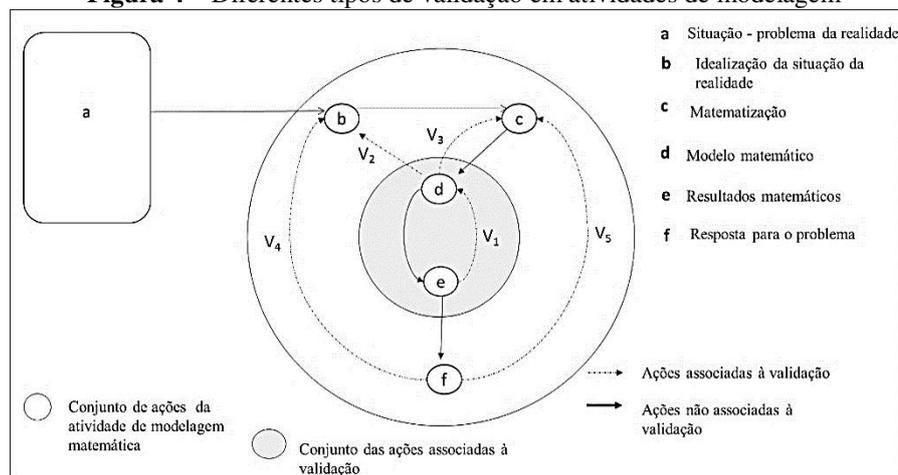
No artigo A₂ *How does validating activity contribute to the modeling process?* (Como a atividade de validação contribui para o processo de modelagem?) a autora descreve a validação como um conjunto de ações que ocorrem de modo contínuo e ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Assim, a validação acontece de forma integrada com os procedimentos dos alunos e se caracteriza como uma habilidade complexa e multifacetada.

Este entendimento é embasado em investigações empíricas realizadas por Czocher (2018) em que a autora elucida que a validação, no contexto em que alunos do curso de engenharia desenvolveram atividades de modelagem matemática, ocorreu quando as ações dos alunos indicaram tomada de decisão sobre o cálculo, o modelo, o resultado ou até mesmo sobre as ideias iniciais da resolução. Assim, com base nas ações dos alunos durante o desenvolvimento da atividade, Czocher (2018) caracteriza uma tipologia para a validação associada às ações dos alunos. Tal tipologia é formada por tipos de validação nomeados como V₁, V₂, V₃, V₄, e V₅ e descreve ações de validação realizadas pelos alunos nas diferentes etapas da modelagem matemática.

No tipo V₁ as ações incidem sobre os resultados matemáticos e o que é avaliado são os cálculos e procedimentos matemáticos; no tipo V₂ as ações incluem comparar o modelo matemático, seus parâmetros e variáveis bem como a sua articulação com o que no ciclo de modelagem se caracteriza como modelo da situação e corresponde à situação idealizada; no tipo V₃ estão ações que, sutilmente, diferem daquelas de V₂ uma vez que comparam o modelo matemático com as características do problema real; no tipo V₄ as ações visam comparar a resposta do problema com a situação da realidade considerando as expectativas empíricas e as informações sobre a situação da realidade; por fim o tipo V₅ compreende ações de comparar os resultados com os dados e as informações conhecidas sobre a

situação da realidade. Dessa tipologia decorre uma representação para caracterizar a validação em atividades de modelagem matemática (Figura 4) realizada pelos alunos.

Figura 4 – Diferentes tipos de validação em atividades de modelagem



Fonte: Czocher (2018, p. 151 – tradução nossa)

A caracterização da validação em um ciclo de modelagem matemática realizada por Czocher (2018) ilustra como os tipos de validação aconteceram em atividades de modelagem matemática. A autora pondera que as ações de validação podem ocorrer de diferentes modos em diferentes atividades, dependendo dos objetivos da atividade e do contexto.

O artigo A₃ Conceptualization of Approaches and Thought Processes Emerging in Validating of Model in Mathematical Modeling in Technology Aided Environment (Conceituação de Abordagens e Processos de Pensamento Emergentes na Validação de Modelo em Modelagem Matemática em Ambiente Tecnológico) manifesta um entendimento de que “a validação deve, de modo geral, analisar a relação entre o mundo matemático e o mundo real, de modo que soluções e resultados matemáticos encontrados na atividade façam sentido para a situação do mundo real” (HIDIROĞLU E GÜZEL, 2013, p. 2501). Para esses autores a verificação

é uma parte da validação e objetiva certificar-se da veracidade dos dados obtidos teórica ou experimentalmente sobre o problema da realidade e avaliar o quanto o modelo é preciso. [...] Se a verificação do modelo for satisfatória para o modelador, o próximo passo é elaborar uma solução para o problema (HIDIROĞLU E GÜZEL, 2013, p. 2501, tradução nossa).

Na abordagem dos autores de A₃ a verificação se configura como uma componente da validação dirigida de modo específico para o modelo, sinalizando que a verificação e a validação são processos com objetivos diferentes, mas que se complementam.

Os autores ponderam que *validar* e *verificar* podem ser procedimentos complexos para os alunos não familiarizados com atividades de modelagem, sendo importante a condução e orientação do professor. Hidiroğlu e Güzel (2013) sinalizam nesse trabalho possíveis abordagens para a validação em sala de aula. Essas abordagens são organizadas em cinco categorias que foram desenvolvidas após uma investigação empírica com professores ao desenvolver um conjunto de atividades de modelagem matemática: 1) Verificação dos resultados inesperados obtidos pelo modelo; 2) Comparação dos resultados encontrados pelo modelo matemático com previsões ou medições baseadas em experimentos; 3) Comparação dos resultados encontrados pelo modelo matemático com os dados do problema; 4) Comparação dos resultados encontrados pelo modelo matemático com as situações em vídeo e imagens; 5) Tomada de decisão sobre adequação do modelo matemático em relação à situação-problema da vida real.

No artigo A4 *Conditions for teaching materials that support learners' validation: an analysis of 8th-grade students' mathematical problem-solving processes* (Condições para materiais didáticos que apoiam a validação dos alunos: uma análise dos processos de resolução de problemas matemáticos dos alunos do 8º ano) os autores sinalizam que compreendem a validação conforme descrita em Czocher (2018), como sendo um conjunto de ações que ocorrem de modo contínuo no decorrer do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Assim, corroborando esse entendimento, os autores buscam investigar se os tipos de validação desenvolvidos pelos alunos do ensino superior, apresentados por Czocher (2018), também são evidenciados por alunos da Educação Básica e como os materiais utilizados para o estudo podem auxiliar no processo de validação.

Com essa finalidade os autores apresentam uma análise de atividades de problemas-de-palavras, que foram desenvolvidos por alunos do 8º ano de uma escola japonesa. Como resultado os autores concluem que os tipos de validação de Czocher (2018) que tiveram maior ênfase durante as atividades na Educação Básica foram os tipos V₄ e V₅. No entanto, em alguns momentos a validação do tipo V₂ inclui V₃ e V₄ inclui V₅. O artigo conclui que perceber as inconsistências de seus resultados ou ser questionado por seus colegas e pelo professor sobre os resultados obtidos, constituem “gatilhos” para o aluno realizar a validação.

O artigo A5 *Creation of possible fictional worlds as a process of validation in mathematical word problem-solving and mathematical modeling activities* (Criação de

mundos fictícios possíveis como um processo de validação em atividades de resolução de problemas de palavras matemáticas e modelagem matemática) apresenta uma compreensão de que “a validação é uma comparação realizada entre as etapas da modelagem matemática” (ISHIBASSHI E UEGATANI, 2019 p.169, tradução nossa). Os autores analisam atividades de problemas de palavras desenvolvidas por uma turma de 8º ano de uma escola japonesa em que observam as comparações realizadas pelos alunos para validar a resolução do problema. Como resultados o artigo apresenta que os alunos utilizam um modo particular de validação a “criação de possíveis mundos fictícios” (ISHIBASSHI; UEGATANI, 2019, p. 165). Essa validação descreve que os resultados e resoluções encontrados são comparados com aspectos fictícios elencados pelos alunos, ou seja, os alunos comparam respostas, resultados ou partes da resolução à situações idealizadas.

No artigo A₆ (Modelagem Matemática e uma Proposta de Trajetória Hipotética de Aprendizagem) a validação é compreendida como uma das

fases finais que visam, além da capacidade de aplicar o modelo matemático, o desenvolvimento da capacidade de avaliar o processo de construção do modelo e os diferentes contextos de suas aplicações. Essas fases podem apresentar constantes movimentos de idas e vindas, pois, às vezes, se tornam necessárias reformular ou analisar as fases anteriores (FERREIRA; SILVA, 2019, p.1238).

Para esses autores, a validação é uma avaliação do modelo e do resultado obtido. Os autores evidenciam que as validações são importantes para que a modelagem matemática realizada pelos alunos se torne completa, o que indica uma compreensão da importância do ato de validar em atividades dessa natureza.

O artigo A₇ (As Implicações de uma prática de modelagem matemática desenvolvida a partir da cobertura de uma casa) descreve a validação como uma fase do desenvolvimento da atividade de modelagem. Para esses autores, a validação inclui uma avaliação e análise dos dados, dos modelos e das respostas, o que sinaliza que a validação nesse estudo é empreendida pelos alunos em diferentes momentos do desenvolvimento da atividade.

Discussões pertinentes sobre validação em atividades de modelagem matemática também são apresentados no artigo A₈ (Aprender com modelagem: relações entre modelagem (matemática) e processos criativos) em que os autores versam sobre apontamentos de que a validação é um processo constituinte da modelagem e que se manifesta após formular o modelo e encontrar uma respostas para o problema. Assim, pode ser caracterizada como um momento de análise da resposta matemática para o problema e da adequação do modelo às particularidades da situação em estudo.

De modo semelhante, o artigo A₉ (Os saberes não matemáticos articulados às práticas sociais com matemática) também indica que a validação em modelagem é a validação da resolução matemática para o problema e a adequação do modelo. Assim, neste artigo a validação consiste na ação de tomada de decisão sobre os modos de fazer e de pensar as próprias práticas em que a situação em contexto foi estudada.

O que pensam os professores/pesquisadores sobre validação em atividades de modelagem matemática

Com a finalidade de elucidar compreensões de professores/pesquisadores sobre validação em modelagem matemática, convidamos três professores da área de Modelagem Matemática a responder três perguntas sobre seus entendimentos e procedimentos de validação em atividades de modelagem matemática.

Os professores convidados, Lucas, Pedro e Paulo, são professores que utilizaram ou utilizam atividades de modelagem matemática em diferentes níveis de escolaridade. Lucas trabalha com a modelagem no Ensino Superior há cerca de 47 anos. O professor Pedro trabalhou com modelagem matemática na Educação Básica por 4 anos e há 20 anos leciona disciplinas no Ensino Superior. Paulo usa a modelagem matemática em suas aulas na Educação Básica há mais de 20 anos. As perguntas realizadas aos professores foram feitas por meio de um questionário, que por opção dos mesmos, foi respondido via e-mail.

As questões respondidas pelos professores são: 1) *Qual o seu entendimento sobre validação em modelagem matemática?* 2) *Na sua opinião, como os alunos podem realizar a validação em atividades de modelagem matemática?* 3) *Quais procedimentos você recomenda aos seus alunos relativamente à ação de validar o que fazem na modelagem matemática?* Além de apresentar respostas, cada professor poderia acrescentar opiniões relativas ao uso da validação em atividades de modelagem matemática.

As respostas dos professores para cada uma das questões são apresentadas a seguir. Na Tabela 1 são apresentadas as repostas para a questão: *Qual o seu entendimento sobre validação em modelagem matemática?*

Tabela 1- Respostas dos professores para a primeira questão

Paulo	Eu penso que validação é <u>um processo de avaliação de um modelo matemático</u> . Essa avaliação pode levar em conta <u>critérios variados, como, por exemplo, a adequação empírica do modelo</u> , ou seja, a concordância dos dados obtidos pelo modelo com os dados coletados empiricamente. Em geral, entendo que <u>a validação é um processo externo, diz respeito à que faz uso do modelo e não necessariamente diz respeito a quem elabora um modelo</u> . (grifos nossos).
-------	--

Lucas	[...] Costumo afirmar aos meus alunos que a Modelagem Matemática de fenômenos sociais e naturais <u>é válida se serve àquilo a que a nós a destinamos</u> . [...] Muitas vezes, consideramos <u>uma modelagem como válida quando</u> conseguimos o que eu chamo, por brincadeira, de " <u>prever o passado</u> "; o interlocutor nos dá uma situação inicial e, a partir dessa situação, <u>simulamos o que viria a ocorrer</u> . Se essa <u>previsão estiver suficientemente próxima do que ocorreu</u> , a <u>modelagem se mostrou relativamente válida</u> . [...] E, muitas vezes, adotamos a <u>relativa validade de um modelo ao obter resultados condizentes com as expectativas</u> tanto do modelador matemático quanto de seu interlocutor (grifos nossos).
Pedro	[...] a <u>validação como um processo de ajuste entre a compreensão de uma dada situação-problema e a representação matemática</u> . [...]. O modelador navega entre ambas as dimensões: a compreensão da situação-problema e a representação matemática. Diferentemente do que apontam alguns manuais de matemática aplicada, <u>não vejo a validação como uma etapa ou uma fase, mas um processo contínuo de "checagem" entre a compreensão da situação-problema e a representação matemática</u> . (grifos nossos).

Fonte: entrevistas dos professores

As respostas dos professores para a primeira questão compreendem dois viés de entendimento. Os professores Paulo e Lucas parecem se referir à validação como um processo que busca analisar o modelo matemático. O professor Pedro, sinaliza que compreende a validação como um processo contínuo de "checagem" entre a compreensão da situação-problema e a representação matemática, enfatizando que seu entendimento não compreende a validação como uma fase ou etapa, mas sim algo contínuo no fazer modelagem.

As respostas à questão, *Na sua opinião, como os alunos podem realizar a validação em atividades de modelagem matemática?* constam na Tabela 2.

Tabela 2 - Respostas dos professores para a segunda questão

Paulo	[...] que o professor pode incentivar e questionar os estudantes <u>o quanto um modelo consegue retratar a realidade</u> . Em modelo dados por funções, por exemplo, é possível <u>discutir a diferença entre os dados calculados pelo modelo e medidos experimentalmente</u> . Penso também que é importante o professor mostrar <u>exemplo clássicos de reformulação de modelos matemáticos em consequência de uma avaliação negativa</u> , como por exemplo, o modelo de Malthus de crescimento populacional.
Lucas	1) <u>viendo se a modelagem matemática e as resultantes simulações condizem com expectativas do interlocutor</u> (aquele que propõe a situação-problema) <u>e do modelador</u> (aquele que cria o modelo e efetiva seu uso); 2) <u>comparando o uso do modelo matemático nas situações-problema com o que de fato acontece</u> ; 3) e, sobretudo, <u>dialogando com colegas e interlocutores</u> : isto é algo de Paulo Freire, a construção dialógica de conhecimento, e a crítica dos resultados tanto pelo ponto de vista da matemática quanto do ponto de vista da sociedade e da natureza. Neste sentido, é muito importante que, <u>no trabalho da Modelagem Matemática, se interaja com pessoas com visões, opiniões, conceitos diferentes, bem diferentes, em muitos casos!</u> Neste caso é bom discordarmos uns dos outros: <u>das discussões resultantes, vem um importante aspecto da validação</u> . (grifos nossos).
Pedro	Em um ambiente de modelagem, portanto, em que se trabalhe com um situação-problema, esta última não é ponto de partida, é "contexto". Ou seja, tudo que se faz na resolução do problema dá-se nesse contexto. Assim, <u>a validação, se considerarmos o entendimento acima, está presente em todas as ações dos alunos; quando simplificam a situação, quando escolhem que matemática utilizar, quando geram soluções e as interpretam</u> . (grifos nossos).

Fonte: entrevistas dos professores

As respostas dos professores indicam que eles entendem a validação como a validação do modelo e caracterizam o validar como um processo de observar o quanto o modelo desenvolvido consegue retratar a realidade e a importância da reformulação dos modelos, quando necessário. Já os professores que compreendem a validação como um processo que ocorre em todo o fazer modelagem pontuam que o realizar validação está associado a olhar para o resultado encontrado frente ao problema, observar o processo de resolução, dialogar com os colegas.

Destaca-se que apesar de compreensões diferentes sobre a validação, os professores destacam a importância da presença e orientação do professor nesse processo para validar.

As respostas para a questão: *Quais procedimentos você recomenda aos seus alunos relativamente à ação de validar o que fazem na modelagem matemática?* são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3 - Respostas dos professores para a terceira questão

Paulo	[...] pedir que os estudantes se coloquem no lugar do "consumidor" do sujeito que vai utilizar o modelo e faça a avaliação. Por exemplo, i) Se você utilizar esse modelo, você acha que suas conclusões são adequadas? [ii] se você utilizar esses dados do modelo que consequências isso pode ter? Que confiança você tem de que esses dados estão corretos?
Lucas	[...]discordar, dialogar, negociar são fundamentais no processo de agir para validar, além de estudar e analisar a situação-problema bem como os instrumentos matemáticos adotados. Nem sempre as verdades matemáticas "servem" para o modelo, como quando precisamos de uma das raízes de um polinômio de grau doze para obter os juros verdadeiros de uma compra em 12 prestações: 11 dessas raízes, mesmo sendo verdadeiras (e, por provocação, "válidas" matematicamente) não servem para a questão matemática proposta. Independente se são válidas socialmente...
Pedro	Recomendo que não esqueçam do contexto do problema. Ele estabelece os limites sobre que representação matemática se pode gerar e como podemos manipulá-la.

Fonte: entrevistas dos professores

As respostas dos professores indicam que estimulam nos alunos ações que os instiguem a pensar e refletir sobre os resultados de seus modelos, as respostas para o problema bem como para a reflexão de todo o processo desenvolvido ao longo da modelagem realizada. Com essas colocações evidencia-se que o fazer a validação requer que o professor oriente os alunos para o processo crítico de olhar para o modelo, o resultado ou todos os seus procedimentos, constituindo à validação a função de gerar confiabilidade nos resultados obtidos.

Agrupando ideias

Buscando identificar como o ato de validar é reconhecido ou sinalizado em atividades de matemática desde a Educação Básica indicamos, a partir de nossa análise,

que o documento da BNCC, não faz menção direta à validação em atividades matemáticas, mas, apresenta indícios de que atos de avaliar e verificar cálculos, resultados e o processo de resolução de um problema são ações tidas como importantes no ensino de Matemática.

Com a expectativa de averiguar como o ato de validar algo no contexto da matemática vem sendo abordado no Ensino Superior, olhamos, para os cursos de Licenciatura em Matemática e, particularmente para as disciplinas de modelagem matemática nestes cursos. Nossa análise concluiu que a validação embora não explicitamente expressa nos objetivos, parece ser associada a ações como “análise de modelos”, “revisão de resultados”, “análise de métodos” e “análise dos resultados”.

Podemos concluir que a validação é sinalizada em atividades de matemática desde a Educação Básica e é recomendada nas disciplinas de Modelagem Matemática dos cursos de Licenciatura em Matemática. Diante disso, visando investigar como professores que, de forma sistemática, se valem da modelagem matemática em suas aulas, indicam e orientam a validação em suas atividades, procedemos com a realização de um questionário com três professores de matemática. Além disso, a investigação de como a validação vem sendo realizada em um contexto mais amplo se efetiva por meio de uma pesquisa inventariante, com análise de nove artigos publicados em revistas científicas, que indicam a validação entre os aspectos observados nos estudos ao fazer modelagem matemática.

Do conjunto de análises empreendidas, podemos ponderar que, é possível identificar duas abordagens para a validação: aquela de que a validação pode (e deve) se dar no decorrer de todo o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e aquela em que validação se concentra em fases (ou etapas) específicas de uma atividade de modelagem matemática.

A validação em diferentes fases do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática foi evidenciada, por exemplo nos artigos A_1 e A_2 em que a validação consiste em um conjunto de ações que ocorrem de modo contínuo e concomitante às ações dos alunos na modelagem. Nestes artigos a validação ocorre de forma integrada às outras ações e se caracteriza como uma habilidade complexa e multifacetada. De modo semelhante, os artigos A_4 e A_5 apresentam que a validação se configura por procedimentos que se associam a diferentes etapas da modelagem matemática tendo por finalidade confirmar a validade de todo o desenvolvimento de uma atividade de modelagem.

Nesta direção também está o entendimento do professor Pedro ao afirmar que a validação não é uma fase ou etapa da modelagem, mas um processo contínuo de checagem

ao longo de todo o desenvolvimento da atividade, compreendendo também a validação como algo contínuo ao longo da atividade de modelagem.

Apesar de no artigo A₇ os autores não deixarem explícito que seus alunos realizam a validação em diferentes etapas do desenvolvimento da atividade, fornecem indícios em que descrevem que a validação é a validação de dados, validação do modelo, validação das respostas, sinalizando que a validação é empreendida em relação a vários momentos de uma atividade de modelagem.

Portanto, o entendimento de validação em diferentes fases do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática vislumbra ações que ocorrem de modo contínuo no decorrer do desenvolvimento da atividade de modelagem, tendo como objetivo realizar avaliações, ajustes, checagem entre o problema proposto e sua resolução e a resposta obtida.

Em relação ao entendimento de validação como a validação do modelo e do resultado matemático, o artigo A₃ remete ao entendimento de validação como um processo de analisar a relação entre o mundo matemático e o mundo real, de modo que as soluções e resultados matemáticos façam sentido na situação do mundo real. Já em A₈ e A₉ os autores descrevem a validação como análise da resolução matemática para o problema e a adequação do modelo para o contexto estudado.

Sobre a validação como validação do modelo o artigo A₆ pontua que as fases finais visam, além da capacidade de aplicar o modelo matemático, o desenvolvimento da capacidade de avaliar o processo de construção do modelo e os diferentes contextos de suas aplicações. Esse entendimento também se manifesta nas falas dos professores Paulo e Lucas que revelam que a validação é o processo de avaliação do modelo matemático, que busca obter resultados condizentes com o problema.

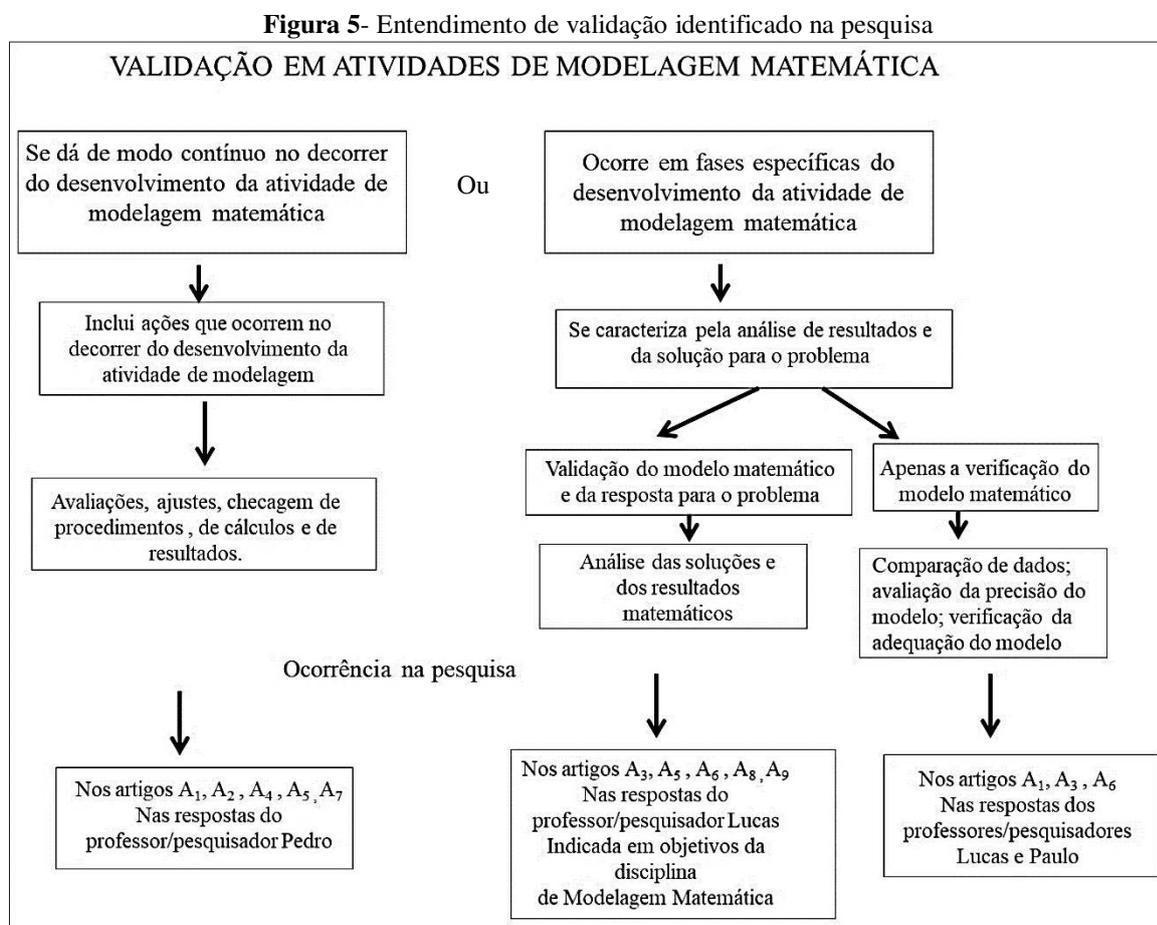
A análise e a avaliação do modelo construído durante a atividade de modelagem são indicadas nos artigos A₁ e A₃ como sendo a verificação, que tem por intenção revisar os procedimentos matemáticos, tendo um olhar específico para o modelo matemático. Assim, para esses autores a verificação se configura como uma parte da validação em atividades de modelagem matemática.

É possível, portanto, considerar que a validação do resultado consiste em analisar as soluções e resultados matemáticos em relação a sua adequação para a situação do mundo real. Nessa compreensão de validação sua função é apontar o quanto a resposta encontrada é adequada para o problema em estudo.

Já a verificação do modelo matemático entendido como validação, sinaliza que o que avalia e se valida são as técnicas e cálculos relativos a obtenção do modelo e de seu uso para encontrar uma resposta para o problema. Neste caso a validação consiste na ação de comparar os dados que foram obtidos teórica ou experimentalmente com aqueles estimados pelo modelo.

Não obstante essa aparente distinção entre validação e verificação reconhecida nos artigos analisados, é possível afirmar que em alguns casos (como é nos artigos A₁, A₂, A₄ e A₅), os autores claramente explicitam uma compreensão holística da validação, sendo essa realizada no decorrer de todo o desenvolvimento da atividade, incluindo análises dos procedimentos, dos resultados, inclusive parciais, do modelo matemático bem como da resposta obtida para o problema mediante seu uso.

Na Figura 5 fazemos uma síntese dos entendimentos de validação e como é empreendida em atividades de modelagem matemática situando o material analisado.



Fonte: as autoras

Ponderamos que os entendimentos evidenciados na Figura 5 não se sobressaem um sobre o outro em grau de importância, mas é o conjunto desses entendimentos que sinaliza

delineamentos para uma caracterização da validação em atividades de modelagem matemática.

Considerações finais

Nesta pesquisa investigamos como a validação em atividades de modelagem matemática vem sendo entendida e realizada em atividades de modelagem matemática na sala de aula. Inicialmente explicitamos que o ato de validar é reconhecido ou sinalizado em atividades de matemática desde a Educação Básica e a validação é recomendada na disciplina de Modelagem Matemática dos cursos de Licenciatura em Matemática. Diante disso, reconhecer como a validação vem sendo abordada e realizada nas práticas de modelagem matemática na sala de aula é pertinente.

A análise dos artigos científicos que se referem à validação em atividades de modelagem matemática e as respostas em questionários fornecidos por três professores da área de Modelagem Matemática indicam duas abordagens para a validação: a validação pode (e deve) se dar no decorrer de todo o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática; a validação se concentra em fases (ou etapas) específicas de uma atividade de modelagem matemática.

Os entendimentos de que a validação ocorre em diferentes fases do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática estão voltados a uma compreensão holística da validação e os entendimentos de que a validação ocorre em fases específicas revela que a validação pode ser uma ação pontual em atividades de modelagem matemática.

Na pesquisa de Czocher (2018), a autora identificou que há divergências em relação ao entendimento de validação em atividades de modelagem matemática. Neste sentido, a presente pesquisa apresenta contribuições de que as divergências realmente existem entre professores e pesquisadores da área, no entanto, os entendimentos se assemelham em alguns pontos como, por exemplo, a compreensão de que a validação é um processo de análise e checagem da atividade desenvolvida, seja uma análise pontual ou uma análise abrangente, seja apenas ao final ou durante a resolução.

Destacamos assim, que pesquisas futuras podem aprimorar as discussões já iniciadas sobre validação em atividades de modelagem matemática e fomentar discussões da validação em sala de aula, uma vez que a pesquisa realizada localizou poucos estudos com práticas empíricas. Nessa perspectiva, o que se espera é que as articulações, ainda que

iniciais sobre o entendimento de validação em atividades de modelagem matemática apresentados neste artigo, possam contribuir para as ações e reflexões dos professores e pesquisadores da área.

Referências

- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1. ed. 1ª reimpressão. SP: Contexto, 2013.
- BARBOSA, M. A. **O Insucesso no Ensino e Aprendizagem na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. 2004. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2004.
- BLUM, W.. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?. In: CHO, S. (eds) **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**. Springer, Cham, fev. 2015. p. 73-96
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília: MEC/SEB, 2018. 600p.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: ensino fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 10 volumes, 1997
- BRASIL. Lei n. 10.172, de 9/1/2001. **Estabelece o Plano Nacional de Educação**. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 10 jan. 2001.
- BRYMAN, A. **Social research methods**: 4º ed. Oxford: Oxford University Press, 2012.
- CLARKE, M.; HORTON, R. Reunindo tudo: Lancet-Cochrane colaboram em revisões sistemáticas. **The Lancet** , v. 357, n. 9270, pág. 1728, 2001.
- CZOCHER, J. A. **Toward a description of how engineering students think mathematically**. 2013. Tese de Doutorado. The Ohio State University.
- CZOCHER, J.; STILLMAN, Gloria; BROWN, Jill. Verification and Validation: What Do We Mean?. **Mathematics Education Research Group of Australasia**, 2018.
- CZOCHER, J. A. How does validating activity contribute to the modeling process?. **Educational Studies in Mathematics**, v. 99, n. 2, p. 137-159, 2018.
- ENGLISH, L. Mathematical Modelling With Young Learners. In LAMON, S.J. PARKER, W. A, HOUSTON, S. K. (Eds.), **Mathematical modelling: A way of life**. Chichester, UK: Horwood. 2003. p. 3–18.
- FERREIRA, P. E. A.; SILVA, K. A. P. da. Modelagem Matemática e uma Proposta de Trajetória Hipotética de Aprendizagem. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 33, p. 1233-1254, 2019.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa. 3.ed. rev. e atual. São Paulo: Fundação Dorina Nowill para cegos, 2009. FLICK, Uwe. **Introdução à pesquisa qualitativa-3**. Artmed editora, 2009.

HIDIROGLU, Ç. N.; BUKOVA GÜZEL, Ms. Conceptualization of Approaches and Thought Processes Emerging in Validating of Model in Mathematical Modeling in Technology Aided Environment. **Educational Sciences: Theory and Practice**, vol. 13, no. 4, p. 2499-2508, 2013.

IKEDA, T. Pedagogical reflections on the role of modelling in mathematics instruction. In: **Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice**. Springer, Dordrecht, 2013. p. 255-275.

ISHIBASHI, I.; UEGATANI, Y. Creation of possible fictional worlds as a process of validation in mathematical word problem-solving and mathematical modeling activities. **JSSE Research Report**, v. 34, n. 3, p. 165-170, 2019.

KIM, Ok-K.; KASMER, L. Analysis of emphasis on reasoning in state mathematics curriculum standards. **The intended mathematics curriculum as represented in state-level curriculum standards: Consensus or confusion**, p. 89-109, 2006.

MADRUGA, Z. de, F. E.; DO ROSÁRIO LIMA, Valderez Marina. Aprender com modelagem: relações entre modelagem (matemática) e processos criativos. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 12, n. 2, p. 241-266, 2019.

PARANÁ, G. do. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. 2008.

REHFELDT, M. J. H. et al. As Implicações de uma prática de modelagem matemática desenvolvida a partir da cobertura de uma casa. **Atos de Pesquisa em Educação**, v. 14, n. 1, p. 193-218, 2019.

SANTO, C. do E. F. A.; ALMOULOUD, S. A. Os saberes não matemáticos articulados às práticas sociais com matemática. **REMATEC**, v. 14, n. 32, p. 131-147, 2019

SOARES, M. B.; MACIEL, F.: **Alfabetização / Organização**. Brasília: MEC/Inep/Comped, 2000.

STILLMAN, G. et al. A framework for success in implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. In: WATSON, J.; BESWICK, K. Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia. 30th , 2007, Wrest Point Hotel Casino, Hobart. **Proceedings...** Hobart: TAS, 2007. p. 688-697.

THACKER, B. H. et al. **Conceitos de verificação e validação de modelo**. 2004.

CAPÍTULO 3 – ARTIGO 2

COMO OS ALUNOS REALIZAM A VALIDAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

RESUMO

Neste artigo realizamos uma investigação qualitativa em que o objetivo da pesquisa consiste em investigar de que modo os alunos realizam a validação em atividades de modelagem matemática e o que dela decorre para a aceitação ou elaboração das respostas para o problema investigado na atividade de modelagem matemática. Uma pesquisa empírica é realizada com alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. Os dados foram obtidos por meio de gravações das aulas e do relatório dos alunos. Os resultados conduzem à construção de um *framework* para a validação que evidencia o desenvolvimento da validação ao final da atividade é inferida como um processo no qual sobressai a necessidade de olhar para alguns elementos da modelagem e a validação ao longo do desenvolvimento da atividade que é utilizada em momentos que os alunos percebem erros ou inconsistências e sentem a necessidade de rever ou analisar algum ponto específico, estando mais relacionada ao processo de verificação. Nestes dois viés a validação desencadeia uma tomada de decisão dos alunos referente a aceitação ou elaboração das repostas para o problema.

Palavras-Chave: Educação Matemática; Validação; Modelagem Matemática;

Introdução

As discussões relativas à modelagem matemática e o seu desenvolvimento em sala de aula têm merecido atenção de professores e pesquisadores no âmbito da Educação Matemática. Estudos e pesquisas já realizados apresentam entendimentos de modelagem matemática, bem como se referem a especificidades dessas atividades e encaminhamentos para a sala de aula (BLUM, 2015; BORROMEO FERRI, 2018; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013; MEYER, CALDEIRA E MALHEIROS, 2013).

A investigação de uma situação da realidade por meio da matemática, na sala de aula pode assumir diferentes configurações, dependendo do conhecimento e da experiência dos alunos e professores. Neste sentido, no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática algumas ações podem ser mais enfatizadas do que outras de acordo com as finalidades com que as atividades são introduzidas na sala de aula (BLUM, 2015; BORROMEU FERRI, 2018; KAISER, SRIRAMAN, 2006).

No entanto, independente destas finalidades, atividades de modelagem matemática devem incluir uma análise dos resultados e das respostas obtidas (HUANG, LU, XU, 2021). Este procedimento é reconhecido nos chamados ciclos de modelagem como *validação*.

Czocher (2013), Ikeda (2013), Czocher (2018), Czocher; Stillman; Brown (2018), ponderam que, embora a validação seja relevante em atividades de modelagem matemática, como se dá a validação e que consequências dela decorrem para a modelagem

matemática ainda são aspectos não discutidos pelos professores ao introduzirem atividades de modelagem matemática em suas aulas.

No presente artigo temos como objetivo investigar de que modo os alunos realizam a validação em atividades de modelagem matemática e o que dela decorre para a aceitação ou elaboração das respostas para o problema investigado. A partir do quadro teórico relativo à validação e dos resultados da pesquisa empírica, construímos um *framework*, oferecendo um entendimento do modo como os alunos realizam a validação quando desenvolvem atividades de modelagem matemática.

Modelagem Matemática

Embora na Educação Matemática exista uma pluralidade de caracterizações para Modelagem Matemática, as diferentes perspectivas e concepções relativas à modelagem no campo da Educação Matemática, parecem compartilhar de um consenso de que a ideia central sempre é

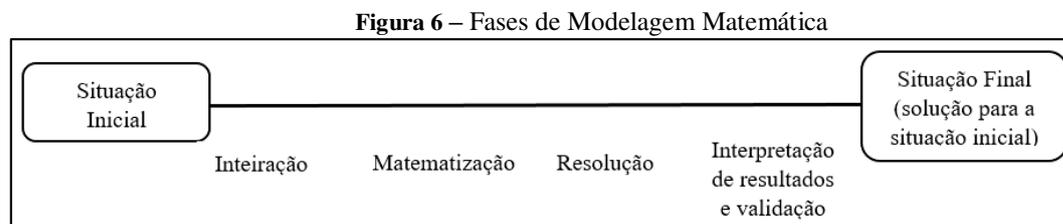
“formular uma situação-problema, decidir o que manter e o que ignorar na criação de um modelo matemático, fazer uso de matemática na situação idealizada a partir de uma situação da realidade, e então decidir se os resultados podem, em alguma medida, ser uteis para entender a situação original” (POLLAK, 2015, p. 267).

De acordo com Almeida (2020) as diferentes perspectivas de modelagem tem como ponto central discutir as possibilidades de ação e os encaminhamentos do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Estão portanto, relacionadas ao fazer modelagem matemática em sala de aula.

O desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na sala de aula vem orientado por alguns encaminhamentos que amparam a configuração e estruturação da abordagem de uma situação da realidade por meio da matemática. Esses encaminhamentos se amparam em um conjunto de procedimentos que são associados a etapas, fases ou estágios do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. De modo geral, os encaminhamentos são indicados como orientações para o desenvolvimento da atividade, associados, de modo geral, a uma estrutura cíclica (PERRENET, ZWANEVELD, 2012; ALMEIDA, SILVA, 2021).

Na compreensão de Almeida, Silva e Vertuan (2013) uma atividades de modelagem matemática tem origem em uma situação inicial em que se identifica um problema, e tem como ponto de chegada uma situação final em que uma solução para este problema é apresentada. No caminho entre estas situações, identifica-se um conjunto de procedimentos

que são nomeados como fases caracterizadas como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação, as quais permeiam ações específicas na atividade mas se complementam e se relacionam durante o processo de desenvolvimento da atividade de modelagem (Figura 6).



Fonte: Almeida; Silva e Vertuan (2013, p. 15)

Dentre as fases indicadas por Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 16), está a validação que compreende ações de avaliar a “representação matemática associada ao problema, considerando tantos os procedimentos matemáticos quanto à adequação da representação para a situação”. De acordo com os autores, essa fase inclui a validação de processos e de resultados.

Em outras estruturas cíclicas que buscam ilustrar e orientar o desenvolvimentos de atividades de modelagem matemática presentes na literatura a validação também é uma componente. De modo particular, Zawojewski (2013) tece argumentações em seu estudo de que a validação é sinalizada nos ciclos como o momento de analisar a adequação dos procedimentos e resultados assumidos na atividade, sendo descrita muitas vezes como decisiva na conclusão da atividade e responsável pela iteratividade em atividades de modelagem.

Em um estudo recente Huang, Lu e Xu (2021) indicam que em muitos ciclos de modelagem matemática discussões relacionadas à validação vêm se mostrando mais intensas em estudos dos últimos anos, com mais descrição e elucidação do processo de validar a atividade desenvolvida. De acordo com os autores, a validação é o processo que certifica o potencial da atividade para apresentar resultados sobre uma situação da realidade. Desse modo, buscando sinalizar a validação em atividades de modelagem apresentam um diagrama das estruturas que orientam atividades de modelagem matemática, no qual a validação representa o momento de avaliação na atividade, levando a análise do resultado e sua adequação com o problema relativo a uma situação da realidade.

Validação em atividades de modelagem matemática

A etimologia da palavra *validação* indica que o termo tem origem na junção das palavras *validar* e *ação*, em que *validar* vem do latim *validare* e significa, “fazer com que se torne válido a partir das regras em vigor”, e *ação* significa “fazer, agir” (HOUAISS, 2021, p. 1). A palavra *validação* se associa, portanto, a ação ou intenção de tornar algo válido.

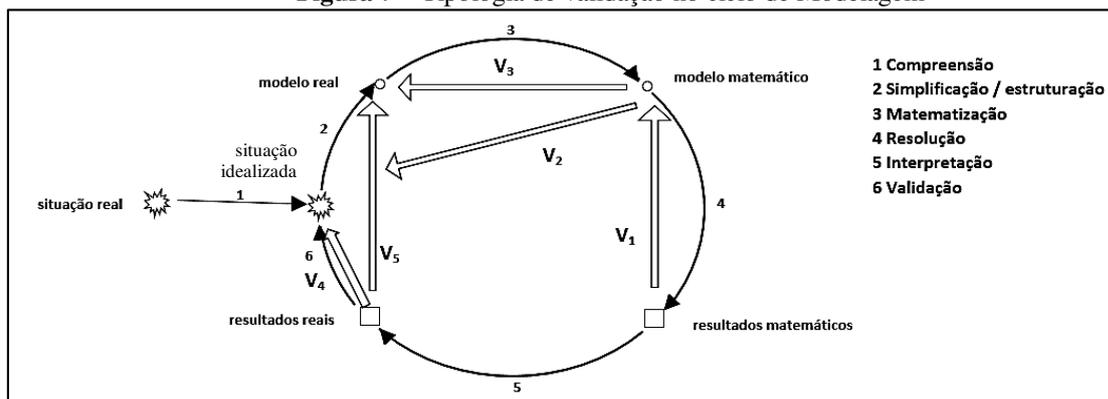
Os entendimentos da palavra *validação* são inferidos em estudos e pesquisas como sendo um processo em que um indivíduo desenvolve ações com a intenção de avaliar um sistema, um componente, um objeto para determinar se ele satisfaz alguns requisitos especificados a priori. (HALLERSTEDE; LARSEN; FITZGERALD, 2018).

No âmbito da Matemática, estudos são empreendidos e compreendem a validação como um processo que visa determinar e quantificar a confiança na capacidade preditiva dos métodos, técnicas e resultado matemático (THACKER et. al., 2006). Unhelkar (2005) defende que a validação é utilizada para garantir que a utilização da matemática e das técnicas foram bem sucedidas durante a resolução de um problema ou de uma equação, por exemplo.

Para Czocher (2018) a validação em atividades de modelagem matemática consiste em um conjunto de ações que ocorrem de modo contínuo ao longo do desenvolvimento da atividade, sendo que é por meio dela que se dão as tomadas de decisão dos alunos. Nesta perspectiva, a autora caracteriza uma tipologia de validação (Figura 7) na qual indica cinco possibilidades (V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , e V_5) de como pode ocorrer a validação em atividades de modelagem matemática.

Essas diferentes possibilidades de validação são assim caracterizadas: V_1 – a validação inclui ações de verificação dos resultados de um cálculo; V_2 – a validação inclui ações de avaliar a expressão matemática, seus componentes ou relações constituintes, em relação à definição do problema; V_3 – a validação compreende ações de analisar a expressão matemática, seus componentes ou relacionamentos constituintes, em relação a uma versão idealizada do problema; V_4 – a validação inclui ações de comparar os resultados reais com expectativas empíricas; V_5 – inclui ações de comparar resultados com os princípios físicos considerados no modelo real. A Figura 7 localiza essas diferentes possibilidades de validação em um ciclo de modelagem matemática.

Figura 7 – Tipologia de validação no ciclo de Modelagem



Fonte: adaptado de Czocher (2018, p. 145)

A validação em atividades de modelagem matemática consiste, portanto, em ações de avaliação do que está sendo desenvolvido, nas palavras de Twomey e Smith (1997, p. 53) “a validação é um aspecto crítico do desenvolvimento da atividade”.

Corroborando a assertiva de Twomey e Smith (1997), Alvarado (2017) argumenta que em modelagem matemática a validação é importante pois permite avaliar de modo crítico e reflexivo a qualidade de um modelo ou resultado em função dos objetivos estabelecidos para a atividade. A validação é

uma comprovação dentro de seu domínio de aplicabilidade e para uma faixa satisfatória de precisão, coerente com o sistema real e sua aplicação prevista. Deste modo, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática deve ter um propósito específico e sua validade é determinada em concordância com tal propósito (ALVARADO, 2017, p. 32).

A validação se figura desse modo, como um processo para analisar os procedimentos, modelos, resultados, respostas para o problema e a situação que está em estudo. No entanto, Alvarado (2017p. 33) destaca que “a validação absoluta não existe, mas existem técnicas particulares que são estabelecidas para validar aspectos da atividade”. Essas técnicas e particularidades se remetem a elementos específicos de atividades de modelagem matemática, por exemplo, o modelo, o resultado, cálculos, respostas.

Dentre as técnicas assumidas durante a validação, pesquisas sinalizam a verificação como uma técnica importante do processo de validação, no entanto, destacam que, em alguns momentos, confunde-se o que é validar e o que é verificar, bem como as ações que são empregadas em cada uma e seus objetos assumidos para análise (ALVARADO, 2017; UNHELKAR, 2005; THACKER et. al. 2006).

Neste sentido, ao longo dos anos, pesquisadores buscam tecer considerações sobre o que é validar e o que é verificar. Assim, uma das discussões iniciais que foi empreendida no meio científico sobre o que é verificar consiste no critério de “verificabilidade”

apresentado por Karl Popper que tecia considerações filosóficas sobre a necessidade de verificar objetos de estudo para garantir sua precisão e assim, considerar algo como aceitável (ORBNE, 2012).

Diante do entendimento de verificação como o processo que garante uma precisão do objeto em estudo, investigações indicam que, de modo geral, na literatura a verificação em atividades de matemática é defendida como um processo que busca garantir a precisão da utilização dos conceitos matemáticos bem como a construção de modelos e resultados encontrados (MARCHI, 2015; ELAASAR, 2018).

Em atividades de modelagem matemática, entretanto, a verificação se restringe ao modelo matemático obtido, sendo

“o processo de determinar se a implementação de um modelo representa com precisão a descrição conceitual do modelo e a solução para o problema. A verificação se preocupa, portanto, em identificar e remover erros no modelo, comparando soluções numéricas com soluções analíticas ou altamente precisas (THACKER et. al. 2006, p.2)”

De acordo com Pace (2004), Marchi (2015) e Elaasar (2018) a verificação é o processo que mede o quão bem o modelo matemático é resolvido numericamente, não tendo como objetivo o fenômeno real, sendo um processo puramente matemático. Já a validação é o processo de avaliação de todo o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Assim, de acordo com esses autores a validação e a verificação podem ser diferenciadas, em linhas mais gerais, como sendo a verificação parte da validação que tem como foco o modelo matemático e a validação como sendo um conjunto de ações que visa avaliar todas as componentes envolvidas e o resultado perante a situação da realidade investigada em atividades de modelagem matemática. Como os alunos realizam essa validação e o que dela decorre são aspectos que merecem atenção.

Aspectos metodológicos

A investigação na presente pesquisa vem subsidiada por uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática são desenvolvidas por alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática no decorrer da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva de Educação Matemática ministrada por uma das autoras do presente artigo no segundo semestre do ano de 2021.

Diante do cenário pandêmico provocado pelo Covid-19, escolas e universidades passaram a ministrar suas aulas em ambientes virtuais. Assim, para as aulas em que foram desenvolvidas as atividades de modelagem utilizou-se como recursos o *Google Meet* e

Google Classroom. Os dados que constituem o nosso material de análise consistem nas gravações das aulas realizadas no *Google Meet* e relatórios das atividades entregues pelos alunos e as respostas dos alunos a um questionário respondido imediatamente após o desenvolvimento de cada atividade.

Para desenvolverem as atividades os alunos formaram grupos que se reuniram em salas virtuais do *Google Meet* sendo acompanhadas pela professora ou por uma das estagiárias da disciplina.

Referimo-nos no artigo a duas dessas atividades, especificadas na Tabela 4, considerando que nestas atividades é possível identificar discussões e procedimentos associados à validação. Os alunos são identificados por A_i , $1 \leq i \leq 24$ e os grupos por G_i , $1 \leq i \leq 7$. Uma dessas atividades foi desenvolvida por todos os alunos da disciplina, a outra somente por um grupo de alunos.

Tabela 4 - Atividades de modelagem matemática

Temática da atividade	Alunos
Vai e vem das marés na cidade de Balneário Camboriú	A_1 e A_2 – Grupo 1 (G_1)
	$A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ – Grupo 2 (G_2)
	A_{10}, A_{11}, A_{12} – Grupo 3 (G_3)
	A_{13}, A_{14} – Grupo 4 (G_4)
	$A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}$ – Grupo 5 (G_5)
	A_{19}, A_{20}, A_{21} – Grupo 6 (G_6)
	A_{22}, A_{23}, A_{24} – Grupo 7 (G_7)
	A_9
O zíper no portal da cidade de Cianorte	$A_5, A_{13}, A_{14}, A_{19}, A_{20}$ e A_{21} – Um grupo

Fonte: as autoras

Apresentamos uma descrição abreviada de cada atividade, visando identificar ações relativas à validação. O foco da nossa análise são os diálogos dos alunos identificados nas gravações, seus relatórios e as respostas ao questionário respondido após o desenvolvimento da atividade.

A análise dos dados segue os encaminhamentos de uma pesquisa qualitativa e interpretativa (BOGDAN, BIKLEN, 1994; GARNICA, 2011). Assim, a fonte de dados é o ambiente em que se deu o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e o processo analítico se dirige aos elementos significativos relativamente à problemática da investigação, o modo como os alunos realizam a validação em atividades de modelagem matemática.

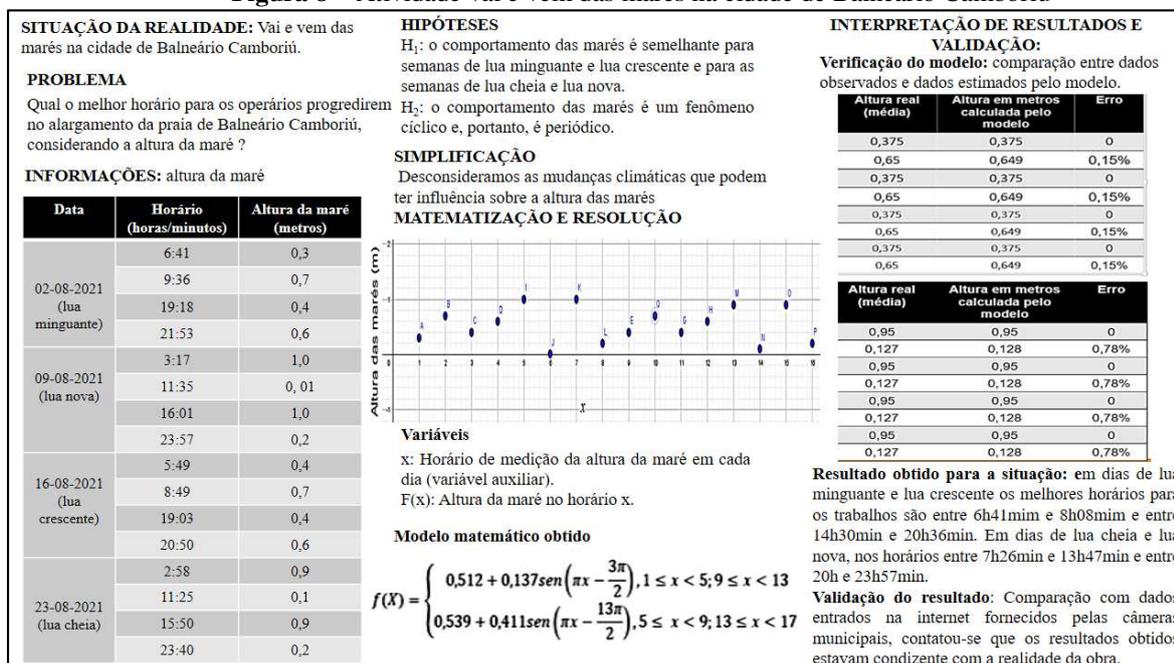
As atividades de modelagem matemática

Atividade 1: Vai e vem das marés na cidade de Balneário Camboriú

A atividade de modelagem com a temática “Vai e vem das marés na cidade de Balneário Camboriú” foi proposta pela professora e desenvolvida por todos os alunos da turma, que de forma espontânea, constituíram sete grupos. Para escrita do relatório bem como para responder ao questionário, entretanto um aluno (A₉) optou por fazê-lo individualmente. O tempo de duração da atividade foi de quatro aulas. A partir de um diálogo inicial com os alunos, o problema proposto para a atividade foi: qual o melhor horário para os operários progredirem no alargamento da praia de Balneário Camboriú, considerando a altura da maré?

Na Figura 8 apresentamos uma síntese dos procedimentos realizados pelos alunos relativamente a cada fase da modelagem matemática.

Figura 8 – Atividade vai e vem das marés na cidade de Balneário Camboriú



Fonte: relatório dos alunos.

No decorrer do desenvolvimento da atividade nas aulas bem como a partir das informações apresentadas nos relatórios e das repostas ao questionário, identificamos ações ou manifestações dos alunos relativamente à validação.

Particularmente, buscamos indícios nos relatórios entregues e nas repostas dos alunos a um questionário² respondido com relação a: (i) como os alunos entendem a

² O roteiro para a escrita do relatório da atividade bem como o questionário estão no apêndice A

validação; (ii) a importância que atribuem à validação nessa atividade; (iii) como realizam a validação nessa atividade.

As manifestações dos alunos de como entendem a validação são identificadas de modo particular no relatório da atividade em que, ao incluir a validação deveriam justificá-la. Na Tabela 5 estão excertos que elucidam esses entendimentos dos alunos.

Tabela 5 - Entendimento dos alunos sobre o que é validação

G₁ “podemos interpretar a validação como um momento para tomar consciência de erros que passaram despercebidos no momento da matematização e formulação da resposta para o problema”.

G₂ “a validação consiste em um meio da análise da resposta encontrada”.

G₄ “a validação envolve a análise de uma resposta para o problema, para evidenciar que a solução encontrada é razoável e consistente, sendo, portanto, confiável e adequada para o problema”.

G₆ “a validação é parte da modelagem onde se faz necessário a análise da representação matemática que associa-se ao problema e também relaciona os problemas matemáticos com a adequação da representação matemática usada”.

G₇ “a validação deve realizar a revisão dos dados iniciais juntamente aos processos matemáticos utilizados no desenvolvimento do modelo; O modelo deve ser aplicável e compreensível”.

Fonte: relatório de G₁, G₂, G₄, G₆, G₇.

Considerando os dados da Tabela 5, podemos concluir que nesta atividade os alunos dos diferentes grupos entendem que a validação: (a) constitui um momento em que são detectados possíveis equívocos, seja na matematização da situação, seja na elaboração da resposta para o problema (G₁); (b) consiste na análise das respostas para o problema (G₂, G₄); (c) consiste na análise do modelo matemático (G₆); (d) deve incluir a revisão dos dados e dos procedimentos matemáticos usados na elaboração do modelo matemático (G₇).

Uma pergunta que os alunos responderam após o desenvolvimento da atividade visa capturar qual a importância que atribuem à validação. Respostas dos alunos constam na Tabela 6.

Tabela 6 - Importância da validação na atividade de modelagem matemática

A₉, “Temos que a validação é um momento produtivo, pois serve para aprofundarmos nossos conhecimentos sobre o contexto estudado.”

G₁ “A validação é uma importante ferramenta para prever possíveis erros, tanto na elaboração do modelo, já que o modelo deve ter o comportamento semelhante com os dados reais apresentados pelo problema, e pela resposta do problema, que deve apresentar semelhança com o fato em observação”.

G₂ “A validação permite obtermos uma garantia de que os resultados encontrados estão condizentes não só com a matemática, mas também com o problema estudado”.

G₃ “É importante validar os resultados encontrados para o problema para verificar se o modelo matemático está correto. Pois se não validamos, o modelo pode não representar os dados reais ou responder ao problema”.

G₄ “É importante validar os resultados obtidos para evidenciar que a solução encontrada é razoável e consistente, sendo, portanto, confiável e adequada para o problema”.

G₅ “os resultados da validação são importantes porque o modelo nem sempre é o mais adequado para essa situação, ele pode se ajustar apenas a uma parte dos dados podendo gerar resultados diferentes”.

G₆ “Validar os resultados encontrados para o problema está intimamente ligado com a validação do modelo matemático proposto, caso os resultados não sejam satisfatórios de acordo com o real fato, precisa-se rever o modelo, corrigir ou reconstruir, e tornar o modelo o mais próximo dos dados reais”.

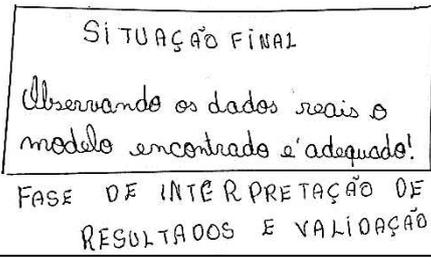
G₇ “A validação do modelo é necessária para viabilizar a percepção de erros e a realização de ajustes necessários”.

Fonte: relatório de A9, G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7.

De modo geral, os alunos associam a importância da validação à verificação dos procedimentos que realizaram para a estruturação dos dados, para a construção do modelo matemático bem como a análise da resposta para o problema viabilizada pela validação.

Com relação ao modo como os alunos realizam a validação, nosso movimento analítico considera as informações do relatório entregue bem como um ciclo de modelagem matemática que os alunos foram solicitados a incluir nos documentos entregues. A Tabela 7 apresenta estes modos de ação dos alunos.

Tabela 7- Modos de realização da validação

A9	<i>“Validamos o modelo matemático de modo a obter o erro entre os dados observados e os dados estimados pelo modelo. Também interpretamos e analisamos a resposta para o problema proposto, validando-a por meio da comparação de dados da internet obtidos por câmeras instaladas na praia de Balneário Camboriú”.</i>
G1	<i>“A validação do modelo estaria localizada no “Resultado Matemático”, que seria um passo anterior à resposta do problema. Já a validação da resposta seria o passo final para a conclusão do trabalho, caso a observação do fato em análise e a resposta do problema estejam de acordo”.</i>
G2	<i>“A validação acontece na fase interpretação de resultados e validação, ocorrem após a determinação do modelo e a formulação da resposta e, dependendo da avaliação feita, podem nos levar a retomar as outras fases, reanalisando os dados, alterando hipóteses ou modificando o modelo, podendo, portanto, serem realizadas diversas vezes durante a atividade”.</i>
G3	<i>“A validação do modelo obtido e a validação da resposta estão localizado na 4ª fase da modelagem”.</i>
G4	<i>“Interpretação e validação da resposta para o problema: comparação dos horários de trabalho dos Operários obtidos pelo modelo com aqueles das câmeras instaladas pela prefeitura. Validação do modelo: análise do erro da altura das marés (dados observados) em relação aos resultados obtidos pelo modelo para esta altura”.</i>
G5	<p><i>“A validação do modelo foi feita por uma comparação entre os dados da realidade e os encontrados pelo modelo e ocorreu na fase interpretação de resultados e validação”.</i></p> 
G6	<i>“Validamos a resposta utilizando dados de como os operários trabalhavam e o modelo pelo valor encontrado e observado. Mas é importante lembrar que há outros fatores que podem interferir nos resultados, mas consideramos o modelo obtido adequado”.</i>
G7	<p><i>Para a validação do modelo e a confirmação da resposta realizamos as seguintes etapas:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Revisão dos dados iniciais juntamente aos processos cognitivos e matemáticos utilizados no desenvolvimento do modelo. - Analisamos se o modelo é aplicável e compreensível. - A comparação entre os dados apurados no início da atividade e os dados obtidos pelo e observamos pouca ou nenhuma variação. - concluímos que a implementação do modelo é confiável, assim a resposta para o problema é confiável”.

Fonte: relatório de A9, G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7.

Os excertos dos relatórios e do ciclo de modelagem matemática apresentado na Tabela 7 indicam que em suas ações referentes à validação, os alunos incluem a avaliação do modelo matemático bem como a avaliação da resposta. Relativamente à validação do

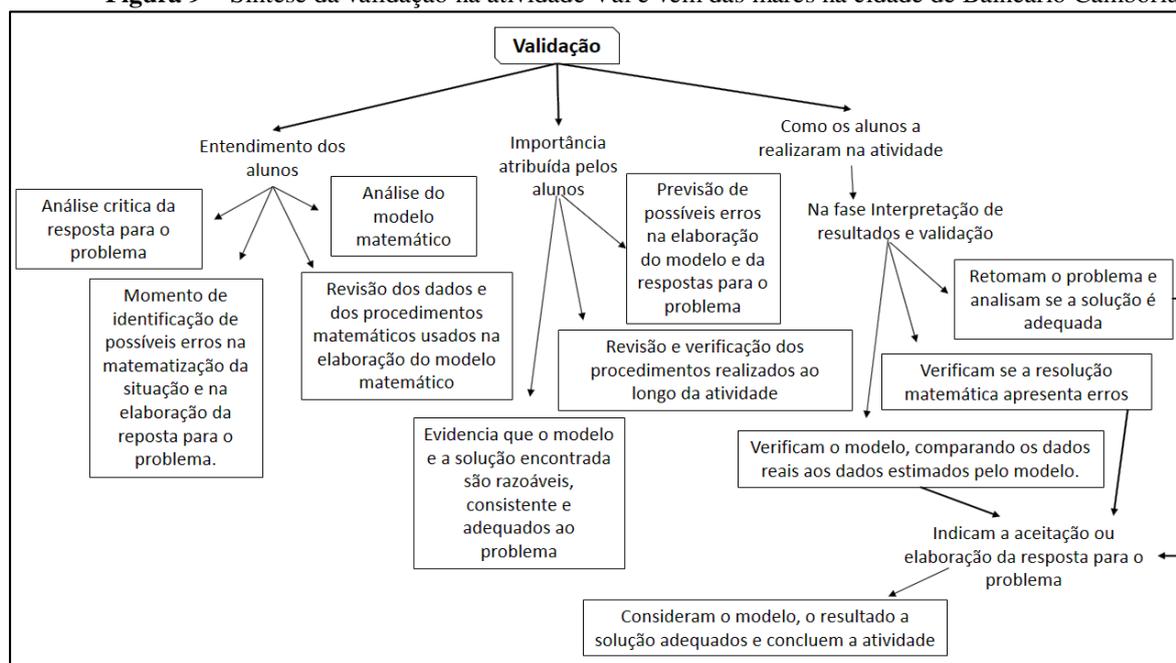
modelo, os alunos comparam os dados obtidos por eles com aqueles fornecidos pela professora referentes à altura da maré nas diferentes fases da lua.

Em termos gerais, os dados obtidos, indicam que as ações referentes à validação ocorreram no momento final da atividade na fase de interpretação de resultados e validação, como referido pelos alunos.

Entretanto, os registros dos alunos (Tabela 7), sinalizam que perceberam distinções entre validação do modelo e validação da resposta (G_1 , G_5), configurando estes como procedimentos distintos da fase de interpretação dos resultados e validação. Neste sentido, a validação do modelo seria uma verificação, conforme pontua Thacker et. al. (2006).

Na Figura 9 apresentamos uma síntese de como se deu a validação nesta atividade.

Figura 9 – Síntese da validação na atividade Vai e vem das marés na cidade de Balneário Camboriú



Fonte: as autoras

Na atividade o *Vai e vem das marés na cidade de Balneário Camboriú* a validação foi realizada pelos alunos na fase da modelagem denominada interpretação de resultados e validação. Os alunos realizaram análises, verificações, revisões da resolução matemática, do modelo e do resultado. Consideramos que as ações dos alunos são no sentido de averiguar se a resolução, o modelo e a resposta são adequados e atendem a seus interesses na atividade.

Atividade 2: O zíper no monumento do portal da cidade de Cianorte

A atividade com a temática O zíper no monumento do portal da cidade de Cianorte foi proposta pela professora para o grupo de seis alunos (A_5 , A_{13} , A_{14} , A_{19} , A_{20} e A_{21}). A

partir da observação da imagem (Figura 10), os alunos deveriam usar matemática para fazer uma estimativa do tamanho do zíper que aparece na imagem do portal e, em seguida, analisar se em alguma calça seria possível usar um zíper com esse tamanho.

Figura 10 – Portal da cidade de Cianorte.



Fonte: Canal da Cidade, disponível em: <https://canaldacidade.com.br/monumento-ao-tropeiro-completou-55-anos/portal-cianorte-efc6e5c0-1/>

Os procedimentos realizados pelos alunos relativamente a cada fase da modelagem matemática são apresentados de modo resumido na Figura 11.

Figura 11 – Atividade do zíper no monumento do portal da cidade de Cianorte

<p>SITUAÇÃO DA REALIDADE: O monumento do portal da cidade de Cianorte</p> <p>PROBLEMAS:</p> <ol style="list-style-type: none"> Qual é o tamanho do zíper no monumento do portal? É possível considerar que um zíper desse tamanho poderia ser usado? <p>INFORMAÇÕES Um portal em formato de zíper sobre uma rodovia na cidade de Cianorte</p> 	<p>3º encontrar o tamanho real do zíper utilizando a proporção.</p> <p>Modelo:</p> $\frac{7}{x} = \frac{0,05}{0,2}$ <p>Largura da via na realidade = 7 m Largura da via medida com a régua = 0,05 m x = tamanho real do zíper em metros Tamanho do zíper medido com a régua = 0,2 m</p> <p>Resultado obtido: o zíper tem tamanho de 28 m</p>	<p>Matematização e resolução</p> <p>1º Realizar uma pesquisa sobre os tamanhos de calças e suas medidas.</p> <table border="1" data-bbox="1059 1137 1302 1339"> <thead> <tr> <th>Tamanho</th> <th>Comprimento Calça (cm)</th> <th>Comprimento Zíper (cm)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>36</td><td>99</td><td>15</td></tr> <tr><td>38</td><td>100</td><td>15,5</td></tr> <tr><td>40</td><td>102</td><td>16</td></tr> <tr><td>42</td><td>104</td><td>17</td></tr> <tr><td>44</td><td>106</td><td>17,5</td></tr> <tr><td>46</td><td>107</td><td>18,5</td></tr> <tr><td>48</td><td>108</td><td>19</td></tr> <tr><td>50</td><td>109</td><td>20</td></tr> <tr><td>52</td><td>110</td><td>20,5</td></tr> <tr><td>54</td><td>111</td><td>21,5</td></tr> <tr><td>56</td><td>112</td><td>22,5</td></tr> </tbody> </table>	Tamanho	Comprimento Calça (cm)	Comprimento Zíper (cm)	36	99	15	38	100	15,5	40	102	16	42	104	17	44	106	17,5	46	107	18,5	48	108	19	50	109	20	52	110	20,5	54	111	21,5	56	112	22,5
Tamanho	Comprimento Calça (cm)	Comprimento Zíper (cm)																																				
36	99	15																																				
38	100	15,5																																				
40	102	16																																				
42	104	17																																				
44	106	17,5																																				
46	107	18,5																																				
48	108	19																																				
50	109	20																																				
52	110	20,5																																				
54	111	21,5																																				
56	112	22,5																																				
<p>RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 1</p> <p>Hipóteses</p> <p>H1: as medidas dos objetos da imagem são proporcionais as suas dimensões reais (escala) H2: a via arterial PR-323 segue o padrão de largura que é estabelecido para as vias arteriais primárias.</p> <p>Matematização e resolução</p> <p>1º encontrar a largura da via Por meio de uma pesquisa encontrou-se que a via em que se localiza o portal é uma via arterial e que o padrão de largura para esse tipo via é 3,5 metros cada faixa</p> <p>2º Encontrar o tamanho do zíper na imagem utilizando uma régua. Encontrou-se o comprimento aproximado de 20 cm.</p> 	<p>Interpretação de resultados e validação: Comparação entre o tamanho do zíper obtido pelo modelo com o tamanho real do zíper no Google Earth, utilizando a régua do próprio sistema.</p> <p>Com valores próximos concluiu-se que o tamanho encontrado era condizente com a realidade e portanto, o resultado é adequado ao problema.</p> <p>RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 2</p> <p>Hipótese: a relação entre o comprimento do zíper e o tamanho da calça se mantem para o modelo de calça escolhido.</p> <p>Simplificação: não serão levados em consideração as divergências na relação entre o comprimento do zíper e o tamanho da calça, conforme modelo e marcas.</p> 	<p>2º Encontrar um modelo matemático que relaciona o tamanho de calça com o comprimento do zíper. Para encontrar esse modelo matemático foi usado o Software CurveExpert e a hipótese de que essa relação é linear.</p> <p>Modelo:</p> $y(x) = 2,652x - 2,934$ <p>Resultado obtido:</p> $y(2800) = 2,652 \times 2800 - 2,934$ $y(2800) \approx 7422,666$ $y(2800) \approx 7423$ <p>Para que o zíper do portal de Cianorte possa ser usado é necessário uma calça de que tenha o tamanho 7423.</p> <p>Interpretação de resultados e validação: Para este problema é possível validar apenas o modelo matemático que associa o tamanho do zíper com o número da calça. A respostas, o número 7423 da calça, não pode ser validado.</p>																																				

Fonte: relatório dos alunos

No decorrer do desenvolvimento da atividade nas aulas bem como a partir das informações apresentadas nos relatórios e nas respostas do questionário, identificamos ações ou manifestações dos alunos relativos à validação na resolução dos dois problemas.

Ações dos alunos relativas à validação do valor obtido para o tamanho do zíper incluem principalmente a utilização do radar na imagem para obter uma proporção entre o tamanho do zíper na imagem e o tamanho do zíper no portal.

Reverendo os cálculos e resultados, encontraram valores para o tamanho do zíper que não consideraram adequados. No diálogo consta uma conversa do grupo sobre este valor para o tamanho do zíper.

A₂₀: O valor está errado! não pode ser esse porque é menos que a metade da pista.

A₅: O radar pode estar mais alto do que consideramos.

A₂₀: Não! Eu acho que o radar está antes do portal, então dá essa diferença na proporção.

A₅: Verdade! São distâncias diferentes.

A₁₀: Acho que o radar estando mais a frente, não é um bom ponto de referência.

A₂₀: Temos que considerar outro ponto de referência.

O comentário do aluno A₂₀ :*O valor está errado!, não pode ser esse porque é menos que a metade da pista*” foi realizado logo após A₁₀ encontrar um tamanho para zíper utilizando a proporção entre as medidas na imagem e o tamanho real de um radar. Parece, portanto, tratar-se de uma verificação do procedimento usado, que, conforme sinaliza o diálogo, deveria ser revisto (o procedimento).

Retomando a resolução, os alunos utilizaram o tamanho da rodovia como ponto de referência e refizeram seus cálculos, obtendo o valor de 28 metros para o tamanho do zíper. Para verificar a aceitabilidade desse valor de 28 metros, o grupo decidiu fazer uma medição do zíper do portal usando o Google Earth. Na Tabela 8 consta como realizaram este procedimento.

Tabela 8 - Validação do tamanho do zíper

<p><i>Para validar o tamanho do zíper pensamos em encontrar o comprimento real do zíper no Google Earth, utilizando a régua do próprio sistema, conforme figura 15. Foi obtido o valor de, aproximadamente, 28,05 m</i></p>	<p><i>Figura 15: Comprimento do zíper medido no Google Earth</i></p> 
---	---

Fonte: relatório do grupo

A validação, indicada de modo explícito pelos alunos, ocorreu na escrita do relatório e na resposta para as questões conforme ilustra a Tabela 9.

Tabela 9 - Validação do modelo

Para validarmos o tamanho do zíper utilizamos o Google Earth pelo qual encontramos o comprimento real do zíper, utilizando a régua do próprio sistema.

Foi obtido o valor de aproximadamente 28,05 m, o que se aproxima do comprimento obtido através dos cálculos de proporção realizados.

Para ter uma noção do tamanho real do zíper e uma possível verificação pesquisamos a existência de monumentos em que esse zíper poderia ser usado. Assim consideramos que

outros monumentos possuíam tamanhos semelhantes ao do zíper, portanto consideramos que o tamanho encontrado para zíper é apropriado em relação ao tamanho recorrente dos monumentos.



Fonte: relatório do grupo

Uma vez, obtido o tamanho do zíper, os alunos passaram a decidir sobre a possibilidade de um zíper desse tamanho ser usado em alguma calça. Recorreram então a informações sobre a relação do tamanho da calça (dados pelos números pares entre 36 e 56), conforme consta na tabela da Figura 11. Uma análise inicial dos dados da tabela da Figura 11 os fez usar a hipótese de que trata-se de uma relação linear. O modelo matemático (a função linear) foi obtido usando o software CurveExpert.

A validação do modelo se deu mediante a comparação dos dados da tabela com aqueles obtidos pelo modelo. Além disso, os alunos também usaram o coeficiente de correlação fornecido pelo software (0,997) para decidir que o modelo é adequado para estabelecer a relação entre os tamanhos do zíper e da calça.

Entretanto, para a respostas obtida para o problema de que uma calça de tamanho 7423 seria aquela em que um zíper de 28 metros poderia ser usado, os alunos decidiram que não poderiam validá-la. De fato, faria sentido falar em uma calça desse tamanho? Os alunos escreveram assim em seus relatórios:

Tabela 10 – Validação da resposta

Ainda, para a análise da resposta obtida, pensamos em procurar tabelas que apresentassem relações entre o comprimento do zíper e o tamanho da calça, porém não encontramos muitos resultados. O que encontramos foram tabelas que relacionam o comprimento do gancho da calça com o tamanho da calça. Entretanto, assim como foi ressaltado na atividade, essa relação diverge muito de site para site, conforme modelos e marcas. Mas veja que, poderíamos fazer uma modelagem que relacionasse o comprimento do gancho com o tamanho da calça e, em seguida, investigar a relação entre o comprimento do zíper e o comprimento do gancho. A partir disso, poderíamos comparar os resultados obtidos como forma de validação. Mas para esta atividade deixamos a validação dessa relação em aberto, por questão de tempo.

Fonte: relatório do grupo

De modo geral, as ações dos alunos relativas à validação durante o desenvolvimento da atividade indicam, que mediante uma necessidade, se utilizam da verificação, fazendo comparações, conduzindo a retomada de aspectos pontuais.

Com relação à possibilidade de determinar se há uma calça, em que este zíper possa ser utilizado suas ações indicam que realizaram a verificação e a validação após a

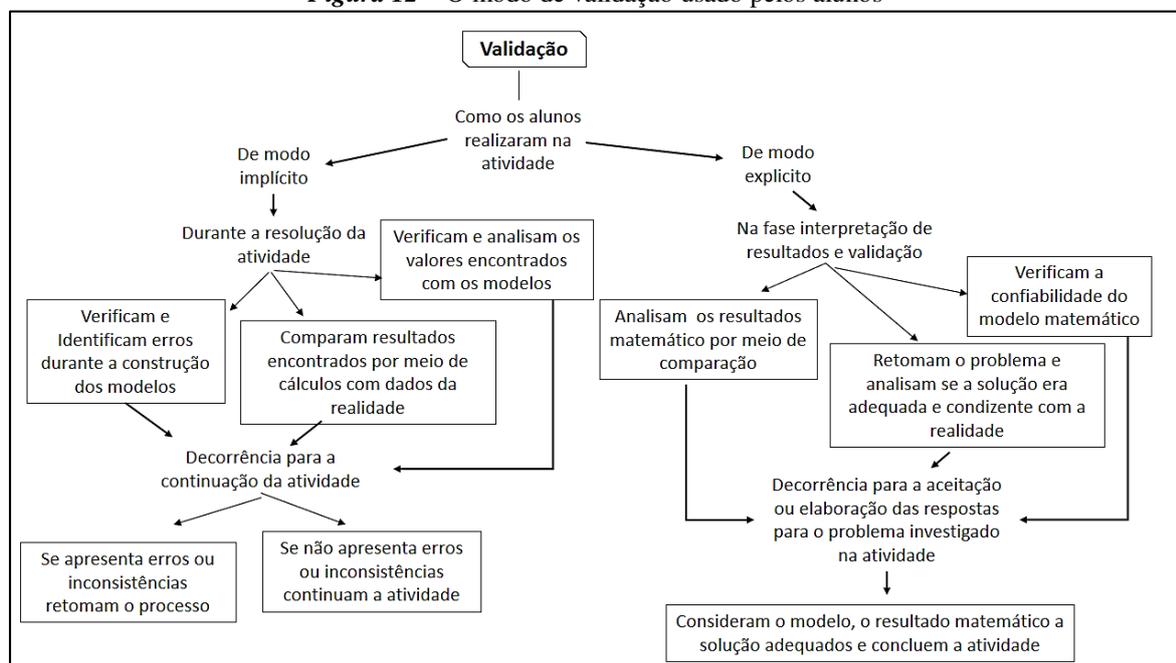
resolução do primeiro problema como uma certificação de um bom resultado para, na sequência, utilizar esses resultados na resolução do segundo problema. No entanto, no relatório, claramente colocam a validação apenas como uma fase final da atividade de modelagem.

Nas respostas às questões os alunos mencionam procedimentos de verificação relativos ao modelo e ao resultado matemático para o tamanho do zíper, sugerindo que, dessa verificação, segue a validação da resposta para o problema. No entanto, destacamos que as nomeações utilizadas pelos alunos para *verificação* e *validação* parecem ser utilizadas como sinônimos em alguns momentos da escrita e até nos diálogos, indicando que o entendimento do que é validação e verificação se misturam para os alunos.

Em termos, nesta atividade as ações dos alunos relativas à validação são no sentido de analisar o modelo, o resultado matemático e a resposta para a situação ao final da atividade buscando a adequação, precisão e razoabilidade.

Na Figura 12 apresentamos uma síntese da análise de como os alunos realizaram a validação nessa atividade.

Figura 12 - O modo de validação usado pelos alunos



Fonte: as autoras

Discussão e resultados

Nossa investigação indica que nas atividades de modelagem matemática as ações dos alunos relativas à validação estão relacionadas com o modo como os alunos

compreendem a validação e a importância que atribuem a ela no desenvolvimento da atividade (TWOMEY, SMITH, 1997).

A primeira atividade desenvolvida revelou três elementos principais relativos à validação: (i) como os alunos entendem a validação; (ii) a importância que atribuem à validação na atividade; (iii) como realizaram a validação na atividade.

Como os alunos entendem a validação indica que no entendimento dos alunos a validação é uma análise do modelo matemático, uma revisão de dados e procedimentos, bem como, uma análise crítica da resposta para o problema. Estes entendimentos se relacionam à importância atribuída por eles à validação, uma vez que indicam que a análise e a revisão permitem perceber possíveis erros ou equívocos no modelo e na resolução, permitindo também uma verificação dos procedimentos utilizados na atividade. Associa-se então, a esses dois elementos o modo como os alunos realizam a validação na atividade, utilizando da análise da solução, verificação dos resultados matemáticos e do modelo matemático.

Neste sentido, resultados da presente pesquisa corroboram as indicações de Czocher (2018) referentes aos diferentes tipos de validação. No entanto avançamos na abordagem desses tipos ao identificarmos que a ocorrência das ações de validação em momentos distintos no decorrer da atividade são procedimentos relativos à verificação, os quais consistem em uma revisão de resultados locais decorrentes de procedimentos específicos e não são mencionados pelos alunos como parte da validação. Diante disso, consideramos que os tipos V_1 e V_3 descritos por Czocher (2018) representam ações de verificação relativas às estratégias matemáticas, à construção do modelo e ao resultado obtido pelo modelo.

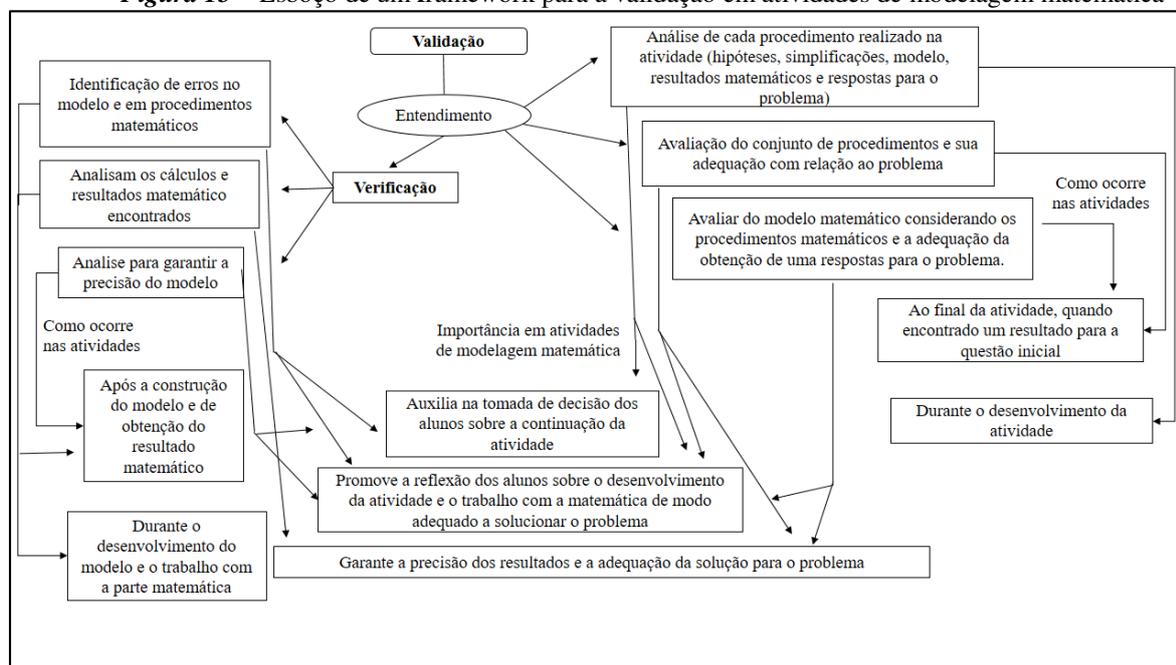
De modo geral, nossa investigação revela que ações de validação decorrem de necessidades particulares de cada atividade, como a percepção de erros ou inconsistências, promovendo a tomada de decisão em relação às continuações dada à atividade, bem como, da intenção de uma retomada da atividade desenvolvida, avaliando o modelo e a resposta para o problema na busca de uma certificação do processo desenvolvido.

Considerando estes resultados esboçamos um *framework*³ (Figura 13) para a validação em atividades de modelagem matemática, com a intenção de elucidar os elementos identificados nas análises como constitutivos da validação, e que incluem os

³ Segundo Pitacas e Pedro (2008, p.6), *framework* conceitual pode ser entendido como uma “rede de conceitos que se relacionam, sem necessidade de ser tão potente ou abrangente como uma teoria”

entendimentos dos alunos sobre o que é validação, sua importância na atividade de modelagem matemática e os modos como a realizam. Tal estrutura conceitual representa a validação como um processo abrangente que se dá no decorrer de diferentes momentos do desenvolvimento da atividade de modelagem e tem interesses globais sobre a robustez do modelo e da resposta. Já a verificação consiste em análises pontuais e, de modo geral, direcionada para aspectos puramente matemáticos do desenvolvimento da atividade. Assim, em atividades de modelagem matemática procedimentos que visam analisar, identificar, examinar componentes de modelagem relacionados especificamente à matemática são caracterizados como verificação. Já análises mais abrangentes direcionadas aos dados, às hipóteses, às respostas, além da análise de resultados e procedimentos matemáticos, dizem respeito à validação. Assim, a validação engloba a verificação, ou seja, os procedimentos particulares da verificação pertencem também à validação.

Figura 13 – Esboço de um framework para a validação em atividades de modelagem matemática



Fonte: as autoras

Ainda que o *framework* esboçado seja um esforço para caracterizar como se dá a validação em atividades de modelagem matemática, é preciso considerar a assertiva de Alvorado (2017) sobre a impossibilidade de uma validação absoluta, uma vez, que nas atividades os alunos assumem técnicas para verificar e validar de acordo com as necessidades e possibilidades de cada situação problema em particular.

Considerações finais

A investigação no presente artigo se dirige aos modos como os alunos realizam a validação em atividades de modelagem matemática e o que dela decorre para a aceitação ou elaboração da resposta obtida.

Em termos gerais, esses modos de validação se assemelham a uma análise, uma avaliação, do processo requerido para responder ao problema investigado. Algumas vezes, as ações decorrem de uma necessidade percebida pelos alunos e visam corrigir um erro ou uma inconsistência em um ponto específico, alinhando-se mais como o que se caracteriza como verificação. Outras vezes, essas ações requerem a revisão de aspectos mais amplos como a formulação de hipóteses e o próprio caminho usado para a matematização, requerendo revisar e retomar o modelo matemático.

Independente do modo com se dá a validação, ela desencadeia a tomada de decisão dos alunos referente à aceitação ou elaboração das repostas para o problema. Ou seja, a partir da validação se estruturam ações seguintes para a continuação da atividade, tanto para retomar, refazer algum procedimento ou para apresentar uma conclusão considerando as repostas encontradas para o problema.

A investigação realizada proporcionou uma interlocução entre um quadro teórico em que se discute a validação em atividades de modelagem matemática e uma pesquisa empírica em que alunos de UMA curso de Licenciatura em Matemática desenvolveram as atividades. Dessa interlocução decorre o esboço de um *framework* para a validação em atividades de modelagem matemática.

De modo geral, o *framework* construído indica que a validação se configura como um processo importante de análise sobre diferentes elementos característicos da modelagem e desempenha um papel de reflexão sobre a atividade, seja no final ou quando surgem necessidades ao longo do desenvolvimento, conforme indicado por Alvarado (2017).

Em suas pesquisas Czoher (2018) e Hallerstedte, et. al. (2018) indicam que a validação busca certificar e garantir bons encaminhamentos, resolução e resultados para o problema, se valendo de análises críticas e reflexivas. Nossa pesquisa, corroborando estes resultados, avança no sentido de elucidar como os alunos realizam a validação e que desdobramentos se seguem dela para a finalização da atividade de modelagem matemática. A retomada de procedimentos de verificação realizados no decorrer da atividade é um desses desdobramentos. Por outro lado, quando procedimentos de verificação só se instauram ao final da atividade e só estão nomeados pelos alunos como sendo a validação,

ainda assim, aguçam a criticidade acerca da resposta, do modelo ou da resolução matemática, bem como conduzem à busca por mais informações relativas à situação em estudo.

Pontuamos, portanto, que a validação contribui para o desenvolvimento de habilidades nos alunos que aprimoram o desenvolvimento de atividades dessa natureza e o trabalho com situações-problema da realidade.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1ª Ed., 1ª reimpressão – São Paulo: Contexto, 2013

ALMEIDA, L. M. W. de; RAMOS, D. C.; SILVA, K. A. P. da. Ensinar e aprender o fazer Modelagem Matemática: uma interpretação semiótica. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 27, 2021.

ALMEIDA, L. M. W. Estratégias heurísticas como meios de ação em atividades de Modelagem Matemática. **Com a palavra, o professor**, v. 5, n. 11, p. 220-236, 2020.

ALVARADO, C. S. M. **Estudo e implementação de métodos de validação de modelos matemáticos aplicados no desenvolvimento de sistemas de controle de processos industriais**. 2017. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. In: **The proceedings of the 12th international congress on mathematical education**. Springer, Cham, 2015. p. 73-96.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORROMEO FERRI, R.. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Picassoplatz, Switzerland: Springer, 2018, p. 13 – 39.

CZOCHER, J. A. **Toward a description of how engineering students think mathematically**. 2013. Tese de Doutorado. The Ohio State University.

CZOCHER, J.; STILLMAN, G.; BROWN, J. Verification and Validation: What Do We Mean?. **Mathematics Education Research Group of Australasia**, 2018.

CZOCHER, J. A. How does validating activity contribute to the modeling process?. **Educational Studies in Mathematics**, v. 99, n. 2, p. 137-159, 2018.

ELAASAR, M. Definition of modeling vs. programming languages. In: **International Symposium on Leveraging Applications of Formal Methods**. Springer, Cham, 2018. p. 35-51.

GARNICA, A. V. M. Apresentação. In: SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um Grupo Escolar**. 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP de Rio Claro: São Paulo, 2011.

HALLERSTEDE, S.; LARSEN, P. G.; FITZGERALD, J. A Non-unified view of modelling, specification and programming. In: **International Symposium on Leveraging Applications of Formal Methods**. Springer, Cham, 2018. p. 52-68.

HOUAISS, A. **Dicionário de Língua Portuguesa**. São Paulo: Objetiva, 2019. Disponível em: <https://houaiss.uol.com.br/pub/apps/www/v3-3/html/index.php#3>. Acesso em: 12 jan. 2019.

HUANG, J.; LU, X.; XU, B.. O Desenvolvimento Histórico da Modelagem Matemática em Padrões Curriculares de Matemática/Syllabi na China. In: **Educação em Modelagem Matemática no Oriente e no Ocidente** . Springer, Cham, 2021. p. 177-188.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **Zdm**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

ORBNE, Douglas João. KARL POPPER: O PROBLEMA DA INDUÇÃO E A FALSEABILIDADE COMO CRITÉRIO DE DEMARCAÇÃO. **Revista Litterarius (2010-2018)**, v. 11, n. 2, p. 228-240, 2012.

PACE, Dale K. Modeling and simulation verification and validation challenges. **Johns Hopkins APL technical digest**, v. 25, n. 2, p. 163-172, 2004.

PERRENET, Jacob; ZWANEVELD, Bert. The many faces of the mathematical modeling cycle. **Journal of Mathematical modelling and Application**, v. 1, n. 6, p. 3-21, 2012.

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences**. New York: Springer, p. 265-276, 2015.

THACKER, B. H. et al. The role of nondeterminism in model verification and validation. **International Journal of Materials and Product Technology**, v. 25, n. 1-3, p. 144-163, 2006.

TWOMEY, J. M.; SMITH, A. E. Validation and verification. **Artificial neural networks for civil engineers: Fundamentals and applications**, p. 44-64, 1997.

UNHELKAR, B. **Verification and validation for quality of UML 2.0 models**. John Wiley & Sons, 2005.

ZAWOJEWSKI, J. Resolução de problemas versus modelagem. In: **Modelagem de competências de modelagem matemática dos alunos**. Springer, Dordrecht, 2013. p. 237-243.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa dirigimos nossa atenção à validação em atividades de modelagem matemática. A nossa problemática de pesquisa diz respeito a investigação de como se caracteriza a validação em atividades de modelagem matemática e que ações dos alunos são referentes à validação. Para tanto, desenvolvemos a pesquisa de modo que as deliberações sobre esta problemática são apresentadas com base em análises teóricas sobre documentos e artigos científicos, bem como, em uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática são desenvolvidas por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática.

A estrutura do relatório de pesquisa segue o formato *multipaper* (DUKE; BECK, 1999; MUTTI; KLÜBER, 2018) de modo que organizamos nossa investigação e análises em dois artigos. Estes artigos, embora independentes, são conectados por elementos comuns de modo a estabelecer um alinhamento teórico-metodológico sobre o tema investigado na pesquisa.

No artigo 1 “*Validação em atividades de modelagem matemática: busca por um entendimento*”, temos por objetivo investigar como a validação em atividades de modelagem matemática aparece entendida em documentos referentes às atividades matemáticas na sala de aula, bem como, em artigos científicos que se referem a essa temática e entrevistas com professores da área.

No artigo 2 “*Como os alunos fazem validação em atividades de modelagem matemática*” investigamos de que modo os alunos realizam a validação em atividades de modelagem matemática e o que dela decorre para a aceitação ou elaboração da resposta para o problema investigado.

A investigação realizada no primeiro artigo revelou que o documento da BNCC, não faz menção direta à validação em atividades matemáticas, mas, apresenta indícios de que atos de avaliar e verificar cálculos, resultados e o processo de resolução de um problema são ações tidas como importantes no ensino de Matemática. Assim, como o ato de validar algo no contexto da matemática vem sendo abordado na Educação Básica, investigamos então como os cursos de Licenciatura em Matemática e, particularmente, a disciplina de Modelagem Matemática nestes cursos aborda a validação. Nossa análise

concluiu que a validação embora não explicitamente expressa nos objetivos, parece ser associada a ações como “análise de modelos”, “revisão de resultados”, “análise de métodos” e “análise dos resultados”.

Concluimos que a validação é sinalizada em atividades de matemática desde a Educação Básica e é recomendada nas disciplinas de Modelagem Matemática dos cursos de Licenciatura em Matemática. Diante disso, visando investigar como professores que, de forma sistemática, se valem da modelagem matemática em suas aulas, indicam e orientam a validação em suas atividades, procedemos com a realização de um questionário com três professores de matemática. Além disso, a investigação de como a validação vem sendo realizada em um contexto mais amplo se efetiva por meio de uma pesquisa inventariante, com análise de nove artigos publicados em revistas científicas, que indicam a validação entre os aspectos observados nos estudos ao fazer modelagem matemática.

De modo geral, identificamos duas abordagens para a validação: aquela de que a validação pode (e deve) se dar no decorrer de todo o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e aquela em que validação se concentra em fases (ou etapas) específicas de uma atividade de modelagem matemática.

Referente à validação em diferentes fases do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática identificamos ações, avaliações, ajustes, checagem da resolução. Já na validação em fases específicas do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática identificamos a validação do modelo e do resultado matemático, bem como da resposta para o problema

A validação que ocorre em diferentes fases da modelagem matemática durante o desenvolvimento de atividades de modelagem está voltada a uma compreensão holística de validação e a validação que ocorre em fases específicas está relacionada a uma ação pontual em atividades de modelagem matemática.

A investigação realizada revelou também uma ausência de pesquisas empíricas que versam sobre validação em atividades de modelagem. Motivados por esse indício desenvolvemos no nosso segundo artigo uma investigação empírica sobre validação em atividades de modelagem matemática.

Identificamos três aspectos principais relativos a validação em atividades de modelagem matemática: (i) como os alunos entendem a validação, (ii) a importância que atribuem a validação na atividade (iii) como realizaram a validação nessa atividade.

O aspecto de como os alunos entendem a validação elucidou que no entendimento dos alunos a validação é uma análise do modelo matemático, uma revisão de dados e procedimentos, bem como, uma análise crítica da resposta para o problema. Entendimentos estes que se relacionam a importância atribuída por eles a validação, uma vez que indicam que a análise e a revisão permitem perceber possíveis erros ou equívocos no modelo e na resolução, permitindo também uma verificação dos procedimentos assumidos e utilizados na atividade. Associa-se então, a esses dois aspectos o modo como os alunos realizam a validação na referida atividade, se utilizando da análise da solução, verificação dos resultados matemáticos e do modelo matemático.

Identificamos também que os alunos manifestaram ações de verificação do modelo e de cálculos matemáticos mediante a identificação de um problema ou a emergência de uma necessidade da confiabilidade do processo ou resultado. Destaca-se nas análises verificações utilizadas pelos alunos constantemente durante a resolução com a intenção de perceber erros. No entanto, estes procedimentos não são indicados pelos alunos como verificação, sendo possível percebê-los de modo implícito nas gravações e nos relatórios.

Por outro lado os alunos revelam de modo explícito que a validação deve ser realizada ao final da resolução de um problema conforme as suas ações indicam quando realizam a validação dos resultados encontrado para os dois problemas em estudo. Neste viés, inferimos que apesar dos alunos descreverem que a validação só se dá pelas análises feitas ao final da atividade, acabam assumindo procedimentos relativos à validação durante a resolução

De modo geral, nossa investigação revela que ações de validação podem decorrem de necessidades particulares de cada atividade, no surgimento de erros ou inconsistência, promovendo a tomada de decisão dos alunos em relação as continuações dada à atividade, bem como, da intenção de uma retomada da atividade desenvolvida, avaliando o modelo e a resposta para o problema na busca de uma certificação do processo desenvolvido.

O modo como as ações de validação são assumidas nas atividades de modelagem matemática possuem especificidades, no entanto, as ações dos alunos indicaram que a validação desencadeia uma tomada de decisão dos alunos referente à aceitação ou elaboração das repostas para o problema. Ou seja, a partir da validação se estrutura ações seguintes para a continuação da atividade, tanto para retomar, refazer algum procedimento ou para apresentar uma conclusão considerando as repostas encontradas para o problema condizente com a realidade e confiável matematicamente.

A partir da investigação realizada estabelecemos uma interlocução entre um quadro teórico em que se discute a validação em atividades de modelagem matemática e uma pesquisa empírica em que alunos de um curso de Licenciatura em Matemática desenvolveram as atividades. Dessa interlocução decorre a estruturação de *framework* para a validação em atividades de modelagem matemática.

No *framework* os elementos identificados nas análises como constitutivos da validação, incluem os entendimentos dos alunos sobre o que é validação, sua importância na atividade de modelagem matemática e os modos de realizar a validação. Tal estrutura conceitual representa a validação como um processo abrangente que se dá no decorrer da atividade de modelagem matemática e a verificação dirigida aos procedimentos matemáticos assumidos na atividade. No entanto, ressaltamos que a validação engloba a verificação, portanto, os procedimentos particulares da verificação pertencem também à validação.

A partir, dos resultados destes dois artigos apontamos que a validação em atividades de modelagem matemática possui diferentes entendimentos presentes na literatura bem como na concepção de professores da área, entendimentos estes que se relacionam aos diferentes modos de fazer validação em atividade de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula. Uma vez, que nossa pesquisa empírica evidenciou que os modos de realizar a validação assumidos pelos alunos durante o desenvolvimento da atividade de modelagem estão associados a aspectos da validação indicados nos entendimentos de validação presente na literatura.

Sinalizamos que a relação estabelecida entre os entendimentos de validação em atividades de modelagem matemática indicados na literatura e os modos de conduzir a validação assumidos pelos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática ocorrem por meio dos conhecimentos *à priori* dos alunos sobre o que seria a validação. Bem como, por meio das orientações dos professores para o desenvolvimento da atividade e suas intervenções na intenção de motivar a realização da validação em atividades de modelagem matemática.

Nesse sentido, compreendemos que os entendimentos evidenciados no artigo 1 estão estritamente relacionados a validação desenvolvida pelos alunos nas atividades do artigo 2. Diante disso, sinalizamos que uma caracterização da validação em atividades de modelagem matemática e que ações dos alunos são referentes à validação, envolvem tanto, os entendimentos sobre a validação, seus objetivos, momento que ocorrem nas atividades,

o posicionamento do professor no desenvolvimento da validação em sala de aula, como também as compressões dos alunos, seus modos de fazer validação e as conduções assumidas para a continuação da atividades após a validação.

Com isso, buscamos sintetizar no Quadro 3 uma caracterização da validação em atividades de modelagem matemática.

Quadro 3- Caracterização da validação em atividades de modelagem matemática e as ações dos alunos referentes à validação

	Foco	Momento em que ocorre a validação	Modos de fazer dos alunos	Intervenções dos professores	
VALIDAÇÃO	VERIFICAÇÃO	O modelo matemático	<ul style="list-style-type: none"> - analisam e identificam erros na construção do modelo; - verificam se o modelo é adequado para responder ao problema, se necessário retomam a construção do modelo. - analisam a precisão do modelo perante os dados, utilizando comparações. 	<ul style="list-style-type: none"> - questionar os alunos sobre o quanto o modelo consegue retratar a realidade; Instigar a discussão da diferença entre os dados obtidos pelo modelo e os dados reais. 	
		Os resultados matemáticos	<ul style="list-style-type: none"> - analisam se os procedimentos matemáticos estão corretos e condizentes com a situação-problema e, se necessário, corrigem e realizam outros procedimentos; - analisam se os resultados matemáticos respondem ao problema em sua totalidade, se necessário retomam a resolução matemática; - refazerem ou retomam os cálculos matemáticos ao identificar erros no resultado ou na resolução. 	<ul style="list-style-type: none"> - motivar a análise sobre os resultados obtidos verificando se são adequados matematicamente; - questionar os alunos se os cálculos matemáticos estão construídos corretamente. 	
	VALIDAÇÃO	Os procedimentos realizados na atividade	Durante a fase de resolução ou ao final da atividade	<ul style="list-style-type: none"> - analisam se os dados, as hipótese, as variáveis são adequadas e, caso necessário, fazem modificações; - revisam o processo de resolução para se certificar de que não há erros; 	<ul style="list-style-type: none"> - questionar e motivar as discussões nos grupos de modo que verifiquem os cálculos e procedimentos matemáticos; - motivar os alunos a refletirem sobre as estratégias utilizadas na resolução, como por exemplo, as hipóteses e simplificações.
		Resposta obtida	Ao final da atividade	<ul style="list-style-type: none"> - validam o modelo matemático, analisando sua adequação para o problema em estudo; - analisam a resposta encontrada inferindo se a mesma é razoável e condizente ao modelo matemático utilizado e a resolução desenvolvida. 	<ul style="list-style-type: none"> - Motivar a análise do modelo construído; - instigar os alunos a buscarem uma certificação que a repostas encontrada atende as necessidade da situação e responde ao problema;

Fonte: as autoras

Destacamos que dependendo do contexto em que a atividade de modelagem matemática é utilizada e da intenção, o entendimento de validação e os encaminhamentos assumidos podem se diferenciar. Esse aspecto se faz presente nas investigações empíricas relatadas nos artigos científicos e nas entrevistas dos professores/pesquisadores quando versam sobre os encaminhamentos que sugerem aos seus alunos na validação. Nas atividades desenvolvidas pelos alunos também há indícios que a experiência dos alunos com atividades de modelagem matemática, auxilia no modo como realizam a validação.

Podemos assim, ponderar como considerações finais que a validação em atividades de modelagem matemática possui uma dinamicidade que perpassa à ideia de uma única definição sobre validação. Cabendo, assim, a cada contexto e atividade uma condução diferente de como realizar a validação em atividades de modelagem matemática, no entanto, atentando-se sempre ao aspectos destacados como essenciais de serem considerados, sendo eles, o modelo matemático, resultados, as respostas e a resolução.

Diante de uma reflexão sobre a pesquisa realizada apontamos que o desenvolvimento das aulas de modo remoto se configurou como limitação para a investigação empírica, uma vez que, o formato do ambiente em que se deu as aulas inviabilizou algumas discussões e reflexões entre os alunos durante a realização das atividades, bem como, acarretou uma maior dificuldade para a professora conseguir acompanhar todos os grupos durante o desenvolvimento das atividades.

Dentre as possibilidades de pesquisas futuras, ressaltamos a inserção de novas investigações acerca da validação no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, visando o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em outros níveis de ensino, em outros cursos ou disciplinas do Ensino Superior, bem como, na Educação Básica.

Referências

DUKE, N. K.; BECK, S.W. Research news and comment: Education should consider alternative formats for the dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

MUTTI, G. de S. L.; KLÜBER, T. E. Formato multipaper nos programas de pós-graduação stricto sensu brasileiros das áreas de educação e ensino: um panorama. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS, SIPEQ, 5, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais**, Foz do Iguaçu: SEPQ; UNIOESTE, 2018.

APÊNDICE A

Modelo do relatório e questões referentes à atividade Vai e vem das marés na cidade de Balneário Camboriú

O relatório entregue pelos alunos deveria conter a descrição do:

- Problema
- Dados iniciais sobre o movimento das marés
- Simplificação
- Hipóteses
- Matematização da situação: escrevendo o horário como variável
- Definição de variáveis – A introdução de uma variável auxiliar
- A construção do modelo matemático
- O modelo matemático obtido
- Validação do modelo matemático
- Resposta para o problema
- Interpretação e validação da resposta para o problema

PARA ESTA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

1- Construa um ciclo da modelagem matemática realizada.

Obs. Pode usar como referência o ciclo de modelagem matemática que está no capítulo do livro que foi estudado.

2- A partir da atividade *O vai e vem das marés*, responda os itens a seguir:

a) A abordagem matemática e o modelo obtido são eficientes para responder ao problema proposto? Argumente.

b) Argumente por que é importante validar os resultados encontrados para o problema.

c) Como você localiza a validação do modelo obtido e a validação da resposta para o problema nesta atividade no ciclo de modelagem matemática?

APÊNDICE B

Modelo do relatório e questões referentes à atividade O zíper no monumento do portal da cidade de Cianorte

O relatório entregue pelos alunos deveria conter:

1- Informações e dados da situação

(colocar o que cada grupo recebeu)

2- O problema

(colocar o problema que recebeu)

3- Dados complementares sobre a situação

Descreva os dados complementares e os procedimentos para coletar os dados complementares:

Interpretação das imagens para obter as medidas das alturas

4- Matemática da situação

Simplificações

Variáveis

Hipóteses

5- A construção do modelo matemático

6- Uso do modelo matemático para responder ao problema

7- Interpretação da solução e a resposta para o problema

8- A validação

Validação do modelo matemático em relação a matemática utilizada para obtê-lo:

Validação da resposta obtida em relação a situação-problema inicial e a situação da realidade

OBS. Para validar os resultados obtidos o grupo pode realizar pesquisas que podem auxiliar na interpretação dos resultados e na verificação e confiabilidade da resposta dada ao problema.

Informações encontradas e como elas contribuíram para dar credibilidade a resposta dada pelo grupo à situação-problema.

Para esta atividade de modelagem matemática, responda:

1- O que é modelo matemático?

2- Qual foi a finalidade do modelo matemático nessa atividade?

3- Sobre a validação:

a) Como o modelo matemático foi validado?

b) Como a resposta para o problema foi validada?

4- O que você aprendeu com essa atividade (matemática ou fora da matemática)?