Universidade Estadual de Londrina

ANA CAROLINA BARDAÇON

ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DE UMA TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS

Londrina
2020

ANA CAROLINA BARDAÇON

ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DE UMA TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS

Dissertação apresentadada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Regina Luzia Corio de Buriasco.
Coorientador: Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho

Londrina
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

B245a Bardaçon, Ana Carolina.

Análise do desenvolvimento de uma trajetória de ensino e aprendizagem para a construção dos números naturais / Ana Carolina Bardaçon. - Londrina, 2020.
124 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Coorientador: Paulo Antonio Liboni Filho.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Trajetória de Ensino e Aprendizagem - Tese. 3. Educação Matemática Realística - Tese. 4. Construção do conjunto dos Números Naturais - Tese. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de . II. Liboni Filho, Paulo Antonio . III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. IV. Título.

CDU 51

ANA CAROLINA BARDAÇON

ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DE UMA TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Profª. Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 02 de março de 2020.

Ao meu avô, Antonio Salgueiro Silvantos.

AGRADECIMENTOS

Especiais aos meus pais, Edileini e Claudinei, que me apoiaram emocional e financeiramente;

Ao meu companheiro, Pedro Henrique, pela parceria em todos os anos, em especial nos dois últimos.

Aos meus orientadores, Regina e Liboni, pelos momentos de orientação, em que falamos não só do trabalho, mas também de situações da vida pessoal e profissional.

Aos alunos da disciplina de Análise Real de 2018, por me acolherem durante os nossos sete encontros, aceitarem participar desta pesquisa e contribuírem com suas produções orais e escritas.

Ao meu amigo, professor, parceiro de trabalho, Gabriel, que me ajudou e acolheu em todos os momentos em que eu precisei durante esta jornada de dois anos de trabalho e estudo.

As minhas irmãzinhas de mestrado, Vanessa, Mariana e Júlia, pelos momentos de felicidade, angústia e euforia compartilhados.

Aos membros do GEPEMA, que me ensinaram o valor e a importância de um grupo de estudo e pesquisa, em especial Gabriel e Vanessa, que me acompanharam de perto no desenvolvimento deste trabalho.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna, Profª. Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida e Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva, por aceitarem o convite para fazer parte da banca de qualificação e defesa, e por contribuírem de forma valiosa em meu trabalho de dissertação e em minha formação como pesquisadora.

À todas as pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta para a constituição deste trabalho e minha formação como estudante, pesquisadora e professora.

À CAPES pela bolsa concedida.

tudo dança
hospedado numa casa
em mudança

Paulo Leminski

BARDAÇON, Ana Carolina. **Análise do desenvolvimento de uma trajetória de ensino e aprendizagem para a construção dos números naturais**. 2020. 124f. Dissertação de mestrado (Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo analisar o desenvolvimento de uma trajetória de ensino e aprendizagem, fundamentada na Educação Matemática Realística, para a construção do conjunto dos Números Naturais. Para isso, foi realizada uma análise, com base em uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo, de uma trajetória de ensino e aprendizagem desenvolvida em uma turma de 3º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Este trabalho se desenvolveu no contexto de uma disciplina de Análise Real e contou com a participação de 12 estudantes. As análises mostraram que um trabalho com trajetória de ensino de aprendizagem traz contribuições para a formação do professor de matemática e para a dinâmica de sala de aula, por meio do favorecimento de aspectos da Educação Matemática Realística, dentre os mais destacados o princípio da atividade, da interatividade e o princípio de níveis.

Palavras-chave: Educação Matemática. Trajetória de Ensino e Aprendizagem. Educação Matemática Realística. Construção do conjunto dos Números Naturais.

BARDAÇON, Ana Carolina. **Analysis of the development of a teaching-learning trajectory for the construction of natural numbers**. 2020. 124f. Dissertação de mestrado (Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

This dissertation aims to analyze the development of a teaching-learning trajectory, based on Realistic Mathematics Education, for the construction of the set of Natural Numbers. For this, an analysis was carried out, based on a qualitative approach of an interpretative nature, of a teaching-learning trajectory developed in a 3rd year class of graduation in Mathematics from the State University of Londrina. This work took place in the context of the Real Analysis course and had the participation of 12 students. The analyzes showed that a work with a teaching-learning trajectory brings contributions in the mathematics teacher education and in the dynamics of the classroom, by favoring aspects of Realistic Mathematics Education, among the most outstanding the principle of activity, interactivity and the principle of levels.

Key words: Mathematics Education. Teaching-learning trajectory. Realistic Mathematics Education. Construction of the set of natural numbers

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 PRÓLOGO

No ano de 2014, ingressei na Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, após decidir meu futuro logo no primeiro ano do Ensino Médio. Ao final do segundo ano do curso, eu havia ingressado no PIBID[1] e feito todas as disciplinas que estavam na grade curricular do primeiro e segundo ano do curso, dentre elas as disciplinas de Didática da Matemática e Tópicos de Educação Matemática I, ambas ministradas pela minha atual orientadora, Profa. Regina Luzia Corio de Buriasco. Foi nessas disciplinas que tive o meu primeiro contato com a Educação Matemática Realística[2] e, consequentemente, com a Trajetória de Ensino e Aprendizagem. Entretanto, por mais que eu gostasse dessas disciplinas e de seus tópicos, sentia que a Licenciatura não era meu lugar. Antes de finalizar o ano letivo de 2015, estava decidida a mudar para o curso de Bacharelado em Matemática.

Foi então que conversei com várias pessoas, familiares, amigos e professores, e eles me incentivaram a fazer os dois cursos, Licenciatura e Bacharelado, em concomitância. Nos dois últimos anos da graduação, participei do GEPEMA[3], do PET[4] e fiz todas as disciplinas da Licenciatura e a maior parte das disciplinas do Bacharelado, incluindo o trabalho de conclusão de curso.

Inserida no Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação - GEPEMA, pude conhecer alguns dos trabalhos do grupo que são sobre Trajetórias de Ensino e Aprendizagem (ROSSETO, 2016) e sobre Educação Matemática Realística (OLIVEIRA, 2014; PASSOS, 2015; SILVA, 2015; SCHASTAI, 2017; SILVA, 2018), uma abordagem para o ensino de Matemática que emergiu na Holanda no final da década de 1960.

Como o tema da minha iniciação científica, vinculada ao PET, era a Construção dos Números e eu estava fortemente envolvida com a RME dentro do GEPEMA, fiz em meu trabalho de conclusão de curso uma proposta de ensino da Construção dos Números Naturais à luz da Educação Matemática Realística orientada pelos professores Paulo Antônio Liboni Filho, que é

---

[1] Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.
[2] Neste trabalho, utilizaremos RME para denotar a abordagem *Realistic Mathematics Education,* traduzida como Educação Matemática Realística.
[3] Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação.
[4] Programa de Educação Tutorial.

coorientador deste trabalho, e Gabriel dos Santos e Silva, membro do GEPEMA e professor do departamento de Matemática.

Durante a elaboração do meu projeto de pesquisa para ingressar no Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, decidi que gostaria de realizar um trabalho com a RME no contexto da disciplina de Análise Real. Quando fiz a disciplina na graduação, eu tinha prazer em estudar os tópicos de Análise Real e acompanhava, com tranquilidade, as demonstrações feitas pela professora em sala de aula. Entretanto, quando estava sozinha em casa tentando fazer os exercícios, parecia que eu nada sabia a respeito daquilo, não sabia nem por onde começar as demonstrações e, na prova, consequentemente, acontecia a mesma coisa. Então, me perguntei: será que o problema é com a Análise Real ou a forma como os alunos são ensinados e avaliados? Diante disso, quis propor neste trabalho uma alternativa ao ensino de Análise, em que os alunos são incentivados a trabalhar em grupos e o ponto de partida para o ensino são tarefas que levem em conta o que eles sabem de matemática. É preciso que fique claro que essa pergunta é o que motiva meu trabalho, entretanto o trabalho em si não é suficiente, mas é necessário, para responder minha inquietação.

Na tentativa de encontrar respostas para isso, defini como objetivo deste trabalho analisar o desenvolvimento de uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem, fundamentada na Educação Matemática Realística, para a construção do conjunto dos Números Naturais em aulas da disciplina de Análise Real, no 3º ano de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina. A fim de cumprir o objetivo deste trabalho, estabeleci o seguinte objetivo específico:

- ✓ descrever orientações, intervenções, regulações ocorridas no desenvolvimento da Trajetória de Ensino e Aprendizagem.
- ✓ analisar e discutir orientações, intervenções, regulações ocorridas no desenvolvimento da Trajetória de Ensino e Aprendizagem.

Ademais, apresento nos capítulos seguintes a Educação Matemática Realística, a Trajetória de Ensino e Aprendizagem (TEA) como recurso metodológico para a Construção dos Números Naturais, bem como os objetivos, o método e um perfil dos participantes da pesquisa e, por fim, a descrição e a análise da TEA à luz da Educação Matemática Realística. Os nomes dos capítulos fazem alusão a um *ballet* ou uma peça teatral, algo próximo a mim desde a minha infância. Um *ballet* é constituído de um prólogo, que contextualiza o público a respeito dos personagens e do tema da peça, e de atos, que são compostos por uma série de cenas interligadas por uma subdivisão temática.

2 ATO I

2.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

A Educação Matemática Realística (RME) é uma abordagem para o ensino da matemática que foi desenvolvida na Holanda no final da década de 60, e tem como precursor Hans Freudenthal (1905-1990), um matemático que contribuiu para as áreas de Geometria e Topologia e que também estava interessado na Educação Matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; DRIJVERS, 2014).

Para Freudenthal (1991), a matemática é entendida como uma atividade humana e “[...] ao conjunto de conhecimentos historicamente acumulado e validado, Freudenthal dá o nome de conhecimento matemático” (SILVA, 2015, p.35). Adotando esse entendimento do que é Matemática, a RME defende que os estudantes aprendem matemática quando fazem matemática e, para que isso ocorra, deve ser dada a eles a oportunidade guiada de “reinventar a matemática”, por essa razão, denomina-se o método de ensino[5] da RME de Reinvenção Guiada. Esse processo de reinventar a matemática se dá por meio da atividade de organizar e lidar com assuntos por meio da matemática, e a essa atividade dá-se o nome de matematização.

Segundo Treffers e Goffree (1985), a matematização é uma atividade de organizar e estruturar um assunto por meio do conhecimento matemático. No decorrer desse processo de organização e estruturação, os estudantes e os matemáticos recorrem a algumas ações como esquematizar, formular e visualizar um problema de diferentes formas, descobrir relações, descobrir e provar regularidades, representar uma relação em uma fórmula, refinar, ajustar, combinar e integrar modelos, formular um novo conceito matemático, generalizar, levantar conjecturas e compartilhar formas de lidar com um assunto (OLIVEIRA, 2014).

O professor que adota a Reinvenção Guiada como método de ensino, deve fornecer aos seus estudantes situações realísticas para que eles possam ter a oportunidade de lidar com essas situações por meio da

[5] Segundo Santos (2014, p. 51), o “método de ensino diz respeito ao caminho a ser utilizado pelo professor para atingir objetivos estabelecidos em relação às aprendizagens dos alunos, engloba estratégias, procedimentos e meios de ensino”.

matemática. Situações realísticas são aquelas que podem ser imaginadas pelo estudante, podendo estar relacionadas a um contexto puramente matemático, fantasioso ou do mundo real.

O trabalho com a Educação Matemática Realística envolve a articulação de princípios, originalmente cunhados por Treffers no final da década de 1970 e reformulados ao longo dos anos. Atualmente, segundo Van den Heuvel-Panhuizen e Drijvers (2014), distinguem-se seis princípios:

- ✓ **Princípio da atividade:** para Freudenthal a matemática é entendida como uma atividade humana, os estudantes aprendem matemática fazendo matemática e, com isso, os alunos são participantes ativos no processo de aprendizagem.
- ✓ **Princípio da realidade:** o ensino de matemática, segundo a RME, parte de tarefas que sejam significativas para os estudantes, que podem ser matematizadas e que possuam um contexto realístico, isto é, que pode ser imaginado. O contexto da tarefa pode ser puramente matemático, como é o caso das tarefas elaboradas neste trabalho, mas também pode ser um contexto fantasioso ou da "vida real".
- ✓ **Princípio de níveis:** os alunos percorrem vários níveis de compreensão no decorrer do seu processo de aprendizagem. As tarefas, resolvidas por eles, podem ser solucionadas inicialmente a partir de estratégias informais, relacionadas ao contexto, e almeja-se que os estudantes passem a utilizar, ao longo do processo, estratégias e modelos mais formais de resolução.
- ✓ **Princípio do entrelaçamento:** os domínios da matemática e os conteúdos matemáticos são vistos de forma integrada. Por essa razão, é importante oferecer aos estudantes problemas que possuam contextos ricos e que permitam utilizar várias ferramentas e conhecimentos matemáticos.
- ✓ **Princípio da interatividade:** para a RME, aprender matemática é uma atividade individual e, simultaneamente, social; por esse motivo, é papel do professor promover

discussões nos grupos de trabalho e com toda a turma. A interação oportuniza a reflexão, permitindo que os alunos alcancem outros níveis de compreensão, além de propiciar o compartilhamento de estratégias e ideias entre os estudantes.

- ✓ **Princípio da orientação:** em uma aula na perspectiva da RME, os professores têm o papel de orientar os estudantes no processo de “reinvenção” da matemática. Esse princípio está relacionado com o método de ensino da RME Reinvenção Guiada.

Na perspectiva da Educação Matemática Realística, uma das formas de descrever as possíveis rotas de reinvenção dos alunos é por meio da elaboração de Trajetórias de Ensino e Aprendizagem. Para Van den Heuvel-Panhuizen (2010), uma trajetória de ensino e aprendizagem descreve os possíveis caminhos a serem percorridos pelos alunos e pelo professor durante os processos de ensino e de aprendizagem. Uma trajetória possui três componentes entrelaçadas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010):

- ✓ Trajetória de aprendizagem, que descreve os possíveis caminhos percorridos pelos alunos em seus processos de aprendizagem.
- ✓ Trajetória de ensino, que descreve as possíveis intervenções e orientações do professor que poderão ser realizadas a partir dos caminhos percorridos pelos alunos descritos na trajetória.
- ✓ O conteúdo programático descreve os conteúdos que podem ser desenvolvidos a partir da trajetória.

Uma trajetória de ensino e aprendizagem deve fornecer uma visão geral dos processos de ensino e de aprendizagem e não deve ser vista como um conjunto de regras a ser seguido fielmente. A partir de três trabalhos orientados por membros do GEPEMA, Prestes (2013), Oliveira (2015) e Quilles (2018), podem-se observar os seguintes aspectos:

Quadro 1 - Aspectos evidenciados em trajetórias de ensino e aprendizagem

	Prestes (2013)	**Oliveira (2015)**	**Quilles (2018)**
Público alvo	Alunos do Ensino Fundamental II	Alunos do Ensino Médio	Alunos do Ensino Médio
Introdução da TEA	Composta por conteúdos, intenções, materiais e objetivos específicos	Composta por objetivos	Composta por objetivos
Quantidade de tarefas[6]	Uma tarefa	Doze tarefas	Duas tarefas
Hipóteses do professor com relação ao processo de ensino e de aprendizagem	Apresenta diálogos entre professor e alunos	Apresenta dúvidas que os estudantes podem ter na resolução da tarefa e faz possíveis encaminhamentos do professor perante as dúvidas apresentadas	Apresenta dúvidas que os estudantes podem ter na resolução da tarefa e faz um possível encaminhamento do professor perante a dúvida apresentada e levanta questionamentos que o professor pode fazer para os estudantes.

Fonte: a própria autora

Com base no quadro anterior, pode-se verificar que não há uma única maneira de se elaborar Trajetórias de Ensino e Aprendizagem. As trajetórias observadas eram direcionadas a alunos do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, e no presente trabalho o público alvo são estudantes do Ensino Superior. Em todas as trajetórias apresentadas, as tarefas propostas pelo professor são o

[6] Foi possível constatar que os trabalhos de Prestes (2013), Oliveira (2015) e Quilles (2018) não explicitaram a quantidade de aulas necessárias para o desenvolvimento da TEA, visto que o desenvolvimento de uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem depende do tempo e das produções de cada estudante participante.

ponto de partida, porém a quantidade de tarefas é uma escolha do professor. Geralmente, elaboradores de uma TEA apresentam os objetivos que eles têm com relação aos conteúdos e aos seus estudantes. E, por fim, as hipóteses levantadas pelos professores são explicitadas em forma de diálogos hipotéticos ou em forma de questionamentos e encaminhamentos para cada um deles.

Uma TEA é um elemento que está presente no campo da prática docente e, neste trabalho, entender-se-á a TEA como um Meio de Ensino, segundo a definição de Santos (2014, p. 52):

> [...] são recursos, de qualquer natureza, que auxiliam o trabalho do professor. Podem ser instrumentos auxiliares, que atuam passivamente nos processos de ensino e de aprendizagem, ou portadores de informação, necessários à satisfação de objetivos estabelecidos.

Para elaborar uma TEA, devem-se levar em conta os princípios da RME e as características de uma boa tarefa de avaliação. Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2005), uma tarefa de avaliação deve ser:

- ✓ Informativa: a tarefa deve fornecer ao professor o máximo de informações a respeito do conhecimento, das habilidades e das estratégias do aluno.
- ✓ Significativa: a tarefa deve ser convidativa, desafiadora e sua resolução ser valiosa para o estudante.

Para que as tarefas de avaliação sejam informativas e significativas, o contexto da tarefa deve ser:

- ✓ Acessível: a tarefa deve ser clara para o estudante.
- ✓ Transparente: a tarefa deve permitir ao aluno mostrar suas habilidades.
- ✓ Elástica/Flexível: a tarefa poderá ser resolvida por diferentes estratégias.

Na perspectiva da RME, "as tarefas de sala de aula não devem ser diferentes das de avaliação" (FERREIRA, 2013, p. 39), por isso essas características valem para as tarefas que estarão na TEA apresentada neste trabalho.

A partir das características de uma boa tarefa de avaliação, De Lange (1999) distingue as tarefas em 3 níveis de demanda cognitiva:

- ✓ Reprodução (nível 1): a tarefa exige do aluno a utilização de procedimentos de rotina, como a memorização de propriedades e a aplicação de algoritmos;
- ✓ Conexão (nível 2): o problema demanda que o aluno faça conexões entre os domínios da matemática;
- ✓ Reflexão (nível 3): o estudante matematiza situações por meio de análise, interpretação e apresentação de provas e generalizações.

É importante ressaltar que essa classificação não se dá em categorias, visto que uma tarefa do nível 2, por exemplo, pode conter características do nível 1. Além disso, o uso que o professor faz de uma tarefa é determinante em se tratando do nível de demanda cognitiva. Uma tarefa de Reflexão pode se tornar de Reprodução se, por exemplo, o professor apresentar na lousa uma única resolução, e uma tarefa de Reprodução pode se tornar uma tarefa de Conexão ou Reflexão se o professor realizar intervenções de modo a modificar as exigências da tarefa. Silva (2018) considera que a tarefa apresentada na Figura 1 tem potencial de nível 3 da classificação de De Lange, pois é preciso uma análise para observar que as diferentes soluções estão contidas em um intervalo de valores numéricos:

Figura 1 - Tarefa Martin e Alice

Martin mora a 3km da escola e Alice a 5km. Qual a distância entre a casa de Martin e Alice?

Fonte: Silva (2018)

Se um professor apresenta na lousa apenas uma das possibilidades de resolução dessa tarefa e não analisa e discute as possíveis soluções, a tarefa torna-se do nível 1, pois exige apenas a reprodução de algoritmos para encontrar uma única solução, como, por exemplo:

$$D_{Martin}{}^{7} = 3\ km$$

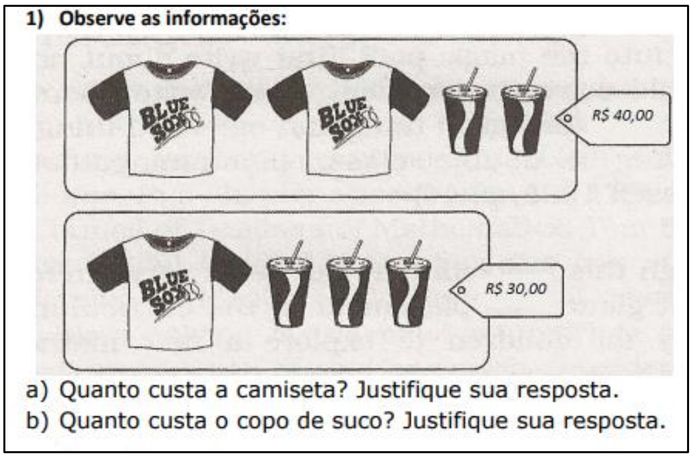
$$D_{Alice}{}^{8} = 5\ km$$

[7] Distância da casa de Martin até a escola.
[8] Distância da casa de Alice até a escola.

$$D^9 = D_{Alice} - D_{Martin} = 5\ km - 3\ km = 2\ km$$

Pires (2013), durante uma Prova em Fases[10], propôs para os participantes de sua pesquisa a resolução da tarefa apresentada na Figura 2:

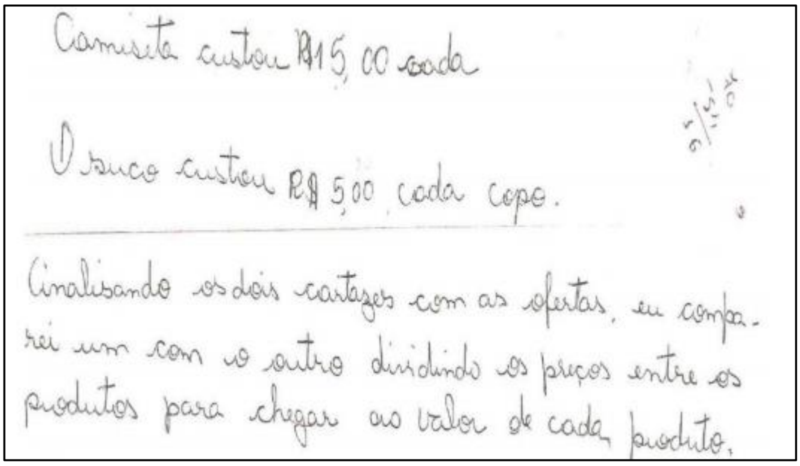
Figura 2 - Tarefa das camisetas e copos de suco



Fonte: Pires (2013)

Na primeira fase da prova, uma participante apresenta a seguinte resolução:

Figura 3 - Produção escrita da participante



Fonte: Pires (2013)

A tarefa exigia apenas que a resolvedora calculasse o preço de uma camiseta e de um copo. A partir da produção escrita, Pires faz intervenções

---

9 Distância da casa de Martin até a casa de Alice.

10 “A Prova em Fases é um instrumento de avaliação cuja dinâmica, como o nome já informa, é composta de várias fases. Na primeira fase, os estudantes resolvem as questões (quais e quantas julgarem que devam fazer); nas fases seguintes, eles retomam a prova com a oportunidade de resolver questões não resolvidas ou, refazer, alterar, refinar, questões já resolvidas.” (SILVA, 2018, p.55)

mudando o nível de demanda cognitiva da tarefa. Ao propor que a participante faça uma generalização, pode-se associar a tarefa ao nível 3 da classificação de De Lange:

Figura 4 - Intervenção da pesquisadora

Pergunta da pesquisadora
Se chamarmos cada camiseta de c e cada copo de suco de s, como você representaria esse problema?

Fonte: Pires (2013)

A partir desses exemplos, pudemos ver como as atitudes de um professor perante uma tarefa podem aumentar ou limitar o nível de demanda cognitiva de uma tarefa. Além disso, o trabalho de um membro do GEPEMA, Mendes (2014), já evidenciou que as intervenções do professor, por meio de uma prova em fases, podem alterar o nível de demanda cognitiva de uma tarefa.

2.2 Uma Construção do conjunto dos Números Naturais

Neste trabalho será apresentada uma construção do conjunto dos Números Naturais, que é uma adaptação de construções elaboradas por Dedekind e outros matemáticos, como Frege e Peano, no final do século XIX.

Segundo Lima (2016), o conjunto dos Números Naturais é caracterizado pelos seguintes axiomas, conhecidos como Axiomas de Peano:

1) Existe uma função injetiva $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ denominada Função Sucessor. A imagem $S(n)$ de cada $n \in \mathbb{N}$ chama-se o sucessor de n.
2) Existe um único $1 \in \mathbb{N}$, tal que $1 \neq S(n), \forall n \in \mathbb{N}$.
3) Seja $A \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in A$ e se $S(n) \in A, \forall n \in A$, então $A = \mathbb{N}$.

A partir dos Axiomas de Peano, podemos fazer algumas considerações a respeito do Conjunto dos Números Naturais. O primeiro e segundo axiomas referem-se à existência do conjunto $\mathbb{N}$ e à garantia de que esse conjunto é não vazio, pois o elemento denotado por 1 pertence a esse conjunto.

Além disso, o primeiro axioma refere-se à Função Sucessor, assegurando que todo número natural possui um sucessor e que dois números que possuem o mesmo sucessor são iguais. Além disso, o segundo axioma garante que o número 1 não é sucessor de nenhum outro número natural, uma vez que o 1 não pertence à imagem da função S. Por fim, o terceiro axioma, conhecido como Princípio da Indução Finita ou Axioma da Indução, certifica que, se um conjunto de números naturais contém o 1 e contém o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

Desta forma, podemos entender $\mathbb{N}$ como sendo o conjunto:

$$\mathbb{N} = \{1, S(1), S(S(1)), \dots\}$$

Por razões históricas, adotamos a simbologia indo-arábica para esses elementos $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$.

Utilizando os axiomas enunciados anteriormente, podemos definir a adição de dois números naturais, n e m, escrita como $n + m$, utilizando o Princípio da Indução Finita por meio de uma definição recursiva:

$$(i)\ n + m = \begin{cases} n + 1 = S(n) \\ n + S(m) = S(n + m) \end{cases}$$

A primeira regra diz respeito à adição de um número arbitrário n com 1 em que a soma é o sucessor de n representada por $S(n)$ e a segunda regra é a adição de um número arbitrário n com o sucessor de um número arbitrário m, representada por $S(m)$. As regras são para $m = 1$ e para $S(m)$ e, portanto, o quinto axioma garante que a soma $n + m$ está definida para todos os números n, m naturais. Essa forma de definir a adição de dois números naturais não é única, como geralmente os livros a respeito desse tema trazem. Podemos também defini-la da seguinte maneira:

$$(ii)\ m + n = \begin{cases} 1 + n = S(n) \\ S(m) + n = S(m + n) \end{cases}$$

Essas regras de fato definem a adição de dois números naturais, pois elas são as regras definidas em $ii)$ depois da aplicação da propriedade comutativa, que demonstraremos mais adiante. Utilizamos as mesmas ideias para definir a multiplicação de dois números naturais $n, m \in \mathbb{N}$ e podemos adotar as regras (i) ou (ii):

$$(i)\ n \cdot m = \begin{cases} n \cdot 1 = n \\ n \cdot S(m) = n \cdot m + n \end{cases}$$

$$(ii)\ m \cdot n = \begin{cases} 1 \cdot n = n \\ S(m) \cdot n = m \cdot n + n \end{cases}$$

Definir a adição e a multiplicação utilizando as regras (i) ou (ii) implica algumas mudanças nas demonstrações das propriedades dos números naturais, como exploraremos mais adiante.

Como consequência da definição da adição e da multiplicação de números naturais, temos as demonstrações da propriedades da adição e da multiplicação dos números naturais, enunciadas usualmente como teoremas a serem provados, como vemos no quadro a seguir:

Quadro 2 - Propriedades das operações dos números naturais

Associatividade da adição	$(a+b)+c = a+(b+c), \forall\, a,b,c \in \mathbb{N}$
Comutatividade da adição	$n+m = m+n, \forall\, n,m \in \mathbb{N}$
Lei do corte da adição	$n+p = m+p \Rightarrow n = m, \forall\, n,m,p \in \mathbb{N}$
Associatividade da multiplicação	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall\, a,b,c \in \mathbb{N}$
Comutatividade da multiplicação	$n \cdot m = m \cdot n, \forall\, n,m \in \mathbb{N}$
Lei do corte da multiplicação	$n \cdot p = m \cdot p \Rightarrow n = m, \forall\, n,m,p \in \mathbb{N}$
Propriedade distributiva	$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \forall\, a,b,c \in \mathbb{N}$

Fonte: a própria autora

No Quadro 3, realizamos as demonstrações dos teoremas apresentados no Quadro 2 e de alguns lemas auxiliares, utilizando as seguintes regras de adição e multiplicação:

$$\begin{cases} n+1 = S(n) \\ n+S(m) = S(n+m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \cdot 1 = n \\ n \cdot S(m) = n \cdot m + n \end{cases}$$

Quadro 3 - Demonstração das propriedades de adição e multiplicação de números naturais

$(a+b)+c = a+(b+c)$ $\forall\, a,b,c \in \mathbb{N}$	Considere que a e b são constantes. Vamos mostrar a associatividade da adição, utilizando indução matemática (em c). i. Para $c = 1$: $(a+b)+1 = S(a+b)$ $a+(b+1) = a+S(b) = S(a+b)$

	ii. Seja $c \in \mathbb{N}$ tal que $(a+b)+c = a+(b+c)$. iii. Vamos mostrar que essa propriedade é válida para $S(c)$: $$(a+b)+S(c) = S((a+b)+c)$$ $$a+(b+S(c)) = a+S(b+c) = S(a+(b+c))$$ $$= S((a+b)+c)$$ Por i, ii, iii temos que a adição em $\mathbb{N}$ é associativa.
$n+1 = 1+n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$	Vamos mostrar que o lema é válido, utilizando indução matemática (em n). i. Para $n = 1$: $$1+1 = S(1)$$ $$1+1 = S(1)$$ ii. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n+1 = 1+n$. iii. Vamos mostrar que o lema é válido para $S(n)$. $$S(n)+1 = S(S(n))$$ $$1+S(n) = S(1+n) = S(n+1) = S(S(n))$$ Por i, ii, iii provamos que o lema é válido em $\mathbb{N}$.
$n+m = m+n$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$	Considere que n é constante. Vamos mostrar que a comutatividade da adição é válida, utilizando indução matemática (em m). i. Para $m = 1$: $$n+1 = 1+n$$ Sabemos que essa igualdade é válida pelo lema demonstrado anteriormente. ii. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $n+m = m+n$. iii. Vamos mostrar que a propriedade é válida para $S(m)$. $$n+S(m) = S(n+m)$$ $$S(m)+n = (m+1)+n = m+(1+n)$$ $$m+(n+1) = m+S(n) = S(m+n) =$$ $$S(n+m)$$

	Por i, ii, iii temos que a adição em $\mathbb{N}$ é comutativa.
$m + p = n + p \Rightarrow m = n$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$	Considere que m e n são constantes. Vamos mostrar que a lei do corte da adição é válida utilizando indução matemática (em p). i. Para $p = 1$: $m + 1 = n + 1 \;\Rightarrow\; S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$ ii. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n + p \Rightarrow m = n$. iii. Vamos mostrar que a propriedade é válida para $S(p)$. $m + S(p) = n + S(p) \;\Rightarrow\; S(m + p)$ $= S(n + p) \Rightarrow m + p = n + p$ $\Rightarrow m = n$ Por i, ii, iii temos que a lei do corte da adição é válida em $\mathbb{N}$.
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$	Considere que a e b são constantes. Vamos mostrar a propriedade distributiva utilizando a indução matemática (em c). i. Para $c = 1$. $a \cdot (b + 1) = a \cdot S(b)$ $a \cdot b + a \cdot 1 = a \cdot b + a = a \cdot S(b)$ ii. Seja $c \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. iii. Vamos mostrar que essa propriedade é válida para $S(c)$. $a \cdot (b + S(c)) = a \cdot S(b + c)$ $= a \cdot (b + c) + a$ $= a \cdot b + a \cdot c + a$ $a \cdot b + a \cdot S(c) = a \cdot b + a \cdot c + a$ Por i, ii, iii temos que a propriedade distributiva é válida em $\mathbb{N}$.
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$	Considere que a e b são constantes. Vamos mostrar a propriedade distributiva utilizando a indução matemática (em c).

	i. Para $c = 1$. $$(a+b)\cdot 1 = a+b$$ $$a\cdot 1 + b\cdot 1 = a+b$$ ii. Seja $c \in \mathbb{N}$ tal que $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$. iii. Vamos mostrar que essa propriedade é válida para $S(c)$. $$(a\ +b)\cdot\ S(c) = (a+b)\cdot c + (a+b)$$ $$= a\cdot c + b\cdot c + a + b$$ $$a\cdot S(c) + b\cdot S(c) = a\cdot c + a + b\cdot c + b =$$ $$= a\cdot c + b\cdot c + a + b$$ Por i, ii, iii temos que a propriedade distributiva é válida em $\mathbb{N}$.
$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ $\forall\, a,b,c \in \mathbb{N}$	Considere que a e b são constantes. Vamos mostrar a associatividade da multiplicação utilizando a indução matemática (em *c*). i. Para $c = 1$. $$(a\cdot b)\cdot 1 = a\cdot b$$ $$a\cdot(b\cdot 1) = a\cdot b$$ ii. Seja $c \in \mathbb{N}$ tal que $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$. iii. Vamos mostrar que essa propriedade é válida para $S(c)$. $$(a\ \cdot b)\cdot\ S(c) = (a\ \cdot b)\cdot c + (a\ \cdot b)$$ $$= a\cdot(b\cdot c) + a\cdot b$$ $$a\cdot\big(b\cdot S(c)\big) = a\ \cdot(b\cdot c + b) = a\cdot(\,b\cdot c) +\ a\cdot b$$ Por i, ii, iii temos que a multiplicação em $\mathbb{N}$ é associativa.
$n\cdot 1 = 1\cdot n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$	Considere que n é constante. Vamos mostrar que o lema é válido utilizando indução matemática (em n). i. Para $n = 1$: $$1\cdot 1 = 1$$ $$1\cdot 1 = 1$$ ii. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\cdot 1 = 1\cdot n$.

	iii. Vamos mostrar que ele é válido para $S(n)$. $$S(n) \cdot 1 = S(n)$$ $$1 \cdot S(n) = 1 \cdot (n+1) = 1 \cdot n + 1 \cdot 1 = n \cdot 1 + 1$$ $$= n + 1 = S(n)$$ Por i, ii, iii temos que o lema é válido em $\mathbb{N}$.
$n \cdot m = m \cdot n$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$	Considere que n é constante. Vamos mostrar que a comutatividade da multiplicação é válida utilizando indução matemática (em m). i. Para $m = 1$: $$n \cdot 1 = 1 \cdot n$$ Sabemos que essa igualdade é válida pelo lema demonstrado anteriormente. ii. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot m = m \cdot n$. iii. Vamos mostrar que ela é válida para $S(m)$. $$n \cdot S(m) = n \cdot m + n$$ $$S(m) \cdot n = (m+1) \cdot n = m \cdot n + 1 \cdot n$$ $$= n \cdot m + n \cdot 1 = n \cdot m + n$$ Por i, ii, iii temos que a multiplicação em $\mathbb{N}$ é comutativa.

Fonte: a própria autora

No apêndice A, apresentamos as demonstrações dos teoremas e lemas anteriores utilizando as seguintes regras de adição e multiplicação:

$$\begin{cases} 1 + n = S(n) \\ S(m) + n = S(m+n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot n = n \\ S(m) \cdot n = n + m \cdot n \end{cases}$$

A fim de concluirmos a construção apresentada, definiremos a relação de ordem entre os números naturais e enunciaremos suas propriedades.

Dizemos que um número natural m é menor do que um número natural n $(m < n)$, se, e somente se, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Essa relação, conhecida como relação de ordem, satisfaz as propriedades transitiva, monotonicidade da adição, monotonicidade da multiplicação e a tricotomia.

As demonstrações das propriedades da relação de ordem e da lei do corte da multiplicação são apresentadas no quadro abaixo. Utilizaremos, sem perda de generalidade, as seguintes regras de adição e multiplicação para realizar as demonstrações do quadro 4:

$$\begin{cases} n+1 = S(n) \\ n+S(m) = S(n+m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \cdot 1 = n \\ n \cdot S(m) = n \cdot m + n \end{cases}$$

Quadro 4 - Demonstração das propriedades da relação de ordem dos números naturais

Transitividade	
$m < n \wedge n < p \Rightarrow m < p$	Existem $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ tal que: $$m + r_1 = n \wedge n + r_2 = p$$ Assim, substituindo a primeira equação na segunda, temos que: $$(m + r_1) + r_2 = p \Rightarrow m + (r_1 + r_2) = p$$ Isto é, existe $r_1 + r_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m + (r_1 + r_2) = p$. Portanto, $m < p$.
Monotonicidade da adição	
$m < n \Rightarrow m + p < n + p$	Sabemos que $m < n$ ou seja, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$. Somando $p \in \mathbb{N}$ em ambos os lados da equação, temos: $$n + p = m + k + p \Rightarrow n + p = (m + p) + k$$ $$\Rightarrow m + p < n + p$$
Monotonicidade da multiplicação	
$m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$	Sabemos que $m < n$ ou seja, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$. Multiplicando $p \in \mathbb{N}$ em ambos os lados da equação, temos: $$n \cdot p = (m + k) \cdot p \Rightarrow n \cdot p = m \cdot p + (k \cdot p) \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$$
Tricotomia	
Apenas uma e somente uma das alternativas abaixo é válida:	**Caso 1:** Vamos supor que $m = n$ e $m < n$. Se $m = n$ e existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$, temos o seguinte: $$m = n \Rightarrow m = m + p \Rightarrow S(m) = S(m + p) \Rightarrow$$

a) ou $m = n$ b) ou existe $p \in \mathbb{N}; m = n + p$ c) ou existe $q \in \mathbb{N}; n = m + q$	$m + 1 = m + p + 1 \Rightarrow 1 = p + 1 \Rightarrow 1 = S(p)$ Absurdo, pois o $1 \in \mathbb{N}$ não é sucessor de nenhum número natural. **Caso 2:** Vamos supor que $m = n$ e $m > n$. Se $m = n$ e existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + q$, temos: $m = n \Rightarrow n + q = n \Rightarrow S(n + q) = S(n)$ $\Rightarrow n + q + 1 = n + 1 \Rightarrow q + 1 = 1 \Rightarrow S(q) = 1$ Absurdo, pois o $1 \in \mathbb{N}$ não é sucessor de nenhum número natural. **Caso 3**: Vamos supor que $m > n$ e $m < n$. Se existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + q$ e existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$, temos: $m = n + q \Rightarrow m = (m + p) + q$ $\Rightarrow S(m) = S(m + p + q) \Rightarrow m + 1 = m + p + q + 1$ $\Rightarrow 1 = p + q + 1 \Rightarrow 1 = S(p + q)$ Absurdo, pois o $1 \in \mathbb{N}$ não é sucessor de nenhum número natural. Pelos casos 1, 2 e 3, concluímos que ou (a), ou (b), ou (c) pode acontecer.
Lei do corte da multiplicação	
$m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$ $\forall\, n, m, p \in \mathbb{N}$	Considere que m e n são constantes. Vamos mostrar que a lei do corte da multiplicação é válida utilizando indução matemática (em p). i. Para $p = 1$: $m \cdot 1 = n \cdot 1 \;\Rightarrow\; m = n$ ii. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$. iii. Vamos mostrar que a propriedade é válida para $S(p)$. $m \cdot S(p) = n \cdot S(p) \Rightarrow\; m \cdot p + m = n \cdot p + n$ Dessa última igualdade, temos duas possibilidades. Ou $m = n$, ou $m \neq n$. Se $m = n$, já temos o que queríamos. Vamos supor que $m \neq n$.

	Caso 1: $m > n$, ou seja, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + q$. Dessa forma: $$(n + q) \cdot p + (n+q) = n \cdot p + n$$ $$\Rightarrow n \cdot p + q \cdot p + n + q = n \cdot p + n$$ $$\Rightarrow q \cdot p + n + q = n$$ $$\Rightarrow S(q \cdot p + n + q) = S(n)$$ $$\Rightarrow q \cdot p + n + q + 1 = n + 1$$ $$\Rightarrow S(q \cdot p + q) = 1$$ Absurdo, pois o $1 \in \mathbb{N}$ não é sucessor de nenhum número natural. Caso 2: $n > m$, ou seja, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + q$. Dessa forma: $$m \cdot p + m = (m+q) \cdot p + (m+q)$$ $$\Rightarrow m \cdot p + m = m \cdot p + q \cdot p + m + q$$ $$\Rightarrow m = q \cdot p + m + q$$ $$\Rightarrow S(m) = S(q \cdot p + m + q)$$ $$\Rightarrow m + 1 = q \cdot p + m + q + 1$$ $$\Rightarrow 1 = S(q \cdot p + q)$$ Absurdo, pois o $1 \in \mathbb{N}$ não é sucessor de nenhum número natural. Pelos casos 1 e 2, concluímos que m só pode ser igual a n, como queríamos mostrar. Por i, ii, iii temos que a lei do corte da multiplicação é válida em $\mathbb{N}$.

Fonte: a própria autora

3 ATO II

3.1 O MÉTODO

Esta é uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. Entende-se por pesquisa qualitativa aquela que “enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.11)”. De acordo com os autores, a pesquisa qualitativa possui cinco características:

1) As informações são obtidas através do contato direto. O investigador revisa todas as informações, pois o seu instrumento de análise será o entendimento que ele tem sobre elas. Como o comportamento humano é influenciado pelo contexto, geralmente o pesquisador desloca-se para o local de estudo.
2) A palavra escrita é importante na abordagem qualitativa, tanto para o registro dos dados como para a disseminação dos resultados. Os investigadores tentam analisar as informações coletadas em toda sua riqueza, tentando manter a forma como foram registradas ou transcritas. Além disso, tudo o que é descrito tem potencial para dar indícios que permitam ao pesquisador obter uma compreensão mais clara do seu objeto de estudo.
3) Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados, pois é no processo que se percebem peculiaridades sobre o objeto de estudo que não são percebidas por meio das pesquisas quantitativas, que se interessam somente pelo resultado.
4) Geralmente os pesquisadores partem de situações particulares e fazem abstrações à medida que as informações vão se agrupando.
5) Os pesquisadores qualitativos querem saber o modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas, por isso eles estabelecem estratégias e procedimentos que lhes

> permitam levar em consideração as experiências do ponto de vista do sujeito.

A partir dessas características, delineamos os procedimentos metodológicos de forma que satisfizessem essas características, algumas em maior grau que outras.

Inicialmente elaboramos uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem, na perspectiva da Educação Matemática Realística, a partir da proposta de ensino apresentada no trabalho de conclusão do curso de Bacharelado em Matemática intitulado “Uma proposta de ensino da Construção dos Números Naturais à luz da Educação Matemática Realística”. Desenvolvemos a Trajetória de Ensino e Aprendizagem na turma do terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, na disciplina de Análise Real.

A disciplina de Análise Real é ofertada no terceiro ano do curso de Bacharelado e Licenciatura em Matemática. A carga horária é de 120 horas-aula, distribuídas no decorrer de um ano letivo. O professor da turma no ano de 2018 foi o prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho, a quem, neste trabalho, nos referiremos como “Liboni”. O desenvolvimento da TEA durou por volta de quatro semanas, totalizando 14 aulas com duração de 50 minutos cada uma, no final do segundo semestre de 2018. As aulas eram nas terças-feiras das 19h15min até 20h55min e nas quartas-feiras das 21h30min até 22h50min. Antes do desenvolvimento da TEA, frequentamos as aulas de Análise Real da turma que participaria da pesquisa para nos familiarizarmos com os estudantes.

A coleta de informações foi feita por meio de gravações em áudio, das produções escritas dos alunos, de fotografias da lousa, do caderno de campo de dois membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa, que acompanharam o desenvolvimento, e do caderno de campo da pesquisadora. Após a coleta, fizemos uma descrição das aulas a partir dos meios de coleta e escaneamos as produções escritas dos estudantes. Na descrição, fomos contando como a aula foi se desenvolvendo e, em alguns momentos, são apresentados diálogos entre a pesquisadora e os participantes envolvidos. Uma aula antes do início do trabalho com a TEA, o professor da turma concedeu-nos alguns dos minutos finais da aula para nos apresentarmos para a turma, explicarmos os objetivos da pesquisa, entregarmos o Termo de Consentimento Livre Esclarecido (deixando claro que eles poderiam participar ou não da pesquisa) e darmos a primeira tarefa da TEA para os estudantes.

Após o período da utilização, realizamos uma entrevista semiestruturada com os estudantes, que, segundo Lüdke e André (1986), se desenvolve a partir de um roteiro que pode sofrer adaptações, ou seja, é um tipo de entrevista flexível, que, neste caso, será gravada por meio de áudio. O objetivo da entrevista era, a partir dela, traçar um perfil de cada um dos estudantes e saber quais foram suas impressões durante o desenvolvimento da TEA. Por fim, pedimos para que cada um deles escolhesse um nome para aparecer na versão oficial do trabalho, garantindo o anonimato desses participantes. O roteiro da entrevista está no apêndice deste trabalho.

3.2 Os participantes da pesquisa

A partir da realização da Entrevista Semiestruturada com todos os participantes da pesquisa, elaboramos um quadro com algumas de suas informações, como idade, informações do curso de graduação, como o ano de ingresso e habilitação, e informações a respeito da disciplina de Análise Real. Os participantes são identificados no Quadro 5 pelos nomes fictícios que escolheram.

Quadro 5 - Perfil dos estudantes

Estudantes	**Idade (anos)**	**Graduação/ Mestrado (cursando)**	**Ano de ingresso no curso de graduação**	**Informações a respeito da disciplina de Análise Real**
Alexandre	22	Matemática Licenciatura	2015	É a primeira vez que está cursando a disciplina de Análise Real.
Anakin	28	Mestrado em Economia Regional da UEL e fez graduação em Economia.	2017	É a primeira vez que está cursando a disciplina de Análise Real como aluno ouvinte da disciplina.

Fernanda	23	Matemática Licenciatura	2016	É a primeira vez que está cursando a disciplina de Análise Real.
Gustavo	22	Matemática Licenciatura	2016	É a segunda vez que está cursando a disciplina de Análise Real.
Jorge	20	Matemática Licenciatura	2016	É a primeira vez que está cursando a disciplina de Análise Real.
José	22	Matemática Licenciatura	2016	É a primeira vez que está cursando a disciplina de Análise Real.
Mat	23	Matemática Licenciatura	2016	É a primeira vez que está cursando a disciplina de Análise Real.
Parede	21	Matemática Licenciatura	2016	É a primeira vez que está cursando a disciplina de Análise Real.
Raul	42	Matemática Licenciatura	2016	É a primeira vez que está cursando a disciplina de Análise Real.
Vinícius	21	Matemática Licenciatura	2016	É a primeira vez que está cursando a disciplina de Análise Real.
Vygotsky	21	Matemática Licenciatura e Bacharelado	2015	É a primeira vez que está cursando a disciplina de Análise Real.
Whisky	27	Mestrado em Economia Regional da UEL e fez graduação em Tecnologia em Comércio Exterior	2017	Assim como o aluno Anakin, é a primeira vez que está cursando a disciplina de Análise Real como aluno ouvinte da disciplina.

Fonte: a própria autora

A pesquisa contou com a participação de doze estudantes, sendo grande parte do curso de Matemática, habilitação Licenciatura, ingressantes no ano de 2016. O estudante Vygotsky fazia o curso de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática em concomitância, outro aluno, Gustavo, estava fazendo a disciplina de Análise Real pela segunda vez e dois estudantes, Anakin e Whisky, mestrandos de Economia Regional da UEL, estavam cursando a disciplina como alunos ouvintes. Os estudantes Anakin e Whisky relataram que uma das professoras do Mestrado em Economia Regional da UEL sugeriu que eles assistissem às aulas de Análise Real, pois a disciplina poderia ajudar na compreensão das demonstrações realizadas pela professora do mestrado.

No Quadro 6, apresentamos a frequência dos estudantes nos sete encontros em que a TEA foi desenvolvida. Além disso, tivemos a presença do professor da turma e a participação de pelo menos um dos dois membros do GEPEMA em todos os encontros.

Quadro 6 - Frequência dos estudantes

Encontros / Estudantes	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º
Alexandre	X	X	X	X	X		X
Anakin	X	X					
Fernanda	X	X				X	
Gustavo	X	X	X			X	X
Jorge	X	X		X	X	X	X
José	X	X		X		X	X
Mat	X	X	X	X	X	X	X
Parede	X	X	X	X		X	X
Raul	X	X	X	X	X	X	X
Vinícius		X	X	X	X	X	
Vygotsky		X	X	X		X	X
Whisky	X	X		X	X		

Fonte: a própria autora

4 ATO III

4.1 Uma descrição e análise da Trajetória de Ensino e Aprendizagem para a Construção dos Números Naturais

4.1.1 Primeiro Dia de Desenvolvimento

O primeiro dia de utilização da TEA aconteceu em uma terça-feira e a aula teve início por volta das 19h20min. Iniciei a aula apresentando os membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa, que acompanhariam todos os dias de desenvolvimento da TEA. Em seguida, explicitei o contrato de trabalho explicando que a participação da turma seria fundamental para que o trabalho ocorresse bem, que o trabalho seria realizado em trios e que os trios deveriam apresentar no quadro a resolução das tarefas que seriam feitas durante a minha pesquisa. Logo após, perguntei se alguém tinha alguma dúvida e se gostariam de acrescentar algo ao contrato de trabalho. Como ninguém se manifestou, pedi que eles se sentassem em grupos antes de iniciarmos a discussão. Os grupos nesse dia foram:

1. Jorge, José e Mat.
2. Anakin, Raul e Whisky.
3. Alexandre, Fernanda, Gustavo e Parede.

Dei início à discussão, no grande grupo, da ideia de sucessor perguntando para os estudantes o que é um sucessor, e alguns deles responderam que era qualquer coisa que vem depois; um número após o outro. Pude perceber que eles imediatamente quiseram associar a ideia de sucessor ao contexto dos números, o que era esperado por estarem em uma disciplina de Análise Real. Então questionei a ideia de sucessor fora do contexto dos números e perguntei, no contexto político, quem são os possíveis sucessores do atual presidente do Brasil. Os estudantes deram como resposta nomes de candidatos à presidência: Jair Bolsonaro, Ciro Gomes, Cabo Daciolo, entre outros. A partir disso, pude frisar que, naquele caso, os possíveis sucessores não são únicos. Então, questionei a ideia de antecessor no contexto político e os estudantes responderam que era o presidente que estava no governo antes do atual presidente. Perguntei, ainda, quais eram os antecessores do atual presidente, e citaram os presidentes Dilma Rousseff, Luiz Inácio Lula da Silva, Fernando Henrique Cardoso.

Finalizada essa discussão, perguntei aos estudantes o que significa sucessor de um número e tive como resposta que o sucessor é um número maior que o outro; que a ideia de sucessor depende do conjunto que estamos trabalhando, pois, no conjunto dos números pares, o sucessor do 2 é o 4, portanto, para se falar em sucessor, é necessário ter uma referência. Um trio levantou uma dúvida: se, por exemplo, no conjunto dos números naturais, o número 6 pode ser considerado sucessor do número 2, e um aluno respondeu que sim, outro disse que o 6 é posterior, não sucessor. Tentei esclarecer que, se levarmos em conta um dos significados de sucessor, que é aquele que sucede, vem depois, poderíamos entender o 6 como sendo sucessor de 2, mas se pensarmos que o sucessor de um número tem que vir logo após este número, de fato podemos considerar o 6 como sendo posterior ao número 2 e não seu sucessor.

Questionei os estudantes se todo número tem sucessor e eles responderam que não, nem todo número tem sucessor, que isso depende do conjunto que estamos trabalhando e citaram alguns exemplos. Também perguntei se todo número é sucessor de algum número e novamente eles responderam que não, apresentando contraexemplos para a minha pergunta. Então, perguntei aos estudantes se é possível construir um conjunto de tal forma que todo número possua um único sucessor e pedi que eles me dessem exemplos. A ideia de sucessor considerada por nós foi aquela em que o sucessor de um número n é o número que vem logo após o n. Eles disseram que é possível, e citaram como exemplo o conjunto dos números naturais, números inteiros, números pares. Por fim, perguntei se era possível construir um conjunto de tal forma que, a partir de um número qualquer, todo número possua um único sucessor. Novamente eles responderam que sim, e discutimos a ideia de conjunto limitado, como, por exemplo, o conjunto dos números pares positivos $\{2,4,6,8,\ldots\}$ em que, a partir do número 2, todos os números possuem sucessor e esse conjunto é chamado de limitado inferiormente. O objetivo da discussão era promover uma reflexão acerca da ideia de sucessor e introduzir algumas noções que foram importantes para a construção do conjunto que fizemos na sequência.

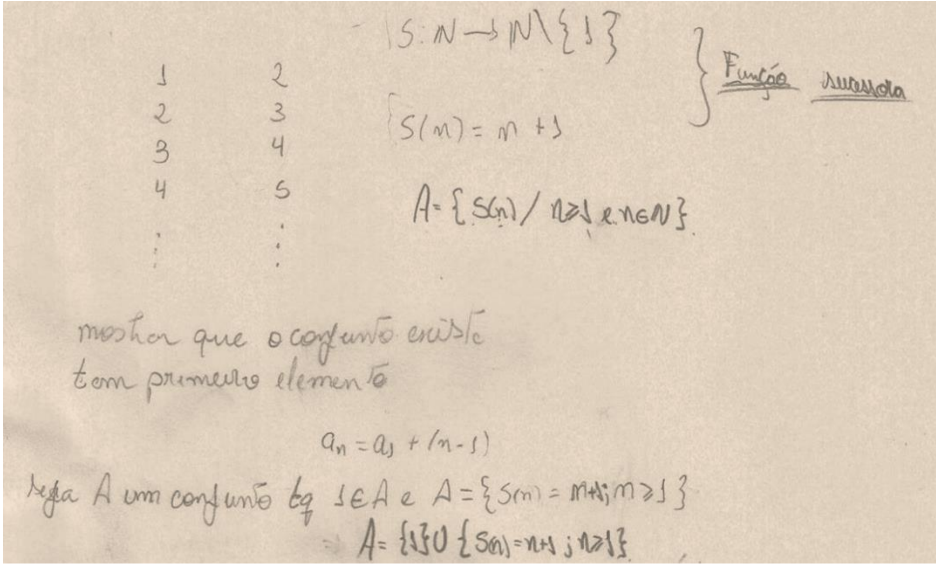
Após a discussão, apresentei a seguinte tarefa: **Defina uma relação S para a construção de um conjunto em que, a partir de um número**

desse conjunto, todo número possua um único sucessor. Assim que os estudantes começaram a se engajar na resolução da tarefa, fomos interrompidos pela presença de dois candidatos ao cargo de diretor e vice-diretor do Centro de Ciências Exatas. Depois da paralisação, retomamos a resolução da tarefa e pude ver que os estudantes estavam com dificuldade para compreender o que a tarefa estava pedindo. Eles entendiam que era para construir um conjunto, mas qual a participação da relação S na construção desse conjunto? Então, pedi que tentassem resolver a tarefa a partir do que eles entenderam do enunciado e fui passando nos grupos e vendo a produção de cada um deles. Em dado momento, o estudante Mat me questionou no pequeno grupo:

> **Mat:** Como você vai construir um conjunto e pegar um elemento desse conjunto sem que ele esteja construído?
>
> **Raul:** Mas é porque você já sabe que a gente vai construir o conjunto dos números naturais.
>
> **Mat:** Ninguém falou que é o conjunto dos números naturais, a gente vai ter que construir um conjunto, só que a gente não sabe qual é esse conjunto e a gente tem que pegar um elemento desse conjunto que a gente nem sabe que existe.

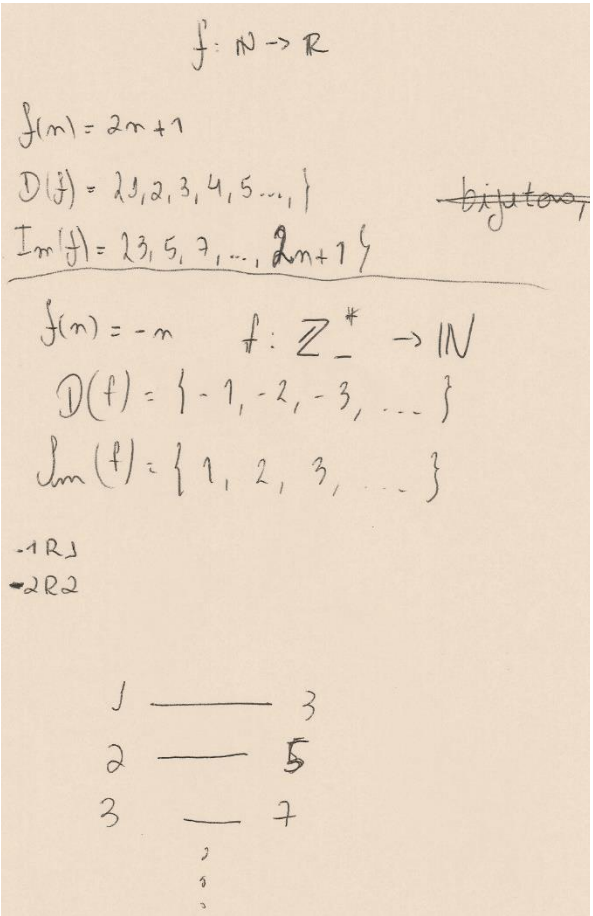
Foi então que fiz uma intervenção dizendo que fazia sentido a reflexão do aluno Mat e que, para construirmos esse conjunto, temos que garantir que esse conjunto exista, e o aluno Raul complementou: “Isso, que tenha algum elemento nele”. Questionei: “Além de esse conjunto existir, o que mais teríamos que garantir?”. O aluno Raul respondeu que esse conjunto tem que ter pelo menos um elemento. Concordei com Raul e pedi que continuassem a resolver a tarefa a partir da discussão que fizemos, isto é, garantindo que esse conjunto que está sendo construído exista e que ele tenha um primeiro elemento. Tivemos três diferentes resoluções para a primeira tarefa:

Figura 6 - A relação S e o conjunto construído pelos estudantes Jorge, José e Mat



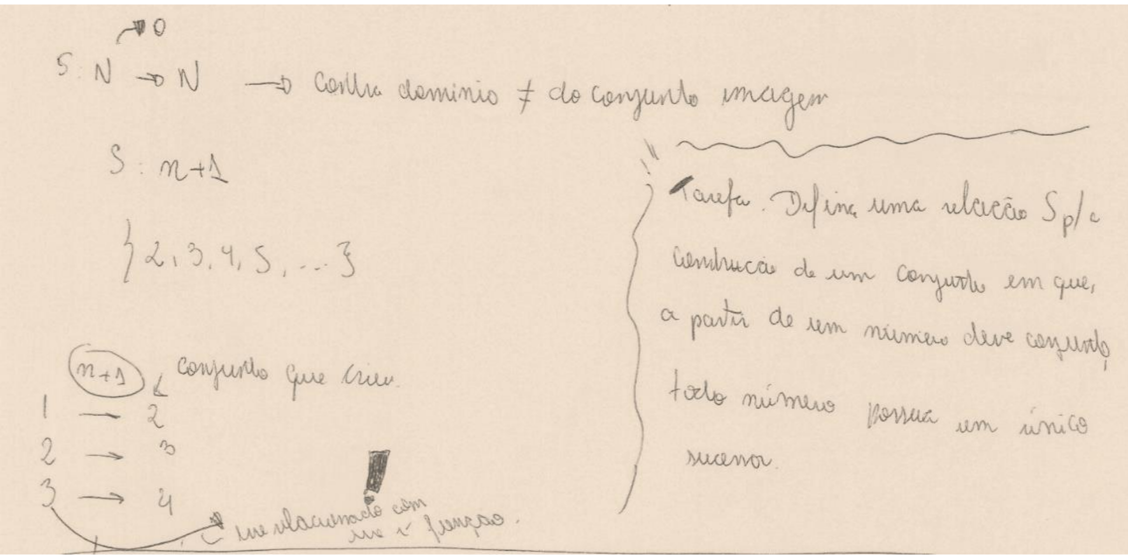
Fonte: a própria autora

Figura 5 - A relação f e o conjunto construído pelos estudantes Alexandre, Fernanda, Gustavo e Parede



Fonte: a própria autora

Figura 7 - A relação S e o conjunto construído pelos estudantes Anakin, Raul e Whisky



Fonte: a própria autora

A partir da produção escrita, podemos ver que a relação definida no grupo dos estudantes Jorge, José e Mat faz uma associação entre os elementos do conjunto $\mathbb{N}$ e do conjunto $\mathbb{N}/\{1\}$, em que o sucessor de um número n é encontrado adicionando-se uma unidade ao número n, ou seja:

$$S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}/\{1\}$$

$$S(n) = n + 1$$

A relação definida pelos estudantes Anakin, Raul e Whisky associa elementos do conjunto $\mathbb{N}$ a elementos do conjunto $\mathbb{N}$, por meio da mesma lei de associação apresentada pelo grupo dos estudantes Jorge, José e Mat, isto é:

$$S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$S(n) = n + 1$$

Os estudantes Alexandre, Fernanda, Gustavo e Parede decidiram apresentar no quadro a primeira relação que eles estabeleceram, a qual faz uma associação entre os elementos do conjunto $\mathbb{N}$ e do conjunto $\mathbb{R}$, em que um número n está relacionado com o seu sucessor $f(n) = 2n + 1$.

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Além disso, podemos perceber na produção escrita dos três grupos que eles utilizaram diagramas para representar a relação que estavam definindo e escreveram os conjuntos envolvidos na relação e a lei de formação que relacionava os dois conjuntos. Esse é um indício do princípio de níveis, pois os estudantes estavam utilizando recursos menos formais, como o diagrama, e passaram a adotar recursos mais formais, como o uso da linguagem simbólica, para representar a relação.

Definidas as relações, mostrei nos *slides* a próxima tarefa: **A relação que você construiu é uma função? Por quê?** Inicialmente, alguns estudantes não se lembravam qual era a definição de função, entretanto, como estavam trabalhando em grupo, rapidamente algum membro do grupo relembrou o que era uma função. Todos os estudantes afirmaram que as relações definidas eram funções, baseados na definição de função como uma relação que associa a cada elemento $x \in A$ (A é domínio da função) um único elemento $f(x) \in B$ (B é contradomínio da função), chamado o valor que a função assume em x.

Como era um consenso que as três relações definidas eram funções, apresentei o próximo *slide,* que continha a tarefa seguinte: **Se é uma função, investigue se ela é injetora, sobrejetora e bijetora.** Fui passando nos grupos e questionando os estudantes a respeito da tarefa**.** Quando questionei o grupo dos estudantes Anakin, Raul e Whisky, Raul me disse que a função era bijetora e justificou dizendo que cada elemento do contradomínio está relacionado com apenas um elemento do domínio .

Eu perguntei se isso era algo que caracterizava a relação como uma função ou se era característica de injetividade e ele respondeu: “Injetivi..., injetividade. Falar que ela é injetora quer dizer que..., quando eu tenho...” E tentou continuar: “Quer dizer que quando eu tenho dois elementos iguais no contradomínio, só vai poder ser se, tipo, os dois elementos forem iguais...” E ele tentou explicar com um exemplo: “Se eu pegar o 4, só o 3 que vai me levar ao 4”.

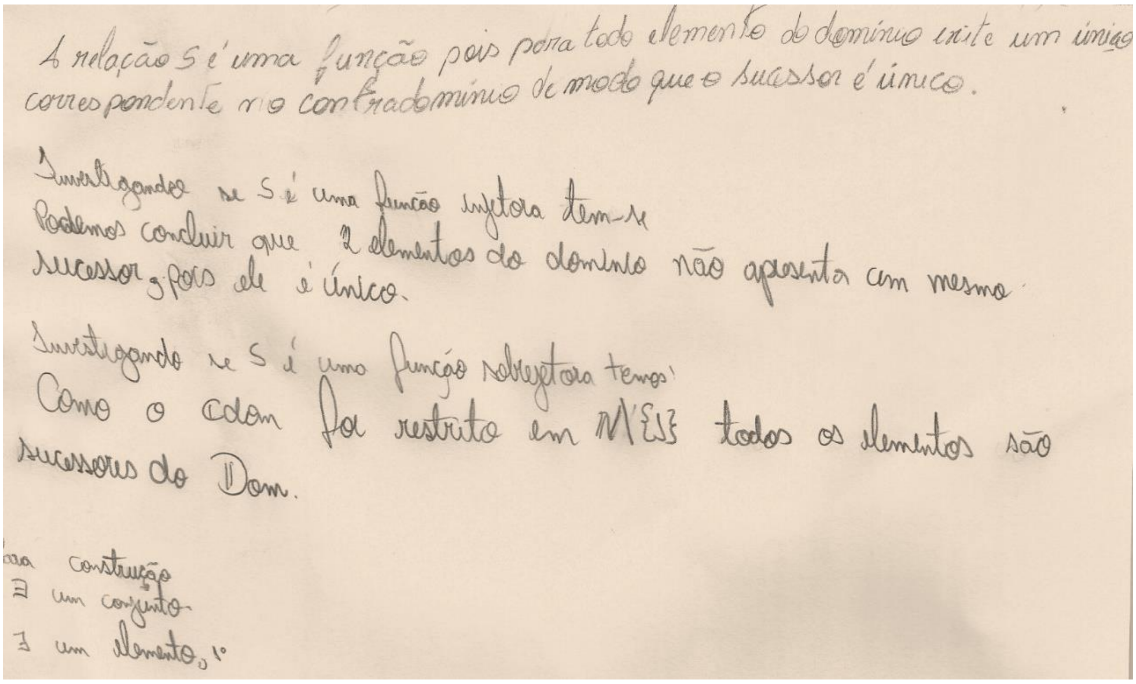
Nesse momento, eu intervim e perguntei: “Não tem outro elemento no domínio que está relacionado com o 3?” Ele respondeu: “Não”. e eu dei outro exemplo: “Vai acontecer do 2 estar relacionado com 3 e o 3 estar relacionado com o 3?” Ele respondeu: “Não”. Eu questionei: “Por quê?” Ele me disse: “A regra não permite isso”.

Para tentar ajudá-lo com a definição de injetividade, questionei: “Se eu pegar a imagem de dois elementos diferentes e disser que essas imagens são iguais, o que isso tem que significar?” E ele respondeu que os elementos do domínio eram iguais. Então, questionei novamente se a função era injetora e ele me respondeu que sim. Em seguida, perguntei para o grupo do Raul se a função era bijetora e eles foram pensar a respeito.

As intervenções orais fazem parte do papel do professor durante o processo de reivenção guiada. Os alunos não estavam “reinventando” uma definição matemática que é nova para eles, pois a injetividade de funções é abordada nos primeiros anos do curso de matemática e inclusive no Ensino Médio. Entretanto, as intervenções auxiliaram o estudante a relembrar e refinar essa definição.

O grupo dos estudantes Jorge, José e Mat e o dos estudantes Anakin, Raul e Whisky registraram suas respostas na folha, como podemos ver a seguir:

Figura 8 - Injetividade e sobrejetividade da função S definida pelos estudantes Jorge, José e Mat



A relação S é uma função pois para todo elemento do domínio existe um único correspondente no contradomínio de modo que o sucessor é único.

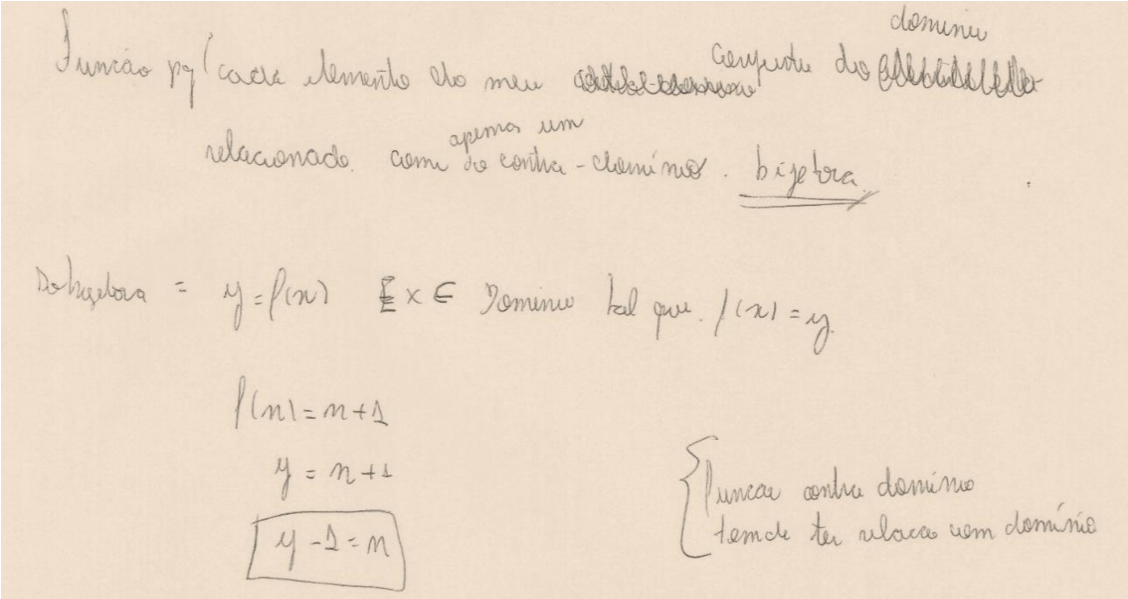
Investigando se S é uma função injetora tem-se
Podemos concluir que 2 elementos do domínio não apresenta um mesmo sucessor, pois ele é único.

Investigando se S é uma função sobrejetora temos:
Como o cdom foi restrito em $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ todos os elementos são sucessores do Dom.

ara construção
∃ um conjunto
∃ um elemento 1

Fonte: a própria autora

Figura 9 - Injetividade e sobrejetividade da função S definida pelos estudantes Anakin, Raul e Whisky



Fonte: a própria autora

A partir da produção escrita, podemos ver que o grupo dos estudantes Anakin, Raul e Whisky tentou justificar que a função era sobrejetora usando o fato de que uma função é sobrejetora se para todo $m \in B$ $(contradomínio)$ existir pelo menos um $n \in A$ $(domínio)$ tal que $S(n) = m$. A partir dela, não é possível inferir se os estudantes sabem que **para todo** y pertencente ao contradomínio existirá um $n = y - 1$ tal que $f(n) = y$. A letra f denota a relação que foi definida por eles e que anteriormente era denotada por S, e a letra x denota um elemento do domínio que antes era denotado pela letra n.

Pedi que os três grupos colocassem no quadro a relação que eles definiram e apresentassem o conjunto construído. O estudante Mat iniciou a explicação da resolução do seu grupo dizendo que a relação associava elementos do conjunto $\mathbb{N}$ com os elementos do conjunto $\mathbb{N}/\{1\}$ por meio da regra $s(n) = n + 1$, e eu perguntei por que eles tiraram o elemento 1 do contradomínio. O estudante José, que era integrante do grupo de Mat, disse que o 1 não seria o sucessor do 1, então eles decidiram tirá-lo do contradomínio. Por fim, perguntei qual o conjunto que eles haviam construído e me disseram que foi o seguinte conjunto:

$$A = \{s(n) = n + 1; n \geq 1\}$$

Perguntei quais eram os elementos do conjunto A e Mat começou a listar dizendo: “o $1, \dots$" . Ao mesmo tempo, Jorge, seu parceiro de grupo, disse: “ o $2, \dots$, não, o 1 não está.” Eu intervim perguntando se o 1 estava no conjunto A. O estudante Mat disse que o 1 precisava estar no A e o estudante Jorge disse que ele não estava, argumentando: “Pensa na ..., se você for pegar a regra, pela regra ele não está, ele começa pelo 2”, e o estudante Mat concordou com os integrantes do seu grupo.

Logo em seguida, eu perguntei se um 1 estava ou não no conjunto A, e o estudante Mat perguntou: “Mas como eu vou conseguir o sucessor 2, se o 1 não está no A?” Foi então que o estudante Raul, integrante de outro grupo, interveio perguntando quem era o conjunto A, se ele era o domínio da função. E eu, precipitadamente, respondi que não era nem o domínio nem o contradomínio, era o conjunto construído a partir daquela relação. Começamos a discutir porque os integrantes do grupo do aluno Mat acrescentaram o elemento 1 ao conjunto A, pois havíamos definido no grande grupo que o conjunto, que estava sendo construído, existia e que possuía um primeiro elemento que foi denotado por 1. Ao final, o grupo que iniciou a apresentação concluiu que o conjunto A construído por eles era o seguinte:

$$A = \{1\} \cup \{s(n) = n + 1; n \geq 1\}$$

Quando pensamos no princípio da interatividade para a RME, geralmente apresentamos o trabalho em grupo como um meio de promovê-la. Entretanto, pudemos ver indícios de interatividade durante a apresentação da resolução da tarefa no quadro, em que eu interagi com os estudantes, os integrantes do mesmo grupo do apresentador interagiram com o colega que estava apresentando e integrantes dos outros grupos também intervieram na apresentação. O princípio não fica evidente apenas pelo fato de os estudantes interagirem entre si, mas também na intenção de ajudar os estudantes na compreensão da tarefa e de suas possíveis resoluções.

Durante a apresentação do grupo formado pelos estudantes Jorge, José e Mat, o estudante Raul perguntou se o conjunto A, construído pelo grupo, era o domínio da função, e eu respondi, ao meu ver, precipitadamente, que não era nem o domínio nem o contradomínio, era o conjunto construído a partir daquela relação. Penso que foi uma resposta precipitada, pois eu poderia perguntar para os estudantes o que eles achavam a respeito disso e, talvez, isso também me fizesse perceber que, de fato, o conjunto $\mathbb{N}$ (domínio da relação) tem os mesmos elementos que o conjunto A.

Definido qual era o conjunto A, perguntei se a relação definida por aquele grupo era uma função, e o estudante Mat respondeu que sim, que eles concluíram que era uma função, pois, para todo elemento do domínio, existe um único correspondente no contradomínio. Imediatamente perguntei se todos os elementos do domínio possuíam um correspondente no contradomínio, e Mat respondeu que sim. Para realizar um fechamento, concluímos que o conjunto A poderia ser escrito da seguinte forma:

$$A = \{1,2,3,\dots\}$$

Pedi que os estudantes Anakin, Raul e Whisky apresentassem a resolução deles no quadro. O estudante Raul fez uma intervenção da carteira: **"**Assim, a gente tentou simplificar ao máximo diante da pergunta, né? A gente pensou numa sequência que *a priori* seria $\{2,3,4,\dots\}$ que conteria todos os sucessores a partir de um único elemento. Aí, tivemos a ideia de associar junto ao nosso conjunto o 0, pra gente formar o conjunto dos números naturais"

Eu o questionei: "Tá, então o conjunto de vocês vai começar no zero e ele vai ser associado com?"

Raul: Com o 1, ele tá relacionado com o 1.

Professora: E o 1 vai estar relacionado com o 2.

Raul: E assim sucessivamente.

Então, tentei sistematizar qual seria o conjunto construído pelo grupo dos estudantes Anakin, Raul e Whisky. O estudante Raul disse que seria igual ao conjunto A apresentado pelo grupo anterior e eu disse: "Vai iniciar pelo 0, não é?" O estudante Whisky concordou comigo e logo em seguida Raul também estava de acordo e o conjunto construído foi o seguinte:

$$G = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Concluí que a regra escolhida foi a mesma do grupo que iniciou as apresentações: o domínio era diferente, pois o conjunto era iniciado pelo 0 e o contradomínio também era diferente, pois possuía o elemento 1.

Para finalizar as apresentações, pedi que o grupo dos estudantes Alexandre, Fernanda, Gustavo e Parede apresentasse. Então a estudante Fernanda começou a explicar como o grupo resolveu a tarefa: "Eu pensei em uma sequência, que a gente pode definir como uma função. Na verdade, se você for ver, é uma P.A., isso aí. Então, eu pensei nela... vai de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, eu vou associar o 1 com o 3, o 2 com o 5, 3 com 7, 4 com 9, 5 com 11 e assim por diante".

Tentei, a partir da relação apresentada, sistematizar qual foi o conjunto construído pelo grupo, usando as mesmas ideias que usamos nos grupos anteriores e escrevi no quadro o seguinte conjunto:

$$H = \{1,3,2,5,3,4, \dots\}$$

Questionei os estudantes se a relação apresentada pelo grupo ($f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $f(n) = 2n + 1$) era de fato uma relação e eles responderam que sim, e eu concordei dizendo que eles apresentaram um domínio, um contradomínio e uma regra que associava os elementos do domínio com os elementos do contradomínio. Perguntei se era uma função e, novamente, responderam que sim e continuei questionando: "Todos os elementos do domínio possuem um correspondente?" Fernanda disse que sim e eu perguntei se esses correspondentes eram únicos e ela disse que sim.

Em seguida, perguntei a todos os estudantes se as três relações definidas e os três conjuntos construídos respondiam à pergunta. O aluno Mat disse que sim. E o questionamento a respeito das relações definidas continuou.

Professora: Todas as relações são funções?

Estudantes: Sim.

Professora: As três são injetoras?

Estudantes: Sim.

Professora: Sobrejetoras?

Um estudante: Não.

Professora: A primeira é sobrejetora?

Mat: Sim.

Professora: E a segunda? Vai sobrar algum elemento no contradomínio? Terá algum elemento que não está relacionado com alguém do domínio? Houve alguns "nãos" um pouco tímidos e decidi perguntar elemento por elemento: "O 1 vai estar relacionado com alguém do domínio?

Estudantes: Vai.

Continuei questionando sobre o 2, o 3 até concluirmos que a segunda seria sobrejetora.

Por último, perguntei se a última função era sobrejetora e os estudantes pareceram um pouco confusos. Pedi que me dissessem qual era o contradomínio e eles disseram que era o conjunto dos números reais. Concluímos, então, que ela não seria sobrejetora.

A partir desse momento, conduzi a discussão para a construção do conjunto dos números naturais e perguntei qual das regras eu utilizaria. Discutimos que poderíamos usar a regra dos grupos 1 e 2, que era $s(n) = n + 1$, e que a regra do grupo 3, $s(n) = 2n + 1$, poderia ser utilizada para construir o conjunto dos números ímpares.

Fui relembrando o que precisávamos para definir as relações, que era garantir que existia um conjunto e um primeiro elemento. Em seguida, conversei com os estudantes sobre a disciplina de Análise, a respeito da convenção do início do conjunto dos números naturais, e discutimos que usualmente[11] iniciamos a construção a partir do número 1, mas que há outras construções iniciando pelo 0 e também livros didáticos da Educação Básica que iniciam do 0 ou do 1. Esse tipo de convenção faz parte do que a RME considera como conhecimento matemático, pois é algo que foi acordado e validado por um grupo de indivíduos.

Nos três grupos, definimos relações que eram funções e que eram injetoras, porém nem todas eram sobrejetoras, pois isso dependia do contradomínio assumido por cada grupo. Para introduzir os Axiomas de Peano, estabelecemos o seguinte diálogo:

Professora: Então, para construir o conjunto dos números naturais, o que a gente precisa? Garantir que existe esse conjunto, garantir que existe esse primeiro elemento. E esse elemento vai ser sucessor de algum elemento?

Estudantes: Não.

Professora: Então é importante falar que ele não é sucessor de nenhum outro número.

---

[11] Uma das explicações dadas por Lima (1982) é que os números naturais, na disciplina de Análise Real, são utilizados para denotar os índices dos termos de uma sequência e se considerássemos $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \ldots\}$ o termo x_n não seria o n-ésimo termo da sequência e sim seria o (n+1)-ésimo termo. Para evitar esta confusão, é conveniente que se tome o conjunto dos números naturais como sendo $\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots\}$.

Após retomar essas informações fui apresentando, em uma linguagem sistematizada, os Axiomas de Peano[12], que fomos elaborando ao longo da tarefa.

1) Existe um conjunto $\mathbb{N}$ denominado conjunto dos Números Naturais, em que seus elementos são chamados de Números Naturais.
2) Existe $1 \in \mathbb{N}$.

Reforcei que, nesse segundo axioma, escolhemos o 1, pois estávamos no contexto da disciplina de Análise Real, mas que poderia ser o número 0 ou qualquer outro número, e que não estaríamos construindo o conjunto que hoje conhecemos como o conjunto dos números naturais. Além disso, relembrei que o 1 não é sucessor de nenhum outro número natural.

3) Existe uma função, denominada Função Sucessor, tal que $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Expliquei que geralmente a função é definida dessa forma, mas que não precisa ser assim necessariamente. Ressaltei que as nossas funções foram definidas de outra forma e estavam corretas, que o importante era existir a relação que dava a ideia do sucessor. Após o período de utilização da TEA, pensamos que a Função Sucessor devia ser explicitada nos axiomas da forma que os estudantes Jorge, José e Mat fizeram, $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}/\{1\}$. A Função Sucessor associa um número natural ao seu sucessor e como o 1 não é sucessor de nenhum número natural, pensamos que ele não deve estar no contradomínio para explicitarmos o fato de que o 1 não é sucessor de um número natural.

4) S é injetora.

Por fim, concluí que conseguimos garantir que essa função S seja injetora, mas não garantimos que vai ser sobrejetora e, portanto, bijetora, pois isso depende da construção feita. Como faltavam apenas 5 minutos para finalizar a aula, resolvi discutir as duas últimas tarefas no grande grupo e apresentei-as utilizando o projetor de *slides*.

A penúltima tarefa era a seguinte: **É possível inferir se esse conjunto é finito ou infinito? Por quê?** Como os estudantes disseram que o

---

[12] Os axiomas de Peano presentes na TEA são equivalentes aos apresentados na fundamentação teórica deste trabalho. Escolhemos para a elaboração da TEA uma versão dos axiomas que fosse mais detalhada, visto que tínhamos a proposta de elaborar tarefas para cada um deles.

conjunto seria infinito, pedi uma justificativa. O estudante Whisky disse que o conjunto teria que ser infinito para garantir que todos os elementos tivessem sucessor. Então perguntei para a turma se o conjunto tinha que ser infinito para garantir que todos os elementos tivessem sucessor ou se o fato de todos os elementos terem um sucessor é que garantia que esse conjunto era infinito.

O estudante Anakin disse que concordava com a segunda afirmação, pois a tarefa[13] solicitava a construção de um conjunto em que todos os seus elementos possuíssem sucessor e pelo fato de todos os elementos do conjunto possuírem um sucessor, podíamos inferir que o conjunto era infinito. Perguntei se os estudantes concordavam e, novamente, ficaram um pouco tímidos, por isso eu disse o seguinte: "Eu não consigo fazer uma bijeção do conjunto dos números naturais com o conjunto I_m ou $\mathbb{N}_m$[14]? Não sei qual notação o Liboni utilizou com vocês, mas, para um conjunto ser finito, precisa existir uma bijeção de $\mathbb{N}$ no conjunto $\mathbb{N}_m$, que é finito. Eu consigo construir uma bijeção?" Depois de alguns instantes de reflexão os estudantes disseram: "Não."

Concluí, então, que podíamos inferir que o conjunto $\mathbb{N}$ que estávamos construindo era infinito. Como a aula estava se aproximando do fim, apresentei a definição[15] do que é um conjunto finito não vazio. Entretanto, se o professor estiver em outras condições, é interessante perguntar aos estudantes a respeito de conjuntos fintos, em vez de apenas apresentar a definição. É preferível fazer perguntas que propiciem a reflexão dos estudantes, já que os estudantes é que são os autores da construção do seu próprio conhecimento.

Para finalizar, apresentei a última tarefa: **Como garantir que um subconjunto de $\mathbb{N}$ seja o próprio $\mathbb{N}$?,** e perguntei: "Como eu sei que esses conjuntos que nós construímos são o próprio $\mathbb{N}$? Eu sei que eles são subconjuntos de $\mathbb{N}$**"** - e apontei no quadro o conjunto $G = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – "mas como eu garanto que eles são o próprio $\mathbb{N}$?"

Um dos estudantes respondeu que seria por meio dos axiomas que a gente havia elaborado, e eu questionei o que garantiria que esses conjuntos não iriam ser limitados superiormente, e continuei perguntando a

---

[13] Defina uma relação S para a construção de um conjunto em que, a partir de um número desse conjunto, todo número possua um único sucessor.
[14] O conjunto denotado por I_m ou $\mathbb{N}_m$ é definido da seguinte forma: $\mathbb{N}_m = \{p \in \mathbb{N};\ p \leq m\}$.
[15] Segundo Lima (2016), um conjunto X não vazio diz-se finito quando existe uma bijeção $f: \mathbb{N}_m \to X$, tal que $m \in \mathbb{N}$.

respeito de um conjunto $A \subset \mathbb{N}$, no caso em que A é o próprio $\mathbb{N}$: “O 1 precisa estar lá e, para todo elemento do conjunto, o que precisa acontecer?” Anakin respondeu: “Ele precisa ter um sucessor”.

E eu prossegui: “O sucessor desse número precisa estar onde?” O estudante Gustavo respondeu: “Em $\mathbb{N}$ também”. A partir da resposta de Gustavo, perguntei para os estudantes se os sucessores precisavam estar em $\mathbb{N}$ ou no conjunto A, e o próprio Gustavo respondeu que precisavam estar no A.

Eu continuei: “Eu quero mostrar que $A \subset \mathbb{N}$ é o próprio $\mathbb{N}$, então o $1 \in A$ e $\forall\, n \in A, s(n) \in A$, para garantirmos que todos os n e seus sucessores estarão em A. E esse é o quinto Axioma de Peano” – e mostrei o axioma no *slide:* Seja $A \subset \mathbb{N}$**.** Se $1 \in A$ e se $s(n) \in A$; $\forall n \in A$, então $A = \mathbb{N}$.

Perguntei se alguém havia ficado com alguma dúvida referente àquela aula e concluí dizendo que aqueles axiomas que havíamos elaborado durante a aula são conhecidos como os Axiomas de Peano. Ao final da aula, falamos um pouco da história dos números naturais, da existência da noção de número desde a pré-história e das necessidades do homem que fizeram a noção de número emergir. Falamos também da época em que os Axiomas de Peano foram elaborados e propus que os estudantes pensassem na necessidade de elaboração desses axiomas durante o século XIX. Nesse dia, finalizamos a aula por volta das 21h.

4.1.2 Segundo Dia de Desenvolvimento

O segundo dia do desenvolvimento da TEA aconteceu em uma quarta-feira e a aula teve início por volta das 21h15min. Os grupos formados neste dia eram os seguintes:

1. Jorge, José e Vinícius.
2. Mat, Alexandre e Vygotsky.
3. Gustavo, Fernanda e Parede.
4. Raul, Whisky e Anakin.

Iniciei retomando a aula do dia anterior, em que havíamos elaborado os axiomas durante a construção do conjunto dos Números Naturais.

Professora: O primeiro axioma, então, existe um conjunto...

Gustavo: Não vazio.

Professora: Não vazio, chamado Conjunto dos Números Naturais. Quem estava nesse conjunto?

Um dos estudantes respondeu que o número 1 pertencia ao conjunto e eu segui questionando quais eram as nossas outras constatações a respeito desse conjunto:

Gustavo: O 1 não é sucessor de ninguém e que... o número... não, é...

Então os colegas o ajudaram dizendo que todos os outros números possuíam sucessor. O estudante Vygotsky não estava presente na primeira aula, entretanto havia feito uma disciplina que abordara de forma axiomática a construção dos Números Naturais e quis contribuir na discussão comentando que a soma de dois números naturais teria que ser um número natural. Como não havíamos discutido isso ainda, e esse seria o tema do segundo dia de encontro, pedi calma para o aluno Vygotsky e retomei a discussão a respeito da primeira aula.

Esse tipo de intervenção dos estudantes pode ocorrer e não tem como ser prevista numa trajetória de ensino e aprendizagem. Cabe ao professor entender o momento da aula e verificar se aquela intervenção é oportuna para a discussão naquele momento. Como iríamos discutir a adição de números naturais naquela mesma aula, retomamos a revisão dos axiomas e deixamos a outra discussão para um momento oportuno.

Retomando os axiomas, o estudante Mat relembrou que a Função Sucessor é injetora e, para finalizarmos, perguntei para a turma qual era o quinto axioma e Parede disse: “O número pertence ao conjunto, então o sucessor dele também”.

Professora: Vamos com calma. Primeiro um conjunto que seja subconjunto de $\mathbb{N}$.

Mat: Ahhh, todo subconjunto dos naturais é o próprio conjunto dos naturais, não é isso?

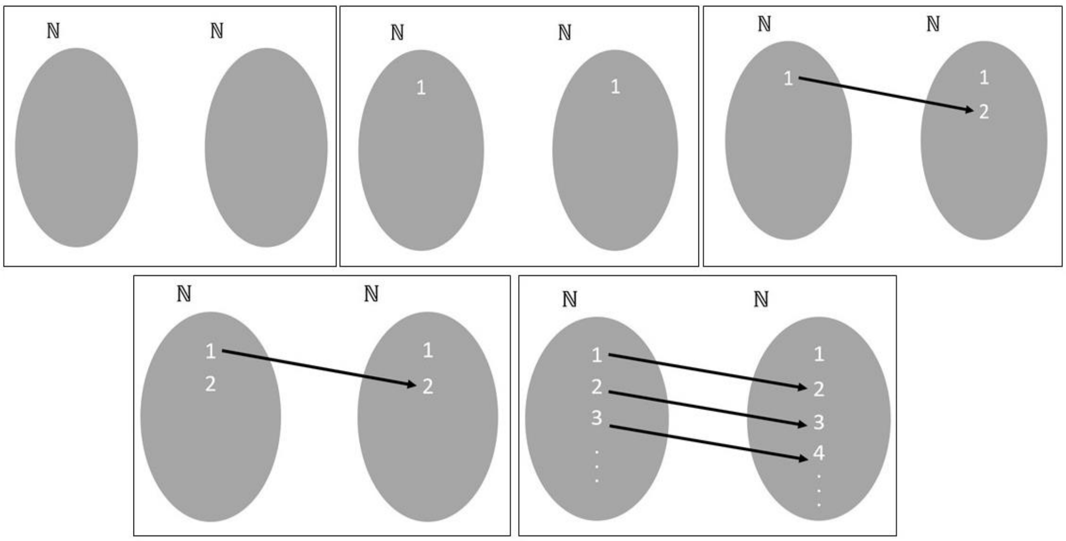
Professora: Quando que ele é o próprio $\mathbb{N}$?

Então eles disseram que é quando o 1 está lá e a Função Sucessor está definida. A partir dessa resposta, tentei reformular a frase dos estudantes dizendo: “Ou seja, quando o 1 está lá e quando eu pego um $n \in A$ e $s(n)$ também pertence a A”. Ao invés disso, eu poderia ter perguntado o que eles queriam dizer com “a Função Sucessor está definida” para explorarmos o trecho do axioma que diz que, para todo n pertencente a A, $s(n)$ também pertence a A, em que $A \subset \mathbb{N}$. Além disso, quando eles afirmaram que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ é o próprio $\mathbb{N}$, eu poderia ter perguntado: “O conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é um subconjunto de $\mathbb{N}$?” e discutido com eles que, pela afirmação que o Mat fez, o conjunto A deveria ser igual ao conjunto $\mathbb{N}$, mas não era.

Depois de retomar os cinco axiomas, falei que algo havia me incomodado na aula anterior. Eu não sabia ao certo por que a relação definida pelo grupo de Alexandre, Fernanda e Parede ($f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = 2n + 1$) era de fato uma relação, era uma função, mas não dava uma ideia de que estávamos construindo um conjunto. Então elaborei uma apresentação no Power Point, fui retomando os axiomas e o que os estudantes haviam feito na aula anterior.

Mostrei que, pelo primeiro axioma, nós garantíamos a existência de um conjunto que denominamos $\mathbb{N}$ e que esse conjunto seria o domínio e o contradomínio da nossa relação. Depois disso, pelo segundo axioma, garantíamos que o número 1 pertencia a esse conjunto $\mathbb{N}$ e que a Função Sucessor relacionava um número $n \in \mathbb{N}$ com seu sucessor, em particular, relacionava o 1 com o número 2. Sabendo que o $2 \in \mathbb{N}$, em que $\mathbb{N}$ era o contradomínio da relação, 2 também pertenceria ao domínio, e assim íamos construindo o conjunto dos números naturais:

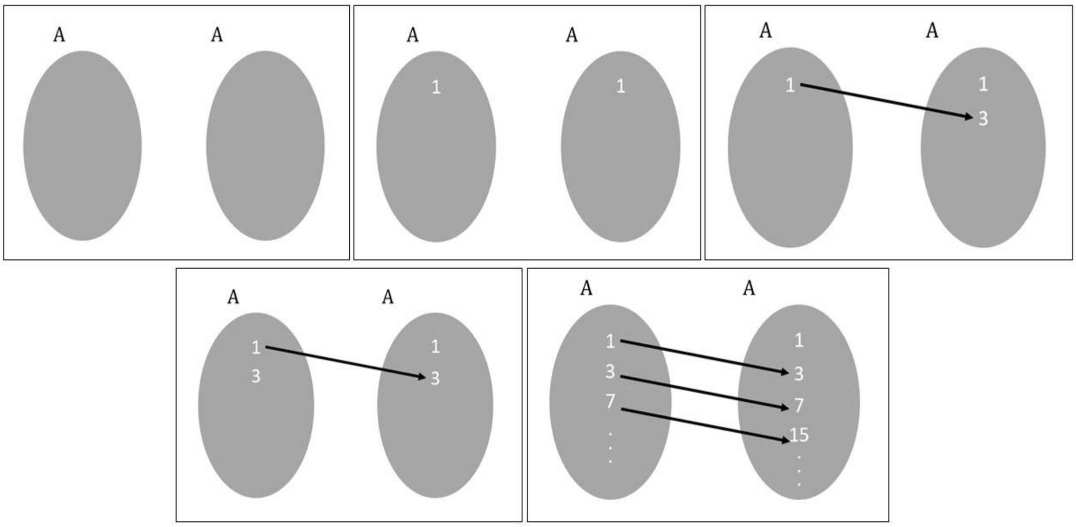
Figura 10 - Construção do conjunto dos números naturais



Fonte: a própria autora

Fiz o mesmo processo para a relação definida pelo grupo do Alexandre, Gustavo, Fernanda e Parede e mostrei que, pelos axiomas que havíamos estabelecido e pela regra que eles criaram, o domínio e o contradomínio da relação deveriam ser iguais, ao invés de dois conjuntos diferentes ($\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$) para se ter uma ideia de construção de um conjunto. Entretanto, ao invés de construirmos o conjunto dos números naturais, construiríamos um subconjunto do conjunto dos números ímpares:

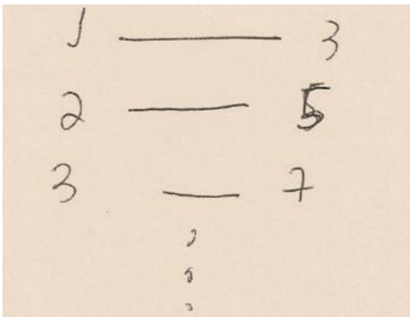
Figura 11 - Construção de um subconjunto dos números ímpares



Fonte: a própria autora

Ressaltei que a relação definida pelo grupo de Alexandre, Gustavo, Fernanda e Parede respondia em grande parte a tarefa que foi dada a eles, só não dava uma ideia de que estávamos construindo um conjunto, pois, por exemplo, o número 2, que pertencia ao domínio, não era sucessor de nenhum outro número e, pela tarefa, todos os elementos do conjunto construído deveriam ser sucessor de outro número, exceto o número 1.

Figura 12 - Relação definida pelo grupo dos estudantes Alexandre, Fernanda, Gustavo e Parede



Fonte: a própria autora

Após retomar o que os alunos haviam feito na aula anterior, entreguei a primeira tarefa do dia para os trios e pedi que o Alexandre lesse o enunciado da tarefa. Percebi que Alexandre não era muito participativo nas aulas de Análise, por isso eu tentava fazê-lo participar mais ativamente da aula pedindo que ele lesse a tarefa, fosse ao quadro apresentar a resolução do grupo dele, entre outras coisas. Após o meu pedido, ele ficou um pouco apreensivo, mas iniciou a leitura do seguinte enunciado:

Figura 13 - Tarefa da adição de números naturais

Analise as regras a seguir e verifique se elas definem a adição de números naturais.

i. $$\begin{cases} n+1 = S(n) \\ S(n)+S(m) = S\big(S(n+m)\big) \end{cases}$$

ii. $$\begin{cases} n+1 = S(n) \\ n+S(m) = S(n+m) \end{cases}$$

iii. $$\begin{cases} 1+n = S(n) \\ S(m)+n = S(m+n) \end{cases}$$

Fonte: a própria autora

Perguntei no grande grupo se eles tinham uma ideia de como resolver a tarefa e Mat disse: "É pra gente testar, não é?". Dei 10 minutos para que eles resolvessem a tarefa e, enquanto isso, fui passando nos grupos para ver o que eles estavam fazendo. Logo que os grupos iniciaram as resoluções, Raul me chamou e perguntou: "Da onde surgiu esse n aqui?"

Professora: m e n são números naturais.

Raul: Você definiu o conjunto $S(n)$ é esse aqui [$n+1$] e o conjunto $S(m)$?

Professora: Mas isso [$S(m)$] é um conjunto?

Raul: Não, tudo bem.

Professora: O $n+1$ é o sucessor de n, não é?

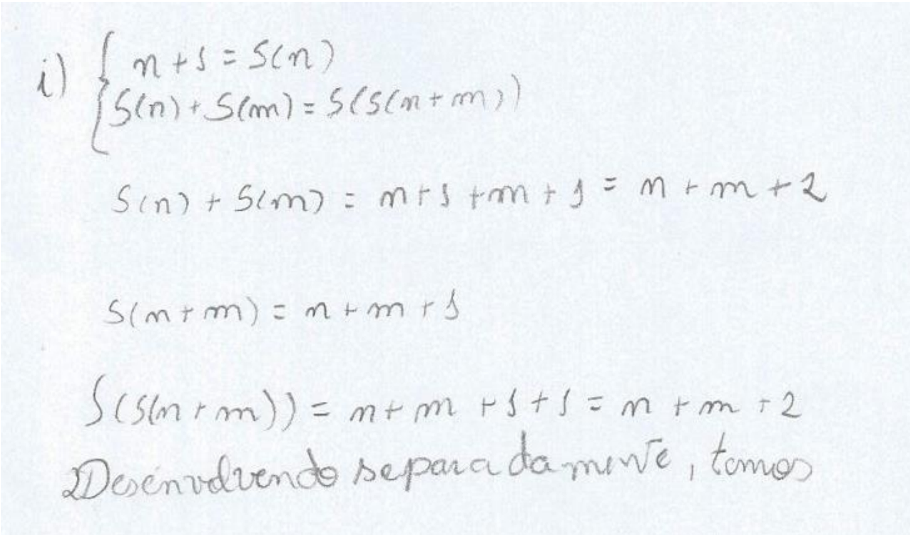
Raul: Sim

Professora: Então o $S(m)$ é o sucessor de um número natural m.

Raul: Ahh, tá.

Fui passando pelos grupos e observei que todos eles, inicialmente, pegavam uma das duas igualdades de cada regra, desenvolviam de um lado e de outro e faziam uma comparação, como mostra a imagem a seguir:

Figura 14 - Resolução dos estudantes Jorge, José e Vinícius



Fonte: a própria autora

Na resolução desse grupo, é possível ver que os estudantes pegaram a segunda igualdade, desenvolveram o lado esquerdo $S(n) + S(m)$ e o lado direito $S(S(n + m))$, com o auxílio da primeira igualdade, e constataram que ambos os lados eram iguais a $n + m + 2$. A partir disso, concluíram que a regra definia a adição de dois números naturais. Apenas o enunciado da tarefa não foi suficiente para que os alunos mostrassem se eles sabiam quais regras definiam a adição de dois números naturais. Isso, porém, não caracteriza a falta de acessibilidade da tarefa, já que ela permitiu que o estudante, no seu nível, revelasse alguma forma pela qual abordaria o problema (FERREIRA, 2015). É nesse momento que o papel do professor, como um guia e orientador, torna-se ainda mais importante, fazendo com que, por meio de intervenções, os estudantes compreendam os objetivos pretendidos com aquela tarefa.

Depois de algum tempo pensando e conversando entre si, Raul e seus colegas questionaram o que era ‘definir a adição’ e eu pedi que pensassem em dois números naturais e que tentassem pensar na adição desses dois números usando uma das três regras apresentadas na tarefa, e eles foram tentar fazer. Após a minha intervenção, uma coisa interessante aconteceu: o grupo dos estudantes Anakin, Raul e Whisky tiveram ideia similar ao grupo dos estudantes Jorge, José e Vinícius, pois verificavam a validade das igualdades por meio da substituição de valores númericos, ao invés do desenvolvimento de ambos os lados. Eles escolheram $n = 1$ e $m = 2$ e tomaram a segunda igualdade da regra ii, $n + S(m) = S(n + m)$, e fizeram a substituição de valores. Pelo lado direito, obtiveram:

$$1 + S(2) = 1 + 3 = 4$$

Pelo lado esquerdo:

$$S(1 + 2) = S(3) = 4$$

Assim, concluíram que a regra ii definia a adição de dois números naturais. Durante a elaboração da trajetória, eu não havia nem imaginado que os estudantes pudessem fazer esse tipo de resolução, muito menos pensado em intervenções a respeito delas. A partir das resoluções apresentadas, ressalto flexibilidade da reformulação TEA durante e após o seu desenvolvimento. É durante o desenvolvimento da trajetória e por meio do conhecimento da turma, conhecimento do conteúdo matemático e da experiência como docente que a trajetória, ao ser reformulada, vai ficando cada vez mais enriquecida com as modificações feitas pelo professor.

Após algum tempo resolvendo, todos os grupos concluíram que as três regras definiam a adição de números naturais, entretando, pelas resoluções apresentadas, podemos ver que eles concluíram que as igualdades das três regras eram verdadeiras. Portanto, como os estudantes estavam indo em uma outra direção, achei necessário realizar uma intervenção no grande grupo e pedi a atenção de todos os estudantes. Falei para a turma que todos os grupos estavam tentando verificar a veracidade da igualdade, ou por meio do desenvolvimento algébrico, ou substituindo valores numéricos.

Relembrei aos estudantes que estávamos construindo o conjunto dos números naturais, logo a adição que é por nós conhecida “2+3=5” ainda não poderia ser utilizada. Nós podíamos usar uma das três regras. Solicitei que a turma escolhesse uma das regras e Raul pediu para escolhermos a regra i.

$$\text{i.} \quad \begin{cases} n + 1 = S(n) \\ S(n) + S(m) = S\big(S(n + m)\big) \end{cases}$$

Então fomos fazendo juntos a adição de $2+3$ por meio da regra i. Perguntei aos estudantes se, no caso $2+3$, nós poderíamos usar a primeira igualdade, ou seja, se tínhamos algo do tipo $n+1$. Alguns falaram sim, outros falaram não, mas logo perceberam que, para usar a primeira igualdade, precisaríamos ter o 1 em vez do 3. Perguntei da possibilidade de usar a segunda igualdade e Vinícius disse que era possível, pois o 2 e o 3 são sucessores de números naturais, e escrevi no quadro com o auxílio dos estudantes:

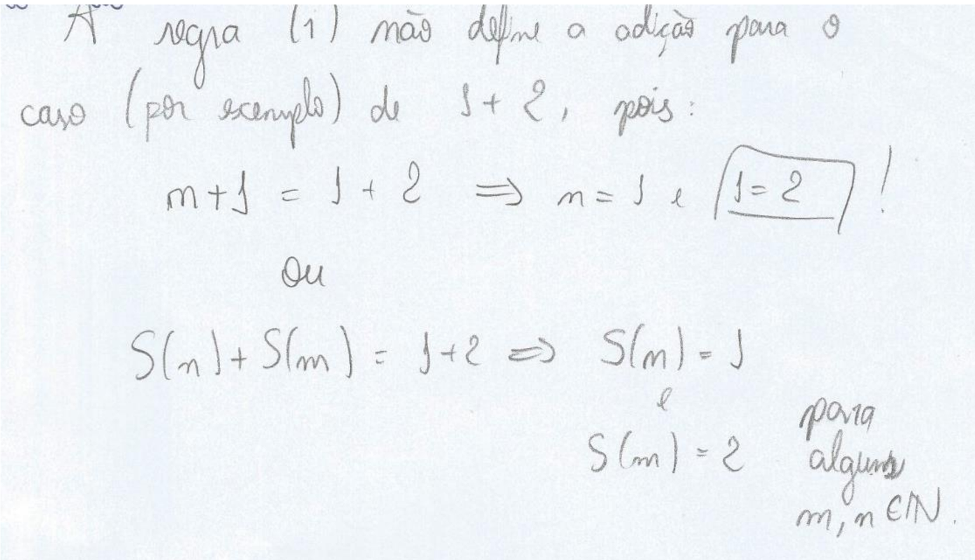
$$2+3=S(1)+S(2)$$

Nesse momento, parei de fazer o exemplo e pedi que os alunos tentassem terminar essa adição e verificassem as outras duas regras nos pequenos grupos. Passei nos grupos e observei que grande parte deles começava a adição usando as regras e, nos próximos passos, usava a adição usual, por exemplo:

$$2+3=S(1)+S(2)=S(S(1+2))=S(S(3))$$

Em vez de usar a primeira ou a segunda igualdade da regra i, eles simplesmente faziam $1+2=3$ e concluíam que a regra era válida. Então, percebi que o grupo do Alexandre, Mat e Vygotsky havia encontrado um contraexemplo para a regra i e pedi que fossem ao quadro explicar para os colegas. Vygotsky foi o escolhido para fazer a explicação:

Figura 15 - Contraexemplo para a regra i da adição de números naturais


A regra (i) não define a adição para o caso (por exemplo) de $1+2$, pois:

$m+1 = 1+2 \Rightarrow m=1$ e $\boxed{1=2}$!

ou

$S(n)+S(m) = 1+2 \Rightarrow S(n)=1$ e $S(m)=2$ para alguns $m,n \in \mathbb{N}$.

Fonte: a própria autora

Vygotsky: Essa regra [i] não é válida, porque a gente não consegue definir o 1+2 aqui. Por que a gente não consegue? A gente precisa fazer isso aqui [1+2], encaixar em alguma condição aqui [$n+1$ ou $S(n)+S(m)=S(S(n+m))$]. Ele [1+2] encaixa aqui? Se ele encaixasse, o n teria que ser 1.

Raul: Não, o n teria que ser 2.

Vygotsky: Então, aí é que tá o ponto, eu to explicando porque que não dá.

Raul: Ahh, tá.

Vygotsky: Aqui, no caso [1+2], o n teria que ser 1, mas dá certo, o n pode ser 1, ele pode ser qualquer natural e o 2 teria que ser igual a 1, mas isso aqui não dá. E a gente não tem garantia de que essa adição vai ser comutativa, porque a gente tá definindo a adição.

Raul: Mas, o Vygotsky, você que escolheu somar $1+2$?

Vygotsky: Sim, eu escolhi um contraexemplo.

Raul: Por que você não escolheu somar $2+1$?

Vygotsky: Porque eu to falando de um contraexemplo, porque eu preciso definir todas as somas, o $2+1$ daria certo porque ele encaixaria aqui [$n+1$], n seria 2 e 1 seria o 1, beleza, deu certo.

Raul: Entendi, agora você mostrou um contraexemplo.

Vygotsky: Isso, um contraexemplo. Aí você diz, beleza, não encaixou nessa primeira condição [$n+1$], mas vai que dá nesse daqui [$S(n)+S(m)$], vamos fazer o teste. O 2 eu consigo escrever como $S(1)$.

Raul: Certo.

Vygotsky: Agora, o 1 eu consigo escrever como $S(n)$? Não, porque não tem nenhum n que poderia satisfazer. Não existe nenhum n natural tal que $S(n)=1$. Então, como a gente consegue dizer que $1+2=3$? Não tem como com essa regra [i]. Todas as condições que eu poderia usar falharam.

Perguntei se todos os estudantes haviam compreendido a explicação do Vygotsky, então Mat e alguns colegas falaram que sim, outros ficaram quietos. Então tentei retomar a explicação: “O que o Vygotsky falou: vamos tentar somar o 1 e o 2, só que ele não conseguiu nem utilizar a primeira igualdade nem a segunda. A primeira porque não tem uma coisa do tipo $n+1$ e a segunda porque ele não consegue escrever o 1 como o sucessor de alguém, né? Então ele não consegue utilizar nem a primeira, nem a segunda, então o

Vygotsky achou um contraexemplo de que a regra i não define a adição de números naturais". Dei mais um tempo para os estudantes pensarem a respeito das regras ii e iii.

Depois de algum tempo tentando, pedi para o grupo dos estudantes Anakin, Raul e Whisky apresentar sua resolução e Raul foi o escolhido para fazer a apresentação. Eles escreveram no quadro:

$$1 + 2 = 1 + S(1) = S(1 + 1) = S(S(1)) = S(2) = 3$$

Raul: Vamos lá, a gente usou a regra ii e queríamos somar $1 + 2$. A gente sabe que o sucessor do 1 é o 2, então a gente escreveu $1 + S(1)$. E do outro lado, a gente... nossa eu não lembro agora.

Professora: Daqui pra cá $[1 + S(1) = S(1 + 1)]$, o que os meninos fizeram?

Vinícius: Usaram a regra.

Professora: Qual?

Coletivamente, responderam que o grupo havia utilizado a segunda igualdade da regra ii.

Raul: E daí, $1 + 1$ a gente tá na primeira igualdade, que $1 + 1 = S(1)$ e o sucessor do 1 é o 2 e o sucessor do 2 é o 3.

Os outros grupos usaram outros exemplos para testar a regra ii, e ela também deu certo para os exemplos escolhidos. Então perguntei aos alunos se eles achavam que era possível encontrar um contraexemplo para a regra ii e Vygotsky disse que achava que não era possível.

Professora: A regra ii é válida para a adição de quaisquer números naturais?

Mat: Eu acredito que sim.

Raul: Eu também acho que sim. Eu tentei fazer $1 + 1$, mas aí cai na primeira igualdade e aí dá certo.

Professora: Por que será que essa regra vai valer para quaisquer números naturais?

Raul: Porque assim... tá partindo da ideia do sucessor, certo? A gente sabe que o problema seria com o 1 e, se a gente faz $1 + 1$, a gente cai na igualdade de cima e dá certo.

Professora: Certo. Observem aqui $[n + 1]$ que nós temos o n e o 1. Nós definimos a regra para a adição de números naturais de forma que ela seja válida para $m = 1$ – mostrei a primeira igualdade - e ela vale para o sucessor de m – apontei para a segunda igualdade. Qual é a ideia do princípio da indução? Quando eu quero mostrar que uma propriedade é válida para os números naturais, o que eu tenho que fazer?

Mat: Que vale para o primeiro.

Professora: Isso, tem que valer para o primeiro.

Mat: E tem que valer para qualquer sucessor.

Professora: Isso, se vale para algum n, então vale para o sucessor de n. Por isso é que, definindo a regra dessa forma, ela vai valer para a adição de quaisquer números naturais, porque a gente definiu utilizando o princípio da indução. Definiu para $m = 1$ e definiu para o $S(m)$, então ela vai valer para a adição de quaisquer números naturais. E a regra número iii? Será que ela vale?

Vygotsky: Também vale.

Mat: Só comutou ali em cima.

Raul: Não, mas eu acho que não vale.

Vinicíus: Fazendo essa análise de indução finita, é a mesma coisa. Eu to definindo que pro primeiro termo vale, e tomado um número natural, para o seu sucessor também vai valer.

Professora: Exatamente. Ambas as regras funcionam para adição de quaisquer números naturais e a gente sabe, mas não provamos ainda, que a comutatividade é válida, né? Intuitivamente, sabemos que funciona. E como seria a definição da multiplicação de dois números naturais? – E dei 2 minutos para os estudantes pensarem.

Como estávamos no final da aula, pedi para os estudantes fazerem a seguinte tarefa em casa: **Defina uma regra para a subtração, multiplicação e divisão dos números naturais que seja válida para quaisquer números naturais.** Perguntei se alguém tinha alguma dúvida sobre o que havíamos discutido naquele dia e encerrei a aula.

4.1.3 Terceiro Dia de Desenvolvimento

O terceiro dia do desenvolvimento da TEA aconteceu em uma terça-feira e a aula teve início por volta das 19h20min. Iniciei a aula relembrando a tarefa que havíamos feito na aula anterior, a respeito da regra da adição. Perguntei aos estudantes se eles lembravam quais regras definiam a adição e eles disseram que sim, então perguntei qual era a primeira delas.

Mat: $S(n)$

Gustavo: $n + 1 = S(n)$

Mat: Ah, é.

Gustavo: $n + S(m) = S(n + m)$

E fui escrevendo no quadro enquanto os estudantes falavam.

Professora: E a outra?

Mat: $1 + n$

Professora: Igual a?

Vygotsky: $S(n)$ e $S(m) + n = S(m + n)$

Professora: Muito bem, e eu pedi para vocês, de tarefa, definirem a regra da multiplicação ou as regras. Vocês fizeram a tarefa?

Então um dos estudantes disse que não havia feito, outro disse que o grupo havia feito, mas tinha ficado com o colega que faltou naquele dia, enfim, quase todos deram alguma desculpa para não ter feito a tarefa. Então Vygotsky interveio: “Ah, mas é análogo” [a regra da multiplicação].

Professora: Então vamos Vygotsky. Você disse que é análogo, análogo a quê?

Vygotsky: A primeira lá, $n \cdot 1 = n$. Você define a multiplicação para a unidade.

Professora: Todo mundo concorda com isso?

Mat: Simm.

Professora: E a segunda igualdade?

Vygotsky: $n \cdot S(m) = n \cdot m + n$

Professora: Por que você definiu dessa forma?

Vygotsky: Ah, porque você consegue fazer a multiplicação de dois naturais usando essa regra.

Professora: Tá, se você tentar multiplicar dois números naturais essa regra vai funcionar.

Vygotsky: Sim, pra todo m, n.

Professora: Certo, mas por que você falou que isso $[n \cdot S(m)]$ é igual a isso [$n \cdot m + n$]?

Mat: Posso? Ali no segundo membro da igualdade [$n \cdot m + n$] se você deixar o n em evidência, vai ficar uma expressão que tem o sucessor.

Professora: Colocando o n em evidência vai ficar como?

Mat: Vai ficar $n \cdot (m + 1)$ e isso [$m + 1$] representa o sucessor de um número m.

Falei que concordava com os estudantes, mas ressaltei que ainda não havíamos provado a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição, e por isso estávamos definindo daquela forma, $n \cdot S(m) = n \cdot m + n$, pois já sabíamos que a distributiva seria válida no conjunto dos números naturais. Então escrevi a primeira regra da multiplicação no quadro:

$$\begin{cases} n \cdot 1 = n \\ n \cdot S(m) = n \cdot m + n \end{cases}$$

Como pudemos ver a partir dos diálogos apresentados até o momento, “a troca de informações entre aluno e aluno e aluno e professor é constante”, e esse tipo de interação é característica de uma aula na perspectiva da RME (ROSSETTO, 2016, p. 32).

Perguntei aos estudantes se havia outra regra para a multiplicação de números naturais e eles responderam que sim, era só pensar na comutativa e Mat foi dizendo: “$1 \cdot n = n$".

Professora: E a segunda igualdade?

Mat: É igual $S(m) \cdot n = n \cdot m + n$

Professora: O sucessor de m é o $m + 1$, não é?

Mat: Ah é, então vai ficar $m \cdot n + n$

Desenvolvi no quadro, com o auxílio dos estudantes, a seguinte igualdade:

$$S(m) \cdot n = (m + 1) \cdot n = m \cdot n + n$$

Todos os estudantes pareceram concordar com a nova regra. Vygotsky perguntou se poderíamos escrever $S(m) \cdot n = n + m \cdot n$, ou seja, se poderíamos usar a ideia da comutatividade da adição para definir a segunda igualdade. Isto posto, não respondi à pergunta do Vygotsky e levantei a seguinte dúvida para os estudantes: “Se tentarmos demonstrar as propriedades da adição e da multiplicação de números naturais, será que com essa regra vai dar certo?” Expliquei que, naquela aula, iríamos realizar as demonstrações das propriedades e que poderíamos tentar usar as três regras sugeridas pelos estudantes.

Prosseguindo, perguntei da regra da subtração e da divisão, como os estudantes definiriam essas regras e Vygotsky começou a falar da subtração e desistiu de expor sua ideia. Pedi que ele continuasse e ele disse que estava participando demais. Penso que, em outros modelos de aula tradicionais, os estudantes não são estimulados a expor suas ideias e serem autores na construção do seu próprio conhecimento e, quando são colocados nessa posição, podem achar que estão atrapalhando a aula, ou falando demais. Pedi para os outros estudantes darem ideias, que alguma delas poderia ser igual à ideia do colega Vygotsky.

Professora: Nós queremos definir uma regra que faça a subtração e a divisão de quaisquer números naturais – e a turma permaneceu em silêncio – é possível definir?

E Raul começou a dizer $S(n) - 1 = n$ e parou por aí. A turma permaneceu em silêncio e Raul incentivou Vygotsky a contribuir. Então o grupo do Gustavo discutiu entre si alguma ideia e pedi que eles falassem para o grande grupo.

Gustavo: Eu falei que a divisão não dá pra definir para todos porque não é fechada, né? Se eu dividir 1 por 2 não dá um número natural.

Professora: E a subtração?

Gustavo: Também não dá, tirar 2 do 1 não vai dar um número natural.

Professora: O grupo do Gustavo disse que não dá pra definir as regras porque as operações não são fechadas. O que é não ser fechada?

Raul: A gente faz uma operação e ela não cai no conjunto dos números naturais.

Professora: Ou seja, a gente toma dois números naturais, faz a subtração e pode ser que o resultado não seja um número natural. É a mesma coisa a divisão. Então, por mais que a gente tente escrever uma regra, essa regra não vai valer para todos os números naturais, por quê?

Raul: Porque as operações não são fechadas.

Concordei com os estudantes e fechei essa discussão perguntando se havia mais alguma dúvida. Os alunos disseram que tudo estava bem até ali.

No segundo momento da aula, propus a próxima tarefa. Naquele dia, estavam presentes os estudantes Vinícius, Vygotsky e Raul, que compuseram um grupo, e os estudantes Parede, Alexandre, Gustavo e Mat, que formaram o segundo grupo.

A tarefa dos estudantes era demonstrar as seguintes propriedades:

P1) $n + 1 = 1 + n, \forall\, n \in \mathbb{N}$

P2) $n + m = m + n, \forall\, n, m \in \mathbb{N}$

P3) $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$

Logo os estudantes perguntaram quais das regras eles iam utilizar e falei que eles eram livres para escolher o que quisessem. Ademais, questionaram o que eles podiam usar na demonstração, além das regras, e eu perguntei o que nós tínhamos sistematizado até o momento. Os estudantes me disseram que havíamos sistematizado os Axiomas de Peano e as regras de adição e multiplicação. Concordei e fiz a segunte observação: “Se vocês precisarem da comutatividade, da associatividade, de qualquer outra propriedade, vocês vão precisar que o colega demonstre primeiro para que vocês usem na demonstração de vocês” – e dei 20 minutos para realizarem essa tarefa.

Quando perguntei o que nós tínhamos sistematizado até o momento, quis deixar evidente o processo de construção do conjunto dos números naturais e que, de certa forma, estávamos recapitulando “o processo histórico de elaboração do conhecimento matemático, não refazendo os caminhos percorridos historicamente, mas agindo de acordo com o mesmo espírito” que os matemáticos agiam, também estávamos valorizando e utilizando as produções dos próprios estudantes (SILVA, 2015, p.45).

Um dos estudantes perguntou se o grupo deles poderia trocar ideias com o outro grupo e eu disse que podia e era desejável que isso acontecesse. Uma das coisas discutidas nos pequenos grupos e que levei para discussão no grande grupo era o seguinte: “Os meninos pegaram a igualdade da primeira regra da adição e a segunda igualdade da segunda regra da adição

- ou seja, eles misturaram e criaram uma terceira regra. Ou você usa uma ou você usa outra, ou não?”

Gustavo: As duas [regras] são válidas, ué.

Mat: Mas ali tá fechado como se fosse um sistema – e apontou para a regra abaixo, que estava no quadro.

$$\begin{cases} n+1 = S(n) \\ n + S(m) = S(n+m) \end{cases}$$

Professora: Será que nós podemos trocar as igualdades das regras? Reflitam.

Nesse ponto do desenvolvimento da TEA, pude perceber que eu já não tinha mais ansiedade em responder às perguntas dos estudantes e conseguia deixar de responder algumas e propor que os estudantes pensassem nas questões que eles mesmos faziam.

Após algum tempo, perguntei o que eles iriam usar para demonstrar as propriedades que eu havia distribuído, que método de demonstração, e prontamente Raul disse que usariam indução. Logo em seguida, Mat pediu que eu escrevesse os Axiomas de Peano no quadro. Pedi para eles irem falando e fui escrevendo os cinco axiomas. Logo que finalizamos a retomada dos Axiomas, fomos interrompidos novamente com a presença dos outros dois candidatos ao cargo de diretor e vice-diretor do Centro de Ciências Exatas. Após a paralisação, perguntei por que havíamos retomado os axiomas e Mat disse que eles eram importantes para a demonstração das propriedades.

A demonstração das propriedades da adição de números naturais é iniciada pela propriedade da associativiade, pois, para demonstrá-la, não é necessária nenhuma outra propriedade. De forma proposital, nomeei o lema $n+1 = 1+n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ de P1, pois, intuitivamente, os estudantes começariam por ele e foi o que aconteceu. Depois de algum tempo tentando demonstrar, Vinícius disse que não conseguia terminar de demonstrar a P1, pois precisava da P3 (associatividade):

Vinícius: Eu mostrei para o primeiro elemento, $n = 1$, e aí supus que era verdade para k e quero mostrar que é válido para $k+1$. Aí eu parti desse lado da igualdade, $(k+1)+1$ e eu sei que isso é igual a $(1+k)+1$.

Professora: Por quê?

Vinícius: Pela hipótese de indução. Agora eu preciso da P3 porque eu quero que os parênteses fiquem desse lado aqui $[1 + (k + 1)]$.

Nessa aula, não discutimos nenhuma das propriedades no quadro e, por esse motivo, pode ser que alguém pense que a aula não foi produtiva, mas no momento em que os estudantes se colocaram no papel de resolvedores de tarefas é que as dúvidas foram surgindo: Podemos trocar as igualdades das regras? O sucessor é um número ou uma função? Para demonstrar por indução mostro para 1 e para o sucessor de um número k? Ou eu suponho que a propriedade é válida para $k + 1$ e mostro que vale para o $k + 1 + 1$? O que é hipótese de indução? No caso da associatividade, fazemos indução em a, b ou c? E ficamos a aula toda discutindo como utilizar o princípio da indução nas propriedades de adição.

Em determinado momento, chamei a atenção dos estudantes e comentei que percebi que ambos os grupos haviam começado pela P1. Além disso, todos conseguiram mostrar a primeira parte da demonstração, $1 + 1 = 1 + 1$, mas, na segunda parte, todos tinham travado, então fiz a seguinte intervenção: “Vocês querem mostrar na segunda parte da demonstração que se vale para $S(n)$ vai valer para o $S(n) + 1$?"

Vinícius: Não, eu vou supor para n e mostrar para o $S(n)$.

Professora: Certo, e o que quer dizer “a propridade vale para n”?

Vinícius: Que $n + 1 = 1 + n$.

Professora: E o que eu quero mostrar?

Vinícius: Que $S(n) + 1 = 1 + S(n)$.

Então discutimos que $n + 1 = 1 + n$ seria nossa hipótese de indução e que os estudantes teriam que mostrar que $S(n) + 1 = 1 + S(n)$ era verdade. Iniciamos a demonstração juntos no quadro. Mat pediu para eu escrever o seguinte:

$$S(n) + 1 = (n + 1) + 1$$

Por um momento, eles acharam que precisariam usar a comutatividade para escrever $1 + n$ no lugar de $n + 1$, mas, logo em seguida, Vygotsky percebeu que era possível fazer isso pela nossa hipótese de indução. Logo, escrevemos o seguinte:

$$S(n) + 1 = (n + 1) + 1 = (1 + n) + 1$$

Os estudantes comentaram que, se demonstrássemos a associatividade, a demonstração da P1 estava terminada. A partir de então, todos se debruçaram na demonstração da associatividade. Além disso, o grupo de Vinícius, Vygotsky e Raul usou a seguinte regra de adição:

$$\begin{cases} 1 + n = S(n) \\ S(m) + n = S(m+n) \end{cases}$$

E o grupo de Mat, Alexandre, Gustavo e Parede usou a outra regra:

$$\begin{cases} n + 1 = S(n) \\ n + S(m) = S(n+m) \end{cases}$$

Depois de algum tempo, Vinícius me chamou, pois o grupo dele tinha conseguido demonstrar a P1 sem precisar da demonstração da associatividade:

Figura 16 - Demonstração da P1 feita pelos estudantes Vinícius, Raul e Vygotsky

P.1) P(n): $n + 1 = 1 + n, \forall n \in \mathbb{N}$

Usando a Regra da Adição $\begin{cases} 1 + n = S(n) & [i] \\ S(m) + n = S(m+n) & [ii] \end{cases}$

Vamos provar por indução no infinito que $P(n): n+1 = 1+n$ é válida.

Fonte: a própria autora

Figura 17 - Demonstração da P1 feita pelos estudantes Vinícius, Raul e Vygotsky

Para $n=1$, temos no primeiro membro da igualdade $1+1=2$, já no segundo membro, $1+1=2$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Suponha que $P(K)$ é verdadeira, ou seja $P(K): K+1 = 1+K$. [iii]

Devo mostrar que $P(K+1)$ é válida, ou seja,

$P(K+1): (K+1)+1 = 1+(K+1)$.

Temos que: $(K+1)+1 = (1+K)+1$ [iii]

$= S(K)+1$ [i]

$= S(K+1)$ [ii]

$= 1+(K+1)$ [i]

Fonte: a própria autora

Uma coisa que eu temia na demonstração das propriedades é que, geralmente, as tarefas que requerem o uso da indução matemática apresentam propriedades com uma única variável, como, por exemplo, demonstrar que $n + 1 = 1 + n \; \forall \, n \in \mathbb{N}$, mas algumas propriedades, como a comutatividade e a associatividade, possuem mais de uma variável. Pensei que os estudantes teriam dificuldades ao lidar com a tarefa, mas eles me disseram que já haviam feito esse tipo de demonstração antes, envolvendo mais de uma variável, e usaram seus conhecimentos prévios ao lidar com as tarefas. Essa é uma característica de aula na perspectiva da RME, “proporcionar aos alunos situações que podem ser matematizadas de modo que eles elaborem algum conhecimento a partir do seu próprio conhecimento prévio.” (OLIVEIRA, 2014, p. 51).

Discutimos no grande grupo que, nesses casos, fazemos a indução matemática em uma única variável e fazemos o “congelamento” das outras. No caso da demonstração da propriedade associativa, os estudantes Vinícius, Raul e Vygotsky fizeram a indução na variável a e “congelaram” b e c. Usaram a regra:

$$\begin{cases} 1 + n = S(n) \\ S(m) + n = S(m + n) \end{cases}$$

Os estudantes Parede, Mat, Alexandre e Gustavo fizeram a indução na variável c e “congelaram” a e b. Usaram a seguinte regra:

$$\begin{cases} n + 1 = S(n) \\ n + S(m) = S(n + m) \end{cases}$$

A todo momento, eu perguntava se todos os membros do grupo estavam de acordo com a demonstração e fiquei surpresa, pois o engajamento juntos na resolução da tarefa era unânime. Isso evidencia o caráter significativo da tarefa, isto é, ela foi convidativa e desafiadora para esses estudantes e sua resolução era-lhes valiosa.

Para encerrar a aula, pedi que revissem as demonstrações das três propriedades feitas naquele dia e, caso não tivessem terminado alguma, para terminarem em casa, já que teríamos mais propriedades para demonstrar na próxima aula.

4.1.4 Quarto Dia de Desenvolvimento

O quarto dia do desenvolvimento da TEA aconteceu em uma terça-feira e a aula teve início por volta das 19h20min. Por motivos burocráticos, tivemos que adiar a aula da quarta-feira para a próxima terça-feira, pois o professor Liboni iria participar de um compromisso relacionado à Universidade.

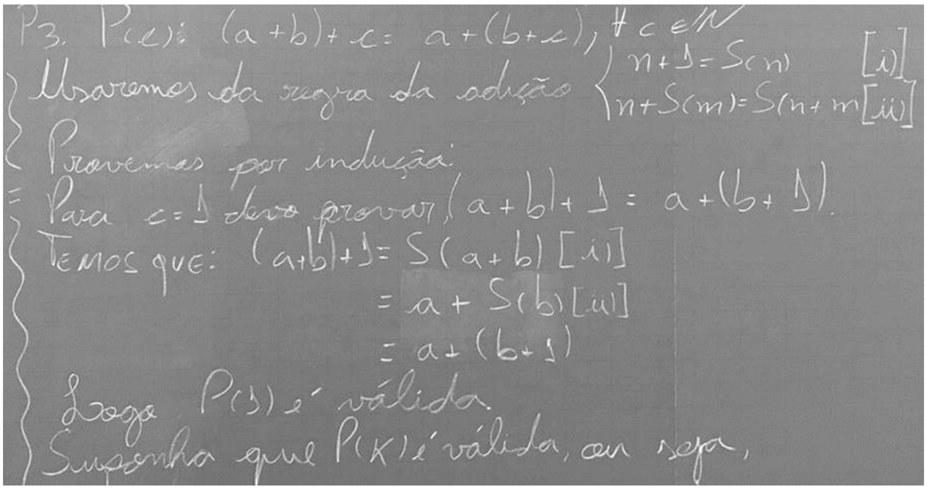
No início da aula, dei alguns minutos a fim de que os estudantes se organizassem para darmos início às apresentações no quadro. Como nem todos os estudantes presentes nesse dia estavam no dia anterior, tivemos algumas modificações nos grupos de trabalho. Durante os minutos que dei para os estudantes se organizarem, fui passando nos grupos e selecionando as resoluções que iriam ser apresentadas no quadro. Os grupos de trabalho nesse dia eram:

1. Vinícius e Raul.
2. Jorge, José e Whisky.
3. Parede e Alexandre.
4. Vygotsky e Mat.

Chamei Vinícius para iniciar as demonstrações e pedi para ele explicar por que estávamos iniciando pela apresentação da propriedade associativa. Ele explicou que, para demonstrar a P2 [propriedade comutativa], era preciso demonstrar a P3 [propriedade associativa] e, pelo que ele pôde perceber, o outro grupo também precisou fazer o mesmo para demonstrar a P1 [lema da comutatividade], por isso estávamos começando pela P3.

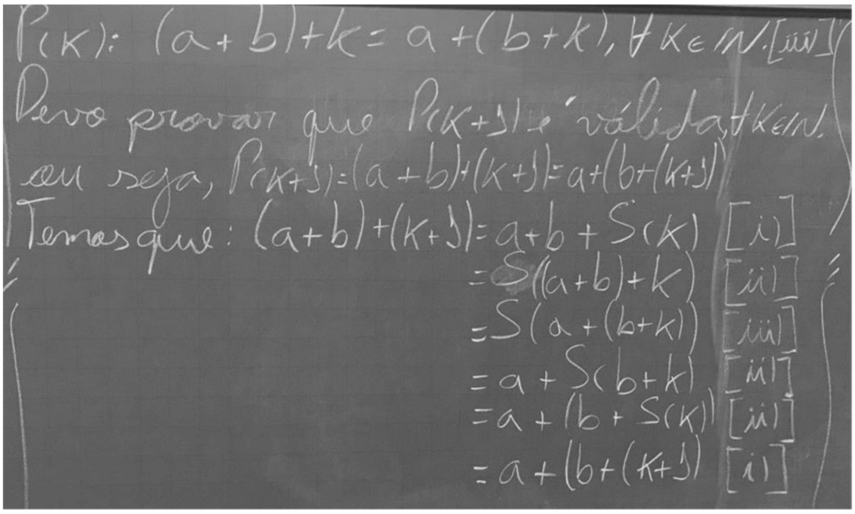
Vinícius foi explicando, com o auxílio do quadro, como eles demonstraram a P3 e contou, em especial para os colegas que haviam faltado, a estratégia de congelamento de variáveis para realizar a indução em uma única variável. Além disso, tanto Vinícius quanto os outros apresentadores explicitavam qual regra de adição eles haviam escolhido para fazer a demonstração.

Figura 18 - Demonstração da associatividade da adição de números naturais feita pelo grupo do Vinícius



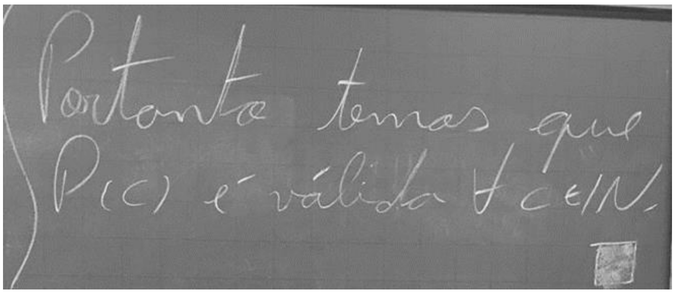
Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Figura 19 - Demonstração da associatividade da adição de números naturais feita pelo grupo do Vinícius



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Figura 20 - Demonstração da associatividade da adição de números naturais feita pelo grupo do Vinícius



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Ao final da demonstração do Vínicius, perguntei se alguém tinha ficado com alguma dúvida, mas ninguém se manifestou. Enquanto os apresentadores iam escrevendo a demonstração no quadro, os colegas resolviam as outras tarefas. Nessa aula, eu também entreguei as seguintes propriedades:

$$P5)\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$P6)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$$

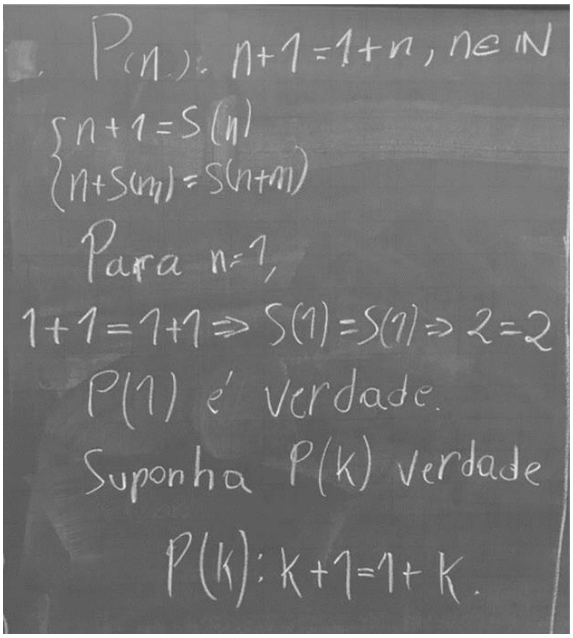
$$\mathrm{P7})\ n \cdot 1 = 1 \cdot n, \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$P8)\ n \cdot m = m \cdot n, \forall\ n, m \in \mathbb{N}$$

$$P9)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$$

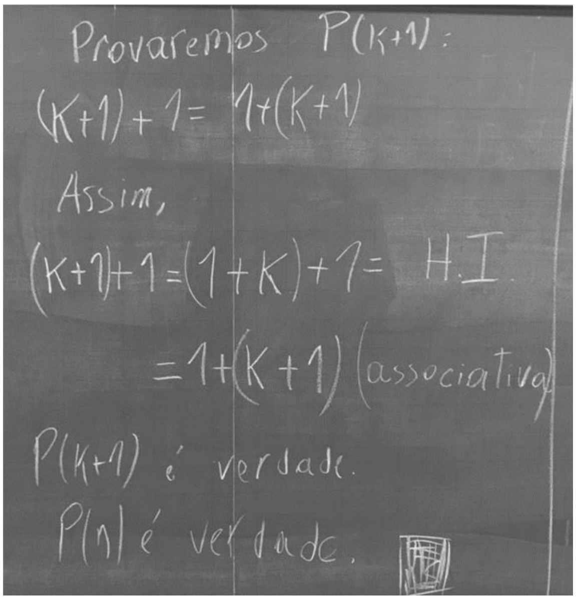
Após mais alguns minutos, pedi a atenção de todos os estudantes e chamei Parede para apresentar no quadro o lema P1.

Figura 21 - Demonstração do lema da comutatividade da adição de números naturais feita pelo grupo de Parede



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

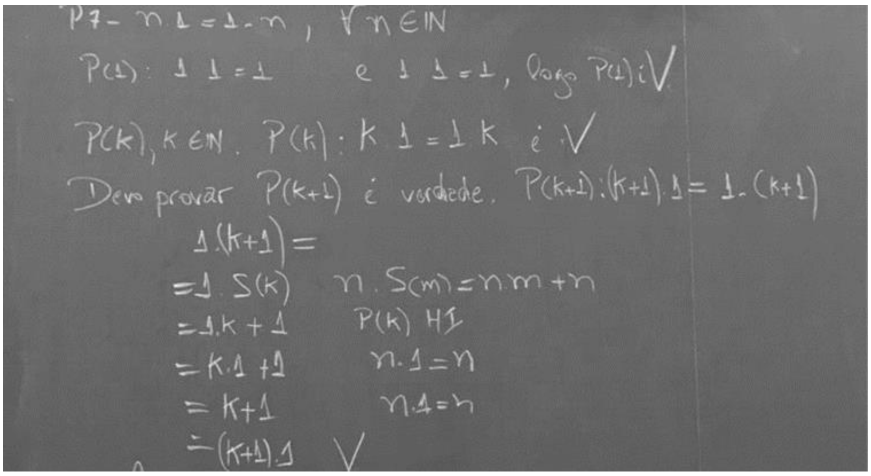
Figura 22 - Demonstração do lema da comutatividade da adição de números naturais feita pelo grupo de Parede



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Parede explicou como fez e reforçou que eles usaram a propriedade associativa da adição demonstrada pelo grupo do Vinícius. Após a apresentação de Parede, pedi para Raul colocar o lema P7 no quadro. Nesse meio tempo, Vinícius comentou com a turma que eles precisavam da propriedade P6 para fazer a demonstração da P9, e o grupo de José, Jorge e Whisky, que estava encarregado dessa demonstração, ficou avisado. Nesse ponto do desenvolvimento, os estudantes já conversavam mais entre si e eu não precisava mais intermediar alguns diálogos. Depois de algum tempo, Raul fez a explicação da P7 no quadro:

Figura 23 - Demonstração do lema da comutatividade da multiplicação de números naturais feita pelo grupo de Raul



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Raul fez uma primeira explicação e os colegas e eu interviemos em sua apresentação, pois sua escrita tinha ficado confusa. Discutimos um pouco a explicação de cada passagem da demonstração e quais maneiras são mais adequadas para sinalizar o uso da hipótese de indução, das propriedades e das regras durante as passagens da demonstração. Feito isso, pedi para o grupo do Jorge, José e Whisky colocar no quadro a demonstração da P5, e José foi o escolhido para apresentar.

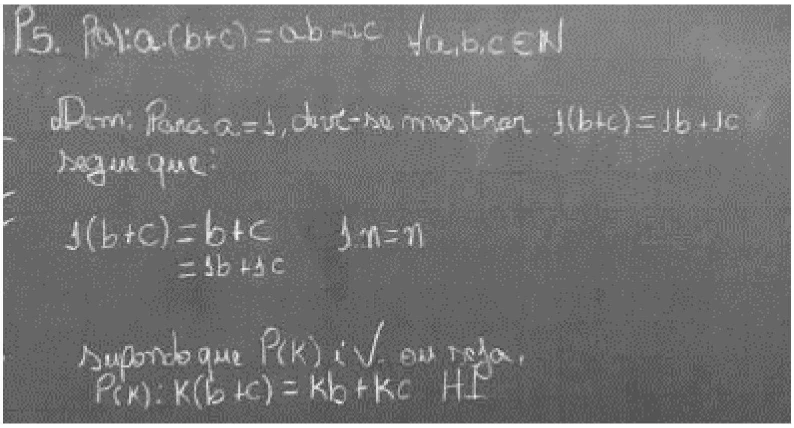
Enquanto José colocava a resolução no quadro, Vygotsky perguntou se nós iríamos provar que as duas regras para a adição são equivalentes. Expliquei que, quando a construção dos números naturais é apresentada em livros, os autores utilizam uma única regra de adição e uma única regra de multiplicação, diferentemente do que estávamos fazendo. Expliquei que, usualmente, as regras utilizadas nos livros são as seguintes:

$$\begin{cases} n+1 = S(n) \\ n + S(m) = S(n+m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \cdot 1 = n \\ n \cdot S(m) = n \cdot m + n \end{cases}$$

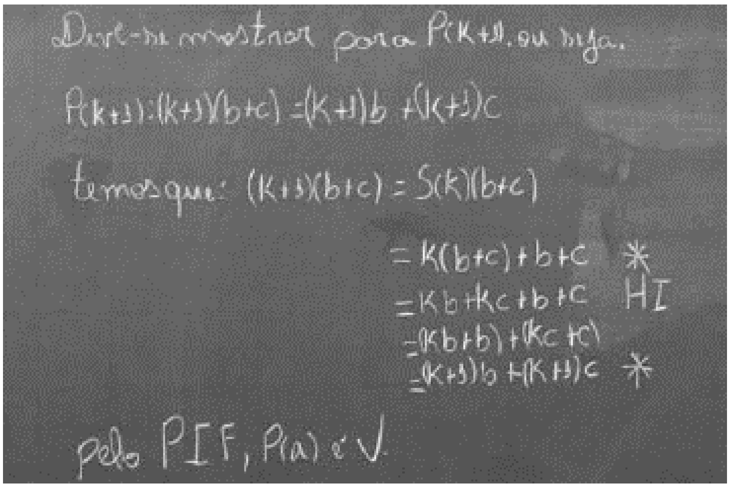
Tentei deixar claro que devemos adotar uma das regras que definimos, e não as duas, concomitantemente, embora, depois de demonstrar as propriedades, seja possível afirmar que as regras são equivalentes. Alguns grupos adotaram a regra usual da adição e outros adotaram a que definimos em sala. Não havia problemas nisso, pois cada grupo estava realizando todas as demonstrações com a regra escolhida. Penso que essa dinâmica mostrou as diferentes estratégias e procedimentos que, às vezes, uma demonstração matemática permite e nem sempre se explora. Além disso, discutimos as implicações de escolher regras diferentes. Na demonstração da associatividade da adição, por exemplo, um dos grupos fez a indução na variável c, pois os estudantes adotaram a regra usual, e o outro grupo fez a indução na variável a, devido à escolha da outra regra. Depois de alguns minutos, José foi ao quadro explicar a P5.

Figura 24 - Demonstração da propriedade distributiva de números naturais feita pelo grupo de José



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Figura 25 - Demonstração da propriedade distributiva de números naturais feita pelo grupo de José



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Uma coisa interessante, fruto do princípio da interatividade, é que nenhum dos estudantes do grupo de José estava presente no terceiro dia do desenvolvimento da TEA, mas, mesmo assim, conseguiram realizar a demonstração da propriedade P5 com o auxílio dos colegas dos outros grupos, por meio das apresentações e intervenções, da troca de ideias entre eles mesmos e com as minhas orientações. Ademais, os alunos de outros grupos faziam intervenções na fala de José a fim de regular a fala do colega e ajudá-lo a justificar suas passagens na demonstração, como no momento em que Mat e Vinícius disseram para José que ele tinha esquecido de justificar o uso da comutatividade, logo após usar a hipótese de indução, como mostra a Figura 25.

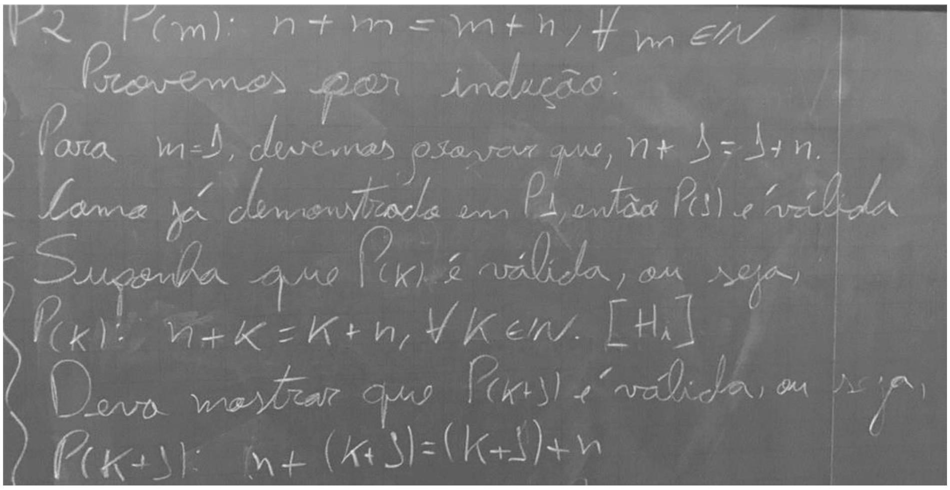
Perguntei aos estudantes quais propriedades ainda não tinham sido apresentadas e constatamos que faltavam as propriedades P2, P6, P8 e

P9. Os alunos sentiram falta da P4, mas foi uma escolha minha removê-la da lista naquele momento. As propriedades P4 e P10 referiam-se à lei do corte da adição e multiplicação de números naturais, respectivamente, e, alguns dias antes da nossa quarta aula, ao realizar as demonstrações novamente, percebi que, para demonstrarmos a P10, era necessário o uso da Relação de Ordem dos números naturais. Por esse motivo, deixei a P4 e a P10 para serem demonstradas após discutirmos a Relação de Ordem. Hoje penso que eu poderia ter deixado ambas as propriedades junto das outras, pois a lei do corte da multiplicação iria sucitar a discussão a respeito da ordem nos números naturais.

Cabe ressaltar que, segundo Bakker (2004), o professor pode ajustar o que ele planejou inicialmente se novas ideias parecerem melhores, ou seja, ele não precisa esperar até o final do desenvolvimento da TEA para mudar as tarefas ou até os objetivos, e, naquele momento do desenvolvimento, achei mais adequado mudar as tarefas de ordem.

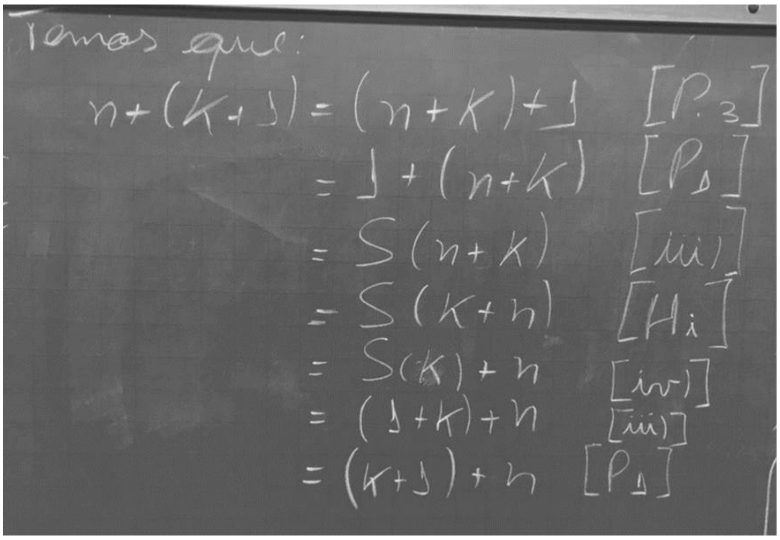
Para finalizar a aula, pedi que Vinícius ou Raul fossem ao quadro apresentar a resolução da P2, que era a comutatividade da adição de números naturais. Enquanto isso, os outros alunos foram se dedicando às outras propriedades. Falei para os estudantes que, no dia seguinte, iríamos terminar de apresentar a demonstração das propriedades restantes e que, caso algumas delas não estivessem completas, eles deveriam terminar em casa. Depois, chamei Vínícius para ir ao quadro explicar e finalizamos o quarto dia de desenolvimento da TEA.

Figura 26 - Demonstração da propriedade da comutatividade da adição de números naturais feita pelo grupo do Vinícius



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Figura 27 - Demonstração da propriedade da comutatividade da adição de números naturais feita pelo grupo do Vinícius

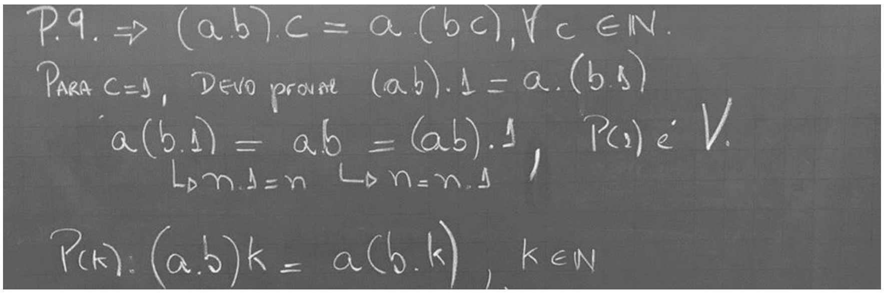


Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

4.1.5 Quinto dia de desenvolvimento

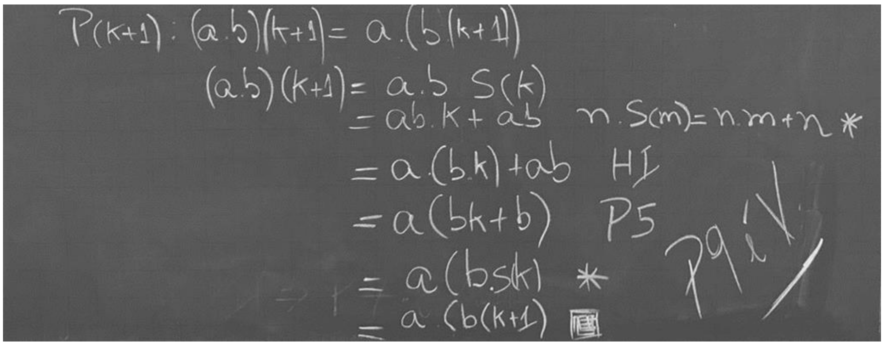
O quinto dia do desenvolvimento da TEA aconteceu em uma quarta-feira e a aula teve início por volta das 21h15min. Separei os estudantes em duplas para que pudessem continuar o trabalho com as demonstrações das propriedades de adição e multiplicação de números naturais. As duplas foram Raul e Vinícius, Whisky e Jorge, Alexandre e Mat. Deixei alguns minutos para os alunos se organizarem, enquanto Raul colocava a propriedade P9 no quadro e Jorge, a P6. Apresento nas figuras 28, 29, 30 e 31 as produções escritas dos estudantes Raul e Jorge, respectivamente.

Figura 28 - Demonstração da propriedade associativa da multiplicação de números naturais feita pelo grupo de Raul



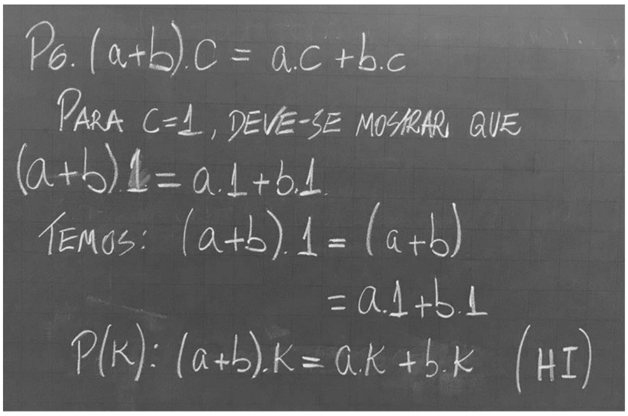
Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Figura 29 - Demonstração da propriedade associativa da multiplicação de números naturais feita pelo grupo de Raul



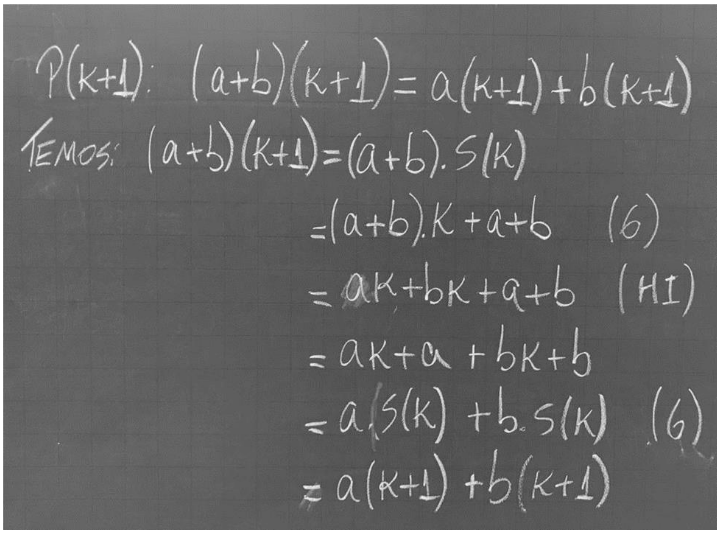
Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Figura 30 - Demonstração da propriedade distributiva dos números naturais feita pelo grupo de Jorge



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Figura 31 - Demonstração da propriedade distributiva dos números naturais feita pelo grupo de Jorge



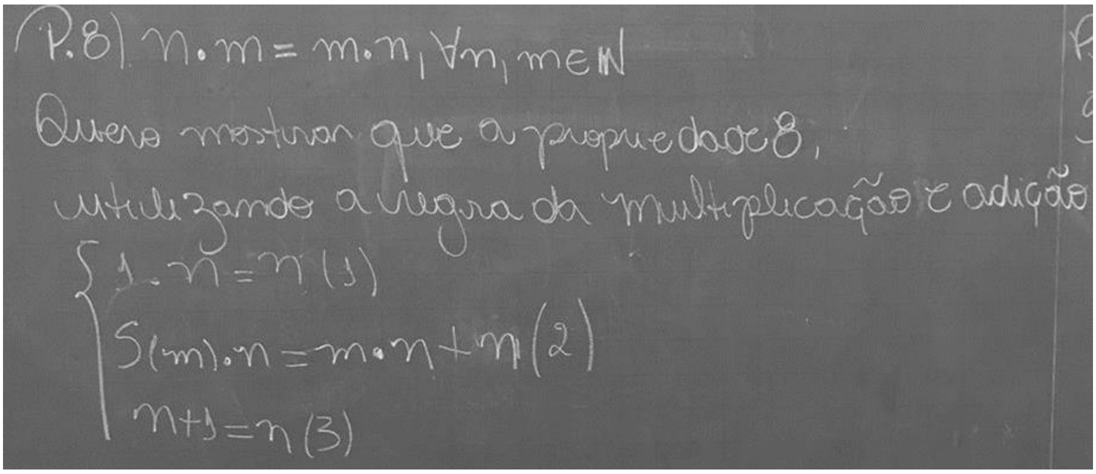
Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Na aula anterior, convidei Alexandre para apresentar uma das propriedades no quadro e ele aceitou apresentar a propriedade P8 na aula de hoje. Como já disse anteriormente, Alexandre sempre foi muito tímido nas aulas e evitava ir ao quadro e participar das discussões no grande grupo. Então, nesse início da aula, Mat e eu o ajudamos no pequeno grupo para que ele se preparasse para a apresentação. Pedimos que ele apresentasse para nós, como se estivesse no quadro. Ele foi tentando justificar cada passagem da demonstração, e Mat e eu fomos ajudando.

Algo que achei fantástico nessas duas aulas é que os estudantes se ajudavam muito durante a apresentação das tarefas. Como eles colocavam a resolução no quadro em um primeiro momento e depois apresentavam, às vezes o apresentador esquecia o que havia feito na demonstração e os colegas que estavam assistindo, do mesmo grupo ou de outros grupos, iam falando: “Você esqueceu dos parênteses”; “a segunda para a terceira linha, você usou a propriedade associativa”; “isso aí é sua hipótese de indução”. Isso é fundamental em uma aula na perspectiva da RME, que os estudantes justifiquem suas estratégias de resolução, escutem com atenção os outros estudantes e peçam esclarecimentos a respeito das resoluções dos colegas, entre outras atividades (SILVA, 2015).

Para finalizarmos a discussão das propriedades de adição e multiplicação de números naturais, Alexandre foi ao quadro explicar a propriedade comutativa da multiplicação.

Figura 32 - Demonstração da propriedade comutativa da multiplicação dos números naturais feita pelo grupo de Alexandre



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Alexandre: A propriedade P8 pede para mostrarmos que $n \cdot m$ é igual a $m \cdot n$ para todo n, m pertencente ao conjunto dos números naturais. Então, eu utilizei a regra da multiplicação e depois comecei a provar pelo método da indução. Eu coloquei seja $n = 1$ e substituí o n por 1, certo? Aí eu multipliquei $1 \cdot m$ e $m \cdot 1$, e vai ser verdade pela propriedade P7.

Professora: Qual é a propriedade P7?

Alexandre: Ai Jesus!

Professora: Ajudem o Alexandre, qual é a propriedade P7?

Raul: $1 \cdot n = n \cdot 1$

Professora: Isso, então essa igualdade $[1 \cdot m = m \cdot 1]$ é verdadeira pela P7, certo?

Alexandre: Isso.

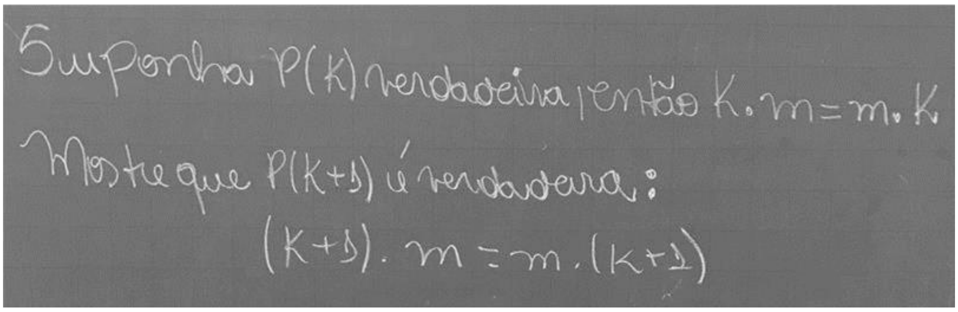
Mat: Aquela última linha que ele fez ali $[m = m]$, precisa?

Professora: Não precisa, mas está errado?

Raul: Não, porque ali ele tá usando a regra, né? Que $1 \cdot m = m$.

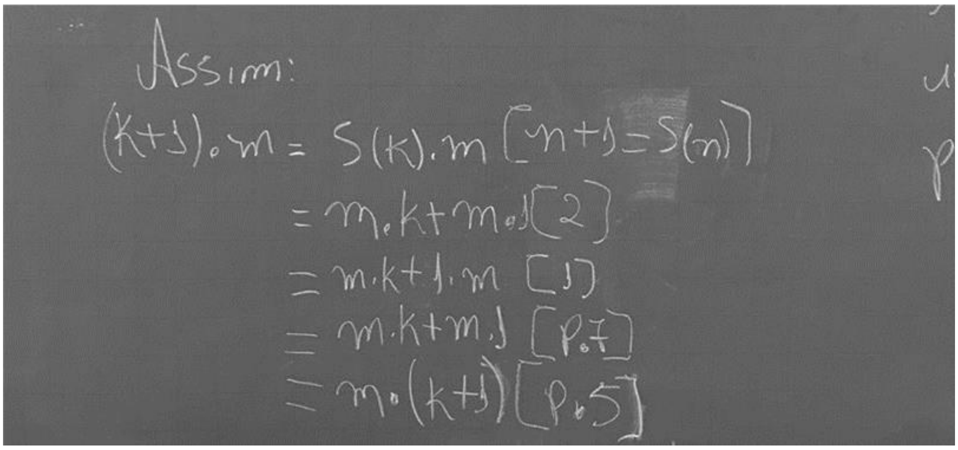
Mat: Muito bom, Alexandre.

Figura 33 - Demonstração da propriedade comutativa da multiplicação dos números naturais feita pelo grupo de Alexandre



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Figura 34 - Demonstração da propriedade comutativa da multiplicação dos números naturais feita pelo grupo de Alexandre



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Alexandre: Suponha que $P(k)$ é verdadeira, então $k \cdot m = m \cdot k$, essa vai ser minha hipótese de indução. Vou mostrar que a $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, $(k+1) \cdot m = m \cdot (k+1)$. Para mostrar que a $P(k+1)$ é verdadeira, eu vou partir desse lado da igualdade [$(k+1) \cdot m$] para chegar nisso [$m \cdot (k+1)$]. Assim, $(k+1) \cdot m$ é igual a $S(k) \cdot m$, pela igualdade $n+1 = S(n)$. Depois, eu escrevo $m \cdot k + m$, que eu vou utilizar essa igualdade [$S(m) \cdot n = m \cdot n + n$].

No início da demonstração, Alexandre escreveu uma das igualdades da regra da multiplicação de forma incompleta $S(m) \cdot n = m \cdot n$, e ninguém havia percebido até então, por isso eu intervim na explicação do Alexandre.

Professora: Tá faltando alguma coisa aí, né?

Vinícius: Tá.

Alexandre: Ahh, ta faltando o $+m$.

Professora: É $+m$ ou $+n$?

Alexandre: Tô nervoso, é $+n$.

Professora: Fica tranquilo.

Após as intervenções, minha e dos colegas, Alexandre modificou sua escrita no quadro e finalizou a explicação de cada passo da demonstração. É papel do professor, no processo da reinvenção guiada, verificar a convergência das produções dos estudantes com as normas comuns na comunidade matemática (DRIJVERS, 2003). Ao final da explicação de Alexandre, os colegas da turma bateram palmas pela sua apresentação e o elogiaram.

Para finalizarmos a discussão das demonstrações das propriedades da adição e multiplicação dos números naturais, enfatizei que, em uma construção formal dos números naturais, é escolhida apenas uma regra da adição e uma da multiplicação e mostrei quais eram as regras usualmente utilizadas nas construções formais. Além disso, perguntei para Mat o que ele havia me dito na aula anterior, e ele relembrou:

Mat: O Vygotsky perguntou da equivalência das regras e eu disse que a partir do momento que nós demonstramos todas as propriedades dos números naturais, a gente conclui que as regras são equivalentes. Uma coisa que eu não sei é que, quando eu fui demonstrar a propriedade distributiva, eu vi que usei algumas propriedades já demonstradas e o José utilizou propriedades diferentes das minhas.

Explicitei que, como eles mesmos perceberam, a escolha da regra tem algumas implicações, mas algumas coisas permanecem iguais. Por exemplo, para a demonstração da comutatividade da adição, independentemente da regra escolhida, era necessário usar a propriedade associativa da adição.

No segundo momento da aula, projetei uma apresentação de *slide* com a seguinte pergunta: **O que é uma relação matemática?** Relembrei que, no início de nossas aulas juntos, havíamos conversado a respeito de relações para falar da Função Sucessor, mas, agora, gostaria que nós nos aprofundássemos nesse tema. Então, os alunos começaram a dar suas opiniões.

Vinícius: É uma ferramenta que leva um conjunto ao outro.

Professora: Ela leva um conjunto ao outro, então ela é a lei, a ferramenta?

Vinícius: Uhum

E fui anotando no quadro o que os alunos iam falando.

Professora: Nesse caso [de ser ferramenta], eu preciso da regra e do que mais?

Vinícius: De dois conjuntos.

Mat: É o tripé. O banquinho do Jeca Tatu.

Professora: Por que banquinho do Jeca Tatu?

Mat: Foi um professor no primeiro ano, ele disse que, quando nós fossemos falar de função, teria que ter três coisas fundamentais, os dois conjuntos e a regra.

Vinícius: É que o banquinho do Jeca Tatu é feito por três pernas.

Professora: Ahhh, agora vocês me contextualizaram, eu fiquei, tipo, banco do Jeca Tatu?

Inicialmente, falei que concordava com os alunos que uma relação precisava ter dois conjuntos e uma regra. Pedi para pensarmos na relação que havíamos estabelecido no início de nossas aulas e fui perguntando.

Professora: Qual era o conjunto de partida?

Mat: O conjunto de partida? Os naturais.

Professora: Isso, existia $\mathbb{N}$ e existia o primeiro elemento.

Mat: Que era o 1.

Professora: E aí definimos a Função Sucessor, né? A regra era $S(n) = n + 1$. Então o 1 estava relacionado com quem?

Vinícius: Com o 2.

Professora: E aí estabelecemos o 2. E o 2 estava relacionado com quem?

Mat: Com o 3.

Professora: Assim por diante. A relação tem a regra, tem os dois conjuntos, mas o que ela é, no fundo? Se eu fosse escrever um conjunto de pares ordenados com essas informações [1 está relacionado com o 2 e o 2 está relacionado com o 3], como ficaria?

Mat: Seria o par $(1,2)$, $(2,3)$, assim por diante.

E escrevi no quadro o seguinte conjunto:

$$A = \{(1,2), (2,3), (3,4), \dots\}$$

Professora: Esse conjunto está contido em que conjunto?

Vinícius: No $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Professora: O que é uma relação? Um conjunto de pares ordenados que está contido...

Mat: Ahhh, em um produto cartesiano.

Vinícius: Acho que a gente viu isso em Fundamentos[16].

A partir desse diálogo, fica evidente a perspectiva longitudinal de uma trajetória de ensino e aprendizagem, isto é, há uma forte relação do que foi aprendido anteriormente com o que será aprendido depois, visto que, no quinto dia de desenvolvimento da TEA, ainda estávamos retomando os Axiomas de Peano (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). Inicialmente em nossa discussão, aceitamos a ideia de que uma relação era constituída de dois conjuntos e uma regra que os relacionava, inclusive, em minha TEA, eu havia considerado essa ideia como uma das possíveis respostas dos estudantes:

> [...] uma ideia informal de "relação": é um sistema R constituído de: 1) um conjunto E (chamado de conjunto de partida); 2) um conjunto F (chamado de conjunto de chegada); 3) uma sentença aberta[17] $p(x,y)$, em que $x \in A$ e $y \in B$, sentença essa tal que, para todo par ordenado $(a,b) \in E \times F$, a proposição $p(a,b)$ é verdadeira ou falsa (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 64).

Até esse ponto do desenvolvimento da TEA, nem eu nem os estudantes tínhamos compreendido por que essa ideia era considerada uma ideia informal de relação. Após discutirmos a ideia de relação como um subconjunto de um produto cartesiano e uma relação como um "tripé", dei sequência aos questionamentos: **Se considerarmos o conjunto dos números naturais, $\boldsymbol{m = n}$ e $\boldsymbol{m < n}$, com $\boldsymbol{m, n} \in \mathbb{N}$ são relações? Por quê?**

A turma ficou em silêncio, e eu perguntei aos estudantes se eles haviam compreendido a pergunta. Afirmaram que sim. Mas, devido à forma como estava escrito nos *slides*, Mat ficou em dúvida. Então refiz a pergunta: $m = n$ é uma relação? Por quê?

Vinícius: Sim, tem uma regra, possui um conjunto de partida e um conjunto de chegada.

Professora: Qual é a regra?

Vinícius: $m = n$.

Professora: Qual é o conjunto de partida?

Vinícius: Os naturais.

Professora: Então eu consigo definir um conjunto em que seus

---

[16] Fundamentos de Matemática é uma disciplina ofertada no primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática da UEL.
[17] Uma sentença é considerada aberta, pois seu valor não pode ser determinado até que suas variáveis sejam substituídas por números específicos.

elementos estejam relacionados por meio dessa regra?

Vinícius: Sim.

Mat: O $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$.

E fui escrevendo no quadro o seguinte conjunto:

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), \dots\}$$

Professora: Tá, então isso é uma relação [$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), \dots\}$].

Mat: Sim.

Professora: E $m < n$?

Raul: Sim

Vinícius: A regra é $m < n$.

Mat: Mas tem que ter uma condição aí.

Whisky: Você não construiu uma relação que não é uma função?

Vinícius: Uma relação pode ter elementos sobrando no domínio?

Professora: Pode?

Vinícius: Não, ela vai ser de $\mathbb{N}/\{1\}$ até $\mathbb{N}$.

Raul: De $\mathbb{N}$ até $\mathbb{N}/\{1\}$.

Os alunos estavam discutindo que deveríamos restrigir o domínio ou o contradomínio da relação, pois o 1 é o menor elemento no conjunto dos números naturais e não é maior que nenhum número natural. Além disso, havia uma confusão entre o que era uma função e o que era uma relação.

Professora: Mas pode ou não sobrar elementos no domínio?

Vinícius: Ah, não pode sobrar, vai ser de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.

Mat: Não pode sobrar.

Professora: Para ser função, o que precisa? Tem que ser uma relação, mas qual a condição?

Vinícius: Todos os elementos do domínio têm que estar relacionados com apenas um elemento do contradomínio.

Professora: Para ser função, todos os elementos do domínio têm que estar relacionados.

Whisky: Para ser relação não precisa.

Professora: Por que não?

Vinícius: Porque, se todo subconjunto do produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é uma relação, a gente pode pegar... hmmmm..., por exemplo, o conjunto vazio é um subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Raul: Eu já acho [que $m < n$ é uma relação] que é, porque tem regra e tem os dois conjuntos.

Professora: Vinícius, termina seu exemplo.

Vinícius: A gente consegue dar um exemplo de uma relação, que vai gerar o conjunto vazio, partindo de um conjunto que tem elementos para um conjunto que não tem elementos.

Whisky: Com qual regra?

Professora: Então o conjunto de partida vai ter elementos, por exemplo, pode ser $\mathbb{N}$, e o conjunto de chegada vai ser o conjunto vazio, por exemplo, um conjunto que não possui elementos. Vai ter uma regra?

Os alunos pensaram, falaram algumas coisas nos pequenos grupos e, então, Vinícius continuou argumentando:

Vinícius: Pega, por exemplo, $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2,3\}$, e a gente pega, por exemplo, a regra $R(n) = n + 10$. Essa regra gera o conjunto vazio, que seria um subconjunto do cartesiano $A \times B$.

Vinícius, aparentemente, encontrou um contraexemplo para a ideia de que, em uma relação, todos os elementos do domínio precisam estar relacionados com algum elemento do contradomínio. Então, Gabriel, meu ajudante nas aulas, interveio na discussão.

Gabriel: Eu já acho que não, porque qual é o primeiro par ordenado dessa relação?

Professora: É, você não consegue formar pares ordenados, né?

Vinícius: Sim, mas o vazio é subconjunto do cartesiano $A \times B$. Então a gente tem uma falha na definição.

Raul: Já me perdi no raciocínio, já não sei mais onde a gente quer chegar. O que você perguntou para o Vinícius?

Professora: Ele estava tentando dar um exemplo de relação em que sobravam elementos no domínio, aí ele tentou esse exemplo e agora nós chegamos a um outro problema.

Vinícius: Mas nem precisa disso, pode ser $n+1$, por exemplo.

Mat: Mas vai ter associação.

Vinícius: Sim, mas vai resultar num conjunto de pares ordenados $R=\{(1,2),(2,3)\}$. Sobrou o elemento 3 do domínio.

Raul: E aí o 3 não tem com quem relacionar.

Vinícius: E é uma relação, pela definição.

Mat: Sim.

Whisky: É e está contida no cartesiano.

Vinícius: Está contida no cartesiano $A \times B$.

Gabriel: Eu posso falar?

Professora: Pode.

Gabriel: Não é qualquer coisa que é subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que é relação. Uma relação é um conjunto de pares ordenados que está contido em um cartesiano, não é Liboni? Com aquela regra ali, $R(n)=n+10$, você não consegue fazer nenhum par ordenado.

Vinícius: Mas, ali na definição [de relação], não está falando nada de par ordenado.

Liboni: A definição de relação, assim, toda vez que a gente olha uma definição matemática, temos que pensar sobre qual objeto a definição se aplica. Então, para começo de conversa, qual é o pressuposto para que alguma coisa tenha chance de ser uma relação? Primeira coisa, tem que ser um conjunto. A definição que a professora colocou é a seguinte: uma relação é um conjunto, na verdade um subconjunto, mas não deixa de ser um conjunto. Então, qualquer coisa, que não seja um conjunto, não é uma relação, por definição. Quando a gente usa a expressão fórmula, regra, equação, são expressões que a gente usa em língua portuguesa, mas que não refletem a matemática precisa. Quando você olha para aquele exemplo da professora, e você se pergunta se $n+1$ é uma relação, essa pergunta é descabida, porque, para ser relação, tem que ser um conjunto. Se não for conjunto, "miô"[18], já automaticamente não é. Se uma pessoa pergunta se $n+1$ é uma relação, temos que tentar pensar o que ela quer dizer. Imagino que ela queira dizer o seguinte: existe alguma relação, ou seja, algum conjunto cuja relação entre o x e o y de cada par ordenado desse

---

[18] Expressão informal que significa que algo deu errado.

conjunto seja dada por $y = x + 1$. Essa é uma pergunta absolutamente pertinente, mas a equação em si não é e nunca será uma relação. Outra coisa que foi discutida agora há pouco, sim, o vazio é uma relação, porque o que significa ser uma relação? É ser um subconjunto de $A \times B$, e o vazio é subconjunto de qualquer conjunto. Então o vazio é uma relação. E o vazio é uma excelente relação, porque ela é absolutamente contraintuitiva, porque você não consegue expressar o vazio em termos de fórmulas do cotidiano.

Professora: E nem em termos de um conjunto com pares ordenados.

Liboni: Então, você nunca vai se perguntar se $n + 1$ é uma relação.

Vinícius: Então, basicamente, você respondeu a outra pergunta aqui [$m < n$ é uma relação?]. $n = m$ não é uma relação e nem $m < n$ é uma relação. Agora, os conjuntos dados a partir dessas regras serão relações.

Liboni: Simmmmm, está bem melhor agora.

Professora: Vinícius, explica de novo pra gente.

Vinícius: Dessa forma que está escrito aí, [$m < n$ e $n = m$], não é uma relação, porque ele está me dando uma regra e está perguntando se isso é uma relação. Um subconjunto que pode ser gerado a partir dessas regras, sim, pode ser uma relação.

Liboni: E, por exemplo, agora há pouco, havia a discussão de um exemplo de uma relação em que os elementos do "domínio" não eram contemplados. É muito simples, você pega o conjunto $A = \{1,2\}$ e o conjunto $B = \{1,2\}$ e pega a relação $R = \{(1,1)\}$, pronto. Vocês queriam encontrar uma fórmula, que tivesse um furo no domínio, e não, relação é um conjunto. Voltarei agora para minha mediocridade silenciosa.

Professora: Geralmente, nós definimos uma regra para associar os elementos, mas isso nem sempre acontece. Para ser relação, basta ser um subconjunto de um produto cartesiano. Então, se considerarmos o conjunto dos números naturais, essas regras [$n = m$ e $m < n$], por si só, não serão relações, mas a partir delas...

Vinícius: Eu consigo gerar relações.

A partir dessa discussão, podemos perceber que uma tarefa que, aparentemente, era de reprodução, tornou-se de reflexão, isto é, passou do nível 1 de demanda cognitiva, segundo De Lange (1999), para o nível 3. A princípio, a pergunta “o que é uma relação?” poderia ter como resposta “Uma relação é um subconjunto de um produto cartesiano”. Nesse caso, o nível de demanda cognitiva da tarefa seria o nível 1, pois a tarefa exigiria apenas a reprodução de uma definição. Entretanto, os próprios estudantes foram levantando questionamentos de forma que a tarefa tornou-se de nível 3, pois eles tentavam achar contraexemplos em que a definição, apresentada por eles, inicialmente, falhasse e faziam conexões entre as duas ideias de relação que estávamos discutindo.

Liboni pediu para eu retomar a minha fala a respeito das relações, em que eu havia dito que geralmente a gente explicita uma regra que relaciona os elementos dos dois conjuntos, mas que nem sempre é possível. Então, Liboni propôs uma tarefa para os estudantes: pegar dois conjuntos com cinco elementos cada um, os mesmos conjuntos, e tentar escrever todas as possíveis relações desse conjunto nele mesmo. Ele disse para os estudantes que a quantidade de possibilidades era muito grande e que era um caso em que os conjuntos eram finitos e possuíam apenas cinco elementos. Além disso, salientou:

Liboni: As relações são tantas, que grande parte delas não nos interessa, o que sobra são as funções, por exemplo, porque naquilo que não é função a gente não costuma ter muito interesse, no máximo relação de equivalência. E dentre as funções, a gente geralmente trabalha com aquelas que a gente consegue expressar por meio de uma fórmula. As funções, afim, trigonométricas, identidade, são casos particulares em meio às infinidades de possibilidades de relações no universo.

Para finalizarmos a aula, discutimos um pouco a respeito da tarefa que o Liboni deu para os estudantes, e ele deu mais uma tarefa para eles: pesquisar o significado da palavra “regra” no dicionário.

Logo depois que a aula acabou, fiquei me sentindo mal com toda a discussão a respeito de relação. Estava muito insegura com o rumo que a conversa havia tomado e, naquele momento, me senti muito culpada por deixar que Gabriel e Liboni interviessem. Hoje consigo ver que ambos contribuíram para a discussão e que os alunos estavam indo na direção desejada pela RME, pois, nos diálogos, é possível observar indícios do princípio da atividade e do processo de matematização por parte dos estudantes, por meio da reflexão, do teste de conjecturas e pela busca de generalizações (OLIVEIRA, 2014).

4.1.6 Sexto Dia de Desenvolvimento

O sexto dia do desenvolvimento da TEA aconteceu em uma terça-feira e a aula teve início por volta das 19h15min. Perguntei para os estudantes o que nós estávamos discutindo na aula anterior e Vinícius falou para a turma que nós discutíamos a definição de relação. Parede, Gustavo, Fernanda e José não estavam na aula anterior, então perguntei a eles o que era uma relação e obtive algumas respostas desses alunos: "é uma associação entre duas coisas, ou dois números; é um subconjunto de um produto cartesiano; é uma função", e comecei a fazer alguns questionamentos:

Professora: Uma função é uma relação?

Fernanda: Toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função.

A partir desse momento, começamos a discutir, com todos os estudantes, o que era uma função e quais eram as características de uma função, e sistematizamos algumas coisas:

1. Toda função é uma relação.
2. Os elementos do domínio de uma função só podem ter uma única imagem.
3. Todos os elementos do domínio de uma função devem estar relacionados com algum elemento do contradomínio.

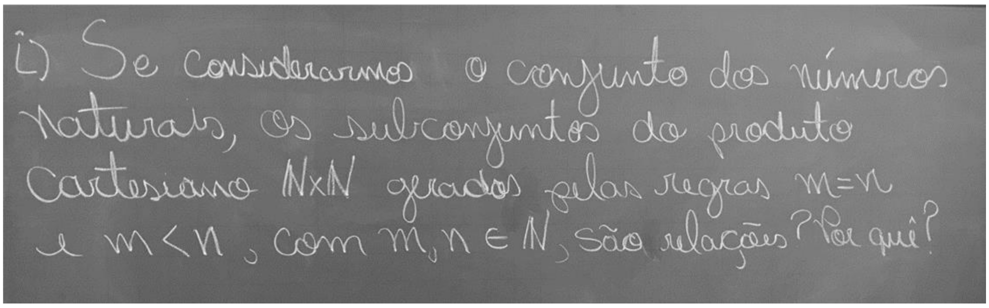
Após sistematizarmos o que era uma função, retomamos a discussão do que era uma relação. Perguntei qual abordagem era dada ao tema Relações nos livros do Ensino Básico e Gustavo disse que era algo como uma correspondência entre os elementos de dois conjuntos. Ressaltei que, como estávamos em um curso de Análise, deveríamos utilizar uma definição mais precisa: relação como um subconjunto de um produto cartesiano. Ressaltei, também, que, na aula anterior, partimos de uma noção menos formal de relação e chegamos a alguns problemas e impasses e, por esse motivo, a partir daquele momento, iríamos usar a definição mais formal.

Na aula anterior, eu havia feito o seguinte questionamento aos estudantes:

- $\boldsymbol{m = n}$ **com** $\boldsymbol{m, n} \in \mathbb{N}$ **é uma relação? Por quê?**
- $\boldsymbol{m < n}$ **com** $\boldsymbol{m, n} \in \mathbb{N}$ **é uma relação? Por quê?**

Entre uma aula e outra, conversei com o Gabriel e meus orientadores, Regina e Liboni, para tirarmos algumas dúvidas dos encaminhamentos que daríamos na trajetória. Gabriel sugeriu que eu desse a seguinte tarefa para os estudantes: **Reescrever ambas as perguntas de forma que as respostas delas sejam sim.** Divididos em grupos, os estudantes começaram a resolver a tarefa. O grupo de Fernanda estava um pouco perdido, pois nenhum deles estava presente na aula anterior, então expliquei o contexto em que essa tarefa surgiu e conversamos no pequeno grupo a definição de relação. Enquanto isso, os estudantes dos outros grupos estavam engajados na tarefa e na contextualização do que havíamos feito na aula anterior.

Figura 35 - Reformulação da pergunta a respeito de relações matemáticas feita pelo grupo de Vinícius



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Vinícius: A tarefa tinha a intenção que a gente reconhecesse que as expressões não são as relações, certo? Elas são só as regras e aí a gente usa da definição de que uma relação é um subconjunto de um produto cartesiano entre dois conjuntos, baseado em uma regra. Ao invés de perguntarmos se as regras são [relações], perguntamos se os subconjuntos do produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ são relações.

Professora: Em um momento, você disse que uma relação é um subconjunto de um produto cartesiano gerado por uma regra. Sempre teremos uma regra?

Vinícius: Sempre não, porque a gente pode escrever subconjuntos e não conseguir identificar regras que gerem aqueles pares ordenados. Neste caso, nós temos as regras.

Professora: Vocês concordam? Existem subconjuntos do produto cartesiano em que não seja possível determinar uma regra?

Pedi para os alunos pensarem em um exemplo de relação em que não seja possível determinar uma regra. Começamos uma discussão, novamente, a respeito da existência ou não da regra, da regra ser única e de alguns exemplos de relações. Uma coisa que foi interessante é que não havia um consenso na turma. Cada um tentava argumentar a existência ou não da regra em um contexto de relações matemáticas. Novamente, o problema estava no entendimento do que é uma regra. Mat estava forte em sua posição de que era possível em todos os casos determinar uma regra ou um critério que relacionasse os elementos de dois conjuntos. Por isso pedi para ele pensar em casa e tentar nos explicar e argumentar, no dia seguinte, seu posicionamento.

Retomei a tarefa da reelaboração do enunciado e perguntei se a turma concordava com o enunciado feito pelo grupo de Vinícius. Então, José apresentou a resolução do grupo dele.

José: Considere $A = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\, m = n\}$ e $B = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\, m < n\}$. Os conjuntos A e B são relações? Por quê?

Fernanda apresentou como eles reescreveriam a tarefa. Seria utilizando a noção mais informal de relação. Para encerrar, perguntei se Fernanda, Parede e Gustavo haviam compreendido as resoluções dos outros alunos. Eles disseram que sim.

Para dar continuidade a nossa discussão de relações, perguntei: **Por que 3 é maior que 2?** E obtive as seguintes respostas:

- Porque 3 é o sucessor de 2.
- Porque $3 = 2 + 1$.
- Existe um número natural que somado com 2 resulta no 3 e esse número natural é o 1.

Concordei com todas as afirmações dos estudantes e perguntei como, no caso de dois números naturais arbitrários, eu sei que um deles é maior que o outro, e os alunos continuaram:

Vinícius: Se você consegue escrever o maior como a soma do menor com um número natural.

Professora: Então, $m < n$ - fui escrevendo no quadro.

Vinícius: $[m < n]$ se $m + a = n$, com $a \in \mathbb{N}$.

Vygotsky: Parece que é pra todo a natural, mas não é verdade.

Vinícius: Ah, sim, teria que ser: se existe $a \in \mathbb{N}$, tal que $m + a = n$.

Escrevi no quadro o que sistematizamos e fizemos mais um exemplo. Depois, projetei no telão a definição de Relação de Ordem dos números naturais para compararmos com a que havíamos escrito juntos: "sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Dizemos que m é menor do que n $(m < n)$, se, e somente se, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$." (AGUILAR; DIAS, 2015, p. 28).

Perguntei aos estudantes se a expressão "se e somente se" era importante. Todos disseram que sim e discutimos que nossa definição estava incompleta. Dando sequência, perguntei aos estudantes quais eram as propriedades matemáticas que uma relação matemática poderia satisfazer. Pedi para a Fernanda responder essa pergunta, pois, quando estávamos conversando no pequeno grupo, ela tinha me falado dessas propriedades.

Fernanda: Reflexiva, simétrica e a relação de equivalência e a relação de ordem.

Vygotsky: E a transitiva.

Professora: Relação de equivalência e relação de ordem são propriedades?

Jorge: Não, acho que são tipos de relações.

Professora: Isso, então as propriedades são reflexiva...

Fernanda: Simétrica.

Vygotsky: E transitiva.

Professora: Quando é que uma relação satisfaz a propriedade reflexiva?

Fernanda: Quando x está relacionado com x.

Professora: E esse x pertence a um conjunto. E a transitiva?

Vygotsky: Se a está relacionado com b e b está relacionado com c, então a está relacionado com c.

Professora: Concordam? E a simétrica?

Mat: Se a está relacionado com b, então b está relacionado com a.

Professora: E a antissimétrica?

Parede: Se a está relacionado com b e b relacionado com a, então $a = b$.

Após relembrarmos as propriedades, projetei no telão as propriedades, escritas em linguagem matemática, e pedi para pensarmos nas negações dessas propriedades, ou seja, o que deveria acontecer para que uma relação não fosse reflexiva, transitiva, simétrica e antissimétrica.

Figura 36 - Propriedades das relações matemáticas sobre um conjunto

- ❖ Reflexiva $(x\ R\ x; \forall x \in A)$
- ❖ Simétrica $(x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x; \forall x, y \in A)$
- ❖ Transitiva $(x\ R\ y \land y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z; \forall x, y, z \in A)$
- ❖ Antissimétrica $(xRy \land yRx \Rightarrow x = y; \forall x, y \in A)$.

Fonte: a própria autora

Em seguinda, entreguei a próxima tarefa para todos os grupos, e eles deveriam investigar:

- **As propriedades da relação $\boldsymbol{R} = \{(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ \boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}\}$ (igual).**
- **As propriedades da relação $\boldsymbol{R} = \{(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ \boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}\}$ (menor do que).**

Depois de alguns minutos, iniciamos a discussão no grande grupo. Parede iniciou falando da primeira relação, $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ m = n\}$:

Parede: Ela é reflexiva, simétrica, transitiva e antissimétrica.

Professora: Então, Parede falou que a primeira relação satisfaz todas as propriedades. Todos os outros grupos também concluíram isso, né?

Os estudantes disseram que sim. Além disso, Mat complementou que essa relação era uma relação de equivalência e simultanemanete de ordem. Perguntei para ele por que é que essa primeira relação era considerada de equivalência e ele disse aos colegas que era uma relação de equivalência, pois satisfazia as propriedades reflexiva, transitiva e simétrica. Então Vygotsky interveio:

Vygotsky: A igualdade é a única relação que é de ordem e de equivalência ao mesmo tempo.

Professora: É a única? Quero que você pesquise se realmente é a única relação que satisfaz as duas [ser uma relação de equivalência e de ordem].

Para dar sequência à discussão, perguntei aos estudantes quais eram as propriedades que deveriam ser satisfeitas por uma relação para que ela fosse considerada de ordem.

Parede: Reflexiva, simétrica...

Mat: Simétrica?

Parede: Não, transitiva.

Gustavo: É a primeira [reflexiva], a terceira [transitiva] e a quarta [antissimétrica].

Professora: Certo. Nós encontramos nos livros que essa relação é de ordem parcial, porque existe outro tipo de ordem.

Vygotsky: Ordem total.

Professora: O que precisa para atender à ordem total?

Vygotsky: Precisa atender à reflexiva, eu acho. Estou chutando, na verdade.

Discutimos que, geralmente, não se faz essa diferenciação entre relação de ordem parcial e ordem total, apenas é dito relação de ordem. Então, apresentei aos estudantes a definição de relação de ordem total.

Figura 37 - Definição de relação de ordem total

RELAÇÃO DE ORDEM TOTAL

- Relação de ordem parcial e,
- Para todos elementos $a, b \in \mathbb{N}$, necessariamente aRb ou bRa.

Fonte: a própria autora

Fomos verificar juntos se a primeira relação dada na tarefa era considerada de ordem total. Vimos que ela já era de ordem parcial, pois satisfazia as propriedades reflexiva, transitiva e antissimétrica. Então, bastava verificar o segundo requisito, ou seja, se para todos os elementos $a, b \in \mathbb{N}$, necessariamente, $a = b$ ou $b = a$. Inicialmente os estudantes disseram que sim, então pedi que eles anotassem as respostas deles e que eles deveriam pesquisar a respeito de ordem total, pois, na próxima aula, iríamos retomar essa discussão. Dei mais alguns minutos para os grupos terminarem de discutir a segunda relação dada na tarefa, $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ m < n\}$, e, passados esses minutos, falei para os estudantes que nosso tempo de aula estava acabando e que retomaríamos essa tarefa na próxima aula.

4.1.7 Sétimo Dia de Desenvolvimento

O sétimo e último dia do desenvolvimento da TEA aconteceu em uma quarta-feira e a aula teve início por volta das 21h15min. Iniciei a aula retomando a discussão das relações matemáticas. Perguntei quem havia procurado no dicionário o significado de regra e Mat e Raul me deram as seguintes respostas:

Mat: Uma relação é uma associação de correspondência e a regra é o que faz essa associação.

Raul: De acordo com o Michaelis, regra é: “Relação subjetiva estabelecida entre vários elementos”.

Perguntei aos estudantes se as definições apresentadas por Mat e por Raul esclareciam o nosso problema. Chegamos à conclusão que não. Perguntei se uma definição matemática poderia ser nebulosa, e os alunos disseram que não. Então fiz um fechamento desse assunto dizendo que, em Matemática, tratando-se dos níveis mais formais, uma definição não poderia ser nebulosa e a discussão das últimas duas aulas foi assim. Por esse motivo, uma relação matemática é definida como subconjunto de um produto cartesiano, para que não abra brechas para outros tipos de interpretação.

Além disso, foi possível observar nessas aulas indícios do princípio de níveis, em que os alunos inicialmente adotam uma noção de relação matemática menos formal e percebem, por meio de seus próprios questionamentos, os problemas ao utilizá-la. Pudemos ver nos diálogos que os estudantes percorreram vários níveis de compreensão no decorrer do seu processo de aprendizagem.

Retomamos a definição de relação de ordem dos números naturais, as propriedades que uma relação pode satisfazer e os tipos de relação, que são de equivalência e de ordem. Ademais, relembramos a tarefa que estávamos resolvendo no final da aula e que a primeira relação, que era $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ m = n\}$, satisfazia as quatro propriedades.

Novamente falamos que. para uma relação ser considerada de equivalência, ela deveria satisfazer as propriedades reflexiva, transitiva e simétrica, que foi um consenso entre os estudantes. Para ser considerada uma relação de ordem, os estudantes não sabiam ao certo quais propriedades deveriam ser satisfeitas e não havia um consenso. Então, esclareci que, para ser uma relação de ordem parcial, ela deveria satisfazer a propriedade reflexiva, transitiva e a antissimétrica.

Professora: E a ordem total que o Vygostky comentou na aula passada?

Vygotsky: Ordem total é uma relação que você consegue estabelecer entre todos os elementos do conjunto.

Professora: É isso também, mas não é só isso. Para uma relação de ordem ser considerada total, primeiro ela tem que ser uma relação de ordem parcial. Então, a relação $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ m = n\}$ é de ordem total?

Os alunos disseram que essa relação satisfazia a primeira condição, isto é, ela era de ordem parcial, e também a segunda condição, ou seja, para todos elementos $a,\ b \in \mathbb{N}$, necessariamente aRb ou bRa. Então, pedi para escolherem dois números naturais.

Mat: $a = 2$ e $b = 2$.

Professora: Certo, $2 = 2$ e $2 = 2$, esta ok!

Raul: $a = 2$ e $b = 4$.

Professora: Agora, $2 = 4$ ou $4 = 2$?

De imediato, alguns alunos responderam que sim. Os outros, indignados, responderam que não, e todos viram que essa afirmação não poderia ser verdade. Então retomei a afirmação.

Professora: Para todos elementos $a, b \in \mathbb{N}$, necessariamente $a = b$ ou $b = a$?

Mat: Não.

Professora: Então essa relação [$R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ m = n\}$], ela é de ordem total?

Mat: Sim!

Mat estava confuso, pois a segunda condição, para ser uma relação de ordem total, diz respeito a todos os elementos pertencentes ao conjunto dos números naturais e não aos elementos da relação, visto que, se olharmos para os pares ordenados pertencentes à relação R, de fato, $m = n$ e $n = m$:

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), \dots\}$$

Para ajudá-lo, perguntei aos estudantes a respeito da segunda relação, $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ m < n\}$. Usamos o caso em que $a = 2$ e $b = 3$ e, nesse caso particular, a afirmação era verdadeira, ou seja, $2 < 3$ ou $3 < 2$. Entretanto, no caso em que $a = b = 2$, a afirmação tornava-se falsa, pois 2 não era menor que 2, isto é, a relação $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ m < n\}$ também não era de ordem total, pois existia $a = b = 2$ pertencente ao conjunto dos números naturais, tal que a não estava relacionado com b e nem b estava relacionado com a. Mat chegou à conclusão que nenhuma das duas relações apresentadas na tarefa poderia ser de ordem total e que agora as coisas estavam claras para ele.

Para dar continuidade à tarefa, perguntei quais propriedades a segunda relação, $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ m < n\}$, satisfazia. Os estudantes disseram que era apenas à propriedade transitiva. Mat comentou que, por satisfazer apenas propriedade transitiva, essa relação não seria de equivalência, nem de ordem parcial e muito menos de ordem total.

Professora: Será que ela vai ter outra classificação? Vocês falaram que ela vai ser só transitiva, mas e antissimétrica, ela não vai ser?

Vygotsky havia me falado, na aula anterior, que ela era antissimétrica, mas não se pronunciou no grande grupo quando perguntei inicialmente. Então pedi para ele falar para os colegas a opinião dele.

Vygotsky: Ela vai ser antissimétrica porque... posso ir pro quadro? Acho que é mais fácil.

Professora: Pode.

Vygotsky: Vamos pegar um caso em que x e y sejam iguais. Se $x = y$, isso aqui é verdade [$x < y$]?

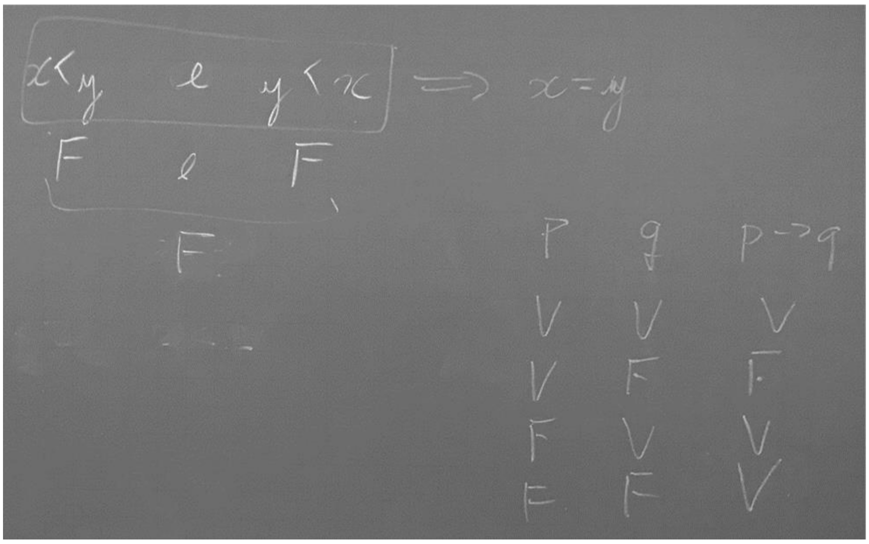
Alunos: Não.

Vygotsky: E isso aqui [$y < x$] é verdade?

Alunos: Não.

Vygotsky: Então, se eu tenho uma proposição falsa e outra proposição falsa, isso tudo aqui [$x < y \wedge y < x$] é falso. Certo, agora vocês lembram da tabela verdade? Se eu tenho um antecedente falso, não importa o que vem depois, pode ser verdadeiro ou falso, mas a implicação é verdadeira.

Figura 38 - Explicação de Vygotsky da propriedade antissimétrica da relação <



Fonte: caderno de campo dos membros do GEPEMA, Gabriel e Vanessa

Professora: Só faltou um detalhezinho no começo. Vamos lá. Se eu assumo que $x < y$ é verdade, y pode ser menor do que x?

Alunos: Não.

Professora: Então, se $x < y$ é verdade, $y < x$ é falso. É que você [Vygotsky] falou, vamos tomar $x = y$, mas não temos que assumir isso para analisar a implicação. É no sentido de que, se $x < y$ é verdadeiro, $y < x$ é falso. Como temos uma conjunção "e", tudo isso aqui, $x < y \wedge y < x$, será falso. Com a continuação do Vygotsky, pela tabela verdade da condicional, se a primeira for uma proposição falsa, independe do que vem depois, a sentença inteira vai ser verdade. Então, por isso é que ela é antissimétrica.

Para finalizarmos essa tarefa, concluímos que a relação $R = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\, m < n\}$ não era reflexiva, não era simétrica; era transitiva e antissimétrica, e que, por não satisfazer as propriedades reflexiva, simétrica e ser transitiva, a relação recebia o nome de relação de ordem estrita. Comentamos que fazia todo sentido, pois, usualmente, falamos que, por exemplo, o número 2 é estritamente menor do que o número 3 devido a essa condição da relação $<$.

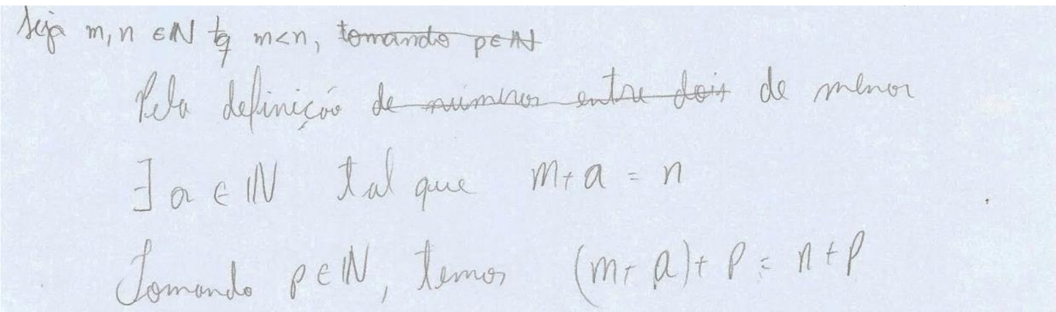
Ao final dessa discussão, é possível dizer que houve um entrelaçamento entre os domínios da matemática, pois, nessas últimas três aulas, nós discutimos coisas que não são o foco da disciplina de Análise, como relações matemáticas, tipos e propriedades de relações matemáticas, tabela verdade e proposições compostas (conjunção e condicional).

Finalizada a discussão dos tipos de relação, dei aos estudantes a última tarefa planejada na trajetória de ensino e aprendizagem, a demonstração da lei do corte da adição e das propriedades da relação de ordem dos números naturais: transitividade, monotonicidade da adição e a monotonicidade da multiplicação. Os grupos de trabalho eram:

- Raul e José.
- Vygotsky e Alexandre.
- Mat e Jorge.
- Parede e Gustavo.

Parede inicou a explicação no quadro da propriedade da monotonicidade da adição. Alexandre e Parede utilizaram a definição de relação de ordem dos números naturais, a propriedade associativa e acomutativa da adição para realizar a demonstração:

Figura 39 - Demonstração da propriedade da monotonicidade da adição feita pelo grupo do estudante Parede


Seja $m, n \in \mathbb{N}$ tq $m<n$, ~~tomando $p \in \mathbb{N}$~~

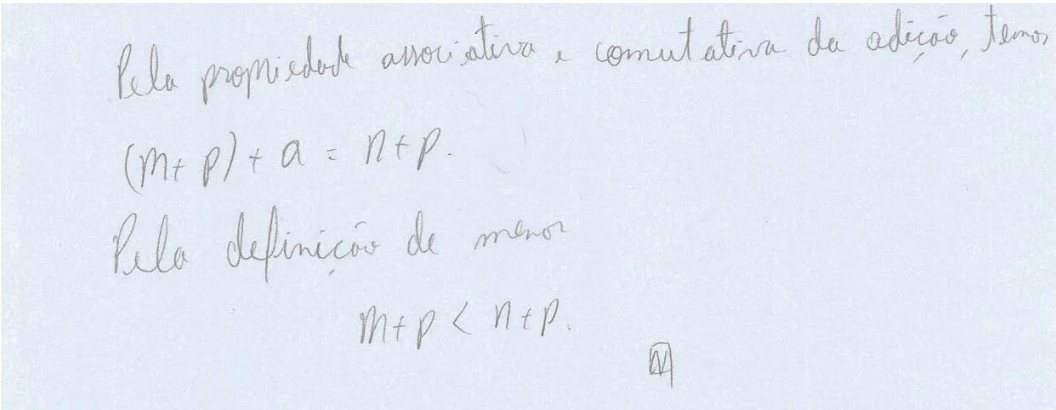
Pela definição de ~~números entre dois~~ de menor

$\exists\, a \in \mathbb{N}$ tal que $m+a=n$

Tomando $p \in \mathbb{N}$, temos $(m+a)+p = n+p$

Fonte: a própria autora

Figura 40 - Demonstração da propriedade da monotonicidade da adição feita pelo grupo do estudante Parede


Pela propriedade associativa e comutativa da adição, temos

$(m+p)+a = n+p$.

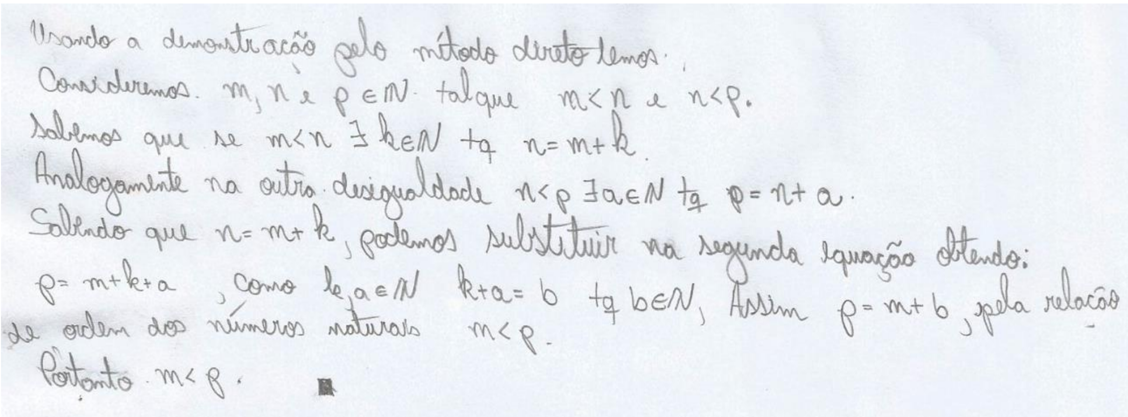
Pela definição de menor

$m+p < n+p$.

Fonte: a própria autora

Ao final da apresentação de Parede, os alunos até bateram palmas. Nesse momento do desenvolvimento da TEA, penso que eles estavam mais próximos uns dos outros após as quatro semanas de trabalho em grupo. Logo após Parede, Mat apresentou a demonstração da propriedade da transitividade, realizada junto com o estudante Jorge, utilizando o método de demonstração direta, assim como Parede e Alexandre.

Figura 41 - Demonstração da propriedade da transitividade feita pelo grupo do estudante Mat


Usando a demonstração pelo método direto temos.

Consideremos m, n e $p \in \mathbb{N}$ tal que $m<n$ e $n<p$.

Sabemos que se $m<n$ $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tq $n=m+k$.

Analogamente na outra desigualdade $n<p$ $\exists\, a \in \mathbb{N}$ tq $p=n+a$.

Sabendo que $n=m+k$, podemos substituir na segunda equação obtendo:

$p=m+k+a$, como $k, a \in \mathbb{N}$ $k+a=b$ tq $b \in \mathbb{N}$, Assim $p=m+b$, pela relação de ordem dos números naturais $m<p$.

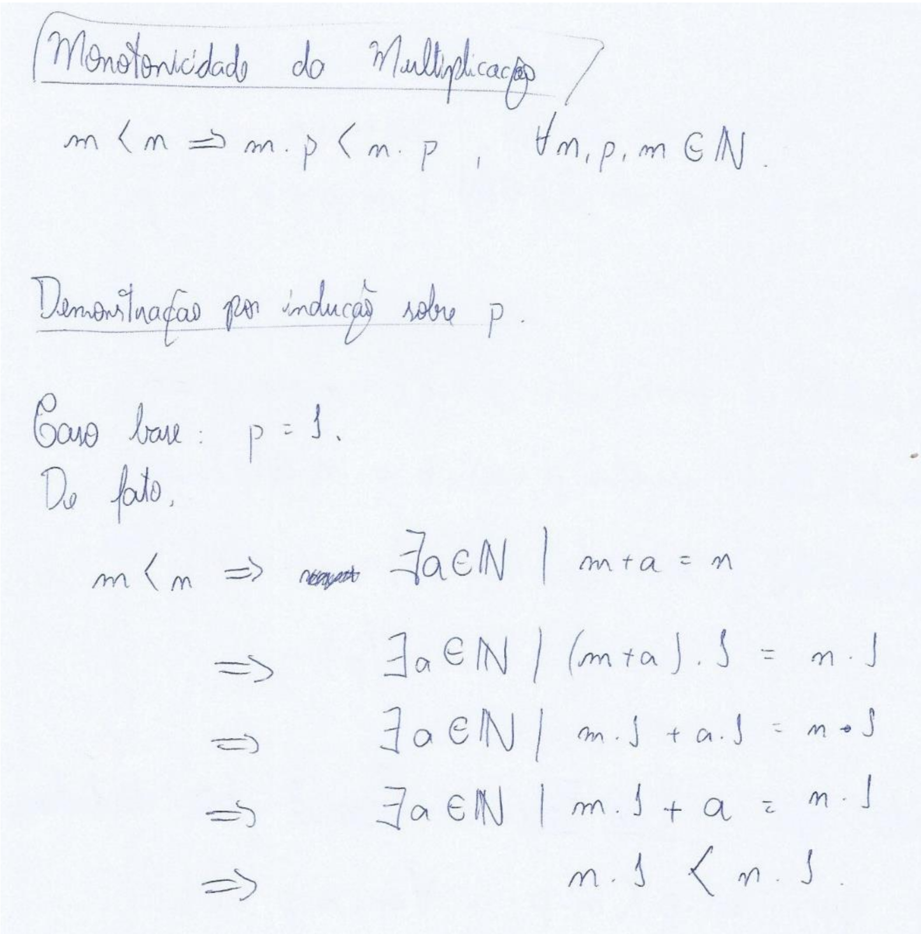
Portanto $m<p$.

Fonte: a própria autora

Enquanto Vygotsky e Raul escreviam suas resoluções no quadro, entreguei as propriedades da lei do corte da multiplicação e da tricotomia para os estudantes tentarem resolver em casa. Além disso, como o tempo da aula estava acabando, aproveitei para agradecer a paciência que os estudantes tiveram comigo nas quatro semanas de trabalho juntos. Pedi desculpas, caso eu tivesse feito alguém se sentir mal e que esperava ter provocado alguma coisa neles nessas quatro semanas.

Vygotsky escolheu o método da indução para realizar a demonstração da monotonicidade da multiplicação, algo inesperado para mim. Eu não havia pensado nisso durante a elaboração da trajetória, e nenhum outro estudante pensou em fazer as demonstrações das propriedades da relação de ordem usando esse método de demonstração.

Figura 42 - Demonstração da propriedade da monotonicidade da multiplicação feita pelo grupo do estudante Vygotsky


Monotonicidade da Multiplicação

$m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$, $\forall m, p, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração por indução sobre p.

Caso base: $p = 1$.

De fato,

$m < n \Rightarrow \exists a \in \mathbb{N} \mid m + a = n$

$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{N} \mid (m + a) \cdot 1 = n \cdot 1$

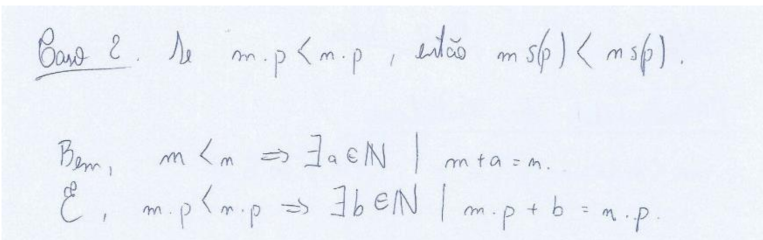
$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{N} \mid m \cdot 1 + a \cdot 1 = n \cdot 1$

$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{N} \mid m \cdot 1 + a = n \cdot 1$

$\Rightarrow m \cdot 1 < n \cdot 1$.

Fonte: a própria autora

Figura 43 - Demonstração da propriedade da monotonicidade da multiplicação feita pelo grupo do estudante Vygotsky


Caso 2. Se $m \cdot p < n \cdot p$, então $m\,s(p) < n\,s(p)$.

Bem, $m < n \Rightarrow \exists a \in \mathbb{N} \mid m + a = n$.

E, $m \cdot p < n \cdot p \Rightarrow \exists b \in \mathbb{N} \mid m \cdot p + b = n \cdot p$.

Fonte: a própria autora

Figura 44 - Demonstração da propriedade da monotonicidade da multiplicação feita pelo grupo do estudante Vygotsky

Logo,

$\exists a,b \in \mathbb{N} \mid (m+a)+(m.p+b) = n+n.p \Longrightarrow$

$\exists a,b \in \mathbb{N} \mid m+(m.p+a)+b = n.S(p) \Longrightarrow$

$\exists (a+b) \in \mathbb{N} \mid m.S(p)+(a+b) = n.S(p) \Longrightarrow$

$m.S(p) < n.S(p)$

Dado que Caso Base, Caso 2 são verdadeiros, temos que $m.p < n.p$, $\forall m,n,p \in \mathbb{N}$.

Fonte: a própria autora

Para finalizarmos a aula, José explicou como ele e Raul fizeram a demonstração da propriedade da lei do corte da multiplicação. Durante a apresentação do José, Raul ia fazendo intervenções para ajudá-lo na explicação da demonstração.

Figura 45 - Demonstração da propriedade lei do corte da adição feita pelo grupo do estudante José

P4. $m+p = n+p \Rightarrow m+n$ Lei do corte da Adição

seja $m,n,p \in \mathbb{N}$

Para $p=1$ temos

$m+1 = n+1 \Rightarrow m=n$

$S(m) = S(n) \Rightarrow m=n$, se os sucessores são iguais então eles são sucessores do mesmo número, logo esses números são iguais.

Logo para $p=1$ é Valido

Suponha $P(k)$ verdade, ou seja

$P(k): m+k = n+k \Rightarrow m=n$ H.I

Deve-se mostrar que $P(k+1)$ é verdade

segue que:

$m+k+1 = n+k+1 \Rightarrow (m+1)+k = (n+1)+k \Rightarrow S(m)+k = S(n)+k \Rightarrow$
$\Rightarrow S(k+m) = S(k+n) \Rightarrow k+m = k+n \Rightarrow m+k = n+k \Rightarrow m+n$

Fonte: a própria autora

Ao final da demonstração do José, os alunos bateram palmas e nós encerramos nosso último dia do desenvolvimento da TEA.

4.1.8 Uma Síntese do Desenvolvimento da TEA

No decorrer do desenvolvimento da trajetória de ensino e aprendizagem, alguns aspectos da Educação Matemática Realística, referentes à dinâmica de aula, papel do aluno e papel do professor, ficaram evidenciados:

- ✓ As intervenções orais do professor podem auxiliar o estudante a relembrar e refinar definições vistas em outros momentos da vida escolar do estudante.
- ✓ O princípio da interatividade fica evidente não somente pela interação em si, mas quando o professor e os estudantes têm a intenção de ajudar um estudante ou um grupo a compreender uma tarefa e suas possíveis resoluções.
- ✓ Convenções matemáticas fazem parte do que a RME chama de conhecimento matemático, pois é algo que foi acordado e validado por um grupo de indivíduos.
- ✓ Intervenções dos estudantes não previstas na TEA podem ocorrer a qualquer instante da aula. Cabe ao professor verificar se a intervenção é oportuna para a discussão naquele momento e caso não seja, esclarecer que será retomada em outro momento.
- ✓ Por vezes, o enunciado de uma tarefa não é suficiente para que o estudante compreenda os objetivos pretendidos pelo professor com determinada tarefa. Portanto, é papel do professor, como guia e orientador, fazer intervenções para que o estudante os compreenda.
- ✓ Por meio do desenvolvimento da TEA, do conhecimento da turma, conhecimento do conteúdo matemático e da experiência como docente que a trajetória de ensino e aprendizagem, ao ser reformulada, vai ficando cada vez mais enriquecida com as modificações feitas pelo professor.
- ✓ Uma aula na perspectiva da RME é caracterizada pela troca de informações constante entre aluno e aluno e professor e aluno.

- ✓ Na dinâmica de aula da RME, os alunos são estimulados a expor suas ideias e serem autores do seu próprio conhecimento e quando são colocados nessa posição podem achar que estão atrapalhando a aula ou falando demais, visto que em aulas na perspectiva tradicional de ensino os estudantes não são incentivados a se posicionarem dessa forma.
- ✓ Por meio de sistematizações, professor e estudantes recapitulam o processo histórico de elaboração do conhecimento matemático agindo com o mesmo espírito que os matemáticos agiam e valorizam as produções dos estudantes.
- ✓ O professor deve propor tarefas aos alunos que podem ser matematizadas de modo que eles elaborem algum conhecimento a partir do que já sabem.
- ✓ Depois de algum tempo ambientados com a dinâmica de aula da RME, os estudantes são capazes de dialogar entre si sem o intermédio do professor.
- ✓ O trabalho em grupos na RME promove a utilização de diferentes estratégias e procedimentos que, às vezes, uma demonstração matemática permite e nem sempre se explora.
- ✓ É papel do aluno, durante a resolução de uma tarefa, justificar suas estratégias de resolução, pedir esclarecimentos a respeito da resolução dos outros colegas, refletir, testar conjecturas e buscar generalizações. Além disso, essas ações são evidências do princípio da atividade.
- ✓ A trajetória de ensino e aprendizagem possui uma perspectiva longitudinal, isto é, há uma forte relação do que foi aprendido anteriormente com o que será aprendido depois.
- ✓ Os estudantes são capazes de alterar a demanda cognitiva de uma tarefa por meio de suas inquietações e questionamentos.

3 O ÚLTIMO ATO

O objetivo deste trabalho de dissertação era analisar o desenvolvimento de uma trajetória de ensino e aprendizagem para a construção do conjunto dos Números Naturais, tendo como objetivos específicos descrever, analisar e discutir as orientações, intervenções, regulações ocorridas durante o desenvolvimento da trajetória de ensino e aprendizagem.

Na elaboração da trajetória de ensino e aprendizagem, fundamentei-me, teoricamente, na Educação Matemática Realística e na Construção dos Números Naturais, ambos abordados no primeiro ato deste trabalho. Depois de elaborada a TEA, eu a desenvolvi em uma turma do 3º ano de graduação em Matemática, na disciplina de Análise Real, que possuía 12 alunos participantes, como foi explicitado no segundo ato, por meio da descrição de aspectos metodológicos da pesquisa e de seus participantes. No terceiro ato, descrevi e analisei o desenvolvimento da TEA, que ocorreu durante sete encontros com os estudantes.

Com relação ao processo de elaboração e desenvolvimento de uma trajetória de ensino e aprendizagem, penso que ele contribui para a formação do professor, em particular do professor de Matemática. Uma contribuição que gostaria de destacar é que eu estava em um processo contínuo de aprendizagem da construção dos números naturais. Eu aprendia durante a elaboração das tarefas para os estudantes, quando pensava nas possíveis resoluções em que eles poderiam pensar, quando os alunos apresentavam resoluções que eu não tinha pensado e levantavam questões que eu não havia me questionado.

Após a elaboração da minha TEA, o quadro 1, que continha exemplos de trajetória de ensino e aprendizagem e seus aspectos, fica reformulado da seguinte maneira:

Quadro 7 - Aspectos evidenciados em trajetórias de ensino e aprendizagem

	Prestes (2013)	**Oliveira (2015)**	**Quilles (2018)**	**Bardaçon (2020)**

Público alvo	Alunos do Ensino Fundamental II	Alunos do Ensino Médio	Alunos do Ensino Médio	Alunos do Ensino Superior
Introdução da TEA	Composta por conteúdos, intenções, materiais e objetivos específicos	Composta por objetivos	Composta por objetivos	Composta por objetivos
Quantidade de tarefas[19]	Uma tarefa	Doze tarefas	Duas tarefas	Dez tarefas
Hipóteses do professor com relação ao processo de ensino e de aprendizagem	Apresenta diálogos entre professor e alunos	Apresenta dúvidas que os estudantes podem ter na resolução da tarefa e faz possíveis encaminhamentos do professor perante as dúvidas apresentadas	Apresenta dúvidas que os estudantes podem ter na resolução da tarefa e faz um possível encaminhamento do professor perante a dúvida apresentada e levanta questionamentos que o professor pode fazer para os estudantes.	Apresenta possíveis resoluções das tarefas e possíveis encaminhamentos do professor a partir delas.

Fonte: a própria autora

[19] Foi possível constatar que os trabalhos de Prestes (2013), Oliveira (2015) e Quilles (2018) não explicitaram a quantidade de aulas necessárias para o desenvolvimento da TEA, visto que o desenvolvimento de uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem depende do tempo e das produções de cada estudante participante.

Ao final do desenvolvimento da TEA, realizei uma entrevista com os estudantes e eles apontaram algumas dificuldades com relação à disciplina de Análise Real. O estudante Vinícius relatou o seguinte problema: “O que a gente acha difícil em análise é o tal do ‘pulo do gato’, porque, se o professor não faz a demonstração lá na frente, ele induz a gente a enxergar aquilo lá, você sozinho não ia enxergar.” Além de Vinícius, Raul também levantou uma questão similar: “Bom, assim, quando o professor faz a demonstração, quando ele dá aula, eu acho super fácil, eu entendo muito o que ele fala, mas, quando é pra eu fazer por conta, tipo pegar as regras e as coisas que ele passou pra eu fazer sozinho uma demonstração, daí eu tenho essa dificuldade, de eu desenvolver uma demonstração sozinho.” A partir da fala de Vinícius e Raul, podemos ver que os alunos não se sentem capazes de realizar demonstrações sozinhos e que os problemas relatados por eles são os mesmos que me motivaram a fazer esta pesquisa.

Entretanto, as aulas na perspectiva da Educação Matemática Realística oportunizaram algumas situações para os estudantes. Parede relatou alguns esclarecimentos com relação ao tema Construção dos Números Naturais: “Eu gostei assim... durante a pesquisa... às vezes eu não sei, acho que acaba sendo um pouco de mania de matemático de querer provar muita coisa, aí os professores falavam ‘a propriedade comutativa’, mas se é uma propriedade, será que tem demonstração? E eu ficava me questionando, né? A sua pesquisa acabou respondendo que tem uma demonstração sim, né?”.

Além disso, alguns alunos relataram que o trabalho em grupo foi importante durante o desenvolvimento da TEA, em particular Mat, que disse o seguinte: “A gente conseguia discutir bastante coisa, algum ponto que um tinha tomado como ponto de partida, o outro auxiliava, e a gente ia discutindo essas ideias, a partir da regra tal, podemos começar assim, através da outra regra, podemos começar assim, acabava vendo das duas formas até. Na fala de Mat, fica explícita a importância do princípio da interatividade no processo de ensino e aprendizagem; nesse caso, por meio do compartilhamento das estratégias e regulação pelos pares.

Um outro aspecto levantado por alguns estudantes foi evidenciado pela seguinte fala de Vinícius: “[...] fato de não ter o professor lá já fazendo e induzindo, o fato de fazer a gente fazer sozinho me ajudou a ficar um pouco mais autônomo.” Esse é um indício do princípio da atividade, em que os estudantes, orientados e guiados pelo professor, tornam-se os responsáveis pela construção do seu conhecimento matemático.

Ainda com relação aos estudantes, ressalto o papel fundamental que eles possuem em aulas na perspectiva da RME. As atitudes do professor são de suma importância na operacionalização dessa abordagem, como já explicitei anteriormente. Entretanto os alunos devem estar na mesma sintonia que o professor. Vimos que nos primeiros encontros os estudantes apenas respondiam as perguntas feitas por mim e resolviam as tarefas propostas e que ao final do desenvolvimento, eles também elaboravam perguntas e participavam mais ativamente das discussões. Uma consequência dessa nova atitude dos estudantes foi a alteração no nível de demanda cognitiva de uma das tarefas, que antes pensávamos ser uma iniciativa que partiria somente do professor.

Após o desenvolvimento da TEA e das entrevistas com os estudantes, percebo que, sim, os conteúdos envolvidos em uma disciplina de Análise Real são complexos, independentemente do método de trabalho escolhido pelo professor. Entretanto, acredito que a abordagem da Educação Matemática Realística pode proporcionar, entre outros aspectos já mencionados, os seguintes:

- a atividade matemática dos estudantes, por meio da explicação e justificação de diversas estratégias de resolução, da reflexão, do teste de conjecturas, da busca de generalizações, entre outras atividades.
- o trabalho em diferentes níveis de compreensão, como foi o caso da discussão a respeito de relações matemáticas;
- o entrelaçamento de conteúdos, quando tratamos de temas que usualmente não fazem parte da ementa de Análise Real, como tipos e propriedades de relações matemáticas, tabela verdade e proposições compostas (conjunção e condicional);
- a orientação, por parte da professora, por meio de intervenções e questionamentos a fim de auxiliar os estudantes em seus processos de ensino e aprendizagem.

No início da descrição e análise, foi frustante escutar os áudios e perceber que, em vários momentos, eu poderia ter feito perguntas para os estudantes, ao invés de responder-lhes imediatamente. A implementação da Educação Matemática Realística, e qualquer tipo de abordagem de ensino, não é simples, até para pessoas como eu, que estão iniciando a docência e não estão acostumadas com um método de ensino em que o professor não é o centro do processo de ensino e de aprendizagem. A vida inteira fomos ensinados que o professor conhece tudo, o professor é quem deve dar as respostas e dismistificar essas ideias. Para mim, foi e ainda é bem difícil. A dificuldade da implementação não se deu por eu acreditar ou não que essa abordagem “dá certo”, até porque eu acredito, mas a aprendizagem é um processo, inclusive no aprender a adotar a RME em minhas práticas de ensino. Apesar da dificuldade, cabe a nós como futuros pesquisadores e professores investir em pesquisas e em práticas de ensino que valorizem abordagens que favorecem o protagonismo do estudante na construção do seu conhecimento.

REFERÊNCIAS

AGUILAR, Ivan; DIAS, Marina Sequeiros. **A Construção dos Números Reais e suas Extensões**. Apostila de minicurso do 4º Colóquio da Região Centro-Oeste da UFF, 2015.

BAKKER, Arthur. Reasoning about shape as a pattern in variability. **Statistics Education Research Journal**, Voorburg, v. 3, n. 2, p. 64-83, nov. 2004.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto editora, 1994.

DE LANGE, Jan. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.

DRIJVERS, Paul. **Learning algebra in a computer algebra environment**. 2003. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade de Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, The Netherlands, 2003.

FERREIRA, Pamela Emanueli Alves. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

IEZZI, Gelson; DOMINGUES, Hygino H. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual Editora, 2003.

LIMA, Elon Lages. Conceitos e controvérsias. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v.1, n.1, 1982.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real:** Funções de uma variável. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016. v. 1.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo: E.P.U, 1986.

MENDES, Marcele Tavares. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275f. Trabalho Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2014.

OLIVEIRA, Julio Cezar Rodrigues de. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o Ensino de Logaritmos na Perspectiva da Resolução de Problemas.** 2015. 127f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

OLIVEIRA, Rodrigo Camarinho de. **Matematização**: estudo de um processo. 2014. 62f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PASSOS, Adriana Quimentão. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e GEPEMA**: algumas aproximações. 2015. 147 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

PIRES, Magna Natalia Marin. **Oportunidade para aprender**: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases. 2013. 122f. Tese (Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PRESTES, Diego Barboza. **Proposta de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem**. 2013. 39f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

QUILLES, Anderson Leandro Gonçalves. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o Ensino de Função Quadrática na Perspectiva da Resolução de Problemas.** 2018. 111f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. **Trajetória Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico.** 2016. 104 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014

SCHASTAI, Marta Burda. **Tall e Educação Matemática Realística**: algumas aproximações. 2017. 179f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Uma configuração da reinvenção guiada.** 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

______. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. 2018. 166f. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

TREFFERS, A; GOFFREE, F. **Rational analysis of realistic mathematics education – The Wiskobas program**. In: STREEFLAND, Leen (Ed.), Annual-conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 2, Utrecht: PME, 1985. v. 2, p. 97-121.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. **Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9**. Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.

______. **The role of contexts in assessment problems in mathematics**. For the Learning Mathematics, v. 25, n. 2, 2005, p. 2-9.

______. (org.). **Los niños aprenden matemáticas**. México: Correo del maestro: La Vasija, 2010.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja; DRIJVERS, Paul. Realistic Mathematics Education. *In*: LERMAN, Stephen (ed.). **Encyclopedia of mathematics education**. London: Springer, 2014, p. 521-525.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Demonstração das propriedades de adição e multiplicação de números naturais

Propriedade	Demonstração
$(a+b)+c = a+(b+c)$ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$	Considere que b e c são constantes. Vamos mostrar a associatividade da adição utilizando indução matemática (em a). i. Para $a = 1$: $$(1+b)+c = S(b)+c = S(b+c)$$ $$1+(b+c) = S(b+c)$$ ii. Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $(a+b)+c = a+(b+c)$. iii. Vamos mostrar que essa propriedade é válida para $S(a)$: $$(S(a)+b)+c = S(a+b)+c = S((a+b)+c)$$ $$S(a)+(b+c) = S(a+(b+c)) = S((a+b)+c)$$ Por i, ii, iii temos que a adição em $\mathbb{N}$ é associativa.
$n+1 = 1+n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$	Vamos mostrar que o lema é válido utilizando indução matemática (em n). i. Para $n = 1$: $$1+1 = S(1) = 2$$ $$1+1 = S(1) = 2$$ ii. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n+1 = 1+n$. iii. Vamos mostrar que ele é válido para $S(n)$. $$S(n)+1 = S(n+1)$$ $$1+S(n) = S\big(S(n)\big) = S(1+n) = S(n+1)$$ Por i, ii, iii provamos que o lema é válido em $\mathbb{N}$.
$n+m = m+n$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$	Considere que m é constante. Vamos mostrar que a comutatividade da adição é válida utilizando indução matemática (em n).

	i. Para $n = 1$: $$1 + m = m + 1$$ Sabemos que essa igualdade é válida pelo lema demonstrado anteriormente. ii. Seja $S(n) \in \mathbb{N}$ tal que $n + m = m + n$. iii. Vamos mostrar que o lema é válido para $S(m)$. $$S(n) + m = S(n + m) = S(m + n)$$ $$m + S(n) = m + (1 + n)$$ $$= (m + 1) + n = (1 + m) = S(m) + n =$$ $$S(m + n)$$ Por i, ii, iii temos que a adição em $\mathbb{N}$ é comutativa.
$m + p = n + p \Rightarrow m = n$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$	Considere que m e n são constantes. Vamos mostrar que a lei do corte da adição é válida, utilizando indução matemática (em p). i. Para $p = 1$: $$m + 1 = n + 1 \;\Rightarrow\; 1 + m = 1 + n \Rightarrow$$ $$S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$$ ii. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n + p \Rightarrow m = n$. iii. Vamos mostrar que a propriedade é válida para $S(p)$. $$m + S(p) = n + S(p) \Rightarrow\; S(p) + m$$ $$= S(p) + n$$ $$\Rightarrow S(p + m) = S(p + n) \Rightarrow S(m + p)$$ $$= S(n + p)$$ $$\Rightarrow m + p = n + p \Rightarrow m = n$$ Por i, ii, iii temos que a lei do corte da adição é válida em $\mathbb{N}$.
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$	Considere que b e c são constantes. Vamos mostrar a lei distributiva utilizando a indução matemática (em a) i. Para $a = 1$. $$1 \cdot (b + c) = b + c$$

	$1 \cdot b + 1 \cdot c = b + c$ ii. Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. iii. Vamos mostrar que essa propriedade é válida para $S(a)$. $S(a) \cdot (b + c) = (b + c) + a \cdot (b + c)$ $= b + c + a \cdot b + a \cdot c$ $S(a) \cdot b + S(a) \cdot c = b + a \cdot b + c + a \cdot c =$ $a \cdot b + a \cdot c + b + c$ Por i, ii, iii temos que a lei distributiva é válida em $\mathbb{N}$.
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$	Considere que b e c são constantes. Vamos mostrar a lei distributiva utilizando a indução matemática (em a). i. Para $a = 1$. $(1 + b) \cdot c = S(b) \cdot c = c + b \cdot c$ $1 \cdot c + b \cdot c = c + b \cdot c$ ii. Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. iii. Vamos mostrar que essa propriedade é válida para $S(a)$. $(S(a) + b) \cdot c = S(a + b) \cdot c = c + (a + b) \cdot c$ $= c + a \cdot c + b \cdot c$ $S(a) \cdot c + b \cdot c = c + a \cdot c + b \cdot c$ Por i, ii, iii temos que a lei distributiva é válida em $\mathbb{N}$.
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$	Considere que b e c são constantes. Vamos mostrar a associatividade da multiplicação utilizando a indução matemática (em a). i. Para $a = 1$. $(1 \cdot b) \cdot c = b \cdot c$ $1 \cdot (b \cdot c) = b \cdot c$ ii. Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. iii. Vamos mostrar que essa propriedade é válida para $S(a)$.

	$(S(a) \cdot b) \cdot c = (b + a \cdot b) \cdot c = b \cdot c + (a \cdot b) \cdot c$ $S(a) \cdot (b \cdot c) = (b \cdot c) + a \cdot (b \cdot c)$ $= b \cdot c + (a \cdot b) \cdot c$ Por i, ii, iii temos que a lei distributiva é válida em $\mathbb{N}$.
$n \cdot 1 = 1 \cdot n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$	Considere que n é constante. Vamos mostrar que o lema é válido utilizando indução matemática (em n). i. Para $n = 1$: $1 \cdot 1 = 1$ $1 \cdot 1 = 1$ ii. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot 1 = 1 \cdot n$. iii. Vamos mostrar que o lema é válido para $S(n)$. $S(n) \cdot 1 = (1 + n) \cdot 1 = 1 \cdot 1 + n \cdot 1$ $= 1 + 1 \cdot n = 1 + n = S(n)$ $1 \cdot S(n) = S(n)$ Por i, ii, iii temos que o lema é válido em $\mathbb{N}$.
$n \cdot m = m \cdot n$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$	Considere que m é constante. Vamos mostrar que a comutatividade da multiplicação é válida utilizando indução matemática (em n). i. Para $n = 1$: $1 \cdot m = m \cdot 1$ Sabemos que essa igualdade é válida pelo lema demonstrado anteriormente. ii. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot m = m \cdot n$. iii. Vamos mostrar que ela é válida para $S(n)$. $S(n) \cdot m = m + n \cdot m$ $m \cdot S(n) = m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \cdot 1$ $= n \cdot m + 1 \cdot m = n \cdot m + m$ $= m + n \cdot m$ Por i, ii, iii temos que a multiplicação em $\mathbb{N}$ é comutativa.

$m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$ $\forall\, n, m, p \in \mathbb{N}$	Considere que m e n são constantes. Vamos mostrar que a lei do corte da multiplicação é válida utilizando indução matemática (em p). i. Para $p = 1$: $m \cdot 1 = n \cdot 1 \Rightarrow 1 \cdot m = 1 \cdot n \Rightarrow m = n$ ii. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$. iii. Vamos mostrar que a propriedade é válida para $S(p)$. $m \cdot S(p) = n \cdot S(p) \Rightarrow S(p) \cdot m = S(p) \cdot n$ $\Rightarrow m + p \cdot m = n + p \cdot n$ Desta última igualdade, temos duas possibilidades. Ou $m = n$, ou $m \neq n$. Se $m = n$, já temos o que queríamos. Vamos supor que $m \neq n$. Caso 1: $m > n$, ou seja, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + q$. Dessa forma: $(n + q) + p \cdot (n + q) = n + p \cdot n$ $\Rightarrow n + q + p \cdot n + p \cdot q = n + p \cdot n$ $\Rightarrow n + q + p \cdot q = n$ $\Rightarrow S(n + q + p \cdot q) = S(n)$ $\Rightarrow 1 + n + q + p \cdot q = 1 + n$ $\Rightarrow 1 + q + p \cdot q = 1$ $\Rightarrow S(q + p \cdot q) = 1$ Absurdo, pois o $1 \in \mathbb{N}$ não é sucessor de nenhum número natural. Caso 2: $n > m$, ou seja, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + q$. Dessa forma: $m + p \cdot m = (m + q) + p \cdot (m + q)$ $\Rightarrow m + p \cdot m = m + q + p \cdot m + p \cdot q$ $\Rightarrow m = m + q + p \cdot q$ $\Rightarrow S(m) = S(m + q + p \cdot q)$ $\Rightarrow 1 + m = 1 + m + q + p \cdot q$ $\Rightarrow 1 = S(q + p \cdot q)$

	Absurdo, pois o $1 \in \mathbb{N}$ não é sucessor de nenhum número natural. Pelos casos 1 e 2, concluímos que m só pode ser igual a n, como queríamos mostrar. Por i, ii, iii temos que a lei do corte da multiplicação é válida em $\mathbb{N}$.

APÊNDICE B

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido[20]

"Análise de uma trajetória de aprendizagem para a Construção dos Números Naturais"

Prezado(a) Senhor(a):

Gostaríamos de convidá-lo (a) para participar da pesquisa "Análise de uma trajetória de aprendizagem para a Construção dos Números Naturais" a ser realizada na Universidade Estadual de Londrina**.** O objetivo da pesquisa é "Elaborar e aplicar uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem, e, descrever e analisar criticamente a prática pedagógica com a utilização dessa TEA[21], como recurso metodológico para o ensino da Construção dos Números Naturais, em aulas de Análise Real no 3º ano de Licenciatura em Matemática da UEL". Sua participação é muito importante e ela se daria da seguinte forma: participando efetivamente das aulas da disciplina de Análise Real e participando de uma entrevista que será realizada na UEL, em local e horário, que não sejam os da disciplina, combinados com cada participante. O objetivo dessa entrevista é traçar o perfil de cada estudante desta turma.

Esclarecemos que sua participação é totalmente voluntária, podendo você recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Esclarecemos, também, que suas informações serão utilizadas para esta e futuras pesquisas e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Serão realizadas gravações, por meio de áudio, que serão acessadas pelos membros do GEPEMA[22], ao qual a pesquisa está diretamente vinculada, pelos orientadores Regina Luzia Corio de Buriasco e Paulo Antonio Liboni Filho e pela própria pesquisadora.

Esclarecemos ainda, que você não pagará e nem será remunerado(a) por sua participação. Garantimos, no entanto, que todas as despesas decorrentes da pesquisa serão ressarcidas, quando devidas e decorrentes especificamente de sua participação.

---

[20] Termo de Consentimento Livre Esclarecido apresentado, atendendo, conforme normas da Resolução 466/2012 de 12 de dezembro de 2012.
[21] Trajetória de Ensino e Aprendizagem.
[22] Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação.

Os benefícios esperados são: contribuir com os futuros professores de Matemática enquanto alunos da disciplina, por meio do ensino da Construção dos Números Naturais, e com uma prática pedagógica alternativa para o ensino de Análise Real, proporcionando ao estudante a experiência de tornar-se autor do seu conhecimento matemático. Quanto aos riscos existentes, eles são mínimos, podendo ser diretos ou indiretos, consideradas as suas dimensões física, psíquica, moral, intelectual, social, cultural ou espiritual. Entretanto eu lhe oferecerei todo amparo até que o desconforto causado seja eliminado.

Caso você tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos poderá me contatar: Ana Carolina Bardaçon, Rua Érico Veríssimo, 75, Rolândia – PR, (43) 99981-8757 ou (43) 3255-5145, ana.bardacon@gmail.com**,** ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Londrina, situado junto ao LABESC – Laboratório Escola, no Campus Universitário, telefone 3371-5455, e-mail: cep268@uel.br.

Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas devidamente preenchida, assinada e entregue a você.

Londrina, 10 de outubro de 2018.

Pesquisador Responsável

RG: 12.346.837-6

____, tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo em participar **voluntariamente** da pesquisa descrita acima.

Assinatura (ou impressão dactiloscópica):______________________________

Data:____________________

Obs.: Caso o participante da pesquisa seja menor de idade, o texto deve estar voltado para os pais e deve ser incluído ainda, campo para assinatura do menor e do responsável.

APÊNDICE C

Roteiro da Entrevista Semiestrututada

1) Em que ano você ingressou no curso de Matemática?

2) Você está matriculado na habilitação Licenciatura ou Bacharelado, ou faz as duas em concomitância?

3) É a primeira vez que você está cursando a disciplina de Análise Real? Se não, já cursou quantas vezes?

4) Quais foram suas maiores dificuldades com relação à disciplina nos dois primeiros bimestres?

5) Qual foi a sua maior dificuldade ou seu maior desafio na realização das tarefas durante o período da pesquisa?

6) Quais foram suas impressões e sentimentos durante as aulas que ocorreram no período da pesquisa?

7) Você tem algum comentário, dúvida ou sugestão?

8) Para garantir seu anonimato, seu nome não irá para a versão final deste trabalho. Dessa forma, qual nome você gostaria que utilizássemos para identificá-lo?