Universidade Estadual de Londrina

ÉLIDA MAIARA VELOZO DE CASTRO

METACOGNIÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Londrina
2021

ÉLIDA MAIARA VELOZO DE CASTRO

METACOGNIÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profª Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

E42m Castro, Elida Maiara Velozo de.

Metacognição em atividades de modelagem matemática / Elida Maiara Velozo de Castro. - Londrina, 2022.
229 f.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2022.
Inclui bibliografia.

1. Modelagem matemática - Tese. 2. Metacognição - Tese. 3. Estratégias metacognitivas - Tese. 4. Taxonomia - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

ÉLIDA MAIARA VELOZO DE CASTRO

METACOGNIÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profª. Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Profª. Drª. Cláudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA

Profª. Drª. Cleci Teresinha Werner da Rosa
Universidade de Passo Fundo – UPF

Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP

Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Londrina, 2 de agosto de 2022.

Agradecimentos

À Deus, que foi e tem sido minha fortaleza e minha coragem.

À minha orientadora professora Lourdes pelo acolhimento, pelos ensinamentos e pelo zelo e dedicação com que conduziu a orientação desse trabalho.

Aos membros da banca, Rodolfo, Claudia, Edmilson e Cleci pela leitura sensível e cuidadosa do trabalho, sugestões e reflexões proporcionadas que contribuíram para o aprimoramento desse estudo.

À minha família, minha mãe Márcia, minha irmã Luana, minha tia Eliane, que mesmo distantes geograficamente se fizeram presença ao longo dessa caminhada, pelas orações constantes e pelo afeto reconfortante.

Ao meu namorado, Claudio pelo apoio, compreensão e companheirismo.

À Rosangela pela amizade, pelas alegrias, artigos, dificuldades e risadas compartilhadas.

À Michele pelo incentivo e pelo aprendizado no mundo da pesquisa e por me acolher em sua casa diversas vezes.

Aos colegas do Grupemmat, Joice, Rosangela, Thiago, Bianca, Bárbara, Ana Paula, Letícia, Camila, Kassiana, Jeferson, pelos conhecimentos compartilhados. Em particular à Camila, Joice e Letícia pela amizade construída ao longo desses anos.

Aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, participantes da pesquisa.

À capes pelo apoio financeiro.

Quero, terei;
Se não aqui;
Noutro lugar que ainda não sei.
Nada perdi;
Tudo serei

Fernando Pessoa

CASTRO, Elida Maiara Velozo de. **Metacognição em atividades de modelagem matemática.** 2022. 229 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar como estratégias metacognitivas agem sobre as ações dos alunos em atividades de modelagem matemática. Para compor os dados empíricos da pesquisa foram desenvolvidas atividade de modelagem em uma turma do 4º ano de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. A metodologia de pesquisa qualitativa orienta o desenvolvimento da pesquisa, a coleta de dados e o encaminhamento das análises. No desenvolvimento das atividades de modelagem, as estratégias metacognitivas são identificadas com o auxílio de um instrumento que foi construído considerando aspectos indicadores dessas estratégias. Os registros escritos, gravações das aulas e questionários compõem o material de coleta de dados. A análise dos dados tem como suporte a metodologia que considera as estratégias metacognitivas em atividades de modelagem e as práticas discursivas dos alunos envolvidos em atividades de modelagem matemática. As práticas discursivas são elucidadas mediante ferramentas analíticas como árvore de associação de ideias e linhas narrativas. Dessas análises é possível identificar desdobramentos para o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática decorrentes das estratégias metacognitivas dos alunos. A pesquisa empírica empreendida possibilita a organização de uma taxonomia para a metacognição em atividades de modelagem matemática. Essa taxonomia elucida que os táxons que se destacam do uso de estratégias metacognitivas são: tomada de decisão, julgamento reflexivo, reflexão intencional, experiência social, coesão matemática e pensamento sistêmico. Neste sentido, a pesquisa avança relativamente ao que já se tem reconhecido na área de Modelagem Matemática sobre a metacognição em atividades de modelagem matemática e indica a relevância das estratégias metacognitivas para a performance dos alunos em atividades de modelagem matemática ao mesmo tempo em que sinaliza o potencial dessas atividades para a mobilização dessas estratégias.

Palavras-chaves: modelagem matemática; metacognição; estratégias metacognitivas; taxonomia.

CASTRO, Elida Maiara Velozo de. **Metacognition in mathematical modeling activities.** 2022. 229 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

ABSTRACT

This research aims to investigate how metacognitive strategies affect students' actions in mathematical modelling activities. For composing the empirical data were applied modelling activities with graduating students of the Mathematical Degree in the discipline of Mathematical Modelling in a Mathematics Education Perspective. The methodology of qualitative research guides the development of this study, the data collect and the analysis. During the development of modelling activities, the metacognitive strategies are identified with an instrument built considering relevant aspects of these strategies. The written registers, classes records and questionaries are the data. Its analysis is supported by the methodology that considers the metacognitive strategies in modelling activities and discursive practices of the students involved in mathematical modelling activities. The discursive practices emerge from analytic mechanisms as tree of idea association and narrative lines. From these analyses is possible to identify consecution to the development of mathematical modelling activities because of the students' metacognitive strategies. The engaged empiric research contributes to the organization of a metacognition taxonomy in mathematical modelling activities. This taxonomy clears that the highlighted taxa in the use of metacognitive strategies are decision making, reflexive judgment, intentional reflection, social experience, mathematical cohesion and systemic thinking. In this path, the study proceeds relatively to what is known in Mathematical Modelling area about metacognition in mathematical modeling activities and it indicates the relevance of metacognitive strategies for the students' performance in mathematical modelling activities simultaneously that points out the potential these activities have for the mobilization of these strategies.

Key words: mathematical modelling; metacognition; metacognitive strategies; taxonomy.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, importantes *insights* teóricos relativos à prática da modelagem matemática em ambientes educacionais têm sido o foco de pesquisadores que buscam, na maioria das vezes, entender o que acontece quando a modelagem é desenvolvida em sala de aula (SCHUKAJLOW; KAISER; STILLMAN, 2018).

Em primeiro lugar, é conveniente trazer à tona a reflexão proposta por Pollak (2011) sobre "o que queremos dizer com 'modelagem matemática'?"

> A situação real geralmente tem tantos "ângulos" que você não pode levar tudo em consideração, então você decide quais aspectos são mais importantes e você os mantém. Neste ponto, você tem uma versão idealizada da situação do mundo real que você traduz em termos matemáticos. Agora você tem um modelo matemático da questão idealizada. Em seguida, você aplica seus instintos matemáticos e conhecimento ao modelo e obtém percepções, exemplos, aproximações, teoremas e algoritmos interessantes. Você traduz tudo isso de volta para a situação do mundo real e espera ter uma teoria para a questão idealizada. Mas você deve verificar novamente: os resultados são práticos, as respostas razoáveis, as consequências são aceitáveis? Se sim, ótimo! Caso contrário, dê uma outra olhada nas escolhas que você fez no início e tente novamente. Todo esse processo é chamado de modelagem matemática (POLLAK, 2011, p. 64).

O debate sobre a inserção da modelagem no ensino de matemática retrocede as primeiras décadas do século XX, quando profissionais das áreas de matemática pura e de matemática aplicada, como Felix Klein, discutiam maneiras de ensinar matemática de modo a haver um equilíbrio entre o ensino de aplicações e a matemática pura. Esse movimento, conhecido como utilitarista, destaca que a utilidade da matemática para a ciência e a sociedade deve ser a "razão de ser" do ensino (NISS, 1987) e visa os aspectos matemáticos e técnicos referentes ao saber aplicar (BARBOSA, 2001a).

Mais tarde, com o Movimento da Matemática Moderna (MMM), as ideias utilitaristas foram perdendo força, já que nesse movimento o foco estava no domínio das estruturas matemáticas e acreditava-se que este habilitaria as pessoas a trabalharem com situações não estruturadas. Entretanto, durante o MMM priorizou-se as estruturas matemáticas em detrimento das aplicações. Não demorou muito para que a comunidade escolar se manifestasse reivindicando um ensino de matemática mais contextualizado (BARBOSA, 2001b).

Um estopim para que o debate sobre o ensino por meio de aplicações e modelagem fosse intensificado, foi o colóquio "Como Ensinar Matemática para ser Útil", que aconteceu em Utrecht em 1968. Nesse colóquio, discussões desencadearam uma forte chamada para o ensino de matemática de forma que possa se tornar útil e aplicável (KAISER-MESSMER, 1989).

Discussões com esse viés foram intensificadas a partir da necessidade de abordar questões sobre o porquê e como integrar a modelagem matemática aos processos de ensino e de aprendizagem. Tais discussões, segundo Kaiser-Messmer (1989), se fundamentam nas críticas acerca da inutilidade e irrealidade dos conteúdos aprendidos nas aulas de matemática e falta de aplicações na vida. Na tentativa de mudar essa situação, são apresentadas algumas argumentações para o uso de aplicações no ensino de matemática, o conhecimento de modelos e a capacidade de realizar processos de modelagem, por exemplo. A modelagem, então, passa a apresentar-se sob diferentes perspectivas, as quais estão relacionadas aos objetivos do ensino de matemática.

Essas perspectivas ficaram conhecidas como científico-humanista e pragmática. De modo geral, segundo Kaiser (2020) e Wess *et al.* (2021), a perspectiva científico-humanista, que tem como referência Hans Freudenthal, concentra-se nos processos matemáticos, enquanto a perspectiva pragmática, com referências em Henry Pollak, é caracterizada mais por um objetivo utilitário da matemática.

Na perspectiva científico-humanista, Freudenthal defende que o aluno deve não apenas aprender matemática, mas aprender a aplicar matemática, pois, a matemática não pode ser considerada como um sistema fechado e, portanto, não pode se reduzir a conhecimentos aplicados à curto prazo, já que não se pode prever que matemática será necessária mais tarde na vida desse aluno. Ou seja, o importante é que o conteúdo esteja relacionado à matemática em contexto. A modelagem orientada pela perspectiva humanista enfatiza os processos e atividade de matematização, enquanto atividade de organização e resolução de problemas da realidade com uso da matemática, a qual deve levar o aluno à sistematização do conhecimento matemático e, finalmente, ao desenvolvimento de (partes de) teoria matemática (KAISER-MESSMER, 1989).

Na perspectiva pragmática, o objetivo é o ensino da matemática que possibilite desenvolver habilidades para formular problemas úteis, que permitam aplicação matemática para resolvê-los. Assim, segundo Pollak (1968), os alunos desenvolvem o hábito de ver e aproveitar oportunidades de resolver problemas interessantes ao seu redor, ao passo que vão adquirindo experiência na realização de processos de modelagem e aplicações reais da matemática. Ainda, se uma razão fundamental para se ensinar matemática é a sua utilidade, ela deve ser enfatizada e exercitada em todas as oportunidades. Isso implica assumir que à medida que muda o que é útil para a sociedade, devemos mudar o que ensinamos e como ensinamos. A modelagem sob essa perspectiva coloca o foco no processo de transição da situação real para a construção do modelo (POLLAK, 1968, KAISER-MESSMER, 1989).

Segundo Kaiser e Sriraman (2006) essas se constituem as principais perspectivas da discussão sobre a modelagem, entretanto outras diferenciações e abordagens são consideradas ao longo dos anos. Dentre elas, a perspectiva emancipatória, que sugere uma abordagem sócio crítica no ensino de matemática e a perspectiva integrativa, na qual o ensino da matemática é direcionado a servir a propósitos científicos, matemáticos e pragmáticos, mas em uma relação harmoniosa entre si. Barbosa (2003) insere nessa discussão o que classifica como perspectiva sócio-crítica, a qual parte da ideia de um convite aos alunos a analisar o papel da matemática nas práticas sociais. Ainda, conforme sugerem Kaiser e Sriraman (2006) essas perspectivas podem variar de acordo com os objetivos[1] de aplicação e modelagem.

Esses estudos podem ter contribuído para a evidência de diferentes concepções e distintas abordagens educacionais de modelagem matemática existentes. No entanto, Borromeo Ferri (2018) revela haver um forte consenso de que a modelagem matemática pode ser descrita como uma atividade cuja característica essencial está no fato de que envolve a transição entre a realidade e a matemática. Ou seja, de modo geral, a modelagem matemática pode ser definida como uma forma de se entender ou explicar o mundo real em termos matemáticos. Por mundo real, entendemos, assim como Galbraith e Holton (2018), tudo o que está relacionado com a natureza, com a sociedade ou a cultura, incluindo a vida cotidiana, bem como disciplinas escolares ou universitárias e disciplinas científicas ou acadêmicas, não necessariamente matemáticas.

Assim, conforme Lev Vygotsky afirma, que quanto mais o mundo real se aprofundar em contextos de ensino, mais dinâmico e robusto será o processo educacional e, nas palavras do autor, "a educação é tão sem sentido fora do mundo real quanto um fogo sem oxigênio ou respirar no vácuo" (VYGOTSKY, 1997, p. 345), é que compreendemos que a modelagem matemática é uma alternativa poderosa para o ensino de matemática.

Entretanto, dado que nem a matemática a ser usada nem a compreensão adequada da situação do mundo real são, necessariamente, fornecidas aos alunos, atividades de modelagem são classificadas como problemas complexos (MAAß, 2010, VORHÖLTER,

[1] Ver Kaiser (1995)

2019, KIM; MOORE, 2019). Assim, considerando que desenvolver atividades de modelagem matemática em ambientes educacionais não é algo trivial, pela natureza dos problemas de modelagem decorrentes do mundo real ou do próprio ambiente dos alunos, tem havido um interesse crescente em investigações com foco em processos psicológicos dos alunos enquanto se envolvem com atividades dessa natureza. Em particular, a metacognição é considerada um aspecto que merece atenção no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Quando Pollak (1970) resume a proposição de uma atividade de modelagem matemática a alguém com a frase *"Aqui está uma situação - pense nisso"*, elucida a relação entre dois elementos importantes: a modelagem matemática (Aqui está uma situação) e a metacognição (pense nisso). Investigar essa relação e suas implicações para a modelagem matemática é o foco da presente pesquisa.

Trabalhos como de Lambert *et al.* (1989) e Kaiser e Brand (2015), por exemplo, denotam que estudos sobre metacognição vêm ganhando forças na pesquisa e na prática da modelagem matemática, pois representam reflexões sobre as ações e pensamentos ao abordar um problema do mundo real. Maaß (2006) defende que a metacognição desempenha papel fundamental em atividades modelagem, especialmente no que concerne ao desenvolvimento de competências. A autora elucida que "metacognição neste estudo descreve pensar sobre o próprio pensamento e controlar os próprios processos de pensamento" (MAAß, 2006, p. 118). Assim como Maaß (2007), Stillman (2011), infere que

> quando se trata de resolver aplicações matemáticas e se engajar em modelagem matemática, o uso eficaz da metacognição adquire importância crucial, como coordenação e integração de informações e representações e alocação de recursos de atenção são vitais para o funcionamento eficiente da memória de trabalho durante as resoluções (STILLMAN, 2011, p. 166).

O conhecimento ou regulação de atividades cognitivas durante a aplicação de conhecimento matemático ou durante atividades de modelagem podem desencadear o uso de estratégias metacognitivas. Essa compreensão se aproxima das conceitualizações atribuídas à metacognição por pesquisadores e estudiosos do tema (SHILO; KRAMARSKI, 2019, YILDIRIM, 2011).

Com origem na área da psicologia, embora John Flavell tenha cunhado o termo em meados de 1970, conceituando-o como "pensar sobre o pensamento", psicólogos como Dewey, Huey e Thorndike, já vinham se dedicando ao estudo da metacognição, inclusive em meios educacionais, sendo referência para o estudo de como o aluno aprende. Nesse cenário, tem sido bem aceita a compreensão de metacognição a partir de dois componentes:

regulação da cognição e conhecimento da cognição (SCHRAW; MOSHMAN, 1995). A primeira acontece quando se regula o próprio aprendizado, ou seja, está relacionada ao controle do processo de aprendizagem, à tomada de decisão sobre como aprender, à organização do processo e avaliação do desempenho, podendo desencadear três estratégias principais: planejamento, monitoramento e avaliação. A segunda ocorre quando se entende os processos-chaves envolvidos na própria aprendizagem, ou seja, caracteriza-se pelo conhecimento e consciência dos processos cognitivos, podendo ser controlável, estável e, algumas vezes, falível e tardio. Evidencia-se a partir de três estratégias de conhecimento: declarativo, processual e condicional.

Yildirim (2011) ressalta a importância das estratégias metacognitivas em atividades de modelagem ao considerar que essas estratégias influenciam, de forma contundente, as ações empreendidas pelos alunos em várias etapas do processo. Frenken (2021) destaca que esse tipo de estratégia afeta a execução dos processos de modelagem. Blomhøj e Jensen (2007) dizem que, em contextos de modelagem em que há uma multiplicidade de caminhos a serem seguidos, estratégias metacognitivas desenvolvem a capacidade dos alunos de julgar as próprias ideias e respostas e, assim, avançar no processo. Para Stillman (2011) estratégias metacognitivas facilitam reflexões dos alunos enquanto lidam com a atividade e significam conteúdos e procedimentos matemáticos.

Embora se reconheça a importância da metacognição em atividades de modelagem, ainda são poucos os estudos que visam discutir como o professor pode identificar estratégias metacognitivas dos alunos e ainda pouco se sabe sobre o uso de estratégias metacognitivas pelos alunos e como essas estratégias implicam no processo de modelagem matemática, conforme apontam Vorhölter (2018, 2019) e Vorhölter e Krüger (2021). Neste momento, não temos como objetivo inserir atividades orientadas para a evocação de estratégias metacognitivas dos alunos. De modo particular, na presente pesquisa, interessa-nos *investigar como estratégias metacognitivas agem sobre as ações dos alunos em atividades de modelagem matemática*.

Frente a esse interesse, delineamos o objetivo geral e os objetivos específicos da pesquisa.

1.1. Objetivos da pesquisa

Considerando que o foco da presente pesquisa é a relação entre modelagem matemática e metacognição e as implicações dessa relação para a modelagem matemática na sala de aula, bem como a possibilidade de identificar estratégias dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem, os objetivos da presente pesquisa consistem em:

Objetivo geral:

- Investigar como estratégias metacognitivas agem sobre ações dos alunos em atividades de modelagem matemática.

Objetivos específicos:

- Construir um instrumento de identificação de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática mediante a construção teórica fundamentada na metacognição em modelagem matemática.
- Identificar estratégias metacognitivas dos alunos quando realizam atividades de modelagem matemática e que desdobramentos para a atividade decorrem dessas estratégias.
- Construir uma taxonomia da metacognição em atividades de modelagem matemática.

1.2. Estrutura do relatório da pesquisa

O relatório da pesquisa encontra-se organizado em 8 capítulos. Seguinte à Introdução, no Capítulo 2 apresentamos o encaminhamento metodológico da investigação, os procedimentos de coleta e tratamento de dados, o contexto e ambiente em que os dados da pesquisa empírica foram coletados e a abordagem de pesquisa que orienta este estudo.

As compreensões de modelagem matemática adotadas nesta investigação, as fases que orientam o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na sala de aula e o papel do professor e do aluno de acordo com os momentos de familiarização em atividades dessa natureza, constituem o Capítulo 3.

Em seguida, no Capítulo 4, trazemos um estudo sobre metacognição, com atenção voltada em especial para estratégias metacognitivas de conhecimento (declarativo, processual, condicional) e de regulação (planejamento, monitoramento, avaliação). Ainda nesse capítulo, apresentamos e discutimos, a partir de uma revisão de literatura, trabalhos que têm como foco o estudo da metacognição, particularmente, em modelagem matemática.

No Capítulo 5 apresentamos a construção do instrumento de identificação de estratégias metacognitivas em modelagem matemática à luz dos referenciais teóricos adotados. No Capítulo 6, fazendo uso desse instrumento, buscamos identificar estratégias metacognitivas manifestadas por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, enquanto se envolvem com atividades de modelagem matemática, articulando nossas análises sobre os desdobramentos que essas estratégias inferem para as atividades.

A construção de uma taxonomia da metacognição em modelagem matemática compõem a essência das discussões empreendidas no Capítulo 7. Essa taxonomia decorre da dialogicidade entre o instrumento, as observações empíricas em modelagem matemática e o referencial teórico.

No Capítulo 8 apresentamos as Considerações Finais. Por fim, apresentamos as referências que corroboraram esse desenvolvimento.

2. ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

2.1 A natureza da pesquisa

A pesquisa, de modo geral, se caracteriza como um esforço cuidadoso para a assimilação de novas informações ou relações e para a verificação e ampliação do conhecimento existente. No âmbito da Educação, as pesquisas de natureza qualitativa são frequentemente indicadas por se constituírem “um saudável exercício para a Educação (e, em especial, para a Educação Matemática, área na qual realizamos nossas pesquisas)” (GARNICA, 1997) e possibilitar o entendimento do fenômeno em estudo considerando suas nuances diversas.

A abordagem qualitativa para a pesquisa, segundo Bogdan e Biklen (1982), Lüdke e André (2013) e Godoy (1995b), envolve a obtenção de dados descritivos (pessoas, lugares, processos interativos), obtidos mediante contato direto do pesquisador com a situação objeto de estudo, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em compreender e retratar o fenômeno segundo a perspectiva dos participantes. Nas palavras de Garnica (2001), em uma pesquisa de cunho qualitativo o olhar está voltado à qualidade, aos elementos que sejam significativos para o pesquisador, num contexto no qual o sujeito constrói e também faz parte.

Nesse tipo de pesquisa, vários tipos de dados são coletados e analisados para que se entenda a dinâmica do fenômeno e “para tanto, o pesquisador vai a campo buscando captar o fenômeno em estudo a partir da perspectiva das pessoas nele envolvidas, considerando todos os pontos de vista relevantes” (GODOY, 1995a, p. 21). Segundo Godoy (1995a), quando o pesquisador se coloca no papel do outro, vendo o mundo sob a ótica dos pesquisados, tem oportunidades mais efetivas de captar a realidade. Assim, sob essa perspectiva orientamos nossa investigação, buscando entender o fenômeno metacognição em atividades de modelagem matemática e estabelecer nossa interpretação sobre ele.

De caráter subjetivo, uma abordagem qualitativa, de modo geral, não se interessa em enumerar ou medir os eventos estudados, nem fazer uso de instrumental estatístico na análise dos dados. Ao contrário, ela parte de questões ou focos de interesse amplo, que vão se definindo à medida que a pesquisa se desenvolve. Portanto, esse tipo de abordagem, enquanto exercício de pesquisa, permite que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques (GODOY, 1995a, 1995b).

Assim, a pesquisa qualitativa não se apresenta como uma proposta estruturada com rigidez, não exige procedimentos sistemáticos passíveis de serem previstos, nem estabelece passos ou sucessões como uma escada em direção à generalização (GARNICA, 2001)

Alguns autores buscam caracterizar a pesquisa qualitativa, dentre eles Lüdke e André (2013) destacam: (i) a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento; (ii) os dados coletados são predominantemente descritivos; (iii) a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto; (iv) o 'significado' que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador. (v) a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo, sendo que ‘os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos. As abstrações formam-se ou se consolidam, basicamente, a partir da inspeção dos dados num processo de baixo para cima.

Além de contemplar as características de uma abordagem qualitativa e por considerar o caráter subjetivo da nossa pesquisa ao buscarmos compreender, em certo grau de complexidade, o fenômeno a partir da perspectiva do sujeito investigado, preocupando-nos ainda em compreender o processo no qual nossa investigação está envolta, entendemos que este estudo configura uma pesquisa qualitativa.

2.2 Detalhando os objetivos e os meios de investigação

Interlocuções entre matemática e realidade podem se tornar promissoras e importantes no campo educacional. Henri Pollak, particularmente, já a partir da década de 1960, vem considerando que nenhuma área da atividade humana é imune de alguma interpretação matemática e que a associação pode se dar mediante a modelagem matemática. Neste sentido, modelagem matemática é o processamento de problemas baseados na realidade usando métodos matemáticos de modo que nem a matemática e nem a compreensão da situação do mundo real tem soberania.

De modo geral, entretanto, várias pesquisas, como por exemplo, Blum (2015) e Almeida (2018), indicam que o trabalho com a modelagem matemática em ambientes educacionais não é algo trivial, considerando a natureza dos problemas e os encaminhamentos requeridos em atividades de modelagem. Blum (2015), particularmente, considera que modelagem matemática é uma atividade cognitivamente exigente.

Esta talvez seja uma razão pela qual tem havido um interesse crescente em investigações que se direcionam aos processos psicológicos dos alunos enquanto se envolvem com atividades dessa natureza. Em particular, nesta pesquisa, a metacognição é considerada um aspecto que merece atenção no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, pois as ações dos alunos nessas atividades não são independentes de suas estratégias metacognitivas (YILDIRIM, 2010; STILLMAN, 2004; VORHÖLTER, 2018; VORHÖLTER, 2019; VERTUAN; ALMEIDA, 2016; VORHÖLTER; KRÜGER, 2021). Essa consideração fundamenta-se no argumento de que estratégias dessa natureza são necessárias para resolver problemas complexos, como problemas de modelagem matemática em grupos, de uma maneira bem orientada e bem-sucedida.

Estudos sobre metacognição em modelagem matemática, reconhecem que o uso de estratégias metacognitivas é fundamental para o desenvolvimento de atividades de modelagem bem-sucedidas (BLUM, 2011, STILLMAN, 2011, VORHÖLTER, 2019). Entretanto, tais estudos ainda incipientes, apontam aspectos que dificultam investigações na área, dentre eles, o fato de que atividades de modelagem geralmente são desenvolvidas em grupo e a metacognição é conceituada como individual. Outro empecilho é a inexistência de instrumentos de identificação, ou mesmo mensuração, específicos para usar nesse contexto (VORHÖLTER, 2019, FRENKEN, 2021, SCHUKAJLOW; LEISS, 2011). Além de que problemas de modelagem matemática, são complexos e requerem uma infinidade de estratégias não apenas matemáticas, o que também pode dificultar estudos na área.

Portanto, considerando a carência de instrumentos para identificar estratégias metacognitivas em modelagem; a dificuldade em conceituar metacognição individual ou colaborativa do grupo; o fato de que estratégias metacognitivas do grupo são úteis e necessárias para trabalhar com êxito em um problema de modelagem e de maneira orientada a objetivos; os estudos promissores em metacognição e modelagem matemática e; as potenciais contribuições que estratégias metacognitivas desempenham na resolução de problemas de modelagem e, consequentemente, na própria aprendizagem do aluno; na presente pesquisa dirigimos nossa investigação ao modo *como estratégias metacognitivas agem sobre ações dos alunos em atividades de modelagem matemática*.

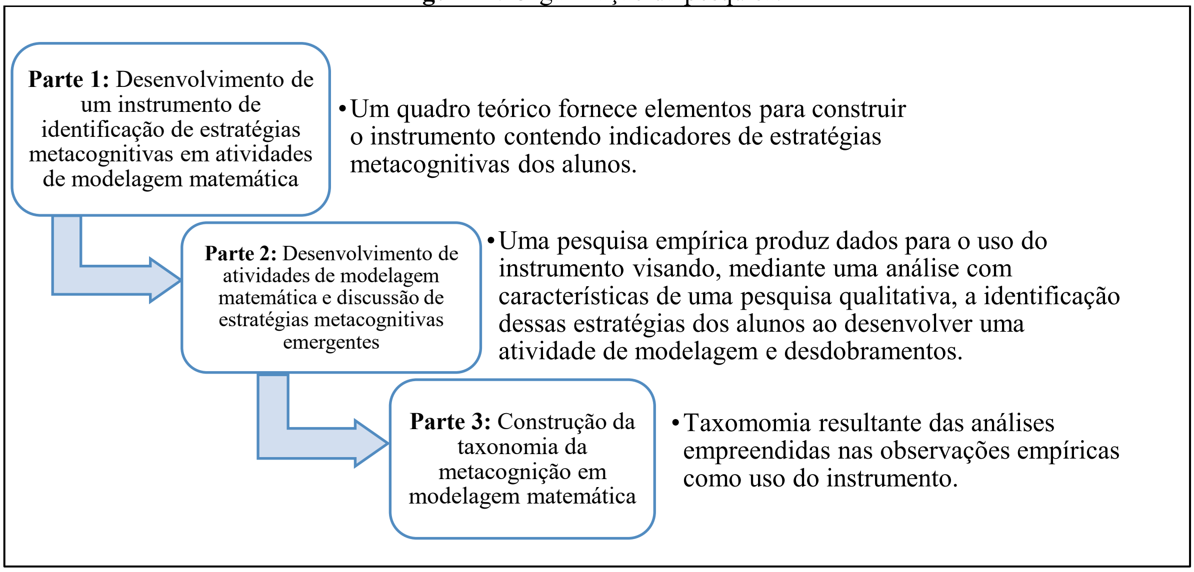
Diante dos elementos apresentados, temos como objetivos:

- Construir um instrumento de identificação de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática mediante a construção teórica fundamentada na metacognição em modelagem matemática.

- Identificar estratégias metacognitivas dos alunos quando realizam atividades de modelagem matemática e que desdobramentos para a atividade decorrem dessas estratégias.
- Construir uma taxonomia da metacognição em atividades de modelagem matemática.

Considerando estes objetivos, a pesquisa compreende três partes, relativamente às especificidades de cada objetivo. O desenvolvimento da parte teórica consiste na elaboração do instrumento, dialogando com o referencial teórico adotado. Na parte empírica descrevemos o contexto da pesquisa, traçando análises e considerações a partir de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática identificadas com o uso do instrumento. A parte seguinte, compreende a organização da análise e do instrumento construído para apresentar e discutir os resultados, conduzindo à construção de uma taxonomia para a metacognição em atividades de modelagem matemática. A Figura 1 ilustra essa organização.

Figura 1: Organização da pesquisa.



Fonte: autora.

Nas seções a seguir, descrevemos como cada parte dessas se constitui.

2.3 Parte 1: Proposição de um instrumento para identificação de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática

Se por um lado está reconhecida a importância de estratégias metacognitivas na modelagem, por outro lado como identificar e, algumas vezes, mensurar essas estratégias é uma problemática que requer investigações uma vez que, como já apontam as pesquisas de Katrin Vorhölter e seus colaboradores, há poucos instrumentos que viabilizam essa identificação. Além disso, conforme aponta Lai (2011), essas estratégias não são diretamente observáveis em alunos e, por isso, são necessários instrumentos de observação e identificação.

Ao reconhecermos que uma característica essencial de uma atividade de modelagem é que ela é desenvolvida em grupos, o conjunto de estratégias metacognitivas dos alunos desde a inteiração com a situação até a validação da resposta obtida, não se limita à natureza individual. Nesse contexto tanto a metacognição individual quanto a metacognição colaborativa do grupo deve ser considerada. Neste sentido, o instrumento foi elaborado de modo a permitir identificar manifestações de metacognição e classificá-las quanto à sua natureza individual ou colaborativa. Assim, por meio de tal instrumento esperamos valorizar o protagonismo e a autonomia de cada aluno, mas também a resolução colaborativa dos problemas e a comunicação dialógica dos estudantes do grupo que suscita o uso de estratégias metacognitivas no processo de modelagem.

Desse modo, buscamos estruturar um instrumento que possibilite identificar estratégias metacognitivas (individuais e do grupo colaborativo) imprescindíveis ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Para isso, nos dispomos à elaboração de itens (aspectos indicadores) para compor o instrumento de identificação de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática. A construção desse instrumento[2], por um lado considera a regulação da cognição e as estratégias metacognitivas a ela associadas (planejamento, monitoramento e avaliação) bem como o conhecimento da cognição (que pode ser declarativo, processual ou condicional). Por outro lado, associa tais estratégias a etapas características de uma atividade de modelagem matemática.

2.4 Parte 2: Pesquisa empírica

Tendo em vista o nosso olhar sobre atividades de modelagem matemática, realizadas pelos alunos, a partir das lentes da metacognição, reconhecemos, baseados em Vorhölter (2018), que um aspecto que tem ganhado atenção na discussão em pesquisas sobre metacognição refere-se a como identificar atividades metacognitivas apropriadamente.

[2] A construção do instrumento encontra-se detalhada no Capítulo 5 (seção 5.1).

Sendo assim a Parte 2 é uma pesquisa empírica realizada com alunos do 4º ano de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. Nesta pesquisa o instrumento é usado visando capturar as peculiaridades de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem, bem como a identificar que desdobramentos[3] ocorrem para o desenvolvimento da atividade a partir dessas estratégias, ao passo que buscamos explorar o uso do instrumento em diferentes atividades de modelagem matemática desenvolvidas por diferentes grupos de alunos.

Ainda, na presente pesquisa, o que propomos é a identificação de estratégias metacognitivas manifestas natural e espontaneamente pelos alunos, sem a inserção de atividades orientadas para a evocação dessa forma de agir.

2.4.1 Sujeitos e ambiente de pesquisa

As atividades de modelagem matemática que constituem o *rol* de dados para nossas análises foram desenvolvidas por alunos do 4º ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública durante aulas da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. As aulas eram ministradas pela professora da disciplina, orientadora da tese, e pela pesquisadora e autora da tese (referidas no presente relatório como Prof e Pesq, respectivamente). A pesquisadora participava de todas as aulas propondo algumas atividades aos alunos e participando da orientação em outras.

Num primeiro momento os alunos tiveram contato com aspectos teóricos relativamente a conceitos, definições e perspectivas acerca da modelagem matemática enquanto alternativa pedagógica para aulas de matemática. Isso possibilita explorar o estudo da modelagem como forma de introduzir novos conceitos ou ideias matemáticas, nas quais é possível recorrer a ferramentas matemáticas diversificadas para estudar situações reais. Para isso, foram realizados estudos dirigidos de artigos científicos, discussões em grupos acerca da construção modelos matemáticos e oficinas com a apresentação do desenvolvimento de atividades de modelagem já existentes na literatura. Em seguida, os alunos passam a desenvolver as atividades que trazemos para análise nesta pesquisa, seguindo os momentos de familiarização com modelagem.

[3] O termo desdobramentos refere-se aqui a possíveis consequências para o desenvolvimento da atividade de modelagem, decorrentes das estratégias metacognitivas dos alunos.

A coleta de dados aconteceu no decorrer do segundo semestre de 2020 e do primeiro semestre de 2021, período em que houve mudanças nos meios educacionais devido à pandemia do Covid-19.

> Em março de 2020, a Organização Mundial da Saúde declarou COVID-19 uma pandemia global. Em resposta à COVID-19, muitos países aplicaram medidas estritas de distanciamento social e uma política de bloqueio. A pandemia teve um sério impacto nas escolas, alunos e professores. Alunos e professores não foram autorizados a visitar escolas e universidades fisicamente e a maioria das instituições se transformou em uma abordagem de ensino e aprendizagem online (ENGELBRECHT *et al*., 2020, p. 821).

Diante desse cenário, as instituições de ensino, de todos os níveis de escolaridade, tiveram que se adaptar à nova realidade repentinamente e a tecnologia foi crucial nesse momento. Ao mesmo tempo, trouxe à tona diversos desafios para professores e alunos que tiveram que se reinventar. Engelbrecht *et al.* (2020) citam a urgência em compreender os recursos práticos e os problemas dos alunos como a disponibilidade de dispositivos e internet. No nosso caso, por exemplo, muitos alunos não ligaram a câmera para evitar problemas de conexão. Isso nos leva a reconhecer que, embora a tecnologia seja concebida, na maioria das vezes, como uma forma de melhorar a comunicação, o aprendizado e o domínio do material instrucional, a situação atual vem expor a lacuna social que existe no mundo, que reflete nas salas de aula.

Aos professores compete adaptar-se a esse ambiente com suas abordagens de ensino, investindo seu tempo em construir novos materiais em novos formatos para ensino online (ENGELBRECHT *et al.,* 2020). Os professores se reinventaram e, em sua maioria, aprenderam novas formas de se conectar e ensinar durante a pandemia.

A pandemia, portanto, impôs o uso de diferentes mídias e meios de comunicação em ambientes educacionais, o que, segundo Borba e Villarreal (2005), podem levar a diferentes matemáticas. Diferentes, no nosso entendimento, pode ser algo do qual podemos tirar lições, aprender com o novo.

No contexto apresentado na presente pesquisa, as duas aulas semanais da disciplina foram desenvolvidas na modalidade *online*, durante um ano letivo. Os recursos utilizados para isso foram o Google Meet[4], para reuniões, e Google Classroom[5], para organização da agenda, registro das atividades realizadas nas aulas, postagens de trabalhos e atividades

---

[4] Serviço de comunicação por videoconferência criado e disponibilizado de maneira gratuita pelo Google. Fonte: https://meet.google.com/?authuser=1 .

[5] O Google Sala de Aula é uma plataforma central de ensino e aprendizagem. Consiste em uma ferramenta segura e fácil de usar ajuda os educadores a gerenciar, medir e enriquecer a experiência de aprendizagem. Fonte: https://edu.google.com/intl/ALL_br/products/classroom/

avaliativas. As aulas se deram, na maioria das vezes, de maneira síncrona (turma e grupos) e, outras, de forma assíncrona (atendimentos individuais, quando necessário, e organização específica de cada grupo).

Participaram da pesquisa um total de 15 alunos (4 do sexo feminino e 11 do sexo masculino), que trabalharam organizados em grupos. A organização dos grupos encontra-se disposta na Tabela 1.

Tabela 1: Organização dos grupos de alunos.

Nome do grupo	Identificação dos alunos que compõem o grupo
Grupo 1	A_1, B_1, C_1, D_1
Grupo 2	E_2, F_2, H_2 e I_2
Grupo 3	J_3, K_3, L_3
Grupo 4	M_4, N_4, O_4 e P_4

Fonte: autora.

Esses grupos permaneceram sempre com a mesma formação em todas as atividades no decorrer da disciplina.

Nessas condições, reconhecemos a necessidade de ampliar a ideia de metacognição definida apenas à um nível individual, pois nossa investigação não se limita à análise de estratégias metacognitivas individuais, mas que em contexto de grupos colaborativos como é o caso de atividades de modelagem matemática, como já apontam Kim *et al.* (2013) o grupo influencia nas manifestações metacognitivas do indivíduo.

2.4.2 Atividades de modelagem matemática desenvolvidas

Para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática seguimos a caracterização dos momentos de familiarização (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013)[6], implicando o contato gradativo do aluno com a modelagem e permitindo que ele desenvolva sua autonomia em atividades dessa natureza. Os alunos se reuniram de forma espontânea em quatro grupos para desenvolver as atividades no decorrer da disciplina.

A Tabela 2 indica temáticas das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos e os momentos de familiarização a que se referem.

Tabela 2: Atividades de modelagem matemática desenvolvidas[7]

Temática da atividade	Cód.	Grupos envolvidos	Momento de familiarização
Jogo de Poker	AJ	G1, G2, G3* e G4	1º momento
Poupança	AP	G1*, G2*, G3 e G4	2º momento
Vacinação em Arapongas	AV	G1*	3º momento

[6] Detalhes sobre os momentos de familiarização utilizados para desenvolvimento de atividades de modelagem matemática serão descritos no Capítulo 3.

[7] O símbolo “*” sinaliza as atividades que traremos análises no relatório de tese.

Arrecadação de impostos em Londrina	AI	G2*
Desvalorização de um veículo	AD	G3*
Frota de automóveis no Brasil e emissão de CO2	AF	G4

Fonte: autora.

Na atividade do 1º momento, com a temática Jogo de Poker, a proposta da atividade foi apresentada pela professora pesquisadora. O tema, as informações, os dados, o problema e as hipóteses foram fornecidos aos alunos, os quais deveriam, em grupos, apresentar uma solução para a situação problemática proposta. Essa atividade foi desenvolvida pelos quatro grupos de forma assíncrona. No presente relatório apresentamos o encaminhamento da atividade realizado pelo Grupo 3. A escolha desse grupo se deve à quantidade e à qualidade das informações obtidas.

Na atividade relativa ao 2º momento de familiarização, a situação problemática foi apresentada pela pesquisadora, entretanto, a busca por informações, a definição de variáveis, estruturação das hipóteses e todo o processo de resolução foi realizado pelos alunos. Cada um dos quatro grupos apresentou uma resolução distinta para a atividade (embora os resultados fossem bem próximos) durante quatro aulas síncronas. Apresentados aqui as resoluções dos grupos G1 e G2, por compreender tais resoluções apresentam uma diversidade de estratégias manifestadas pelos alunos e que conduzem à emergência de conhecimentos diversos.

Para as atividades do 3º momento de familiarização, coube a cada grupo de alunos a tomada de decisão em todas as etapas da atividade, inclusive a definição da situação problemática a ser estudada. Nesse momento o papel da professora e da pesquisadora foi orientar e acompanhar os alunos conforme suas possibilidades e necessidades. Seis aulas síncronas da disciplina foram destinadas às atividades e outras seis assíncronas em que cada grupo, necessárias para concluir o desenvolvimento da atividade. Trazemos, neste momento, o desenvolvimento apresentado pelos grupos G1, G2 e G3, na intenção de tecer possíveis aproximações e distanciamentos ao que diz respeito a estratégias utilizadas em atividades de primeiro, segundo e terceiro momento por um mesmo grupo de alunos.

2.4.3 A coleta, o tratamento e a análise dos dados

Os dados que constituem o nosso material de análise foram obtidos por meio de gravações das aulas realizadas no Google Meet, relatórios das atividades entregues pelos alunos e questionários e questões de múltipla escolha respondidas pelos alunos.

As transcrições das gravações das aulas em que os alunos, reunidos em grupo, realizam discussões acerca do desenvolvimento da atividade, nos fornecem elementos relevantes. A necessidade de expor oralmente seus pensamentos parece ficar evidente no contexto online, onde os alunos precisam disponibilizar seus pensamentos aos colegas, falando sobre seus raciocínios, ao passo que os demais acompanham, intervém ou refutam suas ideias.

> Pode-se notar aqui que, embora relatórios escritos e orais em várias formas sejam uma parte estabelecida do método científico adotado em engenharia, ciência e tecnologia, eles também oferecem oportunidades para considerar a comunicação em matemática e comunicar matemática de forma mais direta e em particular, através da atividade de modelagem matemática, comunicando significado matemático (CROUCH; HAINES, 2004, p. 198)

As questões do questionário faziam referência às atividades de modelagem e suas respostas evidenciam o uso de estratégias metacognitivas durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. As questões eram respondidas pelos alunos imediatamente após a conclusão de cada atividade de modelagem com a intenção de obter um resultado mais real e verídico do uso das estratégias metacognitivas, diminuindo assim a chance de que seu uso seja esquecido pelos alunos conforme advertem Vorhölter (2017, 2019) e Vorhölter e Krüger, (2021). O questionário pode possibilitar que o aluno, ao respondê-lo, tome consciência das estratégias utilizadas, tendo em vista que neste momento ele é convidado a revisitar seus percursos, ainda que cognitivos, do desenvolvimento da atividade da modelagem.

Para a estruturação dos instrumentos de coleta de dados diversos aspectos foram considerados, com base nas argumentações de Vorhölter (2017) de que tão importante quanto as perguntas, são as circunstâncias particulares nas quais os alunos são solicitados a responder os questionários. Assim, as questões foram formuladas de forma que os alunos deveriam fazer declarações sobre o uso de estratégias metacognitivas durante a realização da atividade de modelagem matemática.

Os itens dos questionários, assim como sugere Vorhölter (2019), foram elaborados fundamentados em uma revisão de literatura e da observação de vários grupos de estudantes trabalhando em diferentes problemas de modelagem. Esses questionários (Anexo1, Anexo2 e Anexo3) foram adaptados e aprimorados, conforme as leituras do contexto observado.

Conforme orientam Lüdke e André (2013), o primeiro movimento que o pesquisador precisa fazer é o de organizar seu material coletado, pois pesquisas envolvendo dados qualitativos implicam em “trabalhar todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos das observações, as transcrições de entrevistas, as análises de documentos e as demais informações disponíveis" (p. 45).

Para melhor organização do material e tratamento dos dados, realizamos a transcrição das falas dos alunos quando, reunidos em grupos, se envolviam no desenvolvimento das atividades. Em seguida, selecionamos excertos, dos diálogos transcritos, que abordam etapas específicas da modelagem matemática e que trazem indicativos de estratégias metacognitivas. Dos registros entregues pelos grupos (slides de comunicação dos resultados e relatórios escritos) fizemos um recorte e síntese dos elementos principais, e que parecem ter relação com as discussões empreendidas em aula. Por fim, tabulamos as respostas dos alunos aos questionários respondidos ao final de cada atividade, buscando aproximações ou distanciamentos nas respostas dos alunos de um mesmo grupo e um encadeamento entre as respostas, para todas as perguntas, dadas por um mesmo aluno.

Com o material organizado, encaminhamo-nos para a intepretação e análise dos dados. Spink (2000), considera que a interpretação da linguagem e das práticas discursivas dos sujeitos conduz à produção de sentidos[8] de quem as analisa. A interpretação é considerada intrínseca ao processo de pesquisa, ou seja, desde o levantamento das informações estamos imersos num processo de interpretação. As práticas discursivas podem ser entendidas, segundo o autor, como a linguagem em ação e sua análise requer uma variedade de instrumentos capazes de capturar os discursos dos sujeitos por meio de textos de diferentes naturezas, entrevistas, questionários, narrativas, entre outros.

Para Spink (2000), a imersão do pesquisador no conjunto de dados, o confronto entre os sentidos construídos na pesquisa empírica com a revisão bibliográfica e as teorias de base, o uso de procedimentos para entendimento dos usos associados aos conteúdos dos textos e a definição de categorias de análise a posteriori a partir dos sentidos construídos na análise dos dados coletados, constituem os passos necessários para o processo analítico.

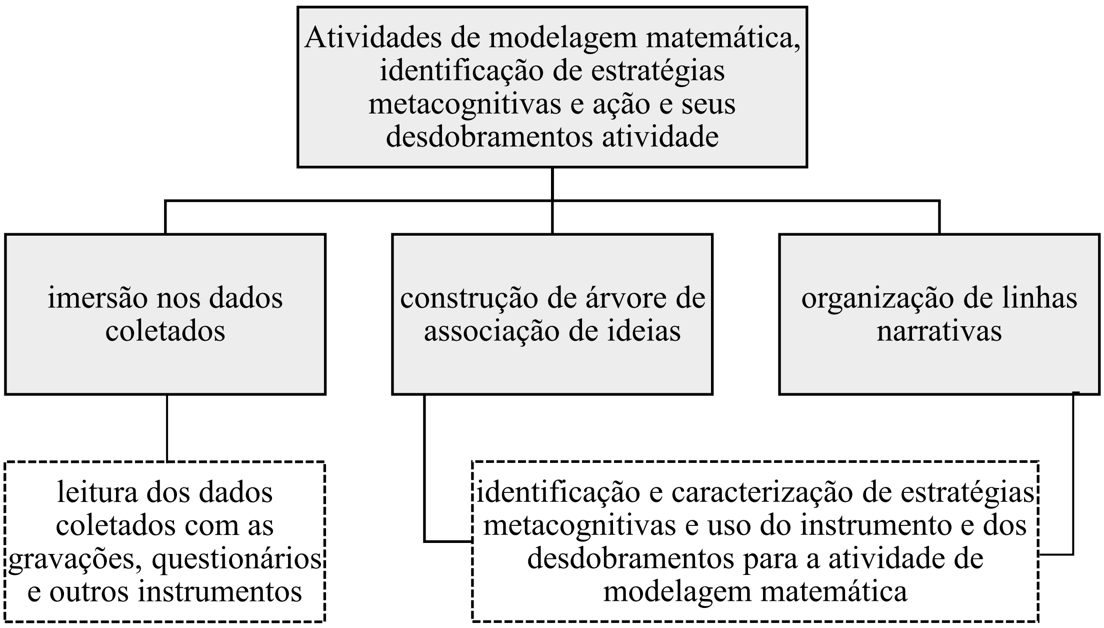
Nessa perspectiva, Spink (2000) e Spink e Gimenes (1994) sugerem o uso de três técnicas que podem clarificar o processo de interpretação do pesquisador, sendo elas: mapas de associação de ideias; árvores de associação de ideias; linhas narrativas. Nesse relatório de pesquisa utilizamos dois destes recursos, as árvores de associação de ideias e as linhas narrativas.

[8] [...] uma construção social, um empreendimento coletivo, mais precisamente interativo, por meio do qual as pessoas – na dinâmica das relações sociais historicamente datadas e culturalmente localizadas – constroem os termos a partir dos quais compreendem e lidam com as situações e fenômenos a sua volta (SPINK, 2000, p.22)

O uso das linhas narrativas permite esquematizar os conteúdos como ilustrações e/ou posicionamentos identitários, sejam respostas a perguntas de um questionário, ou, ainda, sempre que no contexto de uma entrevista ou de um texto emergir uma narrativa (SPINK, 2000). A árvore da associação de ideias, segundo Spink (2000) é um recurso analítico que permite realizar inferências a partir da nossa interpretação à luz dos pressupostos teóricos usados. Para Spink (2000) essas árvores nos permitem visualizar o fluxo da associação de ideias sugeridas pelos dados coletados.

A partir dessa compreensão, ilustramos como se constitui a análise da pesquisa empírica, a partir das narrativas que sustentam nossa investigação, conforme indica a Figura 2.

Figura 2: Estrutura da análise da pesquisa empírica



Fonte: construído pela autora.

Embora os sujeitos de estudo, às técnicas de coleta e análise de dados, considerando o fenômeno de pesquisa e as reflexões teóricas realizadas, juntamente com o instrumento, nos permitam discussões robustas sobre as estratégias metacognitivas dos alunos em modelagem matemática, elas não esgotam a análise. Ao contrário, conforme indicam Lüdke e André (2013), buscando complementar tais discussões, nos esforçamos para, a partir de novas explicações e interpretações, estabelecer conexões e relações para a proposição do que denominamos de Taxonomia da Metacognição em Modelagem Matemática e que constitui da parte 3 deste estudo.

2.5 Parte 3: uma taxonomia da metacognição em atividades de modelagem matemática

Das partes 1 e 2 evidenciamos elementos que nos permitam construir uma taxonomia que compreenda estratégias metacognitivas de regulação da cognição e de conhecimento da cognição manifestadas pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

A taxonomia é um sistema que permite classificar, organizar, alocar, recuperar e comunicar informações em um sistema (objetos, seres vivos, coleções de documentos, entre outros) de maneira lógica, de modo a estruturar e sistematizar o conjunto de assuntos correspondentes ao tema em *lócus*, com a finalidade de garantir rápido acesso às informações necessárias e a tomada de decisão (SOUSA; ARAÚJO JÚNIOR, 2013)

A taxonomia pode ser considerada como uma estrutura de termos organizados em camadas, por meio de uma hierarquia simples que pode ser detalhada conforme as necessidades de classificação e indexação dos sistemas.

Na presente pesquisa o termo *taxonomia* é usado para nos referirmos a um conjunto pós-determinado de ações das estratégias metacognitivas usadas em atividades de modelagem matemática. O referencial teórico adotado, o instrumento proposto para auxiliar na identificação de tais estratégias e os materiais obtidos na pesquisa empírica, subsidiam a elaboração de categorias taxonômicas, caracterizadas como *táxons*.

A constituição dessas categorias fundamenta-se na recorrência, intensidade e frequência das estratégias metacognitivas manifestadas nas resoluções realizadas pelos três grupos nas atividades de modelagem matemática e nos permite caracterizar seis unidades taxonômicas relativas a essas estratégias: tomada de decisão, reflexão intencional, julgamento reflexivo, experiência social, coesão matemática e pensamento sistêmico.

Com essa taxonomia buscamos favorecer a organização e o entendimento de manifestações metacognitivas de alunos envolvidos com atividades de modelagem matemática.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1 Sobre a modelagem matemática

Ao nos depararmos com afirmações de que a matemática que se aprende na escola e a que se usa na vida são muito diferentes e apresentam pouca relação entre si, nos propomos a refletir sobre alternativas que possibilitem reverter essa visão. Isso porque, "a instrução matemática em todos os níveis tem que lidar com o papel e o uso da matemática no mundo fora do domínio da própria matemática" (BLUM; NISS, 1991, p. 44). Segundo Blum e Niss (1991), a Matemática deve ser acessível a toda a sociedade por inúmeros motivos que vão desde seu emprego na atividade profissional ou acadêmica, até por motivos ocupacionais, sociais, democráticos e culturais. Os autores complementam, ainda, que o ensino da matemática não pode se restringir a conhecer um conjunto de fatos matemáticos, mas deve ocupar-se de compreender processos matemáticos, principalmente quando envolvem a resolução de problemas, em seu sentido amplo.

Ao observar a distância entre a resolução de problemas do mundo real e o ensino de matemática Pollak (1969) atenta para a natureza irreal dos problemas de palavras, os quais se apresentam como "problemas de aplicação" nos livros escolares.

> O livro didático ou o professor podem ter perguntado, por exemplo, quanto tempo leva para dirigir 20 milhas a 40 milhas por hora e aceito a resposta de 30 minutos. Mas quando você mora a 20 milhas do aeroporto, o limite de velocidade é de 64 km / h e seu primo chega às 18h. Isso significa que você sai às 17h30? Seu pensamento real pode ser bem diferente (POLLAK, 2011, p. 64).

Segundo Pollak (2011), em um contexto real, não apenas a velocidade deve ser levada em consideração, mas, também deve-se considerar, por exemplo, que essa é a hora do rush, que existem cruzamentos em que será preciso parar e que estacionar poderá levar um tempo. Incorporar esses e outros fatores, em situações análogas, pode possibilitar o ensino e a aprendizagem de matemática que promova o conhecimento matemático, ao mesmo tempo em que se desenvolve a capacidade de lidar com as conexões da matemática com o mundo real. Esse processo é uma característica da modelagem matemática, que segundo Pollak (2011) pode contribuir para preencher a lacuna entre o raciocínio na aula de matemática e o raciocínio sobre uma situação no mundo real.

Logo, pensar na modelagem matemática como meio para compreender, explicar ou resolver problemas do mundo real em termos matemáticos requer reconhecer que

> quanto mais ampla e extensivamente a matemática estiver sendo ativada e usada, mais necessário será o conhecimento matemático genuíno para a compreensão, avaliação e julgamento de seu uso, tanto em geral quanto em casos especiais. Para este fim, as regras básicas e a aprendizagem mecânica não são suficientes (BLUM; NISS, 1991, p. 44).

Nesse sentido, vários estudos vêm sendo empreendidos buscando mostrar os diversos usos e aplicações da matemática de forma que os alunos possam realmente se importar e envolver-se no processo.

> Levamos algum tempo para olharmos para um problema contextual, descobrir alguma abordagem matemática para o problema, ver aonde isso nos leva, e se não ficarmos felizes com isso na primeira aproximação, voltamos e percorremos isso de novo. Porque no mundo real, é isso que você faz. Você tem que pensar: a matemática torna esse problema acessível? É um problema que, de fato, você pode usar a matemática para analisar? E se sim, que matemática? Que simplificações você pode ter que fazer do problema a fim de aplicar alguma matemática que você realmente entende ao problema? O programa leva os alunos a olhar para um problema, tentar fazer algumas suposições sobre ele, obter algum tipo de estrutura matemática que diga algo sobre o problema, brincar com a matemática e depois voltar ao problema original. Você pode descobrir que isso realmente não diz tudo o que você queria saber. Então você pensa no que mais pode fazer: talvez você possa complicar o modelo. Às vezes, você tem que voltar várias vezes (ABEILLE; HURLEY, 2001, p. 5).

Conforme apontado por Abeille e Hurley (2001), Meyer, Caldeira e Malheiros (2013) e Meyer (2020), no mundo real as perguntas não vem prontas e nem com manual sobre qual matemática utilizar para resolvê-las. O caminho de construção de uma resposta não é linear e é preciso idas e vindas para chegar-se a uma (re) solução que faça sentido. Soma-se a isso, o fato de que estudar sobre características de uma situação problemática da realidade e formalizá-las em linguagem matemática deve ser o foco quando se busca motivar o uso significativo de conhecimentos matemáticos. Desta forma, a matemática pode ser vista como uma ferramenta capaz de favorecer a "síntese de ideias concebidas em situações empíricas que estão, quase sempre, camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância" (BASSANEZI, 2002, p. 18).

A modelagem matemática pode possibilitar isso, ao ser entendida como uma atividade que envolve o processamento de problemas baseados na realidade usando métodos matemáticos, onde a matemática, entendida como um conjunto de estruturas abstratas e formais, promove uma maneira de dar sentido ao nosso mundo físico e social (FERRI, 2018, VORHÖLTER, 2019, ENGLISH, 2003).

O uso da modelagem matemática ou construção de modelo desencadeada por essa abordagem, para significar todo o processo que vai da situação original do problema real a um modelo matemático, produz, não apenas uma imagem simplificada, mas verdadeira, de alguma parte de uma realidade pré-existente, ou seja, proporciona uma visão integrada da matemática com a realidade. Essa visão, entretanto, dependente do conhecimento, intenções e interesses do modelador (ENGLISH, 2003).

Kaiser (2020) ressalta que um ponto que aproxima diferentes perspectivas e compreensões de modelagem matemática é o processo idealizado de modelagem como um processo cíclico para resolver problemas reais usando a matemática e, geralmente, se descreve em um ciclo que compreende diferentes etapas ou fases.

3.2 Fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática na sala de aula

Segundo Kaiser (2020), embora diferentes perspectivas revelem diferentes usos da modelagem matemática, de modo geral, elas têm em comum a maneira que compreendem o processo de modelagem matemática como uma relação entre a matemática e o resto do mundo. Ou, como descrito por Bassanezi (2002), "modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (p. 16). Ou seja, a modelagem matemática pode ser entendida como um processo de buscar por representações ou soluções para problemas do mundo real.

Reconhecemos, a partir das intenções e do contexto de uso da modelagem matemática em sala de aula, que este estudo se insere na perspectiva pragmática da modelagem, tendo em vista que o foco está no estudo de como os alunos utilizam a matemática para a solução de problemas práticos. Concentrando, portanto, nossa atenção na modelagem sob a perspectiva pragmática, passamos a considerar, também, o aluno como a peça chave para o desenvolvimento desse tipo de atividade.

Segundo Vertuan (2013), em modelagem matemática, espera-se que os alunos desenvolvam atitudes de investigação quando em contato com situações problemáticas, ou seja, colocá-los na posição de quem precisa pensar matematicamente sobre uma situação que, muitas vezes, não tem origem na matemática, ao passo que ele torna-se responsável por elaborar um problema, elencar hipóteses, planejar ações que o levem a validar (ou não) os resultados encontrados e, até mesmo, monitorar os encaminhamentos de resolução.

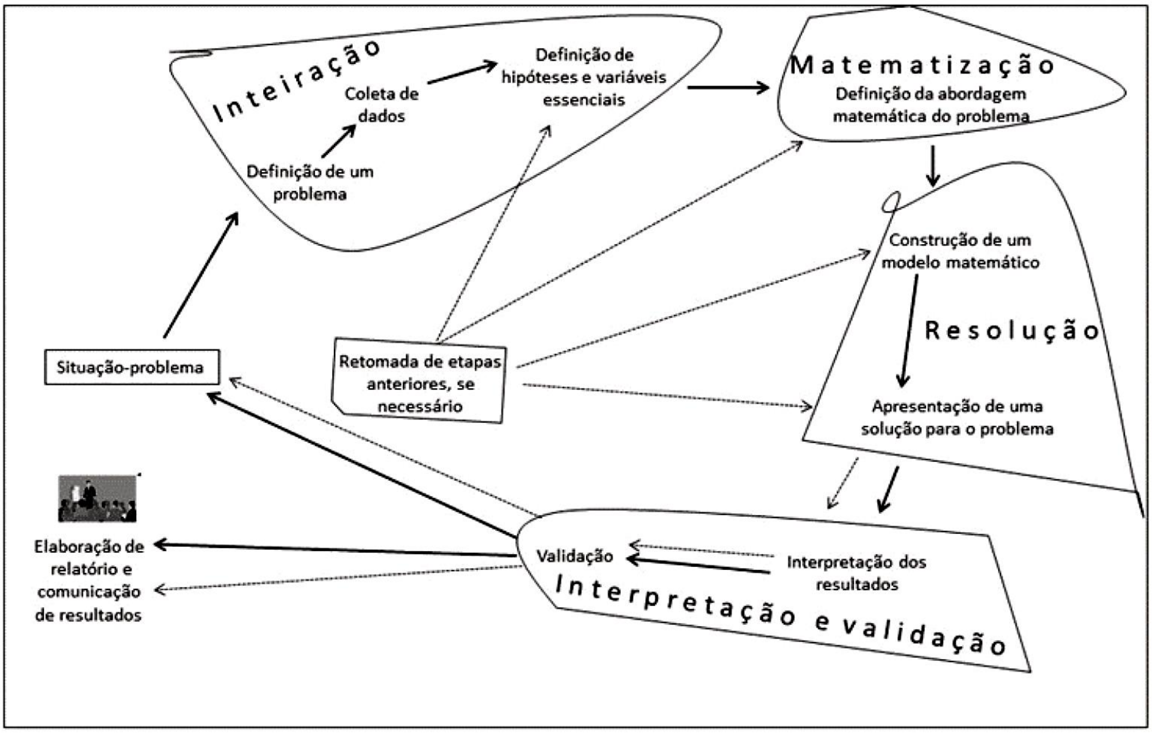
Esse contexto nos leva a assumir, assim como Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 9) que ela "constitui de uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático" e

> tem em uma situação problemática a sua origem e tem como característica essencial a possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à Matemática, caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 15).

Isso implica reconhecer que a transição da situação inicial para a situação final requer uma sequência de várias etapas relativas ao conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação problemática. Embora essas etapas não possam ser rastreadas, uma vez que uma atividade de modelagem geralmente não funciona como um processo linear, elas podem constituir-se como uma diretriz para o desenvolvimento de atividades dessa natureza. Não se trata de um "passo-a-passo", mas conhecer essas etapas contribui para reconhecer encaminhamentos necessários e úteis para conduzir o processo.

Almeida, Silva e Vertuan (2013) denominam essas etapas de fases da modelagem, caracterizando-as como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. Na Figura 3 apresentamos as fases de uma atividade de modelagem matemática, traçando considerações sobre elas na sequência.

Figura 3: Fases da modelagem matemática



Fonte: Almeida, Castro e Silva (2021, p. 386).

O ponto de partida de uma atividade de modelagem matemática, geralmente, consiste numa situação inicial (também chamada de problemática) dada a partir da escolha de um tema que seja, preferencialmente, abrangente e que possam propiciar questionamentos de diversas naturezas (BERTONE; BASSANEZI; JAFELICE, 2014). Embora seja recomendado que, nesse contexto, a situação inicial seja escolhida pelos alunos, proporcionando que eles participem ativamente e se sintam corresponsáveis pelo processo de aprendizagem, a escolha final está sujeita à orientação do professor. Viabilidade do tema, facilidade na obtenção de dados, visitas, bibliografia, entre outras atividades podem reforçar a decisão de investir, ou não, em determinada situação.

A origem da situação inicial pode se dar sob diversas fontes, como por exemplo em uma reportagem recente, um problema do cotidiano do aluno, um tema que desperta curiosidade ou chama atenção, uma necessidade em responder uma situação da comunidade na qual está inserido, a necessidade de construir argumentos para convencer sobre determinado fato, entre outros.

A definição da situação inicial deve estar associada à ideia de problemática. Na tentativa de contribuir com a definição do conceito, D'Amore (2007) descreve que "a situação problemática é 'o contexto em que o problema colocado tem sentido'" e, de modo sintetizado, "situação problemática é o sistema das competências reais nas quais se pode imaginar o que foi descrito por um texto e pelo seu significado (semântica), no interior das experiências de cada sujeito (o sistema é específico para aquela dada situação)" (p. 289). Sob esse viés, a situação problemática conduz à formulação do texto do problema, o qual, quando compreendido desencadeia soluções que satisfazem à problemática.

Isso implica reconhecer que na problemática podem emergir diferentes e diversos problemas relacionados a um dado contexto. Daí a importância da fase inteiração, que está relacionada ao ato de inteirar-se, é o primeiro contato com as características e especificidades da situação que se pretende estudar.

A inteiração consiste, de modo geral, na seleção de quais informações são consideradas relevantes, o que, por sua vez, segundo Niss (2013) deve ser baseada em uma antecipação de possíveis estratégias, potencialmente eficazes, de resolução de problemas matemáticos. Isso sugere, conforme Niss (2013), a necessidade da construção de uma representação mental específica da situação problemática, pois é a partir dela que serão elaboradas estratégias de resolução.

A representação mental, segundo Viera (2001), quando associada a tarefas que envolvam resolução de problemas matemáticos, pode ser entendida como um procedimento de monitoramento, pois permite voltar à situação inicial, perceber possíveis limitações, eliminar os dados desnecessários e definir objetivos para o desenvolvimento da atividade. Esse monitoramento favorece a atividade, na medida em que, promove o delineamento das prioridades, a alocação dos recursos e a tomada de decisão de empreender e descartar ações. A construção da representação mental adequada, para resolver problemas complexos, fundamenta-se, essencialmente, nos conhecimentos prévios e no significado que o contexto infere para o sujeito. Para Vieira (2001), a representação mental passa por mudanças ao longo do desenvolvimento de uma atividade que requer a resolução de problemas matemáticos, o que desencadeia uma atividade metacognitiva com potencial para proporcionar, aos envolvidos no processo, o aproveitamento de seus próprios recursos cognitivos.

A representação mental pode direcionar a coleta de dados, quantitativos ou qualitativos, que pode ser proveniente de diversas fontes e ser obtida de diferentes maneiras. Segundo Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014, p. 9) "a internet tem sido a primeira fonte de informações, que vão sendo complementadas conforme a exigência dos modelos no processo de refinamento e aprendizagem".

Cabe ressaltar que tão importante quanto dispor de um vasto rol de informações sobre tal situação é preciso saber selecionar ou reconhecer as informações que serão necessárias e úteis. A partir do entendimento desse conjunto de etapas decorrentes da fase inteiração, conduz-se à identificação do problema e definição de metas para sua resolução.

De modo geral, segundo Vecchia e Maltempi (2019) o problema é considerado parte fundamental do processo de modelagem, e

> se associa a uma pergunta, uma questão, uma dúvida, porém, ele não é substituído por uma resposta ou deixa de existir quando é resolvido. Assim, um problema em Modelagem Matemática corresponde a algo cuja resposta não é conhecida, mas que se deseja conhecer. Também, carrega características do contexto em que emergiu e as condições que o colocam nesta posição de problema (VERONEZ; CASTRO; MARTINS, 2018, p. 224).

Vecchia e Maltempi (2019) desenvolvem um estudo sobre a compreensão de problema no campo da modelagem. Dentre as definições elencadas pelos autores, destaca-se que o conceito de problema se associa à "uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução" (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 15). Ainda "[...] tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005, p. 221). Para Saviani (1996, p. 14) "[...] uma questão, em si, não caracteriza o problema, nem mesmo aquela cuja resposta é desconhecida; mas uma questão cuja resposta se desconhece e se necessita conhecer; eis aí um problema". Desse modo, segundo Vecchia e Maltempi (2019), o que caracteriza um problema é o fato de não conhecer caminhos que levam, imediatamente, à solução, mas que venha a ser resolvido utilizando variadas técnicas que possibilitem obter uma solução, neste caso, matemática.

A próxima fase, a matematização, é caracterizada por um processo de transição da linguagem natural, em que o problema se encontra, para a linguagem matemática e consiste na "busca e elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 16)

A linguagem matemática é crucial para se evidenciar o problema matemático a ser resolvido, a visualização e uso de símbolos para realizar descrições matemáticas. Essas descrições decorrem da formulação de hipóteses, da seleção de variáveis e da simplificação das informações e do problema definido na fase de inteiração.

O conceito de hipóteses, em modelagem matemática, pode ser assumido como o uso de um dado, uma suposição de um fato que via de regra deveria, mas não se tem certeza se, vai acontecer, logo, trabalha-se com a hipótese de que acontecerá. Em outras palavras, a hipótese é uma suposição bem fundamentada dentro do contexto do problema. Esse entendimento se alinha com a definição do Dicionário Oxford[9] que descreve hipótese como:

> 1. proposição que se admite, independentemente do fato de ser verdadeira ou falsa, como um princípio a partir do qual se pode deduzir um determinado conjunto de consequências; suposição, conjectura.
> 2. possibilidade de (alguma coisa que independe de intenção humana ou causa observável) acontecer; chance, opção. [...]
> 4. MATEMÁTICA: aquilo que se toma como dados de um problema (ou como enunciações) e a partir do qual se parte para demonstrar um teorema.

Segundo Bassanezi (2002), as hipóteses dirigem a investigação em modelagem matemática. Alinhados à essa compreensão, Almeida e Vertuan (2011, p. 22) entendem "as hipóteses como fatores que se colocam no caminho para indicar direções". Bean (2001) destaca que as hipóteses e as simplificações são a essência da modelagem matemática, pois

> os aspectos que distinguem a modelagem matemática de outras aplicações de matemática são as exigências das hipóteses e das aproximações simplificadoras como requisitos na criação de modelos. As demais etapas o problema, a resolução e a verificação da matemática, a validação da solução e a decisão valem para qualquer tipo de solução de problema envolvendo matemática (BEAN, 2001, p. 53).

---

[9] https://www.simplypsychology.org/what-is-a-hypotheses.html

Escolher as hipóteses e fazer simplificações para resolver o problema, favorece que apenas os aspectos mais importantes ou características-chave da situação sejam selecionados. Segundo Meyer (2020) o excesso de informações, parâmetros e variáveis pode prejudicar a compreensão e a análise da situação, tornando o problema intratável, ou seja, o processo de simplificação facilita o tratamento do problema. Além disso, essas simplificações, contribuem para a execução da próxima fase: a resolução.

Na fase resolução, tem-se como objetivo a construção de um modelo matemático. O modelo matemático pode ser entendido como "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma um objeto estudado" (BASSANEZZI, 2002, p. 20). Essa compreensão leva a considerar o modelo como um retrato ou uma simulação de um fenômeno. Nesse sentido o modelo é uma construção matemática abstrata, simplificada, relacionada a uma parte da realidade e criada para um propósito específico, isto é, são modelos que imitam a realidade usando a linguagem da matemática.

A construção de um modelo, de modo geral, se baseia nas relações de medidas existentes entre as grandezas ou elementos observados, ou seja, nas variáveis definidas. Essa construção se dá em conformidade com a natureza das situações estudadas, com a matemática utilizada e com o que se deseja saber (BERTONE, BASSANEZI, JAFELICE, 2014). A fase da construção do modelo, conforme aponta Burak (1992) é essencial e rica para o processo, pois exige criatividade, habilidade, aplicação ou construção de novos conceitos matemáticos e análise das variáveis envolvidas.

Nesse sentido, em atividades de modelagem matemática, espera-se que tal modelo seja capaz de retratar aspectos relevantes da situação, potencializar uma análise crítica dessa situação, possibilitar responder a problemática investigada, fazer previsões para o problema em estudo, formalizar argumentos matemáticos na tentativa de explicar, entender ou agir sobre uma porção da realidade (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, BERTONE; BASSANEZI; JAFELICE, 2014). Geralmente, é nessa fase que os alunos recorrem ao uso de ferramentas tecnológicas e computacionais para simular, sintetizar ou construir modelos precisos e eficientes.

Cabe ressaltar que, na modelagem no contexto de ensino, o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo, mas o percurso para construí-lo onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado, aplicado e, supostamente, aprendido.

A construção e aplicação do modelo não tem um fim em si mesmo, mas deve viabilizar uma avaliação do processo de construção e das diferentes possibilidades de aplicação de tal modelo, o que constitui o que Almeida, Silva e Vertuan (2013) denominam fase interpretação dos resultados e validação. Essa fase consiste na análise da resposta para o problema, na avaliação e validação da representação matemática associada ao problema, tanto em termos de procedimentos matemáticos quanto em relação à representação adequada para a situação. Validar requer, também, analisar e criticar se as informações adotadas, as variáveis escolhidas e as hipóteses assumidas são coerentes com modelo construído e com resposta final encontrada.

A compreensão de validação compreende também o processo de verificação que consiste em determinar se a implementação de um modelo representa a descrição conceitual do modelo e sua solução, com certa precisão, ou seja, seu foco é identificar e remover erros no modelo. A validação é o processo em que se busca determinar a validade do modelo em relação à sua representação do mundo real da perspectiva dos usos pretendidos de tal modelo, isto é, tem como finalidade quantificar a precisão do modelo por meio da comparação de soluções numéricas com dados experimentais (THACKER, 2004).

As fases servem como orientação para o processo e, conforme apontam Almeida, Silva e Vertuan (2013), elas podem não correr de forma linear, as idas e vindas entre as fases caracterizam a dinamicidade de atividades dessa natureza. De modo geral, são as ações do professor e do aluno que determinam o movimento e a dinâmica no desenvolvimento da atividade, essas ações, podem ser mais intensas ou menos intensas se considerados a familiarização dos alunos com a modelagem matemática.

3.3 Momentos de familiarização dos alunos com a modelagem matemática e as ações do professor e do aluno

Para o desenvolvimento de atividades de modelagem, seguimos a caracterização dos momentos de familiarização, defendida por Almeida e Dias (2004), Almeida, Silva e Vertuan (2013), Vertuan (2013), entre outros. Os momentos de familiarização são sugeridos visando o contato gradativo do aluno com a modelagem, de forma que ele possa ser responsável também pela atividade.

No primeiro momento, cabe ao professor apresentar aos alunos a situação problemática, juntamente com os dados e informações necessárias, e acompanhá-los durante a investigação do problema, a dedução a análise e a utilização do modelo matemático. Ainda, as ações dos alunos ao definir as variáveis e as hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem matemática, obtenção e validação do modelo, serão orientadas pelo professor.

No segundo momento de familiarização, o professor sugere uma situação problemática aos alunos, os quais, reunidos em grupos, podem coletar informações complementares para a investigação e seguem para a investigação da situação, em termos de definição de variáveis, formulação de hipótese, obtenção e validação do modelo matemático e se ele é suficiente para responder a situação. Nesse momento, diferente do primeiro, os alunos têm maior independência para definir procedimentos, matemáticos e acerca da situação, adequados para a investigação.

No terceiro momento, a responsabilidade pela condução da atividade de modelagem é dos alunos. Cabe a eles também, identificar a situação problemática, coletar e analisar os dados, executar as transições de linguagem, obter e validar um modelo para a análise da situação e por fim, comunicar os resultados da investigação realizada para a comunidade escolar.

Dos momentos de familiarização evidencia-se o progresso da autonomia do aluno para desenvolver atividades de modelagem matemática, chegando a ser responsável por todos os procedimentos no terceiro momento. Isso acontece ao passo que a mediação do professor, que no primeiro momento é mais intensa, torna-se mais moderada nos momentos seguintes. Ou seja, "com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno *[com o professor e]* com o seu ambiente natural" (BERTONE; BASSANEZI; JAFELICE, 2014, p. 38, inserção nossa). Em decorrência dessa autonomia, pode-se dizer que a mediação do professor não apenas torna-se mais moderada, mas se modifica e se refina para atender alunos mais habituados com os jeitos de fazer modelagem.

O professor organiza e orienta as atividades, fornece sugestões, ajuda os alunos a analisar situações usando diferentes recursos e representações; estimula a comparação de seus resultados; promove o trabalho individual e coletivo; e encoraja a necessidade de aprender, aumentar e redefinir novos conceitos e tópicos matemáticos (ESCALANTE; ALEJO, 2013). As ações, tanto do professor, quanto do aluno, podem acontecer com mais ou menos intensidade de acordo com os momentos de familiarização supracitados. De todo modo, em modelagem matemática, o professor é um orientador/mediador do processo e os alunos, organizados em grupos, são responsáveis pela condução da atividade e pela sua aprendizagem.

Nessa perspectiva, além de ser uma abordagem de ensino em que o aluno constrói ou utiliza modelos matemáticos para responder questões da realidade, a modelagem matemática também envolve a aprendizagem colaborativa, uma vez que os alunos desenvolvem as atividades em grupos (HELDING; FRASERB, 2013).

Acredita-se que, nesse formato, o trabalho se torna-se, essencialmente, colaborativo, pois os alunos estão interessados em alcançar um objetivo comum, compartilhando, discutindo e explicando seus argumentos e pensamentos que, neste contexto, possibilitem compreender ideias matemáticas e investigar a situação problemática indicada. Ou seja, "uma vez que organizados em grupos os alunos têm oportunidade de refletir, decidir e agir sobre as mais diversas situações, favorecendo um olhar crítico para elas, já que podem ser analisadas e compreendidas a partir de diferentes pontos de vista" (CASTRO, 2017).

A partir dessa compreensão atividades de modelagem matemática resultam de um trabalho colaborativo de grupos de alunos que, trabalhando juntos, desenvolvem representações que impõem significado de conceitos que utiliza para resolver uma situação. Um ambiente colaborativo sugere que os processos de raciocínio sejam distribuídos entre os indivíduos, juntamente com suas ferramentas, artefatos e representações, em outras palavras, fomenta a cognição por vários vieses (HOLLAN *et al.*, 2000). Isso porque, os alunos precisam pensar tanto sobre sua cognição, quanto sobre a de seus colegas, o que evidencia que a manifestação de metacognição pode ocorrer em diversos momentos da atividade. Lai (2011) aponta que há recomendações para o uso de estruturas de aprendizagem colaborativas ou cooperativas[10] para estimular o desenvolvimento de estratégias metacognitivas.

Magiera e Zawojewski (2019) sugerem que organização dos alunos para o trabalho colaborativo, para a resolução de problemas complexos, como é o caso da modelagem, que requerem discussão e trabalho em grupos, pode otimizar a observação da atividade metacognitiva nas práticas de modelagem no contexto escolar. Ou seja, as situações abertas de investigação, as resoluções de problemas complexos nos quais o sujeito é levado a

[10] No contexto de ensino, segundo Panitz (1996) a aprendizagem cooperativa é mais diretiva e controlada pelo professor, o qual estipula uma tarefa e atribui as funções a serem desempenhadas pelos alunos na realização de tal tarefa. Numa perspectiva colaborativa, os alunos são responsáveis por decidir suas funções, bem como sobre a organização e realização da tarefa proposta, pois buscam contribuições de todos os membros para alcançar um objetivo comum.

escolher entre várias alternativas e a antecipar as consequências destas escolhas e a condução do trabalho colaborativo podem ser exemplos de aspectos que podem estimular a metacognição em atividades de modelagem.

4. *METACOGNIÇÃO E ESTRATÉGIAS METACOGNITIVAS*

4.1 Conceito geral

A metacognição e suas implicações para processo de ensino e aprendizagem tem sido foco de diversas pesquisas no âmbito da educação. Há tempos Bransford *et al.* (2000), a partir de uma revisão de literatura, inferiu que uma abordagem metacognitiva para a instrução pode ajudar as pessoas a aprender melhor. Ou seja, o desenvolvimento metacognitivo mostra ter efeitos positivos no desempenho dos indivíduos em diversos campos, como leitura, matemática e resolução de problemas (BROWN; PALINCSAR; ARMBRUSTER, 1984; ZOHAR; DAVID, 2008).

Embora a importância da metacognição seja considerada inquestionável, apresentar uma definição de metacognição é algo complexo, tanto pela riqueza e heterogeneidade de abordagens teóricas e metodológicas quanto pela sua natureza ampla, abrangente e dinâmica (MAHDAVI, 2014). Brown (1987), afirma que o conceito de metacognição em si e o tipo de atividade decorrentes, foram reconhecidos e estudados por psicólogos educacionais como Dewey, Huey e Thorndike logo no início do século XX, elucidando assim que definir metacognição tem sido o foco da discussão imposta por diversos pesquisadores, com destaque para as áreas da psicologia e da educação.

Primeiramente é importante apresentar como a cognição se diferencia da metacognição na base teórica adotada. A cognição, de modo geral, que consiste em um tipo específico de representação dos objetos e fatos (representações proposicionais) e a qualquer tipo de representação da informação proveniente do meio, incluindo todos os tipos de representações multidimensionais (por exemplo, imagens espaciais). Já a metacognição se refere, numa compreensão mais ampla, ao conhecimento do próprio conhecimento, à avaliação, à regulação e à organização dos próprios processos cognitivos. Frenken (2021) ilustra essa diferenciação tomando como exemplo que "resolver um sistema de equações lineares envolve um processo cognitivo e, em contraste, responder à questão de quão bem alguém resolve tal sistema inicia um processo cognitivo sobre os processos cognitivos anteriores" (p. 2016). Ou seja, metacognição pode ser considerada cognição de segunda ordem: pensamentos sobre pensamentos, conhecimentos sobre conhecimentos, reflexões sobre ações (SCHNEIDER; ARTELT, 2010).

Um conceito clássico definido por Flavell (1976), comumente aceito na comunidade científica, descreve metacognição como:

> Conhecimento sobre os próprios processos cognitivos e produtos ou qualquer coisa relacionada a eles. A metacognição refere-se, entre outras coisas, ao monitoramento ativo e consequente regulação e orquestração desses processos em relação aos objetos cognitivos que eles possuem, geralmente a serviço de algum objetivo ou objetivo concreto (FLAVELL, 1976, p. 232).

Segundo Mahdavi (2014), nas últimas décadas tem havido uma complementação desse entendimento, passando-se a considerar a metacognição para além de "pensar sobre o próprio pensamento", mas também considerar noções sobre: conhecimento do próprio conhecimento, processos e estados cognitivos e afetivos, e a capacidade de controlar consciente e deliberadamente o conhecimento (PAPALEONTIOU-LOUCA, 2003).

De acordo com essa compreensão, metacognição se refere ao conhecimento das pessoas sobre suas próprias habilidades de processamento de informações, a consciência de si próprio, conhecendo seu processo de aprender, bem como conhecimento sobre a natureza das tarefas cognitivas e das estratégias para lidar com tais tarefas (SCHNEIDER; ARTELT, 2010).

Flavell (1979) se refere a esse aspecto da metacognição como a consciência de como se aprende, a consciência de ter clareza se entende algo ou não entende, conhecimento de como usar as informações disponíveis para atingir um objetivo, capacidade de julgar as demandas cognitivas de uma tarefa, conhecimento de quais estratégias usar, quais são os propósitos, bem como avaliação do próprio progresso durante e após uma determinada ação.

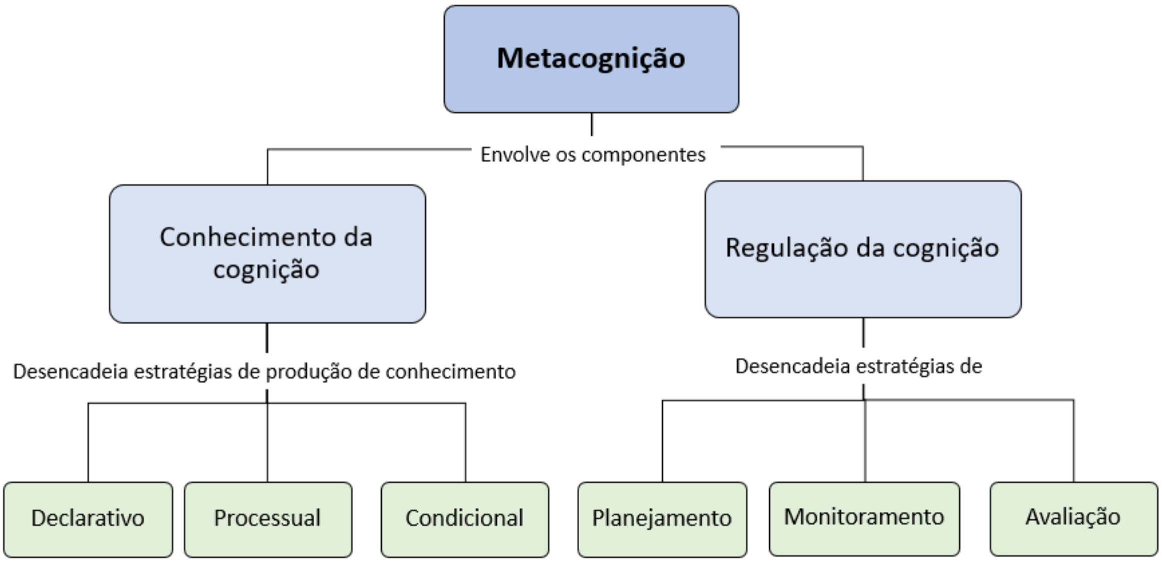
De modo geral, a metacognição se configura como o conhecimento do comportamento cognitivo e a possibilidade de regular qualquer aspecto relacionado a ele, bem como, a capacidade de usar tal conhecimento estrategicamente e de forma eficiente.

A noção de que a metacognição pode ser entendida como consciência e controle da própria aprendizagem desencadeia o que a literatura denomina de componentes da metacognição e inclui: i) o conhecimento da cognição ii) a regulação da cognição (JACOBS; PARIS, 1987; SCHRAW; MOSHMAN, 1995; SCHRAW, 1998; BROWN, 1987; MCCORMICK, 2003; HARRIS *et al.*, 2009; WILLIAMS; ATKINS, 2009; FLAVELL, 1978). A primeira dimensão refere-se ao entendimento dos processos-chave envolvidos em nossa aprendizagem; a segunda diz respeito ao planejamento, monitoramento e avaliação da própria aprendizagem. Segundo Flavell (1979) o conhecimento da cognição e a regulação da cognição encontram-se intimamente relacionados.

Diversas estruturas foram desenvolvidas para categorizar os tipos de componentes da metacognição. Embora reconheçamos as diferentes tipologias das estratégias metacognitivas e saibamos que, se aplicadas a contextos específicos podem existir diferenças substanciais entre elas[11], na presente pesquisa assumimos, assim como Schraw e Moshman (1995), que do conhecimento da cognição decorrem três tipos de estratégias: conhecimento declarativo, conhecimento processual e conhecimento condicional. A regulação da cognição, por sua vez, desencadeia três estratégias: planejamento, monitoramento e avaliação. Nossa opção por essa abordagem (em especial sobre o conhecimento da cognição) se justifica por entendermos que, para o nosso contexto, é essencial identificar estratégias de produção de conhecimento (declarativo, processual e condicional) exigidas em atividades de modelagem matemática, seja acerca da situação, da matemática ou do próprio ato de fazer modelagem.

Na Figura 4 ilustramos os conceitos característicos e como se relacionam, a partir da compreensão de metacognição assumida na nossa pesquisa.

Figura 4: Componentes da metacognição.



Fonte: autora.

Em particular, nos dedicamos a investigar como as estratégias, ilustradas na Figura 4, interferem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

4.2 Estratégias Metacognitivas

[11] Foge ao escopo do trabalho discutir essas potenciais diferenças, nossa intenção, neste momento, se restringe a esclarecer nosso conhecimento sobre a existência dessa tipologia para justificar a opção por uma delas para fundamentar nosso estudo.

O termo *estratégia*, segundo Schmeck (2013), tem origem no contexto militar para se referir a procedimentos para implementar o plano de uma operação militar em grande escala. Para implementar esse plano são usadas etapas mais específicas chamadas *táticas*.

De maneira mais geral, o termo estratégia passou a se referir à implementação de um conjunto de procedimentos (táticas) para realizar algo. Assim, uma estratégia de aprendizagem é uma sequência de procedimentos para promover aprendizagem (SCHMECK, 2013, p. 5).

De acordo com essa compreensão, estratégias metacognitivas podem ser entendidas como processos sequenciais que o sujeito utiliza para conhecer e regular o seu próprio pensamento durante a realização de uma atividade e, com isso, garantir que um objetivo cognitivo seja alcançado.

O uso de estratégias metacognitivas, especificamente em modelagem matemática, contêm componentes que afetam o desenvolvimento da atividade e a aprendizagem do aluno, posto que há um planejamento do processo de solução, a definição de metas e a determinação de etapas de trabalho. Ainda, a implementação ou cumprimento dessas etapas e metas estão, necessariamente, sujeitas ao monitoramento constante, à regulação e revisão contínuas (EILERTS; KOLTER, 2015). No contexto de atividades de modelagem matemática, segundo Vorhölter e Krüger (2021), as estratégias metacognitivas podem ser aprendidas e usadas conscientemente no início, mas executadas automaticamente ao longo do tempo. Isso não significa que essas ações automatizadas sejam menos metacognitivas, pois, muitas vezes, voltam à consciência quando um problema é identificado.

É oportuno frisar a distinção entre estratégias cognitivas e estratégias metacognitivas. As de ordem cognitiva constituem os comportamentos e pensamentos que influenciam o armazenamento das informações no processo de aprendizagem, ou seja, têm como finalidade levar o sujeito a um objetivo cognitivo. Já as de ordem metacognitiva são percebidas como meios que os indivíduos usam para regular (planejar, monitorar, avaliar) o seu próprio pensamento, isto é, propõem-se a avaliar a eficácia das estratégias cognitivas (LIMA FILHO; BRUNI, 2014). Embora ambas parecem interligadas e interdependentes, nosso foco, neste estudo, se concentra na metacognição. Um exemplo citado por Ribeiro (2003) é o fato de realizar uma leitura lenta simplesmente para aprender o conteúdo se caracteriza como uma estratégia cognitiva; já quando a leitura é realizada rapidamente, com a intenção de fornecer uma ideia acerca da dificuldade ou facilidade da aprendizagem do seu conteúdo, trata-se de uma estratégia metacognitiva.

> Deste modo, aprendemos sobre as estratégias cognitivas para fazermos progressos cognitivos e sobre as estratégias metacognitivas para monitorizar o progresso cognitivo. [...] a utilização de estratégias metacognitivas é, geralmente, operacionalizada como a monitorização da compreensão, que requer o estabelecimento de objetivos de aprendizagem, a avaliação do grau em que estão a ser alcançados e, se necessário, a modificação das estratégias que têm sido utilizadas para os alcançar (RIBEIRO, 2003, p. 112).

Dentre alguns exemplos que podem ilustrar estratégias metacognitivas, podemos citar: definir a natureza de uma tarefa ou problema; selecionar uma representação mental e física útil; selecionar um plano mais útil para executar uma tarefa; alocar recursos; ativar o conhecimento prévio relevante; prestar atenção ao feedback sobre como a tarefa está ocorrendo; traduzir o feedback em melhor desempenho, seja durante a execução ou para uma atividade futura.

Desse modo, segundo Santos, Oliveira e Saad (2021, p. 33)

> estratégias metacognitivas conduzem o processo e envolvem o conhecimento do saber usar a estratégia, para o melhor desempenho em determinadas tarefas. A aprendizagem por meio de estratégias metacognitivas é uma das possibilidades do aluno desenvolver um conhecimento explícito das estratégias específicas necessárias nas diferentes situações de aprendizagem, problematização e cálculos, com o intuito de controlar de maneira autônoma sua própria aprendizagem.

Dessa forma, podemos entender que estratégias metacognitivas beneficiam na compreensão do próprio pensamento.

Na presente pesquisa, em consonância com a literatura da área, consideramos que as estratégias metacognitivas são decorrentes dos componentes de conhecimento da cognição e regulação da cognição.

4.2.1 Conhecimento da cognição: estratégias de conhecimento declarativo, conhecimento processual e conhecimento condicional

O conhecimento da cognição, também chamado de conhecimento metacognitivo, é descrito como o conhecimento e consciência da própria cognição e dos seus próprios recursos cognitivos. O conhecimento da cognição se caracteriza por ser consciente e controlável (PRESSLEY *et al.,* 1985), estável, muitas vezes falível e tem um desenvolvimento tardio de informações (GARNER, 1987; BROWN, 1987, RIBEIRO, 2003) Assim, embora o conhecimento da cognição seja definido, na maioria das vezes, como consciente e passível de ser relatado, o fato do sujeito desempenhar controle sobre o seu pensamento e comportamento não equivale a afirmar que se trata sempre de uma atividade consciente e deliberada.

O conhecimento da metacognição, por sua vez, se refere ao funcionamento da cognição e apresenta uma compreensão de quais estratégias podem ser usadas para favorecer o próprio desempenho. Além disso, possibilita evidenciar o conhecimento sobre as próprias habilidades individuais. De modo geral, estratégias metacognitivas decorrentes de conhecimento da cognição incluem pensar sobre o registro de informações, inferências, realizar comparação e análise.

O conhecimento metacognitivo se desenvolve, segundo Ribeiro (2003), por meio da "consciencialização, por parte do sujeito, sobre o modo como determinadas variáveis interagem no sentido de influenciar os resultados das atividades cognitivas". O conhecimento metacognitivo pode desencadear três estratégias principais, que estão intimamente relacionadas: conhecimento declarativo, processual (ou procedimental) e condicional (ou explicativo) (McCORMICK, 2003; PARIS *et al.*, 1983; HARRIS; SANTANGELO; GRAHAM, 2010).

O conhecimento declarativo refere-se ao conhecimento proposicional que responde sobre "o que?" se sabe sobre as coisas, fatos, definições ou conceitos. Envolve a consciência de conhecimentos, habilidades e estratégias que influenciam a aprendizagem e colaboram na realização de uma tarefa sob várias condições. Schraw e Moshman (1995) definem como "conhecimento sobre si mesmo como aluno e sobre quais fatores influenciam o desempenho de alguém" (p. 352).

Segundo Schraw e Dennison (1994) o conhecimento declarativo, além de "saber sobre" e "saber o que", envolve conhecimento factual, necessário para processar ou usar pensamento crítico em determinada situação, conhecimento das próprias habilidades e recursos intelectuais e podem ser obtidos por meio de apresentações, demonstrações, discussões.

Em modelagem matemática o conhecimento declarativo pode levar o aluno a considerar suas dificuldades em relação ao seu modo de agir na atividade e de reconhecer aspectos relevantes da situação real em estudo. Por exemplo, quando ele manifesta saber o que é relevante na situação e reconhece conceitos ou técnicas matemáticas, discutindo a respeito com seus colegas ou realizando pesquisas.

O conhecimento processual refere-se ao conhecimento sobre "como aplicar procedimentos, como estratégias de aprendizagem ou ações para fazer uso de conhecimento declarativo e atingir objetivos" (MAHDAVI, 2014, p. 530). Segundo Mahdavi (2014), quanto mais habilidoso for o aluno, mais o conhecimento processual será evidenciado de forma natural. Esse tipo de conhecimento pode ajudar a decidir quais técnicas usar em contextos específicos e pensar em como implementar isso na prática.

Schraw e Dennison (1994) descrevem que o conhecimento processual requer que se conheça o processo e seja capaz de aplicá-lo em várias situações, fazendo inferência acerca de um procedimento ou processo de aprendizagem, podem emergir por meio da descoberta, aprendizagem cooperativa e resolução de problemas.

Em atividades de modelagem matemática o conhecimento processual pode ser associado à matematização da situação, fase em que o aluno define hipóteses e associa linguagem matemática à situação da realidade, bem como na fase de resolução em que identifica técnicas e procedimentos razoáveis para a construção de um modelo matemático. É possível que as interações com o professor ou com os colegas do grupo desencadeiem discussões sobre os procedimentos utilizados, fazendo emergir aqueles necessários para resolver o problema.

O conhecimento condicional refere-se ao conhecimento sobre o “por que?” aplicar determinados procedimentos, externar dadas habilidades ou usar certas estratégias. De modo geral, significa “saber quando, onde e por que usar o conhecimento declarativo, bem como procedimentos ou estratégias particulares (conhecimento procedimental), e é fundamental para o uso eficaz de estratégias” (HARRIS *et al*., 2009, p. 133). Conhecimento condicional está relacionado à informação sobre o motivo e / ou situação em que o conhecimento ou estratégias são aplicadas, implica saber quando e por que usar o conhecimento declarativo e procedimental.

O conhecimento condicional, segundo o Schraw e Dennison (1994), além de se conhecer sobre quando e por que usar certos procedimentos, favorece a determinação de circunstâncias, processos ou habilidades específicas a serem utilizadas em determinadas situações.

No que se refere à modelagem matemática, o conhecimento condicional está relacionado à diversidade de procedimentos utilizados para a realização da atividade, identificando os mais adequados. O aluno argumenta utilizando seus conhecimentos, matemáticos e aqueles acerca da situação bem como os encaminhamentos durante o desenvolvimento da atividade. Esse exercício de justificar suas estratégias, algumas vezes, pode conduzir o aluno a retomar seus conhecimentos.

Em sentido lato, as estratégias de conhecimento da cognição contribuem para procedimentos de resolução na medida em que permitem ao aluno reconhecer e representar as situações, acessar o conjunto de estratégias disponíveis e selecionar as passíveis de serem aplicadas. Estratégias dessa natureza parecem estar relacionadas à tomada de consciência dos processos e das competências necessárias para a realização de uma tarefa, pois promovem a avaliação dos resultados finais e/ou intermédios e reforçam ou alteram a estratégia escolhida, em acordo com a avaliação realizada (RIBEIRO, 2003).

4.2.2 Regulação da cognição: estratégias de planejamento, monitoramento e avaliação

Também chamada de controle metacognitivo, controle executivo, habilidade executiva ou regulação metacognitiva, a regulação da cognição é a segunda dimensão da habilidade da metacognição. Ela pode ser definida como “uma sequência de ações realizadas pelos alunos para controlar seu próprio pensamento ou aprendizagem” (MAHDAVI, 2014, p. 531). Está relacionada à forma “como os indivíduos controlam o processo de aprendizagem, tomando decisões sobre como aprender, gerenciando o processo contínuo e avaliando o desempenho geral”. A regulação da cognição pode ser entendida como "processo de ordem superior que orquestra e dirige outras habilidades cognitivas" (PARIS; CROSS; LIPSON, 1984, p. 1241). Promove, também, a capacidade para avaliar a execução da tarefa e fazer correções quando necessário, provoca o controle da atividade cognitiva, da responsabilidade dos processos executivos centrais que avaliam e orientam as operações cognitivas (RIBEIRO, 2003).

Embora a literatura apresente de diferentes modos ou classificações, as estratégias decorrentes da regulação da cognição, três estratégias essenciais estão incluídas na maioria dos estudos da área, sendo elas: planejamento, monitoramento e avaliação das estratégias empregadas para resolver uma determinada situação (SCHRAW; MOSHMAN, 1995; SCHRAW, 1998; MAHDAVI, 2014).

As estratégias de planejamento consistem em planejar como proceder, ou seja, envolvem o estabelecimento de metas/objetivos, a seleção de estratégias adequadas de aprendizagem, a realização de previsões, a alocação de recursos eficazes para atingir as metas, a decisão sobre quais passos seguir, a ativação de conhecimento prévio e organização de tempo (MAHDAVI, 2014; ALMEIDA, 2002).

Para Schraw (2001), quanto mais experiência com planejamento a pessoa tiver, mais ela será capaz de planejar com eficácia, independentemente do contexto. Brown (1987), neste sentido, enfatiza que o planejamento acontece à medida que a pessoa conhece o problema em sua forma global, o que é esperado dele e inicia a busca pela solução.

Segundo Rosa (2014), inicialmente o planejamento é relativamente completo, hierárquico e, muitas vezes, requer refinamentos. A autora ressalta que em diversos aspectos do planejamento as decisões dos sujeitos, influenciadas pelos seus conhecimentos, constituem ações independentes que oportunizam o desenvolvimento de um plano consistente. Tais decisões, assumidas durante o planejamento das ações, promovem a interação com os dados disponíveis, podendo influenciar ou ser influenciado por estes.

Segundo Price-Mitchell (2014), as estratégias de planejamento são responsáveis por levar os alunos a examinar e elaborar planos em momentos em que podem ser alterados com facilidade e menor desgaste no processo. À medida que os alunos aprendem a planejar, eles aprendem também a prever os pontos fortes e fracos de suas ideias.

Em atividades de modelagem matemática as estratégias de planejamento podem iniciar na fase de inteiração em que os alunos organizam dados, procuram entender a situação. Na fase de matematização as estratégias de planejamento, em alguma medida, antecipam procedimentos necessários a partir das hipóteses e das variáveis. Além disso, estas estratégias também podem orientar o processo de escolhas e de tomada de decisão que se seguem na atividade de modelagem.

Estratégias de monitoramento referem-se, de modo geral, à consciência da compreensão e desempenho da tarefa, uso e análise crítica de estratégias. Envolvem a supervisão, o controle e o auto teste dos processos essenciais para regular a própria aprendizagem (SCHRAW, 1998; MAHDAVI, 2014).

Além disso, o monitoramento inclui a capacidade de "controlar a ação e verificar se está adequada para atingir o objetivo proposto, avaliando o desvio em relação a este, percebendo erros e corrigindo-os, se necessário" (ROSA, 2011, p. 55). Essa capacidade se desenvolve lentamente e possibilita um rastreamento constante sobre o que foi aprendido, o que ainda não sabe e se as estratégias de estudo estão ajudando a aprender com eficácia.

Segundo Brown (1987), para manter o rumo da ação e reorganizar estratégias, é importante monitorar ou revisar cada procedimento executado. Ainda segundo a autora, o monitoramento, resultante de um processo metacognitivo, é uma habilidade mais abrangente, pois considera também o planejamento e a avaliação, correspondendo-os a eventos cognitivos.

O uso de estratégias de monitoramento, além de fortalecer a metacognição, auxilia os alunos a verificar seu progresso e revisar seu raciocínio em diferentes contextos. De natureza reflexiva, essas estratégias viabilizam ajustes enquanto a atividade está em andamento e estimulam a recuperação do aprendizado. Ou seja, estratégias de monitoramento funcionam como sinais internos que servem de alerta e permitem recuperar ou repensar uma ideia quando o aluno percebe que algo está errado (PRICE-MITCHELL, 2014).

Em atividades de modelagem matemática, de modo geral, os alunos podem recorrer ao monitoramento em contextos que requerem definir passos para executar e acompanhar se os conhecimentos envolvidos na atividade são coerentes em relação à realidade, à modelagem e à matemática envolvida. Reflexões acerca dos encaminhamentos e dos procedimentos adotados suscitam esclarecimento de dúvidas, correção de erros e corroboram acertos. Compartilhar ideias com o grupo, solicitar ajuda para verificar a forma como pensam, confrontar sugestões podem configurar exemplos de estratégias de monitoramento usadas pelos alunos.

A estratégia de avaliação refere-se ao exame do progresso feito em direção às metas que podem desencadear um planejamento, monitoramento e avaliação adicionais. Ela inclui a (re)avaliação de seus objetivos e conclusões, ou seja, se os resultados condizem com o fim visado (MAHDAVI, 2014; ROSA, 2011). Avaliar os produtos e a eficiência da aprendizagem é uma implicação da avaliação que se faz dos objetivos e soluções ou ao receber um feedback. Segundo Almeida (2002, p. 426) "a avaliação das soluções inclui o controle individual sobre as representações mentais que o indivíduo produz e a necessidade de entendimento quanto à solução do problema".

Nesse sentido, a avaliação proporciona um aumento do controle do aluno sobre suas próprias ações, bem como a percepção do que é aprendido e o que lhe é significativo. Isso indica a necessidade de formular novas estratégias quando as velhas não estão funcionando, empreender correções e ajustes e diagnosticar limitações. Uma estratégia de "avaliação ao final da tarefa implica tomada de consciência do aluno sobre o quanto aprendeu, em quanto tempo, em que condições e que ajustes são ainda necessários" (ALMEIDA, 2002, p. 427).

As estratégias de avaliação da metacognição são usadas para ter uma visão ampliada de uma situação. Ter essa visão facilita um exame mais cuidadoso de cada pequena parte específica, identificando falhas, nuances e acertos. Inspecionar partes de seu trabalho, proporciona aos alunos aprender sobre as nuances de seus processos de pensamento e, com isso, eles aprendem a refinar seu trabalho e aplicar seu aprendizado a novas situações (PRICE-MITCHELL, 2014).

De modo geral, estratégias de avaliação em atividades de modelagem matemática se associam a processos de verificação de procedimentos e resultados parciais no decorrer da atividade bem como à fase de validação em que efetivamente se requer uma avaliação criteriosa da resposta obtida para o problema. Assim, essas estratégias possibilitam que o aluno tenha uma visão holística do desenvolvimento da atividade de modelagem.

O'Malley *et al*. (1985) apontam que as estratégias metacognitivas de regulação, envolvem pensar sobre o processo de aprendizagem, planejamento para aprendizagem, monitoramento da compreensão ou produção enquanto está ocorrendo e autoavaliação da aprendizagem após a conclusão de uma atividade.

De modo geral, como observam Schraw e Moshman (1995), o conhecimento cognitivo e a regulação metacognitiva podem ser integrados a partir da interação entre pares, o que pode encorajar a construção e o refinamento de estratégias metacognitivas.

Ao reconhecer que essas estratégias, tanto de conhecimento, quanto de regulação, favorecem com que o aluno se aproprie do seu processo de aprendizagem, temos a intenção, na presente pesquisa, de investigar os desdobramentos decorrentes de tais estratégias para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

4.3 Metacognição em modelagem matemática: uma revisão

De acordo com Blum (2011, p. 22), “há muitos indícios de que as atividades metacognitivas não são apenas úteis, mas até necessárias para o desenvolvimento da competência de modelagem”.

Assim como Blum (2011), muitos autores reconhecem a importância da metacognição em modelagem matemática (STILLMAN *et al.,* 2007, 2011, BLUM, 2015, MAAß, 2006, VORHÖLTER; KAISER, 2016, SCHUKAJLOW; LEIß, 2011, VORHÖLTER, 2017, 2018, HIDAYAT; ZULNAIDI; ZAMRI, 2018, VORHÜLTER, KRÜGER, WENDT, 2019, HIDAYAT *et al.*, 2020). Alguns dos motivos para essa inferência residem no fato de que a metacognição, de modo geral, contribui para o desempenho em matemática, estimula a habilidade de resolução de problemas, melhora competências de modelagem, amplia o repertório de estratégias para resolver com sucesso problemas complexos de modelagem de maneira orientada para um objetivo.

Embora discussões sobre essa importância venham acentuando-se ao longo dos anos, pesquisas na área são poucas e ainda estão em fase inicial, conforme aponta Vorhölter (2018, 2019) e Vorhölter e Krüger (2021). Dentre os motivos para a metacognição ser pouco estudada na modelagem, está o fato dela ser um conceito cujo entendimento tem sutilezas bem como o fato de que a sua identificação é um tanto desafiadora, visto que atividades de modelagem matemática, geralmente, são desenvolvidas em grupos e isso iria requerer ainda uma distinção entre metacognição individual ou de grupo. Soma-se a isso, o fato de que atividades de modelagem matemática são dinâmicas, o que requer procedimentos, estratégias e conhecimentos que, na maioria das vezes, não podem ser previstos ou planejados.

Dentre os estudos que abordam esse tema – metacognição e modelagem matemática - alguns destacam-se por trazer à tona discussões que, para além de resultados, apresentam indicativos de fragilidades e potencialidades de estudos nessa área.

Em nível nacional, se destaca a tese de Vertuan (2013), que se propõe a investigar como os estudantes monitoram suas ações e como isso afeta o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. A investigação envolveu alunos do Ensino Médio e do primeiro ano de Licenciatura em Matemática num curso intitulado "Investigações de assuntos do cotidiano por meio da Matemática". Como resultado do estudo, o autor infere que práticas de monitoramento cognitivo são aprendidas pelos sujeitos em seu entorno social e cultural. Ainda, que tais práticas fortalecem a importância da unicidade da atividade de modelagem matemática e que, a metacognição social, manifesta pelo trabalho em grupo, exerce influência no desenvolvimento das atividades de modelagem e medeia as aprendizagens dos diferentes sujeitos.

O artigo de Stillman (2011) tem interesse em elucidar a metacognição em situações de modelagem matemática e os tipos de respostas metacognitivas produtivas e não produtivas, que os alunos podem apresentar em tais situações. A autora caracteriza três níveis de atos metacognitivos que podem ser considerados produtivos: (1) o reconhecimento de que estratégias específicas são relevantes; (2) a escolha da estratégia para implementação; (3) a implementação bem-sucedida. A partir da análise das respostas dos alunos do Ensino Médio para problemas de modelagem, Stillman (2011) identificou sinais de alerta e distinguiu entre o uso apropriado e inadequado de estratégias metacognitivas. Segundo a autora, essa distinção tem como finalidade auxiliar a tomada de decisão docente por meio da atividade reflexiva e com isso proporcionar que os alunos façam um melhor uso do conhecimento e de estratégias metacognitivas produtivas dentro do contexto de modelagem.

Kim *et al.* (2013), em seu artigo, buscam reconceituar e identificar fontes que acionam a metacognição durante a resolução de problemas de modelagem nos níveis individual, social e ambiental. Os autores, pesquisadores norte-americanos, discutem a metacognição como um paradoxo, pois embora ela seja pessoal ela sofre influências de fontes sociais, como o trabalho colaborativo desencadeado em ambientes de modelagem, têm um impacto significativo no desenvolvimento de atitudes metacognitivas em relação à matemática. Os resultados apontam que quando os alunos trabalham juntos em um ambiente social, são capazes de acessar fontes mais ricas para potencialmente superar suas limitações individuais por meio de feedback e críticas de outras pessoas. A natureza complexa do problema também serviu como um catalisador metacognitivo, exigindo que os alunos definissem construções e operacionalizassem essas definições.

Para corroborar os resultados apresentados por Kim *et al*. (2013), em estudo semelhante, Kim e Moore (2019), em seu artigo se dedicam a investigar os níveis de metacognição, exploram as atividades metacognitivas espontâneas dos alunos enquanto eles desenvolvem atividades de modelagem matemática de forma colaborativa. Os autores afirmam que os ambientes que geram situações de modelagem (MEAs), podem estimular atividades metacognitivas espontâneas dos alunos. Entretanto, ressaltam que a intervenção do professor deve ser moderada e direcionar os alunos a refletir sob suas próprias bases cognitivas. Kim e Moore (2019) sugerem que estudos futuros podem investigar a manifestação de atividades metacognitivas em outros ambientes e durante a resolução de problemas com diferentes níveis de complexidade.

Hidayat, Zulnaidi e Zamri (2018), pesquisadores da Universidade da Malásia, investigam a relação entre metacognição e metas de desempenho que podem influenciar a competência de modelagem matemática de 538 alunos entre 18 e 22 anos. Os resultados, publicados em seu artigo, apontam uma influência positiva da metacognição dos alunos sobre a competência de modelagem matemática. Entretanto, a pesquisa não estabeleceu uma correlação significativa e direta entre as metas de desempenho e a competência em modelagem matemática. Na continuidade desse estudo, o artigo de Hidayat *et al.* (2020) colabora esse resultado, justificando que a metacognição é vital em aulas de modelagem matemática, pois, promove o uso de estratégias gerais, por exemplo,

> análise de tarefas, representação de problemas, previsão, planejamento, monitoramento, verificação, reflexão e avaliação de sucesso, porque várias

> competências de modelagem matemática exigem que os alunos simplifiquem suposições, esclareçam o objetivo e formulem o problema. A aplicação de abordagens metacognitivas também permite que os alunos sejam sensíveis e compreendam um problema, cometam alguns erros no processo de aprendizagem, melhorem suas habilidades de autorregulação e aumentem sua autoconfiança (HIDAYAT *et al*., 2020, p. 8).

No artigo de Krüger, Vorhölter e Kaiser (2020), a partir de entrevistas realizadas com quatorze grupos de alunos, no início e no final de uma unidade de ensino, investigaram a percepção dos alunos sobre a metacognição em processos de modelagem. Os autores concluem, que as estratégias metacognitivas, que no início do estudo foram usadas de maneira esporádica e nem sempre objetivando melhorar o processo de modelagem, ao final do estudo foram utilizadas de maneira consciente e mais intensa. Isso se deu à medida em que os alunos perceberam a necessidade de usar tais estratégias para resolver um problema real por meio de um modelo matemático, isto é, direcionavam o conhecimento metacognitivo para os requisitos e estratégias das tarefas. Entretanto, os autores apontam que os resultados apresentados dependem dos professores, do contexto escolar, dos problemas de modelagem e do grupo envolvido, defendendo assim a necessidade de investigações que intencionem criar uma tipologia de diferentes tipos de perspectivas dos alunos sobre estratégias metacognitivas durante os processos de modelagem.

Vorhölter (2017, 2018, 2019), pesquisadora na Universidade de Hamburgo na Alemanha, em seus trabalhos sobre modelagem matemática, propõe-se a estudar sobre as estratégias metacognitivas dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática. Vorhölter (2017), em seu artigo, discute os diferentes métodos para avaliar competências metacognitivas em modelagem, com enfoque no desenvolvimento de um questionário para avaliar tais competências. Para testar o questionário, os alunos, reunidos em grupos, trabalharam em uma atividade de modelagem. Para a autora, o questionário parece ser um possível instrumento para avaliar as competências metacognitivas em modelagem matemática e aponta a necessidade de levar em consideração, para além da formulação dos itens do questionário, aspectos como as circunstâncias particulares nas quais os alunos preenchem os questionários.

Em Vorhölter (2018) a autora também discute os resultados de um questionário, respondido por 431 alunos de nona série e que busca avaliar as estratégias metacognitivas dos alunos durante atividades de modelagem matemática. Os resultados apresentados mostram que as competências metacognitivas de modelagem consistem em diferentes componentes (estratégias para prosseguir, para regular e para avaliar). Os itens em nível de grupo mostraram a mesma estrutura dos itens em nível individual.

Ainda sobre as estratégias metacognitivas de grupos, Vorhölter (2019) apresenta os resultados de um estudo de intervenção com o objetivo de aprimorar estratégias metacognitivas de grupos de alunos que trabalham com modelagem, destacando que a metacognição social parece ser tão crucial – ou mais – que a metacognição individual. Para o estudo, a autora apresenta um questionário que inclui itens, derivados de uma revisão de literatura e da observação de vários grupos de estudantes trabalhando em diferentes problemas de modelagem, que abordam o uso de estratégias metacognitivas em um indivíduo e em um grupo. Os resultados mostraram os mesmos três fatores para os dois grupos (individual e grupo), ou seja, estratégias para prosseguir, estratégias para regular e estratégias para avaliar o processo de modelagem.

Em artigo mais recente, Vorhölter e Krüger (2021), têm como objetivo comparar resultados de diferentes métodos (questionários de autoavaliação, entrevistas na forma de recordações estimuladas e o processo do trabalho gravado em vídeo) usados para avaliar estratégias metacognitivas em modelagem, bem como as atitudes dos alunos em relação à sua utilização. Ao considerar que estratégias metacognitivas influenciam no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, os autores entendem que elas são utilizadas para controlar o processo de aprendizagem ou o trabalho e costumam ser divididas em estratégias de planejamento, estratégias de monitoramento e regulação e estratégias de avaliação. Essas estratégias metacognitivas em modelagem incluem: estratégias que servem de orientação, a partir da identificação de tempo e recursos; estratégias para planejamento de processos de trabalho, levando em consideração os requisitos específicos do problema de modelagem proposto e as pessoas envolvidas; estratégias de monitoramento e - se necessário - regulação do processo de trabalho; estratégias para avaliar e avaliar o processo de modelagem com o objetivo de otimizar o processo na próxima vez.

Tais estratégias são necessárias para se chegar a uma solução em grupo de forma colaborativa e orientada a objetivos, uma vez que na vida escolar cotidiana, o trabalho com modelagem é realizado em pequenos grupos, o que evidencia que, tanto as estratégias metacognitivas individuais, quanto as estratégias metacognitivas de grupo são importantes.

Diante da influência e importância das estratégias metacognitivas em modelagem, reforçadas por resultados empíricos, Vorhölter e Krüger (2021) apontam algumas dificuldades em pesquisa-las. A principal delas é a dificuldade em identificar e avaliar esse tipo de estratégia. Buscando superar essa dificuldade, apresentam métodos possíveis para avaliá-las, delineando as vantagens e desvantagens de cada um e fornecendo recomendações para posterior aprimoramento.

Para proceder com a investigação, os autores selecionaram para o estudo dois alunos, Furkan e Robin, e argumentam sobre quando as interpretações dos dois métodos diferiam e em que casos coincidiam. Os autores inferem que não houve discrepância nas três fontes que retratam as estratégias de Furkan. No caso de Robin, por outro lado, as afirmações da entrevista, do questionário e das estratégias do grupo não coincidem. Isso pode

> indicar que ele internalizou o uso de estratégias metacognitivas individuais a tal ponto que elas são executadas automaticamente, e ele só tem consciência delas quando é questionado diretamente sobre elas. No entanto, pode também indicar que a tarefa era tão fácil para Robin que o uso de estratégias metacognitivas não era necessário (daí sua recusa na entrevista), mas ele aprendeu que o uso delas é desejável (daí sua classificação no questionário) (VORHÖLTER; KRÜGER, 2021, p. 193).

Por fim, Vorhölter e Krüger (2021) concluem que: os questionários devem conter itens que contemplem a metacognição individual e a metacognição do grupo, e devem ser preenchidos imediatamente após a conclusão da tarefa; as tarefas propostas aos alunos devem ter nível intermediário de dificuldade; as entrevistas, embora possibilitem acesso ao ponto de vista dos alunos, obtém respostas que muitas vezes não distinguem estratégias metacognitivas individuais de estratégias metacognitivas de grupo; apenas a observação do comportamento dos alunos no vídeo não fornece elementos sólidos para discussão da metacognição individual. Daí o indicativo da necessidade de diversificar os métodos de avaliar estratégias metacognitivas em modelagem matemática.

Nesse sentido Frenken (2021), em seu artigo, apresenta a construção de um instrumento quantitativo para avaliar o conhecimento metacognitivo em modelagem, em que os itens foram desenvolvidos com base na definição teórica do termo e sua conexão específica com a modelagem matemática. A autora compreende o conhecimento metacognitivo da modelagem matemática como o conhecimento que afeta a execução dos processos de modelagem, seja para traçar um plano de resolução, buscar uma analogia, fazer um desenho ou verificar a solução comparando-a com conceitos e informações conhecidas, entre outros. O conhecimento metacognitivo, é assumido por Frenken (2021) nas categorias pessoa, tarefa e estratégia, as podem favorecer o uso de estratégias apropriadas durante o processo de resolução de problemas baseados na realidade. A autora revela a importância e a necessidade de criar ambientes de aprendizagem para modelagem matemática, bem como integrá-los à escolarização com mais frequência e intensidade. Além disso, conclui que o instrumento possibilita a avaliação de alguns aspectos do conhecimento metacognitivo em modelagem matemática, entretanto aponta a necessidade de adequação do instrumento de teste.

A partir dos resultados apontados nos estudos supracitados, fica evidente que a importância da metacognição em modelagem matemática, ainda assim, autores como Vorhölter (2018), Vorhölter e Krüger (2021) e Stillman (2011) apontam que ainda há pouca indicação de como identificar estratégias metacognitivas dos alunos e obter indícios de como contribuem para as atividades de modelagem. Nessa tentativa, diferentes métodos de avaliação são indicados, tais sejam: questionários, testes e entrevistas prospectivas e retrospectiva. Entretanto, ainda que tais instrumentos permitam a identificação de indícios metacognitivos, há a necessidade de um instrumento para identificar estratégias metacognitivas de conhecimento e de regulação da cognição dos alunos, especificamente, quando eles se envolvem em atividades de modelagem matemática, que são essencialmente desenvolvidas em grupos.

Embora muito do que se pode deliberar sobre estratégias metacognitivas leva em consideração que estas são de natureza pessoal, individual, os estudos de Magiera e Zawojewski (2019), por exemplo, apontam que o trabalho em pequenos grupos colaborativos contribui para que os indivíduos desenvolvam habilidades de ouvir, ajudar e compartilhar e isso pode levá-los a comportamentos metacognitivos pessoais e associados ao aprender e ao se questionar. Outro mecanismo significativo, apontado por esses autores, é o fato de que as interações entre os indivíduos que trabalham juntos requerem o uso de ferramentas verbais que possibilitem regular ou acompanhar o comportamento e o pensamento do outro.

Isso sugere, a partir de uma perspectiva vygotskiana, que, ao buscar monitorar e avaliar a atividade metacognitiva inicialmente direcionada ao pensamento alheio, em contextos sociais, o indivíduo torna-se propenso a internalizar esses comportamentos sociais e auto-monitorar, auto-avaliar e auto-ajustar seus próprios esforços de desempenho (MAGIERA; ZAWOJEWSKI, 2019).

> A consideração do funcionamento metacognitivo de indivíduos em contextos sociais é reconceituada como um produto de interações entre um indivíduo, ou um grupo de indivíduos, e um contexto circundante. Quando os objetivos e soluções são construídos coletivamente e o produto desejado é a cognição socialmente compartilhada, os membros do grupo regulam não apenas o seu próprio pensamento, mas também os dos outros e sua atividade coletiva de resolução de problemas (MAGIERA; ZAWOJEWSKI, 2019, p. 54).

Kim *et al.* (2013) e Vorhölter (2018) destacam que a atuação de todos os integrantes do grupo em direção a um objetivo consensual comum, denota que estratégias metacognitivas desencadeadas no contexto de um grupo são reflexo da coletividade e não apenas de estratégias individuais isoladas. Tais autores ponderam ainda que, embora a metacognição seja pessoal, ela não pode ser explicada exclusivamente por concepções individualistas, pois as interações com colegas e professores são as principais fontes que encorajam e acionam gatilhos que possibilitam detectar erros e adaptar seus pensamentos ou resolver obstáculos e progredir diante de uma situação.

Ao encontro dessa compreensão, Iiskala *et al.* (2011) afirma que em contextos de trabalhos em grupos colaborativos, a metacognição do grupo parece ser mais crucial do que a metacognição individual. Vorhölter (2019) compartilha desse entendimento, enquanto defende que na metacognição de natureza social, ou seja, do grupo, o indivíduo deve tanto disponibilizar seus próprios pensamentos para os outros; quanto discutir suas suposições, justificativas e conclusões entre si e relacionar os pensamentos dos outros aos seus.

Diante disso, reconhecemos que, ao nos propormos a investigar a metacognição em atividades de modelagem matemática, se faz necessário considerar tanto a metacognição individual quanto a metacognição socialmente compartilhada, ou seja, a metacognição colaborativa, do grupo.

Estas condições reforçam a asserção de que a construção de um instrumento específico para avaliação de estratégias metacognitivas em modelagem matemática, mais que importante, é necessária (VORHÖLTER, 2017). Na tentativa de suprir essa necessidade e auxiliar na obtenção de respostas para o nosso problema de pesquisa, apresentamos no capítulo a seguir um instrumento de identificação de estratégias metacognitivas, empregando-o, posteriormente, em uma pesquisa empírica.

5. A ESTRUTURAÇÃO DE UM INSTRUMENTO PARA IDENTIFICAR ESTRATÉGIAS METACOGNITIVAS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Os instrumentos para avaliar metacognição existentes são, na sua maioria, oriundos do campo da psicologia e destes provém os que são utilizados com finalidade educacional ou pesquisa na área de Educação, em geral, e na área de Educação Matemática, em particular.

Dentre eles, Schraw e Dennison (1994) apresentam um instrumento relevante e influente na comunidade de pesquisadores, o Metacognitive Awareness Inventory (MAI) para ser aplicado a jovens estudantes. O MAI, de modo geral, consiste em um questionário a ser respondido, assinalando verdadeiro ou falso para afirmações relacionadas a estratégias de conhecimento da cognição e regulação da cognição.

No contexto de modelagem matemática, Vorhölter (2017) apresenta um instrumento usado para observar estratégias metacognitivas em atividades desenvolvidas pelos alunos, identificando o que a autora denomina competências metacognitivas. A fim de desenvolver itens para medir as estratégias metacognitivas dos alunos para modelagem, Vorhölter (2017) propõe um questionário vinculado a tarefas com 39 itens Likert de cinco pontos a serem respondidos pelos alunos. Associando as respostas dos alunos a vídeos do processo de trabalho de vários grupos de alunos, a autora observou as estratégias metacognitivas dos alunos em relação às competências associadas às diferentes fases de uma atividade de modelagem, considerando: competências para orientar e planejar o processo de solução; competências para monitorar e, se necessário, regular o processo de trabalho; competências para avaliar o processo de modelagem a fim de melhorá-lo.

Ainda no âmbito da modelagem matemática Frenken (2021) também apresenta e discute elementos que conduzem a construção de um instrumento de teste para avaliar o conhecimento metacognitivo em modelagem matemática. O instrumento proposto pela autora é constituído por 35 itens classificados nas categorias pessoa, tarefa e estratégia. Os itens, a serem respondidos pelos alunos numa escala Likert variando de 1 a 4 (sendo 1 – verdadeiro e 4 - falso). Embora o teste tenha passado pela avaliação de especialistas (professores e pesquisadores em modelagem) e pelo estudo piloto com cerca de 100 alunos tenha sido realizado para revisar os critérios de qualidade, a autora sugere a necessidade de revisar a estrutura do instrumento e aprimorá-lo para o desenvolvimento de futuras pesquisas empíricas com o tema.

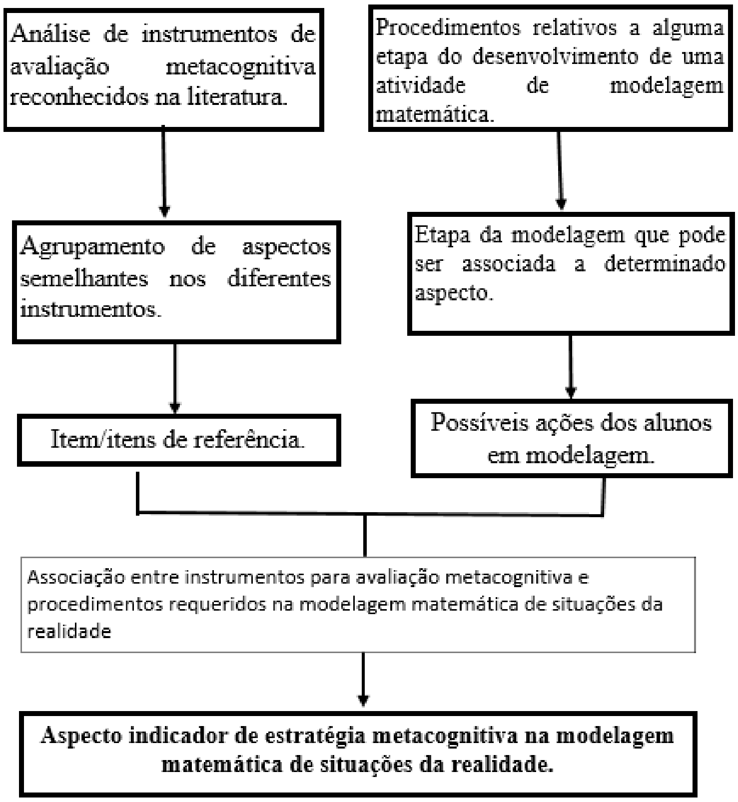
Assim como Vorhölter (2017) e Frenken (2021), outros autores também preconizam a importância do uso de instrumentos que permitam identificar ou avaliar metacognição, seja em termos de competências, habilidades ou estratégias metacognitivas em modelagem matemática, como é o caso de Vorhölter e Krüger (2021).

Na presente pesquisa, considerando as assertivas de Vorhölter (2017) e de Vorhölter e Krüger (2021) bem como a base teórica relativa à metacognição oriunda da área da Psicologia, propomos um instrumento para identificar estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática.

Para estruturar o instrumento visando identificar estratégias metacognitivas, consideramos a regulação da cognição e as estratégias metacognitivas a ela associadas (planejamento, monitoramento e avaliação) bem como o conhecimento da cognição (que pode ser declarativo, processual ou condicional). Na estrutura do instrumento, associamos estas estratégias às características de uma atividade de modelagem matemática.

Particularmente, levamos em consideração o Metacognitive Awareness Inventory (MAI), proposto por Schraw e Dennison (1994), bem como outros questionários e instrumentos de avaliação metacognitiva já reconhecidos na literatura (YILDIRIM, 2011; PASCUALON, 2011, 2015; PASSOS; CORREA; ARRUDA, 2017; TORREGROSA, DEULOFEU; ALBARRACÍN, 2020; ROSA, 2017; ROSA; SANTOS; RIBEIRO, 2017). Estabelecemos uma associação ente os indicadores de estratégias metacognitivas apontados nesses instrumentos com as especificidades de atividades de modelagem matemática. Na Figura 5 indicamos como essa associação foi realizada para estruturar cada um dos indicadores de estratégia metacognitiva em atividades de modelagem matemática.

Figura 5: Processo de construção de indicadores de estratégias metacognitivas em modelagem matemática.



Fonte: autora.

Procedendo dessa maneira, construímos os demais indicadores do instrumento para identificar estratégias metacognitivas, conforme Quadro 1. Na primeira coluna especificamos a estratégia metacognitiva; na segunda, sinalizamos possíveis procedimentos dos estudantes no contexto da modelagem; na terceira, indicamos os itens selecionados de instrumentos presentes na literatura e, por fim, como os aspectos indicadores das estratégias metacognitivas considerados para nossas análises.

Quadro 1: Associações estabelecidas para a construção dos aspectos indicadores de estratégias metacognitivas

CONHECIMENTO DA COGNIÇÃO	**Construção de indicadores de CONHECIMENTO DECLARATIVO identificados nas ações dos alunos**		
	Item de referência	**Possíveis ações dos alunos em modelagem**	**Aspecto indicador**
	Reconhece suas características pessoais diante às necessárias para a atividade (ROSA, 2017). Eu entendo minhas forças e fraquezas intelectuais (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Exprime opinião sobre dificuldades ou facilidades impostas ou encontradas durante o desenvolvimento da atividade Revela o que é desafiador na atividade	CD1 - Admite seus pontos fortes e pontos fracos relativamente ao que precisa saber para desenvolver a atividade.
	Eu conscientemente concentro minha atenção em informações importantes (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Argumenta sobre decisões com base no que sabe sobre a situação da realidade	CD2 - Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.

		Usa o que sabe (ou aprendeu) sobre a situação da realidade para tomar decisões Explora argumentos extramatemáticos	
	Penso em várias maneiras de resolver um problema e escolho a melhor (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Assume ou descarta ideias de resolução Considera o problema sob diferentes perspectivas Faz previsões acerca da construção do modelo matemático	CD3 - Considera diferentes maneiras de resolver o problema identificado na situação da realidade.
	Eu seleciono e organizo as informações relevantes antes de começar a resolver um exercício (YILDIRIM, 2011). Eu sou bom em organizar informações (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Elenca variáveis que influenciam na resolução da situação Seleciona informações sobre a situação Faz pesquisa em fontes confiáveis para aprender sobre a situação	CD4 - Assume lembrar, organizar ou coletar informações acerca da situação antes de iniciar o desenvolvimento da atividade de modelagem.
	Certifico-me de que entendi exatamente o que precisa ser feito para resolver um exercício e como fazê-lo (YILDIRIM, 2011). Avalia seus conhecimentos em função dos necessários para realizar a atividade (ROSA, 2017)	Identifica e julga o conteúdo matemático com base em seus conhecimentos Busca aprender os conhecimentos requeridos para a resolução Identifica o que sabe e o que precisa saber para desenvolver a atividade	CD5 - Avalia se seus conhecimentos atendem ao que precisa saber para desenvolver a atividade de modelagem.
CONHECIMENTO DA COGNIÇÃO	**Construção de indicadores de CONHECIMENTO PROCESSUAL identificados nas ações dos alunos**		
	Item de referência	**Possíveis ações dos alunos em modelagem**	**Aspecto indicador**
	Eu me pergunto como um exercício se relaciona com o que já sei (YILDIRIM, 2011). Reconhece o conteúdo ou parte dele com relação a aprendizagens anteriores (ROSA, 2017). Tento usar estratégias que funcionaram no passado (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Recorre a estratégias, conteúdos ou encaminhamentos utilizados em aulas anteriores Lembra e tenta replicar procedimentos bem sucedidos em outros momentos	CP1 - Menciona utilizar estratégias que funcionaram em atividades de modelagem anteriores.
	Planeja as ações tendo como referência seus conhecimentos, a tarefa envolvida e a estratégia a ser utilizada (ROSA, 2017).	Comunica conclusões sobre todo o processo de desenvolvimento da atividade Aponta restrições ou limitações do modelo Articula elementos característicos da modelagem para justificar o modelo obtido	CP2 - Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas e nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.

	Tenho um propósito específico para cada estratégia que utilizo (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Comunica o raciocínio usado durante a resolução Usa recursos (anotações, slides, compartilhamento de tela) para visualizar e compartilhar a resolução Desenvolve a resolução matemática Apresenta clareza no uso de conhecimentos matemáticos	CP3 - Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas na resolução.
	Participa das decisões do grupo questionando o que está sendo realizado, de forma a revisar as ações executadas, valorizando essa etapa da atividade experimental (ROSA, 2017). Peço ajuda aos outros quando não entendo algo (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Faz perguntas ao professor sobre elementos característicos de uma atividade de modelagem Questiona os colegas quando apresenta alguma dúvida Faz pesquisas em sites relacionados	CP4 - Reconhece quando não compreende alguma informação ou conceito e então reporta-se aos colegas, ao professor ou considera pesquisas a respeito.
CONHECIMENTO DA COGNIÇÃO	**Construção de indicadores de CONHECIMENTO CONDICIONAL identificados nas ações dos alunos**		
	Item de referência	**Possíveis ações dos alunos em modelagem**	**Aspecto indicador**
	Estou ciente de quais estratégias de modelagem / solução de problemas usar e quando usá-las para resolver um exercício (YILDIRIM, 2011). Avalia a estratégia com seus conhecimentos e de seus colegas, ou, mesmo, as avalia em termos dos equipamentos e materiais disponíveis (ROSA, 2017).	Discorre sobre estratégias empregadas de acordo com o que requer uma atividade de modelagem	CC1 - Reconhece que usa diferentes estratégias para definir seus procedimentos de acordo com as etapas do desenvolvimento da atividade de modelagem.
	Eu sei quando cada estratégia que uso será mais eficaz (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Discute o conteúdo utilizado na resolução Argumenta sobre a matemática utilizada tendo em vista aspectos da situação ou da modelagem Explica o uso de softwares no desenvolvimento da atividade Demonstra domínio do conteúdo	CC2 - Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos.
	Eu uso diferentes estratégias de aprendizagem dependendo da situação (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Compartilha passo a passo da resolução realizada Comunica como concebe desenvolver a resolução Interpreta a situação da linguagem natural para a matemática Recorre a conhecimentos prévios	CC3 - Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução identificado na situação da realidade.
	Eu verifico minha precisão conforme avanço na solução (YILDIRIM, 2011).	Faz previsões sobre as implicações que determinado procedimento pode causar sobre	CC4 - Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.

	Confronta a ação em execução e o objetivo pretendido (ROSA, 2017).	os resultados ou à resposta para a situação final Julga a adequação do procedimento assumido relativamente ao que a situação requer	
	Eu uso minhas forças intelectuais para compensar minhas fraquezas (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Discute sobre dificuldades encontradas e como superá-las	CC5 - Sabe potencializar seus conhecimentos e competências, frente às suas dificuldades.
REGULAÇÃO DA COGNIÇÃO	**Construção de indicadores de PLANEJAMENTO identificados nas ações dos alunos**		
	Item de referência	**Possíveis ações dos alunos em modelagem**	**Aspecto indicador**
	Eu penso no significado de um exercício antes de começar a resolvê-lo (YILDIRIM, 2011). Eu conscientemente concentro minha atenção em informações importantes (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Avalia a viabilidade (ou não) de escolhas, estratégias, conteúdos ou abordagem da situação Toma decisões sobre como matematizar a situação	RP1 - Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade.
	Tento entender os objetivos de um exercício antes de tentar resolvê-lo (YILDIRIM, 2011). Apresenta consciência do objetivo a ser atingido e de qual conhecimento precisa para respondê-lo (ROSA, 2017). Eu defino objetivos específicos antes de começar uma tarefa (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Sugere compreender o problema e traçar caminhos para resolvê-lo Programa ações para desenvolver a atividade	RP2 - Define os objetivos da atividade antes de iniciar seu desenvolvimento.
	Eu uso vários métodos de resolução para resolver um exercício (YILDIRIM, 2011). Eu considero várias alternativas para um problema antes de responde (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Sugere o uso ou alocação de recursos tecnológicos Propõem a manipulação de diferentes conteúdos para resolver o problema	RP3 - Planeja a resolução do problema levando em consideração diferentes possibilidades.
	Eu me pergunto se considerei todas as opções ao resolver um problema (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Discute sobre conhecimentos matemáticos que podem viabilizar a resolução Sugere refinar a resolução ou obtenção do modelo Sugere o uso de conhecimentos prévios	RP4 - Identifica conteúdos ou procedimentos que podem ser úteis para resolver o problema.
	Tento entender o que a solução de um exercício exige (YILDIRIM, 2011).	Discute sobre as demandas do processo de resolução Discute a representação mental da situação	RP5 - Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.
	Sistematiza os dados coletados, tendo em vista a elaboração dos resultados da atividade experimental (ROSA, 2017).	Estrutura informações ou faz um tratamento dos dados usados na resolução matemática Elabora simplificações	RP6 - Declara simplificar e organizar dos dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.

	Estou ciente da necessidade de planejar meu curso de ação com antecedência para resolver um exercício (YILDIRIM, 2011). Tem clareza de por onde começar a atividade e do caminho a ser trilhado para chegar ao objetivo da atividade (ROSA, 2017).	Propõem que a realização da atividade siga uma ordem/sequência	RP7 - Estabelece os passos a serem seguidos na condução da atividade.
	Tento dividir o estudo em etapas menores (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Resolve o problema por partes, que irão compor toda a resolução final Fraciona a resolução para visualizar as etapas que deve desenvolver	RP8 - Admite dividir o processo de resolução do problema em sub-processos.
REGULAÇÃO DA COGNIÇÃO	**Construção de indicadores de MONITORAMENTO identificados nas ações dos alunos**		
	Item de referência	**Possíveis ações dos alunos em modelagem**	**Aspecto indicador**
	Apresenta clareza do conhecimento adquirido com a realização da atividade experimental e dos meios que o levaram a chegar a este conhecimento (ROSA, 2017). Eu me pego analisando a utilidade das estratégias enquanto estudo (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Defende a utilidade do modelo matemático construído Comunica a validade do modelo relativamente ao que proporciona saber sobre a situação real	RM1 - Reconhece a finalidade do modelo matemático para o estudo da situação da realidade.
	Participa da formulação de hipóteses, retomando seus conhecimentos e confrontando-os com as colocações de seus colegas (ROSA, 2017).	Sugere a formulação de hipóteses Sugere a realização de simplificações Indica o que simplificar Diferencia hipótese de simplificação	RM2 - Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.
	Acompanho meu progresso e, se necessário, mudo meu método de resolução (YILDIRIM, 2011). Mudo de estratégia quando não consigo entender (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Tece considerações sobre as sugestões e procedimentos do grupo Empreende discussões na busca por esclarecer dúvidas sobre o processo de resolução adotado pelo grupo Decide recomeçar o processo de desenvolvimento da atividade ou de resolução do problema Redireciona a problemática ou a condução da resolução	RM3 - Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece não entender algo ou não consegue prosseguir com a atividade.
	Eu sempre verifico meu trabalho (YILDIRIM, 2011). Eu reviso periodicamente para me ajudar a entender relacionamentos importantes (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Sinaliza reflexões sobre os encaminhamentos, a matemática e o contexto da situação Decide pela continuidade (ou não) da abordagem adotada em diferentes momentos da atividade Realiza nova interpretação do problema durante o processo de resolução	RM4 - Menciona verificações pontuais em vários momentos do desenvolvimento da atividade.

		Solicita que os colegas validem a forma de pensar	
	Eu crio meus próprios exemplos para tornar as informações mais significativas (SCHRAW; DENNISON, 1994). Tento traduzir novas informações em minhas próprias palavras (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Faz uma releitura do contexto (problema) Cria exemplos de situações análogas à estudada, usando dados hipotéticos Usa linguagem coloquial ou gesticulação para explicar seu pensamento	RM5 - Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.
	Se percebo um erro ao trabalhar em um exercício, sempre o corrijo (YILDIRIM, 2011).	Aponta erros na resolução matemática Realiza correções dos erros identificados	RM6 - Identifica erros e declara aplicar uma nova estratégia para corrigi-los.
	Discute com seus colegas a estratégia para realizar a atividade, estabelecendo comparações com outras já efetuadas ou mesmo com as que seus colegas sugerem (ROSA, 2017).	Discute com os colegas ou com o professor Elabora, coletivamente, propostas para a elaboração do modelo Consideram intervenções sugestões da professora para desenvolver a atividade	RM7 - Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram.
REGULAÇÃO DA COGNIÇÃO	**Construção de indicadores de AVALIAÇÃO identificados nas ações dos alunos**		
	Item de referência	**Possíveis ações dos alunos em modelagem**	**Aspecto indicador**
	Eu me pergunto o quão bem eu realizo meus objetivos quando termino (SCHRAW; DENNISON, 1994). Eu sei quanto da solução ainda me resta para completar uma tarefa (YILDIRIM, 2011).	Descarta modelo obtido Reinicia a construção do modelo Discute a validade do resultado obtido Interpreta resultados fornecidos pelo modelo em termos matemáticos	RA1 - Identifica que o modelo construído não é adequado e então investe na construção de um novo modelo.
	Avalia o resultado em termos de possíveis equívocos ou distorções de conhecimento ou operacionais na execução da atividade experimental (ROSA, 2017).	Faz verificações de cálculos e técnicas matemáticas empregadas na resolução Analisa a coerência da matemática utilizada Retoma aspectos matemáticos da situação Acompanha atento o raciocínio dos colegas do grupo	RA2 - Identifica equívocos ou distorções em relação ao conhecimento matemático.
	Retoma o resultado encontrado, identificando o modo executado e se este permitiu atingir o objetivo e verificar as hipóteses inferidas no início do estudo (ROSA, 2017).	Argumenta sobre a validade da resposta obtida Interpretação do resultado matemático como resposta para o problema Valida a resposta em termos das condições da situação problemática Usa simulações e softwares	RA3 - Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema.
	Eu me pergunto se havia uma maneira mais fácil de fazer as coisas depois de terminar uma tarefa (SCHRAW; DENNISON, 1994).	Indica a possibilidade de diferentes abordagens para a resolução do problema Sugere outra forma de conduzir a resolução Recomenda uma nova condução para a investigação	RA4 - Reconhece que haveria outras maneiras de conduzir o desenvolvimento da atividade depois de terminá-la.

Fonte: autora.

Os possíveis procedimentos dos alunos, elencados no Quadro 1, podem variar, de acordo com a intenção dos alunos ou as demandas da atividade, ou mesmo podem emergir outros procedimentos similares que não foram listados no quadro, mas que têm características que permitem encaixá-lo em algum aspecto indicador. O Quadro 1 foi elaborado na intenção de justificar a elaboração de cada item e facilitar a identificação da estratégia metacognitiva, considerando os procedimentos dos alunos.

Entretanto, para tornar o instrumento eficiente para contextos de modelagem matemática, que favorecem a interação e integração entre diferentes sujeitos, a metacognição pode ser tanto individual quanto resultante de atuações do grupo. Partindo dessa assertiva, buscamos delinear um instrumento que privilegia a identificação de estratégias metacognitivas na sua integridade. Respeitando, assim, as manifestações individuais e especificidades de cada aluno, mas também reconhecendo que os diálogos e interações entre os alunos podem propiciar a emergência de estratégias metacognitivas no contexto de grupo colaborativo em modelagem. Ou seja, o instrumento se constitui de uma proposta para superar o paradigma de que a metacognição é única e exclusivamente individual.

No Quadro 2 apresentamos o instrumento obtido a partir desse encaminhamento. Os campos foram identificados com uma escala de forma a registrar a natureza da manifestação das estratégias metacognitivas do aluno assim entendidos: (I) – natureza individual; (C) - natureza colaborativa, ou seja, o grupo atua sobre a manifestação metacognitiva do indivíduo. De modo particular, as estratégias metacognitivas assinaladas como de natureza colaborativa (C), são decorrentes de fontes externas ao indivíduo, seja dos colegas do grupo ou do professor, e informam falhas metacognitivas, como a ausência do comportamento de verificação da atividade, por exemplo, ou fornecendo um feedback para o pensamento de outra pessoa, confirmando ou validando suas afirmações. Esse critério de classificação depende do olhar do professor/pesquisador.

Quadro 2: Indicadores de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática.

Conhecimento da cognição	**Indicadores de conhecimento declarativo identificados nas ações dos alunos**	I	C
	CD1 - Admite seus pontos fortes e pontos fracos relativamente ao que precisa saber para desenvolver a atividade.		
	CD2 - Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.		
	CD3 - Considera diferentes maneiras de resolver o problema identificado na situação da realidade.		
	CD4 - Assume lembrar, organizar ou coletar informações acerca da situação antes de iniciar o desenvolvimento da atividade de modelagem.		
	CD5 - Avalia se seus conhecimentos atendem ao que precisa saber para desenvolver a atividade de modelagem.		
	Indicadores de conhecimento processual identificados nas ações dos alunos	I	C
	CP1 - Menciona utilizar estratégias que funcionaram em atividades de modelagem anteriores.		
	CP2 - Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas e nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.		
	CP3 - Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas na resolução.		
	CP4 – Reconhece quando não compreende alguma informação ou conceito, reporta-se aos colegas, ao professor ou realiza pesquisas a respeito.		
	Indicadores de conhecimento condicional identificados nas ações dos alunos	I	C
	CC1 - Reconhece que usa diferentes estratégias para definir seus procedimentos de acordo com as etapas do desenvolvimento da atividade de modelagem.		
	CC2 - Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos.		
	CC3 - Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução do problema identificado na situação da realidade.		
	CC4 - Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.		
	CC5 - Busca potencializar seus conhecimentos e competências, frente às suas dificuldades.		
Regulação da cognição	**Indicadores de planejamento identificados nas ações dos alunos**	I	C
	RP1 - Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade.		
	RP2 - Define os objetivos da atividade antes de iniciar seu desenvolvimento.		
	RP3 - Planeja a resolução do problema levando em consideração diferentes possibilidades.		
	RP4 - Identifica conteúdos ou procedimentos que podem ser úteis para resolver o problema.		
	RP5 - Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.		
	RP6 – Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.		
	RP7 - Estabelece os passos a serem seguidos na condução da atividade.		
	RP8 - Admite dividir o processo de resolução do problema em sub-processos.		
	Indicadores de monitoramento identificados nas ações dos alunos	I	C
	RM1 - Reconhece a finalidade do modelo matemático para o estudo da situação da realidade.		
	RM2 - Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.		
	RM3 - Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece que não entende algo ou quando não consegue prosseguir com a atividade.		
	RM4 - Menciona verificações pontuais em vários momentos do desenvolvimento da atividade.		
	RM5 - Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.		
	RM6 - Identifica erros e aplica uma nova estratégia para corrigi-los.		
	RM7 - Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram.		
	Indicadores de avaliação identificados nas ações dos alunos	I	C
	RA1 - Identifica que o modelo construído não é adequado e então investe na construção de um novo modelo.		
	RA2 - Identifica equívocos ou distorções em relação ao conhecimento matemático.		
	RA3 - Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema.		
	RA4 - Reconhece que haveriam outras maneiras de conduzir o desenvolvimento da atividade depois de concluir seu trabalho.		

Fonte: autora.

A construção do instrumento de identificação de estratégias metacognitivas em modelagem matemática, considera ainda que as estratégias são, algumas vezes, usadas conscientemente, mas outras vezes são usadas inconscientemente ou automaticamente, sem que os alunos estejam cientes de usá-las, conforme sugere Yildirim (2011). Nesse caso é o olhar do pesquisador que será responsável por interpretações de estratégias subjacentes na atividade. Por outro lado, o pesquisador só pode avaliar aquelas estratégias que são verbalizadas ou mostradas em ações relacionadas.

Sobre isso, Rosa (2017) pontua que instrumentos usados para detectar indicativos da presença do pensamento metacognitivo nos comportamentos externados pelos alunos por expressões corporais, verbais e/ou escritas, podem levar a situações em que estes identificados como metacognitivos, por vezes, não o são, podendo ser apenas reflexo de comportamentos decorrentes de outras experiências que não as metacognitivas. Outro aspecto elucidado por essa autora, diz respeito aos comportamentos intrapessoais e sem caracterização exterior quando os alunos estão evocando pensamento de natureza metacognitiva, mas não denotam isso nas suas expressões, ficando fora do alcance da ficha elaborada.

No Capítulo 6 identificamos estratégias metacognitivas durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e usamos o instrumento para essa identificação.

6. ESTRATÉGIAS METACOGNITIVAS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: a pesquisa empírica

Neste capítulo apresentamos as seis atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática que, realizando um trabalho colaborativo e organizados em três grupos (G1, G2 e G3), desenvolveram atividades com as temáticas conforme indica o Quadro 3.

A análise empreendida sobre as práticas discursivas dos alunos nos grupos e individualmente, identificando as estratégias metacognitivas dos alunos e seus desdobramentos para as atividades de modelagem, expressa elementos que indicam a manifestação dessas estratégias mediante árvores de associação de ideias e linhas narrativas apontadas em Spink (2000).

O processo analítico se dirige ao grupo em cada uma das duas atividades que desenvolveu. Isso pode ampliar as discussões sobre como um mesmo grupo se comporta metacognitivamente em diferentes atividades e, também, como esse tipo de comportamento se dá em diferentes grupos de alunos. As estratégias metacognitivas são então associadas aos indicadores compreendidos no instrumento construído no Capítulo 5.

No Quadro 3 constam as atividades de cada grupo, bem como o momento de familiarização dos alunos com a modelagem matemática a que se referem.

Quadro 3: Atividades de modelagem matemática analisadas

Grupo e alunos	Temática da atividade	Momento de familiarização dos alunos com a modelagem matemática
Grupo 1 (A_1, B_1, C_1, D_1)	Poupança	2º momento
	Vacinação em Arapongas	3º momento
Grupo 2 (E_2, F_2, H_2 e I_2)	Poupança	2º momento
	Impostos em Londrina	3º momento
Grupo 3 (J_3, K_3 e L_3)	Jogo de Poker	1º momento
	Desvalorização de um veículo	3º momento

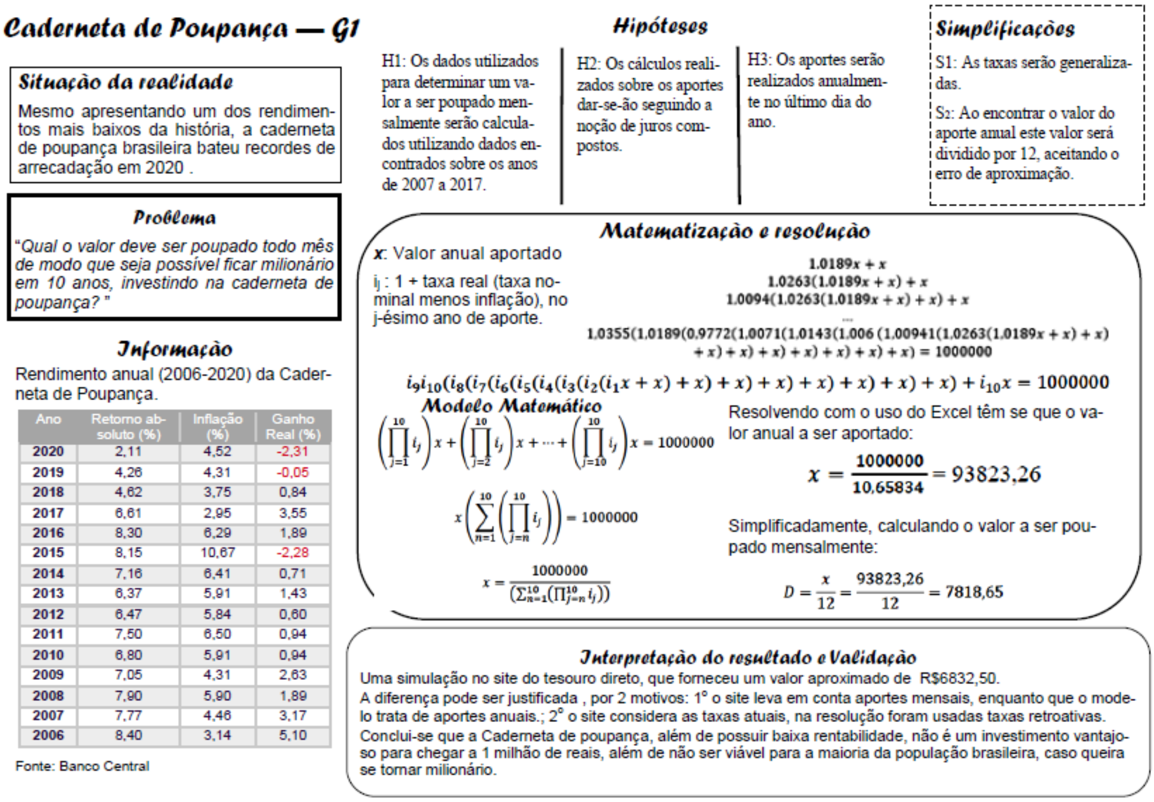
Fonte: autora.

6.1.1 Estratégias metacognitivas nas atividades desenvolvidas pelo Grupo 1

6.1.1.1 Atividade com a temática caderneta de poupança

A atividade de modelagem com a temática "Poupança" (AP), é relativa ao segundo momento de familiarização dos alunos com modelagem matemática. O problema "Qual valor deve ser poupado todo mês de modo que seja possível ficar milionário em 10 anos, investindo na caderneta de poupança?", foi proposto pela professora/pesquisadora e sua resolução aconteceu durante quatro aulas síncronas e duas assíncronas. Nesta seção trazemos para discussão o desenvolvimento realizado pelo Grupo 1 (G1) constituído por quatro alunos, a que chamamos A_1, B_1, C_1 e D_1. As aulas síncronas foram gravadas com o recurso do Google Meet, as quais, junto com o relatório da atividade e os questionários respondidos pelos alunos (Anexo 2), forneceram os dados que compõem nossa análise. A Figura 6 apresenta uma síntese da atividade desenvolvida pelo Grupo 1.

Figura 6: Síntese da resolução da atividade "Poupança" apresentada pelo Grupo 1



Fonte: autora.

No desenvolvimento da atividade os alunos mobilizaram estratégias metacognitivas que provocaram diversos desdobramentos para a atividade. Na Tabela 3, por exemplo, explanamos indícios de estratégias metacognitivas que podem ser evidenciadas em discussões iniciais do grupo para compreender o problema proposto.

Tabela 3: Indícios de estratégias metacognitivas na compreensão do problema (AP-G1)

Indicativo da estratégia	Evidência
(I) **RP3-** Planeja a resolução do problema levando em consideração diferentes possibilidades.	*A_1:* Eu estava pensando o seguinte: inserir no Excel que faz a conta para nós.

(I) **RP2-** Define os objetivos da atividade antes de iniciar seu desenvolvimento	A_1: Precisamos entender primeiro, depois que olharmos a taxa de inflação que usaremos e pensar, daqui 10 anos, qual valor equivalerá 1 milhão hoje. Com esse valor temos que pensar o seguinte: quanto a gente tem que investir para chegar nesse valor?
(I) **RM5-** Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.	
(I) **CD5-** Avalia se seus conhecimentos atendem ao que precisa saber para desenvolver a atividade de modelagem.	A_1: Isso aí é fácil, só aplicar a taxa de juro composto.
(I) **RP5-** Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação	A_1: Mas tem um problema. Por exemplo: faremos um aporte mensal. Certo? Se fizer um aporte mensal, o primeiro mês que a gente aportar, vai sofrer juro composto por 120 meses. O aporte no segundo mês, vai sofrer juro composto por 119 meses, o último aporte vai sofrer juro composto por 1 mês, e isso vai dificultar a conta.
(I) **RM4-** Menciona verificações pontuais em vários momentos do desenvolvimento da atividade.	C_1: É verdade! Bem pensado.

Fonte: autora.

A estratégia de planejamento, indicada por RP3, neste contexto, mostra que, mesmo sendo uma discussão inicial sobre o problema, o aluno se adianta ao uso de recursos facilitadores para a resolução matemática, no caso o Excel. As implicações da alocação desse recurso, parece ser, em nível local, uma forma de representação mental de encaminhamentos possíveis, que mais adiante, colaboram para a obtenção do resultado matemático que responde à situação. Na Figura 7 é possível observar os cálculos realizados pelos alunos utilizando o recurso Excel.

Figura 7: Cálculos matemáticos realizados pelos alunos (AP-G1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	1,0355	1,0355	1,0355	1,0355	1,0355	1,0355	1,0355	1,0355	1,0355	1,0355		
2		1,0189	1,0189	1,0189	1,0189	1,0189	1,0189	1,0189	1,0189	1,0189		
3			0,9772	0,9772	0,9772	0,9772	0,9772	0,9772	0,9772	0,9772		
4				1,0071	1,0071	1,0071	1,0071	1,0071	1,0071	1,0071		
5					1,0143	1,0143	1,0143	1,0143	1,0143	1,0143		
6						1,006	1,006	1,006	1,006	1,006		
7							1,0094	1,0094	1,0094	1,0094		
8								1,0094	1,0094	1,0094		
9									1,0263	1,0263		
10										1,0189		
11												
12	1,0355	1,055771	1,031015	1,038336	1,053184	1,059503	1,069462	1,079515	1,107906	1,128846		10,65834
13												

Fonte: gravação da aula de desenvolvimento da atividade.

Quando o aluno reconhece a necessidade de compreender aspectos relacionados ao que o problema requer, ao mesmo tempo que enuncia o problema com suas palavras, sinaliza reconhecer informações e variáveis matemáticas que interferem no desenvolvimento da atividade. Ao sugerir que é preciso "pensar" e "entender", o aluno parece ter consciência das estratégias de planejamento (RP2) e monitoramento (RM5) de forma simultânea. Essas estratégias podem ser responsáveis por levar o grupo a representar mentalmente parte da situação e propor o uso das variáveis de taxa de inflação e tempo (10 anos), os quais permeiam todo o desenvolvimento da atividade.

A estratégia de conhecimento declarativo (CD5), emerge quando o aluno identifica o conhecimento matemático necessário para resolver a atividade (juros compostos) e, ao afirmar que "é fácil", sugere ter ciência e propriedade sobre o conteúdo, influenciando assim os alunos a definir a hipótese 2 (H2).

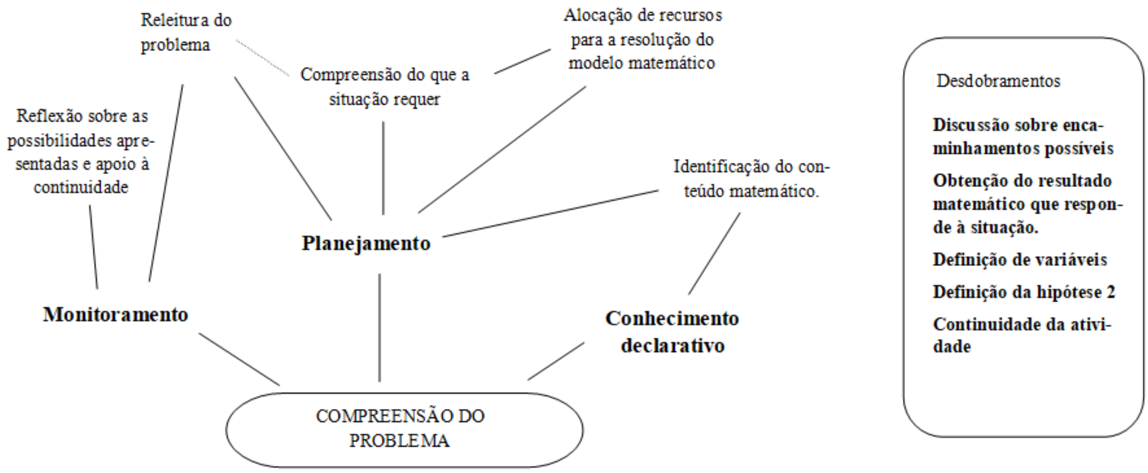
H2: Os cálculos realizados sobre os aportes dar-se-ão seguindo a noção de juros compostos. [Relatório da atividade (AP-G1)]

Associa-se à essa estratégia de conhecimento declarativo a estratégia de planejamento, conforme indício RP5, quando o aluno passa a caracterizar uma possível dificuldade de realizar "a conta" com base nos dados que compõem a resolução matemática do problema. Ou seja, quando o aluno identifica o conteúdo matemático de juros compostos, ele torna-se capaz de refletir sobre como matematizar a situação, identificando e delimitando variáveis (tempo em meses e valor de aporte).

Embora o aluno A_1 coordenasse a maioria das estratégias do grupo, quando C_1 apresenta sua afirmação "É verdade! Bem pensado", sinaliza a estratégia de monitoramento, sinalizada por RM4, tendo em vista que está havendo reflexão sobre as ações do colega. Essa estratégia colabora para a continuidade do raciocínio e leva a prosseguir com a atividade. Nessa discussão inicial, as estratégias são exclusivamente de natureza individual, em partes isso pode estar relacionado ao fato de que o aluno A_1 concentrou as argumentações relativas às possibilidades de resolução do problema.

Sobre o uso de estratégias metacognitivas nas discussões iniciais dos alunos conduziu o desdobramento conforme sugere a árvore de associação de ideias da Figura 8.

Figura 8: Estratégias associadas à compreensão do problema (AP-G1)



Fonte: autora.

Na Tabela 4 apresentamos as evidências de estratégias metacognitivas relativas às discussões sobre definição de hipóteses e a matematização da situação.

Tabela 4: Indícios de estratégias metacognitivas em discussões sobre hipóteses e matematização (AP-G1)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(I) **RM2-** Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações (I) **RM5-** Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.	A_1: Outra coisa: temos que pensar nas hipóteses. O valor que a gente vai aportar será sempre o mesmo? E se for, estamos falando do valor nominal ou do valor real? Por exemplo: eu vou aportar sempre mil reais ou daqui a 9 anos eu vou aportar mil reais corrigido a inflação? Isso influencia também. O aporte vai ser mensal? Se ele for mensal, complica. Se ele for anual é um pouco mais tranquilo, porque dá trabalho de fazer de um por um, mas são só 10, o outro são 120. C_1: Melhor tentarmos fazer anual, para facilitar um pouco.
(I) **CD5-** Avalia se seus conhecimentos atendem ao que precisa saber para desenvolver a atividade de modelagem.	A_1: Estou pensando na conta aqui, dá para colocar esse valor em evidência. Difícil vai ser somar esses juros compostos. Se for mesma taxa...
(C) **RP1-** Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade.	C_1: Então o que precisamos definir primeiro? São as taxas? *A1:* Primeiro precisamos definir a taxa que vamos trabalhar, pensar num comportamento dessas taxas e tentar prever elas em 10 anos. Ou adotamos uma mesma taxa - sei lá qual - para 10 anos? Nesse caso, vamos adotar qual? Uma média dos últimos anos? Ou pegamos desse ano, do ano passado? Precisamos ter essas hipóteses primeiro.
(I) **CD4-** Assume lembrar, organizar ou coletar informações acerca da situação antes de iniciar o desenvolvimento da atividade.	A_1: *P*recisamos pesquisar como se comporta o juro da poupança. Se eu não me engano, acompanha a taxa Selic. A Selic depende basicamente de medidas governamentais, mas dá para ter uma previsão de como se comporta essa taxa de juros e por consequência os juros da poupança. Porque as duas taxas que vão influenciar na nossa conta são a inflação e a taxa de juros. Como faremos? C_1: Sem ser atrelado a Selic, porque isso vai dar mais trabalho.

Fonte: autora.

A necessidade de definir hipóteses (RM2) emerge de perguntas que um dos alunos (A_1) faz perante o grupo. O aluno se certifica de que as hipóteses determinam os encaminhamentos na atividade (RM5). A integração das estratégias (RM2 e RM5), nesse caso, viabiliza a definição da hipótese 3 (H3):

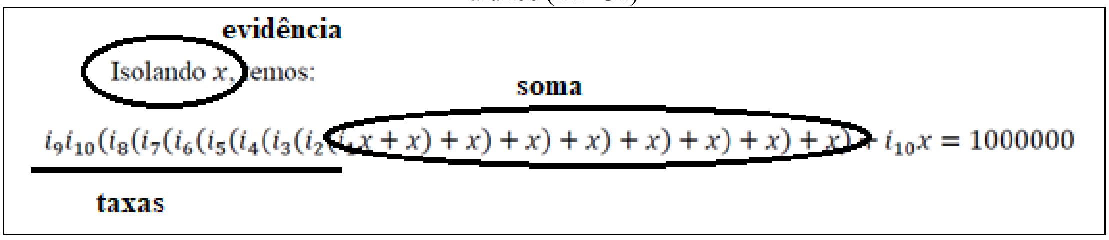
H3: Os aportes serão realizados anualmente, no último dia do ano [relatório dos alunos (AP-G1)].

Há um consenso entre os alunos com relação à formulação das hipóteses e em que se fundamenta essa formulação, conforme indica a resposta dos alunos a uma das questões respondida por eles (Anexo 2).

Assinale uma alternativa que representa a principal estratégia empregada pelo seu grupo para a formulação de hipóteses:
[A_1, B_1, C_1, D_1]- Levando em consideração as informações sobre o tema [Anexo 2]

O aluno A_1 também mobiliza conhecimentos necessários, seja acerca de procedimentos (evidenciar, somar) ou conceitos matemáticos (juros, taxas) sobre os quais ele está "pensando" e que fomentam parte da construção do modelo matemático, conforme indica a Figura 9. Assim, há indicativo que a estratégia metacognitiva de conhecimento declarativo (CD5) orienta as ações desse aluno.

Figura 9: Procedimento matemático utilizado pelos alunos em decorrência das estratégias utilizadas pelos alunos (AP-G1)



Fonte: relatório dos alunos.

Já o aluno C_1 faz perguntas no grupo que conduzem à matematização da situação. De fato, o aluno A_1, em sua resposta sugere que é necessário "pensar num comportamento dessas taxas e tentar prevê-las em 10 anos" (sic). A estratégia metacognitiva (RP1) leva o grupo a grupo pensar sobre qual matemática usar para resolver o problema e como usá-la, sendo isso decisivo para a construção do modelo em instante posterior.

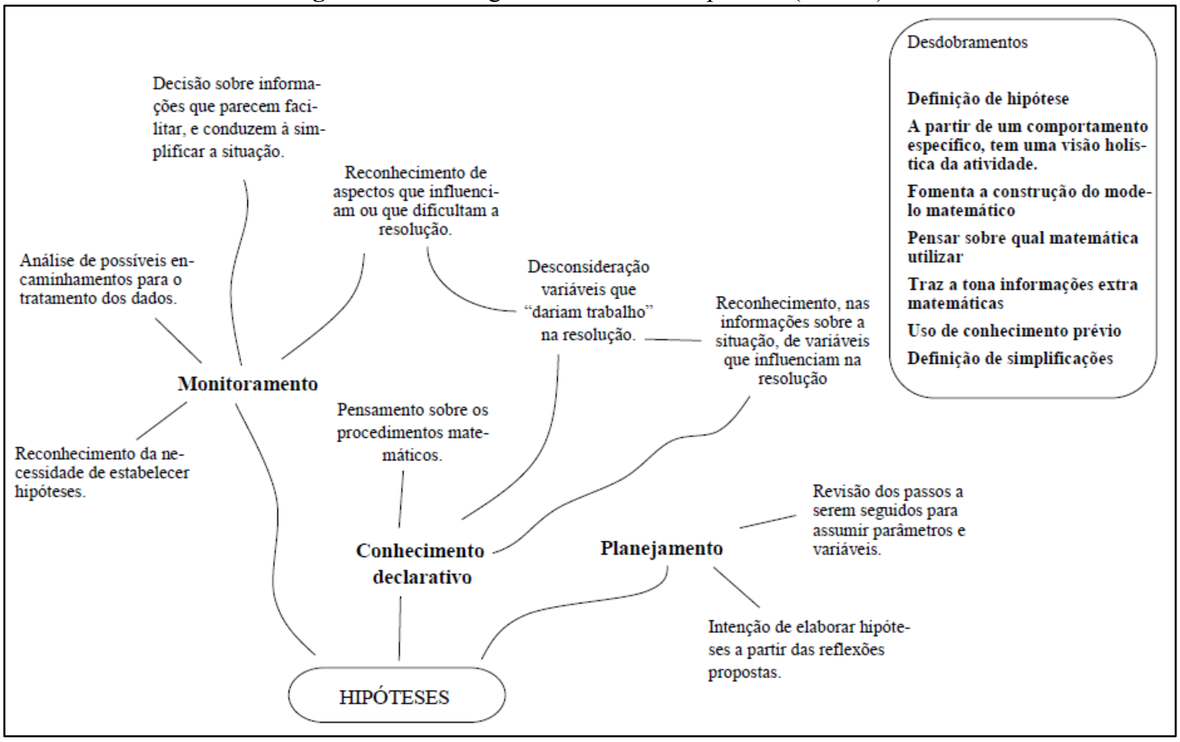
A estratégia de conhecimento declarativo, sob indício CD4, manifestada na interação entre A_1 e C_1 na Tabela 4 tem conotação de lembrar informações extramatemáticas sobre a situação, o que sinaliza que os alunos já tinham conhecimento prévio acerca da situação. Entretanto, o grupo opta por uma simplificação (não usar a taxa Selic) que é também justificada pelo grupo em resposta a uma questão do questionário (Anexo 2).

A opção por não utilizar essa informação conduz à uma simplificação aceitável para o tema, pois, segundo A_1 os fatores que têm maior influência são as taxas de inflação e de juros. Para corroborar essa interpretação, podemos observar como os alunos entendem as simplificações propostas a partir das respostas do grupo ao questionário.

Para realizar a simplificação dos dados, o grupo:
[A_1, B_1, C_1]- Fez um tratamento e seleção dos dados relevantes para a resolução do problema.
[D_1] - Escolheu os dados que conhecia e que sabia como manipular. [Anexo 2]

Em termos gerais, as estratégias metacognitivas mobilizadas e que têm relação com a formulação de hipóteses estão sistematizadas na árvore de associação de ideias da Figura 10.

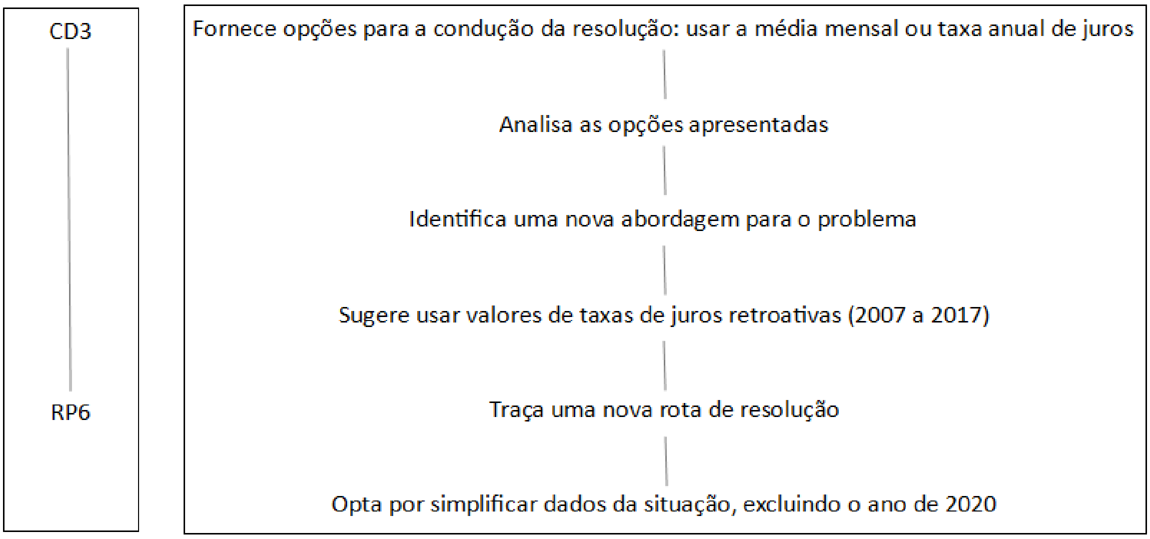
Figura 10: Estratégias associadas às hipóteses (AP-G1)



Fonte: a autora

A linha narrativa (Figura 11) sinaliza como o grupo organiza as informações para o desenvolvimento da atividade.

Figura 11: Linha narrativa da organização das informações AP-G1



Fonte: a autora

Os excertos da discussão que levaram o grupo a pensar sobre as informações, bem como os indicadores de estratégias identificadas nesse contexto, são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5: Indícios de estratégias metacognitivas para o uso das informações (AP-G1)

Indicativo da estratégia	Evidência
(C) **CD3-** Considera diferentes maneiras de resolver o problema identificado na situação da realidade.	A_1: Vocês acham que precisamos pegar a taxa atual ou fazemos uma média dos últimos anos? C_1: A média eu acho muito injusto. A_1: Sim é injusta! Mas a atual talvez seja mais injusta. B_1: Mas no problema não fala o ano que começa nem o ano que termina. Nem quando eu faço a primeira aplicação e nem quando retira, não é? A_1: Não, não fala. B_1: Então se fizermos por ano, variando essa taxa, poderíamos considerar alguém que começou a aplicar lá em 2007 e resgatou em 2017. Aí eu tenho todas as taxas.
(C) **RP6-** Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.	A_1: Usando essa ideia podemos começar em 2011 e resgatar em 2021. Assim, solucionamos grande parte dos nossos problemas. Porque aí vai ser só fazer continha. Se vamos seguir essa linha precisamos fazer uma coleta de dados, e nesses 10 anos, independente do período que vamos definir, encontrar em cada ano quais foram essas taxas. B_1: Eu não queria pegar 2020, porque é um ano atípico. A_1: Sem falar que o valor negativo é complicado. Os últimos anos aí ainda estão positivos? O ganho real? Então dá para fazer de 08 a 18.

Fonte: autora.

As estratégias identificadas no diálogo apresentado na Tabela 5 têm natureza colaborativa, pois a interação entre os alunos parece provocar a ativação de tais estratégias.

O diálogo entre A_1, B_1 e C_1 (linha 2 da Tabela 5) denota que os alunos já possuem conhecimento sobre média e, em certo ponto, visualizam como ela agiria na situação, posto que são capazes de argumentar seu julgamento sobre os valores referidos como “injustos”. Essa discussão leva o aluno B_1 a retomar o problema proposto, o que suscita no grupo uma nova forma de abordagem, quando eles interpretam o problema a partir de uma nova perspectiva: o cálculo referente a valores retroativos/descritivos. A estratégia de conhecimento declarativo (CD3), neste contexto, parece elucidar características do problema a ser investigado a partir de uma nova abordagem. Trata-se de um modo de ver a situação, uma interpretação, que permeia a resolução matemática da situação, conduzindo à um modelo descritivo, e desencadeia a hipótese 1 (H1).

H1: Os dados utilizados para determinar um valor a ser poupado mensalmente serão calculados utilizando dados encontrados sobre os anos de 2007 a 2017. [Relatório dos alunos (AP-G1)]

Quando os alunos deliberam sobre o período que será adotado para realizar os cálculos e sobre a necessidade de obter dados, o uso da estratégia de planejamento RP6 justifica suas escolhas baseados em considerações matemáticas. Assim, essa estratégia é responsável pela adoção dos valores, referentes a taxas de ganho real utilizadas, que constam no Quadro 4, e são utilizadas na resolução matemática.

Quadro 4: Rendimento anual (2006-2020) da Caderneta de Poupança (AP-G1)

Ano	Retorno absoluto (%)	Inflação (%)	Ganho Real (%)
2020	2,11	4,52	-2,31
2019	4,26	4,31	-0,05
2018	4,62	3,75	0,84
2017	6,61	2,95	3,55
2016	8,30	6,29	1,89
2015	8,15	10,67	-2,28
2014	7,16	6,41	0,71
2013	6,37	5,91	1,43
2012	6,47	5,84	0,60
2011	7,50	6,50	0,94
2010	6,80	5,91	0,94
2009	7,05	4,31	2,63
2008	7,90	5,90	1,89
2007	7,77	4,46	3,17
2006	8,40	3,14	5,10

Fonte: Relatório dos alunos (Banco Central[12]).

O Quadro 4 foi a principal fonte de dados matemáticos para o desenvolvimento da atividade e levou o grupo a identificar as taxas para o período de 2008 até 2018. Sobre isso, houve um consenso das respostas dos alunos quando questionados sobre a origem das informações.

Assinale, dentre as opções, uma alternativa que melhor representa informações acerca dos dados utilizados pelo seu grupo na resolução do problema:

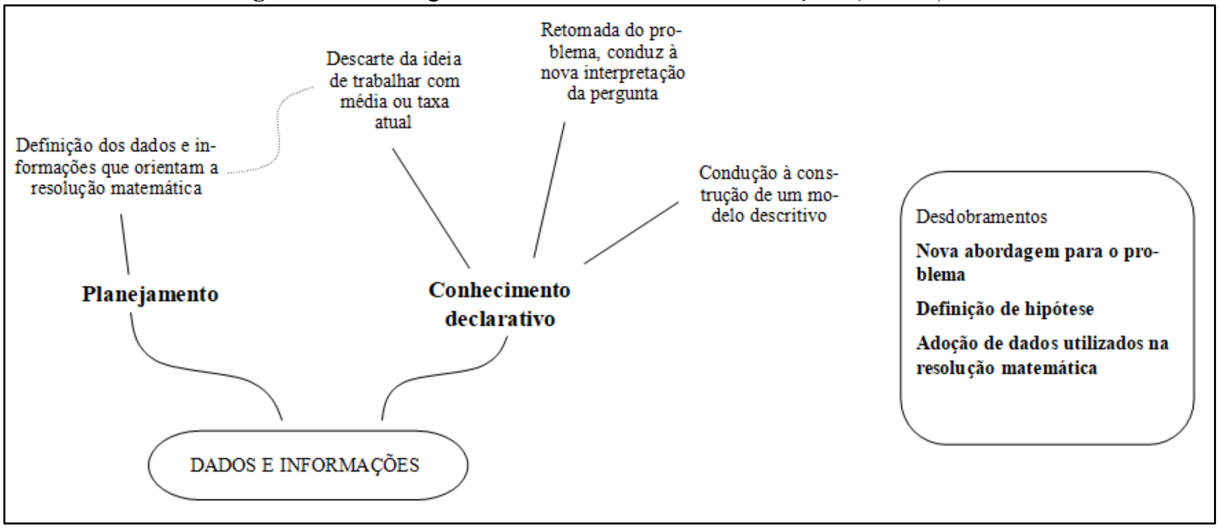
---

[12] Disponível: https://www4.bcb.gov.br/pec/poupanca/poupanca.asp?frame=1

[A_1, B_1, C_1, D_1]- Precisamos pesquisar os dados em fontes que julgamos confiáveis. [questionário - Anexo 2]

A árvore de associação de ideias da Figura 12 indica as estratégias metacognitivas utilizadas pelos alunos para fazer as escolhas no uso das informações sobre a situação, na resolução do problema.

Figura 12: Estratégias associadas ao uso das informações (AP-G1)



Fonte: a autora

Os indícios de estratégias metacognitivas relativas à resolução do problema estão na Tabela 6.

Tabela 6: Indícios de estratégias metacognitivas relativas à resolução do problema (AP-G1)

Indicativo da estratégia	Evidência
(C) **RP8-** Admite dividir o processo de resolução do problema em sub-processos. (C) **RM4 –** Menciona verificações pontuais em vários momentos do desenvolvimento da atividade.	*A1:* Vamos pensar o seguinte: a pergunta é quanto que temos que aportar por mês ou quanto que temos que aportar no total? *B1:* Sei não. Espera. *A1:* Fazemos a conta e a pergunta no final adaptamos a resposta. *B1:* Achei. Qual valor deve ser poupado todo mês de modo que seja possível ficar milionário em 10 anos investindo na poupança? *A1:* Não tem problema, se faremos aporte anual, consideramos que essa pessoa está guardando dinheiro por 12 meses. Dá para fazer para 120 meses, mas difícil é entender.

Fonte: autora.

A resolução do problema é encaminhada pelos alunos de modo que articulam hipóteses, dados e matematização. Assim, ao sugerir que "primeiro faz a conta" e "depois adaptamos a resposta" os alunos buscam meios de traçar uma resolução com base em suas hipóteses. Isso mostra que eles usaram a estratégia de planejamento (RP8) em decorrência da estratégia de monitoramento (RM4), cuja consequência foi decisiva para a obtenção da resposta matemática para o problema, conforme sugere a Figura 13. Considerar que os aportes seriam anuais, traria um resultado matemático específico, diferente daquele caso os aportes fossem realizados mensalmente.

Figura 13: Resolução apresentada pelos alunos em decorrência das estratégias usadas pelos alunos (AP-G1)

Aplicando assim o modelo obtido aos anos indicados anteriormente, teremos que

$$x = \frac{1000000}{10{,}65834} = 93823{,}26$$

logo, a quantidade que deverá ser poupada por mês é dada por

$$D = \frac{x}{12} = \frac{93823{,}26}{12} = 7818{,}65$$

Fonte: relatório dos alunos.

A opção de supor que o dinheiro será "poupado" por 12 meses, mas os aportes serão anuais, indica, ainda, que o aluno reconhece que há possibilidade de fazer mensal, mas opta por uma simplificação.

Simplificação: Ao encontrar o valor do aporte anual este valor será dividido por 12, aceitando o erro de aproximação como algo muito pequeno perto de uma resposta fidedigna ao problema. [Relatório dos alunos (AP-G1)]

Essa simplificação, por sua vez, acarreta a resolução baseada nesses dados, conforme indicam os diálogos da Tabela 7.

Tabela 7: Indícios de estratégias metacognitivas durante a resolução (AP-G1)

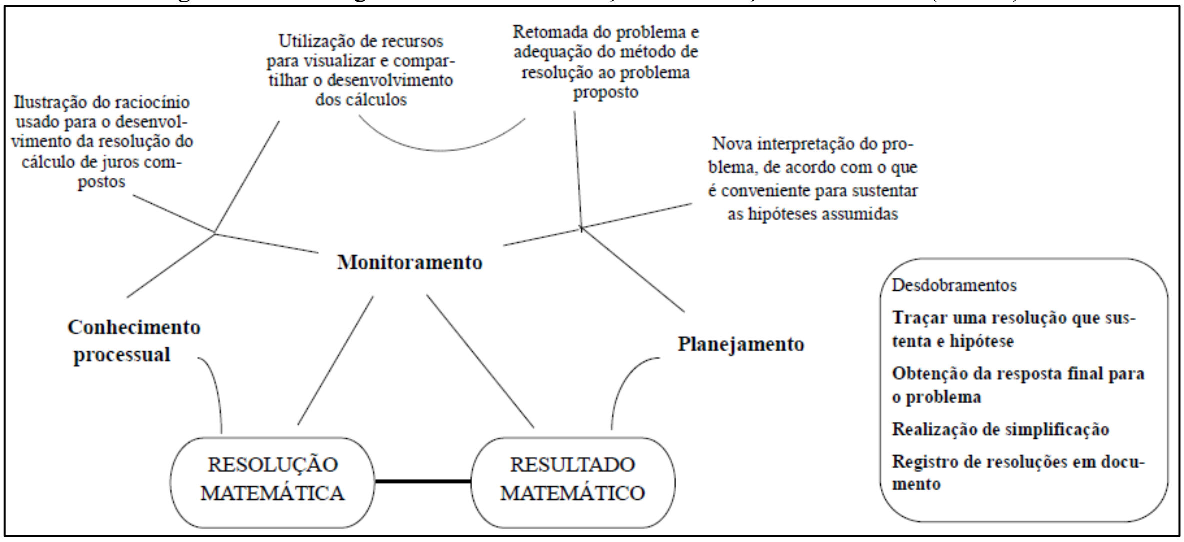
Indicativo da estratégia	Evidência
(I) **CP3-** Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas na resolução.	A_1: Olha... aporte em 2008 (pausa)... começo de 2009. O que você aportou em 2008 vezes a taxa real. Está em porcentagem, então dá 1,0189 mais o x. Eu vou fazer no Word aqui e compartilho com vocês. Acho que eu entendi a lógica. Vai ser um valor x que sofre... as 10 taxas. Tem que ser o mesmo valor que sofre as 9 taxas, depois 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Vamos somar todos esses valores e tem que dar 1 milhão. Coloca em evidência esse valor que é sempre o mesmo. Então o que estamos fazendo na verdade é aplicando a taxa. Pensando em voz alta, está fazendo sentido o que eu estou falando? *D_1:* Até agora sim. *A_1:* Eu vou ter que escrever isso, porque consigo enxergar que alguma coisa vai em evidência, mas não consigo pensar o que vai entre parênteses.
(C) **RM4 -** Menciona verificações pontuais em vários momentos do desenvolvimento da atividade.	

Fonte: autora.

O aluno A_1 enuncia o processo de construção da resolução matemática, descrevendo as variáveis, informações e métodos utilizados, o que parece indicar um ponto de partida para esboçar um raciocínio, um caminho a seguir na busca pela solução do problema. Nesse caso podem haver duas intenções subjacentes na fala do aluno: a primeira delas é a resolução em si, pois, a medida em que sabe explicar como os conhecimentos vão compondo uma solução para o problema, a resolução vai se materializando, o que revela o uso da estratégia de conhecimento processual, indicada por CP3; a segunda é comunicar a forma como pensa a resolução, disponibilizando seus pensamentos para serem avaliados e confirmados, por si e pelos colegas que demonstram acompanhar seu raciocínio (D_1), manifestação da estratégia de monitoramento RM4. Assim, parece haver uma interlocução entre as estratégias de conhecimento processual e de monitoramento (CP3 e RM4), mesmo que de forma implícita, nas intenções do aluno. Essas estratégias orientam o registro da resolução, usando um documento Word e a opção de compartilhar tela na sala do Google Meet, possibilitando que a visualização ajude o aluno a "pensar o que vai entre parênteses".

A árvore de associação de ideias da Figura 14 indica as estratégias metacognitivas mobilizadas nos diálogos presentes na Tabela 6 e na Tabela 7 relativas à resolução matemática e obtenção do resultado matemático.

Figura 14: Estratégias associadas à resolução e à obtenção do resultado (AP-G1)



Fonte: a autora

Enxergar o processo de resolução (Figura 13) trouxe à tona a intervenção do aluno B_1, ao perceber uma inconsistência, conforme sugere a Tabela 8.

Tabela 8: Indícios de estratégias metacognitivas no ajuste de erros (AP-G1)

Indicativo da estratégia	Evidência
(I) **CC3-** Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução identificado na situação problema	*A_1:* Então em 2008 ele só tem o dinheiro do aporte dele, que é x, certo? Ele vai ficar 2008 inteiro aportando esse valor. Então em 2009 ele vai ter o que? Ele vai ter 1,0189, porque é 1,89% a taxa real, certo? Vezes x. Isso é o que o dinheiro dele virou. Mais um novo aporte. Em 2010 esse dinheiro que ele tinha em 2009 ele sofreu 2,63%, então é 1,0263 que multiplica 1,0189x+x. Entendido? Mais x. *B_1:* Me responde uma coisa. O primeiro aporte é de 2008, você tá considerando que ele aplicou no final do ano? *A_1:* No começo do ano. *B_1:* No começo do ano?
(C) **RM7-** Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram.	

(C) **RM6-** Identifica erros e aplica uma nova estratégia para corrigi-los.	*A_1:* Ah... tem que ser no final. Se é no final do ano, então eu tenho que trocar a taxa. Porque essa 1,89 é de 2008. Então é só eu mudar aqui, olha. Aqui vai ser 2007. *B_1:* Entendi agora. *A_1:* Porque daí eu aportei no fim de 2007, tipo dia 31 de dezembro. Aí o 2008 ficou rodando o ano inteiro com aquele juro lá.
(C) **RM3-** Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece não entender algo ou não consegue prosseguir com a atividade.	*B_1:* E deu 1,0 vezes x. Olha, por exemplo, 2007 você colocou no final. Certo! *A_1:* Então 2010 vai rodar a... espera aí... agora eu me perdi. *C_1:* A real deu 0,94. 0,94 abre parênteses... *A_1:* Ah tá... entendi. Eu estava meio perdido na data. É 1,0094 e tudo isso *[copia a expressão do ano anterior]* mais x. Então já deu para entender como que vai ficar essa estrutura. Tipo, vamos entrar nas reticências. Vai funcionar 2008 a 2018... não espera aí, me confundi! 2008 rendeu o ano inteiro, 2009, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. *[conta nos dedos]*. Então 31 de dezembro de 2017, quanto que o cara tem que ter? Então é 2017 que conta. Certo! Aí você põe, vai ser a taxa de 2017: 1,0355 e multiplica... agora vamos lá. Taxa anterior né 1,0189.

Fonte: autora.

O aluno A_1 narra o desenvolvimento da resolução, explicando os procedimentos adotados e tecendo perguntas ("certo?", "entendido?") que possibilitam aos demais alunos do grupo acompanhar sua realização. Isso possibilita que o aluno B_1 realize uma intervenção questionando os procedimentos adotados pelo colega. Logo, há um indicativo de que, ao utilizar-se da estratégia de conhecimento condicional CC3, o aluno A_1 proporciona o engajamento dos demais membros do grupo, sinalizando a estratégia de monitoramento (RM7). Ou seja, uma estratégia favorece a manifestação da outra e ambas fomentam a necessidade de rever a condução do processo de resolução.

A estratégia de monitoramento, RM6, observada na interação entre os alunos, e entre eles e a resolução, parece repercutir em dois aspectos: na atividade e no sujeito. Na atividade conduz ao ajuste do erro, e no sujeito um novo olhar para a matemática utilizada ("entendi agora").

Quando a discussão se estende, as afirmações do aluno A_1 do tipo "eu me perdi" ou "me confundi", sugerem que o aluno precisou agir de forma diferente (copiar a expressão anterior) e exprimir novos recursos (contar nos dedos) para assimilar o que deveria fazer. Isso denota que a estratégia de monitoramento (RM3) pode ter reconduzido a resolução final, conforme ilustra a Figura 15 e leva o aluno a assumir determinada estratégia, conforme a questão respondida por eles.

Quando você não entendeu algo, na resolução da atividade:
[A_1, B_1, C_1, D_1] - pediu ajuda aos colegas do grupo
[A_1, C_1] - recorreu a pesquisas sobre o tema/conteúdo
[A_1] - usou de auto perguntas. [questionário - Anexo 2]

Figura 15: Resolução matemática apresentada pelos alunos (AP-G1)

2008:

$$1{,}0189x + x$$

2009

$$1{,}0263(1{,}0189x + x) + x$$

2010

$$1{,}0094(1{,}0263(1{,}0189x + x) + x) + x$$

...

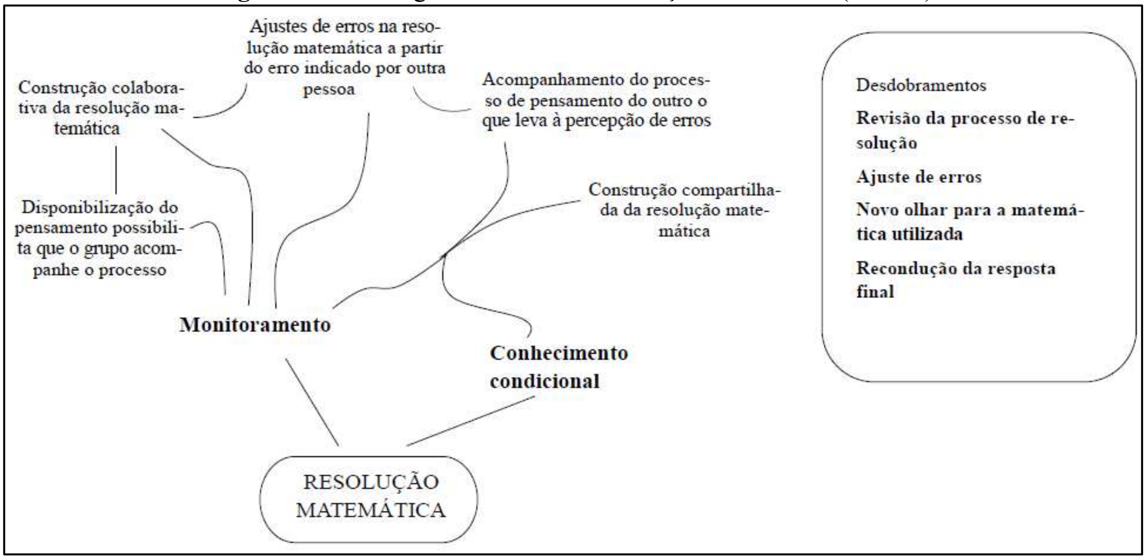
2017

$$1{,}0355(1{,}0189(0{,}9772(1{,}0071(1{,}0143(1{,}006(1{,}0094(1{,}0094(1{,}0263(1{,}0189x + x) + x) + x) + x) + x) + x) + x) + x) + x) = 1000000$$

Fonte: relatório dos alunos.

O uso de estratégias metacognitivas na fase de resolução da atividade de modelagem matemática é resumido na árvore de associação de ideias da Figura 16.

Figura 16: Estratégias associadas à resolução matemática (AP-G1)



Fonte: autora.

Para a generalização do modelo os alunos se valeram de estratégias metacognitivas mediadas por autoperguntas, conforme sinaliza a Tabela 9.

Tabela 9: Indícios de estratégias metacognitivas sobre generalização do modelo (AP-G1)

Indicativo da estratégia	Evidências
(I) **RM4-** Menciona verificações pontuais em vários momentos do desenvolvimento da atividade.	A1: Quanto que dá 100%-2,288%? 97,72? Pesq: Bom que você pergunta e você mesmo responde. A1: Sim, aí se tiver errado os outros me corrigem.

(C) **CD2-** Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.	Pesq: Certo. Vocês conseguirão chegar a uma generalização de um modelo que expresse isso? A1: Consegue chegar se adotar uma taxa única para 10 anos. Mas se essa taxa variar, não vai rolar. Taxa fixa não existe [...] porque em 10 anos a inflação e a taxa variam, mesmo a alimentação da fórmula ele vai ter que colocar todos esses valores. Uma previsão pode ser furada, porque dificilmente se acerta o cenário econômico do país em 10 anos. [...] Podemos fazer, matematicamente pode fazer sentido, mas na realidade não funciona. A1: Dá para usar essa última fórmula, desses valores que usamos, por valores genéricos. Isso que estamos fazendo, teria que fazer 07 a 17, 08 a 18, 9 a 10 e tentar usar alguma estatística para tentar chegar a algo mais exato. O final vai ficar um produtório.
(C) **RA4-** Reconhece que haveriam outras maneiras de conduzir o desenvolvimento da atividade depois de termina-la	

Fonte: autora.

De fato, o aluno A_1 usa de perguntas para incitar decisões e parece estar consciente da ação, que o leva, assim como os colegas, a várias verificações. Isso denota o uso intencional da estratégia RM4. Assim, ao disponibilizar os pensamentos ao grupo, A_1 colabora para que eles acompanhem o raciocínio enquanto se assegura que mais alguém está validando seus pensamentos.

O entendimento de que as estratégias são de natureza colaborativa relaciona-se ao fato de que a intervenção da pesquisadora pode ter provocado a manifestação das estratégias DC2 e RA4, em que o aluno argumenta sobre alternativas que julga inviáveis, com base no que sabe sobre a situação, mas vislumbra novas possibilidades de tratamento do problema. Assim, essas estratégias parecem ocasionar a generalização do modelo matemático, conforme Figura 17.

Figura 17: Obtenção do modelo matemático (AP-G1)

Levando em consideração o resultado final obtido após o desenvolvimento do cálculo perante os dez meses desejados, as taxas utilizadas foram substituídas de forma que tornou-se visível uma generalização

$$i_{10}(i_9(i_8(i_7(i_6(i_5(i_4(i_3(i_2(i_1x + x) + x) + x) + x) + x) + x) + x) + x) + x) = 1000000$$

Isolando x, temos:

$$i_9 i_{10}(i_8(i_7(i_6(i_5(i_4(i_3(i_2(i_1x + x) + x) + x) + x) + x) + x) + x) + x) + i_{10}x = 1000000$$

$$\left(\prod_{j=1}^{10} i_j\right)x + \left(\prod_{j=2}^{10} i_j\right)x + \cdots + \left(\prod_{j=10}^{10} i_j\right)x = 1000000$$

$$x\left(\sum_{n=1}^{10}\left(\prod_{j=n}^{10} i_j\right)\right) = 1000000$$

$$x = \frac{1000000}{\left(\sum_{n=1}^{10}\left(\prod_{j=n}^{10} i_j\right)\right)}$$

Fonte: relatório dos alunos.

Sobre a validação do modelo obtido, os alunos expressam suas opiniões nas questões do instrumento aplicado como mostra a Tabela 10.

Tabela 10: Indícios de estratégias metacognitivas na validação dos resultados (AP-G1)

Indicativo da estratégia	Evidência
(I) **CP2-** Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas ou nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.	*C_1:* Após a resolução do problema, fizemos uma validação utilizando no site do Tesouro Direto, onde constatamos uma diferença nos valores que pode ser explicada pela diferença dos aportes (nosso modelo considera aportes anuais e o site considera aportes mensais). Outro ponto que justifica essa diferença é a escolha das taxas. Optamos por escolher taxas passadas, enquanto o site utiliza projeções futuras para as taxas.
(I) **RA3-** Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema**.**	*D_1:* A resolução apresentada é eficiente pois utilizamos aportes anuais e juros e inflação de um período de 10 anos atrás, já o site do tesouro utiliza inflação de hoje, como o valor é alto, entendemos que teria um desvio alto também.

Fonte: autora.

O aluno C_1, argumenta que a validação "após a resolução", mostra uma diferença entre o resultado encontrado pelo modelo e o fornecido pelo site em que fizeram a consulta. Entretanto, tanto C_1 quanto D_1 argumentam que tal diferença se justifica pelas hipóteses adotadas: "nosso modelo considera aportes anuais e o site considera aportes mensais" e "optamos por escolher taxas passadas, enquanto o site utiliza projeções futuras para as taxas". Cada aluno apresenta uma argumentação particular acerca de elementos que levam à validação, evidenciando estratégias metacognitivas de natureza individual. Das estratégias de conhecimento processual (CP2) e avaliação (RA3), identificadas nas arguições dos alunos, decorre a utilização do simulador no site do tesouro direto e a validação do resultado obtido por meio do modelo matemático construído leva à situação final (Figura 18).

Figura 18: Recursos usados para validação (AP-G1)

Investimento	Valor bruto de resgate (R$)	Rentabilidade bruta (a.a.)	Custos (R$)	Valor do imposto de renda (R$)	Valor líquido de resgate (R$)	Rentabilidade líquida (a.a.)
Tesouro	1.225.110,64	8,14	12.183,85	67.821,67	1.120.719,77	6,40
Poupança	1.000.009,28	4,15	0,00	0,00	1.000.009,28	4,15
CDB	1.031.128,83	4,76	0,00	32.961,72	998.167,11	4,12
LCI/LCA	1.007.156,38	4,29	0,00	0,00	1.007.156,38	4,29
Fundo DI	1.037.348,58	4,88	0,00	33.125,50	999.098,51	4,13

Valor inicial investido	R$ 6.832,50
Aportes Mensais (118)	R$ 6.832,50
Valor total investido	R$ 813.067,50

Situação Final: Portanto, com base no modelo construído e da resposta do problema, pode-se considerar que a aplicação na caderneta de poupança não permite que a maioria dos brasileiros consiga conquistar um milhão de reais, visto que o salário brasileiro é deveras menor que a quantidade determinada. E quem pode fazer tal aplicação não faria, pois não compensa quando comparamos com outras opções de investimentos. [Relatório dos alunos (AP-G1)]

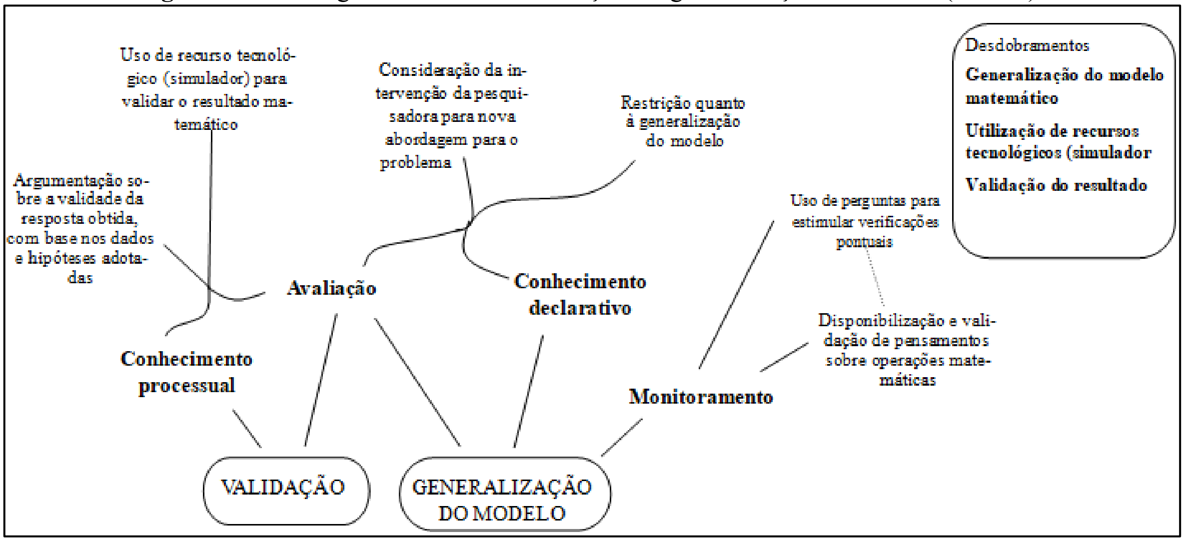
Fonte: relatório dos alunos.

A opinião dos alunos sobre o que modelo obtido representa, diverge, conforme as respostas dadas no questionário. Isso pode ser um indicativo de que, cada aluno teve uma compreensão distinta sobre o modelo, na perspectiva daquilo que lhes parece ter maior relevância na situação em estudo.

Na sua opinião, o modelo encontrado fornece uma resposta que serve para:
A_1 - uma compreensão de como manipular uma situação para que ela produza o resultado desejado.
B_1 - uma previsão do resultado de uma situação.
C_1 - uma forma de decidir entre alternativas justificáveis (ou seja, com base em uma situação).
D_1 - um modelo que permitirá replicar uma situação.[questionário - Anexo 2]

A árvore de associação de ideias da Figura 19 sintetiza a interpretação das estratégias metacognitivas evidenciadas durante a generalização do modelo e ações de validação.

Figura 19: Estratégias associadas à validação e à generalização do modelo (AP-G1)



Fonte: a autora.

As análises das práticas discursivas do grupo de alunos nessa atividade nos levam a considerar as estratégias metacognitivas conforme apresenta o Quadro 5.

Quadro 5: Estratégias metacognitivas identificadas na atividade AP-G1.

	I	C
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento declarativo identificados nas ações dos estudantes	I	C
CD1 - Admite seus pontos fortes e pontos fracos relativamente ao que precisa saber para desenvolver a atividade.		
CD2 - Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.		1
CD3 - Considera diferentes maneiras de resolver o problema identificado nessa situação.		1
CD4 - Assume lembrar, organizar ou coletar informações acerca da situação antes de iniciar o desenvolvimento da atividade de modelagem.	1	
CD5 - Avalia se seus conhecimentos atendem ao que precisa saber para desenvolver a atividade de modelagem.	2	
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento processual identificados nas ações dos estudantes	I	C
CP1 - Menciona utilizar estratégias que funcionaram em atividades de modelagem anteriores.		
CP2 - Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas e nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.	1	
CP3 - Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas para desenvolver a resolução.		1
CP4 - Quando não compreende alguma informação ou conceito, reporta-se aos colegas, ao professor ou realiza pesquisas a respeito.		
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento condicional identificados nas ações dos estudantes	I	C
CC1 - Reconhece que usa diferentes estratégias para definir seus procedimentos de acordo com as etapas do desenvolvimento da atividade de modelagem.		
CC2 - Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos.		
CC3 - Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução do problema identificado na situação da realidade.	1	
CC4 - Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.		
CC5 - Declara potencializar seus conhecimentos e competências, frente às suas dificuldades.		
Regulação da cognição: Indicadores de planejamento identificados nas ações dos estudantes	I	C
RP1 - Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade		1
RP2 - Define os objetivos da atividade antes de iniciar seu desenvolvimento.	1	
RP3 - Planeja a resolução do problema levando em consideração diferentes possibilidades que podem viabilizá-la.	1	
RP4 - Identifica conteúdos ou procedimentos que podem ser úteis para resolver o problema.		
RP5 - Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.	1	
RP6 - Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.		1
RP7 - Estabelece os passos a serem seguidos na condução da atividade.		
RP8 - Admite dividir o processo de resolução do problema em sub-processos.		1
Regulação da cognição: Indicadores de monitoramento identificados nas ações dos estudantes	I	C
RM1 - Reconhece a finalidade do modelo matemático para o estudo da situação da realidade.		
RM2 - Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.	1	
RM3 - Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece que não entende algo ou quando não consegue prosseguir com a atividade.		1
RM4 - Menciona verificações pontuais durante o desenvolvimento da atividade.	2	2
RM5 - Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.	2	
RM6 - Identifica erros e aplica uma nova estratégia para corrigi-los.		1
RM7 - Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram.		1
Regulação da cognição: Indicadores de avaliação identificados nas ações dos estudantes	I	C
RA1 - Identifica quando o modelo construído não é adequado e então investe na construção de um novo modelo.		
RA2 - Identifica equívocos ou distorções em relação ao conhecimento matemático.		
RA3 - Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema.	1	

RA4 - Reconhece que haveriam outras maneiras de conduzir o desenvolvimento da atividade depois de concluir seu trabalho.		1

Fonte: autora.

O uso do instrumento indica que as seis estratégias metacognitivas foram manifestadas pelos alunos ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem. Na Tabela 11 está sintetizado o número de vezes que cada estratégia metacognitiva ocorreu nos excertos analisados de acordo com sua natureza.

Tabela 11: Ocorrência de estratégias metacognitivas individuais e colaborativas em AP-G1

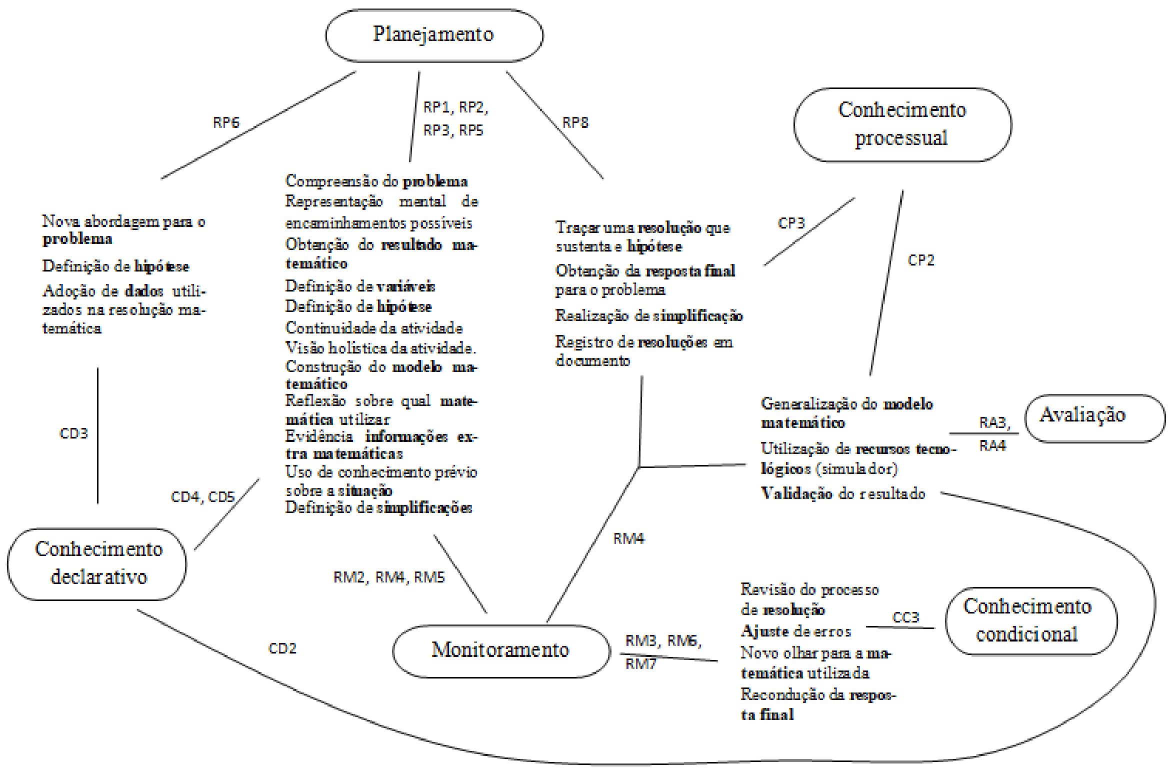
	Caderneta de poupança	
Estratégias	**I**	**C**
Conhecimento declarativo	3	2
Conhecimento processual	1	1
Conhecimento condicional	1	0
Planejamento	3	3
Monitoramento	5	5
Avaliação	1	1
Total	14 53,84%	12 46,16%

Fonte: autora.

É possível perceber que, embora a maioria das estratégias seja de natureza individual, as de natureza colaborativa também se apresentam em quantidade significativa. As estratégias de natureza colaborativa são identificadas em contextos em que há interação entre os alunos ou deles com a pesquisadora, o que denota que o grupo teve influência nas estratégias explicitadas.

Identificadas as estratégias metacognitivas, a fim de sistematizar os desdobramentos decorrentes para a atividades de modelagem matemática com o tema Poupança desenvolvida pelo Grupo 1, construímos uma árvore de associação de ideias, conforme ilustra Figura 20. As ideias presentes nessa figura podem dar visibilidade a aspectos relativos às estratégias metacognitivas que sugerem repercussões na atividade de modelagem.

Figura 20: Síntese das estratégias metacognitivas do Grupo 1 na atividade do segundo momento



Fonte: autora.

Sob um olhar mais abrangente, um conjunto de desdobramentos para a atividade surge como resultado da interação entre diferentes estratégias. Por exemplo o conjunto que inclui “Revisão do processo de resolução; Ajuste de erros; Novo olhar para a matemática utilizada; Recondução da resposta final” é resultante da interação entre monitoramento e conhecimento condicional. Esse mesmo exemplo pode justificar outro aspecto observado: a interação entre estratégias pode afetar diferentes procedimentos da modelagem. De fato, as estratégias de monitoramento e de conhecimento condicional agiram sobre a matematização, sobre a resolução e sobre a resposta final. Alguns procedimentos parecem ser resultado de mais de uma interação, por exemplo, a definição de hipóteses.

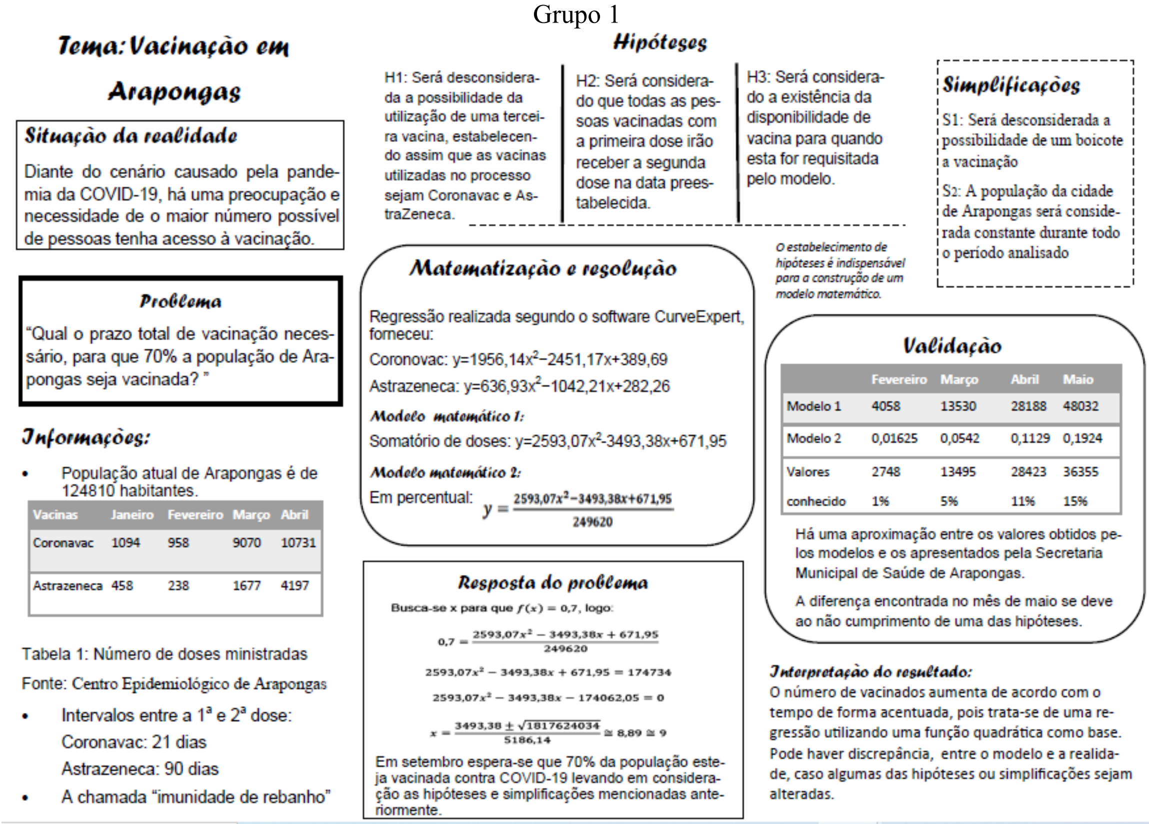
Outro aspecto observado é que o monitoramento teve uma rede de conexões com todas as outras estratégias, influenciando desde etapas iniciais até as finais. Ainda, da síntese apresentada na Figura 20 é possível observar que alguns conjuntos de desdobramentos requerem uma variedade de estratégias (por exemplo, o conjunto resultante das estratégias de monitoramento, avaliação, conhecimento declarativo e conhecimento processual), enquanto outros requerem uma demanda maior de indicadores de uma mesma estratégia (por exemplo o conjunto de desdobramentos decorrentes de RM3, RM6, RM7 e CC3).

Ainda, é possível considerar que não há uma estratégia específica, fixa ou única para determinado procedimento em uma atividade de modelagem, mas é a interação entre elas que possibilita o desenvolvimento desse tipo de atividade.

6.1.1.2 Atividade com a temática vacinação na cidade de Arapongas

A atividade de modelagem com a temática “Vacinação na cidade de Arapongas” (AV) é relativa ao terceiro momento de familiarização dos alunos com modelagem matemática. O problema “Qual o prazo total necessário para que 70% da população de Arapongas seja vacinada?”, assim como o tema, foi definido pelos alunos do grupo (G1) e seu desenvolvimento aconteceu durante seis aulas síncronas e seis assíncronas. As aulas síncronas foram gravadas com o recurso do Google Meet, as quais, junto com o relatório da atividade e os questionários respondidos pelos alunos (Anexo 3), forneceram os dados que compõem nossa análise. A Figura 21 apresenta uma síntese da atividade desenvolvida.

Figura 21: Síntese do desenvolvimento da atividade “Vacinação na cidade de Arapongas” apresentada pelo Grupo 1



Fonte: autora.

Os excertos apresentados na Tabela 12, apresentam indicativos de estratégias metacognitivas utilizadas pelo grupo e as suas motivações para a escolha do tema.

Tabela 12: Indícios de estratégias metacognitivas na escolha do tema (AV-G1)

<table>
<tr><th>Indicativo da estratégia</th><th>Evidência</th></tr>
<tr><td>(I) CP1 - Menciona utilizar estratégias que funcionaram em atividades de modelagem anteriores.</td><td rowspan="4">B_1: Tivemos três ideias sobre um possível tema. A primeira foi relativa ao atendimento do SAMU, se seria possível prever, dado um determinado período de tempo, a quantidade de Emergências que o SAMU em média atenderia nessa região. Só que no decorrer percebemos que para conseguir os dados que precisávamos para fazer uma regressão ou algo do tipo seria muito difícil, pois a sede varia, em alguns lugares é regional, outros é municipal e outros que é estadual, isso complica. Então pensamos em trabalhar com finanças. Como já fizemos uma atividade de modelagem sobre a poupança, vamos fazer sobre um investimento buscando outro tipo: uma casa, um carro, um casamento entre outros. Porém seria alguma coisa muito volátil e difícil da gente trabalhar e também poderia se parecer um pouco com o que foi feito na atividade da poupança.
B_1: Então pensamos na Covid que é um tema importante e que está em alta.
A_1: Não só por isso, mas o levantamento de dados e facilidades desse levantamento, nos ajudaram a decidir pelo tema de vacinação do Coronavírus em Arapongas e outro motivo é ver quem sabe se conseguiremos estimar uma data para voltar à normalidade, que é um desejo em comum de toda a população.</td></tr>
<tr><td>(I) RP1 - Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade.</td></tr>
<tr><td>(C) RP5 - Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.</td></tr>
<tr><td>(C) RM3 – Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece não entender algo ou não consegue prosseguir com a atividade.</td></tr>
</table>

Fonte: autora.

Ao argumentar o porquê da consideração dos temas, para trabalhar com investimentos, por exemplo, o argumento utilizado associa-se à estratégia de conhecimento processual indicada por CP1. Eles reconhecem suas diferentes maneiras de pensar em diferentes circunstâncias.

Quando o aluno percebe limitações impostas para trabalhar com os dois primeiros temas pensados (Samu e investimentos) ele muda de ideia. Isso evidencia que a estratégia de monitoramento RM3 contribuiu para que os alunos mantivessem a dinâmica da atividade. Também pode indicar qual limitação os alunos do grupo, enquanto modeladores e alunos da disciplina, estão dispostos a enfrentar diante de circunstâncias que demandam algum esforço.

As estratégias de planejamento, indicadas por RP1 e RP5, são evidenciadas quando os alunos demonstram que avaliam a viabilidade ou não do tema, decidindo o que é importante e o que esperar da atividade, ou seja, antecipando conhecimentos matemáticos que podem ser utilizados em cada caso, como por exemplo “fazer uma regressão” ou “estimar”. Essas estratégias contribuem para a ativação da estratégia de monitoramento (RM3) tendo em vista que reforçam a decisão dos alunos em mudar de tema quando admitem que aquilo que consideram importante para desenvolver um estudo sobre cada situação parece não ser suficiente para gerar uma investigação matemática consistente.

A escolha do tema divide as opiniões do grupo, conforme as respostas dadas no questionário.

Assinale a alternativa que corresponde à estratégia que desempenhou maior influência na escolha do tema, na atividade desenvolvida pelo seu grupo.
[A_1, D_1] - Analisar a viabilidade de trabalhar com o tema.
[B_1, C_1] - Pensar sobre as informações acerca do tema. [questionário -Anexo 3]

As estratégias para definir o problema conforme apresentamos na Tabela 13.

Tabela 13: Indícios de estratégias metacognitivas na apresentação do problema (AV-G1)

Indicativo da estratégia	Evidência
(I) **CD2** - Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.	A_1: Então, qual o problema a ser estudado? O que que a gente está querendo desse número de vacinados? Eu vi lá que o número de vacinados está em tantos na cidade de Arapongas, mas e daí? Aí começamos a pensar: Qual é o momento em que haverá tantas pessoas vacinadas para voltar à normalidade? Então começamos a olhar para aquele número mágico que os especialistas falam: 70% da população. Porque 70% da população já gera uma coisa que chama “imunidade de rebanho” [*explica características da situação*]. Passamos a olhar para este número e definimos o nosso problema: em quanto tempo teremos 70% da população de Arapongas vacinadas contra a Covid-19?
(I) **RP2** - Define os objetivos da atividade antes de iniciar seu desenvolvimento.	
(I) **RP5 -** Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.	

Fonte: autora.

Quando o aluno se envolve com a situação problemática escolhida para ser estudada, passa a vislumbrar um problema passível de ser resolvido por meio da Matemática e utiliza de estratégias de conhecimento declarativo e de planejamento, indicados por CD2, RP2 e RP5. Essas estratégias levam o aluno a estabelecer como objetivo definir um problema e, para isso, recorre aos conhecimentos que tem acerca da situação (imunidade de rebanho) e que possibilite uma investigação matemática.

As afirmações do aluno do tipo “qual o problema a ser estudado?”, “pensamos” e “passamos a olhar”, parecem indicar que o uso de tais estratégias foi consciente e pode ter contribuído para a definição do problema que orientou toda a atividade. Isso é um ponto essencial em atividades de modelagem matemática, pois, assim como nas palavras de Buckminster Fuller “um problema adequadamente diagnosticado está a caminho de ser solucionado”.

Ainda que as estratégias metacognitivas identificadas na fala do aluno A_1 pareçam de natureza individual, os demais alunos do grupo parecem se apropriar dos desdobramentos que tais estratégias suscitam na atividade, conforme indicam as respostas de uma questão do questionário (Anexo 3).

Dentre as alternativas a seguir, assinale aquela que corresponde à estratégia que desempenhou maior influência na formulação do problema, na atividade desenvolvida pelo seu grupo.
[A_1, D_1] - Estabelecer metas para a resolução do problema.
[B_1, C_1] - Delimitar uma pergunta. [Anexo 3]

Para resolver o problema identificado, os alunos reconhecem que precisam coletar informações, conforme retrata o diálogo apresentado na Tabela 14.

Tabela 14: Indícios de estratégias metacognitivas na coleta de dados (AV-G1)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(C) **CD4 –** Lembra ou organiza as informações acerca da situação antes de iniciar o desenvolvimento da atividade	A_1: Coletamos os dados no site do município de Arapongas, onde traz dados de forma livre. Porém, não trazia o número de vacinados mês a mês. B_1: Daí a gente poderia utilizar 2 métodos: ou mandar um e-mail direto para prefeitura ou mandar um e-mail para enfermeira responsável pelo centro epidemiológico de Arapongas. Optamos pela segunda alternativa por ter contato fácil com a profissional. Dessa forma conseguimos os dados que julgávamos necessário para fazer uma matematização do nosso problema e criar um modelo viável nessa situação, certo?

Fonte: autora.

A preocupação dos alunos com as fontes confiáveis para coleta de dados sugere que a estratégia de conhecimento processual CD4 proporciona que a busca dos alunos seja guiada pelo intuito de coletar dados direcionados e específicos, neste caso informações sobre o número de vacinados (Quadro 6) para fazer uma "Matematização".

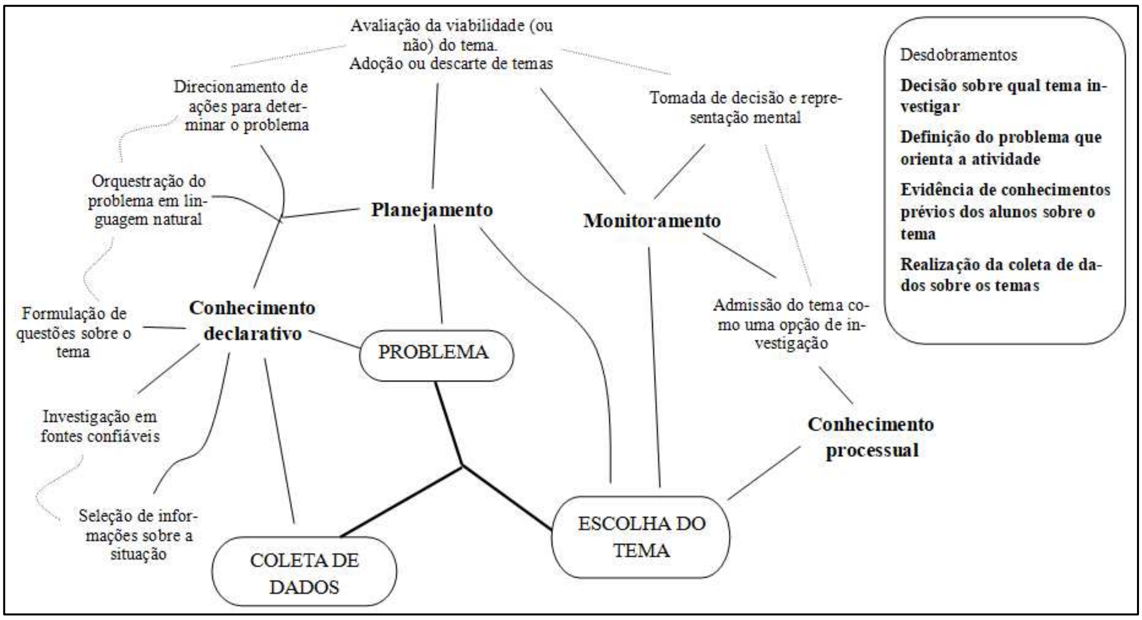
Quadro 6: Número de doses de vacinas ministradas na cidade de Arapongas.

	Número de doses ministradas			
Vacinas	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
Coronavac	1094	958	9070	10731
AstraZeneca	458	238	1677	4197

Fonte: Relatório dos alunos *(AV-G1)*.

As estratégias metacognitivas, discutidas na Tabela 12, Tabela 13 e Tabela 14, associadas à escolha do tema, definição do problema e coleta de dados foram sintetizadas na árvore de associação de ideias, conforme indica a Figura 22.

Figura 22: Estratégias associadas à escolha do tema, definição do problema e busca de informações (AV-G1)



Fonte: autora.

Entretanto, o grupo percebe que dados obtidos precisam de um tratamento, para serem utilizados na resolução (Tabela 15).

Tabela 15: Indícios de estratégias metacognitivas em discussões sobre hipótese e simplificações (AV-G1)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(C) **CP4 -** Reconhece quando não compreende alguma informação ou conceito e então reporta-se aos colegas, ao professor ou considera pesquisas a respeito.	A_1: E aí nós precisávamos pensar nas nossas hipóteses e simplificações, porque é evidente que a gente não tem uma situação muito simples para lidar, pois tem muitos fatores que influenciam, basta ver no noticiário diariamente. K_3 (outro grupo): tudo isso daí é hipótese? Ficamos em dúvida o que é hipótese e simplificação. A_1: Isso é uma boa. Porque hipótese e simplificação, a professora vai poder descrever melhor, mas na minha cabeça, hipótese é alguma coisa que a gente tá considerando e a simplificação acaba sendo a consequência da minha hipótese. Porque eu tô considerando a hipótese que eu vou utilizar duas vacinas, então isso simplificou o meu processo.
(C) **RM2 -** Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade	
(I) **RM5 -** Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.	

Fonte: autora.

Enquanto o grupo procede à comunicação do desenvolvimento da atividade à turma, a estratégia de monitoramento, RM2, revela a necessidade evidenciada pelo aluno A_1 de definir hipóteses e simplificações. Essa assertiva impõem uma discussão sobre o entendimento e diferenciação entre hipóteses e simplificação, com toda a turma, logo que o aluno K_3 (do grupo 3), ao recorrer a estratégia de conhecimento processual (CP4), busca esclarecer com o colega uma "dúvida". Essa estratégia traz importantes implicações para a atividade. Primeiro, podemos perceber que a forma como a hipótese é assumida está relacionada à compreensão do aluno sobre o que é hipótese. Isso, por conseguinte, pode indicar que, se o aluno sabe o que é uma hipótese ele saberá como defini-la, evitando equívocos ou confusões – chamar uma simplificação de hipótese, por exemplo. Segundo, o aluno A_1, busca explicar como ele entende hipótese e simplificação, citando um exemplo prático, a partir da situação que seu grupo se propôs a estudar, manifestando, assim, o indicativo RM5, de estratégia de monitoramento. Desse modo, as discussões em turma, movidos pelo o uso de tais estratégias, promovem o discurso metacognitivo entre os alunos e estimulam o conflito conceitual. Esse conflito, neste caso, pode ter levado a esclarecimentos sobre as compreensões e conceitos pré-estabelecido dos alunos.

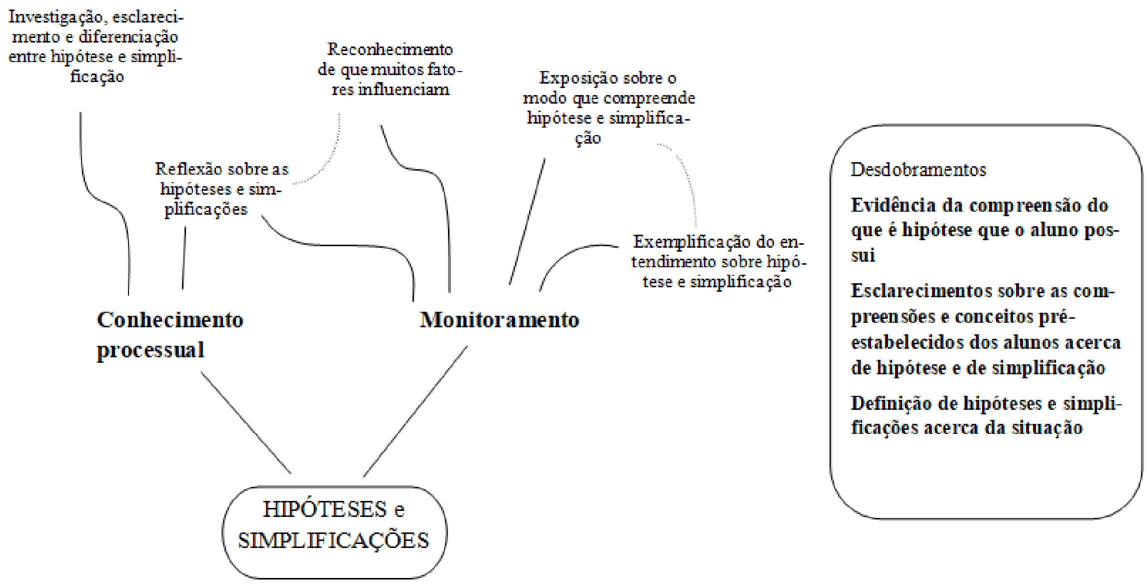
O conjunto de estratégias metacognitivas de conhecimento processual e de monitoramento, indicadas por CP4, RM2 e RM5, configura um meio que, por um lado proporciona ao grupo em questão (G1) definir as hipótese e simplificações assumidas na atividade.

HIPÓTESES
H1: Será desconsiderada a possibilidade da utilização de uma terceira vacina, estabelecendo assim que as vacinas utilizadas no processo sejam Coronavac e AstraZeneca.
H2: Será considerado que todas as pessoas vacinadas com a primeira dose irão receber a segunda dose na data preestabelecida.
H3: Será considerado a existência da disponibilidade de vacina para quando esta for requisitada pelo modelo.
SIMPLIFICAÇÕES
S1: Será desconsiderada a possibilidade de um boicote a vacinação
S2: A população da cidade de Arapongas será considerada constante durante todo o período analisado. [relatório dos alunos (AV-G1)*]*

Além disso, são as hipóteses e simplificações assumidas, a partir das estratégias metacognitivas identificadas, que orientam os encaminhamentos dos alunos ao longo da atividade, podendo estas serem revisadas, complementadas ou descartadas ao longo do processo.

Na Figura 23 a árvore de associação de ideias sintetiza a interpretação sobre o uso de estratégias metacognitivas relativamente ao que se refere à definição de hipótese e de simplificações.

Figura 23: Estratégias associadas à definição de hipóteses e simplificações (AV-G1)



Fonte: autora.

Estabelecidas as hipóteses e as simplificações, os alunos procedem à interpretação matemática e resolução do problema, conforme mostra a Tabela 16.

Tabela 16: Indícios de estratégias metacognitivas na matematização (AV-G1)

Indicativo da estratégia	Evidência
(C) **RP8** - Admite dividir o processo de resolução do problema em sub-processos.	D_1: Pensamos em dividir o número de vacinas pelo número de dias que tem no mês, para observar o crescimento do número doses ministradas e poder fazer uma função linear que nos permitisse observar em qual mês o número de vacinas ministradas cresce mais rápido. Pensamos em fazer os gráficos de cada mês separadamente, para ver como ele se comportava. O x são os dias e o y a quantidade de doses.
(C) **CC2 -** Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos. (C) **CC3 -** Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução identificado na situação problema	Prof: Não entendi bem. O problema é em que época 70% da população de Arapongas estará vacinada? Então para isso vocês tem que analisar o somatório. A_1: Como se considerássemos que em todos os dias de janeiro vacinasse a mesma quantidade de pessoas. Estamos analisando o comportamento, mas é como se nós estivéssemos "quebrando" a nossa curva em várias afins. Olha como Astrazeneca em abril tem um crescimento mais acentuado do que nos outros meses. A nossa resolução não utiliza esses gráficos, eles são só para análise. Pegamos os dados de janeiro a abril e utilizamos o software do *Curve Expert* para rodar várias regressões para Coronavac, rodamos uma, para Astrazeneca rodamos outra, linear, exponencial, enfim várias funções, para analisar o *r*. Optamos por uma quadrática. Fizemos uma para cada vacina porque o intervalo entre as doses é diferente. Prof: Mas a quadrática vai chegar um mês que vai ser o máximo depois vai diminuir? A_1: Não, porque o ponto de mínimo está para trás do 0,1 então só estamos olhando para a parte da parábola em que ela cresce J_3 (grupo 3): Na verdade é a concavidade é para cima. A_1: Sim, e sabemos que a parábola ela vai crescer de forma indeterminada, quando na verdade não é assim que funciona para a vacinação, mas para o intervalo que a vamos trabalhar funcionou bem.

Fonte: autora.

De modo geral, as estratégias identificadas parecem estar relacionadas entre si e representam uma disposição, que pode ser expressa pela linha narrativa da matematização apresentada na Figura 24.

Figura 24: Linha narrativa da matematização AV-G1

RP8

CC2

CC3

Construção de gráfico para analisar comportamento da distribuição de doses aplicadas em cada mês (de janeiro a maio)

Uso do *Curve Expert* para obter uma única função representativa para todos os meses

Obtenção de diferentes tipos de funções (exponencial, linear, quadrática)

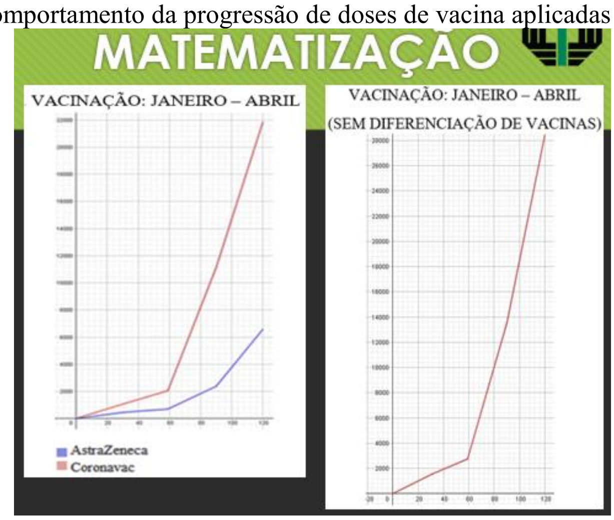
Decisão pela função do tipo quadrática

Argumento sobre a validade da função quadrática em razão do intervalo de tempo que estão considerando a aplicação das doses

Fonte: autora.

Quando o aluno D_1 expõe a forma como o grupo conduziu a matematização, dá a entender que uma primeira etapa da resolução consiste na construção de gráficos com o somatório do número de doses no decorrer do mês, segundo ele, com o objetivo de "observar o crescimento do número de doses ministradas". Essa estratégia de planejamento, indicada por RP8, conduz à obtenção dos gráficos que descrevem o comportamento dos dados, conforme ilustra a Figura 25.

Figura 25: Comportamento da progressão de doses de vacina aplicadas em Arapongas

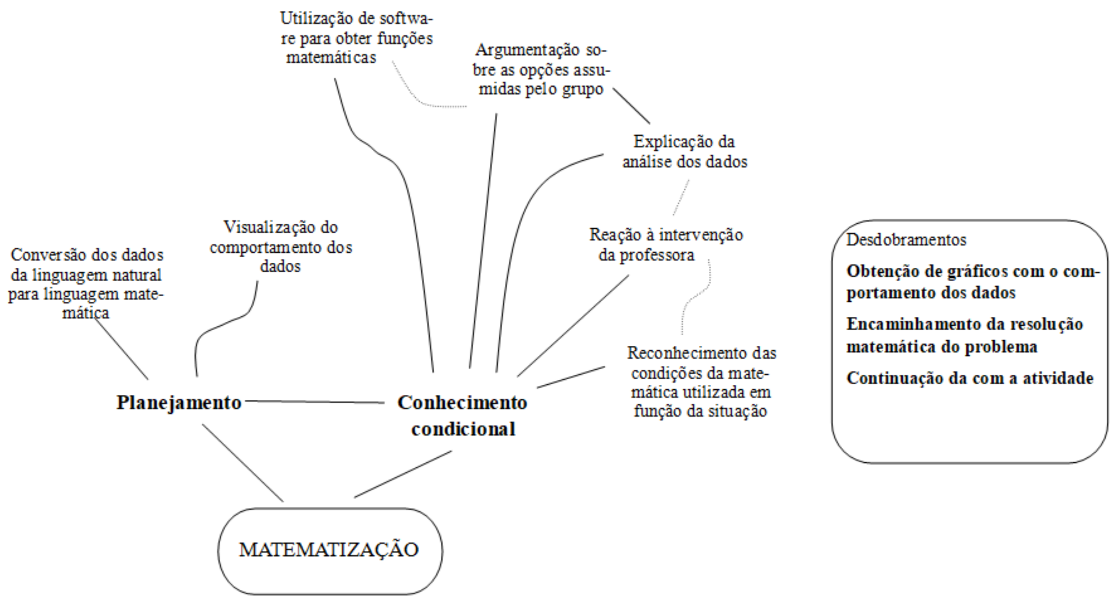


Fonte: Slides da apresentação dos alunos.

As argumentações foram endossadas pelos questionamentos feitos pela professora. O aluno A_1, argumenta sobre as opções assumidas pelo grupo e sobre o "por quê" dos gráficos iniciais. A arguição do aluno, na tentativa de responder às perguntas da professora, parece ser composta pela combinação de estratégia de conhecimento condicional, indicado por CC2 e CC3, e serviu para nortear o envolvimento dos alunos com a atividade de modelagem e possibilitou a resolução do problema a ser estudado. Ainda, essa estratégia parece ter sido reforçada pelo aluno O_4, de outro grupo, que acompanhava, e parece ter compreendido, o desenrolar da atividade pelo Grupo 1. Assim, tanto a professora quanto o colega de outro grupo parecem ter influenciado as estratégias do grupo, o que denota a natureza colaborativa dessas estratégias metacognitivas.

A árvore de associação de ideias da Figura 26, visa sistematizar o uso de estratégias metacognitivas emergentes na e da matematização realizada pelos alunos.

Figura 26: Estratégias associadas à matematização (AV-G1)



Fonte: autora.

A resolução matemática foi facilitada pela opção dos alunos de utilizar um recurso tecnológico – *software Curve Expert* – conforme excertos das falas dos alunos presentes na Tabela 17.

Tabela 17: Indícios de estratégias metacognitivas na resolução do problema (AV-G1)

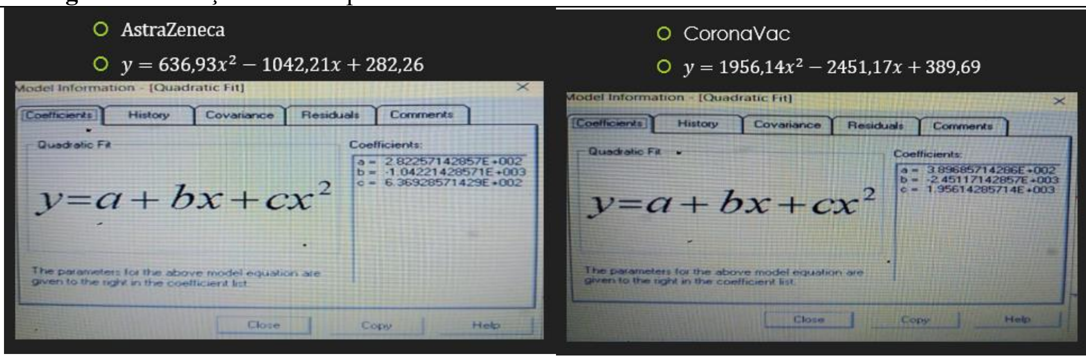
Indicativo da estratégia	**Evidência**
(I) **CC2 -** Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos. (I) **CC3 -** Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução identificado na situação problema.	A_1: Nós encontramos alguns tipos de funções. Nós tínhamos linear, quadrática, tínhamos uma exponencial, nós tínhamos uma curva logística. Todas elas no *Curve* nos dava o *r*, o *r* é muito importante. Quanto mais próximo de 1, melhor é o modelo para aqueles dados. Tinha um modelo muito bom em que o *r* dava 1, no entanto era uma função de quarto grau, que em algum momento ia cair, e isso não é interessante naquele momento, porque não faz sentido ele cair, né, concordam? Se é cumulativo, como que menos gente vai ser vacinado? Então foi descartada essa. Os valores dos *r*, nas funções que sobraram,

(I) **RA1 -** Analisa quando o modelo construído não é adequado e então investe na construção de um novo modelo.	era muito próximo entre si. Esse que nós utilizamos o *r* é 0,99 e mais algumas casas para frente como a quadrática mais fácil de trabalhar e resolver a conta, em comparação com a logística, por exemplo, a gente preferiu usar a quadrática. Aí temos uma função para o Coronavac e outra para a Astrazeneca.
(C) **RM5 -** Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.	B_1: Não só por isso, mas se pegar todos os gráficos que foram mostrados aí, se deslocarmos *[faz gesto]* ele no eixo das abscissas, conseguimos intuitivamente ver alguma coisa que remete à uma função quadrática, certo? Outra coisa que nos levou à essa opção, é que os gráficos com vários segmentos de reta interligados lembram o comportamento de uma função quadrática.

Fonte: autora.

O uso do software *Curve Expert* facilitou a resolução, entretanto, é possível notar que, é preciso ter domínio dos métodos e conceitos matemáticos para que se tenha um resultado satisfatório, por exemplo "*Quanto mais próximo de 1, melhor é o modelo para aqueles dados*". Assim, a estratégia de conhecimento condicional, indicada por CC2 e CC3, é, não somente importante, mas necessária para a obtenção das funções que fornecem os resultados para a situação. Desse conjunto de estratégias que decorre a obtenção das funções, que, são parte do modelo, conforme retrata Figura 27.

Figura 27: Funções obtidas para descrever o número de doses da vacina Astrazeneca e Coronavac



[Slides da apresentação da atividade]

Baseando-se nas duas regressões, o número total de pessoas vacinadas deve ser expressado pela soma do número de pessoas vacinadas pelas duas vacinas. Considerando assim a soma necessária, é possível evidenciar o modelo desejado onde $y = 2593{,}07x^2 - 3493{,}38x + 671{,}95$

[Relatório dos alunos *(AV-G1)*]

Fonte: material produzido pelos alunos.

Ainda, quando descarta a opção de função de quarto grau e considera que é necessário admitir um novo modelo como opção, parece incutir a estratégia de avaliação indicada por RA1. A estratégia de monitoramento, sinalizada por RM5, pode ter contribuído para que, em linguagem coloquial, o aluno expresse o que entendeu dos procedimentos adotados para a resolução, neste caso, por exemplo, a expressão "*deslocar ele no eixo das absissas*", acompanhado do gesto indicando o deslocamento. A estratégia utilizada pelo aluno parece ter sido consciente, já que ele reconhece que esse primeiro “ensaio” para o tratamento dos dados, os leva a admitir que “*intuitivamente*” consegue ver uma função quadrática.

As estratégias evidenciadas na descrição apresentada pelo aluno A_1, de natureza individual, provocam a estratégia do aluno B_1, ou seja, a estratégia metacognitiva identificada na fala de B_1 é de natureza colaborativa.

Esse primeiro modelo, entretanto, ainda não é suficiente para responder o problema dado, tendo em vista que o modelo fornece o número de doses e, considerando que cada vacina exige a aplicação de duas doses para a imunização completa, os alunos precisam adotar novos procedimentos, os quais são revelados na Tabela 18.

Tabela 18: Indícios de estratégias metacognitivas na resolução do problema com os dados em porcentagem (AV-G1)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(C) **RM5 -** Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.	A_1: Nós temos um número da população de Arapongas. Prof: Ele é fixo nesse período né, é uma simplificação. A_1: Isso. Sabendo que cada pessoa precisa de duas doses, multiplicamos esse número por 2. E agora nós vamos buscar *f* de quanto que dá 70% desse valor. Então de novo, temos a população de Arapongas multiplicamos por 2 temos o número de doses, 70% disso quanto que é? Encontramos esse valor? Então é esse número que queremos encontrar. C_1: Entretanto, os números absolutos são pouco representativos quando você quer comparar uma cidade com outra ou um país com outro e assim por diante. Aí a sugestão da professora foi de quando a gente vê em jornal, isso no nosso dia a dia normalmente é trazido para nós além do valor absoluto, o percentual é importante. Então nós fizemos essa adaptação.
(C) **RP6 -** Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.	
(C) **RM7 -** Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram.	

Fonte: autora.

As estratégias metacognitivas identificadas nesses excertos parecem ter sido evocadas pela intervenção da professora, ou seja, sinaliza natureza colaborativa das estratégias. Quando os alunos parecem atribuir à simplificação assumida (S2), neste momento da atividade a estratégia metacognitiva com características de planejamento, mais especificamente à RP6 é evidenciada.

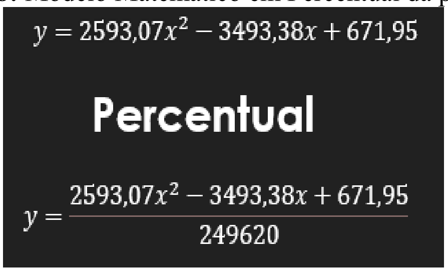
Isso indica que, mesmo que as simplificações tenham sido assumidas no início da atividade, essa estratégia de planejamento faz com que eles reconheçam novas simplificações ao longo do processo de resolução, viabilizando o trabalho mais direcionado e objetivo com os dados disponíveis. A resposta consensual dos alunos sobre esse aspecto, à uma questão do questionário (Anexo3), reforça esse entendimento.

O seu grupo, provavelmente, precisou realizar algumas simplificações para poder desenvolver a atividade. Qual foi a estratégia principal para isso?

[A_1, B_1, C_1, D_1] - Controlar informações e pensar sobre as informações que dispõem (selecionar as mais convenientes e descartar as desnecessárias no momento). [Anexo 3]

A estratégia de monitoramento (RM7) parece ter sido ativada a partir da sugestão da professora sobre estratégias para aprimorar o modelo e levou os alunos a reconhecerem essa nova abordagem para os dados: resposta em percentual. Ou seja, neste caso, da estratégia decorreu a construção do modelo matemático indicado na Figura 28.

Figura 28: Modelo Matemático em Percentual da população



Fonte: Slides da apresentação dos alunos.

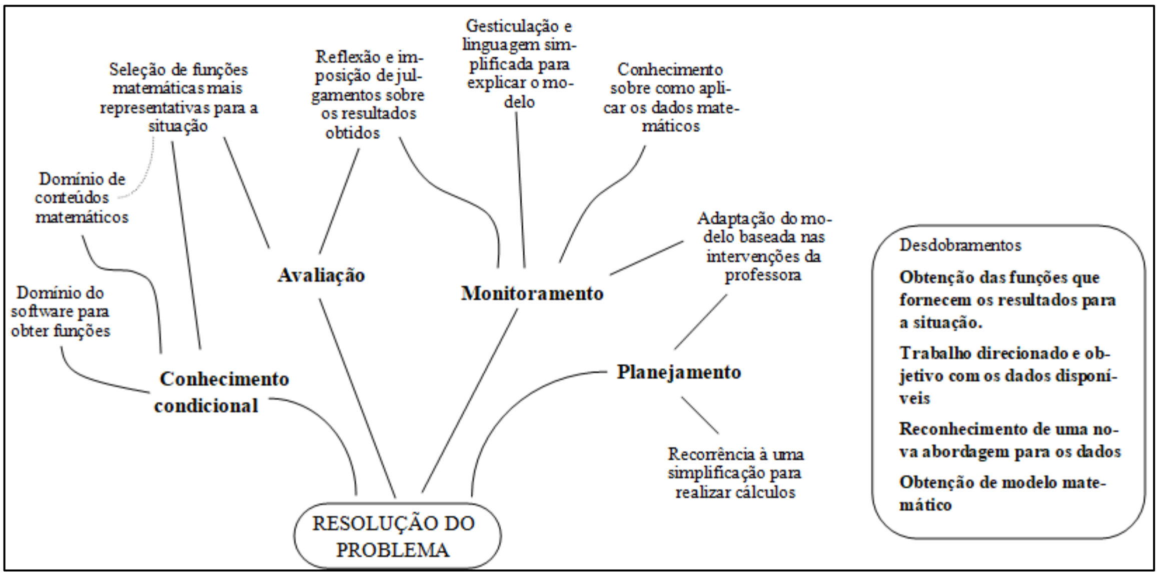
Essa orientação da professora, pode ter sido responsável pelo aluno ter percebido, por exemplo "no nosso dia a dia normalmente é trazido para nós além do valor absoluto, o percentual é importante", assim, o indicativo RM5, de estratégia de monitoramento, parece trazer à tona o reconhecimento de que esta seria a escolha mais adequada para o contexto.

Conforme apontado na literatura, o modelo não tem um fim em si mesmo, neste caso, conforme os alunos reconhecem, foi preciso, ainda, resolver e validar a resposta fornecida por ele. Há um consenso entre os alunos em relação à validação do modelo, conforme indica a resposta deles à uma das questões respondidas (Anexo 3).

Com relação ao modelo matemático construído nessa atividade, assinale as alternativas que são verdadeiras para o seu grupo.
[A_1, B_1, C_1, D_1] - O modelo permitiu obter a resposta para o problema que foi formulado em relação à situação em estudo. [Anexo 3]

A árvore de associação de ideias da Figura 29 visa mostrar entrelaçamentos entre as estratégias metacognitivas evidenciadas no contexto da resolução matemática do problema.

Figura 29: Estratégias associadas à resolução do problema (AV-G1)



Fonte: autora.

Os indícios de estratégias metacognitivas relativas à validação do resultado obtido pelo modelo construído são apresentados na Tabela 19.

Tabela 19: Indícios de estratégias metacognitivas na validação (AV-G1)

Indicativo da estratégia	Evidência
(I) **RA3 -** Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema. (I) **RA2 -** Identifica equívocos ou distorções em relação ao conhecimento matemático. (I) **CP2 -** Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas ou nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.	B_1: Já tendo estabelecido os dois modelos, que são modelos com números absolutos e o modelo com percentual, pensamos em trabalhar com a tabela para conseguir identificar uma validação *[Quadro 7]*. Lembrando que nesse momento estamos trabalhando com os dados cumulativos, certo? De acordo com o nosso modelo. Em março tem 5% que confere, em abril tem 11%, então até ali conseguimos ver uma regularidade muito boa de aproximação diante do modelo, com o valor que foi fornecido pelo Ministério da Saúde. Porém de maio em diante há uma discrepância um pouco maior. Paramos para pensar por que isso acontece, olhando todo movimento que foi realizado dá para identificar isso como o não cumprimento de uma das hipóteses.
(I) **RA4 -** Reconhece que haveria outras maneiras de conduzir o desenvolvimento da atividade depois de terminá-la.	A_1: Fazendo as contas, vai dar mais ou menos 8,89, que seria agosto e 89% dos Dias de Agosto que é praticamente setembro. Ou seja, setembro de 2021 como sendo o mês em que 70% da população de Arapongas esteja vacinada, considerando as hipóteses e simplificações mencionadas anteriormente. Pois, em maio nós não conseguimos acompanhar o crescimento, pois faltou insumos para a Coronavac, ao mesmo tempo pode ser antes se aprovar mais vacinas.

Fonte: autora.

A validação do modelo foi representada conforme Quadro 7, em que os resultados matemáticos são obtidos a partir da aplicação do modelo e comparados as quantidades reais de doses de vacinas.

Quadro 7: Validação dos resultados (AV-G1)

	Fevereiro	Março	Abril	Maio
Modelo1	4058	13530	28188	48032
Modelo 2	0,1625	0,0542	0,1129	0,1924
Valor conhecido	2748 ou 1%	13495 ou 5%	28423 ou 11%	36355ou 15%

Fonte: relatório dos alunos *(AV-G1)*.

O Quadro 7, conduz à constatação de B_1 de que "de maio em diante há uma discrepância um pouco maior", o que sinaliza o uso da estratégia de avaliação (RA2).

Tanto o aluno B_1, quanto A_1 fazem alusão à validação do resultado em função, também, do modelo, das hipóteses, das simplificações e da situação, o que denota características da estratégia de conhecimento processual, a partir do indício CP2, e da estratégia de avaliação, indicada por RA3. Ainda, quando A_1 reconhece que a falta de insumos ou a aprovação de novas vacinas pode influenciar na resposta, prenuncia o uso da estratégia de avaliação, desta vez, pelo indício RA4. Tais estratégias metacognitivas, parecem ser de natureza individual, pois no contexto, o aluno A_1 e B_1 não sofrem influência do grupo.

A resposta (Figura 30), que o grupo desenvolve e valida, decorre das estratégias metacognitivas de avaliação e de conhecimento processual.

Figura 30: Resposta matemática para o problema (AV-G1)

11. A RESPOSTA DO PROBLEMA

Tendo $f(x) = \frac{2593{,}07x^2 - 3493{,}38x + 671{,}95}{249620}$

Busca-se x para que $f(x) = 0{,}7$, logo:

$$0{,}7 = \frac{2593{,}07x^2 - 3493{,}38x + 671{,}95}{249620}$$

$$2593{,}07x^2 - 3493{,}38x + 671{,}95 = 174734$$

$$2593{,}07x^2 - 3493{,}38x - 174062{,}05 = 0$$

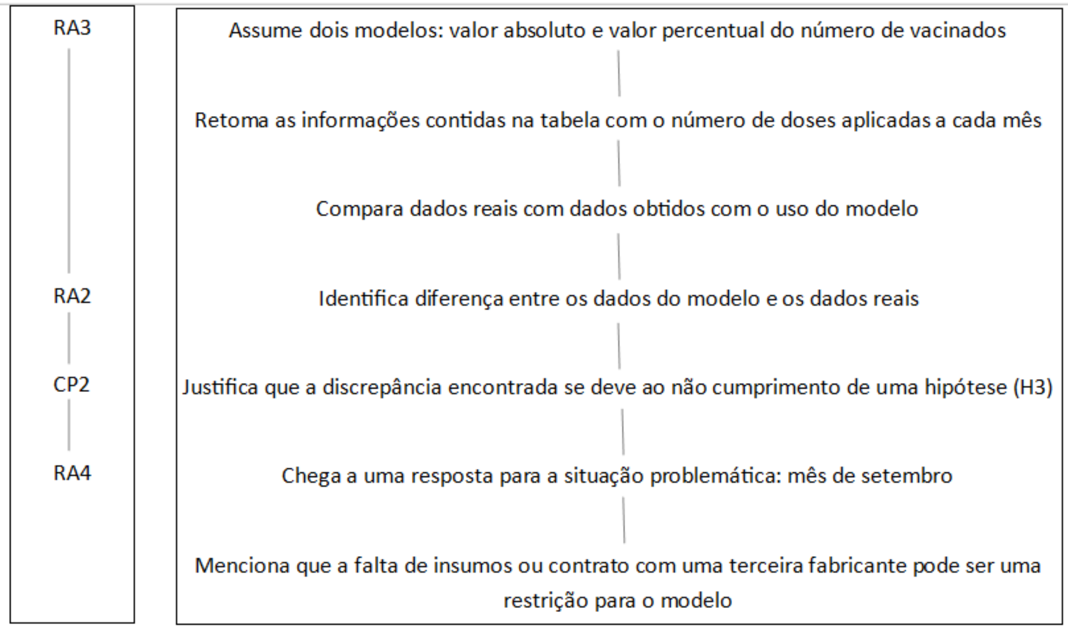
$$x = \frac{3493{,}38 \pm \sqrt{1817624034}}{5186{,}14} \cong 8{,}89 \cong 9$$

Em setembro espera-se que 70% da população esteja vacinada contra COVID-19 levando em consideração as hipóteses e simplificações mencionadas anteriormente.

Fonte: relatório dos alunos *(AV-G1)*.

A linha narrativa (Figura 31) expressa uma síntese de procedimentos relevantes utilizados na validação realizada pelo grupo, em que explicitam uma inter-relação entre as estratégias metacognitivas identificadas.

Figura 31: Linha narrativa da validação AV-G1



Fonte: autora.

Por fim, os alunos trazem algumas conclusões pessoais acerca do processo de desenvolvimento da atividade de modelagem desenvolvida e reflete também a partir de questionamentos da professora, conforme Tabela 20.

Tabela 20: Indícios de estratégias metacognitivas na obtenção da situação final (AV-G1)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(I) **CP2 -** Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas ou nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.	C_1: A conclusão a respeito do nosso trabalho como um todo é que a o estabelecimento das hipóteses é indispensável para a construção de um modelo matemático. Pois, mesmo que as hipóteses por vezes sejam cumpridas, a resposta para o problema depende de outros fatores como insumo, mão de obra, espaço, entre outros.
(C) **RM1 -** Reconhece a finalidade do modelo matemático para o estudo da situação da realidade. (C) **CD1 -** Admite seus pontos fortes e pontos fracos relativamente ao que precisa saber para desenvolver a atividade.	Prof: O que vocês consideram que foi o ponto mais forte dessa atividade de vocês, dadas essas limitações que vocês perceberam? B_1: Gostaria de falar um pouco da experiência, da oportunidade da prática. Porque uma coisa que me deixou muito feliz ao fazer esse trabalho, é que nós conseguimos pegar dados que são difíceis de conseguir que é uma coisa muito nova, conseguimos não só os dados, mas conseguimos modelar alguma coisa próxima de algo muito novo porque ainda não sabemos como lidar e estamos tendo de conviver com isso. Poder modelar uma coisa tão pouco conhecida e chegar a um resultado bom foi uma coisa que me ajudou a entender um pouco mais de como fazer modelagem e não só o que é modelagem.

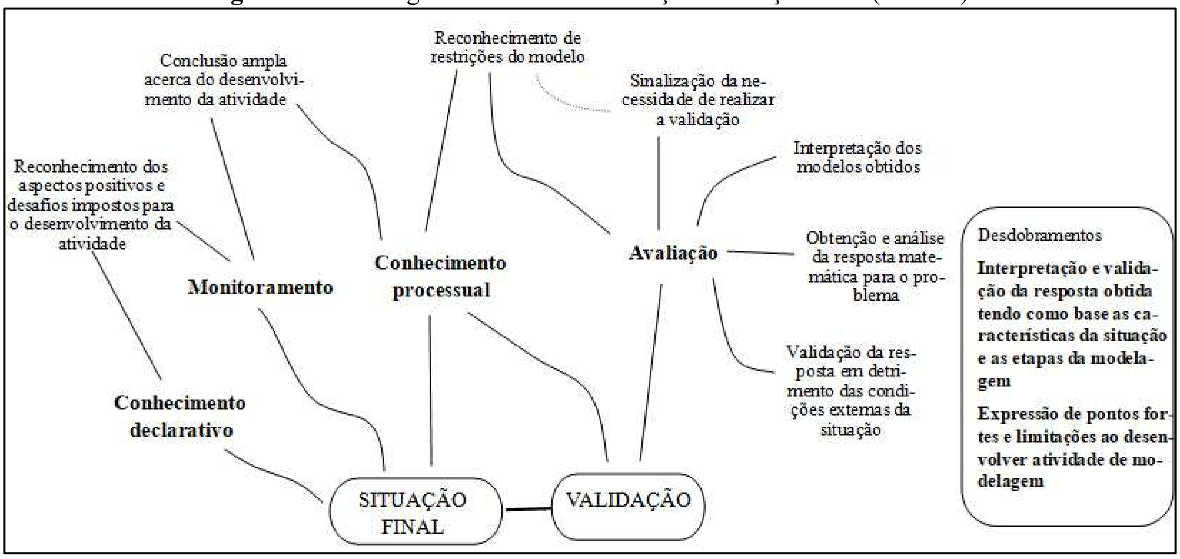
Fonte: autora.

As afirmações de C_1 sugerem que houve uma reflexão para concluir a atividade e que reconhecem a hipótese como um aspecto decisivo no desenvolvimento da atividade, sinaliza também que "hipótese", "resposta para o problema" e "modelo" estão vinculados da situação (depende de outros fatores como insumo, mão de obra, espaço, entre outros). O olhar do aluno para estabelecer tal vínculo sugere o uso da estratégia metacognitiva de conhecimento processual (CP2). Como se trata de um olhar particular do aluno, a estratégia parece ser de natureza individual.

A pergunta da professora leva o aluno a reconhecer que a atividade possibilitou uma experiência sobre "como fazer" modelagem, para além de compreender "o que é a modelagem". B_1 infere que modelar uma situação "nova", da realidade, ou como ele se refere "estamos tendo que conviver". Assim, a intervenção da professora motivou o aluno a expressar os pontos fortes e fracos relativamente ao que precisou para desenvolver a atividade, ou seja, indica que a estratégia de conhecimento declarativo foi ativada. Ainda, para justificar esses pontos fortes e limitações, ele ativou a estratégia de monitoramento, RM1, quando o aluno parece relacionar a modelagem com a realidade, de forma natural. Ou seja, as estratégias metacognitivas decorrentes de uma resposta à intervenção da professora sinalizam a natureza colaborativa das estratégias usadas pelo aluno.

A Figura 32 detalha o uso de estratégias metacognitivas na validação e obtenção da situação final da atividade de modelagem.

Figura 32: Estratégias associadas à validação e situação final (AV-G1)



Fonte: autora.

A análise das práticas discursiva do grupo de alunos nessa atividade nos leva a considerar as estratégias metacognitivas conforme apresenta o Quadro 8.

Quadro 8: Estratégias metacognitivas identificadas na atividade AV-G1

Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento declarativo identificados nas ações dos estudantes	I	C
CD1 - Admite seus pontos fortes e pontos fracos relativamente ao que precisa saber para desenvolver a atividade.		1
CD2 - Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.	1	
CD3 - Considera diferentes maneiras de resolver o problema identificado nessa situação.		
CD4 - Assume lembrar, organizar ou coletar informações acerca da situação antes de iniciar o desenvolvimento da atividade de modelagem.		1
CD5 - Avalia se seus conhecimentos atendem ao que precisa saber para desenvolver a atividade de modelagem.		
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento processual identificados nas ações dos estudantes	I	C
CP1 - Menciona utilizar estratégias que funcionaram em atividades de modelagem anteriores.	1	
CP2 - Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas e nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.	2	
CP3 - Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas para desenvolver a resolução.		
CP4 - Quando não compreende alguma informação ou conceito, reporta-se aos colegas, ao professor ou realiza pesquisas a respeito.		1
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento condicional identificados nas ações dos estudantes	I	C
CC1 - Reconhece que usa diferentes estratégias para definir seus procedimentos de acordo com as etapas do desenvolvimento da atividade de modelagem.		
CC2 - Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos.	1	1
CC3 - Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução do problema identificado na situação da realidade.	1	1
CC4 - Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.		
CC5 - Declara potencializar seus conhecimentos e competências, frente às suas dificuldades.		
Regulação da cognição: Indicadores de planejamento identificados nas ações dos estudantes	I	C
RP1 - Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade	1	
RP2 - Define os objetivos da atividade antes de iniciar seu desenvolvimento.	1	
RP3 - Planeja a resolução do problema levando em consideração diferentes possibilidades que podem viabilizá-la.		
RP4 - Identifica conteúdos ou procedimentos que podem ser úteis para resolver o problema.		
RP5 - Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.	1	1
RP6 - Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.		1
RP7 - Estabelece os passos a serem seguidos na condução da atividade.		
RP8 - Admite dividir o processo de resolução do problema em sub-processos.		1
Regulação da cognição: Indicadores de monitoramento identificados nas ações dos estudantes	I	C
RM1 - Reconhece a finalidade do modelo matemático para o estudo da situação da realidade.		1
RM2 - Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.		1
RM3 - Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece que não entende algo ou quando não consegue prosseguir com a atividade.		1
RM4 - Menciona verificações pontuais durante o desenvolvimento da atividade.		
RM5 - Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.		2
RM6 - Identifica erros e aplica uma nova estratégia para corrigi-los.		
RM7 - Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram.		1
Regulação da cognição: Indicadores de avaliação identificados nas ações dos estudantes	I	C
RA1 - Identifica quando o modelo construído não é adequado e então investe na construção de um novo modelo.	1	
RA2 - Identifica equívocos ou distorções em relação ao conhecimento matemático.	1	
RA3 - Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema.	1	

RA4 - Reconhece que haveriam outras maneiras de conduzir o desenvolvimento da atividade depois de concluir seu trabalho.	1	

Fonte: autora.

O uso do instrumento apresentado no Quadro 8, fornece indicativos de que as seis estratégias metacognitivas foram manifestadas pelos alunos ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem. A Tabela 21 mostra que há um equilíbrio nas estratégias de natureza individual e colaborativa, portanto as estratégias colaborativas nesta atividade de terceiro momento, do Grupo 1, parecem terem se intensificado em relação à atividade do segundo momento.

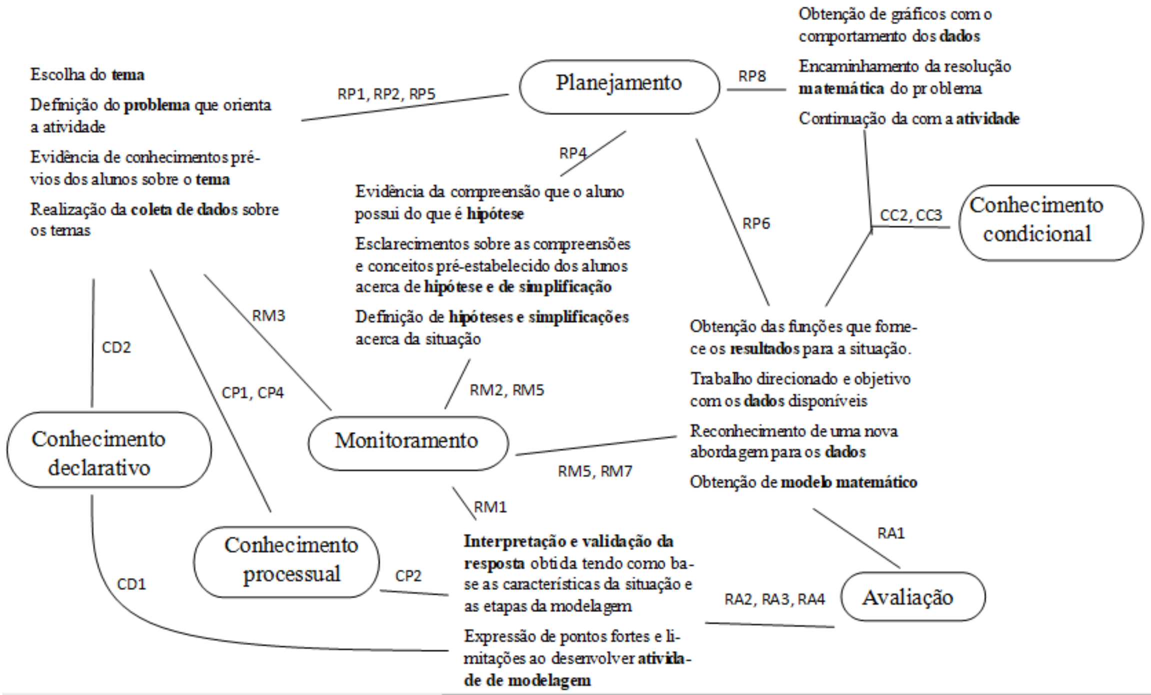
Tabela 21: Ocorrência de estratégias metacognitivas individuais e colaborativas em AV-G1

	Vacinação em Arapongas	
Estratégias	**I**	**C**
Conhecimento declarativo	1	2
Conhecimento processual	2	2
Conhecimento condicional	2	2
Planejamento	4	2
Monitoramento	1	6
Avaliação	4	0
Total	14 50%	14 50%

Fonte: autora.

Ao contrastar as informações presentes no instrumento (Quadro 8) com as análises empreendidas, sistematizamos os desdobramentos decorrentes das estratégias metacognitivas para a atividades de modelagem matemática com o tema Vacinação, no desenvolvimento apresentado pelo Grupo 1, construímos uma árvore de associação de ideias, conforme ilustra Figura 33.

Figura 33: Síntese das estratégias metacognitivas do Grupo 1 na atividade do terceiro momento



Fonte: autora.

Assim como na atividade de segundo momento, nesta atividade de terceiro momento um conjunto de desdobramentos denota a interação entre estratégias de naturezas distintas. Em particular, neste caso, foi possível observar que no que concerne aos indicadores das estratégias, conforme o instrumento apresentado, alguns aparecem mais de uma vez no desenvolvimento apresentado, porém com finalidades diversas e implicam em desdobramentos distintos, por exemplo RM5, CC2 e CC3.

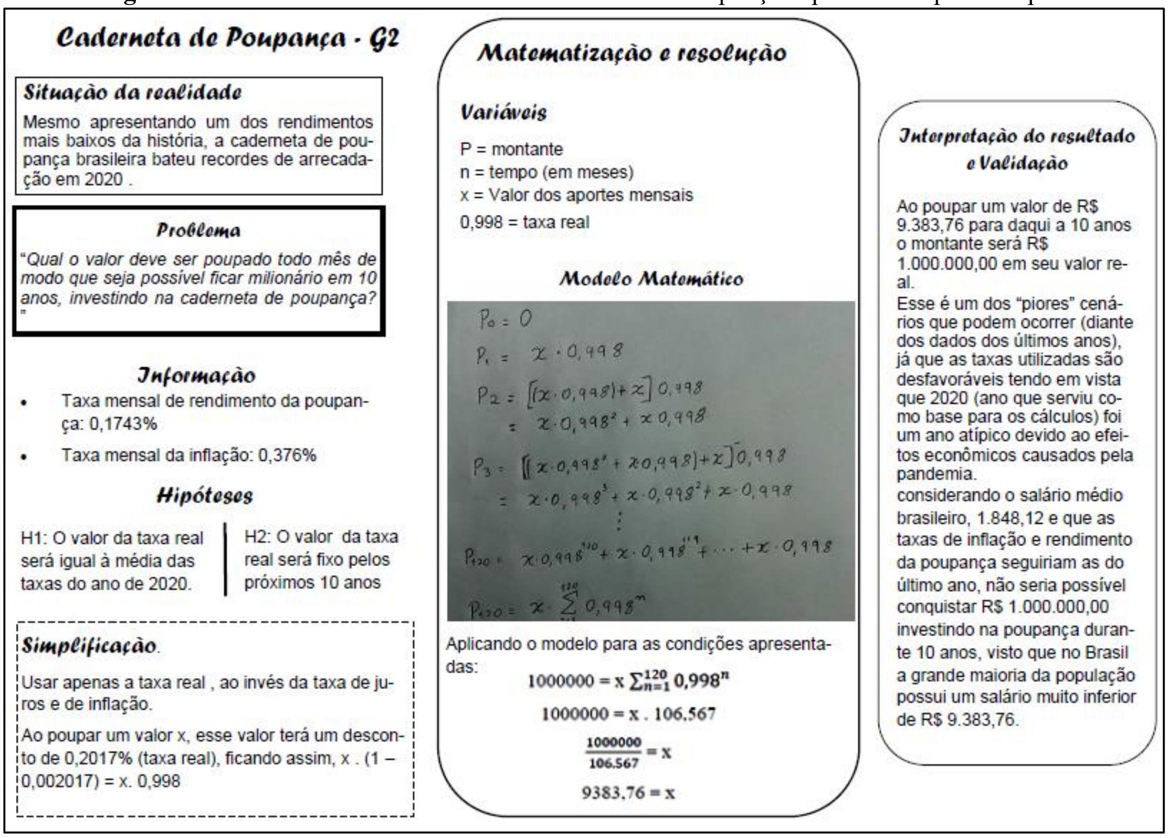
As relações estabelecidas entre as estratégias, que ocasionam os desdobramentos retratados na Figura 33, remetem a considerar que nesta atividade, embora a estratégia de monitoramento seja evidenciada diversas vezes, os alunos parecem usar ou manifestar com mais intensidade as estratégias de conhecimento da cognição (declarativo, processual e condicional). Além disso, é possível notar que todos os indicadores da estratégia de avaliação emergiram ao longo das análises e o uso de estratégia de planejamento se intensifica durante o desenvolvimento da atividade. Essa variedade de indicadores e diversidade de estratégias utilizadas pode sinalizar que, no contexto do terceiro momento de familiarização com modelagem matemática, os alunos, ao serem responsáveis por maior parte do desenvolvimento da atividade, potencializam o uso e manifestação de estratégias metacognitivas.

6.1.2 Estratégias metacognitivas nas atividades desenvolvidas pelo Grupo 2

6.1.2.1 Atividade com a temática caderneta de poupança

A atividade de modelagem do segundo momento, com a temática “Poupança” (AP) e problema enunciado como “Qual o valor deve ser poupado todo mês de modo que seja possível ficar milionário em 10 anos, investindo na caderneta de poupança?”, foi proposta pela professora/pesquisadora e seu desenvolvimento aconteceu durante quatro aulas síncronas e duas assíncronas. O desenvolvimento realizado pelo Grupo 2 (G2) constituído por quatro alunos, a que chamamos E_2, F_2, H_2 e I_2, fornece elementos que compõe nossas análises e discussões nesta seção. As aulas síncronas foram gravadas com o recurso do Google Meet, as quais, junto com o relatório da atividade e os questionários respondidos pelos alunos (Anexo 2), forneceram os dados que compõem nossa análise. A Figura 34 apresenta uma síntese do desenvolvimento apresentado pelo Grupo 2 com o tema descrito.

Figura 34: Síntese do desenvolvimento da atividade “Poupança” apresentado pelo Grupo 2



Fonte: autora.

Discussões iniciais, obtidas das gravações da aula em que o grupo se reuniu para resolver o problema proposto, nos fornecem indícios de estratégias metacognitivas que conduzem o grupo à definição de hipóteses, conforme ilustra a Tabela 22.

Tabela 22: Indícios de estratégias metacognitivas na definição de hipóteses (AP-G2)

<table>
<tr><th>Indicativo da estratégia</th><th>Evidência</th></tr>
<tr><td>(C) CP2 - Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas ou nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.</td><td rowspan="2">Pesq.: Vocês entenderam o problema? O que é para fazer?
E_2: Sim. Nós vamos partir do problema para fazer a modelagem, criar as hipóteses, e tudo mais. Vamos começar pelo último ano, porque você falou que o último ano tinha sido um dos piores. Ao invés de tomar os últimos 8 anos e fazer uma média, dá para fazermos do último ano e calcular quanto essa pessoa teria que investir se seguisse esse parâmetro do pior. Acho que assim fica bom.</td></tr>
<tr><td>(C) RM2 - Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.</td></tr>
<tr><td>(I) CD3 - Considera diferentes maneiras de resolver o problema identificado na situação da realidade.</td><td rowspan="2">Pesq.: E sempre vai acontecer o pior?
E_2: Não. Mas a gente considera o pior, porque se usarmos a média de muitos anos pode abrir margem para mais ou para menos. Se tivermos como base um dos piores anos, conseguimos mostrar que em último caso se ela investir tanto, daqui a 10 anos ela vai conseguir chegar no 1 milhão, mas pode ser que ela chegue antes. Para ter um parâmetro, para ver se é viável ou não.</td></tr>
<tr><td>(I) CC3 - Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução identificado na situação problema.</td></tr>
</table>

Fonte: autora.

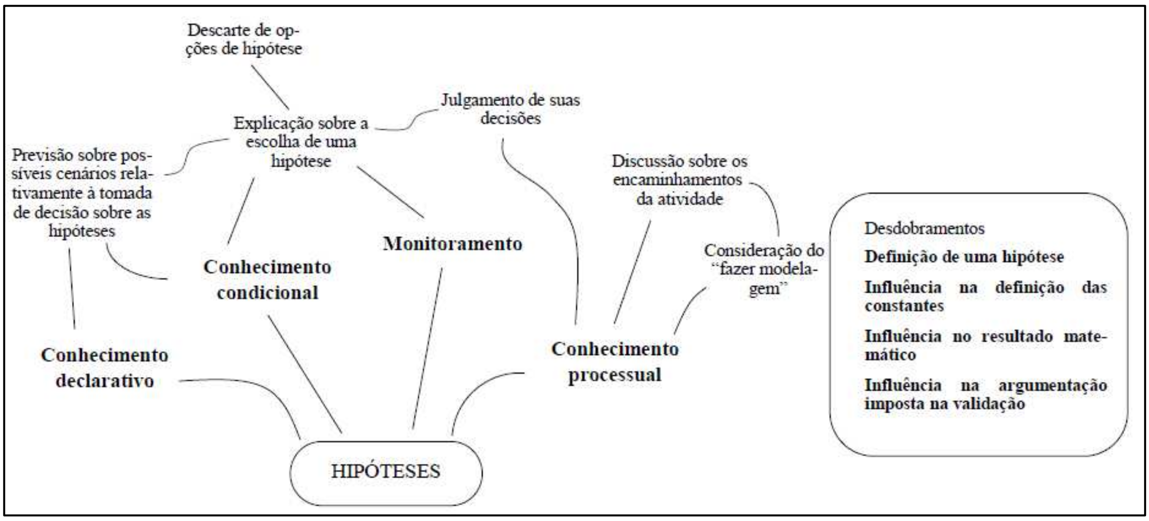
A natureza colaborativa das estratégias identificadas nos excertos da Tabela 22, sugerem que é a indagação da pesquisadora que provoca a externalização de deliberações iniciais do grupo acerca de possíveis encaminhamentos para a resolução do problema. Quando o aluno assume que pretendem partir do problema para "fazer a modelagem", sugere o uso da estratégia de conhecimento processual CP2, e quando cita "criar hipóteses e tudo mais", parece indicar o uso da estratégia de monitoramento RM2. Tais estratégias podem ter contribuído, de imediato, para a representação mental da situação e, mais tarde, ampara as argumentações dos alunos na validação.

O aluno ainda apresenta uma argumentação para defender a viabilidade da opção por assumir determinada hipótese na resolução do problema. Embora essas estratégias tenham sido expostas após a pergunta da professora, o aluno sinaliza já ter uma ideia inicial internalizada. Isso denota que das estratégias de conhecimento declarativo (CD3) e conhecimento condicional (CC3), de natureza individual, decorre a definição da hipótese 1 (H1).

H1: O valor da taxa real será igual à média das taxas do ano de 2020. [relatório dos alunos (AP-G2)]

Para sistematizar as informações apresentadas, sobre a discussão acerca de hipóteses para resolver o problema, elaboramos a árvore da Figura 35.

Figura 35: Estratégias associadas às definição de hipóteses (AP-G2)



Fonte: autora.

Assim, das discussões iniciais que, de modo geral, se concentraram em torno da primeira hipótese assumida, os alunos passam a conversar sobre os efeitos que ela causa na resolução do problema (Tabela 23).

Tabela 23: Indícios de estratégias metacognitivas para a matematização (AP-G2)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(I) **CD4-** Assume lembrar, organizar ou coletar informações acerca da situação antes de iniciar o desenvolvimento da atividade.	H_2: Se pegarmos só o ano passado a inflação é maior que o rendimento, será que compensa? E_2: Como assim? H_2: Então nunca chegaria no 1 milhão. Na verdade, chega no 1 milhão, mas o valor real dele vai ser tipo 800 mil hoje.
(C) **CC4 -** Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.	E_2: Mesmo se tivesse só a inflação sem juros ainda daria para chegar a 1 milhão só que levaria mais tempo, ou a quantia seria maior.
(C) **RM5 -** Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.	H_2: É que tipo assim: Se pegarmos 100 reais e no final do ano ver se está com 1200 reais. Teremos que ver os juros também, não sei quanto que vai dá. Nós juntamos 1200 reais no final do ano e a inflação foi de 4% então o dinheiro. Esse R$ 1000,00 perdeu o valor de compra de 4% entendeu? E_2: Então no caso ele valeria 900 e poucos.
(C) **RP1 -** Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade.	H_2: Isso. Mas aí não compensa. E_2: Nós não temos que dar uma fórmula que compense! H_2: Porque a pergunta é "qual o valor deve ser poupado" por mês né?

Fonte: autora.

A discussão dos alunos sobre como a hipótese age na resolução da situação, o que na modelagem é característico da matematização. É possível perceber que as afirmações dos alunos denotam estratégias de conhecimento da cognição, indicadas por CD4 e CC4. Tais estratégias, de conhecimento declarativo e conhecimento condicional, podem ter contribuído para prever uma resposta matemática considerada a hipótese assumida.

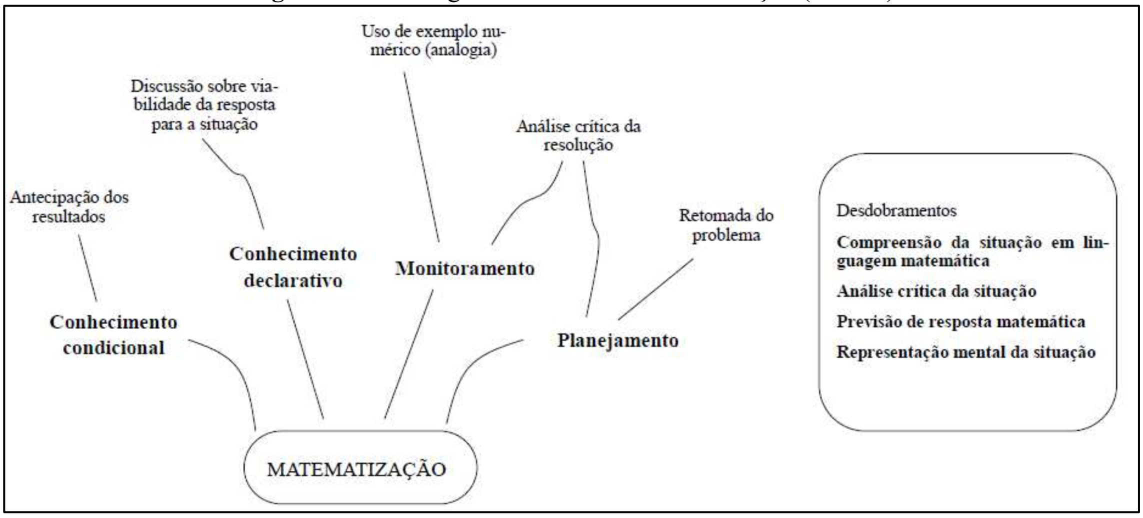
Em consequência, buscando explicar o comportamento da rentabilidade da poupança, o aluno H_2 traz um exemplo numérico e faz uma retomada do problema, para argumentar que a resolução matemática pode ser válida e expressa a percepção do aluno de que "não compensa", o que mostra uma análise crítica da resposta relativamente à situação em estudo. A argumentação do aluno I_2 ilustra como essa percepção permeia todo o desenvolvimento da atividade.

I_2: Inicialmente, imaginamos que o investimento na poupança não era vantajoso. Ao resolver o problema e elaborar o modelo, considerando os juros e a inflação, o resultado obtido com o valor do aporte mensal para se obter o milhão de reais é algo fora da realidade para a maioria dos brasileiros, o que confirma a nossa impressão inicial. [questionário - Anexo2]

Dessa maneira, as estratégias de regulação da cognição, neste caso indicadas pela estratégia de monitoramento (RM5) e de planejamento (RP1), sugerem a compreensão da situação a partir de representações mentais da situação, traçadas enquanto conversam. A conversa entre os alunos pode ter provocados as estratégias, daí o indicativo que elas sejam de natureza colaborativa.

A árvore de associação de ideias da Figura 36, mostra como se deu a manifestação de estratégias metacognitivas pelos alunos enquanto eles realizam a matematização.

Figura 36: Estratégias associadas à matematização (AP-G2)



Fonte: autora.

Embora inicialmente os alunos tenham decidido usar as taxas referentes ao ano de 2020, ainda são empreendidas discussões sobre outras maneiras de resolver o problema, na Tabela 24 é possível notar como elas acontecem.

Tabela 24: Indícios de estratégias metacognitivas sobre resolução do problema (AP-G2)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(I) **(2) CD3 -** Considera diferentes maneiras de resolver o problema identificado na situação da realidade.	H_2: E se pegasse o melhor e o pior ano. E_2: Mas aí o melhor ano não vai acontecer de novo. Teve um ano que gerou 85% de juros, ou dá para fazer duas... uma com o

(I) **CP4 -** Reconhece quando não compreende alguma informação ou conceito e então reporta-se aos colegas, ao professor ou considera pesquisas a respeito. (I) **RP5 -** Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.	melhor e outra com o pior. O modelo vai ser praticamente o mesmo, só vai mudar as médias... I_2: E se pegar as médias? Dá para fazer assim: tipo pegar e calcular a média dos últimos 10 anos. Eu só fiquei em dúvida como faz para calcular os juros: o quanto rende e depois descontar da inflação. H_2: Vou ver no site que ela mandou.
(I) **RM2 -** Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade. (I) **RP8** - Admite dividir o processo de resolução do problema em sub-processos.	E_2: Na nossa hipótese, nós usaremos a parte da inflação ou só vamos nos ater ao fato da poupança mesmo? Precisaremos de mais de uma hipótese? Bom, isso dá para ver depois. Temos algo para começar, já está bom. F_2: Esse ano como a inflação está acelerando, seria interessante, mas, seguinte: talvez poderia fazer com a inflação e sem a inflação e fazer um comparativo.

Fonte: autora.

Quando o grupo pensa e analisa características da situação em estudo, sugere diferentes formas de resolver o problema, na intenção de encontrar um modelo que melhor expresse o "que vai acontecer", manifestando assim a estratégia de conhecimento declarativo (CD3). Nesse excerto do diálogo, os alunos parecem analisar a coerência das informações acerca da situação, antecipando-se, em alguns momentos, à construção do modelo matemático. Essa conversação apresenta traços de que estratégia metacognitiva de planejamento RP5 foi empregada em conjunto pelo grupo.

A estratégia de conhecimento processual (CP4) parece complementar a intenção dos alunos em olhar para as sugestões levantadas no grupo, destacando a influência da professora/pesquisadora nas escolhas dos alunos, tendo em vista que ele vai consultar o site que "ela mandou". Isso pode ser observado nas respostas dos alunos ao questionário (Anexo 2) quanto as informações assumidas para o desenvolvimento da atividade.

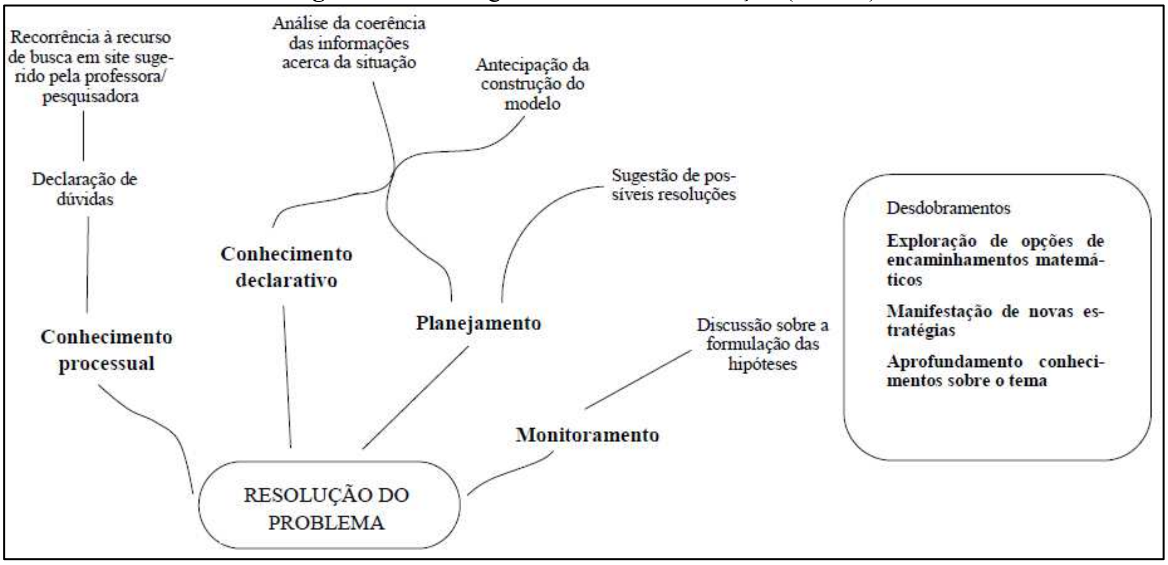
Assinale, dentre as opções, uma alternativa que melhor representa informações acerca dos dados utilizados pelo seu grupo na resolução do problema:
E_2, F_2 - Utilizamos os dados foram fornecidos durante a aula.
H_2, I_2 - Usamos o que foi fornecido durante a aula e complementamos com uma nova busca. [Anexo 2]

Ainda, parece ser a estratégia indicada por CD3 que requer estratégias de monitoramento (RM2) e de planejamento (RP8), que são responsáveis pela discussão sobre a formulação das hipóteses e pela sugestão de possíveis resoluções.

As estratégias metacognitivas embora identificadas num contexto de diálogo entre os alunos do grupo, parecem ser de natureza individual devido ao fato de que cada aluno apresenta a sua própria forma de pensar sobre algum aspecto da situação as quais não são provocadas pela interação com o outro.

A árvore de associação de ideias da Figura 37 visa especificar as estratégias metacognitivas emergentes e seus desdobramentos para a atividade de modelagem, durante discussões acerca da resolução do problema.

Figura 37: Estratégias associadas à resolução (AP-G2)



Fonte: autora.

Na Tabela 25 apresentamos excertos dos diálogos dos alunos que fornecem indícios de estratégias metacognitivas empregadas durante simplificação dos dados.

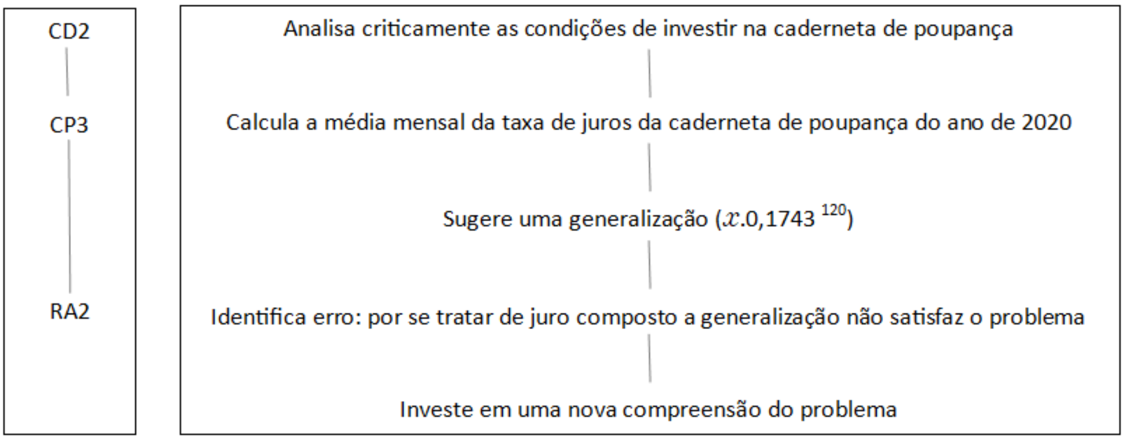
Tabela 25: Indícios de estratégias metacognitivas na simplificação dos dados (AP-G2)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(I) **CD2 -** Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.	E_2: Pelo que eu entendi eles usaram o fato da inflação estar mais alta do que a poupança para mostrar que a poupança não é tão lucrativa quanto o povo acha. Vou fazer um cálculo aqui, só para ter uma noção quanto que daria a poupança só do último ano. Estou tentando somar aqui. No ano passado deu uma média de 0,1743, aproximadamente. F_2: A média do ano passado? E_2: Sim. Então basicamente seria x que multiplica 0,1743 elevado à 120. Daí os 120 meses. H_2: Você está usando a fórmula do juro composto? E_2: Calma, deixa eu ver. Eu acho que está errado. Eu estava considerando que a pessoa investe uma quantia, quanto que renderia em 10 anos, mas tem que considerar o fato de que ela investe todo mês. Aí nós só temos que encontrar a fórmula, uma função, que dê o quanto isso vai render. Só não consegui reduzir ela, ainda não estou conseguindo pensar.
(I) **CP3** - Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas na resolução.	
(I) **RA2 -** Identifica equívocos ou distorções em relação ao conhecimento matemático.	

Fonte: autora.

As expressões do tipo "Pelo que **eu** entendi", "**Eu** acho que está errado" e "**[eu]** ainda não estou conseguindo pensar" denotam que as estratégias metacognitivas, de natureza individual, estão imbricadas ao processo e, aparentemente, são usadas de forma consciente pelos alunos. É notório que as estratégias de conhecimento da cognição quanto de regulação da cognição de forma inter-relacionadas. A linha narrativa apresentada na Figura 38 ilustra essa inter-relação no decorrer dos procedimentos assumidos pelos alunos para realizar a simplificação dos dados.

Figura 38: Linha narrativa de simplificação dos dados do problema AP-G2



Fonte: autora.

O diálogo dos alunos no leva a presumir que a resolução está relacionada tanto ao que o aluno sabe sobre a situação (inflação ou benefício da poupança), indicando a estratégia de conhecimento declarativo (CD2), quanto ao que o aluno sabe de matemática, como quando identifica o conteúdo de juros compostos e cita termos como “função”, “fórmula” e “média”, parece sinalizar a estratégia de conhecimento processual (CP3).

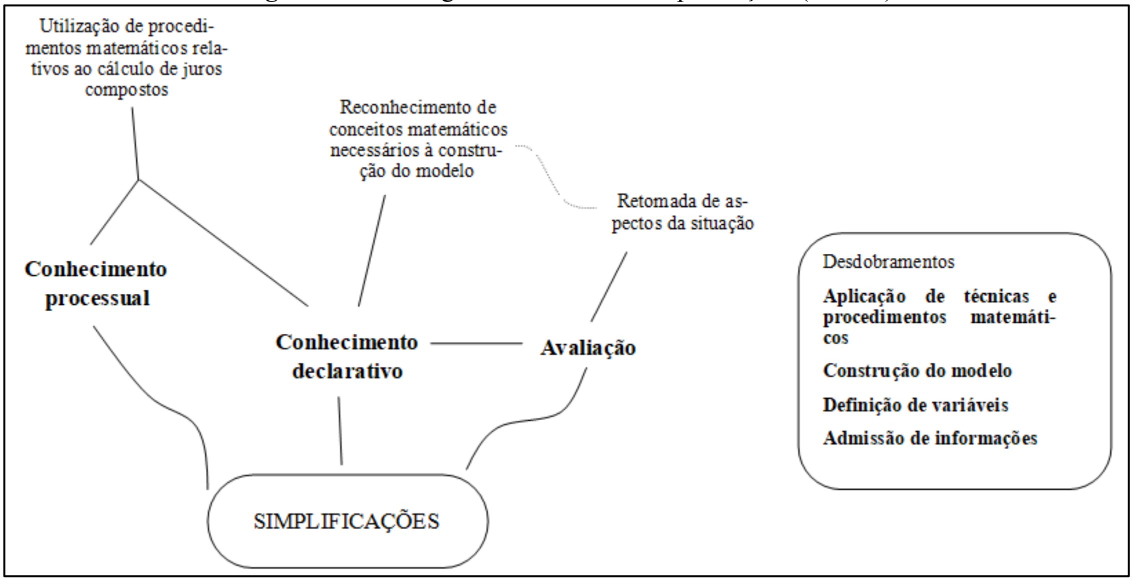
Assim, a interação entre as estratégias de conhecimento da cognição, neste caso podem ter favorecido a consideração das informações que orientam a resolução matemática dos alunos, como a taxa mensal de juros e de inflação, conforme consta no relatório dos alunos.

Informações
· Taxa mensal de rendimento da poupança: 0,1743%
· Taxa mensal da inflação: 0,376% [relatório dos alunos (AP-G2)]

Além disso, as estratégias que denotam os conhecimentos dos alunos, seja acerca da situação ou da matemática, podem ter possibilitado ao aluno E_2 identificar um equívoco durante a resolução, o que pode ter sido consequência do uso da estratégia de avaliação RA2. Pois, conhece o assunto, conteúdo ou como utilizá-lo, lhe permite pensar sobre e afirmar “acho que está errado”. Isso demanda uma retomada de aspectos da situação, ao passo que reconhecem conceitos matemáticos úteis na construção do modelo.

Nossas interpretações foram organizadas por meio de duas árvores de associação de ideias, conforme Figura 39.

Figura 39: Estratégias associadas às simplificações (AP-G2)



Fonte: autora.

Essa tentativa de simplificar os dados conduz a discussões com aspectos de matematização, conforme Tabela 26.

Tabela 26: Indícios de estratégias metacognitivas no matematização e resolução (AP-G2)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(I) **RP4 -** Identifica conteúdos ou procedimentos que podem ser úteis para resolver o problema.	E_2: Eu calculei a média de juros do ano passado, deu 0,1743. Tem que investir todo mês uma quantia além do que rendeu, porque não é quanto tem que investir e deixar lá até dar 1 milhão. Todo mês vai por uma mesma quantidade de dinheiro. H_2: Entendi. Já vai somando juros. Tem aquela função do montante. Que se eu não me engano é M=C(1+i)^n. F_2: Dos juros compostos. I2: Mas eu estou meio perdido, como funciona a questão da taxa? Estamos considerando a inflação? E_2: Estamos considerando dos registros dos juros dos últimos anos. Sabemos que a taxa varia a cada ano, mas podemos simplificar, que a taxa vai ser constante, tanto do juro quanto da inflação. H_2: Sim, mas aí não tem como colocar a inflação nisso. Será que teria algum jeito de só abater a inflação desse juro? Fica mais fácil. I_2: Não é só fazer um menos o outro? Aí fica um montante só. E_2: Será que vai dar a mesma coisa? Para multiplicar a inflação, teria que multiplicar no caso por 0,9962 já descontado o 0,37%. E no caso dos juros teria que multiplicar por 1,001743... Acho que vai dar certo descontar um do outro.
(C) **RP5 -** Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.	
(C) **RM3** - Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece não entender algo ou não consegue prosseguir com a atividade.	
(C) **RP3 -** Planeja a resolução do problema levando em consideração diferentes possibilidades.	
(C) **CP3** - Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas na resolução.	
(I) **RM5**- Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.	H_2: Deu um número negativo? Vai perder dinheiro né? E_2: Sim, porque vai ser descontado. Eu peguei como exemplo 10 reais de investimento, e fiz separadamente, calculei com os juros aí deu um valor daí descontei a inflação... aí deu 9,97. Eu peguei a inflação e subtraí o juro e aí usei só esse valor em cima dos 10 reais, deu os mesmos 9,97. Acho que é mais fácil assim: descontamos os

(C) **CC3 -** Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução identificado na situação problema. (I) **RM4 -** Menciona verificações pontuais em vários momentos do desenvolvimento da atividade.	juros da inflação e esse valor a gente usa... vai ser negativamente 0,9979. Se você descontar um do outro vai dar 0,2017... aí você tira 100% disso... vai dar 99,79%. Então 0,9979. Aí todo mês tem que multiplicar por 0,998. Que seria a inflação menos os juros. Está certo, né? (sic)

Fonte: autora.

A interação entre o grupo pode ter favorecido a manifestação de metacognição dos alunos, quando estes reconhecem “entendi”, “estou meio perdido” ou quando fazem verificações pontuais, enquanto disponibilizam seus pensamentos para os colegas, como por exemplo, a expressão “está certo, né?”.

No diálogo inicial a estratégia de planejamento parece sob diversos contextos, conforme os indicadores RP3, RP4 e RP5, e, ao interagir com estratégias de monitoramento (RM3) e de conhecimento processual (CP3) quando os alunos discutem sobre as variáveis utilizadas, sobre de possíveis tratamentos dos dados e questionam sobre o uso de novo encaminhamento, provocam, na atividade, a definição da hipótese 2 (H2) assumida pelo grupo.

H2: O valor da taxa real será fixo pelos próximos 10 anos. [relatório dos alunos (AP-G2)]

A análise crítica dos resultados encontrados relativamente a aspectos da situação em estudo (deu negativo porque vai perder dinheiro), respaldada por uma “simulação” com valores hipotéticos do que o modelo pode fornecer, denota o uso de estratégias de monitoramento (RM4 e RM5) e conhecimento condicional (CC3). Tais estratégias parecem desencadear não apenas a compreensão dos cálculos matemáticos, mas compreendê-los relativamente ao que requer a situação problemática, utilizando recursos como exemplos numéricos hipotéticos para chegar a delinear a construção do modelo algébrico. Isso implica na simplificação matemática relativamente ao que sabe sobre a situação.

Simplificação:
Usar apenas a taxa real , ao invés da taxa de juros e de inflação.
Informações matemáticas:
Ao poupar um valor x, esse valor terá um desconto de 0,2017% (taxa real), ficando assim,
$x.(1-0,002017)=x.0,998$
[relatório dos alunos (AP-G2)]

A resposta de F_2 e H_2 sinaliza pela decisão do encaminhamento que parecia "mais fácil", o que aparece inclusive na fala de H_2 (Será que teria algum jeito de só abater a inflação desse juro? Fica mais fácil.). Já para E_2, que no diálogo parece ter mais familiaridade e entendimento de todo os procedimentos matemáticos, a resposta é outra. Isso denota, em nosso entendimento, que os alunos têm consciência das estratégias utilizadas relativamente aquilo que lhe é mais significativo durante o processo ou que requer seu envolvimento.

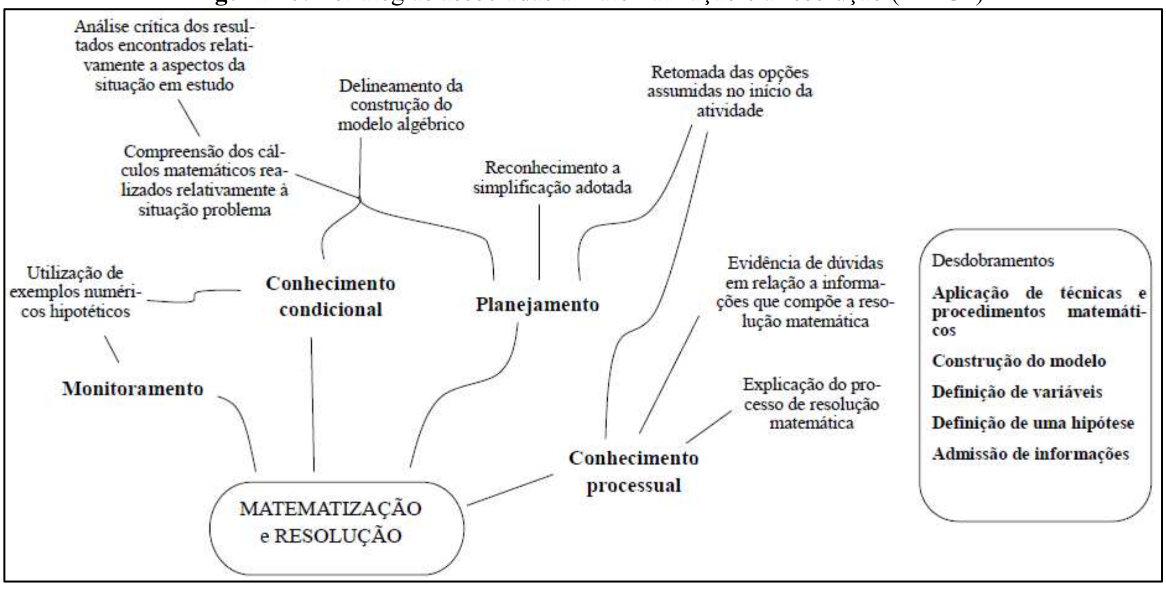
As estratégias de natureza colaborativa, nos excertos apresentados, parecem ser consequência de uma estratégia de natureza individual inicial, ou seja, uma estratégia individual pode ter sido ponto de partida para a interação dos alunos do grupo e para as estratégias metacognitivas colaborativas decorrentes dessa interação, sinalizando que as estratégias das duas naturezas se complementam.

Quando questionados sobre a simplificação dos dados, os alunos dividem opiniões, sobre como compreendem que ela se deu, conforme as respostas apresentadas à uma questão do questionário (Anexo2).

Para realizar a simplificação dos dados, o grupo:
E_2, I_2 - Fez um tratamento e seleção dos dados relevantes para a resolução do problema.
F_2, H_2 - Optou por selecionar os dados que proporcionariam uma resolução mais fácil.
[Anexo 2]

Com base nas discussões apresentadas elaboramos a árvore de associação de ideias da Figura 40 que ilustra estratégias metacognitivas durante a matematização e resolução da atividade.

Figura 40: Estratégias associadas à matematização e à resolução (AP-G2)



Fonte: autora.

O uso dos dados, simplificações e hipóteses assumidas, conduz o trabalho dos alunos para a construção do modelo matemático conforme apresenta o diálogo apresentado na Tabela 27.

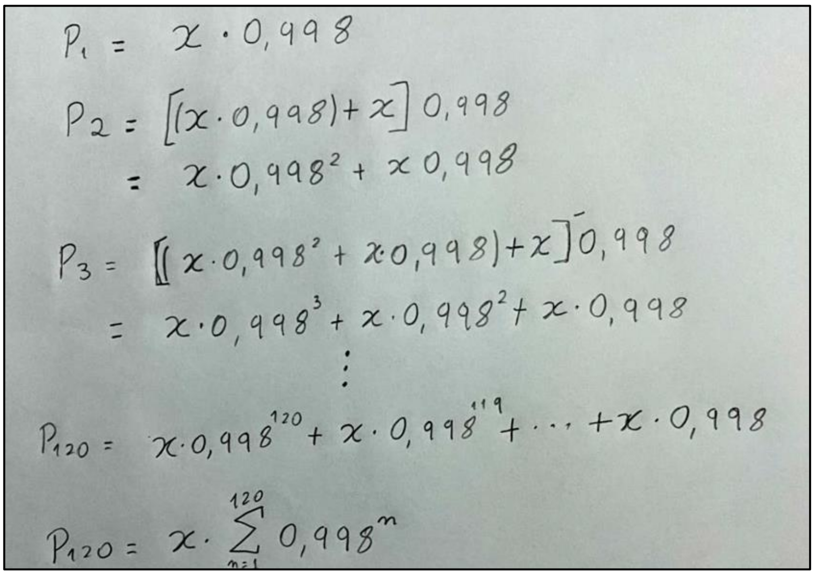
Tabela 27: Indícios de estratégias metacognitivas na obtenção do modelo (AP-G2)

Indicativo da estratégia	Evidência
(I) **RM7 -** Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram. (C) **RA2** - Identifica equívocos ou distorções em relação ao conhecimento matemático.. (I) **RP4-** Identifica conteúdos ou procedimentos que podem ser úteis para resolver o problema. (C) **CP1 -** Menciona utilizar estratégias que funcionaram em atividades de modelagem anteriores.	H_2: Podemos fazer: somatório de i=1 até 120, porque é 120 meses, que é igual a x_i *0,998. E_2: Não necessariamente. Do jeito que você falou, seria quanto que a pessoa tem que investir e largar lá para dar 1 milhão. Só que todo mês ele vai pôr a mesma quantidade de dinheiro. H_2: Entendi. Cada mês vai ter um x novo. E_2: Acho que eu consegui. Deixa eu ver. Vai seguir um padrão. Não sei se vai dar para resumir isso aqui depois, mas provavelmente vai dar para pôr em evidência o 0,998. Por exemplo: o 1º mês fica 0,998*x, o 2º mês, já somado o valor com os juros, fica $x*0{,}998^2 + x*0{,}998$, o 3º mês fica $x*0{,}998^3 + x*0{,}998^2 + x*0{,}998$. H_2: É igual o problema das abelhas, lembra? E_2: Ficará $x*0{,}998^{120} + x*0{,}998^{119}$, até o expoente 1. H_2: Então é uma regressão. E_2: Podemos fazer um somatório com o 0,998. Seria somatório de 1 a 120 e $0{,}998^x$. F_2: Nas abelhas foi usado soma de PG, mas não sei se nesse aqui dá para fazer PG né?
(I) **CD5 -** Avalia se seus conhecimentos atendem ao que precisa saber para desenvolver a atividade de modelagem. (I) **RP5 -** Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação. (C) **RM4 -** Menciona verificações pontuais em vários momentos do desenvolvimento da atividade.	E_2: Acharam como resolve somatório? Eu achei uma calculadora online, mas não deu certo. H_2: Eu não sei. E_2: O somatório que teremos que fazer é da taxa. Esse cálculo que eu fiz é o correto ou tem alguma coisa errada? H_2: O problema é o somatório. E tem que igualar isso a 1 milhão. Tem que aplicar um limite nele? E_2: Podemos estruturar como chegamos a esse modelo e tentamos resolver esse somatório.

Fonte: autora.

Na Tabela 27, o diálogo empreendido revela a intenção dos alunos de realizar um refinamento do modelo, quando, do padrão visualizado surge a noção intuitiva de função somatório. Isso pode ser decorrente do uso de estratégias metacognitivas de monitoramento (RM5), planejamento (RP4) e conhecimento processual (CP1), ou seja, tais estratégias colaboram para a obtenção do modelo matemático, conforme a Figura 41.

Figura 41: Obtenção do modelo matemático (AP-G2)



$$P_1 = x \cdot 0{,}998$$
$$P_2 = [(x \cdot 0{,}998) + x]\, 0{,}998$$
$$= x \cdot 0{,}998^2 + x\, 0{,}998$$
$$P_3 = [(x \cdot 0{,}998^2 + x\, 0{,}998) + x]\, 0{,}998$$
$$= x \cdot 0{,}998^3 + x \cdot 0{,}998^2 + x \cdot 0{,}998$$
$$\vdots$$
$$P_{120} = x \cdot 0{,}998^{120} + x \cdot 0{,}998^{119} + \cdots + x \cdot 0{,}998$$
$$P_{120} = x \cdot \sum_{n=1}^{120} 0{,}998^n$$

Fonte: relatório dos alunos *(AP-G2)*.

Chegar a esse modelo, é decorrência também da estratégia de avaliação RA2 e pode ter contribuído para que, ao reconhecer o conteúdo, o aluno compreendesse de forma equivocada a matemática utilizada quanto à situação, o equívoco é percebido pelo colega do grupo que parece estar atento à resolução do colega e toma parte do raciocínio do outro. Daí a importância do trabalho colaborativo, que sugere que embora a metacognição seja individual, no contexto da modelagem é influenciada pelo grupo, conforme aponta Vorhölter (2019).

Tendo chegado a um modelo, descrito por um somatório, os alunos discutem sobre como resolvê-lo, para isso estabelecem comparação com outra atividade desenvolvida durante as aulas da disciplina, se referindo ao problema das abelhas[13]. Embora reconheçam similaridades entre as duas atividades, os alunos demonstram dificuldade com o conteúdo matemático, quando começam a pensar "como resolve somatório", precisando aprender ou lembrar conteúdo.

O grupo prossegue na intenção de investir estratégias para aprender como resolve "somatório". As estratégias de conhecimento declarativo (CD5), monitoramento (RM4) e planejamento (RP5) conduzem os alunos a reconhecer como resolvem a situação a partir do modelo proposto, o que culmina na obtenção da resposta matemática para o problema, apresentada na Figura 42.

Figura 42: Aplicando o modelo para as condições apresentadas

---

[13] Disponível em: BASSANEZZI, R. C. Ensino – aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Editora Contexto, 2002. p.225-229

$$1000000 = x \sum_{n=1}^{120} 0{,}998^{n}$$

$$1000000 = x \,.\, 106{,}567$$

$$\frac{1000000}{106{,}567} = x$$

$$9383{,}76 = x$$

Fonte: relatório dos alunos *(AP-G2)*

A Tabela 28 ilustra indícios de estratégias metacognitivas identificadas enquanto os alunos realizam a validação, ao final da atividade.

Tabela 28: Indícios de estratégias metacognitivas na validação (AP-G2)

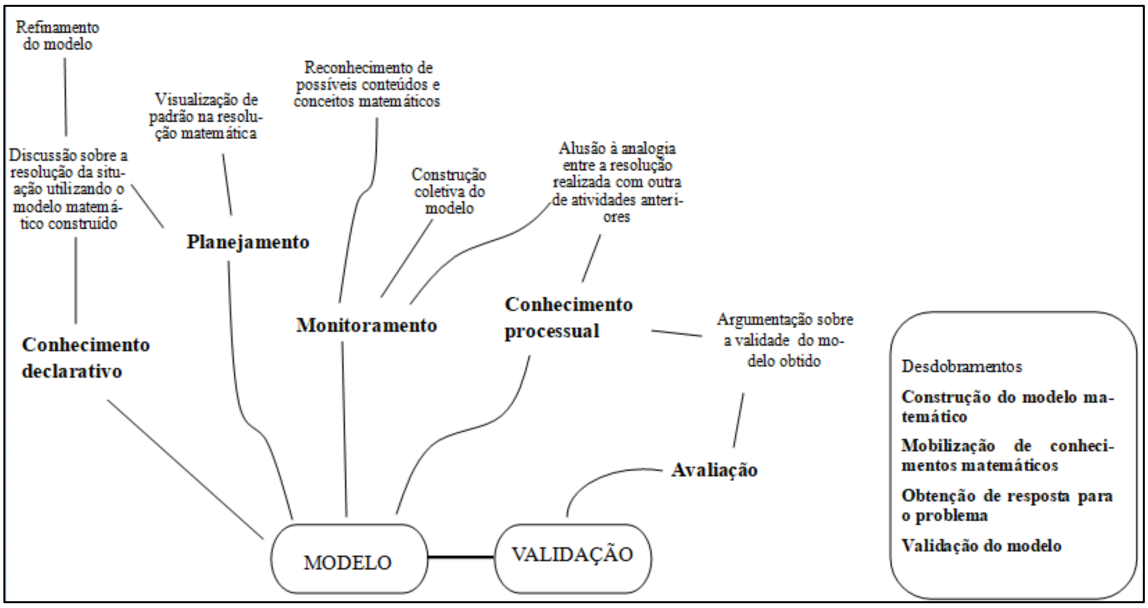
Indicativo da estratégia	**Evidência**
(I) **CP2 -** Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas ou nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.	E_2: Os resultados foram condizentes com a situação. Como os juros estavam rendendo menos do que a inflação, o resultado deveria ser um valor alto ao ponto de nem todos conseguirem investir e conseguir se tornar milionário.
(I) **RA3 -** Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema	H_2: O modelo está de acordo com os dados utilizados, pois a inflação era maior que o juro, assim o aporte deveria ser muito alto, não compensando ou se torna inviável investir na poupança se o objetivo for se tornar milionário, tendo como base o último ano.

Fonte: autora.

De modo geral, os quatro alunos do grupo tecem considerações muito similares às respostas de E_2 e H_2, cada um descreve sua forma de ver o resultado encontrado, daí o indicativo de que as estratégias metacognitivas identificadas são de natureza individual. As argumentações dos alunos quanto à validade, tanto do modelo, quanto da resposta ao problema, denotam que a validação foi realizada considerando não apenas a verificação da matemática utilizada, mas dos dados, das hipóteses e das decisões acerca dos encaminhamentos por eles assumidos. Assim, a estratégia de conhecimento processual (CP2) e a estratégia de avaliação (RA3) parecem contribuir para a aceitação da resposta e validação do modelo construído.

A árvore da Figura 43 relaciona os principais desdobramentos que as estratégias metacognitivas inferem na obtenção do modelo e na validação.

Figura 43: Estratégias associadas à construção do modelo e validação (AP-G2)



Fonte: autora.

As estratégias metacognitivas que inferem desdobramentos para o desenvolvimento da atividade do segundo momento, com o tema Poupança, desenvolvida pelo Grupo 2, foram identificadas a partir do uso do instrumento. Assim, retomamos tal instrumento a fim de notabilizar os indicativos das estratégias manifestadas na atividade em pauta, obtendo as informações presentes no Quadro 9.

Quadro 9: Estratégias metacognitivas identificadas na atividade AP-G2.

Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento declarativo identificados nas ações dos estudantes	I	C
CD1 - Admite seus pontos fortes e pontos fracos relativamente ao que precisa saber para desenvolver a atividade.		
CD2 - Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.	1	
CD3 - Considera diferentes maneiras de resolver o problema identificado nessa situação.	2	1
CD4 - Assume lembrar, organizar ou coletar informações acerca da situação antes de iniciar o desenvolvimento da atividade de modelagem.	1	
CD5 - Avalia se seus conhecimentos atendem ao que precisa saber para desenvolver a atividade de modelagem.	1	
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento processual identificados nas ações dos estudantes	I	C
CP1 - Menciona utilizar estratégias que funcionaram em atividades de modelagem anteriores.	1	
CP2 - Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas e nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.	1	1
CP3 - Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas para desenvolver a resolução.	1	1
CP4 - Quando não compreende alguma informação ou conceito, reporta-se aos colegas, ao professor ou realiza pesquisas a respeito.	1	
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento condicional identificados nas ações dos estudantes	I	C
CC1 - Reconhece que usa diferentes estratégias para definir seus procedimentos de acordo com as etapas do desenvolvimento da atividade de modelagem.		
CC2 - Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos.		
CC3 - Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução do problema identificado na situação da realidade.	1	1
CC4 - Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.		1
CC5 - Declara potencializar seus conhecimentos e competências, frente às suas dificuldades.		
Regulação da cognição: Indicadores de planejamento identificados nas ações dos estudantes	I	C
RP1 - Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade		1
RP2 - Define os objetivos da atividade antes de iniciar seu desenvolvimento.		
RP3 - Planeja a resolução do problema levando em consideração diferentes possibilidades que podem viabilizá-la.		1
RP4 - Identifica conteúdos ou procedimentos que podem ser úteis para resolver o problema.	2	
RP5 - Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.	2	1
RP6 - Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.		
RP7 - Estabelece os passos a serem seguidos na condução da atividade.		
RP8 - Admite dividir o processo de resolução do problema em sub-processos.	1	
Regulação da cognição: Indicadores de monitoramento identificados nas ações dos estudantes	I	C
RM1 - Reconhece a finalidade do modelo matemático para o estudo da situação da realidade.		
RM2 - Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.	1	1
RM3 - Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece que não entende algo ou quando não consegue prosseguir com a atividade.		1
RM4 - Menciona verificações pontuais durante o desenvolvimento da atividade.	1	1
RM5 - Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.	1	1
RM6 - Identifica erros e aplica uma nova estratégia para corrigi-los.		
RM7 - Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram.	1	
Regulação da cognição: Indicadores de avaliação identificados nas ações dos estudantes	I	C
RA1 - Identifica quando o modelo construído não é adequado e então investe na construção de um novo modelo.		
RA2 - Identifica equívocos ou distorções em relação ao conhecimento matemático.	1	1
RA3 - Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema.	1	

RA4 - Reconhece que haveriam outras maneiras de conduzir o desenvolvimento da atividade depois de concluir seu trabalho.		

Fonte: autora.

O Quadro 9 retrata o uso do instrumento apresentado, há indicativos de que as seis estratégias metacognitivas foram manifestadas pelos alunos ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem, sob diferentes indicadores.

Na Tabela 29, é possível observar a incidência de cada estratégia em relação à sua natureza individual ou colaborativa.

Tabela 29: Ocorrência de estratégias metacognitivas individuais e colaborativas em AP-G2

	Caderneta de poupança	
Estratégias	**I**	**C**
Conhecimento declarativo	5	1
Conhecimento processual	4	2
Conhecimento condicional	1	2
Planejamento	5	3
Monitoramento	4	4
Avaliação	2	1
Total	21 61,76%	13 38,24%

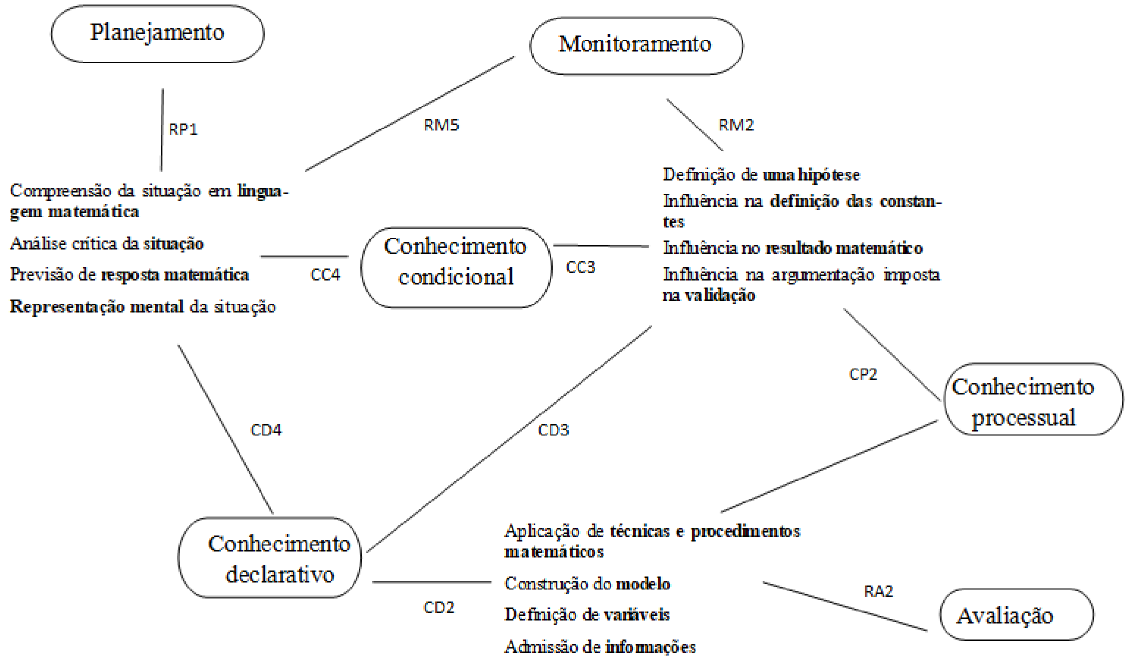
Fonte: autora.

Na atividade em pauta, as estratégias metacognitivas de natureza individual são predominantes, principalmente no caso das estratégias de conhecimento da cognição (declarativo, processual e condicional). Assim, percebemos que mesmo havendo interação entre os alunos, a maioria das estratégias parecem ser de natureza individual, no contexto desse grupo de alunos e dessa atividade, ou seja, cada aluno usa estratégias de forma independente.

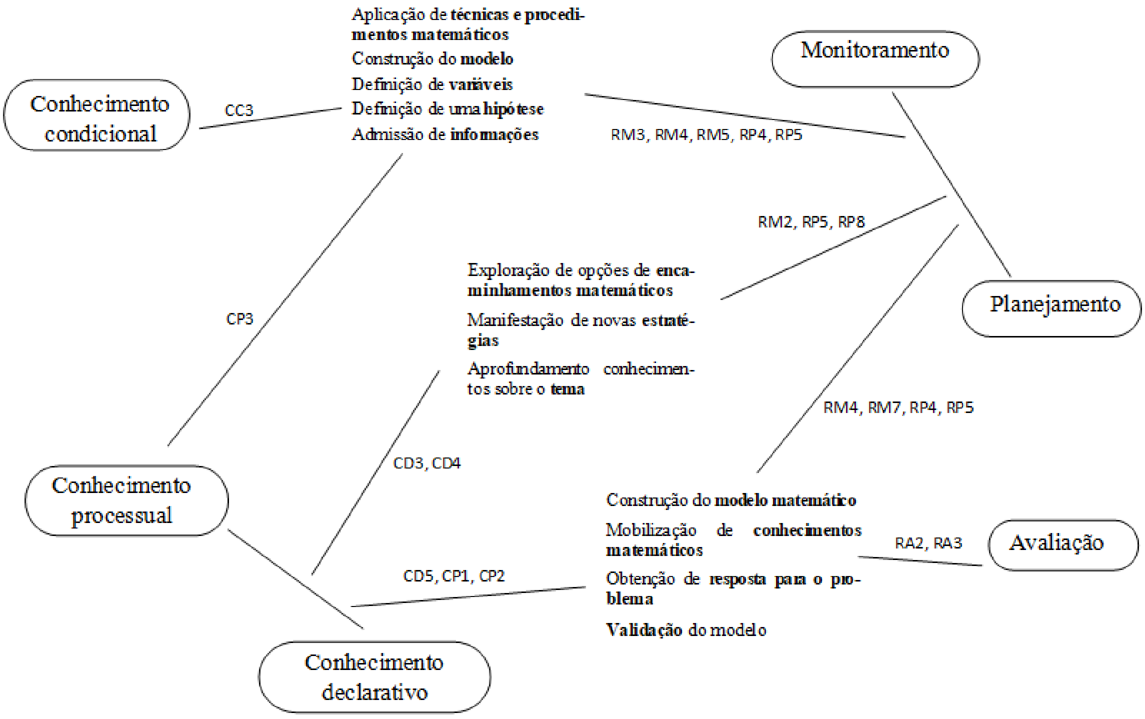
Das informações identificadas com o uso do instrumento, conforme Quadro 9, sistematizamos, os desdobramentos decorrentes das estratégias metacognitivas para a atividades de modelagem matemática com o tema Poupança, no desenvolvimento apresentado pelo Grupo 2, construímos duas árvores de associação de ideias. A parte 1 (Figura 44a) diz respeito às estratégias relacionadas a etapas iniciais da modelagem (hipóteses, simplificações e matematização). A parte 2 da árvore (Figura 44b) relaciona-se às etapas finais (resolução, modelo e validação). Nesta atividade essa divisão foi necessária para que a disposição e arranjo das diversas interações entre as estratégias e os entrelaçamentos entre elas seja apresentado de forma organizada.

Figura 44: Síntese das estratégias metacognitivas do Grupo 2 na atividade do segundo momento

(a)



(b)



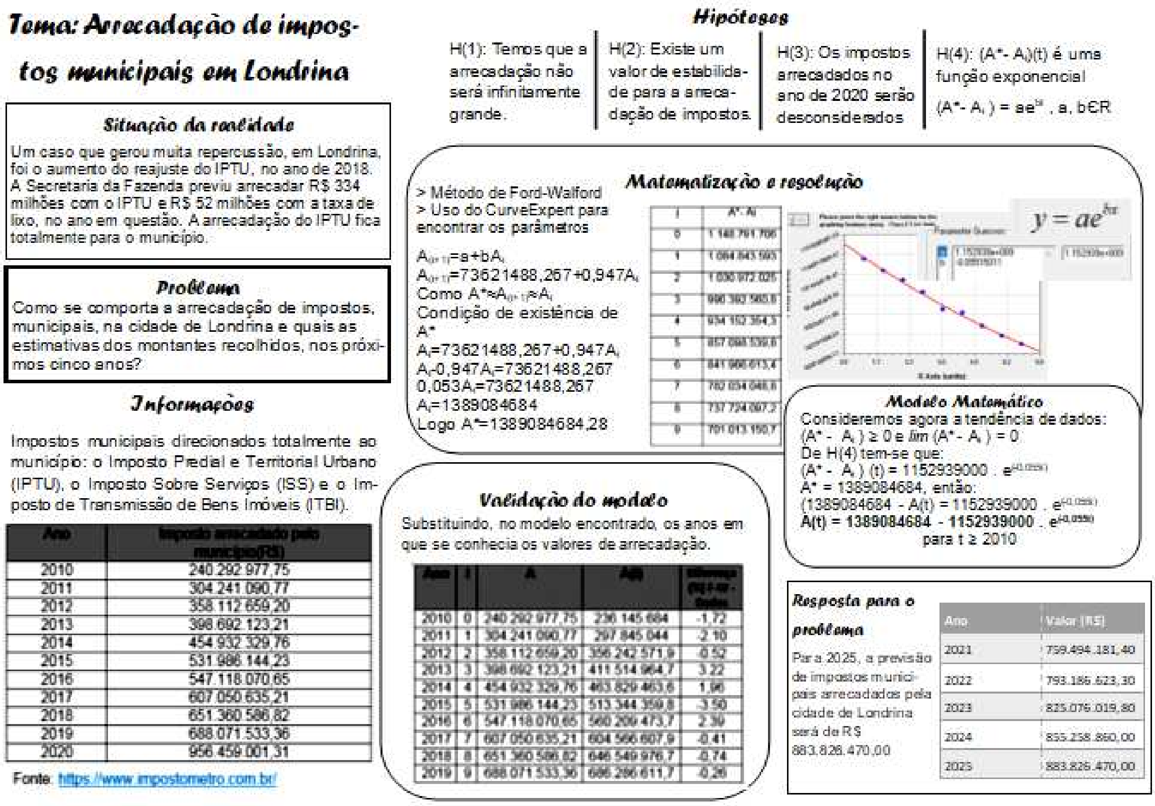
Fonte: autora.

De modo geral, a árvore ilustra as interações diversificadas que ocasionam desdobramentos para a atividade de modelagem matemática em pauta. Neste grupo, particularmente nesta atividade, parece haver um equilíbrio entre as estratégias decorrentes do conhecimento da cognição e da regulação da cognição.

6.1.2.2 Atividade com a temática arrecadação de impostos na cidade de Londrina

Na atividade, do terceiro momento desenvolvida pelo Grupo 2, os alunos tinham a intenção de determinar um modelo matemático para analisar o valor estimado da arrecadação de impostos na cidade de Londrina. O trabalho dos alunos ocorreu durante seis aulas síncronas e seis assíncronas. O desenvolvimento realizado pelo Grupo 2 (G2) constituído por quatro alunos, a que chamamos de D_2, E_2, F_2 e I_2, fornece elementos que compõe nossas análises e discussões nesta seção. As aulas síncronas foram gravadas com o recurso do Google Meet, as quais, junto com o relatório da atividade e os questionários respondidos pelos alunos (Anexo 2), forneceram os dados que compõem nossa análise. A Figura 45 apresenta uma síntese do desenvolvimento apresentado pelo Grupo 2 com o tema descrito.

Figura 45: Síntese do desenvolvimento da atividade "Arrecadação de impostos em Londrina" apresentada pelo Grupo 2



Fonte: autora.

Entretanto, até definir esse tema, os alunos passaram por outras possibilidades, conforme retrata o diálogo apresentado na Tabela 30. Ao considerarem que a problemática definida demandaria uma abordagem muito ampla de variáveis e da dificuldade de realizar uma delimitação, inconsistência e volatilidade dos dados, bem como das exigências para que o problema de palavras fosse reestruturado como uma situação problemática característica de uma atividade de modelagem matemática, os alunos optaram por abandonar a ideia inicial e investir em um novo tema de investigação (Tabela 30).

Tabela 30: Indícios de estratégias metacognitivas na escolha do tema (AI-G2)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(C) **CP1 -** Menciona utilizar estratégias que funcionaram em atividades de modelagem anteriores.	D_2: Nós pensamos em resolver um problema, tomando como base a atividade da poupança. Só que olhando para o investimento em ações da empresa X. Nós pensamos em investigar em quanto tempo uma pessoa conquistaria a casa própria, no valor de R$ 150.000,00, investindo nessa ação da empresa X e quanto tempo ela levaria investindo na poupança.
(C) **RM3 -** Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece não entender algo ou não consegue prosseguir com a atividade.	Prof.: Mas veja, essa situação é hipotética, isso não se caracteriza uma atividade de modelagem matemática, vocês estão resolvendo um problema. Precisa de um significado num determinado contexto. E_2: Sim, nós ficamos em dúvida se isso seria um bom problema para uma atividade de modelagem e se poderíamos investir nele.
(I) **CD2 -** Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade. (I) **CD4 -** Assume lembrar, organizar ou coletar informações acerca da situação antes de iniciar o desenvolvimento da atividade.	I_2: Escolhemos esse tema sobre os impostos porque é bastante polêmico e debatido. [*fala sobre a temática*]. Estudando sobre a temática de impostos, nos deparamos com uma reportagem que dizia que no ano de 2017 para 2020 os moradores de Londrina perceberam que houve um reajuste de mais de 400% no valor do IPTU por exemplo uma mulher pagou, em 2018, R$ 592,00 sendo que em 2017 pagava R$ 104,00. Então pensamos em estudar alguma coisa sobre impostos a nível Municipal, que são o IPTU, o ISS e o ITBI, já que o valor arrecadado com esses impostos é direcionado totalmente ao município, especificamente na cidade de Londrina. Nosso problema é: Como se comporta a arrecadação de impostos, municipais, na cidade de Londrina e quais as estimativas dos montantes recolhidos, nos próximos cinco anos?

Fonte: autora.

Os excertos apresentados na Tabela 30 denotam que os alunos, inicialmente, haviam considerado outro tema e problema. A primeira ideia do grupo, que estava relacionado ao estudo do investimento em ações, parece ter sido decorrente do uso da estratégia de conhecimento processual (CP1), em que busca aproximações com sua experiência anterior com a atividade da poupança. Após as ponderações da professora, os alunos reconhecem que têm dúvidas se o problema poderia desencadear uma atividade de modelagem matemática satisfatória, o que os faz evidenciar a estratégia de monitoramento (RM3), que conduz à mudança de tema. As estratégias, nesse caso, parecem ser de natureza colaborativa, pois o aluno apresenta uma descrição das intenções construídas em grupo e, ainda, carrega indícios da influência da intervenção da professora.

Quando o aluno argumenta sobre a escolha de "um tema polêmico e debatido" evidencia o indicativo CD2, enquanto que, ao descrever sobre a reportagem que serviu como gatilho do interesse do grupo pelo tema, é o indicativo CD4 que se revela. A forma como o aluno conduz a argumentação condiz com a sua maneira particular de entender a situação problema assumida, o que denota natureza individual da estratégia identificada nesse contexto. Assim, a estratégia de conhecimento declarativo provoca a definição do tema e, por meio de uma delimitação da situação problemática, leva à estruturação do problema de investigação.

PROBLEMA: Como se comporta a arrecadação de impostos, municipais, na cidade de Londrina e quais as estimativas dos montantes recolhidos, nos próximos cinco anos?

Ainda, tal estratégia parece orientar, de forma consciente, a simplificação da situação, por exemplo, na afirmação do aluno enfatiza que "pensamos em estudar sobre imposto municipal".

Na Tabela 31, os excertos dos diálogos dos alunos se referem à discussões sobre a definição das hipóteses.

Tabela 31: Indícios de estratégias metacognitivas na definição de hipóteses (AI-G2)

Indicativo da estratégia	Evidência
(I) **RP7** - Estabelece os passos a serem seguidos na condução da atividade.	H_2: O primeiro passo depois que formulamos o nosso problema é fazer a coleta dos dados, para iniciar a construção de um modelo. Se estamos falando de impostos, logo nos vem à memória o site do impostômetro que é um site confiável e de referência. Os dados são fornecidos nesse site são de acordo com um período selecionado. Aí formulamos essa tabela. Coletados os dados que pensamos quais seriam as hipóteses que tomaríamos para começar a nossa resolução. Nós pensamos em algumas hipóteses.
(I) **RP6 -** Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.	
(I) **RM2 -** Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.	

Fonte: autora.

As estratégias identificadas como de natureza individual, neste caso, por ter sido decorrente da forma que um aluno expõe seu modo particular de refletir sobre o que o grupo pensou sobre a situação.

Ainda, ao delimitar o problema, o aluno reconhece ter estabelecido passos, sendo que o primeiro foi a coleta de dados e na sequência a seleção e tratamento desses dados, evidenciam a estratégia de planejamento, sob o indicativo RP7. Ainda é possível perceber a estratégia de planejamento (RP6) quando os alunos revelam que a seleção de informações sobre a situação foi realizada em fontes que eles classificam como confiáveis e organizam a disposição dos dados em uma tabela. Assim, as estratégias de planejamento (RP6 e RP7), parecem ser responsáveis pela organização e simplificação dos dados (Tabela 32) utilizados na resolução matemática.

Tabela 32: Montante de impostos municipais arrecadados em Londrina (2010-2020)

Ano	**Imposto arrecadado pelo município(R$)**
2010	240.292.977,75
2011	304.241.090,77
2012	358.112.659,20
2013	398.692.123,21
2014	454.932.329,76
2015	531.986.144,23
2016	547.118.070,65
2017	607.050.635,21
2018	651.360.586,82
2019	688.071.533,36
2020	956.459.001,31

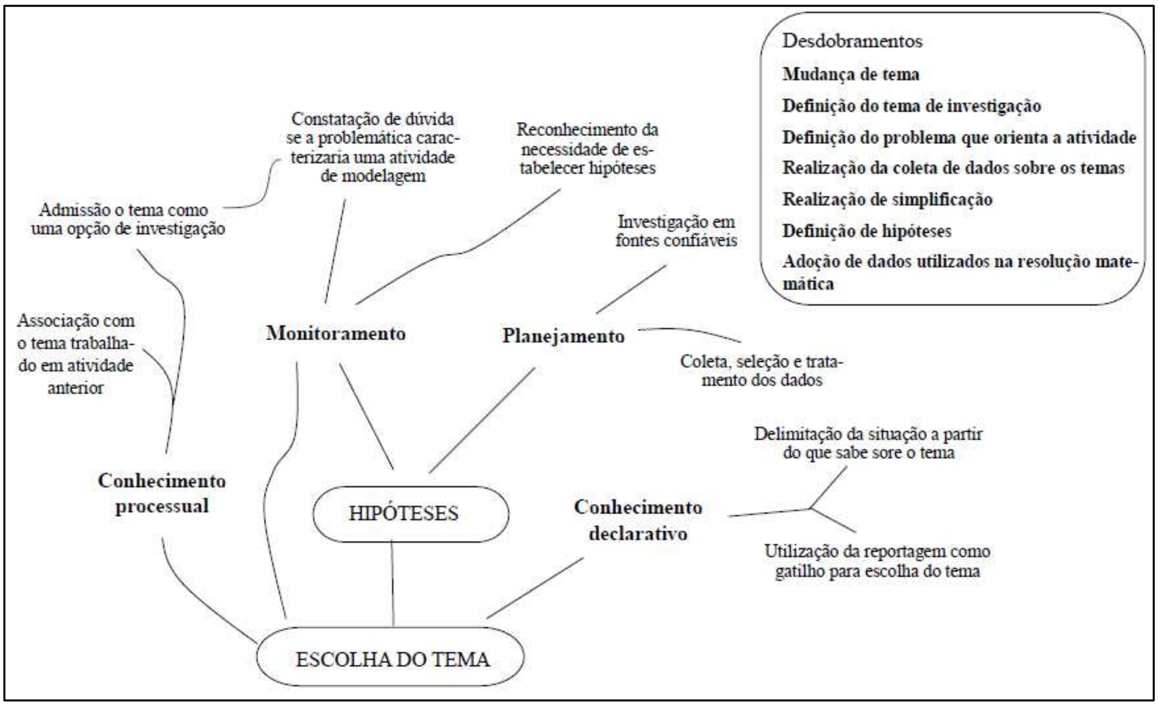
Fonte: relatório dos alunos

Esse reconhecimento inicial das informações e dados matemáticos acerca da situação problemática, suscita nos alunos a necessidade de formular hipóteses, isso sugere que os alunos internalizaram ações características e necessárias para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, ao passo que têm conhecimento sobre as ações que devem realizar. Nesse caso, é da estratégia de monitoramento (RM2) que decorre a formulação das hipóteses H(1) e H(2) na atividade em pauta.

Hipóteses
H(1): Temos que a arrecadação não será infinitamente grande.
H(2): O valor dos impostos arrecadados se estabiliza, ou seja, existe um valor de estabilidade para a arrecadação de impostos. [relatório dos alunos]

A interpretação exposta na árvore da Figura 46 indica as estratégias identificadas no que tange à escolha do tema e à formulação de hipóteses na atividade em pauta.

Figura 46: Estratégias associadas à escolha do tema e hipóteses (AI-G2)



Fonte: autora.

Na Tabela 33, o diálogo dos alunos evidencia o processo de resolução matemática realizada a partir dos dados e hipóteses definidas.

Tabela 33: Indícios de estratégias metacognitivas na matematização (AI-G2)

<table>
<tr><th>Indicativo da estratégia</th><th>Evidência</th></tr>
<tr><td>(I) CP1 - Menciona utilizar estratégias que funcionaram em atividades de modelagem anteriores.</td><td rowspan="5">I_2: Lembramos daquela tarefa do crescimento populacional, que resolvemos anteriormente, a população se estabiliza. Em relação aos impostos isso foi um argumento para fazer parecido.
H_2: Vamos definir então a matematização, definir as variáveis. Primeiro definimos que o nosso “a” vai ser arrecadação de impostos pelo município e o “i’ e a ordem do ano correspondente. O nosso “i_0” vai ser o ano de 2010 e o nosso “a_i” vai ser arrecadação do respectivo ano. Para a nossa resolução, escolhemos o método de Ford-Walford que já trabalhamos na disciplina anteriormente. O que que ele nos fala? O método de Ford-Walford nos garante que existe um ponto de estabilidade. Observando o nosso a_i da primeira coluna e o a_{i+1} na segunda coluna, podemos ver que há diferença entre um e outro, e essa diferença entre os dois vai diminuindo de uma linha para outra. Então precisamos determinar uma f que ela vai fazer essa relação.
F_2: Então o que nós fizemos? Pegamos cada ponto e colocamos no Curve Expert, como o método nos permite, começamos pela nossa função linear e encontramos esses valores.</td></tr>
<tr><td>(I) RP4 - Identifica conteúdos ou procedimentos que podem ser úteis para resolver o problema.</td></tr>
<tr><td>(I) CC3 - Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução identificado na situação problemática.</td></tr>
<tr><td>(C) RP1 – Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade.</td></tr>
<tr><td>(I) RM5 - Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.</td></tr>
</table>

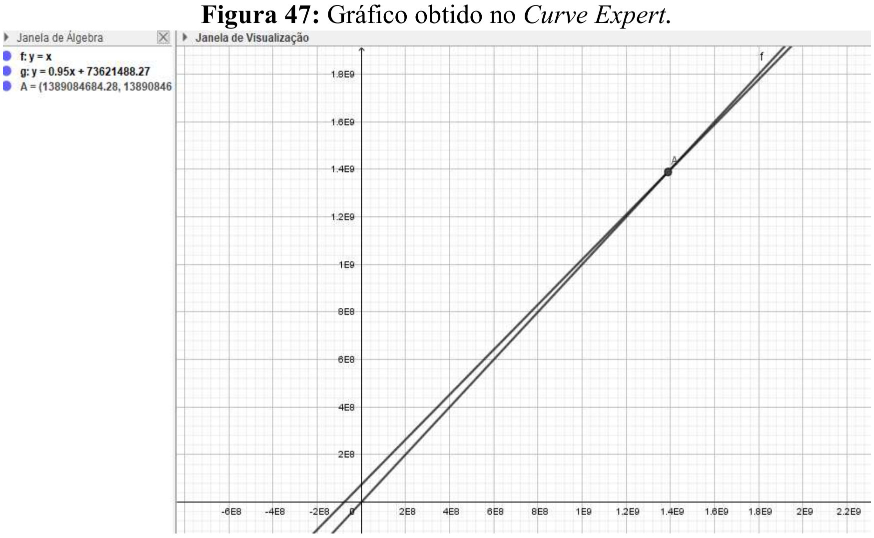
Fonte: autora.

Quando o aluno afirma que ter lembrado de uma tarefa resolvida anteriormente ou do método de Ford-Walford utilizado em uma resolução anterior, revela o uso da estratégia de conhecimento processual (CP1). Assim, ao mostrar associação com atividade anterior, denota o uso de conhecimentos prévios e leva o grupo à retomada do conceito/definição do método de Ford-Walford como conteúdo potencialmente útil para resolver o problema, ou seja, faz uso das estratégias de planejamento (RP1 e RP4). As estratégias de conhecimento processual e de planejamento parecem ter ocasionado a definição de variáveis e a resolução da atividade.

Variáveis do problema:
A= Arrecadação de impostos pelo município; i= ordem do ano correspondente.
Nós consideramos os dados a partir do ano de 2010.
Resolução
Utilizando o método de Ford-Walford, ele nos garante que existe um ponto de estabilidade, ou seja, existe um valor a ser arrecadado que é descrito pela condição $A_{i+1} \cong A_i$[relatório dos alunos]

Ao fazer a leitura da situação em linguagem matemática, isto é, aplicar os valores da situação no método de Ford-Walford, sinaliza que a estratégia de conhecimento condicional (CC3), ao passo que faz uma explicação das opções e do processo de resolução matemática. Ao descrever e explicar como fez uso do *Curve Expert*, o aluno usa a expressão "a diferença entre os dois (valores) vai diminuindo de uma linha para outra" para se referir ao ponto de interseção entre os gráficos, que sinaliza a estratégia de monitoramento (RM5), ambas evidenciadas a partir da construção do gráfico por meio do *Curve Expert* conforme Figura 47. De modo geral, a estratégia de conhecimento condicional parece estabelecer uma interlocução com a estratégia de monitoramento, acontecendo simultânea e interdependente.

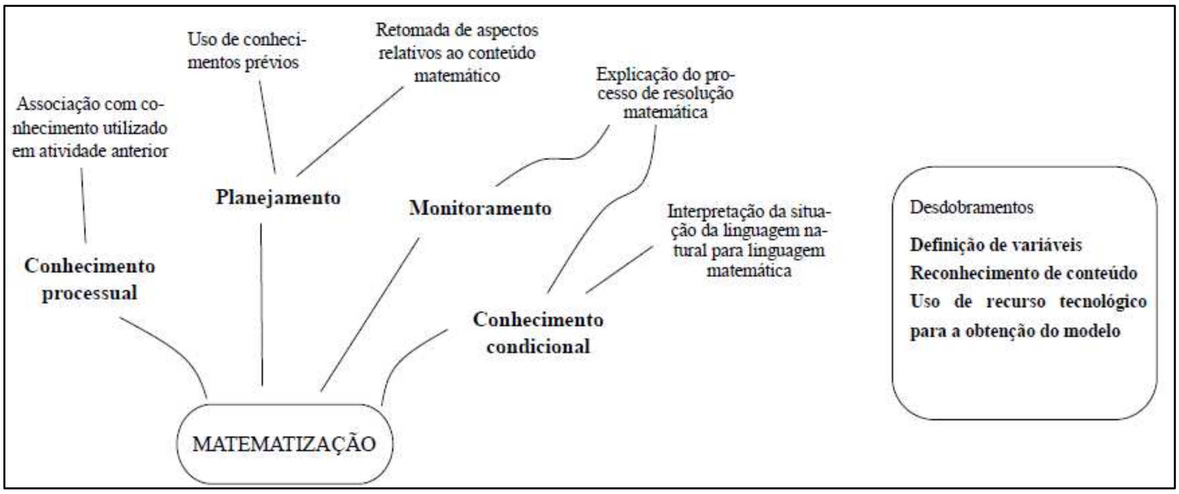
Figura 47: Gráfico obtido no *Curve Expert.*



Fonte: slides da apresentação dos alunos.

Sobre as estratégias metacognitivas utilizadas durante a matematização esboçamos a árvore de associação de ideias da Figura 48.

Figura 48: Estratégias associadas à matematização(AI-G2)



Fonte: autora.

A Tabela 34, mostra que os alunos analisam o que se mostra do gráfico e desencadeiam outras estratégias metacognitivas.

Tabela 34: Indícios de estratégias metacognitivas na resolução e validação (AI-G2)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(C) **RM6 -** Identifica erros e aplica uma nova estratégia para corrigi-los.	F2: Aí encontramos um problema que foi o nosso b que é o nosso coeficiente angular é maior do que 1. No método de Ford-Walford quando o coeficiente é maior do que 1 então o método não funciona. Então o que a gente pensou? Pensamos em considerar uma nova hipótese que será a nossa H3.
(C) **CC4** - Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.	
(C) **RA1 –** Identifica que o modelo construído não é adequado e então investe na construção de um novo modelo.	
(C) **RM2 –** Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.	
(C) **RP6 -** Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.	F_2: Nós organizamos a tabela retirando os dados referentes ao ano de 2020. Com esses dados, utilizamos novamente o *Curve Expert* para encontrar uma função linear, que fosse correspondente com essa relação. Então nós chegamos à essa função, onde temos que o nosso coeficiente angular é aproximadamente 0,9475. Então o nosso coeficiente angular é menor do que 1, e com isso o método do Ford-Walford vai funcionar.
(I) **CC4 -** Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.	
(I) **CC2 -** Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos.	H_2: Podemos ver que o nosso r e 0,99, o que tá muito próximo de 1 e é um bom nível de confiança. F_2: Diferente do anterior que tava 0,93, porque o ano de 2020 estava mais distante dos outros, o que faz com que o r diminua um pouco essa proximidade com a função linear.

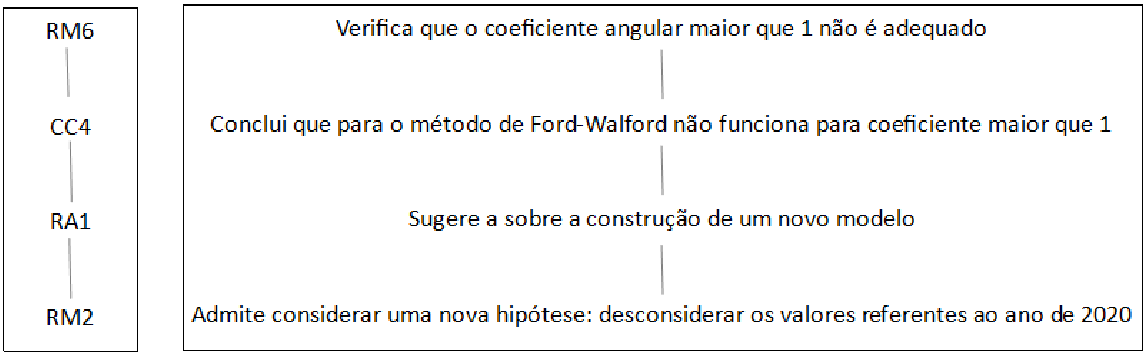
Fonte: autora.

A identificação de equívoco no modelo, parece ser decorrente das estratégias de conhecimento condicional (CC4) e de avaliação (RA1). Essa percepção, possibilitada pelas estratégias, parece denotar que os alunos têm conhecimento sobre o uso do software, tendo em vista que é a partir da interpretação dos valores fornecidos por esse software que possibilita ou requer a verificação quando fornece o coeficiente angular, levando-os a considerar a validade matemática da função obtida.

Ao identificar o equívoco matemático os alunos parecem ter consciência da estratégia de monitoramento (RM2 e RM6), a qual pode ter sido responsável por levar o grupo a reconhecer a necessidade de admitir uma nova hipótese auxiliar.

A fala do aluno F_2, embora pareça uma frase curta e concisa, está carregada de diferentes indicadores de estratégias metacognitivas e pode ter sido responsável por importantes ações assumidas pelo grupo na atividade. A linha narrativa, apresentada na Figura 49, ilustra esse fato.

Figura 49: Linha narrativa de formulação de uma hipótese na fala do aluno F_2 em AI-G2



Fonte: autora.

Esse conjunto de estratégias sob diferentes indicadores, parece causar, na atividade, a formulação da hipótese H3, que teve um papel decisivo na obtenção do modelo.

Como o coeficiente angular é maior do que um, b > 1, temos que considerar mais uma hipótese:
H(3): Nós desconsideramos os impostos arrecadados no ano de 2020, tendo em vista que ele possuiu um crescimento muito acima da média e isso geraria problemas no modelo. [relatório dos alunos]

A partir da nova hipótese considerada desdobra-se a resolução, conforme evidencia a fala do aluno F_2, o grupo reorganiza "a tabela retirando os dados referentes ao ano de 2020", conforme Tabela 35.

Tabela 35: Valores obtidos a partir da aplicação do método de Ford-Walford

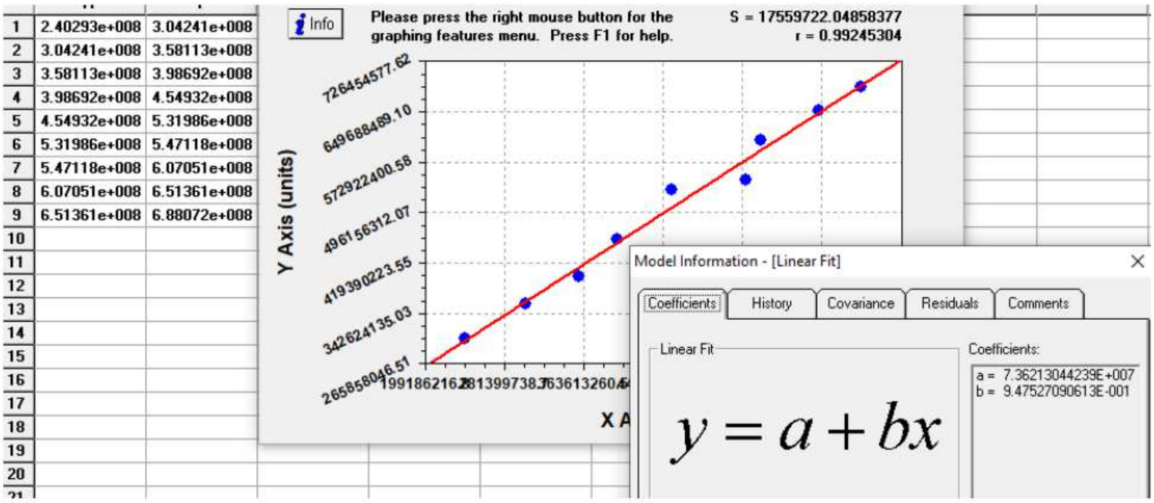
A(i)	Ai+1
2240.292.977,75	1304.241.090,77
1304.241.090,77	1358.112.659,20
1358.112.659,20	1398.692.123,21
1398.692.123,21	4454.932.329,76
1454.932.329,76	1531.986.144,23
1531.986.144,23	1547.118.070,65
1547.118.070,65	1607.050.635,21
1607.050.635,21	1651.360.586,82

1651.360.586,82	2688.071.533,36
2688.071.533,36	

Fonte: relatório dos alunos.

A Tabela 35 denota que a estratégia de planejamento RP6 foi relevante na adequação dos dados em função da matemática que pretendiam empregar e, com isso, realizam um ajuste dos erros anteriormente identificados na resolução matemática. Os dados no software *Curve Expert*, são ilustrados na Figura 50.

Figura 50: Resolução obtida utilizando o *Curve Expert*



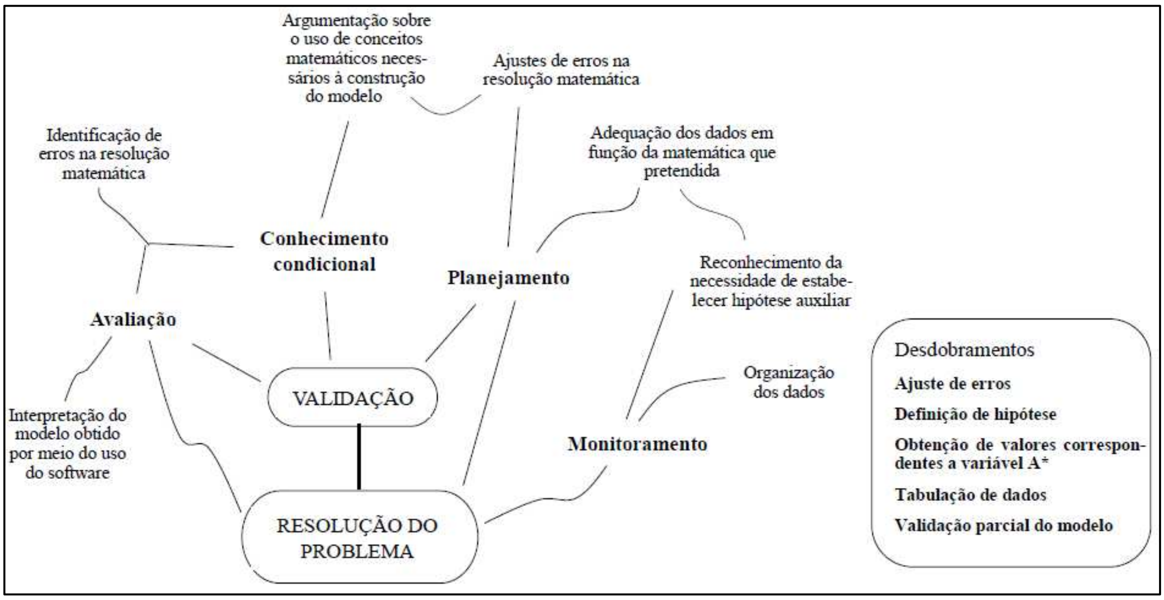
Fonte: relatório dos alunos.

As estratégias de conhecimento condicional (CC2 e CC4), sugerem que os alunos, ao realizarem uma comparação entre a nova resolução e a anterior, argumentam que os procedimentos, conceitos e métodos matemáticos utilizados na resolução conduziram a resultados satisfatórios. Ainda, tal estratégia pode ter motivado a verificação dos procedimentos matemáticos que conduz à validação do modelo em momentos futuros.

Nestes trechos, é possível verificar ainda que as estratégias de natureza individual resultam de estratégias de natureza colaborativa, embora o grupo não atue diretamente sobre as estratégias, leva a ser responsável por suas próprias escolhas, pensamentos e ações.

A árvore de associação de ideias da Figura 51 sintetiza nossa interpretação sobre o desenvolvimento da resolução e da validação na atividade e as estratégias metacognitivas nesse contexto.

Figura 51: Estratégias associadas à resolução e validação (AI-G2)



Fonte: autora.

Na Tabela 36, os alunos apresentam o modo como utilizam os valores correspondentes às variáveis A* para a obtenção do modelo.

Tabela 36: Indícios de estratégias metacognitivas na obtenção do modelo (AI-G2)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(I) **CC3 -** Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução identificado na situação problemática.	F_2: Aqui é matemática básica, equação de primeiro grau. Eu subtraí o $947a_i$ em ambos os membros da igualdade, com isso eu tenho que $0{,}053a_i$ é igual 73621488,267. E dividindo ambos os membros por 0,053, nosso $A*$ é igual a 0,053 que é nosso ponto de estabilidade. Colocando as retas no gráfico, $f(x)$ que é o $y = x$ com a nossa função linear, podemos perceber que o ponto de estabilidade, que está aproximado do valor encontrado, que é o quê valida os nossos cálculos até o momento. Tendo os nossos pontos de estabilidade, nós comparamos como os valores que temos, de 0 até a 9, se comportam em relação ao nosso valor de estabilidade. Fizemos $a* - a_i$ e disso tivemos os nossos valores conforme a tabela. Utilizamos novamente o *Curve Expert* para encontrar uma função relativa a esses índices. Disso temos uma hipótese também que a nossa condição de estabilidade que é o nosso $a* - a_i(t)$ é uma função exponencial, como foi encontrada aqui. A função exponencial do jeito que conhecemos que é do modelo $y = ae\wedge^{bx}$. Como trabalhamos com o tempo, esses parâmetros a e b pertencem ao conjunto dos reais. No *Curve Expert* nós descobrimos os parâmetros e substituímos aqui e obtemos o modelo. $A(t) = 1389084684 - 1152939000 \,.\, e^{-0{,}055(t-2010)}$; para $t \geq 2010$
(I) **CP3 -** Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas na resolução.	
(I) **CP2 –** Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas ou nos encaminhamentos definidos na matematização da situação	
(I) **RM2 -** Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.	

Fonte: autora.

O que parece um monólogo do aluno F_2, sugere uso de estratégias metacognitivas individuais do aluno para apresentar a forma como ele e o grupo conduzem à resolução do problema.

Quando o aluno reconhece a matemática a ser utilizada na situação, como "matemática básica", explica o processo matemático detalhadamente e sinaliza cuidado com o uso linguagem, optando por expressões como "subtraí o $947a_i$ em ambos os membros da igualdade" e "dividindo ambos os membros por 0,053". Essas assertivas evidenciam uma correlação entre as estratégias de conhecimento processual (CP3) e de conhecimento condicional (CC3), das quais decorrem a resolução matemática, tanto pelo uso do software quanto pela aplicação de técnicas matemáticas. Ainda, essas estratégias de conhecimento podem ter favorecido, ao grupo, relacionar a representação gráfica à representação algébrica da situação.

Com relação ao modelo matemático construído nessa atividade, assinale as alternativas que são verdadeiras para o seu grupo.
E_2, F_2, H_2, I_2 - O modelo permitiu obter a resposta para o problema que foi formulado em relação à situação em estudo. [Questionário – Anexo 2]

Com isso, os alunos indicam que a obtenção da função procede em consonância com o método matemático utilizado se considerados os dados, os valores e as hipóteses adotadas. Essa indicação parece salientar a estratégia de conhecimento processual (CP2) que orienta, em partes, a obtenção do modelo matemático, conforme retrata Figura 52 e também conduz à admissão de uma nova hipótese H(4), decorrente do uso da estratégia de monitoramento RM2.

Figura 52: Uso do modelo para obtenção da resposta matemática

RESOLUÇÃO

Com isso, temos:

$$A_{i+1} = a + bA_i$$
$$A_{i+1} = 73621488{,}267 + 0{,}947A_i$$

Como $A^* \cong A_{i+1} \cong A_i$

Condição de existência de A^*

$$A_i = 73621488{,}267 + 0{,}947A_i$$
$$A_i - 0{,}947A_i = 73621488{,}267$$
$$0{,}053A_i = 73621488{,}267$$
$$A_i = \frac{73621488{,}267}{0{,}053}$$
$$A_i = 1389084684$$

Logo $A^* = 1389084684{,}28$

Consideremos agora:

$(A^* - A_i) \geq 0$

$\lim (A^* - A_i) = 0$

Tendência de dados

Hipótese

$(A^* - A_i)(t)$ é uma função exponencial

$(A^* - A_i) = ae^{bt}$, a, b $\in \mathbb{R}$

Logo, $(A^* - A_i)(t) = 1152939000 \cdot e^{-0{,}055t}$

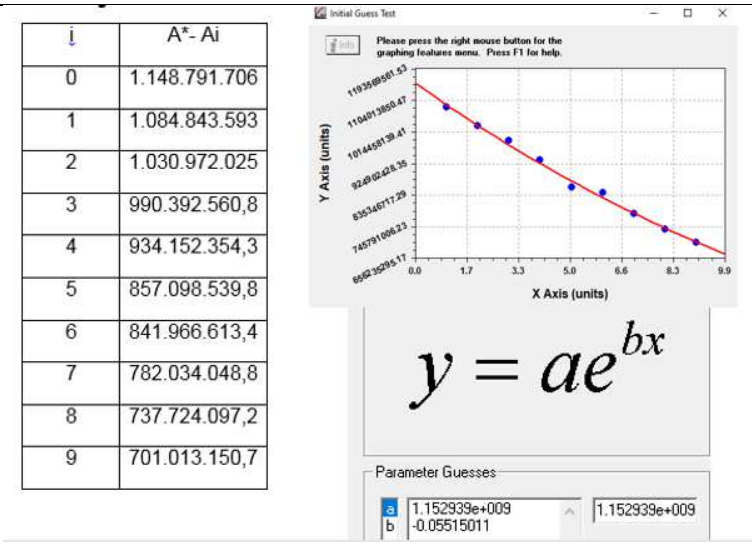
A* = 1389084684, então:

$(1389084684 - A)(t) = 1152939000 \cdot e^{-0{,}055t}$

$-A(t) = -1389084684 + 1152939000 \cdot e^{-0{,}055t}$

$A(t) = 1389084684 - 1152939000 \cdot e^{-0{,}055t}$

Como se comportam os dados em relação ao valor de estabilidade?



i	A*- Ai
0	1.148.791.706
1	1.084.843.593
2	1.030.972.025
3	990.392.560,8
4	934.152.354,3
5	857.098.539,8
6	841.966.613,4
7	782.034.048,8
8	737.724.097,2
9	701.013.150,7

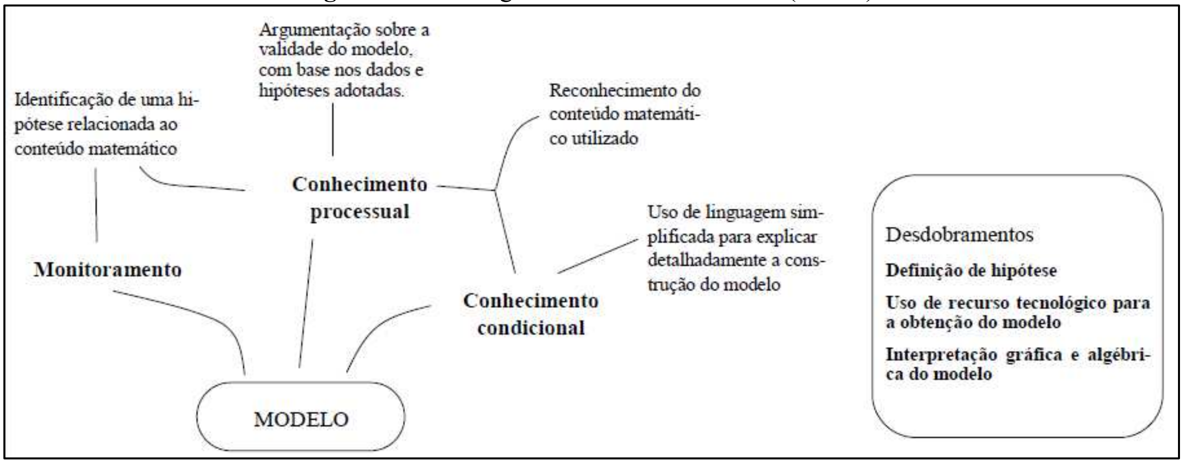
H(4): (A*- A_i) (t) é uma função exponencial

(A*- A_i) = ae^{bt} , a, b ∈ ℝ

Fonte: relatório e slides da apresentação dos alunos.

Sobre a construção do modelo elaboramos a árvore de associação de ideias da Figura 53 que associa aspectos da atividade de modelagem desenvolvida e as estratégias metacognitivas.

Figura 53: Estratégias associadas ao modelo (AI-G2)



Fonte: autora.

Na continuidade da atividade, são empreendidas discussões sobre os resultados obtidos a partir do modelo formulado. Tais discussões são sintetizadas na Tabela 37.

Tabela 37: Indícios de estratégias metacognitivas na validação do modelo (AI-G2)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(I) **RA3 -** Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema.	F_2: Depois de encontrarmos o modelo, nós procuramos validá-lo. Primeiramente comparamos os dados que nós tínhamos na tabela e substituímos no nosso modelo pelos seus índices de 2010 até 2019, nós encontramos 236.145.684. Depois calculamos o percentual da diferença do modelo e os dados que possuíamos. No primeiro ano
(I) **CP3 -** Revela o uso de conhecimentos matemáticos e	

estratégias matemáticas na resolução. (I) **RP7 -** Estabelece os passos a serem seguidos na condução da atividade. (I) **CP2 -** Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas ou nos encaminhamentos definidos na matematização da situação	encontramos uma diferença de -1,72% no segundo ano a diferença foi de -2,10% e assim por diante. Conseguimos ver que essa diferença é bem pequena se comparado aos valores que são altos, o que de fato válida o nosso modelo. Antes de irmos direto para a resposta, que seria "Qual o valor para daqui a 5 anos" considerarmos que o modelo se iniciava no ano de 2010 então com isso precisamos fazer essa pequena alteração, onde no nosso índice era -0,055t vai ser e elevado a -0,55 (t-2010) em que o tempo é sempre maior que 2010. Aí nós começamos a aplicar no nosso modelo os valores dos anos que queríamos, que seria de 2021 até 2025... *[lê os slides e as respostas]*.
(I) **RA4 –** Reconhece que haveria outras maneiras de conduzir o desenvolvimento da atividade depois de terminá-la.	H_2: Por se tratar de um problema muito específico da cidade de Londrina, não encontramos nenhuma previsão para os próximos anos, talvez se fosse se tratar do Brasil teriam previsões que nos permitiriam validar a resposta. Mas encontramos algumas matérias que falam especificamente do ano atual em relação a arrecadação de impostos em Londrina. Isso nos possibilitou perceber, assim como o nosso modelo, que a arrecadação de impostos aumentará nos próximos anos.

Fonte: autora.

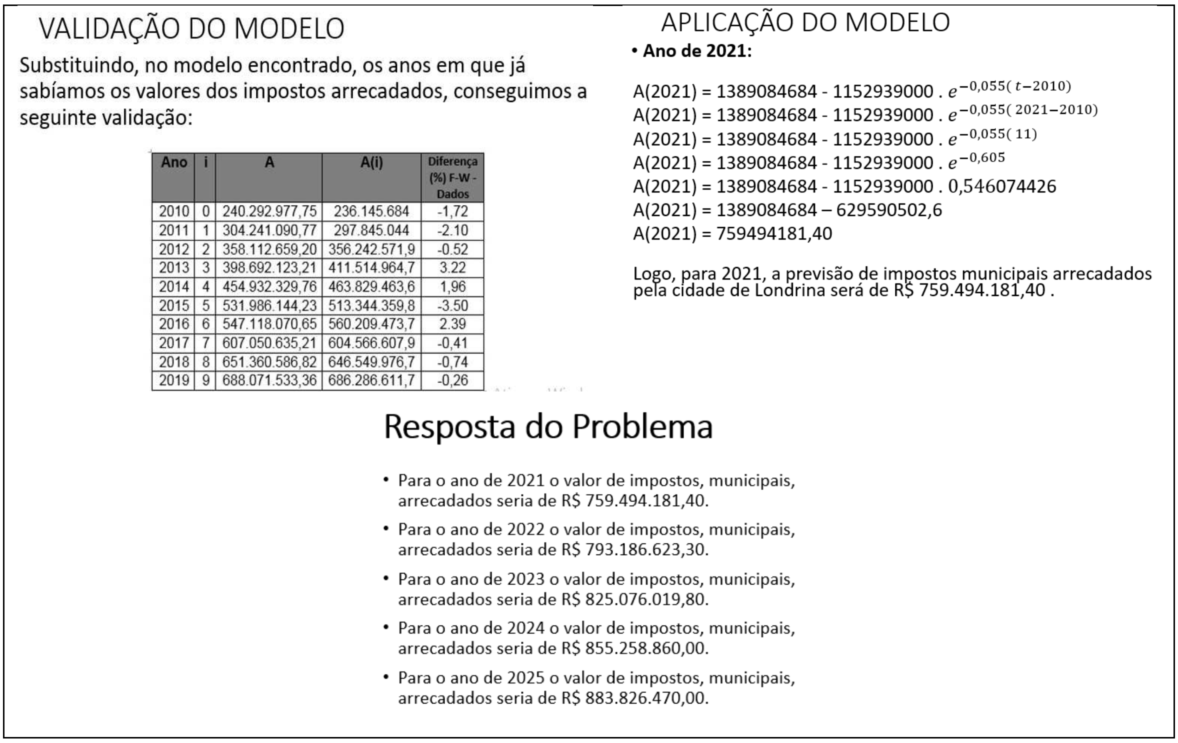
A justificativa da resolução apresentada pelo aluno sugere que o grupo se apropriou do conhecimento mobilizado ou construído ao longo do desenvolvimento da atividade e trouxe à tona estratégias de natureza individual, ou seja, decorrentes de seu olhar particular. Ainda, o grupo parece ter reconhecido a necessidade de realizar a validação do modelo. Termos como "primeiramente" e "depois" parecem indicar que o aluno utiliza, de forma consciente, a estratégia de planejamento (RP7) e, ao passo que ilustra como utilizou os conhecimentos matemáticos na verificação dos resultados encontrados, sinaliza o uso da estratégia de conhecimento processual (CP3) de forma concomitante. Enquanto que, ao estabelecer comparações entre os resultados fornecidos modelo e os dados reais, os alunos parecem explicitar a estratégia de avaliação, sob o indicativo RA3. Tal estratégia, de forma simultânea à estratégia de conhecimento processual (CP2), fortalece os argumentos acerca das condições validação da resposta em detrimento das condições externas da situação, expressa na afirmação do aluno "essa diferença é bem pequena se comparado aos valores que são altos, o que de fato válida o nosso modelo". O uso de tais estratégias parece ser decorrente dos ajustes empreendidos para a obtenção de um modelo e resultam na validação

Com relação à validação nessa atividade de modelagem matemática, assinale o que é verdadeiro para o seu grupo.
E_2, F_2, H_2, I_2 - Ela se deu por meio de comparação de dados (observados e estimados pelo modelo)

do modelo matemático e dos resultados matemáticos obtidos (Figura 54).

Ainda no contexto da validação, o aluno demonstra reconhecer que para o cenário municipal, como é o caso do município de Londrina, surgiram algumas restrições ou limitações, entretanto pontuam que se fosse conduzida uma investigação a nível nacional, poderiam obter informações mais abrangentes. Essa percepção indica a presença da estratégia de avaliação RA4. Podemos dizer, portanto, que essa estratégia possibilitou um enfoque para o significado da situação final obtida, com olhar para todo o processo de resolução da atividade.

Figura 54: Modelo matemático e resposta para o problema (AI-G2)



Ano	i	A	A(i)	Diferença (%) F-W - Dados
2010	0	240.292.977,75	236.145.684	-1,72
2011	1	304.241.090,77	297.845.044	-2.10
2012	2	358.112.659,20	356.242.571,9	-0.52
2013	3	398.692.123,21	411.514.964,7	3.22
2014	4	454.932.329,76	463.829.463,6	1,96
2015	5	531.986.144,23	513.344.359,8	-3.50
2016	6	547.118.070,65	560.209.473,7	2.39
2017	7	607.050.635,21	604.566.607,9	-0,41
2018	8	651.360.586,82	646.549.976,7	-0,74
2019	9	688.071.533,36	686.286.611,7	-0,26

Fonte: slides da apresentação dos alunos.

As afirmações que constam na Tabela 38 complementam entendimentos dos alunos acerca da atividade de forma holística, motivados pela interpelação da professora e da pesquisadora.

Tabela 38: Indícios de estratégias metacognitivas na conclusão da atividade (AI-G2)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(C) **RM1 -** Reconhece a finalidade do modelo matemático para o estudo da situação da realidade.	Pesq: Por que é importante saber a quantidade de impostos que a prefeitura vai arrecadar? Por que essa atividade é importante? O que justifica esse modelo? I_2: Eu acho que o modelo matemático, ele nos ajuda a fazer uma previsão de como que vai se comportar esses impostos ao longo dos anos. Isso pode ajudar as pessoas na tomada de decisão. Por exemplo comprar um terreno, uma casa,

(C) **CD2 -** Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.	comprar uma casa em bairro a ou bairro b e analisar a diferença de IPTU, então todas essas previsões que eu consigo ter a partir do modelo são muito pertinentes para tomada de decisão nesse caso. H_2: Para completar também, sabendo o montante que se arrecada, isso nos instiga a ter uma forma mais crítica de cobrança de retorno desse montante arrecadado para a sociedade. Por que se arrecada tanto e se volta muito pouco como nós falamos o retorno de impostos é baixo então sabendo o montante que se arrecada, podemos ter uma cobrança maior dos prefeitos e vereadores para o maior retorno desse dinheiro para a sociedade.
(C) **CD1 -** Admite seus pontos fortes e pontos fracos relativamente ao que precisa saber para desenvolver a atividade.	Prof: O que vocês acham que foi mais desafiador nessa atividade. F_2: Foi definir o tema, um problema, uma situação. Essa é nossa segunda ideia. Durante a disciplina nós trabalhamos com tarefas que vocês propunham para nós. Então definir um problema foi difícil. Tanto que nós tivemos uma outra ideia inicial e acabamos mudando para essa. Nós tivemos várias ideias, mas essa foi a que achamos dados mais interessantes e confiáveis.

Fonte: autora.

As indagações da pesquisadora parecem desencadear aspectos que não foram explicitados nas discussões (registradas) dos alunos no desenvolvimento da atividade, e que evidenciam o reconhecimento da relevância social do tema como por exemplo “tomada de decisão” e sobre a cobrança de retorno do montante arrecadado com os impostos. Reconhecer esses aspectos pode ser resultado do uso da estratégia de monitoramento (RM1) e, à medida em que explora argumentos extramatemáticos sobre a situação em estudo, denota o uso da estratégia de conhecimento declarativo (CD2).

A pergunta lançada pela professora provoca reflexões sobre o reconhecimento dos desafios impostos para o desenvolvimento da atividade, o que traz à tona o uso da estratégia de conhecimento declarativo (CD1), evidenciado na resposta do aluno, quando este destaca a dificuldade em definir o tema da atividade. Essa dificuldade, entretanto, parece ter sido desfeita no decorrer da atividade, pois, a afirmação do aluno “talvez se fosse se tratar do Brasil teriam previsões” indica a capacidade de sugerir novas abordagens para o problema, o que pode desencadear novos temas de investigação.

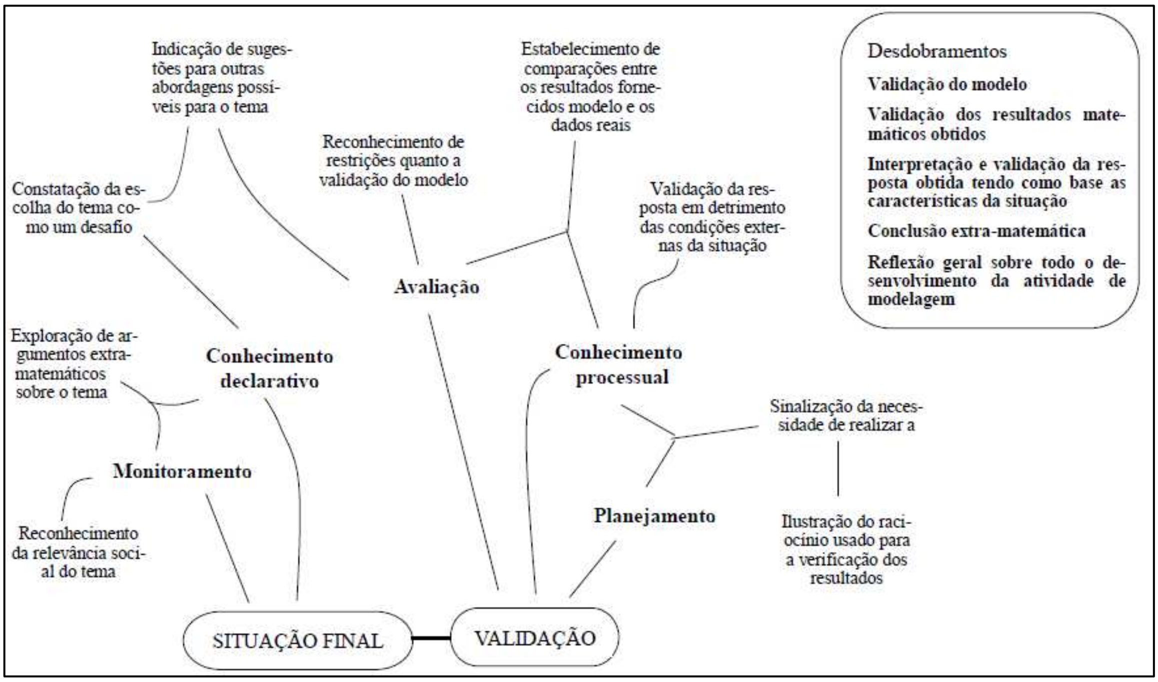
Disso evidenciamos que as estratégias de monitoramento e de conhecimento declarativo motivadas pelas perguntas da professora e da pesquisadora implicam na conclusão extramatemática e na reflexão sobre o desenvolvimento da atividade, enfatizando aspectos relevantes acerca da situação final. Ou seja, por terem sido motivadas ou provocadas pela professora ou pela pesquisadora as estratégias metacognitivas são tidas como de natureza colaborativa.

As respostas dos alunos ao questionário (Anexo 3) revelam o modo como os alunos do grupo consideram a escolha do tema e formulação do problema que orientou o desenvolvimento da atividade.

Dentre as alternativas a seguir, assinale aquela que corresponde à estratégia que desempenhou maior influência na escolha do tema e na formulação do problema, na atividade desenvolvida pelo seu grupo.
E_2, I_2 Recordar sobre temas ou problemas semelhantes, visto em outros contextos.
F_2 Analisar a viabilidade de trabalhar com o tema e estabelecer metas para a resolução do problema.
H_2 Julgar a coerência de problema em função do tema escolhido, das possibilidades de resolução e dos dados disponíveis. [Anexo 3]

A Figura 55 apresenta a árvore de associação de ideias que esboça nossa interpretação sobre o uso de estratégias metacognitivas na atividade de modelagem matemática acerca da validação e da situação final.

Figura 55: Estratégias associadas à validação (AI-G2)



Fonte: autora.

As estratégias metacognitivas utilizadas durante o desenvolvimento da atividade do terceiro momento desenvolvida pelo Grupo 2, foram identificadas a partir do uso do instrumento. Ao retomarmos tal instrumento sinalizamos os indicativos das estratégias manifestadas na atividade com o tema Impostos, obtendo as informações presentes no Quadro 10.

Quadro 10: Estratégias metacognitivas identificadas na atividade AI-G2.

Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento declarativo identificados nas ações dos estudantes	I	C
CD1 - Admite seus pontos fortes e pontos fracos relativamente ao que precisa saber para desenvolver a atividade.		1
CD2 - Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.	1	1
CD3 - Considera diferentes maneiras de resolver o problema identificado nessa situação.		
CD4 - Assume lembrar, organizar ou coletar informações acerca da situação antes de iniciar o desenvolvimento da atividade de modelagem.	1	
CD5 - Avalia se seus conhecimentos atendem ao que precisa saber para desenvolver a atividade de modelagem.		
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento processual identificados nas ações dos estudantes	I	C
CP1 - Menciona utilizar estratégias que funcionaram em atividades de modelagem anteriores.	1	1
CP2 - Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas e nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.	2	
CP3 - Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas para desenvolver a resolução.	2	
CP4 - Quando não compreende alguma informação ou conceito, reporta-se aos colegas, ao professor ou realiza pesquisas a respeito.		
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento condicional identificados nas ações dos estudantes	I	C
CC1 - Reconhece que usa diferentes estratégias para definir seus procedimentos de acordo com as etapas do desenvolvimento da atividade de modelagem.		
CC2 - Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos.	1	
CC3 - Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução do problema identificado na situação da realidade.	1	
CC4 - Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.	2	1
CC5 - Declara potencializar seus conhecimentos e competências, frente às suas dificuldades.		
Regulação da cognição: Indicadores de planejamento identificados nas ações dos estudantes	I	C
RP1 - Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade		1
RP2 - Define os objetivos da atividade antes de iniciar seu desenvolvimento.		
RP3 - Planeja a resolução do problema levando em consideração diferentes possibilidades que podem viabilizá-la.		
RP4 - Identifica conteúdos ou procedimentos que podem ser úteis para resolver o problema.	1	
RP5 - Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.		
RP6 - Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.	1	2
RP7 - Estabelece os passos a serem seguidos na condução da atividade.	1	1
RP8 - Admite dividir o processo de resolução do problema em sub-processos.		
Regulação da cognição: Indicadores de monitoramento identificados nas ações dos estudantes	I	C
RM1 - Reconhece a finalidade do modelo matemático para o estudo da situação da realidade.		1
RM2 - Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.	1	3
RM3 - Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece que não entende algo ou quando não consegue prosseguir com a atividade.		1
RM4 - Menciona verificações pontuais durante o desenvolvimento da atividade.		
RM5 - Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.	1	
RM6 - Identifica erros e aplica uma nova estratégia para corrigi-los.		1
RM7 - Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram.		
Regulação da cognição: Indicadores de avaliação identificados nas ações dos estudantes	I	C
RA1 - Identifica quando o modelo construído não é adequado e então investe na construção de um novo modelo.		1
RA2 - Identifica equívocos ou distorções em relação ao conhecimento matemático.		
RA3 - Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema.	1	

RA4 - Reconhece que haveriam outras maneiras de conduzir o desenvolvimento da atividade depois de concluir seu trabalho.	1	

Fonte: autora.

A sinalização das estratégias identificadas a partir do instrumento apresentado no Quadro 10, sinaliza que as seis estratégias metacognitivas foram manifestadas pelos alunos ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem, sob diferentes indicadores.

A sinalização das estratégias identificadas a partir do instrumento apresentado no Quadro 10, sinaliza que as seis estratégias metacognitivas foram manifestadas pelos alunos ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem, sob diferentes indicadores. Na Tabela 39, sintetizamos a quantidade de estratégias metacognitivas identificadas no desenvolvimento da atividade em pauta.

Tabela 39: Ocorrência de estratégias metacognitivas individuais e colaborativas em AI-G2

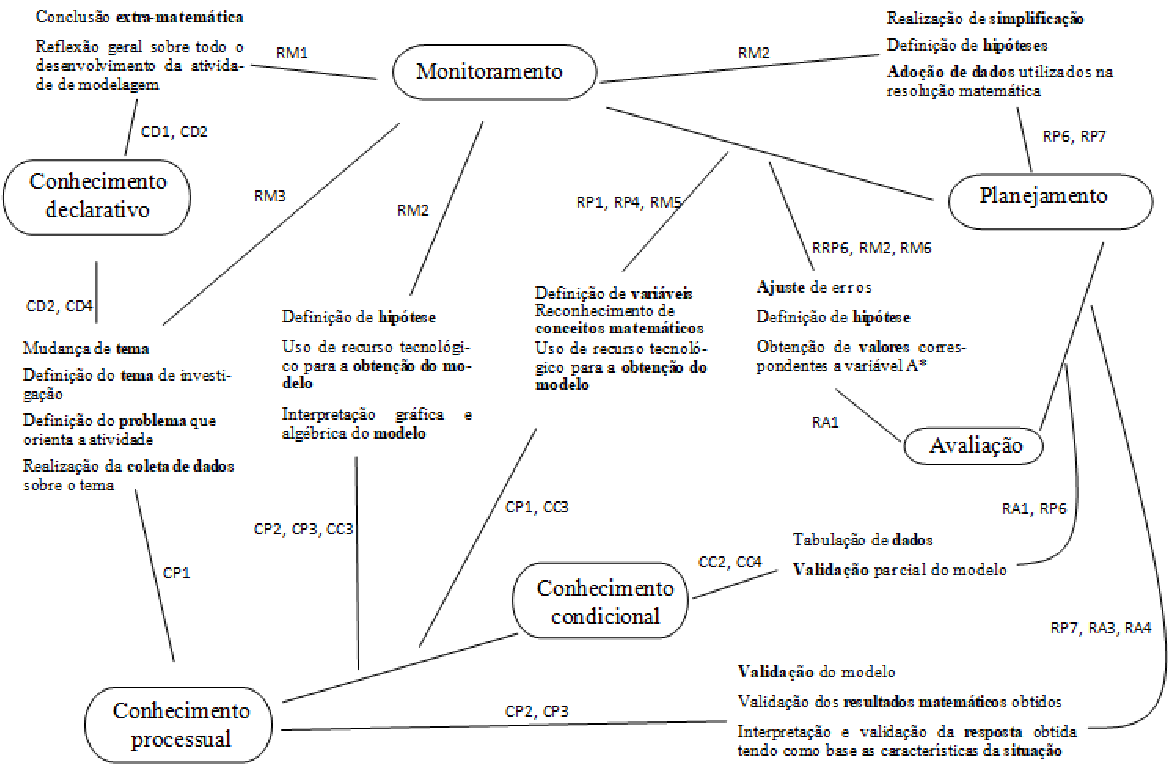
	Impostos em Londrina	
Estratégias	**I**	**C**
Conhecimento declarativo	2	2
Conhecimento processual	5	1
Conhecimento condicional	5	1
Planejamento	3	4
Monitoramento	2	6
Avaliação	2	1
Total	19 55,88%	15 44,12%

Fonte: autora.

Podemos perceber que nesta atividade, do terceiro momento, embora ainda prevaleçam as estratégias metacognitivas de natureza individual, houve um aumento na quantidade de estratégias metacognitivas de natureza colaborativa, se comparado à atividade de segundo momento desenvolvida por esse mesmo grupo.

Ainda, ao analisarmos as informações presentes no instrumento (Quadro 10) com as análises empreendidas, tecemos uma síntese dos desdobramentos decorrentes das estratégias metacognitivas para a atividades de modelagem matemática com o tema Impostos, no desenvolvimento apresentado pelo Grupo 2, construímos uma árvore de associação de ideias, conforme ilustra Figura 56.

Figura 56: Síntese das estratégias metacognitivas do Grupo 2 na atividade do terceiro momento



Fonte: autora.

Dos dados coletados, é possível visualizar que alguns indicadores aparecem repetidamente na atividade, como por exemplo, RM2, RP6 e CC3. Enquanto outros, como CD3 e RP2, não são identificados nos excertos analisados. A Figura 56 ilustra ainda, interações entre estratégias que são recorrentes e inferem implicações diversas na atividade, por exemplo, as estratégias de planejamento e de monitoramento que estão relacionadas à três grupos de desdobramentos, ou as estratégias de conhecimento condicional e de conhecimento processual, que associam-se à dois grupos de desdobramentos.

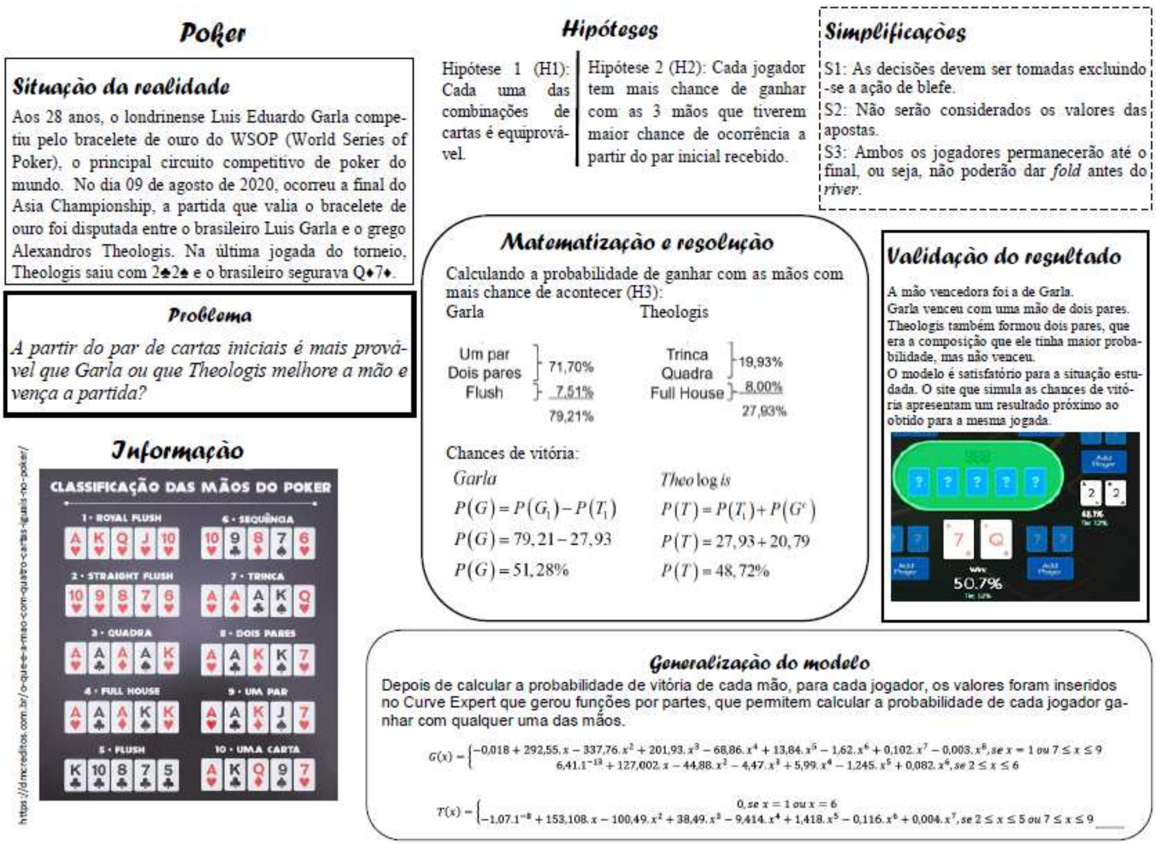
A maioria dos desdobramentos associa-se a três ou mais estratégias, o que, mais uma vez, sinaliza que é a relação entre diferentes estratégias que infere consequências para a atividade de modelagem. Ainda, as estratégias de regulação da cognição e de conhecimento da cognição parecem, de certa forma, estabelecer diversas relações que influenciam no desenvolvimento da atividade.

6.1.3 Estratégias metacognitivas nas atividades desenvolvidas pelo Grupo 3

6.1.3.1 Atividade com a temática jogo de poker

A atividade de modelagem, desenvolvida segundo características do primeiro momento de familiarização, teve a temática "Jogo de Poker" (AJ) sugerida pela pesquisadora. Para essa atividade foram utilizadas 3 aulas síncronas e atendimentos extra-classe, solicitado pelo grupo. Esse tema surgiu a partir da situação que traz um jovem morador de Londrina (cidade em que a Universidade que a pesquisa se deu está localizada), participou da final do WSOP em 2020, principal torneio mundial de Poker. O problema enunciado "A partir do par de Cartas iniciais é mais provável que Garla ou que Theologis melhore a mão e vença a partida?" foi contextualizado com a situação e apresentado aos alunos. A resolução apresentada pelo grupo encontra-se ilustrado na Figura 57.

Figura 57: Síntese da resolução da atividade "Poker" apresentada pelo Grupo 3



Fonte: autora.

As hipóteses e simplificações foram definidas em conjunto, a partir de perguntas orientadas, como por exemplo "Existe alguma carta que tem mais chance de sair do que outra?" o que combinado com outros comentários pode ter desencadeado a hipótese 1. A primeira parte da resolução, em que o cálculo da probabilidade de vitória com as três mãos com mais chances de acontecer também seguiu o mesmo procedimento e, portanto, foi construída em conjunto com toda a turma. Coube aos grupos, em particular, construir um modelo capaz de fornecer a chance de vitória, para cada jogador, para todas as combinações de mãos. Nesta pesquisa, olhamos para essa última parte, que os alunos, em particular do Grupo 4, foram responsáveis pelo desenvolvimento.

Na Tabela 40 constam excertos dos diálogos dos alunos no início da generalização do modelo matemático.

Tabela 40: Indícios de estratégias metacognitivas na matematização e resolução (AJ-G3)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(C) **CD5 -** Avalia se seus conhecimentos atendem ao que precisa saber para desenvolver a atividade de modelagem.	Pesq.: Vocês entenderam o problema? K_3: O problema nós entendemos, só não sabemos como construir esse modelo. J_3: Na tabela com as probabilidades são elencadas as mãos. Quer dizer, a mão que vale mais ponto é a mão menos provável. Mas por que você está usando a probabilidade acumulada?
(I) **RM5 -** Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade. (I) **RP5 -** Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.	J_3: Calma aí, deixa eu pensar um pouco. Podemos fazer um exemplo com o Theologis fazendo uma trinca? Probabilidade de t(7) é igual a probabilidade de t(7)... se virar um "2" ele já fez uma trinca e isso não ajuda em nada o Garla, porque mesmo que as outras cartas virem a favor dele, ele ainda perde. Então, só se o Garla fizer outra trinca, porque a trinca do Theologis vai ser a menor do jogo. Então o modelo seria $P(T_n)= P(T_n) – P(G_n)$... seguindo esse padrão podemos analisar para as outras jogadas para ver se não vai acontecer algo diferente. Pesq.: Será?
(I) **RM6 -** Identifica erros e aplica uma nova estratégia para corrigi-los. (C) **CC2 -** Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos. (C) **CP4 -** Reconhece quando não compreende alguma informação ou conceito e então reporta-se aos colegas, ao professor ou considera pesquisas a respeito.	J_3: Estamos usando uma notação um pouquinho errada. Como pode $P(T_n)$ ser igual a ele mesmo menos alguma coisa? Então a esquerda da igualdade tem que ser diferente da probabilidade à direita da igualdade. Porque a esquerda é a probabilidade geral de ganhar e a direita é a probabilidade de ganhar com uma jogada específica. Podemos usar índices para ficar mais fácil de entender? Pesq.: Pode. J_3: Então vamos chamar a probabilidade de ganhar $P_v(T_n) = P_m(T_n) + P_m(G_n^c)$. Lembrando, índice v é de vitória e m só de fazer a mão. Então estamos usando a probabilidade de ele fazer a mão para calcular a probabilidade dele ganhar com aquela mão. K_3: Essa complementar é a probabilidade do Garla não fazer a mão? É isso? J_3: Isso. Porque isso é diferente da probabilidade do Theologis fazer a mão menos a probabilidade do Garla fazer a mão. O complicado de entender é porque para o Garla isso garantiu e para o Theologis não está garantindo.

Fonte: autora.

Quando os alunos assumem o problema, buscando a generalização do modelo, identificam o que sabem e o que precisam saber para alcançar o objetivo, isso pode ter sido consequência da estratégia de conhecimento declarativo CD5. Essa discussão inicial motiva a exposição de ideias em que os alunos buscam entender os aspectos da situação que ainda lhes são conhecidos, sinalizando o uso da estratégia de planejamento RP5. O uso dessas estratégias supõe que os alunos realizam a representação mental da situação.

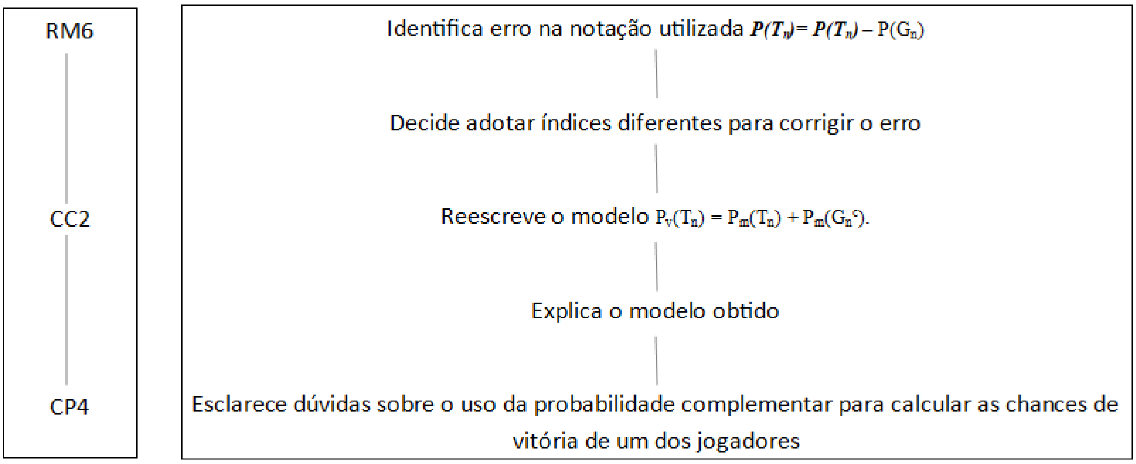
Na sequência, os alunos retomam a situação e utilizam exemplos numéricos hipotéticos para esclarecer seu entendimento e buscar um padrão para os resultados dos cálculos, o que pode ter sido consequência das estratégias de monitoramento (RM5) e de planejamento (RP5). Tais estratégias podem ter contribuído para a identificação de procedimentos matemáticos potencialmente úteis na construção do modelo matemático.

Ao reconhecer um erro conceitual, expressa na fala do aluno J_3 "estamos usando uma notação um pouquinho errada", denota manifestação da estratégia de monitoramento (RM6). Quando o grupo procede à correção do erro identificado, as inferências realizadas mostram uma primeira ideia de modelo matemático, baseada em argumentos sobre a matemática utilizada, sugere uso da estratégia de conhecimento condicional (CC2).

Nesse processo, de construção justificada do modelo matemático, o aluno J_3 leva a percepção de aspectos que, na percepção do aluno, podem ser "complicados", o que pode ser decorrente do uso da estratégia de conhecimento processual (CP4).

Esse processo final, a partir da identificação do erro, pode ser ilustrado na linha narrativa da Figura 58.

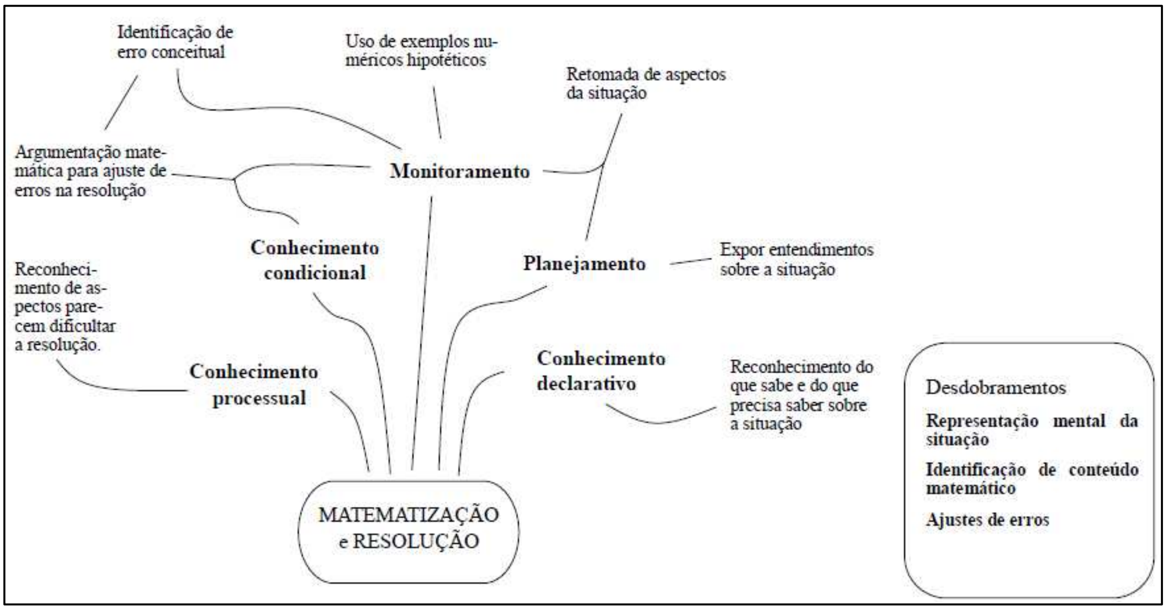
Figura 58: Linha narrativa de parte da resolução da atividade AJ-G3



Fonte: autora.

A árvore de associação de ideias da Figura 59 sintetiza nossa interpretação sobre o desenvolvimento inicial da matematização e da resolução da atividade:

Figura 59: Estratégias associadas à matematização e à resolução (AJ- G3)



Fonte: autora.

Na continuidade, o grupo evidencia reflexões e críticas acerca da resolução matemática do problema (Tabela 41).

Tabela 41: Indícios de estratégias metacognitivas na matematização e resolução (AJ-G3)

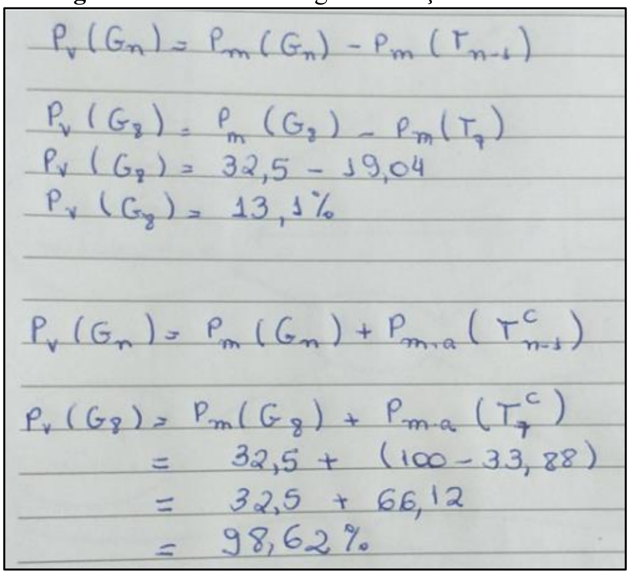
Indicativo da estratégia	**Evidência**
(C) **RP5 -** Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação. (C) **CC4 -** Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.	K_3: Podemos fazer um teste? Para m=8, para a probabilidade do Garla [...]. L_3: Porque na minha cabeça, algo que ficaria muito próximo que seria a probabilidade única do Garla fazer os dois pares, excluindo qualquer outro tipo de mão que ele poderia fazer... Mas aí não faz sentido, porque deu um número negativo. J_3: Mas faz sentido ainda, porque se eu quero saber a probabilidade dele ganhar com aquela mão, eu tenho que excluir a probabilidade do adversário fazer qualquer uma das mãos maiores.
(C) **RA3 -** Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema.	Pesq.: Me explica como ficaria isso. J_3: É uma crítica a esse modelo que a gente chegou. Em questão de sentido, do significado do problema faz mais sentido assim, mas em questão de definição de probabilidade não faz sentido porque dá negativo. K_3: Parece fazer mais sentido agora, porém, comparando com a realidade, eu não sei se está condizente, porque está chegando muito próximo de 100%.
(C) **CP4 -** Reconhece quando não compreende alguma informação ou conceito e então reporta-se aos colegas, ao professor ou considera pesquisas a respeito. (C) **CC3 -** Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução identificado na situação problemática.	L_3: Eu estou fazendo umas anotações aqui, mas estou um pouco confusa, porque para mim o complementar é o "universo" menos o que eu espero que é o "elemento", então seria a probabilidade acumulada menos a probabilidade daquela mão, não seria? J_3: Não, o universo que você está querendo falar é o evento certo que é o 100%. Então, dentro de um cálculo de probabilidade ou acontece A ou acontece o complementar de A. Então se você somar a probabilidade de A com o complementar de A, então você deve ter 100%, que é o universo. L_3: mas não seria 1? J_3: Seria se estivéssemos trabalhando com decimal, mas estamos lidando com porcentagem.

Fonte: autora.

De modo geral, o indicativo de que as estratégias identificadas são de natureza colaborativa, pois parece haver uma interação responsiva de um aluno com outro, o que os leva a revelar o uso de estratégias metacognitivas. Isso é característico do grupo em pauta, e pode ser visto em outros momentos do desenvolvimento da atividade.

A expressão “na minha cabeça” sinaliza a estratégia de planejamento (RP5) e possibilita o aluno explicar como entende a situação. Isso oferece condições para os alunos estabelecerem discussões que os levam a julgar a adequação do procedimento e do modelo obtido em relação à situação, se considerados os indicadores CC4 e RA3, que sinalizam o uso de estratégia de conhecimento condicional e de avaliação, respectivamente. Como consequência essas estratégias, parecem provocar os alunos para que explicassem como ficaria o modelo de acordo com o que estava pensando (Figura 60).

Figura 60: Tentativa de generalização do modelo



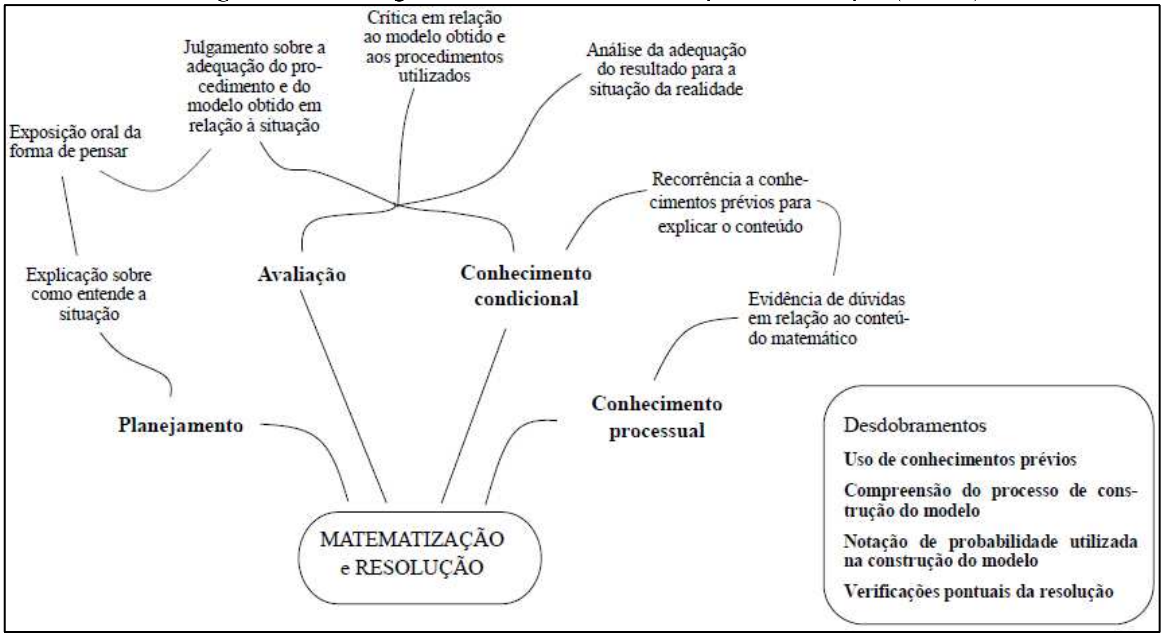
Fonte: registro dos alunos.

A exposição oral da forma de pensar, incentivado pelo pedido da pesquisadora, pode ter permitido que os colegas do grupo refletissem sobre a forma de pensar daquele que a expôs. Assim, eles foram levados a apresentar uma crítica em relação ao modelo obtido, se os procedimentos foram adequados (estratégia de conhecimento condicional, CC4) e se o resultado obtido é satisfatório para a situação da realidade (estratégia de avaliação, RA3).

A aluna K_3 manifesta dúvida em relação ao conteúdo matemático, ao fazer isso parece elucidar a estratégia de conhecimento processual (CP4) e provoca a resposta de seu colega J_3. Essa resposta, por sua vez, constitui-se uma forma de estimular conhecimentos prévios sobre probabilidade que estão sendo ativados para responder o problema e denota características do indicativo CC3 de estratégia de conhecimento condicional. O diálogo que evidencia essas estratégias (planejamento e conhecimento processual), converge para a notação, possivelmente consciente, de probabilidade condicional utilizada em parte da construção do modelo.

O uso de estratégias metacognitivas nesse momento da atividade de modelagem matemática foi por nós sistematizado na árvore de associação de ideias da Figura 61.

Figura 61: Estratégias associadas à matematização e à resolução (AJ-G3)



Fonte: autora.

Na Tabela 42, alguns excertos evidenciam o modo como os alunos se propõem a construção de um novo modelo.

Tabela 42: Indícios de estratégias metacognitivas na matematização e resolução (AJ-G3)

Indicativo da estratégia	Evidência
(C) **RA1 -** Identifica que o modelo construído não é adequado e então investe na construção de um novo modelo.	K_3: Então utilizando esse modelo da complementar acumulada, acho que dará certo. L_3: Mas para m=6 vai dar negativo. K_3: Então precisamos destacar isso. Que o modelo é válido exceto para a mão de índice 6, que é a sequência.
(C) **RM4 -** Menciona verificações pontuais em vários momentos do desenvolvimento da atividade.	L_3: Então podemos usar essa exceção. E comparar, pelo menos as mãos que têm maior chance, que já foram calculadas na aula, com os resultados da probabilidade dessas mesmas mãos a partir do nosso modelo. K_3: Eu conversei com a M_4 [*grupo 4*], eles ainda não conseguiram finalizar. Mandei o nosso modelo para eles.
(C) **RM7 -** Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram.	J_3: Eu também falei com o A_1 *[grupo 1]*, ele me falou que eles calcularam a probabilidade de cada mão usando o Excel. Depois eles plotaram os resultados como pontos no Curve, para obter as funções. Mas parece que também chegaram à intervalos que deu um número negativo, que acho que pode chegar em uma função por partes. L_3: Mas eu não entendi o que calcular.

(C) **RP2 -** Define os objetivos da atividade antes de iniciar seu desenvolvimento.	K_3: É essa probabilidade de vitória que estamos tentando encontrar o modelo? J_3: Sim, mas aí nós teremos que fazer cada mão e a probabilidade, calcular na raça mesmo, sem fórmula nenhuma e depois buscar uma fórmula que explique todas elas. Eu estou pensando se conseguimos usar o Curve.
(C) **CP2 -** Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas ou nos encaminhamentos definidos na matematização da situação	L_3: Se nós calcularmos a probabilidade do Garla ganhar, a do Theologis vai ser a complementar? J_3: Não sei, mas penso que não, porque veja, se considerarmos uma mão por exemplo, uma quadra, então, podemos considerar que a probabilidade de vencer é 100% menos a probabilidade do adversário fazer todas acima da quadra. E essa também foi a primeira ideia que me surgiu e isso deixaria mais simples a resolução, mas depois de fazer esse processo eu percebi que não era possível. Porque se garantirmos que tal jogador faz uma determinada jogada, temos que garantir que das 5 cartas da mesa, algumas sejam cartas específicas, e aí diminui ou anula a probabilidade do outro jogador fazer determinada jogada.

Fonte: autora.

Ao reconhecer as limitações do modelo o uso de estratégia de monitoramento (RM4) pode ter permitido aos alunos realizarem análises pontuais, o que demandou a decisão de retomar o modelo. Planejar a construção de um novo modelo bem como os ajustes necessários, para torná-lo adequado à situação, denota que estratégia de avaliação (RA1), e desdobra-se na observação de que o modelo apresenta restrições e os leva a reconhecer a função por partes como ideal para esse tipo de situação. Desse modo, a estratégia de monitoramento e a estratégia de avaliação configuram a mudança na forma de obtenção do modelo, assumida pelos alunos.

A discussão sobre a atividade, em particular sobre alterações no modelo, fomenta o compartilhamento de ideias com outros grupos e a discussão sobre o potencial de tais ideias na resolução. Essas informações trazem à tona o uso da estratégia de monitoramento RM7 e sugerem uma interação "inter-grupos" durante a atividade. Isso pode ter sido, em partes, responsável por levar o grupo *in loco* à adoção de recursos como o Excel e o *Curve Expert*. Ainda, ao olhar para a nova possibilidade de abordagem e tratamento do problema, discutindo as novas ideias, o grupo busca descrever uma aproximação entre o modelo e a situação da realidade, gerando a necessidade da retomada do problema, que é encontrar um modelo para calcular a probabilidade de vitória e pode ter sido resultado da manifestação da estratégia de planejamento (RP2).

No momento que o aluno analisa seus encaminhamentos e o conteúdo matemático (probabilidade) para a resolução, baseados nos dados da situação o que refina o olhar dos alunos para os conhecimentos a serem discutidos. Isso aponta o uso de estratégia de conhecimento processual, visto a partir do indicativo CP2, da qual decorre a análise empreendida sobre cada jogada, condições e cálculos para que fosse vencedora (Figura 62).

Figura 62: Análises da chance de vitória de cada uma das mãos para o jogador Garla.

GARLA	7O e QO
THEOLOGIS	2P e 2E

Ordem	Jogada
1	ROYAL FLUSH
2	STRAIGHT FLUSH
3	QUADRA
4	FULL HOUSE
5	FLUSH
6	SEQUÊNCIA
7	TRINCA
8	DOIS PARES
9	PAR

GARLA								
MÃO	MESA					COMENTÁRIOS	PROBABILIDADE	
1	Ao	Ko	Jo	10o	-	Assim ele com certeza vence	100%	1
2	8o	9o	10o	Jo	-	Caso ele saia com Straight Flush com certeza vence, já que o grego não pode formar uma	100%	2
2	3o	4o	5o	6o	-			
3	Qc	Qp	Qe	-	-	Neste caso a chance dele perder é se nas duas cartas que não especificamos saiam um	99%	3
3	7c	7p	7e	-	-			
4	Q	Q	7	-	-	A chance dele perder é caso o grego consiga formar uma quadra, ou seja, caso as duas	99%	4
4	7	7	Q	-	-			
5	Xo	Xo	Xo	-	-	A chance dele perder é caso o grego consiga um Full House ou uma quadra	91%	5
6	X	X	X	X	-	A chance dele perder é caso o grego consiga um flush, onde quatro cartas da mesa são de paus ou de espada	95%	6
7	7	7	-	-	-	A chance de perder é com o grego formando uma quadra, um full house ou um flush	86%	7
7	Q	Q	-	-	-			
8	7	Q	-	-	-	A chance de perder é com o grego formando uma quadra, um full house, um flush ou uma trinca	67%	8
8	7	X	X	-	-			
8	Q	X	X	-	-			
9	Q	-	-	-	-	A chance dele perder é caso o grego forme dois pares, uma trinca, uma sequência, um	6%	9
9	7	-	-	-	-			

Fonte: relatório dos alunos.

Na Tabela 43, apresenta o diálogo dos alunos se antecipam sobre como pretendem realizar a validação do modelo.

Tabela 43: Indícios de estratégias metacognitivas ao planejar a validação (AJ-G3)

Indicativo da estratégia	Evidência
(C) **RP4 -** Identifica conteúdos ou procedimentos que podem ser úteis para resolver o problema. (C) **CC2 -** Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos.	K_3: Para validar, nós podemos comparar os resultados com os do outro grupo. Lá tem os meninos que entendem bem do jogo e podem ver se é isso mesmo ou se deixamos passar alguma coisa. J_3: Podemos rodar a regressão no *Curve Expert*, e ver se o índice *r*, de quão próximo a curva está dos nossos pontos. Eu acho que a nossa função vai ser por partes, por conta desses pontos que estão dando negativo. E depois calcular as porcentagens a partir da função obtida, para ver se ele vai retornar aquela porcentagem que calculamos na mão. Isso para verificar a parte matemática. Mas podemos fazer algo menos rigoroso, para verificar a situação podemos simular algumas jogadas. L_3: Ainda podemos confrontar a resposta com o que realmente aconteceu. Entendem? Nosso resultado aponta chance maior de vitória para o jogador que ganhou a partida no jogo real?

Fonte: autora.

Os alunos planejam a organização de seus resultados e suas reflexões sobre a conclusão da atividade, antecipam-se sugerindo diferentes formas de validação do modelo, ao passo que evidenciam, por meio do aspecto indicador RP4, a estratégia de planejamento. Ainda, essa estratégia de planejamento em conjunto com a estratégia de conhecimento condicional (CC2), as quais levam os alunos a reconhecer o potencial a recursos tecnológicos e favorecem, posteriormente, a validação da resposta matemática para o problema, por meio desses recursos, conforme Figura 63.

Figura 63: Validação do modelo matemático

Para a generalização das probabilidades de vitória foram utilizadas as análises do jogo de poker no seguinte sentido, dada uma determinada jogada para um determinado jogador para quais jogadas do adversário ele pode perder, depois foram utilizados os dados da tabela para vermos essas probabilidades que ganham da jogada dada, fizemos este processo para todas as 9 jogadas *para cada um dos dois jogadores, depois utilizamos um método de regressão para determinar a função que generaliza o modelo.*

JOGADA	CÓDIGO (valor de x)
Royal Flush	1
Straight Flush	2
Quadra	3
Full House	4
Flush	5
Sequência	6
Trinca	7
Dois pares	8
Par	9

Dessa forma conseguimos encontrar uma função com domínio natural variando de 1 a 9 para cada um dos jogadores, a função G(x) são as probabilidades do Garla e a função T(x) são as probabilidades do Theologis.

$$G(x) = \begin{cases} -0{,}017955577 + 292{,}5514233.x - 337{,}763551928.x^2 + 201{,}933771162.x^3 - 68{,}8653171175.x^4 + 13{,}8437409777.x^5 - \\ 1{,}61976145263.x^6 + 0{,}101917045836.x^7 - 0{,}00266617144688.x^8, se\ x = 1\ ou\ 7 \leq x \leq 9 \\ 6{,}41040436722.10^{-13} + 127{,}00192242.x - 44{,}8808430646.x^2 - 4{,}46743286513.x^3 + 5{,}9899796641.x^4 - 1{,}24485400683.x^5 + \\ 0{,}0821038114525.x^6, se\ 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

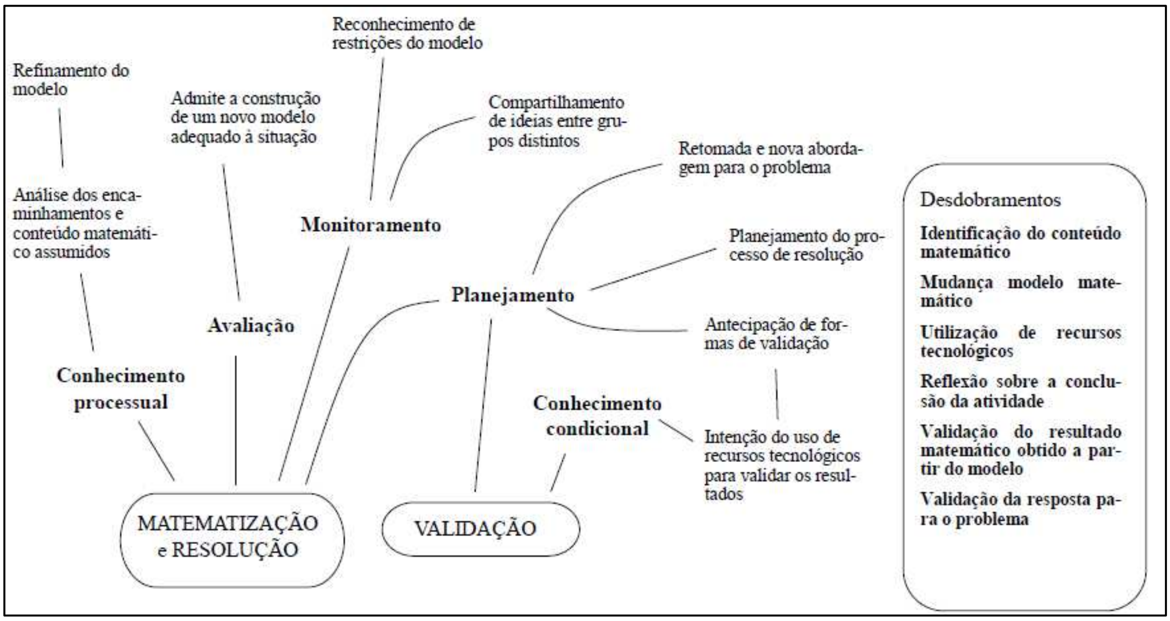
$$T(x) = \begin{cases} 0, se\ x = 1\ ou\ x = 6 \\ -1{,}07014598316.10^{-8} + 153{,}107663608.x - 100{,}489935086.x^2 + 38{,}4934902211.x^3 - 9{,}41388556959.x^4 + \\ 1{,}41792889423.x^5 - 0{,}116471827971.x^6 + 0{,}0038994787702.x^7, se\ 2 \leq x \leq 5\ ou\ 7 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
GARLA							1			6
COMENTÁRIOS	PROBABILIDADE						n=1			n=6
Assim ele com certeza vence	100%	1	1ª		0	-0,017955577	-0,01796		6,4104E-13	6,41E-13
Caso ele saia com Straight Flush com certeza vence, já que o grego não pode formar uma	100%	2	2ª		1	292,5514233	292,5514		127,001922	762,0115
					2	-337,7635519	-337,764		-44,880843	-1615,71
Neste caso a chance dele perder é se nas duas cartas que não especificamos saiam um 2c e um	99%	3	2ª		3	201,9337712	201,9338		-4,4674329	-964,965
					4	-68,86531712	-68,8653		5,98997966	7763,014
A chance dele perder é caso o grego consiga formar uma quadra, ou seja, caso as duas cartas	99%	4	2ª		5	13,84374098	13,84374		-1,244854	-9679,98
					6	-1,619761453	-1,61976		0,08210381	3830,635
A chance dele perder é caso o grego consiga um	91%	5	2ª		7	0,101917046	0,101917			
A chance dele perder é caso o grego consiga um	95%	6	2ª		8	-0,002666171	-0,00267			
A chance de perder é com o grego formando uma quadra, um full house ou um flush	86%	7	1ª							
							100,1616			95
A chance de perder é com o grego formando uma quadra, um full house, um flush ou uma trinca	67%	8	1ª							
A chance dele perder é caso o grego forme dois pares, uma trinca, uma sequência, um flush, um	6%	9	1ª							

Fonte: relatório dos alunos.

A Figura 64 apresenta uma árvore de associação de ideias, a qual ilustra as estratégias metacognitivas utilizadas pelo Grupo 4 para planejar a conclusão da resolução e para a validação.

Figura 64: Estratégias associadas à resolução e à validação(AJ-G3)



Fonte: autora.

As estratégias metacognitivas utilizadas durante o desenvolvimento da atividade do primeiro momento desenvolvida pelo Grupo 3, foram identificadas a partir do uso do instrumento. Ao retomarmos tal instrumento sinalizamos os indicativos das estratégias manifestadas na atividade com o tema Jogo de Poker, obtendo as informações presentes no Quadro 11.

Quadro 11: Estratégias metacognitivas identificadas na atividade AJ-G3.

Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento declarativo identificados nas ações dos estudantes	I	C
CD1 - Admite seus pontos fortes e pontos fracos relativamente ao que precisa saber para desenvolver a atividade.		
CD2 - Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.		
CD3 - Considera diferentes maneiras de resolver o problema identificado nessa situação.		
CD4 - Assume lembrar, organizar ou coletar informações acerca da situação antes de iniciar o desenvolvimento da atividade de modelagem.		
CD5 - Avalia se seus conhecimentos atendem ao que precisa saber para desenvolver a atividade de modelagem.		1
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento processual identificados nas ações dos estudantes	I	C
CP1 - Menciona utilizar estratégias que funcionaram em atividades de modelagem anteriores.		
CP2 - Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas e nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.		1
CP3 - Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas para desenvolver a resolução.		
CP4 - Quando não compreende alguma informação ou conceito, reporta-se aos colegas, ao professor ou realiza pesquisas a respeito.		2
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento condicional identificados nas ações dos estudantes	I	C
CC1 - Reconhece que usa diferentes estratégias para definir seus procedimentos de acordo com as etapas do desenvolvimento da atividade de modelagem.		
CC2 - Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos.		2
CC3 - Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução do problema identificado na situação da realidade.		1
CC4 - Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.		1
CC5 - Declara potencializar seus conhecimentos e competências, frente às suas dificuldades.		
Regulação da cognição: Indicadores de planejamento identificados nas ações dos estudantes	I	C
RP1 - Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade		
RP2 - Define os objetivos da atividade antes de iniciar seu desenvolvimento.		1
RP3 - Planeja a resolução do problema levando em consideração diferentes possibilidades que podem viabilizá-la.		
RP4 - Identifica conteúdos ou procedimentos que podem ser úteis para resolver o problema.		1
RP5 - Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.	1	1
RP6 - Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.	1	
RP7 - Estabelece os passos a serem seguidos na condução da atividade.		
RP8 - Admite dividir o processo de resolução do problema em sub-processos.		
Regulação da cognição: Indicadores de monitoramento identificados nas ações dos estudantes	I	C
RM1 - Reconhece a finalidade do modelo matemático para o estudo da situação da realidade.		
RM2 - Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.		
RM3 - Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece que não entende algo ou quando não consegue prosseguir com a atividade.		
RM4 - Menciona verificações pontuais durante o desenvolvimento da atividade.		1
RM5 - Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.	1	
RM6 - Identifica erros e aplica uma nova estratégia para corrigi-los.		
RM7 - Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram.		1
Regulação da cognição: Indicadores de avaliação identificados nas ações dos estudantes	I	C
RA1 - Identifica quando o modelo construído não é adequado e então investe na construção de um novo modelo.		1
RA2 - Identifica equívocos ou distorções em relação ao conhecimento matemático.		
RA3 - Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema.		1

RA4 - Reconhece que haveriam outras maneiras de conduzir o desenvolvimento da atividade depois de concluir seu trabalho.		

Fonte: autora.

Foram identificados pelo menos um indicativo referente a cada uma das estratégias de conhecimento da cognição (declarativo, processual, condicional) e de regulação da cognição (planejamento, monitoramento, avaliação).

Na Tabela 44, podemos perceber que as estratégias metacognitivas de natureza colaborativa são substancialmente mais incidentes que as de natureza individual nesta atividade.

Tabela 44: Ocorrência de estratégias metacognitivas individuais e colaborativas em AJ-G2

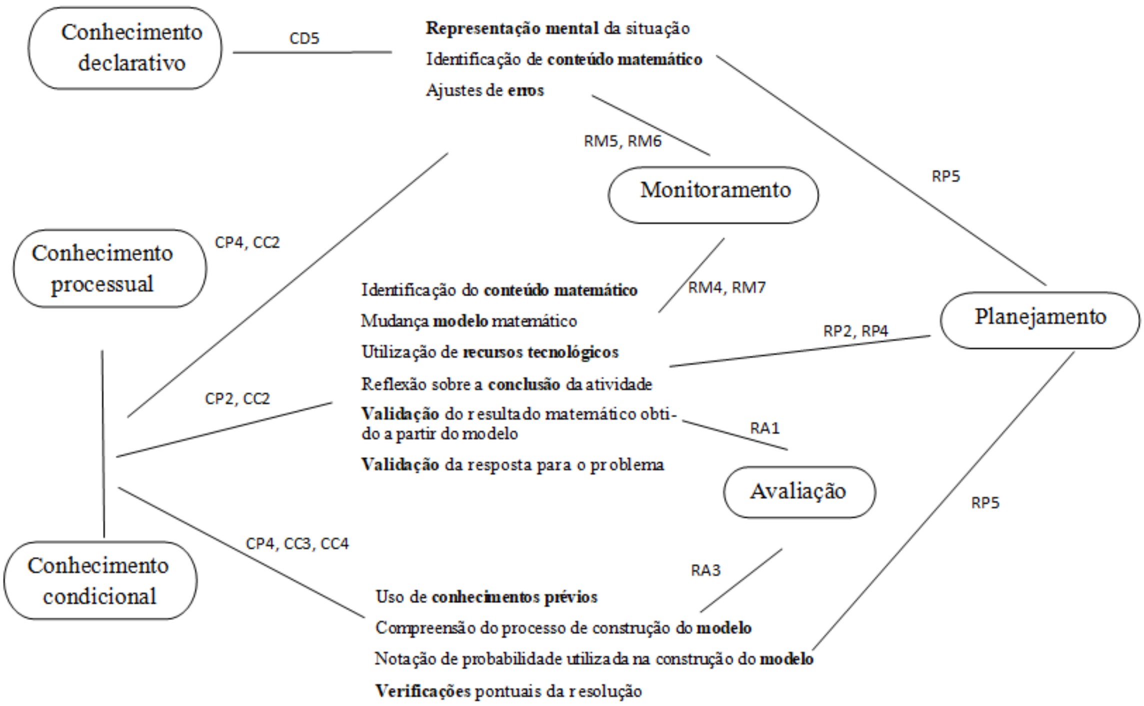
	Jogo de Poker	
Estratégias	**I**	**C**
Conhecimento declarativo	0	1
Conhecimento processual	0	3
Conhecimento condicional	0	4
Planejamento	2	3
Monitoramento	1	2
Avaliação	0	2
Total	3 16,7%	15 83,3%

Fonte: autora.

Ainda, não há registros de estratégias de conhecimento da cognição de natureza individual. Embora a quantidade de estratégias registradas tenha sido pequena, notamos que a interação do grupo foi o principal fator a desencadear estratégias metacognitivas na atividade.

A interação entre as estratégias e delas com os desdobramentos para a atividade são ilustrados pela Figura 65, a partir de uma árvore de associação de ideias.

Figura 65: Síntese das estratégias metacognitivas do Grupo 3 na atividade do primeiro momento



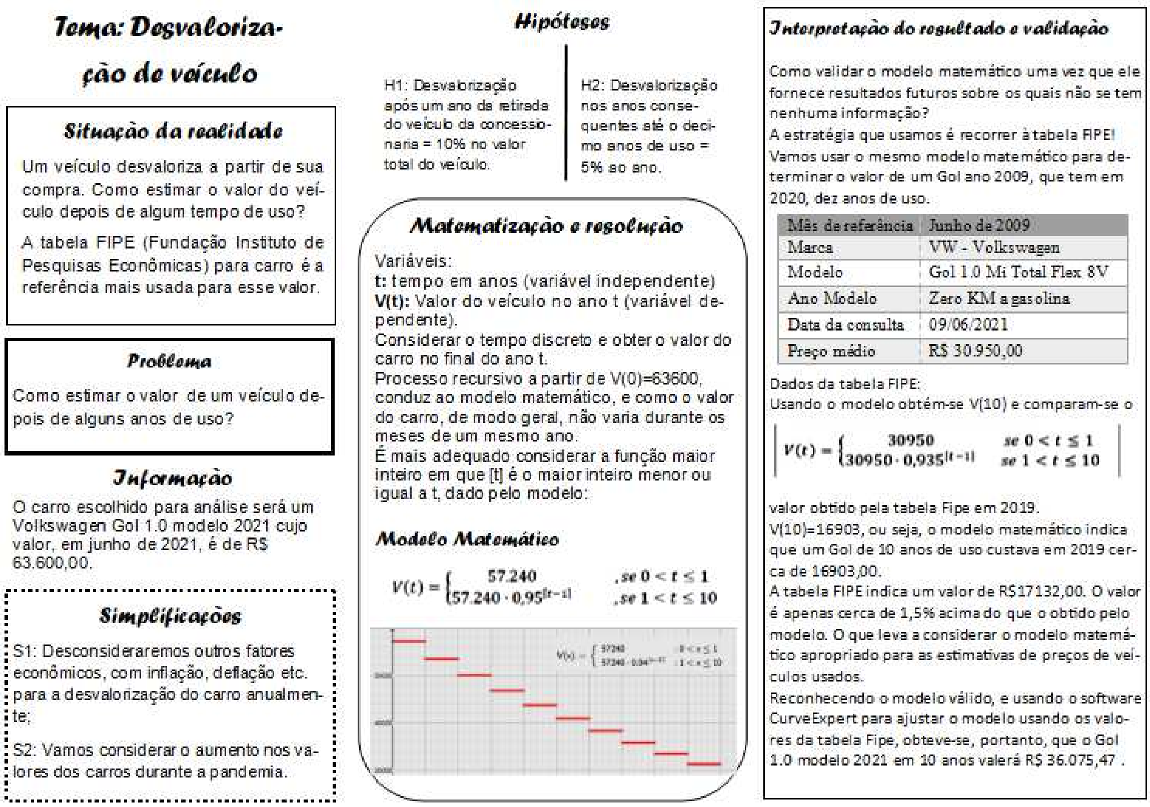
Fonte: autora.

É possível notar que, mesmo no contexto de uma atividade de primeiro momento de familiarização, todas as estratégias são manifestas e diversos indicadores são identificados. Uma diferença substancial é que os desdobramentos inferem apenas sobre os elementos finais de uma atividade de modelagem matemática, já que os iniciais são apresentados aos alunos pelo professor. Assim, parece que os "blocos" de desdobramentos são concentrados.

6.1.3.2 Atividade com a temática desvalorização de um veículo

A atividade de modelagem do terceiro momento, com a temática "Desvalorização de veículo" (AV) e problema enunciado como "Como estimar o valor de um veículo depois de alguns anos de uso?", foi definido pelos alunos e seu desenvolvimento aconteceu durante seis aulas síncronas e seis assíncronas. O desenvolvimento realizado pelo Grupo 3 (G3) constituído por três alunos, a que chamamos J_3, K_3 e L_3, fornece elementos que compõe nossas análises e discussões nesta seção. As aulas síncronas foram gravadas com o recurso do Google Meet, as quais, junto com o relatório da atividade e os questionários respondidos pelos alunos (Anexo 3), forneceram os dados que compõem nossa análise. A Figura 66 apresenta uma síntese do desenvolvimento apresentado pelo Grupo 3 com o tema descrito.

Figura 66: Síntese da resolução da atividade "Desvalorização de veículo" apresentada pelo Grupo 3



Fonte: autora.

Uma particularidade dessa atividade é que os diálogos aos quais temos registro são, em sua maioria, da apresentação da atividade com os encaminhamentos bem adiantados, ou seja, é uma narrativa abreviada de como se deu o desenvolvimento da atividade. Isso porque o processo de desenvolvimento foi assíncrono e os alunos não detalham como ele se deu. Com isso, esperamos evidenciar que estratégias metacognitivas utilizadas durante o desenvolvimento da atividade são recuperadas/lembradas ou manifestas durante/para os momentos de comunicação dos resultados parciais e finais.

As apresentações iniciais, obtidas das gravações da aula em que o grupo se reuniu para discutir com a professora e a pesquisadora sobre o problema proposto, nos fornecem indícios de estratégias metacognitivas que conduzem o grupo à definição do tema e do problema, conforme ilustra a Tabela 45.

Tabela 45: Indícios de estratégias metacognitivas na escolha do tema e definição do problema (AD-G3)

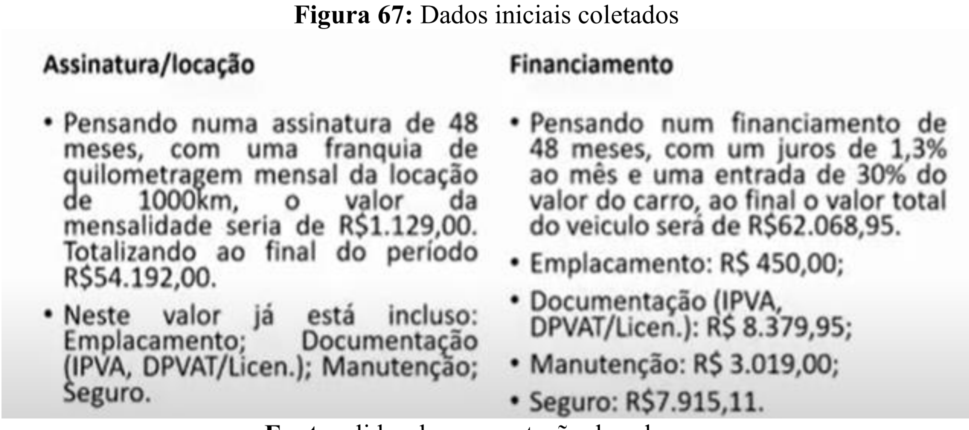
Indicativo da estratégia	Evidência
(C) **CD2 -** Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.	K_3: Nós decidimos que a temática da nossa atividade “a compra ou aluguel de um carro” eu e o J_3 tínhamos interesse em investigar e algo que está na nossa realidade. Tendo isso em mente, nós pensamos qual seria o problema.

(C) **RP1 -** Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade.	Que ficou definido: Em relação à compra financiada e a locação/assinatura de um carro [*explica*] qual será o caso mais vantajoso economicamente para quem necessita do veículo? J_3: Lembrando que estamos pensando na atividade sempre tentando trazer para a nossa realidade. Isso implica nas nossas simplificações, escolhas e hipóteses. Prof.: Certo. Mas eu preciso saber como vocês fizeram a matematização para chegar a esses valores do financiamento, do seguro, do IPVA? Que matemática usaram para isso? J_3: Nós fizemos uma simulação. Prof.: A temática é muito interessante, mas precisa desenvolver todos esses modelos.
(C) **RM3 -** Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece não entender algo ou não consegue prosseguir com a atividade. (C) **RP2 -** Define os objetivos da atividade antes de iniciar seu desenvolvimento.	K_3: A partir das orientações da professora e conversando no grupo, nós decidimos continuar com o tema, entretanto, mudamos um pouco o problema. J_3: É, na verdade é uma delimitação de um problema que surgiu a partir do tema anterior. K_3: Pensamos em investigar como ocorre a desvalorização de um veículo 0 Km ao longo dos anos. Consideramos pertinente investigar essa temática porque as pessoas compram um carro e depois de certo tempo trocam e nesse momento, na maioria das vezes, vende por um valor bem inferior ao que pagou. Nosso objetivo seria então construir um modelo matemático em que fosse possível calcular o valor de um veículo após alguns anos de sua compra.

Fonte: autora.

Ao considerar a temática como opção de investigação, os alunos apresentam características da situação escolhida, explicando o contexto envolvido no problema elencado incialmente. Entendemos, portanto, que a estratégia metacognitiva de conhecimento declarativo (CD2) pode ter despertado o aluno a evidenciar o que sabe sobre a situação. Ainda, quando o aluno fundamenta a escolha do tema em seu interesse e na noção do que é realidade, o que pode estar relacionado ao entendimento do aluno da relação entre realidade e a elementos característicos a uma atividade de modelagem (hipóteses, simplificações). Disso revelam-se indícios das estratégias de conhecimento declarativo (CD2) e de planejamento (RP1), as quais configuram a responsabilidade pela tomada de decisão sobre o tema a investigar e pela coleta de informações relacionadas (Figura 67).

Figura 67: Dados iniciais coletados

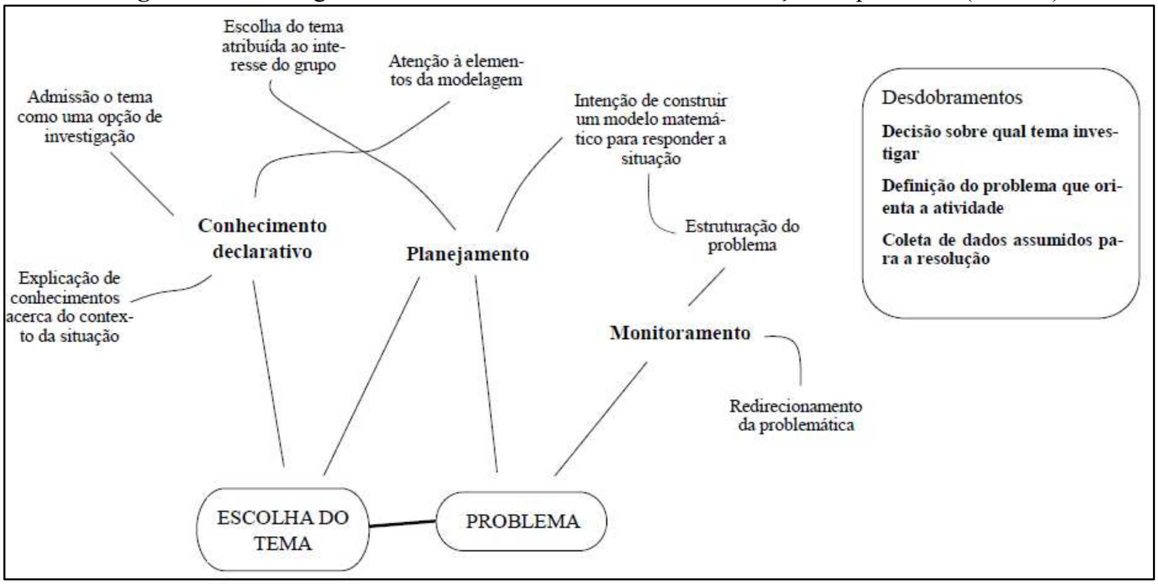


Fonte: slides da apresentação dos alunos.

A partir de interações no grupo e com a professora, a estratégia de monitoramento RM3, parece ter levado o aluno a redirecionar a problemática, mantendo o tema (compra de carro), mas delimitando um novo problema para investigação. Em seguida, na medida em que realiza argumentação sobre a pertinência do tema, define como objetivo a construção do modelo, ações que parecem ter sido desencadeadas pela estratégia metacognitiva de planejamento (RP2).

Com vistas às análises apresentadas, acerca do tema e do problema, elaboramos a árvore de associação de ideias da Figura 68.

Figura 68: Estratégias associadas à escolha do tema e à definição do problema (AD-G3)



Fonte: autora.

A partir dos primeiros encaminhamentos, os alunos concentram-se em retratar aspectos relacionados aos dados obtidos, conforme excertos apresentados na Tabela 46.

Tabela 46: Indícios de estratégias metacognitivas na simplificação de dados (AD-G3)

Indicativo da estratégia	Evidência
(I) **CD2 -** Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade. (C) **RP6 -** Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.	K_3: Sabemos que muitos fatores influenciam na desvalorização de um veículo, sendo os principais o ano de fabricação e o estado de conservação, além da inflação e deflação, por exemplo, e que essa desvalorização também irá se modificar de um tipo de carro para outro. Sabemos também que existem tipos de carro que desvalorizam menos do que outros, mas para restringir um pouco mais o nosso trabalho e deixar mais objetivo, escolhemos um tipo de carro específico para estudar essa desvalorização, e encontrar dados o mais fiel possível para validar o modelo matemático que vamos construir. J_3: Para delimitar nosso problema, escolhemos um modelo de carro popular, novamente pensando na nossa realidade um Volkswagen gol modelo 2021. O valor dele, para nossa surpresa, era de R$ 63.600,00.
(I) **CD4 -** Assume lembrar, organizar ou coletar informações acerca da situação antes de iniciar o	L_3: Para conseguir dados referentes ao tema, pesquisamos em sites da internet, artigos e ligamos para algumas concessionárias. Eles nos informaram o preço atual de alguns carros, mas eles disseram que não seria possível informar sobre a desvalorização, por fatores como

desenvolvimento da atividade.	pandemia, crises, os carros estão valorizando e tem havido uma discrepância. J_3: Alguns sites fornecem uma fórmula, um cálculo, só que na maioria deles não se fala de onde vêm aqueles dados ou resultados obtidos. Então nós pensamos em construir um modelo para essa situação.
(I) **RM1 -** Reconhece a finalidade do modelo matemático para o estudo da situação da realidade.	

Fonte: autora.

As estratégias de natureza individual sinalizam a compreensão do aluno sobre aspectos da situação em estudo e ilustra a forma como foi coordenada a escolha do tema. A afirmação “sabemos que muitos fatores influenciam”, seguida pela listagem de tais fatores, denota que o aluno explora o que sabe no contexto da situação. Enquanto que a expressão “validar o modelo” e “pensando na nossa realidade” indica o que ele fundamenta seus encaminhamentos no que sabe sobre o processo de modelagem. Esse “saber” tanto da situação quanto da modelagem pode estar associado ao uso da estratégia de conhecimento declarativo (CD2). Tal estratégia permite ao grupo simplificar os dados coletados na perspectiva do que lhe será útil para resolver o problema a que se propõe, característica relacionada ao uso da estratégia de planejamento (RP6). Dessa forma, a assessoria entre as estratégias conduz as simplificações assumidas pelo grupo para o desenvolvimento da atividade.

Simplificações:

S1: Desconsideraremos outros fatores econômicos, com inflação, deflação etc. para a desvalorização do carro anualmente;
S2: Vamos considerar o aumento nos valores dos carros durante a pandemia.

Ainda sobre essas simplificações, parece haver consenso nas respostas dos alunos do grupo à uma pergunta do questionário.

O seu grupo, provavelmente, precisou realizar algumas simplificações para poder desenvolver a atividade. Qual foi a estratégia principal para isso?.
J_3, K_3, L_3 - Diagnosticar limitações (informações que não estão disponíveis ou são de difícil acesso, dados em excesso, etc)

Ao identificar a estratégia de monitoramento RM1 reconhecemos que os alunos enfatizam a relevância do modelo matemático, tendo em vista as necessidades apontadas na sua busca por informações sobre o tema. Ainda, o fato de antes de iniciar a resolução matemática, sinalizam ter conhecimento sobre informações acerca do tema pode estar relacionado a estratégia de conhecimento declarativo (CD4). Isso desencadeia na atividade, os encaminhamentos direcionados à construção do modelo matemático capaz de responder a situação.

Conhecer sobre o tema, selecionando e simplificando informações faz emergir discussões sobre as hipóteses assumidas na atividade, conforme Tabela 47.

Tabela 47: Indícios de estratégias metacognitivas na elaboração de hipóteses (AD-G3)

Indicativo da estratégia	**Evidência**
(I) **RM2 -** Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.	J_3: Precisamos definir algumas hipóteses. Encontramos que no 1º ano o veículo sofre uma desvalorização de 10% do valor total. Então tomamos como hipótese que a desvalorização seria de 10% no primeiro ano. E a outra informação foi de que nos próximos anos, ou seja, até o 10º ano, até quando a gente consiga calcular, essa desvalorização é, em média, 5% ao ano em relação ao valor do veículo. Limitamos o período para 10 anos, porque as informações que encontramos são para esse intervalo de tempo e depois disso fica mais difícil de obter uma média ou um valor mais específico para desvalorização.
(I) **RP6 -** Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.	

Fonte: autora.

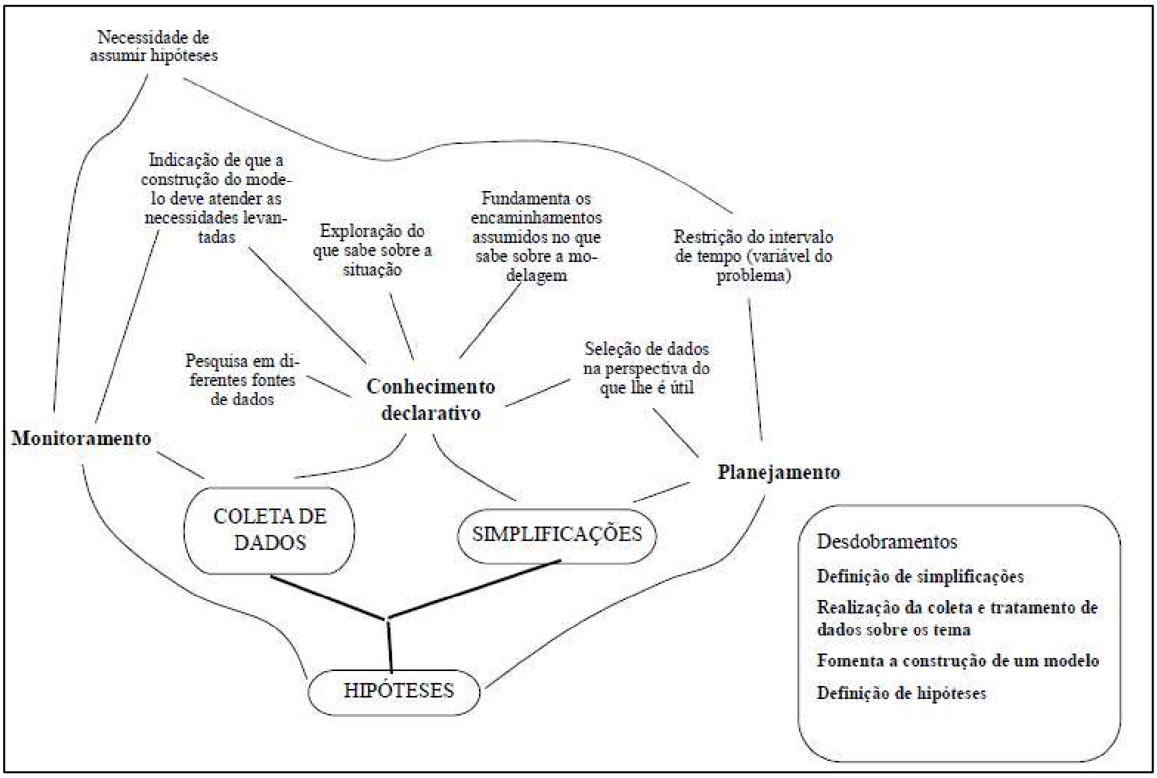
A necessidade de limitar novamente a situação, restringindo o período de estudo da desvalorização para dez anos, sugere que o aluno manifesta a estratégia de planejamento RP6. Além disso, denota a flexibilidade de uma atividade dessa natureza, em que, neste caso, a simplificação não fica restrita à um único momento, mas acontece durante várias etapas do processo. A estratégia de monitoramento (RM2) revela que o grupo reconhece a formulação de hipóteses como necessária, tomadas as informações acerca da situação em estudo. Essas estratégias, de natureza individual, denotam o olhar próprio do aluno sobre as opções do grupo acerca da situação.

Diante disso, as hipóteses H1 e H2 assumidas na resolução podem ter sido consequência da interação entre essas estratégias.

H1: Desvalorização após 1 ano da retirada do veículo da concessionaria: 10% no valor total do veículo;
H2: Desvalorização nos anos conseguintes até o decimo anos de uso: 5% ao ano.

A árvore de associação de ideias, da Figura 69, visa mostrar como se deu o tratamento dos dados e a elaboração de hipóteses na atividade relatada pelos alunos.

Figura 69: Estratégias associadas à coleta e simplificação dos dados e à elaboração de hipóteses (AD-G3)



Fonte: autora.

As implicações resultantes do uso dessas estratégias inferem na resolução matemática da atividade, conforme segue na Tabela 48.

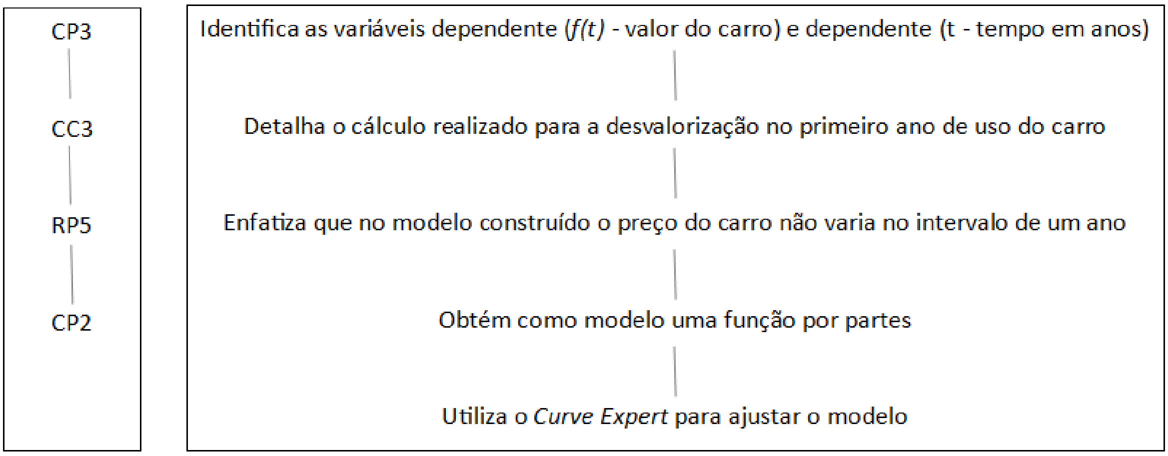
Tabela 48: Indícios de estratégias metacognitivas na resolução do problema (AD-G3)

Indicativo da estratégia	Evidência
(C) **CP3 -** Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas na resolução.	K_3: Nossa situação está relacionada as variáveis t: tempo em anos, e variável independente; e V(t) valor do veículo no ano t. J_3: Com a informação do preço do carro e a partir da hipótese de que desvalorização para o primeiro ano é de 10%, nós conseguimos obter o V (0) = 63 600 e o V(1) que calculado a partir do V(0) menos 10% do valor do ano anterior. E desenvolvendo a matemática, obtemos R$ 57 240 como valor de V(1). Então esse será o preço do carro em 2022 se ele fosse comprado em 2021, segundo o modelo. Neste caso nós utilizamos o processo recursivo, que a partir de V(0)= 63600, conduz ao modelo matemático K_3: Lembrando que o valor do carro, de modo geral, não varia durante os meses de um mesmo ano, só de um ano para outro. J_3: Para os demais anos, segundo nossas informações e hipóteses, a desvalorização é de 5% ao ano, então consideramos mais adequado utilizar a função maior inteiro em que [t] é o maior inteiro menor ou igual a t. $\mathrm{V(t)} = \begin{cases} 57.240 & \text{se } 0 < \mathrm{t} \leq 1 \\ 57.240 \cdot 0{,}935^{[\mathrm{t}-1]} & \text{se } 1 < \mathrm{t} \leq 10 \end{cases}$ L_3: Usamos o software *Curve Expert* para ajustar um modelo usando os valores da tabela Fipe e chegamos ao valor de R$ 36.075,47
(C) **CC3 -** Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução identificado na situação problemática.	
(C) **RP5 -** Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.	
(C) **CP2 -** Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas ou nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.	

Fonte: autora.

A Figura 70 ilustra a linha narrativa relativamente ao que se refere ao processo de resolução e obtenção do modelo matemático.

Figura 70: Linha narrativa de resolução



Fonte: autora.

Para chegar à resolução, os alunos parecem, de forma conjunta e colaborativa, retomar aspectos matemáticos da situação, ou seja, expressar em linguagem matemática as informações admitidas sobre o tema, como por exemplo as variáveis tempo (e intervalo), valor do carro e classificação da função utilizada (maior inteiro). Essas características parecem ser evidenciadas do uso da estratégia de planejamento, segundo indicativo RP5. A clareza demonstrada no uso desses aspectos matemáticos, sinaliza o efeito da estratégia de conhecimento processual (CP3).

Na resolução matemática, os alunos explicam brevemente o processo utilizado, as variáveis adotadas, o conteúdo explorado e o resultado obtido. Isso sinaliza que a estratégia de conhecimento condicional (CC3) pode ter contribuído para os encaminhamentos assumidos para o processo de resolução. Ainda, durante dessa explicação, o aluno ressalta que, tal resolução sustenta-se nas hipóteses e informações adotadas, dando a entender que, caso as opções iniciais fossem outras, a resolução poderia tomar outro rumo. Ou seja, a meio termo da estratégia de conhecimento condicional, a fala do aluno manifesta a estratégia de conhecimento processual CP2.

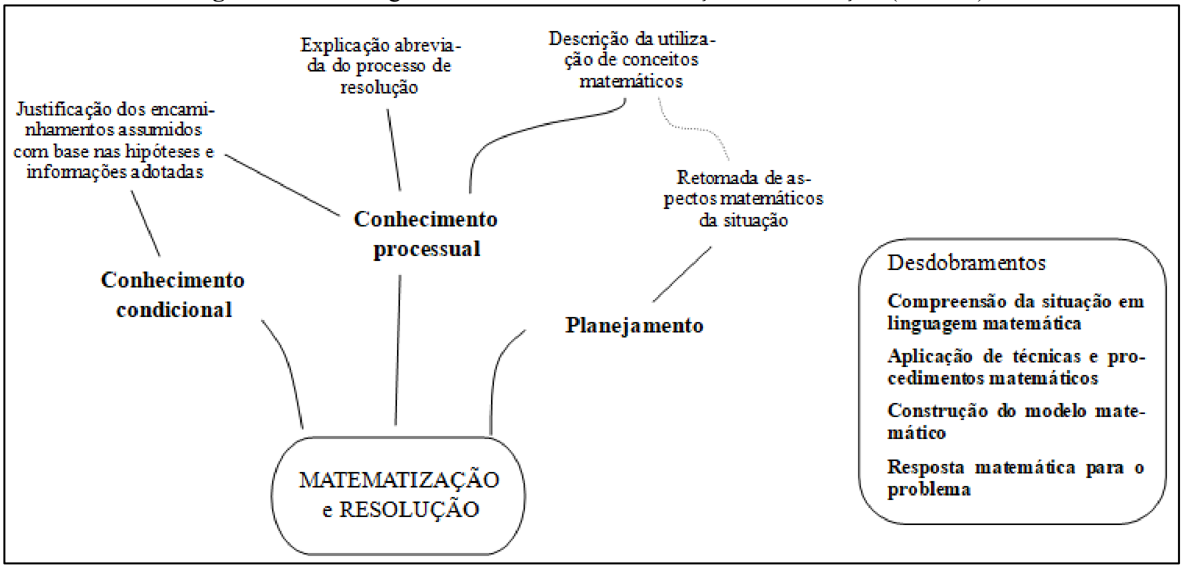
De modo geral, da interlocução entre as estratégias identificadas, decorrem a matematização da situação, a aplicação de técnicas e procedimentos matemáticos para a construção do modelo matemático e a resposta para a situação obtida a partir da aplicação de tal modelo.

Com relação ao modelo matemático construído nessa atividade, assinale as alternativas que são verdadeiras para o seu grupo.
J_3, K_3, L_3 - O modelo permitiu obter a resposta para o problema que foi formulado em relação à situação em estudo.

K_3 - O modelo pode ser generalizado para outras situações similares.

Para sistematizar as informações apresentadas, sobre a resolução matemática do problema, elaboramos a árvore da Figura 71.

Figura 71: Estratégias associadas à matematização e à resolução (AD-G3)



Fonte: autora.

Os excertos apresentados na Tabela 49, retratam encaminhamentos assumidos para validar o modelo e a resposta obtida.

Tabela 49: Indícios de estratégias metacognitivas na validação (AD-G3)

Indicativo da estratégia	Evidência
(I) **RM7 -** Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram.	L_3: Como não conseguimos validar o modelo para 2031 e conversando com a professora e o grupo, tivemos a ideia de pegar um carro de 2009 do mesmo modelo Volkswagen 1.0 e analisar junto a tabela Fipe se esse modelo caberia dentro. Então pegamos na tabela Fipe o valor do carro em 2009, que seria de R$30 950. Prof: L_3 então porque vocês pegaram em junho de 2009?
(C) **CC2 -** Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos.	L_3: A Fipe dá a tabela mensalmente e como em dezembro/janeiro é mês de 13º salário e onde há uma alta movimentação de renda na economia, esse valor pode alterar. Então pensamos no mês de junho, por pensarmos que é um mês mais "normal" com relação a discrepância na economia. J_3: É, aí calculamos quanto custa hoje esse carro que era zero há 10 anos atrás! Aí que nós vimos que o modelo funciona, a L_3 vai explicar por quê.
(I) **CC4 -** Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.	L_3: Fizemos essa construção encontrando uma regressão linear e por meio do gráfico [slides] de junho de 2009 à junho de 2019. A diferença que encontramos do nosso modelo para tabela Fipe foi de 1 919,20. Validando com a tabela Fipe com os valores de todos os anos analisados [2009-2019]
(I) **RA3 -** Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema.	analisamos que de um ano para o outro a desvalorização foi pequena (1%). Porém mesmo com essas oscilações podemos chegar a um valor bem próximo do real. Então optamos por verificar utilizando o *Curve Expert* e encontramos uma exponencial e, calculando para 10 anos encontramos R$16 872, 75. O fato de utilizar o curve foi de comparação.
(C) **RA4 -** Reconhece que haveria outras maneiras de conduzir o	Prof.: O que vocês acham que foi mais desafiador nessa atividade? J_3: Foi muito desafiador encontrar como o carro desvaloriza. Até hoje mesmo eu pensei em outra forma de obter esse valor. Acho que podia pegar

desenvolvimento da atividade depois de terminá-la.	uns 5 modelos diferentes de carro popular, durante 10 anos, e ir vendo o percentual de desvalorização. Aí tentar procurar um padrão, uma média, alguma coisa nesse sentido, mas focamos muito em ter informação pronta, de *sites*, de outros artigos e tivemos muita divergência. Aí fizemos usando estes percentuais. Mas até por isso que nós também pegamos os valores da tabela Fipe e ajustamos aquele modelo.

Fonte: autora.

A frase “conversando com a professora e o grupo” sinaliza a estratégia de monitoramento (RM7) e denota que o aluno reconhece a influência do grupo e da professora nas decisões da atividade, o que evidencia, também que a natureza colaborativa da estratégia na atividade de modelagem matemática.

Essa estratégia de monitoramento, parece ter sido consequente da percepção dos alunos de que a validação do modelo seria inacessível no momento e os leva a construir um outro modelo, análogo ao primeiro, para um carro de mesma configuração (marca, modelo) porém de ano 2009. Ao discorrer sobre o procedimento de utilizar uma situação retroativa, que pode ser validada com dados verídicos, verificam o processo de construção do modelo matemático e revelam as estratégias de conhecimento condicional (CC2 e CC4). Ainda, o uso do software *Curve Expert* surge como uma possibilidade a mais para a observação do comportamento da desvalorização do veículo em estudo. Entretanto, os alunos percebem que o modelo obtido pelo software apresenta uma diferença maior se comparado ao modelo da função maior inteiro que eles obtiveram durante a resolução (Quadro 12).

Quadro 12: Modelo complementar usado na validação

<table>
<tr><th colspan="3">Informações sobre o veículo Gol – novo - modelo 2009</th></tr>
<tr><td>Mês de referência</td><td>Junho/2009</td><td>Junho/2019</td></tr>
<tr><td>Preço médio</td><td>R$ 30 950,00</td><td>R$ 17 132,00</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

Modelo 1

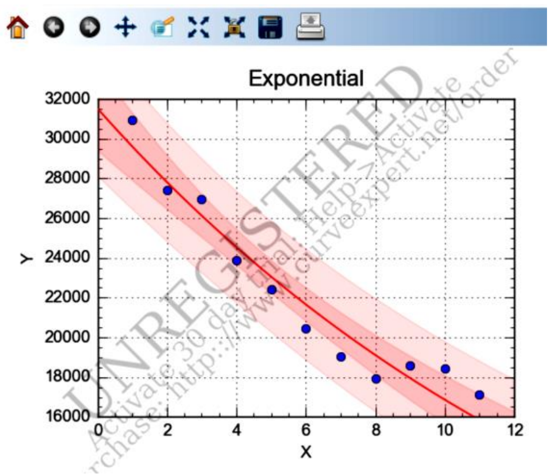
Dos cálculos realizados, sem o auxílio de software, chegamos que o modelo será:

$$V(t) = \begin{cases} 27.855 & ,se\ 0 < t \leq 1 \\ 27.855 \cdot 0{,}95^{\lceil t-1 \rceil} & ,se\ 1 < t \end{cases}$$

Logo $V(10)=27.855 \cdot 0{,}95^9=\mathbf{17.555{,}59}$

</td><td>

Modelo 2



</td></tr>
</table>

	$V(t) = 31.522{,}46 \cdot e^{-0{,}0625 \cdot t}$, $V(10) = 31.522{,}46 \cdot e^{-0{,}0625 \cdot 10} = 16.872{,}75$ $V(10) = 31.522{,}46 \cdot e^{-0{,}0625 \cdot 10} = \mathbf{16.872{,}75}$
Ou seja, ambos os modelos são aceitáveis, entretanto o nosso modelo 1 chegou mais próximo do valor real do que a função determinada pelo software *Curve Expert*, se comparados os resultados dos dois modelos com o valor apresentado na tabela FIPE.	

Fonte: relatório dos alunos.

Quando os alunos inferem que "nós vimos que o modelo funciona" e "valor bem próximo do real" explicitam ações decorrentes do uso da estratégia de avaliação (RA3), validando o modelo encontrado em função do problema. Do questionamento da professora, sobre os desafios identificados na atividade, a resposta do aluno sugere o uso da estratégia de avaliação (RA4), quando o aluno percebe novas potenciais abordagem para o problema e consequente resolução, como também que eles percebam fragilidades no desenvolvimento da atividade, como no caso "focar em informação pronta".

Desse modo, verificando que o modelo construído para determinar o valor do carro ano 2009 forneceu uma resposta válida, os alunos validam também o modelo construído para determinar o valor do carro de ano 2021.

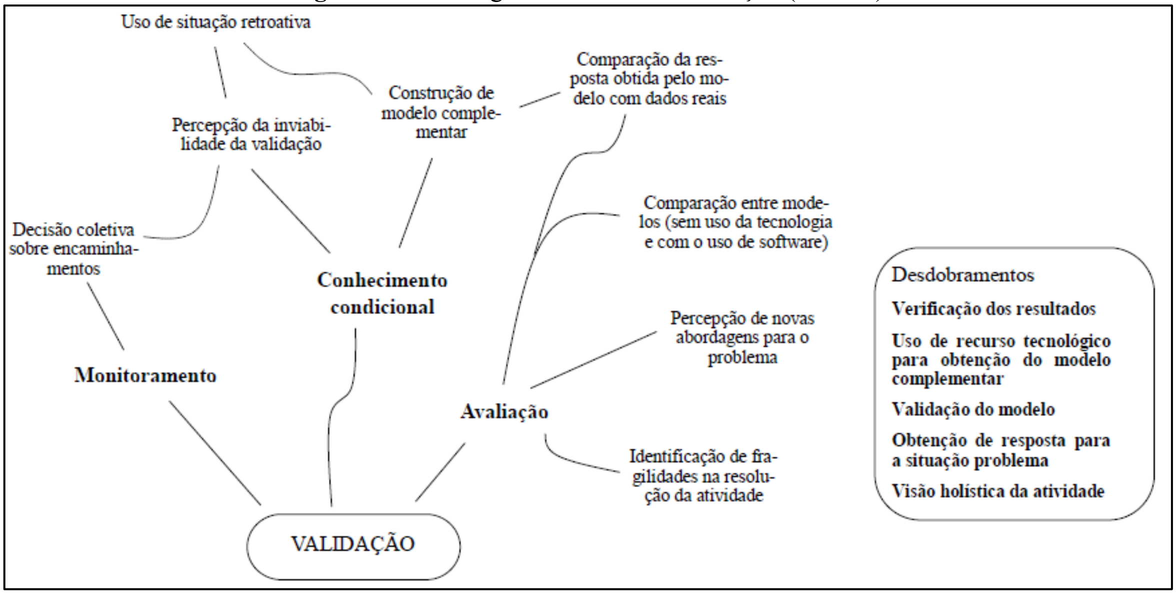
> *Nosso modelo foi construído com dados de 2009 a 2021, e só após a validação e comparação, aplicamos esse modelo para responder à pergunta feita no problema, pois o valor do veículo gol 0km 1.0 comprado em 2021, terá desvalorizado 27.524,53 reais em cima do valor de compra. Logo, o valor do veículo em 2031 será de 36.075,47 reais.*

As respostas dos alunos à pergunta que versa sobre validação, denotam haver consenso sobre a compreensão do grupo acerca do modo como ela foi realizada na atividade em pauta.

> *Com relação à validação nessa atividade de modelagem matemática, assinale o que é verdadeiro para o seu grupo.*
> *J_3, K_3, L_3 - Ela se deu por meio de comparação de dados (observados e estimados pelo modelo)*
> *K_3 - Permite entender a solução encontrada, interpretando como ela responde ao problema inicial. [Anexo 3]*

As estratégias utilizadas para a validação do modelo e da resposta para a situação, na atividade de modelagem matemática em pauta, foi por nós sistematizado na árvore de associação de ideias da Figura 72.

Figura 72: Estratégias associadas à validação (AD-G3)



Fonte: autora.

Diante das descrições apresentadas e das análises empreendidas acerca das estratégias metacognitivas, manifestadas no desenvolvimento da atividade de modelagem do terceiro momento pelo Grupo 3 (AV-G3), e os desdobramentos inferidos por elas para a atividade, sinalizamos as estratégias identificadas na estrutura do instrumento, conforme Quadro 13.

Quadro 13: Estratégias metacognitivas identificadas na atividade AD-G3.

Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento declarativo identificados nas ações dos estudantes	I	C
CD1 - Admite seus pontos fortes e pontos fracos relativamente ao que precisa saber para desenvolver a atividade.	1	
CD2 - Manifesta o que sabe sobre a situação da realidade.		1
CD3 - Considera diferentes maneiras de resolver o problema identificado nessa situação.		
CD4 - Assume lembrar, organizar ou coletar informações acerca da situação antes de iniciar o desenvolvimento da atividade de modelagem.	1	
CD5 - Avalia se seus conhecimentos atendem ao que precisa saber para desenvolver a atividade de modelagem.		
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento processual identificados nas ações dos estudantes	I	C
CP1 - Menciona utilizar estratégias que funcionaram em atividades de modelagem anteriores.		
CP2 - Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados, nas hipóteses formuladas e nos encaminhamentos definidos na matematização da situação.		1
CP3 - Revela o uso de conhecimentos matemáticos e estratégias matemáticas para desenvolver a resolução.		1
CP4 - Quando não compreende alguma informação ou conceito, reporta-se aos colegas, ao professor ou realiza pesquisas a respeito.		
Conhecimento da cognição: Indicadores de conhecimento condicional identificados nas ações dos estudantes	I	C
CC1 - Reconhece que usa diferentes estratégias para definir seus procedimentos de acordo com as etapas do desenvolvimento da atividade de modelagem.		
CC2 - Justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos.		1
CC3 - Explica porque e como usa os conteúdos, técnicas e estratégias na resolução do problema identificado na situação da realidade.		1
CC4 - Avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.	1	
CC5 - Declara potencializar seus conhecimentos e competências, frente às suas dificuldades.		
Regulação da cognição: Indicadores de planejamento identificados nas ações dos estudantes	I	C
RP1 - Decide o que é importante para fazer a abordagem matemática de uma situação da realidade		1
RP2 - Define os objetivos da atividade antes de iniciar seu desenvolvimento.		1
RP3 - Planeja a resolução do problema levando em consideração diferentes possibilidades que podem viabilizá-la.		
RP4 - Identifica conteúdos ou procedimentos que podem ser úteis para resolver o problema.		
RP5 - Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.		1
RP6 - Declara simplificar e organizar os dados coletados, tendo em vista àqueles necessários para resolver o problema proposto.	1	1
RP7 - Estabelece os passos a serem seguidos na condução da atividade.		
RP8 - Admite dividir o processo de resolução do problema em sub-processos.		
Regulação da cognição: Indicadores de monitoramento identificados nas ações dos estudantes	I	C
RM1 - Reconhece a finalidade do modelo matemático para o estudo da situação da realidade.	1	
RM2 - Admite que é necessário formular hipóteses e fazer simplificações na atividade.	1	
RM3 - Manifesta mudança de estratégia ou pedido de ajuda quando reconhece que não entende algo ou quando não consegue prosseguir com a atividade.		1
RM4 - Menciona verificações pontuais durante o desenvolvimento da atividade.		
RM5 - Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.		
RM6 - Identifica erros e aplica uma nova estratégia para corrigi-los.		
RM7 - Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas ou o professor sugeriram.	1	
Regulação da cognição: Indicadores de avaliação identificados nas ações dos estudantes	I	C
RA1 - Identifica quando o modelo construído não é adequado e então investe na construção de um novo modelo.		
RA2 - Identifica equívocos ou distorções em relação ao conhecimento matemático.		
RA3 - Verifica se seus resultados finais correspondem às condições do problema.	1	

RA4 - Reconhece que haveriam outras maneiras de conduzir o desenvolvimento da atividade depois de concluir seu trabalho.		1

Podemos notar que as seis estratégias foram manifestadas durante o desenvolvimento da atividade, embora neste caso, houve um considerável número de aspectos indicadores que não foram sinalizados a partir do que se mostra nos excertos analisados.

A Tabela 50, ilustra quantitativamente a ocorrência de estratégias metacognitivas na atividade analisada.

Tabela 50: Ocorrência de estratégias metacognitivas individuais e colaborativas em AD-G2

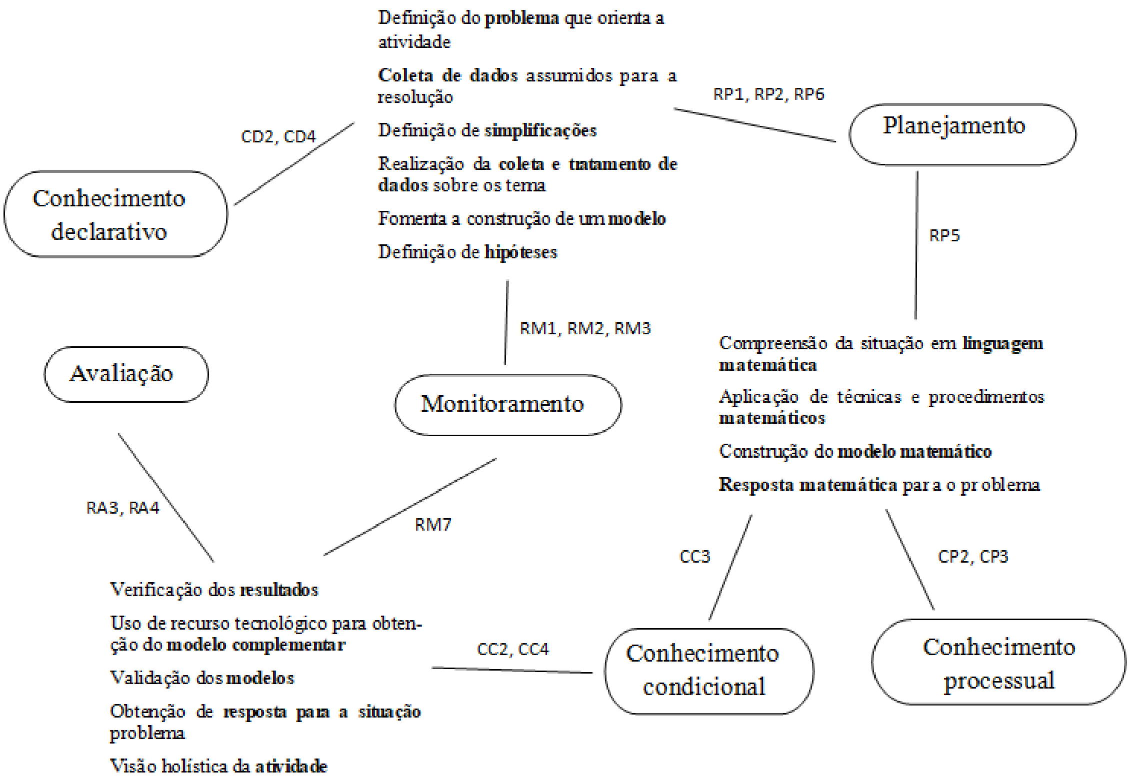
	Desvalorização de veículo	
Estratégias	**I**	**C**
Conhecimento declarativo	2	1
Conhecimento processual	0	2
Conhecimento condicional	1	2
Planejamento	2	3
Monitoramento	3	1
Avaliação	1	1
Total	9 47,36%	10 52,64%

Fonte: autora.

O Grupo 2, que na atividade de primeiro momento havia manifesto uma maior quantidade de estratégias metacognitivas de natureza colaborativa, agora, na atividade de terceiro momento continua com estratégias dessa natureza como sendo predominantes.

Identificadas as estratégias metacognitivas, com o auxílio do instrumento para a atividades de modelagem matemática com o tema desvalorização de veículo, elaboramos a árvore de associação de ideias da Figura 73 na intenção de ilustrar o fluxo de relações entre as estratégias, bem como as associações que conduzem à desdobramentos na atividade do terceiro momento desenvolvida pelo Grupo 3.

Figura 73: Síntese das estratégias metacognitivas do Grupo 3 na atividade do terceiro momento



Fonte: autora.

O desenvolvimento da atividade foi apresentado de forma linear, sendo assim, as estratégias que emergiram, possibilitam algumas reflexões. Primeiro, tendo em vista que os alunos apresentaram a atividade com os encaminhamentos bem definidos, entendemos que as estratégias identificadas nas falas deles retratam o que lhes foi mais significativo para o desenvolvimento da atividade.

Ainda, cada estratégia parece estar relacionada à momentos específicos da modelagem, por exemplo, as estratégias de conhecimento declarativo, planejamento e monitoramento estão relacionadas aos elementos iniciais da modelagem, como a escolha do tema, definição de hipóteses e coleta de dados, enquanto que o monitoramento, a avaliação e o conhecimento condicional associam-se aos elementos finais de validação por exemplo.

A forma como os alunos tratam e apresentam a atividade revela poucas interações/associações de estratégias com os desdobramentos. Um grupo de desdobramentos associa-se a, no máximo, três estratégias, diferente das atividades descritas e analisadas anteriormente.

7. UMA TAXONOMIA DA METACOGNIÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Da estruturação do instrumento para identificação de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática e da abordagem empírica realizada, evidenciamos elementos que nos permitem construir uma taxonomia que compreende estratégias metacognitivas de regulação da cognição e de conhecimento da cognição manifestadas pelos alunos enquanto se envolvem com atividades de modelagem matemática.

Tendo investigado o desenvolvimento de diferentes atividades de modelagem, apresentados por diferentes grupos de alunos, podemos observar algumas aproximações e alguns distanciamentos entre os processos de resolução adotados pelos alunos. Essas aproximações e distanciamentos podem ser acerca de indicativos de estratégias metacognitivas propriamente ditas, de características da situação, do contexto, da matemática, da modelagem ou do grupo. Essas investigações nos possibilitam elaborar o que convencionamos chamar de Taxonomia da Metacognição em Modelagem Matemática.

Nossa compreensão sobre taxonomia se alinha com o entendimento de Tarricone (2011, p. 8) de que

> Taxonomia é uma palavra grega que significa classificação ou arranjo (taxo) e lei (nomos). As taxonomias geralmente compreendem grupos ou unidades que também são rotulados como táxons (singular = táxon), frequentemente, mas não necessariamente, de estrutura hierárquica. A taxonomia da metacognição não se destina a ser uma estrutura hierárquica do construto, mas representa uma classificação ou nomenclatura da metacognição.

Para Aquino, Carlan e Brascher (2009), uma taxonomia não é neutra e não pode ser rotulada como certa ou errada, tendo em vista que ela é organizada a partir de um determinado ponto de vista e apresenta uma forma classificatória de entendimento de uma dada realidade, atendendo a diferentes propósitos.

A taxonomia que propomos carrega consigo características de taxonomias educacionais, tendo em vista que buscamos compreender nas entrelinhas do contexto da modelagem matemática, a metacognição que viabiliza o desenvolvimento de uma atividade dessa natureza em sala de aula. A taxonomia da metacognição em atividades de modelagem matemática pretende atender às necessidades da comunidade de pesquisa acadêmica, fornecendo uma visão abrangente da metacognição em atividades de modelagem matemática.

A construção da taxonomia se estabelece a partir do entendimento de metacognição e estratégias metacognitivas em atividades de modelagem, considerando o quadro teórico da metacognição bem como de características de atividades de modelagem matemática. Assim sendo, a metacognição composta pelos componentes conhecimento da cognição e regulação da cognição, manifestados pelas estratégias metacognitivas, orientam nossas análises e subsidiam nossa construção.

A variedade de ações potencialmente conscientes (ou não) que um indivíduo pode voluntariamente escolher realizar durante a atividade de modelagem, nos permite identificar estratégias metacognitivas e, consequentemente, constituir as unidades taxonômicas, às quais nos referimos como *táxons.* Tal variedade de ações pode sugerir que a ocorrência de estratégias metacognitivas não segue sempre uma mesma estrutura ou ordem, mas uma mesma estratégia pode ser mobilizada em diversos momentos de uma atividade de modelagem matemática e conduzir a diferentes desdobramentos sobre ela. Nessas condições, um *táxon* contém, em sua essência, elementos referentes à todas as estratégias e sob diferentes indicativos.

Considerando a abordagem teórica e metodológica assumida na pesquisa, o uso de estratégias metacognitivas durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática direcionou nosso olhar para a interpretação dos dados e as práticas discursivas dos alunos nos permitiram considerar as diferentes ações dos alunos nas atividades de modelagem matemática e identificar desdobramentos para o desenvolvimento das atividades associadas a essas estratégias.

A fim de sistematizar o processo analítico, elencamos ações recorrentes durante o desenvolvimento de atividades de modelagem que nos permitem identificar estratégias metacognitivas dos alunos. Tais ações podem ser identificadas nos ramos das árvores de associação de ideias e nas linhas narrativas, construídas a partir da pesquisa empírica.

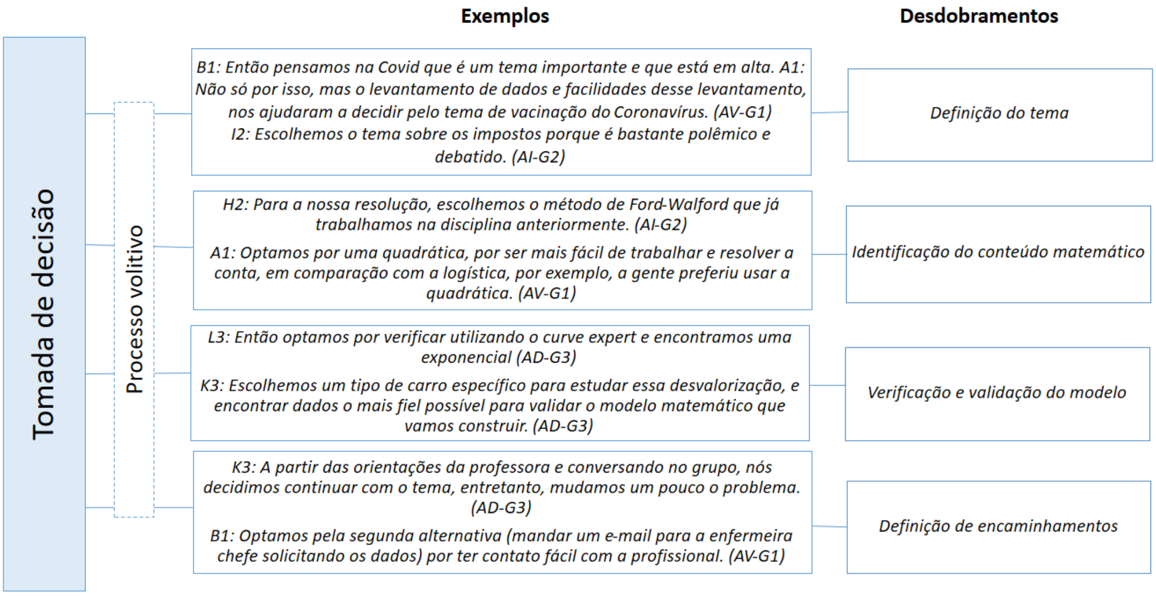
Após identificar ações que permeiam vários momentos de diferentes atividades de modelagem em grupos distintos e que inferem diversos desdobramentos para a atividade e elucidam diferentes estratégias metacognitivas, buscamos estabelecer aproximações entre ações dos alunos e agrupar àquelas com características semelhantes entre si.

Ao agrupar tais ações evidenciamos seis *táxons* de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática: tomada de decisão, reflexão intencional, julgamento reflexivo, experiência social, coesão matemática e pensamento sistêmico.

O *táxon* **tomada de decisão** inclui as manifestações que evidenciam deliberações dos alunos em relação à modelagem matemática, no que tange, por exemplo, à escolha da situação problemática, à seleção de informações, aos encaminhamentos assumidos, à definição de hipóteses, ao conteúdo matemático, entre outros. A tomada de decisão é um processo cognitivo que resulta na avaliação e seleção de uma opção entre várias alternativas, quer consciente ou inconscientemente. Pode acontecer de forma intuitiva, no sentido de que o processamento da informação é instantâneo, muitas vezes associado às emoções, hábitos e dependente da memória, por exemplo. Ou ainda, pode acontecer como um processo deliberativo, onde as informações são processadas de forma lenta, demanda maior esforço cognitivo, é regrado e sequencial e pode, em certa medida, agir sobre decisões de caráter intuitivo.

A manifestação da tomada de decisão pode ser observada, nas atividades analisadas, no processo volitivo dos alunos, geralmente explicitado em conjunto com termos do tipo “optamos”, “escolhemos” e “decidimos”. A Figura 74 ilustra alguns exemplos de tomada de decisão e desdobramentos para a atividade de modelagem.

Figura 74: Exemplos de estratégias que indicam tomada de decisão



Fonte: autora.

A tomada de decisão decorre do caráter aberto da modelagem, em que os alunos são responsáveis pela condução da atividade e, segundo Schukajlow e Leiss (2011), a aprendizagem nesse tipo de atividade é acompanhada de processo volitivo. Ao mesmo tempo, os autores elucidam contribuições que essa “tomada de decisão” pode proporcionar para a atividade em curso, para a interpretação da situação da realidade e, consequentemente, para a própria Educação Matemática.

Segundo Stillman e Galbraith (1998) a tomada de decisão dos alunos é crucial para o seu sucesso no desenvolvimento de mecanismos adequados para lidar com a atividade de modelagem. De modo particular, decisões de caráter metacognitivo influenciam ações dos alunos. Essas decisões incluem decidir o que será processado (*a facilidade do levantamento de dados, nos ajudaram a decidir pelo tema* – AV-G1), decidir quanto esforço será gasto no processamento de conhecimentos matemáticos (*optamos por uma quadrática por ser mais fácil de trabalhar e fazer os cálculos* – sic – AV-G1), decidir quais aspectos do plano de resolução da atividade precisam ser focados e refinados (*precisamos fazer uma coleta de dados e encontrar em cada ano quais foram essas taxas* – AP-G2), decidir quais encaminhamentos receberão precedência (*primeiro precisamos definir a taxa que vamos trabalhar* – AP-G2) e a direção que o grupo irá assumir no processo de solução (*depois que formulamos o problema fizemos a coleta dos dados, para iniciar a construção de um modelo* – sic – AI-G2).

Nas atividades de modelagem, as decisões e observações do aluno sugerem várias oportunidades para o desenvolvimento da atividade, influenciando as decisões subsequentes, por exemplo quando um aluno afirma “*depois de encontrarmos o modelo, nós procuramos validá-lo*” (AI-G2) ou “*consideramos os dados da tabela para vermos essas probabilidades que ganham da jogada, depois utilizamos um método de regressão para determinar a função que generaliza o modelo*” (AJ-G3). Assim, a tomada de decisão depende tanto da natureza da atividade, quanto do aluno envolvido e da estratégia de resolução que utilizada. Stillman e Galbraith (1998) destacam ainda que a metacognição nesse caso favorece que decisões tomadas sejam ideais e apropriadas para a atividades que exijam a resolução de problemas.

Discussões matemáticas e acerca da situação do mundo real contribuem para que o grupo chegue a decisões, venha a validar as decisões tomadas para resolver o problema e chegue a um modelo que seja adequado. Daher e Shahbari (2013) sinalizam que, dentre as decisões tomadas está a escolha das ferramentas tecnológicas utilizadas para construir o modelo matemático, as ações e procedimentos matemáticos acerca da validação do modelo, por exemplo.

> Os processos metacognitivos envolvem decidir como classificar cada componente da avaliação, decidir como usar as planilhas para construir um modelo, discutir/planejar como proceder com a atividade, decidir sobre o próximo passo na construção de um modelo, etc. (DAHER; SHAHBARI, 2013, p. 43)

Relativamente ao que Daher e Shahbari (2013) defendem, nas atividades analisadas esses aspectos podem ser observados nas decisões dos alunos acerca de recursos tecnológicos utilizados na resolução do problema, seja para gerar resultados, como no caso do Excel na atividade AP-G1 (*inserir no Excel que faz a conta para nós*), para validar um modelo como em AD-G3 (*então optamos por verificar utilizando o Curve Expert*) ou para construir o modelo matemático como em AI-G2 (*no Curve Expert nós descobrimos os parâmetros e substituímos aqui e obtemos o modelo*).

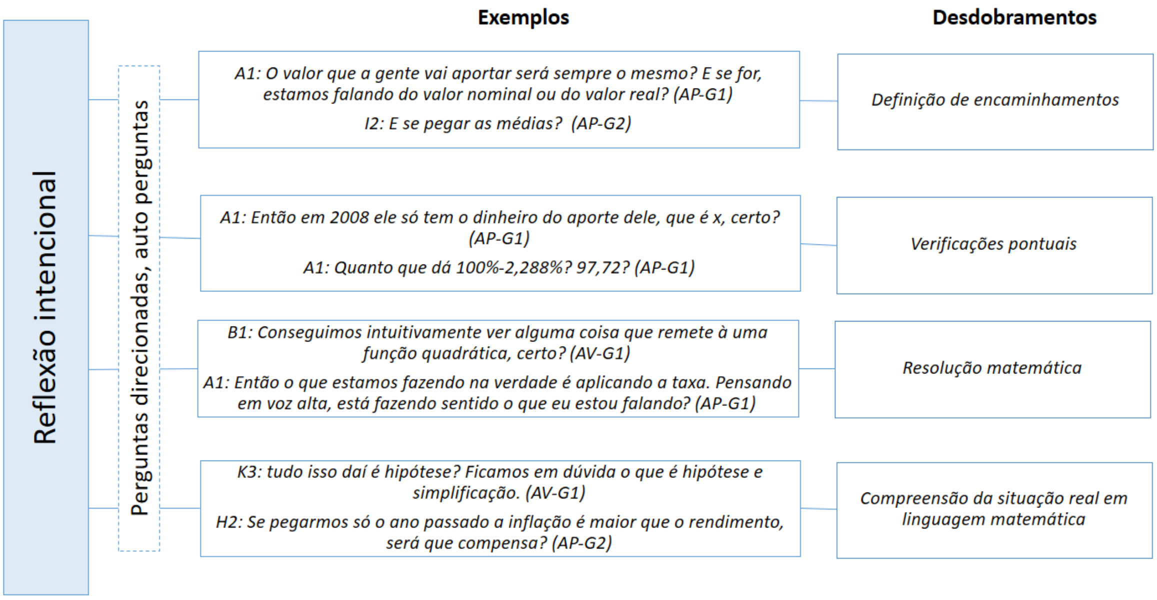
De modo geral, nas atividades de modelagem matemática a metacognição desencadeia ações de tomada de decisão em diferentes situações e promove a construção de conhecimento matemático, de modo que os alunos se tornam sujeitos de uma ação que demanda autonomia e tomada de decisão a partir de seus pensamentos sobre os problemas em que estão trabalhando. Além disso, a consciência de diferentes estratégias metacognitivas e seus objetivos é uma base para a tomada de decisão ao trabalhar em problemas do mundo real (STILLMAN; GALBRAITH, 1998, ROGOVCHENKO, 2021).

O *táxon* **reflexão intencional** consiste nas manifestações conscientes dos alunos que retratam reflexões empreendidas sobre o objetivo que se procura alcançar, conscientemente ou não. Assim como Blomhøj e Kjeldsen (2011) entendemos por reflexão um ato deliberado de pensar sobre alguma ação real ou potencial cujo objetivo seja compreender ou melhorar a ação. Nesse sentido, manifestações dessa natureza favorecem aos alunos comunicar seu pensamento, pensar sobre ele ou disponibilizá-lo aos demais integrantes do grupo, bem como tomar decisões e expressar conhecimentos, habilidades e estratégias essenciais para realizar a atividade com sucesso sob várias condições.

Um meio de comunicação recorrente na maioria dos grupos que evidencia reflexões dos alunos é a utilização de perguntas direcionadas aos outros ou autoperguntas enunciadas pelo aluno. Estas perguntas podem ser relativas à resolução matemática, à situação problemática ou ao contexto do fazer modelagem, sobre as opções de encaminhamentos para a resolução do problema que originou a atividade, sobre verificações pontuais ao longo do desenvolvimento da atividade, sobre o compartilhamento de ideias com os colegas com outros grupos ou com o professor ou para esclarecimento de dúvidas de diversas naturezas.

Na Figura 75 apresentamos exemplos de reflexão intencional nas atividades de modelagem.

Figura 75: Exemplos relacionados ao *táxon* reflexão intencional



Fonte: autora.

A reflexão intencional se mostra também na metacognição dos alunos, no que tange à consciência de ter clareza se entende algo ou não durante o desenvolvimento de atividades de modelagem. O uso de perguntas para os colegas do grupo realça o papel do grupo colaborativo. As perguntas para o professor ou autoperguntas, com vistas a perceber a perspectiva do outro e a própria perspectiva sobre a atividade, possibilitam explicar, investigar, estudar possibilidades, propor questões hipotéticas ou questões abertas (FERRUZZI; ALMEIDA, 2015). Nesse viés, Blomhøj e Kjeldsen (2011) afirmam que, embora as reflexões ocorram na mente dos indivíduos, elas são fortemente influenciadas pelas interações sociais e só podem ser detectadas e analisadas por meio de atos comunicativos.

Stillman (2011) destaca que na modelagem a reflexão só pode fazer sentido quando relacionada ao conteúdo matemático e às decisões de processamento por meio das quais o conteúdo é evocado e implementado. Na esteira desse entendimento, Blomhøj e Kjeldsen (2011) afirmam que as reflexões dos alunos podem ser entendidas por sua relação com o processo de modelagem e classificadas como internas e externas. As reflexões internas têm como objeto o processo de modelagem com seus sub-processos, enquanto as reflexões externas têm como objeto o processo de aplicação de um modelo. A reflexão intencional caracteriza-se pelas ações assumidas pelo aluno em um processo de modelagem por alguns motivos e com algumas intenções e considerando suas consequências.

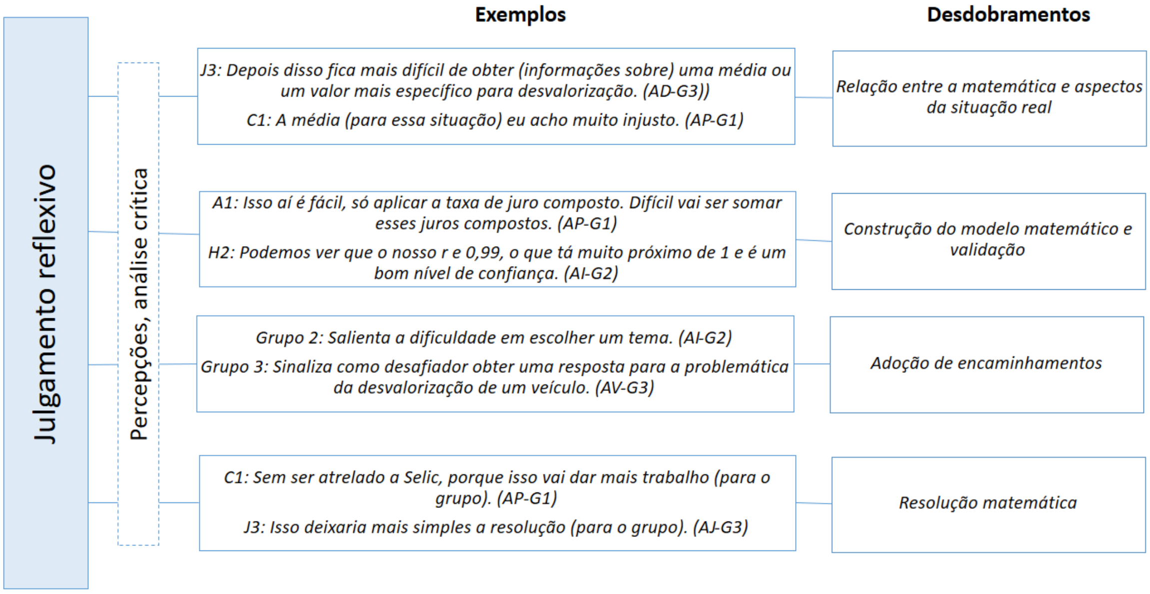
Na pesquisa empírica realizada, ao identificarmos as estratégias metacognitivas dos alunos, percebemos indícios de reflexão interna e externas evidenciadas pelos alunos. Por exemplo, quando o aluno questiona "*tudo isso é hipótese?*" (AV-G1) ou *"É essa probabilidade de vitória que estamos tentando encontrar o modelo?"* (AJ-G3) dirige-se ao processo de modelagem, ou seja, reflexão interna. Entretanto, quando enuncia *"remete à uma função quadrática, certo?"* (AV-G1), *"Acharam como resolve somatório?"* (AP-G2) ou *"Você está usando a fórmula do juro composto?"* (AP-G2) evidencia reflexão externa, pois o objeto é a resolução do modelo.

Stillman (2011) afirma que as estratégias metacognitivas, podem ser consideradas sujeitos e produtos de reflexão e que "o interesse pela reflexão está relacionado exclusivamente ao seu papel de facilitar a atividade metacognitiva no processo de modelagem" (p. 168). Segundo a autora, isso pode favorecer que os alunos se tornem bons modeladores e não apenas solucionadores de problemas. Ainda, desenvolver a sensibilidade entre os alunos para reflexões sobre processos de modelagem e sobre aplicações reais ou possíveis de modelos é uma parte importante do objetivo de longo prazo para o ensino e para o desenvolvimento de competências de modelagem matemática (BLOMHØJ; KJELDSEN, 2011, BLOMHØJ, JENSEN 2003).

O *táxon* **julgamento reflexivo** consiste nas manifestações dos alunos que ilustram as percepções e a análise crítica da situação por parte dos alunos com base em valores pessoais, pré-conceitos ou conhecimentos prévios, para proferir uma decisão ou realizar uma ação. Esses julgamentos exigem reflexão sobre o acesso a ferramentas matemáticas que permitam modelar o problema escolhido. A manifestação de julgamento reflexivo pode ocorrer de forma intuitiva, ou seja, de maneira direta e imediata, ou pode ser fruto de um processo de discernimento mais elaborado.

Tais percepções dos alunos podem ocorrer ao longo do desenvolvimento da atividade e vêm explicitadas nas assertivas que trazem termos como "fácil", "difícil", "complicado", "injusto", "errado", entre outros. O julgamento reflexivo versa sobre os julgamentos estabelecidos pelos alunos e decorrentes de estratégias metacognitivas e, de modo geral, se relacionam ao modelo matemático, às demandas da atividade e à disponibilidade do grupo em relação ao processo de resolução da situação problemática, seja em relação à matemática usada ou às informações acerca da situação (VORHÖLTER et al, 2019). A Figura 76 retrata exemplos de como se deu esse *táxon* nas atividades dos alunos.

Figura 76: Exemplos relacionados ao *táxon* julgamento reflexivo



Fonte: autora.

O julgamento reflexivo denota a capacidade do aluno de julgar as demandas cognitivas da atividade. Especificamente ao que versa a modelagem matemática, o julgamento reflexivo relaciona-se ao fato de que "os alunos podem se familiarizar com noções de qualidade e desenvolver a capacidade metacognitiva de *julgar* a qualidade de seus próprios desempenhos matemáticos" (GOOS, 2014, p. 416, grifos nossos). Quando o aluno relata que "*Poder modelar uma coisa tão pouco conhecida e chegar a um resultado bom foi uma coisa que me ajudou a entender um pouco mais de como fazer modelagem e não só o que é modelagem",* na atividade com o tema Vacinação em Arapongas desenvolvida pelo grupo 1, o aluno denota julgar seu próprio desempenho na atividade.

Segundo Frejd e Geiger (2017), atividades de modelagem ajudam os indivíduos a reconhecerem o papel que a matemática desempenha no mundo e a fazer julgamentos bem fundamentados, enfatizando o aspecto crítico da modelagem necessário para cidadãos construtivos, engajados e reflexivos. Por exemplo, na atividade AI-G2, os alunos dirigem uma crítica em relação à função que o modelo matemático desempenha para que eles conheçam sobre um tema de relevância para a sociedade, que fica claro na fala do aluno: "*sabendo o montante que se arrecada, podemos ter uma cobrança maior dos prefeitos e vereadores para o maior retorno desse dinheiro para a sociedade*". Na atividade AV-G1, os alunos também tecem julgamentos acerca de uma situação que, segundo eles estava "*em alta*" e estava impactando a sociedade: a vacinação da Covid-19.

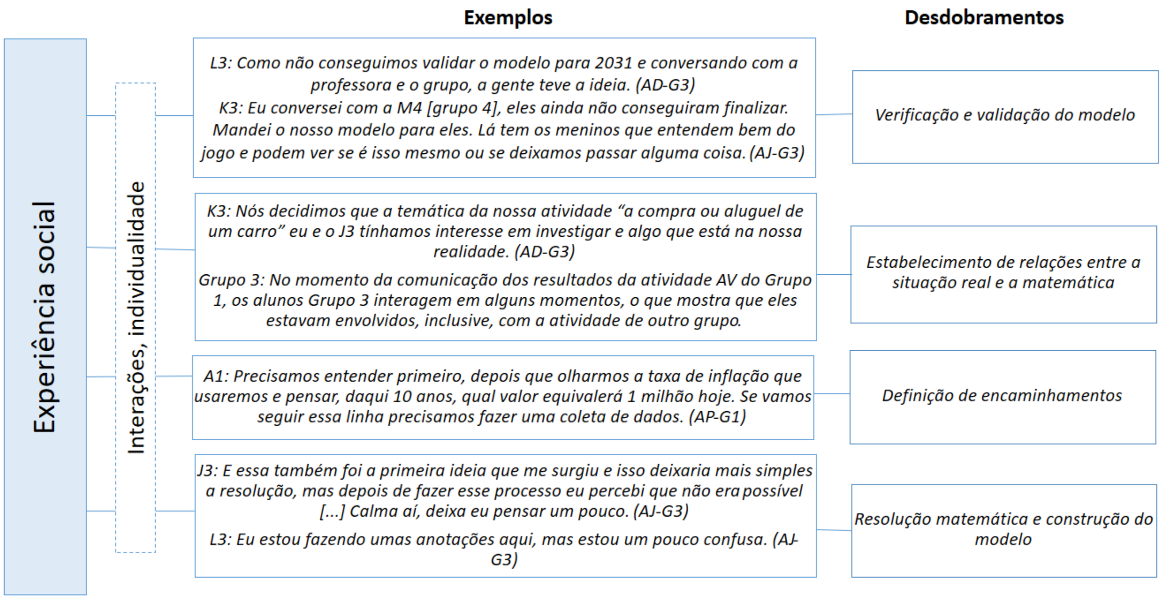
Lesh e Doerr (2003) ressaltam a importância de os próprios alunos serem capazes de julgar tanto aspectos do contexto da modelagem quanto sobre suas formas de pensar dentro desses contextos. Ao encontro dessa compreensão, Blomhøj e Jensen (2007) afirmam que no nível de metacognição, em termos de os alunos julgarem suas próprias ideias e respostas, significa que eles são capazes de seguir em frente, uma vez que a modelagem é caracterizada por um sentimento de incerteza porque há muitos caminhos a seguir. Nas atividades, muitas vezes os alunos julgam suas próprias ideias como por exemplo "*isso deixaria mais simples a resolução*"(AJ-G3) e "*eu acho que está errado. Eu estava considerando que a pessoa investe uma quantia, quanto que renderia em 10 anos*"(AP-G2), mas também julgam as ideias dos colegas do grupo "*é verdade! Bem pensado*" (AP-G1).

Segundo Pollak (2003), a interpretação da situação problema que desencadeia a atividade de modelagem e o que é percebido como uma solução para a situação problema dependem muito do julgamento do aluno envolvido. Esse julgamento, potencializa o processo de decisão sobre o que manter e o que descartar, e a verificação de que os resultados fazem sentido no mundo real. Por exemplo, quando o aluno afirma "*sem ser atrelado à Selic, porque isso vai dar muito trabalho*" (AP-G1) evidencia um julgamento acerca da abordagem matemática do problema e apresenta sua interpretação sobre como isso afeta o desenvolvimento de etapas seguintes da atividade de modelagem, decidindo descartar informações sobre Selic.

O *táxon* **experiência social** consiste nas manifestações dos alunos que revelam configurações de aspectos culturais, de experiências, de pensamentos ou de sentimentos relacionados ao individual ou ao coletivo que influenciam as decisões e ações, ou seja, as interações sociais das quais decorrem estratégias manifestadas por eles. Manouchehri (2004, p. 427) sinaliza que "as experiências pessoais dos modeladores moldam como os indivíduos interpretam e resolvem uma tarefa [de modelagem]".

As manifestações de experiência pessoal podem emergir como consequência do trabalho em grupo na combinação de pensamentos de forma colaborativa, bem como em situações em que a individualidade influencia ações grupo. Por meio das interações os alunos podem atingir o objetivo que é responder, por meio da matemática, a um problema advindo de uma situação real. Essas interações podem trazer à baila discussões sobre as ações do grupo, o envolvimento de cada um com a atividade, os pré-requisitos de que cada um dispõe para a resolução do problema e o autoconhecimento, ou seja, o conhecimento de si, das suas ações e limitações. Na Figura 77 trazemos alguns exemplos a partir das análises realizadas.

Figura 77: Exemplos relacionados ao *táxon* experiência social



Fonte: autora.

Ferri (2007) afirma que as experiências dos alunos influenciam os percursos de modelagem e essas experiências podem contribuir para o conhecimento matemático e, principalmente, para o conhecimento extramatemático levando-os a determinar o resultado mais adequado para o problema. Conhecimentos extramatemáticos são evidenciados em diversos momentos nas atividades. Na atividade AD-G3, por exemplo, os alunos demonstram ter conhecimento de informações que influenciam sobre o preço de um veículo "*A Fipe dá a tabela mensalmente e como em dezembro/janeiro é mês de 13º salário e onde há uma alta movimentação de renda na economia, esse valor pode alterar. Então pensamos no mês de junho, por pensarmos que é um mês mais "normal" com relação a discrepância na economia*" e, saber disso, contribui para os encaminhamentos assumidos pelo grupo.

Sobre esse aspecto, Stillman (2015) afirma que o uso de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem requer dos alunos um repertório de conceitos matemáticos, mas também de experiências dos alunos com conhecimentos pessoais fora da escola ou em outras disciplinas escolares. Ao expressar *"sabemos que a parábola ela vai crescer de forma indeterminada"* (AV-G1), *"Sabendo que cada pessoa precisa de duas doses"*(AV-G1) ou *"Sabemos que muitos fatores influenciam na desvalorização de um veículo"* (AJ-G3), os alunos sinalizam uma bagagem de experiências que contribuem para o seu desempenho na atividade.

As experiências relacionadas às estratégias metacognitivas envolvem sentimentos, julgamentos ou estimativas e informam a pessoa das demandas de processamento de tarefas com base na percepção da tarefa e experiência anterior com atividades de modelagem semelhantes, bem como informando decisões futuras sobre o envolvimento com atividades semelhantes (STILLMAN, 2011). Geiger et al (2022) também sinaliza que a experiência anterior dos alunos em modelagem matemática é essencial para que as atividades sejam implementadas com sucesso nas salas de aula, pois podem favorecer a capacidade do aluno de articular suas abordagens com a atividade e a disposição de compartilhar seus pensamentos com colegas e com o professor.

Sobre isso, é possível destacar o papel dos momentos de familiarização dos alunos para inserção de atividades de modelagem matemática nas aulas, pois proporcionam experiência de trabalho gradativo com esse tipo de atividade. Além disso, algumas estratégias dos alunos retomam suas experiências com atividades anteriores, como por exemplo na atividade AP-G2 em que o grupo recorre à conhecimentos trabalhados em outra atividade "*É igual o problema das abelhas, lembra?*" ou na AV-G1, quando o aluno ao falar *"Como já fizemos uma atividade de modelagem sobre a poupança, vamos fazer sobre um investimento"* toma como exemplo um tema sobre o grupo já havia experienciado.

Isso sugere que o contato dos estudantes com atividades de modelagem matemática mediante momentos de familiarização acarreta potencialidades para a ativação de estratégias metacognitivas. De fato, os dados empíricos indicam que há uma intensificação das estratégias de natureza colaborativa nas atividades do terceiro momento de familiarização, em relação as do primeiro ou segundo. Isso pode ser resultado do diálogo mais profícuo que se estabeleceu entre os participantes do grupo de forma que o pensamento metacognitivo parece ter integrado o trabalho do grupo. Isso sugere que os estudantes incorporam a noção de trabalho colaborativo em grupo que é um aspecto relacionado às próprias características da modelagem matemática já reconhecidas na literatura (ALMEIDA, 2018; BLUM, 2015; entre outros).

Outro aspecto associado à influência de estratégias associadas a partir da experiência do indivíduo é a vivência em grupo. Magiera e Zawojewski (2019) pontuam que o modo como as pessoas interagem é consequência da indissociabilidade da metacognição e do contexto pedagógico. Particularmente ao que diz respeito à modelagem:

> a natureza colaborativa de pequenos grupos ajuda os indivíduos a aprender as habilidades sociais de ouvir, contribuir e compartilhar, o que leva a aprender a se questionar - um comportamento metacognitivo. Além disso, as interações entre indivíduos que trabalham juntos fornecem um contexto natural no qual ferramentas verbais são usadas para regular o comportamento de outras pessoas, servindo como um mecanismo significativo para ativar a própria metacognição (MAGIERA; ZAWOJEWSKI, 2019, p. 318).

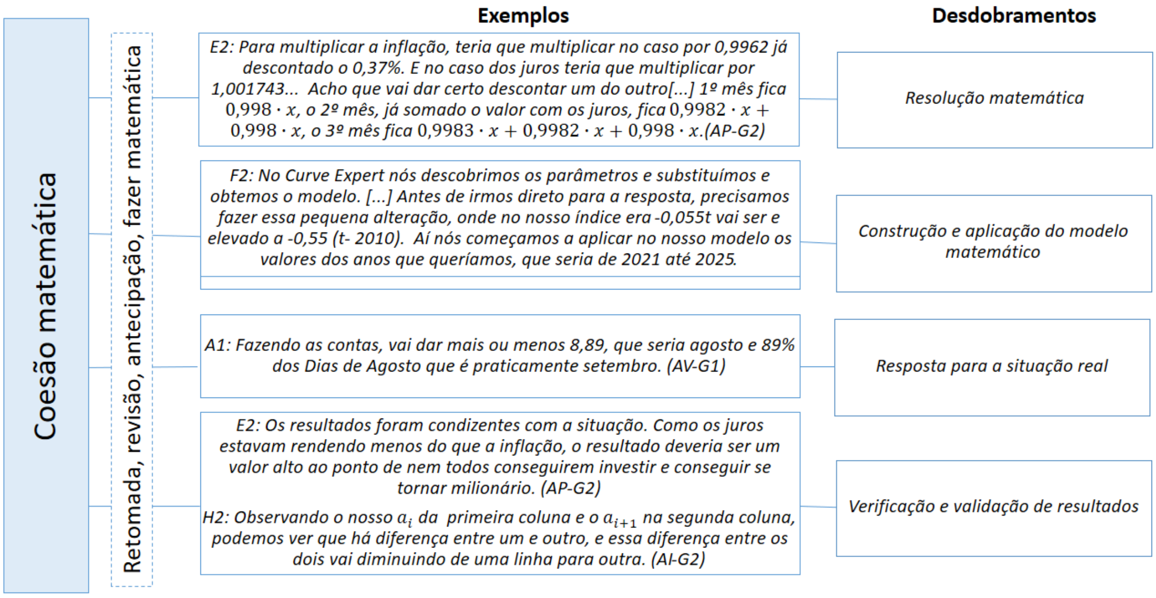
Nesse sentido, ao acompanhar o pensamento dos outros componentes do grupo, o aluno pode motivar-se a internalizar experiências e comportamentos sociais e, assim, adquirir capacidades metacognitivas relacionadas à auto-monitoração, auto-avaliação e auto-ajuste de seus próprios esforços de desempenho. Por exemplo, na atividade AJ-G3, "*para validar, nós podemos comparar os resultados com os do outro grupo. Lá tem os meninos que entendem bem do jogo e podem ver se é isso mesmo ou se deixamos passar alguma coisa*" o papel do "outro" é fundamental nas ações do grupo.

Vertuan (2013) também destaca a importância do trabalho em grupo em atividades de modelagem matemática, sinalizando que a dinâmica constituída para o desenvolvimento desse tipo de atividade é particular do grupo e, de modo geral, aspectos metacognitivos (em particular o monitoramento) constitui-se das diferenças individuais dos sujeitos do grupo.

O *táxon* **coesão matemática** decorre das manifestações dos alunos que evidenciam o uso correto de mecanismos para articular elementos matemáticos que asseguram a coerência e lógica da matemática utilizada para a resolução.

A coesão matemática caracteriza-se pelas ações dos alunos relacionadas ao fazer matemática, como por exemplo retomar ou revisar conceitos, buscar a matemática adequada para a situação em palco, fazer previsões, usar recursos tecnológicos para traçar resoluções e saber o que esperar da tarefa/situação problemática. Além disso, incorpora aspectos relativos a conhecimentos matemáticos (seja de conceitos, métodos, técnicas), ou mesmo tentativa e erro na resolução matemática. Assim, a coesão matemática emerge, principalmente, da discussão sobre os conhecimentos matemáticos, da resolução matemática, da construção do modelo matemático e da obtenção do resultado matemático. Alguns exemplos, apresentados na Figura 78, ilustram como isso se deu nas atividades analisadas.

Figura 78: Exemplos relacionados ao *táxon* coesão matemática



Fonte: autora.

Se, por um lado, realizar a aplicabilidade da matemática em situações do mundo real em atividades de modelagem matemática é relevante, por outro, a capacidade do aluno de usar, estrategicamente, seus conhecimentos matemáticos de forma mais eficiente é fortalecido pela metacognição. Neste contexto, esse uso estratégico do conhecimento se associa com a possibilidade de antever ações. A antecipação já vem sendo apontada em estudos que tratam da metacognição antecipada em modelagem matemática.

> A metacognição antecipada refere-se aos processos metacognitivos dos modeladores, pois eles tentam antecipar as ações cognitivas necessárias e identificam oportunidades, ainda não realizadas, mas essenciais para o sucesso de seus esforços de modelagem (GALBRAITH, 2017, p. 49).

De modo geral, Geiger et al (2018) associa a antecipação, em atividades de modelagem matemática às características essenciais da situação do mundo real, à escolha de artefatos matemáticos para representação dessa situação e à escolha e ao uso de técnicas matemáticas.

Niss (2010) propôs quatro requisitos de metacognição antecipada que os modeladores precisam para realizar a atividade com sucesso: (1) acreditar que o uso da matemática contribui para o estudo de situações da realidade; (2) possuir conhecimentos matemáticos consistentes; (3) ser capaz de seus conhecimentos matemáticos para desenvolver a atividade de modelagem; (4) ter perseverança e confiança em suas capacidades matemáticas. Geiger et al (2022), alinhados com Almeida (2018), propõem um quinto requisito, descrito como: estar familiarizado com o processo de modelagem matemática para ativar conhecimentos relevantes. Almeida (2018), concluiu que, se por um lado se reconhece a antecipação de um conhecimento matemático, como proposto em Niss (2010), e antever o uso da tecnologia, como sugerido por Stillman (2015), por outro lado, a antecipação de conhecimentos relativos a um fazer modelagem é relevante para incrementar o sucesso dos alunos em atividades de modelagem matemática.

Geiger et al (2022) sugerem que, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática pode levar os envolvidos a criar uma estratégia para a resolução de um problema matemático, ao mesmo tempo em que leva em consideração se o caminho escolhido levará a uma solução eficaz. Neste sentido, na atividade AV-G1, por exemplo, os alunos sinalizam que o grupo pensou e fez uma investigação inicial sobre potenciais temas (SAMU, finanças e Covid), mas que optou por não investir no tema por "antecipar" possíveis complicações futuras, seja pela dificuldade em coletar dados ou pela demanda que a atividade poderia causar em termos de conhecimentos matemáticos. Não apenas o descarte de temas, mas a própria opção pelo tema, como foi o caso da Vacinação em Arapongas, se deu pela antecipação que conseguiriam prever um comportamento para os dados. Outro exemplo pode ser observado na atividade AJ-G3 em que os alunos assumem a possibilidade de "*seguindo esse padrão podemos analisar para as outras jogadas para ver se não vai acontecer algo diferente*", ou seja, embora não esperem, eles reconhecem o que pode acontecer. Isso vai ao encontro do que apresentam Galbraith, Stillman e Brown (2017) quando descrevem que para selecionar um fenômeno que poderiam potencialmente modelar, os alunos precisavam antecipar que eles sabem o suficiente sobre a estrutura matemática do modelo pretendido, em um nível adequado para atingir seu objetivo.

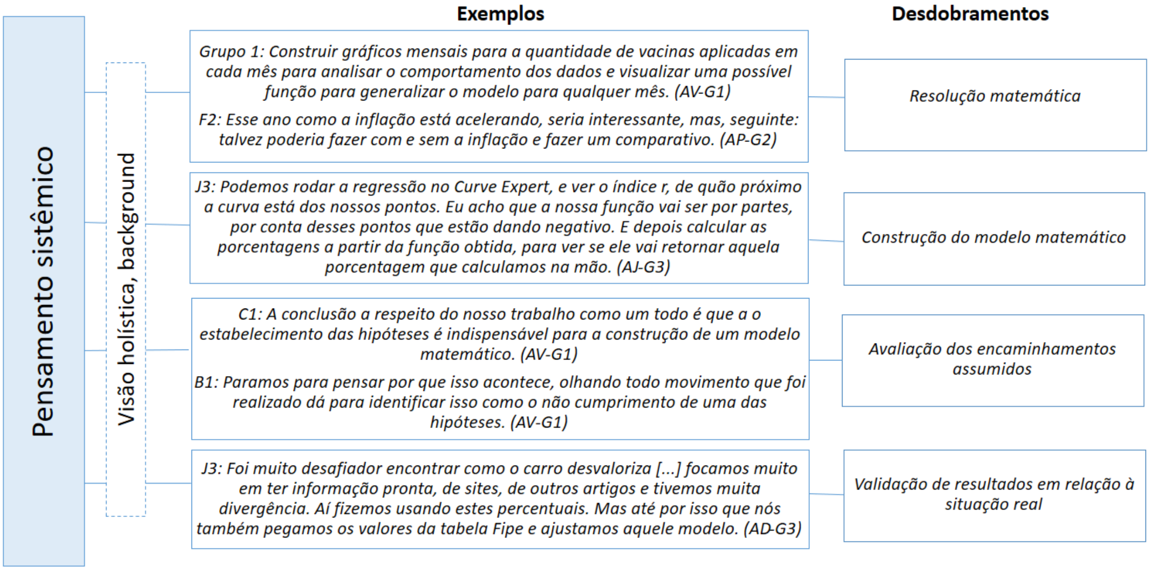
O que os alunos sabem acerca da matemática utilizada no processo de resolução, pode estar relacionado ao fazer matemática. O fazer matemática, segundo Schmith e Stein (1998), requer dos alunos: pensamento elaborado, já que a tarefa não sugere explicitamente uma abordagem a ser utilizada; exploração e compreensão da natureza dos conceitos ou processos matemáticos; automonitoramento ou autorregulação de seus próprios processos cognitivos; acesso e uso adequado de conhecimentos e experiências relevantes para trabalhar na tarefa; análise e avaliação da tarefa e possíveis restrições que podem limitar estratégias e resoluções; esforço cognitivo considerável devido à natureza imprevisível do processo de resolução.

Ao que versa sobre aspectos da modelagem, portanto, a coesão matemática relaciona-se ao fato de que ela possibilita explicar comportamentos passados ou prever comportamento futuro de uma dada situação problemática e, posteriormente, avaliar decisões que podem alterar essas previsões. Assim, os envolvidos com modelagem matemática podem adquirir uma melhor compreensão da dinâmica de uma situação real e pôr em pauta o modo como essa dinâmica pode afetar a resolução e os resultados matemáticos.

O *táxon* **pensamento sistêmico** refere-se às manifestações dos alunos que retratam o modo de pensar sobre como partes do desenvolvimento da atividade interagem entre si, se influenciam mutuamente e, assim, influenciam o todo. Pode ser entendido como um *táxon* que revela um *background*, ou seja, um conjunto das condições, circunstâncias ou antecedentes de uma situação, acontecimento ou fenômeno, que neste caso é o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática como um todo.

Manifestações que revelam pensamento sistêmico estão ligadas às associações ou relações estabelecidas entre diferentes "partes" ou contextos, seja da modelagem, da matemática e da situação problemática e promovem uma visão holística do desenvolvimento da atividade. Desse modo, esse *táxon* descreve controlar e regular o processo de desenvolvimento de uma atividade de modelagem como um todo, possibilitado pelo entendimento do aluno de que todos os elementos apresentam inter-relações e são interdependentes, como nos exemplos citados na Figura 79.

Figura 79: Exemplos relacionados ao *táxon* pensamento sistêmico



Fonte: autora.

O próprio conceito de metacognição que assumimos nesta pesquisa compreende a metacognição como "pensar sobre o pensar e / ou monitorar o pensamento", o que pode ser evidenciado ao longo do processo de modelagem, com mais ou menos intensidade dependendo do momento. No caso do *táxon* pensamento sistêmico isso se revela uma abordagem holística – da atividade e dos pensamentos imbricados no/para o seu desenvolvimento – e denota que o desenvolvimento de competências de modelagem deve ser promovido pela realização de processos completos de modelagem matemática (KAISER, 2017).

Estudo como de Sriraman e English (2005) e Schoenfeld (1999) trazem indicativos da realização de trabalho sistêmico realizado por grupos de alunos envolvidos em modelagem matemática. Nesses estudos uma abordagem sistêmica em modelagem sugere que, ao se envolver na resolução de problemas do mundo real, eles estão olhando para sistemas complexos (a) sistemas da "vida real" (ou simulações de tais sistemas) que ocorrem (ou são criados) em situações cotidianas, (b) sistemas conceituais desenvolvidos para projetar, modelar ou dar sentido aos sistemas anteriores da "vida real" e (c) modelos desenvolvidos para descrever e explicar as habilidades de modelagem dos alunos. Uma visão holística da integração entre tais sistemas compõe a compreensão de pensamento sistêmico.

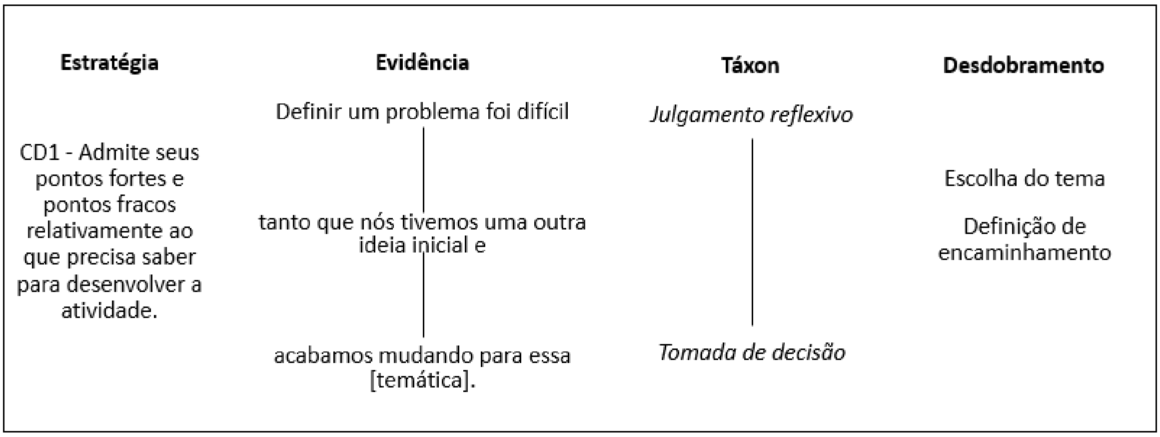
Para Blomhøj e Jensen (2007), a abordagem holística promove um processo de desenvolvimento integrado e abrangente, necessário para realizar modelagem matemática em uma ampla variedade de contextos. Segundo os autores, essa compreensão permite identificar vários componentes cruciais como etapas "menores" do processo de modelagem. No entanto, estes não são percebidos como entidades independentes, mas como parte da integralidade da atividade de modelagem abrangente.

O estudo de Niss *et al*. (2007) corrobora essa compreensão, ao se referir sobre à abordagem holística em atividades de modelagem, afirma que o foco está na implementação do processo de modelagem completo. Para isso, o autor considera que de uma perspectiva holística é necessária a seleção e coordenação apropriadas de etapas menores ao longo do processo de modelagem, também chamada de unicidade em atividades de modelagem. Nesse sentido, as estratégias usadas pelos alunos evidenciadas em afirmações como *"a conclusão do nosso trabalho como um todo"* e *"olhando para todo o movimento que a gente fez"* revelam essa abordagem holística favorecida por estratégias metacognitivas.

Uma relação interativa entre os táxons pode ser percebida, promovida e, muitas vezes, necessária ao desenvolvimento da atividade. Por exemplo, quando o aluno estabelece julgamentos acerca de algum elemento da atividade ele pode estar lançando mão de uma decisão, ou seja, os táxons tomada de decisão e julgamento reflexivo interagem e se complementam.

A Figura 80 apresenta uma linha narrativa que ilustra o exemplo citado.

Figura 80: Exemplo de ações dos alunos associadas à taxonomia na atividade AD-G3.

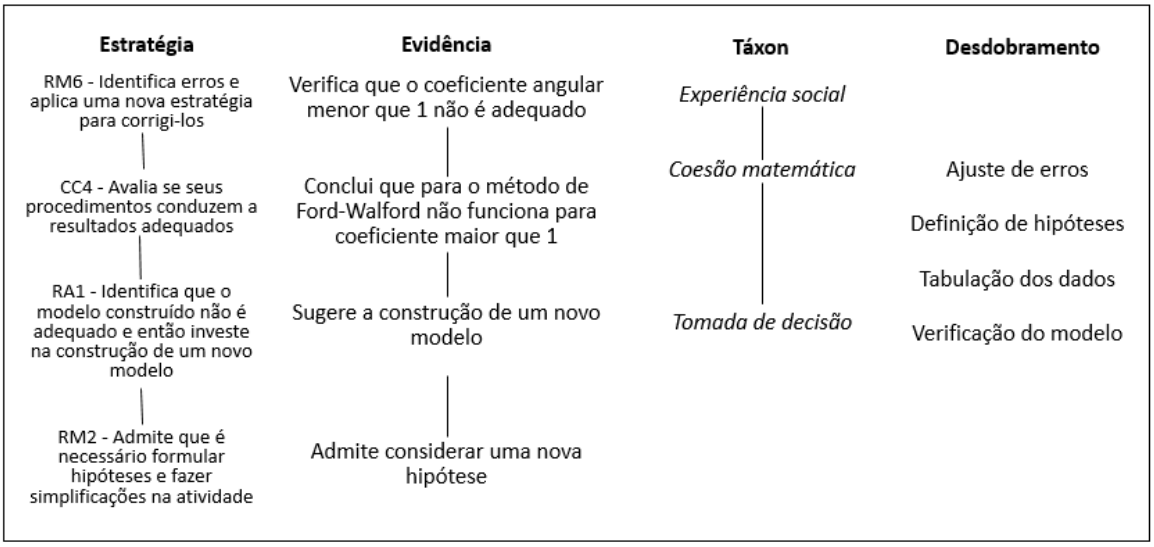


Fonte: autora.

Nesse exemplo, um recorte da fala do aluno em que a estratégia de conhecimento declarativo CD1 é evidenciado denota ação do aluno de julgar "difícil" a definição de um problema e indicar a decisão pela mudança de tema e sinaliza características relativas aos táxons julgamento reflexivo e tomada de decisão.

Outro exemplo, diz respeito à atividade AI-G2. Neste caso, a descrição que o aluno F_2 faz para justificar a definição de uma nova hipótese adicionada à resolução da situação-problema. As estratégias metacognitivas dos alunos denotam ações que evidenciam os táxons experiência social, coesão matemática e tomada de decisão, conforme ilustra a Figura 81.

Figura 81: Exemplo de ações dos alunos associadas à taxonomia na atividade AI-G2.



Fonte: autora.

Neste exemplo da Figura 81, algumas considerações se tornam pertinentes. Primeiro, a experiência social é percebida no contexto da atividade, tendo em vista que o grupo havia vivenciado uma atividade anterior que requeria o emprego do método de Ford-Walford para resolver uma situação. A coesão matemática relaciona-se ao fato de que se evidencia conhecimentos matemáticos usados de forma consistente e adequado. Enquanto que, a tomada de decisão quando o aluno decide os encaminhamentos futuros da atividade. Segundo, é possível notar que, da linha narrativa, a fala de um aluno pode evidenciar mais de uma estratégia metacognitiva como também diferentes táxons.

Da estruturação desses *táxons*, percebemos aproximações entre os desdobramentos inferidos em atividades de modelagem matemática pelo uso de estratégias metacognitivas. Os alunos empreendem estratégias metacognitivas sobre aspectos referentes à situação problemática, às demandas da tarefa, às fases e elementos característicos da modelagem, aos objetivos da atividade, ao contexto e resposta para a situação problemática, à resolução matemática e obtenção do modelo, entre outros. Quando o aluno cita, por exemplo, que precisa definir hipóteses, identificar o problema, construir o modelo ou fazer validação, indica que os alunos têm conhecimento do fazer modelagem, posto que eles conhecem elementos característicos à modelagem matemática ou as suas fases. Outro exemplo é quando o grupo decide adaptar a resolução matemática e a construção do modelo em vista às condições da situação, em ambas as atividades, isso indica que os alunos verificam a adequação do processo para atingir o objetivo, ou seja, sugerem ajustes para viabilizar a resolução, mas respeitando as características da situação e da coerência matemática. Ainda, noções como a de "construir um modelo" ou "fazer a validação" denotam conhecimento do aluno acerca de elementos essenciais na modelagem e, metacognitivamente, sugere que há consciência de qual é o objetivo e como alcançá-lo ao realizar a atividade.

De modo geral, os desdobramentos evidenciados nas análises se relacionam à quatro grupos característicos, aos quais denominamos como: interação entre a matemática e a realidade; uso de conceitos matemáticos e construção de modelo; validação de modelos e resultados; movimentos de ida e vinda em atividades de modelagem matemática.

A *Interação entre a matemática e a realidade* relaciona-se a desdobramentos que evidenciam a interlocução entre aspectos, informações e conhecimentos acerca da situação problemática e à tradução ou interpretação dessa situação em linguagem matemática. Ainda, indica o trabalho matemático orientado com vistas a atender características da situação problema da realidade em foco, como por exemplo, definição de tema, coleta de dados, definição de hipóteses e simplificações, etc..

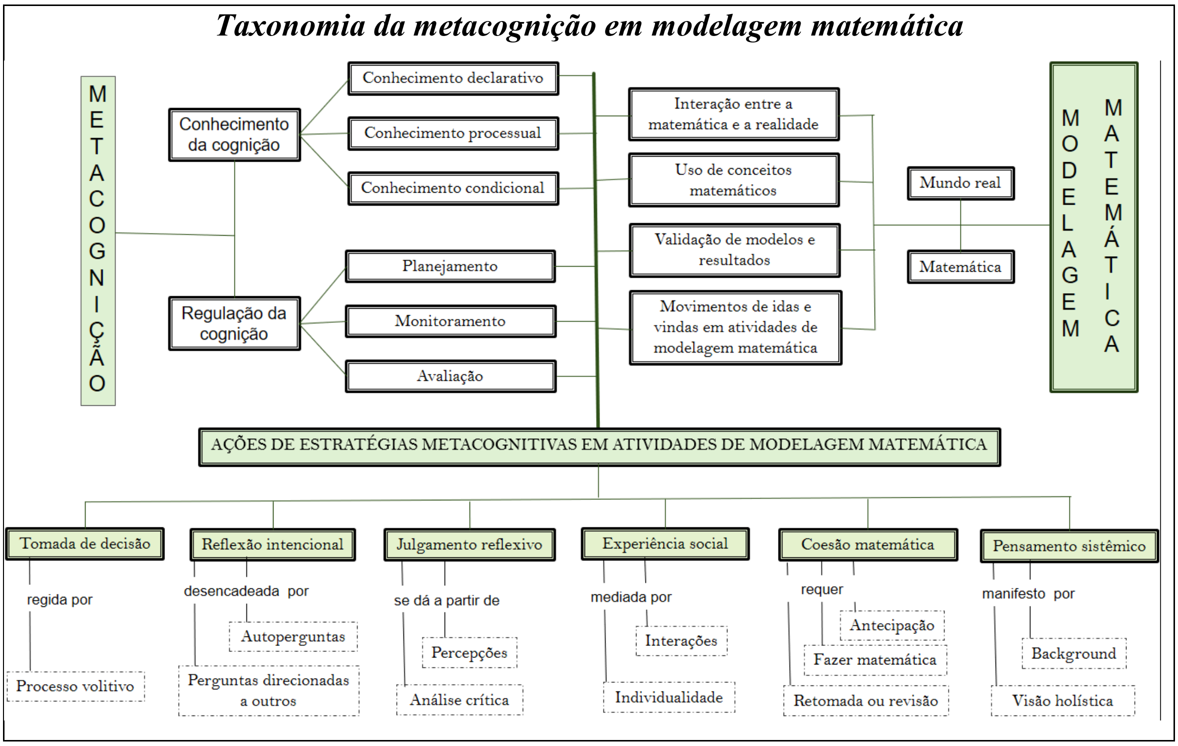
O grupo *Uso de conceitos matemáticos e construção do modelo matemático* relaciona-se aos desdobramentos que evidenciam aplicação ou manipulação de conceitos matemáticos que focalizam a resolução matemática e construção do modelo matemático. Nesse grupo podemos citar como exemplo a realização de cálculos, o uso de recursos tecnológicos, a evidência de conteúdos matemáticos, etc..

A *Validação do modelo e resultados* relaciona-se a desdobramentos que denotam verificação e validação da resolução matemática, do modelo matemático, do resultado matemático ou da resposta para a situação problemática da realidade. Como exemplo de desdobramentos que se inserem nesse grupo podemos citar: a conferência de resultados de cálculos, a verificação de métodos utilizados, comparação de resultados matemáticos com dados reais, etc..

O grupo *Movimentos de ida e vinda em atividades de modelagem* relaciona-se a desdobramentos característicos à dinâmica imposta por uma atividade de modelagem matemática e a flexibilidade entre as fases de desenvolvimento desse tipo de atividade. Por exemplo, quando o aluno em fase de resolução precisa retomar o problema, quando na construção do modelo há necessidade definir novas hipóteses ou a validação implica a retomada de das informações utilizadas.

Na Figura 82, sintetizamos os aspectos da modelagem acerca dos quais as estratégias metacognitivas inferem desdobramentos, também as unidades taxonômicas estruturadas (*táxons*), seguidas pelos comportamentos dos alunos que as evidenciam.

Figura 82: Estrutura da taxonomia da metacognição em modelagem matemática



Fonte: autora.

A afirmação de Porter (1996) de que "o sucesso da estratégia depende de se conseguir fazer muitas coisas bem e em saber integrá-las" (p. 9), na presente pesquisa há indicativos de que estratégias metacognitivas se inter-relacionam em atividades de modelagem matemática e essas inter-relações integram aspectos e elementos constitutivos dos *táxons* elencados. Isso fortalece a inferência de que, quando o aluno usa estratégias metacognitivas de maneira integrada em atividades de modelagem, então ele desenvolve a atividade de maneira bem-sucedida. Nosso entendimento sobre modelagem matemática bem-sucedida se alinha ao de Crouch e Haines (2004) de que ela

> envolve a capacidade de se mover entre o mundo real e o mundo matemático, tendo ambos em mente. O modelador precisa considerar o problema do mundo real e decidir como matematizá-lo, decidindo quais aspectos do problema do mundo real são relevantes e quais não – um processo de abstração – e decidindo quais princípios e técnicas matemáticas aplicar, mesmo quando a tecnologia é usada para aplicá-los (CROUCH; HAINES, 2004, p. 199)

Há um consenso de que a solução também precisa ser verificada em relação à realidade e modificada se necessário. Tais processos, entretanto, podem ser difíceis para os alunos envolvidos com modelagem. Na presente pesquisa, todavia, percebemos que as inter-relações entre as estratégias metacognitivas utilizadas durante o desenvolvimento das atividades de modelagem favorecem, consideravelmente, a modelagem matemática bem-sucedida, nesses termos.

Por exemplo, na atividade AP-G1, as estratégias de planejamento (RP2) e monitoramento (RM5) que acontecem de forma simultânea, parecem ser parte do *táxon* tomada de decisão, pois implicam na opção assumida pelos alunos de "pensar" e "entender" o que os leva a decidir pelo uso (ou não) da taxa de inflação e optar pelo período de 10 anos retroativos. Esse *táxon* também pode ser percebido na atividade AD-G3, em que as estratégias de conhecimento declarativo e de planejamento, CD2 e RP1 respectivamente, interagem e configuram a responsabilidade pela tomada de decisão sobre o tema a investigar e pela coleta de informações relacionadas.

Na atividade AJ-G3 a inter-relação entre as estratégias de conhecimento condicional e avaliação (CC4 e RA3) favorece as discussões dos alunos e os leva a julgar a adequação do procedimento e do modelo obtido em relação à situação. Essa inter-relação parece ser parte do *táxon* julgamento reflexivo. Ainda, na atividade AI-G2, as estratégias de planejamento (RP7) e de conhecimento processual (CP3) sinalizam para a validação do modelo. Neste caso, a inter-relação entre as estratégias parece ser parte do *táxon* fazer modelagem.

Buscar um padrão para o uso de estratégias em relação às fases da modelagem ou aos momentos de familiarização, bem como entre as inter-relações entre estratégias e delas com os *táxons,* com um número maior de participantes e de atividades desenvolvidas, pode ser foco de pesquisas futuras.

Com essa taxonomia buscamos favorecer a organização e o entendimento de manifestações metacognitivas dos grupos de alunos envolvidos com atividades de modelagem matemática. Tais observações podem permitir alocar, recuperar e comunicar estratégias metacognitivas (e as relações estabelecidas entre elas e delas com a atividade) de forma lógica a partir dos indicativos metacognitivos e deles relativamente à atividade de modelagem matemática, o que, por sua vez, pode desencadear a aquisição de conhecimentos matemáticos, competência em modelagem e atitudes pessoais, fomentando o processo de ensino e de aprendizagem.

Exaurir todas as possibilidades de análise não faz parte do escopo da pesquisa, entretanto a densidade das análises realizadas nos permite defender a validade da estrutura elaborada à medida que se reconhece outros contextos reais que podem ser classificados nos táxons elaborados. Nesse sentido, a estrutura da taxonomia apresentada pode contribuir como base conceitual para pesquisas futuras.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aristóteles dizia que "é a marca de uma mente instruída descansar satisfeita com a precisão que a natureza do assunto permite e não buscar uma exatidão onde apenas uma aproximação da verdade é possível"[14]. Diante de tal filosofia, delineamos algumas aproximações da verdade acerca da temática estudada, as quais, sob o nosso olhar e entendimento sutil, chamaremos de "Considerações Finais".

Relembrando o objetivo de pesquisa "investigar como estratégias metacognitivas agem sobre as ações dos alunos em atividades de modelagem matemática", almejamos que as conclusões apresentadas neste capítulo possam responder à subjetividade dos desdobramentos decorrentes de estratégias metacognitivas dos alunos mobilizadas em atividades de modelagem matemática. Do mesmo modo, garantir um instrumento funcional e uma taxonomia cognoscível, envolvendo estratégias metacognitivas em modelagem matemática, que beneficie pesquisadores, professores, modeladores ou envolvidos com modelagem e/ou metacognição, os quais podem se valer do instrumento elaborado e, caso necessário, aprimorá-lo de acordo com suas expectativas ou demandas.

As considerações sobre o uso de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática na presente pesquisa, foram viabilizadas pela estruturação do instrumento de identificação de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática. Tal instrumento permite identificar tanto as estratégias utilizadas de forma consciente, quanto as utilizadas de forma inconsciente ou automática. Nesse caso, a observação do professor/pesquisador é responsável pelas interpretações das estratégias subjacentes à atividade. Por outro lado, o professor/pesquisador só pode avaliar aquelas estratégias que são verbalizadas ou mostradas em ações relacionadas.

No entanto, acreditamos que mesmo diante de tais limitações, o instrumento de percepção que aqui propomos pode oferecer um bom retrato do uso de estratégias metacognitivas pelos alunos enquanto estão envolvidos com atividades de modelagem matemática, e possibilitar ao professor identificar consequências delas para a atividade.

Os resultados obtidos a partir da pesquisa empírica nos levam a confirmar a afirmação de Hidayat, Zulnaidi e Zamri (2018) de que o uso de estratégias metacognitivas

---

[14] Fonte: https://sententiaeantiquae.com/2018/09/22/nope-aristotle-did-not-say-it-is-the-mark-of-an-educated-mind-to-entertain-a-thought-without/ . Acesso em 19/08/22.

permite que os alunos compreendam as especificidades de um problema e, como sugerem esses autores, "o uso de estratégias metacognitivas em sala de aula permite que os alunos sejam sensíveis na compreensão de um problema de forma adequada e cometam poucos erros no processo de aprendizagem, melhorando assim suas habilidades de autorregulação e autoconfiança" (p. 17).

O que nossa pesquisa acrescenta é que, ao identificar as estratégias metacognitivas dos alunos, o professor pode ajudá-los a definir (novas) formas de agir na atividade. Assim, estimular a ativação dessas estratégias pode ser um poderoso suporte para o sucesso dos alunos em atividades de modelagem matemática e sua capacidade de fortalecer a relação entre matemática e realidade no contexto educacional, cuja importância é apontada por Vygotsky (1997).

Reconhecer estratégias metacognitivas orientadas para objetivos permite ao professor perceber, evitar ou superar as barreiras cognitivas dos alunos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem, estabelecer os aspectos positivos e otimizá-los para melhorar os resultados obtidos.

Ao reconhecer que uma característica essencial de uma atividade de modelagem é que ela é realizada em grupo, o conjunto de estratégias metacognitivas dos alunos, desde a interação com a situação até a validação da resposta obtida, não se limita à natureza individual. Assim, nesse contexto, a metacognição colaborativa do grupo deve ser levada em consideração.

Se, por um lado, como sugere Vorhölter (2017), métodos *online*[15] para identificar estratégias metacognitivas consideram o pensamento em voz alta, por outro, um olhar mais profundo sobre o comportamento metacognitivo pode ser feito por meio de ferramentas como o instrumento de identificação de estratégias metacognitivas proposto nesta pesquisa. Assim, a partir do instrumento, identificamos as estratégias metacognitivas dos alunos enquanto se envolviam com atividades de modelagem matemática e, consequentemente, os desdobramentos dessas estratégias para a atividade.

Podemos inferir, a partir das discussões empreendidas nesta pesquisa, que, ora as estratégias inferem desdobramentos para a atividade, ora a atividade requer estratégias específicas. Particularmente, como já discutido em Schukajlow e Leiss (2011), atividades de modelagem matemática que exigem lidar com problemas reais, podem ser tanto

[15] Consiste na coleta de dados realizadas simultaneamente ao desenvolvimento das atividades, como o pensar em voz alta, as falas e gestos dos alunos enquanto resolvem o problema, os diálogos, etc.

influenciadas por estratégias metacognitivas, quanto exercer efeito sobre a metacognição utilizada pelos alunos.

Na esteira dessa discussão, os estudos de Vorhölter (2018, 2019), com foco nas estratégias metacognitivas, têm demonstrado que elas desempenham uma função importante em modelagem matemática, à medida que levam os alunos a definir suas metas para desenvolver a atividade, avaliar os resultados proporcionados por ela, bem como pode ajudá-los a examinar e fazer um uso ideal de seus conhecimentos.

De modo geral, percebemos até agora que não é uma estratégia isolada, mas um conjunto de estratégias que viabiliza as ações nas diferentes fases do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Segundo Lai (2011), quando estratégias metacognitivas são combinadas, elas se tornam mais eficazes do que separadamente. Ainda, há indicativos, a partir do instrumento, de que as estratégias metacognitivas coexistem e funcionam como uma engrenagem, isto é, se relacionam de maneira sistemática, de modo que uma desencadeia a outra e ambas dialogam entre si. Isso nos leva a considerar que as inter-relações entre as estratégias são responsáveis por obter bons resultados para o processo de modelagem.

Outra característica identificada é quando o aluno age metacognitivamente[16], ou seja, utiliza as estratégias de maneira consciente, os procedimentos e encaminhamentos assumidos são mais eficientes para o desenvolvimento da atividade de modelagem. Isso se mostra relacionado ao fato de que, além de estar ciente das estratégias que utiliza, ele torna-se capaz de reconhecer suas próprias limitações como modelador e da complexidade dos problemas evocados pela situação real, podendo assim, assumir ações preventivas ou corretivas para antecipar-se ou ajustar-se à resolução do problema.

Além disso, tanto do referencial teórico adotado, quanto das observações empíricas, é possível perceber que a metacognição é diversa. A compreensão assumida nesta pesquisa de que ela inclui a regulação da cognição e conhecimento da cognição que desencadeiam estratégias metacognitivas, possibilita reconhecer que a metacognição interage com outros aspectos sociais, ambientais e culturais, por exemplo. Evidenciamos, assim, o fato de que algumas estratégias podem ser mais intensas que outras, dependendo do contexto em que são manifestadas, da compreensão dos alunos sobre metacognição e de suas ações efetivas

[16] Nossa compreensão é de que, quando o aluno utiliza o que identificamos como estratégias metacognitivas, não necessariamente o fez com essa intenção explícita, mas a estratégia metacognitiva é utilizada de forma espontânea, diferente de quando ele age metacognitivamente, que por sua vez, implica na consciência e manipulação do uso da estratégia.

a partir de tal compreensão e, também, do olhar do professor sobre os aspectos metacognitivos dos alunos.

As interações entre as estratégias de conhecimento ou de regulação da cognição, das estratégias com a modelagem e entre os diferentes aspectos indicadores, podem ser diversas. Não há um padrão para que sejam manifestas ou interajam, além disso uma mesma interação pode ter diferentes conotações em diferentes momentos ou diferentes atividades. Um exemplo disso é quando a interação entre as estratégias de avaliação e de monitoramento, juntas, na atividade AV-G1 serve para admitir e justificar o modelo assumido, enquanto que na atividade AJ-G3 conduzem à mudança na construção do modelo.

Outro aspecto, que se mostra relevante, diz respeito à interação entre os alunos do grupo. No Grupo 1, na atividade do segundo momento, parece haver um aluno "catalisador" de modo que as estratégias metacognitivas são manifestas por ele e aparecem, em alguns momentos, concentradas ou isoladas. Enquanto isso no Grupo 2, no contexto da mesma atividade há uma maior conversação entre os alunos, por isso alguns trechos dos diálogos evidenciam uma diversidade maior de estratégias metacognitivas.

De modo geral, é possível estabelecer algumas considerações sobre a modelagem matemática no contexto em estudo. Primeiramente, cabe destacar que as atividades foram desenvolvidas de forma remota, ou seja, muitas das interações dos alunos aconteceram de forma assíncrona e não foram registradas, o que sinaliza que muitas estratégias podem ter ocorrido de forma subjacentes ao processo, terem ficado implícitas ou mesmo terem sido utilizadas em momentos "off-line".

Acerca das estratégias metacognitivas manifestas pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, podemos apontar algumas considerações. Na atividade com o tema Impostos, por exemplo, o Grupo 2 demonstra uma notória valorização da parte matemática, detalhando os passos e explorando os conteúdos utilizados. Entretanto, no momento da validação, sinalizam a preocupação em validar tanto o modelo quanto a resposta, ou seja, embora da importância dada ao modelo matemático, os alunos parecem vincular seu significado e utilidade em relação à uma situação real. Isso sinaliza que o entendimento do aluno se alinha ao defendido por English (2003), de que o modelo matemático deve proporciona uma visão integrada da matemática com a realidade. Ainda nessa atividade outro característica que pode ser notada é o fato de que as hipóteses H(3) e H(4) foram elencadas ao longo da atividade, da necessidade de rever o modelo. Isso denota a dinâmica da atividade de modelagem matemática, conforme já aponta Almeida, Silva e Vertuan (2013), pois, embora a definição de hipóteses seja associada a momentos iniciais (fase matematização) e na maioria das atividades os alunos assim o façam, isso não é via de regra.

Na atividade, AI-G2, em diversos momentos os alunos associam ações ou conteúdos com experiências anteriores, como no fato de escolherem inicialmente uma problemática relacionado ao tema da poupança, ou quando eles recorrem ao método de Ford-Walford, também usado em outros momentos na disciplina, para desenvolver a resolução matemática. O Grupo 2, ainda, recorre à essa estratégia quando precisa resolver somatório, na atividade AP-G2. Essa estratégia é utilizada, também, na escolha do tema da atividade de terceiro momento do Grupo 1, quando sugerem um tema semelhante ao tema da Poupança, que haviam trabalhado anteriormente. Daí a influência e a importância de desenvolver atividades seguindo os momentos de familiarização e que tais momentos sejam bem orientados, tendo em vista que podem servir de base para atividades futuras (ALMEIDA; DIAS, 2004).

Ainda, ao delimitar o problema, os alunos reconhecem ter estabelecido passos, sendo que o primeiro foi a coleta de dados e na sequência a seleção e tratamento desses dados. Neste caso a própria estratégia de planejamento, sob o indicativo RP7, parece ter sido um desdobramento da estratégia de conhecimento declarativo usada em momento anterior.

Das análises se mostra que uma fase da modelagem não se limita a estratégias específicas, ou seja, uma estratégia que ora um grupo precisa para definir hipóteses, não necessariamente supre a definição de hipóteses por outro grupo, ou do mesmo grupo em contextos diferentes. Aspectos indicadores da estratégia de avaliação, por exemplo, que inicialmente pode ser atribuída à fase final de validação, são identificados durante a resolução da atividade AV-G1 e na simplificação na atividade AP-G2.

Embora a autonomia dos alunos interfira na manifestação de estratégias metacognitivas, tendo em vista que o grau de responsabilidade e envolvimento dos alunos com a atividade é maior dependendo da familiarização que eles têm com esse tipo de atividade (do terceiro momento requer mais interações entre as estratégias do que no segundo momento, se considerado um mesmo grupo, por exemplo), o que surge como fator determinante é o grupo. Isso pode ser observado se compararmos o Grupo 2 ao Grupo 3, ambos em contexto de terceiro momento, o Grupo 2 parece mobilizar mais interações entre as estratégias que inferem desdobramentos para a atividade, enquanto que no Grupo 3 essas interações são menos recorrentes.

Ainda, ao considerarmos os diferentes momentos de familiarização, nossas análises tornam possível uma observação: a atividade de primeiro momento requer estratégias mais pontuais do que a de terceiro momento, como visto no Grupo 3. Isso remete ao entendimento de que na atividade de terceiro momento desde a própria escolha da situação problemática requer o uso de estratégias diversas, o que não é necessário na atividade de primeiro momento.

Outra consideração importante está relacionada à natureza das estratégias metacognitivas, seja individual ou colaborativa. No Grupo 1 e no Grupo 2 é possível perceber que as estratégias individuais foram predominantes na atividade de segundo momento. Na atividade de terceiro momento, as estratégias metacognitivas de natureza colaborativa parecem ter se intensificado, ou seja, as estratégias de natureza colaborativa se tornam mais evidentes. Isso sugere que os alunos incorporam a noção de trabalho colaborativo em grupo que é um aspecto relacionado às próprias características da modelagem matemática. Por outro lado, no Grupo 3 as estratégias de natureza colaborativas são maioria tanto na atividade de primeiro momento quanto na atividade de terceiro momento. Isso nos leva a considerar que a natureza das estratégias metacognitivas pode variar de grupo para grupo, pois enquanto no Grupo 1 e no Grupo 2 as estratégias individuais prevaleceram, no Grupo 3 as análises indicam que a natureza colaborativa predomina.

Nesta pesquisa, olhamos para as estratégias metacognitivas dos alunos tanto de natureza individual, quanto de natureza colaborativa, por considerarmos que atividades de modelagem matemática essencialmente desenvolvidas em grupo requerem estratégias em busca de um objetivo comum. Entretanto, o principal agente de metacognição é o indivíduo, independentemente de o indivíduo se envolver em equipes colaborativas ou trabalhar de forma independente, pois é ele que tem acesso as fontes de metacognição individual e colaborativa (KIM et al, 2019)

Quando um aluno fala em voz alta sobre o desenvolvimento de seu pensamento em torno da resolução do problema, pode fornecer feedback para o pensamento de outra pessoa sobre sua própria conceituação, por exemplo na fala de A_1 “pensando em voz alta, faz sentido o que eu tô falando?”. Ainda, embora não seja via de regra, a maioria das estratégias de natureza colaborativa advém das interações com colegas e professores, que são as principais fontes que encorajam os indivíduos acompanhar, verificar ou desenvolver seu próprio processo de pensamento e de compreensão, ao passo que pode detectar e reparar seus equívocos.

O indicador RM1, na atividade da desvalorização do veículo foi espontânea por parte dos alunos, enquanto que na atividade dos impostos esse indicador foi identificado no momento em que os alunos respondiam as perguntas realizadas pela professora. Isso remete a ponderar sobre o fato de que embora as estratégias metacognitivas se mostrem espontâneas, podem, em certa medida, sofrer com estímulos externos. Esse entendimento traz à tona outro aspecto a ser contemplado nas nossas conclusões: o papel do professor em atividades de modelagem matemática, particularmente no uso de estratégias metacognitivas. Embora nesta pesquisa não seja o foco analisar como as intervenções do professor influenciam ou mesmo realizar intervenções intencionais para instigar, motivar ou induzir a manifestação de estratégias metacognitivas em modelagem matemática, cabe destacar que quando o professor sugere, questiona ou esclarece algo, os alunos incorporam nos seus procedimentos e nas suas estratégias (CASTRO, 2017).

Ainda nesse sentido, Stender (2019) argumenta que quando o aluno não consegue superar sozinho, o professor é responsável por analisar os próximos passos que ele próprio daria e então identificar a estratégia subjacente ao próprio processo de resolução. Assim, segundo o autor, a metacognição do professor leva à intervenção estratégica poderá ajudar o aluno a chegar às suas próprias estratégias metacognitivas por meio dessa ajuda.

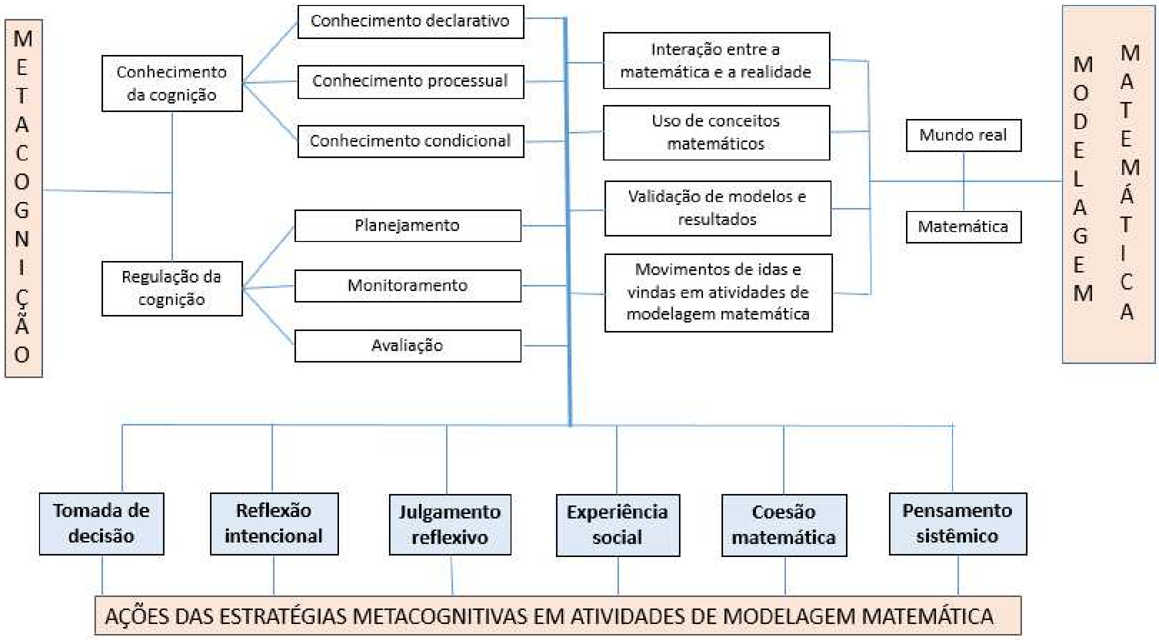
Algumas estratégias metacognitivas parecem intrínsecas a atividades de modelagem matemática, o que indica que os alunos mobilizam estratégias dessa natureza de forma natural, entretanto identificar, avaliar ou motivar que elas venha à tona pode representar um avanço para estudos na área da Modelagem Matemática, especificamente ao que relacionam-se à abordagens cognitivas, tendo em vista que supre, ao menos em partes, as lacunas apontadas neste relatório de tese e que originaram a problemática de pesquisa.

Ainda, ao construir a taxonomia, buscamos elucidar como as estratégias metacognitivas interferem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Em tese, essa taxonomia retrata relações entre a metacognição e a modelagem, resulta de paralelos traçados entre a abordagem teórica adotada e a pesquisa empírica realizada. É possível perceber que a relação entre metacognição e modelagem matemática é interativa e bidirecional, ao passo que se inter-relacionam e se influenciam mutuamente.

A variedade de comportamentos conscientes ou inconscientes identificados nos alunos durante as atividades de modelagem nos permite identificar estratégias metacognitivas e caracterizar seis unidades taxonômicas relativas a essas estratégias: tomada de decisão, reflexão intencional, julgamento reflexivo, experiência social, coesão matemática e pensamento sistêmico.

A taxonomia da metacognição em modelagem matemática encontra-se sintetizada na Figura 83.

Figura 83: Taxonomia da metacognição em modelagem matemática



Fonte: autora.

A taxonomia da metacognição em modelagem matemática, o quadro conceitual da metacognição, bem como o quadro conceitual da modelagem e a pesquisa empírica com modelagem matemática, apresentadas neste relatório de tese, pretendem atender às necessidades e responder, em certo grau de subjetividade, inquietações de pesquisadores ou professores, no âmbito da Educação Matemática. Isso porque, pode fornecer uma visão abrangente e descrição detalhada das relações conceituais que compõem o construto da metacognição em atividades de modelagem matemática.

Tal taxonomia, pode favorecer uma compreensão mais clara e objetiva da metacognição e estratégias metacognitivas em vistas a suprir a dificuldade em definir ou conceituar o termo, conforme apontam alguns autores. O acesso à essa taxonomia e respectivas categorias, pode encorajar o pensamento associativo (entre as categorias, por exemplo) e guiar o pesquisador ou professor através de processos de descoberta acerca da teoria ou sobre a sua prática. Pode, ainda, fornecer uma estrutura clara e uma fonte de informação para formar a base teórica e conceitual de novos estudos empíricos no campo da modelagem matemática, ao passo que aponta para novas conexões conceituais e discussões teóricas sobre a metacognição em modelagem matemática. Também, de modo geral, a taxonomia da metacognição em modelagem, resultante desta pesquisa, tende a reafirmar o status e a importância da metacognição em modelagem matemática, servindo como base para estudos futuros.

REFERÊNCIAS

ABEILLE, A., HURLEY, N. Final Evaluation Report: Mathematics Modeling Our World (MMOW). Stoneham, Mass.: **Learning Innovations**. 2001. Retrieved 11/1/04 from http://www.comap.com/highschool/projects/mmow/FinalReport.pdf

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; CASTRO, É. M. V.; SILVA, M. H. S. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 14, n. 2, p. 383-406, 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 17, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** 1ª Ed., 1ª reimpressão – São Paulo: Contexto, 2013.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E.. Discussões sobre "como fazer" modelagem matemática na sala de aula. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática**, p. 19, 2011.

ALMEIDA, M. A. Estratégias metacognitivas: uma possibilidade no ensino de enfermagem. **Revista Brasileira de Enfermagem**, v. 55, p. 424-429, 2002.

AQUINO, I. J.; CARLAN, E.; BRASCHER, M. B. Princípios classificatórios para a construção de taxonomias. **Ponto de Acesso**, v. 3, n. 3, p. 196-215, 2009.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica. **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 2, p. 1-13, 2003.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. **Reunião anual da ANPED**, v. 24, n. 7, p. 1-15, 2001 (a).

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253 f**. 2001. Tese de Doutorado. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro (b).

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, D. O que é modelagem matemática? **Educação matemática em revista**, São Paulo, ano 8, n. 9/10, p. 49-57, abr. 2001.

BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. M. **Modelagem Matemática**. Uberlândia, MG, UFU, 2014.

BLOMHØJ, M.; JENSEN, T. H. What's all the fuss about competencies?. In: **Modelling and applications in mathematics education**. Springer, Boston, MA, 2007. p. 45-56.

BLOMHØJ, M.; KJELDSEN, T. H. Students' reflections in mathematical modelling projects. **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**, p. 385-395, 2011.

BLUM, W. Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**, p. 15-30, 2011.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. In: **The proceedings of the 12th international congress on mathematical education**. Springer, Cham, 2015. p. 73-96.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. **Educational studies in mathematics**, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BOGDAN, R.; BIKLEN. S. K. Qualitative research for education. **Boston, Allyn and**, 1982.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization Mathematical. New York, USA: **Springer,** 2005.

BORROMEO FERRI, R. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Springer, 2018.

BRANSFORD, *et al*. **How people learn**. Vol. 11. Washington, DC: National academy press, 2000.

BROWN, A. L.; PALINCSAR, A. S.; ARMBRUSTER, B. B. Instructing comprehension-fostering activities in interactive learning situations. **Learning and comprehension of text**, p. 255-286, 1984.

BROWN, A. Metacognition, executive control, self-regulation, and other more mysterious mechanisms. In F. E. Weinert & R. Kluwe (Orgs.) **Metacognition, motivation, and understanding**, (pp. 1-16), 1987.

BURAK, D. **Modelagem Matemática:** ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.1992. 459 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

CASTRO, É. M. V. **Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas em atividades de modelagem matemática.** Dissertação - Universidade Estadual do Centro-Oeste, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática. Guarapuava, 2017.

CROUCH, R.; HAINES, C. Mathematical modelling: Transitions between the real world and the mathematical model. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 35, n. 2, p. 197-206, 2004.

DAHER, W. M.; SHAHBARI, J. A. Pre-service teachers'modelling processes through engagement with model eliciting activities with a technological tool. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 13, n. 1, p. 25-46, 2015.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. Editora Livraria da Física, 2007.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998. p. 13 - 42.

EILERTS, K; KOLTER, J. Strategieverwendung durch Grundschulkinder bei Modellierungsaufgaben. In: **Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht**. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2015. p. 119-133.

ENGELBRECHT, J. *et al*. Will 2020 be remembered as the year in which education was changed? **Springer**, 2020.

ENGLISH, L. D. Reconciling theory, research, and practice: A models and modelling perspective. **Educational Studies in Mathematics**, v. 54, n. 2, p. 225-248, 2003.

ESCALANTE C. C., ALEJO V. V. The Development of Mathematical Concept Knowledge and of the Ability to Use This Concept to Create a Model. In **Teaching Mathematical Modelling**: Connecting to Research and Practice 2013 (pp. 517-526). Springer, Dordrecht.

FERRI, R. B. Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. **Proceedings of CERME-5, WG 13 Modelling and Applications**, p. 2080-2089, 2007.

FERRUZZI, E. C.; ALMEIDA, L. M. W. Diálogos em modelagem matemática. **Ciência & Educação** (Bauru), v. 21, p. 377-394, 2015.

FLAVELL, J. H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. **American psychologist**, v. 34, n. 10, p. 906, 1979.

FLAVELL, J. H. Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), **The nature of intelligence**. Hillsdale, NJ: Erlbaum, (pp. 231-235), 1976.

FLAVELL, J. H. Metacognitive development. **Structural process theories of complex human behavior**, p. 213-245, 1978.

FREJD, P.; GEIGER, V. Exploring the notion of mathematical literacy in curricula documents. In: **Mathematical Modelling and Applications**. Springer, Cham, 2017. p. 255-263.

FRENKEN, Lena. Measuring students' metacognitive knowledge of mathematical modelling. In: **Mathematical modelling education in east and west**. Springer, Cham, 2021. p. 215-225.

GALBRAITH, P. Forty years on: Mathematical modelling in and for education. **A. Downton, S. Livy, & J. Hall (Eds.)**, v. 40, p. 47-50, 2017.

GALBRAITH, P.; HOLTON, D. Mathematical modelling: A guidebook for teachers and teams. Melbourne: ACER. 2018.

GALBRAITH, P.; STILLMAN, G. A.; BROWN, Jill P. The primacy of 'noticing': A key to successful modelling. In: **Mathematical modelling and applications**. Springer, Cham, 2017. p. 83-94.

GARNER, R**. Metacognition and reading comprehension**. Ablex Publishing, 1987.

GARNER, R. **Metacognition and reading comprehension**. Ablex Publishing, 1987.

GARNICA, A. V. M. Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. **Interface-comunicação, saúde, educação**, v. 1, p. 109-122, 1997.

GARNICA, A. V. M. Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. **Mimesis, Bauru**, v. 22, n. 1, p. 35-48, 2001.

GEIGER, V. *et al.* Developing a task design and implementation framework for fostering mathematical modelling competencies. **Educational Studies in Mathematics**, v. 109, n. 2, p. 313-336, 2022.

GEIGER, V. *et al.* Using mathematics to solve real world problems: The role of enablers. **Mathematics Education Research Journal**, v. 30, n. 1, p. 7-19, 2018.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de administração de empresas**, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995 (a).

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de empresas**, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995 (b).

GOOS, M. Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. **ZDM**, v. 46, n. 2, p. 189-200, 2014.

HARRIS, K. R. *et al*. Metacognition and children's writing. In: **Handbook of metacognition in education.** Routledge, 2009. p. 143-165.

HARRIS, K. R.; SANTANGELO, T.; GRAHAM, S. Metacognition and strategies instruction in writing. **Metacognition, strategy use, and instruction**, p. 226-256, 2010.

HELDING, K. A.; FRASER, B. J. Effectiveness of National Board Certified (NBC) teachers in terms of classroom environment, attitudes and achievement among secondary science students. **Learning Environments Research**, v. 16, n. 1, p. 1-21, 2013.

HIDAYAT, R. *et al*. Meta-cognitive behaviour and mathematical modelling competency: mediating effect of performance goals. **Heliyon**, v. 6, n. 4, p. e03800, 2020.

HIDAYAT, R.; ZULNAIDI, H.; SYED ZAMRI, S. N. A. Roles of metacognition and achievement goals in mathematical modeling competency: A structural equation modeling analysis. **PloS one**, v. 13, n. 11, 2018.

HOLLAN, *et al*. Distributed cognition: toward a new foundation for human-computer interaction research. **ACM Transactions on Computer-Human Interaction** (TOCHI), v. 7, n. 2, p. 174-196, 2000.

IISKALA, T. *et al.* Socially shared metacognition of dyads of pupils in collaborative mathematical problem-solving processes. **Learning and instruction**, v. 21, n. 3, p. 379-393, 2011.

JACOBS, J. E.; PARIS, S. G. Children's metacognition about reading: Issues in definition, measurement, and instruction. **Educational psychologist**, v. 22, n. 3-4, p. 255-278, 1987.

KAISER, G. Mathematical Modelling and Applications in Education. In: Encyclopedia of Mathematics Education. Lerman, S. (ed.). **Springer,** 2020.

KAISER, G. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann *et al.* (Eds.), **Materialien für einen**

realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 1995, p. 66-84.

KAISER, G. The teaching and learning of mathematical modeling. In: **Compendium**. 2017. p. 267-291.

KAISER, G.; BRAND, S. Modelling competencies: Past development and further perspectives. In: **Mathematical modelling in education research and practice**. Springer, Cham, 2015. p. 129-149.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **Zdm**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KAISER-MEßMER, G. Aktuelle Richtungen innerhalb der Diskussion um Anwendungen im Mathematikunterricht. **Journal für Mathematik-Didaktik**, v. 10, n. 4, p. 309-347, 1989.

KIM, Y. R. *et al*. Multiple levels of metacognition and their elicitation through complex problem-solving tasks. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 32, n. 3, p. 377-396, 2013.

KIM, Y. R.; MOORE, T. J. Multiple Levels of Metacognition: Circumstances Interfering with Students' Spontaneous Metacognitive Activities. **Journal of Educational Research and Practice**, v. 9, n. 1, p. 158-178, 2019.

KRÜGER, A.; VORHÖLTER, K.; KAISER, G. Metacognitive strategies in group work in mathematical modelling activities–The students' perspective. In: **Mathematical modelling education and sense-making**. Springer, Cham, 2020. p. 311-321.

LAI, E. R. Metacognition: A literature review. **Always learning**: Pearson research report, v. 24, p. 1-40, 2011.

LAMBERT, P. *et al*. A cognitive psychology approach to model formulation in mathematical modelling. **Applications and modelling in learning and teaching mathematics**, v. 3, p. 92, 1989.

LESH, R. A.; DOERR, H. M. **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. Routledge, 2003.

LIMA FILHO, R.; BRUNI, A. Leal. Metacognição e empreendedorismo: ser empreendedor influencia atitudes metacognitivas? **Metacognition and Entrepreneurship: Does Being an Entrepreneur Influence Metacognitive Attitudes**, p. 63-74, 2014.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo, EPU, 2013.

MAAB, K. Modeling in Class: What Do We Want the Students to Learn. **Mathematical modelling**: Education, engineering and economics, p. 63-78, 2007.

MAAß, K. Classification scheme for modelling tasks. **Journal für Mathematik-Didaktik**, v. 31, n. 2, p. 285-311, 2010.

MAAß, K. What are modelling competencies? **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 113-142, 2006.

MAGIERA, M. T.; ZAWOJEWSKI, J. S. Principles for Designing Research Settings to Study Spontaneous Metacognitive Activity. In: **Affect in Mathematical Modeling**. Springer, Cham, 2019. p. 53-66.

MAHDAVI, M. An overview: Metacognition in education. **International Journal of Multidisciplinary and current research**, v. 2, n. 6, p. 529-535, 2014.

MANOUCHEHRI, A. Implementing mathematics reform in urban schools: A study of the effect of teachers' motivation style. **Urban Education**, v. 39, n. 5, p. 472-508, 2004.

McCORMICK, C. B. Metacognition and learning. In W. M. Reynolds, & G. E. Miller (Eds.), **Handbook of psychology: Educational psychology** (pp. 79–102). Hoboken: Wiley, 2003.

MEYER, J. F. C. A. Modelagem Matemática: O desafio de se 'fazer'a Matemática da necessidade…. **Com a Palavra, o Professor**, v. 5, n. 11, p. 140-149, 2020.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

NISS, M. (Ed.). **Cases of assessment in mathematics education: An ICMI study**. Springer Science & Business Media, 2013.

NISS, M. Applications and modelling in the mathematics curriculum—state and trends. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 18, n. 4, p. 487-505, 1987.

NISS, M. Modeling a crucial aspect of students' mathematical modeling. In: Modeling students' mathematical modeling competencies. **Springer**, Boston, MA, 2010. p. 43-59.

NISS, M., *et al.* Introduction. In: Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study. Boston, MA: Springer, 2007, p. 3–32.

O'MALLEY, J. M. *et al.* Learning strategies used by beginning and intermediate ESL students. Language learning, v. 35, n. 1, p. 21-46, 1985.
ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. Educação matemática:** pesquisa em movimento. 2005.

PANITZ, T. A Definition of Collaborative vs Cooperative Learning. Deliberations, London Metropolitan University; UK., Retrieved 5 Nov. 2011. 1996.

PAPALEONTIOU-LOUCA, E. **The Concept and Instruction of Metacognition**. Teacher Development, Vol 7, No. 1, 9-30, 2003.

PARIS, S. G.; CROSS, D. R.; LIPSON, M. Y. Informed Strategies for Learning: A program to improve children's reading awareness and comprehension. **Journal of Educational psychology**, v. 76, n. 6, p. 1239, 1984.

PARIS, S. G.; *et al*. Becoming a strategic reader. **Contemporary educational psychology**, v. 8, n. 3, p. 293-316, 1983.

PASCUALON, J. F. **Escala de avaliação da metacognição infantil: Elaboração de itens e análise dos parâmetros psicométricos** (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, 2011.

PASCUALON, J. F. **Escala de Metacognição: Evidências de validade, precisão e estabelecimento de normas.** Tese de Doutorado. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, 2015.

PASSOS, M. M.; CORRÊA, N. N. G.; ARRUDA, S. M. Perfil Metacognitivo (Parte I): Uma proposta de instrumento de análise. **Investigações em ensino de ciências**, v. 22, n. 3, p. 176-191, 2017.

POLLAK, H. O. A history of the teaching of modeling. **A history of school mathematics**, 2003.

POLLAK, H. O. Applications of mathematics. In E. Begle (Ed.), T**he Sixty-ninth Yearbook of the National Society for the Study of Education** (pp. 311–334). Chicago: University of Chicago Press, 1970.

POLLAK, H. O. How can we teach applications of mathematics?. **Educational studies in mathematics**, p. 393-404, 1969.

POLLAK, H. O. On some of the problems of teaching applications of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, p. 24-30, 1968.

POLLAK, H. O. What is mathematical modeling? **Journal of Mathematics Education at Teachers College**, v. 2, n. 1, 2011.

PORTER, M. E. O que é estratégia. **Harvard Business Review**, v. 74, n. 6, p. 61-78, 1996.

PRESSLEY, M. *et al*. Children's use of cognitive strategies, how to teach strategies, and what to do if they can't be taught. In: **Cognitive learning and memory in children**. Springer, New York, NY, 1985. p. 1-47.

PRICE-MITCHELL M. Millenials reflect on social networking. In: PRICE-MITCHELL M. Psychology Today. 2014. Disponível em: https://www.psychologytoday.com/us/blog/the-moment-youth/201406/millennials-reflect-social-networking. Accessed 10 de set. de 2021.

RIBEIRO, C. Metacognição: um apoio ao processo de aprendizagem. **Psicologia: reflexão e crítica**, v. 16, p. 109-116, 2003.

ROGOVCHENKO, S. Mathematical modelling problems in a mathematics course for engineers: A commognitive perspective. In: **Mathematical modelling education in east and west**. Springer, Cham, 2021. p. 561-570.

ROSA, C. T. W. **A metacognição e as atividades experimentais no ensino de física.** 2011. 346 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

ROSA, C. T. W. Instrumento para avaliação do uso de estratégias metacognitivas nas atividades experimentais de Física. **Revista Thema**, v. 14, n. 2, p. 182-193, 2017.

ROSA, C. T. W. **Metacognição no ensino de Física**: da concepção à aplicação. Passo Fundo: UPF Editora, 2014.

ROSA, C. T. W.; SANTOS, A. C.; RIBEIRO, C. Pensamento metacognitivo em estudantes do ensino médio: elaboração, validação e aplicação de um instrumento. In: **Anais do IV Congresso Internacional de Educação Científica e Tecnológica,** Santo Ângelo.

Recuperado de http://www. santoangelo. uri. br/anais/ciecitec/2017/resumos/comunicacao/trabalho_2742. pdf. 2017.

ROSA, C. T. W.; PASSOS, M. M.; ARRUDA, S. M. Metacognição e seus 50 anos: uma breve história da evolução do conceito. **Revista Educar Mais**, v. 4, n. 3, p. 703-721, 2020.

SANTOS, A. O.; OLIVEIRA, G. S.; SAAD, N. S. A metacognição e estratégias metacognitivas no processo de ensino e aprendizagem da matemática. **Revista Valore**, v. 6, p. 23-39, 2021.

SAVIANI, D. Os saberes implicados na formação do educador. **Formação do educador**: dever do Estado, tarefa da Universidade. São Paulo: Unesp, p. 145-155, 1996.

SCHMECK, R. R. (Ed.). **Learning strategies and learning styles**. Springer Science & Business Media, 2013.

SCHNEIDER, W.; ARTELT, C. Metacognition and mathematics education. **ZDM**, v. 42, n. 2, p. 149-161, 2010.

SCHOENFELD, A. H. Models of the teaching process. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 18, n. 3, p. 243-261, 1999.

SCHRAW, G. Promoting general metacognitive awareness. In: **Metacognition in learning and instruction**. Springer, Dordrecht, 2001. p. 3-16.

SCHRAW, G. Promoting general metacognitive awareness. **Instructional science**, v. 26, n. 1, p. 113-125, 1998.

SCHRAW, G.; DENNISON, R. S. Assessing metacognitive awareness. **Contemporary educational psychology**, v. 19, n. 4, p. 460-475, 1994.

SCHRAW, G; MOSHMAN, David. Metacognitive theories. **Educational psychology review**, v. 7, n. 4, p. 351-371, 1995.

SCHUKAJLOW, S.; KAISER, G.; STILLMAN, G. Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. **ZDM**, v. 50, n. 1, p. 5-18, 2018.

SCHUKAJLOW, S.; LEISS, D. Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz. **Journal für Mathematik-Didaktik**, v. 32, n. 1, p. 53-77, 2011.

SHILO, A.; KRAMARSKI, B. Mathematical-metacognitive discourse: how can it be developed among teachers and their students? Empirical evidence from a videotaped lesson and two case studies. **ZDM**, v. 51, n. 4, p. 625-640, 2019.

SMITH, M. S.; STEIN, M. K. Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. **Mathematics teaching in the middle school**, v. 3, n. 5, p. 344-350, 1998.

SOUSA, R. T. B; ARAÚJO JÚNIOR, R. H. A classificação e a taxonomia como instrumentos efetivos para a recuperação da informação arquivística. **Ciência da informação**, v. 42, n. 1, 2013.

SPINK, M. J. P.; GIMENES, M. G. G. Práticas discursivas e produção de sentido: apontamentos metodológicos para a análise de discursos sobre a saúde e a doença. **Saúde e sociedade**, v. 3, p. 149-171, 1994.

SPINK, M. J. **Práticas discursivas e produção de sentidos no cotidiano: aproximações teóricas e metodológicas**. Cortez, 2000.

SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. D. Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. **ZDM**, v. 37, n. 6, p. 450-456, 2005.

STENDER, P. Heuristic strategies as a toolbox in complex modelling problems. In: **Lines of inquiry in mathematical modelling research in education**. Springer, Cham, 2019. p. 197-212.

STILLMAN, G. A. Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt?. In: **Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education**. Springer, Cham, 2015. p. 791-805.

STILLMAN, G. A.; GALBRAITH, P. L. Applying mathematics with real world connections: Metacognitive characteristics of secondary students. **Educational studies in mathematics**, v. 36, n. 2, p. 157-194, 1998.

STILLMAN, G. Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**, p. 165-180, 2011.

STILLMAN, G. *et al*. A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. **Mathematics: Essential research, essential practice**, v. 2, p. 688-697, 2007.

STILLMAN, G. Strategies employed by upper secondary students for overcoming or exploiting conditions affecting accessibility of applications tasks. **Mathematics Education Research Journal**, v. 16, n. 1, p. 41-71, 2004.

TARRICONE, Pina. **The taxonomy of metacognition**. Psychology Press, 2011.

THACKER, Ben H. *et al.* **Concepts of model verification and validation**. Organização financiadora: US DOE (Estados Unidos), 2004.

TORREGROSA, A.; DEULOFEU, J.; ALBARRACÍN, L. Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. **Educación matemática**, v. 32, n. 3, p. 39-67, 2020.

VECCHIA, R. D.; MALTEMPI, M. V. O Problema na Modelagem Matemática: determinação e transformação. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 33, p. 748-767, 2019.

VERONEZ, M. R. D.; DE CASTRO, É. M. V.; MARTINS, M. A. Uma investigação acerca do problema em atividades de modelagem matemática. **VIDYA**, v. 38, n. 1, p. 223-235, 2018.

VERTUAN, R. E. **Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática**. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2013. 247p.

VERTUAN, R. E.; ALMEIDA, L. M. W. Práticas de monitoramento cognitivo em atividades de modelagem Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 30, p. 1070-1091, 2016.

VIEIRA, E. Representação mental: as dificuldades na atividade cognitiva e metacognitiva na resolução de problemas matemáticos. **Psicologia: reflexão e crítica**, v. 14, p. 439-448, 2001.

VORHÖLTER, K. Conceptualization and measuring of metacognitive modelling competencies: Empirical verification of theoretical assumptions. **ZDM**, v. 50, n. 1, p. 343-354, 2018.

VORHÖLTER, K. Enhancing metacognitive group strategies for modelling. **ZDM**, v. 51, n. 4, p. 703-716, 2019.

VORHÖLTER, K. Measuring metacognitive modelling competencies. In: **Mathematical Modelling and Applications**. Springer, Cham, 2017. p. 175-185.

VORHÖLTER, K., KAISER, G. Theoretical and pedagogical considerations in promoting student's metacognitive modelling competencies. In Hirsch, C. (Ed.) **Mathematical modeling and modeling mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. p. 273-280. 2016.

VORHÖLTER, K.; KRÜGER, A. Metacognitive strategies in modeling: comparison of the results achieved with the help of different methods. **Quadrante**, v. 30, n. 1, p. 178-197, 2021.

VORHÖLTER, K.; KRÜGER, A.; WENDT, L. Metacognition in mathematical modeling– An overview. In: **Affect in Mathematical Modeling**. Springer, Cham, 2019. p. 29-51.

VYGOTSKY L. S. Educational Psychology, St. Lucie Flórida. 1997.

WENDT, L.; VORHÖLTER, K.; KAISER, G. Teachers' Perspectives on Students' Metacognitive Strategies during Mathematical Modelling Processes – A Case Study. In: **Mathematical Modelling Education and Sense-making**. Springer, Cham, p. 335-346, 2020.

WESS, R.; *et al*. **Measuring Professional Competence for the Teaching of Mathematical Modelling:** *A Test Instrument*. Springer International Publishing: Berlin/Heidelberg, Germany, 2021.

WILLIAMS, J. P.; ATKINS, J. G. The role of metacognition in teaching reading comprehension to primary students. In: **Handbook of metacognition in education**. Routledge, 2009. p. 38-56.

YILDIRIM, T. P. **Understanding the Modeling Skill Shift in Engineering: The Impace of Self-Efficacy, Epistemology, and Metacognition**. 2011. Tese de Doutorado. University of Pittsburgh.

ZOHAR, A.; DAVID, A. B. Explicit teaching of meta-strategic knowledge in authentic classroom situations. **Metacognition and Learning**, v. 3, n. 1, p. 59-82, 2008.

APÊNDICE

Apêndice A: Questionário - Atividade de Modelagem Matemática: Poker

Para cada item que vai ser avaliado, atribua uma nota em que

1 - Discordo totalmente;

2 – Discordo parcialmente;

3 – Não concordo e nem discordo;

4 – Concordo parcialmente;

5 – Concordo totalmente

ITENS	1	2	3	4	5
Planejei a resolução da tarefa antes de me reunir com o grupo					
Parei para pensar sobre a forma como estava resolvendo a tarefa					
Depois de finalizada a tarefa, verifiquei as respostas					
Tive dificuldade com a resolução do modelo					
Tive que aprender o conteúdo matemático para utilizá-lo					
Tive dificuldade em reconhecer os elementos da Modelagem Matemática na atividade					
O tema trabalhado era de meu interesse					
A experiência com a atividade ajudou a compreender a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica					
A atividade é coerente com o programa da disciplina					
O grupo traçou estratégias para a resolução da tarefa					
O grupo geralmente analisava as ideias, sugestões e resoluções propostas para a resolução da tarefa					
Um integrante do grupo faz críticas sobre as resoluções de outro membro do grupo					
Houve troca de ideias do grupo com outro grupo					
O grupo refletiu sobre outro momento ou situação em que irá / poderá usar o que aprendeu na atividade					
O grupo fez críticas acerca da atividade					
O grupo teve dificuldade com o conteúdo matemático					
O grupo teve dificuldade em entender o tema					
O grupo retomou definições e conceito sobre Modelagem Matemática para resolver a tarefa					
Em grupo, foi possível fazer relações entre o conteúdo utilizado com o que você sabia ou aprendeu em momentos anteriores					
Para resolver a tarefa, houve um planejamento sobre o recurso/meio online que seria utilizado para discussões					
A maior parte da tarefa foi realizada de maneira síncrona					
O fato de ter sido online facilitou o desenvolvimento da atividade					
A interação online facilitou argumentar/criticar sobre as ideias dos colegas do grupo					
Desenvolver a atividade online favoreceu que, enquanto explicava minhas ideias para os colegas, eu pensava sobre elas					
A condução da aula foi adequada					
O conteúdo, da aula, foi abordado de forma clara					
Caso deseje fazer algum comentário, crítica ou sugestão, use este espaço.					

Apêndice B: Questionário - Atividade de Modelagem Matemática: Poupança

1) Assinale uma única alternativa: Para desenvolver a atividade, seu grupo inicialmente:
a) Tinha um plano geral para o qual estava trabalhando
b) Seu trabalho era puramente exploratório e não direcionado
c) Teve que fazer planos para as várias etapas de sua solução
d) Dividiu sua tarefa em subtarefas que teria de realizar, antes de começar a trabalhar
e) Outro ________

2) Assinale uma ou mais entre as alternativas que respondem à questão: Quando você não entendeu algo, na resolução da atividade:
( ) mudou meu jeito de pensar sobre o problema
( ) pediu ajuda aos colegas do grupo
( ) recorreu à pesquisas sobre o tema/conteúdo
( ) ignorou e seguiu com a atividade
( ) solicitou ajuda da professora
( ) usou de autoperguntas
( ) sobre a situação relevei, mas sobre a matemática busquei esclarecer
( ) outro ________________

3) Assinale uma única alternativa que representa a frequência com que você verificou se os cálculos, que você e/ou grupo estava fazendo, correspondiam ao que o problema estava pedindo:
a) o tempo todo
b) as vezes
c) apenas no final
d) nunca
e) somente quando foi solicitado pela professora/estagiária

4) Assinale uma única alternativa que retrata a principal estratégia que você e seu grupo utilizaram para resolver o problema:
a) particionaram o problema, calculando separadamente o rendimento de juros e a perda com inflação, usando como taxa fixa a média dos valores dos últimos 10 anos
b) utilizaram todas os valores da taxa real referente aos últimos 10 anos
c) utilizaram a taxa real fixa para realizar os cálculos, baseada no último ano
d) particionaram o problema, calculando separadamente o rendimento de juros e a perda com inflação, usando como taxa fixa a média dos valores de previsões para os anos futuros
e) usaram um valor médio fixo para a taxa da poupança e um valor médio fixo para a inflação, usando ambos no mesmo modelo
f) outro ___________

5) Assinale uma única alternativa que melhor expressa a estratégia que você e seu grupo usaram para entender e visualizar o desenvolvimento da resolução, você e seu grupo:
a) registraram, individualmente, as ideias no papel .
b) registraram, individualmente, as ideias usando algum programa (word, excel, ppt, por exemplo).
c) registraram as ideias usando algum programa e compartilhando tela no meet.
d) construíram um documento compartilhado para que todos pudessem editar.
e) falar em voz alta e cada um realizar suas anotações, para depois juntarmos.
f) outro _____________

6) Dentre as alternativas, assinale apenas uma que retrata o que você fez após seu grupo encontrar a resposta para o problema:
a) avaliou a eficácia de um investimento em poupança
b) comparou a rentabilidade da poupança com outros investimentos
c) verificou que para ficar milionário somente investindo na poupança é preciso aportar um valor muito alto
d) concluiu que é inviável investir na poupança se o objetivo é ficar milionário
e) considerou a poupança um meio seguro de investimento, mesmo com rentabilidade baixa
f) outro ________________

7) Assinale apenas uma alternativa que descreve o que seu grupo fez imediatamente após receber a tarefa:
a) discutiu sobre planejar como faria para resolver o problema
b) releu e analisou as informações fornecidas e as condições que se aplicaram sobre a situação
c) conversou buscando identificar o que já sabiam sobre o tema e sobre a matemática que seria utilizada para responder a situação proposta
d) identificou explicitamente o que o problema estava pedindo, antes de começar a trabalhar
e) esperou orientações da professora
f) outro _____________

8) Dentre as alternativas, assinale uma que melhor representa como você reagiu durante a resolução matemática:
a) conseguiu se lembrar de todas as fórmulas de que precisava.
b) não lembrou de fórmulas, mas sabia como realizar com facilidade os cálculos necessários para concluir partes da tarefa.
c) precisou pesquisar sobre o conteúdo matemático.

d) recorreu ao seu colega para ele lhe explicar sobre o conteúdo matemático.
e) só observou a maneira como seus colegas fizeram.
f) Outro ______

9) Assinale uma ou mais entre as alternativas que respondem à questão: Os dois meios principais, utilizados pelo seu grupo, para validar o modelo encontrado foram:
( ) Verificar se seu (s) cálculo (s) estava (m) correto (s).
( ) Avaliar se a resposta encontrada era uma solução satisfatória para o problema.
( ) Verificar se os resultados finais correspondem às condições do problema (informações, hipóteses e simplificações).
( ) Usar um recurso (softwares, sites, aplicativos, simulador) para confrontar os resultados.
( ) Consultar colegas de outro grupo para conferir se as respostas estavam parecidas.
( ) Verificar os resultados ao longo da atividade.

10) Assinale uma ou mais entre as alternativas que respondem à questão: Em momentos extra-classe, você e seu grupo:
( ) conversaram para dividir tarefas
( ) compartilharam dados e informações sobre o problema
( ) se reuniram online para trabalhar na resolução
( ) compartilharam arquivos (fotos, documentos, links) da resolução
( ) apontaram erros percebidos individualmente e que precisavam ser revistos pelo grupo
( ) esclareceram dúvidas surgidas ao longo do desenvolvimento da atividade
( ) apresentaram as ideias que cada um pensou em individual, para depois discutirem em conjunto
( ) não trabalhamos na atividade em momento extra-classe
( ) outro ____________

11) Use S para Sim e N para Não. Em algum momento da atividade, você e seu grupo identificaram erros nos/nas:
( ) cálculos
( ) informações sobre a situação
( ) digitação ou escrita
( ) interpretação do problema
( ) modelo matemático obtido
( ) conceitos ou conteúdos matemáticos
( ) problema proposto
( ) não identificamos erros
( ) outro ____________

12) Assinale uma alternativa que representa a principal estratégia empregada pelo seu grupo para a formulação de hipóteses:
a) Levando em consideração as informações sobre o tema
b) Com base nos dados matemáticos da situação
c) Considerando o conteúdo matemático que seria utilizado
d) Tomando como exemplo atividades anteriores de modelagem
e) Não formulamos hipóteses
f) Outro _________

13) Assinale uma alternativa, que na sua opinião, melhor reflete a conclusão que se pode chegar a partir do modelo encontrado pelo grupo, que permitiu obter o valor mensal a ser aportado na poupança, para chegar à 1 milhão de reais:
a) É satisfatório, para responder o problema proposto.
b) É satisfatório, porém não corresponde à realidade.
c) Não é satisfatório, porém forneceu um resultado adequado.
d) Forneceu um resultado adequado, porém não pode ser replicado.
e) Não forneceu um resultado adequado.
f) É satisfatório e pode ser reaplicado em situações similares.
g) Outro. __________________

14) Assinale uma ou mais entre as alternativas que respondem à questão: Dentre as estratégias utilizadas na resolução do problema, você e seu grupo:
( ) Utilizaram tentativa - erro
( ) Buscaram encontrar um padrão, à medida que matematizaram a situação
( ) Fizeram uma representação, um esquema, um desenho ou um diagrama
( ) Construíram uma tabela
( ) Encontram um problema análogo (parecido) para tomar como exemplo
( ) Descreveram as particularidades do problema
( ) Generalizaram o modelo
( ) Começaram o problema pelo fim, ou seja, supondo um valor para o aporte
( ) Distinguiram diferentes partes da atividade
( ) Fizeram a decomposição do problema
( ) Usaram conhecimentos cotidianos
( ) Analisaram as propriedades vinculadas ao problema

15) Enumere as lacunas de 1 a 5, sendo 1 muito difícil e 5 muito fácil.

Acerca do processo de modelagem	1	2	3	4	5
Definir hipóteses					
Fazer a validação					
Obter o modelo					
Entender o que o problema pedia para resolver					
Planejar o desenvolvimento da atividade					
Trabalhar em grupo de forma remota					
Acerca da situação	1	2	3	4	5
Entender as informações que recebeu sobre o problema					
Simplificar os dados					
Selecionar e organizar as informações que seriam úteis					
Entender sobre poupança, taxa de juros e inflação					
Encontrar informações em fontes confiáveis					
Acerca da matemática utilizada	1	2	3	4	5
Resolver os cálculos					
Generalizar o modelo					
Definir as variáveis					
Reconhecer/aprender o conteúdo					

16) O que vocês fizeram para superar as maiores dificuldades?

17) Assinale uma única alternativa que melhor representa informações acerca dos dados utilizados pelo seu grupo na resolução do problema:
a) Utilizamos os dados foram fornecidos durante a aula.
b) Buscamos os dados nos sites fornecidos durante a aula.
c) Precisamos pesquisar os dados em fontes que julgamos confiáveis.
d) Usamos o que foi fornecido durante a aula e complementamos com uma nova busca.
e) Outro ___________

18) Marque uma alternativa: Para realizar a simplificação dos dados, o grupo:
a) Descartou dados em excesso e irrelevantes para a resolução do problema.
b) Fez um tratamento e seleção dos dados relevantes para a resolução do problema.
c) Optou por selecionar os dados que proporcionariam uma resolução mais fácil.
d) Escolheu os dados que conhecia e que sabia como manipular.
e) Outro ____________________

19) Dentre as alternativas a seguir, assinale a que melhor descreve seu papel no desenvolvimento da atividade:
a) Participou ativamente durante toda a atividade
b) Contribuiu sempre que necessário ou que solicitado
c) Assumiu a condução da atividade
d) Acompanhou a resolução do grupo
e) Participou com mais intensidade de alguns momentos do que de outros
f) Outro _______________

20) Enumere de 1 a 4, sendo 1 o que você aprendeu, 2 o que você já sabia, 3 o que você aprendeu pouco e 4 o que você não aprendeu com a atividade.
( ) juros compostos
( ) desvalorização pela inflação
( ) taxa de juros da caderneta de poupança
( ) soma de PG
( ) média aritmética
( ) IPCA
( ) Selic
( ) rentabilidade de investimento na caderneta de poupança
( ) outras alternativas de investimento
( ) taxa de juros equivalente
( ) taxa de juros proporcional
( ) capital acumulado

21) Na sua opinião, o modelo encontrado fornece uma resposta que é:
a) medir um fenômeno que muitas vezes não é diretamente perceptível e que é uma propriedade de uma situação.
b) uma forma de decidir entre alternativas justificáveis (ou seja, com base em uma situação).
c) um modelo que permitirá replicar uma situação.
d) uma previsão do resultado de uma situação.
e) uma explicação de algum resultado de uma situação.
f) uma compreensão de como manipular uma situação para que ela produza o resultado desejado.

22) Assinale uma ou mais alternativas que apresentam características referente à entrega do relatório:
( ) o grupo planejou a conclusão de acordo com o tempo que tinham até a entrega
( ) todos do grupo tiveram acesso com antecedência à versão final do documento
( ) você revisou toda a parte da resolução matemática
( ) você revisou todas as informações sobre a situação problema
( ) você não teve tempo de revisar a versão final

( ) o grupo decidiu mudar/inserir algo próximo à data de entrega
( ) o relatório orientou as ações do grupo no desenvolvimento da atividade
( ) o relatório limitou algumas ideias que o grupo tinha para desenvolver a atividade
( ) o grupo desenvolveu a atividade normalmente e depois organizou o que havia feito no relatório
( ) outro ___________

23) Sobre as intervenções da(s) estagiária(s), assinale uma alternativa:
a) Nos levaram abandonar ideias iniciais e assumir novos encaminhamentos na resolução do problema.
b) Foram no sentido de orientar e esclarecer o que deveria ser feito.
c) Em alguns momentos, nos confundiu.
d) Esclareceu dúvidas acerca da resolução.
e) Outro ________________

24) Justifique se modelo a seguir pode ser usado para responder o problema proposto. Faça críticas, aponte falhas, realize comparações com o modelo que seu grupo encontrou, faça sugestões de alteração, indique algo que não ficou claro, etc.

- Parcelas: $L_0, L_1, L_2, ..., L_{119}$, em que $L_1 = L_2 = L_3 = ... = L_n = L$
- Ganho juros: g = 1 + j Perda inflação: p = 1 – i
- Tempo em meses: n Saldo no tempo n: S_n

Mês	Parcela
1º	L_1
2º	$L_1 \cdot g \cdot p + L_2 \Rightarrow L \cdot (g \cdot p + 1)$
3º	$[L \cdot (g \cdot p + 1) \cdot g \cdot p] + L_3 \Rightarrow L[(g^2 \cdot p^2 + g \cdot p) + 1]$
4º	$\{L[(g^2 \cdot p^2 + g \cdot p) + 1] \cdot g \cdot p + L_4\} \Rightarrow L \cdot [(g^3 \cdot p^3 + g^2 \cdot p^2 + g \cdot p) + 1]$
n	$\boxed{L\left[\sum_{i=1}^{n-1} g^i \cdot p^i + 1\right] \Rightarrow L\left[\sum_{i=1}^{n-1} (g \cdot p)^i + 1\right] \Rightarrow \frac{L \cdot (g^n \cdot p^n - g \cdot p)}{g \cdot p - 1} = S_n}$

25) Numa escala de 1 a 5, sendo 1 discordo totalmente e 5 concordo totalmente, responda:

Item	1	2	3	4	5
Reservou um tempo no início para certificar-se de que leu a pergunta por completo e a compreendeu totalmente.					
Compreendeu totalmente todo o problema antes de começar a resolver.					
Verificou continuamente se o que você estava fazendo e se os resultados que estava obtendo correspondiam ao seu entendimento do problema.					
Planejou as ações para a construção do modelo tendo como referência seus conhecimentos, o tema envolvido e a estratégia a ser utilizada.					
Acompanhou continuamente seu progresso para ver se suas ações estavam realmente de acordo com seu plano.					
Fez verificações pontuais, em vários momentos do processo.					
Verificou se seus resultados finais correspondiam as condições do problema.					
Verificou se a validação foi adequada para o contexto.					
Reconheceu na resolução matemática, ou em parte dela, conteúdos aprendidos em momentos anteriores.					
Discutiu com seus colegas estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com outros já estudados ou mesmo com os que seus colegas sugeriram.					
Compreendeu os processos matemáticos utilizados.					
Avaliou as estratégias com seus conhecimentos e de seus colegas, ou, mesmo, as avaliou em termos dos equipamentos e materiais disponíveis.					
Participou das decisões do grupo questionando o que estava sendo realizado, de forma a revisar as ações executadas.					
Avaliou se os recursos, os dados e o modelo estavam de acordo com o planejado.					
Realizou questionamentos para o grupo se tudo estava de acordo com o previsto ou se houveram problemas não previstos inicialmente.					
O tema da atividade era do seu interesse					

26) Argumente por que a resolução matemática apresentada, as estratégias utilizadas, os dados e informações assumidos e o modelo obtido pelo seu grupo são eficientes para responder o problema proposto.

Apêndice C: Questionário – Atividade do terceiro momento de familiarização

Considerando a atividade de modelagem matemática desenvolvida no trabalho final, responda as questões a seguir.

1- Dentre as alternativas a seguir, assinale aquela que corresponde à estratégia que desempenhou maior influência na escolha do tema e na formulação do problema, na atividade desenvolvida pelo seu grupo.
( ) Considerar o que o grupo conhecia sobre o tema e decidir o que precisariam aprender para resolver o problema.
( ) Fazer previsões sobre o desenvolvimento da atividade (pensar em possíveis conteúdos matemáticos, modelo e soluções).
( ) Recordar sobre temas ou problemas semelhantes, visto em outros contextos.
( ) Pensar sobre as informações acerca do tema e delimitar uma pergunta.
( ) Analisar a viabilidade de trabalhar com o tema e estabelecer metas para a resolução do problema.
( )Julgar a coerência de problema em função do tema escolhido, das possibilidades de resolução e dos dados disponíveis.
( )Outro (interesse, curiosidade, intervenção de terceiros, desejo de aprender, etc)____________________

2- Conforme estudo do texto de Meyer (2020), muitas vezes "há a tentação de se incluir aspectos em demasia, características que podem deixar o problema original intratável. Acontece que, geralmente, quanto mais parâmetros e variáveis tivermos numa modelagem, menos poderemos tirar em termos de compreensão e análise de simulações" (p.144). Considerando a afirmação do autor, as simplificações são um aspecto importante no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.
O seu grupo, provavelmente, precisou realizar algumas simplificações para poder desenvolver a atividade. Qual foi a estratégia principal para isso?
( ) Identificar conhecimentos que ainda não adquiriu e fixar metas.
( ) Controlar informações e pensar sobre as informações que dispõem (selecionar as mais convenientes e descartar as desnecessárias no momento).
( ) Diagnosticar limitações (informações que não estão disponíveis ou são de difícil acesso, dados em excesso, etc)
( ) Outra _________________

3- A partir da combinação entre um item da coluna 1 e um item da coluna 2, indique quais foram, na sua opinião, as estratégias que seu grupo utilizou para definir as hipóteses assumidas na atividade.
OBS.: A resposta deve ser um par em que uma letra é seguida de um número. Por exemplo (a, 2) indica que seu grupo Subdividiu o problema e selecionou as hipóteses ao longo da atividade (2).

Coluna 1	Coluna 2
a) Subdividir o problema e selecionar as mais apropriadas para alcançar seu objetivo.	1) No início da atividade
b) Pensar se elas seriam adequadas em relação às informações sobre o tema e problema estruturado.	2) Ao longo da atividade
c) Refletir sobre a coerência de cada uma delas com o resultado esperado.	3) No início da atividade, mas modificada no decorrer da resolução.

Resposta:__________________

4- Enumere as afirmações a seguir de 1 a 3, sendo 1 o item de menor importância e 3 o item de maior importância, relativamente ao que teve mais influência para o grupo para a matematização da situação.
( ) Saber o que deve fazer, ou seja, saber qual matemática utilizar para resolver o problema.
( ) Saber como fazer, ou seja, saber como usar conhecimentos matemáticos, procedimentos ou estratégias matemáticas para desenvolver a resolução.
( ) Saber porque fazer, ou seja, saber quando, onde e por que usar conteúdos e conceitos matemáticos, bem como procedimentos ou estratégias empregadas no desenvolvimento da resolução.

5- Enumere as afirmações a seguir de 1 a 5, sendo 1 o item de menor importância e 5 o item de maior importância, relativamente ao que teve mais influência para o grupo na fase de resolução.
( ) Saber como fazer, ou seja, saber como aplicar procedimentos ou estratégias matemáticas para a resolução.

( ) Perceber e corrigir erros de conceitos, cálculos ou manipulação de dados, por exemplo.
( ) Entender o papel da matemática utilizada na resolução.
( ) Analisar criticamente se a matemática usada produziu uma resposta adequada para o problema.
( )Associar recursos ou ferramentas da tecnologia, como software, por exemplo, para a resolução.

6- Com relação ao modelo matemático construído nessa atividade, assinale as alternativas que são verdadeiras para o seu grupo.
( ) O modelo permitiu obter a resposta para o problema que foi formulado em relação à situação em estudo.
( ) O modelo intermediou a construção da resposta para o problema que foi formulado em relação à situação em estudo.
( ) O modelo pode ser generalizado para outras situações similares.
( ) A construção do modelo proporcionou aprender matemática a partir da situação em estudo.

7- Com relação à validação nessa atividade de modelagem matemática, assinale o que é verdadeiro para o seu grupo.
( ) Ela requer rastrear o que aprendeu durante a resolução e o que ainda não sabe, traçando possibilidades para futuras investigações.
( ) Permite entender a solução encontrada, interpretando como ela responde ao problema inicial.
( ) Viabiliza realizar um feedback para verificar se a solução encontrada é satisfatória para responder ao problema ou será preciso retomar fases anteriores.
( ) Ela se deu por meio de comparação de dados (observados e estimados pelo modelo)
( ) Ela requereu a busca de informações complementares sobre a situação estudada na atividade de modelagem matemática.
( ) Ela foi pouco importante na atividade.
( ) Ela foi muito importante na atividade.

Apêndice D: Síntese da atividade com o tema Frota de automóveis e poluição no Brasil (G4)

Tema: Frota de automóveis e poluição no Brasil

Situação da realidade

Há uma tendência para que o número de veículos no país cresça e, quanto maior o veículos motorizados rodando, maior o impacto ambiental, causado pela poluição por CO2.

Problema

Qual será a quantidade estimada de automóveis no Brasil no ano de 2030 e qual o impacto deste aumento na emissão de CO2?

Informações:

Frota de automóveis no Brasil de acordo com o IBGE:

Ano	Quantidade de automóveis
2006	27.700.608
2007	29.851.610
2009	34.536.667
2010	37.188.341
2011	39.832.919
2012	42.682.111
2013	45.444.387
2014	47.946.665
2015	49.822.709
2016	51.296.982
2017	52.916.160
2018	54.715.488
2019	56.652.190
2020	58.016.405

Média anual de 12,9 mil Km/anual rodados de carro pelos brasileiros.

Matematização e resolução

Teorema da Convergência Monótona e fazendo um ajuste da reta no CurveExpert, obtém-se a=522.557 e b≈0,93. Logo, a reta V_{i+1}=522.557+0,93V_i , em que o valor de estabilidade é: V*≈74.650.814 .

Observando o comportamento dos dados, temos

$(V^*-V_i)>0$ e $\lim_{T}(i\to\infty)\ (V^*-V_i)=0$

A curva de tendência tem as características de uma função exponencial $(V^*-V_i)(t)=ae^{bt}$., usando o CurveExpert tem-se os parâmetros a=47.534.763 e b≈-0,08. Escrevendo a função:

$(V^*-V)(t)=47.534.763e^{(-0,08t)}$

Seja V*≈74.650.814

$(74.650.814-V)(t)=47.534.763e^{(-0,08t)}$

Modelo matemático:

$V(t)=-47.534.763e^{(-0,08t)}+74.650.814$

Ano	Quantidade de Automóveis (dados IBGE)	Quantidade de Automóveis (modelo)	Diferença	Diferença em percentual
2006	27.700.608	27.116.051	-584.557	-2,11%
2007	29.851.610	30.770.697	919.087	3,08%
2009	34.536.667	34.144.361	-392.306	-1,14%
2010	37.188.341	37.258.645	70.304	0,19%
2011	39.832.919	40.133.492	300.573	0,75%
2012	42.682.111	42.787.309	105.198	0,25%
2013	45.444.387	45.237.092	-207.295	-0,46%
2014	47.946.665	47.498.527	-448.138	-0,93%
2015	49.822.709	49.586.094	-236.615	-0,47%
2016	51.296.982	51.513.161	216.179	0,42%
2017	52.916.160	53.292.068	375.908	0,71%
2018	54.715.488	54.934.207	218.719	0,40%
2019	56.652.190	56.450.091	-202.099	-0,36%
2020	58.016.405	57.849.429	-166.976	-0,29%

Para obter a quantidade de carbono, multiplica-se a quantidade de automóveis por 12,5 (Kg de CO2 emitido por dia), multiplicado por 365 (dias de um ano).

Hipóteses

H1: A quantidade de automóveis tende a se estabilizar em algum momento.

H2: A emissão de CO2 é proporcional ao número de automóveis.

Simplificações

S1: Considerar apenas a frota de automóveis do Brasil.
S2: Não serão considerados fatores como economia ou inovações tecnológicas.
S3: Considerar a tendência dos dados observados.
S4: Para os cálculos da emissão de CO2 será considerado um automóvel pequeno de motor 1.0 a 1.4 flex.

Validação

Do modelo: Comparação dos dados obtidos com os do IBGE , as diferenças ficaram em torno de 1%.

Da resposta: Comparação dos resultados obtidos em toneladas com a emissão conhecida do ano de 2019.

Ano	Quantidade de veículos	Emissão de CO2 por ano em toneladas	Percentual em relação ao dados reais de 2019
2019	56.652.190	261.990.885	71%
2020	58.016.405	268.299.766	73%
2021	60.333.619	279.015.838	76%
2022	61.434.377	284.106.348	77%
2023	62.450.505	288.805.483	79%
2024	63.388.509	293.143.329	80%
2025	64.254.396	297.147.667	81%
2026	65.053.711	300.844.139	82%
2027	65.791.571	304.256.410	83%
2028	66.472.702	307.406.334	84%
2029	67.101.465	310.314.080	85%
2030	67.681.887	312.998.271	85%

Resposta para o problema

O ano de 2030 o Brasil terá a quantia estimada de 67.681.887 milhões de automóveis. Isso significa um aumento de 19% nas emissões de CO2 considerando a categoria dos automóveis com motor a combustão, ou seja, 51.007.386 toneladas a mais desse composto químico no meio ambiente.