Universidade
Estadual de Londrina

DEBORA CRISTIANE BARBOSA KIRNEV

UM ESTUDO DA MOBILIZAÇÃO DE PROCESSOS MENTAIS ENTRE O PENSAMENTO MATEMÁTICO ELEMENTAR E O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Londrina
2019

DEBORA CRISTIANE BARBOSA KIRNEV

UM ESTUDO DA MOBILIZAÇÃO DE PROCESSOS MENTAIS ENTRE O PENSAMENTO MATEMÁTICO ELEMENTAR E O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Tese apresentada ao Programa de Pós graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

K65 Kirnev, Debora Cristiane Barbosa .
UM ESTUDO DA MOBILIZAÇÃO DE PROCESSOS MENTAIS ENTRE O PENSAMENTO MATEMÁTICO ELEMENTAR E O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO / Debora Cristiane Barbosa Kirnev. - Londrina, 2019.
164 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Pensamento Matemático Avançado - Tese. 3. Prova em fases - Tese. 4. Estruturas Algébricas - Tese. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51

DEBORA CRISTIANE BARBOSA KIRNEV

UM ESTUDO DA MOBILIZAÇÃO DE PROCESSOS MENTAIS ENTRE O PENSAMENTO MATEMÁTICO ELEMENTAR E O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Tese apresentada ao Programa de Pós graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientadora: Profª. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Profª. Dra. Barbara Lutaif Bianchini
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP

____
Profª. Dra. Simone Luccas
Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP

____
Prof. Dr. Diego Fogaça Carvalho
Universidade Pitágoras Unopar – UNOPAR

____
Prof. Dr. Osmar Pedrochi Junior
Universidade Pitágoras Unopar - UNOPAR

Londrina, 23 de agosto de 2019.

Dedico este trabalho aos meus filhos amados.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por todas as oportunidades que tive para chegar até a finalização deste trabalho. Fazer uma tese é mais do que somente redigir o trabalho final, é um acúmulo de experiências, vivências, reflexões que tem como um ponto de convergência na finalização o título de Doutora.

Para chegar até aqui foram muitos os sacrifícios, dedicações, pessoas que apoiaram, e quantas pessoas!

A primeira grande alegria foi passar na seleção, e saber que iria estudar com minha querida orientadora prof. Dra. Angela Marta, uma pessoa que faz parte da minha vida pessoal e educacional, desde antes de fazer a graduação em Matemática na UEL. Nossa jornada acadêmica começou em 2007, quando iniciei a disciplina de Álgebra na graduação, em seguida já pedi para professora se podia fazer iniciação científica, depois disso, não paramos mais, foram projetos, o PET de matemática, participação no grupo de pesquisa, orientadora no mestrado, e quantas coisas vivemos juntas. Trabalhar todos esses anos com ela foi uma honra, uma gratificação enorme, aprendi muito no percurso, e sempre estive amparada em todos os momentos, e é claro, teve aqueles dias difíceis que pareciam impossíveis de serem superados, mas tudo passa e vencemos mais uma etapa.

Outro ponto importante foi a família, comecei o doutorado programando meu tempo de estudos, já tinha os filhos gêmeos, o Plínio e a Isadora, e estava tudo planejado no início de 2015 para me dedicar aos estudos, e no ano seguinte, recebo a notícia de que o Yuri estava a caminho, um bebê para cuidar, junto com uma tese para fazer, foi um momento de respirar e a partir daí vamos fazer o que for possível. Quando nasceu o Yuri, a minha sobrinha, Bruna Munik, também veio morar comigo e foi uma menina de apenas 12 anos que me apoiou imensamente, só consegui fazer o que era preciso porque ela estava ao meu lado, preciso agradecê-la por tudo. Agradeço ao meu pai Daniel por sempre se preocupar comigo, peço desculpas pela ausência. Agradeço à minha irmã Priscila e meus sobrinhos Isabely e Eryk que acreditaram no meu sonho. Enfim sou muito grata a todos os familiares pela paciência, pelo amor recebido, pela colaboração.

O dizer da minha madrinha Andréia Moreira, que mesmo do outro lado do planeta, me liga no meu aniversário, nas datas comemorativas, e vem me visitar sempre que possível, e toda vez que falo com ela lembro a minha infância em que a via indo para faculdade, se dedicando para superar as dificuldades, e quando foi sua vez de fazer o TCC, isso à mais de 20 anos atrás, nós passamos dias e dias no computador, digitando, modificando até que finalizamos seu trabalho, foi uma grande alegria o dia que a vi colando grau, e foi nesse dia que desejei imensamente seguir os seus passos. A madrinha Andréia foi minha inspiração, meu exemplo de guerreira e sempre vai ter um lugar especial no meu coração, jamais encontraria palavras suficientes para agradecê-la.

E tenho aqueles amigos que são mais do que anjos na sua vida, agradeço ao Dr. Toshihiko Tan, que sempre foi como um pai e acreditou que eu tinha potencial, desde de antes do ingresso na graduação estava me incentivando a estudar e ser a melhor professora que conseguisse. Lembro do dia que ele disse: "você quer ser uma profissional, ou uma professora qualquer? Se for ser uma profissional, tem que ser a melhor", e foram longas conversas, sempre com grande incentivo que acreditei que poderia fazer uma graduação, o mestrado e o doutorado, foram longos 15 anos recebendo o seu apoio.

E a vida segue, e nos encontramos com pessoas especiais, simplesmente pelo fato de existir, com a minha amiga e irmã Renata Karoline Fernandes, foi assim. Passamos na mesma banca de seleção para trabalharmos como professoras no Unopar, e a partir desse dia, sempre foi prestativa, já tínhamos em comum o fato de termos realizado o mestrado, ambas com nossa querida professora Dra. Angela Marta, mas em épocas distintas, e foi nas conversas de corredores, nos intervalos para o café que começou uma grande amizade, com uma pessoa especial que me apoiou todos os dias, nos alegres e nos tristes. Migramos para Unopar EaD, e continuamos a trabalhar juntas, e quando tive a notícia que teria o meu filho Yuri, não tive dúvidas, ela seria a madrinha do meu filho, e esses anos foram mais leves, por que ela estava ao meu lado, e sei que sempre acreditou que tudo ia dar certo e é essa energia positiva que me ajudou imensamente em todos esses anos, e não podemos esquecer o Maicon, seu marido, que também se tornou um grande irmão, padrinho do nosso Yuri, e que juntos somos família, sou muito grata por tudo isso.

Outra irmã é a Keila Boni, foi o trabalho que nos uniu, primeiramente no Colégio Interativa, e depois na Unopar EaD, sempre com seu sorriso meigo, e como digo o "toque de doçura", são inesquecíveis os momentos que compartilhamos, as palavras de incentivo, os dias que tivemos ideias mirabolantes e transformamos em artigos, é uma pessoa muito especial que tive o privilégio de chamar de irmã, de ser a madrinha do Yuri junto com a Renata, que pude sempre contar, sou muito grata a você minha amiga.

E o que dizer da minha querida Mariany Layne, colega de trabalho, de grupo de estudos, uma pessoa fantástica, que me dá aquele abraço forte, nas horas difíceis, quando acho que não vou conseguir, e depois disso encontro forças para continuar, por mais um dia. Foram dias incríveis ao seu lado, e a vida é mais leve quando você está por perto, obrigada por tudo.

Ao amigo Flávio Carraro, o que dizer? Foi de uma dúvida sobre o curso de Arquitetura e Urbanismo que descobri essa pessoa, desse dia em diante, começamos a trabalhar juntos, e foi incrível tudo, a parte profissional, as vezes que discutimos e fomos escrever artigos. Nos dias difíceis, ele me lembra que tenho que ter foco, palavras como "o doutorado é prioridade", foi ele que disse, e tudo isso sempre me motivou a concluir, a jamais desistir. Sempre me senti amplamente apoiada por ele e foi por amigos assim que consegui chegar até aqui, então sou muito grata por tudo.

E aqueles amigos que surgem na sua vida e fazem toda a diferença, foi assim com a Patrícia, o Marcelo, a Mariana, a Hallynnee, a Naira e o Adilson, amigos que compartilharam de momentos bons e ruins, mas sempre estiveram ao meu lado com uma palavra amiga, e mais que isso acreditando que tudo acabaria dando certo.

Agradeço aos amigos do GEPPMat, que por muitos anos colaboram para minha formação, por meio das discussões, dos estudos que foram essenciais para escrever essa tese. Vocês são pessoas maravilhosas, e participar do grupo fez toda a diferença, obrigada a todos.

Tiveram muitos outros amigos e amigas, cada um de um modo especial ajudou na caminhada, seja com uma palavra de incentivo, um abraço apertado, então agradeço muito a Deus por tudo que vivi nesses últimos anos, porque foram todas essas vivências que permitiram eu chegar até aqui, assim agradeço a todos que participaram da minha vida.

“A persistência é o menor caminho do êxito.”
(Charles Chaplin)

KIRNEV, Debora Cristiane Barbosa. **UM ESTUDO DA MOBILIZAÇÃO DE PROCESSOS MENTAIS ENTRE O PENSAMENTO MATEMÁTICO ELEMENTAR E O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO**. 2019. 164. Tese de doutorado do Programa de Pós - Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

RESUMO

Nesta tese, tem-se o objetivo de investigar a mobilização de processos mentais entre o Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado. A pesquisa tem um caráter qualitativo de natureza descritiva e interpretativa. Para isso, realizou-se uma análise descritiva e comparativa em tarefas de uma prova em fases aplicada a graduandos em Matemática, a fim de diagnosticar que processos mentais são mobilizadas na realização das tarefas e que índicios de Pensamento Matemático Elementar e Pensamento Matemático Avançado podem ser identificados. Na primeira fase, os estudantes resolveram a parte I, cujas questões foram direcionadas a conhecer as concepções sobre a Matemática, que possibilitou identificar suas percepções a respeito disso e a parte II com tarefas envolvendo estruturas algébricas; na segunda fase foram retomadas as tarefas da parte II que poderiam ou não ser complementadas pelos alunos. Na análise descritiva da primeira fase, foi possível estabelecer a metodologia de análise por estudante adotada nessa tese, realizada após a aplicação da segunda fase. Podemos destacar que os quatro estudantes analisados transitaram entre os mundos corporificado e simbólico, mas apenas um deles transitou para o mundo formal. Ainda, em todos ficou evidenciado um processo reflexivo na resolução de tarefas. Em relação ao gerenciamento de processos mentais complexos e flexíveis, indicando a mobilização de processos mentais relativos ao PMA, foram obtidas três evidências nas análises das tarefas. Como resultado, identificou-se mobilização de processos mentais associados ao Pensamento Matemático Elementar, derivados de pensamentos intrumentais, e outros decorrentes de pensamentos relacionais que indicam evidências do Pensamento Matemático Avançado.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pensamento Matemático Avançado. Prova em fases. Estruturas Algébricas.

KIRNEV, Debora Cristiane Barbosa. **A STUDY OF THE MOBILIZATION OF MENTAL PROCESSES BETWEEN ELEMENTARY MATHEMATICAL THINKING AND ADVANCED MATHEMATICAL THINKING.** 2019. 164. Doctoural Thesis in Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

ABSTRACT

In this thesis, the aim is to investigate the mobilization of mental processes between Elementary Mathematical Thinking and Advanced Mathematical Thinking. This is a qualitative research of descriptive and interpretive nature. For this purpose, a descriptive and comparative analysis was realized in tasks of a stage test, applied to undergraduate students in Mathematics, in order to diagnose which mental processes are mobilized in the accomplishment of those tasks and which evidences of Elementary Mathematical Thinking and Advanced Mathematical Thinking were identified. In the first stage, the students solved the part I of the stage test whose questions concerned about knowing the concepts, which made it possible to identify their perceptions about it and the part II stage test with tasks involving algebraic structures; in the second stage, the part II tasks were resumed, which could or could not be complemented by the students. In the descriptive analysis of the first stage, it was possible to establish the analysis methodology per student adopted in this thesis, carried out after the application of the second stage. We can highlight that the four analyzed students transited between the embodied and symbolic worlds, but only one of them transited to the formal world. Still, all of them showed a reflexive process in the resolution of the tasks. Regarding the management of complex and flexible mental processes, that indicate the mobilization of mental processes related to the PMA, there were three evidences in the analysis of the tasks. As result, it was possible to identify mobilization of mental processes associated with Elementary Mathematical Thinking, derived from instrumental thoughts, and others derived from relational thoughts that indicate evidences of Advanced Mathematical Thinking.

Keywords: Mathematics Education. Advanced Mathematical Thinking. Phase proof. Algebraic Structures.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do pensamento matemático ocorre durante toda a formação cognitiva de um sujeito, começa em níveis mais elementares e, gradativamente, conforme ocorrem experimentações, atinge níveis mais avançados. Dentre as diferentes áreas existentes na Matemática, optou-se por realizar uma pesquisa na área da Álgebra, especificamente, relacionada às Estruturas Algébricas.

Nesta tese, estuda-se o desenvolvimento do pensamento matemático, desenvolve-se uma análise comparativa da produção escrita de tarefas realizadas em uma prova em fases, a respeito de Estruturas Algébricas, de cada sujeito participante da pesquisa, a fim de evidenciar que processos mentais são mobilizados na indicação de indícios do Pensamento Matemático Avançado (PMA), com base em Dreyfus (1991) e Tall (2007b, 2008, 2011).

Na tese, desenvolve-se uma análise comparativa da produção escrita de tarefas realizadas em uma prova em fases, a respeito de Estruturas Algébricas, de cada sujeito participante da pesquisa, a fim de evidenciar que processos mentais são mobilizados na indicação de indícios do Pensamento Matemático Avançado (PMA), com base em Dreyfus (1991) e Tall (2007b, 2008).

Organizou-se este trabalho em cinco capítulos, inicia-se com a introdução e os demais serão apresentados, brevemente, a seguir.

No segundo capítulo, aborda-se a trajetória acadêmica e profissional da pesquisadora, as justificativas e o contexto desta pesquisa.

No terceiro capítulo, apresentam-se os referenciais teóricos sobre o processo de aprendizagem do sujeito e o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado. A Teoria de Aprendizagem de Skemp (2002), nesse contexto, serviu para mostrar processos envolvidos na aprendizagem, sendo possível auxiliar na identificação de aspectos diretamente relacionados à aprendizagem matemática escolar, esclarecendo a respeito do processo de aprendizagem ao longo da vida. Além disso, nesse capítulo, apresentam-se os processos mentais e o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (1991), principalmente a respeito da representação e da abstração, além de recorrer as ideias de Tall (2007b, 2008), para abordar questões sobre o pensamento formal em Matemática, no qual o autor realizou uma descrição de como ocorre o processo de desenvolvimento do pensamento matemático ao longo da vida, chegando a um processo de prova matemática.

No quarto capítulo, discorre-se a respeito dos procedimentos metodológicos e sobre a análise descritiva do instrumento de pesquisa, que consiste em uma pré-análise dos dados coletados para uma ordenação das informações obtidas.

O quinto capítulo trata das análises por sujeito, nas quais analisa-se a produção escrita de cada participante da pesquisa, individualmente, pautados no referencial teórico baseado em Skemp (2002), Dreyfus (1991) e Tall (2007b, 2008). Por fim, apontam-se as considerações emergentes da investigação realizada.

2. JUSTIFICATIVA E CONTEXTO DA PESQUISA

Nesta tese, estuda-se o desenvolvimento do pensamento matemático, tendo como base, principalmente, as ideias de Skemp (2002), Dreyfus (1991), Tall (2007b, 2008, 2011), considerando que as atividades matemáticas, assim como diversas outras, requerem habilidades específicas inerentes ao processo mental envolvido, sendo desenvolvidas ao longo da vida de um sujeito. Para abordar a temática, tem-se a seguinte questão norteadora: Que processos mentais são mobilizados e que indícios existem a respeito do Pensamento Matemático Elementar e do Pensamento Matemático Avançado em tarefas sobre Estruturas Algébricas por meio de uma prova em fases? Define-se como objetivo da pesquisa, investigar a mobilização de processos mentais entre o Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado.

Neste capítulo relata-se a trajetória acadêmica e profissional da pesquisadora e suas contribuições para essa pesquisa. Na sequência apresenta-se o levantamento bibliográfico que subsidiou os estudos para essa tese.

Em um primeiro momento, utilizo a primeira pessoa do singular para compartilhar as experiências que contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa. E, durante o capítulo, justifico o uso da terceira e da primeira pessoa, em função da necessidade de apresentar alguns estudos e conclusões a respeito do que me serviu como ponto de partida para a efetivação desta pesquisa, bem como a explicitação do modo como me apropriei desses elementos.

2.1 Trajetória da pesquisadora

Durante minha formação acadêmica, tive uma preocupação constante em responder à seguinte pergunta: Por que, frequentemente, deparamo-nos com dificuldades no processo de aprendizagem da Matemática? Essa questão foi instigadora para desenvolver estudos anteriores à tese.

A primeira pesquisa que realizei ocorreu durante o mestrado, no mesmo programa que o curso de doutorado, e teve como temática as dificuldades de aprendizagem, o que contribuiu para a produção desta tese devido ao estudo do referencial teórico que auxiliou na pesquisa sobre o desenvolvimento do

Pensamento Matemático Avançado. Na dissertação, analisei tarefas de conjuntos e funções com foco em provas e demonstrações matemáticas, e esse fato influenciou na elaboração do instrumento de coleta de dados, especificamente, na escolha de tarefas com demonstrações matemáticas relacionadas às Estruturas Algébricas.

Ressalto que, na dissertação, para analisar as tarefas de conjuntos e funções, recorri a Dreyfus (1991), a fim de justificar os processos mentais do PMA. Dessa forma, nesta tese, parti desses estudos, iniciados anteriormente, para aprofundar o referencial teórico com base nos trabalhos de Tall (2007b, 2008) e de Skemp (2002).

A segunda pesquisa que realizei, indicada por Kirnev (2016), aconteceu após o mestrado, concomitantemente ao meu ingresso como aluna especial do doutorado, e foi realizada durante uma especialização em Psicopedagogia. Na monografia, investiguei as teorias de aprendizagem que contribuíram para a os estudos iniciais desta tese.

Durante a realização das pesquisas citadas, e da própria tese, o fato de ter lecionado tanto na Educação Básica, nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, quanto no Ensino Superior, ministrando disciplinas como Álgebra Linear, Estruturas Algébricas e Análise Matemática, contribuiu para ter uma visão da aprendizagem escolar como um processo a longo prazo, o qual se inicia nos anos iniciais da escolarização e vai evoluindo, gradativamente, com o avanço nos estudos, considerando que um sujeito aprende de modo formal e informal no meio em que vive e no relacionamento com outros sujeitos.

Além disso, tive a oportunidade de produzir materiais didáticos voltados para o Ensino Superior e, ao elaborar esses materiais, uma das maiores preocupações foi utilizar uma linguagem apropriada para auxiliar o aluno no processo de aprendizagem do conteúdo formal. A reflexão sobre essas experiências me instigou a compreender como atenuar as dificuldades de aprendizagem emergentes em um processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Simultaneamente a essas atividades, participei do Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPEMat) coordenado pela orientadora desta pesquisa, sendo integrante desde 2007, no qual ocorrem discussões sobre os estudos e os aprofundamentos de referenciais teóricos sobre o PMA, fato que contribuiu diretamente para o desenvolvimento desta pesquisa e para a delimitação do tema de investigação.

Com base nas pesquisas realizadas no mestrado e na especialização, e a partir das experiências profissionais adquiridas, elaborei o pré-projeto da tese com proposta de estudar o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado.

Após apresentar o contexto precedente aos estudos, como aluna regular do doutorado, apresento como foi a etapa inicial desta tese.

2.2 Levantamento bibliográfico

Durante o processo de levantamento bibliográfico, aprofundei os estudos do referencial teórico sobre as Teorias de Aprendizagem. Iniciei a busca pelo significado da palavra aprender e, no dicionário eletrônico de Língua Portuguesa Houaiss, o significado do termo remete para o “ato de aprender”, e aprender significa “adquirir conhecimento (de), a partir de estudo; instruir-se”. Quanto à etimologia da palavra aprendizagem, o termo originou do latim *apprendo*, que significa “ação de aprender um ofício ou profissão”.

Em Mizukami (2002, p. 53), verifiquei que “aprender consiste em um processo de modificar percepções”, ou seja, o sujeito precisa passar pela execução de uma ação para obter a aprendizagem.

Assim, ocorreu um processo de reflexão sobre o que é necessário para que um sujeito aprenda ao longo do tempo. Nesse sentido, busquei referenciais sobre o desenvolvimento humano e a sua interferência na aprendizagem.

Outra pesquisa que realizei foi a respeito da aprendizagem. Autores como Bock, Furtado e Teixeira (1999) defendem que a formação do ser humano depende do desenvolvimento mental e do crescimento orgânico. Nesse sentido, para pensar na aprendizagem ao longo do tempo, tive de verificar como o sujeito amplia seus conhecimentos e quais fatores interferem nesse processo.

Segundo Bock, Furtado e Teixeira (1999), o desenvolvimento mental se dá de modo contínuo, a partir de novas construções de estruturas mentais que garantem a continuidade da formação do ser humano. Eles ressaltam que estudos e pesquisas

> [...] de Piaget demonstraram que existem formas de perceber, compreender e se comportar diante do mundo, próprias de cada faixa etária, isto é, existe uma assimilação progressiva do meio ambiente, que implica uma acomodação das estruturas mentais a este novo dado do mundo exterior (BOCK, FURTADO, TEIXEIRA, 1999, p. 97).

Desse modo, entende-se que o processo de aprendizagem ocorre durante toda a vida do sujeito, a partir das primeiras formulações de processos mentais que possibilitam a construção de estruturas mentais que se reformulam conforme o sujeito sofre interferências do meio, bem como desenvolve-se fisicamente e cognitivamente. Além disso, há fatores que influenciam no desenvolvimento humano como

> Hereditariedade: a carga genética estabelece o potencial do indivíduo, que pode ou não desenvolver-se. [...] No entanto, a inteligência pode desenvolver-se aquém ou além do seu potencial, dependendo das condições do meio que encontra.
> Crescimento orgânico: refere-se ao aspecto físico. O aumento de altura e a estabilização do esqueleto permitem ao indivíduo comportamentos e um domínio do mundo que antes não existiam. [...]
> Maturação neurofisiológica: é o que torna possível determinado padrão de comportamento [...]
> Meio: o conjunto de influências e estimulações ambientais altera os padrões de comportamento do indivíduo [...] (BOCK, FURTADO, TEIXEIRA, 1999, p. 98).

Nesse sentido, o ato de aprender está condicionado aos aspectos físicos e mentais pautados no sujeito, assim como a sua vivencia social.

A respeito da aprendizagem, Moser (2002) aponta que um sujeito, ao receber um estímulo do meio externo, por meio de uma informação, passa em um primeiro momento por uma percepção na qual codifica a informação. Já no meio interior, evoca conhecimentos prévios para validar a codificação e converter as informações recebidas para a representação mental. Diante de novas situações, é possível recorrer à informação codificada anteriormente, em uma nova circunstância, a qual necessita de uma aplicação direta do conhecimento já adquirido. Segundo o autor, considerando a aprendizagem como um processo, é possível categorizá-la em três fases:

a) Identificação: percebe-se um determinado objeto de conhecimento, com a intenção de aprendê-lo;
b) Significação: busca-se atribuir algum significado a esse objeto, baseado no interesse por ele;
c) Aplicação: utilizam-se os conhecimentos apreendidos para empregar em situações, dependendo das necessidades e dos propósitos.

Assim, é preciso rever os conhecimentos anteriores e, a partir da nova informação, reformulá-los ou substituí-los, formando um processo contínuo de aprendizagem. Um meio para aprender são as experiências vividas e o convívio social; outros fatores são os processos de mudança de comportamento, a aquisição de conhecimentos teóricos, as habilidades práticas, entre outros.

De acordo com Moreira (2015), uma teoria busca sistematizar uma área do conhecimento, de modo a explicar, prever e a resolver problemas. No caso da teoria da aprendizagem, tem-se um modo organizado de lidar com os processos de aprendizagem, ou seja, essas teorias abordam os processos decorrentes do ato de ensinar e de aprender, e são associadas a eles, como forma de explicar de que modo o sujeito aprende e que fatores e processos estão envolvidos. Entre as teorias estudadas, adotou-se como referencial teórico, Skemp (2002), tendo como foco a abordagem do processo de aprendizagem de um sujeito, baseado na aprendizagem instrumental e na aprendizagem relacional para justificar a aprendizagem inteligente.

Após os estudos iniciais, a tese foi direcionada para o tema “Análise da mobilização de processos mentais do Pensamento Matemático Avançado em tarefas sobre Estruturas Algébricas por meio de prova em fases”.

Com o tema definido, analisei o trabalho de Pires (2013), a fim de estudar o referencial teórico sobre a prova em fases e desenvolver uma proposta de tarefas, considerando a pesquisa que desenvolvi para a dissertação de mestrado, a fim de tomar como base o referencial teórico sobre o Pensamento Matemático Avançado a ser utilizado nesta tese.

Com base nesses estudos, realizei um projeto piloto de uma prova em fases aplicada a alunos do terceiro ano do Ensino Médio, envolvendo tarefas sobre geometria analítica. Concomitantemente, aprofundei os estudos sobre o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado estudando as publicações de Tall (2007b, 2008). Por meio das investigações promovidas, obtive resultados que foram submetidos a eventos e revistas: Simpósio Internacional de Educação

Matemática - SIEM (2016), Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM (2015 e 2017), Congresso Iberoamericano de Educação Matemática – CIBEM (2017), o que também resultou em uma publicação para a revista Vidya (2017). Além disso, esses trabalhos contribuíram para, posteriormente, estruturar a tese.

Esses estudos, as participações em eventos, além das discussões em grupos de pesquisa da orientadora desta tese, possibilitaram identificar a carência de pesquisas sobre Estruturas Algébricas, e isso, aliado às orientações da tese, contribuíram para aprofundar a investigação do tema da pesquisa.

Desse modo, busquei por pesquisas relacionadas ao tema da tese, destacando o trabalho apresentado no XII ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), de Carmo, Soares e Souza (2016), intitulado “O Pensamento Matemático Avançado em Pesquisas”, e a tese publicada posteriormente por Carmo (2018) intitulada “Pensamento Matemático Avançado – como essa noção repercute em dissertações e teses brasileiras?”.

Carmo (2018) analisou pesquisas realizadas entre o período de 2010 a 2016, cujo referencial teórico foi embasado no Pensamento Matemático Avançado, adotando as seguintes categorias de análise: conceitos da teoria do pensamento matemático avançado, conteúdos matemáticos, sujeitos de pesquisas ou materiais analisados, metodologia de análise e resultados. A seguir, apresentarei o quadro do levantamento bibliográfico realizado pelo autor no banco de teses e de dissertações da CAPES[1], usando como palavra-chave, “Pensamento Matemático Avançado” e a análise do resumo publicado na Plataforma Sucupira para selecionar as pesquisas.

Quadro 1 – Dissertações e teses selecionadas por Carmo (2018)

ANO	AUTOR(ES) E TÍTULO DO TRABALHO	FONTE	TIPO
2010	ANGELINI, N. M. Funções: um estudo baseado nos três mundos da matemática	UNIBAN/SP	Mestrado
2011	AMORIM, L. I. F. A (re)construção do conceito de limite do cálculo par análise: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática	UFOP/MG	Mestrado
2011	ANDERSEN, E. As ideias centrais do teorema fundamental do cálculo mobilizados por alunos de licenciatura em matemática	PUC/SP	Mestrado

[1] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

2011	FONSECA, V. G. O uso de tecnologias no ensino médio: a integração de Mathlets no ensino de função afim	UFRJ/ RJ	Mestrado
2011	FRANCO, H. J. R. Os diversos conflitos observados em alguns alunos de licenciatura em um curso de álgebra: identificação e análise	UFJF/MG	Mestrado
2011	NOVAIS, A. S. Equações indeterminadas e lugares geométricos: uma proposta alternativa	UFRJ/RJ	Mestrado
2011	SANTOS, A. T. C. O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do *software* GeoGebra	PUC/SP	Mestrado
2012	BERTOLAZI, K. S. Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas de equações lineares	UEL/PR	Mestrado
2012	FONSECA, D. S. S. M. Convergências de sequências e séries numéricas no cálculo: um trabalho visando à corporificação dos conceitos	UFOP/MG	Mestrado
2012	KIRNEV, D. C. B. Dificuldades evidenciadas em registros escritos a respeito de demonstrações matemáticas	UEL/ PR	Mestrado
2012	POGGIO, A. M. P. P. Um diagnóstico sobre o conceito de proporcionalidade de alunos do ensino médio na perspectiva dos três mundos da matemática	UNIBAN/SP	Mestrado
2013	ALMEIDA, M. V. Um panorama de artigos sobre a aprendizagem do cálculo diferencial e integral na perspectiva de David Tall	PUC/SP	Mestrado
2014	CAMPOS, J. P. Algoritmos para fatoração e primalidade como ferramenta didática para o ensino da matemática	UNIR/RO	Mestrado
2014	GERETI, L. C. V. Processos do pensamento matemático avançado evidenciados em resoluções de questões do Enade.	UEL/PR	Mestrado
2014	JUNIOR, V. C. F. Repensando o ensino de análise: reações, impressões e modificações nas imagens de conceito de alunos frente a atividades de ensino sobre sequências de números reais	UFJF/ MG	Mestrado
2014	MAÇÃO, D. P. Uma proposta de ensino para o conceito de derivada	UEL/PR	Mestrado
2014	MARINS, A. S. Pensamento matemático avançado em tarefas envolvendo transformações lineares	UEL/PR	Mestrado
2015	JUNIOR, J. C. M. Ensino de derivadas em cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra	UFOP/MG	Mestrado

2016	OLIVEIRA, J. L. A utilização de *softwares* dinâmicos no ensino de análise real: um estudo sobre a construção do conceito de integral de Riemann	UFOP/MG	Mestrado
2011	JANZEN, E. A. O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica	UFPR/PR	Doutorado
2012	YOKOYAMA, L. A. Uma abordagem multissensorial para o desenvolvimento do conceito de número natural em indivíduos com síndrome de *down*	UNIBAN/SP	Doutorado
2016	LEME, J. C. M. Aprendizagem de derivada: uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento	PUC/SP	Doutorado
2016	PRADO, E. A. Álgebra linear na licenciatura em matemática: contribuições para formação do profissional da educação básica	PUC/SP	Doutorado
2016	VIEIRA, W. Do cálculo à análise real: um diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem de sequências numéricas	ANHANGUERA/SP	Doutorado

Fonte: Carmo (2018, p. 45-47).

As pesquisas apontadas têm em comum a palavra-chave "Pensamento Matemático Avançado", os temas investigados com mais frequência estão relacionados ao Cálculo, à Análise e à Álgebra Linear. Apenas o trabalho de Franco (2011) investiga a Álgebra Abstrata.

Outra pesquisa relevante relacionada ao PMA foi a publicação de Savioli (2017), intitulada "Pensamento Matemático Avançado: algumas produções de um programa de pós-graduação", que apresenta uma análise de dissertações produzidas de 2009 a 2017, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (PECEM-UEL), pesquisas essas que envolvem o Pensamento Matemático Avançado no referencial teórico. Dentre os temas investigados, tem-se o que se apresenta a seguir.

Quadro 2 – Síntese de publicações sobre o PMA no PECEM-UEL

AUTOR	TEMA	REFERENCIAL TEÓRICO PRINCIPAL
Bussmann (2009)	Conceito de grupo	Sfard (1991)
Sousa (2010)	Modelagem matemática	Tall (2003)

Elias (2012)	Conceito de grupo e isomorfismo de grupos	Dubinsky (1991)
Bertolazi (2012)	Sistema de equações lineares	Dreyfus (1991); Resnick (1987)
Kirnev (2012)	Formas de demonstrações matemáticas	Dreyfus (1991)
Gereti (2014)	Análise de questões discursivas do Enade	Dreyfus (1991)
Marins (2014)	Transformações lineares	Dreyfus(1991); Tall (1995); Resnick (1987)
Jesus (2016)	Conceito de anel	Dubinsky (1991)
Souza (2016)	Dependência e independência linear	Dubinsky (1991)
Jorge (2017)	Teoria dos conjuntos	Dreyfus (1991)

Fonte: Do próprio autor

As pesquisas destacadas por Savioli (2017) foram desenvolvidas principalmente por participantes do GEPPEMat, com exceção apenas de Sousa (2010). Esse trabalho incorpora as pesquisas de Bussmann (2009), de Elias (2012) e de Jesus (2016) relacionadas à Álgebra Abstrata e que utilizam como aporte teórico o PMA.

Além desses trabalhos destacados por Carmo (2018) e Savioli (2017), teses defendidas correlatas a esta pesquisa, atualizadas no segundo semestre de 2017, foram analisadas. Pesquisei utilizando as palavras-chave “Estruturas Algébricas”, “Álgebra Abstrata” e “Pensamento Matemático Avançado”, no Google Acadêmico. Uma pesquisa de destaque que envolve Estruturas Algébricas e Pensamento Matemático Avançado é a de Brandemberg (2009), intitulada “Uma análise Histórico-Epistemológica do conceito de Grupo”, em que o autor analisa o desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de Grupo, fundamentado por Dreyfus (1991), e apresenta contribuições didáticas para o ensino e a aprendizagem das Estruturas Algébricas. Outras teses encontradas abordam os temas buscados de forma isolada.

O levantamento bibliográfico indicou que há poucas pesquisas sendo realizadas envolvendo conceitos relacionados às estruturas algébricas, mostrando relevância em investigar o tema proposto nesta tese.

Em relação ao contexto da pesquisa, algumas decisões decorreram dessas circunstâncias: no início de 2015, foi ofertada, em um curso de graduação de Matemática, a disciplina de Corpos e Extensões, para uma turma de bacharelado de uma universidade situada no norte do Paraná, em que se desenvolveu a pesquisa, a qual previa, na ementa, uma revisão da teoria de grupos e anéis de polinômios de acordo com a resolução CEPE nº 229/2009 (p. 17) e a deliberação da câmera de graduação nº 013/2013 (p. 3)[2] .

Essa disciplina tinha como pré-requisito aprovação prévia na disciplina de Estruturas Algébricas, e tinha a previsão de sair da grade, posteriormente. Devido a esses fatos e por já ter um aporte teórico, optei por aplicar o instrumento de pesquisa nessa turma. Para que isso ocorresse, antes de iniciar o período letivo do primeiro semestre de 2015, tomei como referência para elaboração de um instrumento de coleta de dados, sendo uma prova em fases com tarefas envolvendo estruturas algébricas, a tese de Pires (2013) baseada em De Lange (2009), intitulada “Oportunidade para aprender: uma prática da reinvenção guiada na prova em fases”, sendo adotada como um parâmetro para a elaboração da proposta de tarefas. Outro trabalho estudado foi a tese de Mendes (2014), baseada em De Lange (2009), intitulada “Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de Cálculo”, na qual analisei os procedimentos metodológicos empregados na pesquisa, com a utilização da prova em fases e, a partir disso, defini os parâmetros para a organização dos registros escritos a serem analisados posteriormente.

No início do ano letivo do primeiro semestre de 2015, pedi autorização para o professor responsável pela disciplina de Corpos e Extensões, que concedeu a aplicação da prova em fases. Na primeira semana letiva de aula, convidei os estudantes e apliquei o instrumento de coleta de dados[3]. Para aplicar o instrumento de pesquisa, convidei estudantes regularmente matriculados, os quais autorizaram a utilização dos registros escritos por meio de um termo de

[2] Apresentamos no anexo A a ementa da disciplina de Estruturas Algébricas, base para a revisão de conteúdo e para a elaboração da proposta de tarefas.
[3] O instrumento de coleta de dados consta no apêndice B.

consentimento livre esclarecido[4].

No trabalho de Pires (2013), analisei aspectos relacionados aos procedimentos metodológicos para a elaboração da proposta de tarefas da prova em fases. A escolha pela prova em fases aconteceu devido ao recurso avaliativo proporcionado. Na primeira fase, os estudantes desenvolveram a proposta de tarefas, sem terem iniciado os conteúdos previstos na disciplina Corpos e Extensões, sem realizar consultas e com o tempo delimitado de duas horas de aula. Na segunda fase, após um período de um mês de aulas do professor responsável pela disciplina, revisando o conteúdo de Estruturas Algébricas, retomei o mesmo instrumento de coleta de dados utilizado na primeira fase e foi novamente aplicada a prova em fases, com a utilização de material de pesquisa trago individualmente pelos alunos, para que os estudantes pudessem responder as questões em branco e/ou complementar as resoluções anteriores desenvolvidas na primeira fase, durante um período de quatro horas.

Os estudos do trabalho de Mendes (2014) auxiliaram na organização dos dados obtidos na prova em fases. Segundo a autora, é possível desenvolver a regulação da aprendizagem ao permitir que o aluno aprecie e aprimore uma primeira versão de um trabalho realizado, podendo repensar a situação.

Nos próximos capítulos, o referencial teórico adotado, os procedimentos metodológicos, as análises e as considerações sobre a pesquisa desta tese serão apresentados.

[4] O termo de consentimento livre esclarecido consta no apêndice A.

3. PROCESSOS MENTAIS E DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Neste capítulo, apresenta-se o referencial teórico que subsidia a pesquisa, sendo resultado das investigações promovidas. Inicia-se conceituando aprendizagem e de alguns aspectos envolvidos no ato de aprender. Em seguida, trata-se das pesquisas de Skemp (2002) sobre o pensamento instrumental e o pensamento relacional, apontando as formas de ensino da Matemática e como o sujeito aprende nesse processo de ensino. Pesquisou-se sobre o desenvolvimento do Pensamento Matemático Elementar e como ocorre o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, para isso, realizou-se um estudo das teorias de Dreyfus (1991) e Tall (2007b; 2008), a respeito dos processos mentais inerentes ao desenvolvimento do pensamento matemático, de modo a compreender como um sujeito constitui um PMA.

3.1 Pensamento instrumental e pensamento relacional de Skemp

Richard R. Skemp (1919-1995) foi uns dos pioneiros na área de Educação Matemática e em seus estudos buscou integrar as áreas da Matemática, da Educação e da Psicologia. Esta tese teve como base os estudos do autor sobre o pensamento instrumental e o pensamento relacional, para tecer considerações e implementar as teorias de aprendizagens, auxiliando na compreensão de como o processo pedagógico da Educação Básica pode influenciar a aprendizagem do sujeito quanto aos conteúdos formais da Matemática.

Um dos temas de interesse de Skemp foi como as crianças aprendem, e isso influenciou sua formação e suas pesquisas, tomando como premissa que um processo educacional não é baseado apenas no conteúdo, e sim na forma como um indivíduo se relaciona com o contexto em que está inserido. Skemp desenvolveu um programa de Matemática para a escola primária, promovendo estudos sobre a aprendizagem inteligente. Segundo o autor, se um sujeito resolve um problema, não implica que ele compreende o processo que está envolvido nessa resolução, entretanto, algo se compreende disso, mas podem existir falsos cognatos envolvidos nesse processo, ou seja, interpretações parciais ou equivocadas que justificam uma resolução do problema.

Skemp (2002) relatou as dificuldades em Matemática, sendo esse um assunto problemático evidenciado em sua pesquisa. Nesse trabalho, o autor buscou identificar as razões que levam a justificar o porquê dessa problemática. Para discutir isso, aborda uma perspectiva mais ampla, envolvendo áreas do conhecimento da Matemática, da Educação e da Psicologia.

Segundo Skemp (2002), ao ensinar Matemática, é preciso relacionar o que é ensinado na escola com o mundo externo, ou seja, a Matemática é uma importante ferramenta mental que amplifica a inteligência humana de forma funcional e adaptável. A Matemática

> [...] pode ser vista, primeiro, como um exemplo particularmente significativo e denso do funcionamento da inteligência humana; e segundo, como uma das ferramentas mentais mais poderosas e adaptáveis cuja inteligência do homem tem feito para seu próprio uso, coletivamente ao longo dos séculos[5] (SKEMP, 2002, p. 26 – tradução nossa).

Nesse sentido, um estudante precisa ser ensinado de modo a possibilitar o desenvolvimento da própria aprendizagem inteligente, de forma autônoma, por meio da utilização e do aprimoramento do conhecimento da Matemática, ao invés de praticar apenas rotinas de aprendizagem.

Skemp (2002) define que, ao se aprender por hábito, têm-se um pensamento instrumental baseado na memorização de fórmulas e de regras; contrapondo-se a isso, há o aprender por meio do uso da aprendizagem inteligente, definido como pensamento relacional, em que ocorre o agrupamento de informações e de conhecimentos que, ao se relacionarem e se estruturarem, formam algo que é tido como importante em um processo de aprendizagem.

Desse modo, para se aprender qualitativamente, é preciso instruir-se por meio do pensamento relacional, por meio da aprendizagem inteligente, que é tida como altamente adaptável, na qual Skemp (2002) destaca que a

> [...] principal característica da aprendizagem inteligente é a adaptabilidade. Disso, quero dizer que, para um determinado objetivo, podemos encontrar uma variedade de maneiras distintas de

---

[5] now be seen, first, as a particularly powerful and concentrated example of the functioning of human intelligence; and second, as one of the most powerful and adaptable mental tools which the intelligence of man has made for its own use, collectively over the centuries.

> alcançá-lo para atender a uma variedade de situações diferentes[6] (SKEMP, 2002, p. 33 – tradução nossa).

Assim, não temos como base para a aprendizagem a memorização de um conjunto de regras, mas sim a compreensão de estruturas de conhecimento em que existe um grande número de possibilidades de planos desenvolvidos por meio de experiências, com base nos conhecimentos existentes para a formação de novos conhecimentos, sendo essa a função da inteligência.

Segundo Skemp (2002), a aprendizagem inteligente é uma forma econômica de aprender, considerando que diferentes planos podem ser derivados da mesma estrutura de conhecimento, tornando essa forma de aprendizagem mais adaptável. Nesse sentido, os planos podem ser realizados para se adequar às situações em que não há uma regra pré-estabelecida, tornando-os mais eficientes, de modo que

> [...] nos permitem alcançar objetivos de nossa escolha, em uma ampla variedade de situações. Além disso, podemos planejar vários planos e escolher o melhor, antes de colocar este plano em ação. O aprendizado inteligente geralmente precede a ação. E a ação é usada não só para alcançar objetivos, mas também para testar hipóteses. Cada plano é baseado no conhecimento do contexto; e construir esse conhecimento é uma função importante da aprendizagem inteligente. A ação não é uma resposta a um estímulo externo, mas orientada para qualquer objetivo que um indivíduo tenha em sua própria mente[7] (SKEMP, 2002, p. 34 – tradução nossa).

Identifica-se que a aprendizagem inteligente precede a ação, segundo Skemp (2002), levando à compreensão de um conhecimento, efetivando a aprendizagem. Desse modo, quanto mais conhecimentos se obtêm, maior a adaptabilidade. Entretanto, uma forma de aprendizagem não anula a outra, é preciso que, no processo de aprendizagem, haja uma combinação da aprendizagem

---

[6] main feature of intelligent learning is adaptability. By this, I mean that for a given goal, we can find a variety of different ways of achieving it to suit a variety of different situations.

[7] enable us to achieve goals of our own choosing, in a wide variety of situations. What is more, we can devise several plans, and choose the best, before putting this plan into action. Intelligent learning often precedes action. And action is used not only for achieving goals, but for testing hypotheses. Each plan is based on knowledge of the environment; and building up this knowledge is a major function of intelligence. Action is not a response to an external stimulus, but directed towards whatever goal an individual has in his own mind.

inteligente e da aprendizagem por meio do hábito. Além do exposto, identifica-se que, na aprendizagem inteligente de Skemp, o entendimento ou a compreensão são construídos por meio da relação de novas experiências ou de ideias a um esquema[8] já existente. A respeito disso, Fossa (2001) esclarece que

> [...] geralmente contrastamos dois modos de conhecimento: o saber e a compreensão. O primeiro é somente o conhecimento “do que” de algo, enquanto o segundo adiciona o “porque” ao “do que”. Assim, o saber é geralmente considerado mais superficial, preso a fatos concretos e, portanto, limitado às situações originárias desse saber. Em contraste, a compreensão é mais profunda, mais abstrata e, portanto, proporciona ao sujeito uma capacidade de agir criativamente em situações novas (FOSSA, 2001, p. 83).

Ao se lidar com a compreensão como meio de pensamento relacional, há a ampliação da adaptabilidade a situações novas. Enquanto que, ao se aprender por meio do hábito, cria-se uma dependência entre o estudante e o professor, que apresenta um conjunto de regras para cada nova situação. Dessa forma,

> [...] a estrutura simples e autocontida dos esquemas associados com a compreensão instrumental torna relativamente fácil a aquisição de novos conhecimentos ao nível instrumental. Isso permite ao sujeito epistemológico o desenvolvimento de um grande estoque de “fatos” – ou seja, conhecimentos isolados com um teor reduzido de teoria – com os quais ele pode ensaiar alguns primeiros passos sobre assuntos novos. A estrutura poderá ser altamente sequenciada e profundamente internalizada sem perder seu caráter instrumental (FOSSA, 2001, p. 84).

Sendo assim, analisando ambos os panoramas, é possível compreender que a aprendizagem inteligente proporciona confiança e autonomia ao estudante, para que ele possa desenvolver suas habilidades e superar suas dificuldades frente às situações novas, nas quais o professor seria um mediador desse processo de aprendizagem.

Skemp (2002) aborda a formação dos conceitos matemáticos. Primeiramente, destaca que a matemática escolar é ensinada de modo abstrato, hierárquico, e, em geral, por faixa etária. Nesse processo, é preciso que haja a

[8] Skemp (2002) define esquema como conhecimento ou saber estruturado, sínteses, diagramas esquematizados, mapas cognitivos e modelos mentais.

abstração[9], guiada por experiências vivenciadas no passado, que norteiam as ações e a formação de conceitos[10]. “Uma característica importante do aprendizado inteligente é a descoberta dessass regularidades e a organização delas em estruturas conceituais que são por si ordenadas” [11] (SKEMP, 2002, p. 52 - tradução nossa).

De acordo com o autor, os conceitos primários originam-se da experiência sensorial, e os conceitos secundários são originados de outros conceitos. Para diferenciar os graus de abstração, são adotados os termos “ordem superior”, que apresentam condições mais complexas, e “ordem inferior”, que evidenciam condições mais simples e podem ser decorrentes de nosso ambiente social compartilhado, da leitura diária, do que vemos na televisão e ouvimos no rádio. Segundo Skemp (2002), ano após ano, exigimos que as crianças aprendam muitos conceitos novos que são de ordem superior àqueles que já adquiriram.

Skemp (2002) afirma que novos conceitos não devem ser expostos de forma direta, e sim que cada estudante deve construir o conceito para si mesmo, por meio de processos mentais, sendo o professor o orientador desse processo.

> 1 Novos conceitos de ordem superior devem ser comunicados por exemplos cuidadosamente escolhidos. 2 Devemos garantir que os conceitos de ordem inferior necessários estejam disponíveis na mente do aluno. Estes podem parecer simples o suficiente, mas eles têm consequências importantes[12] (SKEMP, 2002, p. 64 – tradução nossa).

Desse modo, no ensino de Matemática, há situações de aprendizagem nas quais as explicações são adequadas, e outras que precisam de diferentes estímulos para a formação de um conceito. Ressalta-se que,

> [...] antes de ensinar uma nova ideia, "divida-a em pedaços", isto é, analise a ideia para identificar quais são os conceitos contribuintes. E para garantir que os alunos tenham esses conceitos contribuintes, devemos analisar esses pedaços, e continuar então exatamente do

---

[9] Skemp (2002) define abstração como conscientização de regularidades na experiência, podendo ser reconhecida em ações futuras.

[10] Skemp (2002) define conceito como incorporações mentais de regularidades.

[11] A major feature of intelligent learning is the discovery of these regularities, and the organizing of them into conceptual structures which are themselves orderly.

12 1 New higher-order concepts are to be communicated by carefully chosen examples. 2 We must make sure that the necessary lower-order concepts are available in the mind of the learner. These may sound simple enough, but they have important consequences.

> início dos conceitos primários, ou os conceitos secundários cujos temos certeza de que as crianças possuem. Pois é no início que muitas das dificuldades estão. Em alguns alunos, importantes conceitos fundamentais nunca são formados, por isso para eles a matemática nunca é uma atividade inteligente ou inteligível[13] (SKEMP, 2002, p. 67-68 – tradução nossa).

Nesse sentido, uma análise conceitual de um assunto a ser ensinado é essencial, podendo ser representado de modo conveniente, por exemplo, em um mapa conceitual, de modo que isso auxilie no processo de aprendizagem.

Com base no exposto, é possível perceber que a construção do conhecimento matemático deve ser estruturada por meio de esquemas[14] mentais construídos pelo próprio estudante. Skemp (2002) apresenta três modos de promover a construção do conhecimento, por meio do esquema de construir e de testar.

Na primeira coluna do quadro, há exemplos de esquemas que promovem a construção de conhecimentos; na segunda coluna, tem-se uma associação horizontal do esquema construído como em uma situação na qual ele pode ser testado.

---

[13] [...] before teaching a new idea, 'take it to pieces', i.e. analyse it to see what are the contributory concepts. And to make sure that pupils have these contributory concepts, we must analyse these pieces, and continue thus right back either to their beginning in primary concepts, or to secondary concepts whichwe are sure that the children have. For it is at the beginning that much of the trouble lies. In some pupils, important foundation concepts are never formed, so that for them mathematics never is an intelligent or an intelligible activity.

[14] Skemp (2002) se baseia na teoria piagetiana para abordar esquemas mentais, entretanto, realiza uma releitura e faz suas próprias considerações a respeito de esquema.

Quadro 3 – Esquema de construção[15]

ESQUEMA DE CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTOS	
EXEMPLO DE SITUAÇÃO	APLICAÇÃO NA SITUAÇÃO
Modo 1	
de nossos próprios encontros com o mundo físico: experiência	participação em eventos no mundo físico: experimentar
Modo 2	
de esquemas dos outros: comunicação	comparação com os esquemas dos outros: discussão
Modo 3	
de dentro, pela formação de conceitos de ordem superior: por extrapolação, imaginação, intuição, criatividade	comparação com os conhecimentos e crenças existentes: consistência interna

Fonte: Skemp (2002, p. 73 - tradução nossa).

Skemp (2002) apresenta três modos de promover a construção de esquemas de estruturação mais eficientes, nos quais são indicadas situações de aprendizagem que possibilitam a oportunidade de trocar experiências, de estabelecer a comunicação entre sujeitos e de promover a criatividade, por meio de diferentes atividades, havendo a relação entre conceitos e propriedades importantes, e a formação de esquemas, em que

> i. Eles possibilitam a compreensão e, portanto, a adaptabilidade.
> ii. Eles fornecem uma rica fonte de planos de ação e técnicas.
> iii. Esquemas compartilhados facilitam a cooperação.
> iv. Aprender é mais fácil.
> v. A retenção é mais fácil.
> vi. A aprendizagem futura também é mais fácil.
> vii. O aprendizado inteligente é intrinsecamente prazeroso para a maioria das crianças e não depende de recompensas ou punições externas.[16] (SKEMP, 2002, p. 87 – tradução nossa).

---

[15] Para Skemp (2002) o termo construção do conhecimento é utilizado no sentido do desenvolvimento do conhecimento.

[16] (i) They make possible understanding, and thereby adaptability. (ii) They provide a rich source of plans of action and techniques. (iii) Shared schemas facilitate co-operation. (iv) Learning is easier. (v) Retention is better. (vi) Future learning is also easier. (vii) Intelligent learning is intrinsically pleasurable for most children, and does not depend on external rewards or punishments.

Na proposta de Skemp (2002), a formação de esquemas ocorre em um processo de aprendizagem a longo prazo, de modo que são desenvolvidas as etapas para promover a aprendizagem de novos conceitos. Em relação a isso, o autor afirma que

> [...] novos conceitos são formados e conectados com um esquema apropriado. O esquema em si, portanto, se expande, e após um período de consolidação somos capazes de assimilar ainda mais ideias que anteriormente estariam além do alcance de nossa compreensão. Assim, nossos esquemas crescem por esse processo combinado de assimilação de novas experiências a si mesmos e, assim, os expandindo[17] (SKEMP, 2002, p. 82 – tradução nossa).

Segundo o autor, se não houver aprendizagem com compreensão, aprender de forma instrumental, apenas por meio da memorização e da rotina de repetição será ineficiente, desestimulando o estudante.

Outro assunto abordado por Skemp (2002) é a compreensão do simbolismo matemático. A respeito disso, enfatiza que a Matemática é predominantemente composta de ideias, ou seja, de formas de pensamentos que ocorrem na mente do sujeito, e que, ao se deparar com uma situação-problema, necessita de utilizá-la e de comunicar essas ideias que requerem o simbolismo matemático. Aponta que é por meio da utilização de símbolos que se desenvolve, de forma racional, o gerenciamento do pensamento. Os símbolos proporcionam

> i. a comunicação;
> ii. retomada o conhecimento;
> iii. a formação de novos conceitos;
> iv. fazer diretamente diversas classificações;
> v. a possiblidade da atividade reflexiva;
> vi. dar explicações;
> vii. ajudar a mostrar a estrutura;
> viii. fazer manipulações de rotina automaticamente;
> ix. recuperar informações e compreendê-las;
> x. a atividade mental criativa[18] (SKEMP, 2002, p. 90-91 –

[17] [...] new concepts are formed and connected with an appropriate schema. The schema itself thereby expands, and after a period of consolidation we are capable of assimilating yet more ideas which previously would have been beyond the reach of our understanding. So our schemas grow by this combined process of assimilating new experiences to themselves, and thereby expanding.

[18] 1 Communication. 2 Recording knowledge. 3 The formation of new concepts. 4 Making multiple classification straightforward. 5 Making possible reflective activity. 6 Explanations. 7 Helping to show

tradução nossa).

O autor considera que um conjunto de símbolos é correspondente a um conjunto de conceitos, nos quais se estabelece um conjunto de relações entre os símbolos e, consequentemente, um conjunto de relações entre os conceitos.

Os sistemas de símbolos são tidos como estruturas superficiais, enquanto as estruturas dos conceitos são profundas. Desse modo, para desenvolver atividades matemáticas, é preciso a manipulação dos conceitos por meio dos símbolos, combinando e relacionando ambos. Se houver a manipulação de símbolos, sem a devida conceituação, não se estabelece uma relação consistente. Nesse contexto, tem-se que o

> [...] poder da Matemática está nas ideias. Na relação adequada, os símbolos nos ajudam a usar esse poder nos auxiliando a fazer uso mais completo dessas ideias. No relação inadequada, uma estrutura conceitual fraca ou quase existente é dominada pelo seu sistema de símbolos, e a Matemática não passa de manipulação de símbolos[19] (SKEMP, 2002, p. 99 – tradução nossa).

Em um curto período de tempo, pode-se construir estruturas superficiais, por meio da comunicação simbólica. Entretanto, se as estruturas conceituais forem fracas ou não forem estabelecidas, é provável que não haja retorno de aprendizagem em atividades futuras, nas quais uma informação não seria assimilada em uma estrutura conceitual por falta de consistência.

Em geral, as dificuldades emergentes da utilização dos símbolos ocorrem por causa da forma como são introduzidos, ou seja, em um processo de aprendizagem, no qual há a falha ou a ausência de um esquema mental para atribuir significado ao símbolo. Para minimizar essas dificuldades, Skemp (2002) sugere métodos que consistem em sequenciar atividades de modo esquemático e utilizar atividades práticas estruturadas, além de desenvolver uma abordagem didática com o fazer e o explicar que se relacionem em atividades escritas, verbais e não verbais, estabelecendo a ligação entre pensamento e símbolos. Diante do exposto, tem-se o

---

structure. 8 Making routine manipulations automatic. 9 Recovering information and understanding. 10 Creative mental activity.

[19] The power of mathematics is in the ideas. In the right partnership, symbols help us to make use of this power by helping us to make fuller use of these ideas. In the wrong relationship, a weak or barely existent conceptual structure is dominated by its symbol system, and mathematics becomes no more than the manipulation of symbols.

seguinte:

> i. O poder da Matemática está nas ideias; mas o acesso a essas ideias e a capacidade de comunicá-las depende do simbolismo matemático.
> ii. E é também pelo uso de símbolos que alcançamos o gerenciamento voluntário e racional do nosso próprio pensamento[20] (SKEMP, 2002, p. 104 – tradução nossa).

Em síntese, uma estrutura conceitual construída a longo prazo, de modo coerente e interiorizada em estruturas mais profundas, possibilita aprender e reter informações em atividades futuras.

Após uma investigação sobre o desenvolvimento cognitivo, baseado em Skemp (2002) sobre a formação de conceitos e como ocorre a aprendizagem matemática, entende-se que o próximo passo é investigar o pensamento matemático enquanto elementar e avançado. No processo de escolarização da Educação Básica, entende-se que um estudante seja capaz de desenvolver o PME de uma forma mais ampla, e que podem ocorrer indícios de desenvolvimento de PMA, dependendo das experiências anteriores do sujeito. Já para um pensamento formal matemático, exigido no Ensino Superior, é preciso gerenciar situações mais complexas que, em geral, possibilitam o desenvolvimento do PMA. A seguir, apresentam-se os referenciais teóricos que subsidiam o estudo sobre o desenvolvimento do PMA.

3.2 Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus

Em Dreyfus (1991), busca-se uma relação entre o Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado exigido em processos mentais aplicados em conceitos formais da Matemática. Entende-se que, para analisar indícios do desenvolvimento dessas formas de pensamento, precisa-se compreender como os processos mentais são mobilizados.

Segundo Dreyfus (1991), o desenvolvimento do PMA ocorre de modo gradual, a partir de interações que um sujeito realiza com atividades

[20] 1 The power of mathematics is in the ideas; but access to these ideas, and the ability to communicate them, depends on mathematical symbolism. 2 It is also by the use of symbols that we achieve voluntary and rational control of our own thinking.

matemáticas, partindo de um PME para formas de pensamento cada vez mais complexas. Nesse sentido, entende-se que os processos mentais que ocorrem na mente de um indivíduo são decorrentes de uma sequência de atividades, interagindo entre si e promovendo o desenvolvimento do pensamento matemático.

O autor aponta que é possível caracterizar o PMA por meio de processos em que os sujeitos corporificam representações mentais de objetos matemáticos, ou seja, desenvolvem processos mentais com esquemas internos para esses objetos. Diferencia-se o PMA do PME devido às reflexões que um sujeito promove a respeito de suas experiências em Matemática: ao resolver problemas que exigem gerenciar situações complexas no desenvolvimento de processos mentais; e ao lidar com diversos processos mentais interagindo com eles.

Conhecer esse aporte teórico sobre os processos mentais, decorrentes de um processo de aprendizagem, permite analisar os processos que são desenvolvidos ao raciocinar. Segundo Dreyfus (1991, p. 26), “não há distinção nítida entre muitos dos processos básico e avançado do pensamento matemático, mesmo que a matemática avançada é mais centrada nas abstrações de definição e dedução” [21].

Nesse sentido, uma característica que diferencia essas formas de pensamento é a complexidade e como elas são abordadas. Dreyfus (1991) afirma que os processos de abstração e de representação possibilitam ir de um tipo de detalhe para outro, gerenciando a complexidade. De acordo com o autor

> [...] o que mais os estudantes aprendem em seus cursos de Matemática é realizar um grande número de procedimentos padronizados, expressos em formalismos definidos com precisão para a obtenção de respostas às classes claramente delimitadas de questões de exercício [...] a eles foram ensinados os produtos da atividade de dezenas de matemáticos em sua forma final, mas esses estudantes não ganharam a introspecção nos processos que levaram matemáticos a construir estes produtos[22] (DREYFUS, 1991, p. 28 – tradução nossa).

---

[21] There is no sharp distinction between many of the processes of elementary and advanced mathematical thinking, even though advanced mathematics is more focussed on the abstractions of definition and deduction.

[22] [...] what most students learn in their mathematics courses is, to carry out a large number of standardized procedures, cast in precisely defied formalisms, for obtaining answers to clearly delimited classes of exercise questions [...] they have been taught the products of the activity of scores of mathematicians in their final form, but they have not gained insight into the processes that have led mathematicians to create these products.

Para desenvolver o PMA, não é suficiente apenas definir e explicar um conceito abstrato, é preciso que os estudantes construam as propriedades por meio de deduções, e desenvolvam atividades que promovam a abstração de conceitos, nas quais têm-se uma grande variedade de processos mentais componentes interagindo.

Segundo Dreyfus (1991), diversos processos mentais podem ser elaborados, como: representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, analisar, abstrair, sintetizar, formalizar, generalizar e provar. Assim, múltiplas representações mentais de um conceito podem complementar-se e integrar-se em uma única representação, caracterizando um processo de abstração e, ainda, possuir várias representações de um conceito, o que viabiliza a flexibilidade na resolução de problemas.

Dentre os diversos processos mentais que Dreyfus (1991) aponta, o processo de abstração é essencial para o desenvolvimento do PMA. Isso porque existe um processo reflexivo envolvido a respeito de conceitos e de situações matemáticas. Segundo o autor, se um sujeito desenvolve a habilidade de, conscientemente, fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado de pensamento matemático. Abstrair "é primeira e principalmente um processo construtivo a estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades e relações entre objetos matemáticos"[23] (Dreyfus, 1991, p. 37, tradução nossa).

Simultaneamente a esse processo, outros dois processos se desenvolvem concomitantemente: o de generalizar e o de sintetizar. Baseado em Dreyfus (1991), generalizar é derivar ou induzir a partir de indicações, a fim de identificar pontos em comum e, desse modo, expandir domínios de validade; sintetizar implica combinar ou compor partes, de tal forma, que constituam um todo.

Com base em Dreyfus (1991), foi elaborado um quadro síntese com processos mentais de representação e de abstração, destacado a seguir.

[23] is first and foremost a *constructive* process – the building of mental structures from mathematical structures, i.e. from properties of and relationships between mathematical objects.

Quadro 4 – Caracterização de processos mentais envolvidos no PMA

PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA REPRESENTAÇÃO	
Visualizar	Converter algo em representação mental.
Reconhecer	Relacionar algo que temos em mente com o que visualizamos.
Intuir	Perceber relações existentes em diferentes representações.
Investigar	Averiguar o desenvolvimento de um processo.
Traduzir	Transitar de uma representação de um objeto para outra.
Descobrir	Conhecer algo por meio de conexões de representações mentais.
Conjecturar	Deduzir a partir da verificação, tradução, descoberta.
Classificar	Ordenar e agrupar processos mentais concorrentes.
Analisar	Avaliar, criticar, refletir sobre um processo mental.
Induzir	Concluir a partir de indícios, verificações.
Reconhecer símbolos	Traduzir signos para representações mentais.
Manipular símbolos	Associar e traduzir diferentes representações.
Definir	Expor claramente o significado de uma representação.
Flexibilizar	Relacionar diferentes representações mentais.
Compreender	Entender a interação de uma variedade de processos mentais simultâneos.
Modelar	Encontrar uma representação matemática para um objeto não-matemático.
PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA ABSTRAÇÃO	
Sintetizar	Combinar ou compor partes a fim de constituir algo.
Formalizar	Criar procedimentos padronizados.
Generalizar	Derivar ou induzir a partir de indícios, para indicar pontos em comum e ampliar domínios de validade.
Provar	Argumentar por meio de uma sequência lógica dedutiva.

Fonte: Kirnev (2012, p. 37).

Por meio do quadro, averígua-se diversos processos mentais que podem interagir entre si, diante de uma situação de aprendizagem, ou seja, esses processos não são hierárquicos ou excludentes, eles combinam-se na mente do sujeito nesse tipo de situação. A partir disso, estabelece-se a conexão do novo estímulo com os conhecimentos existentes, possibilitando a constituição ou a reformulação de esquemas mentais, conforme exposto por Skemp (2002). Nesse sentido, ao pensar em processos mentais, refere-se ao que ocorre internamente na mente do sujeito ao assimilar uma informação, e têm-se dois processos mais amplos que são o de representação e o de abstração que interagem com diversos outros processos, conforme elencado no quadro anterior.

Para esclarecer como ocorre uma representação mental de um objeto matemático, Dreyfus (1991) destaca que um sujeito constrói esquemas internos ou de quadros de referência para interagir com o mundo externo. Uma das formas de se comunicar se dá por meio da representação simbólica, utilizada para estabelecer a comunicação entre os sujeitos, por meio da linguagem escrita ou falada, objetivando realizar a comunicação sobre um conceito de modo simples.

A utilização de símbolos converge para o que foi tratado por Skemp (2002), ao abordar a aprendizagem inteligente, na qual o sujeito utiliza um conjunto de símbolos para a formação e a relação de conceitos. A contribuição de Dreyfus (1991) acontece no fato de se estabelecer a comunicação entre os sujeitos.

Com base nisso, as imagens mentais estão em correspondência com a imagem matemática de um objeto, permitindo que a comunicação aconteça. Assim, ao interpretar uma mesma representação simbólica, sujeitos distintos devem ter representações mentais similares, considerando que as representações mentais de um objeto matemático podem variar, sendo que é por meio das representações mentais que os sujeitos constroem os conceitos sobre objetos matemáticos. A respeito disso, Dreyfus afirma que,

> [...] para ser bem-sucedido em Matemática, é desejável ter representações mentais ricas de conceitos. Uma representação é rica, se contém muitos aspectos ligados a esse conceito. Uma representação é pobre, se tiver elementos insuficientes para permitir a flexibilidade na resolução de problemas. Essa inflexibilidade observamos frequentemente em nossos alunos: a menor mudança na estrutura de um problema, ou até mesmo em sua formulação,

> pode bloqueá-los completamente[24] (DREYFUS, 1991, p. 32 - tradução nossa).

A respeito da inflexibilidade existente na resolução de problemas matemáticos, Brandemberg (2009) questiona as tarefas que são difíceis para estudantes e aponta que a

> [...] discrepância entre a expectativa dos professores e a realização dos graduandos é acentuada em função de os professores não perceberem que a sua posição de "experts" em abordar tais assuntos advém de suas experiências pessoais e profissionais, uma experiência que geralmente o aluno não tem (BRANDEMBERG, 2009, p. 81).

Além disso, Brandemberg (2009, p. 82), ao descrever um processo de aprendizagem, aponta que "o estudante deve manipular mentalmente, investigar e descobrir coisas a respeito do objeto foco do seu conhecimento, não de forma parcial e fragmentada, mas buscando a sua totalidade generalizante". Os processos mentais envolvem uma ampla gama de pensamentos e interações que se compõem para a formação de novos conceitos. Isso ocorre a partir de experiências e de esquemas mentais que o sujeito já possui, que passam por transformações, modificações, ou ainda, são novas constituições que integram a mente de um sujeito.

Nesse contexto, Dreyfus (1991) aponta que é importante conhecer diversas representações de um conceito, entretanto, apenas a existência desse conhecimento não é suficiente para permitir o uso flexível de um conceito na resolução de problemas, e é preciso que as diversas representações sejam corretas e fortemente relacionadas. Além disso, é necessário mudar de uma representação para outra, sempre que a outra for mais conveniente para a solução de um problema, ou seja, necessita-se de diferentes experiências para que sejam construídas as diversas representações que interajam entre si e, com estímulos adequados, seja possível transitar por mais de uma representação de um conceito matemático.

---

[24] To be successful in mathematics, it is desirable to have rich mental representations of concepts. A representation is rich if it contains many linked aspects of that concept. A representation is poor if it has too few elements to allow for flexibility in problem solving. Such inflexibility we often observe in our students: The slightest change in the structure of a problem, or even in its formulation, may completely block them.

O autor ressalta que a flexibilidade entre processos mentais advém da abstração que contém

> [...] o potencial para generalização e sintetização; e vice-versa, torna-se sua finalidade, principalmente a partir desse potencial de generalização e de síntese. A natureza do processo mental de abstração é, contudo, muito diferente da generalização e do de síntese. Abstrair é antes de tudo e principalmente um processo de construção - a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades e relações entre objetos matemáticos[25] (DREYFUS, 1991, p. 37- tradução nossa).

De acordo com o autor, este processo requer isolar as propriedades adequadas e estabelecer relações. Além da capacidade de deslocar a atenção dos objetos em si e a estrutura das suas propriedades e relações. Retomando o exposto por Skemp (2002), é possível considerar que o pensamento relacional, desenvolvido por meio da aprendizagem inteligente, é imprescindível para que haja a flexibilidade entre os processos mentais de abstração, potencializando a generalização e a sintetização, pois nessa forma de pensamento, o sujeito estabelece relações e, ao reorganizar suas formas de pensamento, acaba por estabelecer novos conceitos que, resultantes de processos mentais, acabam interagindo entre si.

3.3 Desenvolvimento do pensamento formal em Matemática

Com os aportes teóricos anteriores, foi mostrado como ocorrem os processos de aprendizagem e como os processos mentais interagem entre si. Entretanto, para abordar as características do Pensamento Matemático Avançado, é preciso buscar um aporte teórico sobre como emerge o pensamento formal em Matemática. Para isso, os trabalhos de David Tall foram investigados. Nesses trabalhos, ele explora a questão da aprendizagem ao longo da vida, o que foi ao encontro do problema de pesquisa desta tese, tornando-se parte fundamental do

[25] Tradução nossa: "Abstraction thus contains the potential for both generalization and synthesis; vice versa, it gets its purpose mainly from this potential of generalization and synthesis. The nature of the mental process of abstracting is, however, very much different from that of generalizing and from that of synthesizing. Abstracting is first and foremost a *constructive* process – the building of mental structures from mathematical structures, i.e. from properties of and relationships between mathematical objects". (SIC)

aporte teórico.

Tall (2007b, 2008) estudou o processo de aprendizagem desde a construção de estruturas genéticas, em que "compartilhamos e desenvolvemos conhecimento individual mais sofisticado baseado em experiências pessoais"[26] (Tall, 2008, p.1- tradução nossa). Para estruturar essa teoria, o autor inicia a discussão a respeito do assunto, definindo o termo *set-befores*, que é utilizado

> para se referir a uma estrutura mental que nasce conosco, na qual podemos levar um pouco de tempo para amadurecer à medida que nossos cérebros fazem conexões desde o início da vida. Por exemplo, a estrutura visual do cérebro possui sistemas inatos para identificar cores e tons, para ver mudanças na sombra, identificar bordas, coordenar as bordas de objetos e acompanhar seus movimentos. Assim, a criança nasce com um sistema biológico para reconhecer um pequeno número de objetos (um, dois, ou talvez três) que dá um "*set-befores*" para o conceito de "duplicidade" antes que a criança aprenda a contar. Outros *set-befores* incluem concepções como "up" e "down" relacionadas com a força da gravidade e nossa postura ereta, e o conceito relacionado de horizontal. Outra é a sensação de peso que encontramos através da tração sobre nossos músculos quando nós levantamos objetos. Outros *set-befores* incluem as capacidades sociais para interagir com outros usando gestos como apontar para chamar a atenção para as coisas[27] (TALL, 2008, p. 6, tradução nossa).

Dessa forma, desde o nascimento, o sujeito já interage e aprende coisas novas, em um primeiro momento, por meio da observação e, posteriormente, com a coordenação de diversas ações que promovem o aprendizado de conceitos. Os *set-befores* são as capacidades inatas do sujeito, aquilo que ele já possui, a pré-disposição para aprender. Em um primeiro momento, a linguagem é gestual e corporal, posteriormente, falada, e com a

---

[26] that we all share and developing more sophisticated individual knowledge based on personal experiences.

[27] I use the term 'set-before' to refer to a mental structure that we are born with, which may take a little time to mature as our brains make connections in early life. For instance, the visual structure of the brain has built-in systems to identify colours and shades, to see changes in shade, identify edges, coordinate the edges to see objects and track their movement. Thus the child is born with a biological system to recognise small numbers of objects (one, two, or perhaps three) that gives a 'set-before' for the concept of 'twoness' before the child learns to count. Other set-befores include conceptions such as 'up' and 'down' related to the pull of gravity and our upright posture, and the related concept of the horizontal. Another is the sense of weight that we encounter through the pull on our muscles as we lift objects. Other set-befores include the social ability to interact with others using gestures such as pointing to draw attention to things.

aprendizagem da leitura e da escrita, a linguagem transforma-se em um processo que se aprimora com o desenvolvimento do sujeito.

Tall (2008) aponta que o crescimento pessoal depende da interpretação do indivíduo em novas situações, com base nas vivenciadas anteriormente. Para isso, são estabelecidos atributos humanos fundamentais em nossos genes, que são essenciais para o pensamento matemático, no qual se adapta o aprendizado ao longo do tempo, de modo a pensar matematicamente de maneiras específicas. Esses atributos humanos fundamentais são tidos como *set-befores* voltados para a aprendizagem matemática são definidos por

> • reconhecimento de padrões, semelhanças e diferenças;
> • repetição de sequências de ações até que se tornem automáticas;
> •linguagem para descrever e aperfeiçoar a maneira como pensamos sobre as coisas[28] (TALL, 2008, p. 7 - tradução nossa).

Segundo Tall (2008), por meio da articulação dos *set-befores*, é possível desenvolver padrões e o uso de símbolos relacionados e, a partir disso, formular novas ideias ou refinar significados já existentes. Nesse tipo de processo, reconhecer padrões é uma habilidade fundamental para a Matemática e, dentre esses, os padrões de forma e de número são tidos como relevantes. Destaca-se, por exemplo, que o *set-before* da repetição possibilita a automação de procedimentos de aprendizagem. Um meio para isso é a utilização da linguagem simbólica cada vez mais concisa, de modo a promover a abstração dos conceitos envolvidos. Sobre a construção de conceitos, Tall e Vinner afirmam que muitos

> [...] conceitos que usamos corriqueiramente não são formalmente definidos. Aprendemos a reconhecê-los por experiência e pelo uso em contextos apropriados. Posteriormente tais conceitos podem ser refinados em seu significado e interpretados com maior sutileza com ou sem o luxo de uma definição precisa. Normalmente, neste processo, ao conceito é dado um símbolo ou nome que possibilita sua comunicado e auxilia na sua manipulação mental. Mas a estrutura cognitiva total que preenche o significado do conceito é

28

- recognition of patterns, similarities and differences;
- repetition of sequences of actions until they become automatic.
- language to describe and refine the way we think about things.

> muito maior do que a evocação de um único símbolo. É mais do que qualquer imagem mental, seja ela pictórica, simbólica ou de outra forma. Durante os processos mentais de recordar e manipular um conceito, muitos processos associados são colocados em jogo, consciente e inconscientemente, afetando o seu significado e uso[29] (TALL E VINNER 1981, p.1-2 - tradução nossa).

Para promover o pensamento matemático, um indivíduo necessita analisar uma sequência de ações e executá-las com destreza, conjecturando sobre esse processo. Para esse tipo de processo, é necessário definir e exemplificar os m*et-befores*, que tratam do

> desenvolvimento pessoal que se baseia em experiências que o indivíduo vivenciou antes. Experiências anteriores formam conexões no cérebro que afetam o modo como damos sentido às novas situações. Eu defino um *met-befores* como sendo uma "facilidade mental atual baseada nas experiências prévias específicas do indivíduo". [...] Um *met-before*, às vezes, é consistente com a nova situação e, por vezes, inconsistente. Por exemplo, um *met-before* "2 + 2 dá 4" é experimentado primeiramente na aritmética dos números inteiros e vez, e o número continua em toda aritmética sendo coerente com a aritmética das frações, inteiros positivos e negativos, números racionais, reais e complexos. Porém o *met-befores* "tirando dá menos" permanece consistente com frações (positivas), mas é inconsistente com negativos, em que tirando -2 dá mais. O mesmo *met-before* funciona de forma consistente com conjuntos finitos, em que tirando um subconjunto deixa menos elementos, mas é inconsistente no contexto dos conjuntos infinitos, em que removendo os números pares dos números naturais ainda deixa os números ímpares com a mesma cardinalidade[30]." (TALL, 2008, p. 7 - tradução nossa).

---

[29] concepts which we use happily are not formally defined at all, we learn to recognise them by experience and usage in appropriate contexts. Later these concepts may be refined in their meaning and interpreted with increasing subtlety with or without the luxury of a precise definition. Usually in this process the concept is given a symbol or name which enables it to be communicated and aids in its mental manipulation. But the total cognitive structure which colours the meaning of the concept is far greater than the evocation of a single symbol. It is more than any mental picture, be it pictorial, symbolic or otherwise. During the mental processes of recalling andmanipulating a concept, many associated processes are brought into play, consciously and unconsciously affecting the meaning and usage.

[30]Personal development builds on experiences that the individual has met before. Previous experiences form connections in the brain that affect how we make sense of new situations. I define a met-before to be 'a current mental facility based on specific prior experiences of the individual.'[...] A met-before is sometimes consistent with the new situation and sometimes inconsistent. For instance, the met-before '2+2 makes 4' is experienced first in whole number arithmetic and continues to be consistent with the arithmetic of fractions, positive and negative integers, rational, real and complex numbers. But the met-before 'taking away gives less' remains consistent with (positive) fractions, but is inconsistent with negatives where taking away –2 gives more. The same met-before works consistently with finite sets, where taking away a subset leaves fewer elements, but is inconsistent in

De acordo com o autor, os *met-befores* podem agir secretamente, modificando o modo como os indivíduos entendem uma nova Matemática, às vezes, favorável ao aprendizado, outras vezes, não, pois

> muitos termos dos currículos a longo prazo focam apenas em ampliar experiências baseadas nos *met-befores* positivos, deixando de abordar *met-befores* que causam a muitos alunos profundas dificuldades. Por exemplo, os matemáticos têm o conceito de limite como um *met-before* em suas próprias mentes, que, para eles, é a base lógica do cálculo e análise; mas não é um *met-before* para estudantes começando o cálculo e provoca profundas dificuldades (TALL, 2008, p. 7 - tradução nossa[31]).

O desenvolvimento cognitivo promove mudanças devido à capacidade de sofisticação do pensar ao longo do tempo, de reorganização de informações assimiladas, utilização e formação de novas estruturas, além de soluções de problemas causados por situações novas.

Nesse cenário, o processo de pensamento envolve a capacidade de executar o procedimento e, simultaneamente, de pensar nisso como entidades sofisticadas em sua própria estrutura de pensamento, no qual os símbolos atuam concomitantemente como processo e conceito para, assim, pensar de forma flexível, visto que a combinação de símbolo, processo e conceito é denominada proceito[32] elementar, que pode ser parte de uma coleção com um mesmo conceito de saída, formando o proceito (Gray ; Tall, 1994 *apud* Tall 2008).

Nesse sentido, aprender não é somente um aglomerado de experiências anteriores, adicionando novas informações às existentes; ocorre a modificação de informações existentes, reestruturando o pensamento matemático da forma elementar para a avançada, com base nos *set-befores* e *met-befores*

---

the context of infinite sets, where removing the even numbers from the counting numbers still leaves the odd numbers with the same cardinality.

[31]Most long-term curriculum focus only on broadening experiences based on positive met-befores, failing to address met-befores that cause many learners profound difficulties. For example, mathematicians will have the limit concept as a met-before in their own minds, which, for them, forms the logical basis of calculus and analysis; but it is not a met-before for students beginning calculus and causes profound difficulties.

[32] Definida originalmente por procept.

existentes, de acordo com Tall (2008), e por meio das experiências vivenciadas no meio, nas quais é necessário ocorrer a aprendizagem inteligente, baseada em Skemp (2002), e o gerenciamento de processos mentais complexos, baseados em Dreyfus (1991).

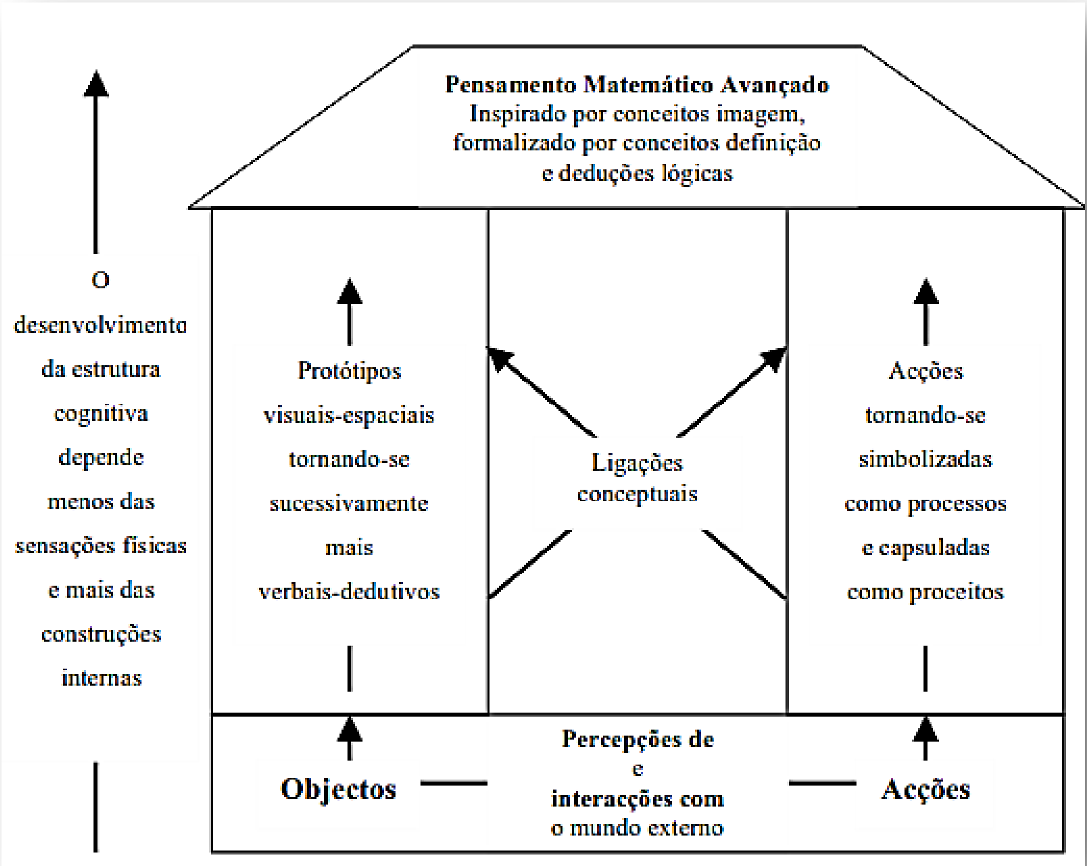
Para Tall (1995), no desenvolvimento do PMA é necessário o uso de estruturas cognitivas formadas por uma ampla gama de atividades matemáticas para a construção de novas ideias que ampliem um sistema cada vez maior de teoremas estabelecidos. Dessa forma, o

> [...] crescimento cognitivo do pensamento básico ao pensamento matemático avançado no indivíduo pode, em hipótese, começar a partir da "percepção" e "ação" sobre objetos no mundo externo, [...] usando a manipulação de símbolos para inspirar o pensamento criativo com base em objetos formalmente definidos e provas sistemáticas[33] (TALL, 1995, p. 3 - Tradução nossa).

Reforçando o que foi exposto anteriormente, Domingos (2006), referindo-se ao processo de desenvolvimento do PMA, segundo Tall (1995), aborda uma sistematização da evolução do pensamento matemático sob um ponto de vista cognitivista. Há três componentes da atividade humana: a *percepção* como entrada, o *pensamento* como processamento interno, e a *ação* como saída. Os estudos de Tall (1995) possibilitam analisar as atividades matemáticas como a percepção de objetos, o pensar sobre eles e a realização de ações relacionadas às atividades. Domingos (2006), ao promover um estudo sobre o assunto, traz o seguinte esquema para ilustrar como esse processo ocorre.

[33]The cognitive growth from elementary to advanced mathematical thinking in the individual may therefore be hypothesised to start from "perception of" and "action on" objects in the external world, [...] using manipulable symbols—leading to a use of all of this to inspire creative thinking based on formally defined objects and systematic proof.

Figura 1– Ilustração do desenvolvimento cognitivo da criança ao matemático investigador.



Fonte: Domingos (2006, p. 3.).

Nessa ilustração, verifica-se, por meio de uma analogia, o PME em uma transição para o PMA, partindo de situações de aprendizagem vivenciadas em um estágio inicial de aprendizagem e evoluindo para a prova formal. Nesse panorama, a matemática escolar é considerada como uma combinação de representações visuais, incluindo diferentes aspectos, como a geometria e os gráficos, em conjunto com cálculos e manipulações simbólicas, enquanto na Matemática pura são adotadas deduções formais de sistemas axiomáticos e prova matemática. Esses estudos de Tall (1995), apresentados por Domingos (2006), trazem aspectos mais globais a respeito do desenvolvimento do PMA, sendo que em Tall (2007b, 2008) há uma ênfase no desenvolvimento do sujeito ao longo da vida, e assim é possível observar características do desenvolvimento do PMA.

O aporte teórico de Tall (2004, 2007b, 2008) justifica essa mudança, por meio da transição do pensamento baseado no que ele denomina de “três mundos da Matemática”: o mundo “conceitual corporificado”, com base na percepção, na ação e no experimento do pensamento; o mundo “proceitual simbólico” de cálculo e manipulação algébrica comprimindo processos, tais como conceitos como o número; e o mundo “axiomático formal” de definições, conceito, conjunto teórico e prova matemática. Cada "mundo" possui sua própria sequência de desenvolvimento e suas próprias formas de prova, que podem ser misturadas para dar uma rica variedade de formas de pensar matematicamente, evidenciadas em Tall (2004, 2007b, 2008). A seguir, apresenta-se um quadro com exemplificações.

Quadro 5 – Três mundos da Matemática baseados em Tall (2004, 2007b, 2008)

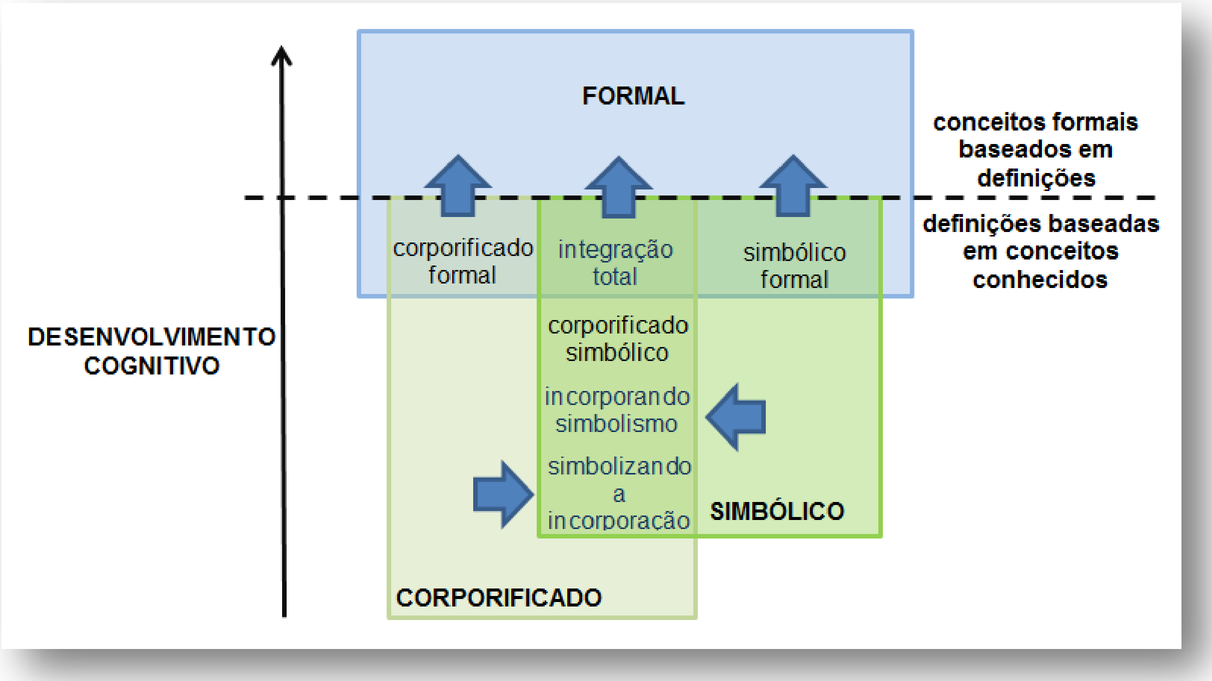
Mundo da Matemática	**Exemplificação**
Conceitual Corporificado	Baseado na percepção e na reflexão de propriedades de objetos, a partir do mundo real e, posteriormente, na mente, por meio da identificação de padrões, semelhanças diferenças, exemplificações, representações gráficas e utilização da linguagem corrente.
Conceitual Simbólico	Ocorre fora do mundo corporificado, por meio da ação, e é simbolizado como conceitos pensáveis, em que a função tanto é vista como processos para fazer, como conceitos para pensar (proceitos). Manipulações no cálculo aritmético e algébrico.
Formal Axiomático	Baseado em definições e em provas de teoremas apoiados em um sistema formal de definições de conjunto de teoria.

Fonte: Do próprio autor.

Para compreender como um sujeito transita entre os três mundos da Matemática, é preciso entender o desenvolvimento do pensamento matemático a longo prazo, constituído e reestruturado pelas *set-befores* e *met-befores*, para assim diagnosticar os processos mentais mobilizados no PME e no PMA em processo de aprendizagem da Matemática ao longo da vida.

Tall (2008) apresenta o seguinte esquema sobre o desenvolvimento cognitivo e os três mundos da Matemática indicados de forma mais breve como corporificado, simbólico e formal.

Figura 2 – Ilustração dos três mundos da Matemática



Fonte: Tall (2008, p. 5 - tradução nossa).

Na figura, observam-se as interações entre os três mundos da Matemática, ou seja, não são considerados como mundos disjuntos e sim que há transições entre esses mundos, de acordo com o desenvolvimento cognitivo, iniciados por meio dos *set-befores* e aprimorados e reestruturados pelas experiências que promovem o desenvolvimento dos *met-befores*.

Para que o sujeito avance do mundo corporificado para o simbólico, é preciso que se utilize uma linguagem simbólica. Retomando o exposto por Skemp (2002), o pensamento relacional possibilita que exista um conjunto de símbolos para a formação de conceitos. Esse processo de atribuição de significados para os símbolos é imprescindível para que o sujeito transite entre os mundos corporificado e simbólico. Desse modo, pode ocorrer, também, a atribuição de significados para os símbolos, acontecendo a corporificação simbólica. Pelo diagrama, nota-se que pode haver a integração total, ou parcial, entre os mundos corporificado, simbólico e formal. Um ponto destacado por Tall (2008), refere-se ao “simbolismo proceitual”, no qual se utilizam símbolos que emergem por meio de esquemas de ação e que se tornam conceitos pensáveis.

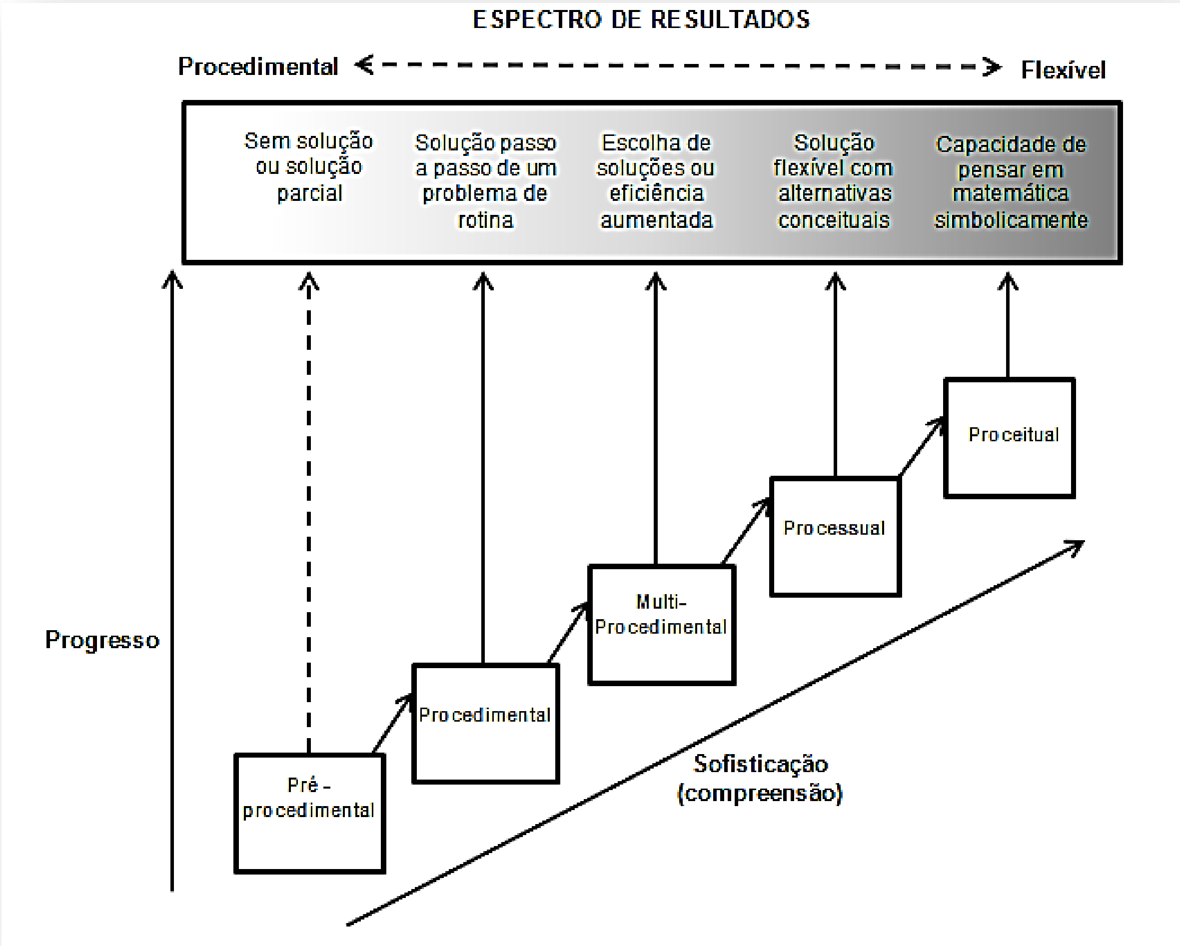
A fim de que o sujeito avance ao mundo formal, é preciso desenvolver o que Skemp (2002) coloca como a construção de relações entre os diferentes conceitos para que se organize uma sequência de representações que promovam um pensamento formal, e isso é possível apenas por meio do pensamento relacional. Para caracterizar o mundo formal axiomático, Tall (2008) realiza a distinção da matemática elementar, na qual as definições surgem das experiências com objetos e as propriedades são obtidas por meio da descrição, enquanto que, na matemática formal, toma-se como base um conjunto teórico de definições e, a partir disso, são deduzidas outras propriedades utilizando a prova formal.

De acordo com Tall (2008), na matemática escolar, as corporificações ocorrem por meio de concepções físicas e de ações. Ao se praticar as operações envolvidas em um conceito, acaba por estabelecer uma rotina e se institui o uso de símbolos associados às entidades mentais e às operações realizadas. Com a introdução da manipulação simbólica, ocorrem interrupções de pensamento matemático corporificado, avançando para proceitos do mundo simbólico, sendo que os significados precisam ser explorados em diversos contextos nos quais um símbolo pode ser empregado.

Esse autor afirma que, para transitar para o mundo axiomático formal, é preciso possuir sequências de experiências de corporificações e simbolismos para que seja possível formular definições formais e provas matemáticas, sendo que a escrita formal é considerada como a fase final do pensamento matemático. Ou seja, para o desenvolvimento do PMA, é preciso que se tenha experiências que possibilitem a construção de corporificações, simbolismo e formalismo.

Outro ponto apontado por Tall (2008) diz respeito à relação, à compreensão e à conexão aos conceitos pensáveis. Sobre isso, ele discorre a respeito do desenvolvimento do raciocínio matemático, apontando que nosso cérebro processa poucas informações de cada vez, conectando ideias e formando os conceitos pensáveis. Com relação à compreensão de conceitos pensáveis, isso ocorre de diversas formas. Para isso, decorre um processo, por meio de uma sequência de passos, para que haja compreensão, que pode ser analisada na representação a seguir.

Figura 3 – Espectro da compreensão do simbolismo



Fonte: Tall (2008, p. 6 – tradução nossa).

Entende-se que, para haver a compreensão, o início se dá por procedimentos parciais, que se tornam cada vez mais sofisticados. Praticando diversos procedimentos em contextos diferentes, chegam-se a multiprocedimentos que acarretam processos e levam ao desenvolvimento de um proceito. Nesse desenvolvimento, iniciamos com um tipo de pensamento processual e, ao construir um proceito, temos um tipo de pensamento flexível.

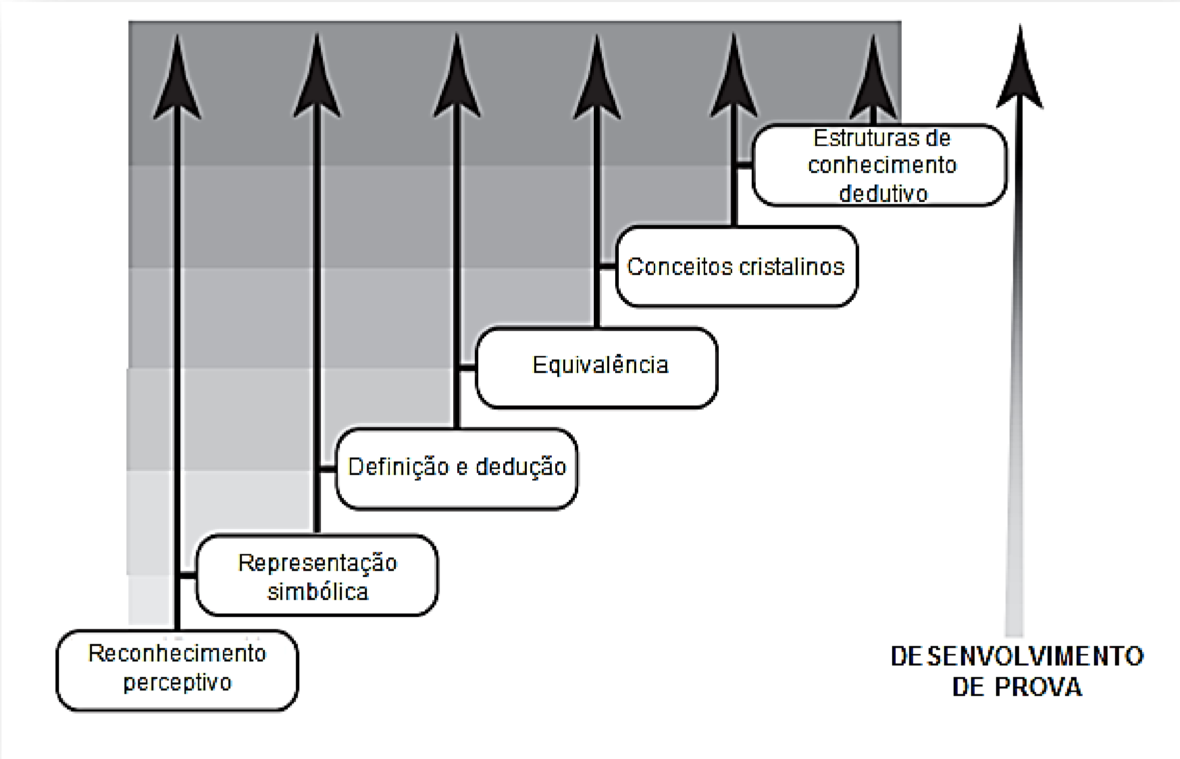
Segundo Tall (2008), alguns alunos apresentam dificuldades em desenvolver processos e acabam restringindo-se a um pensamento processual, enquanto outros alunos conseguem desenvolver maior flexibilidade de pensamento, realizam processos em sua totalidade e compreendem os conceitos pensáveis.

O autor aponta que a compreensão é tida como um processo cognitivo geral que comprime situações de tempo e de espaço, por meio de um processo mental de sintetização derivado de experiências e de vivências, a partir de uma única estrutura no cérebro. Entretanto, tem-se a mistura conceitual, na qual conceitos que são formados dissociados sofrem algum estímulo e o sujeito consegue ligar ideias semelhantes. Quando este se depara com uma situação nova e busca interpretá-la, misturando os *met-befores* existentes, decorrentes de diversas experiências, com aspectos comuns e outros conflitantes, forma, assim, uma mistura conceitual. Tais misturas podem ocorrer em um dos mundos da Matemática ou em mundos distintos.

De acordo com Tall (2008), a teoria dos três mundos da Matemática possibilita uma estrutura de análise para interpretar a aprendizagem matemática desde os níveis elementares de ensino até os níveis avançados, permitindo a análise da transição da matemática escolar para a matemática do nível superior.

Outro ponto de investigado são os processos desenvolvidos em provas matemáticas. Tall *et al*. (2011) aponta que a prova matemática se desenvolve de diversas formas, levando em consideração o tempo, o histórico e o desenvolvimento individual. Os autores indicam que existem vários graus de prova aplicadas na matemática escolar e, em geral, são adotados termos como “mostrar”, “justificar”, “explicar” e “provar a partir de primeiros princípios”. Com base nisso, o termo “prova” é considerado em seu sentido mais amplo, e os autores se preocupam em analisar as mudanças em seu significado durante a maturação do indivíduo. Apresenta-se, a seguir, um espectro que resume a discussão dos autores sobre esse processo de amadurecimento.

Figura 4 – Espectro da maturação de estruturas de prova



Fonte: Adaptado de Tall *et al.* (2011, p. 8 – tradução nossa).

O primeiro estágio do processo se dá por meio do reconhecimento perceptual, decorrente da percepção. Posteriormente, ocorre a descrição verbal, seja da forma oral ou escrita, por meio da representação simbólica da linguagem. Depois, ocorre a definição e a dedução. Após isso, ocorre a formulação de equivalências. Em um estágio mais elaborado, tem-se a formação de conceitos cristalinos. No auge do desenvolvimento do processo, ocorre a formação de estruturas do conhecimento dedutivo.

Tall (2008) aponta que a prova é tratada de modos distintos em cada um dos três mundos da Matemática. No mundo corporificado, pode-se entender experimentos específicos como forma para confirmar se algo é verdadeiro. Já o mundo simbólico, consiste na prova de certas propriedades, que podem ser realizadas por meio de cálculos aritméticos, em alguns casos, com procedimentos de generalização e manipulações algébricas, ou seja, nesses mundos corporificados e simbólicos, a prova é “baseada em conceitos cujas definições são dadas, de modo que os conceitos sobressaem a qualquer sentido da prova[34]” (TALL, 2008 p.14 – tradução nossa).

Segundo o autor, no mundo formal é preciso desenvolver o PMA, pois as provas são baseadas apenas em definições e em deduções. Para tanto, é preciso que tenham vivenciado uma variedade de abordagens para provar novas hipóteses por meio de teoremas formais, argumentos, cálculos e manipulações que podem ser necessárias em provas formais. Outro apontamento realizado é que a forma de desenvolvimento de um processo pode operar de modo sutil e pode afetar a interpretação de definições formais. Em síntese, o

> [...] retorno final do formalismo para uma forma mais sofisticada de incorporação e simbolismo por meio de teorema de estrutura me leva a ver os três mundos da matemática como uma estrutura natural através do qual o cérebro biológico constrói uma mente matemática. A criança constrói a partir dos três grandes set-befores de reconhecimento, a repetição e linguagem para reconhecer e categorizar objetos geométricos, para repetir os procedimentos até que se tornem automáticos e talvez comprimindo em proceitos imagináveis e, posteriormente, para usar a linguagem mais técnica da teoria dos conjuntos e da lógica para a construção de estruturas matemáticas formais do mais alto nível[35] (TALL, 2008, p. 17 – tradução nossa).

Nesse sentido, uma prova formal matemática envolve pensar em aspectos significativos, usando o conhecimento prévio para colocar novas ideias em conjunto formal, por meio de relações, de conjecturas e de definições necessárias para construir um argumento válido.

Na sequência, apresenta-se um quadro síntese de obras estudadas que auxiliam no entendimento do desenvolvimento cognitivo ao longo da vida.

---

[34] is based on concepts that are given definitions, so the concepts underpin any sense of proof.

[35] The final return of formalism to a more sophisticated form of embodiment and symbolism through structure theorems leads me to see the three worlds of mathematics as a natural structure through which the biological brain builds a mathematical mind. The child builds from the three major set-befores of recognition, repetition and language to recognize and categorise geometric objects, to repeat procedures until they become automatic and perhaps compressed into thinkable procepts, and later to use the more technical language of set theory and logic to construct formal mathematical structures at the highest level.

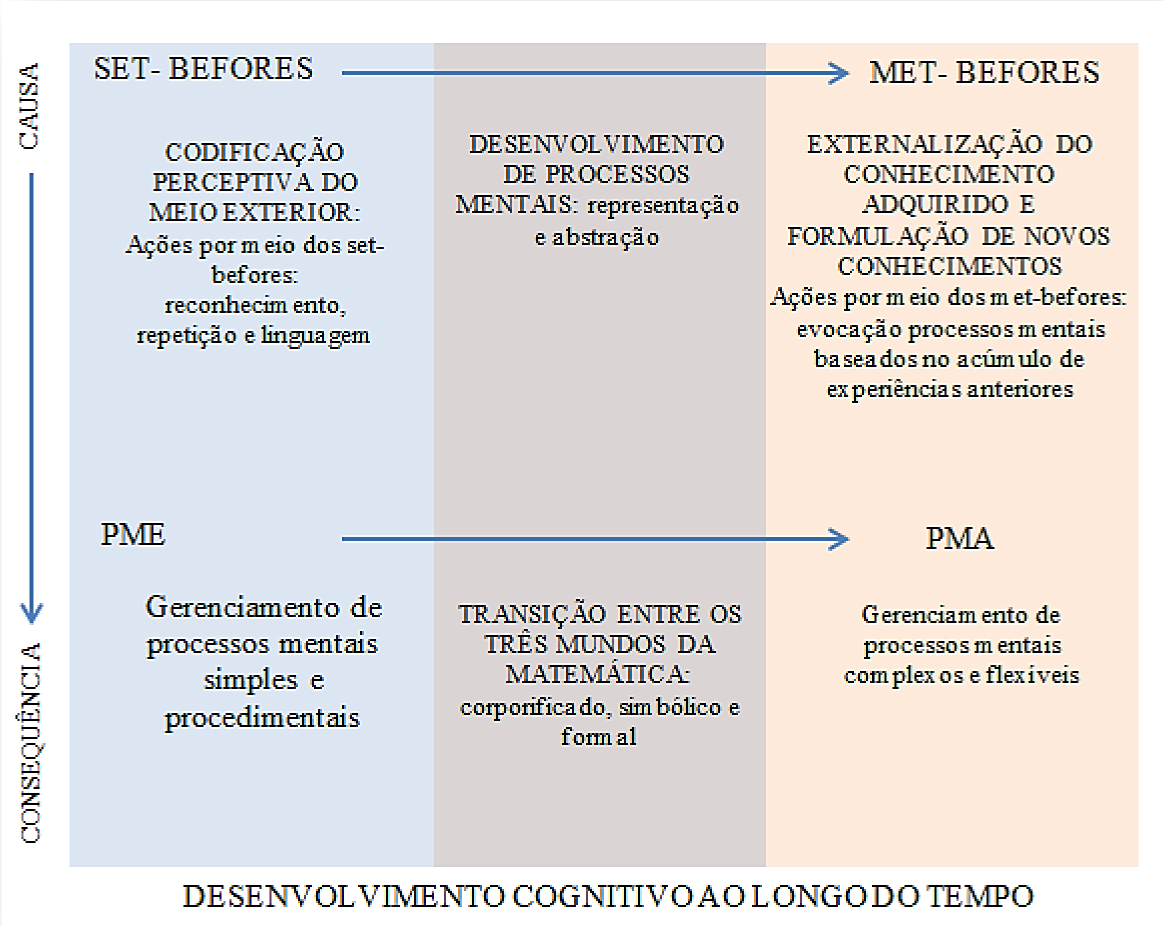
Quadro 6 – Síntese do referencial sobre o desenvolvimento cognitivo

REFERENCIAL TEÓRICO	ÊNFASE DO TRABALHO	ASPECTOS DO DESENVOLVIMENTO COGNITIVO
Skemp (2002)	Ensino da Matemática	• aprendizagem inteligente; • pensamento instrumental; • pensamento relacional.
Dreyfus (1991)	Pensamento Matemático Avançado	• processos mentais: representação e abstração; • processos de aprendizagem.
Tall (2007b, 2008)	Pensamento Matemático Avançado	• *set-befores* e *met-befores*; • três mundos da Matemática.

Fonte: Do próprio autor.

Ao buscar relações entre os autores, verificou-se que um ponto de convergência consiste em que o desenvolvimento cognitivo ocorre ao longo da vida e demanda de diversas experiências decorrentes desde o nascimento, nas quais há estruturas genéticas e pré-disposição para as primeiras aprendizagens, e que, a partir de experiências vivenciadas, vão construindo o pensamento matemático. Com base nesse quadro, busca-se inter-relacionar os referenciais teóricos por meio do diagrama a seguir, buscando uma convergência para o desenvolvimento do PME ao PMA.

Figura 5 – Desenvolvimento do pensamento matemático



Fonte: Do próprio autor.

Destaca-se que um dos pré-requisitos para que haja uma forma de pensamento matemático avançado é a flexibilidade entre os diversos processos mentais que ocorrem na mente do sujeito, e isso demanda aquisição de linguagem e a comunicação entre os sujeitos, o aprimoramento das relações intra e interpessoais, mediação da aprendizagem, formas de aprendizagens inteligentes nos diferentes estágios de desenvolvimento, formulação de pensamentos relacionais e memorização de conceitos, por meio de pensamentos instrumentais, apoiada nos conjuntos de *set-befores* e *met-befores* existentes. O quadro sobre o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado será utilizado, posteriormente, para estruturar as análises.

A seguir, apresentam-se os procedimentos metodológicos e a análise descritiva dos dados obtidos na prova em fases, aplicada no início da pesquisa.

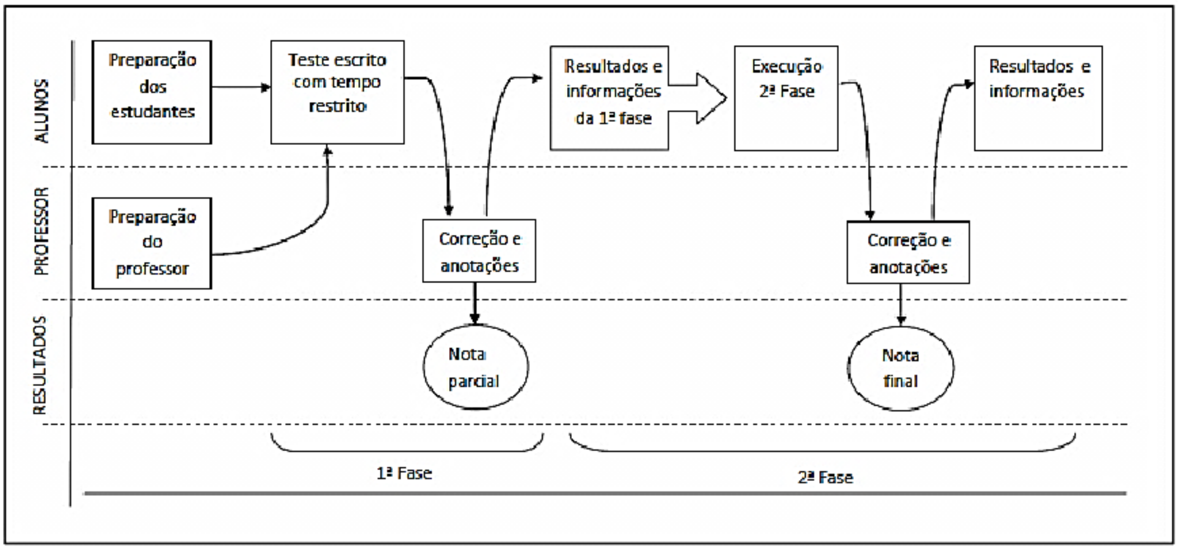
4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISE DESCRITIVA

Nos capítulos anteriores, quando foram abordadas as teorias de aprendizagens e o desenvolvimento do PMA, o foco estava no sujeito e na sua interação com o meio, promovendo a aprendizagem e a construção de processos mentais. Neste capítulo, realiza-se a explanação dos procedimentos metodológicos e apresenta-se uma análise descritiva, resultante da organização dos dados obtidos, na qual se expõe quadros quantitativos que justificam, por meio dos resultados, a seleção dos estudantes que fazem parte da análise que será apresentada no próximo capítulo.

Segundo De Lange (1999), uma tarefa matemática contempla várias informações, associadas a um conteúdo ou a conteúdos distintos. Para resolver uma tarefa, o estudante precisa decodificá-la e, a partir disso, realizar a resolução que, em geral, requer a interpretação da linguagem simbólica e formal correlacionadas com a linguagem natural. Nesse processo de resolução, ele pode recorrer a diferentes representações mentais para um mesmo enunciado de uma tarefa matemática. Ressalta-se que, em uma resolução, é preciso haver a conexão com um conjunto de tarefas desenvolvidas previamente e que se relacionam para, assim, realizar a solução do problema proposto na tarefa e promover a validação da resolução.

De Lange (1987) aponta que uma prova em duas fases possibilita ao estudante refletir sobre seu próprio trabalho, permitindo analisar os processos envolvidos em sua realização. Sobre esse tipo de prova, destaca-se o esquema que Mendes (2014) desenvolveu, fundamentado em De Lange (1987).

Figura 6 – Esquema para a prova em duas fases



Fonte: Mendes (2014, p. 44).

Segundo Mendes (2014), baseado em De Lange (1987), na primeira fase da prova, todos os alunos realizam-na simultaneamente, com um tempo determinado. O objetivo dessa etapa é revelar o que os alunos não sabem, devido ao contexto no qual eles desenvolvem as atividades de reprodução e de compreensão. Na segunda fase, que pode ser realizada a qualquer momento, inclusive em ambientes não escolares, desenvolve-se, novamente, a mesma prova, mas com ênfase no que o aluno sabe, sem um tempo estipulado e com o objetivo de interpretação, de conexão e de reflexão, ou seja, o aluno precisa passar por um processo reflexivo, ao final do processo de aplicação das duas fases.

Para analisar a mobilização de processos mentais e de indícios do Pensamento Matemático Avançado, adota-se como instrumento de coleta de dados uma proposta de tarefas realizada em fases, baseada em De Lange (1987, 1999). Para esse instrumento, optou-se por selecionar atividades abordadas, usualmente, na disciplina de Estruturas Algébricas, aplicadas em uma situação de aprendizagem.

De acordo com Ponte *et al*. (1997), o estudante aprende diante de uma situação de aprendizagem na qual a tarefa deve promover a curiosidade e o entusiasmo, além de reflexões, recorrendo aos conhecimentos prévios e às intuições dos estudantes sobre o assunto proposto. Nesse sentido, uma tarefa deve envolver uma situação de aprendizagem e recorrer a algum conteúdo matemático.

No caso específico da situação de aprendizagem, esta demanda de experiências anteriores vivenciadas pelo estudante, de seus significados da vida cotidiana ou do domínio da Matemática a que a tarefa se refere. Quanto ao conteúdo matemático, têm-se os aspectos matemáticos envolvidos, sejam eles derivados de fatos, de conceitos, de processos ou de ideias (PONTE *et al*., 1997).

Levou-se em consideração o exposto para a preparação da proposta de tarefas que foi aplicada aos participantes da pesquisa, em uma situação de aprendizagem inspirada na prova em fases que gerou a produção escrita para ser analisada nesta tese.

Foi considerado que, na disciplina Corpos e Extensões, na qual os sujeitos da pesquisa estavam regularmente matriculados, estava prevista uma breve revisão dos tópicos de Estruturas Algébricas. No intuito de promover uma situação de aprendizagem, desenvolveu-se a prova em fases, que foi constituída de duas partes:

- Parte I: foram elaboradas quatro questões direcionadas a traçar o perfil dos estudantes, a fim de conhecer algumas concepções deles, principalmente em relação à opção de cursar Matemática.
- Parte II: foram elaboradas treze tarefas envolvendo questões tipicamente trabalhadas na disciplina de Estruturas Algébricas, sendo este os registros escritos utilizados para analisar a mobilização de processos mentais e de indícios do Pensamento Matemático Avançado.

Estabelecida às partes mencionadas, foi produzido um material impresso que foi o instrumento de coleta de dados constituído das questões da parte I e II, que foi aplicado na primeira fase da proposta de tarefas. Apresenta-se a seguir as instruções dadas neste instrumento de coleta de dados, observa-se que a mesma folha impressa entregue na primeira fase, foi entregue na segunda fase, acrescidas de folhas complementares para alteração ou correção das tarefas, sendo os estudantes orientados para esse procedimento.

Quadro 7 – Instruções do instrumento de coleta de dados

1º) Esta prova será realizada em duas fases, a primeira, com tempo determinado de 1h45, sem consulta a materiais. Na segunda fase, o tempo será estipulado na próxima aplicação e não deverão ser alteradas as respostas da primeira fase,

somente complementadas[36] ou substituídas.

2º) Este instrumento avalia o processo de desenvolvimento das questões e não somente as respostas, desse modo, anote detalhadamente as resoluções.

3º) Teremos duas partes na prova, a parte I refere-se às perguntas que buscam analisar o perfil do(a) estudante e do grupo de alunos que participam desta prova, e a parte II contempla questões relacionadas ao conteúdo de Estruturas Algébricas. Nessa parte, você precisa justificar as soluções, utilizando notações e demonstrações formais em Matemática.

4º) Na parte II, assinalar o nível de dificuldade da questão e comentar as dificuldades referentes à forma de resolução da questão, ao conteúdo abordado e à linguagem materna ou matemática utilizada.

5º) As questões propostas na parte II foram adaptações de DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**, volume único, 4. ed., São Paulo: Atual, 2003.

Fonte: Do próprio autor.

No primeiro dia letivo de aula dos estudantes participantes da pesquisa, foi aplicada a primeira fase da proposta de tarefas, iniciou-se com a apresentação da pesquisadora pelo professor responsável da disciplina, aos estudantes, que explicou a natureza da pesquisa e o motivo de ter escolhido essa turma de graduandos da disciplina de Corpos e Extensões, justificando que, por eles já terem cursado a disciplina de Estruturas Algébricas, estarem no terceiro ano do curso de Matemática e possuírem uma vivencia dentro do contexto dessa disciplina, tinham sido convidados para participação da prova em fases. Os estudantes foram informados que a pesquisadora iria acompanhar as aulas por um período e que faria diário de observação das aulas. Os graduandos presentes aceitaram o convite de participar da pesquisa.

---

[36] Na segunda fase os estudantes receberam folhas anexas para complementar ou substitui as questões do instrumento de coleta de dados.

Após serem informados a respeito do desenvolvimento da pesquisa, com a devida autorização do professor responsável, aplicou-se a primeira fase da proposta de tarefas, antes que as revisões programadas pelo professor responsável, para o início da disciplina, ocorressem. Foi entregue aos estudantes a parte I da proposta em folhas impressas avulsas, com questões para analisar o perfil deles, e, conforme concluíam essa etapa, foi entregue a parte II em folhas impressas avulsas, com tarefas envolvendo tópicos de Estruturas Algébricas. Ao final, os estudantes que realizaram a proposta de tarefas do instrumento de coleta de dados, assinaram o termo de consentimento livre esclarecido autorizando a continuidade da pesquisa.

Nessa primeira fase, os estudantes desenvolveram a proposta de tarefas individualmente, sem troca de informações com os colegas, não houve a intervenção da pesquisadora e/ou do professor na interpretação dos enunciados, além disso, não foram esclarecidas dúvidas sobre a resolução das tarefas. Foi solicitado que os estudantes indicassem o nível de dificuldade da questão assinalando no final da página de cada questão a classificação fácil, médio ou difícil, para que, posteriormente, cada questão fosse analisada quanto a esses aspectos, também foi indicado um local específico no rodapé de cada página para anotar as dificuldades que emergiram no desenvolvimento de cada questão da parte II.

Posteriormente, realizaram-se observações em campo por um mês, acompanhando as aulas regulares duas vezes por semana, com uma carga horária de duas horas-aula por dia, somando um total de dezesseis horas-aula.

Durante as aulas observadas, nas duas primeiras semanas, teve-se predominantemente o professor da disciplina apresentando as proposições e os teoremas e realizando as provas e as demonstrações referentes aos conteúdos de Estruturas Algébricas. Durante esse processo, os estudantes eram estimulados a participar e ocorria uma aula dialogada entre professor e alunos. Os graduandos foram orientados a estudar o material de apoio fornecido pelo professor da disciplina e a complementar com a referência bibliográfica Domingues e Iezzi (2003) para acompanhar o desenvolvimento das aulas. Na terceira semana de aula, o professor da disciplina iniciou os estudos sobre a teoria de Corpos e Extensões, que era o foco da disciplina, desse modo, foi combinado que, na semana seguinte, a prova em fases seria retomada e seria realizada a segunda fase.

Concomitantemente às observações, a pesquisadora realizou uma pré-análise dos registros escritos e identificou as principais dificuldades apontadas pelos estudantes em um campo próprio da prova em fases. Antes de realizar qualquer intervenção no registro escrito dos estudantes, foram digitalizados todos os registros escritos e arquivados, posteriormente, foram feitas perguntas (que serão detalhadas no próximo capítulo de análises) por escrito no próprio instrumento de coleta de dados, para instigar os estudantes a refletirem sobre suas resoluções.

Houve a inspiração para a elaboração da proposta de prova em fases e para realizar uma pré-análise dos registros escritos em De Lange (1987). Com base nos estudos do autor, realizaram-se adaptações quanto ao processo de correção das tarefas, no qual optou-se por indicar questões para reflexões nas resoluções apresentadas para que, posteriormente, os estudantes discutissem e confrontassem as resoluções da primeira fase, individualmente ou em pequenos grupos, e modificassem ou mantivessem suas primeiras resoluções. Na primeira fase, ao realizar as tarefas, dentro das condições de uma prova com tempo determinado, sem consulta ou troca de informações, é esperado, de acordo com De Lange (1987), que o estudante apresente as resoluções de tarefas que ele sabe fazer, e deixe em branco ou com resoluções parciais aquilo que ele não sabe.

Após o período de revisão e a realização das atividades propostas pelo professor da disciplina, ações disjuntas do instrumento de pesquisa, mas relacionadas aos conteúdos abordados, foi aplicada a segunda fase da proposta de tarefas, ocorrida no último encontro de observação da pesquisadora. Os estudantes foram avisados com antecedência, para poderem levar os materiais de consulta, e não foi restringida a conversa em sala, de modo que eles acabaram tirando dúvidas entre os próprios colegas e puderam realizar a atividade individualmente ou em pequenos grupos, mas não houve intervenção do professor da disciplina ou da pesquisadora nas resoluções deles.

Os graduandos foram instruídos a não apagarem a primeira resolução, sendo fornecida uma folha em branco com cabeçalho para codificação dos estudantes, a fim de que fossem anexadas no instrumento de coleta de dados as tarefas modificadas, ou as que estavam em branco e foram resolvidas. Durante a realização das tarefas, percebeu-se que os graduandos associaram as demonstrações de proposições e teoremas dadas nas aulas do professor responsável pela disciplina com a resolução da proposta de tarefas.

A segunda fase da proposta de tarefas foi realizada em um período de quatro aulas, e, ao finalizarem essa proposta, houve o agradecimento pela participação dos estudantes durante a pesquisa. Nessa fase, de acordo com De Lange (1987), é esperado que os estudantes, após um período de estudo e com o material de apoio, mostrem aquilo que eles conseguem fazer para a resolução das mesmas tarefas propostas na primeira fase, momento em que eles podem complementar as primeiras resoluções, ou resolver as tarefas não iniciadas na primeira fase. Posteriormente, em outras aulas, o professor da disciplina, esclareceu as dúvidas dos estudantes que emergiram durante a prova em fases, mas dentro do contexto das aulas ministradas na disciplina de Corpos e Extensões.

Salienta-se que houve um aluno de matrícula tardia na disciplina, desse modo, participaram oito estudantes da pesquisa, mas apenas sete que realizaram ambas as fases e foram considerados aptos a integrar a pesquisa, o outro participante realizou apenas a primeira fase, em um período e em um horário alternativo, e não conseguiu fazer a segunda fase, sendo assim desconsiderada a sua participação.

Nesta tese, desenvolveu-se uma pesquisa de natureza qualitativa na perspectiva da Educação Matemática, baseada em aspectos apontados por Bogdan e Biklen (1994) e Lüdke e André (1986).

Nesse processo, que considera o ambiente natural para a obtenção de dados e o pesquisador como o principal instrumento, os estudantes cooperaram com a pesquisa em todo o período, seja nas aplicações do instrumento de coleta de dados, seja nas aulas de observação. Quanto ao processo de análise desses registros escritos, tem-se que a

> [...] análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão do que vai ser apresentado aos outros (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 205).

De acordo com os autores citados, a organização dos registros escritos é o primeiro passo para as análises. Por isso, optou-se em, primeiramente, realizar uma análise descritiva dos registros escritos e, posteriormente, fazer uma análise por estudante para evidenciar a mobilização dos processos mentais e a incidência de indícios do PMA.

Ressalta-se que há um interesse maior no processo de realização da proposta de tarefas do que nos resultados finais, sendo assim, foi analisado o processo de resolução de cada tarefa, e não somente o erro ou o acerto. Por meio dessa prova em fases, buscou-se identificar a mobilização de processos mentais e os indícios de PMA de cada sujeito participante da pesquisa.

No tratamento dos dados obtidos, organizaram-se os registros escritos e foram feitas tabulações para delinear as análises. A análise do perfil dos estudantes ocorreu por meio das quatro questões da parte I. Entende-se que o meio no qual o sujeito está inserido é relevante para compreender aspectos atitudinais envolvidos no processo de aprendizagem, assim, nessas questões, buscou-se os motivos que levaram os estudantes a cursar Matemática, os fatores que interferem na aprendizagem desses alunos e se eles tinham conhecimento sobre o foco da pesquisa desta tese.

Apresentou-se um quadro resumo das questões referentes a parte I que foram respondidas pelos estudantes. Para a organização dos dados, foi adotada uma codificação para cada sujeito da pesquisa. Para garantir o anonimato deles, os termos de E1 até E7 indicaram os sete estudantes que participaram de ambas as prova em fases. Quanto às questões dessa parte, foram organizadas como Q1, Q2, Q3 e Q4, e houve as seguintes situações: realizada (R); não realizada (NR).

Quadro 8 – Síntese das questões da parte I

	Q1	Q2	Q3	Q4
E1	R	R	R	NR
E2	R	R	R	R
E3	R	R	R	R
E4	R	R	R	R
E5	R	R	R	R
E6	R	R	R	R
E7	R	R	R	R

Fonte: Do próprio autor.

A seguir, apresentam-se as questões referente à parte I da prova em fases com transcrições das respostas, sintetizadas em um quadro por questão, dos aspectos apresentados pelos estudantes E1, E2, E5 e E6, que apresentaram respostas coerentes na parte II da prova em fases. Esses estudantes foram selecionados após a análise descritiva, onde verificou quais estudantes responderam as questões da parte I e II, os estudantes E3, E4 e E7 apresentaram um grande número de questões em branco, ou resoluções incompletas, deste modo foram desconsiderados nas análises dos registros escritos das tarefas de Estruturas Algébricas, na qual foram efetivadas as análises dessas questões de modo interpretativo-descritivo.

1. O que a Matemática representa para você?

Nessa questão, buscou-se identificar como o estudante se relaciona com a área da Matemática. Apresenta-se o quadro com as transcrições selecionadas.

Quadro 9 – Transcrição da questão 1 – prova em fases

ESTUDANTE	TRANSCRIÇÃO
E1	*Para mim a matemática é tudo, pois no nosso mundo tudo tem relação com ela.*
E2	*Tudo! Sem perceber a matemática está em tudo, tudo o que vemos ou fazemos. A matemática é uma ciência lógica, só existe o certo ou o errado, nada a mais.*
E5	*Representa o conhecimento onde podemos entender a importância de saber manusear números, como por exemplo, manusear nosso dinheiro da melhor forma possível.*
E6	*Uma forma de tentar explicar a natureza, uma maneira de estudar sem ter interferência de outras áreas, tempo; dependendo apenas do resultado dela própria.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Com base no quadro, pode-se perceber que os estudantes têm uma visão da Matemática como utilitarista aplicada em situações usuais do dia a dia, ou em outras ciências. Não se identificam, nas transcrições, a visão de que a Matemática é uma ciência historicamente construída e que, atualmente, forma um corpo de conhecimentos, entretanto os estudantes E2 e E6 destacam-na como uma ciência exata.

2. Por que você escolheu o curso de Matemática para cursar na graduação? Quais motivos interferiram em sua escolha?

Nessa questão, buscou-se identificar o que induziu o estudante a cursar Matemática. Apresenta-se o quadro com as transcrições selecionadas.

Quadro 10 – Transcrição da questão 2 – prova em fases

ESTUDANTE	TRANSCRIÇÃO
E1	*Sempre gostei de matemática.*
E2	*Matemática sempre foi a matéria que eu me dava bem, tinha mais facilidade em aprender, inicialmente pensava em ser professora mas agora vejo que a minha timidez e o medo em falar em público vão me atrapalhar.*
E5	*Porque sempre gostei desta área dentre todas as outras. Dentre todos os fatores, ter "passado" na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBEMEP(sic)) e pela situação financeira dos meus pais foram os fatores que mais interferiram na minha escolha.*
E6	*Pensava que era bom em matemática no ensino médio, achei que seria fácil por isso.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Pode-se perceber que os estudantes têm uma afinidade com a área da Matemática desde antes de ingressarem na graduação. Observa-se que o estudante E2 está em conflito se irá exercer a docência, posteriormente. No caso do estudante E5, tem-se um fator motivacional da participação na OBMEP que favoreceu seu empenho nessa área do conhecimento.

3. Que fatores interferem na sua aprendizagem? Possui hábitos de estudo? Comente.

Nessa questão, buscou-se identificar se o estudante possui conhecimento de seu processo de aprendizagem e se isso é aplicado aos estudos, a fim de atender às exigências pessoais para ter êxito no curso. Apresenta-se o quadro com as transcrições selecionadas.

Quadro 11 – Transcrição da questão 3 – prova em fases

ESTUDANTE	TRANSCRIÇÃO
E1	*O principal fator que interfere na minha aprendizagem é o professor. Não possuo hábitos de estudo.*
E2	*O que interfere no meu aprendizado é a falta de estudo após as aulas, ou de exercícios, pois a maneira de obter informações das matérias para mim, é através de exercícios. Não possui hábito de estudo.*
E5	*Horas de estudos é o fator que mais interfere; em segundo lugar o ambiente de estudo. Procuro estudar, em média, 3 horas por dia.*
E6	*Falta de estudo, falta de atenção, enrolar para estudar não possuir hábitos de estudo, preguiça.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisar essa questão, é possível observar que o estudante E1 apresenta indícios de que depende de ser conduzido pelo professor no processo de aprendizagem, devido ao comentário que ele faz. Já os estudantes E2 e E3 evidenciam um autoconhecimento da sua forma de aprendizagem, mas o estudante E2 apresenta indícios de que não desenvolveu a autonomia nos seus estudos, por afirmar que "não possui hábitos de estudos". Destaca-se que o fato de E1, E2 e E6 não terem hábitos de estudo é um indicador de que não estudam de forma autônoma. Com base em Skemp (2002), isso é uma característica de uma prática de aprendizagem por hábito na qual se desenvolve o pensamento instrumental.

4. O que você sabe sobre o pensamento matemático avançado? Possui uma opinião sobre esse tema? Comente.

Nessa questão, buscou-se identificar se o estudante conhece o tema central desta pesquisa, ou seja, o PMA. O principal motivo de realizar essa questão, consiste no fato de os alunos fazerem parte da graduação da instituição onde ocorreu a pesquisa e por poderem realizar, posteriormente, iniciação científica em grupos de pesquisa de pós-graduação da instituição, que trabalha com a temática. Deste modo, verificou-se se os estudantes já tinham tido contato com a temática dessa pesquisa. Apresenta-se o quadro com as transcrições selecionadas.

Quadro 12 – Transcrição da questão 4 – prova em fases

ESTUDANTE	TRANSCRIÇÃO
E1	Em branco.
E2	*Acho que é uma coisa muito difícil, difícil de entender, por tanto não sei praticamente nada sobre a matemática avançada.*
E5	*Sei muito pouco. No momento, não tenho nenhuma opinião sobre este tema por falta de conhecimento.*
E6	*Não muitas coisas, acho que não sei nada, não possuo opinião sobre esse tema.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação à questão quatro, observa-se que os estudantes desconhecem o tema da investigação desta pesquisa. Além de analisar as questões referentes ao perfil dos estudantes, realizou-se uma análise descritiva da parte II, referente às tarefas de estruturas algébricas que foram aplicadas em duas fases, conforme descrito anteriormente. Com base nisso, elaborou-se um quadro que sintetiza em qual fase cada estudante desenvolveu cada tarefa, bem como se houve modificação de uma fase para a seguinte, ou ainda, se o aluno não realizou a questão proposta.

O instrumento de coleta de dados foi preparado com treze tarefas, que podem ser verificadas no apêndice B, e foram indicadas como T1, T2, até T13. Para diferenciar como foram as resoluções das tarefas, a organização delas se deu da seguinte forma: realizada (R); não realizada (NR); não modificada (NM); modificada (MD). A seguir, apresenta-se o quadro síntese.

Quadro 13 – Síntese da realização da proposta de tarefas

		T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13
E1	FASE I	R	R	NR	R	NR	R	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR
	FASE II	NM	MD	R	MD	R	MD	R	R	R	NR	R	R	R
E2	FASE I	R	R	R	R	NR	R	R	R	NR	R	NR	NR	NR
	FASE II	NM	MD	MD	NM	R	MD	NM	NM	R	MD	R	NR	R
E3	FASE I	R	NR	NR	R	NR	NR	R	NR	NR	NR	NR	NR	NR
	FASE II	MD	R	NR	MD	R	R	MD	NR	NR	NR	R	NR	NR
E4	FASE I	R	NR	NR	NR	NR	R	R	NR	NR	NR	NR	NR	NR
	FASE II	MD	R	NR	NR	NR	MD	MD	NR	NR	NR	NR	NR	R
E5	FASE I	R	R	R	NR	NR	NR	R	NR	NR	NR	NR	NR	NR
	FASE II	MD	MD	MD	R	NR	R	NM	R	NR	NR	R	R	R
E6	FASE I	R	R	R	R	NR	R	R	NR	NR	R	NR	NR	NR
	FASE II	NM	NM	NM	MD	NR	MD	MD	R	R	NM	R	R	R
E7	FASE I	R	NR	NR	NR	NR	R	R	NR	NR	NR	NR	NR	NR
	FASE II	MD	NR	NR	NR	NR	MD	MD	R	R	NR	NR	NR	NR

Fonte: Do próprio autor.

Por meio da sintetização dos dados do quadro anterior, foi analisada a quantidade de tarefas respondidas por estudante em cada fase, além de destacar se houve modificação da primeira para a segunda fase, ou ainda, se foram deixadas tarefas sem ser realizadas. Com base nisso, elaborou-se o próximo quadro.

Quadro 14 – Quantidade de tarefas respondidas por estudante

	REALIZADA NA FASE 1	MODIFICADA NA FASE 2	REALIZADA NA FASE 2	NÃO REALIZADA
E1	4	2	8	1
E2	8	4	4	1
E3	3	3	4	6
E4	3	3	2	8
E5	4	3	6	3
E6	7	3	5	1
E7	3	3	2	8

Fonte: Do próprio autor.

Em relação às tarefas realizadas, em cada item proposto no rodapé da página, havia uma solicitação para o estudante, após executar as tarefas, classificar como foi, se considerou fácil, médio ou difícil, assinalando apenas um item. Dentre os que responderam, verificou-se a maior frequência apresentada, em cada registro escrito, estabelecendo uma relação de ordem entre elas e, em caso de empate, considerou-se a classe de ordem inferior, com uma ressalva no caso da tarefa sete, em que se teve duas indicações para cada um dos três itens, diante disso, foi escolhido o termo médio. Segue o quadro síntese dessa classificação.

Quadro 15 – Classificação das tarefas pelos estudantes

CLASSE PREDOMINANTE	TAREFAS
Fácil	T1; T4;
Médio	T2; T3; T6; T7;
Difícil	T5; T8; T9; T10; T11; T12; T13.

Fonte: Do próprio autor.

Além disso, no rodapé de cada tarefa, havia outra solicitação: “Comente se teve dificuldade quanto à forma, à linguagem ou ao conteúdo.”. Verificaram-se as respostas dadas pelos alunos e foi elaborado um texto síntese para cada tarefa, o resultado desse processo é apresentado no quadro a seguir.

Quadro 16 – Dificuldades emergentes por tarefa indicadas pelos estudantes.

TAREFA	DIFICULDADES EMERGENTES
T1	• Lembrar-se do conteúdo quanto às definições e às propriedades de grupo abeliano.
T2	• Lembrar-se do conteúdo quanto às definições de grupo e de subgrupo.
T3	• Lembrar-se do conteúdo quanto à definição de ideal.
T4	• Lembrar-se do conteúdo quanto às definições e às propriedades de domínio de integridade.
T5	• Lembrar-se do conteúdo, das definições de maximal, ou desconhecer o conteúdo.
T6	• Lembrar-se do conteúdo, das definições e das propriedades de anel com unidade.

T7	• Lembrar-se do conteúdo, especificamente como ficaria a soma dos polinômios em $\mathbb{Z}_5[x]$, ou desconhecer o conteúdo.
T8	• Lembrar-se do conteúdo, das definições e das propriedades de anel, especificamente o que significa A/I.
T9	• Compreender o que é A[x], dificuldade com a linguagem matemática.
T10	• Compreender o que é Z/3Z, dificuldade com a linguagem matemática.
T11	• Compreender o que é $\mathbb{Z}_2$[X], dificuldade com a linguagem matemática e com o termo específico irredutível.
T12	• Compreender o critério de irredutibilidade de polinômios.
T13	• Compreender o critério de irredutibilidade de polinômios.

Fonte: Do próprio autor.

Em relação às dificuldades emergentes na análise descritiva de cada questão, detectou-se que os estudantes conheciam os conteúdos abordados nas questões da categoria fácil e médio, indicadas por T1, T2, T3, T4, T6 e T7, entretanto, tinham dificuldades em recordar as definições de grupos, anéis, anéis ideais, anéis quocientes e anéis sobre polinômios. Nas questões classificadas como difícil, indicadas por T5, T8, T9, T10, T11, T12 e T13, identificou-se que, além das dificuldades com o conteúdo, há o desconhecimento das notações empregadas, evidenciando dificuldades com a linguagem matemática utilizada. A partir dessa análise por questão, as classificadas como difícil apresentaram resultados parciais, e parte delas não foram respondidas por nenhum estudante. Verificaram-se indícios de pensamento matemático no mundo corporificado nas questões classificadas como difíceis, de acordo com Tall (2008), com isso, os registros escritos dessas questões categorizadas como difíceis foram desconsiderados para a análise por estudante.

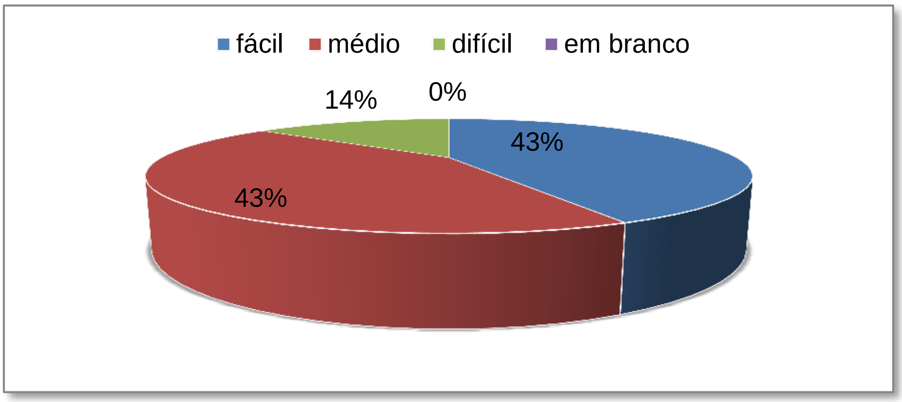
Em seguida, apresenta-se a análise descritiva das tarefas T1, T2, T3, T4, T6 e T7 da parte II da prova em fases. Para tanto, identificou-se o que é necessário para que essas tarefas sejam desenvolvidas, apontando, quantitativamente, se elas foram realizadas na primeira ou na segunda fase, e se foram modificadas ou não realizadas. Além disso, traz-se uma classificação da tarefa, de acordo com a indicação do estudante como: fácil, médio ou difícil. No apêndice C, foram incluídos tópicos de Estruturas Algébricas considerados relevantes na elaboração do instrumento de coleta de dados, composto por definições, proposições, entre outros, que auxiliam nas demonstrações das tarefas propostas.

O livro de Álgebra Moderna de Domingues e Iezzi (2003) foi utilizado como suporte teórico, entretanto, foram realizadas adequações em notações e na linguagem para esta tese. A escolha desse livro deu-se pelo fato de ser ele o principal referencial adotado pelo professor da disciplina cursada pelos sujeitos participantes da pesquisa, além de pertencer à bibliografia básica das disciplinas de Álgebra e Corpos e Extensões. No apêndice C, apresenta-se um exemplo de resolução, elaborado pelo próprio autor, como parâmetro para a realização das análises individuais dos estudantes.

1. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais com a operação de adição usual e suas propriedades. Considere a operação * sobre $\mathbb{R}$ dada por $x * y = x + y - 3$, $\forall$ $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ com a operação * é grupo abeliano?

Nessa questão, o objetivo é verificar se o estudante conhece as propriedades da operação * indicada e se ele prova, por meio das propriedades de grupo abeliano, associativa, elemento neutro, elemento inverso e comutativa, que um conjunto munido dessa operação satisfaz as condições de grupo abeliano. A tarefa foi desenvolvida por todos os estudantes, na primeira fase, sendo modificada na segunda fase por E3, E4, E5 e E7. Do total de sete estudantes, E2, E5 e E6 classificaram como fácil, E1, E3, e E4 classificaram como médio e E7 classificaram como difícil.

Figura 7– Classificação da tarefa 1 pelos estudantes

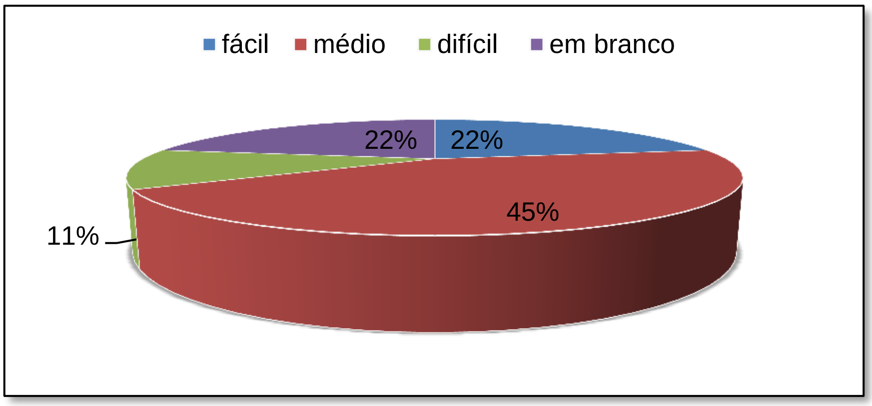


Fonte: Do próprio autor.

2. Sejam H_1 e H_2 subgrupos de um grupo G. $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G?

Nessa questão, o objetivo é investigar se o estudante conhece a definição de grupo e subgrupo, além de compreender essa relação com a interseção dos conjuntos dados, por meio de uma demonstração formal. A tarefa foi desenvolvida pelos estudantes E1, E2, E5 e E6 na primeira fase, sendo modificada por E1, E2 e E5 na segunda fase. Nessa fase, os estudantes E3 e E4 realizaram a tarefa, e o estudante E7 não realizou em nenhuma das fases. Um total de sete estudantes participou dessa etapa, dos quais E1, E2, E4 e E5 classificaram como médio, E3 classificou como difícil e E6 e E7 deixaram em branco.

Figura 8 – Classificação da tarefa 2 pelos estudantes

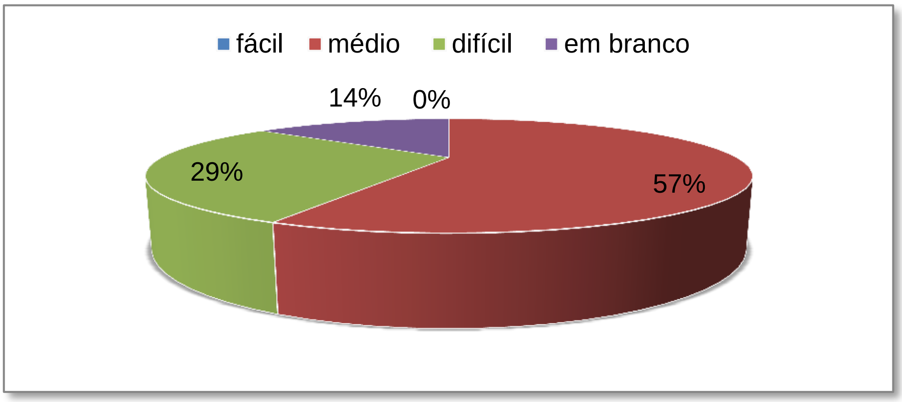


Fonte: Do próprio autor.

3. Sejam I e J ideais de um anel A. $I + J = \{x + y : x \in I \ e \ y \in J\}$ é um ideal de A?

Nessa questão, o objetivo é reconhecer se o estudante conhece a definição de ideais e compreende que as propriedades de anel podem ser aplicadas na operação de adição com ideais em um processo de demonstração formal. A tarefa foi desenvolvida pelos estudantes E2, E5 e E6 na primeira fase, sendo a tarefa modificada por E2 e E5, na segunda fase. Nessa fase, o estudante E1 realizou a tarefa e os estudantes E3, E4 e E7 não realizaram em nenhuma das fases. De um total de sete estudantes participantes, E1, E2, E5 e E6 classificaram como médio, E3 e E4 classificação como difícil e E7 deixou em branco.

Figura 9 – Classificação da tarefa 3 pelos estudantes

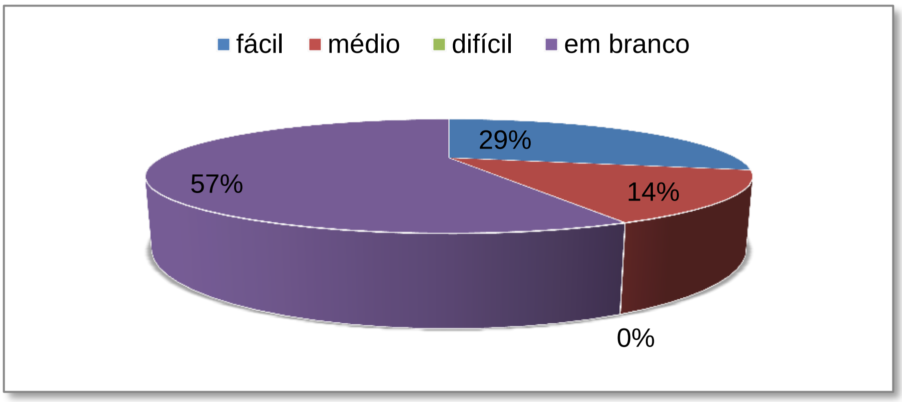


Fonte: Do próprio autor.

4. Seja A um domínio de integridade. Prove que se $\alpha \in$ A e $\alpha \neq 0$, então a função $\varphi_\alpha : A \to A$, dada por $\varphi_\alpha(x) = \alpha x$ é injetora.

Nessa questão, o objetivo é investigar se o estudante aplica a definição de domínio de integridade na função, por meio de uma demonstração de que a função dada é injetora. Dessa forma, para provar o resultado, é necessário conhecer os conceitos e definições sobre o que é uma função. A tarefa foi desenvolvida pelos estudantes E1, E2, E3 e E6, na primeira fase, sendo a tarefa modificada por E1, E3 e E6, na segunda fase. Nessa fase, o estudante E5 realizou a tarefa, e os estudantes E4 e E7 não realizaram em nenhuma das fases. Teve-se um total de sete estudantes participantes, dos quais E1 e E2 classificaram como fácil, E3 classificou como médio, E4, E5, E6 e E7 deixaram em branco.

Figura 10 – Classificação da tarefa 4 pelos estudantes

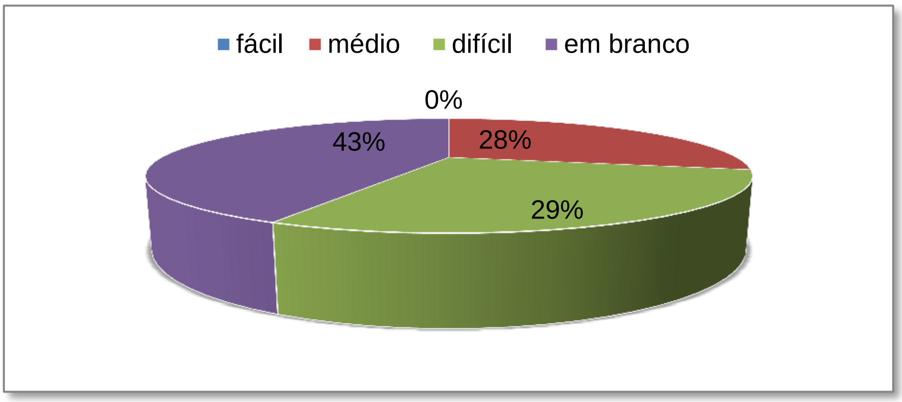


Fonte: Do próprio autor.

6. Dê um exemplo de cada tipo dos seguintes anéis: Anel comutativo com unidade, Anel não comutativo com unidade, Anel sem unidade, Anel de integridade que não seja corpo, Anel com divisores de zero, Corpo.

Nessa questão, o objetivo é verificar se os estudantes diferenciam os tipos de anéis baseados nas propriedades que são satisfeitas em cada exemplo. A tarefa foi desenvolvida pelos estudantes E1, E2, E4 e E6, na primeira fase, sendo a tarefa modificada por E1, E2, E4 e E6, na segunda fase. Nessa fase, os estudantes E3 e E5 realizaram a tarefa, e o estudante E7 não realizou em nenhuma das fases. De um total de sete estudantes, E1 e E4 classificaram como médio, E2 e E3 classificaram como difícil e E5, E6, e E7 deixaram em branco.

Figura 11 – Classificação da tarefa 6 pelos estudantes

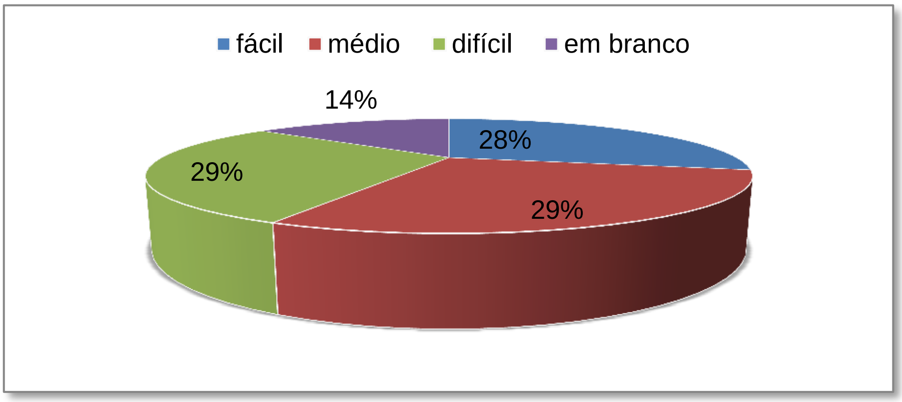


Fonte: Do próprio autor.

7. Encontre a soma e o produto dos seguintes polinômios: $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ e $g(x) = 3x^4 + 2x + 4$ em $\mathbb{Z}_5[x]$. Calcule o grau de $f + g$ e o grau de $f.g$.

Nessa questão, o objetivo é averiguar se os estudantes aplicam as operações de adição e de multiplicação, conforme o especificado no enunciado, em que o anel de polinômio é adotado no $Z_5[x]$, ou seja, os coeficientes são números inteiros pertencentes às classes de restos {0,1,2,3,4}. A tarefa foi desenvolvida pelos estudantes E2, E3, E4, E5, E6 e E7, na primeira fase, sendo a tarefa modificada por E3, E4, E6 e E7, na segunda fase. Nessa fase, o estudante E1 realizou a tarefa, sendo uma questão desenvolvida por todos os estudantes no decorrer de ambas as fases. Teve-se a participação de sete estudantes, dos quais E2 e E7 classificaram como fácil, E4 e E5 classificaram como médio, E1 e E3 classificaram como difícil e E6 deixou em branco.

Figura 12 – Classificação da tarefa 7 pelos estudantes



Fonte: Do próprio autor.

Por meio da análise descritiva das tarefas, foi possível organizar os registros escritos dos estudantes e, a partir disso, selecionar os dados que possibilitam analisar a mobilização de processos mentais e indícios do PMA. Na análise descritiva, detectou-se que os estudantes E3, E4 e E7 não realizaram nenhuma tarefa de modo coerente e satisfatório, com as respostas esperadas, sendo desconsiderados para a análise por estudante. Os demais estudantes, indicados por E1, E2, E5 e E6, realizaram as tarefas propostas em ambas as fases, modificando ou complementando se necessário, deixando-as em branco esporadicamente. Por essa razão, esses foram considerados para a análise por estudante, dados que serão apresentados no próximo capítulo.

5. ANÁLISES DAS TAREFAS DOS ESTUDANTES

Nesse momento da pesquisa, serão apresentadas as análises das produções escritas, que denominamos de tarefas, realizadas pelos estudantes que são os sujeitos dessa pesquisa. Optou-se por essa forma de organização dos dados para identificar a mobilização de processos mentais para o PME e para o PMA nas tarefas da prova em fases inspirada no referencial de De Lange (1987). Foram selecionadas, a partir da análise descritiva, as tarefas T1, T2, T3, T4, T6 e T7, classificadas como tarefas fáceis ou medianas pelos estudantes e que apresentam dados suficientes para análise. Dentre os estudantes que resolveram a maior parte das tarefas estão os estudantes E1, E2, E5 e E7, realiza-se uma analise individual das tarefas desenvolvidas por estes estudantes. A partir disso, apresentam-se os resultados baseados no referencial teórico de Skemp (2002) identificando as formas de pensamento instrumental e pensamento relacional, Dreyfus (1991) recorrendo principalmente ao quadro 4 sobre a caracterização de processos mentais envolvidos no PMA e Tall (2007b, 2008, 2011), baseando em esquemas expostos na figura 2, sobre o desenvolvimento cognitivo e os três mundos da matemática, figura 3, sobre o espectro da compreensão do simbolismo, que verifica o progresso da compreensão por meio de um espectro de resultados entre o estágio inicial como procedimental e o estágio final como flexível, figura 4, com um espectro da maturação de estruturas de prova, que no estágio inicial temos o reconhecimentos perceptivo, avançando posteriormente para representação simbólica, definição e dedução, equivalência, conceitos cristalinos e estruturas de conhecimento dedutivo. Esses referenciais foram sintetizados na figura 5 na qual utilizamos como base nas análises para identificar a mobilização do PME para o PMA nas tarefas realizadas.

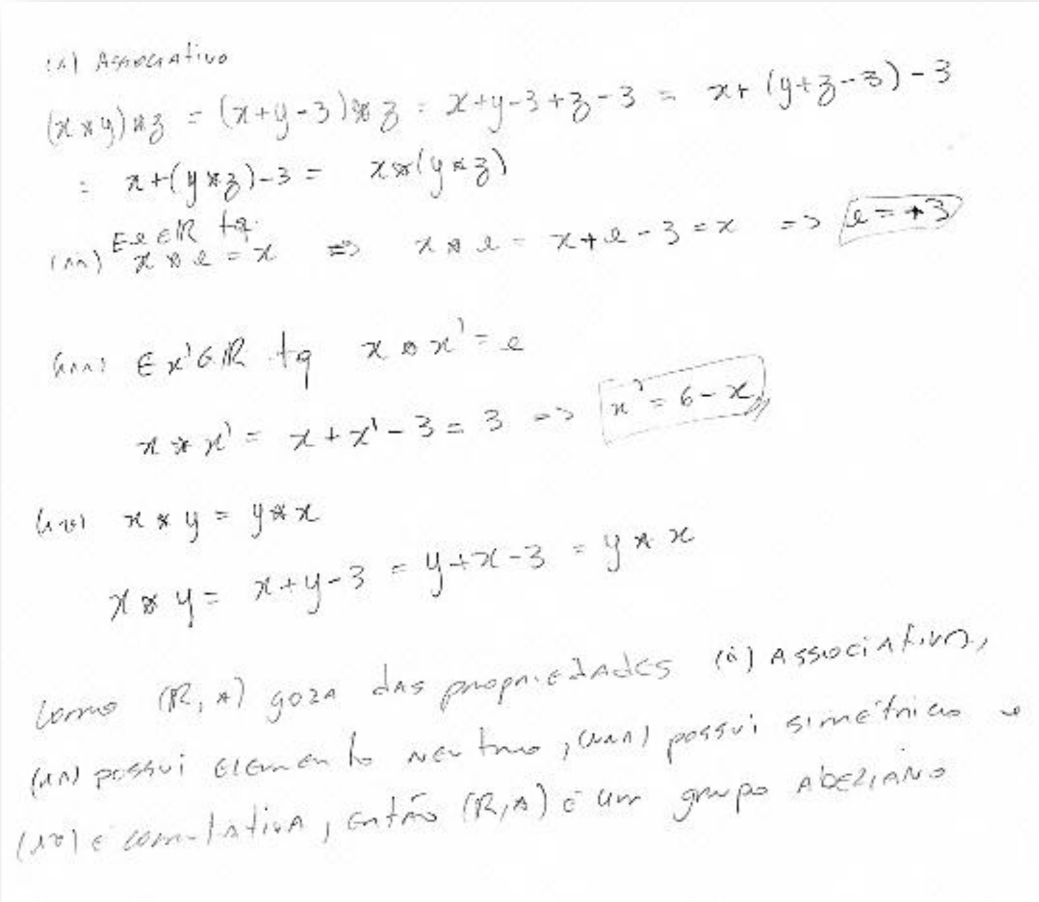
5.1 Análises das tarefas do estudante E1

A seguir, apresenta-se as análises de cada questão quanto ao desenvolvimento das tarefas na prova em fases.

1. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais com a operação de adição usual e suas propriedades. Considere a operação * sobre $\mathbb{R}$ dada por $x * y = x + y - 3$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ com a operação * é grupo abeliano?

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 13 **– Tarefa 1 do estudante E1 (primeira fase)**


(i) Associativo

$(x*y)*z = (x+y-3)*z = x+y-3+z-3 = x+(y+z-3)-3$

$= x+(y*z)-3 = x*(y*z)$

(ii) Ǝ $e \in \mathbb{R}$ tq $x*e = x$ $\Rightarrow$ $x*e = x+e-3 = x$ $\Rightarrow$ $\boxed{e=+3}$

(iii) Ǝ $x' \in \mathbb{R}$ tq $x*x' = e$

$x*x' = x+x'-3 = 3$ $\Rightarrow$ $\boxed{x' = 6-x}$

(iv) $x*y = y*x$

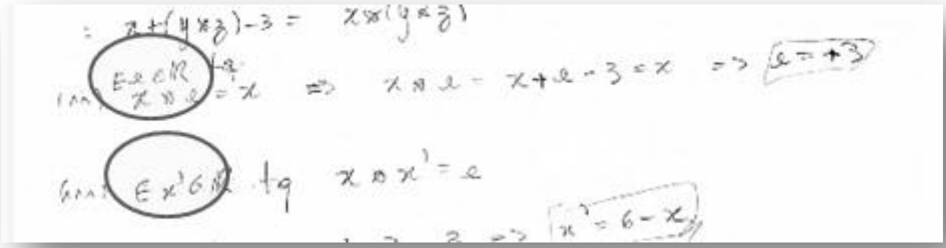
$x*y = x+y-3 = y+x-3 = y*x$

Como $(\mathbb{R},*)$ goza das propriedades (i) associativo, (ii) possui elemento neutro, (iii) possui simétrico e (iv) é comutativa, então $(\mathbb{R},*)$ é um grupo abeliano

Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução da questão, o estudante apresentou as demonstrações parciais das propriedades relativas ao grupo abeliano, entretanto, não foram concluídas as provas, das propriedades da existência do elemento neutro e que todo elemento admite o elemento simétrico. O estudante realizou uma manipulação simbólica, sem a verificação da definição de ambas as propriedades pela direita e pela esquerda, característica de um pensamento instrumental de acordo com Skemp (2002). É possível observar que, nas demonstrações, o estudante utiliza o “símbolo do existe” de forma equivocada, de forma espelhada. Observe o destaque.

Figura 14 – Tarefa 1 do estudante E1 (primeira fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com Dreyfus (1991), foram mobilizados processos mentais envolvidos na representação como, visualizar, reconhecer símbolos, definir, manipular símbolos, que são identificados quando o estudante elenca as quatro propriedades de grupo abeliano, o que indica indícios de PME. De acordo com Tall (2008), considerando o espectro da compreensão do simbolismo, o estudante mostrou uma solução passo a passo de forma procedimental, mas os processos mentais não foram gerenciados para chegar a uma prova formal por meio de uma sequência lógica dedutiva, que é um processo mental característico da abstração.

O estudante resolveu a questão na primeira fase e não modificou a sua resolução na segunda fase. De acordo com De Langue (1987), o aluno, ao realizar apenas a primeira fase, mostra o que sabe e deixa de fazer o que não sabe, assim, entende-se que o estudante desconhece como seria a demonstração formal da proposição, e, mesmo tendo a oportunidade de modificá-la, não interpretou que havia falta de argumentos consistentes, indicando estar em um processo de transição do PME para o PMA, de acordo com Tall (2008), e estar construindo a sua compreensão do conceito, na qual realiza a tarefa passo a passo, reconhecendo a proposição como um problema de rotina em que ainda precisa desenvolver a sofisticação dos processos mentais mobilizados para atingir o PMA com processos mentais flexíveis.

Verificou-se na resolução que o estudante compreende a necessidade de demonstrar, conhece a definição de grupo abeliano ao elencar as quatro propriedades a serem demonstradas, mostra conhecer alguns símbolos utilizados nas estruturas algébricas, mas não apresenta uma prova formal, pois de acordo com

Tall (2011), ele está nos estágios iniciais do espectro da maturação de estruturas de prova, na qual está no estágio de definição e dedução, mas não apresenta as estruturas de conhecimento dedutivo. De acordo com Tall (2007b, 2008), o estudante transita entre os mundos corporificado e simbólico, mas não tem um pensamento flexível para organizar sua enunciação provando formalmente a proposição apresentada na tarefa. Identificou-se características, com base em Tall (2008), do mundo corporificado devido ao fato de conhecer os elementos pertinentes à demonstração e do mundo simbólico pelo fato de manipular corretamente os procedimentos algébricos envolvidos.

2. Sejam H_1 e H_2 subgrupos de um grupo G. $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G?

O estudante iniciou a resolução da questão na fase I, de acordo com o seguinte registro escrito.

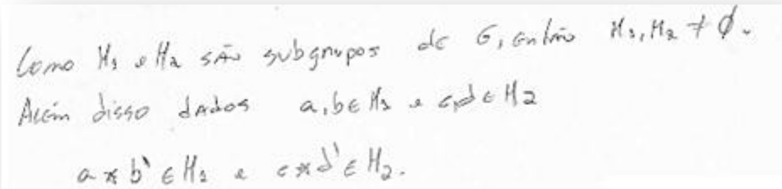
Figura 15 – Tarefa 2 do estudante E1 (primeira fase)

Como H_1 e H_2 são subgrupos de G, então $H_1, H_2 \neq \emptyset$.
Além disso dados $a, b \in H_1$ e $c, d \in H_2$
$a * b' \in H_1$ e $c * d' \in H_2$.
Sejam $x, y \in H_1 \cap H_2$, devemos provar que $x * y' \in H_1 \cap H_2$.
Note que $x, y \in H_1$ e $x, y \in H_2$, deste modo como
H_1 e H_2 são subgrupos de G,
$x * y' \in H_1$ e $x * y' \in H_2$
Logo $x * y' \in H_1 \cap H_2$.
Como $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, pois H_1 e H_2 são subgrupos de G,
então o elemento neutro de $G \in H_1 \cap H_2$, e também
$x * y' \in H_1 \cap H_2$ temos que $H_1 \cap H_2$ é subgrupo de G.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa resolução, o estudante entendeu que é preciso demonstrar uma proposição envolvendo um subgrupo, mas não demonstra as propriedades suficientes para garantir que se tem um subgrupo. Começa elencando que o fato de H_1 e H_2 serem subgrupos que não compreendem um conjunto vazio, não sendo necessário na demonstração desse resultado. Observe a seguir o destaque.

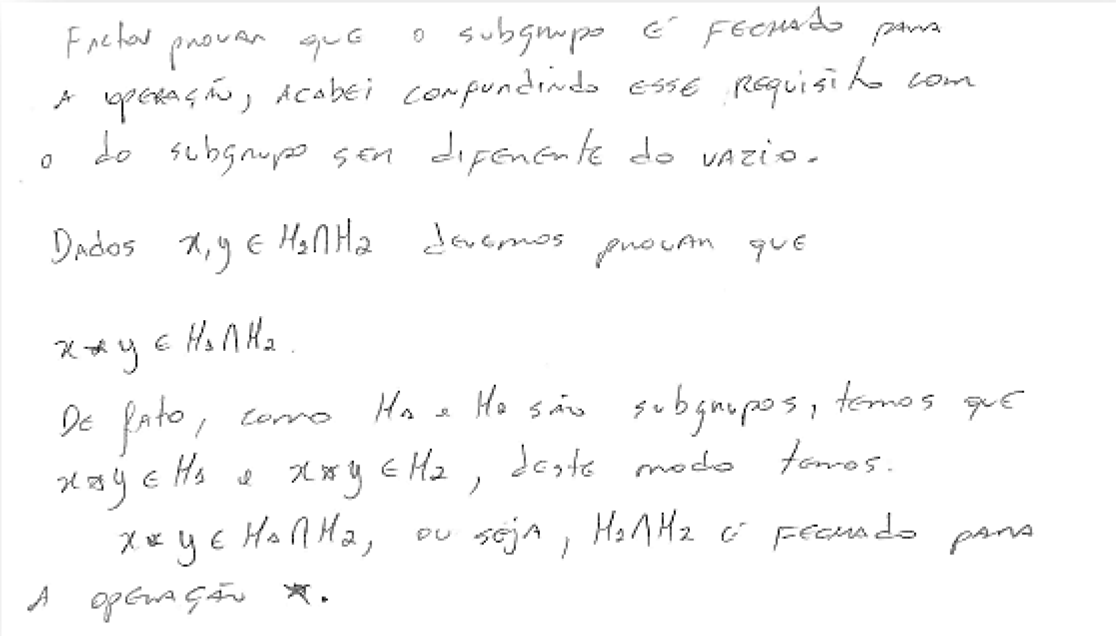
Figura 16 – Tarefa 2 do estudante E1 (primeira fase)


Como H_1 e H_2 são subgrupos de G, então $H_1, H_2 \neq \emptyset$.
Além disso dados $a, b \in H_1$ e $c, d \in H_2$
$a * b' \in H_1$ e $c * d' \in H_2$.

Fonte: Dados da pesquisa.

A resolução, na sequência, mostra que todo elemento admite o elemento simétrico, sem uma sequência lógica dedutiva que prove o resultado e, somente depois disso, expõe a existência do elemento neutro, que precisava anteceder a prova de que todo elemento admite o elemento simétrico. O estudante foi questionado: “Foram satisfeitas todas as condições para $H_1 \cap H_2$ ser um subgrupo? Justifique.”. Na segunda fase, apresentou o seguinte complemento.

Figura 17 – Tarefa 2 do estudante E1 (segunda fase)


Faltou provar que o subgrupo é fechado para a operação, acabei confundindo esse requisito com o do subgrupo ser diferente do vazio.
Dados $x, y \in H_1 \cap H_2$ devemos provar que
$x * y \in H_1 \cap H_2$.
De fato, como H_1 e H_2 são subgrupos, temos que $x * y \in H_1$ e $x * y \in H_2$, deste modo temos.
$x * y \in H_1 \cap H_2$, ou seja, $H_1 \cap H_2$ é fechado para a operação $*$.

Fonte: Dados da pesquisa.

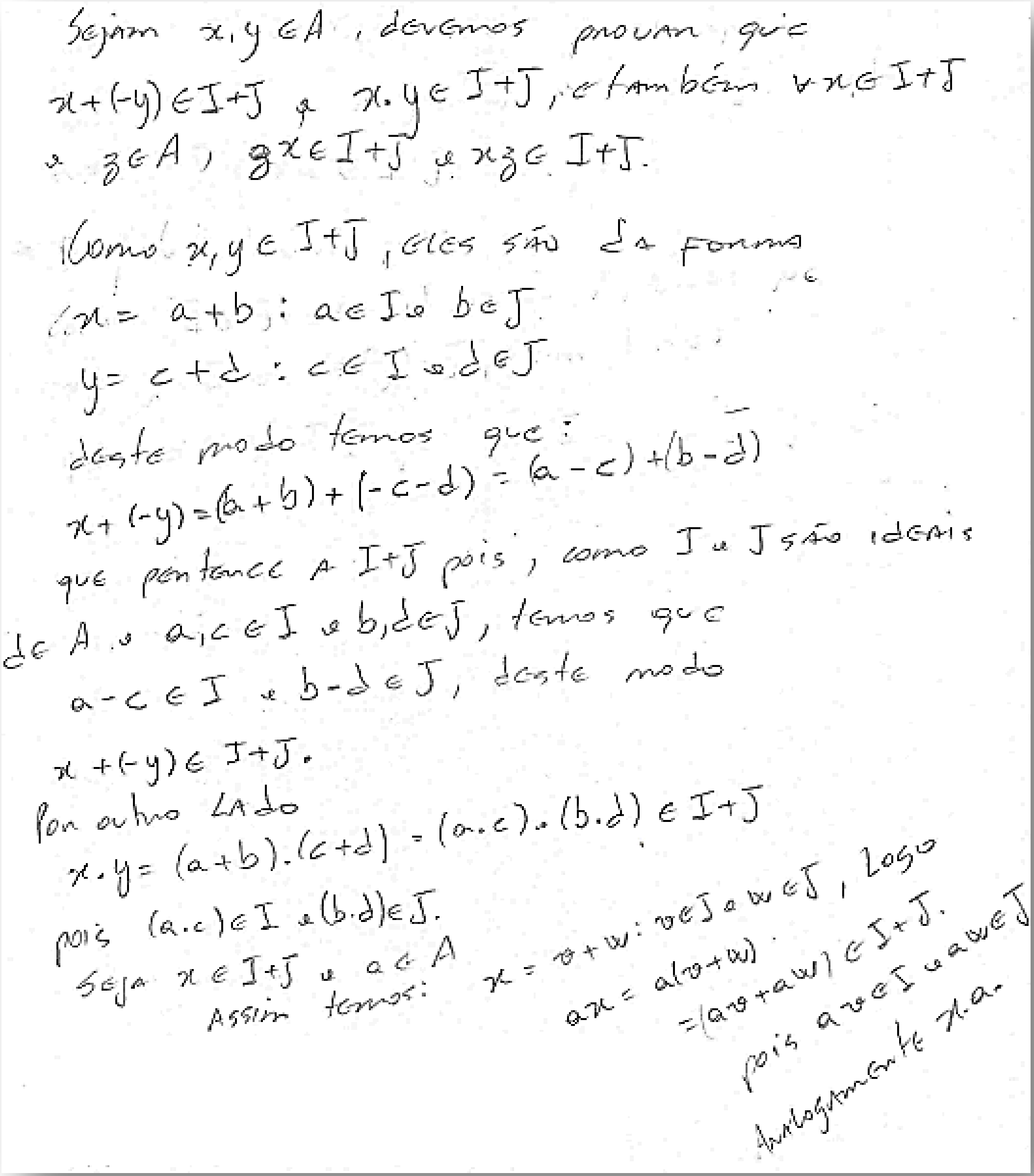
Considerando as características da segunda fase, o estudante indica um processo reflexivo, no qual compreende que a demonstração anterior estava incompleta, decorrente da construção de *met-befores*, com base em Tall (2007b, 2008), no período entre uma aplicação e outra da prova em fases, mas não percebe que a sequência lógica dedutiva não estava correta. Esse fato indica uma forma de pensamento instrumental, de acordo com Skemp (2002), no qual o estudante mostra uma sequência de procedimentos sem estabelecer relações entre eles.

De acordo com Dreyfus (1991), foram mobilizados processos mentais como a visualização, a conjectura de ideias, devido à reflexão apresentada, o reconhecimento e a manipulação de símbolos, a compreensão de quais propriedades devem ser provadas para se obter um subgrupo, considerando ambas as fases, e iniciou-se um processo de formalização da demonstração matemática. Dessa forma, é possível verificar indícios de um processo de transição do PME para o PMA. Com base em Tall (2007b, 2008), o estudante transita entre os mundos corporificados e simbólicos, mas não apresenta destreza no processo de prova, apresentando uma solução passo a passo de um problema de rotina, caracterizando uma resolução procedimental da tarefa, nos processos mentais mobilizados, evidenciando esquemas de definição e de dedução dos conceitos relacionados às demonstrações matemáticas, com base em Tall (2007b, 2008).

3. Sejam I e J ideais de um anel A. I+J = $\{x + y : x \in I \; e \; y \; \in J\}$ é um ideal de A?

O estudante não desenvolveu a tarefa na primeira fase, afirmou que teve dificuldade com o conteúdo. De acordo com De Lange (1987), é possível que o estudante não soubesse os conceitos e as formas de demonstração no momento de realização da primeira fase, realizando a resolução na segunda fase, com consulta e baseado nos estudos prévios desenvolvidos. De acordo com Tall (2007b, 2008), no período entre as fases, com os estudos promovidos nas aulas da disciplina de Corpos e Extensões, é esperado que o estudante tenha mobilizado processos mentais que promova a construção de *met-befores* por meio de experiências que desenvolvem o pensamento matemático, formando conexões no cérebro que afetam o modo como o estudante lida com a proposta de tarefas. Na segunda fase, apresentou a seguinte resolução.

Figura 18 – Tarefa 3 do estudante E1 (segunda fase)



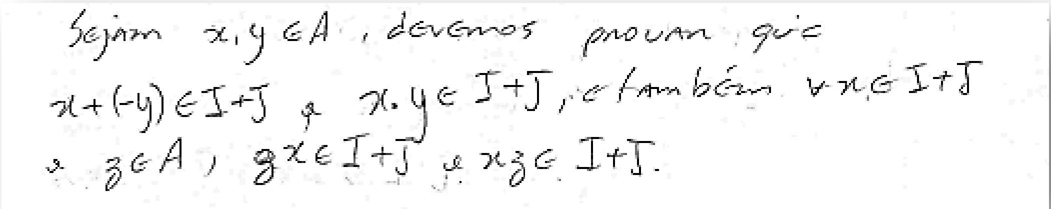
Sejam $x, y \in A$, devemos provar que $x+(-y) \in I+J$ e $x.y \in I+J$, e também $\forall x \in I+J$ e $z \in A$, $zx \in I+J$ e $xz \in I+J$.

Como $x, y \in I+J$, eles são da forma $x = a+b$: $a \in I$ e $b \in J$
$y = c+d$: $c \in I$ e $d \in J$
deste modo temos que:
$x+(-y) = (a+b)+(-c-d) = (a-c)+(b-d)$
que pertence a $I+J$ pois, como I e J são ideais de A e $a, c \in I$ e $b, d \in J$, temos que $a-c \in I$ e $b-d \in J$, deste modo
$x+(-y) \in I+J$.
Por outro lado
$x.y = (a+b).(c+d) = (a.c).(b.d) \in I+J$
pois $(a.c) \in I$ e $(b.d) \in J$.
Seja $x \in I+J$ e $a \in A$
Assim temos: $x = v+w$: $v \in J$ e $w \in J$, logo
$ax = a(v+w)$
$= (av+aw) \in I+J$.
pois $av \in I$ e $aw \in J$
Analogamente $x.a$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observe na resolução apresentada que, nessa fase, o estudante conhece qual é a definição de um ideal sobre um anel A, pois no início da demonstração apresenta quais propriedades devem ser satisfeitas. Veja o destaque.

Figura 19 – Tarefa 3 do estudante E1 (segunda fase)


Sejam $x, y \in A$, devemos provar que $x+(-y) \in I+J$ e $x.y \in I+J$, e também $\forall x \in I+J$ e $z \in A$, $zx \in I+J$ e $xz \in I+J$.

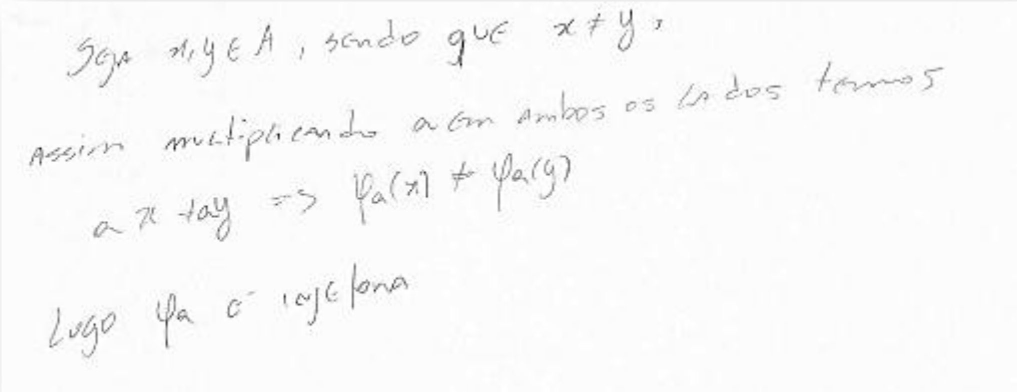
Fonte: Dados da pesquisa.

Na análise do resultado, a sequência lógica dedutiva exibida deixa o leitor confuso em relação às implicações apresentadas, sugerindo que o estudante não sintetizou e não formalizou adequadamente as informações, com base em Dreyfus (1991), sendo esses processos mentais envolvidos na abstração, além de serem mobilizados processos mentais envolvidos na representação como a visualização, a conjectura de ideias, reconhecimento e manipulação de símbolos. Assim, entende-se que o estudante está em um processo de compreensão da tarefa desenvolvida. Com base em Tall (2007b, 2008), o estudante mobiliza processos mentais relacionados com o mundo corporificado e simbólico da Matemática, ao apresentar a resolução da tarefa, mas pelo modo como ela é apresentada, ainda está desenvolvendo formas de pensamento, caminhando em um processo de abstração para chegar ao mundo formal, indicando um processo de transição entre o PME e o PMA.

4. Seja A um domínio de integridade. Prove que se $\alpha \in$ A e $\alpha \neq 0$, então a função $\varphi_a: A \to A$, dada por $\varphi_a(x) = ax$ é injetora.

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

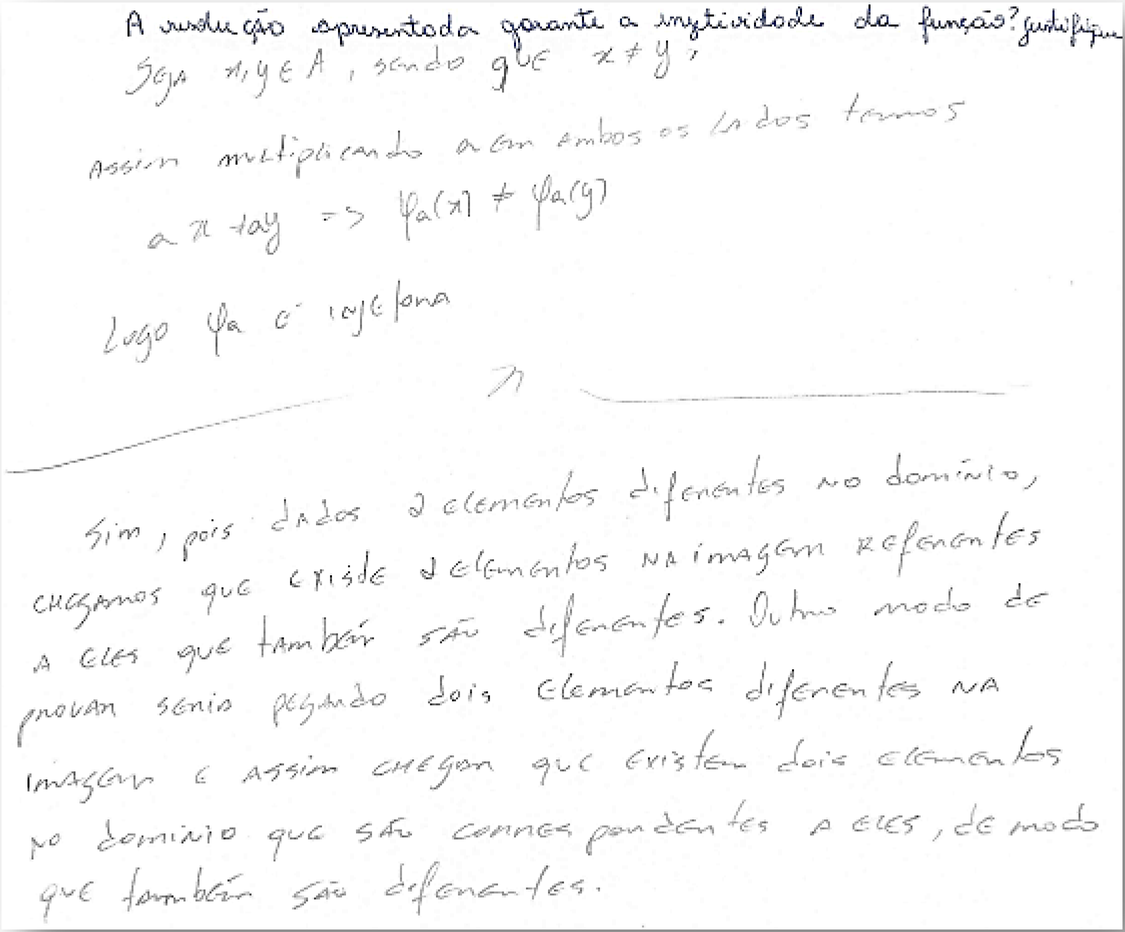
Figura 20 – Tarefa 4 do estudante E1(primeira fase)


Seja $x, y \in A$, sendo que $x \neq y$,
Assim multiplicando a em ambos os lados temos
$ax \neq ay \Rightarrow \varphi_a(x) \neq \varphi_a(y)$
Logo φ_a é injetora

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante indica conhecer a definição de função injetora, mas não recorre ao fato de ter um domínio de integridade para justificar a argumentação, indicando o que sabe a respeito da tarefa, de acordo com De Lange (1987). Na escrita, utiliza o termo "multiplicando em ambos os lados" para se referir aos membros da igualdade, sendo um indício de dificuldades com a linguagem matemática, evidenciando processos mentais relacionados ao PME, sendo uma característica do mundo corporificado, de acordo com Tall (2007b, 2008). Ao ser questionado se modificaria sua resolução, na segunda fase, apresentou a seguinte complementação.

Figura 21 – Tarefa 4 do estudante E1 (segunda fase)


A resolução apresentada garante a injetividade da função? Justifique

Seja $x, y \in A$, sendo que $x \neq y$,

assim multiplicando a em ambos os lados temos

$ax \neq ay \Rightarrow \varphi_a(x) \neq \varphi_a(y)$

Logo φ_a é injetora

Sim, pois dados 2 elementos diferentes no domínio, chegamos que existe 2 elementos na imagem referentes a eles que também são diferentes. Outro modo de provar seria pegando dois elementos diferentes na imagem e assim chegar que existem dois elementos no domínio que são correspondentes a eles, de modo que também são diferentes.

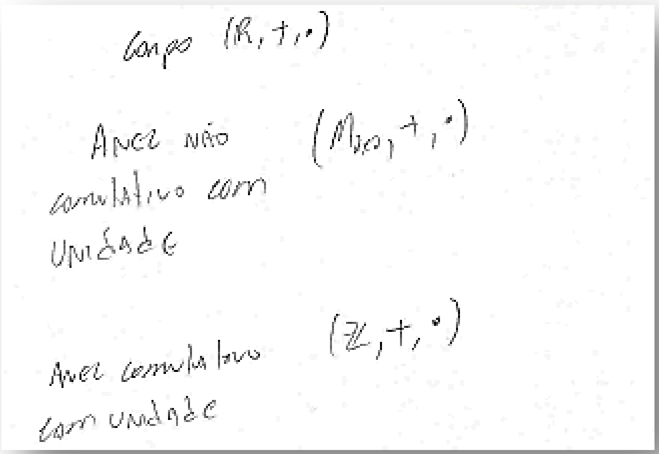
Fonte: Dados da pesquisa.

O comentário exposto compreende uma forma de justificar os procedimentos apresentados anteriormente, e o estudante continuou a ignorar a parte do enunciado referente ao domínio de integridade, mostrando dificuldades em compreender os conceitos envolvidos. De acordo com Skemp (2002) e Tall (2011), ele sabe algo sobre a proposição, pois apresenta um reconhecimento perceptivo que foram adquiridos na formação do conceito, pois o estudante apresentou uma resolução parcial sobre a injetividade, e pelo comentário apresentado ele reforça que a resolução é suficiente para justificar a proposição, o que indica um resultado pré-procedimental. Além disso, a forma de resolução e a justificativa dada na segunda fase indicam que há um pensamento instrumental envolvido na realização da tarefa. Segundo Dreyfus (1991), verifica-se que, para resolver a tarefa, foram mobilizados processos mentais envolvidos na representação, como visualizar, reconhecer e manipular símbolos. Há, ainda, uma formalização parcial do conceito, mas não ocorre uma prova formal, pois a sequência lógica dedutiva está incompleta e, com isso, verificam-se indícios de um processo de transição do PME para o PMA, com base em Tall (2007b, 2008).

6. Dê um exemplo de cada tipo dos seguintes anéis: Anel comutativo com unidade; Anel não comutativo com unidade; Anel sem unidade; Anel de integridade que não seja corpo; Anel com divisores de zero; Corpo.

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

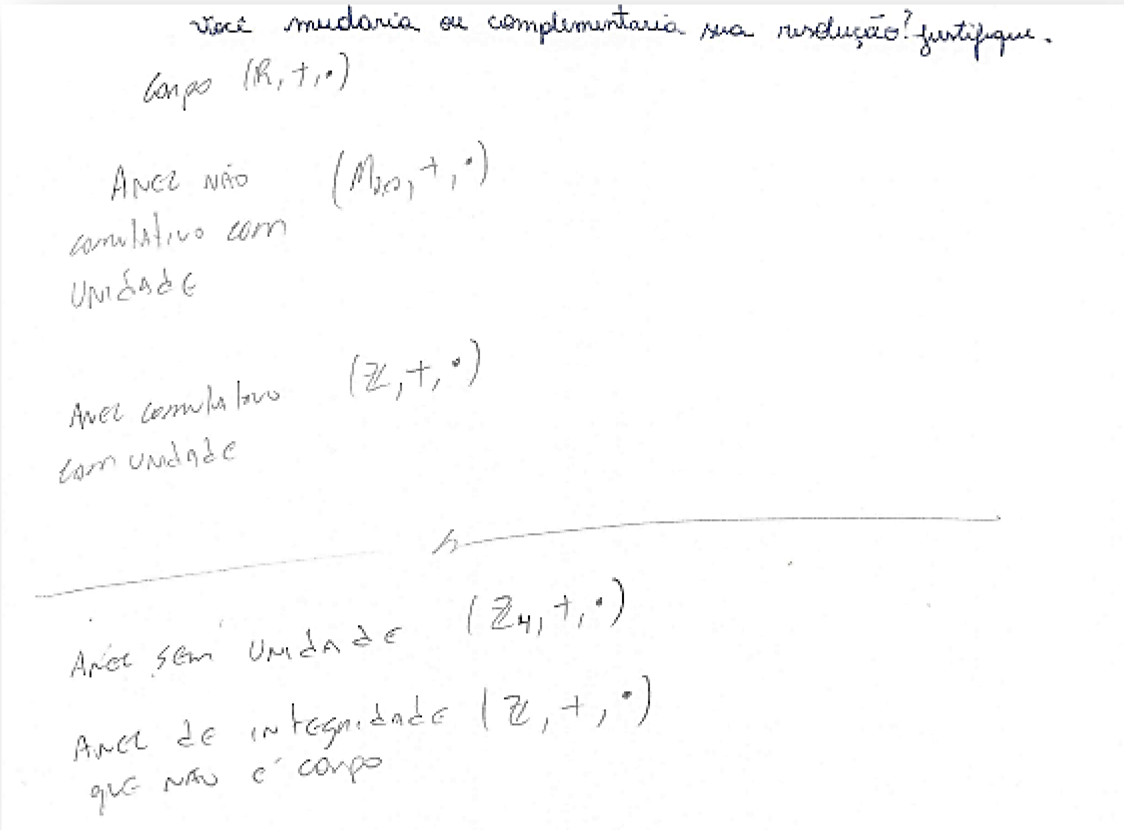
Figura 22 – Tarefa 6 do estudante E1 (primeira fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução, foram apresentados três exemplos dos anéis solicitados, sendo o que de fato ele conhecia, de acordo com De Lange (1987). Para lidar com a diversidade de exemplos requeridos, é preciso ter construído um pensamento relacional, de acordo com Skemp (2002). Nesse sentido, o estudante exibiu dificuldades nesse processo, apresentando uma resolução parcial da tarefa. Ao ser questionado na segunda fase, apresentou a seguinte complementação.

Figura 23 – Tarefa 6 do estudante E1 (segunda fase)


Você mudaria ou complementaria sua resolução? Justifique.

Corpo $(\mathbb{R},+,\cdot)$

Anel não comutativo com unidade $(M_{2\times 2},+,\cdot)$

Anel comutativo com unidade $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

Anel sem unidade $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$

Anel de integridade que não é corpo $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

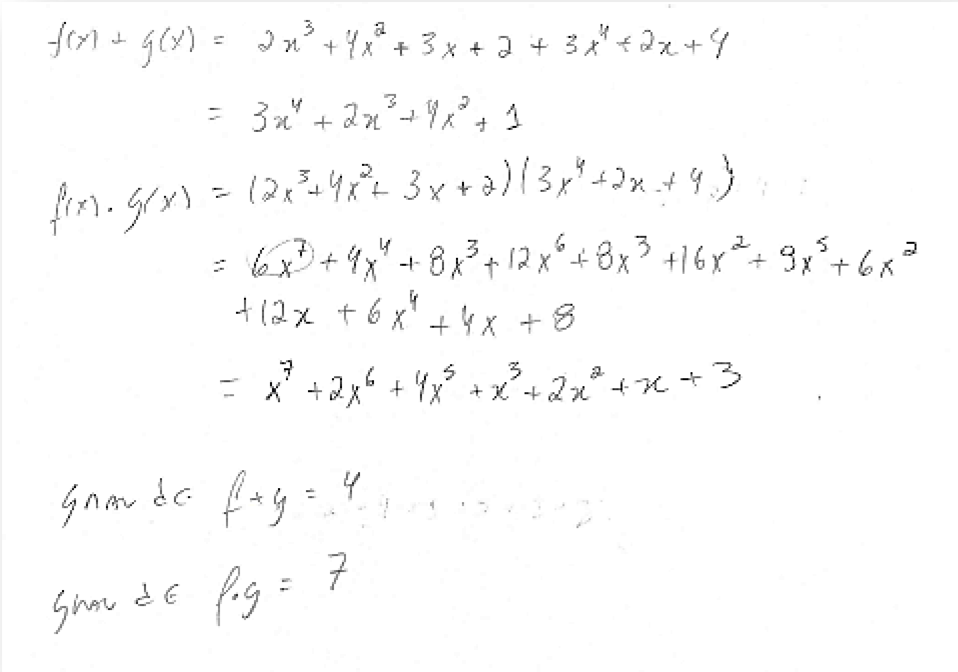
Fonte: Dados da pesquisa.

Na segunda fase, que foi realizada com consulta, o estudante pôde complementar com outros exemplos. A resolução continuou parcial, mas ele complementou com mais dois exemplos, mostrando dificuldades em identificar os anéis com divisores de zero. Com base em Tall (2007b, 2008), no período entre as fases ocorreram ações que possibilitaram a construção de *met-befores* que ampliaram as concepções do estudante sobre essa tarefa, pois ele indicou outros exemplos. Nessa questão, é exigido do estudante a compreensão dos conceitos relacionados ao anel, sendo necessário um processo de generalização e de formalização, baseado em Dreyfus (1991), e no caso específico desse estudante, esse processo foi parcial, evidenciando uma transição entre o PME e PMA na realização da tarefa.

7. Encontre a soma e o produto dos seguintes polinômios: $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ e $g(x) = 3x^4 + 2x + 4$ em $\mathbb{Z}_5[x]$. Calcule o grau de $f + g$ e o grau de fg.

O estudante não desenvolveu a tarefa na fase I, na segunda fase apresentou a seguinte resolução.

Figura 24 – Tarefa 7 do estudante E1 (segunda fase)



$$f(x) + g(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2 + 3x^4 + 2x + 4$$
$$= 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 1$$
$$f(x) \cdot g(x) = (2x^3 + 4x^2 + 3x + 2)(3x^4 + 2x + 4)$$
$$= 6x^7 + 4x^4 + 8x^3 + 12x^6 + 8x^3 + 16x^2 + 9x^5 + 6x^2 + 12x + 6x^4 + 4x + 8$$
$$= x^7 + 2x^6 + 4x^5 + x^3 + 2x^2 + x + 3$$

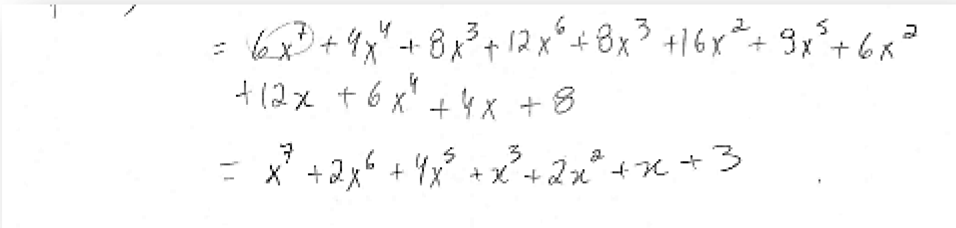
Grau de $f + g = 4$

Grau de $f \cdot g = 7$

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante resolveu a tarefa após um período de estudo entre as fases e com consulta. Com base em De Lange (1987), ele mostrou aquilo que ele consegue fazer com os recursos disponíveis. A resolução apresentada é parcialmente correta, pois no produto de $f(x) \cdot g(x)$ não foram consideradas as operações em $\mathbb{Z}_5[x]$, em que os coeficientes são considerados como sendo números inteiros pertencentes à classe de restos {0,1,2,3,4}. Desse modo, há dificuldades relativas à interpretação do enunciado e ao uso da notação específica. Observe o destaque.

Figura 25 – Tarefa 7 do estudante E1 (segunda fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

Com base em Skemp (2002), esse fato indica um procedimento instrumental, no qual o estudante recorre às operações usuais de polinômios no conjunto dos números reais para fazer a tarefa. Com base em Dreyfus (1991), foram mobilizados processos mentais como visualizar, reconhecer, traduzir, reconhecer e manipular símbolos, envolvidos na representação, e ocorreu a formalização da solução apresentação, mas como há erros conceituais no desenvolvimento, não há uma sequência lógica dedutiva adequada para a prova formal. Segundo Tall (2007b, 2008) o estudante transita entre os mundos, corporificado e simbólico, devido à forma que apresentou a resolução da tarefa, mas com dificuldades de lidar com os conceitos envolvidos, indicando uma transição entre o PME e PMA.

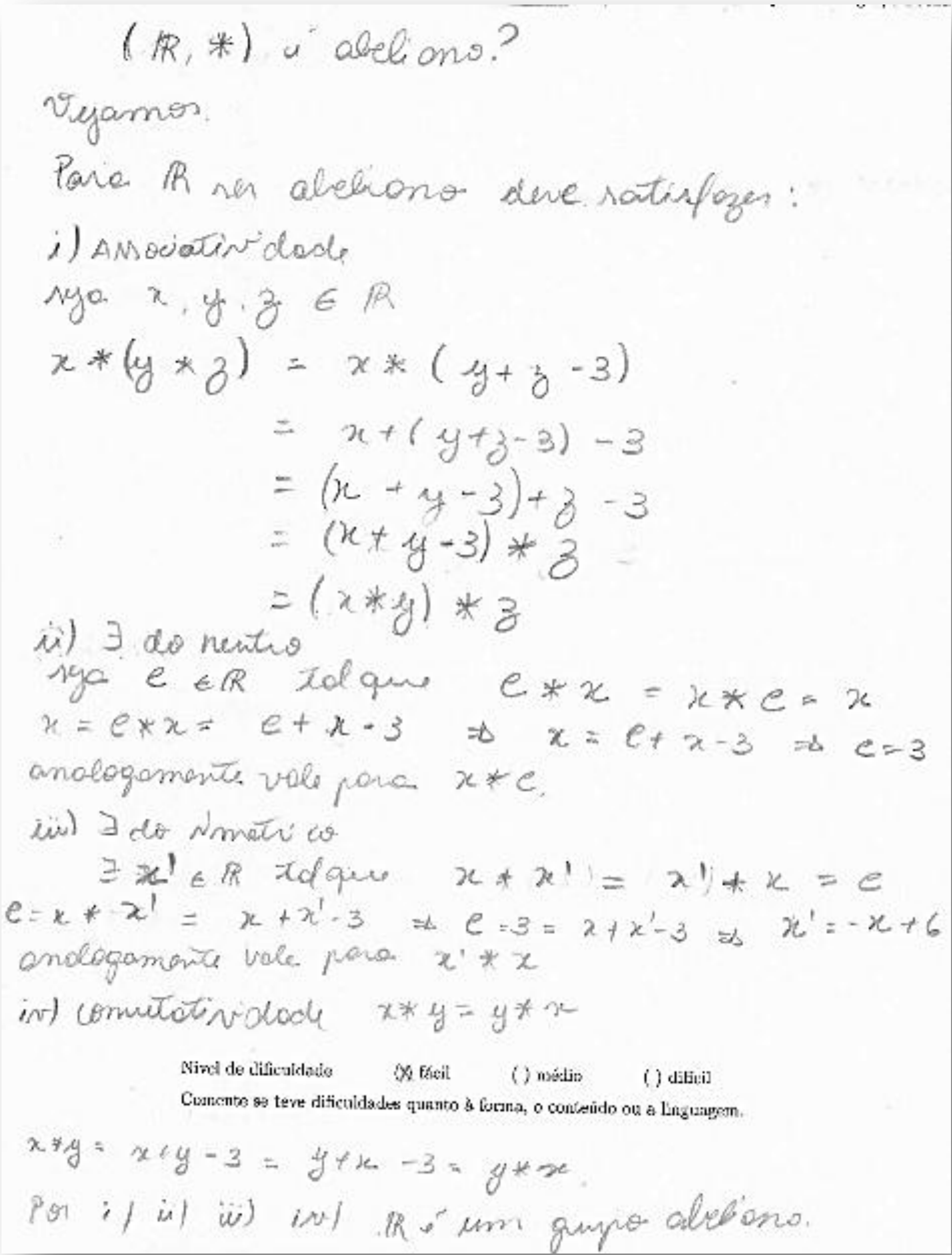
5.2 Análises das tarefas do estudante E2

A seguir, realizam-se as análises de cada questão quanto ao desenvolvimento das tarefas em ambas as fases.

1. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais com a operação de adição usual e suas propriedades. Considere a operação * sobre $\mathbb{R}$ dada por $x * y = x + y - 3$, $\forall$ $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ com a operação * é grupo abeliano?

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 26 – Tarefa 1 do estudante E2 (primeira fase)



$(\mathbb{R}, *)$ é abeliano?

Vejamos.

Para $\mathbb{R}$ ser abeliano deve satisfazer:

i) Associatividade

seja $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x*(y*z) = x*(y+z-3)$$
$$= x+(y+z-3)-3$$
$$= (x+y-3)+z-3$$
$$= (x+y-3)*z$$
$$= (x*y)*z$$

ii) $\exists$ do neutro

seja $e \in \mathbb{R}$ tal que $e*x = x*e = x$

$x = e*x = e+x-3 \Rightarrow x = e+x-3 \Rightarrow e=3$

analogamente vale para $x*e$.

iii) $\exists$ do simétrico

$\exists\, x' \in \mathbb{R}$ tal que $x*x' = x'*x = e$

$e = x*x' = x+x'-3 \Rightarrow e=3 = x+x'-3 \Rightarrow x' = -x+6$

analogamente vale para $x'*x$

iv) comutatividade $x*y = y*x$

Nível de dificuldade (X) fácil ( ) médio ( ) difícil

Comente se teve dificuldades quanto à forma, o conteúdo ou a Linguagem.

$x*y = x+y-3 = y+x-3 = y*x$.

Por i) ii) iii) iv) $\mathbb{R}$ é um grupo abeliano.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução da questão, o estudante apresentou as demonstrações corretas das propriedades relativas ao grupo abeliano, mas de forma sucinta e classificou a questão como fácil. Na segunda fase, não modificou a resolução e comentou: “Não mudaria nem complementaria minha questão, pois está correta.”, e isso indica característica de um pensamento relacional de acordo com Skemp

(2002), mostrando o que ele conhece sobre o conteúdo, de acordo com De Lange (1987), no qual o estudante consegue mobilizar os processos mentais para apresentar os resultados demonstrados. De acordo com Dreyfus (1991), na resolução da tarefa, foram mobilizados processos mentais envolvidos na representação como, visualizar, reconhecer símbolos, definir, manipular símbolos, na primeira fase, e analisar e compreender, na segunda fase. Com relação à abstração, identifica-se que, na demonstração, foram formalizados e provados os resultados apresentando indícios de PMA.

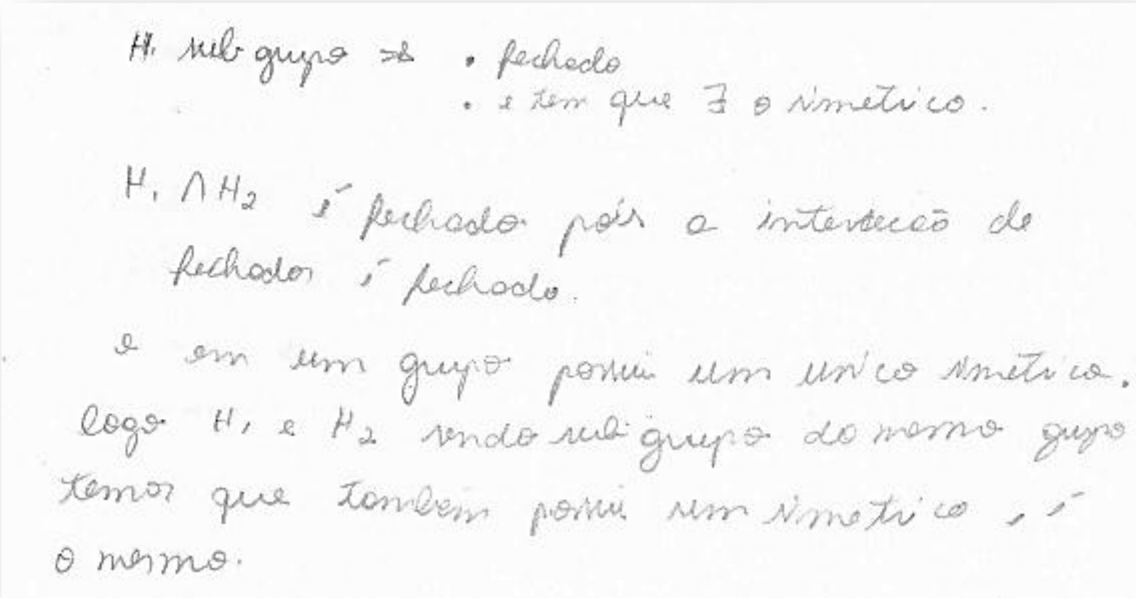
De acordo com Tall (2008), existe alguma compreensão do simbolismo, devido à convicção dada no comentário da segunda fase. Com relação aos três mundos da Matemática, tem-se a transição no mundo corporificado devido ao fato de conhecer os elementos pertinentes à demonstração, no mundo simbólico, pelo fato de manipular corretamente os procedimentos algébricos envolvidos. Devido ao fato da análise crítica da resolução na segunda fase, interpreta-se isso como um processo de compreensão da forma de demonstração, o que indica uma transição do mundo simbólico para o formal.

E isso indica que o estudante acaba mobilizando processos mentais que são proceitos, nos quais já houve uma sofisticação do pensamento devido às vivências que possibilitaram a construção de um conjunto de *met-befores* que resultaram em uma forma de pensamento flexível em relação à resolução da proposição apresentada sendo um indício de PMA.

2. Sejam H_1 e H_2 subgrupos de um grupo G. $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G?

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 27 – Tarefa 2 do estudante E2 (primeira fase)


H. sub grupo ⇒ • fechado
• e tem que ∃ o simetrico.

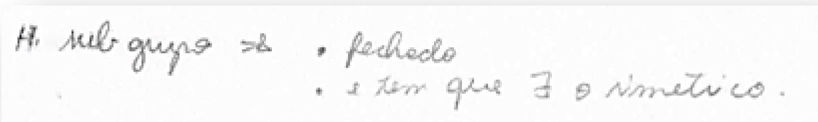
$H_1 \cap H_2$ é fechado pois a intersecção de fechados é fechado.

e em um grupo possui um único simetrico. logo H_1 e H_2 sendo subgrupo do mesmo grupo temos que tambem possui um simetrico, é o mesmo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Por meio da resolução apresentada, na primeira afirmação, o estudante coloca o seguinte.

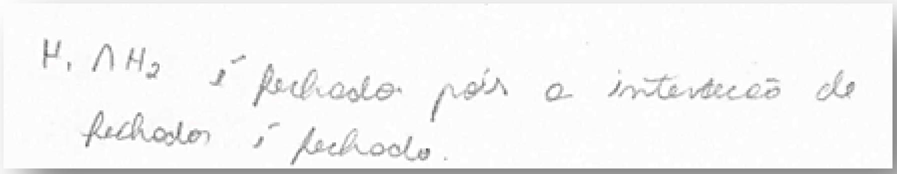
Figura 28 – Tarefa 2 do estudante E2 (primeira fase)


H. sub grupo ⇒ • fechado
• e tem que ∃ o simetrico.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que o estudante compreende qual é a definição de subgrupo, mas deixa de afirmar a necessidade de mostrar que há existência do elemento neutro. Na continuidade da resolução, ele faz a seguinte afirmação.

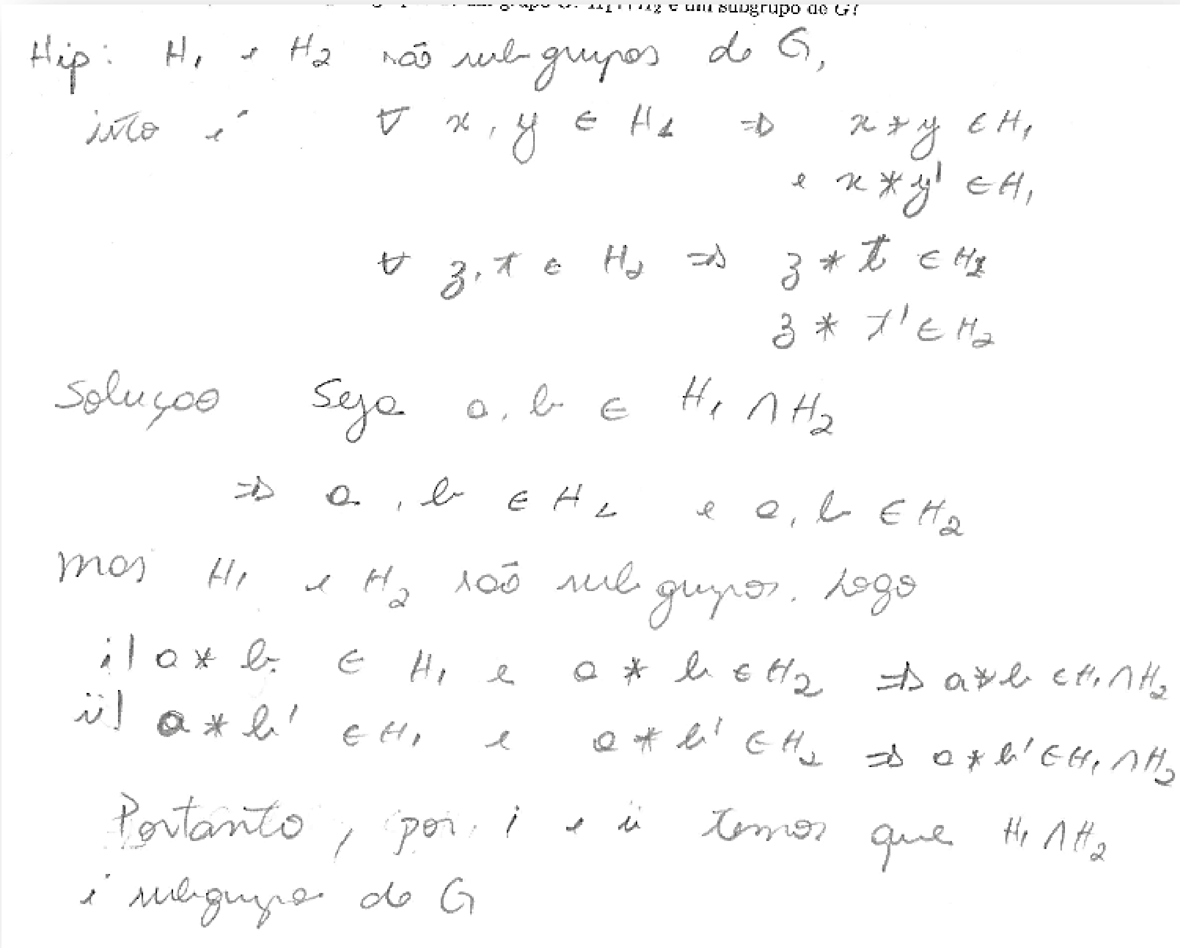
Figura 29 – Tarefa 2 do estudante E2 (primeira fase)


$H_1 \cap H_2$ é fechado pois a intersecção de fechados é fechado.

Fonte: Dados da pesquisa.

Essa é uma proposição que necessita de prova, e o estudante assume isso como verdadeiro, de modo axiomático. Posteriormente, faz afirmações sobre a mostra de que todo elemento admite o elemento simétrico, sem as demonstrações dos resultados. Na segunda fase, o estudante foi questionado: "Foram satisfeitas as condições para $H_1 \cap H_2$ ser um subgrupo? Justifique.". E ele apresentou o seguinte complemento.

Figura 30 – Tarefa 2 do estudante E2 (segunda fase)



Hip: H_1 e H_2 são sub-grupos de G,

isto é $\forall x, y \in H_1 \Rightarrow x * y \in H_1$ e $x * y' \in H_1$

$\forall z, t \in H_2 \Rightarrow z * t \in H_2$, $z * t' \in H_2$

Solução Seja $a, b \in H_1 \cap H_2$

$\Rightarrow a, b \in H_1$ e $a, b \in H_2$

mas H_1 e H_2 são subgrupos. logo

i) $a * b \in H_1$ e $a * b \in H_2 \Rightarrow a * b \in H_1 \cap H_2$

ii) $a * b' \in H_1$ e $a * b' \in H_2 \Rightarrow a * b' \in H_1 \cap H_2$

Portanto, por i e ii temos que $H_1 \cap H_2$ é subgrupo de G

Fonte: Dados da pesquisa.

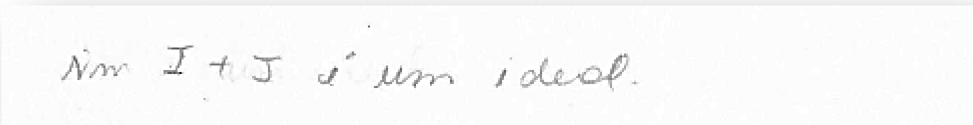
Na segunda fase, o estudante modifica completamente sua resolução, apresentando uma demonstração formal para a proposição. Inicialmente, o estudante mostrou que conhece o conceito de subgrupo, ou seja, sua definição parcial, e, posteriormente, houve um processo reflexivo, no qual se compreende que a argumentação apresentada estava incorreta, decorrente da construção de *met-befores*, com base em Tall (2007b, 2008), no período entre uma aplicação e outra da prova em fases. Com base em Skemp (2002), tem-se uma forma de pensamento instrumental, no qual o estudante mostra uma sequência de procedimentos passo a passo com base nos seus estudos realizados em sala.

De acordo com Dreyfus (1991), foram mobilizados processos mentais como a visualização, a conjectura de ideias, devido à reflexão apresentada, o reconhecimento e a manipulação de símbolos e a compreensão de quais propriedades devem ser provadas para se obter um subgrupo, considerando ambas as fases. Ocorreu a formalização da demonstração matemática, mas com o auxílio da consulta aos materiais levados para a realização da prova em fases, tem-se indícios de um processo de transição do PME para o PMA. Com base em Tall (2007b, 2008, 2011), o estudante transita entre os mundos corporificados e simbólicos, inicialmente desconhece uma forma de demonstração para a proposição, mas na segunda fase apresenta uma solução passo a passo de um problema de rotina, caracterizando uma resolução procedimental da tarefa, nos processos mentais mobilizados que evidenciam esquemas de definição e dedução dos conceitos relacionados às demonstrações matemáticas.

3. Sejam I e J ideais de um anel A. I+J = $\{x + y : x \in I \ e \ y \ \in J\}$ é um ideal de A?

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

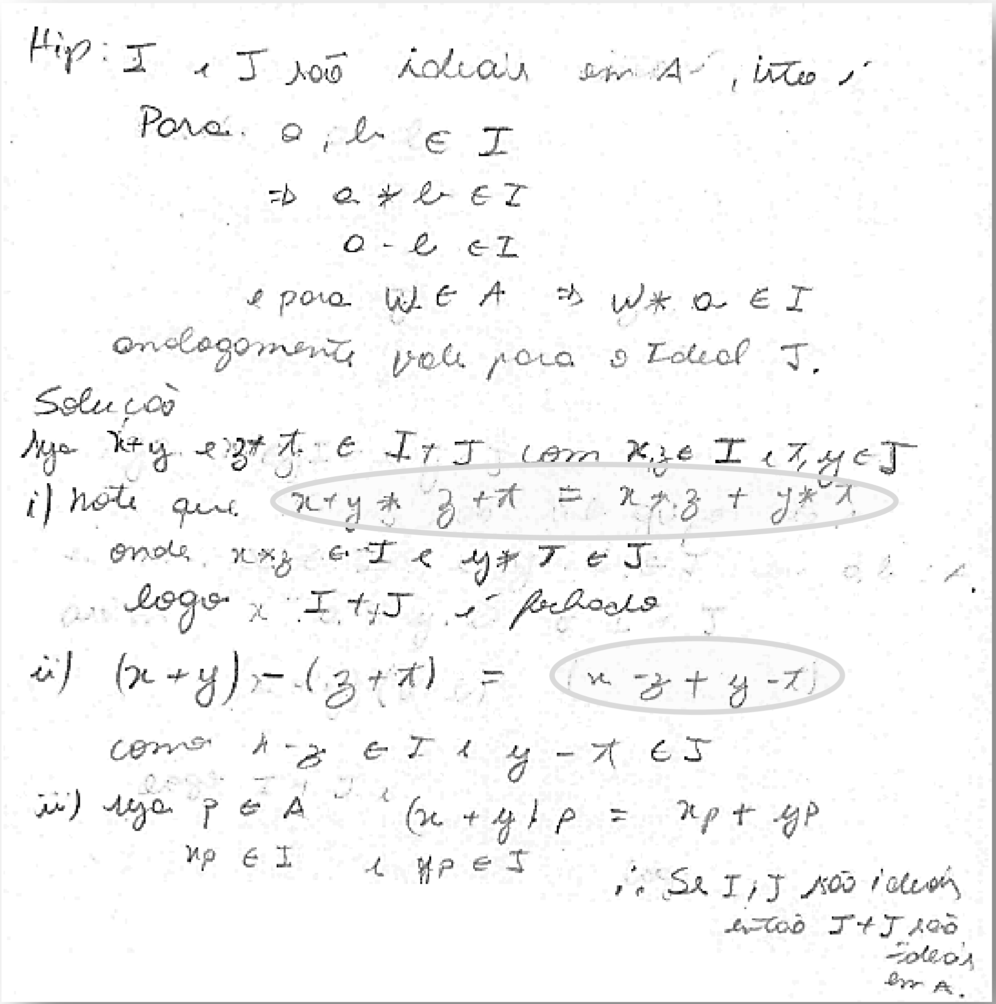
Figura 31 – Tarefa 3 do estudante E2 (primeira fase)


Não I + J é um ideal.

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante apresentou uma afirmação na primeira fase, ignorando a orientação geral dada para a prova para “justificar as soluções, utilizando notações e demonstrações formais em Matemática”. Pela forma da resposta, indica que a afirmação é o que o estudante conhece sobre a proposição, com base em De Lange (1987). De acordo com Tall (2007b, 2008, 2011), há um indício de que foram mobilizados processos mentais do mundo corporificado para essa resolução, pois não houve manipulação simbólica e prova formal no registro escrito. Ao comentar sobre as dificuldades ao resolver a tarefa, o estudante relatou que “Falta ter em mente o que é ideal.”. Além disso, foi questionado se o registro escrito apresentado para a tarefa fazia parte da demonstração e apresentou o seguinte complemento na segunda fase.

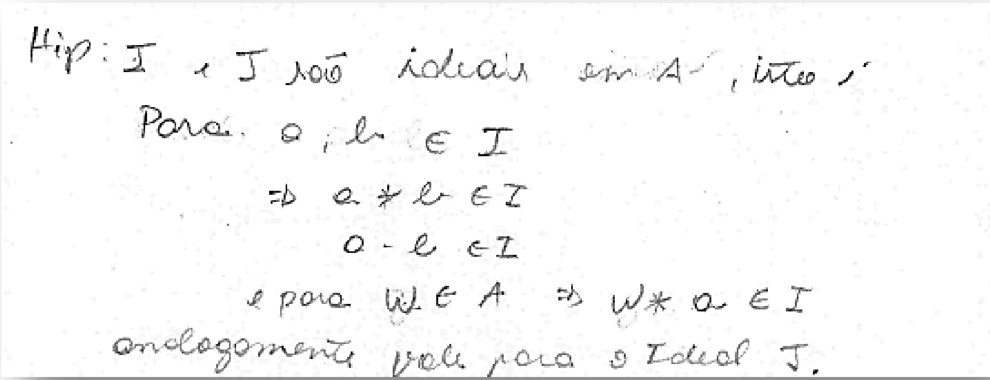
Figura 32 – Tarefa 3 do estudante E2 (segunda fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

Com a complementação da segunda fase, identificamos que o estudante conhece qual é a definição de um ideal sobre um anel A, pois no início da demonstração apresenta quais propriedades devem ser satisfeitas. Observe o destaque.

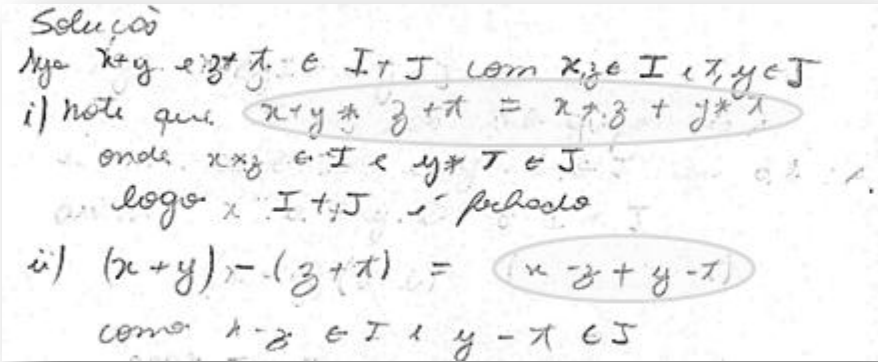
Figura 33 – Tarefa 3 do estudante E2 (segunda fase)


Hip: I e J são ideais em A, isto é,
Para a, b ∈ I
⇒ a * b ∈ I
a - b ∈ I
e para W ∈ A ⇒ W * a ∈ I
analogamente vale para o Ideal J.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na demonstração do resultado, no item i e ii, o estudante não utiliza parênteses corretamente na manipulação simbólica, comprometendo a demonstração do resultado. Veja o destaque.

Figura 34 – Tarefa 3 do estudante E2 - (segunda fase)


Solução
Seja x+y e z+π ∈ I+J com x, z ∈ I e π, y ∈ J
i) note que x+y * z+π = x*z + y*π
onde x*z ∈ I e y*π ∈ J
logo ∈ I+J é fechado
ii) (x+y) - (z+π) = x-z + y-π
como x-z ∈ I e y-π ∈ J

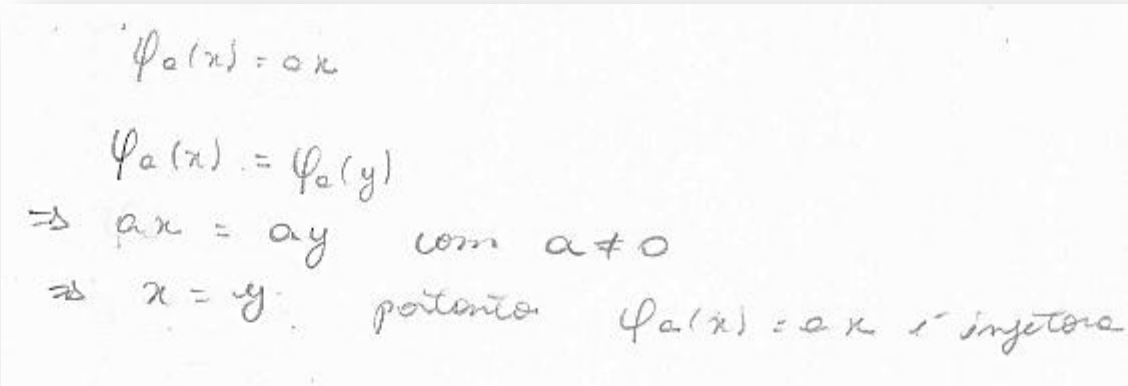
Fonte: Dados da pesquisa.

Com base em Dreyfus (1991), a organização das proposições apresentadas sugere que o estudante não sintetizou e não formalizou adequadamente as informações, sendo esses os processos mentais envolvidos na abstração, mas foram mobilizados processos mentais envolvidos na representação, como a visualização, a conjectura de ideias, o reconhecimento e a manipulação de símbolos, assim, entende-se que o estudante está em um processo de compreensão da tarefa desenvolvida. Com base em Tall (2007b, 2008), o estudante, nessa segunda fase, mobiliza processos mentais relacionados ao mundo corporificado e simbólico da matemática, ao apresentar a resolução da tarefa, mas pela forma como ela foi apresentada, ainda está desenvolvendo formas de pensamento, iniciando um processo de abstração de acordo com mundo formal, indicando um processo de transição entre o PME e o PMA.

4. Seja A um domínio de integridade. Prove que se $\alpha \in$ A e $\alpha \neq 0$, então a função $\varphi_a: A \to A$, dada por $\varphi_a(x) = ax$ é injetora.

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 35 – Tarefa 4 do estudante E2 (primeira fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução, o estudante realiza a manipulação simbólica para demonstrar o resultado da proposição, sem justificar as etapas, mostra que conhece o conceito de função injetora, mas ignora o fato explícito no enunciado de que A é um domínio de integridade. Segundo Skemp (2002), há a formação de conceitos relacionados à função injetora, e indicação de um pensamento relacional, pois os argumentos apresentados são consistentes, mas faltam as justificativas. Com base em Tall (2007b, 2008), há indícios relativos ao mundo simbólico na resolução da questão, mas não há uma prova formal, ou seja, a resolução é parcial.

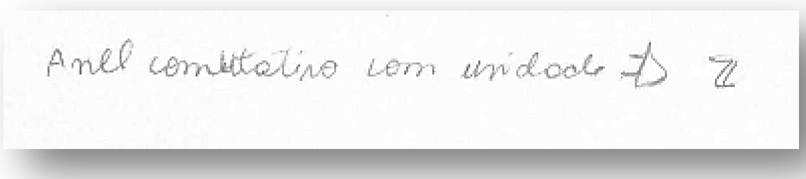
De acordo com Dreyfus (2002), foram mobilizados processos mentais envolvidos na visualização, no reconhecimento e na manipulação de símbolos, na tradução, flexibilização e compreensão do conceito de função injetora e, além disso, há formalização na estrutura de uma demonstração matemática, por prova pela contrapositiva da definição de função injetora, indicando que o estudante conhece as formas de demonstração por meio da formalização e prova parcial da proposição, sendo esses os processos mentais envolvidos na abstração.

Segundo Tall (2007b, 2008), a forma da resolução apresentada, indica uma transição entre os mundos simbólico e formal, pois há a solução flexível com alterativas conceituais, devido ao fato de o estudante recorrer à forma de demonstração contrapositiva, indicando uma compreensão processual do processo de prova, nesse caso, têm-se indícios de mobilização de processos mentais relacionados ao PMA. Na segunda fase, foi questionado qual a implicação de A ser domínio de integridade, e o estudante não modificou a resolução da questão.

6. Dê um exemplo de cada tipo dos seguintes anéis: Anel comutativo com unidade; Anel não comutativo com unidade; Anel sem unidade; Anel de integridade que não seja corpo; Anel com divisores de zero; Corpo.

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

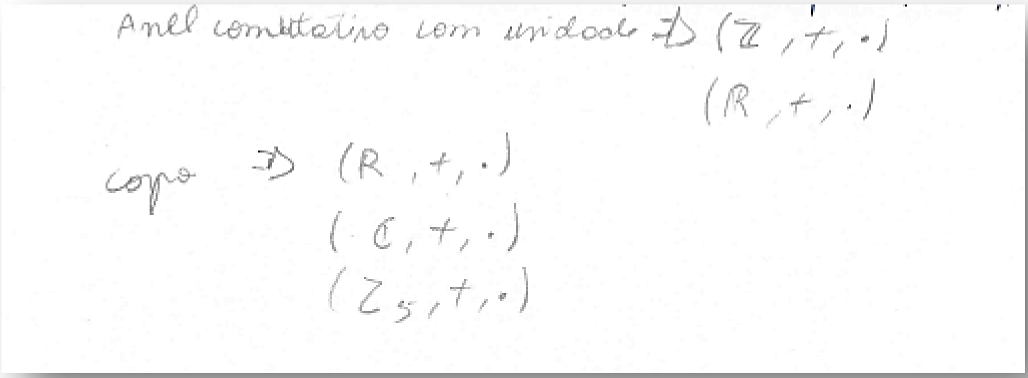
Figura 36 – Tarefa 6 do estudante E2 (primeira fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução, foi apresentado um único exemplo dos anéis solicitados, sendo o que de fato ele conhecia, de acordo com De Lange (1987). Para lidar com a diversidade de exemplos solicitados, é preciso ter construído um pensamento relacional, com base em Skemp (2002), nesse sentido, o estudante apresentou dificuldades no processo. Na segunda fase, foi questionado se era possível determinar outros exemplos para a questão e quais seriam esses exemplos, e o estudante realizou a seguinte complementação.

Figura 37 – Tarefa 6 do estudante E2 (segunda fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

Na segunda fase, que foi realizada com consulta, o estudante pôde adicionar outros exemplos. A resolução foi parcial, indicando dificuldades em identificar o anel não comutativo com unidade, o anel sem unidade, o anel de integridade que não seja corpo e o anel com divisores de zero. Ele adicionou mais um exemplo de anel comutativo com unidade, e outros exemplos de corpo, entretanto, foram evidenciadas dificuldades em apresentar os exemplos solicitados, indicando apenas os exemplos familiares no momento da realização da tarefa.

Com base em Tall (2007b, 2008), no período entre as fases ocorreram ações que possibilitam a construção de *met-befores* que ampliaram as concepções do estudante sobre essa tarefa, pois ele indicou outros exemplos. Nessa questão, foi exigido do estudante a compreensão dos conceitos relacionados com o anel, sendo necessário um processo de generalização e de formalização, baseado em Dreyfus (1991) e, no caso específico do estudante, esse processo foi parcial, evidenciando uma transição entre o PME e o PMA na realização da tarefa.

7. Encontre a soma e o produto dos seguintes polinômios: $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ e $g(x) = 3x^4 + 2x + 4$ em $\mathbb{Z}_5[x]$. Calcule o grau de $f + g$ e o grau de fg.

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 38 – Tarefa 7 do estudante E2 (primeira fase)

$f(x) + g(x)$

$(2x^3+4x^2+3x+2)+(3x^4+2x+4)$

$= 3x^4+2x^3+4x^2+6x+6$

mas estamos em $\mathbb{Z}_5$ portanto.

$f(x)+g(x) = 3x^4+2x^3+4x^2+x+1$

$f(x)+g(x)$ tem grau 4.

e $f(x) \cdot g(x) =$

$= (2x^3+4x^2+3x+2)\cdot(3x^4+2x+4)$

$= 6x^7+4x^4+8x^3+12x^6+8x^3+16x^2$
$+ 9x^5+6x^2+12x+6x^4+4x+8$

$= 6x^7+12x^6+9x^5+10x^4+16x^3+21x^2+16x+8$

em $\mathbb{Z}_5$ temos

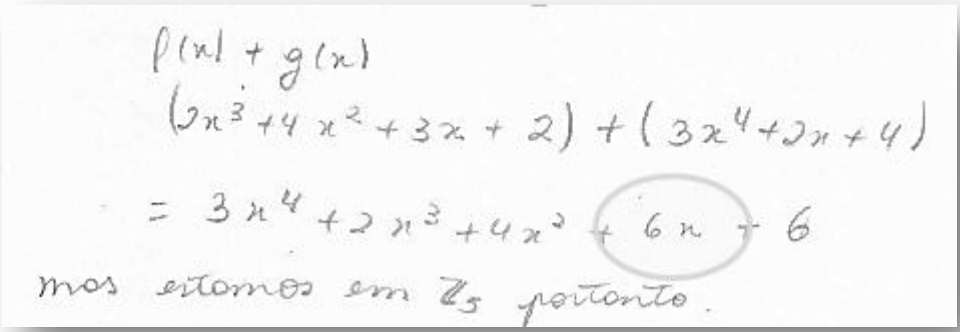
$f(x)\cdot g(x) = x^7+2x^6+4x^5+x^3+x^2+x+3$

portanto $f \cdot g$ tem grau 7.

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante resolveu a tarefa, sem consulta. Com base em De Lange (1987), ele mostrou aquilo que conhece sobre os conceitos relacionados à tarefa. A resolução apresentada é parcialmente correta, houve erros de agrupamento no resultado da soma e do produto, além do que, no produto de $f(x) \cdot g(x)$, não foram consideradas as operações em $\mathbb{Z}_5[x]$, em que os coeficientes eram números inteiros pertencentes à classe de restos {0,1,2,3,4}, indicando dificuldades relativas à interpretação do enunciado e ao uso da notação específica. Observe o destaque do erro de agrupamento de polinômios na soma.

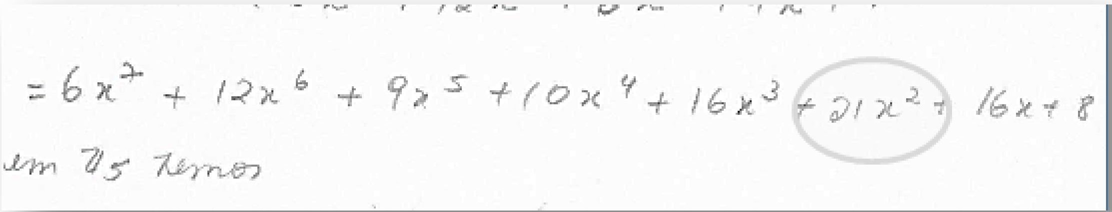
Figura 39 – Tarefa 7 do estudante E2 (primeira fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, segue o destaque do erro de agrupamento de polinômios no produto.

Figura 40 – Tarefa 7 do estudante E2 (primeira fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

Com base em Skemp (2002), ao operar considerando o conjunto dos números reais e cometer erros relacionados à manipulação simbólica, isso indica um procedimento instrumental. De acordo com Dreyfus (1991), na representação foram mobilizados processos mentais como visualizar, reconhecer, traduzir, reconhecer e manipular símbolos. Nesse processo, ocorreu a formalização da solução apresentação, mas como há erros conceituais no desenvolvimento, não há uma sequência lógica dedutiva adequada para a prova formal. Segundo Tall (2007b, 2008), o estudante transita entre os mundos corporificado e simbólico, devido à forma como apresentou a resolução da tarefa, mas com dificuldades de lidar com os conceitos envolvidos, indicando uma transição entre o PME e PMA. Na segunda fase, o estudante informou que não mudaria a solução.

5.3 Análises das tarefas do estudante E5

A seguir, apresentam-se as análises de cada questão do estudante 5 quanto ao desenvolvimento das tarefas em ambas as fases.

1. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais com a operação de adição usual e suas propriedades. Considere a operação * sobre $\mathbb{R}$ dada por $x * y = x + y - 3$, $\forall$ $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ com a operação * é grupo abeliano?

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 41 – Tarefa 1 do estudante E5 (primeira fase)

Como vemos facilmente, $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um grupo, pois $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+y-3) \in \mathbb{R}$.

Para ser abeliano, devemos ter $x * y = y * x$. Note que isto ocorre, pois $x * y = x+y-3 = y+x-3 = y * x$.

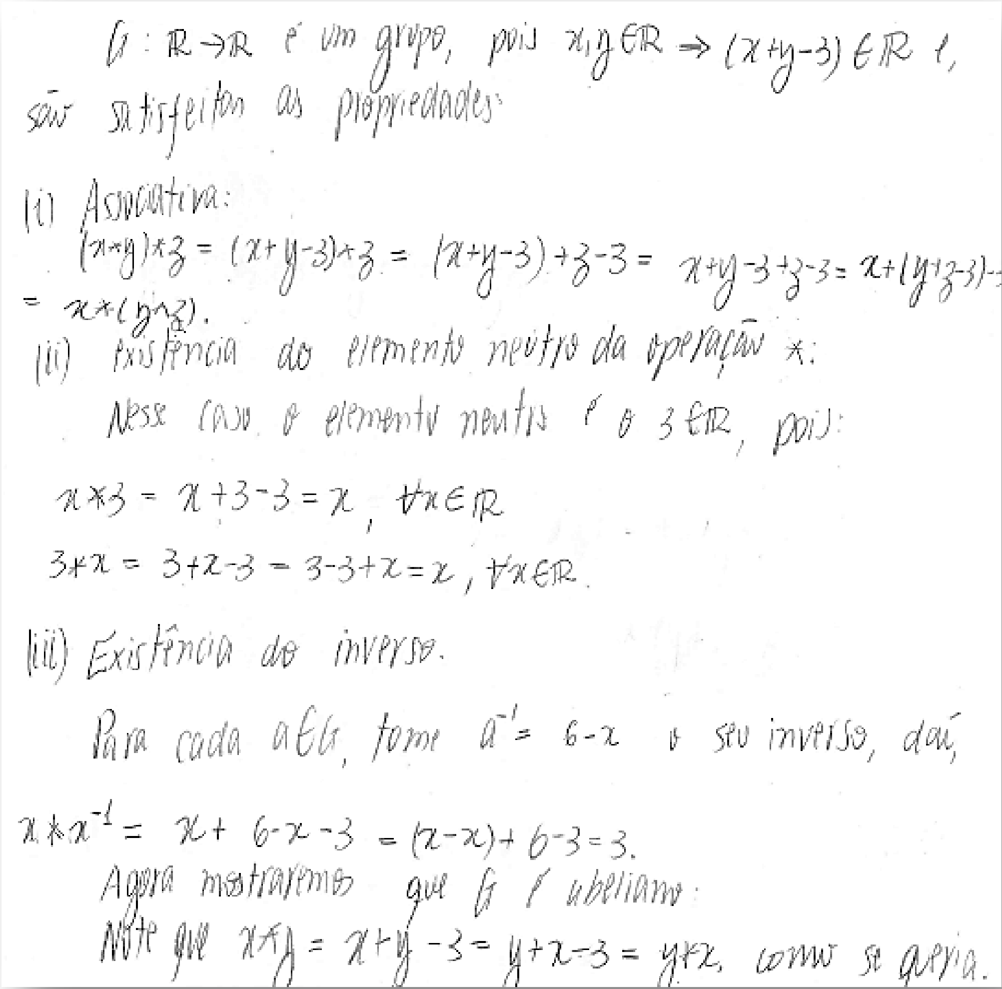
Logo, G, como definido acima, é um grupo abeliano.

Obs: Além do comentário abaixo, confesso que não tenho certeza da minha resolução, pelo fato de estar em dúvida se falta demonstrar mais alguma coisa para provar que $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um grupo abeliano.

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante apresentou uma resolução incompleta na primeira fase e modificou a resolução na segunda fase. O comentário indicado como “Obs:” apresentado na folha de resposta indica insegurança quanto ao desenvolvimento, sugerindo que o estudante possui alguns conhecimentos relativos ao assunto que, segundo Dreyfus (1991), podem ser caracterizados como representações mentais como reconhecer, representar e intuir, sendo esses elementos presentes no PME. No registro escrito entregue na segunda fase, o estudante foi questionado: “Você complementaria sua resolução? Justifique.”. E a partir disso ele reformulou a resolução. Veja o seguinte registro escrito.

Figura 42 – Tarefa 1 do estudante E5 (segunda fase)


$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um grupo, pois $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+y-3) \in \mathbb{R}$ e, são satisfeitas as propriedades:

(i) Associativa:

$(x*y)*z = (x+y-3)*z = (x+y-3)+z-3 = x+y-3+z-3 = x+(y+z-3)-3 = x*(y*z)$.

(ii) Existência do elemento neutro da operação $*$:

Nesse caso o elemento neutro é o $3 \in \mathbb{R}$, pois:

$x*3 = x+3-3 = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$3*x = 3+x-3 = 3-3+x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) Existência do inverso.

Para cada $a \in G$, tome $a^{-1} = 6-x$ o seu inverso, daí,

$x*x^{-1} = x+6-x-3 = (x-x)+6-3 = 3$.

Agora mostraremos que G é abeliano:

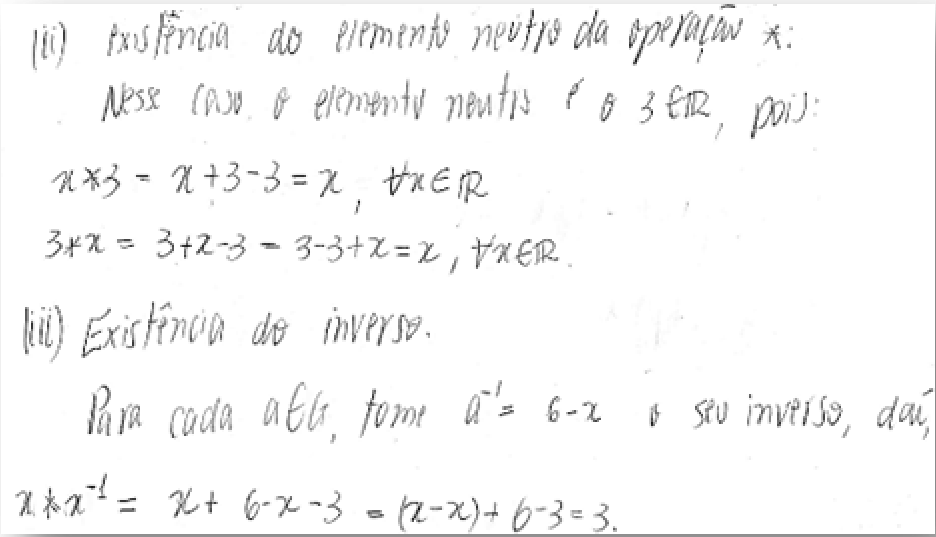
Note que $x*y = x+y-3 = y+x-3 = y*x$, como se queria.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com base em De Lange (1987), ao modificar a resolução na segunda fase, na qual foi utilizado material de consulta e não foi restringido o tempo e a conversa entre os estudantes, o aluno mostrou-se capaz de resolver a questão por meio da comparação com outros resultados, demonstrando um pensamento instrumental de acordo com Skemp (2002).

Ao apresentar as resoluções da tarefa quanto as propriedades relativas ao grupo abeliano, nas demonstrações do elemento neutro e de que todo elemento admite o elemento simétrico, não foram concluídas as demonstrações, mostrando apenas a resolução parcial, sem a verificação da definição de ambos pela direita e pela esquerda. Observe o destaque.

Figura 43 – Tarefa 1 do estudante E5 (segunda fase)


(ii) Existência do elemento neutro da operação $*$:
Nesse caso o elemento neutro é o $3 \in \mathbb{R}$, pois:
$x*3 = x+3-3 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
$3*x = 3+x-3 = 3-3+x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(iii) Existência do inverso.
Para cada $a \in G$, tome $a^{-1} = 6-x$ o seu inverso, daí,
$x*x^{-1} = x+6-x-3 = (x-x)+6-3 = 3$.

Fonte: Dados da pesquisa.

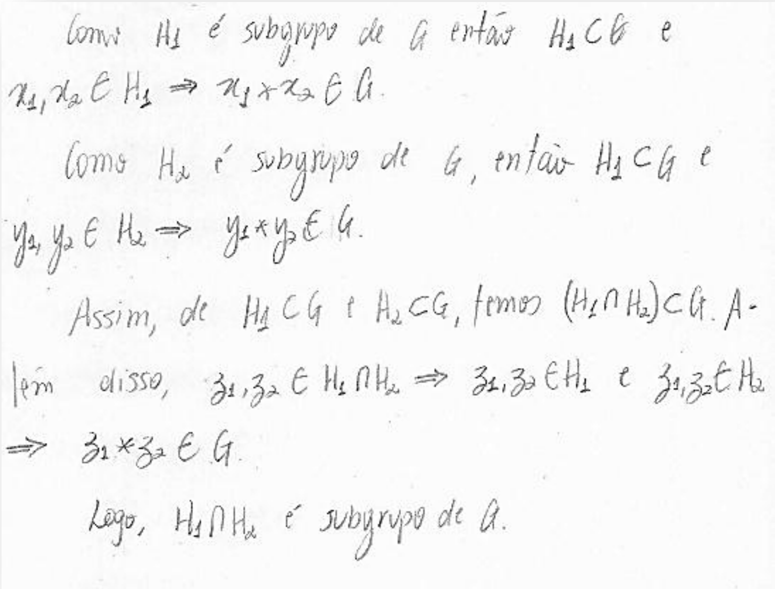
Observa-se que no item iii da demonstração, o estudante utiliza termos usuais em grupos abelianos multiplicativos, como “elemento inverso”. A partir da resolução da tarefa, com base em Dreyfus (1991), pôde-se detectar outras formas de processos mentais envolvidos na representação, como traduzir, reconhecer símbolos, manipular símbolos, definir, flexibilizar e compreender, além dos envolvidos na abstração, como formalizar. Nessa resolução, identificam-se características, segundo Tall (2008), do mundo corporificado, devido ao fato de o estudante conhecer os elementos pertinentes à demonstração do mundo simbólico, pelo fato de manipular corretamente os procedimentos algébricos envolvidos.

Mas a demonstração formal ocorreu devido às aulas de retomada de conteúdo ministradas pelo professor responsável da disciplina de Corpos e Extensões entre as fases da pesquisa, e foi realizada durante a realização da segunda fase, indicando que o estudante está em um processo de transição do PME para o PMA. De acordo com Tall (2008, 2011), ele está construindo a compreensão do conceito, na qual realiza a tarefa passo a passo, reconhecendo a proposição como um problema de rotina, na qual ainda precisa desenvolver a sofisticação dos processos mentais mobilizados para atingir o PMA com processos mentais flexíveis.

2. Sejam H_1 e H_2 subgrupos de um grupo G. $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G?

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 44 – Tarefa 2 do estudante E5 (primeira fase)

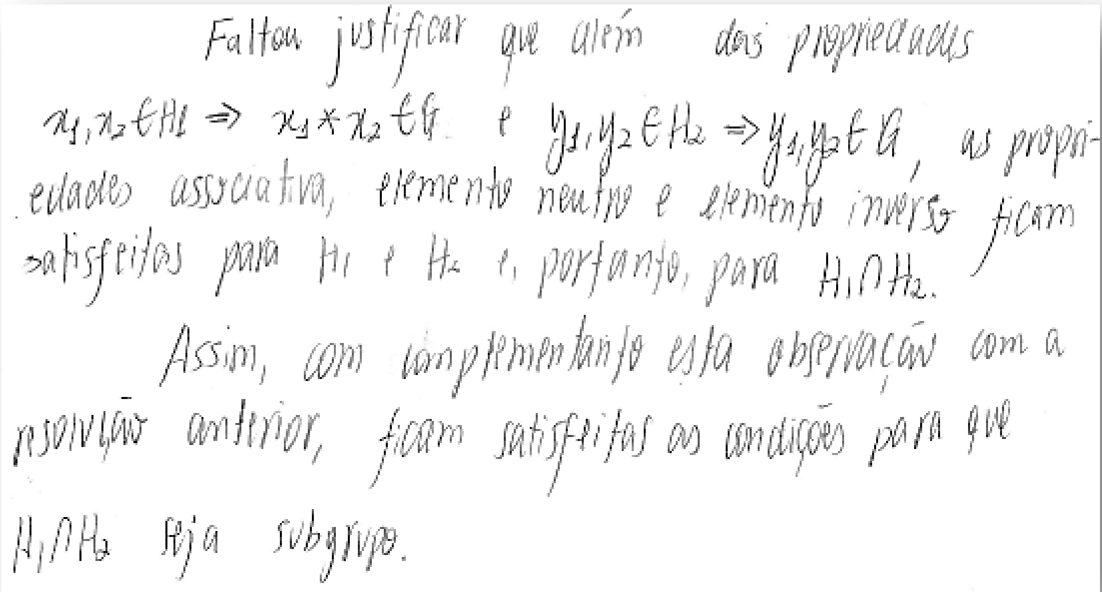


Como H_1 é subgrupo de G então $H_1 \subset G$ e
$x_1, x_2 \in H_1 \Rightarrow x_1 * x_2 \in G$.
Como H_2 é subgrupo de G, então $H_1 \subset G$ e
$y_1, y_2 \in H_2 \Rightarrow y_1 * y_2 \in G$.
Assim, de $H_1 \subset G$ e $H_2 \subset G$, temos $(H_1 \cap H_2) \subset G$. A-
lém disso, $z_1, z_2 \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow z_1, z_2 \in H_1$ e $z_1, z_2 \in H_2$
$\Rightarrow z_1 * z_2 \in G$.
Logo, $H_1 \cap H_2$ é subgrupo de G.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução apresentada pelo estudante, primeiramente foi demonstrado que a interseção de dois subgrupos é um subconjunto de G, e posteriormente mostrou-se que a operação de dois elementos pertencentes à interseção é fechada em G, entretanto, não apontou para a existência do elemento neutro e que todo elemento admite o elemento do elemento simétrico, requisitos necessários para se ter um subgrupo, evidenciando que o estudante conhece, na primeira fase, parcialmente, a definição de subgrupo. Na segunda fase, ele foi questionado se foram satisfeitas as condições para $H_1 \cap H_2$ ser subgrupo, sendo solicitado que justificasse a resposta. O estudante apresentou a seguinte modificação.

Figura 45 – Tarefa 2 do estudante E5 (segunda fase)


Faltou justificar que além das propriedades $x_1, x_2 \in H_1 \Rightarrow x_1 * x_2 \in G$ e $y_1, y_2 \in H_2 \Rightarrow y_1 y_2 \in G$, as propriedades associativa, elemento neutro e elemento inverso ficam satisfeitas para H_1 e H_2 e, portanto, para $H_1 \cap H_2$.

Assim, com complementando esta observação com a resolução anterior, ficam satisfeitas as condições para que $H_1 \cap H_2$ seja subgrupo.

Fonte: Dados da pesquisa.

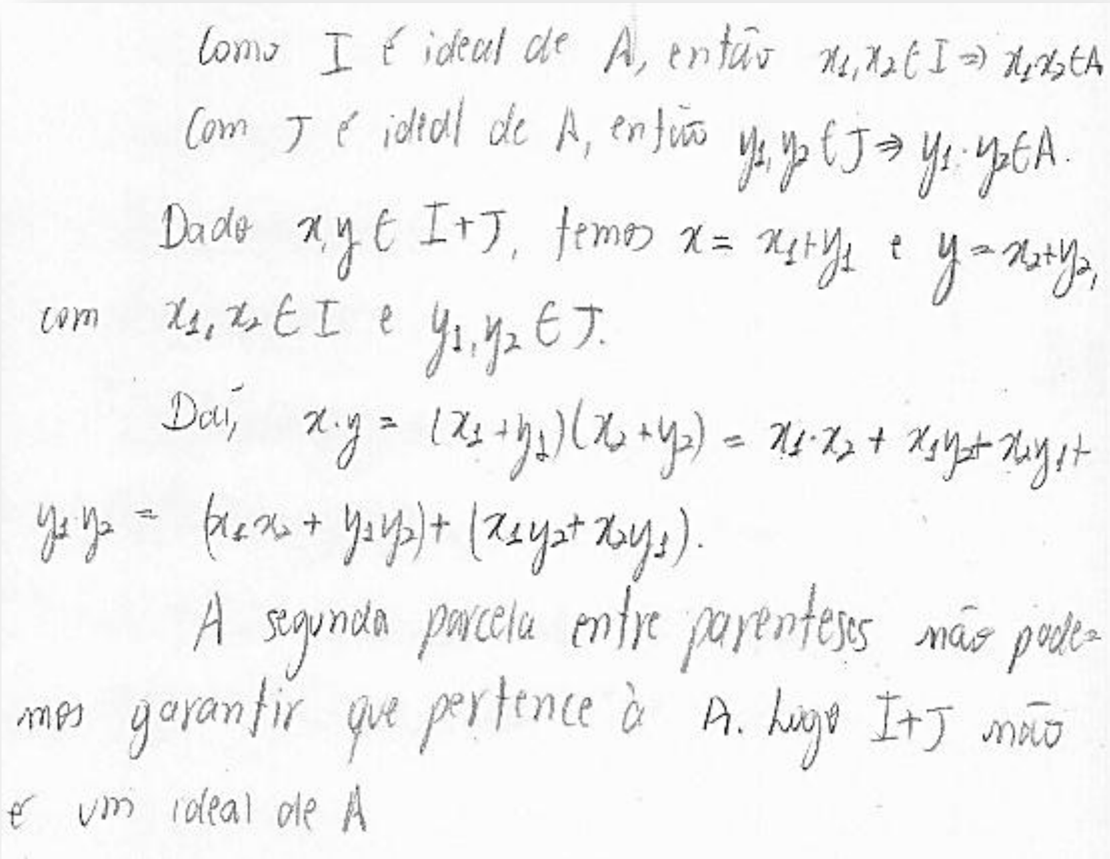
Na segunda fase, o estudante fez comentários, mas não demonstra os resultados e indica, equivocadamente, que precisa satisfazer a propriedade associativa. Inicialmente, o estudante mostrou que conhece parcialmente o conceito de subgrupo e, posteriormente, ele compreende que a solução apresentada estava incompleta, mas não apresenta uma demonstração formal. Com base em Skemp (2002), há, nesse contexto, uma forma de pensamento instrumental, na qual o estudante mostra uma sequência de argumentos a respeito do que ele conhece sobre o assunto.

De acordo com Dreyfus (1991), foram mobilizados processos mentais como a visualização e a conjectura de ideias, devido à observação sobre a necessidade de provar outras propriedades de subgrupo, o reconhecimento e a manipulação simbólica. Identifica-se que o estudante possui dificuldades para realizar a manipulação simbólica e a prova formal da proposição, tendo dificuldade para gerenciar a complexidade de processos mentais envolvidos para a resolução da tarefa, mas é perceptível que ele conhece algo sobre os conceitos abstratos relacionados à tarefa e, com isso, há indícios de um processo de transição do PME para o PMA. Dessa forma, de acordo com Tall (2007b, 2008, 2011), o estudante transita entre os mundos corporificado e simbólico, mas desconhece uma forma de demonstração para a proposição.

3. Sejam I e J ideais de um anel A. I+J = $\{x + y : x \in I \ e \ y \ \in J\}$ é um ideal de A?

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

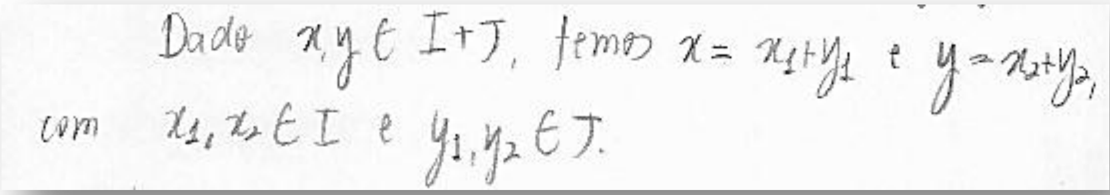
Figura 46 – Tarefa 3 do estudante E5 (primeira fase)


Como I é ideal de A, então $x_1, x_2 \in I \Rightarrow x_1 x_2 \in A$
Com J é ideal de A, então $y_1, y_2 \in J \Rightarrow y_1 \cdot y_2 \in A$.
Dado $x, y \in I+J$, temos $x = x_1+y_1$ e $y = x_2+y_2$, com $x_1, x_2 \in I$ e $y_1, y_2 \in J$.
Daí, $x \cdot y = (x_1+y_1)(x_2+y_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + y_1 y_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)$.
A segunda parcela entre parenteses não podemos garantir que pertence à A. Logo I+J não é um ideal de A

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante apresentou uma sequência lógica dedutiva para a proposta de tarefas, mas evidenciou que conhece parcialmente a definição de ideal, e esse fato comprometeu que ele chegasse a uma demonstração correta. Observe o destaque.

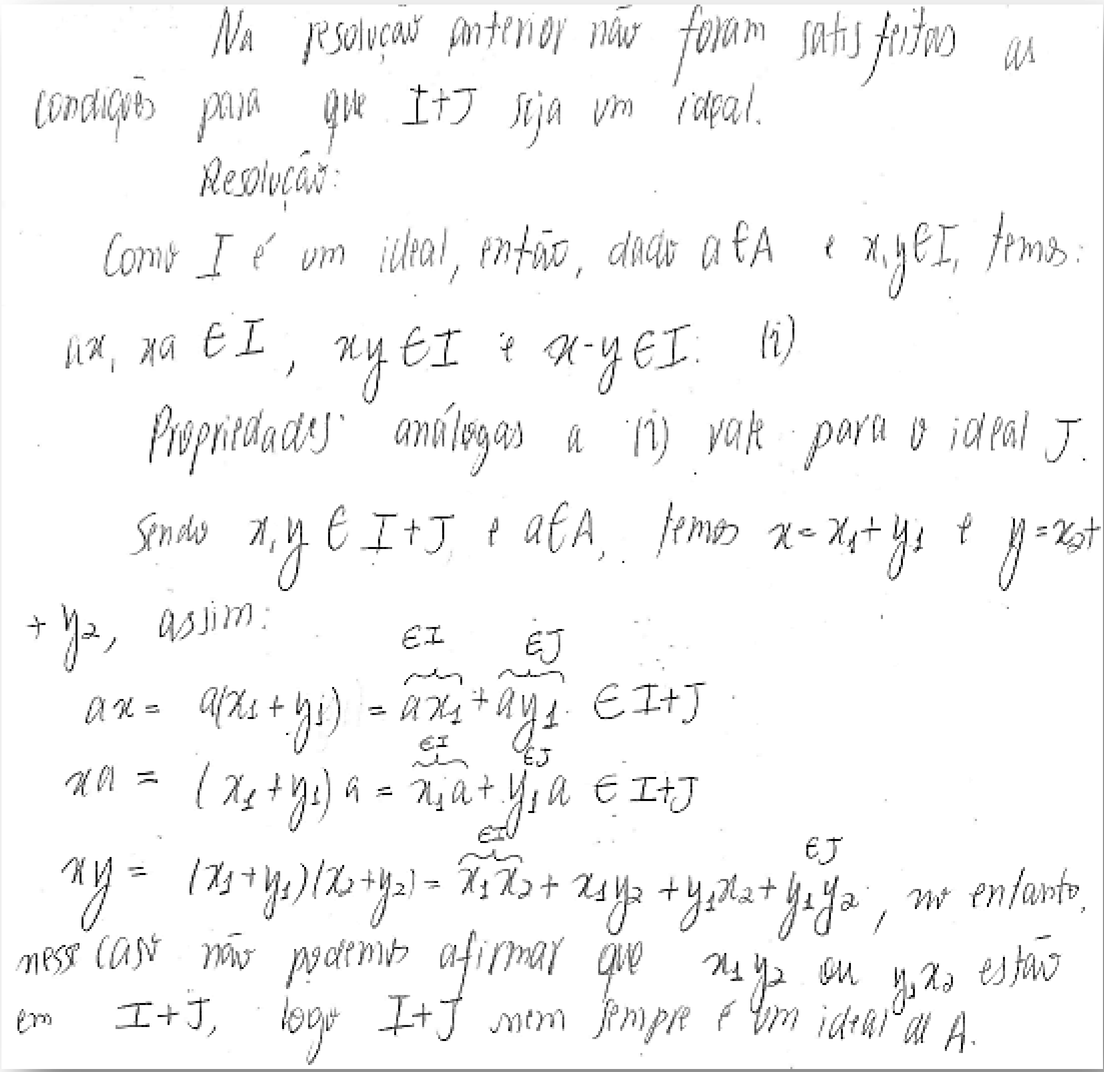
Figura 47 – Tarefa 3 do estudante E5 (primeira fase)


Dado $x, y \in I+J$, temos $x = x_1+y_1$ e $y = x_2+y_2$, com $x_1, x_2 \in I$ e $y_1, y_2 \in J$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa etapa, era preciso assumir $x = x_1 - y_1$ e $y = x_2 - y_2$, para satisfazer a definição de ideal. Com isso, identifica-se que o estudante conhece parcialmente os conceitos relacionados à proposição. De acordo com Tall (2007b, 2008), há um indício de que foram mobilizados processos mentais do mundo corporificado e simbólico para essa resolução e não foi realizada uma demonstração correta, mas a estruturação dos argumentos, mesmo com o erro, remete ao fato que o estudante conhece algo sobre as formas de provas e demonstrações, pois utiliza os seus conhecimentos sobre o conteúdo para apresentar um argumentação na sua resolução. Na segunda fase, foi questionado ao aluno se foram satisfeitas as condições para I + J ser um ideal, e solicitado, também, que ele justificasse o posicionamento exposto. O estudante apresentou a seguinte modificação.

Figura 48 – Tarefa 3 do estudante E5 (segunda fase)


Na resolução anterior não foram satisfeitas as condições para que $I+J$ seja um ideal.

Resolução:

Como I é um ideal, então, dado $a \in A$ e $x, y \in I$, temos:

ax, $xa \in I$, $xy \in I$ e $x-y \in I$. (i)

Propriedades análogas a (i) vale para o ideal J.

Sendo $x, y \in I+J$ e $a \in A$, temos $x = x_1 + y_1$ e $y = x_2 + y_2$, assim:

$$ax = a(x_1+y_1) = \overbrace{ax_1}^{\in I} + \overbrace{ay_1}^{\in J} \in I+J$$

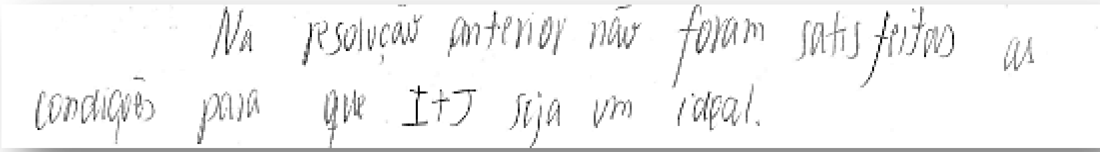
$$xa = (x_1+y_1)a = \overbrace{x_1a}^{\in I} + \overbrace{y_1a}^{\in J} \in I+J$$

$$xy = (x_1+y_1)(x_2+y_2) = \overbrace{x_1x_2}^{\in I} + x_1y_2 + y_1x_2 + \overbrace{y_1y_2}^{\in J}$$, no entanto, nesse caso não podemos afirmar que x_1y_2 ou y_1x_2 estão em $I+J$, logo $I+J$ nem sempre é um ideal de A.

Fonte: Dados da pesquisa.

Segundo Skemp (2002), ao refletir sobre a tarefa e apresentar as justificativas, o estudante expõe um pensamento relacional. Observa-se, com base no que ele respondeu ao questionamento, que a questão apresentada no registro escrito provocou um processo de reflexão no aluno, de tal modo que ele modificou a solução. Veja o destaque.

Figura 49 – Tarefa 3 do estudante E5 (segunda fase)


Na resolução anterior não foram satisfeitas as condições para que I+J seja um ideal.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução, foi definido corretamente um ideal, mas a manipulação simbólica empregada no processo de demonstração compromete o resultado, produzindo uma sequência lógica dedutiva inconsistente.

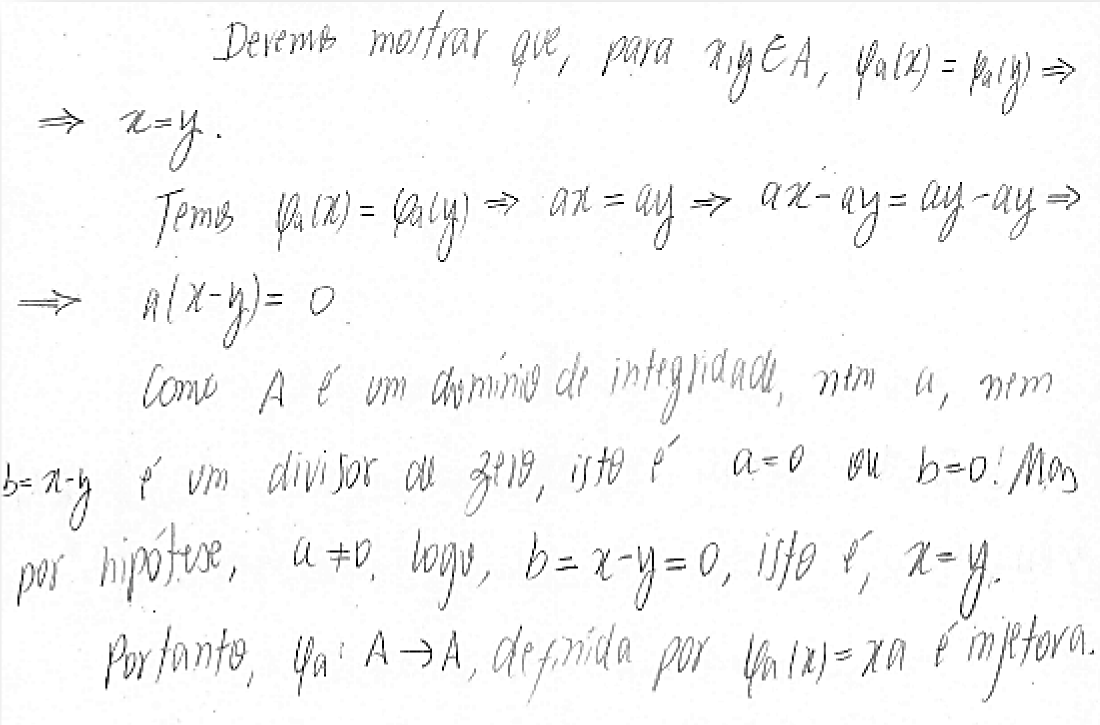
De acordo com Dreyfus (1991), processos mentais como formalização e prova da proposição, relacionados à abstração, foram mobilizados, além dos processos mentais envolvidos na representação como a visualização, a conjectura de ideias, o reconhecimento e a manipulação de símbolos. Desse modo, o estudante está em um processo de compreensão da tarefa desenvolvida, mas mostra que ainda existem erros conceituais.

Com base em Tall (2011), com relação ao processo de prova da proposição, o estudante tem reconhecimento perceptivo, utiliza uma representação simbólica, apresenta conceitos e definições, mas ainda não dispõe de uma maturação no processo de desenvolvimento da demonstração. Diante disso, de acordo com Tall (2007b, 2008), o estudante transita entre o mundo simbólico e formal, apresentando indícios de mobilização de processos mentais necessários para o PMA, mas ainda está em um processo de transição do PME para o PMA. Segundo esse autor, para haver a compreensão por parte do estudante, é preciso realizar procedimentos parciais e, por meio das experiências, vão se construindo as *met-befores*, e os processos mentais tornam-se cada vez mais sofisticados.

4. Seja A um domínio de integridade. Prove que se $\alpha \in$ A e $\alpha \neq 0$, então a função $\varphi_a: A \to A$, dada por $\varphi_a(x) = ax$ é injetora.

O estudante não desenvolveu a tarefa na primeira fase. De acordo com De Lange (1987), isso é um indicador de que o estudante não sabia como resolver a questão naquele momento. Já na segunda fase, apresentou o seguinte registro.

Figura 50 – Tarefa 4 do estudante E5 (segunda fase)



Devemos mostrar que, para $x, y \in A$, $\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = y$.
Temos $\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow ax - ay = ay - ay \Rightarrow$
$\Rightarrow a(x-y) = 0$
Como A é um domínio de integridade, nem a, nem
$b = x-y$ é um divisor de zero, isto é $a = 0$ ou $b = 0$! Mas
por hipótese, $a \neq 0$. logo, $b = x - y = 0$, isto é, $x = y$.
Portanto, $\varphi_a : A \to A$, definida por $\varphi_a(x) = xa$ é injetora.

Fonte: Dados da pesquisa.

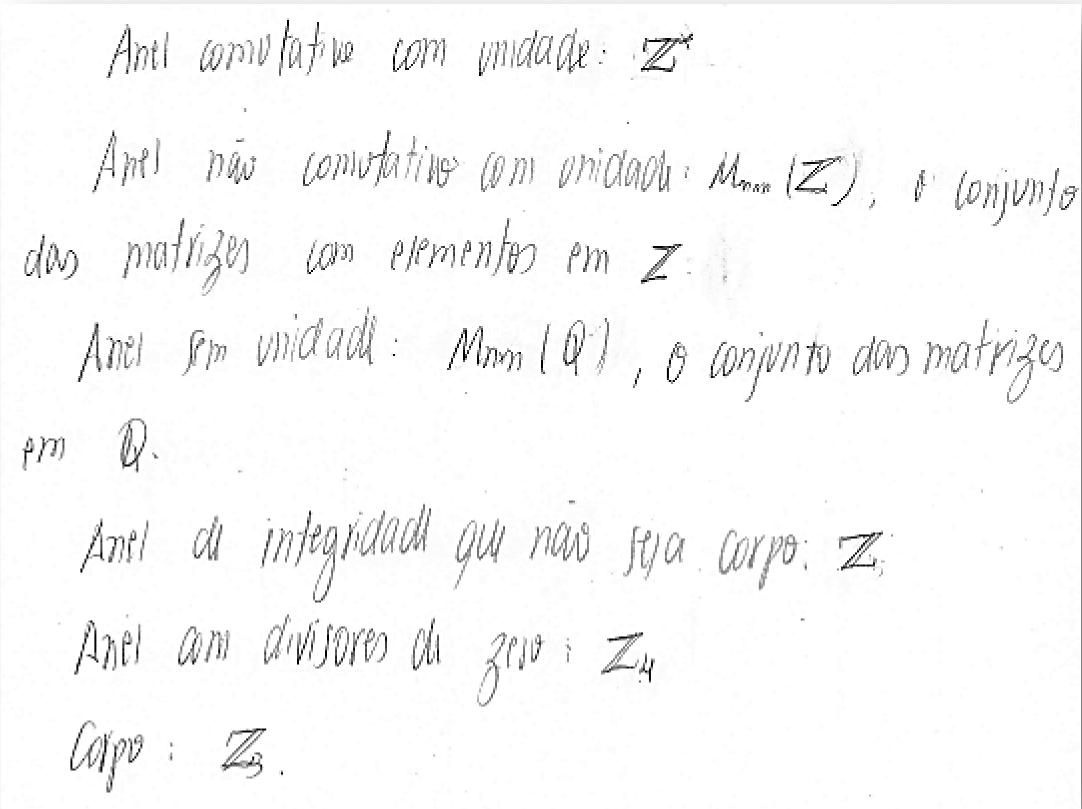
Nessa fase, o estudante complementa sua resolução com uma prova formal para a tarefa, o que indica um processo reflexivo entre uma fase e outra. A sequência lógica dedutiva está coerente, e foi utilizado o fato de A ser domínio de integridade dado na proposição. Além disso, o estudante conhece o conceito de função injetora, e foi aplicada a forma de demonstração pela contrapositiva. De acordo com Dreyfus (1991), foram mobilizados processos mentais envolvidos na visualização, como o reconhecimento e a manipulação de símbolos, a tradução, a flexibilização e a compreensão do conceito de função injetora.

Tem-se, ainda, que há formalização na composição de uma demonstração matemática, devido ao uso da forma contrapositiva aplicada na definição de função injetora, indicando que o estudante conhece as formas de demonstrações por meio da formalização e da prova parcial da proposição, sendo esses processos mentais envolvidos na abstração. Segundo Tall (2007b, 2008), a forma de resolução indica uma transição entre os mundos simbólico e formal, e como o estudante resolveu a questão com consulta e após um período de revisão de conteúdos, verificam-se indícios de mobilização de processos mentais envolvidos na transição do PME para o PMA.

6. Dê um exemplo de cada tipo dos seguintes anéis: Anel comutativo com unidade; Anel não comutativo com unidade; Anel sem unidade; Anel de integridade que não seja corpo; Anel com divisores de zero; Corpo.

O estudante não desenvolveu a tarefa na primeira fase. Já na segunda fase, apresentou o seguinte registro.

Figura 51 – Tarefa 1 do estudante E5 (segunda fase)


Anel comutativo com unidade: $\mathbb{Z}^*$

Anel não comutativo com unidade: $M_{n\times n}(\mathbb{Z})$, o conjunto das matrizes com elementos em $\mathbb{Z}$.

Anel sem unidade: $M_{n\times m}(\mathbb{Q})$, o conjunto das matrizes em $\mathbb{Q}$.

Anel de integridade que não seja corpo: $\mathbb{Z}$;

Anel com divisores de zero: $\mathbb{Z}_4$

Corpo: $\mathbb{Z}_3$.

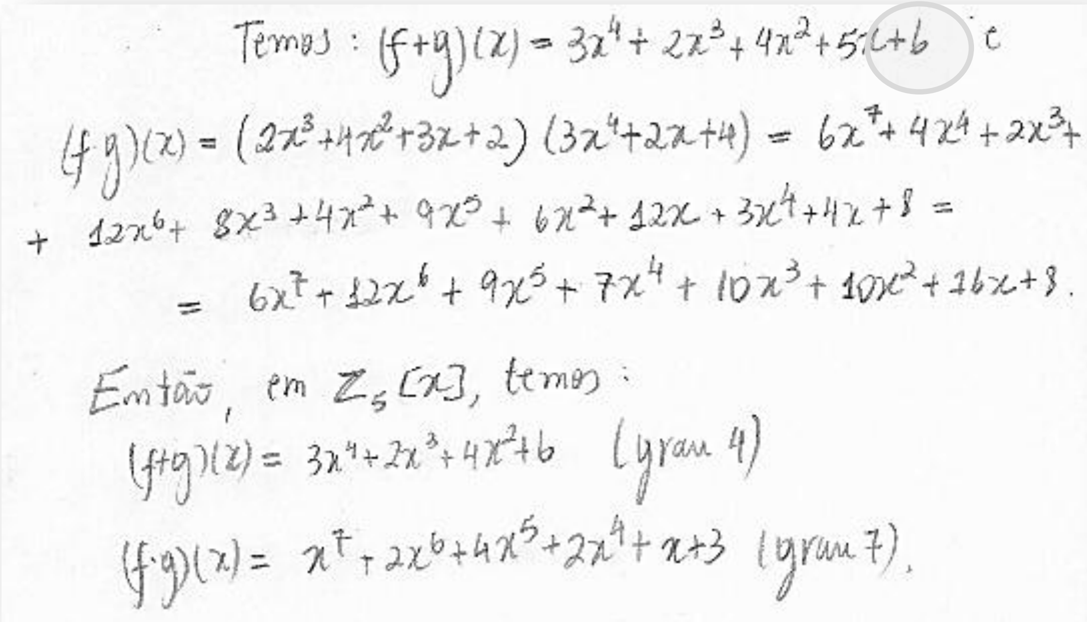
Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa tarefa, o estudante resolveu a tarefa coerentemente, realizando-a com consulta. Com base em Tall (2007b, 2008), no período entre as fases, ocorreram ações que possibilitam a construção de *met-befores* que ampliaram as concepções do estudante sobre essa tarefa. Nessa questão, é necessária a compreensão dos conceitos relacionados ao anel, sendo imperativo um processo de generalização e de formalização, com base em Dreyfus (1991), e no caso específico do estudante, esse processo, realizado somente na segunda fase, evidencia uma transição entre o PME e PMA na realização da tarefa.

7. Encontre a soma e o produto dos seguintes polinômios: $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ e $g(x) = 3x^4 + 2x + 4$ em $\mathbb{Z}_5[x]$. Calcule o grau de $f + g$ e o grau de fg.

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 52 – Tarefa 7 do estudante E5 (primeira fase)


Temos: $(f+g)(x) = 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 6$

$(f \cdot g)(x) = (2x^3+4x^2+3x+2)(3x^4+2x+4) = 6x^7 + 4x^4 + 2x^3 +$

$+ 12x^6 + 8x^3 + 4x^2 + 9x^5 + 6x^2 + 12x + 3x^4 + 4x + 8 =$

$= 6x^7 + 12x^6 + 9x^5 + 7x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 16x + 8.$

Então, em $\mathbb{Z}_5[x]$, temos:

$(f+g)(x) = 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6$ (grau 4)

$(f \cdot g)(x) = x^7 + 2x^6 + 4x^5 + 2x^4 + x + 3$ (grau 7).

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante resolveu a tarefa, sem consulta. Com base em De Lange (1987), ele mostrou o que sabe a respeito dos conceitos relacionados à tarefa. A resolução apresentada está incorreta, tanto para a soma como para o produto, houve erros no resultado da soma referente ao agrupamento dos termos, mas esse item não foi detalhado. Já no produto de $f(x) \cdot g(x)$ ocorre erro na realização da distributiva da multiplicação em relação à adição, o estudante multiplica apenas monômios com coeficiente literal e coeficientes numéricos com o outro coeficiente numérico, e comete erros no processo multiplicativo, além disso, não foram consideradas as operações em $\mathbb{Z}_5[x]$, em que os coeficientes são números inteiros pertencentes à classe de restos {0,1,2,3,4}, indicando dificuldades relativas à interpretação do enunciado e ao uso da notação específica. Observe o destaque do erro de agrupamento de polinômios na adição.

Figura 53 – Tarefa 7 do estudante E5 (primeira fase)

Temos : $(f+g)(x) = 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ c

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, segue o destaque do erro de agrupamento de polinômios no produto.

Figura 54 – Tarefa 7 do estudante E5 (primeira fase)

$$(f \cdot g)(x) = (2x^3+4x^2+3x+2)(3x^4+2x+4) = 6x^7 + 4x^4 + 2x^3 +$$

$$+ 12x^6 + 8x^3 + 4x^2 + 9x^5 + 6x^2 + 12x + 3x^4 + 4x + 8 =$$

$$= 6x^7 + 12x^6 + 9x^5 + 7x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 16x + 8.$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Segundo Skemp (2002), ao operar considerando o conjunto dos números reais e cometer erros associados à manipulação simbólica, isso indica um procedimento instrumental. Com base em Dreyfus (1991), foram mobilizados processos mentais como visualizar, reconhecer, traduzir, reconhecer e manipular símbolos, envolvidos na representação, com base em Tall (2008, 2011) ocorreu a formalização da solução, mas como há erros conceituais no desenvolvimento, não há uma sequência lógica dedutiva adequada para a prova formal, indicando uma compreensão procedimental na qual está nos estágio inicial do desenvolvimento da prova.

Dessa forma, de acordo com Tall (2007b, 2008), o estudante transita entre os mundos corporificado e simbólico, apresentando dificuldades decorrentes da sua aprendizagem inicial com polinômios, indicando características de mobilização do PME, mas a estrutura apresentada mostra que ele sabia como demonstrar o resultado da proposição, que não foi satisfatório devido aos erros conceituais, indicando uma transição entre o PME e PMA. Na segunda fase, foi questionado se ele mudaria ou complementaria a resolução da atividade e solicitado que justificasse o posicionamento apontado. O estudante manteve a resolução.

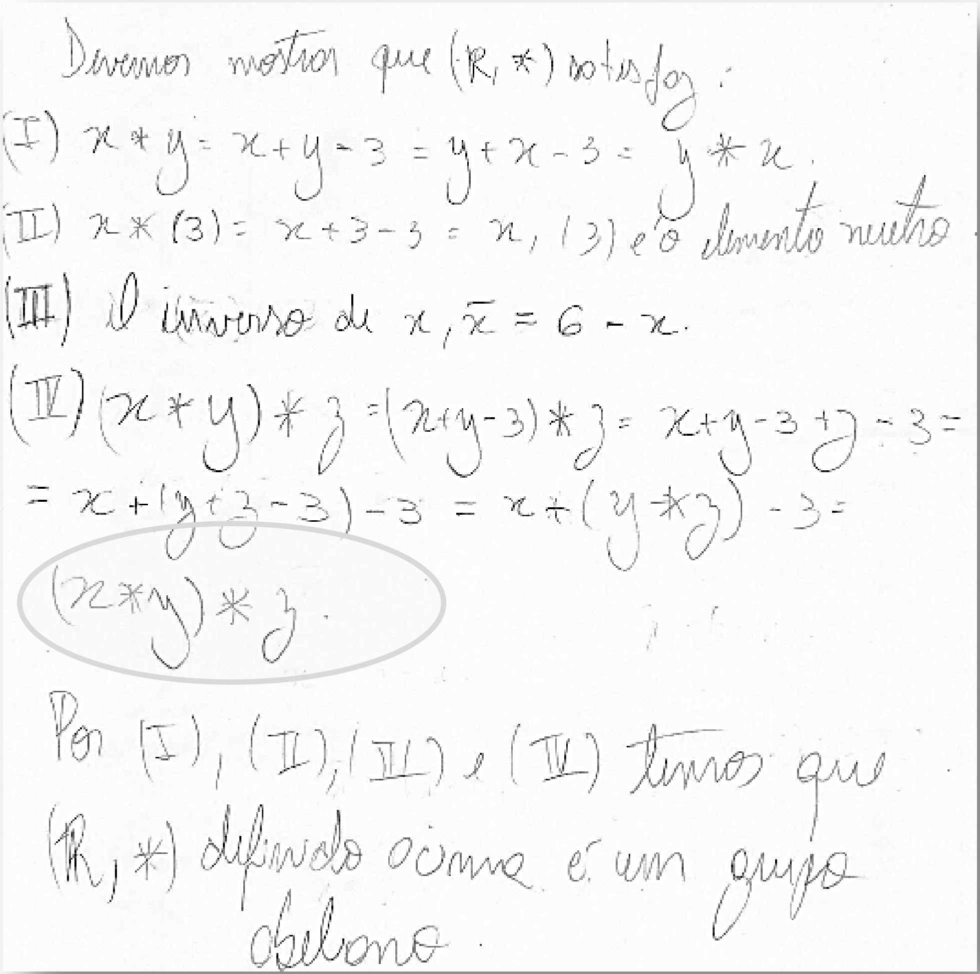
5.4 Análises das tarefas do estudante E6

A seguir, apresentam-se as análises de cada questão realizada pelo aluno E6 quanto ao desenvolvimento das tarefas em ambas as fases.

1. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais com a operação de adição usual e suas propriedades. Considere a operação * sobre $\mathbb{R}$ dada por $x * y = x + y - 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ com a operação * é grupo abeliano?

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 55 – Tarefa 1 do estudante E6 (primeira fase)


Devemos mostrar que $(\mathbb{R}, *)$ satisfaz:

(I) $x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x$.

(II) $x * (3) = x + 3 - 3 = x$, (3) é o elemento neutro.

(III) O inverso de x, $\bar{x} = 6 - x$.

(IV) $(x * y) * z = (x + y - 3) * z = x + y - 3 + z - 3 =$

$= x + (y + z - 3) - 3 = x + (y * z) - 3 =$

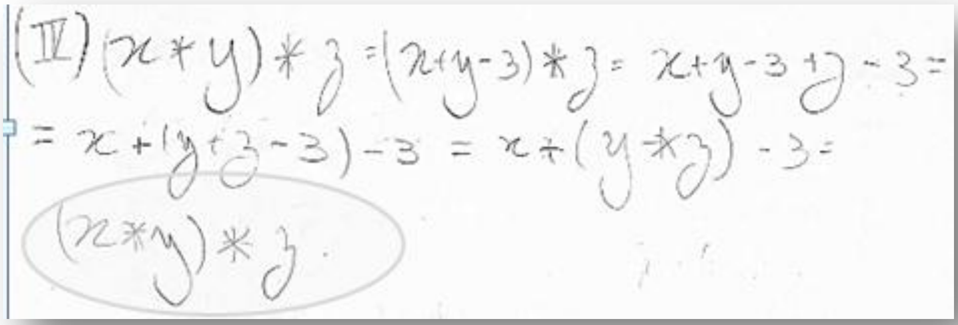
$(x * y) * z$.

Por (I), (II), (III) e (IV) temos que $(\mathbb{R}, *)$ definido como é um grupo abeliano.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução da questão, o estudante apresentou as propriedades relativas ao grupo abeliano, mas de forma sucinta e sem a preocupação de textos que direcionassem as etapas da prova formal. A demonstração é parcial, não distinguiu as propriedades exclusivas de grupo e o que caracteriza um grupo abeliano, e na demonstração da propriedade associativa, indicada no item IV, não concluiu adequadamente a manipulação algébrica. Observe o destaque.

Figura 56 – Tarefa 1 do estudante E6 (primeira fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

No registro escrito para a segunda fase, realizou-se o seguinte questionamento: “Você mudaria ou complementaria a resolução? Justifique.”. O estudante não modificou a resolução. De acordo com De Lange (1987), foram aplicados os conceitos que o estudante conhece, pois foi a resolução na primeira fase, na qual o estudante resolve as tarefas sobre as quais possui conhecimentos prévios. Entende-se, ainda, que foi aplicado um pensamento instrumental na resolução, pouco reflexivo, de acordo com Skemp (2002).

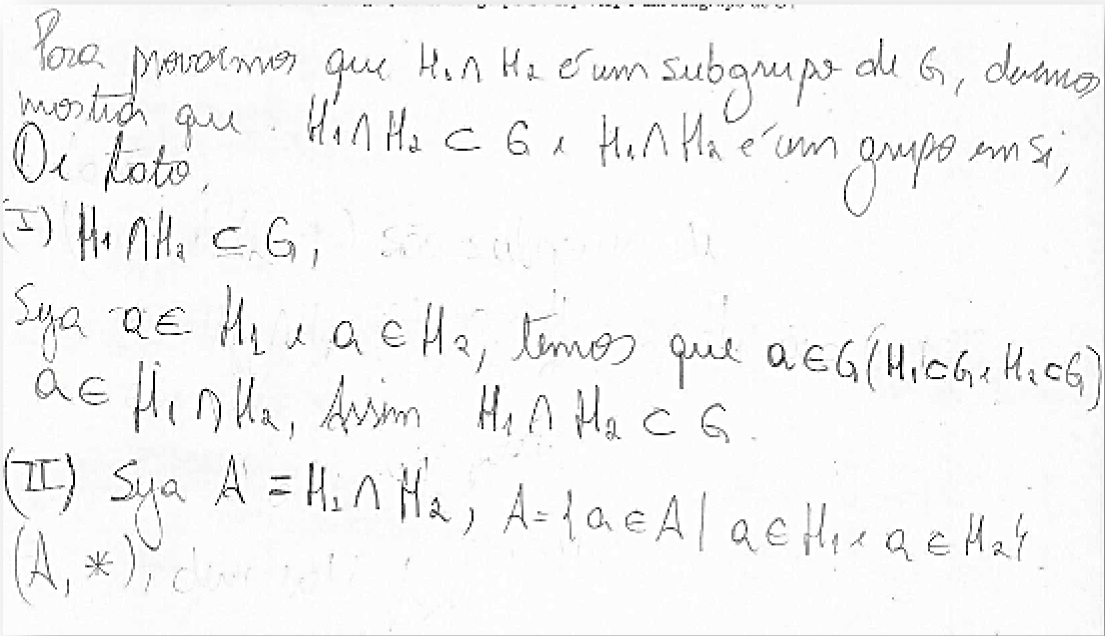
Conforme Dreyfus (1991), pôde-se detectar outras formas de processos mentais envolvidos na representação, como visualizar, representar, reconhecer símbolos, manipular símbolos e definir, o que indica um processo inicial de formalizar a demonstração matemática. Entretanto, há dificuldades em gerenciar a complexidade da questão, indicando uma forma de PME.

Identifica-se por meio das características indicadas anteriormente, de acordo com Tall (2008), que o estudante transita pelo mundo simbólico, pelo fato de manipular parcialmente correto os procedimentos algébricos envolvidos, mas é possível perceber que ele não possui um pensamento flexível para organizar sua enunciação, provando formalmente a proposição apresentada na tarefa, por meio de uma sequência lógica dedutiva, que é um processo mental característico da abstração, o que indica indícios de PME. Entretanto, o estudante compreende a necessidade de demonstrar, conhece a definição de grupo abeliano ao elencar as quatro propriedades a serem demonstradas e mostra conhecer alguns símbolos utilizados nas estruturas algébricas indicando uma transição do PME para o PMA.

2. Sejam H_1 e H_2 subgrupos de um grupo G. $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G?

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 57 – Tarefa 2 do estudante E6 (primeira fase)



Para provarmos que $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G, devemos mostrar que $H_1 \cap H_2 \subset G$ e $H_1 \cap H_2$ é um grupo em si;
De fato,
(I) $H_1 \cap H_2 \subseteq G$,
Seja $a \in H_1$ e $a \in H_2$, temos que $a \in G$ $(H_1 \subset G$ e $H_2 \subset G)$
$a \in H_1 \cap H_2$, Assim $H_1 \cap H_2 \subset G$.
(II) Seja $A = H_1 \cap H_2$, $A = \{a \in A \mid a \in H_1$ e $a \in H_2\}$
$(A, *)$,

Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução do estudante, foi demonstrado que a interseção de dois subgrupos é um subconjunto de G, entretanto, ele não mostrou que a operação é fechada, nem a existência do elemento neutro e que todo elemento admite o elemento simétrico, requisitos necessários para se ter um subgrupo, evidenciando que o estudante conhece parcialmente a definição de subgrupo.

No item II, inicia-se uma argumentação, mas não há continuidade na resolução. Inicialmente, o estudante mostrou que conhece parcialmente o conceito de subgrupo, com base em Skemp (2002), tem-se uma forma de pensamento instrumental, no qual o estudante mostra uma sequência de argumentos a respeito do que ele conhece sobre o assunto.

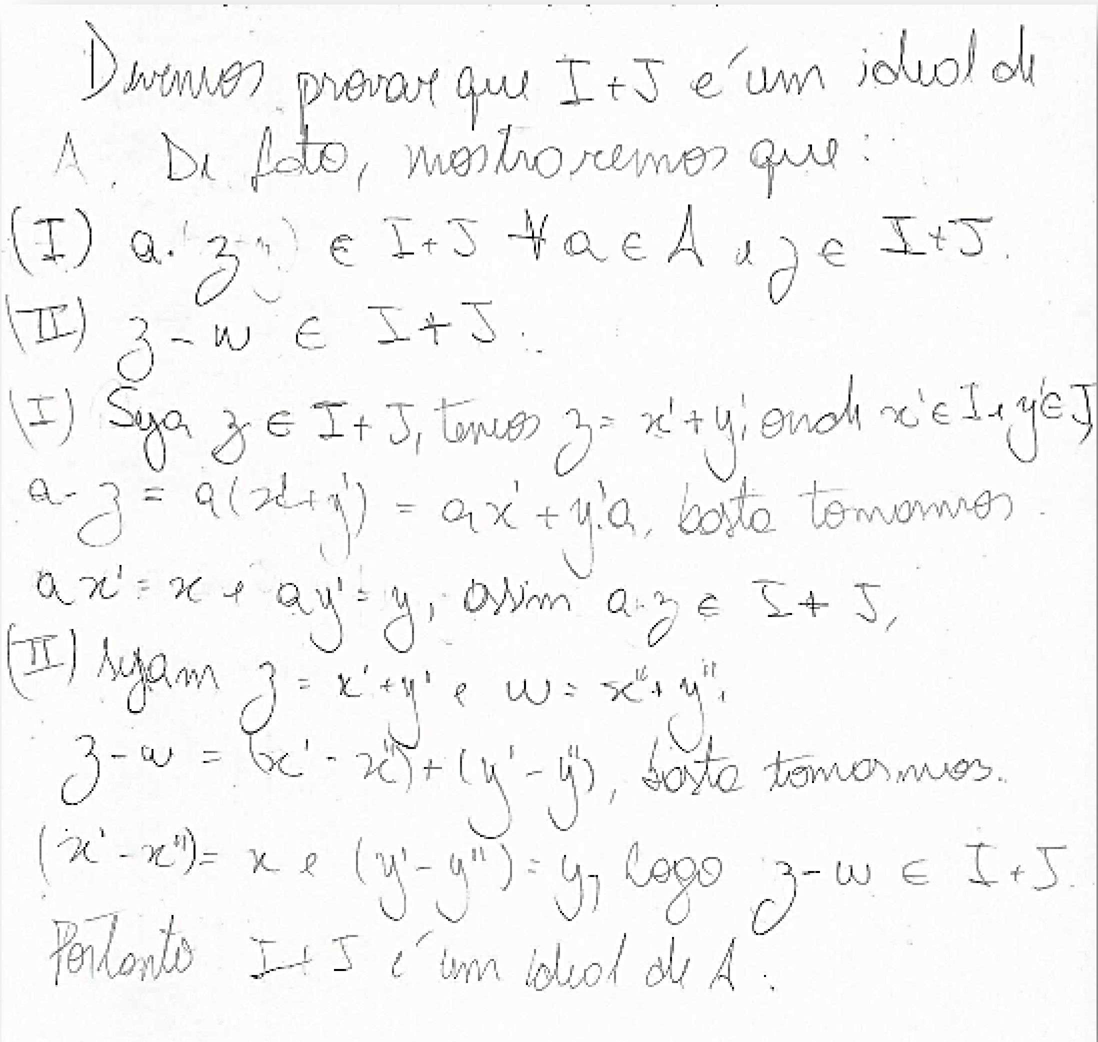
De acordo com Dreyfus (1991), foram mobilizados processos mentais como a visualização, o reconhecimento e a manipulação simbólica, e identifica-se que o estudante apresenta dificuldades para realizar a prova formal da proposição, tendo dificuldade, também, para gerenciar a complexidade de processos mentais envolvidos na resolução da tarefa, mas é notório que ele conhece algo sobre os conceitos abstratos relacionados à tarefa. Por não apresentar a definição do conceito e uma prova formal, entende-se que nessa tarefa foram mobilizados processos mentais envolvidos no PME. Segundo Tall (2007b, 2008), o estudante transita entre os mundos corporificados e simbólicos, mas desconhece o conceito de subgrupo e uma forma de demonstração para a proposição.

Na segunda fase, foi questionado se foram satisfeitas as condições para que $H_1 \cap H_2$ seja subgrupo, e solicitado que o estudante justificasse a resposta dada. O estudante não modificou a resolução.

3. Sejam I e J ideais de um anel A. I+J = $\{x + y : x \in I \ e \ y \ \in J\}$ é um ideal de A?

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 58 – Tarefa 3 do estudante E6 (primeira fase)



Devemos provar que $I+J$ é um ideal de A. De fato, mostraremos que:

(I) $a \cdot z \in I+J \ \forall a \in A$ e $z \in I+J$.

(II) $z - w \in I+J$.

(I) Seja $z \in I+J$, temos $z = x' + y'$ onde $x' \in I$ e $y' \in J$

$a \cdot z = a(x'+y') = ax' + y'a$, basta tomarmos

$ax' = x$ e $ay' = y$, assim $a \cdot z \in I+J$,

(II) sejam $z = x' + y'$ e $w = x'' + y''$.

$z - w = (x' - x'') + (y' - y'')$, basta tomarmos

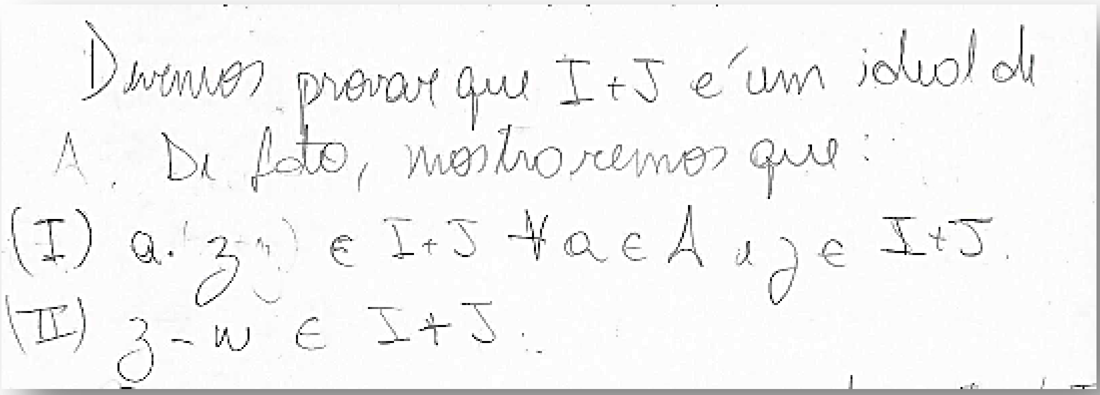
$(x' - x'') = x$ e $(y' - y'') = y$, logo $z - w \in I+J$.

Portanto $I+J$ é um ideal de A.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa resolução, o estudante conhece qual é a definição de um Ideal sobre um anel A, pois no início da resolução apresenta quais são as propriedades que devem ser satisfeitas. Observe o destaque.

Figura 59 – Tarefa 3 do estudante E6 (primeira fase)



Devemos provar que $I+J$ é um ideal de A. De fato, mostraremos que:

(I) $a \cdot z \in I+J \ \forall a \in A$ e $z \in I+J$.

(II) $z - w \in I+J$.

Fonte: Dados da pesquisa.

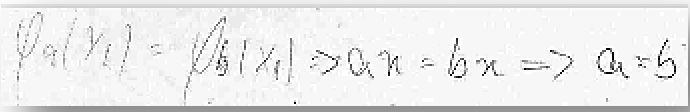
A demonstração possui uma sequência lógica dedutiva coerente, mas suprime algumas etapas que requerem manipulação algébrica, tanto na propriedade I quanto na propriedade II. Com base em Tall (2011), a respeito do processo de prova da proposição, o estudante possui reconhecimento perceptivo, utiliza uma representação simbólica, apresenta conceitos e definições, mostra indícios de compreender o processo de desenvolvimento da demonstração, o que indica o desenvolvimento de estruturas mentais de conhecimento dedutivo, o que seriam sinais de mobilização de processos mentais envolvidos na representação e abstração essenciais para o PMA. Considerando que, de acordo com De Lange (1987), o estudante apresentou essa resolução na primeira fase, sem consulta, isso comprova o que ele sabe a respeito dos conceitos abordados.

Com base em Dreyfus (1991), foram mobilizados processos mentais de formalização e de prova, envolvidos na abstração, e outros processos mentais como visualizar, conjecturar, definir, reconhecer e manipular símbolos, flexibilizar e compreender os processos envolvidos na representação. Na segunda fase, foi questionado se ele mudaria ou complementaria a resolução, sendo pedido, ainda, que o estudante justificasse o posicionamento indicado. Ele não modificou a resolução, o que reforça o fato de que compreende os conceitos envolvidos na demonstração e que, mesmo com consulta, não optou por modificar ou por complementar a realização da tarefa.

4. Seja A um domínio de integridade. Prove que se $\alpha \in$ A e $\alpha \neq 0$, então a função $\varphi_a: A \to A$, dada por $\varphi_a(x) = ax$ é injetora.

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 60 – Tarefa 4 do estudante E6 (primeira fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante demonstra conhecer a definição de função injetora, mas não recorre ao fato de existir um domínio de integridade para justificar a argumentação, indicando o que conhece a respeito da tarefa. De acordo com Skemp (2002), se o estudante sabe algo sobre o conceito de função, mas não é apresentada uma forma de demonstração satisfatória, indica que há um pensamento instrumental envolvido na realização da tarefa, pois o conceito de função não é relacionado com a hipótese de A ser um domínio de integridade.

Segundo Dreyfus (1991), é possível verificar que, para resolver a tarefa, foram mobilizados processos mentais envolvidos na representação, como visualizar, reconhecer e manipular símbolos, em que há uma formalização parcial do conceito, mas não uma prova formal, pois a sequência lógica dedutiva está incompleta. Com isso, verificam-se indícios de um processo de transição do PME para o PMA, com base em Tall (2007b, 2008).

Na segunda fase, foi questionado qual a implicação de A ser domínio de integridade, e o estudante apagou a resolução anterior e não modificou a resolução, indicando que refletiu sobre a pergunta, mas não soube responder.

6. Dê um exemplo de cada tipo dos seguintes anéis: Anel comutativo com unidade; Anel não comutativo com unidade; Anel sem unidade; Anel de integridade que não seja corpo; Anel com divisores de zero; Corpo.

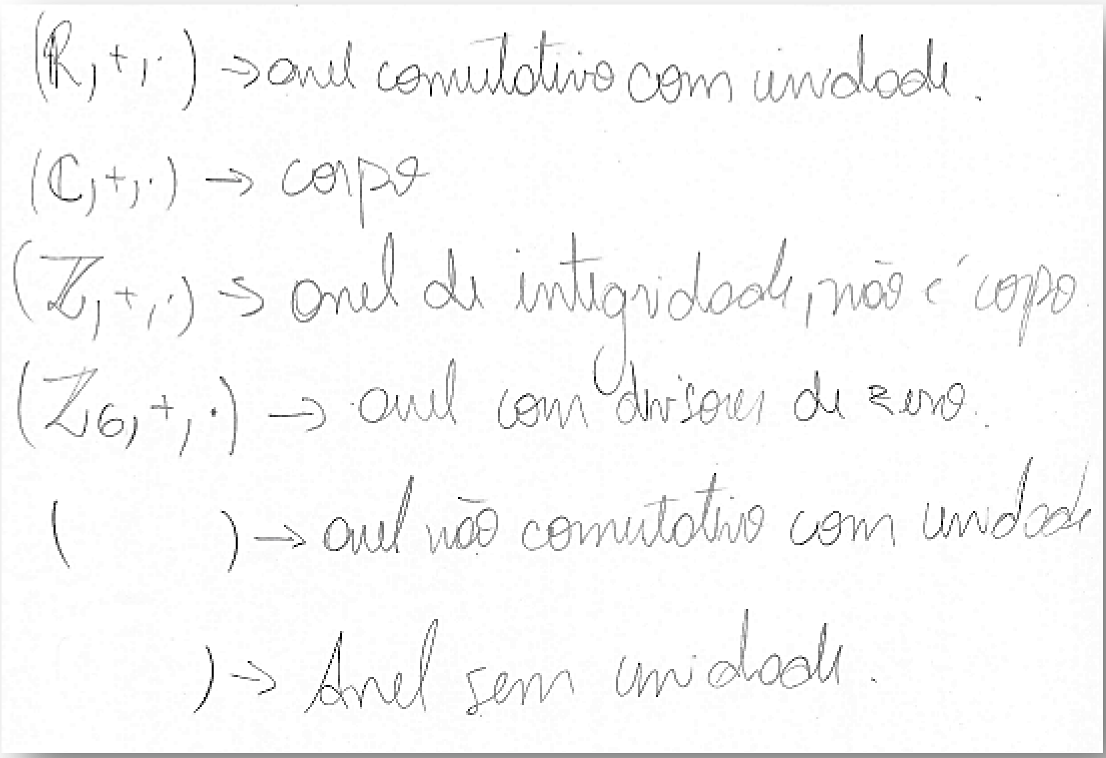
Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

Figura 61 – Tarefa 6 do estudante E6 (primeira fase)

Fonte: Dados da pesquisa.

Essa tarefa compreende um exemplo que satisfaz dois tipos de anéis, indicando o que o estudante conhecia. Para lidar com a diversidade de exemplos solicitados, é preciso ter construído um pensamento relacional, com base em Skemp (2002), e verificamos o estudante apresentou dificuldades nesse processo por apresentar uma resolução parcial. Na segunda fase, foi questionado a respeito de que outros exemplos poderiam ser citados, e ele modificou a resolução conforme indicado a seguir.

Figura 62 – Tarefa 6 do estudante E6 (segunda fase)



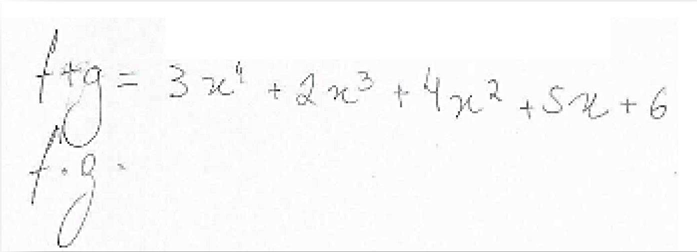
Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa fase, que foi realizada com consulta, o estudante pôde apresentar outros exemplos. A resolução foi parcial, mostrando dificuldades em identificar o anel não comutativo com unidade e o anel sem unidade. Segundo Tall (2007b, 2008), no período entre as fases ocorreram ações que possibilitam a construção de *met-befores* que ampliaram as concepções do estudante sobre essa tarefa. Nessa questão, é exigida a compreensão dos conceitos relacionados ao anel, sendo necessário um processo de generalização e de formalização, baseado em Dreyfus (1991), e no caso específico do estudante, esse processo foi parcial, evidenciando uma transição entre o PME e PMA na realização da tarefa.

7. Encontre a soma e o produto dos seguintes polinômios: $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ e $g(x) = 3x^4 + 2x + 4$ em $\mathbb{Z}_5[x]$. Calcule o grau de $f + g$ e o grau de fg.

Na primeira fase, o estudante apresentou o seguinte resultado.

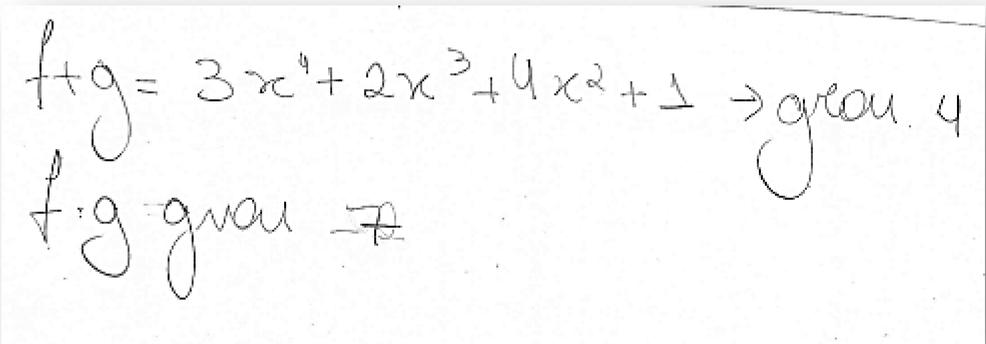
Figura 63 – Tarefa 7 do estudante E6 (primeira fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante resolveu somente a primeira parte da tarefa, sem consulta. Com base em De Lange (1987), ele mostrou o que sabe a respeito dos conceitos relacionados à tarefa. A resolução apresentada está incorreta, houve erro no resultado da soma referente ao agrupamento dos termos, mas esse item não foi detalhado, não foram consideradas as operações em $\mathbb{Z}_5[x]$, em que os coeficientes são números inteiros pertencentes à classe de restos {0,1,2,3,4}, indicando dificuldades relativas à interpretação do enunciado e ao uso da notação específica. Na segunda fase, foi questionado sobre qual corpo foi realizado a operação, e houve a seguinte modificação na resolução.

Figura 64 – Tarefa 7 do estudante E6 (segunda fase)



Fonte: Dados da pesquisa.

Na segunda fase, o estudante modificou a resolução, mas não realizou a demonstração dos resultados. No produto, indicou apenas o grau do polinômio, sem aplicar as operações com os polinômios. Segundo Skemp (2002), a resolução é parcial e visa ao resultado final, sem os procedimentos aplicados, indicando um procedimento instrumental. Com base em Dreyfus (1991), foram mobilizados processos mentais como visualizar, reconhecer e traduzir, envolvidos na representação. De acordo com Tall (2007b, 2008), o estudante mostra indícios de mobilização do PME ao apresentar alguns passos para a resolução da tarefa, e devido à ausência de uma sequência lógica dedutiva para justificar os resultados apresentados, predomina a mobilização de processos do mundo corporificado.

5.5 Síntese das análises das tarefas dos estudantes

Em relação à análise descritiva, considerando a parte II das provas em fases nas tarefas realizadas, percebe-se que os estudantes conheciam os conteúdos abordados nas questões da categoria fácil e médio, indicadas por T1, T2, T3, T4, T6 e T7, e indicaram dificuldades relacionadas às definições de grupos, anéis, anéis ideais, anéis quocientes e anéis sobre polinômios. Já nas questões classificadas como difícil, indicadas por T5, T8, T9, T10, T11, T12 e T13, relacionadas às definições de maximal, propriedades e definições de anéis quocientes e anéis de polinômios, observou-se, por meio do acompanhamento das aulas junto do professor responsável da disciplina de Corpos e Extensões, que os estudantes conheciam, superficialmente, os tópicos mencionados, sendo que as demonstrações apresentadas pelo professor da disciplina compreendem uma forma de construção dos esquemas mentais, de acordo com Skemp (2002), ações necessárias para a compreensão dos conteúdos abordados.

Por meio da análise descritiva, obteve-se uma dimensão dos dados alcançados por meio da coleta de dados da pesquisa e, a partir das informações obtidas, entendeu-se que os estudantes E3, E4 e E7 apresentaram dificuldades em realizar a proposta de tarefas a respeito de estruturas algébricas, pois não realizaram nenhuma tarefa de modo coerente e satisfatório, com as respostas esperadas. Desse modo, verificam-se indícios de que esses estudantes estão em um mundo corporificado da Matemática, de acordo com Tall (2008), sendo mobilizados processos mentais decorrentes do PME, pois não gerenciam a complexidade envolvida nas tarefas propostas, de acordo com Dreyfus (1991), para a realização das tarefas, ou seja, não apresentam dados suficientes nos registros escritos para analisar indícios de Pensamento Matemático Avançado, não sendo considerados para a análise por estudante.

Quanto aos demais estudantes, E1, E2, E5 e E6, que realizaram as tarefas desde a primeira fase, complementando ou modificando na segunda fase, todos esses apresentaram uma flexibilidade de processos mentais, por meio das modificações ocorridas, por essa razão foram considerados para a análise por estudante.

Além disso, por participarem em ambas as aplicações, possibilitaram buscar evidências, fazer comparações e, assim, expor os resultados obtidos, baseados no referencial teórico. Por meio da síntese a seguir, formulam-se considerações referentes às análises por estudante.

Quadro 17 – Síntese da análise da prova em fases

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">TAREFA</td><td>T1</td><td>T2</td><td>T3</td><td>T4</td><td>T6</td><td>T7</td></tr>
<tr><td rowspan="8">ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO COGNITIVO</td><td rowspan="3">Mobilização de processos mentais por meio de set-befores ou met-befores</td><td colspan="2">Codificação perceptiva do meio exterior</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desenvolvimento de processos mentais entre as fases</td><td>E5</td><td>E1
E2
E5</td><td>E1
E2</td><td>E1
E5</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Externalização do conhecimento adquirido e formulação de novos conceitos por meio de registros escritos</td><td>E5</td><td>E2
E5</td><td>E2</td><td>E1
E5</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Indícios do PME ou PMA</td><td colspan="2">Gerenciamento de processos mentais simples e procedimental</td><td>E1
E5
E6</td><td>E1
E2
E5</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Transição entre os três mundos da Matemática</td><td>Corporificado</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td></tr>
<tr><td>Simbólico</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td><td>E1
E2
E5
E6</td></tr>
<tr><td>Formal</td><td>E2</td><td>E2
E6</td><td></td><td>E2
E5</td><td>E5
E6</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Gerenciamento de processos mentais complexos e flexíveis</td><td>E2</td><td>E6</td><td></td><td>E2
E5</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Do próprio autor.

Os estudantes E1, E2, E5 e E6 resolveram todas as tarefas analisadas, desse modo, em cada uma delas realizaram uma codificação perceptiva do mundo exterior, por meio da mobilização de processos mentais aplicados nas resoluções. É possível, nesse cenário, destacar o seguinte.

- O estudante E1 resolveu, parcialmente, todas as tarefas analisadas, sendo que a T1 foi resolvida, exclusivamente, na primeira fase, as tarefas T2, T4 e T6 foram resolvidas na primeira fase, e as tarefas T3 e T7 foram desenvolvidas, exclusivamente, na segunda fase. O estudante apresentou dificuldades no desenvolvimento das tarefas, de modo que não houve demonstrações formais em seus resultados, mas foram aplicadas sequências de procedimentos que mostram uma compreensão do processo de prova, desse modo, entende-se que o estudante está mobilizando processos mentais relativos ao PME e ao PMA, indicando uma transição entre essas formas de pensamento.
- O estudante E2 resolveu a T1 e a T4, exclusivamente, na primeira fase, apresentando indícios de mobilização de processos mentais relativos ao PMA. A T2 e T3 foram resolvidas na primeira fase e modificadas na segunda, indicando um processo reflexivo que mobiliza processos mentais relativos ao PME e ao PMA. A T7 foi resolvida, exclusivamente, na primeira fase, mas com erros conceituais, indicando uma mobilização de processos mentais relativos ao PME e ao PMA, indicando uma transição entre ambos.
- O estudante E5 resolveu parcialmente as tarefas T1, T2 e T4, realizando modificações na segunda fase, porém sem provas formais, demonstrando mobilização de processos mentais relativos ao PME e ao PMA. A T6 foi resolvida corretamente e exclusivamente na segunda fase, e a T7 foi resolvida, exclusivamente, na primeira fase, de modo parcialmente correta, evidenciando um processo de mobilização de processos mentais decorrentes da transição do PME para o PMA nessas questões.
- O estudante E6 resolveu, exclusivamente na primeira fase, as tarefas T1, T2, T3, T4 E T7, indicando a mobilização de processos mentais relativos à transição do PME para o PMA. A T6 foi a única tarefa que o estudante modificou na segunda fase, complementando a resolução. Desse modo, percebe-se que o estudante optou por não reestruturar as suas resoluções na segunda fase.

A seguir, serão apresentadas as considerações relativas ao desenvolvimento desta tese.

CONSIDERAÇÕES

Iniciamos essa pesquisa, investigando o desenvolvimento do pensamento matemático. Adotou-se como questão norteadora: Que processos mentais são mobilizados e que indícios existem a respeito do Pensamento Matemático Elementar e do Pensamento Matemático Avançado em tarefas sobre Estruturas Algébricas por meio de uma prova em fases? Definiu-se como objetivo da pesquisa, investigar a mobilização de processos mentais entre o Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado.

Diante desse objetivo, realizou-se um estudo teórico e metodológico para planejar a condução dessa pesquisa, deste modo elaborou-se a fundamentação teórica tendo como base, principalmente, os referenciais de Skemp (2002), Dreyfus (1991), Tall (2007b, 2008, 2011) para subsidiar os estudos sobre o PMA e possibilitar as análises dessa pesquisa e, nos inspiramos em De Lange (1999) para a elaboração da prova em fases que foi o instrumento de coleta de dados para essa pesquisa.

Com relação às análises realizadas, teve duas etapas: a parte I da proposta de tarefas que nos auxiliou a conduzir as observações realizadas em sala de aula durante a pesquisa em campo, pois foi realizada na primeira fase e permitiu por meio de uma pré-análise a conhecer a concepção em relação à Matemática dos estudantes participantes da pesquisa e, a parte II que possibilitou realizar uma análise comparativa entre as resoluções apresentadas na primeira e segunda fase permitindo investigar as mobilizações de processos mentais entre o PME e PMA.

Quanto a análise específica da parte II, podemos destacar que os quatro estudantes analisados transitam entre os mundos corporificado e simbólico, mas apenas transitou para o mundo formal, o estudante E2 nas T1, T2 e T4. O estudante E5, nas T4 e T5, e o estudante E6 nas T2 e T6. A tarefa T6 foi modificada pelos quatro estudantes analisados na segunda fase, evidenciando um processo reflexivo sobre a resolução dessa tarefa. Em relação ao gerenciamento de processos mentais complexos e flexíveis, indicando a mobilização de processos mentais relativos ao PMA, tem-se o estudante E2 nas T1 e T4, o estudante E5 na T4, e o estudante E6 na T2.

Com base no exposto, evidenciam-se que os estudantes apresentaram mobilizações de processos mentais para o PME e para o PMA nas tarefas referentes às Estruturas Algébricas, desenvolvidas por meio da prova em fases, que foi o instrumento de coleta de dados para a obtenção dos registros escritos das análises. Nesse contexto, entende-se que a condução da pesquisa e os procedimentos metodológicos encaminhados possibilitaram atingir o objetivo proposto.

De modo geral, a pesquisa possibilita que professores de disciplinas relacionadas com as Estruturas Algébricas entendam quais são as principais dificuldades dos alunos durante as resoluções de tarefas, bem como a identificação de erros inerentes a essas resoluções. Também é possível ter parâmetros de processos mentais dos estudantes que são utilizados para resoluções dessas tarefas.

Além disso, a metodologia empregada nessa pesquisa pode ser aplicada em um plano de ensino, com adaptações, de modo que seja realizadas provas em fases, em diferentes momentos e conteúdos diversos, levando para a prática de sala de aula momentos que possibilitem aos alunos refletirem sobre suas resoluções de tarefas.

Entendem-se as limitações dessa pesquisa, pois temos um contexto limitado para abordar. Mas toda essa jornada percorrida foi de fundamental importância na formação da pesquisadora, pois foi possível compreender por meio do estudo teórico como os processos mentais interagem na mente de um sujeito e estabelecer um método de análise que identificasse mobilizações de processos mentais relativos ao PME e ao PMA.

As contribuições apresentadas permitem que outros docentes e pesquisadores tenham parâmetros para investigações na área da Educação Matemática, principalmente quanto ao Ensino Superior. Para dar continuidade a pesquisa, pretende-se investigar sobre procedimentos metodológicos conduzam ao desenvolvimento dos processos mentais envolvidos no PMA.

REFERÊNCIAS

BECKER, F.; Abstração pseudo-empírica e reflexionante: significado epistemológico e educacional. Schème - revista eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas. Volume 6 – novembro/ 2014. ISSN: 1984-1655. Disponível em http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme/article/download/4276/3105 . Acesso em 30 mar. 2018.

BOCK, A. B.; FURTADO, O.; TEIXEIRA, M. T. **Psicologias - uma introdução ao estudo de psicologia**. 13.ed. São Paulo: Saraiva. 1999. https://books.google.com.br/books?id=LAP2zSYhc9MC&lpg=PP1&hl=pt-BR&pg=PT41#v=onepage&q&f=false

BOYER, C. B.; MERZBACK, U. C.. **História da Matemática**. 2. Ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 2012.

BRANDEMBERG, J. C. . **Uma análise Histórico- Epistemológica do conceito de Grupo.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Universidade Rio Grande do Norte. Natal- RN, 2009.

CARMO, P.F. do; SOARES, M. R. ; SOUZA, H. T. de. **O pensamento matemático avançado em pesquisas**, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5294_2478_ID.pdf . Acesso em fev. 2017.

CARMO, P. F. do.. **Pensamento Matemático Avançado – como essa noção repercute em dissertações e teses brasileiras?.** Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. São Paulo- SP, 2018.

DE LANGE, J.. **Mathamatics, Insight and Meaning.** Utrecht: OW & OC, 1987.

De LANGE, J.. **Framework for classrom assessment inmathematics.** Utrecht: Freudenthal Intitute and National Center For Improvig Student Learning And Achievement in Mathematics and Science, 1999.

DOMINGOS, A. Teorias cognitivas e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados. In: **Seminário de investigação em educação matemática**, 17., 2006, Setúbal. Actas...Setúbal: Associação de Professores de Matemática, 2006. p. 51-81.

DOMINGUES, H. H; IEZZI, G.. **Álgebra Moderna**, volume único, 4ª ed., São Paulo: Atual, 2003.

DREYFUS, T.. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, D.. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 25-41.

FOSSA, J. A.. **Ensaios sobre a Educação Matemática.** EDUEPA , Belém – PA, 2001.

FRANCO, H. J. R.. Os diversos conflitos observados em alguns alunos de licenciatura um curso de álgebra: identificação e análise. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora – MG, 2011.

GREGOLIN, M. R. V.. **A análise do discurso: conceitos e aplicações**. São Paulo: Alfa. 39: 13-21, 1995. ISSN: 1981-5794-1995-39-13-21.

KIRNEV, D. C. B.. **Dificuldades evidenciadas em registros escritos a respeitos de demonstrações matemáticas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina. Londrina – PR, 2012.

______. **Análise de dificuldades e distúrbios de aprendizagem em matemática:** um estudo sobre a transição dos anos iniciais para anos finais do ensino fundamental. Monografia de Especialização. Universidade Norte do Paraná. Londrina – PR, 2016.

HOUAISS3 eletrônico. **Dicionário de língua portuguesa**. 2009

MENDES, M. T.. **Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de Cálculo**. Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina. Londrina- PR. 2014.

MIZUKAMI, M.G.N. **Ensino: as abordagens do processo**. São Paulo-SP: EPU, 2002.

MOREIRA, M. A.. **Teorias de Aprendizagem**. 2ª ed. São Paulo- SP: EPU, 2015.

PIAGET, J.. **A Epistemologia Genética/ Saberes e Ilusões da Filosofia/ Problemas de Psicologia Genética**. 2ª ed. São Paulo - SP: Abril Cultural, 1983.

PIRES, M. N. M.. **Oportunidades para o aprender: uma prática para a reinvenção guiada na prova em fases**. Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina. Londrina- PR. 2013.

Ponte, J. P.; Boavida, A.; Graça, M.; Abrantes, P.. **Didáctica da matemática**. Lisboa: DES do ME. 1997.

SAVIOLI, A. M. P. D.. Pensamento matemático Avançado: algumas produções de um programa de pós-graduação. In: **VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática**, 2017, Canoas - RS. Anais do VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas RS: Editora da ULBRA, 2017. p. 1-11.

SKEMP, R. R.. Mathematics in the Primary School (Subjects in the Primary School) (2002). Taylor and Francis. Edição do Kindle.

TALL, D. O.. The Transition to Formal Thinking in: **Mathematics. Mathematics Education Research Journal**, 20 nº. 2 , p. 5-24 , 2008.

______. Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education. In: **10th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education**, Feb 22–27, 2007, San Diego, California, USA. 2007-b. Disponível em: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.377.4342&rep=rep1&type=pdf. Acesso em mai. 2016.

______. Thinking through three worlds of mathematics. In: **Proceedings of the 28th conference of PME**, Bergen, Norway, 281-288, 2004.

______.Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. **Plenary Lecture, Conference of the International Group for the Psychology of Learning Mathematics**, Recife, Brazil, vol I, p. 161–175, 1995.

TALL, D.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity**. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, vol. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.

TALL, D. et al. **Cognitive Development of Proof**. In: semantic scholar, 2011. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/0c9f/7994ec4b3f1cfa3d6fefb7e00a2693aedae8.pdf. Acesso em 30 mar. 2018.

CEPE nº 229/2009. Disponível em http://www.uel.br/prograd/docs_prograd/resolucoes/2009/resolucao_229_09.pdf. Acesso em 26 jan. 2015.

Deliberação – Câmera de graduação nº 013/2013. Disponível em http://www.uel.br/prograd/docs_prograd/deliberacoes/deliberacao_13_13.pdf. Acesso em 26 jan. 2015.

APÊNDICES

APÊNDICE A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO

Eu, ____, portador(a) do RG de nº___________________________, autorizo a participação na PROVA EM FASES SOBRE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS, realizada na Universidade Estatual de Londrina, pela profa. Debora Cristiane Barbosa Kirnev, aluna do doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina - UEL. Todo material recolhido será utilizado somente para fins de pesquisa na área de educação, sendo que a professora se compromete em garantir o anonimato e a privacidade dos estudantes participantes.

____

Assinatura

Londrina, ___ de____________ de 2015.

APÊNDICE B

INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

PROVA EM FASES SOBRE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

<table>
<tr><td colspan="3">Estudante:</td></tr>
<tr><td>Idade:</td><td>Data da fase I: / /2015</td><td>Data da fase II: / /2015</td></tr>
<tr><td colspan="3">Instruções:

1º) Esta prova será realizada em duas fases, a primeira, com tempo determinado de 1h45, sem consulta a materiais. Na segunda fase, o tempo será estipulado na próxima aplicação e não deverão ser alteradas as respostas da primeira fase, somente complementadas ou substituídas.

2º) Este instrumento avalia o processo de desenvolvimento das questões e não somente as respostas, desse modo, anote detalhadamente as resoluções.

3º) Teremos duas partes na prova, a parte I refere-se a perguntas que buscam analisar o perfil do(a) estudante e do grupo de alunos que participam desta prova, e a parte II contempla questões relacionadas ao conteúdo de Estruturas Algébricas. Nessa parte você precisa justificar as soluções, utilizando notações e demonstrações formais em Matemática.

4º) Na parte II, assinalar o nível de dificuldade da questão e comentar as dificuldades referentes à forma de resolução da questão, ao conteúdo abordado e à linguagem materna ou matemática utilizada.

5º) As questões propostas na parte II foram adaptações de DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, Gelson. Álgebra Moderna, volume único, 4. ed., São Paulo: Atual, 2003.</td></tr>
</table>

PARTE I

1. O que a matemática representa para você?

2. Por que você escolheu o curso de matemática para cursar a graduação? Quais motivos interferiram na sua escolha?

3. Que fatores interferem na sua aprendizagem? Possuí hábitos de estudos? Comente.

4. O que você sabe sobre o pensamento matemático avançado? Possui uma opinião sobre esse tema? Comente.

PARTE II

1. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais com a operação de adição usual e suas propriedades. Considere a operação * sobre $\mathbb{R}$ dada por $x * y = x + y - 3$, $\forall$ $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ com a operação * é grupo abeliano?

2. Sejam H_1 e H_2 subgrupos de um grupo G. $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G?

3. Sejam I e J ideais de um anel A. $I + J = \{x + y : x \in I \; e \; y \in J\}$ é um ideal de A?

4. Seja A um domínio de integridade. Prove que se $\alpha \in$ A e $\alpha \neq 0$, então a função $\varphi_\alpha : A \to A$, dada por $\varphi_\alpha(x) = \alpha x$ é injetora.

5. Verdadeiro ou falso. Se verdadeiro justifique. Se falso, dê um contra-exemplo.
(a) Todo ideal primo de um anel comutativo com unidade é maximal;
(b) Todo ideal maximal de um anel comutativo com unidade é primo;
(c) 2 $\mathbb{Z}$ é um ideal primo de $\mathbb{Z}$;
(d) 2 $\mathbb{Z}$ e 3 $\mathbb{Z}$ não são isomorfos como anéis.

6. Dê um exemplo de cada tipo dos seguintes anéis: Anel comutativo com unidade; Anel não comutativo com unidade; Anel sem unidade; Anel de integridade que não seja corpo; Anel com divisores de zero; Corpo.

7. Encontre a soma e o produto dos seguintes polinômios: $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ e $g(x) = 3x^4 + 2x + 4$ em $\mathbb{Z}_5[x]$. Calcule o grau de $f + g$ e o grau de $f.g$.

8. Considere A um anel e I um subanel de A. Pode-se ter uma estrutura de anel em A/I? Justifique sua resposta.

9. Prove que se A é um anel com unidade então A[X] é um anel com unidade. Se A for um corpo, então A[x] será um corpo? Justifique sua resposta.

10. Considere o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e o subgrupo $3\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$. Mostre que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_3$.

11. Encontre todos os polinômios de grau dois sobre $\mathbb{Z}_2$[X]. Alguns desses polinômios é irredutível sobre a $\mathbb{Z}_2$? Justifique.

12. Prove que para p primo e n natural qualquer, $\sqrt[n]{p}$ não é racional, utilizando algum critério de irredutibilidade de polinômios.

13. Mostre que os seguintes polinômios são irredutíveis sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais: $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$; $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

OBSERVAÇÃO:

As questões parte I foram aplicadas com espaço entre as questões para a resposta e as questões da parte II foram aplicadas em páginas individuais e no rodapé foi indicado a categorização do nível de dificuldade: (   ) fácil   ( ) médio ( )difícil

Havia no rodapé a seguinte solicitação: Comente se teve dificuldades quanto a forma, o conteúdo ou a linguagem.

APÊNDICE C

RESOLUÇÃO COMENTADA DAS TAREFAS ANALISADAS

1. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais com a operação de adição usual e suas propriedades. Considere a operação * sobre $\mathbb{R}$ dada por $x * y = x + y - 3$, $\forall$ $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ com a operação * é grupo abeliano?

Pode-se entender grupos como um conjunto de propriedades e uma operação sobre dois elementos, sendo uma operação fechada, ou seja, o resultado da operação pertence ao conjunto dos elementos operados. Define-se, formalmente, como segue.

Considere G um conjunto e $*$ uma operação binária, ou ainda, lei de composição interna, definida sobre G, o par ordenado $(G,*)$ é um grupo se são atendidas as seguintes propriedades:

I) Associativa: Sejam a, b e $c \in G$, tem-se que $(a * b) * c = a * (b * c)$.

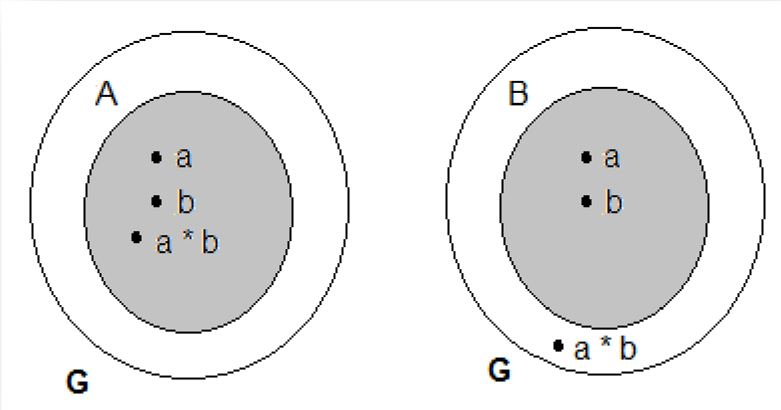
II) Existência do elemento neutro: Existe um único $e \in G$, sendo que para todo $a \in G$ tem-se que $e * a = a * e = a$

III) Elemento simétrico: dado $a \in G$ se existir $a' \in G$ sendo que $a * a' = a' * a = e$, tem-se que a' é elemento simétrico, sendo que e trata-se do elemento neutro.

Tem-se que a' pode ser entendido como elemento oposto em um grupo aditivo e elemento inverso em um grupo multiplicativo. Segue que o elemento simétrico multiplicativo é denominado de elemento inverso e denotado por a^{-1}, enquanto o elemento simétrico aditivo é denominado de elemento oposto e denotado por $-a$.

Para definir-se a operação fechada, considere que A seja um subconjunto de G e uma operação $*$ definida sobre G, segue que A é parte fechada de $(G,*)$ se para todo a e $b \in A$ implica $a * b \in A$. Observe no diagrama a seguir uma ilustração do subconjunto A com a operação fechada e o subconjunto B que não possui a operação fechada.

Figura 65 – Exemplo e contraexemplo de operação fechada.



Fonte: Do próprio autor.

Em casos com a operação de adição, tem-se um grupo aditivo, nos casos em que ocorrer a operação de multiplicação, há um grupo multiplicativo.

Considerando a ordem de um grupo $(G,*)$, tem-se que G é finito se o número de elementos do conjunto G é finito. Entretanto, se G for um conjunto infinito, afirma-se que $(G,*)$ possui ordem infinita. Outra consideração relevante é se um grupo $(G,*)$ atender a propriedade comutativa, ou seja, para todo a e $b \in G$, tem-se que $a * b = b * a$.

Tem-se um caso de grupo G comutativo ou abeliano. Nos grupos abelianos, geralmente a lei de composição interna é a aditiva, ou seja, a operação definida para o grupo é a adição. Satisfazem-se as seguintes propriedades elementares.

Considere $(G,*)$ um grupo. São válidas as seguintes propriedades:

I) O elemento neutro é único.

Demonstração:

Considere que existam dois elementos neutros de G dados por e, e'. Assim:

$e' = e * e' = e$, ou seja, o elemento neutro é único.

II) O elemento inverso a^{-1} de cada elemento de G é único.

Demonstração:

Adote $b, c \in G$ como sendo elementos inversos de $a \in G$, ou seja, $b = a^{-1}$ e $c = a^{-1}$. Assim:

$e = c * a = a * c$

$e = b * a = a * b$.

Segue que,

$b = e * b = (c * a) * b = c * (a * b) = c * e = c$, segue $b = c$, ou seja, o elemento neutro é único.

III) Considere $a \in G$ tem-se que $a = (a^{-1})^{-1}$.

Demonstração:

Da unicidade do elemento inverso e da igualdade do conceito de grupo tem-se que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$, segue que, a^{-1} é o elemento inverso de a, e ainda, a é o elemento inverso de a^{-1} , ou seja, $a = (a^{-1})^{-1}$.

IV) Considere a, b ∈ G tem-se que $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

Demonstração:

Tem-se que

$(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = a \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = a \cdot e \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = e$.

Analogamente tem-se que $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = e$.

Conclui-se que $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

V) Todo elemento e G é regular em relação à lei de composição interna.

Considere a, b ∈ G tem-se que a equação $a * x = b$, em que x é variável em G possui uma única solução em G, ou seja, $x = a^{-1} * b$.

Demonstração:

Segue que $a * x = a * (a^{-1} * b) = (a * a^{-1}) * b = e * b = b$, logo $a^{-1} * b$ é solução da equação.

EXEMPLO DE SOLUÇÃO:

Tem-se que um grupo satisfaz as propriedades: associativa, elemento neutro, elemento inverso. Para ter um grupo abeliano, é necessário que a propriedade comutativa seja contemplada, assim, para a operação * sobre $\mathbb{R}$ dada por $x * y = x + y - 3$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que mostrar:

I) Associatividade: sejam $x, y,$ e $z \in \mathbb{R}$ segue que,

$$
\begin{aligned}
(x * y) * z &= (x + y - 3) + z - 3 \\
&= x - 3 + y + z - 3 \\
&= x - 3 + (y + z - 3) \\
&= x + (y + z - 3) - 3 \\
&= x * (y * z)
\end{aligned}
$$

II) Existência do elemento neutro: seja x e $e \in \mathbb{R}$ tal que, $x * e = e * x = x$ assim existe $e = 3$ de modo que,

1º) $x * e = x + 3 - 3 = x$

2º) $e * x = 3 + x - 3 = x$

Segue que existe o elemento neutro.

III) Elemento inverso: seja x e $x' \in \mathbb{R}$ tal que, $x * x' = x' * x = e$

Segue que:

$x * x' = e$

$x + x' - 3 = 3$

$x' = -x + 3 + 3$

$x' = -x + 6$

De modo análogo tem-se $x' * x = e$, assim existe $x' = -x + 6$ de modo que,

1º) $x * x' = x + x' - 3$

$= x + (-x + 6) - 3$

$= x - x + 6 - 3$

$= 3$

2º) $x' * x = x' + x - 3$

$= (-x + 6) + x - 3$

$= -x + 6 + x - 3$

$= -x + x + 6 - 3$

$= 3$

Segue que todo elemento admite o elemento simétrico.

IV) Comutatividade: seja $x, y,$ e $z \in \mathbb{R}$ segue que,

$x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x$

Por I, II, III e IV tem-se que a operação * sobre $\mathbb{R}$ dada por $x * y = x + y - 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ é um grupo abeliano.

2. Sejam H_1 e H_2 subgrupos de um grupo G. $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G?

Quanto a subgrupo, define-se como: dado um subconjunto não vazio H de um grupo $(G,*)$, esse será denominado de subgrupo de G se, e somente se, H for um grupo com a operação de G. Tem-se que um subconjunto não vazio H de um grupo $(G,*)$ será um subgrupo se, e somente se, satisfizer as seguintes propriedades:

I) O elemento neutro de G pertence a H;

II) A operação em H é fechada, ou seja, dados $a, b \in H$, tem $a * b \in H$;

III) O conjunto H possui elemento simétrico.

EXEMPLO DE SOLUÇÃO:

Para demonstrar que há um subgrupo, tem-se que mostrar que a operação é fechada no próprio conjunto; a existência do elemento neutro pertencente ao conjunto; a existência do elemento inverso. Veja a seguir:

I) operação fechada em $H_1 \cap H_2$

Sejam a e $b \in H_1 \cap H_2$, segue que a e $b \in H_1$, assim que $a * b \in H_1$, pois H_1 é subgrupo de G cuja operação é fechada, e a e $b \in H_2$, logo $a * b \in H_2$, pois H_2 é subgrupo de G cuja operação é fechada, implica $a * b \in H_1 \cap H_2$, assim a operação será fechada em $H_1 \cap H_2$.

II) Existência do elemento neutro em $H_1 \cap H_2$

Sejam H_1 e H_2 subgrupos de G e o elemento neutro $e \in G$, tem-se que $e \in H_1$, e $e \in H_2$, pois são subgrupos de G, assim $e \in H_1 \cap H_2$.

III) Existência do elemento inverso em $H_1 \cap H_2$

Sejam $a \; e \; b \in H_1 \cap H2$, segue que $a \in H_1$, e $a \in H_2$, assim como, $b \in H_1$, e $b \in H_2$. Se $a \; e \; b \in H_1$, como H_1 é subgrupo de G então existe $b' \in H_1$, tal que $a * b' = b' * a = e$, ou seja, b' é inverso de b. Segue que, se $a \; e \; b \in H_2$, como H_2 é subgrupo de G então existe $b' \in H_2$, tal que $a * b' = b' * a = e$, ou seja, b' é inverso de b. Assim, tem-se que $a * b' \in H_1 \cap H_2$.

Por I, II e III tem-se que $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G.

3. Sejam I e J ideais de um anel A. $I + J = \{x + y : x \in I \; e \; y \in J\}$ é um ideal de A?

Dado um conjunto A não vazio, há um anel se existem leis de composição interna em que são dadas duas operações:

$(x, y) \mapsto x + y$ e $(x, y) \mapsto x$.

Aos pares de elementos de A em A satisfazendo os seguintes axiomas:

- Operação de adição:

I) Para todo $x\ e\ y\ \in\ A$ é válida a comutatividade:

$x + y = y + x$

II) Para todo $x\ e\ y\ \in\ A$ é válida a associatividade :

$(x + y) + z = x + (y + z)$

III) Existe um elemento e em A tal que $x + e = e + x = x$ para todo $x \in A$.

IV) Para todo elemento $x \in A$ existe um elemento y em A tal que:

$x + y = y + x = e$. Segue que y é chamado de simétrico de x.

- Operação de multiplicação:

V) Para todo $x, y, z \in A$ é válida a associatividade:

$(x.y).z = x.(y.z)$

VI) Para todo $x, y, z \in A$ é válida a distributividade, à direita e à esquerda:

$x.(y + z) = x.y + x.z$

$(y + z).x = y.x + z.x$

- Observações:

1) Adota-se xy ao invés de $x.y$, sempre que for conveniente.

2) Adota-se $xy + wz$, ao invés de $(xy) + (wz)$, sempre que for conveniente.

3) Para a diferença de dois elementos x e y do anel A tem-se que:

$x - y = x + (-y)$.

4) O elemento neutro da adição, indicado por 0 ou 0_A, é denominado de zero do anel A.

Em relação à multiplicação, considere um anel A tal que $(A, +, .)$. Tem-se que para todo x e $y \in A$.

I) $0 . x = x . 0 = 0$

Demonstração:

Seja $x . 0 = z$, tem-se que $z = x . 0 = x . (0 + 0) = x . 0 + x . 0 = z + z$. Ou seja, $z + z = z$ deste modo $z = 0$, conclui-se que $x . 0 = 0$.

II) $(-x) . y = x.(-y) = -(xy)$

Demonstração:

Tem-se que $[(-x) + x].y = (-x).y + xy$, segue que $[(-x) + x].y = 0 . y = 0$. Assim, $(-x).y + xy = 0$ implica $-(xy) = (-x).y$.

Há as seguintes propriedades com anéis. Seja o anel A tal que $(A, +, .)$ e os elementos $x, y\ e\ z \in A$, em que há:

I) Cancelamento para a adição, ou seja:

Se $x + y = x + z$ então $y = z$

II) O elemento neutro da adição é único.

III) O elemento inverso da multiplicação é único.

IV) Diferença entre dois elementos, ou seja:

$x - y = x + (-y)$, consequentemente, $x.(y - z) = xy - xz$

V) Potenciação

Sendo $x \in A$ e $n \in N$ tem-se que x^n é definido por recorrência, ou seja:

$x^1 = x$ e $x^n = x^{n-1}.x$

Para anéis comutativos, considere o anel $(S,+,.)$, em que a operação de multiplicação é comutativa, caracterizando o anel comutativo, desse modo: Para todo x e $y \in S$ tem-se que $x.y = y.x$.

Para anéis com unidade, se o anel $(S,+,.)$ em que a operação de multiplicação possui elemento neutro, ou seja: Para todo x ∈ S tem-se que $x.1 = 1.x = x$. Há um anel com elemento identidade ou com unidade, podendo ser indicado como um anel com 1 ou 1_S.

No caso de ideais, considere um anel A comutativo e um subconjunto não vazio I tal que I está contido em A, de modo que satisfaz as seguintes propriedades:

I) Seja $I \subset A$, considere x e $y \in I$ tal que a operação $x - y$ é fechada em I.

II) Para todo $a \in A$ e $x \in I$ tem-se que $a.x \in I$.

São consideradas as seguintes propriedades de ideias para A um anel comutativo e I um ideal em A, segue que:

I) Todo ideal é um subanel, porém a recíproca não é verdadeira.

II) Se A é um anel comutativo com unidade e $1 \in I$ então $I = A$.

Tem-se que por definição $I \subset A$, Considere $x \in A$, como $1 \in I$, há $x.1$ uma operação em I , deste modo, $x \in I$. Logo $A \subset I$, ou seja, $A = I$.

III) $0 \in I$.

Demonstração: Tem-se que $I \neq \emptyset$, logo I possui um elemento x tal que $x - x \in I$, ou seja, $x - x = 0$ o que implica $0 \in I$.

IV) Se $x \in I$ implica $-x \in I$.

Demonstração: Segue que $0 \in I$, considere $x \in I$ então $0 - x = -x$, ou seja, $-x \in I$.

V) Se x e $y \in I$ implica $x + y \in I$.

Demonstração: Segue que x e $y \in I$, deste modo $x - (-y) = x + y$, ou seja, $x + y \in I$.

VI) Se I possui algum elemento invertível, segue que $I = A$.

DEMONSTRAÇÃO: Considere $x \in I$, e x é invertível, deste modo $x \,.\, x^{-1} = 1$, sendo uma operação fechada em I, logo $A = I$.

Para um ideal principal, considere A um anel comutativo e I um ideal em A, de modo que:

$$I = \{x.a / x, a \in A\}$$

em que o elemento a é o único gerador de I, sendo assim, I é denominado de ideal principal gerado por a.

No caso de ideal primo, considere P um ideal em um anel comutativo A. Tem-se que P é um ideal primo se $P \neq A$ e se é válido que: $\forall\, a, b \in A$, $a.b \in P$ implica $a \in P$ ou $b \in P$.

Para ideal maximal, dado um anel comutativo A e um ideal M, sendo $M \neq A$, em que é válido o único ideal em A que contém M, e é diferente de M, é o próprio anel A.

EXEMPLO DE SOLUÇÃO:

Seja x e $y \in I$ e $a \in A$, segue que $x - y \in I$ e $ax \in I$, pois I é um ideal. Seja z e $w \in J$ e $a \in A$, segue que $z - w \in I$ e $az \in J$, pois J é um ideal.

I) Considere $r, s \in I + J$ sendo que $r = (x - y)$ e $s = (z - w)$, segue que:

$$\begin{aligned} r + s &= (x - y) + (z - w) \\ &= x - y + z - w \\ &= (x + z) - (y + w) \end{aligned}$$

II) Considere $m, n \in I + J$ sendo que $m = ax$ e $n = az$, segue que:

$m + n = (ax) + (az)$

$= ax + az$

$= a(x + z)$

Assim por I e II tem-se que $I + J = \{x + y : x \in I\ e\ y \in J\}$ é um ideal de A.

4. Seja A um domínio de integridade. Prove que se $\alpha \in$ A e $\alpha \neq 0$, então a função $\varphi_{\alpha}: A \to A$, dada por $\varphi_{\alpha}(x) = \alpha x$ é injetora.

Aborda-se, nesta tarefa, a respeito de domínios de integridades e corpos, neste caso, têm-se anéis com características particulares, por isso, primeiramente, destaca-se o diagrama a seguir, em que é indicada a relação de inclusão entre as propriedades dos seguintes casos de anéis.

Figura 66 – Relação de inclusão entre anéis

Fonte: Do próprio autor.

Ao analisar o diagrama, verifica-se que um domínio de integridade, ou denominado de anel de integridade, é um caso particular de Anel. Nesse caso, precisa-se considerar um anel que possui duas operações, a adição e multiplicação, e satisfaz os seis propriedades de anéis. Além disso, em relação à multiplicação, é preciso satisfazer a propriedade comutativa e apresentar elemento neutro. Se isso ocorrer, ainda necessita atender a seguinte proposição: Seja A um anel comutativo com unidade, para todo $x, y \in A$, se $x \,.\, y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$. Sendo satisfeita essa propriedade, há um domínio de integridade.

Em consequência dessa definição, um anel A é domínio de integridade se, e somente se, todo elemento nulo de A for regular em relação à multiplicação, ou seja: Para todo x, y e $z \in A$, sendo $x \neq 0$ e $xy = xz$ implica $y = z$.

Ressalta-se que se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ em um anel A e $x \,.\, y = 0$, nesse caso, são chamados de divisores próprios de zero. Assim, um domínio de integridade é um anel comutativo com unidade que não possui divisores próprios de zero.

Retomando o diagrama, pôde-se verificar que “todo corpo é um domínio de integridade”, entretanto, a recíproca não é verdadeira, pois um corpo necessita atender a propriedade: considere um anel A comutativo e comunidade, tem-se um corpo se todo elemento não nulo de A possui elemento simétrico para operação de multiplicação. Em termos notacionais têm-se que: Para todo $x \in A$ e $x \neq 0$ existe $x' \in A$ tal que $x.x' = 1$.

EXEMPLO DE SOLUÇÃO:
Sejam x, y ∈ A, segue que A é um domínio de integridade, assim todo elemento de A será regular, então assumindo $\varphi_a(x) = \varphi_a(y)$, tem-se $ax = ay$ e $a \neq 0$, o que implica x=y. Desse modo, temos que $\varphi_a(x) = ax$ é injetora.

6. Dê um exemplo de cada tipo dos seguintes anéis: Anel comutativo com unidade, Anel não comutativo com unidade, Anel sem unidade, Anel de integridade que não seja corpo, Anel com divisores de zero, Corpo.

EXEMPLO DE SOLUÇÃO:
Anel comutativo com unidade: conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

Anel não comutativo com unidade: o conjunto $M_2(\mathbb{Z})$ das matrizes 2x2 com valores inteiros.

Anel sem unidade: o anel $2\,\mathbb{Z}$ com a soma e o produto usuais.

Anel de integridade que não seja corpo: o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Anel com divisores de zero: o conjunto $\mathbb{Z}_6$, pois $\bar{2}.\bar{3} = \bar{0}$ e $\bar{2}$ e $\bar{3}$ são diferentes de $\bar{0}$.

Corpo: o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

7. Encontre a soma e o produto dos seguintes polinômios: $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ e $g(x) = 3x^4 + 2x + 4$ em $\mathbb{Z}_5[x]$. Calcule o grau de $f + g$ e o grau de $f.g$.

A respeito de polinômios sobre um anel, de modo generalizado, pôde-se compreender um polinômio como uma sequência de um anel, em que, a partir de certa ordem, todos os termos da sequência são nulos. Considere um anel A, uma sequência de elemento em A é uma função $f: N \to A$. Seja $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, ou ainda, $f = (a_i)$. Dadas duas sequências $f = (a_i)$ e $g = (b_i)$, são válidas as seguintes afirmações para:

I) Igualdade: se $f = g$ então $a_i = b_i$.

II) Adição: define-se a adição $f + g$ como uma $h(c_i)$ tal que $c_i = a_i + b_i$ para todo $i \in N$.

III) Multiplicação: define-se a multiplicação de f por g é uma sequência $j = (d_i)$ de modo que $d_i = \sum_{k=0}^{i} a_{i-k} b_k$ para todo $i \in N$.

Define-se um polinômio sobre um anel por: Dado um anel A e uma sequência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ com $a_i \in A$ para todo $i \in N$, denomina-se um polinômio sobre A se existir um índice $s \in N$ de modo que $a_k = 0$ para todo $k > s$. Ou seja, uma sequência é um polinômio se, a partir de algum elemento, todos os demais são nulos.

Destaca-se propriedades de um polinômio sobre um anel. Indicado por $A[x]$ o conjunto de todos os polinômios sobre o anel A.

I) A operação de adição é fechada em $A[x]$;

II) A operação de multiplicação é fechada em $A[x]$;

III) Seja A um anel, então $A[x]$ é um anel;

IV) Se A é um anel comutativo, então $A[x]$ é um anel comutativo;

V) Se A é um anel com unidade, então $A[x]$ é um anel com unidade;

VI) Se $f = (a_i)$ é um polinômio nulo o grau de f é o maior índice dos termos não nulos de f.

EXEMPLO DE SOLUÇÃO:

Adição:

$(f + g)(x) = (2x^3 + 4x^2 + 3x + 2) + (3x^4 + 2x + 4) = 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 1$;

Tem-se um polinômio de grau 4.

Produto:

$$(f \cdot g)(x) = (2x^3 + 4x^2 + 3x + 2).(3x^4 + 2x + 4)$$
$$= x^7 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^6 + 3x^3 + x^2 + 4x^5 + x^2 + 2x + x^4 + 4x + 3$$
$$= x^7 + 2x^6 + 4x^5 + x^3 + 2x^2 + x + 3$$

Tem-se um polinômio de grau 7.

ANEXOS

ANEXO A

PLANO DE ATIVIDADES ACADÊMICAS

Código	Nome
2MAT020	**Estruturas Algébricas**

Curso	Série
Matemática	**2ª**

Carga Horária		
T	**P**	Total
120	-	120

Oferta
Anual

Habilitação(ões)
Licenciatura
Bacharelado

1 - EMENTA

Teoria elementar dos números. Grupos: subgrupos, subgrupos normais, Grupos quocientes. Homomorfismos de grupo. Grupo de permutações. Anéis: subanéis, ideais, anéis quocientes, homomorfismos de anéis. Anéis de polinômios. Extensões de corpos sobre os racionais. Construção com régua e compasso. Aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos trabalhados.

2 - OBJETIVO(S)

1. Proporcionar uma visão das principais estruturas algébricas.
2. Utilizar as noções básicas de álgebra e desenvolver a capacidade de abstração.

3 - CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

TEORIA ELEMENTAR DOS NÚMEROS (30 horas)
Os números inteiros: terminologia dos conjuntos, divisibilidade dos inteiros, algoritmo euclidiano, mdc, números primos, fatoração única, equações diofantinas lineares, congruências, teorema chinês do resto.

GRUPOS (30 horas)
Grupos: definição e exemplos, subgrupos, aplicações, homomorfismos de grupo, grupos especiais, propriedades dos grupos, classes laterais e subgrupos normais, grupo quociente, teorema do homomorfismo, teorema de Lagrange, grupos de permutações, teorema de Cayley, grupos cíclicos, teoremas de Sylow,

ANÉIS (40 horas)
Anéis: definição e exemplos, propriedades de anéis, subanéis, ideais, anel quociente, homomorfismos de anéis, corpos quocientes, anéis ordenados, euclidianos, fatoriais e principais.

ANEL DE POLINÔMIOS, EXTENSÃO DE CORPOS E CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO (20 horas)

Polinômios: algoritmo euclidiano, polinômios sobre os inteiros, polinômios irredutíveis. Extensões de corpos sobre os racionais, elementos algébricos e transcendentes. Números construtíveis com régua e compasso.

ASPECTOS HISTÓRICOS E EPISTEMOLÓGICOS DOS CONTEÚDOS TRABALHADOS (serão ministrados no decorrer do ano, de acordo com os tópicos desenvolvidos)

4 - PROCEDIMENTOS DE ENSINO

Aulas teóricas, expositivas e trabalhos em grupos ou individuais. Aulas práticas de exercícios. Listas de exercícios. Oficinas e práticas vivenciadas.

5 – CRONOGRAMA

De acordo com a distribuição feita no conteúdo programático.

6 - FORMAS E CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO

Média final obtida da média aritmética de seis notas com base nas avaliações realizadas. Cada nota será composta de provas escritas individuais (80% da nota) e atividades como resolução de exercícios, listas de exercícios, trabalhos em grupo, oficinas e outros que se fizerem necessários (20% da nota).

7 - BIBLIOGRAFIA BÁSICA

1. DOMINGUES, H.H.; IEZZI, G. *Álgebra moderna*. São Paulo: Atual, 2003.

8 - BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

1. FRALEIGH, J.B. *A first course in abstract algebra*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1974.
2. GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Álgebra: um curso de introdução*. Rio de Janeiro: IMPA, 1988.
3. GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
4. HEFEZ, A. *Curso de Álgebra*. Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1993.
5. HERSTEIN, I. N. - *Tópicos de álgebra*. São Paulo: EDUSP, 1971.
6. LANG, S. - *Estruturas algébricas*. Rio de Janeiro: LTC, 1972.
7. MONTEIRO, L. H. J. *Introdução às Estruturas algébricas*. São Paulo: GEEM, 1971.
8. MONTEIRO, L. H. J. *Elementos de álgebra*. São Paulo: GEEM, 1971.
9. NACHBIN, L. - *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1971.