



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

FERNANDA CAROLINE CYBULSKI

**GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES  
QUE ENSINAM MATEMÁTICA:  
INDICATIVOS DE DISSERTAÇÕES E TESES BRASILEIRAS**

---

Londrina  
2022

FERNANDA CAROLINE CYBULSKI

**GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES  
QUE ENSINAM MATEMÁTICA:  
INDICATIVOS DE DISSERTAÇÕES E TESES BRASILEIRAS**

Texto apresentado à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

Londrina  
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Cybulski, Fernanda Caroline.

Geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática : Indicativos de dissertações e teses brasileiras / Fernanda Caroline Cybulski. - Londrina, 2022.  
152 f.

Orientador: Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2022.  
Inclui bibliografia.

1. Ensino de Geometria - Tese. 2. Pensamento Geométrico - Tese. 3. Formação inicial de professores que ensinam matemática - Tese. 4. Mapeamento de dissertações e teses - Tese. I. Cyrino, Márcia Cristina de Costa Trindade. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

FERNANDA CAROLINE CYBULSKI

**GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES  
QUE ENSINAM MATEMÁTICA:  
INDICATIVOS DE DISSERTAÇÕES E TESES BRASILEIRAS**

Texto apresentado à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Cristina de  
Costa Trindade Cyrino  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof. Dr. Enio Freire De Paula  
Instituto Federal de Educação, Ciência e  
Tecnologia de São Paulo – IFSP-PEP

---

Profa. Dra. Loreni Aparecida Ferreira Baldini  
Secretaria de Estado da Educação – SEED -  
PR

Londrina, 25 de fevereiro de 2022.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, que me deu sabedoria e amparo para que eu chegasse até aqui.

À minha família. Aos meus pais, Auri e Marli, que nunca pouparam esforços, apoio e incentivos em todos os meus sonhos, metas e planos. Essa conquista não seria possível sem vocês. Às minhas irmãs, Bruna e Kamille, por serem minhas melhores amigas em todas as horas, pelos conselhos e desabafos.

Ao Natã, meu companheiro de vida, por sempre acreditar em mim, ter um ombro amigo e ouvido atencioso em todos os momentos. Obrigada por ser paciente e encorajador durante as crises em que pensei que não conseguiria. Obrigada por todas as conversas nas quais ideias nasceram. Você é luz na minha vida!

À dona Clau e ao seu Orlando, por todo o apoio e generosidade.

À minha orientadora, professora Márcia Cyrino, com quem tive o prazer de aprender durante esses dois anos, sempre disponível e com paciência. Seu conhecimento e competência admiráveis me ensinaram tanto! É uma honra ter sido sua orientanda de mestrado.

Ao Gepefopem, por todas as conversas, os estudos, as críticas e as leituras, especialmente ao André, à Anna Flávia e à Taynara, por estarem à frente desse mapeamento comigo.

À minha banca, professores Ênio e Loreni, por aceitarem prontamente esse convite e por todas as valiosas contribuições para esse trabalho e para a minha formação. Tê-los como banca é um privilégio e foi fundamental.

A todos os professores que, de algum modo, influenciaram na minha formação e me inspiraram para que eu chegasse até aqui.

Aos demais colaboradores dessa pesquisa, Vera Lúcia Fator Bonilha, pelas correções de Português e normatizações, e funcionários da Pós-Graduação do CCE

da UEL, especialmente à Cibele, por toda a atenção durante esse período do mestrado.

À Capes, pela bolsa em parte do mestrado.

*Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Esses quefazer se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquisa para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquisa para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade.*  
(FREIRE, 2020, pp. 30-31)

CYBULSKI, Fernanda Caroline. **Geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática**: indicativos de dissertações e teses brasileiras. 2022. 152 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

## RESUMO

A Geometria é uma área da Matemática prevista para ser ensinada em todos os níveis da Educação Básica brasileira. Sendo assim, torna-se fundamental compreender como a formação inicial de professores que ensinam matemática (PEM) tem trabalhado com essa temática. O objetivo desta pesquisa, qualitativa e de caráter documental, é mapear, descrever e discutir indicativos de geometria na formação inicial de PEM, presentes em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período 2009-2020. Para tanto, o *corpus* de análise foi constituído, com base em um mapeamento de dissertações e teses, oriundas de Programas de Pós-graduação brasileiros *stricto sensu*, das Áreas de Educação e Ensino, na plataforma digital do Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e no catálogo da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, totalizando 18 trabalhos. Os resultados evidenciam que as pesquisas que investigam a formação inicial de PEM na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental têm como pontos de enfoque abordagens metodológicas para o ensino de geometria, conteúdos geométricos e aspectos da grade curricular dessa temática. Nessas formações, representações de figuras geométricas foram utilizadas para trabalhar geometria com a finalidade de identificar propriedades ou conceitos geométricos de forma perceptiva e visual. Esses trabalhos apontam que os conteúdos de geometria são trabalhados concomitantes com o “como ensinar” geometria e prevalece o uso de material manipulável. As pesquisas que investigaram contextos da formação inicial de professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio se propuseram a analisar estratégias associadas às aprendizagens dos futuros professores em geometria e relações estabelecidas, a partir de conhecimentos já constituídos por eles. Nesses contextos, representações de figuras geométricas foram utilizadas para trabalhar geometria, principalmente, com as finalidades de resolver situações problema e verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações. Essas representações de figuras geométricas, por vezes, foram associadas à Álgebra, à Aritmética ou às Medidas. Tecnologias digitais, como o *software* GeoGebra, foram os recursos mais utilizados para promover estratégias de aprendizagem em geometria na formação inicial desses futuros professores de Matemática, especialmente para momentos de provas e demonstrações. Além disso, conteúdos de Geometria Euclidiana predominaram nas pesquisas analisadas do *corpus*. Pierre van Hiele e Raymond Duval foram os autores, que mais embasaram teoricamente o *corpus* e, mesmo que se observe uma crescente presença de posições epistemológicas nas pesquisas, as caracterizações de conhecimento/pensamento/raciocínio/saber geométrico ainda são incipientes, isto é, prevalece o uso arbitrário de tais termos, sem caracterizá-los ou utilizando-os, aparentemente, como sinônimos ou em sentidos de senso comum. As pesquisas analisadas sugerem que, no trabalho com geometria na formação inicial de PEM, sejam repensados aspectos, como os relacionados à organização da carga horária; à pertinência de disciplinas específicas; que geometria(s) deve(m) ser abordada(s) e

com que finalidade(s); e qual o papel de representações de figuras geométricas para além de um apoio às demais áreas da Matemática.

**Palavras-chave:** ensino de geometria; pensamento geométrico; formação inicial de professores que ensinam matemática; mapeamento de dissertações e teses.

CYBULSKI, Fernanda Caroline. **Geometry in initial education of teachers who teach mathematics**: indicatives of Brazilian dissertations and thesis. 2022. 152 p. Dissertations (Master's degree in the Teaching of Science and Mathematical Education) – Londrina State University, Londrina, 2022.

## ABSTRACT

Geometry is one mathematics' area that can be taught in all of the Brazilian Basic Education levels. Therefore, understanding how the initial education of teachers who teach mathematics (TTM) has been working with this theme is fundamental. This qualitative and documental research aims to map, describe and discuss indicative of geometry in the initial education of TTM, in Brazilian master and doctoral studies, published between the years 2009 and 2020. To compose the corpus analyzed, master and doctoral studies, from, Education and Teaching Areas of Brazilian post-graduate *strictu sensu* programs were mapped in both digital databases of Catalogue of Thesis and Dissertations of Higher Education Personal Improvement Coordination and Brazilian Digital Library of Thesis and Dissertations, finding 18 works. The analysis process evidence that the studies that investigate the initial education of TTM in Childhood Education and Primary Years focus on discussing teaching geometry methodological approaches in the initial education; geometric contents privileged in that education; and curricular aspects of these analyzed education courses. In these education courses, geometric figures representations were used to identify concepts or properties in perceptive and visual ways. These works highlight that geometry contents and the "how to teach geometry" are approached concomitantly and manipulable material was the most used resource. The researches that investigated the initial education of mathematics teachers of Middle and Secondary Education analyzed strategies associated with the geometry learnings in the mathematics teachers' initial education and relations established from prospective mathematics teachers' geometrics knowledge. In that context, geometric figures representations were used to approach geometry, especially, to solve problems and to verify or to study geometric properties, proofs and demonstrations. These geometrics figures representations were often associated with Algebra, Arithmetic and Measures. Digital technologies, such as GeoGebra software, were the most used resources to promote strategies associated with geometry learning in mathematics teachers' initial education, especially during proof and demonstration moments. Besides, Euclidean geometric concepts were the main contents approached in the corpus studies. Pierre van Hiele and Raymond Duval were the most used authors to theoretically constitute the corpus and, although epistemological positions are increasing in studies, discussions and characterizations of geometric knowledge/thinking/reasoning/wisdom are still incipient, that is, they have usually used arbitrarily, without characterizations or using them as synonyms or in common senses meaning. The analyzed studies highlight that geometry work in the initial education of TTM be rethought in some aspects, like those related to the workload organization; specific subjects relevance; what geometry(ies) must be approached and its finality; and which function do geometric figures representations have in addition to support the others mathematics areas.

**Keywords:** geometry teaching; geometric thinking; initial education of teachers who teach mathematics; dissertations and thesis mapping.

## LISTA DE FIGURAS – ORGANIZADA POR ARTIGOS-CAPÍTULOS

### INTRODUÇÃO EXPANDIDA

<b>Figura 1</b> – Paradigmas geométricos de Parzysz.....	29
<b>Figura 2</b> – Elementos destacados por Pais.....	30
<b>Figura 3</b> – Passos de construção de um retângulo.....	36
<b>Figura 4</b> – Apreensões das figuras em geometria.....	38
<b>Figura 5</b> – Níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.....	41
<b>Figura 6</b> – Quadrilátero.....	43
<b>Figura 7</b> – Triângulo 1.....	43
<b>Figura 8</b> – Triângulo 2.....	43
<b>Figura 9</b> – Subconfigurações para a construção de um retângulo.....	44
<b>Figura 10</b> – Apreensão operatória.....	46
<b>Figura 11</b> – Ilustração de uma prova do Teorema de Pitágoras.....	46
<b>Figura 12</b> – Modificação óptica de um pentágono.....	48
<b>Figura 13</b> – Modificação posicional de um pentágono.....	48
<b>Figura 14</b> – Etapas do processo de mapeamento.....	63
<b>Figura 15</b> – Organização da dissertação no formato <i>multipaper</i> .....	66

### ARTIGO-CAPÍTULO 1

<b>Figura 1</b> – Conteúdos de Geometria Euclidiana citados no <i>corpus</i> .....	84
--	----

### ARTIGO-CAPÍTULO 3

<b>Figura 1</b> – Exemplo de um problema proposto durante uma formação.....	121
---	-----

## LISTA DE QUADROS - ORGANIZADA POR ARTIGOS-CAPÍTULOS

### INTRODUÇÃO EXPANDIDA

<b>Quadro 1</b> – Conteúdos e habilidades de Geometria nos PCN e na BNCC .....	17
<b>Quadro 2</b> – O pensamento geométrico nos PCN e na BNCC .....	23
<b>Quadro 3</b> – Fases de van Hiele .....	53

### ARTIGO-CAPÍTULO 1

<b>Quadro 1</b> – Dissertações que constituem o <i>corpus</i> e seus contextos .....	79
<b>Quadro 2</b> – Objetivos e síntese das ações desenvolvidas nas pesquisas .....	80

### ARTIGO-CAPÍTULO 2

<b>Quadro 1</b> – Objetivos e síntese das ações desenvolvidas nas pesquisas .....	98
---	----

### ARTIGO-CAPÍTULO 3

<b>Quadro 1</b> – Abordagens de geometria presentes no <i>corpus</i> .....	118
<b>Quadro 2</b> – Caracterizações identificadas no <i>corpus</i> .....	123
<b>Quadro 3</b> – Referenciais mais utilizados no <i>corpus</i> .....	125

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
FPM	Futuros professores de matemática
Gepefopem	Grupo de Estudo e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática
PEM	Professores que ensinam matemática

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>O ENSINO DE GEOMETRIA E DIFERENTES FORMAS DE REPRESENTAR OS OBJETOS GEOMÉTRICOS</b> .....	<b>25</b>
2.1	O ASPECTO VISUAL EM GEOMETRIA .....	32
2.2	A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM GEOMETRIA .....	43
2.3	O DISCURSO EM GEOMETRIA .....	49
2.4	O PAPEL DO PROFESSOR NO ENSINO DE GEOMETRIA .....	52
<b>3</b>	<b>A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES QUE ENSINAM GEOMETRIA</b> .....	<b>54</b>
<b>4</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b> .....	<b>59</b>
	REFERÊNCIAS .....	68
	 <b>ARTIGO-CAPÍTULO 1: GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL E NOS ANOS INICIAIS: PONTOS DE ENFOQUE DE DISSERTAÇÕES BRASILEIRAS (2009-2020)</b> .....	<b>76</b>
	INTRODUÇÃO .....	77
	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....	78
	DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO <i>CORPUS</i> .....	80
	Abordagens Metodológicas para o Ensino de Geometria.....	81
	Conteúdos Geométricos para o Ensino de Geometria .....	83
	Organização Curricular para o Ensino de Geometria .....	85
	DISCUSSÃO DOS PONTOS DE ENFOQUE DO <i>CORPUS</i> .....	86
	ALGUMAS CONSIDERAÇÕES .....	89
	REFERÊNCIAS .....	91
	 <b>ARTIGO-CAPÍTULO 2: GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: PONTOS DE ENFOQUE DE DISSERTAÇÕES E TESES BRASILEIRAS (2009-2020)</b> .....	<b>95</b>

INTRODUÇÃO .....	96
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....	97
DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO <i>CORPUS</i> .....	98
Foco em Estratégias Associadas às Aprendizagens de Futuros Professores de MATEMÁTICA em Geometria .....	100
<i>Uso de Tecnologias Digitais</i> .....	100
<i>Uso de Tarefas</i> .....	102
Foco em Relações Estabelecidas, a Partir de Conhecimentos de Futuros Professores de Matemática em Geometria .....	104
ALGUMAS CONSIDERAÇÕES .....	108
REFERÊNCIAS .....	110

**ARTIGO-CAPÍTULO 3: GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE  
PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: O QUE REVELAM  
PESQUISAS BRASILEIRAS .....**

INTRODUÇÃO .....	114
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....	115
REPRESENTAÇÕES DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PARA ABORDAR GEOMETRIA.....	116
Os Estudos do Agrupamento 1: Utilizam as Representações para Identificar Conceitos ou Propriedades de Forma Principalmente Perceptiva.....	118
Os Estudos do Agrupamento 2: Utilizam as Representações para Resolver Situações-Problema .....	119
Os Estudos do Agrupamento 3: Utilizam as Representações para Verificar ou Estudar Propriedades Geométricas, Provas e Demonstrações.....	120
DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....	122
ALGUMAS CONSIDERAÇÕES .....	126
REFERÊNCIAS .....	130

<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>138</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>142</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Pensar é pensar por conceitos, ou então por funções, ou ainda por sensações, e um desses pensamentos não é melhor que um outro, ou mais plenamente, mais completamente, mais sinteticamente “pensado”. (DELEUZE; GUATTARI, 2010, p. 233, grifo do autor)

Nesse trecho, os filósofos Gilles Deleuze e Félix Guattari referem-se às três grandes formas de pensamento: arte, ciência e filosofia. Assim como essas *diferentes* formas de pensar não podem ser classificadas, nem sequer comparadas, propomos uma analogia com as diversas formas de pensar a geometria, ou de pensar em geometria.

Por vezes, estudantes e professores, ao discutirem a respeito de um objeto, pensam diferente. Porém, não se trata de um pensamento mais “completamente pensado” do que o outro. São distintos. Contudo, no que diz respeito à geometria, essas diferentes formas de pensar, em sala de aula, às vezes podem gerar falta de comunicação e, conseqüentemente, lacunas entre professores e estudantes (DUVAL, 1994; PAIS, 1996; PARZYSZ, 2006; VAN HIELE, 1984b).

Estudos ressaltam a importância da geometria em todos os níveis de ensino (CLEMENTS; SARAMA, 2011; PASSOS; NACARATO, 2014). No Brasil, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018, p. 271) “A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento”. Além disso, a noção de representação é colocada como uma das ideias fundamentais em Geometria (BRASIL, 2018).

A BNCC (BRASIL, 2018) e a coletânea dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997, 1998a, 1998b, 1999) trazem habilidades ou conteúdos de Geometria em todas as etapas da Educação Básica, destacados no Quadro 1 de acordo com a faixa etária ou etapa da Educação Básica, mas não para o Ensino Médio, uma vez que nessa etapa há possibilidades de abertura para a organização do currículo, desenvolvendo habilidades independente do conteúdo abordado (BRASIL, 2018).

**Quadro 1 - Conteúdos e habilidades de Geometria nos PCN e na BNCC**

Documento	Etapa	Habilidades relacionadas aos conteúdos de Geometria
PCN Educação Infantil (BRASIL, 1998a) <sup>1</sup>	0 a 3 anos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Utilização da contagem oral, de noções de quantidade, de tempo e de espaço em jogos, brincadeiras e músicas junto com o professor e nos diversos contextos nos quais as crianças reconheçam essa utilização como necessária” (p. 217).</li> <li>• “Manipulação e exploração de objetos e brinquedos, em situações organizadas de forma a existirem quantidades individuais suficientes para que cada criança possa descobrir as características e propriedades principais e suas possibilidades associativas: empilhar, rolar, transvasar, encaixar etc” (pp. 217-218).</li> </ul>
	4 a 6 anos	<p><b>Bloco de Conteúdos Espaço e Forma:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Explicitação e/ou representação da posição de pessoas e objetos, utilizando vocabulário pertinente nos jogos, nas brincadeiras e nas diversas situações nas quais as crianças considerarem necessário essa ação.</li> <li>• Exploração e identificação de propriedades geométricas de objetos e figuras, como formas, tipos de contornos, bidimensionalidade, tridimensionalidade, faces planas, lados retos etc.</li> <li>• Representações bidimensionais e tridimensionais de objetos.</li> <li>• Identificação de pontos de referência para situar-se e deslocar-se no espaço.</li> <li>• Descrição e representação de pequenos percursos e trajetos, observando pontos de referência” (p. 229).</li> </ul>
PCN 1.ª a 4.ª série (BRASIL, 1997)	1.º ciclo: 1.ª e 2.ª séries	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Localização de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição.</li> <li>• Movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de direção e sentido.</li> <li>• Descrição da localização e movimentação de pessoas ou objetos no espaço, usando sua própria terminologia.</li> <li>• Dimensionamento de espaços, percebendo relações de tamanho e forma.</li> <li>• Interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço a partir da análise de maquetes, esboços, croquis e itinerários.</li> <li>• Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não, etc.</li> <li>• Estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos — esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos — sem uso obrigatório de nomenclatura.</li> <li>• Percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos.</li> <li>• Construção e representação de formas geométricas” (p. 51).</li> </ul>
	2.º ciclo: 3.ª e 4.ª séries	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Descrição, interpretação e representação da posição de uma pessoa ou objeto no espaço, de diferentes pontos de vista.</li> <li>• Utilização de malhas ou redes para representar, no plano, a posição de uma pessoa ou objeto.</li> <li>• Descrição, interpretação e representação da movimentação de uma pessoa ou objeto no espaço e construção de itinerários.</li> <li>• Representação do espaço por meio de maquetes.</li> <li>• Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos redondos, como a esfera, o cone, o cilindro e outros.</li> <li>• Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (como os prismas, as pirâmides e outros) e identificação de elementos como faces, vértices e arestas.</li> <li>• Composição e decomposição de figuras tridimensionais, identificando diferentes possibilidades.</li> <li>• Identificação da simetria em figuras tridimensionais.</li> <li>• Exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais.</li> <li>• Identificação de figuras poligonais e circulares nas superfícies planas das figuras tridimensionais.</li> </ul>

<sup>1</sup> O documento referente à Educação Infantil que integra a coletânea dos Parâmetros Curriculares Nacionais são os Referenciais Curriculares Nacionais para a Educação Infantil (BRASIL, 1998a).

		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, etc.</li> <li>• Exploração de características de algumas figuras planas, tais como: rigidez triangular, paralelismo e perpendicularismo de lados, etc.</li> <li>• Composição e decomposição de figuras planas e identificação de que qualquer polígono pode ser composto a partir de figuras triangulares.</li> <li>• Ampliação e redução de figuras planas pelo uso de malhas.</li> <li>• Percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas.</li> <li>• Representação de figuras geométricas” (p. 60).</li> </ul>
<p><b>PCN 5.<sup>a</sup> a 8.<sup>a</sup> série (BRASIL, 1998b)</b></p>	<p><b>3.<sup>o</sup> ciclo: 5.<sup>a</sup> e 6.<sup>a</sup> séries</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Interpretação, a partir de situações-problema (leitura de plantas, croquis, mapas), da posição de pontos e de seus deslocamentos no plano, pelo estudo das representações em um sistema de coordenadas cartesianas” (p. 72).</li> <li>• “Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria” (pp. 72-73).</li> <li>• “Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados.</li> <li>• Composição e decomposição de figuras planas.</li> <li>• Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros.</li> <li>• Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).</li> <li>• Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área).</li> <li>• Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números.</li> <li>• Construção da noção de ângulo associada à ideia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas.</li> <li>• Verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é <math>180^\circ</math>” (p. 73).</li> </ul>
	<p><b>4.<sup>o</sup> ciclo: 7.<sup>a</sup> e 8.<sup>a</sup> séries</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado.</li> <li>• Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.</li> <li>• Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).</li> <li>• Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.</li> <li>• Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.</li> <li>• Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.</li> <li>• Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.</li> <li>• Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.</li> <li>• Verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não-convexos” (p. 88).</li> <li>• “Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.</li> <li>• Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).</li> </ul>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.</li> <li>• Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.</li> <li>• Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).</li> <li>• Verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales.</li> <li>• Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras” (p. 89).</li> </ul>
<b>PCN Ensino Médio (BRASIL, 1999)</b>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• “[...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física.” (p. 44)</li> </ul>
<b>BNCC (BRASIL, 2018)</b>	<b>0 a 1 ano e 6 meses</b>	<p><b>Campo de experiência Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Manipular, experimentar, arrumar e explorar o espaço por meio de experiências de deslocamentos de si e dos objetos.</li> <li>• Manipular materiais diversos e variados para comparar as diferenças e semelhanças entre eles” (p. 51).</li> </ul>
	<b>1 ano e 7 meses a 3 anos e 11 meses</b>	<p><b>Campo de experiência Traços, sons, cores e formas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Utilizar materiais variados com possibilidades de manipulação (argila, massa de modelar), explorando cores, texturas, superfícies, planos, formas e volumes ao criar objetos tridimensionais” (p. 48).</li> </ul> <p><b>Campo de experiência Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Classificar objetos, considerando determinado atributo (tamanho, peso, cor, forma etc)” (p. 51).</li> </ul>
	<b>4 anos a 5 anos e 11 meses</b>	<p><b>Campo de experiência Traços, sons, cores e formas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Expressar-se livremente por meio de desenho, pintura, colagem, dobradura e escultura, criando produções bidimensionais e tridimensionais” (p. 48).</li> </ul> <p><b>Campo de experiência Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Estabelecer relações de comparação entre objetos, observando suas propriedades” (p. 51).</li> <li>• “Classificar objetos e figuras de acordo com suas semelhanças e diferenças” (p. 51).</li> </ul>
	<b>Anos Iniciais: 1.º ano</b>	<p><b>Unidade Temática Geometria:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado.</li> <li>• Figuras geométricas espaciais: reconhecimento e relações com objetos familiares do mundo físico.</li> <li>• Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais” (p. 278).</li> </ul>
	<b>Anos Iniciais: 2.º ano</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Localização e movimentação de pessoas e objetos no espaço, segundo pontos de referência, e indicação de mudanças de direção e sentido.</li> <li>• Esboço de roteiros e de plantas simples.</li> <li>• Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento e características.</li> <li>• Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características” (p. 282).</li> </ul>
	<b>Anos Iniciais:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Localização e movimentação: representação de objetos e pontos de referência.</li> <li>• Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro</li> </ul>

<b>3.º ano</b>	<p>e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações.” (p. 286)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo): reconhecimento e análise de características.</li> <li>• Congruência de figuras geométricas planas” (p. 288).</li> </ul>
<b>Anos Iniciais: 4.º ano</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Localização e movimentação: pontos de referência, direção e sentido.</li> <li>• Paralelismo e perpendicularismo.</li> <li>• Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): reconhecimento, representações, planificações e características.</li> <li>• Ângulos retos e não retos: uso de dobraduras, esquadros e <i>softwares</i>.</li> <li>• Simetria de reflexão” (p. 292).</li> </ul>
<b>Anos Iniciais: 5.º ano</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1º quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano.</li> <li>• Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características.</li> <li>• Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos.</li> <li>• Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes” (p. 296).</li> </ul>
<b>Anos Finais: 6.º ano</b>	<p><b>Unidade Temática Geometria:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados.</li> <li>• Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas).</li> <li>• Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.</li> <li>• Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.</li> <li>• Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de régua, esquadros e <i>softwares</i>” (p. 302).</li> </ul>
<b>Anos Finais: 7.º ano</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem.</li> <li>• Simetrias de translação, rotação e reflexão A circunferência como lugar geométrico Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal.</li> <li>• Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos.</li> <li>• Polígonos regulares: quadrado e triângulo Equilátero” (p. 308).</li> </ul>
<b>Anos Finais: 8.º ano</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros.</li> <li>• Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.</li> <li>• Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas.</li> <li>• Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação” (p. 314).</li> </ul>
<b>Anos Finais: 9.º ano</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal.</li> <li>• Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo.</li> <li>• Semelhança de triângulos” (p. 316).</li> <li>• “Relações métricas no triângulo retângulo.</li> <li>• Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração.</li> <li>• Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais.</li> <li>• Polígonos regulares.</li> <li>• Distância entre pontos no plano cartesiano.</li> <li>• Vistas ortogonais de figuras espaciais” (p. 318).</li> </ul>
<b>Ensino Médio</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).</li> <li>• Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que</li> </ul>

		<p>envolvem triângulos, em variados contextos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.</li> <li>• Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.</li> <li>• Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.</li> <li>• Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital” (p. 545).</li> </ul>
--	--	--

**Fonte:** Elaborado pela autora com base em Brasil (1997, 1998a, 1998b, 1999, 2018)

No Quadro 1 observamos que, certos conteúdos de Geometria, descritos na BNCC, já se faziam presentes nos PCN, como a manipulação e a exploração de objetos presentes no espaço, na Educação Infantil; localização, comparação, classificação e reconhecimento de representações de objetos geométricos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental; reconhecimento e diferenciação de figuras bi e tridimensionais e o estudo de teoremas nos Anos Finais do Ensino Fundamental; e a elaboração, a resolução ou a modelação de problemas na etapa do Ensino Médio.

Ambos os documentos destacam a articulação de conceitos de Grandeza, Medida e Geometria, especialmente, ao se tratar de grandezas geométricas como Área, Perímetro, Volume e Ângulos, por exemplo, que fortemente se articulam com formas geométricas. De acordo com os PCN, o estudo de Grandezas e Medidas permite ligações não apenas com a Geometria, mas também com a Álgebra e a Aritmética. No que diz respeito à Geometria, o documento destaca que as noções de Grandezas e Medidas podem, inclusive, facilitar a compreensão de conceitos de Espaço e Forma e vice-versa (BRASIL, 1998). De modo semelhante, a BNCC (2018, p. 273) reitera que nos Anos Finais do Ensino Fundamental é esperado que os estudantes “reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas”.

Essa articulação também é apontada por algumas investigações. Para Vale e Pimentel (2017), a geometria, para além de descrever e analisar o mundo como um todo, complementa e apoia o estudo de temas relacionados às medidas e aos números. Assim, o estudo de medidas de grandezas geométricas pode ocorrer de forma articulada com conceitos de geometria.

Estudiosos da área destacam as potencialidades do pensar<sup>2</sup> ou do raciocinar geometricamente (NASSER; FERREIRA; VAZ, 2017; PINHEIRO; CARREIRA, 2013; VIANA; SILVA, 2020), especialmente porque a geometria permite o uso da visualização e de figuras em tarefas (BRIGO; FLORES, 2008; PIROLA, 2012), o pensamento crítico, as possibilidades para a resolução de problemas, o raciocínio dedutivo, a argumentação e o estabelecimento de conjecturas (VALE; PIMENTEL, 2017). Duval (1998) destaca que a geometria é a área da Matemática que mais favorece diferentes modos de pensar, sendo este um de seus grandes objetivos.

Nesse sentido, investigações em geometria têm se mostrado relevantes (SWOBODA; VIGHI, 2016), por incluir discussões de aspectos como o raciocínio espacial e a visualização. Essas discussões têm ganhado espaço (SANTOS; OLIVEIRA, 2017), mesmo que ainda sejam poucas as pesquisas relacionadas ao pensamento geométrico (BARRETO *et al.*, 2021; CARVALHO; FERREIRA, 2015; CLEMENTS *et al.*, 2018; PAIVA, 2021; SINCLAIR *et al.*, 2017).

Pereira da Costa (2020, p. 177) relata a ausência de sistematizações para o conceito de pensamento geométrico, o que o leva a defini-lo como

[...] a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos, de aplicar de modo coerente os instrumentos geométricos na resolução de problemas. É a capacidade de compreender a natureza dos fenômenos e inferir sobre eles, de identificar e perceber a Geometria como uma ferramenta para entendimento do mundo físico e como um modelo matemático para compreensão do mundo teórico.

Paiva (2021) também cita a falta de definições ou caracterizações na literatura. A autora analisa sete teses e dissertações brasileiras de formação de professores de Matemática (inicial e continuada)<sup>3</sup> e conclui que nesses trabalhos não há detalhes ou argumentos explícitos do que seria o pensamento geométrico.

Abidin, Ismail e Ismail (2018, p. 230) destacam que “O pensamento geométrico é a capacidade dos estudantes de pensar nas relações entre as propriedades geométricas e suas relações espaciais”.<sup>4</sup> Nos documentos oficiais,

---

<sup>2</sup> Como na literatura estão presentes ambos os termos, “Pensamento geométrico” e “Raciocínio geométrico”, utilizamos os termos citados pelos autores que nos fundamentam.

<sup>3</sup> Não identificamos o período de publicação das teses e das dissertações analisadas por Paiva (2021).

<sup>4</sup> “*Geometry thinking is the ability of students to think of the relationships between geometrical properties and its spatial relations*” (ABIDIN; ISMAIL; ISMAIL, 2018, p. 230).

como os PCN (1997, 1998a, 1998b)<sup>5</sup> e a BNCC (BRASIL, 2018), é possível observar caracterizações para pensamento geométrico (Quadro 2).

**Quadro 2 - O pensamento geométrico nos PCN e na BNCC**

<b>Documento</b>	<b>Pensamento Geométrico</b>
<b>PCN Educação Infantil (BRASIL, 1998a)</b>	“O pensamento geométrico compreende as relações e representações espaciais que as crianças desenvolvem, desde muito pequenas, inicialmente, pela exploração sensorial dos objetos, das ações e deslocamentos que realizam no meio ambiente, da resolução de problemas. Cada criança constrói um modo particular de conceber o espaço por meio das suas percepções, do contato com a realidade e das soluções que encontra para os problemas” (p. 229).
<b>PCN 1.ª a 4.ª séries (BRASIL, 1997)</b>	<p>“Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (p. 39).</p> <p>“Essa capacidade de deslocar-se mentalmente e de perceber o espaço de diferentes pontos de vista são condições necessárias à coordenação espacial e nesse processo está a origem das noções de direção, sentido, distância, ângulo e muitas outras essenciais à construção do pensamento geométrico” (p. 81).</p> <p>“O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades” (p. 82).</p>
<b>PCN 5.ª a 8.ª séries (BRASIL, 1998b)</b>	<p>Um dos objetivos da Matemática no 3º e 4º ciclos é desenvolver o Pensamento Geométrico.</p> <p>“[...] a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações” (p. 122).</p>
<b>BNCC (BRASIL, 2018)</b>	<p>“[...] estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência” (p. 271).</p> <p>“Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança” (p. 527).</p>

**Fonte:** Elaborado pela autora com base em Brasil (1997, 1998a, 1998b, 2018)

Observamos que tais documentos restringem-se a destacar conteúdos e conceitos de geometria ou a explicitar modos de promovê-los sem, contudo,

<sup>5</sup> Nos PCN para o Ensino Médio (BRASIL, 1999), não identificamos o que seria pensamento geométrico.

especificar ou definir o que seria o pensamento geométrico, como definido, por exemplo, por Pereira da Costa (2020) e Abidin, Ismail e Ismail (2018).

Em vista da relevância de estudos que discutam aspectos do ensino de geometria (SWOBODA; VIGHI, 2016), bem como a presença dessa área da Matemática em todas as etapas da Educação Básica (BRASIL, 1997, 1998a, 1998b, 1999, 2018), julgamos pertinente destacar aspectos da formação de professores para o ensino de geometria, visto que as pesquisas nessa área ainda são incipientes (ATASOY, 2019; BARRETO *et al.*, 2021; CARVALHO; FERREIRA, 2015; SANTOS; TELES, 2021).

Além disso, concordamos com Crecci, Nacarato e Fiorentini (2017) da necessidade de estudos de mapeamento de investigações na área de formação de professores, o que permitiria levantar o que tem sido pesquisado e as principais questões ainda pendentes, bem como descrever e discutir perspectivas e resultados já encontrados. Nesse sentido, na presente investigação nos propomos a *mapear, descrever e discutir indicativos<sup>6</sup> de geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática (PEM),<sup>7</sup> presentes em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período 2009-2020.*

Para tanto, na seção 2, a seguir, apresentaremos, de modo articulado, pressupostos para o ensino de geometria com base em quatro autores: Duval (1991, 1994, 1995, 1998, 1999, 2005, 2009, 2012), Pais (1994, 1996, 2000), Parzysz (1988, 2001, 2006) e van Hiele (1969, 1984a, 1984b, 1999, 2002). Identificamos que os pressupostos de Duval, Pais, Parzysz e van Hiele são os mais utilizados nos trabalhos pertencentes ao nosso *corpus*, constituído após o mapeamento. Portanto, são esses referenciais teóricos que nortearão nossas análises e discussões.

Na sequência, na seção 3, destacaremos aspectos concernentes à formação inicial de PEM, suas especificidades e lacunas para o ensino de geometria.

Na seção 4, por fim, indicaremos nossos encaminhamentos metodológicos para a constituição do *corpus* de teses e dissertações que compõem essa pesquisa.

---

<sup>6</sup> Usamos o termo “indicativos” no sentido de verificar o que as pesquisas indicam, isto é, se e como abordam a geometria, bem como suas respectivas posições teóricas e epistemológicas.

<sup>7</sup> O uso do termo “Professores que ensinam Matemática” decorre da necessidade de considerar os professores que ensinam matemática e não são licenciados em Matemática, por exemplo, professores que atuam na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, engenheiros, físicos, pedagogos, dentre outros.

## 2 O ENSINO DE GEOMETRIA E DIFERENTES FORMAS DE REPRESENTAR OS OBJETOS GEOMÉTRICOS

Segundo Duval (2009), os objetos matemáticos, incluindo os geométricos, nem sempre são diretamente perceptíveis. Assim, representações semióticas<sup>8</sup>, como as figuras geométricas, permitem o acesso inicial a esses objetos matemáticos. Além disso, para que exista compreensão, é essencial distinguir os objetos de suas diferentes representações. O objeto “quadrado”, por exemplo, é definido como um quadrilátero plano convexo que “possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes” (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 98) e pode ser representado por traçados geométricos ou por uma definição simbólica formal.

Parzysz (2001) enfatiza diferentes registros de representação em geometria, pois em determinado problema pode ser útil alterar a forma na qual a informação é representada. Um “especialista”, ao resolver um problema, tem ciência de que, independentemente dos registros utilizados, o objeto geométrico será sempre o mesmo. Já outro sujeito, pode tratar a representação como o próprio objeto, e alterando o registro considera que o objeto modifica.

Duval (1998) destaca, com base em Piaget, que o desenvolvimento do pensamento se dá pelos processos de diferenciação e coordenação de representações semióticas. Assim, somente após diferenciar os processos é que podem ser coordenados, isto é, percebidos e utilizados simultaneamente. De acordo com o autor, não há correspondência relevante entre o desenvolvimento do pensamento e a construção de conhecimentos disciplinares. O fato de saber mais ou menos conteúdos não implica em um pensamento mais ou menos desenvolvido. O desenvolvimento do pensamento é multimodal, são várias apreensões e processos cognitivos atuando simultaneamente. Este fato exclui os modelos nos quais diferentes atividades cognitivas são organizadas em hierarquias do “concreto” para o abstrato, sobretudo porque todas as representações são abstratas e “muitas vezes o que se chama ‘concreto’ é o que se tornou familiar”<sup>9</sup> (DUVAL, 1998, p. 50, grifo do autor).

---

<sup>8</sup> As representações semióticas têm a especificidade de referirem-se a um sistema particular de signos, como a escrita algébrica, as formas geométricas ou os gráficos cartesianos, que podem ser convertidas em outros sistemas semióticos obtendo representações “equivalentes”, isto é, ocorre uma mudança de forma na representação de um mesmo conhecimento (DUVAL, 2009).

<sup>9</sup> “*very often what one calls 'concrete' is what has become 'familiar.'*” (DUVAL, 1998, p. 50).

Pais (1996) destaca a necessidade de transpor a materialidade dos objetos manipuláveis e desenhos em busca da abstração, para não tornar o ensino puramente experimental, pois se poderia assumir erroneamente uma “geometria concreta”, em vez dos objetos matemáticos como conceitos teóricos. Além disso, ressalta o equilíbrio entre o empirismo absoluto, por meio de manipulações, e o exclusivo racionalismo, centrado em conceitos geométricos perfeitos e abstratos (PAIS, 2000).

Segundo Parzysz (2006), a geometria que se ensina nas instituições escolares trata-se de uma modelagem do espaço físico, ou melhor, do espaço que nos circunda. Assim, ela *evolui* de uma “geometria da observação” para uma “geometria da demonstração” (PARZYSZ, 2006), estabelecendo noções de hierarquia. Defende, como um dos objetivos do currículo, que os estudantes passem por esse processo de evolução da geometria (PARZYSZ, 2006).

Para van Hiele (1984a), o pensamento se desenvolve por estruturas sucessivas com *insights* superiores em relação ao anterior, isto é, um novo processo de pensamento, uma transição para um nível superior. Aponta que “[...] o pensamento reflexivo é necessário para atingir um nível superior, mas não é suficiente. Atingir um nível superior é possível com a ajuda de material adequado que estimula a reflexão na direção certa”<sup>10</sup> (VAN HIELE, 2002, p. 43).

O autor salienta “cerca de cinco níveis diferentes”<sup>11</sup> (VAN HIELE, 1984b, p. 245)<sup>12</sup> para criar um sistema científico lógico e coerente e desenvolver a capacidade de aquisição de conhecimento pela aplicação do pensamento puro. No entanto, o número de níveis em si “é de pouca importância para a compreensão do que é um nível de pensamento”<sup>13</sup> (VAN HIELE, 1984b, p. 246). Na literatura, contudo, enfatiza-se que se trata de *cinco* níveis: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor (KALEFF *et al.*, 1994; VAN DE WALLE, 2009).

Uma das características dos níveis de desenvolvimento de van Hiele (1984b)

---

<sup>10</sup> “[...] *reflective thinking is necessary to attain a higher level, but it is not sufficient. Reaching a higher level is possible with help of adequate material which stimulates reflection in the right direction*” (VAN HIELE, 2002, p. 43).

<sup>11</sup> “*about five different levels*” (VAN HIELE, 1984b, p. 245).

<sup>12</sup> Os níveis estão descritos na subseção “O aspecto visual em Geometria”.

<sup>13</sup> “*of little importance in understanding what a level of thought is*” (VAN HIELE, 1984b, p. 246).

é a maturação, isto é, as etapas<sup>14</sup> (ou fases) que determinam a passagem de um nível a outro superior, consideradas como um processo de aprendizagem, não como amadurecimento biológico, mas possíveis do auxílio das instruções do professor.

Van Hiele (1969, p. 345) ressalta que “[...] a idade de aprendizagem não pode ser reduzida indefinidamente”<sup>15</sup>. Isso ocorre pois, muitas vezes, para um conceito ser desenvolvido é preciso uma linguagem própria, que demanda tempo e diversas experiências para ser desenvolvida, como no caso das demonstrações.

No entanto, para Duval (1998) não é possível estabelecer relações entre um nível de conhecimento e um nível de pensamento, pois as bases desses níveis e suas estruturas são diferentes. Do ponto de vista *cognitivo*, ou do desenvolvimento, os níveis de pensamento dependem de estruturas operacionais gerais, habilidades, capacidades *limitadas* e do critério de maturação da adolescência. Já de um ponto de vista *epistemológico*, os níveis do conhecimento referem-se a um campo disciplinar específico, pois cada área tem seus próprios conhecimentos, em que o progresso com novas ações, objetos e organizações são *ilimitados* (DUVAL, 1998). Além disso, para Duval (1998), não existe hierarquia de desenvolvimento entre as atividades cognitivas, isto é, todos os processos estão presentes em todos os momentos, diferenciando-se, porque a forma de trabalhar com cada um se torna cada vez mais complexa.

Há divergências entre o que professor e estudante pensam ou fazem no contexto de sala de aula. Para Duval (1994), podem-se evidenciar lacunas entre o que se mostra ao professor e o que se mostra ao estudante em determinados momentos, pois os processos de visualização envolvem diferentes situações, quais sejam a representação, a ilustração ou a exploração heurística de objetos (DUVAL, 1998). Ver uma figura é mais complexo do que o simples reconhecimento do que é mostrado pela imagem, que pode desempenhar diferentes papéis e formas de funcionamento em uma abordagem geométrica (DUVAL, 2012).

De acordo com Pais (1996), cada indivíduo pode representar determinado conceito de diferentes formas, além de que o conhecimento intuitivo é subjetivo e, portanto, depende das vivências de cada sujeito, o que pode tornar um conhecimento evidente para uma pessoa e não para outra.

---

<sup>14</sup> As fases que norteiam a transição de um nível a outro estão descritas na subseção 2.4 “O papel do professor no ensino de geometria”.

<sup>15</sup> “*on ne peut baisser indefiniment l' age d'apprentissage*” (VAN HIELE, 1969, p. 246).

Para van Hiele (1984b), professor e estudante nem sempre se comunicam e pensam nos mesmos níveis e linguagens. Para o autor “Duas pessoas que raciocinam em dois níveis diferentes não podem se entender. Isso é o que costuma acontecer entre professor e estudante”<sup>16</sup> (VAN HIELE, 1984b, p. 246).

De modo semelhante, Parzysz (2006, p. 126) defende que professor e estudante “nem sempre jogam o mesmo jogo”<sup>17</sup>. Um dos motivos dessa falta de consenso em entendimentos se deve ao fato de a geometria, cujo discurso se refere a objetos teóricos, surgir de considerações baseadas em objetos físicos e materiais, relacionados em metáforas, muitas vezes equivocadas.

Parzysz (2006) considera três principais bases epistemológicas com relação à dicotomia “geometria concreta<sup>18</sup>” – “geometria axiomática”, para fundamentar seus paradigmas geométricos, baseadas em:

- van Hiele (2002): defende diferentes níveis de desenvolvimento do Pensamento Geométrico que partem do visual para o formal axiomático;

- Houdement e Kuzniak (2003): com as geometrias natural, axiomática natural e axiomática formalista;

- Henry (1999): com a matematização a partir da modelagem de situações.

Com base em todas essas abordagens, Parzysz (2006) propõe quatro paradigmas geométricos (Figura 1) que diferem em seus objetos e formas de validação.

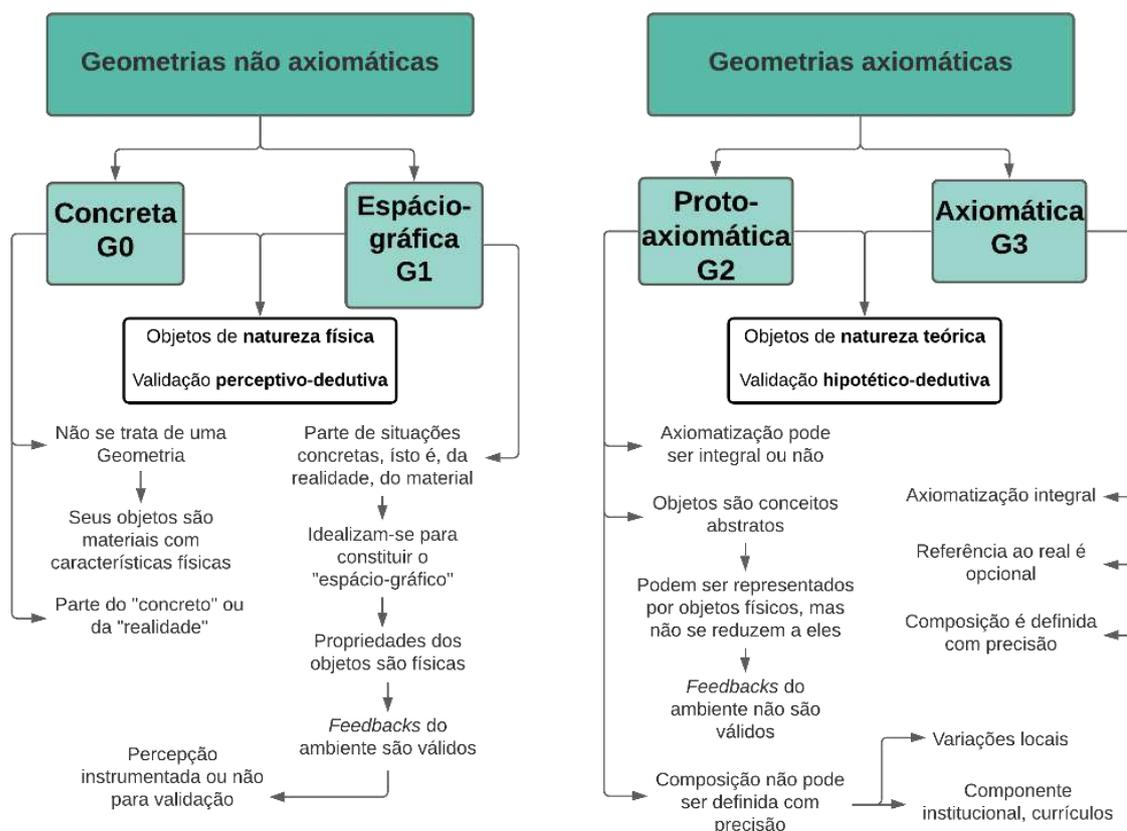
---

<sup>16</sup> “*Two people who reason at two different levels cannot understand each other. This is what often happens between teacher and student*” (VAN HIELE, 1984b, p. 246).

<sup>17</sup> “*ne jouent pas toujours au même jeu*” (PARZYSZ, 2006, p. 129).

<sup>18</sup> “Concreto”, para Parzysz (2006), refere-se à realidade, ao que é material.

**Figura 1 - Paradigmas geométricos de Parzysz**



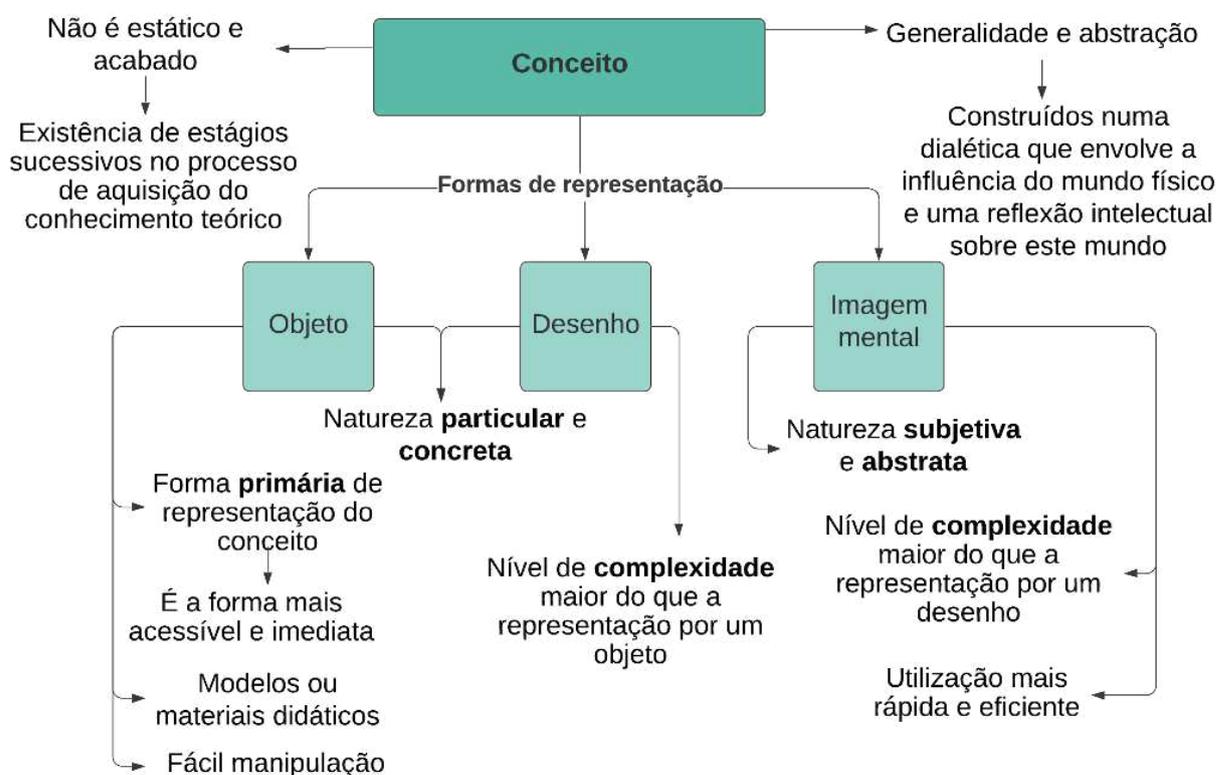
**Fonte:** Elaborada pela autora, a partir de Parzysz (2001, 2006)

As formas de representação de objetos geométricos variam a depender do paradigma considerado. Parzysz (2001) esclarece que, em G1, os objetos são físicos e materiais; em G2 ou G3, estes mesmos objetos serão apenas representações dos objetos teóricos desses paradigmas, representações estas que podem ser feitas em diferentes registros de representação (DUVAL, 1996 *apud* PARZYSZ, 2001).

Pais (1996), por sua vez, considera quatro elementos no processo de ensino e aprendizagem da geometria euclidiana plana e espacial: objeto, desenho, imagem mental e conceito. Objeto, desenho e imagem mental referem-se a diferentes formas de representação do conceito, que tem natureza teórica e não permite a experimentação direta, entre as quais há uma ordem crescente de complexidade do ponto de vista operacional (PAIS, 1994). Com relação à imagem mental, “[...] pode-se dizer que o indivíduo tem uma dessas imagens quando ele é capaz de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos” (PAIS, 1996, p. 70).

Pais (1996, p. 68) ressalta que, como “o processo de construção teórica é lento, gradual e complexo”, é preciso considerar a existência do que chama de níveis de conceitualização. Pelo fato de o conceito não ser algo estático e acabado, seu processo de formação está constantemente envolvido em trocas e evoluções, o que “[...] nos leva a considerar, no processo de ensino e aprendizagem, a existência de estágios sucessivos no processo de aquisição do conhecimento teórico” (PAIS, 1994, p. 14). A Figura 2 mostra as características e as principais relações entre os quatro elementos destacados por Pais (1994, 1996):

**Figura 2** - Elementos destacados por Pais



**Fonte:** Elaborada pela autora, a partir de Pais (1994, 1996)

A esses quatro elementos, Pais (1996) relaciona três aspectos do conhecimento geométrico, desenvolvidos por Gonseth (1945) em uma análise epistemológica da geometria no espaço, quais sejam: intuitivo, experimental e teórico<sup>19</sup>.

A *intuição* relaciona-se com as *imagens mentais*, pois ambas são essencialmente subjetivas, possuem disponibilidade de utilização e não são aceitas

<sup>19</sup> Pais (1994) utiliza o termo *racional* como o terceiro aspecto proposto por Gonseth (1945). No entanto, adotaremos o termo *teórico* citado em Pais (1996).

como recursos de validação do conhecimento (PAIS, 1996). O *objeto* e o *desenho* associam-se à *experiência*, na medida em que são formas de representação úteis em procedimentos experimentais. Os *conceitos*, por sua vez, conectam-se diretamente com a *teoria*, pois constituem o conhecimento teórico da geometria (PAIS, 1996).

No entanto, para a constituição do conhecimento geométrico teórico são necessárias as bases intuitiva e experimental, o que relaciona os quatro elementos (objeto, desenho, imagem mental e conceito) entre si e com os três aspectos do conhecimento geométrico (intuitivo, experimental e teórico) (PAIS, 1996).

Diante de diferentes possibilidades de representação em geometria, Duval (2009) defende que podemos recorrer ao visual, a uma figura, para resolver problemas, quando for mais viável e acessível do que aplicar algoritmos, teoremas e definições, visto que cada sistema de representação coloca questões e dificuldades de aprendizagem específicas. Além disso, “as figuras são a forma mais direta de explorar os diferentes aspectos, de antecipar os resultados de um processo, de selecionar uma solução”<sup>20</sup>, e auxiliam demonstrações (DUVAL, 1994, p. 121).

Van Hiele (1984a) acentua que, inicialmente, é importante uma base de materiais que evoquem estruturas visuais e permitam a junção de redes de relações, uma vez que o visual é importante como um fator necessário à criação de vínculos e coesão entre as diferentes estruturas, o que permitirá a transferência de uma à outra.

Os paradigmas de Parzysz (2006) podem auxiliar uns aos outros, como, quando uma contradição é percebida em alguma representação de figura geométrica (G1), pode-se recorrer a G2 para encontrar o erro, de modo que, se ao final de um raciocínio geométrico a conclusão não parecer plausível, podem-se utilizar os recursos de G1 com representações de figuras, por exemplo, para validar ou não o resultado encontrado.

Pais (1996) enfatiza a importância de elementos visuais experimentais na geometria, isto é, objetos e desenhos, para atingir o nível abstrato. Porém, ressalta o possível uso inadequado de materiais didáticos de apoio, quando a manipulação se restringe a aspectos imediatos e superficiais sem, contudo, relacionar com as questões conceituais abstratas da geometria (PAIS, 1996).

---

<sup>20</sup>“*les figures sont le moyen le plus direct d’explorer les différents aspects, d’anticiper les résultats d’une démarche, de sélectionner une solution*” (DUVAL, 1994, p. 121).

Assim, observamos que o visual é um dos aspectos destacados por Duval, Pais, Parzysz e van Hiele no que tange ao ensino de geometria. Ademais, esses autores também discutem questões relacionadas à resolução de problemas e ao discurso em geometria, bem como ao papel do professor. Desse modo, nas próximas subseções discutiremos pressupostos referentes a esses elementos, com base nesses autores.

## 2.1 O ASPECTO VISUAL EM GEOMETRIA

Para se referir às formas, ou configurações, Duval (1998) utiliza o termo alemão *gestalt*<sup>21</sup>, oriundo da Psicologia. Segundo Moreira (2018), *gestalt* significa configuração (uma das traduções usadas por Duval (1998), organização, forma ou padrão, com referência a um todo. Gazzaniga, Heatherton e Halpern (2018) também pontuam que *gestalt* significa “formato” ou “forma”.

Na Teoria da *Gestalt*, o todo tem papel fundamental para compreender o objeto, sendo que o todo que cada um percebe não é apenas a junção de todas as suas partes (o que Duval chama de subconfigurações): “o todo é diferente, é mais do que a soma de suas partes” (MOREIRA, 2018, p. 44), “por exemplo, se um pesquisador mostra um triângulo a algumas pessoas, elas veem um triângulo, e não três linhas em uma folha de papel [...]” (GAZZANIGA; HEATHERTON; HALPERN, 2018, p. 16). Desse modo, configurações significativas são organizações das partes em relação a um todo, ou seja, são as *gestalts* (MOREIRA, 2018).

Assim, a *percepção*, foco de estudo inicial da *Gestalt*, é subjetiva e depende do contexto no qual a figura está inserida e do qual o observador faz parte. Logo, o termo *gestalt* é utilizado não apenas para ser traduzido como forma ou configurações, mas porque traz um sentido próprio, isto é, as formas são *percebidas* e reconhecidas a partir do todo e da percepção visual.

Duval (2012, p. 121) define figura como “uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo”, amparada pela *Gestalt* (DUVAL, 1995). De acordo com Duval (1998), o que nós vemos são *gestalts*, em diferentes dimensões, identificadas visualmente por meio da percepção.

---

<sup>21</sup>Usaremos a grafia “*gestalt*” para nos referirmos à palavra (substantivo) e “*Gestalt*” quando mencionarmos a teoria.

Diante disso, “[...] a maneira de olhar um desenho não pode ser a mesma quando nos deparamos com o desenho de um objeto físico, mesmo esquematizado, e quando nos deparamos com uma figura geométrica”<sup>22</sup> (DUVAL, 1995, p. 142), diferenciando a visualização icônica (presente nas representações de objetos físicos) da não icônica (específica para as representações de objetos matemáticos) (DUVAL, 2005).

Para Duval (2005), os processos de construção de figuras geométricas são os desenvolvidos por ferramentas com o apoio de propriedades matemáticas. Para o autor, o desenho à mão livre não é considerado construção geométrica por estar passível de erro e não permitir verificar propriedades geométricas com precisão.

Pais (1996), por sua vez, argumenta a respeito da possível dupla interpretação do termo *figura*, que ora pode se referir a um conceito geométrico, ora a apenas uma representação gráfica.

Parzysz (2001) diferencia os conceitos de figura e desenho. Para o autor, a figura é o objeto geométrico teórico e conceitual definido por um enunciado, enquanto o desenho se refere a uma das formas de representação material desse objeto geométrico (PARZYSZ, 2001).

Duval (2005), Pais (1994) e Parzysz (1988) defendem a importância de registros escritos, acompanhando as representações visuais, como, por exemplo, explicações ou legendas. Pais (1994) ressalta que os comentários existentes, geralmente, se referem apenas aos conceitos representados, não ao desenho em si, o que aumenta as dificuldades dos estudantes com o uso de desenho em geometria.

Para Duval (2005, p. 8), reconhecer um objeto matemático em sua representação não depende apenas da discriminação visual das formas, mas de suposições que guiarão o olhar, isto é, “a produção discursiva de enunciados que se articulam para justificar, explicar ou demonstrar”<sup>23</sup>. Assim, as figuras geométricas são constituídas por dois registros de representação, o visual por meio das formas/*gestalts* e o discursivo por enunciados ou marcações, de modo que se alterando um dos registros a figura geométrica pode representar outro objeto (DUVAL, 2005). Assim sendo, não podemos simplesmente olhar para uma figura e

---

<sup>22</sup> “*The way of looking at a drawing cannot be the same when we are faced with a drawing of a physical object, even schematized, and when we are faced with a geometrical figure*” (Duval, 1995, p. 142).

<sup>23</sup> “*La production discursive d’énoncés que l’on relie entre eux pour justifier, pour expliquer ou pour démontrer*” (DUVAL, 2005, p. 8).

afirmar, apenas com a percepção, que se trata de uma representação do quadrado se não tivermos garantias de que realmente o é, como marcações de ângulos retos, lados com medidas congruentes, legenda, demonstrações em língua natural ou simbólica, por exemplo.

Parzysz (2006) também cita a importância da utilização de símbolos convencionais para codificação (como, no caso do quadrado, referências às informações a respeito da congruência entre as medidas dos lados) nos desenhos, a fim de delimitar ou esclarecer determinadas propriedades. Essa utilização é essencial, principalmente, nas representações de figuras espaciais, para compensar a perda de informações, uma vez que não substituem a figura e nem tudo pode ser representado (PARZYSZ, 1988).

Parzysz (1988) esquematiza as relações entre figuras (objetos das geometrias plana e espacial) e suas diversas representações em três níveis, destacando uma perda de informação, ao passar do nível inicial para os demais. O *nível 0* possui o máximo de informação, pois não se trata de uma representação, mas da figura em si. O *nível 1*, por sua vez, é considerado uma representação próxima (da figura), pois constitui-se de desenho como forma de representação das figuras planas e em modelos para representar as espaciais. Já o *nível 2* é descrito como uma representação distante do nível inicial (nível 0), pois, no nível 2, as figuras da geometria espacial são representadas por desenhos, onde há mais perda de informações se comparado com a representação por modelo (PARZYSZ, 1988).

Pais (1996) vai ao encontro de Parzysz (1988), ao destacar que o desenho, principalmente na geometria plana, pode ser confundido pelos estudantes com o próprio conceito. No entanto, trata-se de uma representação mais simples do que na geometria espacial, que requer a perspectiva e gera dificuldades para os estudantes.

Segundo Duval (2012), ao ver uma figura, é possível interpretar algo diferente do que consta no enunciado ou em uma legenda, além de que importantes elementos do enunciado podem ser os que não se apresentam automaticamente, devido à estrutura perceptiva autônoma das figuras.

Duval (1994) especifica quatro formas de mobilizar uma figura e analisar seu funcionamento em uma abordagem geométrica, o que chama de apreensão<sup>24</sup>

---

<sup>24</sup> Aqui o termo apreensão é filosófico e psicológico e designa o ato mais imediato e inicial de acessar um conceito ou objeto, sem julgamentos ou juízo de valor. Para Ferreira (2014), trata-se de um conhecimento oposto aos processos considerados mais elaborados, como a compreensão, o

cognitiva. Mesmo que em muitas situações essas quatro apreensões estejam imbricadas, é necessário que se desenvolvam de forma independente, visto que cada uma contribuirá e será determinante com menor ou maior intensidade a depender da situação.

A *apreensão perceptiva* vem do primeiro contato com a figura e é a mais imediata e automática. Permite identificar ou reconhecer uma forma a partir da *Gestalt* e de aspectos intrafigurais das figuras, como tamanho, direção e orientação (DUVAL, 1994), além de reconhecer subfiguras componentes da figura inicial para além das utilizadas em sua construção (DUVAL, 1995). No entanto, a apreensão perceptiva pode ser enganosa, se usada de forma isolada, de modo que se torna insuficiente para a identificação de um objeto matemático, pois viabiliza múltiplas representações ou interpretações (DUVAL, 1998).

A *apreensão discursiva* de uma figura é a associação de *gestalts* com sentenças que determinam o objeto representado (DUVAL, 1998). Depende de hipóteses e possui um vocabulário construído com base em definições (DUVAL, 2012). No entanto, Duval (1994) frisa que a apreensão discursiva vai além do que é indicado no enunciado, pois também corresponde a explicações de natureza dedutiva a respeito de propriedades, isto é, explicações que derivam de forma dedutiva das fornecidas previamente (DUVAL, 1995). O objeto geométrico é acessado por representações de suas propriedades na forma de demonstração (DUVAL, 1994).

As demonstrações são representações imprescindíveis para a apreensão discursiva em geometria, sendo que esta não se apresenta na forma de uma figura, mas sim, de uma rede semântica de propriedades e objetos, pois preza pela articulação dos enunciados com seu conjunto de regras e compatibilidade interna. Trata-se de uma atividade complexa, na qual a distinção dos usos de diferentes enunciados (entre os quais hipóteses e proposições) e a ordem em que aparecem influenciam na construção de sentido pelos estudantes (DUVAL, 2012).

Segundo Duval (2012), de um ponto de vista cognitivo, a redação de uma demonstração difere das ordens escritas de uma construção, por não ser imperativa

e, sim, composta por afirmações.

Além disso, uma demonstração não é linear em um primeiro momento, isto é, o discurso precisa ser organizado, a partir de relações conceituais, o que pode levar a contradições ou a incoerências no decorrer do percurso (DUVAL, 2012).

Já a *apreensão sequencial* é solicitada de modo explícito durante as atividades de construção ou descrição de passos de construção e tem por objetivo a reprodução de figuras (DUVAL, 1995, 2012). Duval destacou, em 1988, que os processos de construção e descrição eram mais enfatizados nas orientações didáticas do que as outras três apreensões (DUVAL, 2012)<sup>25</sup>.

Assim, consiste na ordem de construção de uma figura geométrica e, portanto, está sujeita tanto às restrições técnicas dos instrumentos utilizados quanto às propriedades matemáticas empregadas. Dessa forma, podem variar, de acordo com a ferramenta de construção utilizada, como compasso e régua ou *software* (DUVAL, 1994, 1995). A Figura 3 representa uma ordem de construção de um retângulo, como um exemplo da apreensão sequencial:

**Figura 3 - Passos de construção de um retângulo**

Passo 1: trace uma reta  $s$  passando por dois pontos quaisquer;  
 Passo 2: trace duas retas paralelas entre si e perpendiculares à reta  $s$ ;  
 Passo 3: trace uma reta paralela à reta  $s$ ;  
 Passo 4: construa um polígono convexo com vértices nos pontos de intersecção entre as retas construídas.

**Fonte:** Elaborada pela autora

A apreensão sequencial possui a função de modelo, na medida em que permite acessar os objetos matemáticos, a partir de ações em representações desses objetos (DUVAL, 1994), isto é, as ações sobre as representações relacionam-se com operações no próprio objeto matemático (DUVAL, 1995).

Embora a figura seja independente do enunciado, as instruções são importantes, daí a necessidade de serem evitadas ambiguidades na redação. Quaisquer imprecisões ou abertura para outras interpretações podem resultar em construções diferentes da esperada (DUVAL, 2012).

Em uma figura geométrica há *gestalts* ou subconfigurações excedentes, isto

<sup>25</sup> O texto de Duval (2012) utilizado neste trabalho é uma tradução do texto *Approche cognitive des problèmes de géométrie em termes de congruence* (DUVAL, 1988).

é, há outras configurações além das mobilizadas explicitamente em sua construção ou nas hipóteses. Isso permite que as figuras sejam analisadas de modo diferente do que seriam, considerando apenas seu formato e potencialidades iniciais, permitindo investigações e descobertas, a fim de encontrar soluções ou respostas. Nas palavras de Duval (1998, p. 40), esse excedente “cria o poder heurístico das figuras”<sup>26</sup>.

O excesso de configurações e todas as operações que podem ser realizadas em uma figura são a *apreensão operatória*, quando, para além da *percepção* ou do *discurso*, se usam *operações*. Segundo Duval (1994, p. 126), trata-se da “apreensão de uma dada figura nas suas diferentes modificações possíveis de outras figuras”<sup>27</sup>.

A apreensão operatória, assim como a perceptiva, considera as leis da *Gestalt* e os aspectos intrafigurais das figuras, no entanto, em níveis de processamento diferentes, visto que, enquanto uma é imediata, a outra requer análises mais rigorosas. Sendo assim, a apreensão operatória pode ocorrer apenas com a organização perceptiva, isto é, não depende de propriedades matemáticas ou de restrições técnicas de instrumentos, tal como a discursiva ou a sequencial (DUVAL, 1994).

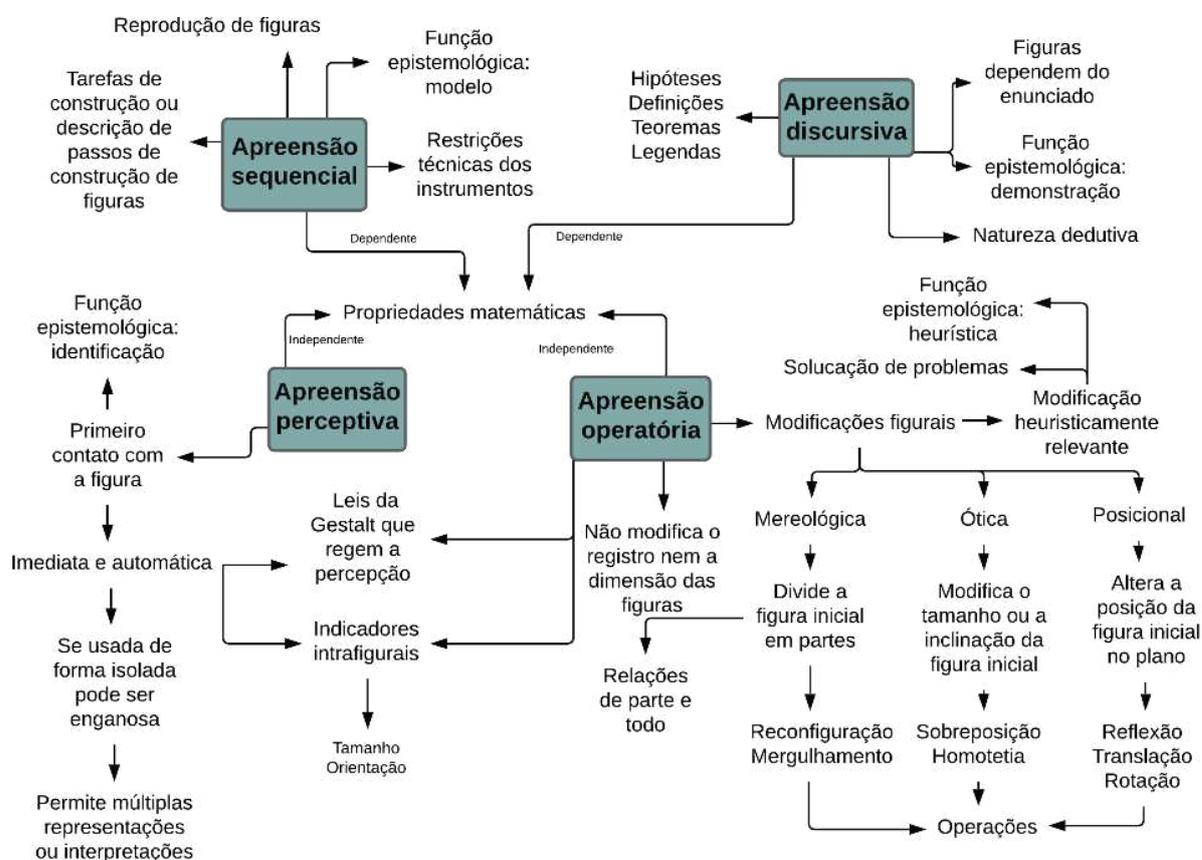
A seguir, apresentamos um esquema das quatro apreensões de uma figura geométrica, de acordo com os estudos de Duval (Figura 4):

---

<sup>26</sup> “creates the heuristic power of figures” (DUVAL, 1998, p. 40).

<sup>27</sup> “appréhension d’une figure donnée em ses différents modifications possibles en d’autres figures” (DUVAL, 1994, p. 126).

**Figura 4 - Apreensões das figuras em geometria**



**Fonte:** Elaborada pela autora, com base em Duval (1994, 1998, 2012)

Essas quatro apreensões, segundo Duval (2012), referem-se a diferentes papéis e formas de interpretar as figuras – autônomos, opostos e independentes –, que devem ser trabalhados, em um primeiro momento, individualmente, a fim de melhor compreender a atividade geométrica e as principais dificuldades dos alunos. Isso deve ocorrer mesmo que, no decorrer dos estudos, as práticas e a proficiência em geometria exijam que sejam mobilizadas simultaneamente, isto é, as apreensões tendem a se relacionar e atuar em conjunto com o passar das experiências (DUVAL, 1994, 1998).

Mesmo que Duval (2012) não considere níveis de desenvolvimento, estabelece relações de subordinação entre as apreensões perceptiva e discursiva, uma vez que *o que* e *o como* dependem de propriedades e enunciados, o que torna a apreensão perceptiva subordinada e restrita, pois “uma figura geométrica não mostra a primeira vista a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito” (DUVAL, 2012, p. 133). As formas são uma parte do discurso, todas as conclusões que se podem ter de uma figura não têm a mesma validade que

definições e teoremas têm.

Com isso, a apreensão perceptiva das figuras pode ser tanto facilitadora quanto inibidora da compreensão em geometria (DUVAL, 2012), o que faz com que a coordenação entre as diferentes apreensões seja necessária para uma apreensão matemática das figuras (DUVAL, 1994, 1995, 1998).

Duval (1998) leva em conta três principais processos no ensino de geometria: construção, visualização e raciocínio. O autor destaca que esses processos atendem a funções epistemológicas<sup>28</sup> específicas, são independentes entre si e devem, inicialmente, ser desenvolvidos separadamente mas, posteriormente, a coordenação e a sinergia entre eles serão condições essenciais para a proficiência em geometria.

Esses diferentes processos, mesmo que independentes, relacionam-se e agem, muitas vezes, de forma conjunta em diferentes situações geométricas, mesmo que haja pouca transferência de um para o outro, ou seja, a prática em um não significa o desenvolvimento de outro (DUVAL, 1998), do mesmo modo que para as apreensões (DUVAL, 1994). Isso contraria o argumento de que os processos de visualização e construção precisam ser priorizados pelos professores, porque, a princípio, são considerados mais simples do que o raciocínio<sup>29</sup>, que leva em conta provas e demonstrações (DUVAL, 1998).

Nos processos de *construção*, de acordo com Duval (2012), existe uma primazia da apreensão perceptiva pelos estudantes durante a resolução de um problema, quando, após construírem a figura que se pede no enunciado, focam a atenção exclusivamente na figura construída, sem retornar às condições iniciais, o que chama de abandono da interpretação discursiva da figura.

Para Pais (1994), embora a representação de conceitos por desenhos, especialmente com instrumentos ou na forma de desenho geométrico, apresente dificuldades aos estudantes, essas construções exercem um importante papel na aprendizagem da geometria, sobretudo para a resolução de problemas.

Com relação às tarefas de construção sob restrições fixas, Parzysz (2006) destaca diferenças entre os paradigmas G1 e G2, os que prevalecem em nível da educação escolar obrigatória. Em G1, os instrumentos utilizados consistem em

---

<sup>28</sup>Entendemos as funções epistemológicas como funções que permitem atingir alguma forma de conhecimento. Por exemplo: uma função epistemológica de *identificação* permite conhecer algo a partir da *identificação* de elementos pertinentes.

<sup>29</sup>As questões relacionadas ao raciocínio são discutidas na subseção “O discurso em geometria”.

régua graduada, compasso, esquadro, transferidor, entre outros, o que chama de percepção instrumentada. Esses instrumentos ajudam a controlar, verificar e validar os desenhos construídos por meio da observação visual por coincidências ou sobreposições. Já em G2, os instrumentos utilizados constroem apenas representações dos objetos geométricos, que são teóricos, como segmentos de reta, ou pontos, que existem devido a definições, axiomas ou propriedades, por exemplo. Para a validação ou verificação, é produzido um discurso dedutivo, com base nas informações do enunciado, isto é, se utilizam técnicas de G3. Contudo, em G2 é possível articular com desenhos (representação de figuras) para identificar informações pertinentes que poderão ser úteis em processos axiomáticos como as demonstrações.

Duval (1999) diferencia o processo de *visualização* da visão. De um ponto de vista psicológico, a visão se refere à percepção visual. Além disso, possui uma função sinóptica que, no entanto, é desempenhada de modo incompleto e insuficiente pela percepção visual, pois permite o contato com apenas um ponto de vista dos objetos, de modo que, para uma completa percepção, cabem visões sucessivas de diferentes perspectivas (DUVAL, 1999). Para ver um determinado objeto por completo, é preciso, por exemplo, uma visão de sua representação nas vistas ou perspectivas frontal, lateral e superior.

Em decorrência disso, “ao contrário da visão, que fornece acesso direto ao objeto, a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica”<sup>30</sup>, mostra organizações de relações entre as diferentes unidades representativas, permitindo uma apreensão do todo (DUVAL, 1999, p. 7). Portanto, como a compreensão requer uma análise da estrutura como um todo de determinado objeto, “não há compreensão sem visualização. E é por isso que a visualização não deve ser reduzida à visão, ou seja: a visualização torna visível tudo o que não é acessível à visão”<sup>31</sup> (DUVAL, 1999, p. 7).

Diante disso, Duval (1999) conclui que a visão necessita de movimentos para explorar os objetos em perspectiva, ao contrário da visualização que permite, após longos treinamentos, obter apreensões completas das organizações de relações que

---

<sup>30</sup> “Unlike vision, which provides a direct access to the object, visualization is based on the production of a semiotic representation” (DUVAL, 1999, p. 7).

<sup>31</sup> “there is no understanding without visualization. And that is why visualization should not be reduced to vision, that is to say: visualization makes visible all that is not accessible to vision” (DUVAL, 1999, p. 7).

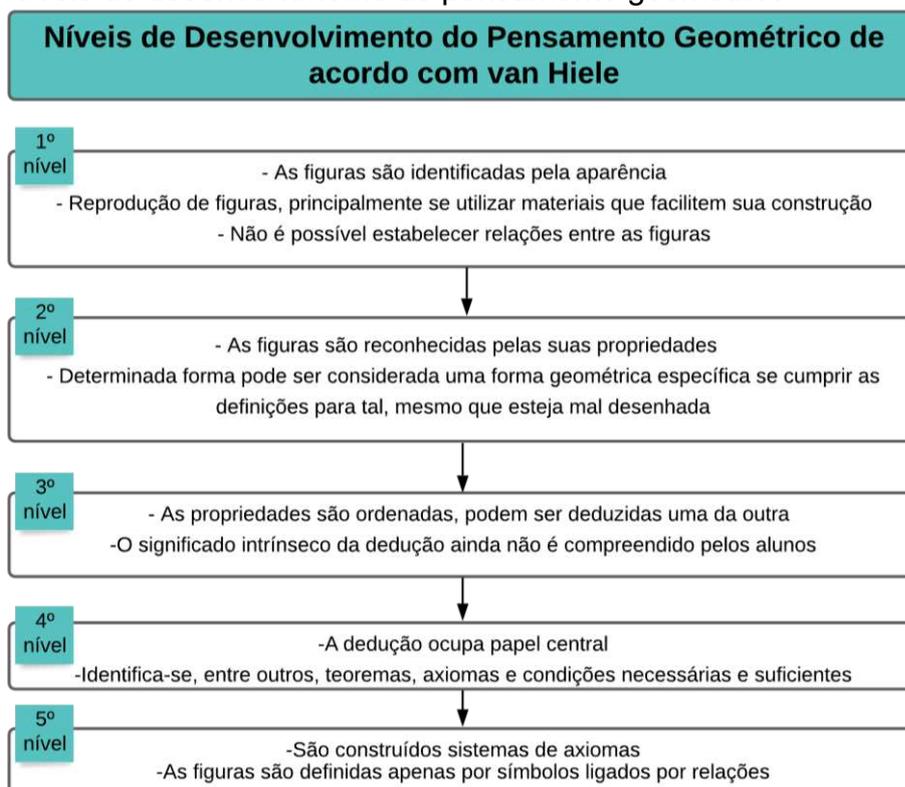
constituem os objetos. Assim, para visualizar uma figura geométrica é preciso que ela tenha sido construída com instrumentos e respeite as propriedades matemáticas relevantes, só assim é que as relações poderão ser estabelecidas e identificadas.

A visualização abrange, em geometria, as apreensões perceptiva, discursiva e operatória. Como independe de conhecimentos matemáticos, ela desempenha o papel heurístico na geometria, podendo-se chegar a conclusões apenas com a apreensão operatória, visto que esta apreensão também é um dos processos cognitivos do raciocínio em geometria (DUVAL, 1998).

Argumentação semelhante ao conceito de visualização de Duval (1999) é encontrada em Parzysz (2006). Para este autor, quando representamos um objeto tridimensional, por exemplo, geralmente há um ângulo mais usual que facilitará a sua identificação. No entanto, esta representação, por mais precisa que seja, não representará todas as propriedades do objeto e aquilo que sabemos que existe. É necessária uma “negociação” por parte do sujeito entre esses diferentes aspectos.

Outro autor que traz contribuições para o estudo da geometria e seu ensino é Pierre Van Hiele, que considera diferentes níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino de geometria (Figura 5).

**Figura 5 - Níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico**



**Fonte:** Elaborada pela autora, a partir de van Hiele (1984b, 1969, 1999)

Conforme van de Walle (2009, p. 440), a respeito dos níveis de van Hiele, “Uma diferença significativa de um nível ao seguinte são os objetos de pensamento – sobre os quais somos capazes de pensar [operar] geometricamente”. No primeiro nível, as figuras são os objetos de pensamento e são identificadas pela aparência. Ao nomear determinada figura, uma criança o faz com base no que vê e reconhece, sendo capaz de reproduzir diferentes figuras, principalmente se utilizar materiais que facilitem sua construção, como o geoplano. Porém, nesse nível não é possível estabelecer relações entre as figuras, de modo que “[...] o losango não é um paralelogramo, o losango parece-lhe uma coisa completamente diferente”<sup>32</sup> (VAN HIELE, 1984b, p. 245).

No segundo nível, as figuras são reconhecidas não mais pela aparência, mas por suas propriedades, o objeto de pensamento. Desse modo, determinada forma pode ser considerada uma forma geométrica específica, se cumprir as definições para tal, mesmo que esteja mal desenhada (VAN HIELE, 1984b). Assim, uma forma pode receber certa caracterização nesse nível pelas *propriedades enunciadas*, mas não no nível anterior, se a *aparência* não permitir que seja *identificada* como tal. O autor frisa que, no decorrer do aprendizado, “[...] é essencial que o estudante compreenda que não é a forma que caracteriza um losango, mas o conjunto de propriedades que se considera importantes na geometria”<sup>33</sup> (VAN HIELE, 1969, p. 344).

No terceiro nível, as propriedades, logicamente ordenadas, serão o objeto de pensamento. No entanto, o significado intrínseco da dedução ainda não é compreendido pelos estudantes. As propriedades das figuras não são relacionadas, os estudantes não estão cientes de que podem estabelecer tais relações, acreditam que se tratam de propriedades individuais para cada conceito (VAN HIELE, 1984b) e não compreendem o papel dos axiomas, teoremas e definições (VAN HIELE, 1999).

No próximo nível, identificam-se, entre outros, teoremas, axiomas e condições necessárias e suficientes, de modo que o objeto de pensamento passa a ser as relações entre as diferentes propriedades de uma forma geométrica (VAN HIELE, 1984b). No entanto, os sistemas axiomáticos, como objetos de pensamento,

---

<sup>32</sup> “*the rhombus is not a parallelogram, the rhombus seems to him a completely different thing*” (VAN HIELE, 1984b, p. 245).

<sup>33</sup> “*est essentiel que l’élève ait compris que ce n’est pas la forme qui caractérise un losange, mais l’ensemble des propriétés qu’on juge importantes en géométrie*” (VAN HIELE, 1969, p. 344).

pertencem ao quinto nível, no qual “as figuras são definidas apenas por símbolos ligados por relações”<sup>34</sup> (VAN HIELE, 1984b, pp. 248-249).

Van Hiele (1984b, p. 246) acrescenta que “Em cada nível aparece de maneira extrínseca o que era intrínseco ao nível anterior”<sup>35</sup>, ou seja, no próximo nível o objeto de pensamento passa a ser o resultado do nível anterior. Em contrapartida, em um determinado nível pode-se utilizar recursos do nível posterior, mas sem consciência ou intencionalidade.

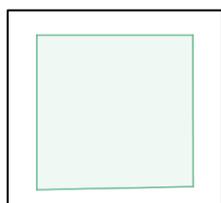
Na próxima subseção apresentaremos outro aspecto discutido pelos autores: *Como e com que* mecanismos a geometria pode ser útil para resolver problemas.

## 2.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM GEOMETRIA

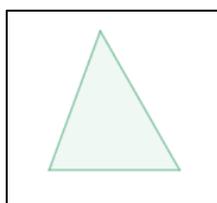
Nessa subseção, ressaltamos que não indicamos perspectivas teóricas para a Resolução de Problemas, mas sim, a noção de análise, investigação e busca de respostas a partir de conceitos geométricos.

Para Duval (2012), a apreensão operatória é a mais presente em situações de uso de figuras para resolver problemas pois, nesses casos, pode ser necessário *operar* com a figura inicial. Com uma apreensão perceptiva, podemos identificar, em um primeiro contato, a Figura 6 como um quadrado e as Figuras 7 e 8 como triângulos, mesmo que a Figura 7 seja mais facilmente identificada como tal pela direção e orientação usuais que assume, principalmente nos livros didáticos, em comparação com a Figura 8:

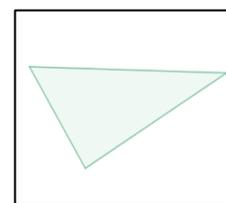
**Figura 6 -** Quadrilátero



**Figura 7 -** Triângulo 1



**Figura 8 -** Triângulo 2



**Fonte:** Elaboradas pela autora

No entanto, não temos como afirmar que a Figura 6 ilustra um quadrado, mas

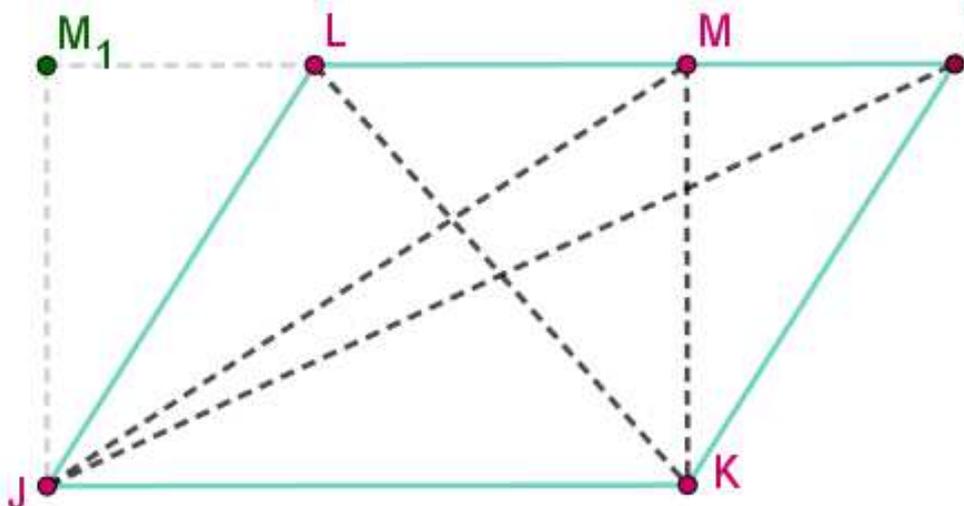
<sup>34</sup> “figures are defined only by symbols bound by relations” (VAN HIELE, 1984b, p. 248-249).

<sup>35</sup> “At each level there appears in an extrinsic way that which was intrinsic at the preceding level” (VAN HIELE, 1984b, p. 246).

sim, um quadrilátero qualquer. Por outro lado, a Figura 6 poderia ser considerada um quadrado, se um problema de geometria a enunciasse como tal, desde que a figura fosse apenas uma representação e não uma informação primordial para a solução. Na apreensão discursiva as figuras são dependentes dos enunciados, ao passo que a interpretação de uma dada imagem depende das hipóteses que se tem a respeito dela, ao mudar as hipóteses iniciais uma mesma imagem pode representar objetos geométricos diferentes (DUVAL, 2012).

A Figura 9 ilustra o paralelogramo JKIL. Para um problema que peça a transformação dessa configuração inicial JKIL em um retângulo, conservando a mesma área, há muitas subconfigurações disponíveis que podem auxiliar e ser percebidas nessa figura inicial pela percepção e pela movimentação da apreensão operatória, como as representações de triângulos JLK, LMK e KMI e o quadrilátero JKML. Mas as subconfigurações heurísticamente relevantes para a construção do retângulo, aquelas que solucionarão o problema, podem ser as subconfigurações JKML e KIM, pois podemos “retirar” o triângulo formado pelos pontos KIM do paralelogramo inicial com modificações na figura e recolocá-lo, adjacente ao lado JL, construindo, assim, o retângulo  $M_1JKM$ .

**Figura 9** - Subconfigurações para a construção de um retângulo



**Fonte:** Elaborada pela autora.

Assim, é a apreensão operatória que potencializa e permite a heurística necessária às figuras, ou seja, o poder de modificá-las em busca da modificação heurísticamente relevante, a que solucionará o problema (DUVAL, 1994). No entanto, a figura permite uma ajuda heurística apenas “quando uma das suas

possíveis modificações mostra a 'ideia' de uma solução"<sup>36</sup> (DUVAL, 1994, p. 126).

Para Duval (1998), de modo semelhante, em alguns problemas de geometria, podemos perceber certas características nas figuras que nos remetem a teoremas ou definições que podem ser úteis para a solução. Nesse caso, estará presente a *apreensão discursiva* apoiada em proposições e/ou teoremas, por exemplo, auxiliada pela apreensão *perceptiva* que promove, por meio da figura, uma ajuda intuitiva para a aplicação de tais argumentos.

Sendo assim, mesmo que em um primeiro momento as apreensões precisem ser abordadas separadamente, é importante considerá-las em conjunto durante a resolução de problemas, sobretudo porque "o uso de figuras em geometria leva à fusão dessas diferentes apreensões, de modo que são tratadas como se fossem uma só, enquanto a resolução de problemas muitas vezes requer suas interações"<sup>37</sup> (DUVAL, 1995, p. 143).

Parzysz (2006) também destaca que, embora existam relações de ordem entre os diferentes paradigmas geométricos, na resolução de problemas há constantes idas e vindas por esses diferentes modos de perceber a geometria.

Pais (1996) aponta diferentes possibilidades para se chegar a um mesmo resultado. Em uma situação de geometria, pode haver um resultado aceito ou enunciado de imediato, caracterizando uma forma de *intuição*. Por outro lado, também pode ser concluído pela *experimentação* com objetos ou desenhos. Uma demonstração poderia ser outra possibilidade de atingir o mesmo resultado, o que caracterizaria o aspecto *teórico* do conhecimento geométrico (PAIS, 1996).

Para muitos estudantes, é complexo identificar, a partir de uma figura inicial, qual teorema utilizar ou qual configuração leva a uma solução, dentre tantas possíveis e, por vezes, mais visíveis ou predominantes do que as que devem ser utilizadas. Diante disso, uma das tarefas cognitivas é saber identificar, dentre tantas configurações, as que serão úteis para resolver determinado problema em geometria (DUVAL, 1998). Para isso, muitas vezes, cabe modificar e reorganizar a figura inicial e, para cada tipo de modificação, há operações próprias e fatores que interferem na visibilidade dessas possibilidades, facilitando ou dificultando sua identificação. As

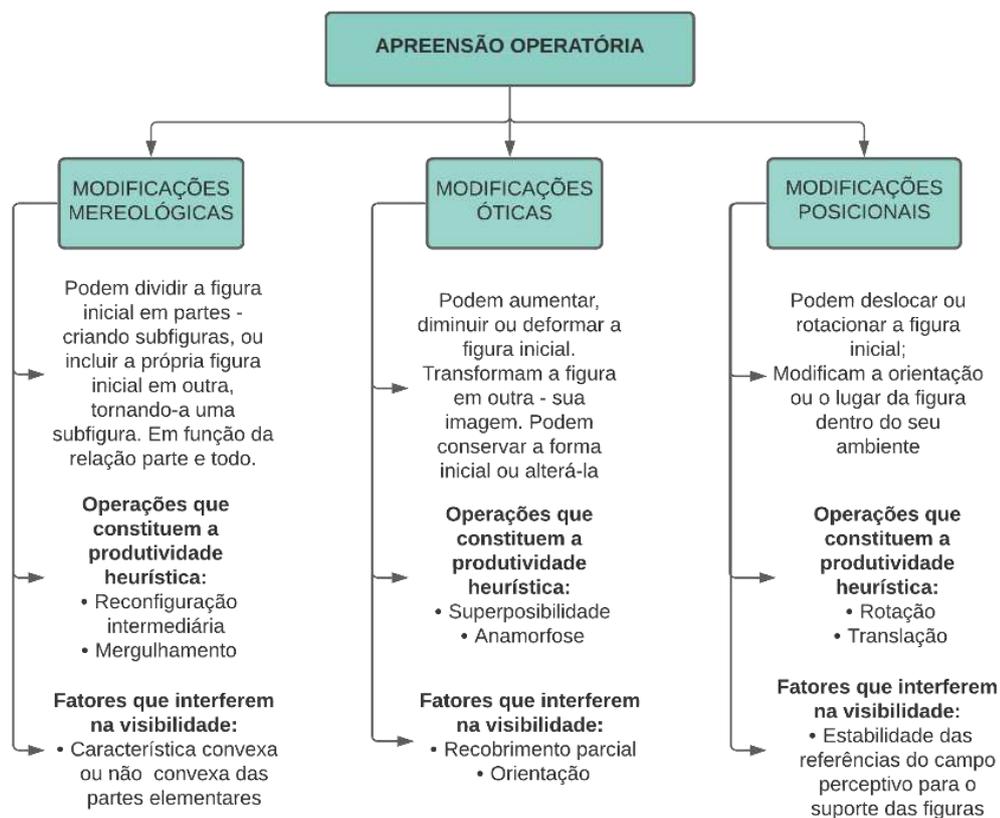
---

<sup>36</sup> "quand l'une de ses modifications possibles montre l' 'idée' d'une solution" (DUVAL, 1994, p. 126).

<sup>37</sup> "the use of figures in geometry leads to the fusion of these different apprehensions, so they are treated as if they were only one, whereas the resolution of problems very often requires their interactions" (DUVAL, 1995, p. 143).

modificações figurais da apreensão operatória podem ser de três tipos: mereológica, ótica e posicional (DUVAL, 1994), como mostra a Figura 10.

**Figura 10 - Apreensão operatória**

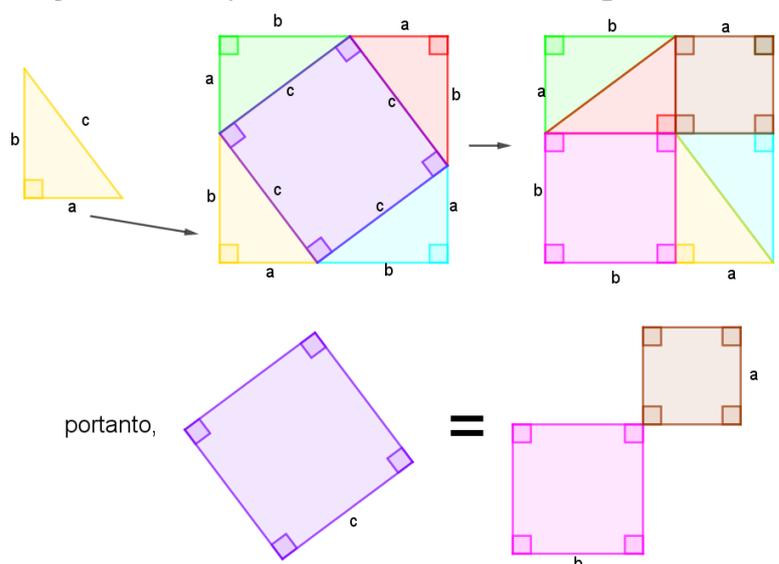


**Fonte:** Elaborada pela autora, a partir de Duval (1994, 2012)

A Figura 11 ilustra uma prova do Teorema de Pitágoras, utilizando figuras geométricas e a modificação mereológica<sup>38</sup>.

<sup>38</sup> O adjetivo “mereológica” vem do substantivo “mereologia” que faz referência às relações entre parte e todo (FERREIRA, 2014).

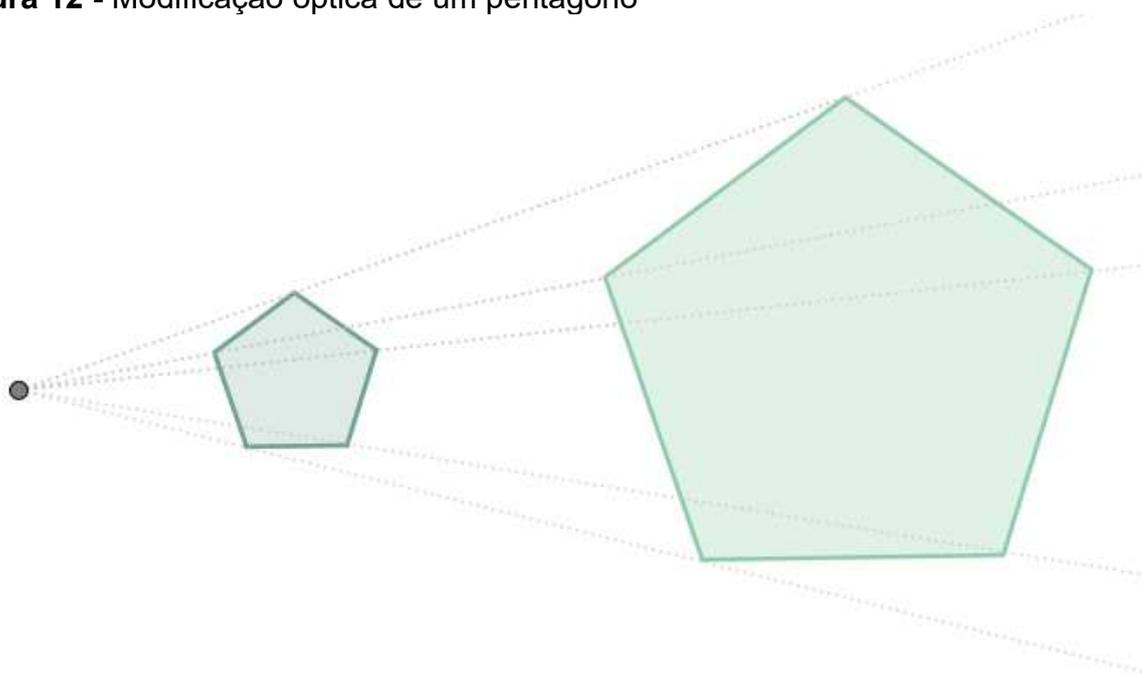
**Figura 11** - Ilustração de uma prova do Teorema de Pitágoras



**Fonte:** Adaptada de Duval (1998, 2005)

O triângulo retângulo de lados “a”, “b” e “c” na cor amarela é inserido em uma configuração maior, pela modificação figural mereológica, na operação de mergulhamento, constituindo um quadrado de lado “a+b”. Com a representação de outros três triângulos congruentes ao triângulo amarelo inicial, forma-se um outro quadrado de lado “c” no interior. Na sequência, o quadrado de lado “a+b”, constituído por quatro triângulos congruentes, é reorganizado na operação de reconfiguração, de forma a construir outro quadrado, mas ainda de lado “a+b” e com outros dois quadrados em seu interior, um de lado “a” e outro de lado “b”. Desse modo, os dois quadrados de lado “a+b” possuem a mesma área, pois têm a medida dos lados iguais. Portanto, ao “retirar” de cada um as mesmas partes constituintes, isto é, os quatro triângulos retângulos, o que restará (um quadrado de lado “c” e dois quadrados, um de lado “a” e outro de lado “b”) também terá área de medida equivalente. Assim, concluímos que o quadrado de lado “c” possui área equivalente à figura constituída pelos quadrados de lado “b” e “c”, isto é,  $a^2+b^2=c^2$ .

Em problemas de perspectiva ou transformações homotéticas, recorre-se à modificação óptica (Figura 12), que utiliza indicadores intrafigurais das figuras, como profundidade, ponto de fuga e inclinação (DUVAL, 1994):

**Figura 12 - Modificação óptica de um pentágono**

**Fonte:** Elaborada pela autora

A modificação posicional (Figura 13), por sua vez, consiste em deslocamentos em relação a pontos de orientação, como os eixos do plano cartesiano, por exemplo, que podem ser utilizados como marcas de referência (DUVAL, 1994):

**Figura 13 - Modificação posicional de um pentágono**

**Fonte:** Elaborada pela autora

Duval (1994) também destaca a orientação das figuras entre os fatores facilitadores ou inibidores, isto é, aspectos visuais que tanto podem auxiliar a

perceber o que precisa ser feito quanto dificultar. De acordo com Pais (1996), a constante preferência dos estudantes por certas formas “usuais”, ao representarem determinado conceito geométrico, chama-se *configurações geométricas*. Trata-se de características geralmente presentes quando se representa uma forma geométrica e que podem auxiliar na compreensão de desenhos por possibilitarem representações mais legíveis e sem ambiguidades (PAIS, 1994).

Na subseção seguinte, destacamos alguns aspectos do discurso em geometria elencados por Bernard Parzysz, Luis Carlos Pais, Pierre van Hiele e Raymond Duval.

### 2.3 O DISCURSO EM GEOMETRIA

Como apresentado na subseção 2.1, Duval (1998) considera três principais processos para o ensino de geometria, construção, visualização e raciocínio, de modo que elencamos aspectos dos dois primeiros. O terceiro processo, o *raciocínio*, segundo Duval (1998), diz respeito aos processos discursivos utilizados em provas e explicações. De modo geral, “qualquer processo que nos permita extrair novas informações a partir de informações fornecidas é considerado ‘raciocínio’”<sup>39</sup> (DUVAL, 1998, p. 44, grifo do autor), como indução, abdução, argumentação e inferência.

Duval (2012) destaca que o uso de figuras em geometria, especialmente por meio das construções, retornou após o período da Matemática Moderna que preferenciava a linguagem formal ao invés de “ver para compreender”. Para fins didáticos, no entanto, ainda é necessário um vocabulário específico para descrever, raciocinar e demonstrar em geometria (DUVAL, 2012).

Outro ponto destacado por Duval (1998) se refere à diferença entre os discursos natural e teórico, que se comportam de forma diferente com relação aos processos de visualização e construção. Esses discursos constituem os raciocínios dedutivo e argumentativo. Duval (1991) esclarece diferenças entre essas duas formas de raciocínio em termos de estrutura e de funcionamento.

Segundo o autor, a argumentação surge de forma espontânea em situações de convencimento ou discussão, nas quais os argumentos se somam uns aos outros em busca da conclusão, utilizando conectores ou expressões linguísticas, o que faz

---

<sup>39</sup> “any process which enables us to draw new information from given informations is considered as ‘reasoning’.” (DUVAL, 1998, p. 44)

com que o conteúdo semântico das proposições seja primordial (DUVAL, 1991).

Já a dedução é considerada um pré-requisito para compreender a demonstração em geometria, visto que pode estar associada a outras formas de raciocínio, como o raciocínio por absurdo. Na dedução, as proposições não são somadas umas às outras em sequências de argumentos, mas substituídas. Nesse tipo de raciocínio, não é o conteúdo semântico das proposições que mais importa, mas sim, os seus *status* teóricos, isto é, o lugar que assumem em um processo dedutivo, que podem ser de entrada (hipótese ou conclusão de um passo anterior), de regras de inferência (axiomas, teoremas, definições), ou de conclusão (a proposição obtida como resultado de saída) (DUVAL, 1991).

Duval (2012) frisa que a atividade de demonstração pode ser incorporada ao raciocínio, no sentido de que este necessita da produção de argumentos e inferências para compreender discursos e interpretações que permitam visualizar possíveis e necessárias mudanças de registro.

Para Parzysz (2006), a validação das informações varia a depender se a geometria é axiomática ou não. Assim, G0 e G1 referem-se a uma validação do tipo perceptivo-dedutiva, ou seja, por meio da percepção, com instrumentos ou não, além da possibilidade de *feedbacks* do ambiente, pois os objetos geométricos são físicos. Já em G2 e G3, a validação é hipotético-dedutiva, pois se trata de uma geometria axiomática. Com relação à G2, Parzysz (2006) destaca que não se trata de uma geometria fixa, definida com precisão, pois os conceitos e as relações estabelecidas dependerão tanto do currículo em questão quanto de variações locais, isto é, o que o professor decidir enfatizar em determinados momentos ou pressupostos já acordados entre os estudantes e considerados como válidos, por exemplo.

Para van Hiele (1984b), os símbolos linguísticos variam a depender do nível de pensamento geométrico, uma vez que cada nível possui seus próprios símbolos e relações, de modo que o que é considerado em um determinado nível pode não ser em outro. Nos dois primeiros níveis, por exemplo, um quadrado não é reconhecido como um retângulo, já no próximo nível, sim. Além disso, os símbolos linguísticos “estabelecem uma ligação entre os vários níveis e assumem a continuidade do pensamento neste domínio descontínuo”<sup>40</sup> (VAN HIELE, 1984b, p. 246). Com essa característica, destaca-se o caráter contínuo do pensamento para van Hiele, apesar

---

<sup>40</sup> “*establish a liaison between the various levels and assume continuity of thought in this discontinuous domain*” (VAN HIELE, 1984b, p. 246).

de uma classificação em níveis discretos.

Pais (1996) aponta que a intuição é subjetiva e varia em cada sujeito. Refere-se a um conhecimento imediato que dispensa a dedução racional desencadeada por uma sequência de argumentos lógicos. Logo, o raciocínio matemático, em forma de demonstração, não pode ser constituído com argumentos intuitivos. Por outro lado, quanto melhores e mais operacionais forem as imagens mentais, mais eficiente será o desenvolvimento de um raciocínio dinâmico e eficaz para a resolução de problemas ou novas aprendizagens, pois, ao mesmo tempo em que as imagens mentais são mais complexas, se comparado com as outras formas de representação, são mais rápidas e eficientes. No entanto, como os objetos geométricos são teóricos e abstratos, a formação de imagens mentais depende quase que exclusivamente de experiências com objetos e desenhos (PAIS, 1996).

Assim como o terceiro nível e, especialmente, os dois últimos níveis de van Hiele (1984b), bem como os paradigmas axiomáticos de Parzysz (2006) iniciam o contato com as abordagens teóricas e dedutivas, de acordo com Duval (1999), é necessário que, ao utilizar figuras geométricas para resolver problemas, a apreensão operacional esteja aliada com os princípios de funcionamento do raciocínio dedutivo.

Nesse sentido, Duval (2005) destaca três possibilidades de relacionar visualização e raciocínio em geometria:

- *Quando o raciocínio acompanha a visualização utilizada como justificativa:* nas situações em que se prova utilizando figuras (sequência de pelo menos três figuras) e o discurso verbal atua como explicação. Assim, a representação visual é autossuficiente e a verbal é auxiliar. Tal situação pode ser encontrada na Figura 11 que ilustra uma possível prova do Teorema de Pitágoras.
- *Quando o raciocínio compensa ou corrige determinada falha ou limite da visualização:* esta situação ocorre, por exemplo, quando não é possível, ou se torna difícil, representar os objetos com suas propriedades, como no caso de objetos geométricos de três dimensões. Nesse contexto, o discurso constitui a representação autossuficiente e a visual a auxiliar com funções de apoio descritiva ou ilustrativa.
- *Quando o raciocínio é independente de qualquer visualização:* utiliza teoremas ou definições e a demonstração é uma fonte de prova.

Os autores Bernard Parzysz, Luis Carlos Pais, Pierre van Hiele e Raymond Duval destacam, inclusive, o papel que a instrução e o professor desempenham no ensino de geometria, o que nos leva a apresentar, na sequência, considerações relacionadas ao papel do professor.

#### 2.4 O PAPEL DO PROFESSOR NO ENSINO DE GEOMETRIA

Van Hiele (2002) destaca que não é possível partir do primeiro para o segundo nível por meio do raciocínio, é preciso material adequado para auxiliar o próprio estudante a encontrar o caminho para a progressão de níveis. Para Duval (2012), quando o objetivo do professor é iniciar os estudantes em tarefas de geometria, deve se atentar para os fatores que tanto facilitam como ocultam as possibilidades e as operações pertinentes para se trabalhar com as figuras.

Como consequência da diferença de linguagem entre estudante e professor, pelo pertencimento a níveis diferentes, o estudante, muitas vezes, não compreende o raciocínio do professor, ao passo que o professor se sente despreparado ao não conseguir argumentos eficazes para ser compreendido pelo estudante (VAN HIELE, 1969). Daí a necessidade de o professor estar ciente do nível de seus estudantes para que possa auxiliá-los em suas progressões (VAN HIELE, 1984a).

De modo semelhante, Parzysz (2006) também declara a importância de os professores reconhecerem, a partir de falas e produções suas e dos estudantes, o paradigma que está sendo acionado, para auxiliá-los e para não proporcionar tarefas e materiais ambíguos ou enganadores. Ressalta, assim, o quanto a formação de professores pode ser útil para essa tomada de consciência.

Van Hiele (1984b) defende que, para preparar seus estudantes, o professor precisa compreender o processo de passagem de um nível a outro, uma vez que se trata de um processo contínuo. Esta passagem ocorre em cinco fases hierárquicas (Quadro 3), pelas quais os estudantes passam, que devem ser compreendidas pelos professores, pois serão nesses momentos que as instruções poderão auxiliar ou dificultar a passagem de um nível a outro.

**Quadro 3 - Fases de van Hiele**

<b>Fase</b>	<b>Características – o estudante:</b>
<b>Indagação</b> ( <i>Inquiry</i> )	Conhece o contexto pelos materiais apresentados.
<b>Orientação dirigida</b> ( <i>Directed Orientation</i> )	Inicia a exploração desse novo contexto com materiais disponíveis e orientações direcionadas e graduais.
<b>Explicitação</b> ( <i>Explicitation</i> )	Adquire vocabulário próprio das estruturas, novas formas de comunicação e forma, parcialmente, o sistema de relações.
<b>Orientação livre</b> ( <i>Free Orientation</i> )	Obtém respostas não dirigidas, apesar de grande parte do contexto apresentado na primeira fase já ser conhecido, de modo que as tarefas devem proporcionar diferentes formas de resolução.
<b>Integração</b> ( <i>Integration</i> )	Tem uma visão global do vivenciado e utilizado. Não devem ser abordadas novas noções, apenas retomar o que foi explorado.

**Fonte:** Elaborado pela autora, a partir de van Hiele (1984b)

Ao final da quinta fase é atingido um novo nível de pensamento. Assim, ao propor instruções adequadas durante as fases de transferência de um nível de pensamento a outro, o professor prepara os estudantes para o desenvolvimento de “um sistema dedutivo por si mesmos e para descobrir falhas em um argumento dedutivo. Agindo assim, o professor não impõe domínios onde o pensamento deve ser praticado, mas ajuda os estudantes a especificá-los por conta própria”<sup>41</sup> (VAN HIELE, 1984b, p. 251). Cumpre, no entanto, considerar as limitações dos recursos utilizados pelo professor, ou melhor, em que medida as representações podem ser associadas aos objetos geométricos, visto que diferentes representações não alteram tampouco substituem o conceito em si (DUVAL, 2009; PAIS, 1996; PARZYSZ, 2002).

Em sendo assim, na próxima seção destacaremos aspectos inerentes à formação de professores, especificamente a formação inicial, momento no qual os professores construirão a base para a sua futura profissão, devendo receber orientações necessárias para se formarem sujeitos autônomos e comprometidos com a prática (CRESCENTI, 2008; PASSOS; NACARATO, 2014; ROLDÃO, 2017).

<sup>41</sup> “a deductive system by themselves and to uncover faults in a deductive argument. Acting this way, the teacher does not impose domains where thought should be practiced, but helps the students to specify them on their own” (VAN HIELE, 1984b, p. 251).

### 3 A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES QUE ENSINAM GEOMETRIA

[...] é fundamental que, na prática da formação docente, o aprendiz de educador assuma que o indispensável pensar certo não é presente dos deuses nem se acha nos guias de professores que iluminados intelectuais escrevem desde o centro do poder, mas, pelo contrário, o pensar certo que supera o ingênuo tem que ser produzido pelo próprio aprendiz em comunhão com o professor formador.

(FREIRE, 2020, p. 39)

Para o ensino, não apenas de geometria, mas de um modo geral, o professor tem papel fundamental e central. Nas palavras de Gatti (2016, p. 164) “[...] o professor é figura imprescindível, [...] não é descartável, nem substituível”, de modo que outros fatores, como infraestrutura e demais recursos, mesmo que necessários, não possuem a mesma importância que o professor (GATTI *et al.*, 2019).

O compromisso com a qualidade do ensino envolve não só iniciativas pessoais dos professores, mas também todo o sistema inerente à sua formação (inicial e continuada), de modo que “[...] a formação de quem vai formar torna-se central nos processos educativos formais [...]” (GATTI, 2016, p. 163). Tanto a docência quanto a formação para exercê-la são complexas, embora ainda perdure “uma imagem simplista sobre essa formação” entre os envolvidos nesse processo (GATTI *et al.*, 2019, p. 41).

A formação inicial do professor é cercada de desafios, como carreira docente desvalorizada e falta de: políticas públicas (especialmente em áreas específicas como a Matemática); considerações a respeito da qualidade da formação; assistência; permanência na carreira docente; constituição de currículos articulados (sem a segregação entre conhecimentos específicos e pedagógicos); práticas profissionais colaborativas; professores formadores com formação adequada para formar futuros professores (GATTI, 2014). Esses fatores colaboram para desqualificar a carreira docente, reforçada por uma formação superficial e para uma concepção de que ser professor é simples ou trivial, de que é suficiente saber os conteúdos (GATTI *et al.*, 2019).

Segundo Guérios (2021), mesmo que a formação de professores deva envolver conhecimentos tanto específicos quanto disciplinares, ainda permeiam questões acerca de concepções de conhecimento. Esse fato é evidenciado também por Gatti (2014, p.37), ao afirmar que as existentes dificuldades epistemológicas em

decidir o que é necessário ao professor, entre saberes disciplinares, pedagógicos e culturais, colabora para supervalorizar conhecimentos apenas disciplinares, estes que ainda são considerados menores “ou mais aligeirado” quando se trata da formação de professores para atuar na Educação Básica, os quais podem ser apenas diferentes do exigido a um bacharel, por exemplo.

Na literatura, é colocado que cursos de formação inicial de professores devem ter identidade própria, práticas articuladas aos conteúdos específicos durante todo o processo de formação do professor, isto é, desde o início do curso (GATTI, 2014). É importante que haja perspectivas integradoras entre conhecimentos acadêmicos, didático-pedagógicos, éticos, entre outros, para além dos que se relacionam diretamente à profissão (GATTI *et al.*, 2019). A realidade, no entanto, é outra, na medida em que há um distanciamento entre o que consta na literatura e no idealismo das proposições e o que ocorre na prática dos cursos de licenciatura (GATTI, 2014, 2016). Para além de outros percalços como os já discutidos nesse texto, de acordo com Gatti *et al.* (2019, p. 312), nos cursos de licenciatura “A cultura dominante é fundamentalmente bacharelesca”.

Roldão (2017) pontua que tem sido constante, nas últimas décadas, o debate sobre a formação de professores, além do crescente interesse por questões nessa área em vista de suas relações com a aprendizagem e por ser um vasto campo de estudos e investigações (GATTI, 2014; SANTOS; OLIVEIRA, 2017). No entanto, questões como as formações nas disciplinas, os modos de agir e pensar e o professor formador ainda são pouco investigadas (GATTI *et al.*, 2019).

No que diz respeito, especificamente, à Matemática, o Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática (Gepefopem<sup>42</sup>), grupo do qual fazemos parte, dedica-se a questionar e investigar aspectos inerentes à formação de PEM. Quando falamos em formação de PEM,

[...] não nos referimos a qualquer proposta de formação de PEM, mas sim àquela que valoriza o (futuro) professor como protagonista do seu processo de formação, como produtor de conhecimento; que articula a prática letiva do PEM com a sua profissão, com as políticas educacionais e as políticas públicas mais amplas. Cursos de formação de professores constituídos de conteúdos predeterminados pelo formador, com técnicas pedagógicas homogêneas, assumidas como “receitas” ou “fórmulas mágicas”, que tencionam “colonizar” o professor e a escola, nos parecem ineficazes, além de perversos. (CYRINO, 2017, p. 709, grifo do autor)

---

<sup>42</sup> Sediado na Universidade Estadual de Londrina (UEL), o Gepefopem é coordenado pela Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.

Na literatura, pesquisas, como a de Guérios e Gonçalves (2019) e a de Barbosa (2021), relatam a fragilidade de conhecimentos matemáticos de estudantes de cursos de Pedagogia. Destacam a importância de considerar, nessa formação inicial, para além de questões institucionais, os aspectos pedagógicos, as práticas dos professores formadores, que são, muitas vezes, consideradas como exemplo pelos futuros professores, diálogos e trocas entre colegas e, não menos importante, os conteúdos matemáticos necessários aos estudantes de Pedagogia para a futura prática docente (GUÉRIOS; GONÇALVES, 2019).

De acordo com Barbosa (2021), contudo, menos de 5% das disciplinas ofertadas, nos cursos de Pedagogia investigados, têm como foco a Matemática. Essa baixa carga horária obriga os professores formadores a aligeirar o ensino, de modo que as dificuldades dos futuros professores com os conteúdos matemáticos, oriundas da Educação Básica, muitas vezes não sejam sanadas, o que acaba gerando inseguranças (BARBOSA, 2021).

Brunheira e Ponte (2019) apontam, a partir de um estudo com futuras professoras e educadoras, dificuldades com relação ao conteúdo, às justificativas, às argumentações e ao estabelecimento de generalizações em geometria. A pesquisa de Ulusoy (2019), por sua vez, destaca a fragilidade da formação em geometria de futuros professores dos primeiros anos, como, por exemplo, nas concepções de sólidos geométricos.

Na formação inicial de professores de Matemática, na visão de professores formadores, a geometria deve ser trabalhada de forma axiomática, podendo ou não usufruir de figuras como um apoio às demonstrações e de *softwares* de geometria dinâmica para auxiliar as experimentações (RAMASSOTTI, 2015).

Ferner, Soares e Mariani (2020), analisando Projetos Políticos-Pedagógicos de cursos de licenciatura em Matemática, pontuam a ênfase no uso de material manipulável, *softwares* e na abordagem axiomática da geometria em tais documentos. Ressaltam que a Geometria Analítica foi o campo específico da geometria mais recorrente nos documentos investigados, ao passo que a Geometria Descritiva foi a menos contemplada formalmente. Outro ponto ressaltado refere-se à necessidade de os futuros professores estudarem também os conteúdos da Educação Básica, para além de um enfoque de revisão, mas também didático-metodológico. Assim, teorias do desenvolvimento do raciocínio geométrico também

precisam ser estudadas, visto que este não foi um ponto privilegiado nas discussões dos componentes curriculares analisados. Ademais, as geometrias não euclidianas não foram encontradas nos projetos de todos os cursos mapeados.

Aksu, Gedik e Konyalioglu (2021), em uma experiência com tarefas de Topologia na Turquia, destacam que nenhum dos “candidatos a professores” de Matemática utilizou conceitos topológicos para resolver as questões por eles propostas, além de que não associavam a Topologia à Geometria. A partir disso, ressaltam a necessidade de reestruturar currículos de Matemática, a fim de destacar questões como as topológicas.

No contexto brasileiro, Leivas (2018, p. 447) defende a importância de pesquisas que abordem as Geometrias não euclidianas, justificando que ainda são desconhecidas por muitos estudantes “e, até mesmo, professores de Matemática, especialmente da escola básica, por geralmente não constarem no currículo tais assuntos em sua formação inicial e, também na continuada”.

O reduzido número de investigações envolvendo professores para o ensino de geometria (ATASOY, 2019; BARRETO *et al.*, 2021; CARVALHO; FERREIRA, 2015; SANTOS; TELES, 2021) é algo preocupante, visto a importância da formação docente. Além disso, futuros PEM apresentam dificuldades em geometria tanto na formação inicial de professores para a Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental (BRUNHEIRA, 2019; HOURIGAN; LEAVY, 2017; KUZNIAK; NECHACHE, 2021; SANTOS; TELES, 2021; SWOBODA; VIGHI, 2016) quanto Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio (CRESCENTI, 2008; PEREIRA DA COSTA; SANTOS, 2020).

Essas dificuldades dos futuros PEM repercutem diretamente no ensino da geometria, pois, mesmo que alguns autores sinalizem o abandono do ensino da geometria (PAVANELLO, 1993), especialmente após o início do Movimento da Matemática Moderna, enquanto para outros ela sempre esteve presente, ainda que incorporada em outras disciplinas ou áreas da Matemática (LEME DA SILVA, 2021), destacamos que a geometria esteve e ainda está, ao menos, em segundo plano na *prática* diária de muitos professores (LORENZATO, 1995; PENTEADO; PEREIRA; BRANDT, 2019).

Portanto, com vista ao crescente número de pesquisas na área de formação de professores (GATTI, 2014; ROLDÃO, 2017; SANTOS; OLIVEIRA, 2017), mas concomitante com o reduzido número de estudos relacionados à formação para

ensinar geometria<sup>43</sup> (ATASOY, 2019; BARRETO *et al.*, 2021; CARVALHO; FERREIRA, 2015; SANTOS; TELES, 2021), nos propusemos a mapear teses e dissertações brasileiras que abordaram a geometria na formação inicial de PEM.

Na próxima seção descreveremos nossos procedimentos e opções metodológicas para o mapeamento, seguidos pela descrição da organização e da disposição das seções que compõem essa dissertação.

---

<sup>43</sup> Apresentado na seção 1.

## 4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

É um erro monumental construir uma teoria antes de ter dados. Insensivelmente, começa-se a deformar os fatos para que se ajustem à teoria, quando são as teorias que devem ajustar-se aos fatos.

Sherlock Holmes  
(DOYLE, 2018, p. 15).

Ao fazer um trabalho de revisão bibliográfica, revisão sistemática ou levantamento, podemos fundamentar nossos métodos e os nomear, de acordo com textos usados como suporte ou justificativa, ou então apenas descrever o que fazemos, sem necessariamente “classificar”. “Independentemente da variedade de denominações que são empregadas em pesquisas de diferentes áreas, essas demandam, sobretudo, da rigorosidade nos processos de análise sobre o objeto investigado” (MELO, 2013, p. 24).

Crecci, Nacarato e Fiorentini (2017) apontam que pesquisas como mapeamento, estado da arte, estado do conhecimento, metanálise e metassíntese são estudos de revisão sistemática que visam mapear, descrever, sistematizar e discutir as produções científicas. Para André (2009), os estudos de mapeamento e de estado do conhecimento são úteis para revelar lacunas, necessidades, características, fragilidades teóricas e metodológicas, além de defasagens da literatura em campos específicos do conhecimento.

Segundo Fiorentini *et al.* (2016, p. 16), os estudos de mapeamento se configuram como um processo sistemático que identifica, localiza e descreve as “pesquisas realizadas num determinado tempo, espaço e campo de conhecimento”. Contêm informações de aspectos físicos das produções analisadas, isto é, onde, quando e quantos estudos foram encontrados, quem foram os autores, os participantes e os aspectos teórico-metodológicos e temáticos. Assim, mesmo que os resultados das pesquisas possam ser englobados em tais trabalhos, geralmente os mapeamentos se restringem aos aspectos descritivos de um campo de estudo, e não aos resultados, diferenciando-se, assim, de outra modalidade de pesquisa, o estado da arte (FIORENTINI *et al.*, 2016).

Nossa pesquisa, qualitativa e de caráter documental (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), foi dividida em duas principais etapas que chamamos de mapeamento e análise.

Para o mapeamento, iniciamos com o estabelecimento do problema, pergunta ou temática. Assim, dos três pontos colocados por Fiorentini *et al.* (2016) que caracterizam um mapeamento (campo, espaço e tempo), em nossa pesquisa o campo de conhecimento, ou temática, é a geometria na formação inicial de PEM.

Em um primeiro momento, como descrito em Cybulski (2020), tínhamos outros objetivos para a pesquisa que, na época, estava em estágio inicial. Todavia, no decorrer do percurso, as questões e os objetivos mudaram, pois percebemos que não poderíamos falar dos resultados e das problemáticas das pesquisas de modo separado, como era planejado inicialmente. Xiao e Watson (2019) defendem que, em uma pesquisa de revisão, como é o caso do mapeamento, há possibilidade de fazer tais alterações ao longo do estudo.

Diante disso, nossa questão de pesquisa passou a ser: *Que indicativos, a respeito de geometria na formação inicial de PEM, estão presentes em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período 2009-2020?*

Para respondê-la, temos como objetivo *mapear, descrever e discutir indicativos de geometria na formação inicial de PEM, presentes em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período 2009-2020.*

Esse objetivo é contemplado em diferentes aspectos pelos objetivos específicos:

- Descrever e discutir pontos de enfoque de teses e dissertações brasileiras, defendidas no período 2009-2020, que abordaram a geometria na formação inicial de professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.
- Descrever e discutir pontos de enfoque de teses e dissertações brasileiras, defendidas no período 2009-2020, que abordaram a geometria na formação inicial de professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.
- Descrever e discutir abordagens de geometria na formação inicial de PEM, presentes em teses e dissertações brasileiras, defendidas no período 2009-2020, e, por conseguinte, caracterizações de pensamento geométrico e principais referenciais teóricos utilizados nesses trabalhos.

O segundo ponto colocado por Fiorentini *et al.* (2016) que define uma pesquisa de mapeamento é o espaço. Em nossa pesquisa, é caracterizado pelas dissertações (mestrados acadêmico e profissional) e teses de Programas de Pós-

graduação brasileiros *stricto sensu* das Áreas de Educação e Ensino da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Teses e dissertações fazem parte da chamada literatura cinzenta, a qual é constituída por documentos protegidos por direitos de propriedade intelectual, passíveis de serem coletados e preservados por bibliotecas ou repositórios institucionais, mas sem o controle de editoras comerciais, isto é, não têm como foco principal a publicação (SCHÖPFEL, 2010). Assim, entendemos que muitos resultados obtidos em teses e dissertações podem não ser publicados na forma de artigos, de modo que a pesquisa em teses e dissertações se faz necessária.

Ademais, concordamos com Roldão (2007) da importância de se considerar teses e dissertações em pesquisas de revisão de temáticas que envolvem professores, pois as questões dos professores tendem a ser investigadas de forma mais significativa em teses e dissertações, inclusive são produzidas, muitas vezes, por próprios docentes da Educação Básica, refletindo, assim, preocupações e leituras do contexto escolar.

O terceiro ponto colocado por Fiorentini *et al.* (2016) que define uma pesquisa de mapeamento é o tempo. Em nossa pesquisa, analisaremos teses e dissertações defendidas no período 2009-2020.

Não se trata, necessariamente, de uma justificativa para a escolha do período temporal, contudo, o início desse período marca, aproximadamente, dez anos da publicação dos PCN e o início da implementação da BNCC, o que pode amparar aspectos do ensino de geometria e repercutir nas pesquisas.

Os levantamentos foram realizados na plataforma digital do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e no catálogo digital da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). Nem todos os trabalhos oriundos do catálogo da Capes possuíam o resumo (ou a versão completa) disponíveis na plataforma, o que nos levou a buscá-los nos endereços eletrônicos das bibliotecas ou dos Programas de Pós-graduação das instituições em que foram realizados. No entanto, dez trabalhos não foram encontrados. Entramos em contato com os orientadores dos respectivos trabalhos, via *e-mail*, e tivemos acesso a quatro destes trabalhos, porém não fazem parte de nosso *corpus* por não cumprirem todos os critérios de inclusão.

De acordo com Xiao e Watson (2019) as palavras de busca, ou descritores, devem derivar da questão de pesquisa. Assim, utilizamos os seguintes descritores: “ensino de geometria”, “pensamento geométrico”, “saber geométrico”, “saberes

geométricos”, “raciocínio geométrico” e “conhecimento geométrico”.

O termo “ensino de geometria” foi utilizado como critério de busca nesse primeiro momento por considerarmos ser um termo amplo, visto que, apesar de expressões ou palavras mais precisas retornarem resultados mais específicos, podem também excluir possíveis resultados. Já os termos mais abrangentes, mesmo que demandem um trabalho mais exaustivo, possuem maior probabilidade de encontrar possíveis resultados (XIAO; WATSON, 2019).

Nossos critérios de inclusão foram:

1.º Pertencer ao período temporal 2009-2020.

2.º Conter, no título ou no resumo, as expressões “pensamento geométrico”, “saber geométrico”, “saberes geométricos”, “raciocínio geométrico” ou “conhecimento geométrico”.

3.º Ter sido desenvolvido no âmbito da formação inicial de PEM.

O acesso aos trabalhos ocorreu na plataforma digital do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e no catálogo digital da BDTD, primeiramente, no dia 15/05/2020. Em 14/01/2021, realizamos outro levantamento apenas do ano de 2019, porém não foram acrescentados novos trabalhos. Posteriormente, em 13/09/2021, realizamos um levantamento do ano de 2020 e acrescentamos os três trabalhos datados de 2020 que compõem o *corpus*.

Durante a seleção dos possíveis trabalhos, os integrantes do grupo responsáveis pela seleção<sup>44</sup> mantiveram contato, estavam alinhados quanto aos critérios de inclusão e como aplicá-los, e todas as dúvidas e discrepâncias foram discutidas. Ainda em caso de dúvida, optávamos pela inclusão do trabalho para posterior análise mais rigorosa por meio da produção dos fichamentos.

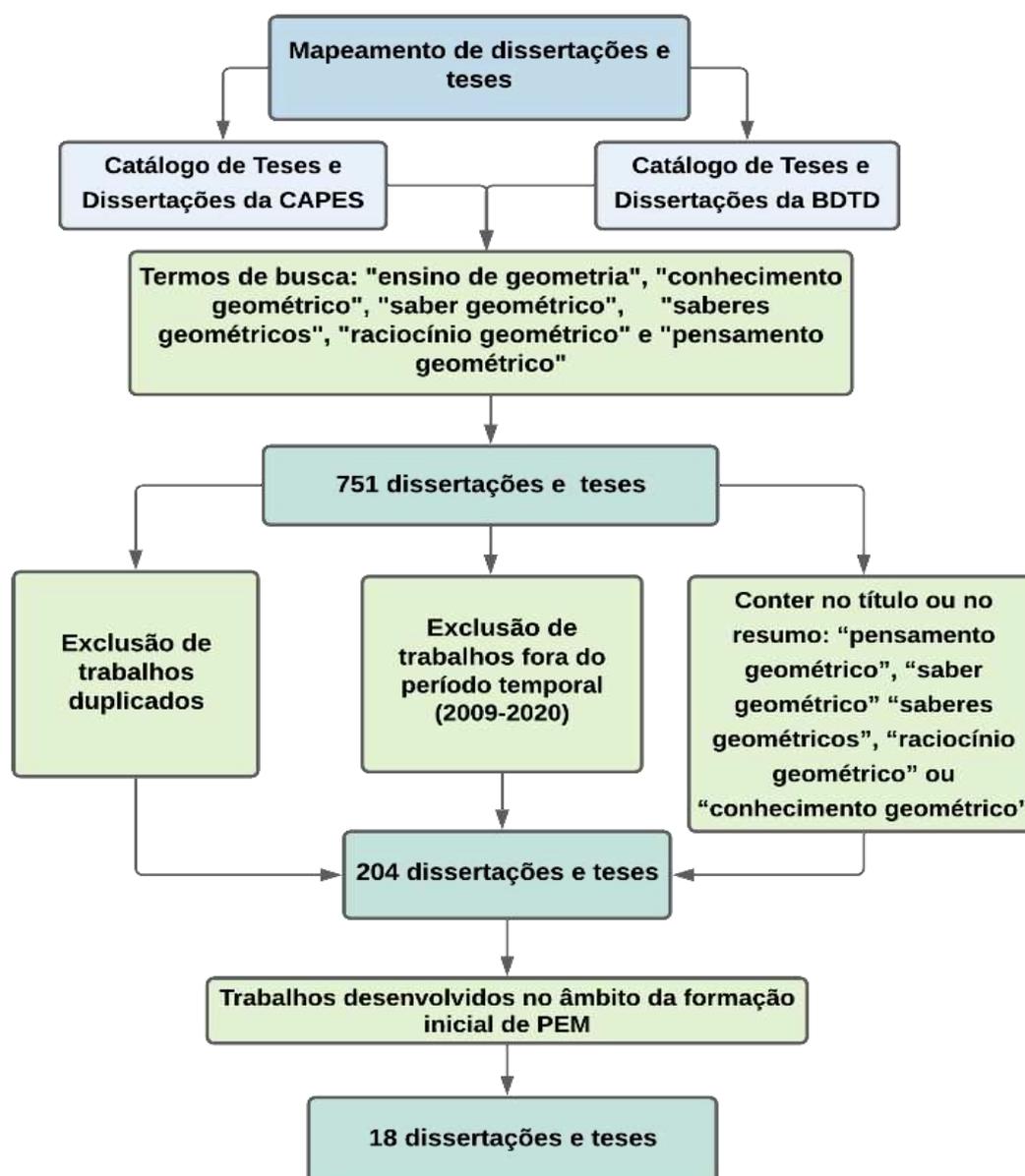
A partir da busca por descritores obtivemos 751 dissertações e teses. Na sequência, descartamos os trabalhos duplicados e aplicamos os dois primeiros critérios de inclusão, o que resultou em 204 pesquisas. A partir dessas, para selecionar os trabalhos que foram desenvolvidos no âmbito da formação inicial de PEM, lemos o resumo, o sumário, a introdução, a fundamentação teórica e, em alguns casos, o trabalho completo, quando estas seções não eram suficientes para identificar o contexto da pesquisa. Essa opção se deu por considerarmos que a seleção de trabalhos realizados no âmbito da formação inicial de PEM não poderia

---

<sup>44</sup> O acesso aos trabalhos foi realizado em conjunto com outros três integrantes do Gepefopem.

ser realizada utilizando filtros ou buscas por palavras, pois, muitas vezes, esse processo exigiu também análise, reflexão e discussões. Essa seleção resultou em 18 trabalhos, que constituem nosso *corpus* de análise (sete teses e 11 dissertações). O esquema da Figura 14 ilustra o processo de mapeamento realizado:

**Figura 14** - Etapas do processo de mapeamento



**Fonte:** Elaborada pela autora

Em análises iniciais, outros trabalhos também constavam no corpus, além de os dados de 2020 ainda não estarem incluídos (CYBULSKI, 2020). No entanto, no

decorrer das análises, evidenciamos que três desses trabalhos não foram realmente desenvolvidos no âmbito da formação inicial de PEM, o que resultou em 15 trabalhos que, acrescidos dos três defendidos em 2020, totalizou 18 pesquisas.

Para a etapa da análise, com vistas às dificuldades já apontadas na literatura para a falta de posições epistemológicas para o pensamento geométrico, ao menos de forma explícita, concordamos com Nuñez e Ramalho (1999) de que os pesquisadores podem expor seus pressupostos de forma tanto explícita quanto implícita, o que também nos permitiria compreender em que sentido termos, argumentos e demais processos e abordagens são considerados.

Nesse sentido, assim como De Paula (2018) e Melo (2013), durante a leitura, produção de fichamentos e análises em geral, apoiamo-nos no paradigma indiciário de Ginzburg (1989). O Paradigma Indiciário, de acordo com Ginzburg (1989), consiste na busca de indícios, sinais, pistas, conjecturas e inferências, a partir de dados aparentemente negligenciáveis, com a intencionalidade de realizar uma leitura atenta do elemento a ser estudado (GINZBURG, 1989).

Com o intuito de realizarmos um estudo descritivo e analítico das abordagens e referenciais utilizados, construímos uma ficha, com base em Fiorentini *et al.* (2016), contendo tópicos como: objetivo do trabalho; contexto e sujeitos; informações metodológicas; tipo de pesquisa e instrumentos utilizados; referenciais; procedimentos analíticos; principais resultados e conclusões. Para preencher a ficha, realizamos a leitura integral dos 18 trabalhos.

Em seguida, cada objetivo específico de nossa pesquisa originou agrupamentos ou análises de pontos de enfoque dos trabalhos, com base em similaridades, convergências ou particularidades. A partir disso, construímos sínteses de cada trabalho, destacando pontos relevantes alinhados aos nossos objetivos, gráficos que apresentam a disposição geográfica e a natureza das pesquisas que podem ser encontrados em Cybulski (2020).

Corroboramos Barbosa (2015) quanto à importância da Insubordinação Criativa (D'AMBROSIO; LOPES, 2015) na pesquisa e, especificamente, na escolha de formatos alternativos que rompam com apresentações tradicionais dos textos de pesquisas acadêmicas. Assim, optamos por uma dissertação redigida no formato *multipaper*.

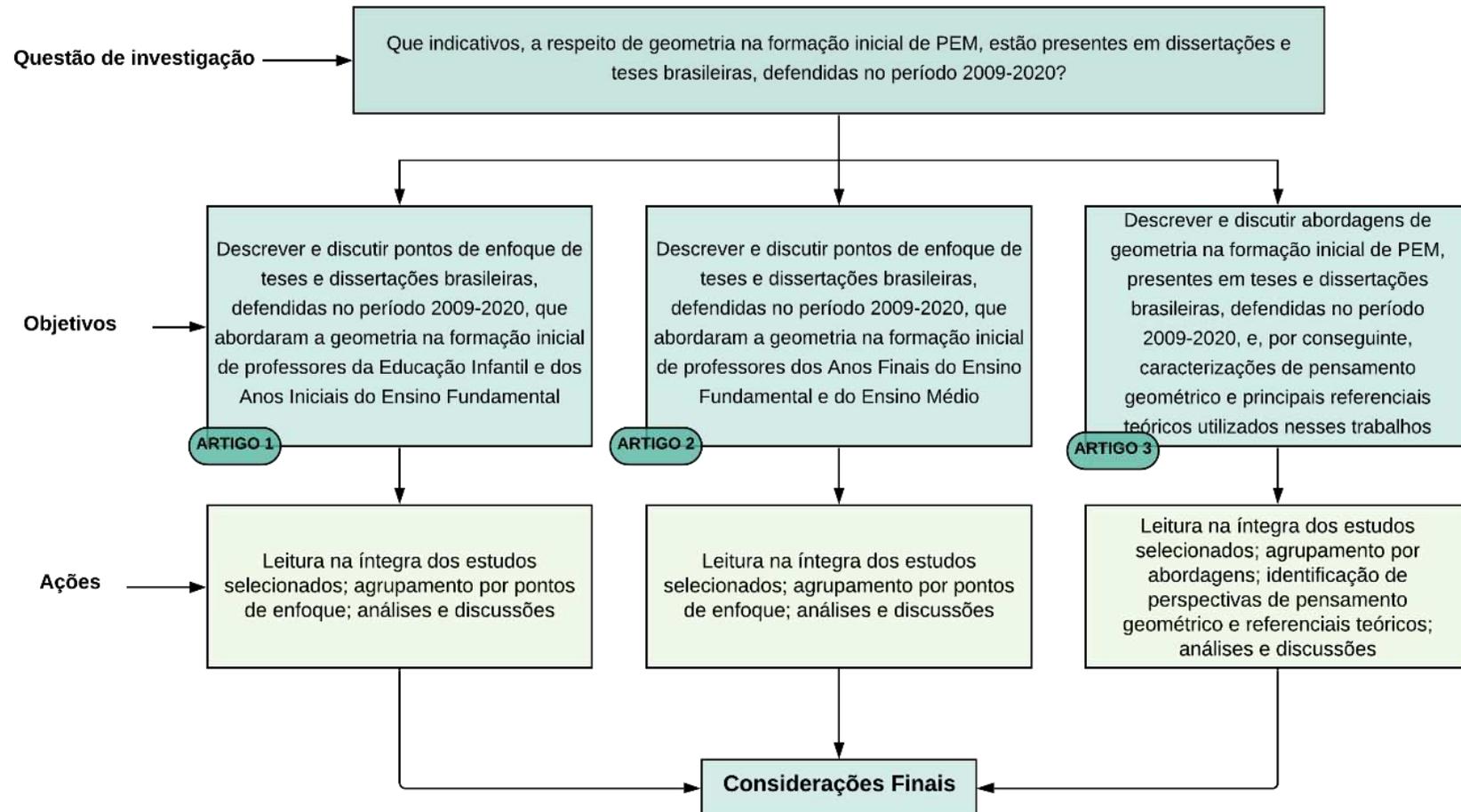
Esse formato alternativo pode ser descrito como um conjunto ou coleção de artigos (BARBOSA, 2015; DUKE; BECK, 1999; THOMAS; WEST; RICH, 2016) e

propicia maior autonomia ao pesquisador, auxilia a desenvolver a capacidade de síntese consistente (BARBOSA, 2015), possibilita mais disseminação das pesquisas e é considerado um formato mais adequado para o preparo do futuro pesquisador, especialmente com relação aos aspectos comunicativos de relatos de pesquisas (BOOTE; BEILE, 2005; DUKE; BECK, 1999; THOMAS; WEST; RICH, 2016; WATSON; NEHLS, 2016). Além disso, colabora para que resultados de teses e dissertações sejam divulgados, abandonando “o status de literatura cinzenta” (DE PAULA, 2018, p. 151).

Mesmo considerado mais criativo e flexível, o formato *multipaper* mantém todo o rigor de uma pesquisa científica (WATSON; NEHLS, 2016). É constituído de uma parte ou capítulo introdutório, cuja escrita é feita especialmente para a dissertação (BARBOSA, 2015; DUKE; BECK, 1999; THOMAS; WEST; RICH, 2016; WATSON; NEHLS, 2016), que chamamos de Introdução Expandida. Na sequência, há os artigos/capítulos, individuais entre si na apresentação, isto é, cada um possui seu resumo, introdução, objetivos, fundamentação teórica, procedimentos metodológicos, resultados e conclusões, mesmo que conectados com a Introdução Expandida e as Considerações Finais da dissertação (BARBOSA, 2015; BOOTE; BEILE, 2005; DUKE; BECK, 1999).

A Figura 15 ilustra um organograma da dissertação no formato *multipaper*.

**Figura 15** - Organização da dissertação no formato *multipaper*



Fonte: Elaborada pela autora

Assim, além dessa Introdução Expandida, nossa dissertação está estruturada em três artigos/capítulos, norteados cada um por um dos objetivos específicos da dissertação e pelos pontos de enfoque identificados, a fim de respondermos à nossa questão geral de investigação:

*Artigo 1 - Objetivo:* Descrever e discutir pontos de enfoque de teses e dissertações brasileiras, defendidas no período 2009-2020, que abordaram a geometria na formação inicial de professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

*Pontos de enfoque:* Abordagens metodológicas para o ensino de geometria, utilizadas nos processos de Formação Inicial; conteúdos geométricos abordados nessas formações; aspectos da organização curricular discutidos no decorrer dos trabalhos.

*Artigo 2 - Objetivo:* Descrever e discutir pontos de enfoque de teses e dissertações brasileiras, defendidas no período 2009-2020, que abordaram a geometria na formação inicial de professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

*Pontos de enfoque:* Estratégias associadas às aprendizagens do futuro professor de Matemática em geometria; relações a partir de conhecimentos geométricos já constituídos pelo futuro professor de Matemática.

*Artigo 3 - Objetivo:* Descrever e discutir abordagens de geometria na formação inicial de PEM, presentes em teses e dissertações brasileiras publicadas no período 2009-2020, e, por conseguinte, caracterizações de pensamento geométrico e principais referenciais teóricos utilizados nesses trabalhos.

*Abordagens<sup>45</sup>:* Foco em representações de figuras geométricas para a *identificação* de conceitos ou propriedades de forma principalmente perceptiva, para a *resolução* de situações-problema e para a *verificação* ou estudo de propriedades geométricas, provas e demonstrações.

Na sequência apresentaremos nossos resultados, na forma dos três artigos-capítulos descritos anteriormente, seguidos das considerações finais da dissertação.

---

<sup>45</sup> Agrupamos os trabalhos para discutir apenas as abordagens, pois as perspectivas de pensamento geométrico e os referenciais teóricos foram descritos de forma articulada com todas as pesquisas.

## REFERÊNCIAS

- ABIDIN, M.; ISMAIL, Z.; ISMAIL, N. Geometrical thinking with technology: A systematic literature review. *In: 2018 IEEE 10th International Conference on Engineering Education (ICEED)*. IEEE, 2018. p. 230-235.
- AKSU, Z.; GEDIK, S. D.; KONYALDOĞLU, A. C. Mathematics teacher candidates' approaches to using topology in geometry. **School Science And Mathematics Association**, [s. l.], n. 121, p. 192-200, 2021.
- ANDRÉ, M. E. D. A. A produção acadêmica sobre formação de professores: um estudo comparativo das dissertações e teses defendidas nos anos 1990 e 2000. **Formação Docente**, Belo Horizonte, v. 1, n. 1, p. 41-56, ago./dez. 2009.
- ATASOY, E. Elementary Mathematics Teacher Candidates' Geometric Thinking Levels and Their Self- Efficacy in Geometry. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n.2, p. 161-170, 2019.
- BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. *In: D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (Org.). Vertentes da subversão na produção científica em Educação Matemática*. Campinas: Mercado de Letras, 2015. v. 1, p. 347-367.
- BARBOSA, A. P. R. **A matemática nos cursos de pedagogia**: contexto formativo de futuros professores. 2021. 253 f. Tese (Doutorado) - Educação para a Ciência, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2021.
- BARRETO, M. C. *et al.* Estado da arte em pesquisas acadêmicas brasileiras, de 2010 a 2019, sobre o ensino de geometria desenvolvidas no Nordeste. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 39, n. 1, p. 1-22, jan./mar. 2021.
- BOOTE, D. N.; BEILE, P. Scholars before researchers: on the centrality of the dissertation literature review in research preparation. **Educational Researcher**, v. 34, n. 6, p. 3-15, aug./sep. 2005.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática/ Anos iniciais. Brasília, 1997, 142 p.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial curricular nacional para a educação infantil**. Brasília, 1998a. 3v
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática/ Anos finais. Brasília, 1998b, 148 p.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática/ Ensino Médio. Brasília, 1999, 58 p.
- BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**.

Brasília, 2018, 600p.

BRIGO, J; FLORES, C. R. A Problemática do Uso da Figura no Ensino de Geometria: indicativos para uma pesquisa histórica. *In: Encontro Brasileiro De Estudantes De Pós-Graduação Em Educação Matemática*, [S. l.], 12. **Anais [...]**. p. 1–13, 2008.

BRUNHEIRA, L. M. A. **O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos primeiros anos**. 2019. 242 f. Tese (Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2019.

BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. da. Justificando Generalizações Geométricas na Formação Inicial de Professores dos Primeiros Anos. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Campinas, SP, v. 33, n. 63, p. 88-108, abr. 2019.

CARVALHO, H. A. F.; FERREIRA, A. C. Visualização espacial e pensamento geométrico: um panorama da produção brasileira em programas de Pós-Graduação nos últimos anos. *In: Encontro Mineiro de Educação Matemática*, 7, 2015, São João Del Rei/MG. **Anais EMEM**, 2015.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Early childhood teacher education: the case of geometry. **Journal Of Mathematics Teacher Education**, [s.l.], v. 14, n. 2, p. 133-148, 23 fev. 2011. Springer Science and Business Media LLC.

CLEMENTS, D. H. *et al.* Teaching and learning Geometry: early foundations. **Quadrante**, [s. l.], v. 17, n. 2, p. 7-31, 2018.

CRECCI, V. M.; NACARATO, A. M.; FIORENTINI, D. Estudos do estado da arte da pesquisa sobre o professor que ensina matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 25, n. 1, p. 1-6, 30 abr. 2017. Universidade Estadual de Campinas.

CRESCENTI, E. P. A formação inicial do professor de Matemática: aprendizagem da Geometria e atuação docente. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 3, n. 1, p. 81-94, jan./jun. 2008.

CYBULSKI, F. C. Pensamento geométrico na formação inicial de professores que ensinam matemática: indicativos de pesquisas. *In: Encontro Brasileiro De Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, XXIV, 2020, Cascavel. *In: Encontro Brasileiro de Estudantes De Pós-Graduação em Educação Matemática*, 24. **Anais [...]**. Cascavel: Sbem, 2020. p. 1-12.

CYRINO, M. C. C. T. Identidade Profissional de (futuros) Professores que Ensinam Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, [s. l.], v. 10, n. 24, p. 699-712, 2017.

D'AMBROSIO, B; LOPES, C. E. Insubordinação criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 1-17, abr. 2015.

DELEUZE, G; GUATTARI, F. **O que é a filosofia?** 3. ed. São Paulo: 34, 2010. Tradução de: Bento Prado Jr. e Alberto Alonso Muñoz.

DE PAULA, E. F. **Identidade profissional de professores que ensinam matemática**: indicativos de pesquisas, elementos e ações para elaboração de uma proposta investigativa. 2018. 227 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. 468 p.

DOYLE, S. A. C. **Sherlock Holmes**: romances. [S. l.]: Martin Claret, 2018. 600p.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative forms for the dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

DUVAL, R. Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. **Educational studies in mathematics**, v.22, n.3, p.233-261, 1991.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères**, n.17, p.121-138, 1994.

DUVAL, R. Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In: SUTHERLAND, Rosamund; MASON, John (ed.). **Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education**. Oxford: Springer, p.142-157, 1995.

DUVAL, R. Geometry from a Cognitive Point of View. In: MAMMANA, C.; VILLANI, (Orgs.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century**: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer, p. 37-52, 1998.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: HITT, F.; SANTOS, M. (Ed.). **Proceeding of the 21st Annual Meeting of the 228 North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Mexico, p. 3-26, oct., 1999.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. In: **Annales de didactique et de sciences cognitives**. 2005.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.

FERNER, D.; SOARES, M. A. da S.; MARIANI, R. C. P. Geometria nas licenciaturas em Matemática: um panorama a partir de Projetos Pedagógicos de Cursos. **Ensino**

em **Re-Vista**, p. 434-457, 2020.

FERREIRA, A. B. H. **Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 5. ed. [S. l.]: Positivo, 2014.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012. (Coleção Formação de Professores).

FIORENTINI, D. *et al.* O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. *In*: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. d. (Org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática: período 2001 – 2012**. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/pf/subportais/biblioteca/fev-2017/e-book-mapeamento-pesquisa-pem.pdf>. Acesso em: 06 out. 2020.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 65. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2020.

GATTI, B. A. Formação inicial de professores para a educação básica: pesquisas e políticas educacionais. **Estudos em Avaliação Educacional**, v. 25, n. 57, p. 24-54, 2014.

GATTI, B. A. Formação de professores: condições e problemas atuais. **Revista internacional de formação de professores**, v. 1, n. 2, p. 161-171, 2016.

GATTI, B. A. *et al.* **Professores do Brasil: novos cenários de formação**. Brasília, DF: Unesco, 2019.

GAZZANIGA, M.; HEATHERTON, T.; HALPERN, D. **Ciência Psicológica**. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2018. Tradução de: Maiza Ritomy Ide, Sandra Maria Mallmann da Rosa, Soraya Imon de Oliveira.

GINZBURG, C. **Mitos, emblemas, sinais**. São Paulo: Companhia das Letras, 1989.

GUÉRIOS, E. Formação de professores que ensinam matemática em uma perspectiva de complexidade: discussão agregando fragmentos experienciais. **Roteiro**, v. 46, n. 1, p. 1-5, 2021.

GUÉRIOS, E.; GONÇALVES, T. O. Um estudo acerca da pesquisa sobre formação inicial de professores que ensinam matemática nos anos iniciais de escolarização. **Educar em Revista**, v. 35, p. 27-45, 2019.

HOURIGAN, M.; LEAVY, A. M. Preservice Primary Teachers' Geometric Thinking: is pre-tertiary mathematics education building sufficiently strong foundations? **The Teacher Educator**, [s.l.], v. 52, n. 4, p. 346-364, 8 set. 2017.

KALEFF, A. M. *et al.* Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: o modelo de van hiele. **Bolema**, Rio Claro, v. 9, n. 10, 1994.

KUZNIAK, A.; NECHACHE, A. On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of mathematical working spaces. **Educational Studies in Mathematics**, [s.l.], v. 106, n. 2, p. 271-289, 4 jan. 2021.

LEIVAS, J. C. P. Geometrias não euclidianas com geometria dinâmica e as funções inversão em relação à circunferência e projeção estereográfica. **Currículo Sem Fronteiras**, [s. l.], v. 18, n. 3, p. 445-463, maio/ago. 2018.

LEME DA SILVA, M. C. **Histórias do Ensino de Geometria nos anos iniciais e seus parceiros**: desenho, trabalhos manuais e medidas. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? *In*: **A Educação Matemática em Revista**. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, 1995, p. 3-13.

MELO, M. V. **As práticas de formação no estágio curricular supervisionado na licenciatura em matemática**: o que revelam as pesquisas acadêmicas brasileiras na década 2001-2010. 2013. 406 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. 2 ed. São Paulo: E.P.U., 2018.

NASSER, L.; FERREIRA, M. L.; VAZ, R. F. N. Estimulando o domínio do processo dedutivo no curso de licenciatura em matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 499-513, jul./dez. 2017.

NUÑEZ, I. B.; RAMALHO, B. L. A dispersão semântica na pesquisa educacional: implicações teórico-metodológicas. **Educação em Questão**, v. 11, n. 2, p. 96-114, 1999.

PAIS, L. C. A representação dos corpos redondos no ensino da geometria. **Zetetiké**, Campinas, v. 2, p. 13-23, 1994.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, v. 4, n. 2, 1996.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. **Reunião da ANPED**, v. 23, p. 24, 2000.

PAIVA, S. M. **A conceituação do pensamento geométrico**: aspectos históricos, filosóficos e as visões presentes em teses e dissertações no Brasil. 2021. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos Formativos) - Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2021.

PARZYSZ, B. "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational studies in mathematics**, v. 19, n. 1, p. 79-92, 1988.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *In*: **Actes du 28<sup>ème</sup> colloque COPIRELEM** (Tours, juin 2001). p. 99-110. 2001.

PARZYSZ, B. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il. **Quaderni di Ricerca in Didattica**, v. 17, p. 121-144, 2006.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M. O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da provinha brasil. **Educação, Matemática, Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1147-1168, 2014.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, n. 1, p. 7-17, 1993.

PENTEADO, D. R.; PEREIRA, A. L.; BRANDT, C. F. Geometria no ensino fundamental: das exigências legais às práticas cotidianas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [s.l.], v. 8, n. 16, p. 48-81, 1 jul./dez. 2019.

PEREIRA DA COSTA, A. Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S.L.], v. 9, n. 18, p. 152-179, 26 jun. 2020. Universidade Estadual do Paraná, Unespar.

PEREIRA DA COSTA, A.; SANTOS, M. R. d. Pensamento geométrico na licenciatura em Matemática: uma análise à luz de Duval e Van-Hiele. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 10, p. 1-20, fev. 2020.

PINHEIRO, A.; CARREIRA, S. O desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros. **Investigação em Educação Matemática. Raciocínio Matemático**, p. 146-169, 2013.

PIROLA, D. L. **Aprendizagem em geometria nas séries iniciais**: uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual. 2012. 158 f. Dissertação (Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

RAMASSOTTI, L. C. **A geometria euclidiana na licenciatura em matemática do ponto de vista de professores formadores**. 2015. 179 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

ROLDÃO, M. C. N. A formação de professores como objecto de pesquisa – contributos para a construção do campo de estudo a partir de pesquisas portuguesas. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, SP: UFSCar, v.1, n. 1, p. 50-118, set. 2007.

ROLDÃO, M. C. N. Formação de professores e desenvolvimento profissional/Teacher education and professional development. **Revista de Educação PUC-Campinas**, v. 22, n. 2, p. 191-202, 2017.

SANTOS, L.; OLIVEIRA, H. O ensino e a aprendizagem da geometria: Perspetivas Curriculares. *In*: Encontro de Investigação em Educação Matemática, 2017, Lisboa. **Atas**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2017. p. 3-8.

SANTOS, L. F.; TELES, R. A. M. Conhecimento dos professores sobre geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: um estado da arte. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [s.l.], v. 23, n. 1, p. 79-111, 11 abr. 2021.

SCHÖPFEL, J. Towards a prague definition of Grey Literature. **Twelfth International Conference on Grey Literature**: Transparency in Grey Literature. Grey Tech Approaches to High Tech Issues. Prague, 6-7 December 2010, Dec 2010, Czech Republic, p.11-26, 2010.

SINCLAIR, N. *et al.* Geometry Education, Including the Use of New Technologies: a survey of recent research. *In*: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 13., 2017, Cham. **Proceedings of the ICME-13 Monographs**. Cham: Springer International Publishing, 2017. p. 277-287.

SWOBODA, E.; VIGHI, P. Early Geometrical Thinking in the Environment of Patterns, Mosaics and Isometries. **icme-13 Topical Surveys**, Hamburg, v. 13, p. 1-50, 2016.

THOMAS, R. A.; WEST, R. E.; RICH, P. Benefits, challenges, and perceptions of the multiple article dissertation format in instructional technology. **Australasian Journal of Educational Technology**, v.32, n. 2, 2016.

ULUSOY, F. Early-Years Prospective Teachers' Definitions, Examples and Non-Examples of Cylinder and Prism. **International Journal For Mathematics Teaching And Learning**, [s. l.], v. 20, n. 2, p. 149-169. 2019.

VALE, I.; PIMENTEL, T. O ensino e aprendizagem de Geometria. *In*: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2017, Lisboa. **Atas**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2017. p. 43-48.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 583 p. Tradução de: Paulo Henrique Colonese.

VAN HIELE, P. M. Quelques aspects didactiques du développement de la pensée des enfants dans les mathématiques et la physique. **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, n. 3, p. 343-346, 1969.

VAN HIELE, P. M. English summary. The problem of insight in connection with school children's insight into the subject matter of geometry. Doctoral dissertation, University of Utrecht, 1957. *In*: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Eds.). **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele**. Brooklyn: Brooklyn College, p. 237-241, 1984a.

VAN HIELE, P. M. A child's thought and geometry. *In*: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Eds.). **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele**. Brooklyn: Brooklyn College, p. 243-252, 1984b.

VAN HIELE, P. M. Developing Thinking through Activities That Begin with Play.

**Teaching Children Mathematics**. v. 6, p. 310-316, fev. 1999.

VAN HIELE, P. M. Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van Hiele levels of thinking. **Intelligence, Learning and Understanding—A Tribute to Richard Skemp**, p. 27-47, 2002.

VIANA, O. A.; SILVA, L. R. P. Raciocínio geométrico e aprendizagem de congruência de triângulos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 1-22, 14 maio 2020.

WATSON, D. L.; NEHLS, K. Alternative Dissertation Formats: preparing scholars for the academy and beyond. *In*: STOREY, V. A.; HESBOL, K. A. **Contemporary Approaches to Dissertation Development and Research Methods**. Hershey: Information Science Reference, 2016. Cap. 4. p. 43-52.

XIAO, Y.; WATSON, M. Guidance on Conducting a Systematic Literature Review. **Journal of Planning Education and Research**, [s.l.], v. 39, n. 1, p. 93-112, 28 ago. 2019. Sage Publications.

## GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL E NOS ANOS INICIAIS: PONTOS DE ENFOQUE DE DISSERTAÇÕES BRASILEIRAS (2009-2020)

**Resumo:** Este artigo tem por objetivo descrever e discutir pontos de enfoque de dissertações brasileiras, defendidas no período 2009-2020, que abordaram a geometria na formação inicial de professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Para a constituição do *corpus* de análise foi realizado um mapeamento de dissertações e teses, oriundas de Programas de Pós-graduação brasileiros *stricto sensu*, das Áreas de Educação e Ensino na plataforma digital do Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e no catálogo da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, totalizando sete dissertações. O processo de análise, a partir de leituras na íntegra dos trabalhos e fichamentos, evidencia que essas pesquisas têm como pontos de enfoque discutir: abordagens metodológicas para o ensino de geometria na formação inicial; conteúdos geométricos privilegiados nessa formação; aspectos curriculares dos cursos de formação analisados. Esses trabalhos apontam lacunas e dificuldades com relação ao trabalho com a geometria na formação inicial de professores que ensinam Matemática (PEM), o que sugere a necessidade de mais atenção a aspectos relacionados à organização da carga horária e às formas de pensar a formação inicial de PEM, de modo que eles possam constituir conhecimentos geométricos e aprender a ensinar geometria.

**Palavras-chave:** formação inicial de professores que ensinam matemática; ensino de geometria; mapeamento de teses e dissertações

## GEOMETRY IN INITIAL EDUCATION OF TEACHERS WHO TEACH MATHEMATICS IN CHILDHOOD EDUCATION AND PRIMARY YEARS: FOCUSES OF BRAZILIAN DISSERTATIONS (2009-2020)

**Abstract:** This article aims to describe and discuss the focuses of Brazilian master's dissertations, published between the years 2009 and 2020, which approached geometry in the initial education of Childhood Education and Primary Years teachers. To compose the *corpus* analyzed, masters and doctoral studies, from, Education and Teaching Areas of Brazilian post-graduate *strictu sensu* programs were mapped in both digital databases of Catalogue of Thesis and Dissertations of Higher Education Personal Improvement Coordination (CAPES) and Brazilian Digital Library of Thesis and Dissertations (BDTD), finding seven master's dissertations. The analysis process, from the works full-text reading and some registrations, evidence that these studies focus on discussing teaching geometry methodological approaches in the initial education; geometric contents privileged in that education; and curricular aspects of these analyzed education courses. These works highlight gaps and difficulties related to the work of geometry in the initial education of teachers who teach mathematics (TTM), suggesting that more attention is required in aspects related to workload organization and ways of thinking the initial education of TTM, so they can constitute geometrics knowledge and learn to teach geometry.

**Keywords:** initial education of teachers who teach mathematics; geometry teaching; theses and dissertations mapping.

## INTRODUÇÃO

Estudos relatam dificuldades enfrentadas por estudantes de cursos de Pedagogia no que se refere à Matemática (PASSOS; NACARATO, 2018). De forma mais específica com relação à geometria, alguns dos obstáculos estão associados ao estabelecimento de relações, generalizações geométricas, compreensão de definições, argumentos e propriedades de objetos geométricos, mais especificamente a conceitos limitados de quadriláteros e suas propriedades (BRUNHEIRA, 2019). O desenvolvimento do pensamento geométrico (HOURIGAN; LEAVY, 2017) e o uso de propriedades geométricas em diferentes situações (KUZNIAK; NECHACHE, 2021), dentre outras lacunas conceituais, também foram identificados como precários no trabalho com a geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática (PEM) (SANTOS; TELES, 2021).

Esse fato preocupa, se considerarmos que a formação inicial de PEM, independente da etapa da Educação Básica de atuação, é o momento no qual se constrói a base para a futura profissão, devendo receber orientações necessárias para se formarem sujeitos autônomos e comprometidos com a prática (CRESCENTI, 2008; PASSOS; NACARATO, 2014; ROLDÃO, 2017).

Em muitos casos, essa deficiência na formação do professor repercute diretamente no ensino da geometria na Educação Básica. Pavanello (1993) denuncia que muito professores, por conta dessas deficiências, abandonam o ensino da geometria. Outros autores sinalizam que, em muitos casos, apesar de a geometria estar presente na Educação Básica, mesmo que incorporada em outras disciplinas ou áreas da Matemática (LEME DA SILVA, 2021), ela ainda é relegada a segundo plano na *prática* de muitos professores (PENTEADO; PEREIRA; BRANDT, 2019), devido a uma formação ineficiente ou incompleta (LORENZATO, 1995; NASSER; VIEIRA, 2015).

A formação inicial de PEM, além de um compromisso pessoal e coletivo dos futuros professores, é de responsabilidade da instituição formadora e de todos os envolvidos no processo de formação. O Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática (Gepefopem<sup>46</sup>), do qual fazemos parte, dedica-se a questionar e investigar aspectos inerentes a essa

---

<sup>46</sup>Gepefopem – com sede na Universidade Estadual de Londrina (UEL) e coordenado pela Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.

formação, considerando diferentes temáticas, dentre elas a geometria na formação de PEM.

O número de pesquisas que se propõem a investigar a formação de PEM tem crescido nos últimos anos, o que reforça a necessidade de estudos de mapeamentos na área de formação de professores, isto é, levantamentos do que tem sido pesquisado e das principais questões ainda pendentes, além da descrição e da discussão de perspectivas e resultados (CRECCI; NACARATO; FIORENTINI, 2017).

Por conseguinte, no presente artigo descreveremos e analisaremos pontos de enfoque<sup>47</sup> de dissertações brasileiras, defendidas no intervalo 2009-2020, que abordaram a geometria na formação inicial de professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, tendo em conta seus objetivos e resultados.

#### PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A presente investigação tem caráter documental (FIORENTINI; LORENZATO, 2012) e foi dividida em duas etapas: mapeamento e análise.

Na etapa do mapeamento, realizamos levantamentos<sup>48</sup> de dissertações (mestrados acadêmico e profissional) e teses, oriundas de Programas de Pós-graduação brasileiros *stricto sensu* das Áreas de Educação e Ensino reconhecidos pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Os levantamentos foram realizados nos catálogos digitais de teses e dissertações da CAPES e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.

Utilizamos como critérios de inclusão pertencer ao período temporal 2009-2020 e conter no título ou no resumo as expressões “pensamento geométrico”, “saber geométrico”, “saberes geométricos”, “raciocínio geométrico” ou “conhecimento geométrico”, o que resultou 204 pesquisas. A partir dessas, para

---

<sup>47</sup>Consideramos *pontos de enfoque*, neste trabalho, os principais aspectos presentes nas pesquisas analisadas com relação a seus objetivos, abordagens metodológicas de formação e resultados que, de certo modo, dizem respeito ao processo de formação inicial de PEM investigado.

<sup>48</sup>Foram realizados três levantamentos. Inicialmente, no dia 15/05/2020 a busca dos trabalhos foi realizada em conjunto com outros três integrantes do Gepefopem. Em 14/01/2021, foi feito outro levantamento de trabalhos publicados no ano de 2019, porém não foram acrescentados novos trabalhos. Posteriormente, em 13/09/2021, realizamos um levantamento de trabalhos publicados no ano de 2020 e acrescentamos um trabalho.

selecionar os desenvolvidos em contextos de formação inicial, lemos o resumo, o sumário, a introdução, a fundamentação teórica e, em alguns casos, o trabalho completo, quando essas demais seções não eram suficientes para identificar o contexto da pesquisa. Essa seleção resultou em 7 dissertações que tratam da formação inicial de professores para a Educação Infantil e os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Portanto, o *corpus* é constituído por 7 dissertações (Quadro 1).

**Quadro 1** - Dissertações que constituem o *corpus* e seus contextos

Dissertação	Contexto
Dias (2012)	Formação de professores para a Educação Infantil (curso de Pedagogia)
Zambon (2010), Carvalho (2017), Vieira (2017) e Cardoso (2018)	Formação de professores para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (curso de Pedagogia)
Sánchez (2020)	Formação de professores para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens <sup>49</sup> )
Resende (2018)	Curso Normal <sup>50</sup>

**Fonte:** Elaborado pelas autoras

Para a etapa de análise, com o intuito de realizarmos um estudo descritivo e analítico dos objetivos e dos resultados, construímos uma ficha, com base em Fiorentini *et al.* (2016), contendo tópicos como: objetivo do trabalho; contexto e sujeitos; informações metodológicas; procedimentos analíticos; e principais resultados. Para preencher a ficha, lemos integralmente os sete trabalhos.

Assim como De Paula (2018), durante a leitura, a produção de fichamentos e as análises em geral, apoiamo-nos no paradigma indiciário<sup>51</sup> de Ginzburg (1989), a fim de encontrarmos indícios que nos possibilitassem analisar os trabalhos, de acordo com similaridades, particularidades, convergências ou divergências.

Em decorrência desta análise indiciária, encontramos aspectos em comum nas pesquisas que nos permitiram constituir três principais agrupamentos associados: às abordagens metodológicas para o ensino de geometria, utilizadas

<sup>49</sup> Tem como objetivo: “promover ‘iniciação acadêmica e científica’ aos futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental, mediante a abordagem interdisciplinar de questões abrangentes e fundamentais de conhecimento científico e social. Ao mesmo tempo, planeja-se criar um ambiente de estudos e de debates sobre a realidade contemporânea – incluída imprescindivelmente na formação docente – e, em particular, sobre o contexto sociocultural do Estado do Pará, da Região de inserção da UFPA e, especialmente, da Região Amazônica”. Disponível em <http://www.iemci.ufpa.br/index.php/graduacao>

<sup>50</sup> Curso Normal: que formava professores habilitados a lecionar no antigo Ensino Primário.

<sup>51</sup> O Paradigma Indiciário, de acordo com Ginzburg (1989), consiste na busca de indícios, sinais, pistas, conjecturas e inferências, a partir de dados aparentemente negligenciáveis, com a intencionalidade de realizar uma leitura atenta do elemento a ser estudado.

nos processos de formação inicial; aos conteúdos geométricos, abordados nessas formações; e aos aspectos da organização curricular, discutidos no decorrer dos trabalhos. Diante disso, algumas dissertações encontram-se em mais de um ponto de enfoque, visto que trazem elementos que foram analisados por diferentes perspectivas.

Na próxima seção, descreveremos os objetivos das pesquisas analisadas, uma síntese das ações desenvolvidas e os resultados por pontos de enfoque. Em seguida, discutiremos os referidos pontos de enfoque e apresentaremos algumas considerações.

#### DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO *CORPUS*

O Quadro 2 indica os objetivos e uma síntese das ações desenvolvidas pelos autores (as). Em seguida, descrevemos os principais resultados, organizados de acordo com os pontos de enfoque, nomeadamente **abordagens metodológicas**, **conteúdos geométricos** e **organização curricular** para o ensino de geometria na formação inicial de PEM.

**Quadro 2** - Objetivos e síntese das ações desenvolvidas nas pesquisas

Autor (a)	Objetivo	Síntese das ações desenvolvidas
Cardoso (2018)	“Investigar as contribuições de um curso de extensão para a formação em geometria dos professores dos Anos Iniciais” (p. 13).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Proposição de um curso de extensão para trabalhar conceitos de polígonos, poliedros e sólidos de revolução, utilizando material manipulável.</li> </ul>
Carvalho (2017)	“Discutir saberes relacionados ao ensino de Geometria nos anos iniciais eventualmente mobilizados por licenciandos em Pedagogia a partir de um conjunto de tarefas (trabalho prescrito, com orientação) em uma disciplina de Matemática” (p. 50).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Desenvolvimento de tarefas com licenciandos de um curso de Pedagogia na disciplina “Matemática: Conteúdos e Metodologias II”, utilizando diferentes abordagens metodológicas e conteúdos de geometria.</li> </ul>
Dias (2012)	“Investigar as concepções e ações pedagógicas adotadas no curso de Licenciatura em Pedagogia de um instituto superior de ensino da rede pública do estado do Rio de Janeiro, relativas à construção do pensamento geométrico em crianças da Educação Infantil, na faixa etária de três a seis anos” (p. 15).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Proposição e desenvolvimento da disciplina eletiva “Desenvolvimento do Pensamento Geométrico na Educação Infantil” em um curso de Pedagogia em que foram realizados teste diagnóstico com os licenciandos, entrevistas e aplicação de proposta de ensino baseada em dinâmicas e ações lúdicas.</li> </ul>
Resende (2018)	“Examinar como eram prescritos os saberes geométricos para a formação de professores primários em Sergipe no período de 1890 a 1944” (p. 13).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análise de documentos como planos de ensino e decretos referentes ao Curso Normal.</li> </ul>
	“Analisar a aprendizagem geométrica	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tarefas de familiarização com as</li> </ul>

Sánchez (2020)	que surge durante a simulação de um motor a dois tempos com o GeoGebra através dos meios semióticos de objetivação usada por futuros professores da Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental” (pp. 20-21).	ferramentas do <i>software</i> GeoGebra. <ul style="list-style-type: none"> <li>Proposição de construção no <i>software</i> GeoGebra de um virabrequim,<sup>52</sup> a partir de sua representação feita no quadro pelo professor.</li> </ul>
Vieira (2017)	“Analisar a importância da formação matemática do pedagogo, especificamente, nessa área de abordagem geométrica, para o ensino nos anos iniciais do ensino fundamental” (p. 17).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Observações e propostas em uma disciplina de ensino de Matemática, em um curso de Pedagogia, na qual a professora formadora<sup>53</sup> utilizava a Sequência Fedathi como proposta metodológica.</li> </ul>
Zambon (2010)	“Investigar como a Geometria se faz presente em cursos de formação inicial de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, cursos de Pedagogia, da região de Presidente Prudente/SP” (p. 82).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Levantamento dos cursos de Pedagogia da região de Presidente Prudente e análise das grades curriculares e dos planos de ensino de disciplinas, cujo foco fosse o ensino de Matemática.</li> <li>Seleção de duas instituições para observação de disciplinas.</li> </ul>

Fonte: Elaborado pelas autoras

Na sequência, descreveremos os resultados por pontos de enfoque, isto é, abordagens metodológicas, conteúdos de geometria e aspectos curriculares.

### Abordagens metodológicas para o ensino de geometria

Tendo em conta o nosso *corpus*, Dias (2012) destaca a importância de trabalhar, com os futuros PEM, diferentes estratégias de como ensinar geometria na Educação Infantil. Para isso, utilizou jogos de trilha e adaptações lúdicas de esportes e brincadeiras como o basquete, a pescaria e os que utilizam elásticos.

Os autores que trabalharam com propostas para o ensino de geometria para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, por outro lado, utilizaram material manipulável, como embalagens do cotidiano dos futuros PEM, para reconhecer corpos redondos e poliedros (CARDOSO, 2018; CARVALHO, 2017; ZAMBON, 2010); material construído de papel ou madeira e “blocos lógicos”, para representar sólidos geométricos ou figuras planas, contudo, sem ressalvas a respeito das dimensões das peças (ZAMBON, 2010).

<sup>52</sup> Virabrequim: uma das partes constituintes de um motor.

<sup>53</sup> Professor formador: professor que atua nos cursos de licenciatura e é responsável pelas disciplinas tanto específicas quanto pedagógicas.

O tangram<sup>54</sup>, construído pelos futuros PEM (CARDOSO, 2018; VIEIRA, 2017; ZAMBON, 2010), lhes permitiu estudar os conteúdos geométricos utilizados na construção (VIEIRA, 2017). Já o geoplano<sup>55</sup> foi usado em tarefas de planificação de sólidos geométricos, para discutir suas potencialidades nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (VIEIRA, 2017) e trabalhar noções de polígonos (CARVALHO, 2017).

Além de material manipulável, identificamos outras abordagens metodológicas para o ensino de geometria, como leituras e discussões das orientações propostas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 2000), relatadas por Zambon (2010), e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), versão de 2016, descrita por Vieira (2017), para o ensino de geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Outras abordagens referem-se à análise, pelos futuros PEM, de registros e de tarefas de estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (CARVALHO, 2017) e seminários, durante os quais as principais preocupações dos futuros PEM eram aspectos didáticos e pedagógicos (CARVALHO, 2017). Inclusive foi observado que os seminários foram o único momento de trabalho com a geometria em uma formação inicial de PEM (ZAMBON, 2010)<sup>56</sup>.

As tecnologias digitais estiveram presentes na forma de *slides*, para dinamizar o trabalho com figuras geométricas planas e espaciais; de um fórum digital, para a participação dos estudantes além do período das aulas presenciais, com o objetivo de complementar as discussões do conteúdo (VIEIRA, 2017); e com *softwares* de geometria dinâmica como o Poly 1.06, para trabalhar sólidos geométricos e planificações (ZAMBON, 2010), e o GeoGebra, para estudar planificações e características de formas geométricas planas e espaciais (CARVALHO, 2017) e para construir a representação de um virabrequim (SÁNCHEZ, 2020).

Para além dessas abordagens também identificamos propostas de análises de coleções de livros didáticos, do 1.º ao 5.º ano do Ensino Fundamental, com o intuito de discutir conteúdos geométricos privilegiados e abordagens utilizadas, o que auxiliou os licenciandos no processo de aprender a como ensinar geometria,

---

<sup>54</sup> Tangram: Quebra-cabeça mais conhecido na versão chinesa composta de sete peças poligonais.

<sup>55</sup> Geoplano: Placa com hastes, geralmente pregos, dispostos de forma equidistante, constituindo malhas quadriculadas, circulares, triangulares, entre outras.

<sup>56</sup> Zambon (2010) observou duas instituições de Ensino Superior e constatou que, em uma delas, o único momento de contato com a Geometria foi por meio de um seminário.

quando foi uma das últimas ações desenvolvidas pelo formador (CARVALHO, 2017). Por outro lado, quando a análise de livros didáticos foi realizada no início da formação, a criticidade dos licenciandos foi restringida, uma vez que ainda não haviam trabalhado com conteúdos de geometria (ZAMBON, 2010).

Outras abordagens para trabalhar geometria com os futuros PEM referem-se ao uso da Sequência Fedathi<sup>57</sup>, que envolvia situações-problema, investigações, protagonismo e ação do estudante (VIEIRA, 2017), e os métodos Intuitivo<sup>58</sup> e Ativo,<sup>59</sup> em determinados contextos históricos, ou seja, no período da Primeira República e no Movimento da Escola Nova, respectivamente (RESENDE, 2018).

Além disso, houve poucas discussões a respeito de tarefas específicas de geometria para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (ZAMBON, 2010). Ademais, os licenciandos aprendiam ou revisavam conteúdos de geometria, enquanto trabalhavam o como ensinar (CARVALHO, 2017; ZAMBON, 2010), de modo que julgamos pertinente analisar os conteúdos geométricos discutidos no *corpus*.

### **Conteúdos geométricos para o ensino de geometria**

Os trabalhos, que compõem o nosso *corpus*, destacam conteúdos geométricos, abordados na formação inicial de professores para a Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Com exceção de Dias (2012), que atuou no contexto da formação para a Educação Infantil com as geometrias Euclidiana, Projetiva e Topológica, nos demais encontramos apenas a Geometria Euclidiana. Dias (2012) abordou conceitos de interior, exterior, fronteira, noções topológicas de separação, coordenação motora, lateralidade, além de simetria e reconhecimento do que chamou de “formas geométricas elementares”: quadrado, retângulo, círculo e triângulo.

---

<sup>57</sup>“O princípio que rege a metodologia da Sequência Fedathi gira em torno da aprendizagem, tendo o aluno como fator principal da construção do conhecimento produzido. As características desse método se voltam para a aplicação de uma sequência de etapas” (VIEIRA, 2017, p. 48), a saber: Tomada de posição, Maturação, Solução e Prova.

<sup>58</sup>No Método Intuitivo, o professor do ensino primário “[...] deveria partir do concreto para o abstrato, do simples para o composto, ou seja, considerar e ensinar a partir de coisas e objetos que cercavam o cotidiano das crianças” (RESENDE, 2018, p. 54).

<sup>59</sup>No Método Ativo “[...] o aluno passa a ser ativo no processo de ensino, pelo qual, o dever do professor primário era estimular, incentivar, mas considerando que a iniciativa partiria do aluno” (RESENDE, 2018, p. 56).

A Figura 1 ilustra uma nuvem de palavras com os conteúdos de Geometria Euclidiana mais frequentes no *corpus*. Quanto maior o tamanho da palavra, maior a sua frequência nos trabalhos analisados.

**Figura 1** – Conteúdos de Geometria Euclidiana citados no *corpus*



**Fonte:** Elaborada pelas autoras

Com base na Figura 1, é possível observar que polígonos foi o conteúdo mais trabalhado, especificamente definições de polígonos (RESENDE, 2018), nomenclaturas (CARVALHO, 2017; DIAS, 2012; VIEIRA, 2017; ZAMBON, 2010) e algumas propriedades (CARVALHO, 2017; VIEIRA, 2017; ZAMBON, 2010). Os corpos redondos e os prismas também aparecem (CARVALHO, 2017; RESENDE, 2018; VIEIRA, 2017; ZAMBON, 2010). O conceito de simetria foi abordado tanto em objetos planos (CARVALHO, 2017; DIAS, 2012; ZAMBON, 2010) quanto espaciais (CARVALHO, 2017; DIAS, 2012). Além disso, noções de setor circular, rotação de figuras (SÁNCHEZ, 2020), círculo (CARVALHO, 2017; DIAS, 2012; RESENDE, 2018) e circunferência (CARVALHO, 2017; RESENDE, 2018) também foram trabalhadas. Conceitos de perímetro, área e volume, embora façam parte do bloco de conteúdos Grandezas e Medidas nos PCN (BRASIL, 1997), foram abordados em articulação com objetos da geometria (CARVALHO, 2017; ZAMBON, 2010).

Outro ponto destacado no *corpus* refere-se ao fato de que grande parte dos licenciandos sabia que precisaria ensinar Matemática, mas não via isso como um problema por desconsiderar a complexidade dos conteúdos, especificamente, dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (ZAMBON, 2010).

Por defasagens da Educação Básica, os licenciandos apresentaram dificuldades com conteúdos, como redução e ampliação de figuras planas, levando-os a se comportarem como estudantes da Educação Básica aprendendo geometria, o que prejudicava discussões propostas para a formação inicial de PEM. Esse fato fez com que o autor/formador alterasse seu planejamento no decorrer da formação, pois a frequente necessidade de retomar conceitos exigiu que excluísse algumas tarefas e incluísse encontros. Após essa adequação, os futuros PEM começaram a perceber que seria possível aprender os conteúdos e como ensiná-los, o que passou a proporcionar “um diálogo produtivo, com discussões sobre as tarefas e sua possível implementação em sala de aula” (CARVALHO, 2017, p. 144).

Carvalho (2017) destaca que, por diversos fatores, como por exemplo o tempo restrito, muitas vezes os futuros PEM não mobilizaram todos os conteúdos geométricos presentes nas tarefas. Zambon (2010, p. 139) aponta que “na tentativa de trabalhar junto aos alunos do curso de Pedagogia uma variedade de conteúdos, tornou-se restrito o tempo dedicado para os aspectos metodológicos”.

Na próxima seção apresentaremos aspectos da organização curricular para o ensino de geometria presentes no *corpus*.

### **Organização curricular para o ensino de geometria**

A organização curricular da formação inicial de PEM na Educação Infantil ou nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental também foi investigada em alguns trabalhos do *corpus*, seja para selecionar disciplinas de formação para análises posteriores (ZAMBON, 2020) seja para verificar como a geometria estava presente em currículos do Curso Normal de 1890 a 1944 em Sergipe (RESENDE, 2018).

Zambon (2010), em sua busca em cursos de Pedagogia da região de Presidente Prudente (São Paulo), não encontrou disciplinas específicas para o ensino de geometria, apenas para o ensino de Matemática de forma geral. A autora observou aulas das disciplinas “Conteúdos, Metodologias e Prática de Ensino de Matemática – I e II”, na qual de dez encontros, dois foram voltados exclusivamente à geometria, e “Matemática no Ensino Fundamental”, em que de nove encontros, um foi de geometria. As professoras formadoras, das duas instituições observadas, ressaltaram que o tempo restrito dificultava o trabalho com os conteúdos previstos, uma vez que precisavam abranger todas as áreas da Matemática (ZAMBON, 2010).

Resende (2018) destaca, ao analisar o Curso Normal de 1890 a 1944 em Sergipe, que os saberes geométricos estavam presentes desde o primeiro ano de formação ou por meio do Desenho ou da Geometria propriamente dita. Além disso, identifica a disciplina “Methodologia especial do ensino da geometria plana aplicada na aula primaria”<sup>60</sup>, em um documento de 1917. A geometria, no entanto, estava em segundo plano, se comparada com a Aritmética.

#### DISCUSSÃO DOS PONTOS DE ENFOQUE DO *CORPUS*

Consideramos, inicialmente, a possibilidade de construir dois subgrupos para analisar as pesquisas: *como o futuro PEM aprende geometria* e *como o futuro PEM aprende para ensinar geometria*. Isto é, se o foco era ensinar geometria aos estudantes do curso de Pedagogia, e quais as abordagens utilizadas, ou se o foco estava em estratégias de como os futuros PEM poderiam aprender a ensinar geometria. No entanto, no decorrer da leitura dos trabalhos, na busca de indícios que corroborassem essa análise, percebemos que não seria possível fazer tal separação, visto que estes aspectos foram trabalhados simultaneamente.

A necessidade de ensinar geometria concomitante com estratégias de como ensiná-la ocorre, muitas vezes, pelas dificuldades com os conteúdos da Educação Básica que os futuros PEM apresentam, ao ingressar no Ensino Superior. Esse fato faz com que se desvie o foco de discussões inerentes à futura prática em sala de aula, para questões que, supostamente, deveriam ter sido aprendidas pelos futuros PEM, como estudantes da Educação Básica. Assim, frequentemente, é preciso retomar conteúdos, ensinar geometria, antes ou simultaneamente com as abordagens de como ensiná-la na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, para que as discussões sejam produtivas. Nesse sentido, concordamos com Santos e Teles (2021, p. 83), ao afirmarem que “dominar o conteúdo a ensinar influencia amplamente o modo de ensiná-lo”.

Nas pesquisas que compõem o *corpus*, muitos futuros PEM desconheciam a complexidade dos conteúdos de geometria da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, julgavam-nos fáceis e passíveis de serem ensinados, utilizando abordagens lúdicas ou manipuláveis. Quer para aprender geometria quer

---

<sup>60</sup>Preservamos a escrita original da época relatada por Resende (2018).

para trabalhar formas de como ensiná-la, uma das abordagens mais encontradas durante a análise foi o uso de material manipulável.

Compartilhamos das ideias de Rodrigues e Gazire (2012, p. 188) de que o material didático manipulável deve ser abordado nos cursos de formação inicial de professores, na medida em que “constituem um importante recurso didático a serviço do professor em sala de aula. Estes materiais podem tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis”, o que os tornam importantes auxiliares no ensino de geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (BRUNHEIRA, 2019).

O material manipulável é essencial para ensinar geometria, especialmente para crianças, como destaca van Hiele (1984a), ao defender a relevância de uma base sólida com material visual para abordar geometria nessa faixa etária. Para o autor, o ensino de geometria deve iniciar com jogos ou brincadeiras<sup>61</sup>, como mosaicos, geoplano e tangram, pois podem enriquecer suas estruturas visuais, fundamentais para o processo inicial de aprendizagem (VAN HIELE, 1999).

Parzysz (2006) defende, no entanto, que a “Geometria Concreta” não se trata de uma geometria, pois tem características físicas que não dizem respeito aos objetos geométricos, que são teóricos. Estas afirmações vão ao encontro do que defende Pais (1996), ou seja, a necessidade de transpor a materialidade de objetos manipuláveis e desenhos em busca da abstração, para não tornar o ensino puramente experimental. “Caso contrário, recai-se no erro indesejável de admitir a existência de uma ‘geometria concreta’, o que seria contraditória aos objetos da educação matemática” (PAIS, 1996, p. 68, grifo do autor). Assim, cabe destacar na formação inicial de PEM limitações dos recursos didáticos e em que medida podem ser associados aos objetos geométricos (DUVAL, 2009; PAIS, 1996; PARZYSZ, 2001).

Ademais, os recursos utilizados, sejam eles material manipulável, tecnologias digitais ou demais abordagens, têm caráter auxiliar. São imprescindíveis objetivos definidos e práticas atentas às diferentes possibilidades. O professor, como um mediador, não deve se limitar à exploração de material manipulável ou de recursos tecnológicos. A proposta pedagógica para o ensino de geometria deve considerar a exploração de material, na condução das aulas, tendo em conta os conceitos e as propriedades geométricas a serem trabalhados.

---

<sup>61</sup> O autor utiliza o termo *play*.

Van Hiele (1984b) destaca, quanto ao ensino de geometria, a importância do uso de instruções e material manipulável bem planejado pelos professores, pois serão esses os principais determinantes para o avanço na aprendizagem. Desse modo, mesmo que o material manipulável seja importante e colabore para o ensino de geometria, também concordamos com Pais (2000, p. 6) quanto à responsabilidade da formação de professores no estudo das potencialidades do material manipulável, quando são

[...] indevidamente tratados como objetos de estudo em si mesmo em detrimento da ênfase aos conceitos geométricos correspondentes. Em suma, uma inversão didática ocorre quando um instrumento pedagógico, idealizado para facilitar o processo de aprendizagem, passa a ser utilizado como se fosse o próprio objeto de estudo em si mesmo. Tudo indica que as inversões resultam de uma série de fatores, entretanto, cumpre ressaltar que uma das principais continua sendo o persistente problema de formação de professores. Diante das dificuldades de organização das situações de aprendizagem, normalmente, tem-se a ilusão que o material possa, por si mesmo, resolver o problema básico da formação.

Especial atenção deve ser dada também aos conteúdos geométricos trabalhados. A despeito de nosso recorte ser considerado restrito com relação ao número de pesquisas analisadas, destacamos o “monopólio euclidiano”. Mesmo que o espaço e o cotidiano sejam regidos pelos mais variados fenômenos e formas, a Geometria Euclidiana predominou nas investigações. Vale lembrar que os conteúdos não euclidianos já se fazem presentes em documentos oficiais, mesmo antes da publicação dos PCN (BRASIL, 1997).

Sabemos das dificuldades de os cursos de Pedagogia abordarem todos os conteúdos previstos e necessários à formação. Na literatura, há estudos, como o de Almeida e Lima (2012) e o de Barreto *et al.* (2021), que destacam a reduzida carga horária de cursos de Pedagogia destinada à Matemática, o que leva a, conseqüentemente, ser ainda mais precário o trabalho com a geometria. Como destacado por Lorenzato (1995), o fato de os professores não trabalharem com a geometria da forma mais adequada possível é algo previsível, uma vez que eles mesmos não tiveram formação suficiente, o que é confirmado atualmente por Nasser e Vieira (2015) e também pelas análises de nosso *corpus*.

Dito isso, destacamos, a partir das dissertações analisadas, que os futuros PEM são, muitas vezes, colocados como os principais responsáveis pela sua formação, possivelmente deixando de lado algumas obrigações e desajustes de

outros determinantes, como a organização curricular do curso de formação, a dedicação exclusiva ou não aos estudos, as formações e as perspectivas dos professores formadores e, sobretudo, as obrigações e as interferências de políticas públicas existentes na Educação como um todo.

Não se trata de considerar o professor como um agente técnico, reproduzidor e dependente em seu processo de formação, ou como alguém que não produz conhecimento, apenas o recebe pronto e inalterável, pois

[...] não nos referimos a qualquer proposta de formação de PEM, mas sim àquela que valoriza o (futuro) professor como protagonista do seu processo de formação, como produtor de conhecimento; que articula a prática letiva do PEM com a sua profissão, com as políticas educacionais e as políticas públicas mais amplas. Cursos de formação de professores constituídos de conteúdos predeterminados pelo formador, com técnicas pedagógicas homogêneas, assumidas como “receitas” ou “fórmulas mágicas”, que tencionam “colonizar” o professor e a escola, nos parecem ineficazes, além de perversos. (CYRINO, 2017, p. 709, grifos dos autores)

Além disso, a formação inicial não é o único espaço possível de formação, pois muitos conhecimentos podem ser constituídos com a prática e em formações continuadas (LIMA; SILVA, 2015; PASSOS; NACARATO, 2018). No entanto, não podemos eximir os cursos de formação inicial dessa responsabilidade (ALMEIDA; LIMA, 2012; PASSOS; NACARATO, 2014), visto que a prática diária do professor, sobretudo a prática do professor iniciante, pode não ser passível de suprir grandes lacunas da formação inicial.

#### ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A partir das análises no *corpus*, encontramos indícios de três pontos de enfoque que se complementam, ao descreverem como ocorreram os processos de formação inicial de PEM na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: abordagens metodológicas, conteúdos geométricos, aspectos da organização curricular.

Para abordar geometria na formação inicial de PEM, embora tenha prevalecido o uso de material manipulável, as tecnologias digitais, como *softwares*, também foram utilizadas. Esse fato pode favorecer o uso desses recursos nas salas de aula da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Todavia, outras tendências como Resolução de Problemas e Modelagem Matemática, por

exemplo, não foram identificadas.

Outro ponto observado no *corpus* diz respeito ao uso de documentos oficiais orientadores, como os PCN (2000) e a BNCC (versão de 2016) em discussões com os futuros PEM. No entanto, não identificamos investigações acerca de como esses cursos de formação inicial de PEM têm se posicionado adiante das novas demandas da BNCC para o ensino de geometria. Esse fato pode se justificar pelo pouco tempo de implementação dessas orientações. Desse modo, é necessário investigar em que medida a BNCC tem influenciado os cursos de Pedagogia, com relação ao ensino de Matemática, especificamente geometria, bem como o seu impacto na sala de aula.

O fato de nosso *corpus* ser constituído apenas por dissertações de mestrado fortalece a necessidade de pesquisas de doutorado por permitirem investigações mais específicas da formação de professores que ensinam geometria na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Mesmo que a geometria seja considerada essencial para o desenvolvimento dos estudantes, destacamos a quase ausência de abordagens e de trabalhos específicos do contexto do ensino de geometria na Educação Infantil. Apenas Dias (2012) investiga uma proposta de formação inicial de PEM, voltada para essa etapa, por meio de uma disciplina específica para o trabalho com a geometria, embora eletiva, em um curso de Pedagogia.

Outros trabalhos (CARDOSO, 2018; CARVALHO, 2017) abordam contextos de curso de extensão, o que possibilitou que os futuros PEM também tivessem acesso aos conteúdos de geometria e formas de como ensiná-los. Ressaltamos esses fatos em vista das dificuldades com conceitos geométricos apresentadas por futuros PEM, o que sugere repensar aspectos da organização curricular e de carga horária desses cursos.

Em um curso de formação inicial de professores polivalentes, mesmo que necessário, muitas vezes é inviável o trabalho personalizado em diferentes áreas. Diante disso, a curricularização da extensão, em discussão no cenário atual da formação inicial, pode ser um apoio à organização curricular da formação inicial de PEM na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. A Formação Continuada, na sequência, poderá abordar outros aspectos e minimizar lacunas da formação inicial.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. B.; LIMA, M. G. Formação inicial de professores e o curso de pedagogia: reflexões sobre a formação matemática. **Ciência & Educação**, [S. L.], v. 18, n. 2, p. 451-468, 2012.
- BARRETO, M. C. *et al.* Estado da arte em pesquisas acadêmicas brasileiras, de 2010 a 2019, sobre o ensino de geometria desenvolvidas no Nordeste. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 39, n. 1, p. 1-22, jan./mar. 2021.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/ Anos iniciais**. Brasília, 1997, 142 p.
- BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – PCN. Brasília: MEC/SEF, 2. ed, 2000.
- BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018, 600p.
- BRUNHEIRA, L. M. A. **O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos primeiros anos**. 2019. 242 f. Tese (Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2019.
- CRECCI, V. M.; NACARATO, A. M.; FIORENTINI, D. Estudos do estado da arte da pesquisa sobre o professor que ensina matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 25, n. 1, p. 1-6, 30 abr. 2017. Universidade Estadual de Campinas.
- CYRINO, M. C. C. T. Identidade Profissional de (futuros) Professores que Ensinam Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, [s. l.], v. 10, n. 24, p. 699-712, 2017.
- DE PAULA, E. F. **Identidade profissional de professores que ensinam matemática**: indicativos de pesquisas, elementos e ações para elaboração de uma proposta investigativa. 2018. 227 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.
- DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012. (Coleção Formação de Professores).
- FIORENTINI, D. *et al.* O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. *In*: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. d. (Org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática**: período 2001 – 2012. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/pf->

fe/pf/subportais/biblioteca/fev-2017/e-book-mapeamento-pesquisa-pem.pdf. Acesso em: 06 out. 2020.

GINZBURG, C. **Mitos, emblemas, sinais**. São Paulo: Companhia das Letras, 1989.

HOURIGAN, M.; LEAVY, A. M. Preservice Primary Teachers' Geometric Thinking: is pre-tertiary mathematics education building sufficiently strong foundations? **The Teacher Educator**, [s.l.], v. 52, n. 4, p. 346-364, 8 set. 2017.

KUZNIAK, A.; NECHACHE, A. On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of mathematical working spaces. **Educational Studies in Mathematics**, [s.l.], v. 106, n. 2, p. 271-289, 4 jan. 2021.

LEME DA SILVA, M. C. **Histórias do Ensino de Geometria nos anos iniciais e seus parceiros**: desenho, trabalhos manuais e medidas. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

LIMA, G. L; SILVA, M. J. F. Conhecimentos docentes para o ensino de geometria em um curso de licenciatura em matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 159-177, jul./dez. 2015.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? *In*: **A Educação Matemática em Revista**. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, 1995, p. 3-13.

NASSER, L.; VIEIRA, E. R. Formação de professores em geometria: uma experiência no ciclo de alfabetização. **Vidya**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 19-36, jul./dez. 2015.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, v. 4, n. 2, 1996.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. **Reunião da ANPED**, v. 23, p. 24, 2000.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *In*: **Actes du 28 ème colloque COPIRELEM** (Tours, juin 2001). p. 99-110. 2001.

PARZYSZ, B. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il. **Quaderni di Ricerca in Didattica**, v. 17, p. 121-144, 2006.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M. O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da província Brasil. **Educação, Matemática, Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1147-1168, 2014.

PASSOS, C. L. B; NACARATO, A. M. Trajetória e perspectivas para o ensino de Matemática nos anos iniciais. **Estudos Avançados**, [S.L.], v. 32, n. 94, p. 119-135, dez. 2018.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e

consequências. **Zetetiké**, Campinas, n. 1, p. 7-17, 1993.

PENTEADO, D. R.; PEREIRA, A. L.; BRANDT, C. F. Geometria no ensino fundamental: das exigências legais às práticas cotidianas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [s.l.], v. 8, n. 16, p. 48-81, 1 jul./dez. 2019.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 187-196, 13 dez. 2012.

SANTOS, L. F.; TELES, R. A. M. Conhecimento dos professores sobre geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: um estado da arte. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [s.l.], v. 23, n. 1, p. 79-111, 11 abr. 2021.

VAN HIELE, P. M. English summary. The problem of insight in connection with school children's insight into the subject matter of geometry. Doctoral dissertation, University of Utrecht, 1957. *In*: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Eds.). **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele**. Brooklyn: Brooklyn College, p. 237-241, 1984a.

VAN HIELE, P. M. A child's thought and geometry. *In*: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Eds.). **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele**. Brooklyn: Brooklyn College, p. 243-252, 1984b.

VAN HIELE, P. M. Developing Thinking through Activities That Begin with Play. **Teaching Children Mathematics**. v. 6, p. 310-316, fev. 1999.

#### REFERÊNCIAS DO CORPUS ANALISADO NESTE ESTUDO

CARDOSO, F. P. **Contribuições de um curso de extensão em geometria para a formação matemática de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2018. 108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2018.

CARVALHO, H. A. F. **Aprendendo a ensinar geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: um estudo com alunos de Pedagogia de uma universidade federal mineira. 2017. 192 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2017.

DIAS, R. R. **A Construção do pensamento geométrico na formação inicial de professores da Educação Infantil**. 2012. 155 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) - Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012.

RESENDE, M. J. **Saberes geométricos para a formação de professores primários em Sergipe**: uma investigação sobre o período de 1890 A 1944. 2018. 86 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Fundação

Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2018.

SÁNCHEZ, I. C. **Aprendizagem geométrica em torno das ideias presentes na simulação de um motor a dois tempos no GeoGebra**: Um estudo de caso. 2020. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

VIEIRA, N. S. O. **A formação matemática do pedagogo**: reflexões sobre o ensino de geometria. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

ZAMBON, A. E. C. **A geometria em cursos de pedagogia da região de Presidente Prudente - SP**. 2010. 237f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Presidente Prudente, 2010.

## **GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: PONTOS DE ENFOQUE DE DISSERTAÇÕES E TESES BRASILEIRAS (2009- 2020)**

**Resumo:** Este artigo tem por objetivo descrever e discutir pontos de enfoque de teses e dissertações brasileiras (2009-2020), que abordaram a geometria na formação inicial de professores de Matemática. Para a constituição do *corpus* de análise foi realizado um mapeamento de dissertações e teses publicadas em Programas de Pós-graduação brasileiros *Stricto Sensu*, das Áreas de Educação e Ensino, nas plataformas digitais dos catálogos de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, totalizando 11 pesquisas. A partir da leitura na íntegra e da produção de fichamentos, identificaram-se trabalhos que focam em estratégias associadas às aprendizagens de futuros professores de Matemática em geometria; e em relações estabelecidas a partir de conhecimentos de geometria de futuros professores de Matemática. As análises indicam que os trabalhos cujo foco está em estratégias associadas às aprendizagens em geometria se preocupam com questões de provas, demonstrações e, principalmente, de conceitos geométricos euclidianos. Para promover tais aprendizagens utilizaram, especialmente, tecnologias digitais, no entanto, o fazem de forma restrita, para confirmar hipóteses ou agilizar construções. Os trabalhos que investigaram relações estabelecidas, a partir de conhecimentos de futuros professores de Matemática, abordaram relações entre as perspectivas de Pierre van Hiele e de Nicolas Balacheff e entre Geometria Plana e grafismo indígena.

**Palavras-chave:** Ensino de geometria; formação inicial de professores de Matemática; mapeamento de teses e dissertações

## **GEOMETRY IN INITIAL EDUCATION OF MATHEMATIC TEACHERS: FOCUSES OF BRAZILIAN DISSERTATIONS AND THESIS (2009-2020)**

**Abstract:** This article aims to describe and discuss the focuses of Brazilian master and doctoral studies, published between the years 2009 and 2020, which approached geometry in the initial education of mathematics teachers. To compose the *corpus* analyzed, masters and doctoral studies, from, Education and Teaching Areas of Brazilian post-graduate *strictu sensu* programs were mapped in both digital databases of Catalogue of Thesis and Dissertations of Higher Education Personal Improvement Coordination (CAPES) and Brazilian Digital Library of Thesis and Dissertations (BDTD), finding 11 researches. From works full-text reading and some registrations, were identified works that focus on strategies associated with the prospective mathematics teachers learning geometry; and in relations established from prospective mathematics teachers' geometrics knowledge. The analysis highlights that works that focus on strategies associated with geometry learning concern about proof, demonstrations, and, mainly, Euclidean geometric concepts issues. To promote these learnings they used, especially, digital technologies, however, in a restricted way, to confirm hypotheses or to build faster. The works that investigate relations established, from prospective mathematics teachers' geometrics knowledge, approached relations between Pierre van Hiele and Nicolas Balacheff

perspectives and between plane geometry and indigenous graphics.

**Keywords:** geometry teaching; initial education of mathematics teachers; theses and dissertations mapping.

## INTRODUÇÃO

A Geometria é uma das áreas da Matemática prevista para ser ensinada no Brasil em toda as etapas da Educação Básica (BRASIL, 2018), visto que possibilita pensar criticamente, resolver problemas, utilizar o raciocínio dedutivo, estabelecer conjecturas e generalizações, com ou sem o apoio de tecnologias digitais (VALE; PIMENTEL, 2017), além de desenvolver a argumentação (NASSER; FERREIRA; VAZ, 2017; VALE; PIMENTEL, 2017).

Desse modo, a formação de professores, especialmente a inicial, ocupa papel central na preparação de (futuros) professores (CRESCENTI, 2008; ROLDÃO, 2017). Estudos relatam, todavia, dificuldades de futuros professores de matemática (FPM) com conceitos de geometria (ATASOY, 2019; CRESCENTI, 2008; FERNER; SOARES; MARIANI, 2020; PEREIRA DA COSTA; SANTOS, 2020; ULUSOY; ÇAKIROĞLU, 2016).

Diante disso, investigações realizadas no âmbito do Gepefopem<sup>62</sup>, do qual fazemos parte, contribuem para discutir aspectos inerentes à formação desses professores, dentre eles a geometria na formação de professores que ensinam matemática.

O objetivo do presente artigo é descrever e discutir pontos de enfoque de teses e dissertações brasileiras (2009-2020), que abordaram a geometria na formação inicial de professores de Matemática, considerando seus objetivos e principais resultados. Assim, estudamos o que tem sido pesquisado a respeito da geometria na formação inicial de FPM, possíveis lacunas e perspectivas para essa temática. Para isso, julgamos pertinente a pesquisa de mapeamento, visto que o crescente número de investigações acerca da formação de professores que ensinam matemática reforça a necessidade de estudos que visem verificar o que tem sido pesquisado (CRECCI; NACARATO; FIORENTINI, 2017).

Na sequência, descreveremos nossos procedimentos metodológicos de

---

<sup>62</sup>Gepefopem - Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática, da Universidade Estadual de Londrina (UEL), coordenado pela Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.

mapeamento para a constituição e a análise do *corpus* de teses e dissertações, seguidos da descrição, da discussão dos resultados encontrados e de algumas considerações.

#### PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Essa pesquisa caracteriza-se como documental (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), tendo sido iniciada com mapeamento, seguido de análise.

Para o mapeamento, realizamos três levantamentos<sup>63</sup> de dissertações (mestrados acadêmico e profissional) e teses, oriundas de Programas de Pós-graduação brasileiros *Stricto Sensu* das Áreas de Educação e Ensino reconhecidos pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Os levantamentos foram feitos na plataforma digital do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e no catálogo digital da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.

Em um primeiro momento, selecionamos 204 teses e dissertações do período 2009-2020 que continham no título ou no resumo as expressões “pensamento geométrico”, “saber geométrico”, “saberes geométricos”, “raciocínio geométrico” ou “conhecimento geométrico”. Na sequência<sup>64</sup>, lemos o resumo, o sumário, a introdução, a fundamentação teórica e demais seções consideradas necessárias para identificar se o trabalho foi desenvolvido no âmbito da formação inicial de professores de matemática, o que resultou em 11 pesquisas (7 teses e 4 dissertações), que constituem nosso *corpus*.

Em seguida, para a análise, realizamos a leitura dos 11 trabalhos na íntegra e preenchemos uma ficha, construída com base em Fiorentini *et al.* (2016), buscando tópicos como o objetivo da pesquisa e os principais resultados. Durante a análise, consideramos o Paradigma Indiciário<sup>65</sup> de Ginzburg (1989), assim como De Paula

---

<sup>63</sup>O primeiro levantamento ocorreu no dia 15/05/2020 em conjunto com outros três integrantes do Gepefopem. No segundo levantamento, em 14/01/2021, buscamos trabalhos apenas do ano de 2019. O terceiro levantamento, em 13/09/2021, focou em trabalhos publicados no ano de 2020, a partir do qual encontramos dois trabalhos e que compõem o *corpus*.

<sup>64</sup>Nessa etapa, julgamos necessário realizar leituras cuidadosas para selecionar os trabalhos em detrimento de buscas por palavras, visto que esta seleção demandou reflexão e discussão.

<sup>65</sup> O Paradigma Indiciário, de acordo com Ginzburg (1989), consiste na busca de indícios, sinais, pistas, conjecturas e inferências, a partir de dados aparentemente negligenciáveis, com a intencionalidade de realizar uma leitura atenta do elemento a ser estudado.

(2018), a fim de encontrarmos indícios que nos possibilitassem analisar similaridades, particularidades, convergências ou divergências entre os trabalhos.

A partir dessa análise, identificamos aspectos e possíveis articulações entre os trabalhos, que nos permitiram agrupá-los por dois pontos de enfoque<sup>66</sup>, nomeadamente pesquisas que se dedicam a investigar: 1) estratégias associadas às aprendizagens de FPM em geometria, utilizando tecnologias digitais ou tarefas, e 2) relações estabelecidas a partir de conhecimentos de FPM em geometria.

Na próxima seção, exporemos os objetivos dos trabalhos que constituíram o *corpus* e uma síntese das ações desenvolvidas pelos investigadores. Em seguida, discutiremos os pontos de enfoque na busca de compreender como os momentos de formação inicial conduziram as investigações de estratégias associadas às aprendizagens de FPM em geometria e as relações estabelecidas com base nos conhecimentos desses FPM nessa temática. E, por fim, algumas considerações.

#### DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO *CORPUS*

O Quadro 1 ilustra os objetivos dos trabalhos analisados e uma síntese das ações desenvolvidas pelo investigador, organizados por ponto de enfoque.

**Quadro 1** - Objetivos e síntese das ações desenvolvidas nas pesquisas

Ponto de enfoque	Autor (a)	Objetivo do trabalho	Síntese das ações desenvolvidas
1a) Estratégias associadas às aprendizagens de FPM em Geometria diante do uso de <b>tecnologias digitais</b>	Dias (2009)	“Investigar a influência dos ambientes de geometria dinâmica na construção de argumentações, por alunos da licenciatura em Matemática” (p. 7)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proposição de dois problemas, que envolviam conteúdos geométricos do Ensino Médio, para estudantes de Licenciatura em Matemática</li> <li>• Em um primeiro momento deveriam utilizar papel e lápis e, depois, o <i>software</i> GeoGebra.</li> </ul>
	Janzen (2011)	“Buscar compreender qual o papel do professor de ensino superior frente às tecnologias como formador do pensar matematicamente tendo como cenário o desenvolvimento de provas num ambiente dinâmico de geometria” (p. 16)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Desenvolvimento de um experimento de ensino com professores do Ensino Superior e estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática</li> <li>• O experimento consistiu em duas questões abertas de prova em geometria usando o GeoGebra.</li> </ul>

<sup>66</sup> Consideraremos *pontos de enfoque* os aspectos presentes nas pesquisas analisadas com relação a seus objetivos e principais resultados que se articulam com o processo de formação inicial, relatado na pesquisa analisada.

	<b>Oliveira (2015)</b>	“Investigar as contribuições e as potencialidades do MDV3D Open Sim para os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, focando o olhar investigativo nas estratégias didáticas que professores de Matemática e alunos podem utilizar em suas aulas” (p. 19)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proposta de um curso de extensão (presencial e <i>online</i>) para alunos de um curso de Licenciatura em Matemática</li> <li>• O curso foi realizado no ambiente virtual do <i>software Open Sim</i> com tarefas, construções e diálogos de conteúdos de geometria.</li> </ul>
	<b>Oliveira (2017)</b>	“Compreender como o conhecimento Matemático-Geométrico é constituído por meio de atividades investigativas de Geometria das Transformações com o uso de software de geometria dinâmica” (p. 15)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proposta de 11 problemas de geometria das Transformações, utilizando construções no <i>software GeoGebra</i> por meio de simetria, translação, rotação e homotetia.</li> </ul>
	<b>Zanella (2018)</b>	“Compreender como a coordenação de diferentes representações semióticas possibilitada pelo uso do GeoGebra influencia a apreensão de objetos geométricos e suas propriedades por futuros professores de Matemática.” (p. 32)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicação de questionários e entrevistas com estudantes de um Curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática</li> <li>• Análise de tarefas de geometria com o GeoGebra em uma disciplina de Geometria Euclidiana.</li> </ul>
1b) Estratégias associadas às aprendizagens de FPM em Geometria a partir de tarefas	<b>Almeida (2018)</b>	“Investigar o estudo de atividades de geometria com alunos da Licenciatura em Matemática na construção do conhecimento geométrico no âmbito da geometria plana, geometria analítica plana e da geometria analítica vetorial” (p. 24)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proposição de atividades de demonstração de conceitos geométricos das geometrias plana, analítica plana e analítica vetorial, relacionando com conteúdos do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e da Licenciatura em Matemática.</li> </ul>
	<b>Brasil (2017)</b>	“(re) construir conhecimentos geométricos, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas” (p. 19)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proposição de um curso de extensão, em dez encontros, que utilizou a Resolução de Problemas para abordar conteúdos geométricos.</li> </ul>
	<b>Fonseca (2020)</b>	“Analisar como alunos de um curso de licenciatura em matemática, de um instituto federal de educação, compreendem relações métricas em triângulos esféricos, a partir de relações na geometria euclidiana” (p. 30)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proposição de tarefas nas Geometrias Euclidiana Plana e Não Euclidiana Esférica</li> <li>• As tarefas envolviam características e propriedades de triângulos, ângulos e expressões trigonométricas.</li> </ul>
	<b>Moreira (2010)</b>	“Contribuir com a formação inicial de professores de Matemática no que diz respeito ao ensino de geometria, particularmente o conceito de área” (p. 7)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Organização e aplicação de oficinas com licenciandos de Matemática para abordar a área como grandeza geométrica além de uma medida.</li> </ul>
2) Relações estabelecidas, com base nos conhecimentos de futuros professores de matemática	<b>Cicarini (2015)</b>	“Investigar as relações entre a geometria plana e o grafismo indígena no contexto histórico matemático do grupo Tukano de alunos da Licenciatura Intercultural dos Povos Indígenas do Alto Rio Negro” (p. 74)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entrevistas semiestruturadas com cinco indígenas pertencentes ao grupo Tukano, estudantes da Licenciatura Intercultural dos Povos Indígenas do Alto Rio Negro.</li> </ul>
	<b>Lima (2020)</b>	“Estabelecer articulações entre os níveis de pensamento geométrico discutidos por van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff,” (p. 24)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proposta de sete atividades que envolviam justificativas e/ou provas de conteúdos de geometria com licenciandos em Matemática.</li> </ul>

**Fonte:** Elaborado pelas autoras (grifo das autoras). Legenda das cores: Teses em vermelho, dissertações em azul

A fim de compreender aspectos inerentes à geometria presente em pesquisas realizadas com FPM, apresentaremos, a seguir, as perspectivas que se fazem presentes nos pontos de enfoque.

### **Foco 1: estratégias associadas às aprendizagens de futuros professores de Matemática em geometria**

Na análise dos trabalhos, observamos que, nas investigações de estratégias associadas às aprendizagens de geometria de FPM, os autores do *corpus* utilizaram tecnologias digitais (DIAS, 2009; JANZEN, 2011; OLIVEIRA, 2015; OLIVEIRA, 2017; ZANELLA, 2018) e tarefas (ALMEIDA, 2018; BRASIL, 2017; FONSECA, 2020; MOREIRA, 2010). A seguir, os resultados dessas pesquisas, tendo em conta seu ponto de enfoque.

#### *Foco 1a: Uso de Tecnologias Digitais*

As tecnologias digitais utilizadas para promover estratégias associadas às aprendizagens dos FPM foram os *softwares Open Sim*<sup>67</sup> (OLIVEIRA, 2015) e GeoGebra (DIAS, 2009; JANZEN, 2011; OLIVEIRA, 2017; ZANELLA, 2018).

Os autores se propuseram a investigar potencialidades das tecnologias digitais para abordar conceitos de ângulos e relações entre áreas de figuras geométricas semelhantes (DIAS, 2009), planificações, medidas de ângulos, cálculo de perímetro, área e volume, como aspectos de polígonos e sólidos geométricos (OLIVEIRA, 2015; ZANELLA, 2018), utilização do Teorema de Pitágoras (ZANELLA, 2018), posições relativas entre retas, como tangência, paralelismo e perpendicularismo, particularidades de círculo e de circunferência (DIAS, 2009; ZANELLA, 2018), possibilidades de transformações geométricas de simetria, translação, rotação e homotetia (OLIVEIRA, 2017), além de envolver “nenhum conteúdo específico de geometria, mas sim um conhecimento geral e propriedades básicas dessa área” (JANZEN, 2011, p. 72).

As tecnologias digitais promoveram estratégias associadas às aprendizagens de geometria por meio de interação e colaboração entre os licenciandos (OLIVEIRA, 2015; OLIVEIRA, 2017; ZANELLA, 2018). O *Open Sim*, especificamente, permitiu

---

<sup>67</sup> Plataforma interativa na qual podemos criar avatares para explorar os ambientes construídos.

respostas fundamentadas, autonomia, leitura, interpretação, resolução de problemas e construção de estratégias didáticas (OLIVEIRA, 2015).

O GeoGebra, por sua vez, potencializou estratégias de aprendizagens de geometria por proporcionar a produção de conjecturas e soluções gerais (DIAS, 2009; JANZEN, 2011; OLIVEIRA, 2017; ZANELLA, 2018), viabilizar diferentes representações para os mesmos objetos geométricos de modo integrado (ZANELLA, 2018) e auxiliar em processos de prova e demonstração, por meio do movimento (JANZEN, 2011; OLIVEIRA, 2017; ZANELLA, 2018).

Oliveira (2017), especialmente, destaca que o *software* GeoGebra também promoveu a recriação de possibilidades para além das ferramentas do *software*, a comprovação de conhecimentos prévios e construções rápidas e precisas, utilizando o movimento e as transformações geométricas de simetria, translação, rotação e homotetia.

Alguns desafios com o uso de tecnologias também foram destacados por autores do *corpus*. O GeoGebra, quando comparado aos ambientes estáticos de lápis e papel, pouco influenciou na construção de argumentos pelos FPM. O *software* foi restringido à validação e à extensão de resultados já encontrados nos ambientes estáticos e suas ferramentas utilizadas como versões eletrônicas mais rápidas e precisas da régua e do transferidor (DIAS, 2009). Em ambos os *softwares*, os FPM apresentaram algumas dificuldades. Dentre elas, estão as de acesso e de manuseio das ferramentas do *Open Sim* (OLIVEIRA, 2015), e a linguagem matemática necessária para denominar, estabelecer relações e conjecturas, argumentar e demonstrar, utilizando diferentes representações do mesmo objeto geométrico no GeoGebra (ZANELLA, 2018).

Janzen (2011) investigou o papel do professor formador, no ambiente dinâmico do *software* GeoGebra, com FPM. A autora pontua que o professor formador, nesses ambientes, deve propiciar diálogos com os licenciandos, explorar e incentivar o movimento e mediar com perguntas apropriadas, esclarecendo dúvidas, organizando e sintetizando ideias. Além disso, destaca a importância de o professor formador não apresentar resultados prontos, mas sim, instigar o FPM para construir suas noções e aplicá-las em diversas situações por meio de analogia. Por outro lado, precisa intervir, quando necessário, com explicações e direcionamentos, especialmente em momentos de provas matemáticas. Em alguns momentos, o professor formador deve exercer o papel de aprendiz, adaptando-se aos

argumentos, às sugestões e às decisões dos FPM que, por vezes, podem ser diferentes do que tenha planejado inicialmente (JANZEN, 2011).

### *Foco 1b: Uso de Tarefas*

Os trabalhos desse grupo (ALMEIDA, 2018; BRASIL, 2017; FONSECA, 2020; MOREIRA, 2010) utilizaram análise e resolução de tarefas para promover estratégias associadas às aprendizagens em geometria de FPM. Observamos que Almeida desenvolve *atividades* de geometria (2018), Brasil (2017) problematiza a metodologia da *Resolução de Problemas*, Fonseca (2020)<sup>68</sup> utiliza *tarefas exploratórias* e Moreira (2010) trabalha por meio de *oficinas*.

Quanto às especificidades da geometria, foram considerados os conteúdos de área, como grandeza geométrica, envolvendo quadratura de figuras planas, equivalência de áreas, provas e demonstrações (MOREIRA, 2010), uso dos teoremas de Pitágoras (ALMEIDA, 2018; BRASIL, 2017, MOREIRA, 2010) e de Tales, congruência e semelhança de triângulos (ALMEIDA, 2018; BRASIL, 2017), posições relativas entre reta e plano, medidas de ângulos, diferenças entre círculo e circunferência, particularidades e medidas de sólidos geométricos, problemas de Topologia<sup>69</sup> e Teoria dos Grafos<sup>70</sup> (BRASIL, 2017), aspectos euclidianos e esféricos de reta, de classificações de triângulos e de relações trigonométricas em triângulos retângulos (FONSECA, 2020), além de enfoques analíticos plano e vetorial de ponto médio, coeficiente angular entre retas, semelhança de triângulos e vetores (paralelismo e módulo) no plano cartesiano (ALMEIDA, 2018).

Os autores do *corpus*, que se valeram de tarefas, também relatam desafios em suas propostas de promoção de estratégias associadas às aprendizagens de FPM. Um dos apontamentos, refere-se ao fato de a Geometria Euclidiana Plana

---

<sup>68</sup> Mesmo que, inicialmente, Fonseca (2020) utilize tarefas para os FPM recordarem conhecimentos de geometria euclidiana e *estabelecerem relações* na Geometria Esférica, o principal intuito da autora foi a *aprendizagem dos FPM* de conceitos esféricos.

<sup>69</sup> Com base nos apontamentos de Sangiorgi (1971, p. 132) a autora destaca que a Topologia relaciona-se com a Geometria e nela “[...] as figuras geométricas têm mais ‘liberdade’ do que na Geometria porque podem mudar de tamanho e forma, conservando, porém, outras propriedades (estruturais) que dizem respeito a sua estrutura” (BRASIL, 2017, p. 240, grifo do autor).

<sup>70</sup> Para Brasil (2017, p. 173), citando Huanca (2014), “Os grafos são compostos por um número finito de pontos chamados vértices do grafo, e um conjunto finito de arcos, chamados arestas do grafo”, além de fatores como comprimento e formato (reto ou curvo) serem irrelevantes.

apresentar técnicas de resolução limitadas, se comparadas com as Geometrias Analítica Plana e Analítica Vetorial, além de, na formação inicial do professor de matemática, o trabalho com diferentes geometrias ser fragmentado (ALMEIDA, 2018). Os FPM sentiam-se incomodados, durante a resolução de problemas, por não saberem algum conteúdo ou pelo fato de a pesquisadora-formadora adotar a estratégia de, inicialmente, não atuar confirmando ou corrigindo suas respostas, como esperavam (BRASIL, 2017).

Os licenciandos apresentaram dificuldades com congruência de figuras planas, exploração de propriedades de triângulos na superfície esférica, demonstrações de relações trigonométricas em triângulos retângulos, questões de terminologia na Geometria Esférica (FONSECA, 2020) e com o aspecto geométrico do conteúdo de área, prevalecendo, inicialmente, noções numéricas e algébricas de medidas (MOREIRA, 2010).

Apesar dos desafios, o trabalho em grupo e o professor formador, como mediador das discussões e ações, contribuíram para a troca de experiências e aprendizagem dos FPM (BRASIL, 2017; FONSECA, 2020).

O estudo de *atividades de demonstração* nas Geometrias Plana, Analítica Plana e Analítica Vetorial permitiu aos licenciandos articularem conceitos de Aritmética, Álgebra e Geometria. Ademais, os FPM exploraram os sistemas euclidiano, cartesiano e vetorial e conhecimentos geométricos do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e da Licenciatura em Matemática (ALMEIDA, 2018).

No que diz respeito à *Resolução de Problemas*, os licenciandos tiveram oportunidades de pensar, questionar e expor opiniões de forma autônoma durante as tarefas propostas (BRASIL, 2017).

As *tarefas exploratórias* contribuíram para a aprendizagem, na medida em que possibilitaram a articulação de conteúdos *prévios* de Geometria Euclidiana Plana e *novos* conteúdos de Geometria Não Euclidiana Esférica. Além disso, o *software* GeoGebra foi utilizado, em algumas tarefas, por proporcionar dinamismo nas explorações. Material manipulável, como elástico e bolas de isopor, permitiu aos estudantes elaborarem e testarem conjecturas a respeito de conteúdos, como as propriedades da circunferência máxima (FONSECA, 2020).

Por meio de *oficinas*, especificamente de quadratura de representações de figuras planas, os FPM puderam construir o conceito de área, como atributo geométrico, para além da medida numérica de uma grandeza (MOREIRA, 2010).

## **Foco em relações estabelecidas, a partir de conhecimentos de futuros professores de Matemática em geometria**

Dois trabalhos do *corpus*, tendo por base os conhecimentos já constituídos pelos FPM, investigaram que relações poderiam ser estabelecidas entre a geometria e o grafismo indígena (CICARINI, 2015) e entre as perspectivas de van Hiele<sup>71</sup> e de Balacheff<sup>72</sup> (LIMA, 2020).

A pesquisa de Cicarini (2015) apresenta as *relações* estabelecidas, por membros<sup>73</sup> do grupo Tukano da Licenciatura Intercultural dos povos indígenas do Alto Rio Negro, *entre o grafismo indígena e a Geometria Plana*. Segundo o autor, foi possível relacionar conteúdos como polígonos e segmentos de reta, com formas da natureza e artefatos culturais, como pedras, gravetos e pinturas que retratam aspectos da cultura daquele povo na forma de grafismos. Essas relações foram consideradas, pelos licenciandos, como importantes para o ensino de Geometria Plana, uma vez que permitiriam abordar os conteúdos valorizando a cultura indígena.

Lima (2020) propôs atividades aos FPM, que exploravam justificativas e/ou provas de conteúdos de geometria, a fim de identificar *articulações entre os níveis de pensamento geométrico dos licenciandos*, na perspectiva de van Hiele, e os *tipos de prova* propostos por Balacheff. Os conteúdos abordados nas atividades foram os referentes ao Teorema de Pitágoras, triângulos, quadriláteros e medidas de ângulos.

A autora concluiu que os licenciandos que se encontravam no primeiro nível de van Hiele mostravam dificuldades com generalizações e, por isso, com os processos de prova. Os do segundo nível identificavam propriedades em figuras geométricas, mas as generalizações nas provas eram feitas por meio de

---

<sup>71</sup> Van Hiele (1984) propõe cinco níveis progressivos de desenvolvimento do Pensamento Geométrico, que parte do visual em direção ao axiomático.

<sup>72</sup>De acordo com Lima (2020, p. 125), “Balacheff (2000) conseguiu identificar dois tipos básicos de provas: as provas pragmáticas e as provas intelectuais. As primeiras são provas que recorrem à ação e a manifestação de algo, já as segundas, separadas da ação, se apoiam em formulações das propriedades em jogo e de suas relações. Ou seja, as provas pragmáticas são aquelas em que os sujeitos recorrem a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar determinado resultado. Enquanto que as provas intelectuais são aquelas em que o discurso a ser utilizado pelo aluno é teórico, não necessitando tomar observações experimentais como argumentos para validar uma conjectura”.

<sup>73</sup>A pesquisa de Cicarini (2015) contou com cinco colaboradores do grupo Tukano, dos quais quatro eram estudantes da Licenciatura intercultural dos povos indígenas do Alto Rio Negro e um era um ancião do mesmo grupo.

experimentação. Os do terceiro nível iniciavam práticas de raciocínio dedutivo em provas, mas ancorados na manipulação e em exemplos específicos. Já os do quarto nível, o último considerado por Lima (2020), entre os cinco níveis de van Hiele, utilizavam provas formais com base em teoremas para validar informações.

A próxima seção estará voltada às nossas discussões, a fim de sintetizar as estratégias associadas às aprendizagens e às relações de geometria abordadas no *corpus*, seguida de algumas considerações a respeito de como essas questões influenciam a formação de (futuros) professores de Matemática.

#### DISCUSSÃO DOS PONTOS DE ENFOQUE DO *CORPUS*

A grande maioria das pesquisas analisadas teve como ponto de enfoque a análise de situações associadas às aprendizagens de FPM e apenas duas investigaram relações estabelecidas a partir de conhecimentos de geometria já constituídos.

Na busca de investigar o que e como podem ser promovidas estratégias associadas às aprendizagens de FPM, observamos a prevalência de tecnologias digitais, como os *softwares Open Sim* (OLIVEIRA, 2015) e GeoGebra (DIAS, 2009; JANZEN, 2011; OLIVEIRA, 2017; ZANELLA, 2018). Os demais (ALMEIDA, 2018; BRASIL, 2017; FONSECA, 2020; MOREIRA, 2010) utilizaram tarefas, dentre eles Fonseca (2020), que também recorreu ao GeoGebra, mas como apoio em alguns momentos de investigação de propriedades e de relações na Geometria Esférica.

Dentre os trabalhos, que utilizaram *exclusivamente* o *software* GeoGebra (JANZEN, 2011; OLIVEIRA, 2017; ZANELLA, 2018), o dinamismo possibilitado pelo *software* propiciou explorar conceitos dos objetos geométricos e facilitou estabelecer e validar conjecturas e perceber relações entre diferentes objetos. Esses pontos foram determinantes, especialmente, em tarefas de prova e de demonstração.

Por outro lado, quando *comparado* com ambientes de lápis e papel (DIAS, 2009), o GeoGebra pouco contribuiu para estabelecer argumentações. Os licenciandos restringiam-se ao uso de ferramentas e modos de resolução estáticos, utilizando o *software* tão somente para confirmar hipóteses ou para facilitar construções que demandariam mais tempo, se feitas com instrumentos de desenho geométrico.

Gravina (2015) destaca que, durante um estudo, ao utilizarem o *software*

GeoGebra, os FPM consideravam figuras como representações estáticas, produzidas no papel. Mesmo após o primeiro contato ainda não era algo simples que lhes permitisse identificar relações entre os objetos.

Outro ponto que observamos em alguns trabalhos do *corpus*, independente do foco central e que também se relacionou com o uso de *softwares*, especificamente o GeoGebra, foi a proposta de provas e demonstrações. Isso ocorreu ora como algo previsto no objetivo (DIAS, 2009; JANZEN, 2011; LIMA, 2020), ora como um entre outros pontos discutidos no decorrer da formação (ALMEIDA, 2018; FONSECA, 2020; MOREIRA, 2010; OLIVEIRA, 2017; ZANELLA, 2018). Em alguns desses momentos, o *software* GeoGebra serviu de apoio, principalmente por possibilitar construir representações de objetos geométricos e movimentá-los, facilitando a confirmação de hipóteses previamente formuladas (DIAS, 2009; JANZEN, 2011; FONSECA, 2020; OLIVEIRA, 2017; ZANELLA, 2018).

Na literatura (DUVAL, 2012; PAIS, 1996; VAN HIELE, 1969), a demonstração é um objeto de estudo da geometria e articula a formalização de teoremas e conceitos por meio de encadeamentos lógicos e dedutivos. De acordo com Duval (2012), as demonstrações<sup>74</sup> são imprescindíveis na geometria por propiciarem articular enunciados (hipóteses, proposições), a partir de um conjunto de regras e resultados anteriores (teoremas, axiomas), por meio de processos dedutivos. Segundo Pais (1996), a demonstração<sup>75</sup> não pode ser constituída de argumentos intuitivos, subjetivos, imediatos ou que dispensem processos dedutivos. Já para van Hiele (1969), as demonstrações<sup>76</sup> exigem uma linguagem própria que demanda tempo e experiências.

*Softwares*, como o GeoGebra, podem auxiliar no entendimento de demonstrações e promover sua produção, pois, para além de ferramentas de construção, traduzem e viabilizam formas de pensar diferentes das que ocorrem, quando utilizados lápis e papel (GRAVINA, 2015). Desse ponto de vista, ambientes dinâmicos e digitais enriquecem a construção de representações de figuras geométricas e de *formulação* de conjecturas, para além de testagem ou confirmação de hipóteses já formuladas que, por vezes, podem ter requerido mais tempo e serem

---

<sup>74</sup> Para Duval (2012), as demonstrações são redes semânticas de propriedades e objetos.

<sup>75</sup> Pais (1996) entende a demonstração como uma forma de raciocínio matemático.

<sup>76</sup> De acordo com van Hiele (1969), as demonstrações são noções abstratas oriundas da abstração de outras noções.

menos precisas. Isso pode ser desenvolvido por meio de experimentações, especialmente devido ao movimento de representações de objetos geométricos que o *software* propicia.

Ainda no que diz respeito a provas e demonstrações, Pereira (2020) ressalta que os professores precisam saber avaliar até que ponto é possível explorar o raciocínio, as argumentações e as conjecturas dos estudantes, o que é essencial de ser trabalhado na formação inicial de professores de matemática. Silva e Andrade (2021) destacam que professores formadores defendem o uso de tecnologias digitais na formação inicial de professores de matemática, incluindo momentos de estudo de suas possibilidades didáticas para a futura prática como professores de Matemática. Nesse sentido, o trabalho de Janzen (2011) colabora, ao investigar o papel do professor formador de FPM no ambiente do GeoGebra.

Ressaltamos, no entanto, o fato de apenas uma pesquisa (JANZEN, 2011) investigar o papel do professor formador para a aprendizagem de FPM, ainda que outros trabalhos do *corpus* (BRASIL, 2017; FONSECA, 2020; OLIVEIRA, 2015) também destaquem, em algum momento, a sua importância e a de suas ações para as formações investigadas, como para organizar e mediar diálogos e ações.

Esse resultado reforça indicativos de poucas investigações envolvendo o formador de professores (COURA; PASSOS, 2017; GATTI *et al.*, 2019). Esse fato é preocupante, se considerarmos a importância desse profissional para a formação do professor (COURA; PASSOS, 2017) e que, por vezes, não tem formação adequada para tal (GATTI, 2014) ou apresenta dificuldades em romper com modelos nos quais foi formado (COURA; PASSOS, 2017).

Além do estudo de provas e demonstrações, observamos que seja para investigar estratégias associadas às aprendizagens de FPM, utilizando tecnologias digitais ou tarefas, seja para investigar as relações estabelecidas a partir de conhecimentos de geometria já constituídos, por vezes, conteúdos de Grandezas e Medidas estiveram articulados à Geometria, tais como medidas de área, de perímetro, de volume e de ângulo.

Essa articulação não se trata de uma especificidade da Geometria. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) já destacavam que conteúdos de Grandezas e Medidas se articulam, além da Geometria, também com a Álgebra e a Aritmética, podendo, inclusive, atuarem como facilitadores. Na atualidade, essa relação também se sobressai em documentos oficiais. A Base Nacional Comum

Curricular (BRASIL, 2018, p. 273) reforça que, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, é esperado que os estudantes “reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas”. Para Vale e Pimentel (2017), o estudo de medidas de grandezas geométricas pode ocorrer de forma articulada com conceitos geométricos, uma vez que, além de descrever e analisar o mundo como um todo, a Geometria pode complementar e apoiar o estudo de temas relacionados às medidas e aos números.

Até o momento, buscamos elencar e discutir aspectos que observamos em ambos os pontos de enfoque, na busca de estabelecer articulações entre diferentes formas de promover aprendizagens em geometria e de estabelecer relações, tendo em conta conhecimentos de geometria já constituídos por FPM. Discutir aprendizagens de FPM ou formas de promovê-la é importante. Contudo, é preciso investigar conhecimentos já constituídos pelos FPM, também como uma alternativa de promover aprendizagens. De acordo com Cyrino (2017, p. 709), a formação de professores, quer inicial quer continuada, deve valorizar e considerar o (futuro) professor “como produtor de conhecimento”.

Os resultados do *corpus* cujo foco foram relações estabelecidas a partir de conhecimentos de geometria já constituídos (CICARINI, 2015; LIMA, 2020) também nos trazem indicativos de como a geometria pode ser trabalhada a fim de promover aprendizagens de FPM, todavia, a partir de seus próprios conhecimentos, considerando diferentes perspectivas teóricas e culturas. Os resultados de trabalhos com esse foco podem estabelecer um ponto de partida, um diagnóstico do que os FPM já constituíram de conhecimentos geométricos, ou podem contribuir, na medida em que elaboram recursos e estratégias que podem ser utilizados para ensinar geometria.

Esta seção de discussão dos pontos de enfoque teve o objetivo de estabelecer relações entre nossos resultados para, na sequência, apresentarmos algumas considerações acerca das implicações dessas articulações para a formação inicial de professores de matemática.

#### ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Identificamos dois principais pontos de enfoque, das 11 teses e dissertações brasileiras defendidas no período 2009-2020 que tratavam de geometria na

formação inicial de professores de Matemática: trabalhos, cujo foco são estratégias associadas às aprendizagens de FPM, por meio de tecnologias digitais ou de tarefas; e trabalhos que investigam relações estabelecidas, tendo em conta conhecimentos de geometria já constituídos por eles.

A partir desses pontos de enfoque, observamos que a maioria dos trabalhos investigou estratégias associadas às aprendizagens do FPM em geometria, diferentes formas de promovê-la e, principalmente, utilizando tecnologias digitais, como o *software* GeoGebra. Nesse sentido, propostas de tarefas exploratórias, atividades de demonstração em ambientes estáticos, oficinas, proposição de problemas, Modelagem Matemática e demais perspectivas, como foco central dos trabalhos, precisam de mais atenção nas pesquisas que visam identificar formas de promover aprendizagens de FPM.

No que diz respeito ao uso de *softwares*, os resultados apontam que, quando os FPM têm diferentes possibilidades, tendem a dar preferência ao uso de papel e lápis ou material manipulável, em detrimento de tecnologias digitais, provavelmente pela facilidade e comodidade proporcionados por ambientes já conhecidos.

Na sociedade contemporânea, é louvável a busca pela incorporação de tecnologias na formação de FPM. No entanto, quando utilizam *softwares*, por vezes, o fazem para *confirmar* hipóteses ou para *agilizar* construções, visto que restringem as ferramentas e a possibilidade de movimento como versões digitais do papel e de instrumentos de desenho geométrico, isto é, quase não usufruem das possibilidades facilitadoras, investigativas e experimentais que os *softwares* possuem para criar hipóteses e conjecturas e apoiar demonstrações.

Percebemos, ainda, a dominante presença da Geometria Euclidiana nos trabalhos do *corpus*, isto é, poucas pesquisas investigaram outras questões na formação inicial de professores de Matemática, como Brasil (2017), que propôs problemas, entre eles alguns de Topologia; Fonseca (2020), que abordou a Geometria Esférica; e Oliveira (2017), a Geometria das Transformações<sup>77</sup>. Desse modo, consideramos pertinente que outras pesquisas investiguem e discutam a respeito das Geometrias Não Euclidianas na formação de professores de Matemática. Além disso, identificamos a recorrente articulação entre conteúdos de Geometria e de Grandezas e Medidas nas propostas de formação de FPM.

---

<sup>77</sup>Oliveira (2017) considera a Geometria das Transformações uma Geometria não euclidiana.

Esses fatos nos levam a pensar que, de acordo com o que identificamos nas pesquisas analisadas, estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática, em tese, futuros professores de matemática, têm contato com tecnologias digitais em sua formação inicial, todavia, por vezes, sem conhecer ou utilizar diferentes potencialidades. Isso pode ser uma das causas que acarretam um ensino de geometria na Educação Básica que, apesar do uso de tecnologias digitais, o faça com os mesmos intuítos e recursos de ambientes estáticos.

Ademais, há pouca ênfase em conceitos não euclidianos nas pesquisas que, de certo modo, retratam a formação de FPM, a despeito de há tempos serem previstos em documentos oficiais da Educação Básica (BRASIL, 1998, 2018). Isso nos leva a crer que questões como o ensino de geometria em segundo plano e as dificuldades dos estudantes, especificamente dos Anos Finais e do Ensino Médio, dificilmente serão sanadas enquanto a formação de professores, especialmente a inicial, não subsidiar o FPM de forma adequada e, principalmente, não o considerar como produtor de conhecimentos.

#### REFERÊNCIAS

ATASOY, E. Elementary Mathematics Teacher Candidates' Geometric Thinking Levels and Their Self- Efficacy in Geometry. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n.2, p. 161-170, 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/ Anos finais**. Brasília, 1998, 148 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018, 600p.

COURA, F. C. F.; PASSOS, C. L. B. Estado do conhecimento sobre o formador de professores de Matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, v. 25, n. 1, p. 7-26, jan./abr. 2017.

CRECCI, V. M.; NACARATO, A. M.; FIORENTINI, D. Estudos do estado da arte da pesquisa sobre o professor que ensina matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 25, n. 1, p. 1-6, 30 abr. 2017. Universidade Estadual de Campinas.

CRESCENTI, E. P. A formação inicial do professor de Matemática: aprendizagem da Geometria e atuação docente. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 3, n. 1, p. 81-94, jan./jun. 2008.

CYRINO, M. C. C. T. Identidade Profissional de (futuros) Professores que Ensinam Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, [s. l.], v. 10, n. 24, p. 699-

712, 2017.

DE PAULA, E. F. **Identidade profissional de professores que ensinam matemática**: indicativos de pesquisas, elementos e ações para elaboração de uma proposta investigativa. 2018. 227 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.

FERNER, D.; SOARES, M. A. da S.; MARIANI, R. C. P. Geometria nas licenciaturas em Matemática: um panorama a partir de Projetos Pedagógicos de Cursos. **Ensino em Re-Vista**, p. 434-457, 2020.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012. (Coleção Formação de Professores).

FIORENTINI, D. *et al.* O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. *In*: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. d. (Org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática**: período 2001 – 2012. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/pf/subportais/biblioteca/fev-2017/e-book-mapeamento-pesquisa-pem.pdf>. Acesso em: 06 out. 2020.

GATTI, B. A. Formação inicial de professores para a educação básica: pesquisas e políticas educacionais. **Estudos em Avaliação Educacional**, v. 25, n. 57, p. 24-54, 2014.

GATTI, B. A. *et al.* **Professores do Brasil**: novos cenários de formação. Brasília, DF: Unesco, 2019.

GINZBURG, C. **Mitos, emblemas, sinais**. São Paulo: Companhia das Letras, 1989.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do geogebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **Vidya**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 237-253, jul./dez. 2015.

NASSER, L.; FERREIRA, M. L.; VAZ, R. F. N. Estimulando o domínio do processo dedutivo no curso de licenciatura em matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 499-513, jul./dez. 2017.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, v. 4, n. 2, 1996.

PEREIRA, A. N. **Conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria na educação básica**. 2020. 233f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020.

PEREIRA DA COSTA, A. Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S.L.], v. 9, n. 18, p. 152-179, 26 jun. 2020. Universidade Estadual do Paraná, Unespar.

PEREIRA DA COSTA, A.; SANTOS, M. R. d. Pensamento geométrico na licenciatura em Matemática: uma análise à luz de Duval e Van-Hiele. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 10, p. 1-20, fev. 2020.

ROLDÃO, M. C. N. Formação de professores e desenvolvimento profissional/Teacher education and professional development. **Revista de Educação PUC-Campinas**, v. 22, n. 2, p. 191-202, 2017.

SILVA, E. S; ANDRADE, S de. A Ótica do Professor Formador sobre a Integração das Tecnologias à Licenciatura em Matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 27, p. 1-11, 2021.

ULUSOY, F.; ÇAKIROĞLU, E. Prospective teachers' personal and instructional definitions for quadrilaterals as a lens of their mathematical and didactical considerations. In **13th International Congress on Mathematical Education (ICME-13)**, Hamburg, Germany. 2016.

VALE, I.; PIMENTEL, T. O ensino e aprendizagem de Geometria. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2017, Lisboa. **Atas**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2017. p. 43-48.

VAN HIELE, P. M. Quelques aspects didactiques du développement de la pensée des enfants dans les mathématiques et la physique. **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, n. 3, p. 343-346, 1969.

VAN HIELE, P. M. English summary. The problem of insight in connection with school children's insight into the subject matter of geometry. Doctoral dissertation, University of Utrecht, 1957. In: FUYIS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Eds.). **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele**. Brooklyn: Brooklyn College, p. 237-241, 1984.

#### REFERÊNCIAS DO CORPUS ANALISADO NESTE ARTIGO

ALMEIDA, G. S. **Uma (re) construção praxeológica no estudo de conteúdos da geometria com alunos da Licenciatura da Matemática**. 2018. 200 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro Do Sul, São Paulo, 2018.

BRASIL, T. C. **O ensino da Geometria através de resolução de problemas: Explorando possibilidades na formação inicial de professores de Matemática**. 2017. 264p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

CICARINI, A. M. O. T. **Geometria plana e o grafismo indígena: O estudo de suas**

**relações no contexto histórico do grupo Tukano de alunos da Licenciatura Intercultural dos Povos Indígenas do Alto Rio Negro.** 2015. 198 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

DIAS, M. S. S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em matemática:** uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico. 2009. 213 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

FONSECA, J. A. da. **Investigação de aspectos da compreensão relacional e da instrumental em geometria esférica.** 2020. 307f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2020.

JANZEN, E. A. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica.** 2011. 194f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

LIMA, M. L. S. **Um estudo sobre as provas e demonstrações na Licenciatura em Matemática: articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff.** 398 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020.

MOREIRA, M. D. D. **Revisitando Euclides para o ensino de áreas:** uma proposta para as licenciaturas. 2010. 165 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

OLIVEIRA, C. A. **Estratégias didáticas nos processos de ensino e de aprendizagem em matemática no mundo digital virtual em 3d open sim.** 2015. 154 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal De Alagoas, Maceió, 2015.

OLIVEIRA, D. B. S. **A constituição de conhecimento colaborado em geometria das transformações com ferramentas dinâmicas.** 2017. 169 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal De Juiz De Fora, Juiz de Fora, 2017.

ZANELLA, I. A. **Diferentes representações na geometria euclidiana por meio do uso do geogebra:** um estudo com futuros professores de matemática. 2018. 229 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.

## GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: O QUE REVELAM PESQUISAS BRASILEIRAS

**Resumo:** Este artigo tem por objetivo descrever e discutir abordagens de geometria, na formação inicial de professores que ensinam matemática (PEM), presentes em teses e dissertações brasileiras, publicadas no período 2009-2020, e, por conseguinte, caracterizações de pensamento geométrico e principais referenciais teóricos utilizados nesses trabalhos. Para a constituição do *corpus* de análise foi realizado um mapeamento de dissertações e teses oriundas de Programas de Pós-graduação brasileiros *Stricto Sensu*, das Áreas de Educação e Ensino na plataforma digital do Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e no catálogo da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, totalizando 18 dissertações e teses. Os resultados evidenciam que, em cursos de formação inicial de PEM, as abordagens de geometria utilizam representações de figuras geométricas para: identificar conceitos ou propriedades de forma perceptiva; resolver situações-problema; verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações. Pesquisas brasileiras revelam a prevalência de representações de figuras geométricas, utilizando desenhos, *softwares* e material manipulável, para trabalhar geometria na formação inicial de PEM, inclusive em provas e demonstrações, mas quase sempre articuladas às representações algébricas e aritméticas. Raymond Duval e Pierre van Hiele foram privilegiados como autores de referência e, embora crescentes, discussões e caracterizações para pensamento geométrico ainda são incipientes.

**Palavras-chave:** formação inicial de professores que ensinam matemática; pensamento geométrico; ensino de geometria; mapeamento de teses e dissertações

## GEOMETRY IN INITIAL EDUCATION OF TEACHERS WHO TEACH MATHEMATICS: WHAT BRAZILIAN RESEARCHES REVEAL

**Abstract:** This article aims to describe and discuss geometry approaches, in the initial education of teachers who teach mathematics (TTM), in Brazilian master and doctoral studies, published between the years 2009 and 2020, and, then, geometric thinking characterizations and the main theoretical references used in these works. To compose the *corpus* analyzed, masters and doctoral studies, from, Education and Teaching Areas of Brazilian post-graduate *strictu sensu* programs were mapped in both digital databases of Catalogue of Thesis and Dissertations of Higher Education Personal Improvement Coordination (CAPES) and Brazilian Digital Library of Thesis and Dissertations (BDTD), finding 18 works. The results highlight that, in TTM initial education courses, geometry approaches use geometric figures representations to: identify concepts or properties in perceptive way; solve problems; verify or study geometric properties, proofs and demonstrations. Brazilian researches reveal the prevalence of geometric figures representations, using drawings, *softwares* and manipulable material, to approach geometry in TTM initial education, including proofs and demonstrations, but often articulated with algebraic and arithmetic representations. Raymond Duval and Pierre van Hiele were the most authors used and, although they are increasing, geometric thinking's discussions and characterizations are still incipient.

**Keywords:** initial education of teachers who teach mathematics; geometric thinking; geometry teaching; theses and dissertations mapping.

## INTRODUÇÃO

Estudos e documentos oficiais destacam a necessidade da presença da geometria em todos os níveis de ensino, desde os primeiros anos de escolaridade (BRASIL, 1997, 2018; CLEMENTS; SARAMA, 2011; PASSOS; NACARATO, 2014). Para o trabalho com a geometria é valorizado o uso da visualização e de representações de objetos geométricos por meio de figuras em tarefas (BRIGO; FLORES, 2008); o pensamento crítico; a resolução de problemas; o raciocínio dedutivo; a argumentação; e o estabelecimento de conjecturas (VALE; PIMENTEL, 2017), isto é, potencialidades do pensar<sup>78</sup> ou do raciocinar geometricamente (NASSER; FERREIRA; VAZ, 2017; VIANA; SILVA, 2020).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) indica que o pensamento geométrico pode ser desenvolvido com estudos de posição e deslocamento no espaço e de relações entre figuras planas e espaciais. Segundo o documento, esse pensamento é necessário para investigar propriedades, estabelecer conjecturas e argumentar. Além disso, a noção de representação de objetos geométricos é colocada como uma das ideias fundamentais em Geometria (BRASIL, 2018).

Na literatura, investigações sobre o ensino de geometria têm se mostrado relevantes (SWOBODA; VIGHI, 2016), incluindo discussões de aspectos como o raciocínio espacial e a visualização, que têm ocupado gradativamente espaço nas investigações em Educação Matemática (SANTOS; OLIVEIRA, 2017). No entanto, de acordo com Carvalho e Ferreira (2015), Clements *et al.* (2018) e Paiva (2021), o pensamento geométrico tem sido pouco explorado nas pesquisas, principalmente no contexto de formação de professores que ensinam matemática (PEM) (ATASOY, 2019; BARRETO *et al.*, 2021; CARVALHO; FERREIRA, 2015; SANTOS; TELES, 2021).

Tal fato se mostra preocupante, visto as inúmeras dificuldades em geometria que os (futuros) PEM apresentam e a importância dessa temática para a formação docente de PEM (BRUNHEIRA, 2019; KUZNIAK; NECHACHE, 2021; SANTOS;

---

<sup>78</sup> Como na literatura estão presentes diferentes termos, como “Pensamento Geométrico” e “Raciocínio Geométrico”, utilizamos os termos citados pelos autores que nos fundamentam.

TELES, 2021; SWOBODA; VIGHI, 2016).

Ademais, conforme Pereira da Costa (2020), até o momento de sua tese não havia consenso a respeito de uma caracterização/definição de pensamento geométrico<sup>79</sup>. Essa afirmação é corroborada por Paiva (2021) que, ao analisar sete teses e dissertações<sup>80</sup> de formação (inicial e continuada) de professores de Matemática, observou a ausência de detalhes ou argumentos explícitos de uma caracterização para pensamento geométrico nas pesquisas analisadas.

Diante disso, realizamos um mapeamento de dissertações e teses brasileiras, que tiveram como foco a geometria na formação inicial de PEM, com o objetivo de *descrever e discutir abordagens de geometria, na formação inicial de PEM, presentes em teses e dissertações brasileiras, publicadas no período 2009-2020, e, por conseguinte, caracterizações de pensamento geométrico e principais referenciais teóricos utilizados nesses trabalhos*. Na sequência, descreveremos os encaminhamentos metodológicos para a constituição e a análise do *corpus*, seguidos pelos resultados, discussões e por algumas considerações.

#### PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para esta pesquisa, de caráter documental (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), inicialmente realizamos levantamentos<sup>81</sup> de dissertações (mestrados acadêmico e profissional) e teses oriundas de Programas de Pós-graduação brasileiros *stricto sensu* das Áreas de Educação e Ensino reconhecidos pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Selecionamos as pesquisas dos catálogos digitais das plataformas da CAPES e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, do período temporal 2009-

---

<sup>79</sup> Pereira da Costa (2020, p. 177) caracteriza o pensamento geométrico como “a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos, de aplicar de modo coerente os instrumentos geométricos na resolução de problemas. É a capacidade de compreender a natureza dos fenômenos e inferir sobre eles, de identificar e perceber a Geometria como uma ferramenta para entendimento do mundo físico e como um modelo matemático para compreensão do mundo teórico”.

<sup>80</sup> Não identificamos, no trabalho de Paiva (2021), o período dos trabalhos analisados.

<sup>81</sup> Foram realizados três levantamentos. Inicialmente, no dia 15/05/2020 a busca dos trabalhos foi realizada em conjunto com outros três integrantes do Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática (Gepefopem), do qual fazemos parte. Em 14/01/2021, foi feito outro levantamento de pesquisas publicadas no ano de 2019, porém não foram acrescentados novos trabalhos. Posteriormente, em 13/09/2021, realizamos um levantamento de trabalhos publicados no ano de 2020 e acrescentamos três trabalhos.

2020, que continham, no título ou no resumo, as expressões “pensamento geométrico”, “saber geométrico”, “saberes geométricos”, “raciocínio geométrico” ou “conhecimento geométrico”, o que resultou em 204 pesquisas.

Na sequência, lemos partes específicas dos trabalhos, como resumo, introdução, fundamentação teórica e, em alguns casos, o trabalho completo quando essas seções não eram suficientes para identificar se foi desenvolvido no âmbito da formação inicial de PEM. Essa etapa da seleção exigiu análise, reflexão e discussões, motivo pelo qual optamos por não utilizar filtros ou buscas por palavras. Com isso, obtivemos 18 trabalhos (7 teses e 11 dissertações).

Para a análise, construímos uma ficha, com base em Fiorentini *et al.* (2016), contendo tópicos como: objetivo; contexto e sujeitos; principais resultados; informações metodológicas e analíticas; e referenciais utilizados. Para preencher a ficha, lemos na íntegra os 18 trabalhos.

Com vistas às dificuldades já apontadas na literatura para a falta de caracterizações para o pensamento geométrico, ao menos de forma explícita, concordamos com Nuñez e Ramalho (1999) de que os pesquisadores podem expor seus pressupostos de forma tanto explícita quanto implícita, o que também nos permitiria compreender em que sentido termos, argumentos e demais processos e abordagens foram considerados.

A partir disso, durante a leitura, a produção de fichamentos e as análises em geral, assim como De Paula (2018), apoiamos-nos no paradigma indiciário de Ginzburg<sup>82</sup> (1989), a fim de encontrarmos indícios que nos possibilitassem identificar e analisar as abordagens de geometria, a partir de similaridades, particularidades, convergências ou divergências.

Diante de diferentes abordagens de geometria na formação inicial de PEM, consideramos pertinente analisar caracterizações de pensamento geométrico e os diferentes termos empregados pelos autores<sup>83</sup>, que nortearam os trabalhos do *corpus*, bem como os referenciais teóricos utilizados. Considerando a existência de diferentes referenciais teóricos, discutimos os resultados com base naqueles que são recorrentes nos trabalhos investigados, nomeadamente Bernard Parzysz, Luiz

---

<sup>82</sup> O Paradigma Indiciário, de acordo com Ginzburg (1989), consiste na busca de indícios, sinais, pistas, conjecturas e inferências, a partir de dados aparentemente negligenciáveis, com a intencionalidade de realizar uma leitura atenta do elemento a ser estudado.

<sup>83</sup> Conhecimento geométrico; raciocínio geométrico; saber geométrico.

Carlos Pais, Pierre van Hiele e Raymond Duval.

## REPRESENTAÇÕES DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PARA ABORDAR GEOMETRIA

Em decorrência de uma análise indiciária e interpretativa, ao analisar abordagens de geometria na formação inicial de PEM, observamos que as formas de representação são um aspecto comum nos trabalhos e, por isso, nos dedicamos a discutir as diferentes formas de representação para os objetos geométricos identificadas nos trabalhos.

Na Matemática, as representações são essenciais, pois seus objetos nem sempre são diretamente perceptíveis (DUVAL, 2009), e podem existir diferentes representações para o mesmo objeto (DUVAL, 2009; PAIS, 1996; PARZYSZ, 2001). O uso de representações de figuras geométricas,<sup>84</sup> associadas aos objetos geométricos, foi algo presente nos trabalhos do *corpus*, com diferentes usos ou finalidades em situações geométricas, a saber: para *identificar* conceitos ou propriedades, de forma principalmente perceptiva; para *resolver* problemas; para *verificar* ou *estudar* propriedades geométricas, provas e demonstrações (Quadro 1).

**Quadro 1** - Abordagens de geometria presentes no *corpus*

	Abordagem	Autor (a)
<b>Representações de figuras geométricas para:</b>	identificar conceitos ou propriedades de forma principalmente perceptiva (agrupamento 1)	Cardoso (2018), Carvalho (2017), Cicarini (2015), Dias (2012), Resende (2018), Sánchez (2020), Vieira (2017), Zambon (2010)
	resolver situações- problema (agrupamento 2)	Brasil (2017), Oliveira (2015), Oliveira (2017)
	verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações (agrupamento 3)	Almeida (2018), Dias (2009), Fonseca (2020), Janzen (2011), Lima (2020), Moreira (2010), Zanella (2018)

**Fonte:** Elaborado pelas autoras. Legenda das cores dos estudos: teses em **vermelho**, dissertações em **azul**

A seguir, apresentaremos como tais aspectos foram abordados nas pesquisas analisadas.

<sup>84</sup> O recurso visual de representações de figuras geométricas para se referir aos objetos da geometria foi abordado no *corpus* sob diferentes representações, tais como desenhos, material manipulável e por meio de *softwares*, como será discutido no decorrer deste artigo.

## **Os estudos do agrupamento 1: utilizam as representações para identificar conceitos ou propriedades de forma principalmente perceptiva**

Segundo Duval (1994), uma das formas de analisar objetos ou figuras em geometria é por meio de uma apreensão<sup>85</sup> perceptiva, isto é, uma apreensão imediata, automática e que permite identificar ou reconhecer uma forma, a partir de aspectos como tamanho, direção e orientação. A importância do visual em geometria, como um contato inicial com os conceitos geométricos, também é destacada por Pais (1996) e van Hiele (1984).

Assim, quando nos referimos à utilização de diferentes representações de figuras geométricas de forma principalmente perceptiva é que, em alguns casos, os momentos de formação inicial de PEM propuseram identificar conceitos geométricos e estudar suas propriedades pela observação de aspectos, como características de contorno.

Nos trabalhos desse grupo (CARDOSO, 2018; CARVALHO, 2017; CICARINI, 2015; DIAS, 2012; RESENDE, 2018; SÁNCHEZ, 2020; VIEIRA, 2017; ZAMBON, 2010), as abordagens geométricas estão centradas na percepção. Os contextos nos quais foram coletadas as informações desses trabalhos são, na maioria, a formação inicial de PEM para atuar nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, isto é, o Curso Normal<sup>86</sup> (RESENDE, 2018), a Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens<sup>87</sup> (SÁNCHEZ, 2020) e os demais, com exceção de Dias (2012) e Cicarini (2015), o curso de Pedagogia. Mesmo que o contexto de Dias (2012) tenha sido o curso de Pedagogia, o foco foi em uma formação inicial de PEM na Educação Infantil. Já Cicarini (2015) atuou no contexto indígena de formação inicial de professores para os Anos Finais do Ensino Fundamental.

---

<sup>85</sup> Duval (1994) especifica quatro formas de mobilizar uma figura e analisar seu funcionamento em geometria, o que chama de apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. O termo apreensão é filosófico e psicológico e designa o ato mais imediato e inicial de acessar um conceito ou objeto, sem julgamentos ou juízo de valor. Para Ferreira (2014), trata-se de um conhecimento oposto aos processos considerados mais elaborados, como a compreensão, o julgamento ou o raciocínio.

<sup>86</sup> Curso Normal: formava professores para lecionar no Ensino Primário.

<sup>87</sup> Tem como objetivo: “promover ‘iniciação acadêmica e científica’ aos futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental, mediante a abordagem interdisciplinar de questões abrangentes e fundamentais de conhecimento científico e social. Ao mesmo tempo, planeja-se criar um ambiente de estudos e de debates sobre a realidade contemporânea – incluída imprescindivelmente na formação docente – e, em particular, sobre o contexto sociocultural do Estado do Pará, da Região de inserção da UFPA e, especialmente, da Região Amazônica”. Disponível em <http://www.iemci.ufpa.br/index.php/graduacao>. Acesso em: 14 set. 2021.

Para abordar definições geométricas e identificar propriedades e relações entre os objetos da geometria, utilizando o recurso visual, os autores do *corpus* valeram-se de material manipulável, como embalagens, tachinhas, fio e E.V.A., com foco em características visuais e de contorno (CARDOSO, 2018; CARVALHO, 2017; VIEIRA, 2017; RESENDE, 2018; ZAMBON, 2010), e objetos de jogos e brincadeiras, como dado, corda e bola, estes especificamente para a formação inicial de professores para atuar na Educação Infantil (DIAS, 2012).

Outra forma de abordagem trata-se de relacionar a geometria com a natureza e o contexto indígena, por meio do grafismo, para trabalhar nomenclaturas de figuras geométricas planas e identificar seus elementos geométricos constituintes (CICARINI, 2015). Ademais, identificamos construções geométricas utilizando: *software* Poly 1.06; *software* GeoGebra (CARVALHO, 2017; SÁNCHEZ, 2020); aparelho gerador de sólidos de revolução EQ251D (CARVALHO, 2017); tarefas de simetria (ZAMBON, 2010); lápis e papel (CARDOSO, 2018); e tangram<sup>88</sup> (CARDOSO, 2018; VIEIRA, 2017).

### **Os estudos do agrupamento 2: utilizam as representações para resolver situações-problema**

Inicialmente ressaltamos que não indicamos perspectivas teóricas para a resolução de problemas, mas sim, a noção de análise, investigação e busca de respostas a partir de conceitos geométricos. Duval (1998) destaca que a análise de figuras permite encontrar soluções ou respostas. Em alguns problemas de geometria, podemos observar certas características nas figuras que nos remetem a teoremas ou definições e que podem ser úteis para a solução. Já em outros problemas, apenas a visão é suficiente para percebermos o que será necessário. Assim, figuras geométricas podem auxiliar a resolver problemas, assumindo a função de heurística<sup>89</sup>.

Os três trabalhos desse grupo (BRASIL, 2017; OLIVEIRA, 2015; OLIVEIRA, 2017) tratam de questões concernentes à resolução de problemas e visam trabalhar geometria no âmbito da formação inicial de PEM nos Anos Finais do Ensino

---

<sup>88</sup> Tangram: Quebra-cabeça mais conhecido em sua versão chinesa, composta de sete peças com formatos poligonais.

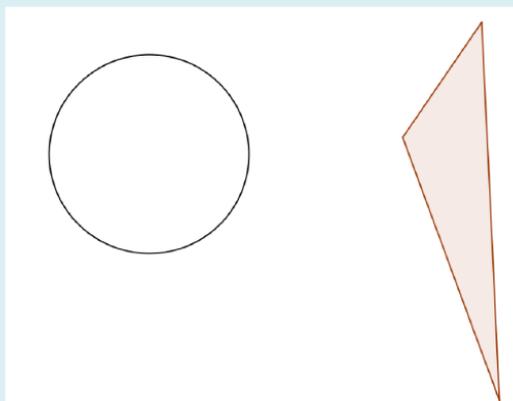
<sup>89</sup> A função de heurística refere-se às investigações e, possíveis, modificações feitas em figuras geométricas em busca de soluções e respostas (DUVAL, 1998).

Fundamental ou Ensino Médio.

Brasil (2017) destaca que o ensino de geometria deveria iniciar com situações-problema para trabalhar conceitos, demonstrações, argumentações e diferentes representações. A autora propõe 14 problemas de geometria aos futuros professores, dos quais 11 utilizam figuras. O *software Open Sim* foi utilizado para abordar representações de objetos geométricos e para resolver problemas com o apoio de desenhos, algoritmos matemáticos e construções feitas com os recursos disponíveis no *software*, usando álgebra e aritmética de modo concomitante com a geometria (OLIVEIRA, 2015). Já o *software GeoGebra* foi o recurso escolhido para resolver problemas por meio de simetria, translação, rotação e homotetia (Figura 1).

**Figura 1** - Exemplo de um problema proposto durante uma formação

Uma construtora está projetando para a área de lazer de um condomínio a construção de uma região triangular e um espaço circular, como mostra o projeto abaixo. Um arquiteto, vendo esse projeto, sugeriu que dentro do círculo também tivesse uma região triangular, a maior possível, com seus lados paralelos, cada um, aos lados do triângulo já projetado. Como fazer esse projeto?



Fonte: Oliveira (2017)

Assim como podemos observar na Figura 1, pouco ou nenhum cálculo aritmético seria necessário para a resolução. As transformações geométricas e as relações obtidas a partir das próprias figuras poderiam fornecer respostas, o que ocorre em 8, de um total de 12 problemas propostos por Oliveira (2017).

### **Os estudos do agrupamento 3: utilizam as representações para verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações**

Segundo Duval (1999), as figuras, mesmo construídas com instrumentos e propriedades matemáticas, são apenas representações com valores particulares, o que não permite que sejam tomadas como provas, sendo a única possibilidade no caso em que são utilizadas como contraexemplo. Parzysz (2006) chama a atenção para aspectos da representação de objetos geométricos na validação de conceitos, isto é, quando em uma demonstração, o estudante utiliza propriedades ou informações observadas em desenhos da situação, mas que não foram validadas previamente para serem argumentos.

Para Duval (2005), prova e demonstração são distintas. Assim, o autor destaca possíveis articulações entre visualização e raciocínio: raciocínio que acompanha a visualização, utilizada como justificativa; raciocínio que compensa ou corrige falhas ou limitações da visualização; raciocínio independente de qualquer visualização, isto é, quando são utilizados teoremas e definições e tem-se a demonstração como uma fonte de prova. Então, optamos por ambos os termos prova e demonstração, tanto porque autores como Duval (2005) não os consideram sinônimos, mas também pela diferenciação estabelecida em trabalhos do *corpus*.

Os trabalhos desta seção (ALMEIDA, 2018; DIAS, 2009; FONSECA, 2020; JANZEN, 2011; LIMA, 2020; MOREIRA, 2010; ZANELLA, 2018) valem-se de representações de figuras geométricas para estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações e têm como contexto a formação inicial de PEM nos Anos Finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

Os autores exploraram construções geométricas, conjecturas e demonstrações apoiados por construções, utilizando lápis e papel (ALMEIDA, 2018; LIMA, 2020), material manipulável, como bola de isopor e elásticos (FONSECA, 2020), tangram e representações de figuras geométricas (MOREIRA, 2010)

O *software* GeoGebra também foi um recurso adotado para construções geométricas, demonstrações, verificação de propriedades, exploração de argumentos e conjecturas, a partir do qual os autores destacam a necessidade de conhecer conceitos, propriedades matemáticas e saber utilizar os recursos do *software* para realizar as construções e as demonstrações (DIAS, 2009; FONSECA, 2020; JANZEN, 2011; ZANELLA, 2018).

CARACTERIZAÇÕES DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO E PRINCIPAIS REFERENCIAIS TEÓRICOS PRESENTES NO *CORPUS*

Diante de diferentes abordagens de geometria presentes na formação inicial de PEM, consideramos pertinente analisar caracterizações de pensamento geométrico, e dos diferentes termos empregados pelos autores, que nortearam os trabalhos do *corpus*, bem como os principais referenciais teóricos utilizados.

Poucos autores do *corpus* se restringem a um único termo, como Dias (2012), que utiliza apenas *pensamento geométrico*; Almeida (2018), Fonseca (2020), Janzen (2011) e Oliveira (2015), *conhecimento geométrico*; e Resende (2018), *saber geométrico*. Os demais utilizam mais de um desses termos no decorrer do trabalho.

Assim, nos debruçamos em identificar possíveis caracterizações<sup>90</sup> para esses termos nos trabalhos do *corpus*, seja explícita ou implicitamente. O Quadro 2 contém as caracterizações identificadas nos trabalhos do *corpus*.

**Quadro 2** - Caracterizações identificadas no *corpus*

<b>Termo</b>	<b>Caracterização</b>
<b>Conhecimento geométrico</b>	“Os conhecimentos geométricos envolvem axiomas, definições, proposições, teoremas, como também enunciar, explicar, descrever, conjecturar, argumentar e demonstrar resultados acerca dos objetos em estudo” (ZANELLA, 2018, p. 213).
<b>Pensamento geométrico</b>	O desenvolvimento do Pensamento Geométrico da criança deve permitir “[...] observar, refletir, interpretar, levantar hipóteses, procurar e encontrar soluções para situações-problema” (DIAS, 2012, p. 61). “[...] o desenvolvimento do pensamento geométrico está diretamente relacionado com o modo pelo qual percebemos e interpretamos o mundo ao nosso redor, e de acordo com Piaget, a criança descobre e compreende o mundo por meio do contato visual e físico com os objetos” (VIEIRA, 2017, p. 73).
<b>Raciocínio geométrico</b>	“[...] o raciocínio geométrico é como o pensar geometricamente e a valorização da linguagem geométrica” (BRASIL, 2017, p. 180).
<b>Saber geométrico</b>	“Optamos por utilizar o termo saberes geométricos, entendendo como todos os conceitos, definições, temas, propriedades e práticas pedagógicas relacionadas à geometria que estejam presentes na cultura escolar primária [...]” (LEME DA SILVA, 2015, p. 42, <i>apud</i> RESENDE, 2018, p. 13).

Fonte: Elaborado pelas autoras

Além da caracterização colocada por Zanella (2018) para conhecimento geométrico, no trabalho de Cicarini (2015) há indícios da Geometria Euclidiana Plana e do conhecimento indígena, representado pelos grafismos, como dois “tipos” de conhecimento geométrico, pois o autor indaga se “Utilizavam o grafismo como um instrumento integrador entre o conhecimento geométrico indígena e o euclidiano?”

<sup>90</sup> Por caracterização nos referimos às evidências, às descrições, às definições ou ao elenco de características de certo termo ou expressão.

(CICARINI, 2015, p. 70) e “[...] o colaborador acredita na possibilidade de se criar uma cartilha que aproximaria os conhecimentos Geométricos indígenas do Geométrico Plano [...]” (p. 104).

Dias (2009), Moreira (2010), Vieira (2017) e Zambon (2010) entendem que o ensino de geometria parte do perceptivo da realidade para o abstrato com demonstrações. Ademais, esses autores, além de Janzen (2011), Lima (2020), Oliveira (2017) e Zanella (2018) embasaram seus estudos em Bernard Parzysz, Luis Carlos Pais, Pierre van Hiele e Raymond Duval.

Os autores classificam o pensamento geométrico dos estudantes (LIMA, 2020; MOREIRA, 2010; VIEIRA, 2017) ou as tarefas (ZAMBON, 2010) em Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico,<sup>91</sup> descritos por van Hiele. Lima (2020) investigou articulações entre os tipos de prova de Balacheff (1987, 2000) e os Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico, de van Hiele (VAN HIELE, 1957). De modo semelhante, Dias (2009) apoia-se nos Paradigmas de Parzysz<sup>92</sup> (PARZYSZ, 2001, 2006) para articular com os tipos de prova de Balacheff (1987), e também em Duval (1994), para abordar as apreensões em geometria e a Teoria das Representações Semióticas.

Moreira (2010), além da teoria de van Hiele (NASSER, 1992; USISKIN, 1982)<sup>93</sup>, embasa-se em Duval (1993, 2003, 2009). Justifica que van Hiele e Duval se unem pela importância da linguagem para os processos de desenvolvimento do pensamento geométrico, pois considera o objetivo de desenvolver nos estudantes o discurso argumentativo.

Vieira (2017) defende, ancorado na concepção de van Hiele (1986), que, na geometria, a visualização e a manipulação de objetos são capazes de facilitar a aprendizagem. Zambon (2010) baseia-se na teoria de van Hiele (CROWLEY, 1994; PIRES; CURI; CAMPOS, 2000) e também nas de Parzysz (2006) e de Pais (1994, 1996, 2000).

Janzen (2011) e Zanella (2018), por outro lado, apoiam-se exclusivamente em Duval. Janzen (2011) destaca a utilização do referencial teórico para fundamentar os

---

<sup>91</sup> Van Hiele (1984) propõe cinco níveis de desenvolvimento do Pensamento Geométrico que parte do visual em direção ao axiomático.

<sup>92</sup> Parzysz (2001, 2006) apresenta quatro paradigmas geométricos: G0 (Geometria Concreta), G1 (Geometria Espaço-Gráfica), que constituem as Geometrias Não Axiomáticas, G2 (Geometria Proto-Axiomática) e G3 (Geometria Axiomática), que constituem as Geometrias Axiomáticas.

<sup>93</sup> Não identificamos a seção de referências, utilizadas no trabalho de Moreira (2010).

processos constituintes da geometria e os diferentes modos de analisar figuras geométricas (DUVAL, 1998, 1999). Zanella (2018) defende a importância dos registros de representação semiótica, como a língua natural e as linguagens matemática e figural (DUVAL, 1993, 1999, 2004a, 2004b, 2006a, 2006b, 2009, 2011, 2012a, 2012b, 2012c, 2014).

O Quadro 3 ilustra os referenciais contemplados nos trabalhos do *corpus*, quais sejam: Duval, Pais, Parzysz e van Hiele.

### Quadro 3 - Referenciais mais utilizados no *corpus*

<b>Duval</b>	DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In: Annales de Didactique et de Sciences Cognitives - IREM de Strasbourg, n. 5, p.37-65, 1993.
	DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repères, n.17, p.121-138, 1994.
	DUVAL, R. Geometry from a cognitive Point of view. In: C. Mammana e V. Villani (editores), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, p. 37-52, 1998.
	DUVAL, R. Representation, Vision And Visualization: Cognitive Functions. In: Mathematical Thinking. Basic Issues For Learning. U.S. Department of Education: Educational Resources Information Center (ERIC), 1999.
	DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, 2.ed. 2004a.
	DUVAL, R. Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y de las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Cali: Universidad del Valle, 2.ed. 2004b.
	DUVAL, R. Transformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. In: La matematica e la sua didattica. n.4, p.585-619, 2006a.
	DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: Educational Studies in Mathematics. n.61, p.103-131, 2006b.
	DUVAL, R. Semiósisis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
	DUVAL, R. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, ed. 1, 2011.
	DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. In: Revemat: Florianópolis, vol.7, n.1, p.118-138, 2012a.
	DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. In: Revemat: Florianópolis, vol.7, n.1, p.97-117, 2012b.
	DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. In: Revemat. Florianópolis, vol.7, n.2, p.266-297, 2012c.
DUVAL, R. Comment analyser le probleme crucial de la comprehension des mathematiques? In: Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, San Cristobal de La Laguna, n.37, p.9-29, 2014.	
<b>Pais</b>	PAIS, L. C. A Representação dos Corpos Redondos no Ensino da Geometria. Revista Zetetiké, Campinas, 1994, n. 02, p. 13-23
	PAIS, L. C. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. Revista Zetetiké, Campinas, 1996, n. 06, p. 65-74.
	PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. ANPED, 23ª Reunião, Caxambu, 2000. Disponível em: <a href="http://www.anped.org.br/23/textos/1919t.pdf">http://www.anped.org.br/23/textos/1919t.pdf</a> .
<b>Parzysz</b>	PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. In: Actes du 28 ème colloque COPIRELEM (Tours, juin 2001). p. 99-110. 2001.
	PARZYSZ, B. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il. Quaderni di Ricerca in Didattica, v. 17, p. 121-144, 2006.
<b>van Hiele</b>	VAN HIELE, P. M. El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometria). (Tese de Doutorado em Matemática e Ciências Naturais). Tradução Rosa Corberán <i>et al.</i> , 1990. Universidade de Utrecht: Utrecht,

	Holanda, 1957.
	VAN-HIELE, P. M. Structure and Insight: a Theory of Mathematics Education. FL, USA: Academic Press Orlando, 1986.
	CROWLEY, M.L; O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST; M.M; SHULTE, A.P (orgs). Aprendendo e ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994, p. 1-20.
	PIRES, C. M. C., CURI, E., CAMPOS, T. M. M. Espaço e forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do ensino fundamental. São Paulo: PROEM, 2000.

**Fonte:** Elaborado pelas autoras

Observamos, assim, a variedade de referências de Duval, isto é, os autores que se basearam em Pais, Parzysz e van Hiele citaram, por vezes, os mesmos estudos.

Para além desses referenciais mais utilizados, encontramos outros com menor frequência. Assim como os trabalhos ancorados em Raymond Duval, Sánchez (2020) argumenta a respeito de sistemas de representação semiótica, mas na perspectiva da Teoria da Objetivação, de Luis Radford. Para Sánchez (2020), é preciso considerar os diferentes sistemas semióticos aplicados em atividades matemáticas, como os das linguagens escrita e falada e o dos gestos. A Teoria Antropológica do Didático é o principal referencial teórico de Almeida (2018), que considera o conhecimento no âmbito das instituições escolares, a partir de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, representando uma organização praxeológica (ALMEIDA, 2018).

Na sequência, buscaremos estabelecer possíveis articulações entre o uso de representações de figuras para abordar geometria (Seção 3), os referenciais teóricos e as caracterizações identificados no *corpus* (Seção 4).

## DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

As análises evidenciaram que as representações de figuras geométricas são frequentes em abordagens de geometria na formação inicial de PEM. É importante, no entanto, que, na formação inicial de professores de Matemática, sejam destacados a importância do seu uso e dos cuidados que devem ser tomados ao usá-las (PEREIRA, 2020).

Formas de representação possuem limitações, especialmente se considerarmos apenas as características perceptivas (DUVAL, 1994). Daí a

necessidade de não restringir o trabalho exclusivamente em um único registro, até porque “[...] não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação” (DUVAL, 2009, p. 14). Além disso, em um determinado problema pode ser útil alterar a forma na qual a informação é representada (BRASIL, 2018; PARZYSZ, 2001).

O uso específico de representações de figuras geométricas, no entanto, não é algo recente no ensino de geometria. Brigo e Flores (2008) apontam uma tendência nas pesquisas em valorizar o uso de figuras e de diversos outros artefatos visuais. Trata-se, na realidade, de algo que não se restringe às pesquisas brasileiras. Jones *et al.* (2019) relatam que, no 11.º Congresso da Sociedade Europeia de Pesquisa em Educação Matemática, emergiram quatro focos das pesquisas em Ensino de Geometria e Formação de Professores: resolução de problemas; manipulação com ferramentas e desenhos; visualização; e prova.

Nos trabalhos que fazem parte do primeiro agrupamento, cujo contexto foi, predominantemente, a formação inicial de PEM na Educação Infantil e Anos Iniciais, prevaleceram representações de figuras geométricas na forma de modelos, nesse caso, material manipulável. Identificamos abordagens que focam principalmente características perceptivas e exploração do espaço com a observação. Ou seja, as representações tiveram a finalidade de identificar conceitos ou propriedades de forma perceptiva (DUVAL, 1994).

A BNCC (BRASIL, 2018) destaca que, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o trabalho com a Geometria deve ser iniciado com a manipulação de representações na forma de figuras geométricas, *softwares* ou dobraduras. Van Hiele (1984) ressalta que, no trabalho inicial da geometria, cumpre evocar recursos visuais, além de, assim como Parzysz (2006), compreender características geométricas do espaço físico.

Já os trabalhos do *corpus*, pertencentes ao segundo e terceiro agrupamentos, desenvolvidos em contextos de formação inicial de professores de Matemática para os Anos Finais e Ensino Médio, privilegiam as representações na busca de construir justificativas, argumentações e o estabelecimento de conjecturas e estratégias para resolver problemas, verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações.

Julgamos pertinente o uso de diversas representações, especialmente figuras geométricas, para essa finalidade, na medida em que podem propiciar diferentes

possibilidades de abordagem de provas e argumentações na formação inicial de professores de Matemática. Segundo Pereira (2020), essa abordagem é significativa e deve considerar a escolha e a condução de tarefas, a avaliação da argumentação dos estudantes, a importância de exemplos, contraexemplos e de figuras geométricas em situações de prova.

É essencial, no entanto, o uso de representações para essa finalidade também com PEM, de um modo geral, como os da Educação Infantil ou os dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Esses profissionais precisam estar preparados para um enfoque argumentativo, pois é importante que os estudantes dessas etapas também “raciocinem e argumentem, ao mesmo tempo que desenvolvem e testam conjecturas sobre relações geométricas. Os alunos mais novos gostam de argumentar, só precisam é de ser ensinados a como argumentar eficazmente” (VALE; PIMENTEL, 2017, p. 46).

O dinamismo e as ferramentas de *softwares* estiveram presentes em abordagens tanto na formação inicial de PEM nos Anos Iniciais como nos Finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio. Ainda que o GeoGebra tenha sido o mais utilizado, também evidenciamos o Poly 1.06 e o *Open Sim*.

A despeito de muitos comandos dos *softwares* serem automáticos, é preciso conhecer conceitos geométricos ao utilizá-los. Pereira (2020) destaca a importância de, na formação inicial de professores de Matemática, considerar o conhecimento do uso de *softwares* para ensinar geometria, sobretudo porque suas ferramentas e possibilidades dinâmicas podem auxiliar na visualização e nas tarefas de argumentação e prova. No *corpus*, os *softwares* foram privilegiados em momentos de construção ou observação de relações e propriedades de figuras, validação de conjecturas e provas. Creemos que isso pode ter ocorrido devido às facilidades de interação nesses ambientes.

Representações de figuras geométricas também atuaram para resolver problemas e estabelecer conjecturas, provas e demonstrações em propostas que utilizaram lápis, papel, régua ou compasso. Duval (2012) afirma que algumas dificuldades dos estudantes podem ser oriundas do instrumento utilizado na construção e não das propriedades matemáticas. Embora a representação de conceitos em forma de desenhos, especialmente o desenho instrumentado, apresente dificuldades aos estudantes, essas construções exercem um importante papel na aprendizagem da geometria, sobretudo para solucionar problemas (PAIS,

1994).

Diante de diferentes abordagens de representações visuais utilizadas para trabalhar geometria na formação inicial de PEM, julgamos pertinente investigar caracterizações de pensamento geométrico, e das demais nomenclaturas por eles utilizadas, bem como os principais referenciais teóricos que nortearam essas abordagens. Nesse sentido, corroboramos a literatura (BRUNHEIRA, 2019; PAIVA, 2021; PEREIRA DA COSTA, 2020; SINCLAIR *et al.*, 2016), quanto às poucas caracterizações/definições para termos referentes ao ensino de geometria. Gutiérrez (1996, p. 4) considera essa “aparente bagunça” como reflexo da variedade de áreas e especialistas do tema.

Em nosso *corpus*, termos como “conhecimento geométrico”, “pensamento geométrico”, “raciocínio geométrico” ou “saber geométrico” foram empregados, em grande parte, de modo arbitrário em um mesmo trabalho, sem esclarecer se foram tomados como sinônimos, quais seus possíveis significados ou posições epistemológicas.

Em alguns trabalhos, no entanto, constatamos, de modo explícito ou implícito, o que os autores consideram a respeito de aspectos da geometria, bem como o uso de determinados autores referentes e a presença de caracterizações.

Zanella (2018) descreve “Conhecimento Geométrico” como algo que envolve axiomas, definições, proposições, teoremas, discurso para explicar, conjecturar, argumentar e demonstrar. “Pensamento Geométrico” foi caracterizado por Dias (2012) e Vieira (2017), que entendem a importância de descobrir o mundo que nos circunda por meio da observação e da experimentação. “Raciocínio Geométrico”, no trecho de caracterização de Brasil (2017), foi relacionado com “Pensamento Geométrico”, isto é, a nosso ver como possíveis sinônimos, além de mencionar a valorização da linguagem geométrica. A expressão “Saber Geométrico” foi destacada por Resende (2018), incluindo definições, conceitos geométricos e práticas pedagógicas, ou seja, leva em conta tanto conceitos científicos quanto experiências e práticas.

Na busca por caracterizações, identificamos a prevalência de referenciais de Duval e van Hiele. Essa recorrência também é destacada em outras revisões de literatura do âmbito do ensino de geometria (BARRETO *et al.*, 2021; CARVALHO; FERREIRA, 2015; SHARMA, 2019; SINCLAIR *et al.*, 2016). A teoria de van Hiele, todavia, é criticada por revelar uma visão limitada do papel da linguagem e

considerar um ensino sequencial e linear (SHARMA, 2019; SWOBODA; VIGHI, 2016), sobretudo porque um estudante pode apresentar características de diferentes níveis a depender do conceito, o que dificulta a classificação em níveis específicos (SHARMA, 2019).

Os trabalhos do *corpus* que consideraram exclusivamente Raymond Duval para falar de geometria (JANZEN, 2011; ZANELLA, 2018), sem articulá-lo com outros autores, utilizaram o *software* GeoGebra. O fato de essas pesquisas optarem por Raymond Duval e seu referencial teórico acerca de representações semióticas pode indicar preocupações com as diferentes formas de representação proporcionadas pelos *softwares*. Segundo Baldini (2014), as tecnologias digitais possuem características, como diferentes linguagens e formas de representação.

#### ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A partir das análises do *corpus*, identificamos diferentes representações para os objetos geométricos utilizados em momentos de formação inicial de PEM. Ainda que representações na forma de teoremas, demonstrações ou fórmulas se façam presentes, o que defendemos ser também necessário, as representações visuais de figuras geométricas prevaleceram nas abordagens e tiveram as seguintes finalidades: identificar conceitos ou propriedades de forma perceptiva; resolver situações-problema; verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações.

Poucas abordagens, contudo, focaram em potencialidades de operações nas próprias figuras, como modificações de tamanho, posição ou partições. Assim, por vezes, representações de figuras geométricas, na forma de desenhos, *softwares* e material manipulável, estiveram articuladas às representações algébricas e aritméticas.

Muito embora as representações visuais sejam importantes, há de haver um equilíbrio de abordagens que englobem diferentes representações de forma articulada e complementares umas das outras, para que os estudantes não estejam predeterminados às formas de ensinar geometria a depender de etapas da Educação Básica. Cumpre considerar o significado que diferentes representações de figuras geométricas possuem para além de “pontes” para os demais registros.

Representações de figuras geométricas foram utilizadas em situações-

problema e em tarefas de argumentação, verificação de propriedades, demonstrações e estabelecimento de hipóteses e conjecturas em contextos de cursos de Licenciatura em Matemática. Sendo assim, se faz necessário investigar essas finalidades, inclusive, na formação inicial de PEM na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Pierre van Hiele e Raymond Duval prevaleceram como referenciais teóricos, que embasaram os estudos do *corpus*. Duval esteve presente apenas nas abordagens que optaram por representações de figuras geométricas para verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações, além de predominar nas questões do uso de *softwares*, especificamente o GeoGebra. No entanto, outros como Luis Radford, utilizado por Sánchez (2020), se mostram como uma alternativa às investigações que envolvam representações semióticas e o GeoGebra. Já van Hiele foi sempre articulado com outros autores. Referenciais que privilegiam diferentes níveis de pensamento geométrico, como Bernard Parzysz e Pierre van Hiele, fundamentaram a verificação da possível eficácia dos empreendimentos propostos ou a classificação em diferentes níveis do pensamento geométrico dos futuros PEM.

Na falta de caracterizações para pensamento geométrico, assinalada pela literatura (PAIVA, 2021; PEREIRA DA COSTA, 2020), evidenciamos a possível emergência de preocupações dos autores em estabelecer o que entendem por determinados termos, justificar suas escolhas e possíveis articulações entre referenciais (DIAS, 2012; JANZEN, 2011; MOREIRA, 2010; RESENDE, 2018; VIEIRA, 2017; ZANELLA, 2018).

Durante as análises, observamos uma variedade de termos utilizados, o que pode ser reflexo de diferentes bases epistemológicas e de formas de compreender como ocorrem os processos de aprendizagem. Contudo, não encontramos discussões a respeito de possíveis particularidades que pudessem diferenciar ou articular conhecimento, pensamento, raciocínio e saber geométricos.

São necessárias investigações futuras para discutir as razões e, porventura, apontar caminhos para ultrapassar obstáculos, delinear caracterizações e particularidades, dos diferentes termos utilizados, e identificar os seus desdobramentos na prática, seja em contextos de formação de PEM ou com estudantes de diferentes etapas e modalidades da Educação Básica.

Assumir mais explicitamente uma posição epistemológica parece ser um

caminho a ser trilhado nas pesquisas. Não defendemos o consenso na literatura, mas é importante que nossas posições epistemológicas, os autores referentes ou o que queremos dizer com os termos que utilizamos sejam evidenciados. Por conta disso, é fundamental que cursos de pós-graduação, em nível de mestrado e de doutorado, enfatizem com mestrandos e doutorandos a relevância de as posições epistemológicas serem especificadas, de as pesquisas serem coerentes e articuladas em termos de objetivos, referenciais teóricos e procedimentos metodológicos e analíticos.

#### REFERÊNCIAS

ATASOY, E. Elementary Mathematics Teacher Candidates' Geometric Thinking Levels and Their Self- Efficacy in Geometry. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n.2, p. 161-170, 2019.

BALACHEFF, N. Processus de Preuve et Situations de Validation. **Educational Studies in Mathematics**, n.18, p. 147-176, 1987.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.

BALDINI, L. A. F. **Elementos de uma comunidade de prática que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de matemática na utilização do software Geogebra**. 2014. 220 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

BARRETO, M. C. *et al.* Estado da arte em pesquisas acadêmicas brasileiras, de 2010 a 2019, sobre o ensino de geometria desenvolvidas no Nordeste. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 39, n. 1, p. 1-22, jan./mar. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/ Anos iniciais**. Brasília, 1997, 142 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018, 600p.

BRIGO, J; FLORES, C. R. A Problemática do Uso da Figura no Ensino de Geometria: indicativos para uma pesquisa histórica. *In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, [S. l.], 12. **Anais [...]**. p. 1–13, 2008.

BRUNHEIRA, L. M. A. **O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos primeiros anos**. 2019. 242 f. Tese (Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2019.

CARVALHO, H. A. F.; FERREIRA, A. C. Visualização espacial e pensamento geométrico: um panorama da produção brasileira em programas de Pós-Graduação nos últimos anos. *In: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 7, 2015, São João Del Rei/MG. **Anais EMEM**, 2015.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Early childhood teacher education: the case of geometry. **Journal Of Mathematics Teacher Education**, [s.l.], v. 14, n. 2, p. 133-148, 23 fev. 2011. Springer Science and Business Media LLC.

CLEMENTS, D. H. *et al.* Teaching and learning Geometry: early foundations. **Quadrante**, [s. l.], v. 17, n. 2, p. 7-31, 2018.

DE PAULA, E. F. **Identidade profissional de professores que ensinam matemática**: indicativos de pesquisas, elementos e ações para elaboração de uma proposta investigativa. 2018. 227 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères**, n.17, p.121-138, 1994.

DUVAL, R. Geometry from a Cognitive Point of View. *In: MAMMANA, C.; VILLANI, (Orgs.). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study.* Dordrecht: Kluwer, p. 37-52, 1998.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *In: HITT, F.; SANTOS, M. (Ed.). Proceeding of the 21st Annual Meeting of the 228 North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico, p. 3-26, oct., 1999.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *In: Annales de didactique et de sciences cognitives.* 2005.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Mérciles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.

FERREIRA, A. B. H. **Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 5. ed. [S. l.]: Positivo, 2014.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012. (Coleção Formação de Professores).

FIORENTINI, D. *et al.* O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. *In*: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. d. (Org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática**: período 2001 – 2012. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/pf/subportais/biblioteca/fev-2017/e-book-mapeamento-pesquisa-pem.pdf>. Acesso em: 06 out. 2020.

GINZBURG, C. **Mitos, emblemas, sinais**. São Paulo: Companhia das Letras, 1989.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *In* Puig, L.; Gutiérrez, A. (Eds.), **Proceedings of the 20th International Conference of the P.M.E.**, 1, 3-19. Valencia: University of Valencia, 1996.

JONES, K., *et al.* Introduction to the papers of TWG04: Geometry Teaching and Learning. **Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands.

KUZNIAK, A.; NECHACHE, A. On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of mathematical working spaces. **Educational Studies in Mathematics**, [s.l.], v. 106, n. 2, p. 271-289, 4 jan. 2021.

NASSER, L.; FERREIRA, M. L.; VAZ, R. F. N. Estimulando o domínio do processo dedutivo no curso de licenciatura em matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 499-513, jul./dez. 2017.

NUÑEZ, I. B.; RAMALHO, B. L. A dispersão semântica na pesquisa educacional: implicações teórico-metodológicas. **Educação em Questão**, v. 11, n. 2, p. 96-114, 1999.

PAIS, L. C. A representação dos corpos redondos no ensino da geometria. **Zetetiké**, Campinas, v. 2, p. 13-23, 1994.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, v. 4, n. 2, 1996.

PAIVA, S. M. **A conceituação do pensamento geométrico**: aspectos históricos, filosóficos e as visões presentes em teses e dissertações no Brasil. 2021. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos Formativos) - Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2021.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *In*: **Actes du 28 ème colloque COPIRELEM** (Tours, juin 2001). p. 99-110. 2001.

PARZYSZ, B. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il. **Quaderni di Ricerca in Didattica**, v. 17, p. 121-144, 2006.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M. O ensino de geometria no ciclo de

alfabetização: um olhar a partir da província brasileira. **Educação, Matemática, Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1147-1168, 2014.

PEREIRA, A. N. **Conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria na educação básica**. 2020. 233f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020.

PEREIRA DA COSTA, A. Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S.L.], v. 9, n. 18, p. 152-179, 26 jun. 2020.

SANTOS, L.; OLIVEIRA, H. O ensino e a aprendizagem da geometria: Perspetivas Curriculares. *In*: Encontro de Investigação em Educação Matemática, 2017, Lisboa. **Atas**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2017. p. 3-8.

SANTOS, L. F.; TELES, R. A. M. Conhecimento dos professores sobre geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: um estado da arte. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [s.l.], v. 23, n. 1, p. 79-111, 11 abr. 2021.

SHARMA, S. Use of theories and models in geometry education research: a critical review. **Waikato Journal of Education**, [s.l.], v. 24, n. 1, p. 43-54, 13 maio 2019. University of Waikato.

SINCLAIR, N. *et al.* Recent research on geometry education: an icme-13 survey team report. **ZDM**, [s.l.], v. 48, n. 5, p. 691-719, 28 jun. 2016. Springer Science and Business Media LLC.

SWOBODA, E.; VIGHI, P. Early Geometrical Thinking in the Environment of Patterns, Mosaics and Isometries. **icme-13 Topical Surveys**, Hamburg, v. 13, p. 1-50, 2016.

VALE, I.; PIMENTEL, T. O ensino e aprendizagem de Geometria. *In*: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2017, Lisboa. **Atas**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2017. p. 43-48.

VAN HIELE, P. M. English summary. The problem of insight in connection with school children's insight into the subject matter of geometry. Doctoral dissertation, University of Utrecht, 1957. *In*: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Eds.). **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele**. Brooklyn: Brooklyn College, p. 237-241, 1984.

VIANA, O. A.; SILVA, L. R. P. Raciocínio geométrico e aprendizagem de congruência de triângulos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 1-22, 14 maio 2020.

#### REFERÊNCIAS DO CORPUS ANALISADO NESTE ESTUDO

ALMEIDA, G. S. **Uma (re) construção praxeológica no estudo de conteúdos da geometria com alunos da Licenciatura da Matemática**. 2018. 200 f. Tese

(Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro Do Sul, São Paulo, 2018.

BRASIL, T. C. **O ensino da Geometria através de resolução de problemas:** Explorando possibilidades na formação inicial de professores de Matemática. 2017. 264p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

CARDOSO, F. P. **Contribuições de um curso de extensão em geometria para a formação matemática de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2018. 108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2018.

CARVALHO, H. A. F. **Aprendendo a ensinar geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:** um estudo com alunos de Pedagogia de uma universidade federal mineira. 2017. 192 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2017.

CICARINI, A. M. O. T. **Geometria plana e o grafismo indígena:** O estudo de suas relações no contexto histórico do grupo Tukano de alunos da Licenciatura Intercultural dos Povos Indígenas do Alto Rio Negro. 2015. 198 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

DIAS, M. S. S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em matemática:** uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico. 2009. 213 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

DIAS, R. D. **A Construção do pensamento geométrico na formação inicial de professores da Educação Infantil.** 2012. 155 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) - Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012.

FONSECA, J. A. da. **Investigação de aspectos da compreensão relacional e da instrumental em geometria esférica.** 2020. 307f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2020.

JANZEN, E. A. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica.** 2011. 194f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

LIMA, M. L. S. **Um estudo sobre as provas e demonstrações na Licenciatura em Matemática:** articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff. 398 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020.

MOREIRA, M. D. D. **Revisitando Euclides para o ensino de áreas:** uma proposta para as licenciaturas. 2010. 165 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)

– Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

OLIVEIRA, C. A. **Estratégias didáticas nos processos de ensino e de aprendizagem em matemática no mundo digital virtual em 3D Open Sim**. 2015. 154 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal De Alagoas, Maceió, 2015.

OLIVEIRA, D. B. S. **A constituição de conhecimento colaborado em geometria das transformações com ferramentas dinâmicas**. 2017. 169 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal De Juiz De Fora, Juiz de Fora, 2017.

RESENDE, M. J. **Saberes geométricos para a formação de professores primários em Sergipe: uma investigação sobre o período de 1890 A 1944**. 2018. 86 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Fundação Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2018.

SÁNCHEZ, I. C. **Aprendizagem geométrica em torno das ideias presentes na simulação de um motor a dois tempos no GeoGebra: Um estudo de caso**. 2020. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

VIEIRA, N. S. O. **A formação matemática do pedagogo: reflexões sobre o ensino de geometria**. 2017. 113f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

ZAMBON, A. E. C. **A geometria em cursos de pedagogia da região de Presidente Prudente - SP**. 2010. 237f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Presidente Prudente, 2010.

ZANELLA, I. A. **Diferentes representações na geometria euclidiana por meio do uso do geogebra: um estudo com futuros professores de matemática**. 2018. 229 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A nossa pesquisa teve como principal cenário a formação inicial de PEM, especificamente, no que diz respeito à geometria. A literatura mostra a importância da Geometria na Educação Básica e, ao mesmo tempo, dificuldades apresentadas por estudantes e (futuros) PEM.

Com isso, levantam-se questões e hipóteses para explicar origens, causas e possíveis soluções para as problemáticas encontradas. As pesquisas, então, se tornam um instrumento de análise e comunicação de situações e resultados. De modo mais específico, dissertações e teses trazem apontamentos que, por vezes, não são publicados ou, então, são uma forma de “comunicação primária” em relação a resultados que serão divulgados posteriormente na forma de artigos. Assim, nos propusemos a investigar: *que indicativos, a respeito de geometria na formação inicial de PEM, estão presentes em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período 2009-2020?*

Para responder a essa questão, realizamos um mapeamento, obtendo 18 dissertações e teses, e identificamos 3 principais focos nesses trabalhos que poderiam nos fornecer tais indicativos: pontos de enfoque dos trabalhos que tiveram como contexto a formação inicial de PEM na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental (Artigo 1); pontos de enfoque dos trabalhos que tiveram como contexto a formação inicial de professores de matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio (Artigo 2); e abordagens utilizadas, perspectivas de pensamento geométrico e principais referenciais teóricos presentes nas 18 pesquisas que compõem o *corpus* (Artigo 3).

A partir disso, observamos os seguintes indicativos a respeito da geometria na formação inicial de PEM:

- Na formação inicial de PEM na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental os conteúdos de geometria são trabalhados concomitante com o “como ensinar” geometria. Observamos que a geometria é abordada de modo, predominantemente, perceptivo e visual, com a utilização de representações de figuras geométricas por meio de material manipulável e, em poucos momentos, *softwares* de geometria dinâmica. A carga horária dos cursos, analisados por autores do *corpus*, para o trabalho com a geometria, se mostrou restrita e insuficiente, com cerca de um ou dois

encontros destinados à essa área. Portanto, disciplinas específicas, cursos de extensão ou reajuste de carga horária, focados na geometria, precisam ser (re)pensados.

- As pesquisas que têm como cenário a formação inicial de professores de matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio focaram, principalmente, em estratégias associadas às aprendizagens de geometria desses futuros professores, mas também investigaram relações que poderiam ser estabelecidas, a partir de conhecimentos geométricos já constituídos por eles. Tecnologias digitais, como o *software* GeoGebra, foram os recursos mais utilizados para promover estratégias de aprendizagem em geometria desses futuros professores. Além disso, a geometria foi trabalhada, majoritariamente, a partir de representações de figuras geométricas centradas na verificação de propriedades, provas e demonstrações.
- De um modo geral, todos os trabalhos relatam a utilização de recursos visuais para abordar geometria na formação inicial de PEM. As especificidades, no entanto, dividiram-se quanto ao foco: para identificar conceitos considerando características perceptivas, para resolver problemas ou para verificar propriedades, provas e demonstrações. Contudo, o uso de figuras geométricas e suas respectivas operações foram pouco enfatizados, isto é, a geometria foi trabalhada, por vezes, em articulação com a Álgebra, a Aritmética e as Medidas.
- A Geometria Euclidiana predominou nos momentos de formação inicial de PEM, visto que as não euclidianas foram abordadas em apenas quatro trabalhos, um da formação inicial de PEM na Educação Infantil e os demais da formação inicial de professores de matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, sendo foco central de apenas dois.
- Apesar de a literatura citar a falta de caracterizações para pensamento geométrico, identificamos indícios do que alguns autores entendem para conhecimento/pensamento/raciocínio/saber geométricos em pesquisas da formação inicial de PEM. No entanto, ainda prevalece o uso arbitrário de tais termos, isto é, sem caracterizá-los ou utilizando-os, aparentemente, como sinônimos ou em sentidos de senso comum.

- Em síntese, os autores do *corpus* descrevem *pensamento geométrico* como um modo de explorar e interpretar objetos geométricos, para resolver problemas e compreender o mundo. Já *raciocínio geométrico* foi relacionado com a linguagem própria da geometria, assim como *conhecimento geométrico*, ou seja, definições, descrições, argumentações e demonstrações. O termo *saberes geométricos* foi utilizado no sentido de valorizar a cultura geométrica, isto é, tanto definições e conceitos quanto práticas pedagógicas.
- Quanto aos referenciais teóricos – Bernard Parzysz, Luis Carlos Pais, Pierre van Hiele e Raymond Duval –, encontramos apenas características do ensino de geometria de modo geral, isto é, não localizamos caracterizações de conhecimento/pensamento/raciocínio/saber geométrico, ou quaisquer outros termos relacionados. Esses referenciais foram os mais utilizados pelos autores do *corpus* para falar de geometria, predominando Duval e van Hiele.

Em nossa investigação, de um ponto de vista metodológico, encontramos algumas dificuldades e limitações, ao mapear e analisar as dissertações e teses. Nem todos os trabalhos completos estavam disponíveis no catálogo da Capes, o que nos levou a recorrer aos autores e seus respectivos orientadores via *e-mail*, mas nem sempre fomos atendidos.

Na seleção dos trabalhos do *corpus*, por vezes, nos deparamos com contextos e fundamentações teóricas pouco claros com relação ao que foi efetivamente feito. Isso dificultou a identificação dos trabalhos desenvolvidos em contextos de formação inicial de PEM para delimitarmos o *corpus*, uma vez que a participação de (futuros) PEM não consiste, necessariamente, em uma pesquisa da área de formação de PEM. Muito embora a presença desses sujeitos possa levantar questões pertinentes ao processo de formação, o foco do trabalho pode ser restrito a outros aspectos, os PEM podem ser apenas parte do contexto investigado, com a possibilidade de replicação da pesquisa em outros contextos com diferentes sujeitos que não da área docente. Assim, destacamos a importância de uma fundamentação teórica consistente e relacionada com o foco da pesquisa.

As dissertações e teses defendidas no período 2009-2020, por nós analisadas, nos permitiram identificar que a geometria na formação inicial de PEM ainda é relativamente pouco pesquisada, tem ênfase em abordagens metodológicas, especialmente material manipulável e *softwares* como o GeoGebra, e na Geometria Euclidiana. As figuras geométricas são o principal meio de acesso aos objetos

geométricos, estando presentes em todos os trabalhos.

Em vista disso, julgamos que outros aspectos merecem atenção em investigações futuras, tais como:

- Análise do papel do formador para o trabalho com a geometria na formação inicial de PEM e especificidades da geometria na formação inicial de PEM na Educação Infantil, visto que são temáticas ainda pouco investigadas.
- Articulação da formação inicial e continuada de PEM, de modo que se possam discutir tais articulações e as contribuições de uma à outra para o trabalho com a geometria.
- Compreensão das problemáticas relacionadas à presença, à pertinência e à necessidade de outras geometrias na formação inicial de PEM, para além da euclidiana.
- Impacto da presença de uma disciplina específica do Ensino de Geometria na formação inicial de PEM. Possibilidades de disciplinas para abordar geometria precisam ser propostas e investigadas, inclusive no curso de Pedagogia, para que se possa discutir a relevância dessa disciplina e daquelas que também envolvam o ensino de geometria.
- Papel e possibilidades das figuras geométricas, para além de apoio à álgebra, às medidas e à aritmética em contextos de formação inicial de PEM. As figuras geométricas estiveram presentes, nas abordagens de geometria na formação inicial de PEM, em todos os trabalhos analisados, mas esse papel não foi ponto de enfoque.
- Caracterizações de conhecimento/pensamento/raciocínio/saber geométricos ainda precisam ser discutidas e problematizadas, bem como possíveis especificidades, teóricas e epistemológicas, desses diferentes termos.
- Abrangência maior de fontes nas investigações e nos mapeamentos, englobando artigos em periódicos e anais de eventos, e em contextos para além da formação inicial de PEM.

Esperamos, assim, que, a partir dos indicativos observados em nosso *corpus* e dessas perspectivas de problemáticas, a geometria e/na formação inicial de PEM sejam investigadas e abordadas, tendo em conta tais aspectos e que, conseqüentemente, os resultados de pesquisas futuras reverberem nas práticas dos professores e na qualidade da aprendizagem de nossos estudantes.

## REFERÊNCIAS

- ABIDIN, M.; ISMAIL, Z.; ISMAIL, N. Geometrical thinking with technology: A systematic literature review. *In: 2018 IEEE 10th International Conference on Engineering Education (ICEED)*. IEEE, 2018. p. 230-235.
- AKSU, Z.; GEDIK, S. D.; KONYALDOĞLU, A. C. Mathematics teacher candidates' approaches to using topology in geometry. **School Science And Mathematics Association**, [s. l.], n. 121, p. 192-200, 2021.
- ALMEIDA, M. B.; LIMA, M. G. Formação inicial de professores e o curso de pedagogia: reflexões sobre a formação matemática. **Ciência & Educação**, [S. L.], v. 18, n. 2, p. 451-468, 2012.
- ALMEIDA, G. S. **Uma (re) construção praxeológica no estudo de conteúdos da geometria com alunos da Licenciatura da Matemática**. 2018. 200 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro Do Sul, São Paulo, 2018.
- ANDRÉ, M. E. D. A. A produção acadêmica sobre formação de professores: um estudo comparativo das dissertações e teses defendidas nos anos 1990 e 2000. **Formação Docente**, Belo Horizonte, v. 1, n. 1, p. 41-56, ago./dez. 2009.
- ATASOY, E. Elementary Mathematics Teacher Candidates' Geometric Thinking Levels and Their Self- Efficacy in Geometry. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n.2, p. 161-170, 2019.
- BALACHEFF, N. Processus de Preuve et Situations de Validation. **Educational Studies in Mathematics**, n.18, p. 147-176, 1987.
- BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.
- BALDINI, L. A. F. **Elementos de uma comunidade de prática que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de matemática na utilização do software Geogebra**. 2014. 220 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.
- BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. *In: D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (Org.). Vertentes da subversão na produção científica em Educação Matemática*. Campinas: Mercado de Letras, 2015. v. 1, p. 347-367.
- BARBOSA, A. P. R. **A matemática nos cursos de pedagogia: contexto formativo de futuros professores**. 2021. 253 f. Tese (Doutorado em Educação para a ciência) - Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2021.
- BARRETO, M. C. *et al.* Estado da arte em pesquisas acadêmicas brasileiras, de

2010 a 2019, sobre o ensino de geometria desenvolvidas no Nordeste. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 39, n. 1, p. 1-22, jan./mar. 2021.

BOOTE, D. N.; BEILE, P. Scholars before researchers: on the centrality of the dissertation literature review in research preparation. **Educational Researcher**, v. 34, n. 6, p. 3-15, aug./sep. 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática/ Anos iniciais. Brasília, 1997, 142 p.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial curricular nacional para a educação infantil**. Brasília, 1998a. 3v

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática/ Anos finais. Brasília, 1998b, 148 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática/ Ensino Médio. Brasília, 1999, 58 p.

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – PCN. Brasília: MEC/SEF, 2. ed, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018, 600p.

BRASIL, T. C. **O ensino da Geometria através de resolução de problemas**: Explorando possibilidades na formação inicial de professores de Matemática. 2017. 264p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

BRIGO, J; FLORES, C. R. A Problemática do Uso da Figura no Ensino de Geometria: indicativos para uma pesquisa histórica. *In*: Encontro Brasileiro De Estudantes De Pós-Graduação Em Educação Matemática, [S. l.], 12. **Anais [...]**. p. 1–13, 2008.

BRUNHEIRA, L. M. A. **O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos primeiros anos**. 2019. 242 f. Tese (Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2019.

BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. da. Justificando Generalizações Geométricas na Formação Inicial de Professores dos Primeiros Anos. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Campinas, SP,, v. 33, n. 63, p. 88-108, abr. 2019.

CARDOSO, F. P. **Contribuições de um curso de extensão em geometria para a formação matemática de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2018. 108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2018.

CARVALHO, H. A. F.; FERREIRA, A. C. Visualização espacial e pensamento

geométrico: um panorama da produção brasileira em programas de Pós-Graduação nos últimos anos. *In: Encontro Mineiro de Educação Matemática*, 7, 2015, São João Del Rei/MG. **Anais EMEM**, 2015.

CARVALHO, H. A. F. **Aprendendo a ensinar geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: um estudo com alunos de Pedagogia de uma universidade federal mineira. 2017. 192 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2017.

CICARINI, A. M. O. T. **Geometria plana e o grafismo indígena**: O estudo de suas relações no contexto histórico do grupo Tukano de alunos da Licenciatura Intercultural dos Povos Indígenas do Alto Rio Negro. 2015. 198 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Early childhood teacher education: the case of geometry. **Journal Of Mathematics Teacher Education**, [s.l.], v. 14, n. 2, p. 133-148, 23 fev. 2011. Springer Science and Business Media LLC.

CLEMENTS, D. H. *et al.* Teaching and learning Geometry: early foundations. **Quadrante**, [s. l.], v. 17, n. 2, p. 7-31, 2018.

COURA, F. C. F.; PASSOS, C. L. B. Estado do conhecimento sobre o formador de professores de Matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, v. 25, n. 1, p. 7-26, jan./abr. 2017.

CRECCI, V. M.; NACARATO, A. M.; FIORENTINI, D. Estudos do estado da arte da pesquisa sobre o professor que ensina matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 25, n. 1, p. 1-6, 30 abr. 2017. Universidade Estadual de Campinas.

CRESCENTI, E. P. A formação inicial do professor de Matemática: aprendizagem da Geometria e atuação docente. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 3, n. 1, p. 81-94, jan./jun. 2008.

CYBULSKI, F. C. Pensamento geométrico na formação inicial de professores que ensinam matemática: indicativos de pesquisas. *In: Encontro Brasileiro De Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, XXIV, 2020, Cascavel. *In: Encontro Brasileiro de Estudantes De Pós-Graduação em Educação Matemática*, 24. **Anais [...]**. Cascavel: Sbem, 2020. p. 1-12.

CYRINO, M. C. C. T. Identidade Profissional de (futuros) Professores que Ensinam Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, [s. l.], v. 10, n. 24, p. 699-712, 2017.

D'AMBROSIO, B; LOPES, C. E. Insubordinação criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 1-17, abr. 2015.

DELEUZE, G; GUATTARI, F. **O que é a filosofia?** 3. ed. São Paulo: 34, 2010. Tradução de: Bento Prado Jr. e Alberto Alonso Muñoz.

DE PAULA, E. F. **Identidade profissional de professores que ensinam matemática**: indicativos de pesquisas, elementos e ações para elaboração de uma proposta investigativa. 2018. 227 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

DIAS, M. S. S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em matemática**: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico. 2009. 213 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

DIAS, R. D. **A Construção do pensamento geométrico na formação inicial de professores da Educação Infantil**. 2012. 155 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) - Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. 468 p.

DOYLE, S. A. C. **Sherlock Holmes**: romances. [S. l.]: Martin Claret, 2018. 600p.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative forms for the dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

DUVAL, R. Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. **Educational studies in mathematics**, v.22, n.3, p.233-261, 1991.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères**, n.17, p.121-138, 1994.

DUVAL, R. Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In: SUTHERLAND, Rosamund; MASON, John (ed.). **Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education**. Oxford: Springer, p.142-157, 1995.

DUVAL, R. Geometry from a Cognitive Point of View. In: MAMMANA, C.; VILLANI, (Orgs.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century**: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer, p. 37-52, 1998.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: HITT, F.; SANTOS, M. (Ed.). **Proceeding of the 21st Annual Meeting of the 228 North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Mexico, p. 3-26, oct., 1999.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. In: **Annales de didactique et de sciences cognitives**. 2005.

- DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p.
- DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.
- FERNER, D.; SOARES, M. A. da S.; MARIANI, R. C. P. Geometria nas licenciaturas em Matemática: um panorama a partir de Projetos Pedagógicos de Cursos. **Ensino em Re-Vista**, p. 434-457, 2020.
- FERREIRA, A. B. H. **Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 5. ed. [S. l.]: Positivo, 2014.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012. (Coleção Formação de Professores).
- FIORENTINI, D. *et al.* O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. *In*: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. d. (Org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática**: período 2001 – 2012. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/pf/subportais/biblioteca/fev-2017/e-book-mapeamento-pesquisa-pem.pdf>. Acesso em: 06 out. 2020.
- FONSECA, J. A. da. **Investigação de aspectos da compreensão relacional e da instrumental em geometria esférica**. 2020. 307f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2020.
- FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 65. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2020.
- GATTI, B. A. Formação inicial de professores para a educação básica: pesquisas e políticas educacionais. **Estudos em Avaliação Educacional**, v. 25, n. 57, p. 24-54, 2014.
- GATTI, B. A. Formação de professores: condições e problemas atuais. **Revista internacional de formação de professores**, v. 1, n. 2, p. 161-171, 2016.
- GATTI, B. A. *et al.* **Professores do Brasil**: novos cenários de formação. Brasília, DF: Unesco, 2019.
- GAZZANIGA, M.; HEATHERTON, T.; HALPERN, D. **Ciência Psicológica**. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2018. Tradução de: Maiza Ritomy Ide, Sandra Maria Mallmann da Rosa, Soraya Imon de Oliveira.
- GINZBURG, C. **Mitos, emblemas, sinais**. São Paulo: Companhia das Letras, 1989.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do geogebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **Vidya**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 237-253, jul./dez. 2015.

GUÉRIOS, E. Formação de professores que ensinam matemática em uma perspectiva de complexidade: discussão agregando fragmentos experienciais. **Roteiro**, v. 46, n. 1, p. 1-5, 2021.

GUÉRIOS, E.; GONÇALVES, T. O. Um estudo acerca da pesquisa sobre formação inicial de professores que ensinam matemática nos anos iniciais de escolarização. **Educar em Revista**, v. 35, p. 27-45, 2019.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In Puig, L.; Gutiérrez, A. (Eds.), **Proceedings of the 20th International Conference of the P.M.E.**, 1, 3-19. Valencia: University of Valencia, 1996.

HOURIGAN, M.; LEAVY, A. M. Preservice Primary Teachers' Geometric Thinking: is pre-tertiary mathematics education building sufficiently strong foundations? **The Teacher Educator**, [s.l.], v. 52, n. 4, p. 346-364, 8 set. 2017.

JANZEN, E. A. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica**. 2011. 194f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

JONES, K., *et al.* Introduction to the papers of TWG04: Geometry Teaching and Learning. **Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands.

KALEFF, A. M. *et al.* Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: o modelo de van hiele. **Bolema**, Rio Claro, v. 9, n. 10, 1994.

KUZNIAK, A.; NECHACHE, A. On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of mathematical working spaces. **Educational Studies in Mathematics**, [s.l.], v. 106, n. 2, p. 271-289, 4 jan. 2021.

LEIVAS, J. C. P. Geometrias não euclidianas com geometria dinâmica e as funções inversão em relação à circunferência e projeção estereográfica. **Currículo Sem Fronteiras**, [s. l.], v. 18, n. 3, p. 445-463, maio/ago. 2018.

LEME DA SILVA, M. C. **Histórias do Ensino de Geometria nos anos iniciais e seus parceiros**: desenho, trabalhos manuais e medidas. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

LIMA, G. L; SILVA, M. J. F. Conhecimentos docentes para o ensino de geometria em um curso de licenciatura em matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 159-177, jul./dez. 2015.

LIMA, M. L. S. **Um estudo sobre as provas e demonstrações na Licenciatura em Matemática**: articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e

os tipos de prova de Balacheff. 398 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? *In: A Educação Matemática em Revista*. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, 1995, p. 3-13.

MELO, M. V. **As práticas de formação no estágio curricular supervisionado na licenciatura em matemática**: o que revelam as pesquisas acadêmicas brasileiras na década 2001-2010. 2013. 406 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

MOREIRA, M. D. D. **Revisitando Euclides para o ensino de áreas**: uma proposta para as licenciaturas. 2010. 165 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. 2 ed. São Paulo: E.P.U., 2018.

NASSER, L.; VIEIRA, E. R. Formação de professores em geometria: uma experiência no ciclo de alfabetização. *Vidya*, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 19-36, jul./dez. 2015.

NASSER, L.; FERREIRA, M. L.; VAZ, R. F. N. Estimulando o domínio do processo dedutivo no curso de licenciatura em matemática. *Vidya*, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 499-513, jul./dez. 2017.

NUÑEZ, I. B.; RAMALHO, B. L. A dispersão semântica na pesquisa educacional: implicações teórico-metodológicas. *Educação em Questão*, v. 11, n. 2, p. 96-114, 1999.

OLIVEIRA, C. A. **Estratégias didáticas nos processos de ensino e de aprendizagem em matemática no mundo digital virtual em 3D Open Sim**. 2015. 154 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal De Alagoas, Maceió, 2015.

OLIVEIRA, D. B. S. **A constituição de conhecimento colaborado em geometria das transformações com ferramentas dinâmicas**. 2017. 169 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal De Juiz De Fora, Juiz de Fora, 2017.

PAIS, L. C. A representação dos corpos redondos no ensino da geometria. *Zetetiké*, Campinas, v. 2, p. 13-23, 1994.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. *Zetetiké*, v. 4, n. 2, 1996.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. *Reunião da ANPED*, v. 23, p. 24, 2000.

PAIVA, S. M. **A conceituação do pensamento geométrico**: aspectos históricos, filosóficos e as visões presentes em teses e dissertações no Brasil. 2021. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos Formativos) - Universidade Estadual

Paulista, Ilha Solteira, 2021.

PARZYSZ, B. “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational studies in mathematics**, v. 19, n. 1, p. 79-92, 1988.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *In: Actes du 28 ème colloque COPIRELEM* (Tours, juin 2001). p. 99-110. 2001.

PARZYSZ, B. La géométrie dans l’enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s’agit-il. **Quaderni di Ricerca in Didattica**, v. 17, p. 121-144, 2006.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M. O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da provinha brasil. **Educação, Matemática, Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1147-1168, 2014.

PASSOS, C. L. B; NACARATO, A. M. Trajetória e perspectivas para o ensino de Matemática nos anos iniciais. **Estudos Avançados**, [S.L.], v. 32, n. 94, p. 119-135, dez. 2018.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, n. 1, p. 7-17, 1993.

PENTEADO, D. R.; PEREIRA, A. L.; BRANDT, C. F. Geometria no ensino fundamental: das exigências legais às práticas cotidianas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [s.l.], v. 8, n. 16, p. 48-81, 1 jul./dez. 2019.

PEREIRA DA COSTA, A. Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S.L.], v. 9, n. 18, p. 152-179, 26 jun. 2020. Universidade Estadual do Paraná, Unespar.

PEREIRA, A. N. **Conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria na educação básica**. 2020. 233f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020.

PEREIRA DA COSTA, A.; SANTOS, M. R. d. Pensamento geométrico na licenciatura em Matemática: uma análise à luz de Duval e Van-Hiele. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 10, p. 1-20, fev. 2020.

PINHEIRO, A.; CARREIRA, S. O desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros. **Investigação em Educação Matemática. Raciocínio Matemático**, p. 146-169, 2013.

PIROLA, D. L. **Aprendizagem em geometria nas séries iniciais**: uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual. 2012. 158 f. Dissertação (Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

RAMASSOTTI, L. C. **A geometria euclidiana na licenciatura em matemática do ponto de vista de professores formadores**. 2015. 179 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

RESENDE, M. J. **Saberes geométricos para a formação de professores primários em Sergipe: uma investigação sobre o período de 1890 A 1944**. 2018. 86 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Fundação Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2018.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revemat: revista eletrônica de educação matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 187-196, 13 dez. 2012.

ROLDÃO, M. C. N. A formação de professores como objecto de pesquisa – contributos para a construção do campo de estudo a partir de pesquisas portuguesas. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, SP: UFSCar, v.1, n. 1, p. 50-118, set. 2007.

ROLDÃO, M. C. N. Formação de professores e desenvolvimento profissional/Teacher education and professional development. **Revista de Educação PUC-Campinas**, v. 22, n. 2, p. 191-202, 2017.

SÁNCHEZ, I. C. **Aprendizagem geométrica em torno das ideias presentes na simulação de um motor a dois tempos no GeoGebra: Um estudo de caso**. 2020. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

SANTOS, L.; OLIVEIRA, H. O ensino e a aprendizagem da geometria: Perspetivas Curriculares. *In: Encontro de Investigação em Educação Matemática*, 2017, Lisboa. **Atas**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2017. p. 3-8.

SANTOS, L. F.; TELES, R. A. M. Conhecimento dos professores sobre geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: um estado da arte. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [s.l.], v. 23, n. 1, p. 79-111, 11 abr. 2021.

SCHÖPFEL, J. Towards a prague definition of Grey Literature. **Twelfth International Conference on Grey Literature: Transparency in Grey Literature**. Grey Tech Approaches to High Tech Issues. Prague, 6-7 December 2010, Dec 2010, Czech Republic, p.11-26, 2010.

SHARMA, S. Use of theories and models in geometry education research: a critical review. **Waikato Journal of Education**, [s.l.], v. 24, n. 1, p. 43-54, 13 maio 2019. University of Waikato.

SILVA, E. S; ANDRADE, S de. A Ótica do Professor Formador sobre a Integração das Tecnologias à Licenciatura em Matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 27, p. 1-11, 2021.

SINCLAIR, N. et al. Recent research on geometry education: an icme-13 survey team report. **ZDM**, [s.l.], v. 48, n. 5, p. 691-719, 28 jun. 2016. Springer Science and Business Media LLC.

SINCLAIR, N. *et al.* Geometry Education, Including the Use of New Technologies: a survey of recent research. *In: International Congress On Mathematical Education, 13.*, 2017, Cham. **Proceedings of the ICME-13 Monographs**. Cham: Springer International Publishing, 2017. p. 277-287.

SWOBODA, E.; VIGHI, P. Early Geometrical Thinking in the Environment of Patterns, Mosaics and Isometries. **icme-13 Topical Surveys**, Hamburg, v. 13, p. 1-50, 2016.

THOMAS, R. A.; WEST, R. E.; RICH, P. Benefits, challenges, and perceptions of the multiple article dissertation format in instructional technology. **Australasian Journal of Educational Technology**, v.32, n. 2, 2016.

ULUSOY, F.; ÇAKIROĞLU, E. Prospective teachers' personal and instructional definitions for quadrilaterals as a lens of their mathematical and didactical considerations. *In 13th International Congress on Mathematical Education (ICME-13)*, Hamburg, Germany. 2016.

ULUSOY, F. Early-Years Prospective Teachers' Definitions, Examples and Non-Examples of Cylinder and Prism. **International Journal For Mathematics Teaching And Learning**, [s. l.], v. 20, n. 2, p. 149-169. 2019.

VALE, I.; PIMENTEL, T. O ensino e aprendizagem de Geometria. *In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2017, Lisboa. **Atas**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2017. p. 43-48.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 583 p. Tradução de: Paulo Henrique Colonese.

VAN HIELE, P. M. Quelques aspects didactiques du développement de la pensée des enfants dans les mathématiques et la physique. **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, n. 3, p. 343-346, 1969.

VAN HIELE, P. M. English summary. The problem of insight in connection with school children's insight into the subject matter of geometry. Doctoral dissertation, University of Utrecht, 1957. *In: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Eds.). English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele* . Brooklyn: Brooklyn College, p. 237-241, 1984a.

VAN HIELE, P. M. A child's thought and geometry. *In: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Eds.). English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele*. Brooklyn: Brooklyn College, p. 243-252, 1984b.

VAN HIELE, P. M. Developing Thinking through Activities That Begin with Play. **Teaching Children Mathematics**. v. 6, p. 310-316, fev. 1999.

VAN HIELE, P. M. Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van Hiele levels of thinking. **Intelligence, Learning and Understanding—A Tribute to Richard Skemp**, p. 27-47, 2002.

VIANA, O. A.; SILVA, L. R. P. Raciocínio geométrico e aprendizagem de congruência de triângulos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 1-22, 14 maio 2020.

VIEIRA, N. S. O. **A formação matemática do pedagogo**: reflexões sobre o ensino de geometria. 2017. 113f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

WATSON, D. L.; NEHLS, K. Alternative Dissertation Formats: preparing scholars for the academy and beyond. *In*: STOREY, V. A.; HESBOL, K. A. **Contemporary Approaches to Dissertation Development and Research Methods**. Hershey: Information Science Reference, 2016. Cap. 4. p. 43-52.

XIAO, Y.; WATSON, M. Guidance on Conducting a Systematic Literature Review. **Journal of Planning Education and Research**, [s.l.], v. 39, n. 1, p. 93-112, 28 ago. 2019. Sage Publications.

ZAMBON, A. E. C. **A geometria em cursos de pedagogia da região de Presidente Prudente - SP**. 2010. 237f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Presidente Prudente, 2010.

ZANELLA, I. A. **Diferentes representações na geometria euclidiana por meio do uso do geogebra**: um estudo com futuros professores de matemática. 2018. 229 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.