



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

DIEGO BARBOZA PRESTES

**UM OLHAR REALÍSTICO PARA TAREFAS DE
PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA DE UMA COLEÇÃO DE
LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Londrina
2021

DIEGO BARBOZA PRESTES

**UM OLHAR REALÍSTICO PARA TAREFAS DE
PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA DE UMA COLEÇÃO DE
LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Regina Luzia Corio de Buriasco

Londrina
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Prestes, Diego Barboza.

Um olhar realístico para tarefas de probabilidade e estatística de uma coleção de livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental / Diego Barboza Prestes. - Londrina, 2021.
128 f.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática Realística - Tese. 2. Probabilidade e Estatística - Tese. 3. Tarefas de Livros Didáticos de Matemática - Tese. 4. Oportunidade de Aprendizagem - Tese. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

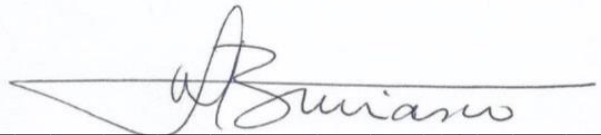
CDU 51

DIEGO BARBOZA PRESTES

**UM OLHAR REALÍSTICO PARA TAREFAS DE PROBABILIDADE E
ESTATÍSTICA DE UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DE
MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

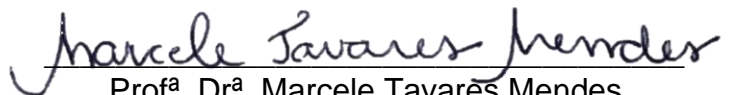
BANCA EXAMINADORA



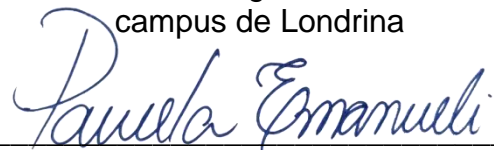
Prof.^a Dr.^a Regina Luzia Corio de Buriasco
(Orientadora)
Universidade Estadual de Londrina



Prof.^a. Dr.^a. Cristina Cirino de Jesus
Secretaria de Estado da Educação do
Paraná



Prof.^a. Dr.^a. Marcele Tavarês Mendes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
campus de Londrina



Prof.^a. Dr.^a. Pamela Emanuelli Alves Ferreira
Universidade Estadual de Londrina



Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
campus de Toledo

Londrina, 1 de fevereiro de 2021.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me dado saúde, disposição para aprender. Aos meus pais, que me ensinaram a ser uma pessoa de caráter, assim como eles, tendo certos valores acima de tudo e por sempre me incentivarem a estudar, fazendo esforços consideráveis para que isso fosse possível.

À minha orientadora, professora Regina Luzia Corio de Buriasco, não só pela constante e intensa orientação neste trabalho, mas sobretudo pelo seu respeito, seus ensinamentos a respeito da vida e por sempre acreditar em meu potencial, talvez até mais do que eu.

Aos professores, Cristina Cirino de Jesus, Marcele Tavares Mendes, Pamela Emanuelli Alves Ferreira e Rodolfo Eduardo Vertuan por aceitaram fazer parte da banca examinadora, pelas leituras cuidadosas e considerações que contribuíram significativamente para o desenvolvimento deste trabalho.

À minha esposa Adriane, por todos os momentos ao meu lado dividindo sonhos e angústias, pela compreensão e paciência, por sempre fazer o possível para me manter confortável para estudar, especialmente no último ano, em que ficamos confinados dentro de casa devido à pandemia.

À minha filha Manuela, por ser meu grande amor, meu incentivo a não desistir dos meus objetivos e o ponto de equilíbrio que parecia me faltar.

Aos companheiros do GEPEMA, que considero ser bem mais do que colegas de estudo, pelo companheirismo e momentos de aprendizagens que compartilhamos há alguns anos.

Aos meus professores da Educação Básica, que me inspiraram, em particular o professor de Matemática e Física Edmir Berzotti, que me deu o primeiro impulso para seguir na vida acadêmica.

A todos os amigos que me ajudaram, principalmente aqueles que, mesmo sem saber ao certo o que eu estava fazendo, me apoiaram.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro concedido em grande parte desta pesquisa.

DIFERENÇAS/SIMILITUDE

Alguns têm mais moedas que outros
as mulheres sabem ajeitar pequenos objetos
e prender os cabelos de forma graciosa
assistimos à posse de presidentes
e somos iguais e deles diferentes
vamos também a casamentos
mas nem todos nos casamos
alguns escrevem livros outros assaltam
casas e corações
e há quem saiba fazer coisas surpreendentes
com as mãos.

Nisto diferimos uns dos outros.

Mas há uma hora
em que não há mais diferenciação:
– um enterro, por exemplo.

Um enterro
é o lugar da indisfarçável humilhação.
Todos ali
taciturnos
vendo o que vai lhes suceder um dia
com a alma ao rés do chão.

A morte portanto não é um fruto
que nunca comeremos
não é deixar de ir ao teatro
adiar a viagem
invejar no outro
o que nunca seremos.

A morte é a mesmíssima para todos.
Além é claro de certos sentimentos
ou sensações como a fome
o ódio
o medo
e eu ia dizer... o amor.
Mas este
convenhamos
é um sentimento tão complexo
que vou deixar
para tratar dele noutra poesia.

SANT'ANNA, Affonso Romano de

PRESTES, Diego Barboza. **Um olhar realístico para tarefas de probabilidade e estatística de uma coleção de livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental**. 2021. 128f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo descrever, discutir e analisar tarefas de matemática das unidades específicas que abordam a temática Probabilidade e Estatística da coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental mais distribuída pelo governo federal no PNLD 2017, à luz da Educação Matemática Realística, abordagem ao ensino de matemática de origem holandesa, que tem a atividade do aluno em matematizar situações realísticas diretamente associada ao processo de aprendizagem matemática. Para isso, as tarefas das unidades escolhidas foram agrupadas em descritores de acordo com o que era solicitado que o aluno fizesse em cada uma delas e, a partir disso, realizadas considerações a respeito das tarefas dos agrupamentos que apresentaram as maiores frequências. O foco das considerações foi apresentar possibilidades de intervenções baseadas em questionamentos que os professores podem fazer ao trabalhar com as tarefas, visando a um trabalho que esteja de acordo com os princípios da Educação Matemática Realística. As análises revelaram que a maioria das tarefas estudadas pode ser classificada como sendo de reprodução, de acordo com De Lange (1999), e de baixo nível de demanda cognitiva, de acordo com Smith e Stein (1998), isto é, a maioria das tarefas envolve apenas ações relacionadas com a memorização e a reprodução de “conhecimentos” praticados com frequência (rotineiramente). No entanto, esta pesquisa deixou evidente que não é necessário ter em mãos tarefas que apresentem boas características na perspectiva da Educação Matemática Realística para realizar um trabalho que favoreça os processos de ensino e de aprendizagem, é possível realizar um bom trabalho utilizando tarefas usuais de livros didáticos, acompanhadas de intervenções do professor.

Palavras-chave: Educação Matemática Realística. Probabilidade e Estatística. Tarefas de Livros Didáticos de Matemática. Oportunidade de Aprendizagem.

PRESTES, Diego Barboza. **A realistic view of probability and statistics tasks from a collection of elementary school math textbooks**. 2021. 128f. Thesis (Graduate Program in Science and Mathematical Education) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

ABSTRACT

This research aimed to describe, discuss and analyze mathematics tasks of specific units that address the Probability and Statistics theme found in the collection of Mathematics textbooks of the Elementary School final years, more distributed by the federal government National Textbook Plan (PNLD 2017), in the Education Realistic Mathematics perspective. This Dutch approach to teaching mathematics has the student activity in mathematizing realistic situations directly associated with the mathematical learning process. To achieve this goal, we clustered the tasks into descriptors according to what the student was asked to perform in each one. Then, we made considerations regarding the clusters tasks with the highest frequency, as it was not feasible to discuss each task individually. Our focus was to present possibilities of question-based interventions that teachers can carry out when working with tasks. Interventions that are consistent with the Realistic Mathematical Education principles. The analyzes revealed that most of the tasks studied are classified as reproduction, according to De Lange (1999), and low-level cognitive demand, according to Smith and Stein (1998). That is, most tasks involve only actions related to the memorization and reproduction of frequently practiced knowledge. However, the research made it evident that teachers can make teaching and learning processes favorable even with tasks without good characteristics from the Realistic Mathematical Education perspective. It is possible to do a good job using usual textbook tasks. But in this case, teachers' attitudes and interventions are sorely needed.

Key words: Realistic Mathematics Education. Probability and Statistics. Mathematics Textbook Tasks. Learning opportunity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Livros didáticos de Matemática distribuídos pelo governo federal no PNLD 2017.....	23
Figura 2 – Capas dos livros didáticos da coleção Praticando Matemática no PNLD 2017	28
Figura 3 – Quantidade de exemplares da coleção Praticando Matemática distribuídos no PNLD 2017.....	28
Figura 4 – Distribuição dos Campos da Matemática da coleção Praticando Matemática no PNLD 2017	31
Figura 5 – Distribuição satisfatória dos Campos da Matemática para o PNLD 2017	32
Figura 6 – Etapas do trabalho	35
Figura 7 – Procedimentos realizados durante a escrita deste relatório	44
Figura 8 – Fatos históricos que culminaram no Instituto Freudenthal	48
Figura 9 – Fatos que marcaram a vida profissional de Hans Freudenthal	49
Figura 10 – Visão resumida de Freudenthal sobre a educação matemática.....	51
Figura 11 – Sequência de figuras.....	53
Figura 12 – Princípios da RME.....	60
Figura 13 – Ações de alunos e professor no trabalho com as tarefas.....	62
Figura 14 – Quadro de tarefas matemáticas	69
Figura 15 – Tarefa 10 do volume 7 da coleção Praticando Matemática.....	79
Figura 16 – Descritores mais frequentes das tarefas das unidades específicas da temática Probabilidade e Estatística da coleção Praticando Matemática.....	80
Figura 17 – Tarefa que se enquadra no descritor que apresenta a maior frequência no volume 6 da coleção Praticando Matemática	85
Figura 18 – Tarefa que se enquadra no descritor que apresenta a maior frequência no volume 7 da coleção Praticando Matemática	90

Figura 19 – Tarefa que se enquadra no descritor que apresenta a maior frequência no volume 8 da coleção Praticando Matemática.....	93
Figura 20 – Tarefa que se enquadra no descritor que apresenta a maior frequência no volume 9 da coleção Praticando Matemática.....	96
Figura 21 – Questionamentos enquadrados nos princípios da RME.....	99
Figura 22 – Quadro de tarefas matemáticas com questionamentos do professor..	100
Figura 23 – Tarefa 4 do volume 7 da coleção Praticando Matemática.....	117
Figura 24 – Tarefa 14 do volume 8 da coleção Praticando Matemática.....	118

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Unidades e páginas da coleção Praticando Matemática no PNLD 2017	29
Quadro 2 – Distribuição dos conteúdos da coleção Praticando Matemática no PNLD 2017	30
Quadro 3 – Relação entre os princípios do Wiskobas e da RME	61
Quadro 4 – Algumas definições de tarefa	66
Quadro 5 – Níveis de demanda cognitiva de tarefas matemáticas.....	72
Quadro 6 – Descritores e quantidade de tarefas	77
Quadro 7 – Quatro tipos de questionamentos	82
Quadro 8 – Questionamentos a respeito de gráficos de barras verticais e suas intenções.....	87
Quadro 9 – Questionamentos a respeito de gráficos de setores e suas intenções..	91
Quadro 10 – Questionamentos a respeito de possibilidades e suas intenções.....	94
Quadro 11 – Questionamentos a respeito de probabilidade e suas intenções.....	97

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO: AS PERCEPÇÕES DE UM PROFESSOR – AUTOR DE LIVROS DIDÁTICOS	13
COMEÇANDO DO COMEÇO	13
MEU TRABALHO NA PRODUÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DESTINADOS À EDUCAÇÃO BÁSICA	14
CONSIDERAÇÕES	19
INTRODUÇÃO	21
BREVE HISTÓRICO DOS LIVROS DIDÁTICOS NO BRASIL E DO PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO E DO MATERIAL DIDÁTICO.....	24
A COLEÇÃO PRATICANDO MATEMÁTICA NO PNLD 2017	27
A ESTRUTURA DO TRABALHO	33
1. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	34
1.1 PASSO A PASSO	35
2. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA	45
2.1 OS PRIMÓDIOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA	45
2.1.1 Hans Freudenthal, o Precursor da Educação Matemática Realística	48
2.2 ASPECTOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA	50
2.2.1 Matemática como Atividade Humana.....	51
2.2.1.1 Matematização	52
2.2.2 <i>Design</i>	54
2.2.2.1 Modelos emergentes	54
2.2.3 Reinvenção-guiada	55
2.2.4 Níveis no processo de aprendizagem	57
2.2.5 Fenomenologia Didática.....	58
2.3 PRINCÍPIOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA	58

2.4 AULA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA	61
3. TAREFA: UM PONTO DE VISTA.....	66
3.1 DEMANDA COGNITIVA	70
3.2 CARACTERÍSTICAS DE BOAS TAREFAS NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA.....	74
4. DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO	76
4.1 TAREFAS MAIS FREQUENTES DAS UNIDADES ESPECÍFICAS DA TEMÁTICA PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA DE CADA VOLUME DA COLEÇÃO PRATICANDO MATEMÁTICA.....	80
4.1.1 Volume 6 da Coleção Praticando Matemática	84
4.1.2 Volume 7 da Coleção Praticando Matemática	89
4.1.3 Volume 8 da Coleção Praticando Matemática	92
4.1.4 Volume 9 da Coleção Praticando Matemática	95
4.1.5 Visão Geral	98
5 APONTAMENTOS.....	102
5.1 APONTAMENTOS ESPECÍFICOS	102
5.2 APONTAMENTOS GERAIS.....	104
REFERÊNCIAS.....	109
APÊNDICES	116
APÊNDICE A – OBSERVAÇÕES RELACIONADAS AO ASSUNTO MATEMÁTICO CONSIDERADO	117
APÊNDICE B – AGRUPAMENTO DETALHADO DAS TAREFAS	120
ANEXO	124
ANEXO A – DINÂMICA DE EXECUÇÃO DO PNLD	125

APRESENTAÇÃO: as percepções de um professor – autor de livros didáticos

Faço questão de explicitar que este texto não tem intenção alguma de generalizar o modo como são produzidos os livros didáticos de Matemática no Brasil, não se refere aos objetivos das editoras e, muito menos, à capacidade e às intenções dos profissionais da área com alguns dos quais eu tive o privilégio de trabalhar. Este relato apresenta apenas percepções pessoais e, conseqüentemente, subjetivas, de aproximadamente uma década de participação em produções de livros didáticos de Matemática.

COMEÇANDO DO COMEÇO

Ao conquistar o diploma de Licenciado em Matemática, poucos meses antes de completar 22 anos, e morando com meus pais em minha cidade de origem, as primeiras perguntas que me fiz foram “e agora? o que vou fazer da vida?”, porque eu trabalhava dando aulas particulares e com a quantidade de alunos que possuía e o valor que cobrava de cada um deles não conseguia me manter sozinho, dependia dos meus pais.

Eu imaginava que, ao me formar na área de exatas, principalmente em Matemática, teria diversas opções de emprego devido a ter relativamente poucas pessoas formadas na área. Sonhava com um emprego que me pagaria suficientemente bem para eu constituir uma família e viver uma vida confortável. Doce ilusão.

Logo após terminar a graduação, não tentei teste seletivo algum para a Pós-Graduação em nível de Mestrado, por falta de compreensão do que era um mestrado, por não saber ao certo que especificidade seguir e por julgar não estar preparado naquele momento. Mesmo tendo alguma noção do que representaria ter um certificado de especialização na área, eu também não tinha condições financeiras de continuar meus estudos nesse segmento, porque, em cursos *lato sensu*, mesmo em instituições públicas, geralmente é necessário pagar uma mensalidade, e isso estava fora de cogitação naquele momento.

Antes de iniciar o ano letivo seguinte (2007), consegui, com o auxílio de colegas da graduação, algumas manhãs de aula como professor titular em uma escola particular de Educação Básica em uma cidade cerca de 50 km de distância

da cidade em que morava. Para mim, foi o máximo, pois, pela primeira vez em minha vida, eu teria um trabalho com registro na carteira profissional e na área da minha graduação. Logo no final do mesmo ano (2007), porém, comecei a me questionar se era aquilo mesmo que eu queria para toda a minha vida, porque as viagens em ônibus circular eram cansativas e o valor recebido por aula era baixo. No entanto, eu tinha certeza de que, para atingir novos horizontes, a única maneira era continuar a estudar. Assim, me inscrevi e passei no processo seletivo para cursar uma especialização¹ que se iniciaria no próximo ano letivo (2008), o que comprometeu boa parte dos meus vencimentos com as mensalidades, mas eu estava confiante de que o “investimento” valeria a pena.

Nesse curso de especialização, reencontrei um colega que estudou comigo no primeiro ano de graduação e ele me convidou para trabalhar com a produção de livros didáticos de Matemática, com o que ele já trabalhava há algum tempo. Essa empresa terceirizada, que prestava serviço para diversas editoras, localizava-se na mesma cidade em que eu morava e me ofereceu um valor financeiro bem mais alto do que eu recebia como professor. Principalmente por esses motivos, decidi trocar a sala de aula por um computador em um escritório, onde permaneci fixo por cerca de uma década.

MEU TRABALHO NA PRODUÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DESTINADOS À EDUCAÇÃO BÁSICA

Meu primeiro contato com a produção de livros didáticos foi nessa empresa, onde aprendi muito, muito mesmo, desde noções gerais do *modus operandi* de um modelo de produção editorial até aspectos relacionados a escrita, forma, padrões, referências confiáveis e o cuidado com o que se escrevem livros que poderiam ser lidos por milhões de pessoas em todo o território nacional. De imediato, comecei a perceber o quanto foi importante ter bons professores na graduação que exigiam uma boa escrita em demonstrações de teoremas e provas matemáticas, o que me auxiliou bastante nesse trabalho.

Minha primeira atribuição no mundo da produção didática foi procurar referências confiáveis em *sites* e no acervo da biblioteca particular da empresa para compor tarefas e seções do livro que apresentassem certa

¹ Especialização em Estatística na Universidade Estadual de Londrina (UEL).

contextualização. Nesse período, eu comecei a perceber o cuidado que é tomado para inserir informações verídicas nos livros didáticos, trabalho que, guardada as devidas proporções, assemelha-se ao de um jornalista sério, que se compromete e tem a responsabilidade de divulgar informações fidedignas e advindas de fontes confiáveis.

Passado algum tempo, comecei a produzir as tarefas e algumas seções específicas do livro didático, sempre sob a orientação dos responsáveis pela obra. Depois de alguns anos, passei a produzir também a parte teórica dos capítulos, ou unidades, e indicar o tipo de tarefa que eu julgava conveniente que o livro tivesse para que outros colaboradores produzissem, trabalho que se aproximava ao dos autores. Por fim, fui convidado a ser um dos autores de uma coleção de livros didáticos de Matemática destinada ao Ensino Médio², momento em que tive a oportunidade de discutir com outros profissionais aspectos editoriais, assim como aspectos relacionados à abordagem dos assuntos matemáticos a serem apresentados.

Durante minha caminhada trabalhando com a produção de originais de livros didáticos de Matemática, tive a oportunidade de participar da construção de diversas coleções didáticas dos diferentes níveis de ensino da Educação Básica com equipes compostas por profissionais qualificados e extremamente competentes. Grande parte dessas coleções foi produzida com o intuito de ser comercializada com o governo federal por meio do Programa Nacional do Livro e do Material Didático³ (PNLD⁴). Embora o lucro unitário da comercialização dos livros didáticos com o governo fosse bem menor do que no chamado mercado privado, destinado às escolas particulares, a quantidade de exemplares envolvidos no negócio com o governo é muito maior. Certamente esse é um dos principais motivos, se não o principal, pelos quais trabalhei mais em obras destinadas ao governo federal.

No período em que trabalhei nesse segmento, o processo de

² CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante Matemática: Ensino Médio**. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016 (coleção Quadrante Matemática).

³ Nomenclatura adotada após o Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017, que “unificou as ações de aquisição e distribuição de livros didáticos e literários, anteriormente contempladas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e pelo Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE)” (BRASIL, 2019b).

⁴ O PNLD, originalmente sigla do Programa Nacional do Livro Didático, foi criado em 1985 (MATOS, 2012; MUNAKATA, 2012).

avaliação⁵ das coleções didáticas realizadas pelo PNLD se norteava por editais públicos lançados trienalmente, em ciclos que abordavam os três níveis da Educação Básica – anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Os editais eram identificados pelo ano em que os alunos das escolas públicas utilizariam os livros pela primeira vez. Por exemplo, os livros didáticos do PNLD 2019 chegaram às escolas no ano de 2019 e esses mesmos livros seriam utilizados nos dois anos seguintes até iniciar um novo ciclo, exceto os livros consumíveis⁶, geralmente destinados às primeiras etapas dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e de algumas disciplinas específicas. Durante um ciclo, quando necessário, o governo federal adquiria mais cópias dos mesmos livros para repor os livros avariados ou não devolvidos ao final do ano letivo.

Assim, o ano de publicação dos livros didáticos sempre é anterior ao ano em que os alunos os utilizam, porque existe um período de pelo menos três anos entre a escrita dos originais e o uso do livro na sala de aula. De maneira geral, nesse período, o governo federal lança o edital público, autores e editoras produzem os livros, há a avaliação dos livros, sob responsabilidade do governo federal, a divulgação dos resultados, a escolha dos livros pelos professores, a impressão e a logística para a distribuição dos livros didáticos para as escolas públicas de todo o território nacional⁷.

Concordo com Matos (2012) quando ela diz que, mesmo todo o processo sendo longo e demorado, podendo até acarretar defasagem de conteúdos em determinadas disciplinas no momento em que o livro chega às mãos dos alunos, esse não é o maior dos problemas desse sistema. O problema parece estar na relação existente entre a produção dos livros didáticos por parte dos autores e editoras e as diretrizes dos editais do PNLD.

Afinal, dentro de um sistema longo, podemos inferir que os manuais são produzidos cuidadosamente para serem aprovados pelo programa, do contrário seriam desperdiçados grandes investimentos financeiros de ambos os lados, tanto das editoras quanto do governo. Esse caráter do processo de avaliação dos manuais didáticos demonstra como o PNLD influi de forma profunda e direta no mercado editorial de livros didáticos no Brasil [...] (MATOS, 2012, p. 68).

⁵ “A partir de 1996, instituiu-se a avaliação prévia, pela qual os livros didáticos inscritos no Programa passaram a ser examinados por especialistas. Somente os livros que obtivessem o parecer favorável poderiam ser escolhidos pelos professores” (MUNAKATA, 2012, p. 61-62).

⁶ Aqueles em que os alunos escrevem no próprio livro.

⁷ O Anexo A apresenta toda a dinâmica de execução do PNLD de maneira mais detalhada.

O resultado de aprovação ou reprovação de uma coleção de livros didáticos no PNLD é tão importante para as editoras que tem reflexos até nas vendas para o mercado privado, porque existem escolas particulares que substituem seus livros de acordo com a lista das coleções aprovadas pelo governo federal disponível no Guia do livro didático⁸.

Com relação a essa necessidade de autores e editoras serem quase “obrigados” a produzirem suas coleções de livros didáticos para passarem pelo crivo do PNLD e, assim, obter um retorno financeiro satisfatório, concordo com a seguinte afirmação de Munakata (2012, p. 62):

Não é impossível que tal situação tenha incentivado a produção de livros direcionada não diretamente aos professores e aos alunos, mas aos avaliadores, geralmente recrutados da universidade e, segundo a crítica corrente, nem sempre habituados às práticas de sala de aula.

Em diversas oportunidades, tive a nítida sensação de estar produzindo um livro didático que atendesse, em primeiro lugar, às especificações impostas pelos editais do PNLD e, em segundo, às possíveis necessidades dos professores e alunos. Mesmo que seja possível produzir um bom material nessas condições, acredito que os autores e as editoras deveriam pensar primeiro no público-alvo, nos consumidores do produto, isto é, deveriam pensar primeiramente nos professores e alunos que realmente utilizam os livros didáticos no dia a dia. No entanto, de acordo com Munakata (2012, p. 62), “as editoras, ao menos no Brasil, buscam cada vez mais se adequar às exigências do governo [...], além das idiosincrasias dos avaliadores”. Desse modo, é possível inferir que, “mesmo sem produzir diretamente os livros didáticos, através do PNLD o governo participa ativamente de todo o processo de elaboração e publicação dos manuais escolares” (MATOS, 2012, p. 72).

O PNLD possui duas fases principais para os autores e editoras: “a primeira é marcada pela candidatura dos livros para avaliação e posterior liberação da listagem dos indicados; a segunda é a fase em que os professores a partir dessa listagem escolhem quais livros utilizarão em suas salas de aula” (MATOS, 2012, p. 68). Em conversas informais com outros autores de livros didáticos, era comum escutar queixas de que essa segunda fase nem sempre ocorria como deveria, fato

⁸ “O FNDE [Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação] disponibiliza o guia de livros didáticos em seu portal na internet e envia o mesmo material impresso às escolas cadastradas no censo escolar. O guia orientará a escolha dos livros a serem adotados pelas escolas” (BRASIL, 2019a).

que também se encontra na literatura.

A escolha do livro (tanto na rede pública, quanto na privada), em última instância, é feita por professores ou pela coordenação pedagógica da escola. Daí que, como no caso da indústria farmacêutica, a publicidade desse produto não focaliza seus consumidores finais (IMENES; LELLIS, 2018, p. 241).

Essa afirmação vai ao encontro do que declara Lopes (2018, p. 180), ao dizer que são “remotas as possibilidades de que livros possam ser bem adotados sem o suporte dos departamentos comerciais e de *marketing* das editoras, são eles que acabam por determinar o perfil da adoção”. Assim, é provável que os grandes grupos editoriais levem alguma vantagem na venda de livros didáticos para o governo federal, independentemente da qualidade do produto, pois as consideradas “pequenas editoras” nem sempre têm tantos recursos para investir na divulgação dos livros. Mas e o poder de escolha do livro didático exercido pelos professores, como fica?

Infelizmente é um mito a livre escolha do LD [livro didático] pelos professores e nem sempre a adoção é resultado da análise e do desejo deles. São vários os casos relatados de contaminação da escolha por práticas nem sempre republicanas: há casos de fraudes na escolha; há interferência de autoridades das escolas e Secretarias de Educação; envolvimento de agentes das editoras; compra casada; professores que escolhem uma coleção e recebem outra; cidades ou Estados em que uma determinada editora conseguiu 100% de adoção (em alguns casos de todas as disciplinas) etc. Tais práticas são conhecidas pelo Ministério Público e pelo FNDE. Há, inclusive, editoras que fizeram acordo de leniência para poder inscrever livros no PNLD (LOPES, 2018, p. 180).

Concordo com a ideia de Munakata (2012, p. 64) de que a “produção do livro didático serve certamente para a acumulação do capital, mas onde há o capital, há também o trabalho, os trabalhadores e suas práticas”. Historicamente, nas mais diferentes esferas da sociedade, essa busca por acumulação de capital corrompe algumas pessoas, o que as leva a cometer crimes, ofuscando o trabalho e os trabalhadores que estão envolvidos no processo.

Desde quando comecei a trabalhar no mercado editorial, eu também tinha a noção de que, “em nosso país, no ambiente acadêmico e em diversas instâncias educacionais, o livro didático é olhado com certa desconfiança” (IMENES; LELLIS, 2018, p. 185). Obviamente, o fato de a escolha dos livros didáticos no PNLD não ocorrer da maneira esperada em todas as escolas e de haver outros fatores, como o descaso generalizado com a Educação Básica por parte de grande parte das nossas autoridades, contribui para tal desconfiança. Eu, porém, concordo com

Imenes e Lellis (2018, p. 185) que essa mesma desconfiança “também se deve ao desconhecimento do ofício dos autores de obras didáticas”.

É recorrente ouvir colegas que não estão envolvidos com a produção didática afirmarem que os livros didáticos são todos iguais e que todos os autores são plagiadores. Para mim, esse tipo de afirmação generalista não condiz com a realidade, embora tenham ocorrido casos de plágio no mercado editorial, como relata Imenes e Lellis (2018). No entanto, existem profissionais sérios trabalhando nesse ramo que se preocupam com a questão do plágio. Talvez o que esses colegas precisam compreender é que:

De fato, um autor de textos escolares não cria os conteúdos a serem ensinados, [...]. Aparentemente se vale de material já pronto, que apenas organiza. Entretanto, mesmo usando textos de terceiros, ou saberes de domínio comum, já universalizados, o autor precisa recriá-los para torná-los acessíveis na faixa etária de seu público. Nessa transposição didática, que é sutil e complexa, reside toda sua criação (IMENES; LELLIS, 2018, p. 239).

Também reconheço que, devido a certas tradições, ao período histórico em que nos encontramos, aos documentos oficiais vigentes e às diretrizes dos editais do PNLD, os livros didáticos de Matemática geralmente abordam os mesmos assuntos matemáticos para um mesmo nível de ensino. Mesmo assim, os livros didáticos não são todos iguais, grande parte das coleções apresenta seções específicas, organizações e relações entre a Matemática e outros assuntos e entre a própria Matemática, bem como abordagens e contextos diferentes.

CONSIDERAÇÕES

Não posso negar que trabalhar na autoria de uma coleção de livros didáticos da área de que se gosta e que se estuda é muito gratificante em diversos aspectos. Mesmo com todas as restrições impostas pelo mercado editorial, o mais interessante é ter em mãos o “poder” e a responsabilidade de propor em cada seção, de cada capítulo do livro, uma trajetória de aula que pode ser utilizada por milhares de professores e alunos.

Essa proposta deve ser muito bem elaborada, porque tem-se consciência, ao produzir o original, de que os “livros didáticos de papel não são hipertextos. Sendo assim temos que fazer escolhas e selecionar conteúdos e atividades, podemos sugerir interações, mas nunca interagir com os alunos”

(LOPES, 2018, p. 163). A interação com os alunos vai depender da subjetividade de cada professor, da compreensão que ele faz da proposta apresentada no livro, de seu compromisso e objetivos com a aprendizagem dos alunos, de sua posição epistemológica, de sua capacidade de se adaptar a determinadas situações, entre outros.

Em todos os livros didáticos, de cuja produção do original participei, posso afirmar, com certeza, que fiz o meu melhor trabalho, de acordo com as condições que me foram oferecidas, e penso que, de algum modo, consegui inserir certas ideias que, acredito, podem auxiliar na aprendizagem tanto dos alunos quanto dos professores que utilizarem tais livros didáticos.

Obviamente, esses são apenas alguns pontos, de tantos que poderiam ser apresentados neste texto, porque o trabalho com a produção de livros didáticos vai muito além do relatado, “envolve dedicação à arte da escrita, envolve clareza de intencionalidade em relação ao professor e ao aluno, envolve paixão ao estudo constante de seu objeto, envolve entender o mercado” (SANCHEZ, 2018, p. 262).

INTRODUÇÃO

Pode-se dizer que, por um lado, muitos dos professores que ensinam Matemática na Educação Básica em escolas públicas de todo o Brasil utilizam o livro didático como um de seus principais, se não o único, material de apoio. Por outro lado, o trabalho pedagógico em sala de aula vem recebendo cada vez mais atenção e interesse de pesquisadores em Educação Matemática.

Nesse contexto, o objeto de estudo desta pesquisa é o conjunto das tarefas contidas em uma coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, aprovada pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD 2017, nas unidades específicas que abordam a temática Probabilidade e Estatística. Tem-se como foco analisá-las tal como estão nos livros e apresentar possibilidades de intervenções para um trabalho em aulas de matemática à luz da Educação Matemática Realística (RME⁹).

Por meio deste estudo, também se dá continuidade aos trabalhos desenvolvidos pelos integrantes do GEPEMA¹⁰, podendo inspirar outras pesquisas envolvendo tarefas de livros didáticos de Matemática no âmbito do grupo, assim como fizeram Ferreira (2013) e Forster (2020). Julga-se tal ponto importante, pois uma pesquisa não deve encerrar-se em si mesma.

Ao mostrar ser factível uma alternativa para desenvolver esse trabalho na perspectiva da Educação Matemática Realística adotada pelo GEPEMA, isto é, um trabalho mais próximo dos alunos com as tarefas usuais de uma coleção de livros didáticos de Matemática, acredita-se estar, de alguma maneira, contribuindo para a área de Educação Matemática, porque, além do trabalho de Forster (2020)¹¹, não se conhecem outros trabalhos dessa natureza no Brasil. Isso poderá gerar um material didático interessante para o uso do professor que ensina Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e em outros níveis de ensino, uma vez que poderá servir de inspiração para aulas de Matemática, assim como para equipes autorais que produzem livros didáticos de Matemática.

⁹ RME - *Realistic Mathematics Education*.

¹⁰ Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação.

¹¹ Este trabalho se diferencia do trabalho de Forster (2020), porque, no trabalho desse autor, o objeto de estudo era composto por um capítulo específico de todas as coleções de livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD 2018 (Ensino Médio) e, no trabalho em tela, o objeto de estudo é uma das coleções de livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD 2017 (anos finais do Ensino Fundamental), ou seja, os objetos de estudo são diferentes. Além disso, a exploração dos conteúdos e as análises são originais, pois cada um tem seu olhar específico.

Após aproximadamente uma década de participação em produções de livros didáticos de Matemática, obviamente que essa temática faz parte de um capítulo importante da vida profissional e pessoal deste autor. Esse tema, que geralmente fomenta discussões e pesquisas nas mais diferentes áreas do conhecimento, encaixar-se-ia perfeitamente na em sua trajetória acadêmica, principalmente por ter alguma experiência no ramo, fato que pode diferenciar este pesquisador de outros pesquisadores do tema. Quando surgiu a oportunidade de realizar uma pesquisa aliando a temática “livro didático de Matemática” e “Educação Matemática Realística”, um dos temas de interesse do GEPEMA.

Este estudo tem como objetivo geral descrever, discutir e analisar, à luz da RME, tarefas de matemática que abordam a temática Probabilidade e Estatística da coleção de livros didáticos selecionada. Para alcançá-lo, foram elencados os seguintes objetivos específicos:

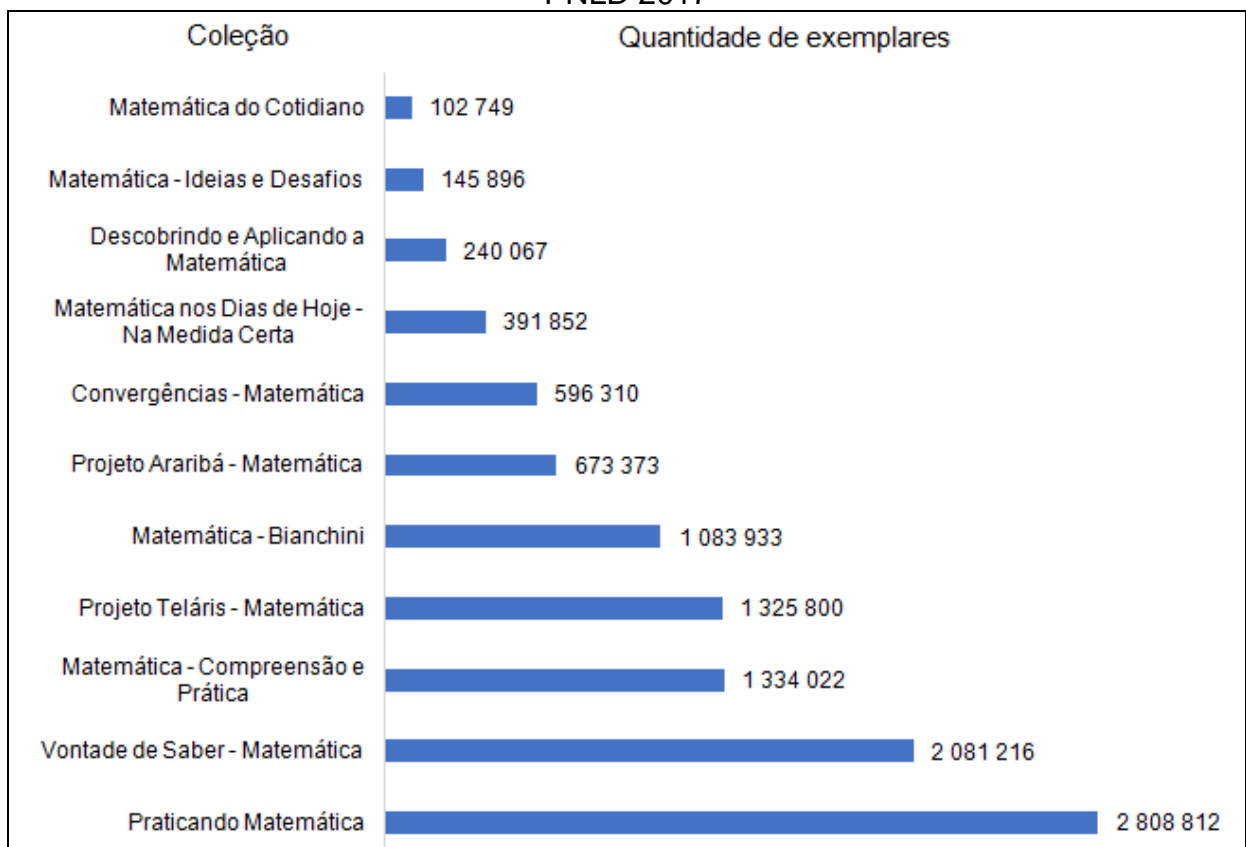
- construir descritores¹² para as tarefas das unidades específicas de Probabilidade e Estatística da coleção de livros didáticos selecionada;
- agrupar as tarefas das unidades específicas de Probabilidade e Estatística da coleção de livros didáticos selecionada, de acordo com seu respectivo descritor;
- classificar as tarefas mais frequentes das unidades específicas de Probabilidade e Estatística da coleção de livros didáticos selecionada, de acordo com Butts (1997);
- identificar e discutir aspectos de demanda cognitiva¹³ das tarefas mais frequentes das unidades específicas de Probabilidade e Estatística da coleção de livros didáticos selecionada;
- apresentar possibilidades de intervenção para as tarefas mais frequentes das unidades específicas de Probabilidade e Estatística da coleção de livros didáticos selecionada, à luz da RME.

¹² Neste trabalho, é a descrição de informações que possibilita que todas as tarefas que atendem ao mesmo registro sejam identificadas em um agrupamento.

¹³ Neste trabalho, considera-se que o que uma tarefa exige dos estudantes indica a demanda cognitiva da tarefa, que é o tipo e nível de pensamento que sua resolução exige dos alunos, (no nível de ensino em que é proposta) e que, assim, pode encaminhar a oportunidades de aprendizagem.

A coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental mais distribuída pelo governo federal no PNLD 2017 foi a 4ª edição renovada da coleção *Praticando Matemática*¹⁴, da Editora do Brasil, de autoria de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos (BRASIL, 2019c). A Figura 1 apresenta os 10 784 030 livros de Matemática distribuídos no PNLD 2017, de acordo com as onze coleções aprovadas pelo Ministério da Educação (MEC) para esse programa.

Figura 1 – Livros didáticos de Matemática distribuídos pelo governo federal no PNLD 2017



Fonte: Brasil (2019c).

A escolha da temática Probabilidade e Estatística se deu, principalmente, pelo fato de haver unidades específicas em cada um dos quatro volumes da coleção *Praticando Matemática*, por ser um assunto matemático relativamente novo do currículo do Ensino Básico do Brasil, introduzido oficialmente por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais em 1997 (BORBA et al., 2011), e por sua inegável relevância.

¹⁴ A partir deste momento, sempre que for feita referência à coleção *Praticando Matemática* será à sua 4ª edição renovada.

A Estatística é uma importante ciência vista por muitos pesquisadores como essencial para a formação cidadã, pois carrega conceitos e habilidades necessárias para uma vida ativa e participativa. [...] Viver em uma sociedade, na qual hoje é construída por inúmeras informações quantitativas (sejam elas econômicas, sociais, culturais ou políticas), exige-se, no mínimo, noções básicas da Estatística (PEREIRA; DIAS; DOS SANTOS JUNIOR, 2018, p. 1008).

Como será utilizada uma coleção de livros didáticos do catálogo do PNLD 2017, julgou-se conveniente apresentar um panorama histórico geral desse programa governamental que viabiliza a distribuição gratuita de livros didáticos das mais diferentes disciplinas escolares para as instituições públicas de Ensino Básico de todo o Brasil. Em seguida, faz-se uma apresentação da coleção *Praticando Matemática*.

BREVE HISTÓRICO DOS LIVROS DIDÁTICOS NO BRASIL E DO PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO E DO MATERIAL DIDÁTICO

De algum modo, os programas governamentais dedicados às obras didáticas estão associados com parte da história dos livros didáticos no Brasil. “O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é o mais antigo dos programas voltados à distribuição de obras didáticas aos estudantes da rede pública de ensino brasileira e iniciou-se, com outra denominação [Instituto Nacional do Livro], em 1937” (BRASIL, 2019d).

Os livros didáticos surgiram na Grécia antiga, com Platão, e desde então esse material vem fazendo parte das instâncias formais de ensino em diversas civilizações (SILVA, 2012). No Brasil, o início da história dos livros didáticos remonta à chegada dos Jesuítas, em 1549, com a expedição de Tomé de Souza, quando foram trazidos livros didáticos para a alfabetização nos colégios fundados próximos às igrejas (CURY, 2009). Com relação aos livros didáticos de Matemática produzidos no Brasil, ao que tudo indica, os primeiros títulos foram escritos pelo militar português José Fernandes Pinto Alpoim e intitulados “Exame de Artilheiros”, de 1744, e “Exame de Bombeiros”, de 1748, destinados à formação de militares para defender o Brasil, então colônia portuguesa, de invasores (VALENTE, 2008).

O uso mais sistemático de livros didáticos no Brasil teve início ainda no período colonial, após a criação do Colégio Pedro II no Rio de Janeiro, na década de 1830. Essa instituição, que servia à elite da população naquele período, pautava-

se pela educação e cultura europeia, especificamente, pela sociedade francesa, por isso os livros didáticos em francês ou traduzidos para o português eram importados da França. Esse panorama foi alterado com mais representatividade a partir da década de 1930, quando Francisco Campos esteve à frente do Ministério da Educação e Saúde Pública no governo de Getúlio Vargas e, sob a ideia nacionalista de nação forte e unida, propôs uma reforma para padronizar programas e métodos de ensino (SILVA, 2012).

De modo geral, as políticas nacionais destinadas à avaliação, regulação e distribuição dos livros didáticos foram marcadas por três momentos: a criação da Comissão de Instrução Pública, no século XIX, responsável por elaborar projetos de lei para melhorar a organização pedagógica da escola primária, a criação da Comissão Nacional do Livro Infantil, Comissão Nacional do Ensino Primário e da Comissão Nacional do Livro Didático, todas na década de 1930, e, por fim, a criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 1985 (MATOS, 2012).

No Brasil, o primeiro ato oficial sobre políticas públicas para o livro didático ocorreu em 1937, quando, por iniciativa do Ministro Gustavo Capanema, foi criado o Instituto Nacional do Livro (INL) (CURY, 2009), instituído pelo Decreto-Lei nº 93 de 21 de dezembro de 1937 (BRASIL, 2019b).

Entre as atribuições do INL constava edição de obras literárias julgadas de interesse para a formação cultural da população, a elaboração de uma enciclopédia e um dicionário nacionais e, finalmente, a expansão, por todo o território nacional, do número de bibliotecas públicas (CURY, 2009, p. 122-123).

No ano seguinte, foi editado o Decreto-Lei nº 1.006, de 30 de dezembro de 1938, que instituiu a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD¹⁵), estabelecendo as condições de produção, importação e utilização do livro didático em todo o território nacional. Nesse período, consideravam-se como livro didático os compêndios, que apresentavam a matéria das disciplinas na íntegra, ou parcialmente, e os livros de leitura que os alunos utilizavam em classe (TELO; SCHUBRING, 2018).

O Decreto-Lei nº 1.006 foi alterado pelo Decreto-Lei nº 8.460 de 26

¹⁵ Nessa época os livros didáticos eram adotados por um longo período, muitos deles tinham numerosas e sucessivas edições. Em geral, os autores não possuíam formação acadêmica na área em que escreviam, eram personalidades consagradas no meio intelectual. Somente a partir da década de 1960 é que grande parte dos livros didáticos passou a ser escrita por autores com formação específica, processo que se deu pela criação das faculdades de Filosofia na década de 1930 (SILVA, 2012).

de dezembro de 1945, que manteve a estrutura geral do anterior, mas introduziu novas normativas, como atribuir ao INL a publicação oficial dos livros didáticos. Em 1952, o diretor do Instituto Nacional de Estudos Pedagógicos (INEP), Anísio Teixeira, criou a Campanha do Livro Didático e Manuais de Ensino (CALDEME) com o objetivo de elaborar livros didáticos, guias e manuais de ensino. A CALDEME foi incorporada pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Educacionais (CBPE) em 1955 e transformada em Campanha Nacional de Material de Ensino (CNME) pelo Decreto nº 38.556 de 12 de janeiro de 1956 (CURY, 2009).

No Governo Castelo Branco, foi criada a Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático (COLTED) pelo Decreto nº 59.355 de 4 de outubro 1966, “com a finalidade de incentivar, orientar, coordenar e executar as atividades do Ministério da Educação e Cultura relacionadas com a produção, a edição, o aprimoramento e a distribuição de livros técnicos e de livros didáticos” (CURY, 2009, p. 124). A COLTED veio atender a um acordo entre o Ministério da Educação e a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional que assegurou recursos para a distribuição gratuita de 51 milhões de livros no período de três anos (BRASIL, 2019b).

Com a Portaria nº 35, de 11 de março de 1970, do Ministério da Educação, o governo federal “passou a produzir livros didáticos em coedição com o setor privado. Essa incumbência foi dada ao Instituto Nacional do Livro e, posteriormente, à Fundação Nacional de Material Escolar (FENAME)” (SILVA, 2012, p. 809). Em 1971, o INL passou a desenvolver o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF), assumindo as atribuições que eram de responsabilidade da COLTED (BRASIL, 2019b).

Por meio do Decreto nº 77.107 de 4 de fevereiro de 1976, o governo federal assumiu a compra de parte dos livros didáticos, pois, por falta de recursos, as escolas municipais foram excluídas do programa (BRASIL, 2019b). Com a extinção do INL, a Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME) ficou responsável pela execução das atividades do programa do livro didático (CURY, 2009).

A FENAME foi extinta após a criação da Fundação de Assistência ao Estudante (FAE) pela Lei nº 7.091 de 18 de abril de 1983 (CURY, 2009). A FAE propôs uma ampliação do programa para todo o Ensino Fundamental e que os professores participassem da escolha dos livros didáticos (BRASIL, 2019b).

Ao iniciar o processo de redemocratização do Brasil, instituiu-se o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), por meio do Decreto nº 91.542 de 19 de agosto de 1985 (BRASIL, 2019b), trazendo mudanças:

- Indicação do livro didático pelos professores;
- Reutilização do livro, implicando a abolição do livro descartável e o aperfeiçoamento das especificações técnicas para sua produção, visando maior durabilidade e possibilitando a implantação de bancos de livros didáticos;
- Extensão da oferta aos alunos de 1ª e 2ª série das escolas públicas e comunitárias;
- Fim da participação financeira dos estados, passando o controle do processo decisório para a FAE e garantindo o critério de escolha do livro pelos professores (BRASIL, 2019b, *on-line*).

Algumas das razões para a criação do PNLD foram:

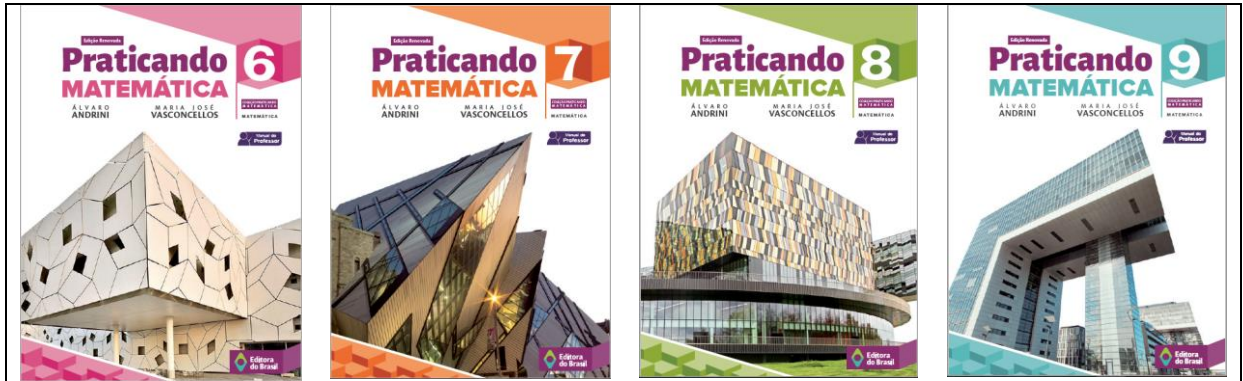
[...] os propósitos de universalização e melhoria do ensino de 1º grau, contidos no Programa Educação para Todos; a valorização do magistério, inclusive mediante a efetiva participação do professor na indicação do livro didático; e reduzir gastos da família com a educação (CURY, 2009, p. 126).

Apesar de o PNLD ter sido instituído em 1985, “somente passou à função de aquisição e distribuição ampla dos livros didáticos para as escolas públicas a partir de 1995” (MATOS, 2012, p. 65). Em 1992, por exemplo, devido a limitações orçamentárias, o programa restringiu-se ao atendimento até a antiga 4ª série do Ensino Fundamental (BRASIL, 2019b). Desde sua instituição, o PNLD passou por diversas alterações e, provavelmente, passará por outras com o decorrer dos anos.

A COLEÇÃO PRATICANDO MATEMÁTICA NO PNLD 2017

A coleção *Praticando Matemática*, da Editora do Brasil, de autoria de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, para o PNLD 2017, é a 4ª edição renovada da obra, composta por quatro volumes, destinada aos alunos do 6º, 7º, 8º e 9º ano do Ensino Fundamental, que se denominará de volume 6, volume 7, volume 8 e volume 9, respectivamente. A Figura 2 mostra um *fac-símile* da capa de cada livro dessa coleção.

Figura 2 – Capas dos livros didáticos da coleção Praticando Matemática no PNLD 2017



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a; 2015b; 2015c; 2015d).

O Guia de livros didáticos do PNLD 2017 apresenta a seguinte visão geral da coleção Praticando Matemática:

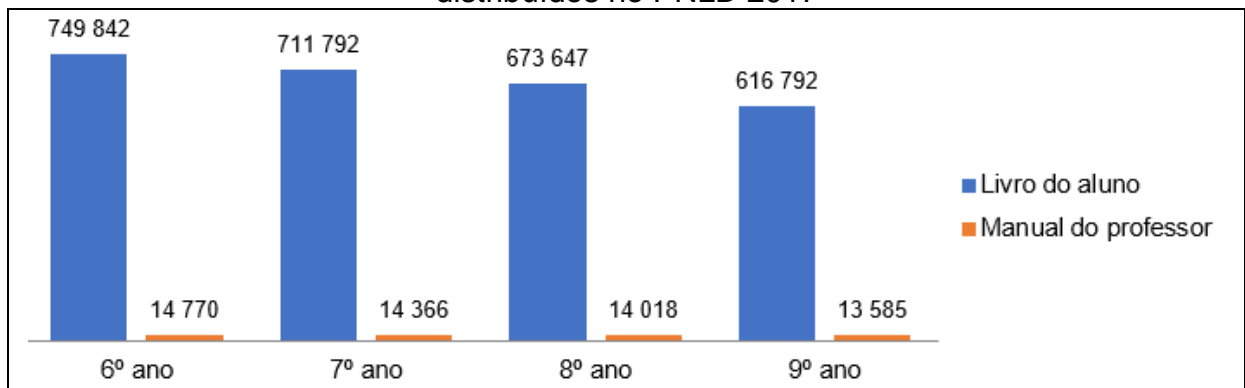
Na coleção, a abordagem dos conteúdos é feita com base em exemplos que levam a uma sistematização adequada dos temas focalizados. No entanto, muitas vezes, essas sistematizações são seguidas de uma quantidade excessiva de atividades que visam, prioritariamente, a verificação ou a aplicação imediata dos conceitos trabalhados.

Há sugestões de uso de recursos diversificados, porém, nem sempre em atividades de construção do conhecimento matemático. Ao longo de toda a coleção, o cálculo mental é valorizado. No campo algébrico encontram-se boas atividades que contribuem para a modelagem de situações cotidianas.

Em vários momentos, ressaltam-se a importância dos conhecimentos matemáticos para a solução de problemas enfrentados no dia a dia. Também há muitas conexões da Matemática com diferentes áreas do conhecimento. Mas, tais conexões são pouco aprofundadas. (BRASIL, 2016, p. 57).

A Figura 3 apresenta os 2 808 812 exemplares da coleção Praticando Matemática distribuídos no PNLD 2017.

Figura 3 – Quantidade de exemplares da coleção Praticando Matemática distribuídos no PNLD 2017



Fonte: Brasil (2019c).

O manual do professor é destinado exclusivamente aos docentes. Assim, o livro do professor é composto pelo livro do aluno mais o manual do professor. No caso da coleção *Praticando Matemática*, o manual do professor tem os seguintes objetivos:

- revelar as ideias que nortearam a concepção desta coleção de Matemática e esclarecer sua proposta pedagógica;
- contribuir para o processo de formação contínua do docente, apresentando textos e artigos que propiciam a reflexão sobre educação e práticas metodológicas;
- fornecer subsídios para enriquecer as aulas por meio de orientações específicas para o trabalho com o Livro do Aluno, sugestões de textos, atividades voltadas para o desenvolvimento das habilidades de leitura, escrita e resolução de problemas, propostas para avaliação e integração com outras áreas do conhecimento (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015a, p. 291; 2015b, p. 291; 2015c, p. 307; 2015d, p. 275).

Os quatro livros da coleção são organizados em unidades e nelas são apresentados os conteúdos matemáticos (teoria), seguidos de exemplos e tarefas propostas (nomeadas de Exercícios). O Quadro 1 mostra a quantidade de unidades e de páginas de cada volume que compõe a coleção.

Quadro 1 – Unidades e páginas da coleção *Praticando Matemática* no PNL 2017

Volume	Quantidade de unidades	Quantidade de páginas ¹⁶	
		Livro do aluno	Livro do professor
6º ano	14	288	400
7º ano	11	288	416
8º ano	15	304	416
9º ano	10	272	400

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a; 2015b; 2015c; 2015d).

Ao final de cada unidade, encontram-se as seções “Revisando” e “Autoavaliação”, com testes a respeito do assunto abordado. Distribuídas pelas unidades, estão as seções “Desafios”, com tarefas que requerem soluções mais criativas e elaboradas; “Vale a pena ler”, com textos variados acerca de Matemática e outras áreas do conhecimento, e a “Seção Livre”, com tarefas ou textos que abordam curiosidades, ciências ou situações do cotidiano.

Nas páginas finais de todos os volumes do livro do aluno, são apresentadas as seções “Sugestões de livros e sites”, “Referências”, “Moldes e

¹⁶ Geralmente, os livros didáticos são negociados com o governo federal com base no valor do caderno tipográfico de 16 páginas, isto é, cada bloco de 16 páginas que compõe o miolo do livro. Possivelmente esse seja o motivo pelo qual a quantidade de páginas dos livros do aluno e do professor são múltiplos de 16.

malhas” (no volume do 9º ano, essa seção é nomeada apenas de “Malha”) e “Respostas dos exercícios”, nessa ordem. No livro do professor, depois dessas seções, também é apresentada a seção “Manual do Professor”. O Quadro 2 mostra a distribuição dos conteúdos matemáticos em cada volume que compõe a coleção *Praticando Matemática*.

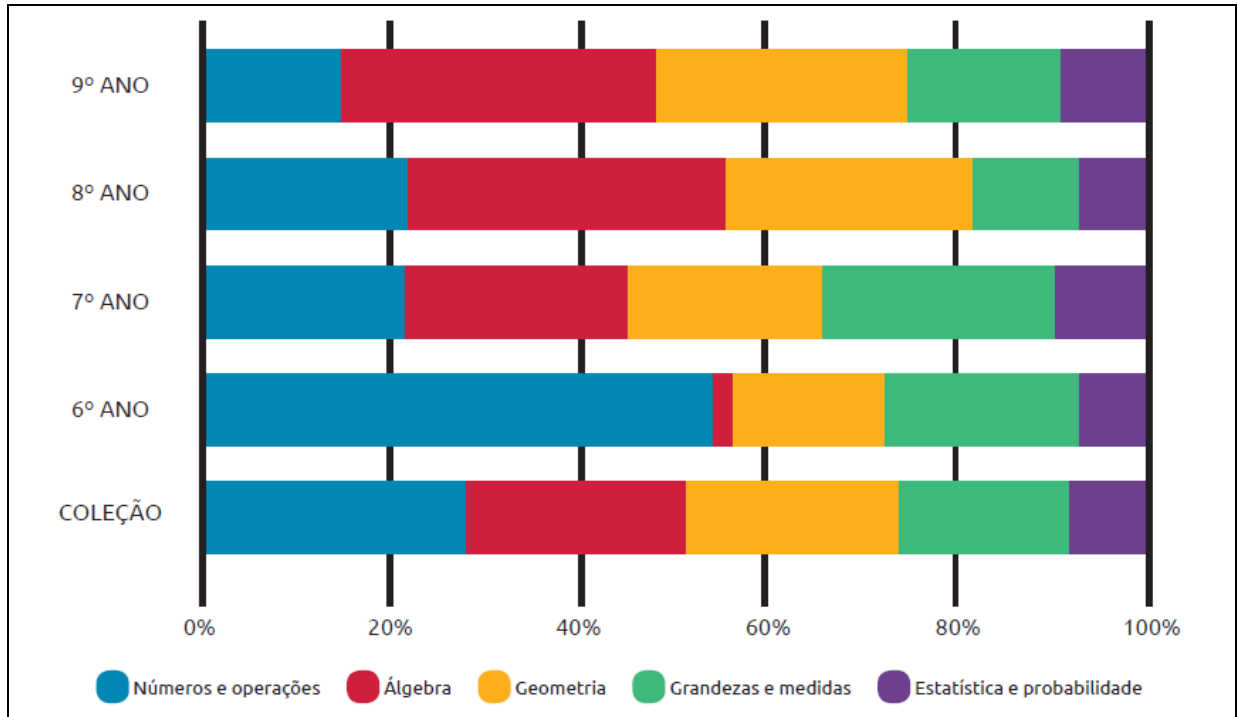
Quadro 2 – Distribuição dos conteúdos da coleção *Praticando Matemática* no PNLD 2017

Unidade	Volume			
	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
1	Sistema de numeração decimal	Números naturais	Conjuntos numéricos	Potenciação e radiciação
2	Números naturais	Frações e números decimais	Potenciação e notação científica	Equações do 2º grau
3	Adição e subtração de números naturais	Números negativos	Radiciação	Sistema cartesiano
4	Multiplicação e divisão de números naturais	Proporcionalidade	Cálculo algébrico	Funções
5	Potenciação e raiz quadrada de números naturais	Razões e porcentagens	Produtos notáveis	Noções de probabilidade
6	Múltiplos e divisores	Construindo e interpretando gráficos	Fatoração	Teorema de Tales e semelhança de triângulos
7	Dados, tabelas e gráficos de barras	Sólidos geométricos	Frações algébricas	Relações métricas nos triângulos retângulos
8	Observando formas	Áreas e volumes	Sistemas de equações	Trigonometria no triângulo retângulo
9	Ângulos	Equações	Razões, proporções e regra de três	Círculo e cilindro
10	Polígonos e circunferências	Inequações	Retas e ângulos	Porcentagem e juro
11	Frações	Ângulos e triângulos	Triângulos	–
12	Números decimais	–	Triângulos: congruência e pontos notáveis	–
13	Porcentagens	–	Quadriláteros e outros polígonos	–
14	Medidas	–	Circunferência e círculo	–
15	–	–	Possibilidades e estatística	–

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a; 2015b; 2015c; 2015d).

A Figura 4¹⁷, extraída do Guia de livros didáticos do PNLD 2017, mostra a distribuição do que é nomeado por esse documento como Campos da Matemática escolar na coleção Praticando Matemática.

Figura 4 – Distribuição dos Campos da Matemática da coleção Praticando Matemática no PNLD 2017

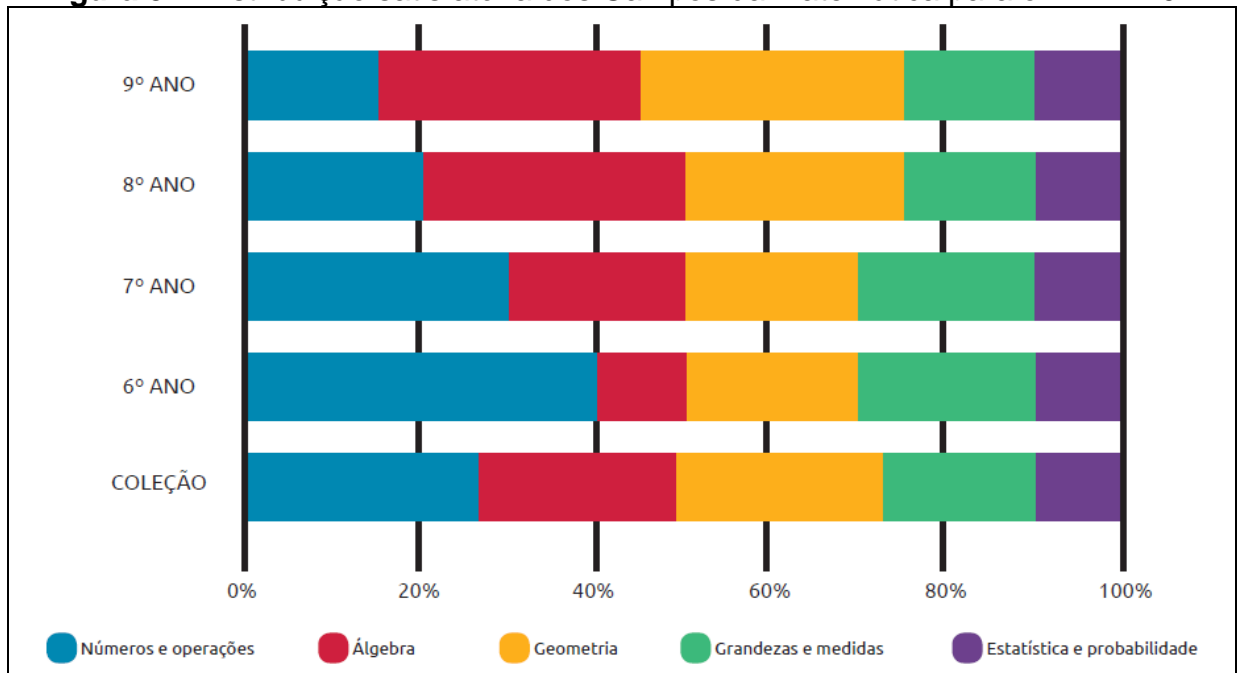


Fonte: Brasil (2016, p. 60).

De modo geral, em toda a coleção [Praticando Matemática], os campos da matemática escolar são distribuídos dentro do que se espera para o Ensino Fundamental. No entanto, a atenção dada a números e operações, no livro do 6º ano, diminui expressivamente nos volumes posteriores. Gradativamente, a álgebra ganha importância, com a apresentação e exploração formal de seus conteúdos. As medidas de grandezas recebem atenção ao longo dos livros, sendo trabalhadas em capítulos específicos e também inter-relacionadas a tópicos de outros campos (BRASIL, 2016, p. 60).

A Figura 5 é utilizada como parâmetro do que o Guia de livros didáticos do PNLD 2017 considera como um perfil satisfatório para os quatro anos finais do Ensino Fundamental com relação à distribuição dos Campos da Matemática escolar.

¹⁷ Para compor essa e a próxima figura, que tratam da distribuição dos Campos da Matemática escolar, o Guia de livros didáticos do PNLD 2017 deixa claro que foram realizadas algumas escolhas nem sempre unânimes. “Por exemplo, as grandezas geométricas – comprimento, área, volume (capacidade) e amplitude (ou abertura de ângulo) – foram aqui incluídas no campo das grandezas e medidas e não em geometria” (BRASIL, 2016, p. 24).

Figura 5 – Distribuição satisfatória dos Campos da Matemática para o PNLD 2017

Fonte: Brasil (2016, p. 24).

Ao comparar a Figura 4 e a Figura 5, é possível perceber que o percentual dos livros dedicado ao campo Estatística e Probabilidade da coleção *Praticando Matemática* está próximo do que é considerado satisfatório pelo Guia de Livros Didáticos do PNLD 2017. Isso, porém, não significa que esse campo da Matemática foi abordado, necessariamente, de maneira totalmente satisfatória, segundo os critérios adotados pela avaliação do PNLD. Com relação a esse campo, nessa coleção, o guia apresenta a seguinte análise:

Conceitos e procedimentos relacionados à estatística são abordados adequadamente. Os gráficos e as tabelas são bem explorados e encontram-se atividades que envolvem pesquisas estatísticas. As medidas de tendência central são estudadas por meio de problemas desafiadores e diversificados. A média aritmética, em especial, é contextualizada em outros campos matemáticos. No entanto, há poucas propostas de atividades que envolvam a média ponderada. Não é dada atenção necessária ao trabalho com os conceitos de mediana e moda. O conceito de amplitude, por sua vez, não é focalizado na obra, o que empobrece o estudo da estatística.

Os conteúdos referentes à probabilidade não são suficientemente explorados. O conceito de chance, identificado com o de probabilidade, é abordado de maneira insatisfatória. Além disso, sua apresentação no volume 9, é feita com base em um contexto inadequado, o que pode prejudicar o entendimento desse conteúdo (BRASIL, 2016, p. 61-62).

Optou-se por apresentar a análise da temática Estatística e Probabilidade, disponível no Guia de livros didáticos do PNLD 2017, porque se trata

de um documento oficial brasileiro e, principalmente, porque esse tipo de análise não faz parte do objeto deste estudo, que está diretamente atrelado às tarefas das unidades específicas da temática Probabilidade e Estatística. Mesmo assim, no Apêndice A, são apresentadas algumas considerações dessa temática.

A ESTRUTURA DO TRABALHO

Além desta introdução, que explicitou a relevância e os objetivos do estudo, bem como aspectos históricos do livro didático no Brasil e do PNLD e uma apresentação da coleção de livros didáticos de Matemática selecionada, este estudo ainda conta com mais cinco capítulos. O primeiro capítulo é destinado aos procedimentos metodológicos. Uma apresentação da RME, abordagem de ensino que fundamenta teoricamente o desenvolvimento deste estudo, está apresentada no segundo capítulo. No terceiro capítulo, são apresentadas as tarefas matemáticas de maneira geral, aspectos relacionados à demanda cognitiva e as características de boas tarefas na perspectiva da RME. O desenvolvimento do estudo, a análise e a discussão constituem o quarto capítulo. No quinto capítulo, apresentam-se apontamentos a respeito do estudo realizado e indicações para estudos futuros envolvendo a temática em tela.

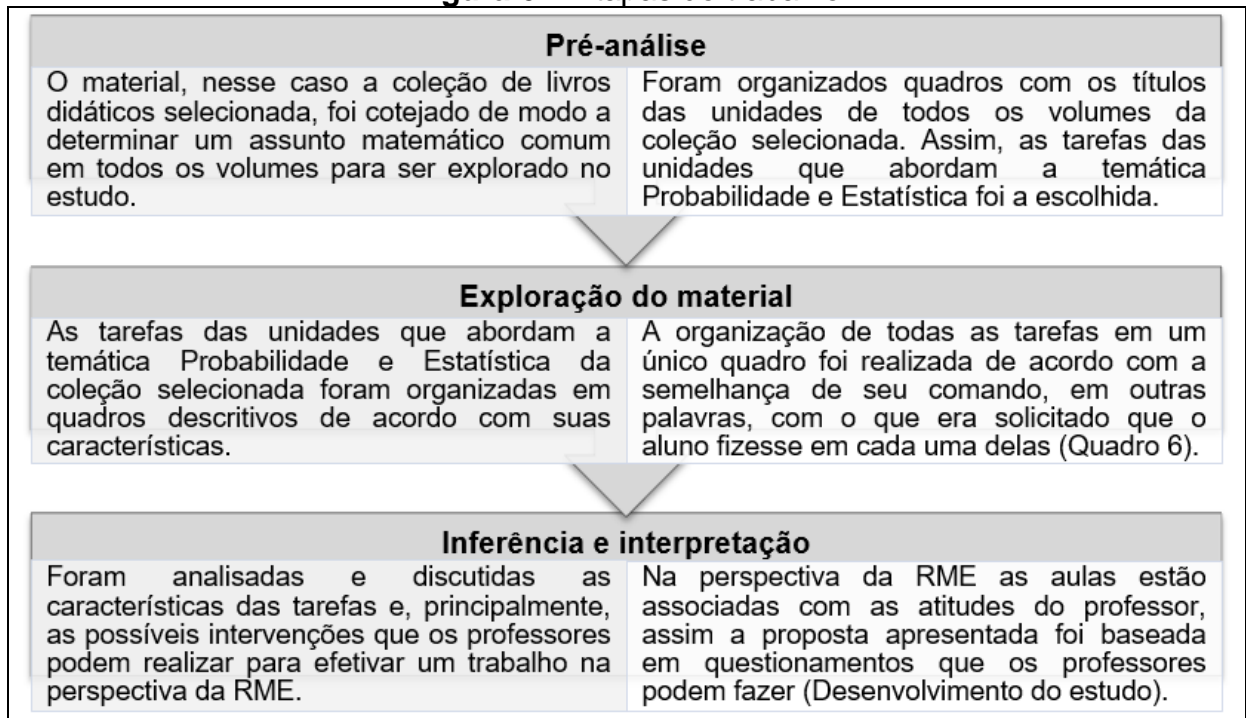
1. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa realizada neste estudo se caracteriza como sendo de natureza qualitativa e de cunho interpretativo. “Na pesquisa qualitativa, o objetivo é interpretar a situação na sua totalidade, de modo que nada é considerado irrelevante” (BARRETTO, 2018, p. 26). De acordo com Garnica (2004, p. 86), a pesquisa qualitativa tem como características

(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re) configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

O procedimento metodológico utilizado neste estudo envolveu um registro detalhado de todos os procedimentos realizados no decorrer da pesquisa, ou seja, uma espécie de diário metodológico. Isso é possível, porque, na pesquisa qualitativa, o desenho da investigação não pode ser dado de antemão. Ele deve emergir, desenvolver-se, revelar-se durante a própria pesquisa (LINCOLN; GUBA, 1985). Sendo assim, o quadro teórico inicial servirá de esqueleto a partir do qual novos elementos ou dimensões poderão ser reconhecidos à medida que o estudo avança.

De maneira geral, o estudo realizado para o desenvolvimento deste trabalho foi composto por três etapas, geralmente presentes na Análise de Conteúdo como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Etapas do trabalho

Fonte: Autor.

1.1 PASSO A PASSO

A primeira tomada de decisão foi pela escolha do tema, e não ocorreu “da noite para o dia”. Selecionar um tema interessante, que faça parte da área de interesse do grupo de estudo do qual o autor participa e, conseqüentemente, também de sua orientadora, que ainda possa resultar em uma tese, não é uma tarefa simples.

Com o tema decidido, foram realizadas buscas no catálogo de teses e dissertações da CAPES¹⁸ (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) para identificar possíveis produções que poderiam se aproximar do trabalho que se pretendia fazer. Para isso, buscou-se a expressão “livro didático” utilizando os filtros Ciências Exatas e da Terra (grande área do conhecimento) e Matemática, Matemática Aplicada e Probabilidade e Estatística (área do conhecimento). Com isso, encontraram-se 42 resultados, que não se considerou aproximar do estudo que se pretendia fazer, naquele momento. Não foi possível realizar uma consulta refinada com o termo “Educação Matemática Realística” nesse

¹⁸ Disponível em: <<http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>>. Acesso em: 13 nov. 2018.

catálogo da CAPES, porque apareceram milhares de resultados com os filtros utilizados.

Também foram realizadas buscas no catálogo de periódicos do SCIELO¹⁹ (*Scientific Electronic Library Online*). Nessa busca, procuraram-se os termos “livro didático”, “Educação Matemática Realística” e “RME”. Não foi encontrada publicação alguma que se aproximasse dos objetivos pretendidos. Assim, passou-se a concentrar esforços no trabalho com as tarefas da coleção de livros didáticos.

A escolha da coleção de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental, deu-se pelo fato de que, no ano de 2017, ano em que este autor ingressou como estudante regular no programa de doutorado, chegava às escolas públicas os livros desse nível de ensino aprovados no PNLD 2017 para os professores fazerem suas escolhas. Além disso, um participante do grupo de estudo, que entrara como estudante regular no programa de doutorado no ano anterior, estava desenvolvendo sua tese utilizando livros didáticos do Ensino Médio (PNLD 2018).

A primeira escolha foi a coleção intitulada *Convergências Matemática*, da Edições SM Ltda, de autoria de Eduardo Chavante. Essa escolha se deu por conveniência: primeiro, porque se conhecia o autor e, segundo, porque o autor desta tese trabalhara na produção dos originais da referida obra.

Em seguida, organizou-se um quadro com os títulos dos capítulos de todos os volumes dessa coleção, de modo a relacionar os assuntos matemáticos que se pensava serem comuns nos diferentes volumes ou que se entendia como uma extensão de algum assunto apresentado em um volume anterior, a partir do volume 6. A intenção era encontrar assuntos matemáticos comuns em todos os volumes dessa coleção para decidir o assunto matemático a ser explorado no estudo.

Depois, fez-se um levantamento da quantidade de tarefas de cada capítulo, especificando as quantidades de cada subseção, de todos os quatro livros da coleção, para se ter uma noção das quantidades de tarefas.

¹⁹ Disponível em: <<http://www.scielo.org/php/index.php>>. Acesso em: 21 nov. 2018.

Em paralelo com esse levantamento, realizou-se a leitura dos resumos ou de parte da introdução, no caso de capítulos de livros, dos textos²⁰ arquivados pelo subprojeto da RME²¹. Nessa pesquisa, foram selecionados os textos que apresentavam as palavras *textbook* ou *libro de texto*. Foram encontrados 55 textos dos quais 6 poderiam auxiliar diretamente este estudo.

No GEPEMA, os estudantes regulares têm o hábito de apresentar periodicamente aos colegas o que já produziram, o que estão produzindo e o que ainda precisam produzir em seus trabalhos de Iniciação Científica, Dissertação ou Tese. Após uma dessas apresentações, o grupo sugeriu que a escolha da coleção de livros didáticos a ser utilizada neste estudo deveria ter uma justificativa mais plausível metodologicamente e não ser uma escolha por conveniência, como fora a escolha da coleção *Convergências Matemática*.

Alguns integrantes do GEPEMA informaram que a escolha da coleção *Convergências Matemática* poderia sugerir ou indicar algum objetivo comercial, em virtude do trabalho anterior deste autor. Por isso, decidiu-se mudar o objeto de estudo e escolheu-se a coleção *Praticando Matemática*, de autoria de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos. Tal escolha deveu-se a que essa coleção de livros didáticos foi a mais distribuída no Brasil pelo PNLD 2017.

Desse modo, foram realizados os mesmos procedimentos de organização dos títulos dos capítulos e de levantamento da quantidade de tarefas de cada capítulo para a coleção *Praticando Matemática*, assim como havia sido feito para a coleção *Convergências Matemática*.

Após algumas análises desse material decidiu-se que o estudo seria com as tarefas das unidades que abordavam a temática Probabilidade e Estatística, por ser uma das últimas a fazer parte do conteúdo programático do Ensino Fundamental.

Assim, iniciou-se a organização dos quadros para cada unidade específica da temática Probabilidade e Estatística da coleção, agrupando as tarefas de acordo com a semelhança de seu comando, em outras palavras, com o que era solicitado que o aluno fizesse em cada uma delas. Inicialmente, fez-se um primeiro agrupamento com as tarefas dos volumes 6 e 7 da coleção.

²⁰ Selecionados por Fernanda Rocha (estudante de mestrado e integrante do GEPEMA), que estava trabalhando diretamente com esses textos no naquele momento.

²¹ Esse subprojeto da RME ocorre entre os participantes do GEPEMA e tem por objetivo inventariar produções dos pesquisadores do Instituto Freudenthal que tratam de RME.

Simultaneamente a esses agrupamentos, deu-se início à produção do texto exposto na Apresentação deste estudo. Mesmo sendo um texto referente à experiência pessoal deste autor, optou-se por inserir citações presentes na literatura para evitar possíveis problemas com determinadas afirmações, porque algumas delas podem ser um tanto quanto impactantes para os leitores que não conhecem “o mundo” editorial dos livros didáticos.

Antes de finalizar o texto da Apresentação, foi dado início à construção de um inventário do que alguns autores entendem por tarefas (Quadro 4). Esse inventário foi construído a partir da leitura de textos que tratam de tarefas matemáticas e, conforme o estudo foi se desenvolvendo, mais textos a respeito do tema foram sendo encontrados com base em suas próprias referências.

Após terminar esse inventário e a primeira escrita do texto de Apresentação, deu-se continuidade ao trabalho com os agrupamentos das tarefas, ou melhor, reiniciou-se este trabalho. Isso ocorreu porque havia insegurança quanto aos agrupamentos realizados inicialmente. Por isso, fez-se novamente o agrupamento das respectivas tarefas dos volumes 6 e 7 da coleção, embora não tenha havido muitas alterações em comparação com o agrupamento realizado inicialmente. Optou-se por finalizar esse trabalho com os outros volumes da coleção somente depois de esses agrupamentos serem discutidos com a orientadora para otimizar tempo. Desse modo, se algo que estivesse sendo feito fosse desnecessário, ou que poderia ser feito de maneira mais ágil, otimizaria o trabalho com os agrupamentos dos volumes 8 e 9 da coleção.

Enquanto se aguardava orientação, iniciou-se a produção do texto de apresentação da coleção de livros didáticos em questão. De maneira geral, nessa apresentação, situou-se a coleção no PNLD 2017, apresentando informações da quantidade de exemplares distribuídos, suas seções, acompanhadas das respectivas características, e algumas considerações que o Guia do Livro Didático 2017 apresenta a esse respeito.

O curioso é que se iniciou esta produção com o intuito de apresentar a importância de estudar livros didáticos de Matemática. Primeiro pensando em apresentar um breve histórico dos livros didáticos no Brasil, mas, no decorrer das leituras para essa escrita, percebeu-se que o PNLD tem certa relação com a história dos livros didáticos no Brasil. Assim, ao terminar essa parte histórica, optou-se por

focar na apresentação do livro didático selecionado, uma vez que ele fora aprovado e distribuído pelo PNLD.

Após uma das orientações, iniciou-se um refinamento dos agrupamentos das tarefas da temática Probabilidade e Estatística dos volumes 6 e 7, assim como a produção dos agrupamentos das tarefas dos volumes 8 e 9 da coleção (Apêndice B). Ao iniciar o agrupamento das tarefas do volume 8, pensou-se que deveriam ser analisadas as tarefas dos agrupamentos que apresentassem as maiores frequências, porque, se o intuito do estudo é mostrar um trabalho com as tarefas do livro didático na perspectiva da RME, parecia mais conveniente discutir as tarefas mais frequentes, uma vez que elas, de certa forma, costumam ser rotineiras em outros livros didáticos, portanto, representativas para este estudo.

Na sequência desse trabalho, iniciou-se a escrita da fundamentação teórica essencial do estudo acerca da RME (seção Educação Matemática Realística). Embora o contato com a RME já durasse alguns anos, esta produção estava sendo muito difícil, porque tudo o que se escrevia parecia “plágio” do que já havia sido lido ou escrito em algum momento. O mais interessante é que se optou por não iniciar a escrita deste estudo por essa parte, justamente por pensar que seria uma das mais fáceis, por ter alguma experiência com a temática, o que se mostrou um engano.

Foi feita uma breve apresentação do que é a RME, seguida de alguns tópicos: biografia de Hans Freudenthal, Matemática como uma atividade humana, matematização, reinvenção guiada e os princípios da RME. No entanto, a primeira escrita a respeito da Matemática como atividade humana, separada da matematização, não ficou boa, porque, ao falar de uma remetia-se à outra. Assim, esses assuntos foram mantidos no mesmo tópico.

Ao finalizar o texto a respeito da RME, os esforços foram dedicados à produção do cerne do estudo, ou seja, a parte em que são agrupadas, em um único quadro, todas as tarefas das unidades específicas de Probabilidade e Estatística da coleção de livros didáticos selecionada e feitas análises e discussões. Optou-se por explorar as tarefas dos agrupamentos que apresentaram as maiores frequências em cada um dos quatro volumes da coleção, assim como havia sido pensado anteriormente.

Depois de agrupar todas as tarefas em um único quadro, foram identificadas as que apresentavam maior frequência no volume 6 e começou-se por

essas. A intenção era explicitar os princípios²² da RME no descritor desse agrupamento, ou seja, mostrar uma maneira de atendê-los. Logo no primeiro princípio, houve dificuldades e não foi possível explicitá-lo da maneira esperada. Isso levou alguns dias de reflexão a respeito da seguinte questão: Como evidenciar o Princípio da Atividade para um descritor específico²³?

Após postergar essa produção por não encontrar uma maneira de progredir, uma das saídas encontradas foi retomar os estudos de um dos textos que discutem os princípios da RME (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). O intuito era identificar nesses princípios algum aspecto que não estava sendo levado em consideração e que poderia auxiliar. Após esse estudo, em um primeiro momento, até se conseguiu indicar um trabalho com as tarefas do descritor em questão explicitando os Princípios da Atividade e da Realidade. Essa indicação, porém, não saiu como o esperado, porque o propósito inicial era compor uma proposta envolvendo cada princípio voltado a cada descritor específico, mas a produção ficou um tanto quanto genérica, isto é, poderia servir para tarefas de qualquer um dos descritores.

À primeira vista, essa generalização poderia ser um problema, mas, depois de algumas reflexões, percebeu-se um possível potencial nesse fato, porque poderia ter sido produzido um conjunto de orientações para o trabalho com tarefas de matemática na perspectiva da RME.

Até esse momento, trabalhava-se com a produção dos textos em arquivos separados, mas, para ter uma noção do estudo como um todo, as produções foram organizadas em um único arquivo com os padrões exigidos pela academia e iniciou-se a escrita das intervenções para uma tarefa específica de cada agrupamento. Para isso, decidiu-se simplificar as notações do quadro principal, que contém os agrupamentos das tarefas, excluindo os códigos e fixando a quantidade de tarefas de cada agrupamento. O quadro com os códigos das tarefas foi realocado para o Apêndice B.

Ao dar essa nova roupagem ao quadro principal, percebeu-se o uso de um código que continha a letra Q para indicar questão. Todavia, isso não estava fazendo sentido, porque as tarefas estavam sendo tratadas desde o início da

²² Apresentados no próximo capítulo.

²³ Pensamos em criar e utilizar descritores ao invés do enunciado da tarefa, porque além de um único descritor poder abranger uma grande quantidade de tarefas, eles podem caracterizar tarefas de diversos materiais didáticos e não apenas da coleção *Praticando Matemática*.

produção, por substituiu-se a letra *Q* pela letra *T*, para indicar tarefa, no código das tarefas do quadro apresentado no Apêndice B.

Ao consultar um dos volumes da coleção de livros didáticos para verificar o enunciado de uma tarefa, percebeu-se que não haviam sido agrupadas todas as tarefas das unidades que abordavam a temática Probabilidade e Estatística, pois as tarefas da seção intitulada “Autoavaliação”, localizadas ao final de todas as unidades, não estavam agrupadas. As tarefas dessa seção são de múltipla escolha (objetivas), e esse pode ter sido o motivo de não terem sido agrupadas no primeiro momento, mas essa característica não impede que essas tarefas sejam agrupadas nos descritores. Assim, o quadro principal, que se pensava estar finalizado, sofreu mais alterações com a inclusão das tarefas da seção Autoavaliação (Quadro 6).

Nesse momento, faltavam a produção principal relativa à análise e à discussão das tarefas na perspectiva da RME e a parte teórica referente ao entendimento de tarefa e dos aspectos relacionados à demanda cognitiva. Talvez pela ansiedade de produzir a discussão principal, decidiu-se fazê-la antes dessa parte teórica.

Como as aulas na perspectiva da RME estão diretamente associadas às atitudes do professor, as intervenções são baseadas em questionamentos que os professores podem fazer ao trabalhar com as tarefas.

Na Educação Matemática Realística, não existe um conjunto de procedimentos ou de passos que devam ser seguidos em sala de aula; a essência dessa abordagem reside nas atitudes do professor ao orientar os processos de aprendizagem, de avaliação, de ensino, de tal modo a adaptar, desenvolver, propor, conduzir dinâmicas que suscitem lidar com situações por meio de matemática (matematizar) (SILVA, 2018, p. 92).

Inicialmente, pensou-se em escrever questionamentos que oportunizassem alterar a demanda cognitiva de cada tarefa, pois, desse modo, seria possível realizar um trabalho razoável com qualquer tipo de tarefa matemática, mas, em determinado momento, percebeu-se que certos questionamentos serviam para qualquer tipo de tarefa. Por isso, essa parte foi reorganizada de modo que apresentasse questionamentos gerais que podem alterar a demanda cognitiva e, em seguida, foram apresentados questionamentos específicos para cada tarefa selecionada.

O fato de ter iniciado essa produção antes da parte teórica do entendimento de tarefa e dos aspectos relacionados à demanda cognitiva, após terminá-la, foi necessário retomar o texto de análise e discussão das tarefas e fazer alterações. Acredita-se que se o texto teórico tivesse sido produzido antes do texto da análise e da discussão, este último poderia ter saído mais refinado na primeira escrita. No entanto, foi uma decisão que fez aprender.

Após a produção desses textos (seção Tarefa e Desenvolvimento do Estudo), iniciou-se a escrita destes procedimentos metodológicos, ou melhor, uma adaptação do “diário metodológico”, construído ao longo de todo o estudo. Apenas a parte inicial, que precede o subitem Passo a passo deste tópico, não estava presente no “diário metodológico”.

Depois do exame de qualificação, que ocorreu a distância no dia 13 de julho de 2020 (Dia Mundial do Rock) devido à pandemia de COVID-19, uma das primeiras ações foi inserir os comentários e as sugestões que os membros da banca enviaram junto com suas versões digitais do trabalho em um único arquivo, o que possibilitou uma visão global das possíveis alterações a serem realizadas.

De modo geral, procurou-se atender a todos os comentários e sugestões, exceto aos que demandariam um pouco mais de tempo, algo que não estava sobrando naquele momento. O trabalho principal, nessa fase, foi atender às indicações dos membros da banca, uma tarefa complexa que demandou um tempo considerável.

Pelo fato de os integrantes da banca fazerem alguns elogios aos esquemas apresentados no trabalho, tentou-se inserir um esquema conhecido como nuvem de palavras²⁴, também chamado de nuvem de *tags*, nas análises. Entretanto, após diversas tentativas de compor esse esquema envolvendo as mais diferentes partes do trabalho, não houve êxito e percebeu-se que esse modelo de esquema não era o mais adequado para o tipo de análise que se pretendia fazer. Assim, seguindo sugestões dos integrantes da banca, foram utilizados dois dos esquemas que já havia no trabalho de análises. Para isso, algumas versões dos esquemas foram esboçadas, incluindo, em um deles, maneiras de os questionamentos propostos poderem se enquadrar nos princípios da RME e, em outro, um momento

²⁴ Esse tipo de esquema geralmente é utilizado para destacar a frequência com que uma palavra aparece em uma fonte de informações. Nele, quanto maior for a frequência da palavra, mais destacada ela será na representação.

em que os questionamentos podem ocorrer no desdobramento das tarefas em sala de aula, até chegar a esquemas satisfatórios.

Um dos comentários mais contundentes dos integrantes da banca dizia respeito ao potencial da fundamentação teórica para as análises. Para explorar esse potencial, decidiu-se imprimir alguns trechos da fundamentação teórica que se pretendia levar para a análise, principalmente os indicados pelos integrantes da banca, porque, ao ler tais indicações, começou-se a perceber o quanto fazia sentido realizar uma análise sob tais pontos de vista. Em seguida, iniciou-se uma série de leituras do capítulo intitulado Desenvolvimento do trabalho. Cada leitura foi realizada com um trecho da fundamentação teórica em mãos e, desse modo, foi possível fazer análises sob óticas diferentes.

Nessa série de leituras, pôde-se identificar diversas ideias presentes nas partes teóricas, por isso, elas foram complementadas ou alteradas quando necessário. É possível afirmar que as análises permeiam todo o capítulo de desenvolvimento do trabalho, porque a descrição é baseada em descritores construídos pelo autor, que entende ser um tipo de análise, assim como a própria parte descritiva. No entanto, uma análise se mostra mais enfática na seção Visão Geral.

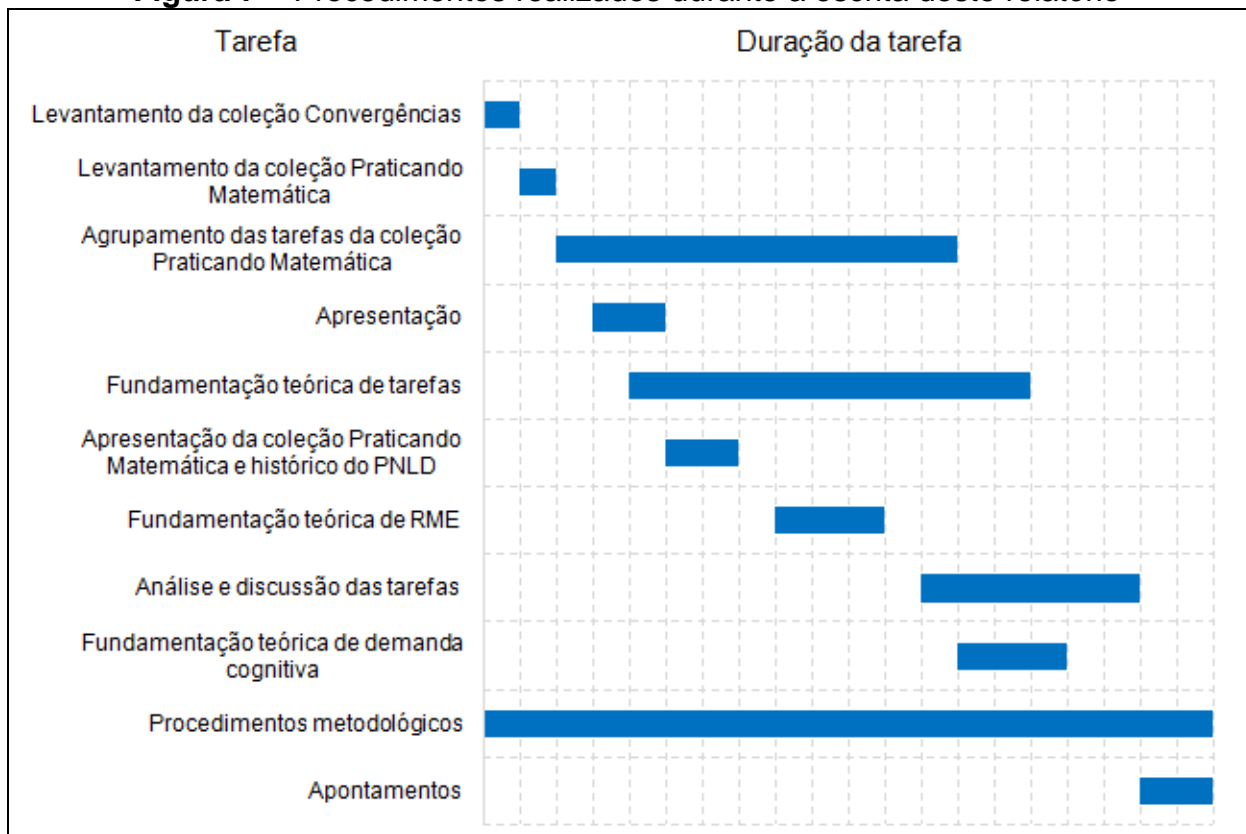
Para compor o último capítulo do trabalho, nomeado Apontamentos, inicialmente foram realizadas leituras individuais de cada capítulo acompanhadas de considerações a respeito de cada um deles, com o intuito de, ao final, compor um texto corrido. Ao finalizar essa etapa, porém, notou-se que faltava algo mais geral relacionado ao trabalho como um todo. Após algum tempo, ocorreu um *insight*, inspirado pela ideia de “modelo de” uma situação particular e de “modelo para” situações gerais da RME, e decidiu-se compor esse capítulo em duas partes, uma destinada a apontamentos específicos de cada capítulo e outra destinada a apontamentos de cunho mais geral.

Os apontamentos gerais são compostos pelas considerações julgadas as mais relevantes do trabalho como um todo. A construção dessa seção se deu após revisar assuntos cruciais do estudo, refletir a respeito deles e ouvir a gravação com os comentários dos integrantes da banca no exame de qualificação. Compor esse texto de fechamento foi uma tarefa complexa, que exigiu escolhas e esteve acompanhada de certa angústia, por se intuir que, provavelmente, haverá

algo relevante que não será apresentado nos apontamentos, algo que algum tempo depois se irá perceber e se perguntar: Como não se enxergou isso?

A Figura 7 mostra, de maneira resumida, os momentos descritos nesta seção. Embora a figura não esteja rigorosamente precisa²⁵ com relação à duração da realização de cada uma das tarefas, é possível ter uma ideia razoável do andamento do estudo em relação ao início e término de cada uma delas.

Figura 7 – Procedimentos realizados durante a escrita deste relatório



Fonte: Autor.

Mesmo estando fixados um início e um término para o desenvolvimento de cada procedimento no gráfico, houve ajustes nas produções durante todo o estudo, sendo alguns mais e outros menos pontuais.

²⁵ O estudo não foi realizado de maneira contínua como a figura pode sugerir, porque houve diversas interrupções nessa trajetória devido aos mais variados motivos, como estudos paralelos (produção de artigos, estudos voltados ao GEPEMA, participações em eventos e projetos de extensão) e problemas pessoais.

2. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

De modo geral, a Educação Matemática Realística (RME²⁶) é uma abordagem específica para o ensino de Matemática desenvolvido na Holanda, desde o final da década de 1960, principalmente a partir das ideias de Hans Freudenthal (1905-1990). A RME surgiu como uma alternativa às influências do Movimento da Matemática Moderna que começavam a interferir na educação holandesa, assim como na de outros países (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2010).

Nessa abordagem, as situações realísticas permeiam todo o processo de aprendizagem e servem como fonte para iniciar o desenvolvimento de conceitos, ferramentas ou procedimentos matemáticos e como contexto, no qual os estudantes podem, no decorrer do trabalho, aplicar seus conhecimentos matemáticos, que gradualmente vão se tornando mais formais e gerais e menos específicos de um único contexto (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; DRIJVERS, 2014).

As situações realísticas que dizem respeito ao mundo real são importantes para a RME, mas o termo realístico, nessa abordagem, tem uma conotação mais ampla, contemplando também situações que podem ser imagináveis pelos estudantes, além das situações do mundo real. Essa interpretação do termo realístico está relacionada com o verbo neerlandês “*zich REALISE-ren*”, que foi traduzido como realístico, e não como realista, justamente por estar mais atrelado ao significado de imaginar, realizar, fazer ideia, lidar, tomar consciência de. Portanto, o “mundo da fantasia dos contos de fadas e até mesmo o mundo formal da matemática podem proporcionar contextos adequados para um problema, na medida em que sejam reais nas mentes dos estudantes” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 2, tradução nossa).

2.1 OS PRIMÓRDIOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

De acordo com Kline (1976), em meados do início da década de 1950, pairava sobre os Estados Unidos da América uma ideia de que o ensino de

²⁶ Sigla do inglês *Realistic Mathematics Education*, pela qual é mais conhecida.

Matemática estava fracassando no país, porque os estudantes mostravam desinteresse pela disciplina e os professores julgavam antiquado os conteúdos propostos para a escola. Em 1957, quando os soviéticos lançaram o primeiro satélite artificial da Terra, o Sputnik, o governo norte-americano se convenceu de que estavam atrasados em Matemática, o que impulsionou o desenvolvimento de um novo currículo que buscava uma “matemática moderna”, como eles diziam.

Em meio às discussões para o desenvolvimento do currículo com ênfase em uma “matemática moderna”, surgiu a abordagem estruturalista conhecida como Movimento da Matemática Moderna, que enfatiza o estudo da matemática centrada em estruturas básicas, sem se preocupar com aplicações.

Em Matemática, o método moderno consiste em identificar estruturas análogas ocultas em diferentes objectos, operações e métodos matemáticos, em salientar estas estruturas e em as redefinir de modo independente, a fim de reordenar e de desenvolver amplos campos de investigação (FREUDENTHAL, 1979, p. 318).

O chamado Movimento da Matemática Moderna se espalhou pelo mundo, sendo a OECE²⁷ (Organização Europeia de Cooperação Econômica) uma das responsáveis por essa propagação na Europa, ao difundir a mensagem de que “o ensino escolar da Matemática apresentava um século de atraso em relação ao estado actual dos conhecimentos” (FREUDENTHAL, 1979, p. 317).

Segundo Treffers (1987), um marco para as primeiras ideias que viriam a fundamentar a RME foi a publicação de um memorando no *The Mathematics Teacher*, em 1962, em que 75 matemáticos proeminentes dos Estados Unidos da América e do Canadá contestavam um movimento de base estruturalista que se aproximava do Movimento da Matemática Moderna.

Nesse mesmo período, a Holanda pretendia realizar uma reforma curricular com o objetivo principal de abandonar a abordagem mecanicista que prevalecia no ensino da matemática até o momento no país. Como uma alternativa, a abordagem estruturalista, que estava em alta na época, poderia ter sido implementada no país, mas isso não ocorreu em função da oposição que Hans Freudenthal e outros estudiosos faziam em relação ao Movimento da Matemática Moderna. Outra alternativa seria a abordagem empirista que prevalecia na Inglaterra, mas os holandeses também não foram por esse caminho, o que os levou para outra direção, desencadeando a RME (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

²⁷ Algum tempo depois, essa organização passou a ser chamada de OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico).

O movimento de reforma curricular na Holanda foi impulsionado, em 1968, quando a Comissão de Modernização do Currículo de Matemática deu início ao projeto Wiskobas (“*Wiskunde op de basisschool*”) de Matemática na Escola Básica, iniciado pelos matemáticos didáticos Edu Wijdeveld, Fred Goffree e Adri Treffers, que se juntou a eles pouco depois. O projeto Wiskobas tinha como objetivo “a inovação da educação matemática em nível nacional por meio do ensino em instituições de formação de professores” (TREFFERS, 1987, p. 11, tradução nossa).

Em 1971, o projeto Wiskobas foi incorporado ao Instituto IOWO (Instituto para Desenvolvimento de Educação Matemática), que tinha Hans Freudenthal como diretor. “Quando Freudenthal (1971) cunhou seu adágio da matemática como uma atividade humana, elaborações concretas do que isso significaria na prática ainda tinham que ser trabalhadas. Essa se tornou uma das principais tarefas do IOWO [...]” (GRAVEMEIJER, 2020, p. 217, tradução nossa).

Em 1973, o Instituto IOWO foi ampliado com o projeto Wiskivon (“*Wiskunde-onderwijs op de middelbare school*”) de Ensino de Matemática na Escola Secundária, o que gerou um novo impulso para a reforma da educação matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; DRIJVERS, 2014).

Freudenthal (1979, p. 323) resumia os conceitos fundamentais da Matemática do Instituto IOWO por meio dos seguintes *slogans*:

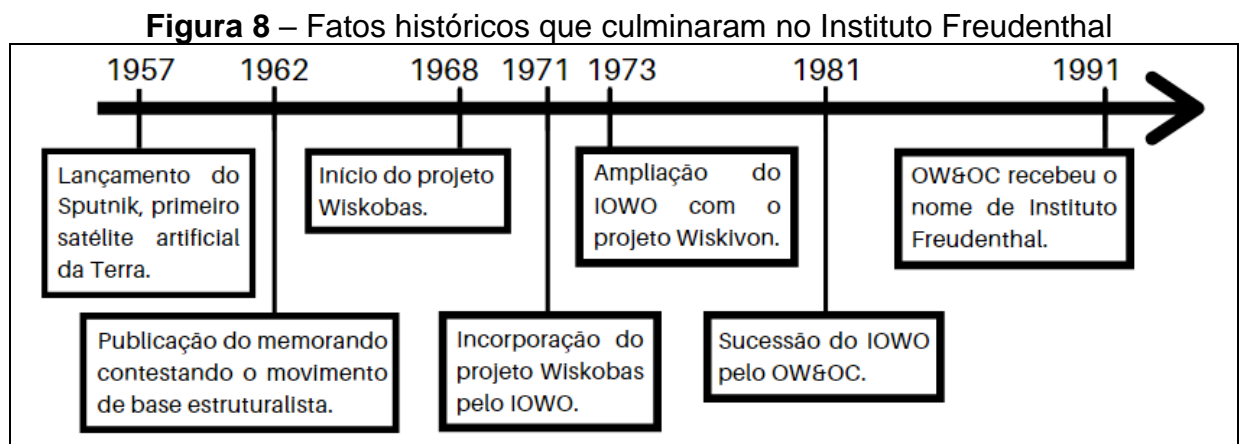
Actividade humana em vez de disciplina pré-estabelecida;
 Matematização da realidade, em vez de realidade já matematizada;
 Reinvenção em vez de transmissão dos conceitos;
 Apresentação da realidade como fonte, *a priori*, da Matemática, em vez de domínio de aplicação;
 Articulação da Matemática com os outros domínios, em vez de apresentação isolada;
 Contextos ricos de significado, em vez de reunião de problemas linguísticos;
 Elaboração de figurações mentais, em vez de conceitos;
 Abordagens múltiplas em relação a conceitos novos, em vez de concretização múltipla;
 Compreensão em vez de mecanismo.

Segundo o autor, a expressão “em vez de” foi empregada para indicar o deslocamento do ponto de equilíbrio do ensino institucionalizado. Para ele, esses *slogans* não têm sentido algum se não forem postos em prática, porque “uma Filosofia adequada exprime-se em actos e não por palavras” (FREUDENTHAL, 1979, p. 323). Esses *slogans* se aproximam dos princípios da RME que serão

apresentados mais adiante neste trabalho.

O Instituto IOWO foi sucedido, em 1981, pelo OW & OC (Grupo de Investigação para a Educação Matemática e Centro de Computação Educacional) e, em 1991, recebeu o nome de Instituto Freudenthal (FI) em homenagem a Hans Freudenthal (FERREIRA; BURIASCO, 2016).

O trajeto desses principais fatos históricos envolvendo os primórdios da RME, que culminaram na criação do Instituto Freudenthal²⁸, parte da Faculdade de Ciências da Universidade de Utrecht na Holanda, podem ser resumidos pelo esquema representado na Figura 8.



Fonte: Autor.

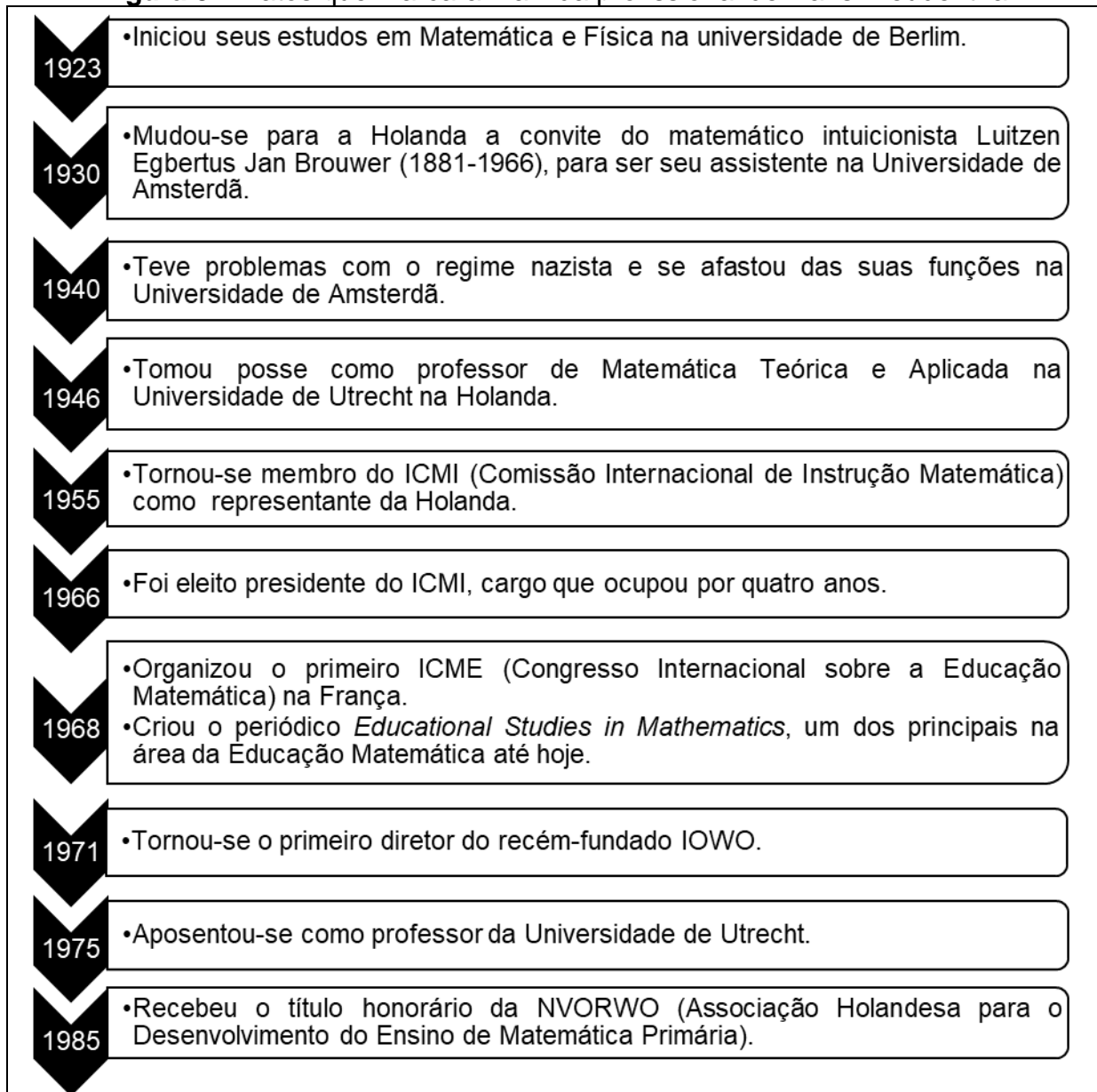
2.1.1 Hans Freudenthal, o Precursor da Educação Matemática Realística

Hans Freudenthal nasceu em Luckenwalde na Alemanha, em 17 de setembro de 1905, e faleceu no dia 13 de outubro de 1990, no banco de um parque perto de sua casa em Utrecht, na Holanda, apenas uma semana depois de realizar os ajustes finais em seu último livro publicado em 1991, intitulado Revisitando a Educação Matemática²⁹ (STREEFLAND, 1993). Desde cedo, Freudenthal mostrou interesse pelo ensino e, gradativamente, a Educação Matemática passou a ser sua principal preocupação (NEELEMAN, 1991). A Figura 9 apresenta uma breve trajetória de sua vida profissional.

²⁸ Mais informações a respeito do Instituto Freudenthal podem ser obtidas no site: <www.uu.nl/en/research/freudenthal-institute>.

²⁹ Revisiting Mathematics Education.

Figura 9 – Fatos que marcaram a vida profissional de Hans Freudenthal



Fonte: Autor, baseado em Neeleman (1991), Streefland (1993) e Ferreira; Buriasco (2016).

Freudenthal faz parte de uma geração de educadores que protagonizaram mudanças significativas na Educação Matemática após a Segunda Guerra Mundial, além de contribuir significativamente em diversas áreas do conhecimento, sendo sua dedicação mais permanente em Topologia, Teoria de Grupos de Lie e Educação Matemática, embora também tenha realizado investigações em Análise Clássica e Funcional, Geometria, Combinatória, Probabilidade e Estatística, Lógica, Fundamentos, Filosofia e História da Ciência (RICO, 1991).

Hans Freudenthal, um estudioso com uma enorme variedade de interesses, nos ensinou a olhar para a matemática como um campo

de conhecimento que está firmemente integrado à nossa cultura e determinado por fatores externos (“aplicados”) e internos (“puros”) (WITTMANN, 2019, p. 66, tradução nossa).

Durante alguns anos, ele se dedicou a suas atividades como professor visitante de outros centros e universidades. Trabalhou na França, nos Estados Unidos da América e no Canadá. Ele é doutor honorário nas Universidades de Humboldt de Berlim, Erlangen, Livre de Bruxelas, York de Toronto e Amsterdã e Granada na Espanha (RICO, 1991).

Atualmente Freudenthal é reconhecido internacionalmente como precursor da RME e “será lembrado por todos quantos se importem com o ensino de matemática no mundo inteiro. A forma mais digna de honrar sua memória é dando continuação ao trabalho por ele iniciado” (NEELEMAN, 1991, p. 46).

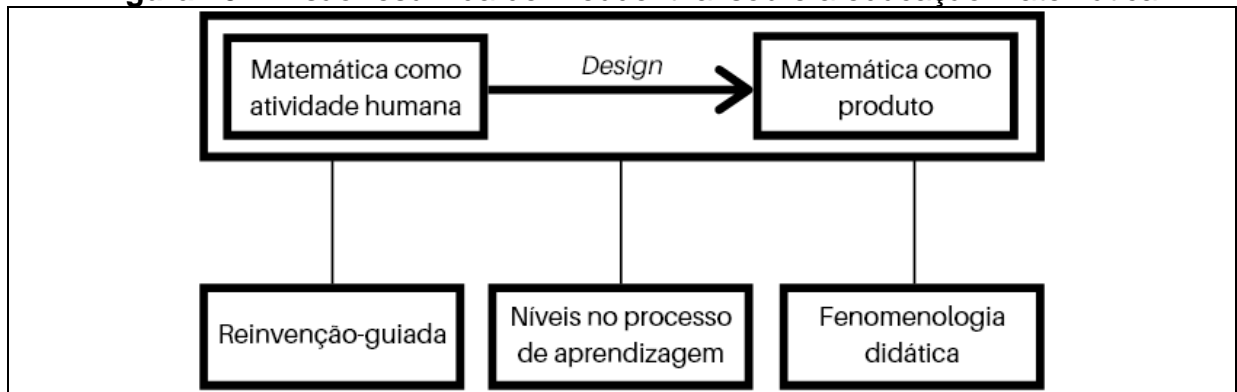
2.2 ASPECTOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

De acordo com van den Heuvel-Panhuizen (2001), a forma atual da RME é caracterizada, principalmente, pela visão que Freudenthal tinha da Matemática. Para ele, a Matemática deveria estar conectada com a realidade, permanecer próxima aos estudantes e ser relevante para a sociedade a fim de ser de valor humano (FREUDENTHAL, 1991).

Podemos resumir a visão de Freudenthal sobre a educação matemática da seguinte maneira. A matemática deve ser vista acima de tudo como um processo, uma atividade humana. No entanto, ao mesmo tempo, essa atividade deve resultar em matemática como um produto. Isso leva à questão (*design*) de como moldar uma educação matemática que integre os dois objetivos. O trabalho de Freudenthal foi baseado em várias ideias sobre como lidar com essas questões. Essas ideias podem ser discutidas sob os títulos de ‘reinvenção-guiada’, ‘níveis no processo de aprendizagem’ e ‘fenomenologia didática’ (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 786, tradução nossa).

Essa visão de Freudenthal pode ser representada pela Figura 10, esquema que será utilizado para orientar a organização deste tópico.

Figura 10 – Visão resumida de Freudenthal sobre a educação matemática



Fonte: Autor.

Para compreender essa visão de Freudenthal, é necessário ter clareza das ideias que estão por trás dos conceitos arrolados a seguir.

2.2.1 Matemática como Atividade Humana

Em vez de tomar a matemática enquanto produto, um assunto a ser apresentado aos estudantes, como geralmente era tomado em sua época, Freudenthal enfatizou a ideia de Matemática como uma atividade humana (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2001).

A Matemática é uma actividade humana simultaneamente natural e social, tal como a palavra, o desenho e a escrita. Figura entre as primeiras actividades cognitivas conhecidas e foi a primeira disciplina a ser ensinada, mas evoluiu e transformou-se sob a influência das modificações sociais, bem como a sua Filosofia e a maneira de ser ensinada (FREUDENTHAL, 1979, p. 321).

A Matemática como uma atividade humana é

[...] uma atividade de resolução de problemas, de procura por problemas, mas é também uma atividade de organização de um determinado assunto. Esse pode ser um assunto da realidade, que deve ser organizado de acordo com padrões matemáticos caso os problemas da realidade tenham que ser resolvidos. Também pode ser um assunto matemático, resultados novos ou antigos, seus próprios ou de outros, que deve ser organizado de acordo com novas ideias, para ser mais bem compreendido, em um contexto mais amplo ou por meio de uma abordagem axiomática (FREUDENTHAL, 1971, p. 413-414, tradução nossa).

Ao assumir a Matemática como uma atividade humana, não faz sentido algum o ensino partir de conteúdos matemáticos sistematizados, porque é a sistematização própria da matemática que os estudantes devem aprender, ou seja, a aprendizagem da matemática passa pela sistematização. Apresentar conteúdos

prontos, como um sistema fechado para os estudantes operacionalizarem não caracteriza a matemática como uma atividade humana, pois uma máquina também é capaz de operar em um sistema fechado (FREUDENTHAL, 1968).

Freudenthal chamou de inversão antididática³⁰ o movimento de ensino de Matemática que parte do conteúdo pronto, sistematizado, para depois apresentar situações em que a Matemática pode ser aplicada, porque esse é o trajeto contrário do trabalho dos matemáticos (GRAVEMEIJER, 2005). “Segundo Freudenthal, isso significa colocar a ‘carroça na frente dos bois’: tirar dos estudantes a oportunidade deles mesmos desenvolverem matemática” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p.11, tradução nossa).

2.2.1.1 Matematização

Freudenthal (1991) chamou de matematização a atividade de organização de assuntos utilizando ideias e/ou conceitos matemáticos. Para ele, a matematização é o núcleo da Educação Matemática.

O conceito de matematização foi proposto, inicialmente, por Freudenthal e, posteriormente, reformulado por Treffers³¹, que descreveu matematização como uma atividade organizada fundamental para o fazer matemática, para a construção de conhecimento, para a aprendizagem de conceitos, para a utilização de diferentes estratégias e procedimentos para a resolução de problemas de contextos matemáticos, ou não, no uso da linguagem e de outras formas de organização (TREFFERS, 1987).

Segundo Gravemeijer e Terwel (2000), na matematização, busca-se “fazer mais matemática” e, para esclarecer o significado dessa expressão, pode-se pensar nas seguintes características matemáticas:

- **generalidade:** generalizar (procurar analogias, classificar, estruturar);
- **certeza:** refletir, justificar, provar (usar uma abordagem sistemática, elaborar e testar conjecturas etc.);

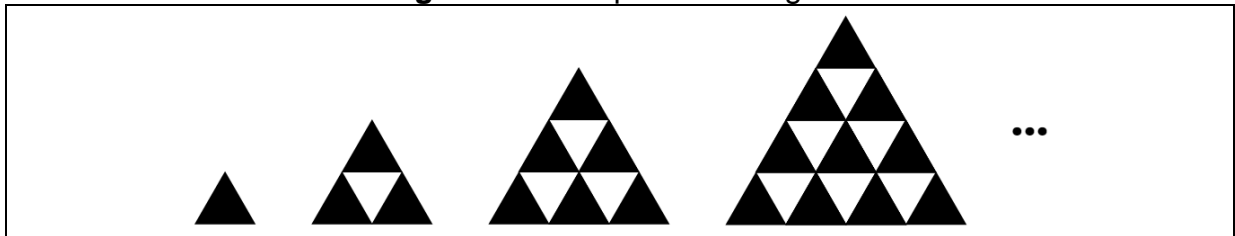
³⁰ “Antididática” faz um papel de adjetivo, qualificando a inversão como não sendo didática” (BURIASCO; SILVA, 2017, p. 8).

³¹ Treffers (1978; 1987) distinguiu dois tipos de matematização: horizontal e vertical. Embora Freudenthal (1991) tenha aceitado o uso das expressões matematização horizontal e matematização vertical, para ele, não há muita clareza na distinção desses dois tipos de matematização e uma não é mais importante que a outra. Neste trabalho, optou-se por utilizar apenas matematização, sem qualquer tipo de separação.

- **exatidão:** modelar, simbolizar, definir (limitar interpretações e validar);
- **brevidade:** simbolizar e esquematizar (desenvolver procedimentos padrão e notações) (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 781, tradução nossa, grifos do autor).

De acordo com Gravemeijer (2008), existem diferentes níveis de matematização. Para ilustrar essa situação, vai-se utilizar o exemplo presente na pesquisa de Silva (2018). Considere uma tarefa que apresente uma sequência de quatro figuras, havendo, na primeira, 1 triângulo preto, na segunda, 3, na terceira, 6 e, na quarta, 10 triângulos pretos, conforme Figura 11, e que se solicite a quantidade de triângulos pretos da quinta figura, desde que seja seguido o padrão observável nas quatro primeiras figuras.

Figura 11 – Sequência de figuras



Fonte: Autor.

Uma estratégia que resolve essa tarefa é reconhecer o padrão da sequência, construir um esboço da quinta figura e fazer a contagem da quantidade de triângulos pretos. Outra estratégia, que também resolve essa tarefa, é reconhecer uma regularidade e expressá-la por meio de uma expressão matemática, associando a posição da figura com a quantidade de triângulos pretos³², que pode ser utilizada para determinar a quantidade de triângulos pretos em qualquer posição, sem a necessidade de construir um esboço.

Em ambas as estratégias, é possível reconhecer algum tipo de matematização, pois, ao serem executadas, haverá uma atividade de organização de assuntos utilizando ideias e/ou conceitos matemáticos, sendo a primeira estratégia mais situacional e a segunda mais geral.

³² Seja n a posição da figura na sequência $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$. A quantidade T_n de triângulos pretos na posição n é dado pela expressão $T_n = n(n+1)/2$.

2.2.2 *Design*³³

Com relação ao *design*, que tem por objetivo integrar a Matemática como atividade humana e a matemática como produto, Gravemeijer (1999, 2008) indica que, no *design* educacional, para a RME, a intenção é fomentar um processo no qual a Matemática formal é reinventada pelos próprios estudantes. Para isso, são indicados três princípios heurísticos: Reinvenção-guiada, Fenomenologia Didática e Modelos Emergentes. A diferença entre esses três princípios heurísticos e as ideias de Freudenthal a respeito do *design*, apresentadas anteriormente, parecem residir principalmente na ênfase dada aos modelos emergentes nos princípios heurísticos, pois a reinvenção-guiada e a fenomenologia didática são comuns a ambos.

2.2.2.1 Modelos emergentes

De acordo com Gravemeijer (1999, 2008), a filosofia subjacente à ideia dos modelos emergentes é que a Matemática formal pode ser constituída pelos próprios alunos. A experiência cotidiana e a Matemática formal não devem ser consideradas disjuntas. Nessa ideia, a matemática mais formal vem à tona naturalmente a partir de tarefas de contexto realístico, isto é, imagináveis pelos estudantes. As tarefas iniciais devem permitir estratégias para modelos informais e, conforme os alunos forem tendo experiências com modelos similares, os modelos tendem a se tornar mais formais e atenção dos estudantes deve se voltar às relações matemáticas envolvidas. Assim, os modelos começam a servir como meio para uma matemática mais formal, em que, em determinado ponto, não precisará mais dos modelos como suporte.

De modo geral, um modelo é constituído inicialmente como um “modelo de” uma situação particular e gradualmente passa para um “modelo para” situações mais gerais e, nesse processo, os estudantes trabalham com diversos submodelos, sempre com o auxílio do professor. “Resumidamente, a mudança do *modelo de* para *modelo para* coincide com uma transferência do raciocínio acerca da modelação da situação contextualizada, para o raciocínio acerca de relações matemáticas” (GRAVEMEIJER, 2005, p. 98).

³³ *Design* indica a concepção de um produto, ou o produto dessa concepção (HOUAISS, 2009).

Pode-se considerar que, no exemplo da sequência de figuras apresentado anteriormente (Figura 11), a construção de um esboço da quinta figura para fazer a contagem da quantidade de triângulos pretos é um “modelo de” uma situação particular, pois, nos casos em que não for possível esboçar a figura, esse modelo não é útil. Já a determinação de uma expressão matemática que possa ser utilizada para determinar a quantidade de triângulos pretos em qualquer posição da sequência é um “modelo para”, pois, em qualquer situação que apresente uma sequência e solicite algo relacionado a um termo posterior aos apresentados, esse modelo pode ser útil.

Para os alunos construírem um esboço da quinta figura da sequência (Figura 11), o professor pode propor questionamentos com o objetivo de guiá-los para um “modelo para”.

- Quantos triângulos pretos terá a sétima figura dessa sequência, se ela seguir um padrão observável nas quatro primeiras figuras?
- É possível estabelecer uma relação entre a quantidade de triângulos pretos e a posição da figura? Por quê?
- Quantos triângulos pretos terá a vigésima figura dessa sequência, se ela seguir um padrão observável nas quatro primeiras figuras? E a centésima figura?

Assim, com o auxílio do professor, é possível que esses alunos passem de um “modelo de” para um “modelo para”.

2.2.3 Reinvenção-guiada

Ao assumir a Matemática como uma atividade humana que está em construção, Freudenthal (1991) acreditava que deveria ser oferecido aos estudantes oportunidade de “reinventar” a matemática fazendo-a. “Isto significa possibilitar que os alunos experimentem um caminho ‘semelhante’ ao processo pelo qual a matemática foi elaborada historicamente e, então, atribuir algum sentido à sua utilidade em situações diversas” (FERREIRA; BURIASCO, 2016, p. 244). Esse caminho pode ser trilhado com inspirações no próprio processo histórico de construção de determinado assunto matemático ou por meio de soluções informais dos alunos, uma vez que estratégias informais podem ser interpretadas como um

tipo de antecipação de procedimentos mais formais (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000).

Freudenthal (1973) argumentava que os alunos conseguem reinventar a Matemática através da matematização, embora ele também reconhecesse que os alunos não conseguem simplesmente reinventar a Matemática que levou milhões de anos a matemáticos brilhantes a inventarem. Por isso, ele propõe a *reinvenção-guiada*. Os professores e os manuais escolares têm de ajudar os alunos no processo, enquanto tentam garantir que os alunos experienciem a aprendizagem da Matemática como um processo de invenção da Matemática, por eles próprios (GRAVEMEIJER, 2005, p. 92).

Ao propor a reinvenção-guiada, Freudenthal (1991) enfatizou o caráter do processo de aprendizagem, pois a ideia geral é que os alunos se sintam donos e, conseqüentemente, responsáveis pelo seu próprio conhecimento. Eles devem ter a oportunidade de construir seu próprio conhecimento matemático com base nesse processo de aprendizagem. Ele considerava a reinvenção-guiada como um tipo de maiêutica em que o professor é o responsável por antecipar as reações dos alunos e planejar ações para lidar com essas reações. A intenção é que o assunto a ser ensinado seja reinventado por meio dessa interação.

Na visão de Freudenthal, o estudante não tem escolha a não ser “reinventar” a matemática sob orientação apropriada, iniciando como uma criança a partir das experiências mais elementares e administrando estruturas cada vez mais complexas, conforme aumenta sua experiência. O conhecimento matemático nunca pode ser transmitido do começo ao fim de numa forma pronta. Mesmo a aula mais perfeita só pode se tornar vital para o estudante se ele ou ela atribuir sentido ao reconstruir ativamente em termos pessoais o que foi proposto (WITTMANN, 2019, p. 67, tradução nossa).

Para Freudenthal (1968, 1991), quando os estudantes aprendem matemática de uma forma isolada, sem que haja relação com suas experiências, a tendência é que seja esquecida rapidamente, e, conseqüentemente, os estudantes não serão capazes de aplicá-la quando necessário.

De maneira sintética, pode-se afirmar que, na reinvenção-guiada:

- os alunos têm um papel fundamental e são considerados: (a) protagonistas da aprendizagem; (b) reinventores de ferramentas, procedimentos, conceitos matemáticos; (c) autores do que fazem.
- o professor serve de guia, interventor, orientador, mediador do processo de aprendizagem.
- as tarefas são motes, pontos de partida, para o processo de reinvenção; devem ser propícias à matematização.
- a matemática é uma atividade humana.
- a experiência do aluno tomada com um eixo da aprendizagem, na qual a construção de conceitos matemáticos é feita de forma que ele consiga reconstruir o que aprendeu (FERREIRA; BURIASCO,

2016, p. 245).

Assim, é possível entender a reinvenção-guiada como o método de ensino da RME, porque “é um caminho que pode ser utilizado pelo professor nas aulas de matemática para atingir os objetivos previstos em relação à aprendizagem dos alunos” (SANTOS, 2014, p. 71).

2.2.4 Níveis no processo de aprendizagem

No processo de aprendizagem, os níveis estão intimamente relacionados com a ideia de matematização progressiva, “em que os estudantes podem resolver problemas de contexto em diferentes níveis de compreensão, de tal modo que comuniquem suas resoluções a fim de que possam progredir para níveis mais avançados de compreensão” (BURIASCO; SILVA, 2017, p. 3).

Assim, aquilo que pode ser entendido pelo professor como uma reinvenção deve ser experimentado pelo aluno como “matematização progressiva”, e, posteriormente, o próprio aluno deve analisar sua atividade como um todo. Segundo Freudenthal (1971, p. 417, tradução nossa), essa análise vai ao encontro dos níveis de van Hiele³⁴, porque “a atividade em um nível é submetida à análise no próximo, a questão operacional em um nível se torna assunto no próximo nível”. Essa mudança se aproxima, de certo modo, do desenvolvimento histórico da Matemática.

Logo, em certo nível, “determinado conceito pode ser o objeto da matematização, que, em outros níveis, pode ser ferramenta útil para a organização de outros assuntos, na busca de matematizar e sistematizar outros objetos” (FERREIRA; BURIASCO, 2016, p. 245).

Desse modo, na perspectiva da RME, em vez de propor modelos prontos aos alunos, é esperado um trabalho com modelos que, inicialmente, são operacionais, mas que tenham potencial para servir de base para obter um raciocínio matemático mais formal; isto é, de acordo com Gravemeijer (1999), como se fosse um processo em que o modelo passa a ser visto mais como um meio de raciocínio matemático do que como resultado de um contexto em particular.

³⁴ Os níveis de van Hiele indicam que o processo de aprendizagem é estruturado por níveis. No desenvolvimento do raciocínio em Geometria, para os quais foram desenvolvidos, os níveis de van Hiele são: reconhecimento, análise, síntese, dedução e rigor (PASSOS, 2015).

2.2.5 Fenomenologia³⁵ Didática

A ideia de fenomenologia didática surge, de acordo com Gravemeijer e Terwel (2000), em oposição às abordagens de ensino que iniciam com um conceito matemático pronto e sistematizado, uma vez que Freudenthal enfatizou a importância de uma incorporação fenomenológica de objetos matemáticos. Na fenomenologia didática, “as situações devem ser selecionadas de tal forma que possam ser organizadas pelos objetos matemáticos que os estudantes devem construir” (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 787, tradução nossa). Essa é uma tarefa desafiadora que envolve tornar um fenômeno³⁶ acessível ao cálculo e ao raciocínio.

De modo geral, uma investigação fenomenológica se preocupa em encontrar situações-problemas específicas que possam ser generalizadas pelos alunos, o que faz todo o sentido se considerarmos o desenvolvimento e a evolução histórica da Matemática a partir de problemas específicos que passaram por um processo de generalização e formalização de conceitos. Portanto, uma maneira de encontrar fenômenos que possam ser matematizados é buscar entender as origens de seu desenvolvimento histórico (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000).

De maneira sintética, é possível fazer as seguintes afirmações:

- a reinvenção-guiada pode ser organizada por meio da fenomenologia didática;
- busca-se entender como a matemática foi inventada de maneira fenomenológica (BURIASCO; SILVA, 2017, p. 7).

A fenomenologia didática também incorpora uma discussão em busca de identificar e entender como um conceito, estrutura ou ideia matemática se relaciona com o fenômeno do qual é o meio de organização e como essa relação acontece nos processos de ensino e de aprendizagem (SANTOS, 2014).

2.3 PRINCÍPIOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

A palavra ‘princípio’, segundo o dicionário Houaiss (2009), pode ser

³⁵ “Freudenthal (1983) afirma que o termo “fenomenologia” não é utilizado por ele do mesmo modo que o utilizam os filósofos Hegel, Husserl e Heidegger” (BURIASCO; SILVA, 2017, p. 6).

³⁶ “Segundo Freudenthal (1983), por meio de figuras geométricas como triângulo, paralelogramo, losango ou quadrado, se consegue organizar o mundo dos fenômenos de contorno; números organizam o fenômeno da quantidade” (SANTOS, 2014, p. 33).

entendida como “o que serve de base a alguma coisa”; “proposição elementar e fundamental que serve de base a uma ordem de conhecimentos”; “lei de caráter geral com papel fundamental no desenvolvimento de uma teoria e da qual outras leis podem ser derivadas”. Assim, neste estudo, quando se fala em lidar com princípios está-se referindo ao seu caráter de base fundamental. Até o próprio Freudenthal (1991, p. 45) utilizou a palavra ‘princípio’ com a intenção de “tentar evitar detalhes”.

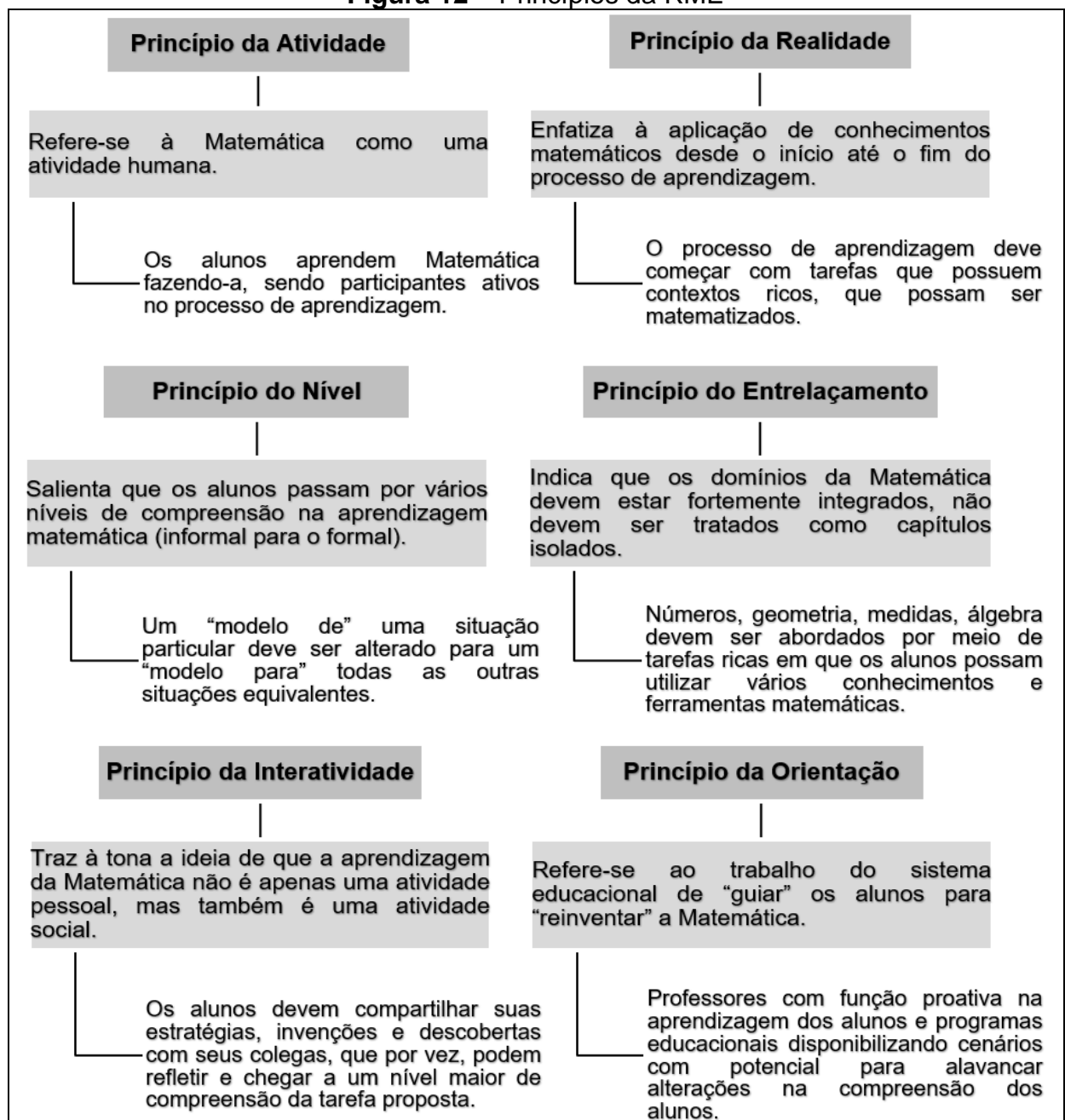
Segundo Treffers (1987), a matematização entendida pelo Wiskobas era inspirada em cinco (5) princípios que, naturalmente, levam ao ponto de partida realístico dos níveis no processo de aprendizagem e da fenomenologia didática. São eles:

1. Exploração fenomenológica – diz respeito a uma exploração fenomenológica, logo no início de um assunto, por meio de tarefas matemáticas contextualizadas. A intenção é explorar noções intuitivas em que conceitos e estruturas são pré-formados.
2. Construção por instrumentos verticais – refere-se à exploração de esquemas, diagramas, símbolos, chamados de instrumentos verticais, com o objetivo de preencher a lacuna entre as ideias matemáticas informais de situações específicas e as mais formais, aproximando-se mais de um trajeto do que de um salto.
3. Autoconfiança: construções e produções dos alunos – salienta o protagonismo dos alunos e destaca as contribuições individuais no processo de aprendizagem que se dá por meio da matematização, o que fornece ao professor e ao próprio aluno uma visão geral de todo o processo. De modo geral, o principal elemento construtivo é o trabalho concreto apresentado pelos alunos.
4. Interatividade – indica que os alunos têm acesso a construções e produções dos colegas, que podem lhes servir como base para verificar as vantagens ou desvantagens de suas próprias produções. O processo de aprendizagem se dá por meio do trabalho individual do aluno combinado com o trabalho dos colegas, discussão em grupo, apresentação de produções próprias, explicação pelo professor, entre outros.
5. Entrelaçamento – destaca a conexão dos vários domínios, do

entrelaçamento das vertentes do aprendizado, que envolve condições para uma possível matematização, que, por sua vez, podem incluir habilidades e algoritmos, assim como *insight*.

Em sua maioria, os princípios fundamentais da RME foram articulados por Treffers (1978) e reformulados ao longo dos anos, inclusive pelo próprio Treffers (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; DRIJVERS, 2014). Segundo van den Heuvel-Panhuizen e Wijers (2005), os princípios da RME foram adaptados dos cinco princípios propostos por Treffers (1987).

Figura 12 – Princípios da RME



Fonte: Prestes; Buriasco (2019, p. 93-94).

A Figura 12 apresenta os princípios que podem ser utilizados para caracterizar resumidamente a RME. No entanto, esses princípios devem ser vistos relacionados entre si a partir de uma complexa rede de relações. Nesse esquema, os princípios da esquerda (Atividade, Nível e Interatividade) estão mais relacionados à aprendizagem e os princípios da direita (Realidade, Entrelaçamento e Orientação) estão mais relacionados ao ensino.

Tais princípios não têm a finalidade de ser uma lista fixa ou unívoca, o que possibilita diferentes interpretações, porém articulam algumas ideias comuns, relacionadas entre si, a respeito do ensino e da aprendizagem na perspectiva da RME. De maneira geral, podem ser utilizados para orientar o desenvolvimento de propostas curriculares, escritas de livros didáticos, preparação de provas, formação inicial e continuada de professores, professores em sala de aula, pesquisas em Educação Matemática e, não menos importante, o ensino de Matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; WIJERS, 2005).

Pode-se afirmar que os atuais seis princípios da RME contêm os cinco princípios do Wiskobas mais o Princípio da Orientação, que foi incluído por van den Heuvel-Panhuizen (2000) devido à importância que Freudenthal deu à reinvenção-guiada. A relação entre esses princípios está apresentada no Quadro 3.

Quadro 3 – Relação entre os princípios do Wiskobas e da RME

Wiskobas	RME
Exploração fenomenológica	Da Realidade
Construção por instrumentos verticais	De Níveis
Autoconfiança: construções e produções dos alunos	Da Atividade
Interatividade	Da Interatividade
Entrelaçamento	Do Entrelaçamento
	Da Orientação

Fonte: Silva (2015).

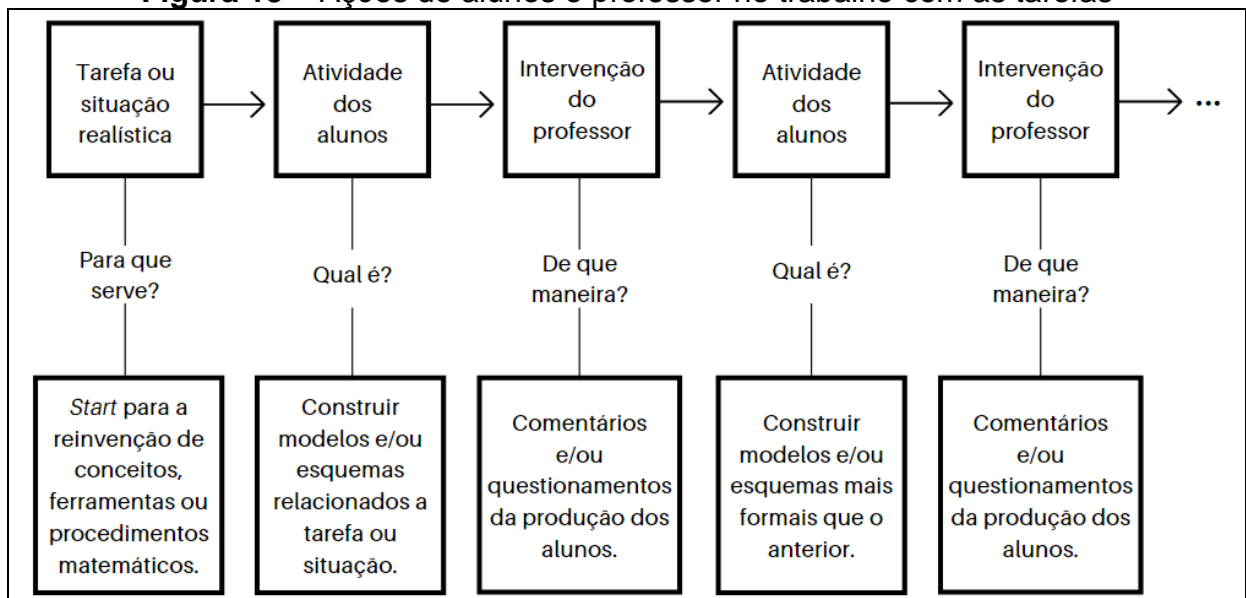
2.4 AULA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Ao ministrar aulas na perspectiva da RME, as atitudes didáticas do professor são imprescindíveis, pois ele deve ter a função de “guia, interventor, orientador, mediador do processo de aprendizagem” (FERREIRA; BURIASCO, 2016, p. 245). Mesmo assim, é interessante ter em mãos ou produzir uma sequência de

tarefas ou uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem³⁷ com tarefas rigorosamente planejadas com o intuito de auxiliar no processo de reinvenção-guiada. “O trabalho em sala de aula tem início com a proposição de uma situação [ou tarefa] realística que possibilita diferentes níveis de matematização” (SANTOS, 2014, p. 39), sem que haja qualquer tipo de explicação ou exploração do conteúdo necessário para lidar com ela. Desse modo, evita-se fazer uma inversão antididática e os alunos, “em vez de receberem matemática pronta, são tratados como participantes ativos no processo educacional, no qual desenvolvem todo tipo de ferramentas e ideias matemáticas por si mesmos” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 5, tradução nossa).

Essa atitude está relacionada com o Princípio da Atividade, porque os alunos são confrontados com situações nas quais eles têm a oportunidade de desenvolver suas próprias estratégias de resolução, isto é, uma atividade de resolução de problemas que está diretamente associada com a ideia de Matemática como uma atividade humana proposta por Freudenthal (1971). Assim, as produções próprias dos alunos (escritas ou não) desempenham um importante papel para esse princípio e, conseqüentemente, para a abordagem da RME.

Figura 13 – Ações de alunos e professor no trabalho com as tarefas



Fonte: Autor.

³⁷ “Uma trajetória de ensino e aprendizagem é uma descrição de caminhos que podem ser percorridos pelos estudantes e contém: a elaboração da trajetória de aprendizagem que diz respeito ao processo de aprendizagem do estudante, a trajetória de ensino que contém orientações didáticas e indicações de elementos do currículo (Conteúdos)” (ROSSETTO, 2016, p. 92).

A Figura 13 mostra um esquema representando as principais ações entre alunos e professor no desenvolvimento de uma tarefa ou situação realística proposta em sala de aula. Essas ações podem ocorrer enquanto o professor julgar que o desenvolvimento da tarefa apresenta potencial para os alunos construírem modelos e/ou esquemas cada vez mais formais.

A continuidade do trabalho deve ocorrer por meio de outras situações ou tarefas que possam ser matematizadas, pois a aplicação de conhecimentos matemáticos na perspectiva da RME deve ocorrer desde o início até o final do processo de aprendizagem. Isso ocorre porque a RME, assim como outras abordagens de ensino de Matemática, tem como um dos objetivos prover os alunos de conhecimentos para que sejam capazes de aplicar Matemática para resolver problemas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). Neste trabalho longitudinal, reconhece-se o Princípio da Realidade, mas vale a pena ressaltar que não basta propor uma sequência de tarefas de aplicação de conhecimentos matemáticos apenas no final de um processo de aprendizagem, como geralmente é realizado sob o título de Problemas, porque as aplicações também devem ser concebidas como fontes primeiras para a aprendizagem matemática.

Ao trabalhar com uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem ou uma sequência de tarefas, os alunos podem, inicialmente, desenvolver estratégias informais específicas para cada situação ou tarefa, como se houvesse um modelo para resolver cada uma delas. No decorrer do trabalho, é possível que os alunos reflitam nas resoluções anteriores e que alguns aspectos se tornem mais gerais, transformando-se em modelos que podem ser utilizados para resolver outras situações ou tarefas equivalentes, independentemente do contexto. Assim, esses modelos passariam de um “modelo de” situações particulares para um “modelo para” todas as outras situações equivalentes. Em alguns casos, a construção de modelos dá acesso a uma matemática mais formal.

Aprender matemática significa que os alunos passam por vários níveis de entendimento: da capacidade de inventar soluções informais relacionadas ao contexto, à criação de vários níveis de atalhos e esquematizações, à aquisição de *insights* sobre os princípios subjacentes e ao discernimento de relacionamentos ainda mais amplos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 5, tradução nossa).

Essa espécie de generalização de modelos é característica do Princípio de Níveis, mas, para que isso ocorra, é importante utilizar uma Trajetória

de Ensino e Aprendizagem ou uma sequência de tarefas com características e temas adequados. O ideal é que as situações ou tarefas utilizadas exijam dos alunos o uso de diversas ferramentas e entendimentos matemáticos. Isso quer dizer que grandes campos da Matemática, como Números, Geometrias, Grandezas e Medidas, Álgebra, Probabilidade e Estatística, devem estar integrados. Nessa integração de domínios matemáticos reside o Princípio do Entrelaçamento.

Como o aprendizado na RME é considerado uma atividade que se dá também no social, é necessário oportunizar aos alunos um momento para que eles compartilhem suas descobertas, invenções, estratégias e resoluções das tarefas. Por isso, no desenvolvimento das tarefas, “os alunos podem interagir uns com os outros e terem a oportunidade de analisar e discutir estratégias e procedimentos que utilizaram” (SANTOS, 2014, p. 39). “Ao ouvir o que os outros descobrem e discutir essas descobertas, os alunos podem obter ideias para melhorar suas estratégias. Além disso, a interação pode evocar a reflexão, o que possibilita aos alunos alcançar um nível mais alto de compreensão” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 9, tradução nossa).

Essa concepção de aprendizagem acompanhada dessa partilha faz parte do Princípio da Interatividade. A interatividade propriamente dita deve ocorrer em diversas direções, aluno-aluno, aluno-professor e professor-aluno, mas isso não significa que toda a turma deva seguir os mesmos caminhos e estar no mesmo nível de entendimento no mesmo momento, porque, na RME, os alunos são considerados indivíduos que seguem caminhos de aprendizagens individuais, sendo o professor o responsável por gerir essa aprendizagem nos diferentes caminhos e níveis. Esse é mais um motivo para propor situações ou tarefas realísticas aos alunos, pois elas são capazes de oportunizar diferentes resoluções em diferentes níveis de entendimento.

Para que esse trabalho funcione, é crucial a participação do sistema educacional (professores e programas educacionais), pois eles são os responsáveis por orientar o processo de aprendizagem dos alunos, que, necessariamente, deve conter períodos que oportunizem aos alunos construir ideias e ferramentas matemáticas.

Os professores devem ter função proativa e propiciar um ambiente em que o processo de construção possa emergir. Portanto, ter pressa e “atropelar” etapas para cumprir uma lista de conteúdos programados *a priori* não é o mais

indicado. É importante que os professores tenham sensibilidade para saber os momentos mais apropriados para fazer comentários e questionamentos aos alunos, sem se antecipar e apresentar conclusões por eles.

Durante e após o trabalho dos alunos, o professor pode fazer questionamentos para explorar as resoluções que apresentaram, bem como as diferenças existentes entre elas, e discutir aspectos matemáticos subjacentes a essas resoluções encorajando-os a se interessar por esses aspectos (SANTOS, 2014, p. 39).

Os programas educacionais devem disponibilizar cenários com potencial para alavancar alterações na compreensão dos estudantes. Esses cenários sempre devem ter a perspectiva da Trajetória de Ensino e Aprendizagem, a longo prazo, de acordo com os objetivos que se pretendem alcançar, pois, sem essa perspectiva, fica complicado orientar os alunos em seus processos de aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

Essas características do papel do professor e do programa educacional basicamente descrevem o Princípio da Orientação, que, por sua vez, está diretamente associado com a ideia da reinvenção-guiada. Segundo van den Heuvel- Panhuizen (2010, p. 5, tradução nossa), “o princípio da orientação significa que os estudantes recebem uma oportunidade ‘guiada’ de ‘reinventar’ a matemática”.

3. TAREFA: UM PONTO DE VISTA

Neste estudo, um dos principais temas de interesse são as tarefas das unidades que abordam a temática Probabilidade e Estatística, da coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental mais distribuída pelo governo federal no PNLD 2017, isto é, a coleção *Praticando Matemática*. No entanto, não se encontrou na literatura um consenso do que é uma tarefa, como mostra o Quadro 4.

Quadro 4 – Algumas definições de tarefa

(continua)

Autor	Definição
Doyle (1988, p. 169).	<p>Uma tarefa acadêmica pode ser definida em termos dos seguintes componentes gerais:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Um produto, como números em branco em uma planilha, respostas a um conjunto de perguntas de prova, respostas orais em sala de aula ou uma solução para um problema de palavras. 2. Operações para produzir o produto, por exemplo, copiar números de uma lista, lembrar as respostas das lições anteriores, aplicar uma regra (por exemplo, “Inverter e multiplicar”) para selecionar a resposta apropriada ou formular um algoritmo original para resolver um problema. 3. Recursos, como anotações de palestras, informações de livros didáticos, conversas com outros alunos ou modelos de soluções fornecidas pelo professor. 4. O significado ou “peso” de uma tarefa nos sistemas de prestação de contas de uma classe; por exemplo, um exercício de aquecimento em matemática pode contar como uma nota diária, enquanto uma prova de unidade pode ser igual a 30% da nota por um período. (tradução nossa)
Stein, Grover e Henningsen (1996, p. 460).	[...] uma tarefa matemática é definida como uma atividade em sala de aula, cujo objetivo é focar a atenção dos alunos em uma ideia matemática específica. (tradução nossa)
Dejours (1997, p. 39 apud HEALY; FERNANDES; FRANT, 2013, p. 62).	[...] uma tarefa é aquilo que deve ser alcançado ou aquilo que deve ser feito. (tradução nossa).
Henningsen e Stein (1997, p. 528).	[...] uma atividade em sala de aula, cujo objetivo é focar a atenção dos alunos em um conceito, ideia ou habilidade matemática particular. (tradução nossa)
Stein e Smith (1998, p. 269).	[...] uma tarefa é definida como um segmento de atividade da sala de aula que é dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular. (tradução nossa)
Bispo, Ramalho e Henriques (2008, p. 3).	[...] tarefa designa o item (exercício, problema, actividade, ...) que o professor apresenta aos alunos como proposta de trabalho.

(continuação)

Autor	Definição
Leung (2011, p. 325).	Uma tarefa pedagógica é um meio (ou uma ferramenta) para gerar significado para o que é direcionado a ser aprendido. (tradução nossa)
Watson e Ohtani (2012, p. 4 apud COLES; BROWN, 2016, p. 150).	[...] uma tarefa é “qualquer coisa que um professor use para demonstrar matemática, para buscar interativamente com os alunos ou para pedir aos alunos que façam algo. Tarefa também pode ser qualquer coisa que os alunos decidam fazer por si mesmos em uma situação específica.” (tradução nossa)
Barabash e Guberman (2013, p. 294).	[...] definimos uma tarefa como uma série de perguntas e atribuições unidas por uma grande ideia matemática. (tradução nossa)
Ding, Jones e Pepin (2013, p. 443).	[...] definimos uma “tarefa” como uma situação de aprendizagem com um objetivo de ensino específico em uma única lição. (tradução nossa)
Måsøval (2013, p. 231).	‘Tarefa’ é entendida aqui como uma atribuição dada aos alunos para a qual se espera que eles produzam uma solução. (tradução nossa)
Stephan e Akyuz (2013, p. 509).	[...] tarefas são definidas como situações problemáticas que são experientialmente reais para os estudantes, na medida em que o dilema que eles encontram no problema pode ser experimentado como real por eles. (tradução nossa)
Watson et al. (2013, p. 10).	[...] uma tarefa é qualquer coisa que um professor use para demonstrar matemática, buscar interativamente com os alunos ou pedir aos alunos que façam alguma coisa. Tarefa também pode ser qualquer coisa que os alunos decidam fazer por si mesmos em uma situação particular. (tradução nossa)

Fonte: Autor

Considerando elementos comuns entre as definições apresentadas no Quadro 4, optou-se por considerar uma tarefa assim como fez Forster (2020, p. 31):

[...] uma tarefa designa o item ou o conjunto de itens (exercício, problema) que o professor apresenta (ou atribui) aos alunos como proposta de trabalho, algo que um professor usa para demonstrar matemática, buscar interativamente com os alunos ou para pedir que os alunos façam alguma coisa. Tarefa também pode ser qualquer coisa que os alunos decidam fazer por si mesmos em uma situação particular.

Exercícios, muitas vezes assim nomeados em livros didáticos, podem ser entendidos como tarefas que geralmente envolvem assuntos puramente matemáticos, propostos para os alunos praticarem uma técnica ou habilidade matemática em particular, e os problemas podem ser entendidos como tarefas geralmente escritas em palavras que podem ser situações em que se aplique ou forneça um contexto para um conceito matemático (HATTIE et al., 2016).

Pode-se utilizar a classificação dos problemas matemáticos de Butts (1997), que se entende como uma classificação de tarefas para auxiliar no entendimento dos diferentes tipos de tarefas.

- Exercícios de Reconhecimento: geralmente exige que se reconheça ou se recorde um fato específico, uma definição ou enunciado de um teorema.
- Exercícios Algorítmicos: podem ser resolvidos por meio de um procedimento passo a passo, um algoritmo.
- Problemas de Aplicação: exigem uma tradução da linguagem escrita com palavras para a linguagem matemática adequada e, depois, a utilização de algoritmo(s).
- Problemas de Pesquisa Aberta: não contêm indicação alguma para a resolução em seu enunciado.
- Situações-Problema: são situações nas quais uma das primeiras etapas é identificar o(s) problema(s) inerente(s), cuja solução auxilia a lidar com as próprias situações.

Embora Butts (1997) reconheça haver uma zona nebulosa que permeia essa classificação, ele indica que grande parte dos exercícios e problemas propostos nos livros didáticos de diferentes níveis de ensino recaem nas três primeiras categorias, isto é, são tarefas que contêm, em seu enunciado, indicações de como são resolvidas.

Independentemente do entendimento que se tenha dos tipos de tarefas, o fato é que elas são as ferramentas mediadoras tanto para ensinar quanto para aprender matemática (DOYLE, 1988; WATSON et al., 2013).

Tarefas que solicitam aos alunos a execução de um procedimento memorizado de maneira rotineira conduzem a um tipo de oportunidade para o aluno pensar; tarefas que exigem que os alunos pensem conceitualmente e que estimulam os alunos a fazerem conexões conduzem a um diferente grupo de oportunidades para os alunos pensarem (STEIN; SMITH, 1998, p. 269, tradução nossa).

Assim, é relevante que o professor reflita na importância e nas consequências que cada tarefa proposta aos seus alunos pode acarretar, pois “estas vão além dos conteúdos que devem ser mobilizados para sua realização. Elas envolvem processos cognitivos relativos à compreensão, ao estabelecimento de estratégias e procedimentos, e à validação” (CYRINO; JESUS, 2014, p. 753).

A Figura 14 mostra uma representação dos desdobramentos das tarefas em sala de aula na dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem e pode servir para orientar a reflexão dos professores que ensinam matemática.

Figura 14 – Quadro de tarefas matemáticas



Fonte: Stein e Smith (1998, p. 270).

A primeira célula refere-se ao modo como as tarefas são propostas nos materiais didáticos em geral ou como elas são elaboradas pelos professores. A segunda célula refere-se ao modo como as tarefas são configuradas, anunciadas ou propostas pelo professor aos alunos, por exemplo, se devem ser resolvidas individualmente ou em grupo, se é necessário registrar sua resolução ou não, se devem utilizar algum recurso, ou seja, a maneira pela qual os alunos devem proceder. A terceira célula refere-se ao modo como as tarefas são implementadas pelos alunos, isto é, à maneira pela qual eles realmente a realizam. “Todas [essas fases], mas especialmente a fase de implementação, são vistas como influências importantes sobre o que alunos realmente aprendem” (STEIN; SMITH, 1998, p. 269, tradução nossa).

Esse quadro de tarefas explicita a responsabilidade do professor no trabalho com as tarefas matemáticas em sala de aula, que tem por objetivo a aprendizagem dos alunos. Segundo Cyrino e Jesus (2014, p. 754), com isso o professor pode

- escolher tarefas adequadas a seus objetivos de ensino;
- iniciar um processo de ensino que priorize tarefas desafiadoras, nas quais o aluno pode estabelecer conexões com significados ou com ideias e conceitos matemáticos;
- reconhecer que as tarefas podem expressar mais do que o conteúdo;
- perceber como as tarefas influenciam o seu ensino e, conseqüentemente, a aprendizagem dos alunos;
- proporcionar um ambiente de aprendizagem durante as aulas de matemática e
- perceber qual o impacto de suas ações no processo de ensino e de aprendizagem.

É provável que um professor que escolha as tarefas matemáticas a serem trabalhadas em suas aulas com cuidado, levando em consideração os itens

pontuados anteriormente, e que faça as intervenções necessárias, sem se antecipar e apresentar conclusões para os alunos, de acordo com suas produções, tenha sucesso em seus objetivos.

3.1 DEMANDA COGNITIVA

No decorrer deste trabalho, dá-se alguma ênfase aos níveis de demanda cognitiva das tarefas matemáticas. “O nível de demanda cognitiva de uma tarefa está relacionado aos tipos de raciocínio matemático que são exigidos dos alunos para sua realização, bem como com o nível e o tipo de aprendizagem que proporciona aos alunos” (CYRINO; JESUS, 2014, p. 754). Desse modo, esse tipo de conhecimento se associa com o quadro de tarefas matemáticas (Figura 14) apresentado anteriormente e, segundo Jesus e Nagy (2013), pode permitir ao professor refinar seu olhar para:

- o que os alunos podem aprender;
- suas ações e atitudes no momento de propor a tarefa;
- o modo como os alunos lidam com a tarefa;
- os fatores que afetam a proposição e implementação das tarefas;
- as tomadas de decisões de sua prática pedagógica.

Na perspectiva da RME, os tipos das tarefas utilizadas no cotidiano da sala de aula não são tratados separadamente daqueles utilizados para a avaliação³⁸ (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). Assim, é possível referir-se aos três níveis propostos por De Lange (1999) em seu modelo denominado Pirâmide de Avaliação para tratar de demanda cognitiva na perspectiva da RME. De acordo com esse modelo, as tarefas situadas no Nível I (reprodução) envolvem ações relacionadas com a memorização e a reprodução de conhecimentos praticados com frequência em sala de aula, como:

- reconhecer fatos e representações;
- aplicar algoritmos conhecidos;
- reconhecer equivalências;
- recordar objetos matemáticos ou propriedades;
- desenvolver habilidades técnicas;

³⁸ Na RME, a avaliação tem natureza didática, isto é, o foco está na aprendizagem.

- utilizar procedimentos rotineiros.

As tarefas do Nível I geralmente são pontuais, não possuem relações com situações reais ou imagináveis, são de múltipla escolha ou de resposta de construção fechada, isto é, tarefas que possuem um limite fechado de construções de respostas aceitáveis, na maioria dos casos, apenas uma, e são facilmente avaliáveis (FERREIRA, 2013).

As tarefas situadas no Nível II (conexão) exigem matematização de situações e envolvem ações relacionadas com o estabelecimento de conexões, como:

- lidar com diferentes formas de representação;
- integrar informações;
- distinguir e relacionar diferentes declarações;
- decodificar e interpretar linguagem simbólica ou formal e relacionar com a linguagem natural;
- estabelecer relações entre diferentes vertentes e domínios da matemática;
- formular tarefas.

As tarefas desse nível geralmente são inseridas em situações que exigem dos alunos tomadas de decisão matemática, são de resposta de construção fechada ou de respostas curtas, isto é, tarefas de respostas breves e com várias possibilidades de construções de respostas aceitáveis (FERREIRA, 2013).

As tarefas situadas no Nível III (análise) exigem matematização de situações e envolvem ações relacionadas à reflexão, como:

- interpretar, analisar e desenvolver modelos;
- desenvolver estratégias próprias;
- propor questionamentos;
- apresentar argumentações, proposições, generalizações e provas;
- refletir a respeito do processo como um todo.

As tarefas do Nível III geralmente incorporam ações associadas aos outros dois níveis, são tarefas de resposta de construção aberta, isto é, tarefas que exigem “respostas mais longas e sofisticadas, como pedidos de explicação, argumentação, justificativa, opinião, pontos de vista, relacionamento de ideias, conexões, reflexão” (FERREIRA, 2013, p. 57).

Quadro 5 – Níveis de demanda cognitiva de tarefas matemáticas

Baixo nível de demanda cognitiva	Memorização	Procedimentos sem conexão
	<ul style="list-style-type: none"> • Envolve a reprodução de fatos, regras, fórmulas ou definições previamente aprendidos ou a memorização de fatos, regras, fórmulas ou definições. • Não exige um procedimento, ou o tempo em que a tarefa deve ser concluída é muito curto para usar um procedimento. • Não são ambíguas. Essas tarefas envolvem a reprodução exata de material visto anteriormente, e o que deve ser reproduzido é declarado de forma clara e direta no enunciado. • Não têm conexão com os conceitos ou significados que fundamentam os fatos, regras, fórmulas ou definições que estão sendo aprendidos ou reproduzidos. 	<ul style="list-style-type: none"> • São algorítmicas, de modo que o uso do procedimento é especificamente solicitado ou fica evidente a partir de instruções anteriores, experiência ou localização da tarefa. • Exigem demanda cognitiva limitada para uma conclusão bem-sucedida e existe pouca ambiguidade acerca do que precisa ser feito e como fazer. • Não têm conexão com os conceitos ou significados que fundamentam o procedimento que está sendo usado. • Estão focados em produzir respostas corretas ao invés de propiciar a compreensão matemática. • Não exigem explicações ou exigem explicações que se concentram apenas na descrição do procedimento que foi usado.
Alto nível de demanda cognitiva	Procedimentos com conexões	Fazer matemática
	<ul style="list-style-type: none"> • Focam a atenção dos alunos no uso de procedimentos com a finalidade de desenvolver níveis mais profundos de compreensão de conceitos e ideias matemáticas. • Sugerem explícita ou implicitamente caminhos a seguir que são procedimentos gerais amplos que têm conexões estreitas com ideias conceituais subjacentes. • Geralmente permitem várias maneiras de representação, como diagramas, esquemas e símbolos que podem conectar múltiplas representações e auxiliar a desenvolver significados. • Requer algum esforço cognitivo. Embora procedimentos gerais possam ser seguidos, eles não podem ser seguidos sem compreensão. Os alunos precisam se envolver com ideias conceituais que embasam os procedimentos para completar a tarefa com sucesso e com desenvolvimento de compreensão. 	<ul style="list-style-type: none"> • Requer pensamento complexo e não algorítmico – uma abordagem ou via previsível e bem-ensaiada não é explicitamente sugerida pela tarefa, pelas instruções ou por um exemplo elaborado a ser seguido. • Exige que os alunos explorem e compreendam a natureza dos conceitos, processos ou relações matemáticas. • Exige automonitoramento ou autorregulação dos próprios processos cognitivos. • Exige que os alunos mobilizem conhecimentos e experiências relevantes e façam uso adequado deles ao trabalhar com a tarefa. • Exige que os alunos analisem a tarefa e examinem ativamente suas restrições que podem limitar possíveis estratégias de resoluções e soluções. • Requer um esforço cognitivo considerável e pode envolver algum nível de ansiedade para o aluno devido à natureza imprevisível do processo de solução.

Fonte: Smith e Stein (1998).

De Lange (1999) reconhece que essa distinção entre os diferentes níveis não é tão clara a ponto de ser uma classificação mutuamente excludente, e pode acontecer de alguma tarefa considerada de um nível inferior incorporar ações associadas a um nível superior.

Outros autores também fazem distinção de níveis de demanda cognitiva que vão ao encontro do proposto por De Lange (1999), como apresentado no Quadro 5. Nele, Smith e Stein (1998) classificam os níveis de demanda cognitiva de tarefas matemáticas em baixo ou alto nível de demanda cognitiva e apresentam suas características.

Geralmente, uma tarefa não mantém o mesmo nível de demanda cognitiva quando é proposta aos alunos e implementada por eles. Essa alteração no nível de demanda cognitiva pode ocorrer por diversos fatores, como atitudes conscientes ou inconscientes do professor ao propor uma tarefa (CYRINO; JESUS, 2014).

Stein e Smith (1998) listam ações que podem contribuir para a manutenção ou o declínio do nível de demanda cognitiva das tarefas.

Fatores associados à manutenção de demandas cognitivas de alto nível

1. É fornecido apoio ao pensamento e raciocínio do aluno.
2. Os alunos recebem os meios para monitorar seu próprio progresso.
3. Professores ou alunos são capazes de modelar desempenho de alto nível.
4. O professor estimula justificativas, explicações e significados por meio de questões, comentários e *feedback*.
5. As tarefas se baseiam no conhecimento prévio dos alunos.
6. O professor estabelece conexões conceituais frequentes.
7. É permitido tempo suficiente para a exploração - nem muito pouco, nem muito.

Fatores associados ao declínio das demandas cognitivas de alto nível

1. Aspectos problemáticos da decodificação da tarefa tornam-se rotineiros (por exemplo, os alunos pressionam o professor para reduzir a complexidade da tarefa, especificando procedimentos explícitos das etapas a serem executadas; o professor “assume” o pensamento e o raciocínio e diz aos alunos como resolver o problema).
2. O professor muda a ênfase dos significados, dos conceitos ou do entendimento para a correção ou exatidão da resposta.
3. Não é fornecido tempo suficiente para lidar com aspectos que a tarefa exige, ou é permitido muito tempo e os alunos passam a ter comportamentos fora da tarefa.
4. Problemas de gestão de sala de aula impedem o envolvimento apoiado em atividades cognitivas de alto nível.

5. A tarefa é inadequada para um determinado grupo de estudantes (por exemplo, os alunos não se envolvem em atividades cognitivas de alto nível por falta de interesse, motivação ou conhecimento prévio necessário para realizá-las; as expectativas da tarefa não são claras o suficiente para colocar os alunos no espaço cognitivo adequado).
6. Os alunos não são responsabilizados por produtos ou processos de alto nível (por exemplo, embora sejam solicitados a explicar seus pensamentos, são aceitas explicações pouco claras ou incorretas; os alunos têm a impressão de que seu trabalho não será “contabilizado” para uma nota) (p. 274, tradução nossa).

Além da manutenção ou do declínio, o nível de demanda cognitiva de uma tarefa também pode aumentar de acordo com o tipo de intervenção do professor, como mostrou Mendes (2014) em sua pesquisa, ao identificar, por meio da produção escrita de um dos alunos pesquisados, indícios de reflexão em uma tarefa que originalmente solicitava apenas a escrita de um número múltiplo de 2, 3 e 5, simultaneamente, isto é, exigia uma ação de reprodução. Nesse caso, a autora mostrou ser possível aumentar o nível de demanda cognitiva partindo de uma tarefa que exigia a reprodução de um conceito, mas, como ela relata em sua pesquisa, isso só foi possível devido ao compromisso do aluno ao lidar com as intervenções propostas, “intervenções carregadas de intenção de conduzi-lo ao que se desejava que ele aprendesse” (MENDES, 2014, p. 130-131).

3.2 CARACTERÍSTICAS DE BOAS TAREFAS NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Como, na RME, as tarefas utilizadas no cotidiano da sala de aula não são tratadas separadamente das tarefas de avaliação (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996), é possível apresentar características de boas tarefas de Matemática na perspectiva da RME tomando como referência as qualidades das boas tarefas de avaliação presentes na literatura que trata especificamente de avaliação na RME.

Segundo van den Heuvel-Panhuizen (1996, 2005), para que as tarefas³⁹ sejam adequadas para a avaliação na RME, existem dois critérios gerais que precisam ser satisfeitos: elas devem ser significativas e informativas.

Tarefas significativas são desafiadoras para os alunos. São aquelas

³⁹ Van den Heuvel-Panhuizen fala em problemas em seus textos, mas, como essa autora não entra na discussão do que é um problema, estamos tomando-os como tarefas.

que os alunos sentem que vale a pena resolver e que sua solução é útil para fornecer uma ou várias respostas coerentes com a situação. Além disso, as tarefas significativas devem refletir objetivos importantes, porque, se não apresentarem motivos para serem aprendidos pelos alunos, não são úteis (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2005).

Uma maneira de avaliar se uma tarefa é significativa está diretamente relacionada com as respostas das seguintes perguntas: “o estudante pode se sentir o *dono* da tarefa, aquele que domina a situação? Ele pode, a partir da situação, se colocar a pensar a respeito de questões próprias?” (FERREIRA; BURIASCO, 2015, p. 465).

Tarefas informativas fornecem ao professor o máximo possível de informações acerca do conhecimento dos alunos, *insights*, competências, estratégias, procedimentos, formas de raciocínio, ou seja, para as tarefas serem informativas, é essencial que elas forneçam uma imagem do aprendizado dos alunos o mais completa possível (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2005).

Para isso, as tarefas devem ser acessíveis aos alunos, isso “significa que os enunciados devem ser tão claros quanto possível, de forma que os estudantes possam, pelo menos, refletir sobre o assunto nele envolvido” (FERREIRA; BURIASCO, 2015, p. 465). Porém, esse aspecto não indica que os enunciados das tarefas devam sugerir estratégias de resolução ou indicar sua solução, mas, sim, permitir que os alunos mostrem como lidar com a tarefa.

Além desses critérios, os contextos das tarefas são essenciais. Segundo van den Heuvel-Panhuizen (1996, 2005), de modo geral, as tarefas contextualizadas oferecem mais oportunidades para os alunos mostrarem suas habilidades quando comparadas às tarefas não contextualizadas.

Entretanto, mesmo que em determinada tarefa matemática se reconheçam características de boas tarefas na perspectiva da RME, isso não garante que ela gerará uma exploração razoável dos assuntos envolvidos, por conseguinte, não garante aprendizagem aos alunos. Esse é mais um motivo pelo qual as atitudes didáticas do professor são essenciais no trabalho com as tarefas matemáticas e, conseqüentemente, nas aulas na perspectiva da RME.

4. DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO

É necessário ficar explícito que, na RME, o foco do trabalho em sala de aula está diretamente relacionado com sequências de tarefas e não com tarefas independentes (STEPHAN; AKYUZ, 2013). Todavia, como, no Brasil, grande parte dos professores que ensinam Matemática utiliza o livro didático como seu principal material de apoio, e eles geralmente propõem tarefas para a aplicação de um assunto matemático específico, as tarefas usualmente vão sendo abordadas de maneira independente e não como uma sequência de tarefas proposta com a intenção de que um assunto matemático seja reinventado pelos alunos. A utilização de tarefas com base em determinado conteúdo matemático trabalhado pode passar a ideia de lista de exercícios, “nas quais o trabalho dos estudantes se limita a resolvê-las de forma mecânica e, em alguns casos, tendo como ponto de partida um “exercício-modelo” explicado anteriormente pelo professor” (CYRINO; JESUS, 2014, p. 753).

No intuito de descrever possibilidades de intervenção para as tarefas mais frequentes das unidades que abordam a temática Probabilidade e Estatística, da coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental mais distribuída pelo governo federal no PNLD 2017 (coleção *Praticando Matemática*), na perspectiva da RME, decidiu-se agrupá-las, pois a discussão individualizada de cada tarefa tornaria a análise enfadonha e descontextualizada do objetivo principal. Os agrupamentos foram realizados de acordo com a semelhança das tarefas no que diz respeito ao seu “comando”, isto é, com o que a tarefa solicita que os alunos façam. O Quadro 6 apresenta os agrupamentos obtidos após alguns refinamentos (um agrupamento mais detalhado é apresentado no Apêndice B).

Quadro 6 – Descritores⁴⁰ e quantidade de tarefas

(continua)

Descritor	Quantidade de tarefas				
	Por volume				Total
	6	7	8	9	
Identificar informações explícitas em quadros, tabelas, gráficos (barras verticais, de setores, pictóricos ou de segmentos).	6	8	13	0	27
Relacionar informações explícitas em quadros, tabelas, gráficos (barras verticais, de setores, pictóricos ou de segmentos).	19	55	37	5	116
Construir gráfico a partir das informações presentes em quadros, no enunciado ou em outro gráfico.	1	3	1	0	5
Calcular a média aritmética identificando e retirando as informações necessárias de quadros, imagens, do enunciado, de gráficos de barras verticais, pictórico ou de segmentos.	1	26	3	0	30
Determinar um dos elementos envolvidos no cálculo da média aritmética dada.	0	6	0	0	6
Calcular a média aritmética identificando e retirando as informações necessárias de gráficos de barras verticais e analisá-la para obter uma resposta.	0	0	2	0	2
Calcular a média ponderada identificando e retirando as informações necessárias de quadros, de tabelas ou do enunciado.	0	6	0	0	6
Determinar a moda retirando as informações necessárias de quadros, de imagens, do enunciado ou de gráfico de barras verticais.	0	8	0	0	8
Determinar a mediana retirando as informações necessárias de quadros, de imagens, do enunciado, de gráficos de barras verticais ou pictórico.	0	4	0	0	4
Identificar uma afirmação verdadeira dadas a média aritmética e a mediana de um conjunto numérico.	0	1	0	0	1
Listar o preço de um mesmo produto em diferentes locais e calcular a média aritmética a partir dos valores obtidos.	0	1	0	0	1
Listar os preços de um mesmo produto em diferentes locais, calcular a média aritmética e organizá-los (os preços) em uma tabela com valores acima ou abaixo da média aritmética calculada.	0	1	0	0	1
Associar diferentes tipos de apresentações de informações (texto e gráficos, quadros e gráficos, imagem e gráfico).	4	4	6	0	14
Determinar a medida do ângulo central de um dos setores de um gráfico.	0	5	2	0	7
Completar um gráfico pictórico.	0	1	1	0	2
Calcular um valor desconhecido com informações retiradas do enunciado.	0	6	0	1	7
Completar um conjunto de valores atendendo a uma restrição dada.	0	3	0	0	3

⁴⁰ Descritores criados pelo autor.

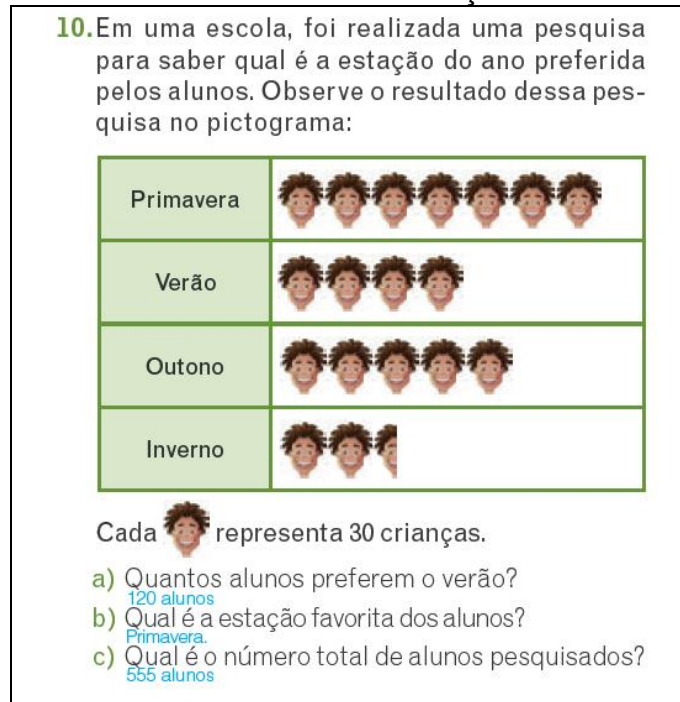
(continuação)

Descritor	Quantidade de tarefas				
	Por volume				Total
	6	7	8	9	
Determinar a quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento retirando informações de quadros, do enunciado e/ou de imagens.	0	0	38	1	39
Descrever as possibilidades de ocorrência de um evento retirando informações do enunciado.	0	0	6	0	6
Analisar afirmações utilizando o conceito de possibilidade.	0	0	1	0	1
Determinar o evento que tem maior, menor ou igual probabilidade de ocorrência retirando informações de uma imagem ou do enunciado.	0	0	0	11	11
Classificar ou dar exemplos de evento pouco provável, impossível, provável e certo.	0	0	0	5	5
Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento retirando informações do enunciado, de uma imagem ou de um quadro.	0	0	3	52	55
Determinar a probabilidade de ocorrência do complementar de um evento retirando informações de uma imagem ou do enunciado.	0	0	0	6	6
Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento em experimentos sucessivos retirando informações do enunciado.	0	0	0	6	6
Completar um quadro com informações dadas e determinar a probabilidade de ocorrência de um evento retirando informações do próprio quadro.	0	0	0	10	10
Determinar a quantidade de elementos do conjunto complementar, dada a probabilidade de ocorrência de um evento.	0	0	0	1	1
Determinar a quantidade de elementos a ser acrescentado em um espaço amostral para obter uma probabilidade dada.	0	0	0	2	2
Analisar um gráfico de barras verticais e emitir uma opinião ou comentário a respeito do tema.	0	0	2	0	2
Analisar preços e determinar o menor custo em uma situação de compra.	0	0	1	0	1
Completar um quadro dadas algumas informações.	0	0	0	1	1
Identificar a população e uma amostra significativa para a realização de uma pesquisa.	0	0	0	1	1
Determinar a quantidade necessária de retiradas de bolas de uma urna de modo a ter certeza da ocorrência de um evento.	0	0	0	1	1
					388

Fonte: Autor.

Para auxiliar no agrupamento das tarefas, inicialmente foram utilizados códigos para identificá-las e considerou-se cada item como uma tarefa. A Figura 15 mostra um exemplo de tarefa composta por três itens.

Figura 15 – Tarefa 10 do volume 7 da coleção *Praticando Matemática*



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015b, p. 139).

Essa tarefa foi desmembrada em três, nomeadas 7T10a, 7T10b e 7T10c. O primeiro algarismo indica o volume da coleção; a letra T indica tarefa e é comum a todos os códigos; os dois algarismos seguintes indicam o número da tarefa na unidade específica do livro e a letra minúscula indica o item, quando houver. As tarefas de múltipla escolha não foram desmembradas.

De acordo com o Quadro 6, é possível perceber que os três tipos de tarefas mais frequentes nas unidades específicas da temática Probabilidade e Estatística da coleção *Praticando Matemática* se enquadram nos seguintes descritores:

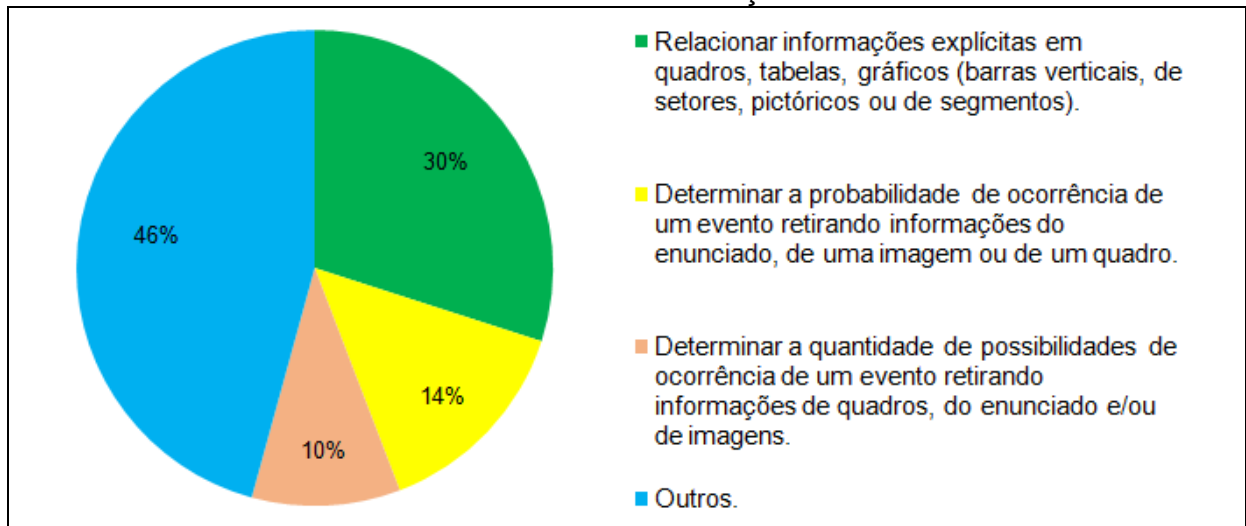
1. Relacionar informações explícitas em quadros, tabelas, gráficos (barras verticais, de setores, pictóricos ou de segmentos). Para esse descritor, foram agrupadas 116 tarefas, distribuídas pelos quatro volumes da coleção, com maior predomínio no volume 7, com 55 tarefas
2. Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento retirando informações do enunciado, de uma imagem ou de um

quadro. Para esse descritor, foram agrupadas 55 tarefas, presentes apenas nos volumes 8 e 9 da coleção, com o maior predomínio no volume 9, com 52 tarefas.

3. Determinar a quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento retirando informações de quadros, do enunciado e/ou de imagens. Para esse descritor, foram agrupadas 39 tarefas, presentes apenas nos volumes 8 e 9 da coleção, com o maior predomínio no volume 8, com 38 tarefas.

Assim, mais da metade de todas as tarefas das unidades específicas da temática Probabilidade e Estatística da coleção *Praticando Matemática* se enquadra nesses três descritores, como mostra a Figura 16.

Figura 16 – Descritores mais frequentes das tarefas das unidades específicas da temática Probabilidade e Estatística da coleção *Praticando Matemática*



Fonte: Autor.

4.1 TAREFAS MAIS FREQUENTES DAS UNIDADES ESPECÍFICAS DA TEMÁTICA PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA DE CADA VOLUME DA COLEÇÃO PRATICANDO MATEMÁTICA

Na sequência, apresentam-se considerações e possíveis intervenções, entendidas como de acordo com a perspectiva da RME, para as tarefas cujos descritores foram mais frequentes das unidades específicas da temática Probabilidade e Estatística de cada volume da coleção. O objetivo é mostrar uma maneira de trabalhar com essas tarefas na perspectiva da RME.

Apenas por meio da análise de um descritor ou do enunciado de uma tarefa, não é possível afirmar se um princípio da RME está sendo contemplado, pois tais princípios estão atrelados às ações do professor, alguns mais; outros menos. Também não é possível afirmar se é uma boa tarefa ou não na perspectiva da RME, mas podem-se reconhecer características de boas tarefas e afirmar que a tarefa tem potencial para ser uma boa tarefa de Matemática (SILVA; PRESTES; FORSTER, 2019). Para desenvolver um trabalho na perspectiva da RME, as atitudes do professor são imprescindíveis, pois ele pode explorar os assuntos matemáticos envolvidos nas tarefas, bem como as resoluções dos alunos por meio de questionamentos, visando à reinvenção-guiada.

Ao trabalhar com questionamentos, o professor precisa ter alguma paciência, principalmente nas primeiras aulas em que utilizar esse artifício, porque os resultados iniciais podem não ser o esperado. De acordo com Way (2008), existem duas razões principais para a obtenção de resultados não satisfatórios:

- os alunos podem ser inexperientes nessa abordagem e ter dificuldades em aceitar a responsabilidade da tomada de decisão para resolver tarefas matemáticas;
- os professores podem não propor questionamentos que orientem, apoiem e estimulem os alunos sem retirar deles a responsabilidade pela resolução da tarefa.

Esse é um dos motivos pelos quais é importante que os professores conheçam diferentes tipos de perguntas, como os apresentados no Quadro 7.

Quadro 7 – Quatro tipos de questionamentos

Questões	Finalidade	Exemplos
Iniciais	Focar o pensamento dos alunos em uma direção geral e dar a eles um ponto de partida.	Do que isso te faz lembrar?
		Quais são alguns exemplos de ...?
		Como você poderia classificar esses ...?
		O que acontece quando nós ...?
		Quantos ... diferentes podem ser encontrados?
Para estimular o pensamento matemático	Auxiliar os alunos a se concentrarem em estratégias específicas, conectarem-se a experiências anteriores e a identificarem padrões e relações.	O que está igual? E diferente?
		Como você pode agrupar estes ... de alguma forma?
		Você pode identificar um padrão? Justifique sua resposta.
		Em sua opinião, o que vem a seguir? Por quê?
		O que aconteceria se ...?
De avaliação	Possibilitar que o professor tenha ideia de como os alunos estão pensando, o que entendem e em que nível estão operando, além de estimular a reflexão acerca de suas produções.	O que você descobriu?
		Como você descobriu isso?
		Por que você pensa isso?
		O que fez você decidir fazer dessa maneira?
		O que o deixa confiante de que está correto?
Para discussão	Reunir esforços da turma e levar ao compartilhamento e à comparação de estratégias e soluções, além de incentivar a avaliação de seu trabalho e apreciar o trabalho dos colegas.	Quem tem uma solução diferente?
		Os resultados de todos são iguais? Por quê? Por que não?
		Você já pensou em outra maneira de fazer isso?
		Em sua opinião, encontramos a melhor solução?
		Em que novas questões/problemas você pensou?

Fonte: Way (2008).

Para alterar o nível de demanda cognitiva de qualquer uma das tarefas que são apresentadas a seguir, uma possibilidade é solicitar aos alunos que formulem uma tarefa relacionada ao assunto apresentado. Também é interessante pedir aos alunos que descrevam os procedimentos que eles utilizariam para resolver a tarefa, em vez de solicitar apenas uma resposta numérica. A escrita dos

procedimentos de resolução de uma tarefa pode fornecer informações para o professor analisar o nível de desenvolvimento cognitivo de cada aluno, sendo possível identificar com mais detalhes os caminhos percorridos pelos alunos até chegarem a uma resposta. Além disso, é interessante propor questões objetivas aos alunos, porque esse tipo de questionamento pode encorajá-los a explicar, elaborar (reelaborar) e esclarecer seu raciocínio, revelar sua compreensão atual de determinado assunto, tornar a aprendizagem matemática mais explícita e acessível a eles (HATTIE et al., 2016).

Para qualquer tarefa, é possível questionar. Por exemplo:

- Existe apenas uma resposta considerada correta?
- É possível resolvê-la de mais de uma maneira? Em caso afirmativo, resolva de todas as maneiras distintas que você conseguir.
- As informações fornecidas pelo enunciado são suficientes para resolvê-la?
- Existe alguma informação do enunciado que poderia ser excluída sem prejudicar a resolução?
- Existe alguma informação que poderíamos acrescentar ao enunciado para auxiliar na resolução?
- É necessário utilizar conteúdos matemáticos apresentados em outras unidades desse livro para resolvê-la?
- É suficiente que um aluno saiba um conteúdo matemático específico para resolvê-la? Em caso afirmativo, qual conteúdo matemático seria esse?

As questões relacionadas às informações disponibilizadas no enunciado das tarefas são interessantes, porque a análise e o reconhecimento de informações necessárias para resolver uma tarefa são decisivos para a resolução de problemas da vida real (BUTTS, 1997). Isso pode ser uma das primeiras maneiras de trabalhar com a matemática de modo que ela seja útil para os alunos compreenderem a realidade a sua volta e, a partir do conhecimento matemático, possam ter a possibilidade de lutar pela vida que desejam ter⁴¹, como propunha Freudenthal (1968).

⁴¹ Essa possibilidade de os alunos lutarem pela vida que desejam ter vai ao encontro do conceito de desenvolvimento humano proposto pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento, que

4.1.1 Volume 6 da Coleção Praticando Matemática

O tipo de tarefa mais frequente na unidade específica da temática Probabilidade e Estatística do volume 6 da coleção Praticando Matemática – intitulada Dados, tabelas e gráfico de barras – enquadra-se no descritor mais frequente da coleção, a saber: relacionar informações explícitas em quadros, tabelas, gráficos (barras verticais, de setores, pictóricos ou de segmentos).

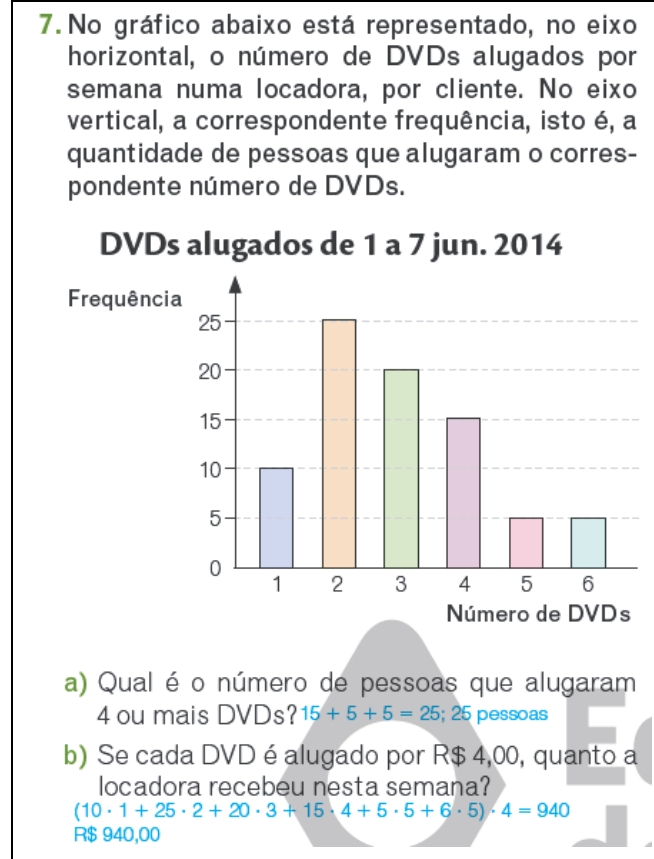
Para resolver as tarefas desse agrupamento no volume 6, os alunos precisam, inicialmente, realizar a leitura e a interpretação de um quadro, tabela ou gráfico de barras verticais e, depois, relacionar as informações, de acordo com o solicitado no enunciado, para obter uma resposta. Assim, as tarefas que se enquadram nesse descritor podem ser entendidas como Exercícios de Reconhecimento, de acordo com a classificação de Butts (1997), pois exigem que os alunos reconheçam fatos específicos.

Com relação à demanda cognitiva, as tarefas que se enquadram nesse descritor podem ser entendidas como:

- de Nível I (reprodução), de acordo com De Lange (1999), porque envolvem ações praticadas com frequência em sala, como reconhecimento de fatos e representações;
- de baixo nível de demanda cognitiva, de acordo com Smith e Stein (1998), porque exigem demanda cognitiva limitada para uma conclusão bem-sucedida e existe pouca ambiguidade acerca do que precisa ser feito e como fazer.

A Figura 17 mostra uma tarefa do volume 6 que foi agrupada nesse descritor.

Figura 17 – Tarefa que se enquadra no descritor que apresenta a maior frequência no volume 6 da coleção *Praticando Matemática*⁴²



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 120).

Nesse caso, apesar de o tema ser discutível, com relação à contemporaneidade⁴³ das locadoras de DVDs, para o ano de 2017, ano em que os alunos utilizaram essa coleção pela primeira vez, é possível que os alunos consigam lidar com a situação apresentada. Tarefas desse tipo possibilitam a realização de diferentes explorações com situações que podem estar mais próximas à realidade da maioria dos alunos⁴⁴ com os quais se está trabalhando, como no caso da quantidade de irmãos de cada aluno da turma, por exemplo.

Essa situação personalizada da quantidade de irmãos pode ser explorada da seguinte forma: solicitar aos alunos que registrem, na lousa, a

⁴² A versão do livro digital utilizada apresenta uma marca d'água com o logotipo da Editora do Brasil localizada no centro de todas as páginas. Esse é o motivo de haver uma parte acinzentada em algumas imagens, como nessa figura.

⁴³ A contemporaneidade discutível desse e de outros temas abordados no decorrer da coleção *Praticando Matemática* pode estar relacionada ao fato de que essa versão é a 4ª edição renovada da obra. Talvez no período histórico do lançamento da 1ª edição, os temas questionáveis em 2020 poderiam ser atuais.

⁴⁴ Como os livros aprovados no PNLD podem ser utilizados por alunos de todo o Brasil e pelo fato de o País possuir dimensões continentais, reconhece-se não ser fácil apresentar no livro didático tarefas com situações próximas à realidade de todos os alunos que forem utilizá-lo.

quantidade de irmãos que possuem e, após todos terem feito seu registro, pedir a eles que construam um gráfico para apresentar tais informações, sem especificar o tipo de gráfico. Caso algum aluno construa um gráfico diferente do gráfico de barras verticais, é conveniente que o professor o incentive a compartilhar sua resolução com os colegas, pois a interação pode provocar a reflexão e um alcance de níveis mais altos de compreensão (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). Em seguida, seria oportuno o professor explorar esse outro tipo de gráfico, mesmo que ele não esteja previsto na unidade do livro didático.

A construção de um gráfico que possui informações relacionadas aos próprios alunos e a seus colegas de turma pode se tornar uma atividade convidativa para eles, fazendo com que se sintam donos da tarefa e se coloquem a pensar em questões próprias. Caso isso ocorra, essa tarefa pode se tornar significativa na perspectiva da RME (FERREIRA; BURIASCO, 2015).

Tanto na tarefa que diz respeito ao aluguel dos DVDs, quanto em qualquer outra tarefa que trate de gráficos de barras verticais, é importante que os alunos estejam cientes de certas ideias fundamentais relacionadas à temática Probabilidade e Estatística. Para isso, o professor pode propor questionamentos, tais como os apresentados no Quadro 8, em que também está explícita uma intenção para cada questionamento, que pode variar de acordo com os objetivos do professor.

Quadro 8 – Questionamentos a respeito de gráficos de barras verticais e suas intenções

Questionamento	Intenção
Qual é o objetivo de se apresentar informações por meio de gráficos de barras verticais?	Oportunizar ao aluno a percepção de que os gráficos de barras verticais podem apresentar, de modo resumido, uma visão geral de certas informações e favorecer uma compreensão visual.
Você conhece outro meio pelo qual as informações desse tipo de gráfico podem ser apresentadas? Em caso afirmativo, qual?	Possibilitar que os alunos relacionem gráficos de barras verticais com outros meios de apresentação de informações.
Além do gráfico de barras verticais, você conhece outro tipo de gráfico? Em caso afirmativo, qual?	Explorar o conhecimento prévio dos alunos acerca de gráficos.
O gráfico de barras verticais é o mais indicado para apresentar que tipo de informações? Por quê?	Oportunizar um momento para que os alunos possam investigar outros tipos de gráficos que podem ser utilizados para representar informações apresentadas em gráficos de barras verticais.
Por que, no gráfico de barras verticais, é necessário que haja uma mesma distância não nula entre as barras no eixo horizontal? O que acontece se essas distâncias forem diferentes? O que acontece se essas distâncias forem nulas?	Gerar um debate a respeito do tema com o intuito de que os alunos saibam que os gráficos de barras verticais possuem certas características que precisam estar presentes em sua representação.
Por que, no gráfico de barras verticais, as barras precisam ter a mesma largura? O que acontece se as barras tiverem larguras diferentes?	Gerar um debate a respeito do tema com o intuito de que os alunos saibam que os gráficos de barras verticais possuem certas características que precisam estar presentes em sua representação.
Caso as barras do gráfico fossem justapostas, ainda teríamos um gráfico de barras verticais? Por quê?	Mostrar aos alunos que, se as barras do gráfico estiverem justapostas, não se tem a representação de um gráfico de barras verticais e que essas são características de outro tipo de gráfico.
Para quais situações o gráfico de barras verticais é o mais indicado?	Oportunizar um momento para que os alunos possam pensar a respeito das situações em que o gráfico de barras verticais geralmente é utilizado.
Será que o gráfico de barras verticais é o mais usual nos meios de comunicação?	Provocar os alunos com o intuito de que eles possam ter um olhar voltado aos tipos de gráficos utilizados nos meios de comunicação.
Se, em determinado jornal impresso, a maioria dos gráficos for de barras verticais, podemos afirmar que em todos os jornais impressos os gráficos de barras verticais são os mais usuais? Por quê?	Propor uma discussão a respeito de generalizações.

Fonte: Autor.

Esse tipo de questionamento pode levar os alunos a refletirem nessa temática e a fazerem conjecturas não só de assuntos relacionados à matemática, mas também de assuntos relacionados a outras disciplinas escolares, assim como assuntos extraescolares, o que pode contribuir para sua formação de cidadão crítico, um dos objetivos da Educação Básica expresso nos atuais documentos curriculares nacionais.

É possível fazer uma exploração invertendo a ordem do comando, assim como propõe Butts (1997). Nesse caso, pode-se dar respostas (numéricas ou não) e solicitar que os alunos formulem perguntas, envolvendo as informações do enunciado para essas respostas. Por exemplo, solicitar aos alunos que formulem uma pergunta relacionada ao gráfico de barras verticais de modo que a resposta seja 10 pessoas. Nesse caso, outras perguntas formuladas por eles poderiam ser:

- Quantas pessoas alugaram apenas 1 DVD na semana de 1 a 7 de junho nessa locadora?
- Quantas pessoas alugaram 5 ou mais DVDs na semana de 1 a 7 de junho nessa locadora?

Outra opção seria apresentar por escrito uma resolução correta, ou não, e pedir que os alunos avaliem sua veracidade, como se estivessem fazendo uma espécie de análise da produção escrita. Por exemplo, para o item a, poderia ser apresentada a seguinte produção escrita:

$$5 + 5 = 10$$

Portanto, 10 pessoas alugaram mais do que 4 DVDs.

Nesse caso, o cálculo e a afirmação da resposta estão corretos. No entanto, essa resposta não serve para o item a, que solicita a quantidade de pessoas que alugaram 4 ou mais DVDs, e essa resposta indica a quantidade de pessoas que alugaram mais do que 4 DVDs, portanto, não considera as pessoas que locaram 4 DVDs.

Também é interessante propor questionamentos específicos para a temática das tarefas. Por exemplo:

- Você conhece um DVD? Se sim, diga o que é.
- Você já foi a uma locadora de DVD? Por quê?

- Qual informação do enunciado indica que nenhuma pessoa alugou mais de 7 DVDs nessa locadora na semana de 1 a 7 de junho de 2014?
- Quantos DVDs, no total, foram alugados na semana de 1 a 7 de junho de 2014?
- Quantos clientes alugaram DVDs na semana de 1 a 7 de junho de 2014 nessa locadora?
- É possível determinar a quantidade de DVDs que foram alugados no dia 5 de junho de 2014? Justifique sua resposta.
- É possível que, no dia 3 de junho de 2014, tenham sido alugados 17 DVDs? Por quê?
- Em quais dias da semana de 1 a 7 de junho de 2014, essa locadora funcionou? Por quê?
- Por que a escala do eixo vertical desse gráfico varia de 5 em 5 unidades?

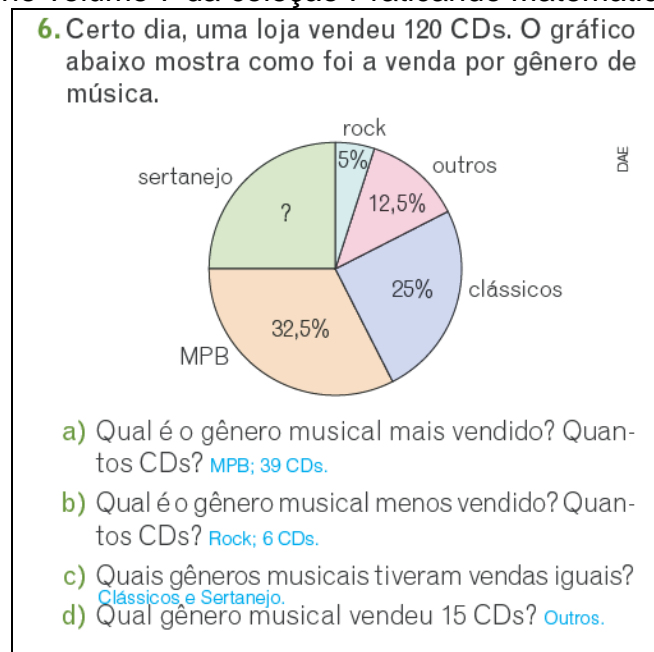
4.1.2 Volume 7 da Coleção Praticando Matemática

O tipo de tarefa mais frequente na unidade específica da temática Probabilidade e Estatística do volume 7 da coleção Praticando Matemática – intitulada Construindo e Interpretando Gráficos – também se enquadra no descritor mais frequente da coleção, a saber: relacionar informações explícitas em quadros, tabelas, gráficos (barras verticais, de setores, pictóricos ou de segmentos).

Para resolver as tarefas desse agrupamento no volume 7, os alunos precisam inicialmente realizar a leitura e a interpretação de um quadro, tabela, gráfico de barras verticais, de setores ou pictórico e depois relacionar as informações, de acordo com o solicitado no texto de seu enunciado, para obter uma resposta. Conforme apresentado no tópico anterior, as tarefas que se enquadram nesse descritor podem ser entendidas como Exercícios de Reconhecimento, de acordo com a classificação de Butts (1997). Com relação à demanda cognitiva, podem ser entendidas como de Nível I (reprodução), de acordo com De Lange (1999), e de baixo nível de demanda cognitiva, de acordo com Smith e Stein (1998).

A Figura 18 mostra uma tarefa do volume 7 que foi agrupada nesse descritor.

Figura 18 – Tarefa que se enquadra no descritor que apresenta a maior frequência no volume 7 da coleção *Praticando Matemática*



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015b, p. 137).

Nesse caso, o tema - venda de CDs - talvez esteja desatualizado, mas é possível que os alunos consigam imaginar a situação apresentada.

Tarefas desse tipo também possibilitam a realização de diferentes explorações com situações que podem estar mais próximas da realidade da maioria dos alunos com os quais se está trabalhando. Por exemplo, ao utilizar a situação do gênero musical preferido de cada aluno da turma, o tema da tarefa continuaria o mesmo, mas os alunos poderiam se sentir mais próximos da situação envolvida na tarefa.

Tanto na tarefa que diz respeito à venda de CDs, quanto em qualquer outra tarefa que trate de gráficos de setores, é importante que os alunos estejam cientes de certas ideias fundamentais, para isso, podem ser propostos alguns questionamentos, como os apresentados no Quadro 9, que também mostra uma intencionalidade por trás de cada um deles.

Quadro 9 – Questionamentos a respeito de gráficos de setores e suas intenções

Questionamento	Intenção
O gráfico de setores também é popularmente conhecido como gráfico <i>pizza</i> . A que se deve essa denominação popular?	Provocar os alunos para que façam relações entre características do gráfico de setores e sua denominação popular.
De que outra maneira as informações do gráfico de setores podem ser apresentadas?	Possibilitar que os alunos relacionem gráficos de setores com outros meios de apresentação de informações.
O gráfico de setores é o mais indicado para apresentar essas informações? Por quê?	Oportunizar um momento para que os alunos possam investigar outros tipos de gráficos que podem ser utilizados para representar tais informações.
É possível que um gráfico de setores não seja representado por uma figura com formato circular? Em caso afirmativo, qual seria outra maneira?	Propor uma reflexão a respeito do formato do gráfico de setores.
Em um gráfico de setores, existe alguma relação entre a área de cada setor e o valor atribuído a ele? Em caso afirmativo, qual?	Gerar um debate a respeito do tema com o intuito de que os alunos percebam que os gráficos de setores possuem determinadas características.
Em um gráfico de setores, existe alguma relação entre o ângulo central de cada setor e o valor atribuído a ele? Em caso afirmativo, qual?	Gerar um debate a respeito do tema com o intuito de que os alunos percebam que os gráficos de setores possuem determinadas características.
Em um gráfico de setores, existe alguma relação entre o ângulo central de cada setor e a área do setor correspondente? Em caso afirmativo, qual?	Gerar um debate a respeito do tema com o intuito de que os alunos percebam que os gráficos de setores possuem determinadas características.
Para quais situações, o gráfico de setores é o mais indicado?	Oportunizar um momento para que os alunos possam pensar nas situações em que o gráfico de setores geralmente é utilizado.

Fonte: Autor.

As questões relacionadas com a área do setor circular podem ser interessantes para professores e alunos, porque, geralmente, esse assunto não é associado aos gráficos de setores. Ao realizar um trabalho associando esses assuntos, é dado um passo na direção da integração entre os domínios matemáticos indicados no Princípio do Entrelaçamento da RME, nesse caso, integração entre os domínios de Geometria com Probabilidade e Estatística.

Também é interessante propor questionamentos específicos para a temática da tarefas. Por exemplo:

- Você conhece um CD? Se sim, diga o que é.
- Você já foi a uma loja que vende CD? Se não foi, diga por quê.
- O que representa a categoria “outros”?

- Algum dos 120 CDs vendidos nesse dia era do gênero musical samba? Justifique sua resposta.

4.1.3 Volume 8 da Coleção Praticando Matemática

O tipo de tarefa mais frequente na unidade específica da temática Probabilidade e Estatística do volume 8 da coleção Praticando Matemática – intitulada Possibilidades e Estatística – enquadra-se em um dos descritores presentes apenas nos volumes 8 e 9 da coleção, a saber: determinar a quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento retirando informações de quadros, do enunciado e/ou de imagens.

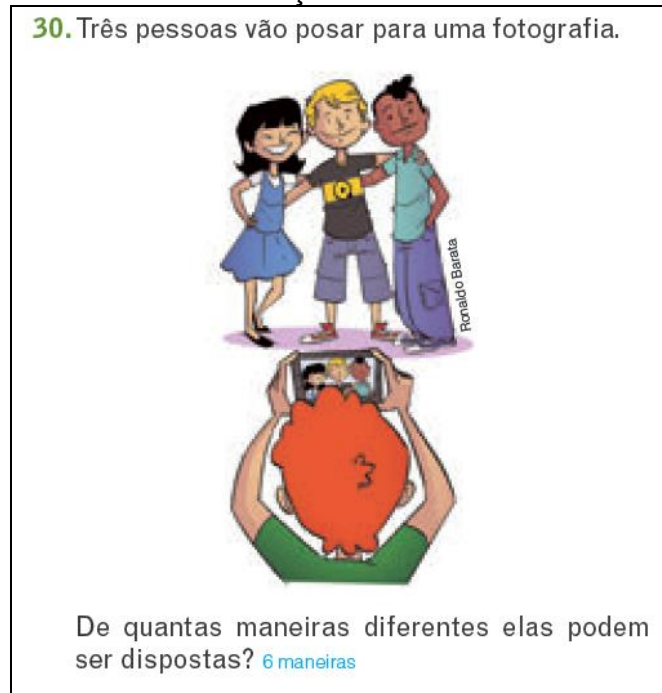
Para resolver as tarefas desse agrupamento no volume 8, os alunos podem organizar as informações retiradas de quadros, do enunciado e/ou de imagens em esquemas, diagramas de árvore, ou utilizar o princípio fundamental da contagem, também conhecido como princípio multiplicativo, para obter uma resposta. Assim, as tarefas que se enquadram nesse descritor podem ser entendidas como Exercícios Algorítmicos, de acordo com a classificação de Butts (1997), pois podem ser resolvidas por meio de um procedimento passo a passo.

Com relação à demanda cognitiva, as tarefas que se enquadram nesse descritor podem ser entendidas como:

- de Nível I (reprodução), de acordo com De Lange (1999), porque envolvem ações praticadas com frequência em sala, como aplicação de algoritmos conhecidos;
- de baixo nível de demanda cognitiva, de acordo com Smith e Stein (1998), porque não são ambíguas e envolvem a reprodução exata do material visto anteriormente.

A Figura 19 mostra uma tarefa do volume 8 que foi agrupada nesse descritor.

Figura 19 – Tarefa que se enquadra no descritor que apresenta a maior frequência no volume 8 da coleção *Praticando Matemática*



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015c, p. 282).

Nesse caso, a situação da fotografia era contemporânea ao ano de 2017, pois era rotineiro para a maioria dos adolescentes fazer registros fotográficos junto com outras pessoas para postar em redes sociais. Logo, é possível que os alunos consigam imaginar a situação apresentada.

Tarefas relacionadas à quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento possibilitam a realização de diferentes explorações com situações que podem estar ainda mais próximas dos alunos. Uma situação rotineira em livros didáticos presente nesse volume e que pode ser experienciada na prática pelos alunos é a da quantidade de aperto de mãos que um grupo de pessoas podem trocar.

Nesse tipo de tarefa, assim como em outras, é importante que os alunos estejam cientes de certas ideias fundamentais. Para isso, podem-se propor alguns questionamentos e respectivas intenções como os apresentados no Quadro 10.

Quadro 10 – Questionamentos a respeito de possibilidades e suas intenções

Questionamento	Intenção
Sempre é necessário explicitar todos os elementos do conjunto considerado para determinar a quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento? Por quê?	Evidenciar os diferentes meios de organizar e realizar a contagem das possibilidades de ocorrência de um evento.
Como saber se foram contabilizadas todas as possibilidades de ocorrência de um evento?	Gerar um debate a respeito do tema com o intuito de que os alunos validem suas soluções sempre que possível.
A quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento pode ser expressa por um número negativo? E por uma fração? Por quê?	Oportunizar que o aluno perceba que a quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento é o resultado de uma contagem, logo é expressa por um número natural.
As tarefas relacionadas à quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento têm alguma característica em comum?	Provocar que os alunos busquem características comuns nos enunciados e nas resoluções de tais tarefas.
Existe uma maneira geral para determinar a quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento em uma situação qualquer? Justifique sua resposta.	Propor uma discussão a respeito de generalizações.

Fonte: Autor.

É possível fazer uma exploração propondo variações da mesma tarefa, como na disposição das pessoas que vão posar para a fotografia. Por exemplo, ao considerar que as pessoas posicionadas em pé correspondem a uma disposição diferente das pessoas agachadas, mesmo que estejam uma ao lado da outra na mesma ordem em ambas as disposições, a resposta dada seria diferente da esperada pelos autores do livro; porque os alunos deveriam considerar todas as disposições das pessoas em pé, agachadas e as variações das pessoas em pé e agachadas nas mais diferentes posições (uma pessoa agachada no lado esquerdo, uma pessoa agachada no centro, uma pessoa agachada no lado esquerdo, duas pessoas agachadas e outra em pé no lado esquerdo, e assim sucessivamente). Também podem ser propostos questionamentos específicos para a temática da tarefas.

- De quantas maneiras diferentes as pessoas podem ser dispostas de modo que os dois meninos fiquem sempre um ao lado do outro?
- Se o fotógrafo se incluísse na fotografia, fazendo uma espécie de *selfie*, de quantas maneiras diferentes essas pessoas poderiam ser dispostas?

- Se houvesse cinco pessoas, de quantas maneiras diferentes elas poderiam ser dispostas de modo que todas ficassem em pé, uma ao lado da outra?

4.1.4 Volume 9 da Coleção Praticando Matemática

O tipo de tarefa mais frequente na unidade específica da temática Probabilidade e Estatística do volume 9 da coleção Praticando Matemática – intitulada Noções de Probabilidade – também se enquadra em um dos descritores presentes apenas nos volumes 8 e 9 da coleção. Na maioria delas, cerca de 95%, pede-se para determinar a probabilidade de ocorrência de um evento retirando informações do enunciado, de uma imagem ou de um quadro.

Para resolver as tarefas desse agrupamento, os alunos precisam conhecer ou determinar a quantidade de elementos do conjunto formado por todos os resultados possíveis da situação apresentada (espaço amostral) antes de calcular a probabilidade de ocorrência de um evento, definido pela razão entre a quantidade de casos favoráveis a esse evento e a quantidade total de possibilidades. Assim, as tarefas que se enquadram nesse descritor podem ser entendidas como Exercícios Algorítmicos, de acordo com a classificação de Butts (1997), pois podem ser resolvidas por meio de um procedimento passo a passo, um algoritmo.

Com relação à demanda cognitiva, as tarefas que se enquadram nesse descritor podem ser entendidas como:

- de Nível I (reprodução), de acordo com De Lange (1999), porque envolvem ações praticadas com frequência em sala, como aplicação de algoritmos conhecidos;
- de baixo nível de demanda cognitiva, de acordo com Smith e Stein (1998), porque não são ambíguas e envolvem a reprodução exata do material visto anteriormente.

A Figura 20 mostra uma tarefa do volume 9 que foi agrupada nesse descritor.

Figura 20 – Tarefa que se enquadra no descritor que apresenta a maior frequência no volume 9 da coleção *Praticando Matemática*

27. Lançando-se simultaneamente dois dados, cujas faces são numeradas de 1 a 6, qual é a probabilidade de:

a) serem obtidos números cujo produto seja ímpar? $\frac{1}{4}$

b) serem obtidos números cujo produto seja par? $\frac{3}{4}$



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015d, p. 155).

Tarefas desse tipo também possibilitam a realização de diferentes explorações. Uma possibilidade seria um trabalho com essa tarefa em três etapas. Primeiro, os alunos a resolveriam de maneira convencional, com lápis e papel. Em seguida, com um par de dados, não viciados, de seis faces em mãos, os alunos realizariam o lançamento simultâneo dos dois dados por dez vezes consecutivas e anotariam os resultados obtidos. Por fim, fariam uma comparação entre os valores determinados por meio de cálculos e os resultados obtidos com o lançamento dos dados.

Provavelmente os resultados obtidos não sejam equivalentes para todos. O professor deve, então, questionar os alunos sobre o porquê desse fato e conduzir uma discussão para que percebam que quanto maior a quantidade de lançamentos mais próximo dos valores obtidos por meio de cálculos o resultado será. Depois, caso aluno algum sugira, o professor pode agrupar os resultados dos lançamentos de todos e verificar se os resultados obtidos por meio do lançamento dos dados se aproximam dos valores determinados por meio de cálculos.

Ao trabalhar com tarefas que envolvem probabilidade, é importante que os alunos estejam cientes de certas ideias fundamentais, para isso, podem-se propor questionamentos como os apresentados no Quadro 11, que também mostra uma intencionalidade por trás de cada um deles.

Quadro 11 – Questionamentos a respeito de probabilidade e suas intenções

Questionamento	Intenção
Existe diferença entre possibilidade e probabilidade? Por quê?	Provocar os alunos a pensarem a respeito das ideias atreladas ao significado das palavras possibilidade e probabilidade em Estatística e fora dela.
Existe alguma relação entre a chance de ocorrência de um evento e a probabilidade de ocorrência do mesmo evento? Em caso afirmativo, qual?	Provocar os alunos a pensarem a respeito das ideias atreladas ao significado dos termos chance de ocorrência de um evento e probabilidade de ocorrência de um evento em Estatística.
É possível determinar a probabilidade de ocorrência de um evento em qualquer situação? Por quê?	Gerar um debate com o intuito de que os alunos percebam que a probabilidade expressa por meio da razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis só é válida nas situações em que os casos possíveis forem igualmente prováveis.
O que o valor que expressa a probabilidade de ocorrência de um evento representa?	Oportunizar um momento para que os alunos reflitam no tema com o intuito de que verifiquem que o valor em questão é um meio de expressar o quanto é provável a ocorrência de certo evento.
A probabilidade de ocorrência de um evento pode ser expressa por um número negativo? E por uma fração? E por um número positivo maior do que um? Por quê?	Possibilitar que aluno perceba que a probabilidade de ocorrência de um evento pode ser expressa por um número real maior ou igual do que zero e menor ou igual do que um, escrito na forma de fração, na forma decimal, por meio de porcentagem.
Por que, ao expressar a probabilidade de ocorrência de um evento por meio da razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, é necessário que a ocorrência de todos os casos possíveis seja igualmente provável?	Propor uma discussão a respeito de condições necessárias para expressar a probabilidade de ocorrência de um evento.

Fonte: Autor.

Também é interessante propor questionamentos específicos para temática da tarefas, por exemplo:

- Existem dados com uma quantidade de faces diferente de 6? Se sim, desenhe um exemplo. Se não, por quê?
- Apesar de todos os resultados possíveis serem conhecidos, é possível prever com certeza qual deles ocorrerá? Por quê?
- O produto da pontuação obtida só pode ser par ou ímpar? Por quê?
- Qual é a probabilidade de serem obtidas pontuações cuja soma seja maior do que 8? E menor do que 5?

- O que pode acontecer se pelo menos um dos dados for “viciado”, isto é, se a ocorrência de todos os resultados possíveis não for igualmente provável?
- Existe algum evento que você tenha certeza de que ocorrerá? Em caso afirmativo, qual?
- Existe algum evento que seja impossível de ocorrer? Em caso afirmativo, qual?

4.1.5 Visão Geral

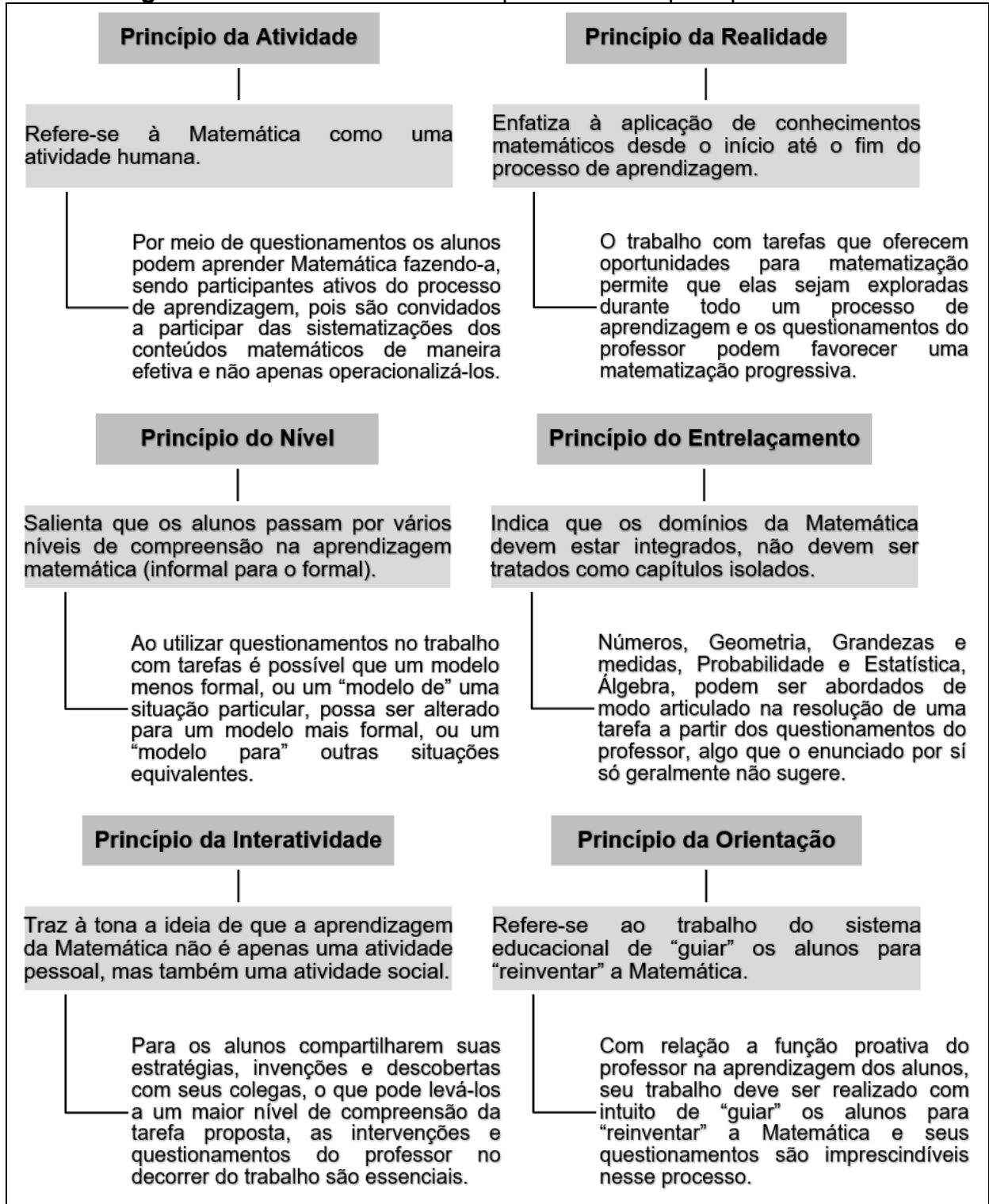
As tarefas que se enquadram nos descritores das tarefas mais frequentes das unidades específicas da temática Probabilidade e Estatística da coleção *Praticando Matemática* podem ser entendidas como Exercícios de Reconhecimento ou Exercícios Algorítmicos, de acordo com a classificação de Butts (1997). Isso confirma a hipótese desse autor de que, mesmo reconhecendo haver uma zona nebulosa em sua classificação, grande parte das tarefas propostas nos livros didáticos recai nas três primeiras categorias (Exercício de Reconhecimento, Exercícios Algorítmicos e Problemas de aplicação).

A maioria dos questionamentos propostos a respeito das ideias consideradas fundamentais, relacionadas aos tipos de tarefa mais frequente à temática Probabilidade e Estatística da coleção *Praticando Matemática*, pode ser entendida como questões para estimular o pensamento matemático, de acordo com Way (2008), pois esses questionamentos têm potencial para auxiliar os alunos a conectarem-se a experiências anteriores e a identificarem padrões e relações. Isso se refere à maior parte dos questionamentos, porque há alguns que podem ser entendidos de outra maneira. Por exemplo, a questão “Qual é o objetivo de apresentar informações por meio de gráficos?” pode ser entendida como uma questão inicial, de acordo com Way (2008), porque tem a finalidade de que os alunos foquem o pensamento em uma direção geral como um ponto de partida.

Ao trabalhar com esses questionamentos a respeito das ideias consideradas fundamentais, as tarefas possivelmente terão sua demanda cognitiva alterada, uma vez que a maior parte desses questionamentos envolve ações relacionadas à reflexão, que, segundo De Lange (1999), são características do Nível

III – análise, e à exploração da natureza dos conceitos, processos ou relações matemáticas, que, segundo Smith e Stein (1998), são características do fazer matemática, situado no alto nível de demanda cognitiva.

Figura 21 – Questionamentos enquadrados nos princípios da RME

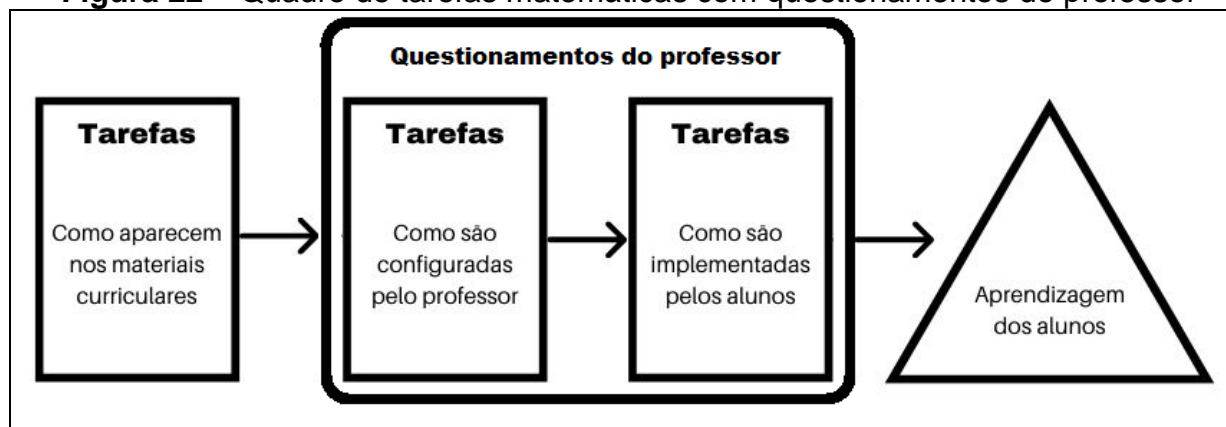


Fonte: Autor, baseado em Prestes e Buriasco (2019).

O trabalho com os questionamentos perpassa por todos os princípios da RME, conforme mostra o esquema da Figura 21, que apresenta a ideia principal dos princípios da RME e como os questionamentos podem se enquadrar em cada um deles.

Como no desenvolvimento de um trabalho na perspectiva da RME, o professor pode explorar tanto os assuntos matemáticos envolvidos nas tarefas, quanto as resoluções dos alunos por meio de questionamentos, visando à reinvenção-guiada, é possível situar as sugestões de questionamentos apresentados anteriormente nas seções 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 e 4.1.4 de maneira que permeiem o modo como as tarefas são configuradas pelo professor e como são implementadas pelos alunos, conforme a Figura 22.

Figura 22 – Quadro de tarefas matemáticas com questionamentos do professor



Fonte: Autor, baseado em Stein e Smith (1998).

Desse modo, ficam explícitos os momentos em que os questionamentos do professor se localizam na representação dos desdobramentos das tarefas em sala de aula na dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem propostos por Stein e Smith (1998).

Entende-se que as tarefas apresentadas nas figuras 17, 18, 19 e 20, que se enquadram nos descritores que apresentam a maior frequência em cada um dos volumes da coleção *Praticando Matemática*, possuem enunciados relativamente claros, que oportunizam aos alunos refletir acerca dos assuntos envolvidos. Todavia, não possuem características de boas tarefas na perspectiva da RME, ou seja, essas tarefas não são significativas, porque não são desafiadoras nem são informativas, porque elas não têm potencial para fornecer uma imagem do aprendizado dos alunos, sem que o professor faça intervenções.

Mesmo assim, acredita-se ser possível realizar um bom trabalho utilizando essas tarefas, mas, para isso, as atitudes do professor e suas intervenções são extremamente necessárias. Essas tarefas podem ser o mote para a discussão de diversos assuntos matemáticos ou não.

5 APONTAMENTOS

Com base na ideia dos Modelos Emergentes da RME, que tem como ponto de partida um “modelo de” uma situação particular e gradualmente passa para um “modelo para” situações mais gerais, é que este capítulo foi estruturado. Inicialmente, apresenta apontamentos a respeito de cada capítulo de maneira particular e, em seguida, apontamentos envolvendo considerações mais gerais.

5.1 APONTAMENTOS ESPECÍFICOS

A principal intenção da Apresentação deste trabalho é expor percepções a respeito de um modelo de produção de livro didático, assim, é possível ter-se uma ideia de como os originais de um livro didático de Matemática podem ser produzidos. Não se poderia, porém, deixar de fazer determinadas críticas a certos pontos do processo de produção e adoção do livro didático via PNLD, pois existem problemas. Julga-se conveniente esse tipo de apresentação, porque, além de descrever uma parte da vida profissional do pesquisador, o assunto está diretamente relacionado com o tema abordado no decorrer do trabalho, isto é, tarefas de um livro didático de Matemática destinado ao PNLD.

Na Introdução, são apresentadas seções (Breve histórico dos livros didáticos no Brasil e do Programa Nacional do Livro e do Material Didático, a coleção Praticando Matemática no PNLD 2017 e a estrutura do trabalho), algo que usualmente não aparece nessa parte dos trabalhos acadêmicos. Optou-se, porém, por essa organização com o intuito de evidenciar cada ideia separadamente, além indicar o assunto a ser abordado no decorrer do trabalho. Uma das intenções dessa organização é dar alguma profundidade, principalmente, na questão histórica do livro didático no Brasil e na apresentação da coleção de livros didáticos utilizada no estudo.

A construção dos Procedimentos Metodológicos com uma descrição mais detalhada a respeito das ações realizadas no decorrer do trabalho se deu pelo fato de os integrantes do GEPEMA estarem iniciando uma configuração mais personalizada do método de pesquisa. Nele, ao invés de a ênfase estar na explicação do que é uma pesquisa qualitativa e suas ramificações (Análise de

conteúdo, Pesquisa-ação, Estudo de caso, Pesquisa especulativa, entre outras), a ideia foi fazer um relato detalhado daquilo que realmente ocorreu no desenvolvimento da pesquisa, isto é, um relato sincero que mostra o lado mais humano da pesquisa, incluindo as ações que não saem como o esperado, algo muito recorrente nos mais diferentes tipos de pesquisas e que geralmente não fica registrado nos trabalhos acadêmicos.

O capítulo que trata da Educação Matemática Realística apresenta ideias e conceitos da RME sem a intenção de esgotar o assunto. Sua organização consiste em uma apresentação geral, seguida por uma parte histórica com destaque para a vida e obra de Hans Freudenthal, o precursor da RME. Depois, são apresentados seus principais aspectos teóricos e uma ideia geral de aula na perspectiva da RME.

No capítulo intitulado Tarefa: um ponto de vista, é destacada a existência de diferentes tipos de tarefas matemáticas, algo que parece não receber tanta atenção, mas que pode fazer toda a diferença no dia a dia da sala de aula, porque, dependendo do tipo de tarefa, é possível oportunizar diferentes condições para ensinar e também para aprender matemática. Cyrino e Jesus (2014) apresentam três argumentos para evidenciar a relevância das tarefas matemáticas nos processos de ensino e de aprendizagem:

- as tarefas podem determinar a aprendizagem dos alunos;
- as tarefas são instrumentos que podem conectar os objetivos de aprendizagem aos alunos;
- as tarefas determinam o tipo de raciocínio que os alunos podem desenvolver ao resolvê-las.

A presença frequente de tarefas em aulas de Matemática das mais diferentes abordagens já deveria ser um argumento mais do que suficiente para que elas fossem selecionadas com muita atenção.

Na seção que trata de demanda cognitiva das tarefas matemáticas, são apresentados dois tipos de classificação convergentes e suas características, um segundo De Lange (1999) e outro de acordo com Smith e Stein (1998). Ainda que haja na literatura alguma preocupação quanto a manutenção ou declínio do nível de demanda cognitiva de uma tarefa em sua implementação (STEIN; SMITH, 1998), faz sentido tratar do aumento do nível de demanda cognitiva de uma tarefa, porque, assim, fica mais destacada a relevância das atitudes do professor em sala

de aula, uma das premissas para o professor que pretende desenvolver um trabalho à luz da RME, já que essa abordagem se baseia em princípios e não possui um procedimento *pari passu* a ser seguido.

A seção que versa sobre as características de boas tarefas na perspectiva da RME destaca que uma tarefa que apresenta boas características não garante o envolvimento dos alunos. Entretanto, o estudo mostrou que, a partir de tarefas que não apresentam boas características na perspectiva da RME, é possível realizar uma exploração razoável, dependendo necessariamente das atitudes do professor. Mesmo assim, desenvolver um trabalho com tarefas que apresentem boas características parece ser o ideal, embora também com estas tarefas, as intervenções dos professores são essenciais.

No capítulo Desenvolvimento do Estudo, são apresentadas possibilidades de intervenção para as tarefas mais frequentes das unidades que abordam a temática Probabilidade e Estatística, da coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental mais distribuída pelo governo federal no PNLD 2017 (coleção Praticando Matemática). Essas intervenções são baseadas em questionamentos que colocam tanto o professor quanto o aluno em ação nos processos de ensino e de aprendizagem. De modo geral, os questionamentos servem de subsídios ao pensamento e raciocínio dos alunos, estimulam justificativas, explicações e significados, além de oportunizar o estabelecimento de conexões conceituais, fatores associados à manutenção de demandas cognitivas de alto nível de acordo com Stein e Smith (1998).

5.2 APONTAMENTOS GERAIS

Neste estudo foi apresentada uma possibilidade de trabalho com as tarefas das unidades que abordam a temática Probabilidade e Estatística, da coleção de livros didáticos Praticando Matemática à luz da RME. Mesmo essa possibilidade de trabalho sendo embasada por questionamentos, é necessário ficar claro que não é qualquer tipo de questionamento (ou conjunto de) que caracteriza uma abordagem à luz da RME.

De maneira semelhante ao trabalho de Forster (2020, p. 85), os questionamentos propostos neste estudo têm como uma de suas principais intenções “possibilitar que as tarefas sejam implementadas de modo a colocar os

alunos em movimento de aprendizagem, esperando que eles assumam um papel ativo no seu processo de aprender”. A ideia é que os questionamentos propostos possam ser adaptados ou servir de inspiração para um trabalho com outras temáticas, além de Probabilidade e Estatística, e em outros níveis de ensino.

A tese é mostrar, principalmente aos professores que ensinam Matemática, que inicialmente não é necessário ter em mãos tarefas que já apresentem boas características na perspectiva da RME para realizar um trabalho que favoreça os processos de ensino e de aprendizagem. Isso faz todo o sentido quando se trata da abordagem da RME, que tem suas ações diretamente relacionadas tanto com as atitudes do professor e seu compromisso com a aprendizagem, quanto com o envolvimento e as ações dos alunos.

Pelo fato de a abordagem da RME ser baseada em princípios, um trabalho nessa perspectiva pode ser realizado de diferentes maneiras, já que não há um único *modus operandi*, inicialmente, tudo vai depender das atitudes e escolhas do professor. Para se ter uma ideia, caso os mesmos questionamentos presentes neste estudo fossem propostos para alunos de duas turmas distintas, possivelmente o andamento das aulas tomaria caminhos diferentes, porque as respostas dadas pelos alunos tendem a não ser exatamente iguais e o professor pode explorá-las nas direções que julgar mais conveniente. Entretanto, ambas as aulas podem estar de acordo com a abordagem da RME.

Entende-se que o olhar realístico a que se refere, logo no título do trabalho, permeia todo o texto, porque ele foi produzido com o olhar de alguém que já tinha algum conhecimento da RME antes deste estudo e está impregnado por suas ideias. Contudo, as intervenções propostas por meio dos questionamentos são os momentos em que isso fica explícito no trabalho, pois é quando possíveis atitudes do professor são apresentadas.

Para um professor que ensina Matemática, que a toma como uma ciência exata, pronta e acabada e entende a aprendizagem como algo a ser adquirido por meio de reprodução de procedimentos, a abordagem da RME não é a mais viável. Para que seja realizado um trabalho à luz da RME, é necessário que o professor esteja convicto de que a Matemática está em constante evolução e que a aprendizagem é um processo que os alunos constroem, tanto individualmente quanto coletivamente, sob sua orientação.

Entende-se que a utilização de descritores para analisar e discutir as

tarefas “tiram o peso” da coleção de livros didáticos em questão, porque qualquer coleção de livros didáticos, ou material didático, destinados aos anos finais do Ensino Fundamental podem ter suas tarefas das unidades que abordam a temática Probabilidade e Estatística agrupadas com auxílio dos descritores aqui construídos. Desse modo, era possível ter realizado este estudo com outra coleção de livros didáticos aprovada no PNLD 2017, mas a escolha da coleção *Praticando Matemática* se deu por sua representatividade, por ser a mais distribuída nesse PNLD.

A maioria das tarefas estudadas neste trabalho pode ser classificada como sendo de reprodução, de acordo com De Lange (1999), e de baixo nível de demanda cognitiva, de acordo com Smith e Stein (1998), isto é, a maioria das tarefas envolve apenas ações relacionadas com a memorização e a reprodução de “conhecimentos” praticados com frequência. Infelizmente, isso não é uma exclusividade da coleção *Praticando Matemática* aprovada no PNLD 2017, de maneira geral, as tarefas propostas nos livros didáticos de Matemática distribuídos pelo governo federal, nos mais diferentes níveis de ensino, possuem essas características. Assim, a crítica implícita neste estudo diz respeito ao modelo de livro didático de Matemática usual no Brasil, aquele que apresenta boa parte das tarefas como sendo meros exercícios de reprodução de procedimentos, que pouco contribuem para o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Existem diversos fatores que, possivelmente, contribuem para que a maioria das tarefas presentes nos livros didáticos de Matemática seja de baixo nível de demanda cognitiva. Um deles reside no entendimento de mercado que muitos departamentos comerciais das editoras possuem, pois produzir um livro didático de Matemática com tarefas diferentes das habituais, que possam ser consideradas de níveis mais elevados de demanda cognitiva, tende a demandar mais trabalho dos professores ao utilizá-las, e isso pode causar alguma rejeição por parte deles no momento da escolha da coleção de livros didáticos, o que não é interessante do ponto de vista financeiro. Outro fator diz respeito às normas do edital de licitação pública que as editoras devem seguir para ter suas obras aprovadas no PNLD, o que tem um peso enorme na produção do livro didático e consome muita energia dos envolvidos na produção, que podem deixar em segundo plano a elaboração de tarefas diferenciadas, sendo mais cômodo manter as tarefas rotineiras, com as características historicamente usuais. A não aprovação de uma coleção de livros

didáticos no PNLD implica em um desperdício considerável de investimento, principalmente financeiro, e geralmente as editoras optam por não correr esse risco.

Por meio deste estudo, é possível ter uma ideia geral de níveis de demanda cognitiva e, com eles, diferenciar tarefas matemáticas das mais diferentes temáticas. Isso possibilitará identificar tarefas que oferecem oportunidades para o aluno pensar a respeito da situação em questão e não apenas reproduzir mecanicamente procedimentos matemáticos sem refletir no porquê o faz ou na utilidade em sua formação, como geralmente ocorre. Entretanto, apenas a proposição de boas tarefas não é suficiente para obter êxito no ensino de Matemática.

Em pesquisas envolvendo a área de Educação Estatística existem estudos, como o de Estevam e Cyrino (2016), que discutem a importância das tarefas no trabalho de sala de aula e vai ao encontro do apresentado nesta pesquisa, o que indica a preocupação de pesquisadores de diferentes áreas da Educação Matemática com o tema. Isso sugere que esta pesquisa pode ser diretamente útil tanto para seguidores da RME, quanto para quem lida com Educação Estatística.

Como estudos futuros ainda se pode:

- fazer algum tipo de análise que sugira divergências e convergências no trabalho de sala de aula com um mesmo descritor nos diferentes volumes da coleção, para reconhecer as possíveis evoluções do conteúdo matemático de um ano para o seguinte;
- realizar uma discussão de tarefas que apresentam boas características na perspectiva da RME em termos do nível de demanda cognitiva, para verificar se elas necessariamente são de alto nível de demanda cognitiva;

A partir desta pesquisa outras podem emergir. Por exemplo, é possível estender este estudo utilizando como objeto de estudo uma coleção de livros didáticos de Matemática destinada aos anos iniciais do Ensino Fundamental e uma coleção destinada ao Ensino Médio, para identificar divergências e convergências entre os descritores obtidos ao agrupar as tarefas da temática Probabilidade e Estatística. Assim, seria possível ter uma ideia mais precisa dos tipos de tarefas mais frequentes dessa temática na Educação Básica e fazer uma

análise do tipo de aprendizagem que essas tarefas oferecem aos alunos que concluem esse nível de ensino. Outra possibilidade de pesquisa seria construir uma sequência de tarefas da temática Probabilidade e Estatística destinada a algum ano escolar específico, com características de boas tarefas na perspectiva da RME, destacando as oportunidades de aprendizagem que ambas as sequências oferecem, a partir de um cotejo entre essa sequência e a sequência de tarefas propostas em um volume de algum livro didático de Matemática do ano escolar equivalente.

Enfim, as possibilidades de trabalho em sala de aula com tarefas matemáticas são grandes. Por meio de uma única tarefa, podem ser explorados diferentes assuntos, matemáticos ou não, que contribuem para a formação dos alunos. Para isso, o compromisso, a criatividade e as intenções dos professores são fundamentais, pois são eles, nas escolas, os responsáveis por oportunizar aos alunos um envolvimento em atividades de aprendizagens e orientá-los no fazer matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática 6**. 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015a.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática 7**. 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015b.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática 8**. 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015c.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática 9**. 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015d.

BARABASH, Marita; GUBERMAN, Raisa. Developing Young Students' Geometric Insight Based on Multiple Informal Classifications as a Central Principle in the Task Design. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22, Oxford, United Kingdom. 2013. p. 293-301.

BARRETTO, Ana Cláudia. **Procedimentos da análise da produção escrita em matemática no contexto do GEPEMA: um olhar para dentro**. 2018. 116f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

BISPO, Regina; RAMALHO, Glória; HENRIQUES, Nuno. Tarefas matemáticas e desenvolvimento do conhecimento matemático no 5º ano de escolaridade. **Análise Psicológica**, Lisboa, v. 1, n. 26, p. 3-14, 2008.

BORBA, Rute Elizabeth de Souza et al. Educação estatística no ensino básico: currículo, pesquisa e prática em sala de aula. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 2, n. 2, 2011.

BRASIL. **PNLD 2017: matemática – Ensino fundamental anos finais / Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2016.

BRASIL. **FNDE**. Disponível em: <www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/funcionamento>. Acesso em: 31 jul. 2019a.

BRASIL. **PNLD**. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld>>. Acesso em: 30 jul. 2019b.

BRASIL. **FNDE**. Disponível em: <www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Acesso em: 08 jul. 2019c.

BRASIL. **FNDE**. Disponível em: <www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/legislacao/item/518-hist%C3%B3rico>. Acesso em: 1 out. 2019d.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; SILVA, Gabriel dos Santos e. Aspectos da Educação Matemática Realística. **ReBECCEM**, Cascavel, v. 1, n. 1, p. 1-15, dez. 2017.

BUTTS, Thomas. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (Orgs.). **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante Matemática**: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016 (coleção Quadrante Matemática).

COLES, Alf; BROWN, Laurinda. Task design for ways of working: making distinctions in teaching and learning mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 19, n. 2-3, p. 149-168, 2016.

CURY, Carlos Roberto Jamil. Livro didático como assistência ao estudante. **Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 9, n. 26, p. 119-130, jan./abr. 2009.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; JESUS, Cristina Cirino de. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 20, n. 3, p. 751-764, 2014.

DE LANGE, Jan. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.

DING, Liping; JONES, Keith; PEPIN, Birgit. Task design in a school-based professional development programme. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22, Oxford, United Kingdom. 2013. p. 441-449.

DOYLE, Walter. Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. **Educational psychologist**, v. 23, n. 2, p. 167-180, 1988.

ESTEVAM, Everton José Goldoni; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Desenvolvimento profissional de professores em Educação Estatística. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 9, n. 1, p. 115-150, 2016.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Enunciados de tarefas de Matemática baseados na perspectiva da Educação Matemática Realística. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 452-472, ago. 2015.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Educação Matemática Realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 237-252, 2016.

FORSTER, Cristiano. **Um olhar realístico para tarefas de função afim em livros didáticos**. 2020. 112f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

FREUDENTHAL, Hans. Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, n. 1, p. 3-8, 1968.

FREUDENTHAL, Hans. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

FREUDENTHAL, Hans. Matemática nova ou educação nova? **Perspectivas**, Portugal, v. 9, n. 3, p. 317-328, 1979.

FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica. 2004. p. 77-98.

GONÇALVES, Cristina Faria Fidelis; STRAPASSON, Elizabeth. **O tratamento da informação**: Estatística para o Ensino Fundamental. Londrina: EDUEL, 2007.

GRAVEMEIJER, Koeno. How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 1, n. 2, p. 155-177, jun. 1999.

GRAVEMEIJER, Koeno. O que torna a Matemática tão difícil e o que podemos fazer para o alterar? In: SANTOS, Maria Leonor; CANAVARRO, Ana Paula; BROCARD, Joana. **Educação matemática**: Caminhos e encruzilhadas, Lisboa: APM. 2005. p. 83-101.

GRAVEMEIJER, Koeno. RME Theory and Mathematics Teacher Education. In: **International Handbook of Mathematics Teacher Education**, Rotterdam: Sense Publishers. 2008. v. 1. p. 283-302.

GRAVEMEIJER, Koeno. A Socio-Constructivist Elaboration of Realistic Mathematics Education. In: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja (Ed.). **National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics**: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education. Cham: Springer. 2020. p. 217-233.

GRAVEMEIJER, Koeno; TERWEL, Jan. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777-796, nov-dez. 2000.

GUIMARÃES, Gilda; OLIVEIRA, Izabella. Construção e interpretação de gráficos e tabelas. In: BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa - Educação Estatística**. Caderno 7. Brasília: MEC, SEB, 2014, p. 21-38.

HATTIE, John et al. **Visible Learning for Mathematics, Grades K-12**: What works best to optimize student learning. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2016.

HEALY, Lulu; FERNANDES, Solange Hassan Ahmad Ali; FRANT, Janete Bolite. Designing tasks for a more inclusive school mathematics. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22, Oxford, United Kingdom. 2013. p. 61-68.

HENNINGSEN, Marjorie; STEIN, Mary Kay. Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 28, n. 5, p. 524-549, nov. 1997.

HOUAISS, Antônio. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. Um compromisso de levar ao livro didático as conquistas do Movimento de Educação Matemática. **HISTEMAT**, ano 4, n. 2, p. 184-241, 2018.

JESUS, Cristina Cirino de; NAGY, Márcia Cristina. Contribuições da análise crítica de tarefas para a formação continuada de professores que ensinam matemática. In: XI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, 2013, Curitiba. **Anais...** Paraná, 2013. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/3328_1502_ID.pdf>. Acesso em: 27 out. 2020.

KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna**. Trad. Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

LEUNG, Allen. An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. **ZDM**, v. 43, n. 3, p. 325–336, 2011.

LINCOLN, Yvonna S.; GUBA, Egon G. **Naturalistic Inquiry**. Beverly Hills: Sage Pub., 1985.

LOPES, Antonio José. Livro didático e pesquisa em Educação Matemática: a perspectiva de um professor que também é pesquisador, antes de ser um autor. **HISTEMAT**, ano 4, n. 2, p. 154-183, 2018.

MÅSØVAL, Heidi Strømskag. Shortcomings in the *milieu* for algebraic generalisation arising from task design and vagueness in mathematical discourse. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22, Oxford, United Kingdom. 2013. p. 231-239.

MATOS, Júlia Silveira. A história nos livros didáticos: o papel das políticas governamentais na produção e veiculação do saber histórico. **Historiæ**, Rio Grande, v. 3, n. 1, p. 51-74, 2012.

MENDES, Marcele Tavares. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 274f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

MUNAKATA, Kazumi. O livro didático como mercadoria. **Pro-Posições**, Campinas, v. 23, n. 3, p. 51-66, set./dez. 2012.

NEELEMAN, Wim. Hans Freudenthal: “Não me chamem de advogado do diabo, sou o próprio diabo...”. **Bolema**, Rio Claro, v. 6, n. 7, p. 36-46, 1991.

PASSOS, Adriana Quimentão. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e GEPEMA: algumas aproximações**. 2015. 147f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

PEREIRA, Caroline Subirá; DIAS, Cristiane de Fátima Budek; DOS SANTOS JUNIOR, Guataçara. Materiais Didáticos para o Ensino de Estatística: uma análise a partir de Relatos de Experiência do XII ENEM. **Revista Thema**, v. 15, n. 3, p. 1007-1018, 2018.

PNUD. **O que é Desenvolvimento Humano**. Disponível em: <www.br.undp.org/content/brazil/pt/home/idh0/conceitos/o-que-e-desenvolvimento-humano.html>. Acesso em: 20 abr. 2020.

PRESTES, Diego Barboza; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Prova-Escrita-em-Fases de matemática no 5º ano do Ensino Fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 8, n. 15, p. 89-105, jan-jun. 2019.

RICO, Luis. Ha fallecido Hans Freudenthal. **SUMA**, Badalona, n. 7, p. 92-93, 1991.

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. **Trajatória Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. 104f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SANCHEZ, Lucília Bechara. Autoria de livros didáticos: uma experiência e uma vida. **HISTEMAT**, ano 4, n. 2, p. 242-262, 2018.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. 157f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. 2018. 166f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SILVA, Gabriel dos Santos e; PRESTES, Diego Barboza; FORSTER, Cristiano. Boas tarefas de Matemática na perspectiva da Educação Matemática Realística. In: XIII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, 13, 2019, Cuiabá. **Anais...** Mato Grosso, 2019. Disponível em:

<www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/emapem/2019/schedConf/presentations>. Acesso em: 1 abr. 2020.

SILVA, Marco Antônio. A Fetichização do Livro Didático no Brasil. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 37, n. 3, p. 803-821, set./dez. 2012.

SMITH, Margaret Schwan; STEIN, Mary Kay. Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, n. 5, p. 344–350, fev. 1998.

STEIN, Mary Kay; GROVER, Barbara W.; HENNINGSEN, Marjorie. Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. **American educational research journal**, v. 33, n. 2, p. 455-488, 1996.

STEIN, Mary Kay; SMITH, Margaret Schwan. Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, n. 4, p. 268-275, jan. 1998.

STEPHAN, Michelle; AKYUZ, Didem. An Instructional Design Collaborative in One Middle School. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22, Oxford, United Kingdom. 2013. p. 509-518.

STREEFLAND, Leen. Editorial: The legacy of Freudenthal. In: STREEFLAND, Leen (Ed.), **The legacy of Hans Freudenthal**. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1993, p. 1-7.

TELO, Ricardo Motta; SCHUBRING, Gert. A Comissão Nacional do Livro Didático e a avaliação dos livros de matemática entre 1938 e 1969. **Revista Brasileira de História e Educação**, Maringá, v. 18, p. 2-27, 2018.

TREFFERS, Adrian. **Wiskobas doelgericht**. Utrecht: IOWO, Rijksuniversiteit Utrecht, 1978.

TREFFERS, Adrian. **Three dimensions**: a model of goal and theory description in mathematics instruction – the wiskobas project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 30, p. 139-162, jul./dez. 2008.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. **Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9**. Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. Realistic Mathematics Education as work in progress. In: LIN, F. L. (Ed.). **Common Sense in Mathematics Education**.

Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics. Taipei, Taiwan. nov. 2001. p. 1-43.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. The role of contexts in assessment problems in mathematics. **For the Learning of Mathematics**. FLM Publishing Association, Edmonton, Alberta, Canada, v. 25, n. 2, p. 2-9, jul. 2005.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, L.; KISSANE, B.; HURST, C. (Eds.). **Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle: MERGA. 2010.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja; DRIJVERS, Paul. Realistic Mathematics Education. In: S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education**. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer. 2014, p. 521-525.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja; WIJERS, Monica. Mathematics standards and curricula in the Netherlands. **ZDM**, v. 37, n. 4, p. 287-307, 2005.

VIEIRA, Sonia. **Elementos de estatística**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

WATSON, Anne et al. Introduction. In: MARGOLINAS, Claire. **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22, Oxford, United Kingdom. 2013. p. 7-14.

WAY, Jenni. Using questioning to stimulate mathematical thinking. **Australian Primary Mathematics Classroom**, v. 13, n. 3, p. 22-27, 2008.

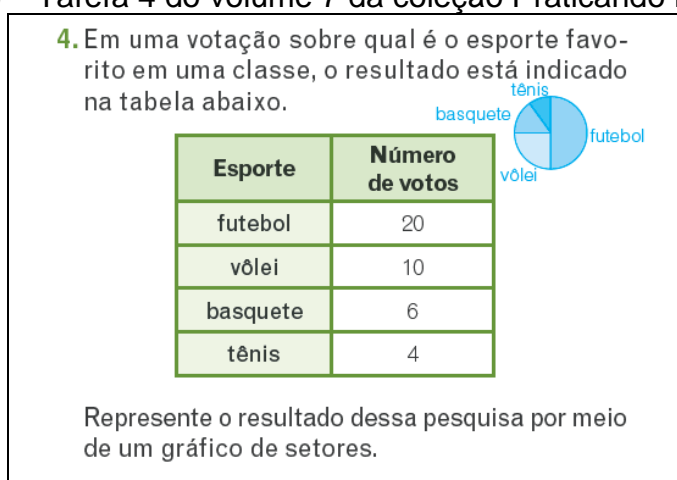
WITTMANN, Erich Ch. The Impact of Hans Freudenthal and the Freudenthal Institute on the Project Mathe 2000. In: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja (Ed.). **International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education**. Cham: Springer, 2019. p. 63-69.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Observações relacionadas ao assunto matemático considerado

Nem tudo o que é nomeado como tabela, nas unidades específicas da temática Probabilidade e Estatística da coleção *Praticando Matemática*, é realmente uma tabela sob o ponto de vista da Estatística. Infelizmente, essa não é uma exclusividade dessa coleção, pois, segundo Guimarães e Oliveira (2014), esse fato pode ser identificado em várias tarefas propostas em livros didáticos. A Figura 23 ilustra essa situação, pois nela é apresentado um quadro equivocadamente indicado como se fosse uma tabela.

Figura 23 – Tarefa 4 do volume 7 da coleção *Praticando Matemática*



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015b, p. 137).

As tabelas estatísticas devem respeitar alguns critérios, como “interseção entre linhas e colunas, cada uma com uma variável, que formam as células” (GUIMARÃES; OLIVEIRA, 2014, p. 35) e “não devem ser delimitadas, à direita e à esquerda, por traços verticais” (VIEIRA, 2008, p. 47). Além disso, as tabelas estatísticas possuem elementos essenciais como:

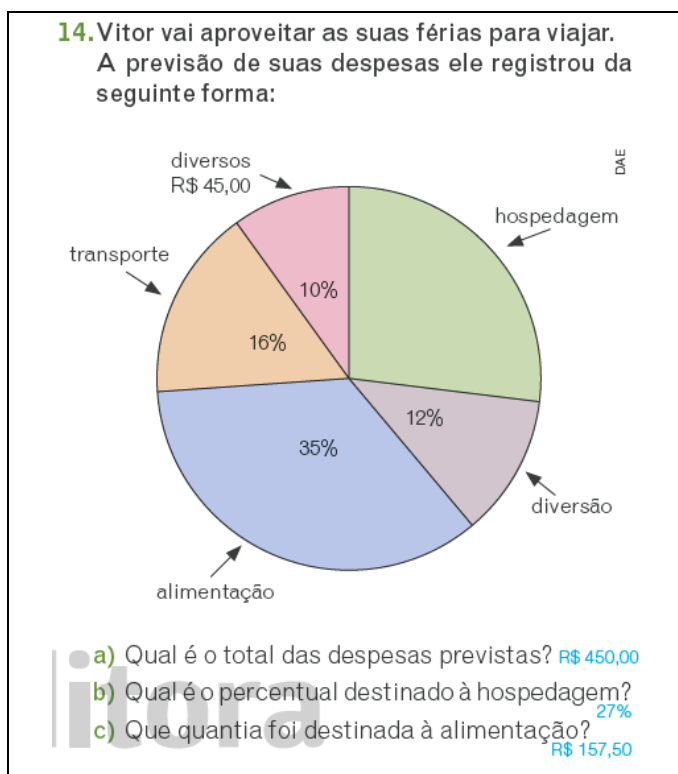
- título – inserido no alto da tabela para informar o fato observado, o local e a época da observação;
- cabeçalho – localizado na parte superior da tabela para especificar as informações apresentadas em cada coluna;
- coluna indicadora – identifica o tipo de informação apresentada em cada linha;
- corpo – composto pelos dados distribuídos em linhas e colunas;
- fonte – situada no rodapé da tabela para identificar a entidade responsável pelo fornecimento dos dados (GONÇALVES;

STRAPASSON, 2007; VIEIRA, 2008; GUIMARÃES; OLIVEIRA, 2014).

Nesse exemplo, a organização tabular chamada de tabela está mais para uma lista enquadrada do que uma tabela estatística, porque é fechada à direita e à esquerda com traços verticais e não apresenta elementos essenciais, como o título, por exemplo. Além disso, de acordo com Vieira (2008, p. 47), as tabelas “devem ser entendidas mesmo quando não se lê o texto em que estão apresentadas”, o que não é o caso do nosso exemplo. Portanto, “nem tudo que é organizado em linhas e colunas é uma tabela quando estamos falando de Estatística” (GUIMARÃES; OLIVEIRA, 2014, p. 35).

Nem todos os gráficos apresentados nas unidades específicas da temática Probabilidade e Estatística da coleção *Praticando Matemática* possuem elementos essenciais. A Figura 24 ilustra essa situação, pois nela é apresentado um gráfico que não possui título e não possui fonte.

Figura 24 – Tarefa 14 do volume 8 da coleção *Praticando Matemática*



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015c, p. 279).

Todo gráfico deve conter, entre outros elementos, um título (GONÇALVES; STRAPASSON, 2007; VIEIRA, 2008; GUIMARÃES; OLIVEIRA, 2014). Assim como o título das tabelas, os títulos dos gráficos devem informar o fato

observado, o local e a época da observação, o que não ocorre no caso do exemplo apresentado.

Entende-se que, quando se trata de Estatística, em qualquer nível de escolaridade é “fundamental que haja muito cuidado na apresentação dos dados, tanto na forma de gráficos, quanto de tabelas” (GUIMARÃES; OLIVEIRA, 2014, p. 21).

APÊNDICE B – Agrupamento detalhado das tarefas

Descritor	Código da tarefa			
	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Identificar informações explícitas em quadros, tabelas, gráficos (barras verticais, de setores, pictóricos ou de segmentos).	6T01b; 6T01c; 6T03a; 6T05a; 6T08a; 6T08c	7T02a; 7T02b; 7T49a; 7T50a; 7T45; 7T09b; 7T10b; 7T48b	8T10a; 8T13a; 8T15a; 8T15b; 8T16a; 8T16b; 8T17a; 8T18a; 8T18b; 8T18c; 8T40a; 8T56; 8T59	
Relacionar informações explícitas em quadros, tabelas, gráficos (barras verticais, de setores, pictóricos ou de segmentos).	6T01a; 6T01d; 6T01e; 6T03b; 6T03c; 6T03d; 6T03e; 6T07a; 6T07b; 6T09a; 6T09d; 6T08b; 6T09b; 6T09c; 6T10; 6T11; 6T12; 6T13; 6T16	7T03a; 7T03b; 7T26; 7T02c; 7T03c; 7T03d; 7T03e; 7T51a; 7T51b; 7T49c; 7T50c; 7T49b; 7T50b; 7T50d; 7T05a; 7T05b; 7T05c; 7T06a; 7T06b; 7T06c; 7T06d; 7T07a; 7T09a; 7T09c; 7T10a; 7T10c; 7T11a; 7T11b; 7T12a; 7T12b; 7T47a; 7T47b; 7T48a; 7T48c; 7T48d; 7T30a; 7T30b; 7T30c; 7T30d; 7T36a; 7T41a; 7T41b; 7T52a; 7T52b; 7T52c; 7T62a; 7T41c; 7T41d; 7T63; 7T64; 7T65; 7T67; 7T68; 7T69; 7T78	8T10b; 8T10c; 8T11a; 8T11b; 8T13b; 8T13c; 8T13d; 8T13e; 8T35a; 8T35c; 8T14a; 8T14b; 8T14c; 8T15e; 8T36; 8T38a; 8T38b; 8T39a; 8T39b; 8T16c; 8T16d; 8T17b; 8T18d; 8T18e; 8T19a; 8T19b; 8T40b; 8T40c; 8T43a; 8T43b; 8T43c; 8T43e; 8T55; 8T57; 8T58; 8T62; 8T63	9T19a; 9T19b ^{*45} ; 9T19b ^{**} ; 9T19b ^{***} ; 9T19b ^{****}
Construir gráfico a partir das informações presentes em quadros, no enunciado ou em outro gráfico.	6T02	7T01; 7T04; 7T08	8T10g	
Calcular a média aritmética identificando e retirando as informações necessárias de quadros, imagens, do enunciado, de gráficos de barras verticais, pictórico ou de segmentos.	6T04	7T13a; 7T13b; 7T14; 7T15; 7T16c; 7T22; 7T28b; 7T32b; 7T35c; 7T36d; 7T38 ⁴⁶ ; 7T53; 7T23; 7T27;	8T10d; 8T43d; 8T61	

⁴⁵ Notação para indicar que é o primeiro item (*), da letra b, da tarefa 19, do 9º ano.

⁴⁶ Essa tarefa aparece em mais de um agrupamento porque seu comando é composto de 3 itens: calcular a média, a moda e a mediana de um mesmo conjunto de valores.

		7T31b; 7T61; 7T21; 7T25; 7T29b; 7T35d; 7T58; 7T70; 7T71; 7T73; 7T74; 7T77		
Determinar um dos elementos envolvidos no cálculo da média aritmética dada.		7T17; 7T18; 7T34; 7T57; 7T72; 7T76		
Calcular a média aritmética identificando e retirando as informações necessárias de gráficos de barras verticais e analisá-la para obter uma resposta.			8T10e; 8T10f	
Calcular a média ponderada identificando e retirando as informações necessárias de quadros, de tabelas ou do enunciado.		7T20c; 7T54; 7T55; 7T60; 7T19; 7T75		
Determinar a moda retirando as informações necessárias de quadros, de imagens, do enunciado ou de gráfico de barras verticais.		7T28a; 7T29a; 7T32a; 7T35a; 7T36b; 7T38; 7T30e; 7T31a		
Determinar a mediana retirando as informações necessárias de quadros, de imagens, do enunciado, de gráficos de barras verticais ou pictórico.		7T35b; 7T36c; 7T38; 7T37		
Identificar uma afirmação verdadeira dadas a média aritmética e a mediana de um conjunto numérico.		7T40		
Listar o preço de um mesmo produto em diferentes locais e calcular a média aritmética a partir dos valores obtidos.		7T56a		
Listar os preços de um mesmo produto em diferentes locais, calcular a média aritmética e organizá-los (os preços) em uma tabela com valores acima ou abaixo da média aritmética calculada.		7T56b		
Associar diferentes tipos de apresentações de informações (texto e gráficos, quadros e gráficos, imagem e gráfico).	6T05b; 6T06; 6T14; 6T15	7T07b; 7T44; 7T42; 7T46	8T37a; 8T37b; 8T37c; 8T37d; 8T60; 8T64	
Determinar a medida do ângulo central de um dos setores de um gráfico de setores.		7T45b; 7T45c; 7T62b; 7T43; 7T66	8T15c; 8T15d	
Completar um gráfico pictórico.		7T47c	8T35b	
Calcular um valor desconhecido com informações retirada do		7T16a; 7T16b; 7T20a; 7T20b; 7T24; 7T59		9T43

enunciado.				
Completar um conjunto de valores atendendo a uma restrição dada.		7T33; 7T39a; 7T39b		
Determinar a quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento retirando informações de quadros, do enunciado e/ou de imagens.			8T01; 8T02; 8T03; 8T04; 8T06; 8T07; 8T08a; 8T08b; 8T08c; 8T20c; 8T21; 8T22 ⁴⁷ ; 8T23; 8T24a; 8T24d; 8T25a; 8T25b; 8T28; 8T30; 8T31 ⁴⁸ ; 8T41; 8T42; 8T05; 8T09a; 8T20a; 8T20b; 8T26; 8T29; 8T44; 8T45; 8T46; 8T47; 8T48; 8T49; 8T50; 8T51; 8T52; 8T53	9T28a
Descrever as possibilidades de ocorrência de um evento retirando informações do enunciado.			8T22; 8T24b; 8T24c; 8T24e; 8T27; 8T31	
Analisar afirmações utilizando o conceito de possibilidade.			8T34	
Determinar o evento que tem maior, menor ou igual probabilidade de ocorrência, retirando informações de uma imagem ou do enunciado.				9T01a; 9T01b; 9T02a ⁴⁹ ; 9T02d; 9T02e; 9T06a; 9T06b; 9T18a; 9T18b; 9T18c; 9T40;
Classificar ou dar exemplos de evento pouco provável, impossível, provável e certo.				9T01c; 9T16a; 9T16b; 9T16c; 9T16d
Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento retirando informações do enunciado, de uma imagem ou de um quadro.			8T32; 8T33; 8T54	9T02a; 9T02b; 9T02c; 9T06c; 9T06d; 9T20a; 9T20b; 9T20c; 9T20d; 9T20e; 9T21a; 9T21b; 9T21c; 9T21d; 9T28b ^{**} ; 9T03a; 9T03d; 9T03c; 9T04a; 9T04b; 9T04c; 9T04e; 9T04f; 9T04d; 9T05;

⁴⁷ Essa tarefa aparece em mais de um agrupamento porque seu comando é composto de 2 itens: determinar a quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento e apresentar tais possibilidades.

⁴⁸ Idem a nota anterior.

⁴⁹ Essa tarefa aparece em mais de um agrupamento porque seu comando é composto de 2 itens: determinar o evento que tem maior probabilidade de ocorrência e determinar a probabilidade de ocorrência de um evento.

				9T09; 9T13; 9T17; 9T22a; 9T22b; 9T22c; 9T22d; 9T27a; 9T27b; 9T29a; 9T29d; 9T30; 9T32; 9T33a; 9T33b; 9T14; 9T15; 9T35; 9T36; 9T37; 9T38; 9T39; 9T41; 9T42; 9T44; 9T45; 9T46
Determinar a probabilidade de ocorrência do complementar de um evento, retirando informações de uma imagem ou do enunciado.				9T03b; 9T24; 9T29b; 9T29c; 9T28b*; 9T34;
Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento em experimentos sucessivos, retirando informações do enunciado.				9T07a; 9T07b; 9T08a; 9T08b; 9T08c; 9T08d
Completar um quadro e determinar a probabilidade de ocorrência de um evento, retirando informações do próprio quadro.				9T11a; 9T11b; 9T11c; 9T11d; 9T12b*; 9T12b**; 9T23a; 9T23b; 9T23c; 9T23d;
Determinar a quantidade de elementos do conjunto complementar, dado a probabilidade de ocorrência do evento.				9T10
Determinar a quantidade de elementos a ser acrescentado em um espaço amostral para obter uma probabilidade dada.				9T25a; 9T25b
Analisar um gráfico de barras verticais e emitir uma opinião ou comentário a respeito do tema.			8T11c; 8T12	
Analisar preços e determinar o menor custo em uma situação de compra.			8T09b	
Completar um quadro dadas algumas informações.				9T12a
Identificar a população e uma amostra significativa para a realização de uma pesquisa.				9T26
Determinar a quantidade de retiradas de bolas de uma urna de modo a ter certeza da ocorrência de um evento.				9T31

Fonte: Autor.

ANEXO

ANEXO A – Dinâmica de execução do PNLD

De acordo com o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) (BRASIL, 2019a), é por meio do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) que são realizadas as compras e a distribuição dos livros didáticos para os alunos das escolas públicas de todo território nacional do Ensino Fundamental (regular) e do Ensino Médio (regular e EJA). Para isso, são executadas as seguintes etapas:

1. **Adesão** – As escolas federais e os sistemas de ensino estaduais, municipais e do Distrito Federal que desejem participar dos programas de material didático deverão manifestar este interesse mediante adesão formal, observados os prazos, normas, obrigações e procedimentos estabelecidos pelo Ministério da Educação. O termo de adesão deve ser encaminhado uma única vez. Os beneficiários que não desejarem mais receber os livros didáticos precisam solicitar a suspensão das remessas de material ou a sua exclusão do(s) programa(s). A adesão deve ser atualizada sempre até o final do mês de maio do ano anterior àquele em que a entidade deseja ser atendida.
2. **Editais** – Os editais que estabelecem as regras para a inscrição do livro didático são publicados no Diário Oficial da União e disponibilizados no portal do FNDE na internet.
3. **Inscrição das editoras** – Os editais determinam o prazo e os regulamentos para a habilitação e a inscrição das obras pelas empresas detentoras de direitos autorais.
4. **Triagem/Avaliação** – Para constatar se as obras inscritas se enquadram nas exigências técnicas e físicas do edital, é realizada uma triagem pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT). Os livros selecionados são encaminhados à Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC), responsável pela avaliação pedagógica. A SEB escolhe os especialistas para analisar as obras, conforme critérios divulgados no edital. Esses especialistas

elaboram as resenhas dos livros aprovados, que passam a compor o guia de livros didáticos.

5. **Guia do livro** – O FNDE disponibiliza o guia de livros didáticos em seu portal na internet e envia o mesmo material impresso às escolas cadastradas no censo escolar. O guia orientará a escolha dos livros a serem adotados pelas escolas.
6. **Escolha** – Os livros didáticos passam por um processo democrático de escolha, com base no guia de livros didáticos. Diretores e professores analisam e escolhem as obras que serão utilizadas pelos alunos em sua escola.
7. **Pedido** – A formalização da escolha dos livros didáticos é feita via internet. De posse de senha previamente enviada pelo FNDE às escolas, professores fazem a escolha *on-line*, em aplicativo específico para este fim, disponível na página do FNDE.
8. **Aquisição** – Após a compilação dos dados referentes aos pedidos realizados pela internet, o FNDE inicia o processo de negociação com as editoras. A aquisição é realizada por inexigibilidade de licitação, prevista na Lei 8.666/93, tendo em vista que as escolhas dos livros são efetivadas pelas escolas e que são editoras específicas que detêm o direito de produção de cada livro.
9. **Produção** – Concluída a negociação, o FNDE firma o contrato e informa as quantidades de livros a serem produzidos e as localidades de entrega para as editoras. Assim, inicia-se o processo de produção, que tem supervisão dos técnicos do FNDE.
10. **Análise de qualidade física** – O Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) acompanha também o processo de produção, sendo responsável pela coleta de amostras e pela análise das características físicas dos livros, de acordo com especificações da Associação Brasileira de Normas Técnicas

(ABNT), normas ISO e manuais de procedimentos de ensaio pré-elaborados.

11. **Distribuição** – A distribuição dos livros é feita por meio de um contrato entre o FNDE e a Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos (ECT), que leva os livros diretamente da editora para as escolas. Essa etapa do PNLD conta com o acompanhamento de técnicos do FNDE e das secretarias estaduais de educação.

12. **Recebimento** – Os livros chegam às escolas entre outubro do ano anterior ao atendimento e o início do ano letivo. Nas zonas rurais, as obras são entregues nas sedes das prefeituras ou das secretarias municipais de educação, que devem efetivar a entrega dos livros.

Sobre o funcionamento do programa, é preciso saber ainda que:

Período de utilização

Os livros didáticos distribuídos pelo FNDE são confeccionados com uma estrutura física resistente para que possam ser utilizados por três anos consecutivos, beneficiando mais de um aluno.

No ensino fundamental, cada aluno tem direito a um exemplar dos seguintes componentes: língua portuguesa, matemática, ciências, história, geografia e língua estrangeira (inglês ou espanhol, do 6º ao 9º ano). Os livros de língua portuguesa, matemática, ciências, história e geografia são reutilizáveis, ou seja, devem ser devolvidos ao final do ano, para serem utilizados por outros alunos. A exceção são os livros consumíveis, que são os de alfabetização matemática e de alfabetização linguística (1º e 2º anos) e os de língua estrangeira.

O critério de reutilização dos livros é mantido no ensino médio. Os livros de língua portuguesa, matemática, geografia, história, biologia, física e química são reutilizáveis, devendo ser devolvidos ao final do ano letivo. Já os livros de língua estrangeira (inglês e espanhol), filosofia e sociologia são consumíveis. O aluno receberá livros de língua estrangeira a cada ano, não tendo que devolvê-los. No caso da sociologia e da filosofia, os alunos receberão um livro em volume único, ou seja, este será utilizado durante os três anos do ensino médio.

Alternância

Para a manutenção da uniformidade da alocação de recursos do FNDE no programa – evitando grandes oscilações a cada ano – e em face do prazo de três anos de utilização dos livros, as compras integrais para alunos de 1ª a 5ª série do ensino fundamental, de 6ª a 9ª série do ensino fundamental e dos três anos do ensino médio ocorrem em exercícios alternados. Nos intervalos das compras integrais, são feitas reposições, por extravios ou perdas, e complementações, por acréscimo de matrículas. Os livros consumíveis são adquiridos e distribuídos anualmente pelo fundo.

Remanejamento

O FNDE distribui os livros didáticos de acordo com projeções do censo escolar referente a dois anos anteriores ao ano do programa, que é o censo disponível no momento do processamento da escolha feita pelas escolas. Dessa maneira, poderá haver pequenas oscilações entre o número de livros e o de alunos. Para realizar o ajuste, garantindo o acesso de todos os alunos aos materiais, é necessário fazer o seu remanejamento, daquelas escolas onde estejam excedendo para aquelas onde ocorra falta de livros. As escolas podem recorrer ainda à reserva técnica, percentual de livros disponibilizado às Secretarias Estaduais de Educação para atender a novas turmas e matrículas.