Universidade Estadual de Londrina

GERALDO APARECIDO POLEGATTI

JORNADAS PELOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA SOB PERSPECTIVA DO PROGRAMA ETNOMATEMÁTICA NA LICENCIATURA INTERCULTURAL INDÍGENA

Londrina
2020

GERALDO APARECIDO POLEGATTI

JORNADAS PELOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA SOB PERSPECTIVA DO PROGRAMA ETNOMATEMÁTICA NA LICENCIATURA INTERCULTURAL INDÍGENA

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da UEL, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

P763 Polegatti, Geraldo Aparecido.
Jornadas pelos Três Mundos da Matemática sob perspectiva do Programa Etnomatemática na Licenciatura Intercultural Indígena / Geraldo Aparecido Polegatti. - Londrina, 2020.
360 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Programa Etnomatemática - Tese. 3. Três Mundos da Matemática - Tese. 4. Licenciatura Intercultural Indígena - Tese. I. Pereira das Dores Savioli, Angela Marta . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51

GERALDO APARECIDO POLEGATTI

JORNADAS PELOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA SOB PERSPECTIVA DO PROGRAMA ETNOMATEMÁTICA NA LICENCIATURA INTERCULTURAL INDÍGENA

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da UEL, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Orientadora: Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina – UEL

____

Prof. Dr. José Roberto Linhares de Mattos
Universidade Federal Fluminense – UFF

____

Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas
Universidade Franciscana – UNF

____

Prof. Dr. Bruno Rodrigo Teixeira
Universidade Estadual de Londrina – UEL

____

Profa. Dra. Daniele Peres da Silva Martelozo
Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP

Londrina, 17 de dezembro de 2020.

Dedico este trabalho a minha Amiga Noemi dos Reis Correa, sem seu apoio e incentivo eu jamais teria realizado esse doutorado. Você me disse que eu seria capaz, eu ouvi, abriu meus olhos, acreditei, vim, vi e venci.

AGRADECIMENTOS

Agradaço a Deus pelo dom da Vida, pelo dissernimento, pela sabedoria e pela oportunidade de realizar essa pesquisa. Aos meus pais, Maria das Dores Marcelino da Silva e Geraldo Polegatti, pelo incentivo aos estudos e por contribuirem na construção do ser humano Geraldo Aparecido Polegatti. Aos meus irmãos Luciano, Florisvaldo e em especial, a minha irmã querida Maria Inês Polegatti Zullianelli que me inspira a ser mais humano. A minha esposa Marta Cristina que amo muito, desde 22 de janeiro de 1994 ela é a razão da minha vida, minha companheira de vida. Sou grato a minha querida sogra Dona Ivanilde por todo carinho, amor, apoio e compreensão. Ao meu amigo, o senhor Aurasil Silva Barbosa que foi fundamental para minha estadia em Londrina. Agradeço aos meus sobrinhos queridos em, especial a Nathália Polegatti Zullianelli, que busca seguir minhas conquistas acadêmicas e me instiga a sempre querer saber mais. Obrigado Naty.

Agradeço a minha orientadora Angela Marta que possibilitou o desenvolvimento dessa pesquisa confiando no meu trabalho. Sou grato por toda dedicação, pelo esmero, apoio, amizade, preocupação, discernimento, compreensão, pontualidade, compromisso e sabedoria. A senhora sepre será minha eterna orientadora e amiga, seus ensinamentos levo comigo para futuras orientações e para a minha vida acadêmica.

Agradeço aos pesquisadores e amigos do GEPPMat, somos uma grande família. Obrigado pelo acolhimento, discussões, embates teóricos, abraços, encontros, cafés deliciosos, almoços e jantares. O nosso grupo fervilha, é muito dinâmico, pesquisas diferentes que se encontram em nós e nos diálogos. Alessandra, Bruna, Christian, Cleberson, Daniele, Débora, Giovana, Henrique, Jair, Laís, Leonardo, Ligia, Lúcio, Marcelo, Mariany, Michelle, Nilton e Osvaldo, muito obrigado por todo o apoio, força, motivação, questionamentos por mais detalhes e esclarecimentos da pesquisa. Esse trabalho foi constituído no contexto fervilhante do GEPPMat.

Em especial, agradeço aos amigos, Christian e Lúcio que me instigaram e motivavam a pesquisar novamente com a Etnomatemática. E, a minha querida amiga Ligia, que se pôs ao meu lado desde o começo (Deus nos apresentou), caminhando comigo pela construção desse trabalho, cursando disciplinas juntos, debatendo nas bibliotecas da UEL e da UEM, em eventos que participamos e apresentamos trabalhos, na produção de artigos, nos diálogos em almoços, lanches e jantares. Coca cola sem gelo por favor! Nós vivenciamos o doutorado. Obrigado Ligia, minha companheira de pesquisa.

Agradeço aos meus amigos que mesmo distante do olhar mas dentro de meu coração e em meus pensamentos, pelo apoio e por sempre me motivarem a acreditar na construção dessa pesquisa. Aqui destaco Fabrícia Oliveira, Eudelaine Zocche e Elaine Neris. E aos professores do IFBA de Porto Seguro, em especial, aos meus amigos Francisco, Carla e Paulo Malta que abriram as portas da LINTER para o desenvolvimento dessa investigação. Agradeço aos acadêmicos indígenas por oportunizarem momentos de diálogo e reflexões, por me receberem e pela disposição dedicada a responder e a questionar o caminho delineado no processo da pesquisa. Aradeço a gestão e aos amigos do IFMT e do Campus Juína, pela possibilidade de afastamento de minhas funções para a dedicação exclusiva ao doutoramento, bem como agradeço a CAPES pelo financiamento a pesquisa.

Agradeço aos membros titulares da banca, Professor Linhares meu amigo e inspirador da pesquisa em Etnomatemática, Professor Leivas a quem tive o prazer de conhecer no XIII ENEM em Cuiabá – MT, ao Professor Bruno a quem admiro muito (a amizade continua a mesma), a minha amiga Professora Daniele que provocou o meu aprofundamento teórico nos Três Mundos da Matemática e, aos membros suplentes Christian e Michelle. Obrigado a todos por aceitarem o convite e pelas valiosas contribuições para o meu desenvolvimento profissional e o aprimoramento dessa pesquisa.

Tenho pensamentos que, se pudesse revelá-los e fazê-los viver, acrescentariam nova luminosidade às estrelas, nova beleza ao mundo e maior amor ao coração dos homens.

Fernando Pessoa

POLEGATTI, Geraldo Aparecido. **Jornadas Pelos Três Mundos da Matemática Sob Perspectiva da Etnomatemática na Licenciatura Intercultural Indígena.** 2020. 360 fs. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Essa pesquisa caracteriza-se como qualitativa. Seu público alvo são acadêmicos indígenas da Licenciatura Intercultural Indígena (LINTER) do Instituto Federal da Bahia (IFBA) – campus de Porto Seguro, que optam pela área de Ciências da Natureza e Matemática para sua atuação profissional. Os objetos matemáticos em estudo são as definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área. Eles estão presentes no currículo de Matemática da LINTER. Os aportes teóricos são o Programa Etnomatemática, fatos e personagens da História da Matemática e os Três Mundos da Matemática de David Tall. Os Projetos Pedagógicos dos Cursos (PPC) de Licenciatura Intercultural Indígena no Brasil informam que o cenário da Educação Indígena divide-se em dois âmbitos: a Educação Escolar Indígena que corresponde a Educação Básica e; a Educação Superior Indígena que comporta os cursos de Licenciatura e Pedagogia Interculturais. A Etnomatemática e a História da Matemática despontam com seus estudos presentes em todos os currículos de Matemática, assim como em teses e dissertações brasileiras envolvendo a formação de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática. Nesse sentido, buscou-se pelos personagens Eudoxo, Euclides, Arquimedes e Riemann e, os contextos históricos envolvendo o método da Exaustão para a quadratura do círculo e da parábola, a balança abstrata de Arquimedes, os infinitesimais e a ideia de infinito, somas de Riemann, definição de limite, integral definida e função área. Do contexto cultural dos participantes da pesquisa apresentam-se os artefatos Filtro dos Sonhos, Pente Indígena, Cocar Indígena, Pau-de-chuva e Luminária Indígena. Promove-se a imersão do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática com aproximações entre as dimensões cognitiva e afetiva do segundo e, as interações entre elementos cognitivos e afetivos em processos de aprendizagem da Matemática estudado no primeiro. Por intermédio dessa imersão, caracteriza-se a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático nas atividades propostas para cada processo de ensino e aprendizagem. Nessas atividades destacam-se o cálculo do comprimento da circunferência, das áreas de regiões retangulares, triangulares e circulares que são essenciais nos cálculos das superfícies cilíndrica e esférica, assim como dos volumes de cilindros, cones e esferas. A balança de Arquimedes emerge como um excelente material didático para o processo educacional dos objetos matemáticos abordados. Apresenta-se uma proposta de ensino e aprendizagem com os conteúdos relacionadosem distribuida em cinco momentos presenciais, pautada na imersão do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática, bem como uma de suas possíveis interpretações para cada encontro planejado.

Palavras-chave: Educação Matemática. Licenciatura Intercultural Indígena. Pensamento Matemático. Programa Etnomatemática. Três Mundos da Matemática.

POLEGATTI, Geraldo Aparecido. **Journeys Through the Three Worlds of Mathematics From the Perspective of Ethnomathematics in Indigenous Intercultural Degree.** 2020. 360 fs. Thesis (Doctorate in Science Teaching and Mathematical Education) – State University of Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

This research is characterized as qualitative. Its target public are indigenous scholars from the Indigenous Intercultural Degree (LINTER) of the Federal Institute of Bahia (IFBA) - Porto Seguro campus, who choose the area of Natural Sciences and Mathematics for their professional performance. The mathematical objects under study are the definitions of limit, Riemann sum, definite integral and area function. They are present in LINTER's Mathematics curriculum. Theoretical contributions are the Ethnomathematics Program, facts and characters from the History of Mathematics and the Three Worlds of Mathematics by David Tall. The Pedagogical Projects for Indigenous Intercultural Licensure Courses (PPC) in Brazil inform that the scenario of Indigenous Education is divided into two areas: Indigenous School Education that corresponds to Basic Education and; the Indigenous Higher Education that includes the Intercultural Licentiate and Pedagogy courses. Ethnomathematics and the History of Mathematics emerge with their studies present in all mathematics curricula, as well as in Brazilian theses and dissertations involving the training of indigenous teachers in the area of Natural Sciences and Mathematics. In this sense, we searched for the characters Eudoxo, Euclides, Arquimedes and Riemann and, the historical contexts involving the method of Exhaustion for the square of the circle and the parable, the abstract scale of Arquimedes, the infinitesimals and the idea of infinite, sums of Riemann, definition of limit, defined integral and area function. From the cultural context of the research participants, the artifacts Filtro dos Sonhos, Pente Indígena, Cocar Indígena, Pau-de-chuva and Luminária Indígena are presented. The theoretical framework of the Three Worlds of Mathematics is immersed in the Ethnomathematics Program with approximations between the cognitive and affective dimensions of the second and the interactions between cognitive and affective elements in the mathematics learning processes studied in the first. Through this immersion, the movement dynamics of mathematical thinking intertwined with ethnomathematical thinking is characterized in the activities proposed for each teaching and learning process. In these activities, the calculation of the circumference length, of the areas of rectangular, triangular and circular regions that are essential in the calculations of the cylindrical and spherical surfaces, as well as the volumes of cylinders, cones and spheres are highlighted. Archimedes' scale emerges as an excellent didactic material for the educational process of the mathematical objects covered. A teaching and learning proposal with related contents is presented, distributed in five presently moments, based on the immersion of the theoretical framework of the Three Worlds of Mathematics in the Ethnomathematics Program, as well as one of its possible interpretations for each planned meeting.

Keywords: Mathematical Education. Intercultural Indigenous Degree. Mathematical Thinking. Ethnomathematics Program. Three Worlds of Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EaD	Educação a Distância
FUNAI	Fundação Nacional do Índio
GEPPMat	Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
IFAM	Instituto Federal do Amazonas
IFBA	Instituto Federal da Bahia
IFMT	Instituto Federal de Mato Grosso
LINTER	Licenciatura Intercultural Indígena do IFBA de Porto Seguro
MEC	Ministério da Educação
PECEM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
PPC	Projeto Pedagógico de Curso
PROLIND	Programa de Apoio a Formação Superior e Licenciaturas Indígenas
PUCMG	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUCRS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUCSP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UCDB	Universidade Católica Dom Bosco
UCS	Universidade Caxias do Sul
UEA	Universidade do Estado do Amazonas
UECE	Universidade Estadual do Ceará
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UEMA	Universidade Estadual do Maranhão
UEMS	Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
UEPA	Universidade do Estado do Pará
UERR	Universidade Estadual de Roraima

UESB	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
UFAC	Universidade Federal do Acre
UFAL	Universidade Federal de Alagoas
UFC	Universidade Federal do Ceará
UFCG	Universidade Federal de Campina Grande
UFES	Universidade Federal do Espírito Santo
UFG	Universidade Federal de Goiás
UFGD	Universidade Federal da Grande Dourados
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso
UFN	Universidade Franciscana
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UNOCHAPECÓ	Universidade Comunitária da Região de Chapecó
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRR	Universidade Federal de Roraima
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
UNEAL	Universidade Estadual de Alagoas
UNEB	Universidade do Estado da Bahia
UNEMAT	Universidade do Estado de Mato Grosso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNIAN	Universidade Anhanguera de São Paulo
UNIBAN	Universidade Bandeirante de São Paulo
UNIFAP	Universidade Federal do Amapá
UNIJUÍ	Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul
UNIR	Universidade Federal de Rondônia
UNIVALI	Universidade do Vale do Itajaí

USP	Universidade de São Paulo
UVA	Universidade Estadual Vale do Acaraú

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O que nos conduz a uma pesquisa de doutorado? Ascender à carreira profissional? Sermos reconhecidos perante a academia como professores pesquisadores? Busca por oportunidades de participarmos em editais de pesquisas fomentados por instituições financiadoras? Melhores condições de trabalho e remuneração? São variadas as motivações que nos levam a ingressar no doutorado. Fazer pesquisa é fascinante, instigante e desafiador. É uma oportunidade de a universidade intervir e interagir na sociedade. Isso já é fundamental em períodos comuns, ainda mais em tempos de pandemia que faz despontar o que temos de pior e de melhor. E ensinar Matemática para indígenas, aliás, para acadêmicos indígenas é inspirador, aprendemos bastante. Instiga-nos a não somente pensar matemática, mas em matemáticas e no possível diálogo entre elas. A diversidade aflora, o singular se transforma em plural mantendo suas singularidades e o que era solitário se torna solidário.

I. Iniciando a jornada de pesquisa e, com ela, as escolhas teóricas.

Enquanto professor do Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT) no campus do município de Juína (desde janeiro de 2010), localizado na região Noroeste do Estado de Mato Grosso, ministrei[1] aulas da disciplina de Análise Real no curso de Licenciatura em Matemática. Isso ocorreu nos segundos semestres letivos dos anos de 2015 e 2016. Não fiquei satisfeito com minha abordagem didática nessa disciplina. Então, ao ser aprovado para o curso de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da Universidade Estadual de Londrina (UEL) em dezembro de 2016 e, sendo integrante do Grupo de Estudo e Pesquisa do

---

[1] Aqui, cabe a explicação de que toda introdução está escrita ora, na primeira pessoa do singular, quando estou falando de minhas experiências, minhas escolhas, minha trajetória, meus questionamentos, minhas inquietações e reflexões. E ora, na primeira pessoa do plural, quando nos referimos à jornada de investigação realizada pelos dois pesquisadores, a orientadora e eu. As demais seções dessa pesquisa estão escritas na primeira pessoa do plural.

Pensamento Matemático (GEPPMat) a partir de março de 2017, iniciei a pesquisa envolvendo uma proposta didática para o ensino de Análise Real em cursos de Licenciatura em Matemática.

A pesquisa caminhava nessa temática, a escrita da tese já ganhava corpo com algumas teorias da Didática da Matemática Francesa, História da Matemática com ênfase em Análise Real e alguns esquemas elaborados. Ou seja, a tese estava desenhada em minha mente. E já havia transposto parte das ideias para um texto inicial que eu apresentaria, em outubro de 2018, aos integrantes do GEPPMat para discussões e apontamentos. Porém, ao fazer uma visita turística a Porto Seguro no Extremo Sul da Bahia, em setembro de 2018, fui informado que em seu campus do Instituto Federal da Bahia (IFBA), há o curso de Licenciatura Intercultural Indígena, o qual eles denominam de LINTER. Então, solicitei à sua coordenação uma conversa para conhecer mais a respeito do currículo e do funcionamento do curso, pois a pesquisa que realizei no mestrado, defendida em julho de 2013, foi no campo de estudo da Etnomatemática e no cenário da Educação Escolar Indígena e, esse tema de pesquisa sempre me desperta atenção.

Ao conversar com o coordenador e professores da LINTER, bem como com alguns acadêmicos indígenas que compõem o seu colegiado, eles me disseram que estavam enfrentando dificuldades para encontrar um professor de Matemática para ministrar aulas nas disciplinas relacionadas a Etnomatemática na LINTER. Os professores de Matemática do IFBA de Porto Seguro não realizam pesquisas sobre a Etnomatemática. Além disso, os acadêmicos solicitaram que o curso devia ter uma quantidade maior de aulas dessa área do conhecimento e, estavam propondo a construção de um novo currículo para o curso, no qual, mais conteúdos de Matemática deveriam ser incluídos. Conteúdos esses, que eles identificaram estarem presentes nos currículos de outras Licenciaturas Interculturais no Brasil, como por exemplo, conteúdos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral.

Voltando para Londrina com essas ideias e ao conversar com minha orientadora, professora Angela Marta, concordamos com a possibilidade de pesquisa na LINTER. Então, ela solicitou que eu apresentasse essa nova temática de investigação até o dia 12 de dezembro de 2018, último dia de reunião do GEPPMat no ano letivo de 2018. Logo, eu teria três meses para escrever a respeito da nova temática de pesquisa. Como eu queria muito pesquisar novamente no âmbito da Educação Indígena, só que no cenário do Ensino Superior Indígena, aceitei a proposta e realizei essa apresentação no grupo de pesquisa na data prevista, o que rendeu muitas discussões e apontamentos que aprimoraram a temática dessa investigação.

Com essa alteração definida, em fevereiro de 2019 mudei para Porto Seguro, pois creio que morar no local da pesquisa, quando possível, é fundamental para o desenvolvimento das investigações que envolvem o contexto indígena. Estando no local de investigação, o pesquisador pode manter maior contato com os participantes da pesquisa, visitar com frequência a comunidade indígena dos acadêmicos envolvidos, bem como frequentar o campus do IFBA e dialogar com o seu coordenador e com o professor de Matemática da LINTER.

Morando em Porto Seguro, tive oportunidade de participar das discussões no IFBA, entre os acadêmicos indígenas da LINTER e o coordenador do curso a respeito dos conteúdos curriculares que iriam compor o novo currículo do curso. Os professores indígenas recém-formados no curso (turma que ingressou em 2010), disseram estar com dificuldades para ensinar Matemática nas escolas das comunidades e que o Currículo da LINTER, alocado em seu PPC, precisava ser reformulado para, entre outras demandas, acrescentar conteúdos de Matemática que já estão presentes em outras Licenciaturas Interculturais Indígenas no Brasil. De fato, ao verificarmos os PPC dos outros cursos de formação de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática, constatamos a presença de conteúdos de Cálculo em alguns deles.

Considerando a demanda dos acadêmicos indígenas pela inserção de mais conteúdos de Matemática no Currículo da LINTER, Mattos e Ferreira Neto (2019) destacam que os indígenas sabem e consideram, que os conhecimentos curriculares não indígenas são necessários e essenciais para suas comunidades. É preciso, é fundamental e vital valorizar os conhecimentos culturais próprios, porém “Estudar em profundidade Matemática, Ciências, Português e outros conteúdos curriculares da cultura não indígena é importante e isso é feito pelos professores indígenas nas aldeias com muito esforço” (p. 54).

Assim, em abril de 2019 e com nossa participação foram realizadas algumas reuniões e discussões embasadas no estudo dos currículos de outras Licenciaturas Interculturais Indígenas do Brasil; no Parecer Nº 1302/2001 do Conselho Nacional de Educação, que trata das Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática e, na Resolução Nº 1 de 07 de janeiro de 2015 do Conselho Nacional de Educação, que trata das diretrizes curriculares dos cursos de Licenciatura Intercultural Indígena.

Após esses estudos e discussões, ficou definido o novo Currículo da LINTER para a formação do professor indígena da área de Ciências da Natureza e Matemática. Ele passou a vigorar tanto para a nova turma com início no ano letivo de 2020, quanto para o quarto semestre em diante da turma vigente. Entre outros conteúdos de Matemática e Estatística, foi incluído o ensino de alguns tópicos de Cálculo: “Noções básicas de infinitésimo, limite, derivada e integral no contexto histórico e contextualizado (Princípio de Cavalieri)” (BRASIL, 2016, p. 220). Salientamos que o PPC da LINTER foi finalizado em 2019, mas seu ano oficial de edição segue como 2016, pois esse foi o ano em que se deu início o seu processo administrativo de reformulação no âmbito do IFBA.

Com relação ao desenvolvimento do conhecimento matemático, de acordo com D’Ambrosio (2013), a História que estudamos sobre outros povos, corresponde a interpretação de fatos e personagens do mundo ocidental para as demais regiões. Ou seja, é uma história que relata os fatos e personagens de outras regiões pelo olhar do ocidental. Como seria a História desses outros povos contada por eles próprios? A Matemática se destaca em conjunto com a História, ela se faz presente e está interligada com fatos e personagens históricos. Então, como é a Matemática desenvolvida por outros povos? Outras civilizações?

O pensamento matemático não é exclusividade do mundo ocidental, ele se desenvolveu no mundo todo, por meio dos seus fazeres e saberes matemáticos (D’AMBROSIO, 2013). A Etnomatemática ressalta com essa demanda de pesquisa ao estudar as matemáticas desenvolvidas no mundo e, entre elas, as matemáticas indígenas[2] e a própria Matemática. Entendemos que no processo de formação de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática são primordiais estudos relacionados à Etnomatemática.

De acordo com Dall'Agnol (2019), em sua pesquisa sobre os trabalhos (teses e dissertações) envolvendo a Etnomatemática na formação de professores dessa área, ele ressalta que na formação desses professor es indígenas há de se manter o diálogo constante com a interculturalidade, destacando os saberes indígenas e a identidade de cada povo dos acadêmicos. Segundo o autor, a formação do professor indígena é fundamental para o desenvolvimento da Educação Escolar Indígena, sendo que não existe um modelo pronto para tal formação, uma vez que os conhecimentos tradicionais das comunidades envolvidas devem fazer parte dos currículos dos cursos de formação inicial e continuada dos professores indígenas. Para nós, no âmbito da Educação Matemática, estudos relacionados à Etnomatemática favorecem a inserção e as discussões dos aspectos das matemáticas indígenas nas Licenciaturas Interculturais Indígenas.

Assim, buscamos por teses e dissertações que utilizaram a perspectiva da Etnomatemática em suas pesquisas e, tendo como público investigado, os acadêmicos indígenas de algum dos cursos da Educação Indígena Superior (Licenciatura Intercultural Indígena e Licenciatura em Pedagogia Intercultural Indígena). Para tanto, realizamos um levantamento dessas pesquisas no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e, cruzamos com as investigações presentes na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT).

[2] Entendemos que a Etnomatemática é composta por um grupo de matemáticas, entre elas, as matemáticas indígenas que compreendem os modos distintos de matematizar presente nos cotidianos das comunidades indígenas. Cada uma das matemáticas indígenas é patrimônio cultural da comunidade indígena a qual pertence, abrangendo os modos de contar, inferir, medir, classificar, modelar, construir, entre outros, que os povos indígenas possuem. Elas são objetos de pesquisa da Etnomatemática e, precisam ser valorizadas e contextualizadas tanto na elaboração quanto na execução do processo educacional da Matemática no âmbito da Educação Escolar Indígena, bem como, na formação de seus professores indígenas de Matemática.

Após um refinamento dos resultados, encontramos 31 (trinta e um) trabalhos, sendo 14 (quatorze) teses (BELLO, 2000; CORRÊA; MENDES, 2001; JESUS; RIBEIRO, 2006; SILVA, 2008; LEME, 2010; BERNARDI, 2011; MARCILINO, 2014; ROLIM, 2015; CUNHA; MELO; MONTEIRO, 2016; SANTOS, 2020) e 17 (dezessete) dissertações (DOMINGUES, 2006; AMORIM; OLIVEIRA, 2009; MONTEIRO, 2011; BRITO; COSTA; RIBEIRO, 2012; CICARINI; SANTOS; SILVA, 2015; LIMA, 2017; BERNAL; BONDARCZUK; SILVA, 2018a; SILVA, 2018b; ARAÚJO; WIECZORKOWSKI, 2019). Todos salientam a importância das discussões proporcionadas pelos estudos em Etnomatemática na formação inicial de professores indígenas de Matemática. Essas pesquisas são brevemente apresentadas no Capítulo 3.

Por outro lado, no processo de formação de créditos para o doutorado eu participei da disciplina *Sobre a Construção do Conhecimento em Educação Matemática*, por meio da qual, estudei o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática de David Tall. Segundo Tall (2013), esse quadro teórico é composto por três vertentes do pensamento matemático se desenvolvendo em graus de aprimoramento e em longo prazo, sendo que elas se inter-relacionam de forma dinâmica. Com relação ao estudo dos Três Mundos da Matemática na formação inicial de professores de Matemática, com vistas ao debate sobre as dificuldades dos acadêmicos no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos curriculares de Matemática, de acordo com (BISOGNIN; BISOGNIN; LEIVAS, 2016, p. 374), considera-se

> [...] que as discussões sobre dificuldades de licenciandos em Matemática deveriam ser estimuladas, para que a formação inicial os capacite a apresentar os conteúdos da educação básica de uma forma que passe pelos Três Mundos da Matemática e que envolva metodologias variadas e exemplos adequados ao nível de ensino dos alunos da educação básica. Dessa forma, acreditamos ser possível, nos cursos de formação inicial de Matemática, proporcionar a base para uma prática profissional adequada à escola atual, com todas as suas especificidades e necessidades.

De fato, segundo Tall (2020), o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática foca suas abordagens nos objetos matemáticos e em suas propriedades. Inicialmente, o referido quadro teórico promove o debate das propriedades desses objetos em sua forma física, principalmente com o estudo de sólidos geométricos. E depois, são construídas representações mentais desses objetos em cada indivíduo que os estuda para, possivelmente, com o aprimoramento do pensamento matemático, serem trasnformadas em operações simbólicas. Esse é o campo de desenvolvimento da Matemática Prática para a Matemática Teórica (TALL, 2020).

Para Tall (2020), outra vertente do pensamento matemático se desenvolve a partir do estudo dos objetos matemáticos e suas propriedades com vistas ao seu aprimoramento para a Matemática Formal. Ela age com base em propriedades definidas por meio de linguagem axiomática e prova matemática.

Considerando a abrangência desse quadro teórico, com relação aos cursos de formação inicial de professores de Matemática Bisognin, Bisognin e Leivas (2016, p. 374) nos relatam que: “Essas oportunidades de ir e vir entre os Três Mundos da Matemática devem ser estimuladas pelos docentes formadores, em qualquer conteúdo trabalhado nas disciplinas”.

De acordo com Tall (2020, p. 3, grifo do autor)

> O pensamento matemático surge na criança com um senso intuitivo de espaço e número e se desenvolve em formas mais estruturadas de geometria, aritmética, álgebra, cálculo e, para alguns que se especializam, em matemática formal, lógica e prova matemática. Tudo isso envolve o pensar em *objetos* (mentais ou físicos), *operações* em objetos e suas propriedades. Algumas dessas atividades (como geometria) se concentram mais *nos objetos e em suas propriedades*. Outros (como aritmética e álgebra) se concentram nas *operações e em suas propriedades*. A matemática formal mais sofisticada, utilizada principalmente por matemáticos puros, concentra-se em estruturas baseadas apenas em *propriedades* dadas por axiomas e definições das quais todas as outras propriedades são deduzidas por prova formal. [3]

Assim, considerando a abrangência desse quadro teórico ao relacionar o pensamento matemático se desenvolvendo em três níveis de

[3] “Mathematical thinking arises in the young child with an intuitive sense of space and number and develops into more structured forms of geometry, arithmetic, algebra, calculus, and, for a few experts, into more formal mathematics, logic and mathematical proof. All of these involve thinking about *objects* (mental or physical), *operations* on objects and their *properties*. Some of these activities (such as geometry) focus more on *objects and their properties*. Others (such as arithmetic and algebra) focus on *operations and their properties*. More sophisticated formal mathematics, used mainly by pure mathematicians, focuses on structures based solely on *properties* given by axioms and definitions from which all other properties are deduced by formal proof”.

aprimoramento (Matemática Prática, Matemática Teórica e Matemática Formal) e, após estudos sistemáticos e reflexões optamos pelo quadro teórico dos Três Mundos da Matemática para nossa pesquisa ao lado da Etnomatemática. Então, com o objetivo de conhecermos as suas abordagens no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, realizamos investigações sobre pesquisas brasileiras (teses e dissertações) envolvendo o referido quadro teórico.

Assim, novamente cruzamos os dados do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, com os dados alocados no banco de teses e dissertações da BDTD do IBICT. Após um refinamento dos resultados, encontramos 30 (trinta) trabalhos, sendo 14 (quatorze) teses (LIMA, 2007; LEME, 2016; ALMEIDA; DIAS; FREIRE; GONÇALVES; SCHASTAI, 2017; CARMO; FLORES; IMAFUKU, 2018; DELFINO; MARTELOZO; VISINTAINER, 2019; FLÔRES, 2020) e 16 (dezesseis) dissertações (ANGELINI; BADARÓ; KOCH; ROBIM, 2010; FREIRE; SANTOS, 2011; FONSECA; POGGIO, 2012; ALMEIDA; FELIPE, 2013; MAÇÃO, 2014; FERNANDES, 2015; SANTOS, 2016; SENA, 2017; SOARES; RIZZON, 2018). No Capítulo 4 trazemos uma breve análise de cada uma dessas pesquisas com o intuito de apresentarmos a abrangência de investigações envolvendo os Três Mundos da Matemática.

Ao olharmos para todos os textos das dissertações e teses, tanto com relação aos estudos envolvendo a Etnomatemática, quanto às investigações trazendo o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, constatamos que em nenhum deles há o encontro da Etnomatemática ou do Programa Etnomatemática com o referido quadro teórico. Com relação aos trabalhos com acadêmicos indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática, verificamos que nenhum deles envolve a pesquisa com conteúdos matemáticos relacionados ao ensino e aprendizagem de conteúdos de Cálculo.

Nesse cenário, essa pesquisa é inédita: no âmbito da Etnomatemática em relação aos conteúdos abordados na investigação perante acadêmicos indígenas dos cursos de Licenciatura Intercultural Indígena no Brasil; no contexto da pesquisa com o público indígena perante o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática; ao trazer o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no âmbito do Programa Etnomatemática. Portanto, entendemos que essa pesquisa é relevante para a Educação Indígena e para a

Educação Matemática, tanto, ao provocar o debate do ensino de Cálculo na formação inicial de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática, quanto, ao propiciar a discussão do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no cenário de pesquisa do Programa Etnomatemática.

Afetados pelas leituras acerca dos Três Mundos da Matemática e da Etnomatemática, motivados por realizarmos a pesquisa no contexto da formação inicial de professores indígenas de Matemática, ao olharmos o novo Currículo da LINTER, especificamente com relação aos conteúdos de Cálculo para a formação teórica inicial do professor indígena foi que percebemos, nessa necessidade de ensino, os conteúdos matemáticos para compor nossa problemática de pesquisa:

- Como ensinar as definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área utilizando uma abordagem contextualizada e envolvendo aspectos históricos para os acadêmicos indígenas da LINTER da área de Ciências da Natureza e Matemática?

Acontece que, entre os dias 29 de julho a 16 de agosto de 2019, fui convidado pelo coordenador da LINTER para, em parceria com o professor de Matemática do curso, ministrar a disciplina de Princípios de Etnomatemática[4] para os acadêmicos indígenas do quarto semestre composta por duas turmas com 38 (trinta e oito) discentes indígenas cada. As aulas aconteceram sempre em três dias da semana (segunda-feira, quinta-feira, e sábado) totalizando 12 horas em cada turma e sempre nas dependências do IFBA – Porto Seguro. Promovi uma discussão sobre o que é a Matemática e seu possível enfoque antropológico[5] e o que vem a ser a Etnomatemática.

Nesses encontros, destaquei a Etnomatemática como o elo pedagógico entre a Matemática do não indígena e os conhecimentos matemáticos de grupos socioculturais identificados (comunidades indígenas,

---

[4] Ementa: “Discussão dialogada sobre o que é Matemática e seu possível enfoque antropológico e o que vem a ser Etnomatemática. Destacar a Etnomatemática como o elo pedagógico entre a Matemática do não indígena e os conhecimentos matemáticos de grupos sócios culturalmente identificados (indígenas). As variadas dimensões da Etnomatemática. A Etnomatemática como a possibilidade do licenciando compreender a Matemática como uma criação cultural resultante da cultura de cada grupo social” (BRASIL, 2016, p.122-123).

[5] De acordo com D’Ambrosio (1998), no enfoque antropológico da Matemática há o reconhecimento e a consideração de que existem outras estruturas educacionais que abrangem contextos culturais diferentes que são previstos e investigados pela Antropologia Cultural. A Matemática e o seu ensino não devem ser considerados independentes do contexto sociocultural.

quilombolas, populações ribeirinhas, moradores do campo, comunidades de ciganos, trabalhadores da construção civil, colônias de pescadores, oleiros, entre outras). Apresentei as variadas dimensões da Etnomatemática (cultural, pedagógica, metodológica, social, política, afetiva, histórica, didática, cognitiva, filosófica e epistemológica), bem como a possibilidade do acadêmico indígena compreender a Matemática como uma criação cultural que interage com outros modos de matematizar[6] no cotidiano.

Em conversas com os acadêmicos da LINTER, durante esses encontros, eles me disseram que no campo da Geometria, o ensino do cálculo de perímetros, áreas e volumes costuma atrair mais atenção do que, por exemplo, o ensino de funções. De fato, ao analisar os textos das pesquisas (teses e dissertações) que envolvem a Educação Escolar Indígena com a participação de professores indígenas constatamos que, na maioria dessas investigações, os conteúdos matemáticos relacionados na pesquisa envolvem aportes da Geometria. Sobretudo com o cálculo de perímetros e áreas de figuras planas, bem como superfícies e volumes de sólidos geométricos entrelaçados com artefatos indígenas do povo participante e os seus modos peculiares de quantificar, classificar e medir.

Outros trabalhos de Pós-Graduação se destacam abordando os processos de contagem do tempo, noções de espacialidade e os sistemas de numeração dos povos indígenas envolvidos nas investigações, além de enfatizarem a importância do aporte teórico da Etnomatemática nas pesquisas com a Educação Escolar Indígena e a Educação Superior Indígena.

Por outro lado, a maioria das pesquisas (teses e dissertações) analisadas, nos informa que contar histórias faz parte da cultura dos povos indígenas. Ou seja, os conhecimentos culturais são discutidos pelos mais idosos aos mais jovens por meio da história oral. D'Ambrosio (2020a) enfatiza que o enfoque histórico nas pesquisas com aportes teóricos da

[6] "Dentre as distintas maneiras de fazer e de saber, alguns privilegiam comparar, classificar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir e, de algum modo, avaliar. Falamos então de um saber/fazer matemático na busca de explicações e de maneira de lidar com o ambiente imediato e remoto. Obviamente, esse saber/fazer matemático é contextualizado e responde a fatores naturais e sociais. O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios a sua cultura" (D'AMBROSIO, 2020a, p. 24).

Etnomatemática se atenta essencialmente a analisar criticamente a geração, produção e institucionalização do conhecimento matemático. "Etnomatemática é hoje considerada como uma subárea da História da Matemática e da Educação Matemática, com uma relação muito natural com a Antropologia e as Ciências da Cognição" (p. 9).

Nesse sentido, dialogar com os acadêmicos indígenas as definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área, que emergem historicamente (reforçando a dinâmica da história oral), a partir da construção do número irracional , do cálculo do comprimento da circunferência e da área do círculo, do cálculo das áreas de regiões situadas sob curvas, entre as retas verticais e , que demarcam um intervalo no eixo horizontal do plano cartesiano com e, acima do eixo , acreditamos ser um caminho pertinente nessa investigação, já que esse percurso envolve Geometria e, podemos acrescentar fatos e personagens presentes na História da Matemática.

Assim, após algumas reflexões, e olhando para o cenário dos objetos matemáticos supracitados, decidimos pela construção de uma proposta educacional com base em um processo[7] de ensino e aprendizagem sobre cada um desses objetos, enfatizando suas definições, para possível aplicação aos acadêmicos da LINTER da área de Ciências da Natureza e Matemática.

Compreendemos que uma proposta educacional é aquela que envolve os processos de ensino, aprendizagem e avaliação escolar que ocorrem simultaneamente sendo inerentes uns aos outros como apresentam Polegatti, Camargo e Savioli (2020). Ressaltamos que devido ao processo de pandemia, deflagrado no início de 2020 em virtude do Coronavirus, as aulas da LINTER foram suspensas impossibilitando a aplicação da proposta educacional dessa pesquisa. Assim, o que apresentamos nos capítulos 7 e 8 é uma proposta de ensino e aprendizagem dos conteúdos envolvidos para futura aplicação aos acadêmicos da LINTER da área de Ciências da Natureza e Matemática.

---

[7] Entendemos a ação de ensinar e aprender como um único processo que precisa ser construído prevendo a contextualização de fatos do cotidiano dos indivíduos participantes, bem como dar voz aos estudantes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, considerando uma relação dialógica entre o professor e seus estudantes.

II. A questão de investigação e os objetivos de pesquisa

Observando os contextos histórico e geométrico da construção dessas definições, resolvemos trazer à tona o método da Exaustão utilizado por Eudoxo e posteriormente aprimorado por Arquimedes para o cálculo de áreas em regiões curvas, com destaque para o círculo. Bem como o dispositivo da balança de Arquimedes no cálculo proporcional de superfícies e volumes de prismas, cones, cilindros e esferas, sendo que tanto o cone quanto a esfera estão inscritos no mesmo cilindro. O que são os infinitesimais? Como foi construída a ideia de limites? O que é uma soma de Riemann? Essas são questões que precisam ser debatidas com os acadêmicos da LINTER quando a proposta for aplicada, assim como seus fatos e personagens históricos. Diante do que já dissemos, após alguns diálogos com os pesquisadores do GEPPMat, resolvemos construir essa pesquisa com o objetivo geral de:

- Caracterizar uma dinâmica[8] de movimento do pensamento matemático entre os Três Mundos da Matemática de David Tall no desenvolvimento de um processo de ensino e aprendizagem para cada uma das definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área, sob a perspectiva da Etnomatemática e para acadêmicos indígenas da LINTER da área de Ciências da Natureza e Matemática.

Ao todo trazemos como proposta educacional cinco processos de ensino e aprendizagem sendo que: o primeiro envolve o cálculo de áreas de regiões retangulares, quadradas, triangulares, do comprimento da circunferência com discussões sobre o número e as ideias intuitivas de limite em direção a sua definição; o segundo engloba os estudos sobre a definição da soma de Riemann e de limite, o cálculo da área do círculo pelo método da Exaustão e utilizando a balança de Arquimedes; o terceiro envolve o cálculo das superfícies do cilindro, do cone e da esfera, bem como seus volumes, além do estudo das definições de soma de Riemann e de limite; o quarto engloba as definições de integral definida e função área utilizando-as para o cálculo de áreas de regiões situadas sob cada uma das curvas , , e , as retas verticais e

[8] Na Física a Dinâmica é uma parte da Mecânica que estuda o comportamento dos corpos em movimento e a ação das forças que produzem ou modificam seus movimentos. Nessa pesquisa, o termo dinâmica, por metáfora, está relacionado ao movimento interno responsável pelo estímulo e pelo aprimoramento de algo, nesse caso, no movimento do pensamento matemático entre os Três Mundos da Matemática.

que demarcam um intervalo no eixo horizontal do plano cartesiano, sendo e, acima do eixo ; o quinto envolve as definições de integral definida e função área utilizando-as para o cálculo de áreas de regiões situadas sob cada uma das curvas e , as retas verticais e que demarcam um intervalo no eixo horizontal do plano cartesiano sendo e, acima do eixo .

Com o intuito de que os acadêmicos indígenas se vejam na constituição do processo educacional e se sintam sensibilizados a participarem no seu desenvolvimento, são utilizados nos processos de ensino e aprendizagem propostos, cinco artefatos indígenas como modelos contextuais das matemáticas indígenas dos envolvidos nas construções das formas geométricas e nos gráficos adotados no processo educacional. Então, após discussões iniciais com os acadêmicos da LINTER o cálculo de áreas de regiões retangulares e triangulares, contextualizadas em seu cotidiano cultural, bem como formalizar as fórmulas matemáticas de cálculo das áreas dessas regiões, temos como objetivos específicos nessa pesquisa:

- Apresentarmos um quadro geral sobre a Educação Superior Indígena no Brasil, com destaque para a formação inicial de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática nas Licenciaturas Interculturais Indígenas;
- Investigarmos, no âmbito da História da Matemática, fatos e personagens históricos que contribuíram na construção das definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área para serem contextualizados em cada processo de ensino e aprendizagem;
- Promovermos a inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática;
- Apresentarmos possíveis dinâmicas de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, perante os Três Mundos da Matemática, envolvendo as definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área advindas das atividades propostas;

Para tanto, estamos pautados no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática de David Tall. O autor considera que a Matemática é constituída por Três Mundos: o Mundo Corporificado é formado por nossas percepções acerca do cotidiano sendo considerado o motor propulsor do conhecimento matemático; o Mundo Simbólico em que ocorrem as transformações de nossas percepções matemáticas em expressões, equações, que são manipuladas por meio de regras matemáticas generalizando fatos do nosso cotidiano, e; o Mundo Formal composto por axiomas e teoremas visando a elaboração de demonstrações e prova matemática buscando construir, justificar e comprovar as regras, as definições e os conceitos proeminentes do conhecimento matemático. Com relação ao Programa Etnomatemática e a abordagem pedagógica da Etnomatemática, D'Ambrosio (1998, p. 6-7, grifo do autor) enfatiza que

> Essencialmente, admitimos que toda atividade humana resulta de motivação proposta pela realidade na qual está inserido o indivíduo através de situações ou problemas que essa realidade lhe propõe, diretamente, através de sua própria percepção e de seu próprio mecanismo sensorial, ou indiretamente, isto é, artificializados mediante propostas de outros, sejam professores ou companheiros. Queremos entender esse processo que vai da *realidade* à *ação*. Admitimos também que a abordagem dessas situações ou problemas é cultural, e procuramos analisar quais as diferenças cognitivas que resultam dessas diferenças culturais. [...] Encontramos no Programa Etnomatemática vantagens do ponto de vista cultural, onde a análise histórica aparece como um instrumental importante, e também do ponto de vista pedagógico, pois lidamos diretamente com o processo de aprendizagem.

Na Educação Matemática voltada para o público indígena, a abordagem pedagógica da Etnomatemática provoca a valorização cultural dos atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática. Ela promove o encontro cultural entre os modos de matematizar dos pesquisados, nessa investigação as matemáticas indígenas dos acadêmicos da LINTER, com os conteúdos de Matemática presentes no Currículo, possivelmente favorecendo no processo educacional, a construção de novos conhecimentos matemáticos.

Além disso, a Etnomatemática possibilita o diálogo com outras metodologias de ensino, nesse caso, aportes da História da Matemática (Arquimedes, Euclides, Eudoxo, Riemann, entre outros), que entendemos ser fundamental para permear cada processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos em estudo. Por outro lado, a Etnomatemática atua, nessa investigação, como um Programa de Pesquisa formado por uma comunidade de professores pesquisadores que enriquecem e movimentam o Programa Etnomatemática fomentando o debate metodológico, cultural, didático, social, epistemológico, filosófico, histórico, pedagógico, cognitivo, afetivo e político.

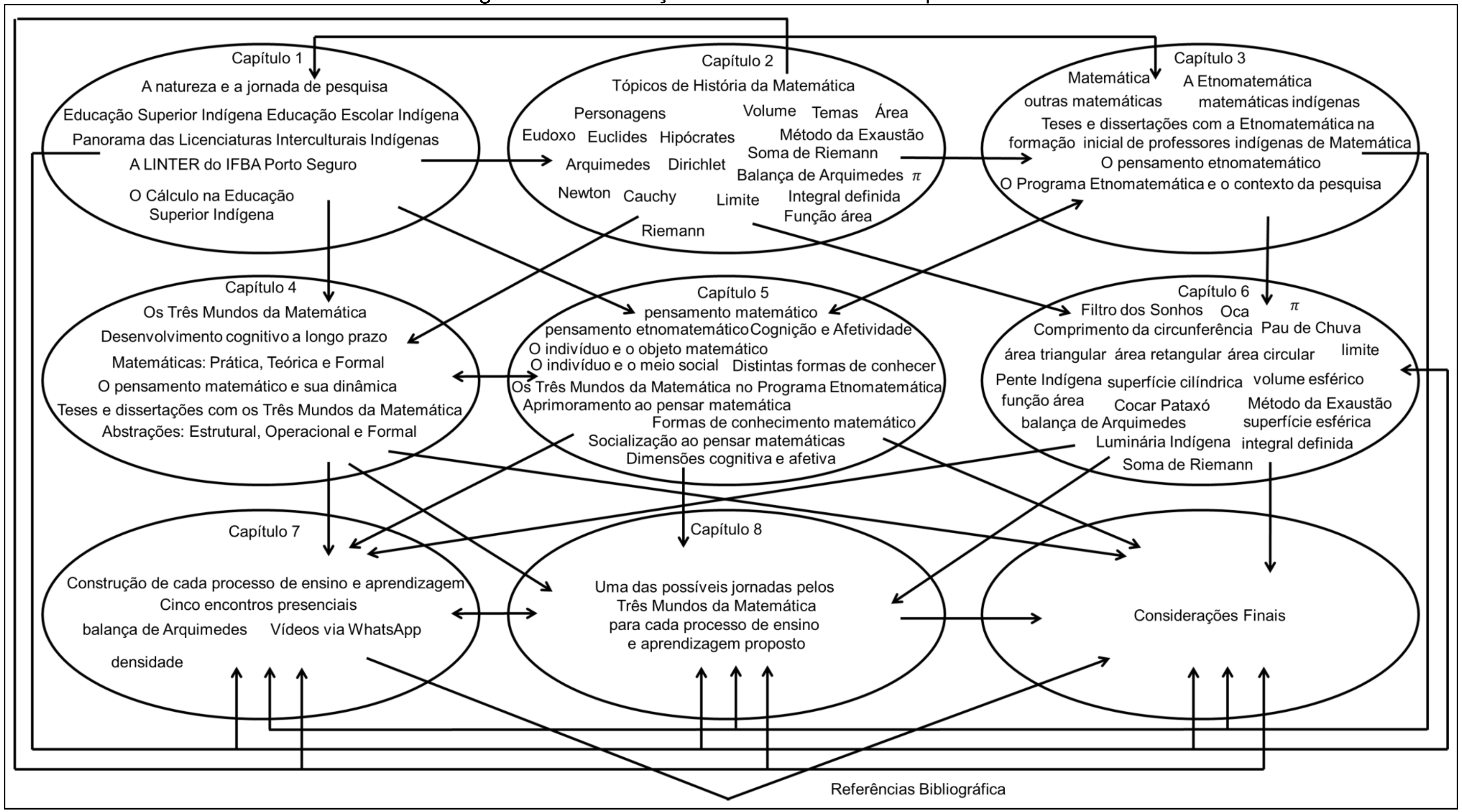
Nesse cenário, segundo Polegatti e Savioli (2018), a Etnomatemática tem como vertentes dessas discussões, as investigações das práticas escolares em todos os níveis de ensino, atuando de forma solidária com outras metodologias de ensino da Matemática (Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Tecnologias Educacionais, Contextualização e descontextualização, História da Matemática), bem como nas pesquisas com os modos de matematizar de comunidades socialmente constituídas. “Assim, a Etnomatemática apresenta-se como uma rica e contemporânea fonte de pesquisas, que provoca reflexões, inquietudes, atenção, respeito, movimentando a Educação Matemática. Com ela a investigação educacional ganha em impacto social” (p. 72). Portanto, para nós é fundamental promovermos a inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática. A seguir, apresentamos um panorama geral dos capítulos da tese e suas conexões.

III. Um panorama da tese na interação dinâmica entre seus capítulos

Como já salientamos, essa pesquisa nasceu de um encontro inesperado em uma viagem de descanso. Desde a problemática do ensino de conteúdos de Cálculo para acadêmicos indígenas da LINTER, percorrendo as escolhas teóricas para embasar o percurso da pesquisa, que envolve estudos sobre: a Educação Indígena que engloba a Educação Superior Indígena e sua oferta no Brasil, nosso foco de estudo, e a Educação Escolar Indígena; personagens e fatos da História da Matemática que trazem as origens dos objetos matemáticos da pesquisa; a Etnomatemática e o Programa Etnomatemática; o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática; a construção de um processo de ensino e aprendizagem para cada um dos conteúdos de Cálculo da pesquisa.

Na Figura 1, trazemos a interação dinâmica entre os capítulos da tese. Eles se relacionam e interagem culminando na construção do processo de ensino e aprendizagem proposto e em nossas considerações finais. A seta de duplo sentido entre os Capítulos 1 e 3 ressalta que em toda Educação Indígena há a presença de estudos relacionados a Etnomatemática, e esses estudos repercutem nas possíveis pesquisas desses acadêmicos, no cenário da Educação Escolar Indígena, ou com eles no Programa Etnomatemática. Compreendemos ainda que existem relações de duas vias entre os Capítulos 3 e 5 e entre os Capítulos 4 e 5, afinal estamos inserindo o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática proporcionando a possibilidade de emergirem outras investigações envolvendo os Três Mundos da Matemática no contexto de pesquisa do Programa Etnomatemática e vice-versa.

Figura 1 – A interação dinâmica entre os capítulos.



Fonte: Elaborada pelos autores[9].

[9] Eu e minha orientadora.

No Capítulo 1, justificamos a natureza qualitativa dessa investigação, descrevemos como realizamos o processo de pesquisa, trazemos um panorama dos cursos de formação de professores indígenas no Brasil, destacando suas possibilidades de atuação profissional e os povos indígenas comtemplados nesses cursos. Apresentamos uma visão geral da Educação Indígena que é composta pela Educação Escolar Indígena e a Educação Superior Indígena. Entendemos que a Educação Indígena dialoga com a Educação não indígena, tanto por intermédio de seus cursos de formação de professores indígenas, quanto por meio da Educação Escolar Indígena que abre caminho para a formação do estudante indígena em nível superior, não necessariamente, no âmbito da Educação Superior Indígena. Destacamos os cursos de Licenciatura Intercultural Indígena que apresentam conteúdos curriculares de Cálculo Diferencial e Integral e, entre eles, ressaltamos a dinâmica de formação e o currículo matemático da LINTER.

No Capítulo 2, propomos discussões sobre a construção das definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área, desde suas possíveis origens a suas definições adotadas nos livros de Cálculo. Esse percurso histórico trazendo fatos, personagens e objetos matemáticos envolvidos, permeia o processo de ensino e aprendizagem de cada objeto matemático em estudo e, auxilia na caracterização da dinâmica de movimento do pensamento matemático entre os Três Mundos da Matemática. Destacamos o método da Exaustão de Eudoxo e Arquimedes para o cálculo do comprimento da circunferência e da área circular. Além disso, trabalhamos com a balança de Arquimedes no estudo das relações proporcionais entre as fórmulas matemáticas que utilizamos para calcular as superfícies e volumes de uma esfera, de um cone e de um cilindro, sendo que o cone e a esfera estão inscritos no cilindro em tela.

No Capítulo 3, trazemos discussões sobre a abordagem pedagógica da Etnomatemática no ensino de conteúdos da Matemática para o público indígena. Aqui ao lado da História da Matemática com relação específica à história da construção das definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área. Ressaltamos o Programa Etnomatemática que, entre outras coisas, busca fomentar a Educação Matemática no contexto de comunidades socialmente identificadas (indígenas, quilombolas, agricultores, ribeirinhos, pescadores, trabalhadores da construção civil, artesãos, entre outros). Apresentamos um panorama geral das análises das pesquisas (teses e dissertações) brasileiras sobre a Etnomatemática na formação inicial de professores indígenas de Matemática. O desenvolvimento do pensamento etnomatemático se dá por meio das pesquisas no referido programa de pesquisa. Ao final, trazemos o contexto dessa pesquisa inserido no Programa Etnomatemática.

No Capítulo 4, debatemos o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática de David Tall, bem como apresentamos as análises das pesquisas (teses e dissertações) realizadas no Brasil com esse quadro teórico. Ele foi construído pelo autor a partir de suas análises e reflexões, por cerca de meio século de pesquisas, sob uma gama de teorias voltadas para o debate, o fomento e a construção de processo de aprendizagem da Matemática. Esse quadro teórico traz o pensamento matemático se desenvolvendo e se aprimorando em três Mundos da Matemática (Corporificado, Simbólico e Formal), caracterizando cada um deles. O referido quadro é fundamental para elaboração das atividades propostas e, fornece subsídios para interpretação das resoluções dessas atividades quando forem aplicadas. Como já informamos, devido ao processo pandêmico desencadeado pela disseminação do Coronavirus, não conseguimos aplicar os processos educacionais descritos no capítulo 7.

No Capítulo 5, promovemos a inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática por meio das relações entre as estruturas cognitivas e afetivas que se interagem e deixam “rastros” decorrentes do processo de aprendizagem de um ou mais objetos matemáticos perante o primeiro e, as dimensões cognitiva e afetiva do segundo. Esses “rastros” podem colaborar ou dificultar a aprendizagem de novos conceitos matemáticos. O pensamento matemático se desenvolve em níveis de abstração estrutural, operacional e formal sendo fomentado pelas ações nos objetos matemáticos por intermédio das matemáticas Prática, Teórica e Formal. O pensamento etnomatemático guia o acadêmico indígena por esses níveis possibilitando diferentes formas de pensar instigando a socialização no pensar matemáticas.

Já no Capítulo 6, trazemos os artefatos indígenas Filtro dos Sonhos, Pente Indígena, Luminária Indígena e Cocar como modelos culturais dos acadêmicos da LINTER para entrelaçá-los com os objetos matemáticos abordados nessa pesquisa. A partir do contexto da pesquisa inserido no Programa Etnomatemática, apresentamos as relações que vislumbramos entre cada artefato escolhido para implementar os estudos dos objetos matemáticos. Assim: do Filtro dos Sonhos ao estudo do número , cálculo do comprimento da circunferência, da área de um círculo, do conceito de infinito, soma de Riemann e definição de limite; do Pau-de-chuva ao estudo do cilindro com o cálculo de sua superfície total e de seu volume; da Luminária Indígena ao estudo da esfera com o cálculo de uma superfície esférica e de seu volume; do Cocar ao estudo das construções gráficas das funções constante, polinomial do 1º grau e quadrática, bem como a definição de integral definida e função área.

O Capítulo 7 é composto pela apresentação de cada processo de ensino e aprendizagem das definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área. Ao todo propomos a realização de cinco encontros presenciais, de duas horas cada, com os acadêmicos indígenas da LINTER da área de Ciências da Natureza e Matemática. Em cada encontro, caracterizamos a dinâmica de movimento do pensamento matemático entre os Três Mundos da Matemática, por meio de suas matemáticas: Prática, Teórica e Formal, bem como com o possível desenvolvimento de abstrações estrutural, operacional e formal. Para a construção do processo educacional, tendo como base a inserção dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática (Capítulo 5); partimos dos conteúdos de Cálculo que estão presentes no Currículo de Matemática da LINTER (Capítulo 1); aplicamos os entrelaçamentos desenvolvidos no Capítulo 6, sob a perspectiva pedagógica da Etnomatemática (Capítulo 3) e, em companhia de fatos e personagens da História da Matemática (Capítulo 2), bem como reflexões fomentadas pelo quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Capítulo 4).

No Capítulo 8, apresentamos um dentre os possíveis resultados para a aplicação de cada processo de ensino e aprendizagem proposto. Salientamos que as análises de cada encontro já devem iniciar no transcorrer do próprio encontro e se estendem nos intervalos entre eles. Assim, colocamos uma seta de duplo sentido entre os Capítulos 7 e 8, indicando que as reflexões advindas das análises das ações de cada encontro, interferem no desenvolvimento dos encontros posteriores. E por sua vez, essas reflexões, possivelmente, provocam outras ações que conduzem a novas reflexões. Ou seja, o planejamento de cada processo de ensino e aprendizagem presente no Capítulo 7 é flexível e dinâmico, estando sujeito a alterações instigadas pelas reflexões durante e posteriormente a cada encontro presencial. Por fim, concluímos com nossas considerações finais e as referências bibliográficas.

CAPÍTULO 1

A NATUREZA E A JORNADA DESSA PESQUISA, OS CURSOS DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES INDÍGENAS NO BRASIL E A LINTER DO IFBA – PORTO SEGURO

Nesse capítulo caracterizamos a natureza dessa investigação como uma pesquisa qualitativa. No seu transcorrer, apresentamos os sujeitos da pesquisa, bem como o contexto de formação deles. Ou seja, acadêmicos indígenas (Pataxós, Pataxós Hãhãhãe e Tupinambás) do sexto semestre da LINTER, que escolhem a área de Ciências da Natureza e Matemática para atuarem como professores nas escolas indígenas das aldeias locais. Iniciamos algumas discussões sobre e Educação Escolar Indígena que se entrelaça com a formação inicial de professores indígenas. Trazemos um panorama dos cursos de formação de professores indígenas no Brasil, as etnias abarcadas por esses cursos, seus currículos de Matemática com destaque para os conteúdos de Cálculo. Além disso, descrevemos a dinâmica de formação ofertada a esses acadêmicos indígenas, que por sua vez, repercute na Educação Escolar Indígena propiciando elos entre a Educação Indígena e a não indígena. Ao final, focamos nossa lente investigativa no contexto de formação inicial de professores indígenas de Matemática da LINTER em estudo nessa pesquisa.

1.1. A natureza dessa pesquisa

Caracterizamos essa pesquisa como qualitativa, pois concordamos com D'Ambrosio (2009) ao salientar que a pesquisa qualitativa busca entender e decifrar o que está sendo investigado, conduzindo o seu pesquisador a interpretar dados qualitativos oriundos de discursos descritos em documentos, ou coletados no ambiente natural dos sujeitos envolvidos na pesquisa e, pode envolver desde um indivíduo pesquisado a um grupo grande de pessoas. Na pesquisa qualitativa, sobretudo, o pesquisador precisa ser um ótimo observador, estar atento aos detalhes para buscar interpretar o todo, seu processo investigativo é dinâmico e geralmente conduz o investigador a trilhar novos caminhos. “Dificilmente se chega ao novo seguindo caminhos já trilhados” (p. 20).

A pesquisa qualitativa “Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos” (D’AMBROSIO, 2009, p. 21). Assim, mais do que observar, estar com os participantes em seu ambiente natural é primordial. Estudar e analisar os acontecimentos dos fatos, suas narrativas, o comportamento humano enquanto ele acontece naturalmente, é preciso sair do laboratório, e se possível: conhecer pessoalmente, vivenciar e experimentar. Tudo isso auxilia na interpretação dos dados coletados. O pesquisador e cada participante constroem uma relação de confiança, que por sua vez, possivelmente, interfere positivamente na coleta de dados que se dá por meio de variados instrumentos (entrevistas, diálogos, observações, gravação de vídeos ou áudios, entre outros).

De acordo com Bogman e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa busca agrupar uma diversidade de estratégias de investigação para a coleta e interpretação dos dados qualitativos, portanto quanto mais instrumentos de coleta maiores as chances da pesquisa ser bem sucedida. “As questões de pesquisa são abertas a modificações à medida que acontece o recolhimento dos dados, não cabendo às mesmas testar hipóteses previamente formuladas” (p. 16). Para esses autores há cinco características para uma pesquisa ser de natureza qualitativa. No Quadro 1 trazemos essas características, bem como suas relações com essa pesquisa.

Quadro 1 – Relações com as características da pesquisa qualitativa.

Características da pesquisa qualitativa	**Relação com a pesquisa**
A fonte direta de dados é o ambiente natural.	Nessa investigação, compreendermos o contexto de formação inicial do professor indígena da área de Ciências da Natureza e Matemática é fundamental. Para tanto, antes de deflagrado o processo de pandemia do Coronavírus realizamos visitas constantes ao campus do IFBA – Porto Seguro, bem como nas comunidades indígenas dos acadêmicos da LINTER, com o intuito de investigarmos e conhecermos o

	ambiente natural das ações desses acadêmicos (escolas nas aldeias).
A investigação qualitativa é descritiva.	Aqui os dados qualitativos se destacam na observação minuciosa do cotidiano de formação inicial dos professores indígenas, em suas ações nas escolas das aldeias e em documentos oficiais que trazem os contextos de formação inicial de professores indígenas no Brasil. Para nós, o contexto dos pesquisados é essencial. Nesse sentido, é importante interagirmos com os acadêmicos indígenas, buscando ir além de conhecermos o seu ambiente natural, para os conhecermos e eles a nós. Pesquisador e pesquisado, professor formador e cada acadêmico, procurando estabelecer relações de confiança que, por sua vez, implicam na dinâmica de coleta e, possivelmente, na qualidade e interpretação desses dados coletados.
O processo de pesquisa se destaca perante seus resultados ou produtos.	De fato, nos processos de investigações em Educação Matemática e com comunidades socialmente identificadas, como por exemplo, as comunidades indígenas, e sob a perspectiva da Etnomatemática, há constante atenção e cuidado do pesquisador na construção do processo de pesquisa. A interação dos envolvidos é fundamental no transcorrer das investigações, assim como a implantação de diversos instrumentos e meios para a coleta dos dados qualitativos.
Os dados são analisados de forma indutiva.	Nesse trabalho, o processo de pesquisa é dinâmico e flexível, não há presunção de que sabemos tudo sobre os pesquisados, ou sobre os objetos matemáticos em estudo, ou ainda com relação aos aportes teóricos envolvidos. As questões de pesquisa são reanalisadas com o caminhar das investigações, procurando atrelar a elas fatos relevantes que emergem no transcorrer da pesquisa, tanto os teóricos quanto os empíricos. Como por exemplo, a utilização dos artefatos indígenas que foram surgindo ao longo da pesquisa e as figuras que foram sendo reconstruídas após *insights* ou *feedbacks* dos pesquisadores. Além disso, as análises dos dados partem do todo coletado, mas com atenção aos detalhes, principalmente os relatados pelos participantes.
O significado é de importância vital, os participantes é que dão sentido à pesquisa.	Nessa pesquisa, os significados que os sujeitos investigados dão aos objetos matemáticos presentes na construção de cada processo de ensino e aprendizagem, são primordiais, tanto no planejamento de cada processo, quanto nos seus desenvolvimentos. Além disso, os significados advindos de elementos culturais dos acadêmicos indígenas são essenciais no entrelaçamento dos significados dos objetos matemáticos em estudo.

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Bogdan e Biklen (1994).

> Seja ou não explícita, toda a investigação se baseia numa orientação teórica. Os bons investigadores estão conscientes dos seus fundamentos teóricos, servindo-se deles para

> recolher e analisar os dados. A teoria ajuda à coerência dos dados e permite ao investigador ir para além de um amontoado pouco sistemático e arbitrário de acontecimentos (1994, p. 52).

Nesse sentido, investigamos trabalhos (teses e dissertações) brasileiros, por um lado envolvendo o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, e por outro, trazendo a Etnomatemática na formação inicial de professores indígenas de Matemática. As análises dessas pesquisas, aliadas aos estudos teóricos do Programa Etnomatemática e dos Três Mundos da Matemática nos auxiliam:

- A compreender, pelo lado da Etnomatemática, os significados matemáticos dos acadêmicos indígenas envolvidos na pesquisa;
- A compreender, pelo lado dos Três Mundos da Matemática o desenvolvimento do pensamento matemático intrínseco a cada objeto matemático envolvido na pesquisa;
- Nas interpretações dos dados coletados;
- Na inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática, e com essa ação teórica possibilitar o desenvolvimento dessa e de futuras pesquisas, em Educação Matemática, na perspectiva da Etnomatemática e com o referido quadro teórico;
- No planejamento de cada processo de ensino e aprendizagem proposto e; na apresentação de uma possível interpretação de jornada para cada processo educacional proposto.

Nesse contexto, além dos sujeitos da pesquisa e de seu ambiente natural, ressaltamos que o caráter qualitativo dessa pesquisa emerge nas interpretações do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática e do Programa Etnomatemática. Sobretudo, após as leituras de teses e dissertações envolvendo o referido quadro ou sobre os estudos em Etnomatemática na formação inicial de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática. Isso nos proporciona ver por meio de outros olhos ou por meio de outras lentes epistemológicas a utilização tanto do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática quanto da Etnomatemática no âmbito da Educação Matemática.

1.2. A jornada dessa pesquisa

A abertura à possibilidade de pesquisa no IFBA – Campus Porto Seguro, a leitura do PPC da LINTER e as discussões que acompanhamos sobre a reestruturação de seu Currículo de Matemática, deram inicio a essa pesquisa. Dessas ações emerge a problemática da pesquisa e com ela nossos objetivos conforme já descrevemos. Com o intuito de compreendermos os demais contextos de formação inicial de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática no Brasil, pesquisamos por outros cursos com esse público e finalidade, com vistas aos relatos de seus PPC. Nas leituras desses documentos constatamos que estudos relacionados a Etnomatemática precisam estar sempre presentes nos diálogos de formação inicial desses professores, reforçando nossa escolha anterior pelo Programa Etnomatemática.

Após definirmos os participantes da pesquisa (acadêmicos indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática da LINTER), o seu contexto (formação inicial de professores indígenas das etnias Pataxó, Pataxó Hãhãhãe e Tupinambás) e, por meio dele, os objetos matemáticos presentes no Currículo da LINTER, a serem considerados na proposta de construção de cada processo de ensino e aprendizagem, olhamos para o arcabouço teórico desenvolvido no âmbito da Educação Matemática e decidimos: pelo quadro teórico dos Três Mundos da Matemática para nos fundamentar na implementação de cada processo de ensino e aprendizagem, bem como trazer sugestões para possíveis análises posteriores a suas aplicações; pelas discussões propositadas no Programa Etnomatemática para o ensino e aprendizagem da Matemática em comunidades socialmente identificadas e; pelo contexto histórico destacando personagens e fatos que retratam o desenvolvimento dos objetos matemáticos em estudo.

Com relação a esses objetos matemáticos, a primeira ação que realizamos foi a de pesquisar, no âmbito da História da Matemática, as suas construções, os fatos e os personagens envolvidos. Assim fomos guiados por (BUNT, JONES e BEDIENT, 1988; ÁVILA, 2006; ÁVILA, 2009; EUCLIDES, 2009; RADFORD, 2011; KATZ e TALL, 2012; STWART, 2014; ROQUE, 2015; KUHN, 2017; MAGNAGHI e ASSIS, 2019) nesse percurso histórico, que ganha destaque no Capítulo 2, mas se estende por toda a pesquisa.

Nesse percurso histórico, destacamos a utilização da balança de Arquimedes, resultado de um *feedback* algum tempo depois da qualificação dessa pesquisa. Considerando os pesquisadores da História da Matemática, nossa jornada pela por esse campo de investigação iniciou em Ávila (2009), se intensificou em Roque (2015) e culminou, após a qualificação, com Euclides (2009) e Magnaghi e Assis (2019).

Em consonância a isso e, para nossas reflexões sobre o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, realizamos traduções livres e consequentes leituras dos textos publicados por David Tall, com destaque para (TALL, 2004a; 2004b; 2006; 2008; 2013; 2016; 2019a; 2020). O autor possui uma página virtual[10] hospedada no site da *University of Warwick,* que reune todos os artigos publicados por ele e seus associados. A exceção foi o livro *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the three worlds of mathematics* de 2013, que compõem o acervo bibliográfico do GEPPMat e que tivemos acesso desde o início dessa pesquisa.

Já com relação ao Programa Etnomatemática, dentre todas as leituras e análises realizadas destacamos os textos de (D'AMBROSIO, 1986; 1987; 1998; 2008; 2010; 2012; 2016; 2020a), (KNIJNIK et al., 2012), (VERGANI, 2007; 2009), (MATTOS; MATTOS, 2020), (MATTOS, 2020), (OLIVEIRA, 2020), os trabalhos de (FERREIRA NETO, 2018) e (OLIVEIRA, 2018), além dos vídeos de (D'AMBROSIO, 2013; 2020b) nos quais o autor relata fatos sobre sua formação acadêmica e a origem do termo Etnomatemática.

Todas as figuras construídas envolvendo o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, ou o Programa Etnomatemática, ou relacionados à História da Matemática, ou ainda relacionadas à Educação Indígena, foram sendo aprimoradas no transcorrer das leituras. Algumas dessas figuras ou mapas conceituais, foram refeitos algumas vezes ao sermos instigados por nossas leituras e releituras, seja identificando algo novo ou por intermédio de

[10] http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html

insights ou *feedbacks* dos pesquisadores. Isso reforça a questão dessa pesquisa ser de natureza qualitativa. As leituras e releituras acontecem o tempo todo da pesquisa, não terminamos um capítulo para iniciarmos o outro. Eles foram construídos simultaneamente e se comunicando um com o outro. Muitas vezes estávamos escrevendo em um dos capítulos e surgiam ideias ou reflexões para o(s) outro(s).

Instigados pelos componentes da banca de qualificação, realizamos investigações por pesquisas em Programas de Pós-Graduação brasileiros, envolvendo, tanto o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática quanto o Programa Etnomatemática na formação inicial de professores indígenas. Sim, no início desse trabalho, mesmo antes de pesquisarmos sobre os PPC dos cursos, realizamos buscas pela internet para verificarmos se existe alguma tese ou dissertação no Brasil envolvendo os dois temas teóricos juntos e, não encontramos nenhum trabalho. Além de nenhuma investigação relacionada aos Três Mundos da Matemática no âmbito da Educação Indígena.

Ressaltamos que as análises posteriores a qualificação, instigadas pelas leituras das teses e dissertações que se enquadram no escopo dessa pesquisa, incrementaram o texto, deram robustez teórica a tese e nos conduziram a reflexões por meio dos olhares de outros pesquisadores, como por exemplo: o desenvolvimento do pensamento etnomatemático em consonância com o pensamento matemático no transcorrer de atividades matemáticas, a relação entre as dimensões afetiva e cognitiva do Programa Etnomatemática e a interação entre elementos afetivos e cognitivos na construção do conhecimento matemático. Aqui destacamos os textos de (CLARETO, 2009; RADFORD, 2011; MARTELOZO, 2019; D'AMBROSIO, 2020a; MATTOS, 2020; TALL, 2020), por meio dos quais, propomos a inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática.

Salientamos que essa pesquisa foi construída não de forma linear, mas dinâmica e de concomitância:

- Aos seis contextos de leituras e de análises textuais (os PPC das Licenciaturas Interculturais, textos de História da Matemática, textos de David Tall, textos sobre a Etnomatemática, teses e dissertações envolvendo os Três Mundos da Matemática, teses e dissertações com o

Programa Etnomatemática na formação inicial de professores indígenas de Matemática);

- Às visitas ao IFBA de Porto Seguro e às comunidades dos acadêmicos antes do processo de pandemia desencadeado pelo Coronavírus;
- Aos diálogos com acadêmicos indígenas, professores e o coordenador da LINTER;
- Aos debates pontuais entre eu e a orientadora;
- Às apresentações e discussões com os pesquisadores do GEPPMat;
- Com os apontamentos e sugestões dos componentes da banca de qualificação.

Por meio desses contextos, as ideias, dúvidas, soluções, *insights*, *feedbacks* foram surgindo nas reflexões dessa diversidade contextual de leituras, diálogos, observações, de pesquisa e, ganham *corpus* e significados nos capítulos que compõem esse trabalho. A seguir apresentamos um panorama sobre a formação inicial de professores indígenas no Brasil.

1.3. Entre os cursos de formação inicial de professores indígenas no Brasil

Era o ano de 1500 quando os portugueses chegaram para apossarem-se de terras até então desconhecidas. Aportaram inicialmente no litoral de Porto Seguro – BA, que no cenário histórico brasileiro, é reconhecido como o ponto inicial de nossa colonização pelos Portugueses. Aqui, encontraram terras habitadas pelos povos indígenas, entre eles os povos Pataxó, Pataxó Hãhãhãe e Tupinambá, considerados como os indígenas presentes nas cartas de Pero Vaz de Caminha. Esse encontro humano provocou choques culturais, desencadeando o processo histórico de construção da sociedade brasileira que interferiu e continua interferindo na formação social dos povos indígenas. Mas, que Matemática se praticava na época do descobrimento do Brasil?

De acordo com D'Ambrosio (2008, p. 30):

> Podem-se distinguir cinco tipos de matemática: matemática abstrata, teórica, ligada a dúvidas místicas e religiosas e a fenômenos naturais, particularmente questões ligadas à velocidade e ao movimento dos planetas [...]; matemática

> mercantil, contábil, comercial, diletante [...]; matemática de arquitetos e artistas [...]; matemática das navegações, astronomia, geografia [...]; e matemática dos povos conquistados, envolvendo particularmente construções e astronomia, mas por muitos, ainda não reconhecida como uma matemática.

Mattos e Ferreira Neto (2019) ressaltam que os colonizadores promoveram a educação escolar dos povos indígenas encontrados para catequizá-los e integrá-los, destruindo a cultura, a economia e principalmente a liberdade desses povos. Nesse cenário de desencontro cultural, as matemáticas indígenas desses povos foram naturalmente desconsideradas pelos colonizadores que vieram com o objetivo de posse das novas terras. Segundo relatos dos acadêmicos indígenas da LINTER, os Pataxós, Pataxós Hãhãhãe e Tupinambás percebendo as intenções de colonialidade dos visitantes adentraram as matas e se afastaram. Esse processo de colonização ainda permanece, pois segundo Oliveira (2020, p. 91), nesse contexto

> [...] a colonialidade consiste em uma colonização do imaginário do dominado e atua dentro desse imaginário e, em certa medida, faz parte dele. Isto é baseado em um processo de dominação que começa com uma repressão sistemática não só de crenças, ideias, imagens, símbolos ou conhecimentos, mas também se espalha como raízes, acima de tudo [...].[11]

A implementação da Educação Escolar Indígena com a atuação de professores indígenas e a implantação de cursos superiores para a formação desses professores indígenas, têm o papel inverso do processo de colonialidade possibilitando a valorização cultural dos povos indígenas e promovendo o elo entre os saberes da tradição desses povos e o conhecimento científico, aqui com destaque o encontro entre o conhecimento matemático presente no currículo das escolas indígenas e seu diálogo na formação inicial de professores indígenas de Matemática.

A formação de professores indígenas sempre foi uma demanda dos povos indígenas. “Muitas organizações indígenas discutem e realizam ações em torno da educação bilíngue e intercultural a fim de fortalecer as diversas formas de pensamento educativo, com e para os povos indígenas,

[11] “In this context, coloniality consists of a colonization of the imaginary of the dominated and acts within that imaginary and to some extent it is part of it. It is based on a domination process that started with a systematic repression not only of beliefs, ideas, images, symbols or knowledge, but also spread as roots, above all [...]”.

visando atender às crescentes necessidades e demandas por mais e melhor educação escolar indígena [...]"[12] (OLIVEIRA, 2020, p. 95). Nessa perspectiva, as escolas indígenas, após muita luta desses povos, são idealizadas com currículos contextualizados em relação aos seus conteúdos e metodologias de ensino diversificadas, prevendo o diálogo intercultural.

De acordo com Oliveira (2020), o processo de formação de professores indígenas exige o diálogo em meio ao diferente e ao diverso, pois geralmente são professores formadores não indígenas discutindo com o acadêmico indígena sobre como sua cultura é importante para dialogar com o conhecimento não indígena. "A produção e circulação de diferentes sistemas de conhecimento em cursos de formação de professores indígenas, na universidade e nas escolas indígenas, se desenvolvem em um campo de muitos conflitos, de conexão e de oposição" [13] (p. 105).

Compreendemos que as instituições que ofertam esses cursos precisam aprofundar sua compreensão sobre os desafios epistemológicos que envolvem o desenvolvimento desses cursos, devem promover uma educação inclusiva para receber esses acadêmicos e os possibilite: falar deles próprios; participarem de sua formação; construir o Currículo do seu curso; mais do que trazer as comunidades indígenas para seu ambiente educacional, cada instituição ofertante precisa se fazer presente nessas comunidades se opondo aos desencontros culturais, resolvendo conjuntamente os conflitos e proporcionando conexões entre o conhecimento científico presente no currículo do curso com os saberes tradicionais dos acadêmicos indígenas envolvidos.

A formação de professores indígenas vem ao encontro dessa demanda para que esses professores atuem nas escolas das comunidades em um cenário de Educação Escolar Indígena: que comporta um ambiente de respeito à diversidade cultural; de currículos contextualizados com os conhecimentos tradicionais desses povos; prevendo calendários de funcionamento que atendem as necessidades dos povos indígenas envolvidos;

---

[12] "Many indigenous organizations discuss and carry out actions around bilingual and intercultural education in order to strengthen the various forms of educational thought, with and for indigenous peoples, aiming to meet the growing needs and demands for more and better indigenous school education [...]".
[13] "The production and circulation of different knowledge systems in indigenous teacher training courses, at the university and in indigenous schools take place in a field of many conflicts, of connection and of opposition".

na produção de materiais didáticos específicos e bilíngues (Língua Materna e Língua Portuguesa) para cada comunidade.

Afinal, de acordo com Mattos e Ferreira Neto (2019, p. 44, grifo dos autores)

> A educação escolar indígena, implementada com a simples implantação da escola na aldeia, nada mais é do que uma "educação escolar para os indígenas". Teve o propósito de atender aos interesses dos não indígenas, que nada mais eram do que a submissão e a exploração destes povos. Hoje, os indígenas têm consciência disso e sabem que uma verdadeira educação escolar indígena deve ser bilíngue, específica, diferenciada, intercultural e exercida por professores indígenas da etnia e, desta forma, a educação indígena, que na nossa concepção é aquela que sempre foi realizada na aldeia, independente da escola, sem a necessidade de sistematização dos processos educativos, contribui para a educação escolar indígena.

Como a Educação Escolar Indígena não é simplesmente alocar escolas nas aldeias, a criação de cursos superiores para a formação de professores indígenas não deve ocorrer simplesmente com a criação desses cursos no âmbito das instituições de Ensino Superior. Compreendemos ser necessária a construção desses cursos por meio da participação das comunidades indígenas envolvidas, prevendo a formação de seus professores indígenas para atuarem na Educação Escolar Indígena em suas aldeias.

Buscando dimensionar e entender a formação inicial de professores indígenas no Brasil, pesquisamos na plataforma virtual do Ministério da Educação (MEC) a quantidade desses cursos, bem como o que relatam seus PPC alocados nos portais de cada curso. Encontramos 29 (vinte e nove) cursos ativos ofertados por 26 (vinte e seis) instituições, conforme descrito na plataforma digital e-mec[14], que informa as instituições de Ensino Superior e seus cursos credenciados e autorizados para o funcionamento junto ao MEC. Nela, escolhemos pelo termo *busca textual*, selecionamos a opção de consulta *Nome do Curso* e, informamos o nome do curso por *Indígena*.

No Quadro 2, apresentamos o resultado desta busca informando: as nomenclaturas dos cursos; o nome das instituições que ofertam esses cursos; os municípios onde ocorre o desenvolvimento presencial

---

[14] http://emec.mec.gov.br/.

das aulas e; o número de vagas anuais. Há ainda outros dois cursos em processo de extinção sendo: um deles pertencente à Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), que era ofertado nos municípios de Jequié, Itapetinga, Poções e Vitória da Conquista; e outro alocado na Universidade Comunitária da Região de Chapecó (UNOCHAPECÓ) no município de Chapecó – SC. Ressaltamos que havia o curso denominado Intercultural Indígena da Universidade Estadual do Ceará (UECE), que foi incorporado ao curso de Licenciatura Intercultural Indígena da Universidade Federal do Ceará (UFC).

Quadro 2 – A distribuição dos cursos superiores de formação de professores indígenas no Brasil.

Cursos Superiores de Formação Intercultural Indígena no Brasil	
Região Norte	
Nomenclaturas	**Instituição – Município (Vagas ano)**
Licenciatura Intercultural Indígena	Universidade Federal do Amapá (UNIFAP) – Oiapoque (30)
Licenciatura Formação de Professores Indígenas	Universidade Federal do Amazonas (UFAM) – Manaus (60)
Licenciatura Intercultural Indígena	Instituto Federal do Amazonas (IFAM) – São Gabriel da Cachoeira (45)
Licenciatura para Professores Indígenas do Alto Solimões	Universidade Estadual do Amazonas (UEA) – Amatura (40)
	UEA – Atalaia do Norte (40)
	UEA – Benjamin Constant (50)
	UEA – Santo Antônio do Içá (40)
	UEA – São Paulo de Olivença (40)
	UEA – Tabatinga (40)
	UEA – Tonantins (40)
Pedagogia Intercultural Indígena	UEA – Manaus (150)
Licenciatura Indígena	Universidade Federal do Acre (UFAC) – Cruzeiro do Sul (50)
Licenciatura Intercultural Indígena	Universidade Estadual do Pará (UEPA) – Marabá (100)
	UEPA – São Miguel do Guamá (50)
	UEPA – Tucuruí (40)
Licenciatura Intercultural Ciências da Natureza	Universidade Federal de Roraima (UFRR) – Boa Vista (60)
Pedagogia em Educação Escolar Indígena	Universidade Estadual de Roraima (UERR) – Boa Vista (31)
Licenciatura em Educação Básica Intercultural	Universidade Federal de Rondônia (UNIR) – Ji-Paraná (50)
Região Nordeste	
Nomenclaturas	**Instituição – Município (Vagas ano)**
Licenciatura em Educação Indígena	Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) – Campina Grande (50)
Licenciatura Intercultural Indígena	Universidade Federal de Pernambuco (UPPE) – Caruaru (60)
Licenciatura Intercultural Indígena	Universidade Estadual do Maranhão

	(UEMA) – São Luiz (45)
Licenciatura Intercultural Indígena Kuaba	UFC – Fortaleza (80)
Licenciatura Intercultural Indígena Pitakajá	UFC – Fortaleza (50)
Licenciatura em Pedagogia Intercultural Indígena	Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) – Sobral (80)
Licenciatura Intercultural Indígena	Universidade Estadual de Alagoas (UNEAL) – Joaquim Gomes (40)
	UNEAL – Palmeira dos Índios (40)
	UNEAL – Pariconha (40)
	UNEAL – Porto Real dos Colégios (40)
Licenciatura Intercultural em Educação Escolar Indígena	Universidade do Estado da Bahia (UNEB) – Paulo Afonso (60)
Licenciatura Intercultural Indígena	IFBA – Porto Seguro (40)
Região Centro-Oeste	
Nomenclaturas	**Instituição – Município (Vagas ano)**
Licenciatura Intercultural Indígena	Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT) – Barra do Bugres (50)
Licenciatura em Pedagogia Intercultural	UNEMAT – Barra do Bugres (60)
Educação Intercultural Ciências da Cultura	Universidade Federal de Goiás (UFG) – Goiânia (40)
Licenciatura Intercultural Indígena	Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD) – Dourados (60)
Licenciatura Indígena	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) – Aquidauana (120)
Região Sudeste	
Nomenclaturas	**Instituição – Município (Vagas ano)**
Educação Básica Indígena: Formação Intercultural de Professor	Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) – Belo Horizonte (150)
Licenciatura Intercultural Indígena	Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) – Vitória (70)
Região Sul	
Nomenclaturas	**Instituição – Município (Vagas ano)**
Licenciatura Intercultural Indígena do Sul da Mata Atlântica	Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) – Florianópolis (120)
Licenciatura em Pedagogia Intercultural Indígena	Universidade do Vale do Itajaí (UNIVALI) – Biguaçú (40)
Licenciatura em Educação Indígena	Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) – Vários municípios (150)

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos dados da pesquisa com os PPC.

O cenário de cursos para a formação inicial de professores indígenas no Brasil, apresenta cursos alocados em 35 (trinta e cinco) municípios na modalidade presencial, com destaque para os municípios de Manaus – AM, Boa Vista – RR, Fortaleza – CE e Barra do Bugres – MT com dois cursos cada. Ao olharmos para cada região brasileira notamos que há: 10 (dez) cursos localizados na Região Norte abrangendo 16 (dezesseis) municípios; nove cursos alocados na Região Nordeste distribuídos em 11 (onze) municípios; cinco cursos na Região Centro-Oeste em quatro localidades; dois na Região Sudeste em dois municípios e; dois cursos situados em dois municípios da Região Sul.

O Estado do Amazonas (IFAM, UEA, UFAM), o Estado de Alagoas (UNEAL) e o Estado do Pará (UEPA) se destacam com a gama de oferta para a formação de professores indígenas. O curso de Pedagogia Intercultural Indígena da UEA é disponibilizado na modalidade EaD para vários municípios do Estado do Amazonas, via canal estatal de TV, ampliando sua abrangência.

O curso de Licenciatura em Educação Indígena da UFSM é oferecido somente na modalidade EaD e possui polos nos municípios de Constantina, Novo Hamburgo, Palmeiras das Missões, Tapejara e Três Passos, todos localizados no Estado do Rio Grande do Sul. O curso da UNIVALI, localizado no município de Biguaçú – SC é o único que pertence a uma instituição privada. Ao todo, esses cursos podem ofertar até 2441 (duas mil quatrocentas e quarenta e uma) vagas anuais sendo: 956 (novecentas e cinquenta e seis) na Região Norte; 625 (seiscentas e vinte e cinco) na Região Nordeste; 330 (trezentas e trinta) na Região Centro-Oeste; 220 (duzentas e vinte) na Região Sudeste e; 310 (trezentas e dez) na Região Sul.

Verificamos que em todos os cursos de formação inicial de professores indígenas, há maciça participação das comunidades envolvidas, tanto na construção da dinâmica de cada curso, quanto no acompanhamento da formação de seus professores que são direcionados a praticarem, nas escolas indígenas das suas comunidades, o que estão estudando teoricamente no seu curso. De nossas leituras dos PPC desses cursos notamos que em todos eles, os acadêmicos indígenas são motivados a produzirem materiais didáticos pedagógicos que considerem aportes culturais e que, segundo a visão desses acadêmicos, podem ser contextualizados para serem trabalhados com conteúdos curriculares da Educação Escolar Indígena.

Esse fato é fomentado principalmente nas produções dos Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC) de cada acadêmico, que deve envolver situações do cotidiano da aldeia ou da comunidade e, durante seus estágios curriculares, abordando conteúdos da sua área de formação entrelaçados com temas da cultura de seu provo.

Dos 29 (vinte e nove) PPC de cursos, para a formação inicial de professores indígenas analisados, cinco são de Licenciatura em Pedagogia Intercultural Indígena. Ou seja, eles formam pedagogos indígenas para atuarem na educação infantil indígena ou da primeira a quinta série do Ensino Fundamental nas escolas das aldeias, ou ainda para atuarem como gestores nessas escolas indígenas. Já as Licenciaturas Interculturais Indígenas preparam os acadêmicos para atuação nas séries finais do Ensino Fundamental e em todo Ensino Médio, bem como em gestão escolar no âmbito da Educação Escolar Indígena. Neles, geralmente, a integralização ocorre em quatro anos divididos em oito semestres.

Com relação a essas licenciaturas, nos quatro primeiros semestres os acadêmicos têm uma formação geral envolvendo estudos relacionados às questões indígenas da(s) comunidade(s) onde os acadêmicos atuarão como professores. Estudos sobre: Histórias dessa(s) comunidade(s); a gestão territorial e da escola indígena; tópicos de Antropologia, Filosofia e Sociologia; Políticas Públicas para a Educação Indígena; Tópicos de Direito voltados para os povos indígenas; Etnomatemática; Etnoconhecimento (saberes tradicionais); questões socioambientais; Língua Portuguesa; Línguas Maternas; Práticas Pedagógicas; Currículo da Educação Indígena; Educação e Cultura; entre outros.

Já do quinto ao oitavo semestre ocorre o ciclo de formação específica, que dependendo da formatação do curso, é escolhida pelo acadêmico indígena no ato de sua inscrição no processo seletivo para ingressar no curso, ou ao final do quarto semestre no encerramento de sua formação geral. Essa formação específica corresponde a área de atuação do futuro professor indígena, no âmbito do Ensino Fundamental e Médio da Educação Escolar Indígena, envolvendo as disciplinas que ele pode ministrar após sua formação. Analisando os PPC dessas licenciaturas, verificamos que há, de modo geral, três formações específicas com algumas particularidades.

- *Linguagens e Comunicação* que pode habilitar o professor indígena a trabalhar com as disciplinas de: Artes; Língua Materna e Literatura; Língua Portuguesa e Literatura; Educação Física; Língua Espanhola e Literatura e; Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS).

- *Ciências da Natureza e Matemática* que pode habilitar o professor indígena a trabalhar com as disciplinas de: Biologia; Física; Química e; Matemática.
- *Ciências Sociais e Humanidades* que pode habilitar o professor indígena a trabalhar com as disciplinas de: Antropologia; Arqueologia; Direito; Filosofia; Geografia; História e; Sociologia.

Salientamos que nem todas as habilitações das áreas citadas estão abarcadas na formação do professor indígena licenciado. Depende da Licenciatura Intercultural Indígena que ele cursou. Assim, no Quadro 3, apresentamos mais de perto, as habilitações por instituição ofertante, bem como os povos indígenas abrangidos em cada curso de Licenciatura Intercultural Indígena do Brasil.

Quadro 3 – Habilitações profissionais e etnias indígenas atendidas.

(Instituição) Habilitação Profissional	**Etnias atendidas**
Região Norte	
(UNIFAP) são três: Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa; ou Antropologia, Filosofia, Geografia e História; ou Biologia, Física, Química e Matemática.	Apalai, Galibi, Marworno, Galibi Kalinã, Karipuna, Kaxuyana, Palikur, Tiriyó, Wajãpi e Waiana.
(IFAM) são quatro: Biologia; ou Física; ou Química; ou Matemática.	Arapaso, Baniwa Bará, Barasana, Baré, Coripaco, Desana, Dow, Hupda, Kakwa, Karapanã, Kubeo, Makuna, Mirity-tapuya, Nadöb, Nukak, Pira-tapuya, Siriano, Tariana, Tukano, Tuyuca, Kotiria, Tatuyo, Taiwano, Warekena, Yuhupde e Yuruti.
(UFAM) são três: Antropologia, Filosofia, Geografia, História e Sociologia; ou Artes, Educação Física, Língua Indígena, Língua Portuguesa e suas Literaturas; ou Biologia, Física, Química e Matemática.	Mura.
(UEA) são seis: Língua Indígena, Língua Portuguesa, Língua Espanhola e Literatura; ou Artes e Educação Física; ou Biologia e Química; ou Física e Matemática; ou História e Geografia; ou Antropologia, Filosofia e Sociologia.	Ava-Canoeiro, Caixana, Desana, Kaku-yuhup, Kambeba, Kanamari, Katukina, Kokama, Madja-Kulina, Maku, Makuna, Mayuruna, Miranha Mura Tikuna, Tukano,Tuyuka e Witota.
(UFAC) são três: Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa e Literaturas; ou Biologia, Física e Química; ou Filosofia, Geografia, História e Sociologia.	Ashaninka, Jaminawa, Katuquina, Kaxinawa (Huni Kuin), Manchineri, Marubo, Nawa, Nukini, Puyanawa, Shawandawa e Yawanawa.
(UEPA) são três: Filosofia, Geografia, História e Sociologia; ou Biologia, Física, Química e Matemática; ou Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa e	Amanayé, Anambé, Apalai, Arapiun, Arara, Araweté, Asurini do Tocantins, Assurini do Xingu, Borari, Gavião, Guarani Mbya, Hixkaryána, Jaraqui,

Literaturas.	Juruna, Kahyana, Karafawayana, Karajá, Katuena, Kaxuyana, Kayapó, Kuruáya, Mawayana, Maytapu, Mẽbêngôkre Mẽkragnotire, Mundurukú, Panará, Parakanã, Sateré-Maué, Sikiyana, Surui do Pará, Tapajó, Tembé, Timbira, Tunayana, Xereu, Xipaya, Wai Wai, Waimiri Atroari, Wayana, Yudjá e Zo'é.
(UFRR) são três: Artes, Língua Materna, Língua Portuguesa e suas Literaturas; ou Biologia, Física, Química e Matemática; ou Antropologia, Filosofia, Geografia, História e Sociologia.	Hixkaryana, Macuxi, Mawayana, Patamona, Taurepangues, Waiwai, Wapixana, Yanomani e Yekwana.
(UNIR) são três: Língua Indígena, Língua Portuguesa e suas Literaturas; ou Filosofia, Geografia, História e Sociologia; ou Biologia, Física, Química e Matemática.	Aikanã, Ajurú, Akuntsú, Amondawa, Apurinã, Arara, Arikapú, Aruá, Cinta Larga, Djeoromitxi, Gavião, Juma, Kabixi, Kampé, Kanoé, Karipuna, Karitiana, Kaxarari, Kujubim, Kwazá, Makurap, Massaká, Nambikwara, Oro Win, Puruborá, Sakyrabiat, Salamãi, Suruí Paitér, Tupari, Uru-Eu-Wau-Wau, Waniam-Migueleño e Wari.
Região Nordeste	
(UFCG) são três: Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa e Literaturas; ou Química; ou Biologia.	Potiguara.
(UFPE) são três: Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa e suas Literaturas; ou Biologia, Física, Química e Matemática; ou História e Geografia.	Atikum, Fulni-ô, Kambiwá, Kapinawá, Pankará, Pankararu, Pankaiwká, Pipipã, Truká, Tuxá, Xukuru e os entre as Serras de Pankararú.
(UEMA) são três: Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa e Literaturas; ou Filosofia, Geografia, História e Sociologia; ou Biologia, Física e Química.	Awá-guajá, Canela Apaniekrá, Guajajara, Krikati, Pukobyê (Gavião), Ramkokamekrá, Tembé, Timbira Krepu'Kateyé, e Urubu-Kaapor.
(UFC) Kuaba são três: Antropologia, Filosofia, Geografia, História e Sociologia; ou Língua Indígena, Língua Portuguesa e suas Literaturas; ou Biologia, Física, Química e Matemática.	Gavião, Kalabaça, Kariri, Potyguara, Tabajara, Tapuia-Kariri, Tupinambá.
(UFC) Pitakajá são cinco: Antropologia; Sociologia; Matemática; História; Língua Indígena e Língua Portuguesa.	Anacé, Jenipapo-Kanindé, Kanindé, Pitaguary e Tapeba.
(UNEAL) são quatro: Língua Indígena, Língua Portuguesa e Literaturas; ou Geografia; ou História; ou Matemática.	Aconã, Jeripancó, Kalankó, Karapotó Plaki-Ô, Kariri, Kariri-Xokó, Katokin, Karuazu, Koiupanká, Tingui Botó, Wassu-Cocal e Xucuru-Kariri.
(UNEB) são três: Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa e Literaturas; ou Filosofia, Geografia, História e Sociologia; ou Biologia, Física, Química e Matemática.	Atikum, Kaimbé, Kantaruré, kariri-Xocó, Kiriri, Pankararé, Pankaru, Truká, Tumbalalá, Tupan, Tuxá, Tuxi e Xukuru-Kariri.
Região Centro-Oeste	
(UNEMAT) são três: Artes, Língua	Apiaká, Aweti, Bakairi, Baniwa, Baré,

Indígena, Língua Portuguesa e Literaturas; ou Antropologia, Filosofia, Geografia, História e Sociologia; ou Biologia, Física Química e Matemática.	Bororo, Chiquitano, Cinta Larga, Ikpeng, Irantxe, Juruna, Kaingang, Kalapalo, Kamaiurá, Karajá, Kaxinawa, Kayabi, Kuikuro, Matipu, Matipu, Mebêngokrê, Meninako, Munduruku, Myky, Nafukwá, Nambikwara, Paraná, Paresi, Pataxó, Potyguara, Rikbaktsa, Suruí, Suyá, Tapayuna, Tapeba, Tapirapé, Terêna, Ticuna, Trumai, Tukano, Tuxá, Umutina, Waurá, Xavante, Yawalapiti, e Zoró.
(UFG) são três: Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa, Literatura e Educação Física; ou Filosofia, Geografia, História e Sociologia; ou Biologia, Física, Química e Matemática.	Apinajé, Bororo, Gavião, Guajajara, Ikpeng, Javaé, Juruna, Kalapalo, Kamaiurá, Kanela, Kanela-Araguaia, Karajá, Karajá-Xambioá, Kayabi, Krahô, Krikati, Kuikuro, Mehinako, Metuktire, Tapirapé, Tapuio, Timbira, Xakriabá, Xavante, Xerente, Waura, Yawalapiti.
(UFMS) é uma: Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa e Literaturas.	Guarani, Kaiowá e Terena.
(UFGD) são quatro: Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa, Literaturas e Educação Física; ou Matemática; ou Biologia, Física e Química; ou Antropologia, Filosofia, Geografia, História e Sociologia.	Guarani e Kaiowá.
Região Sudeste	
(UFES) são três: Antropologia, Arqueologia, Filosofia, Geografia e História; ou Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa e suas Literaturas; ou Biologia, Física, Química e Matemática.	Guarani e Tupinikim.
(UFMG) são três: Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa e suas Literaturas; ou Biologia, Física, Química e Matemática; ou Antropologia, Filosofia, História, Geografia e Sociologia.	Professores indígenas que estão no exercício do Magistério nas escolas indígenas de suas aldeias sem qualificação em nível superior.
Região Sul	
(UFSC) são quatro: Educação Infantil e séries iniciais do Ensino Fundamental; ou Língua Indígena, Língua Portuguesa e Literaturas; ou Antropologia e Geografia; ou Gestão Ambiental.	Guarani, Kaingang e Xokleng/Laklãnõ.
(UFSM) são quatro: Gestão Escolar podendo atuar na Educação Infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental; ou Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa e Literaturas; ou Ciências, Educação Ambiental e Gestão Ambiental; ou Antropologia, Filosofia, Geografia, História e Sociologia.	Kaingang.

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos dados da pesquisa com os PPC.

Ao todo são atendidas mais de 200 (duzentas) etnias indígenas espalhadas pelo território brasileiro. O curso de Licenciatura Intercultural Indígena da UNEMAT é considerando o pioneiro a ofertar essa formação iniciando suas atividades no início do ano letivo de 2001. O curso do IFAM é o único que abrange somente a área de Ciências da Natureza e Matemática. Os cursos da UFAC, UFMS, UFCG, UEMA, UFSC e UFSM não possibilitam a formação de professor indígena de Matemática para atuarem nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

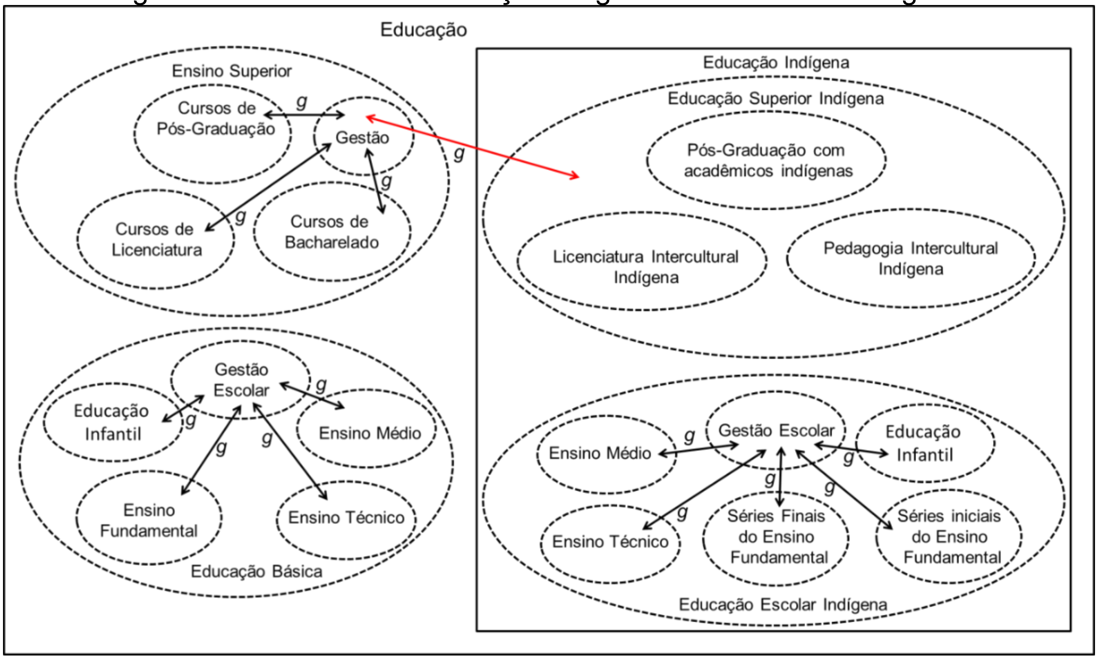
O curso da UFGD se destaca como o mais abrangente em possibilidades de formação profissional: Artes, Língua Indígena, Língua Portuguesa e Educação Física; ou Matemática; ou Biologia, Física e Química; ou Antropologia, Filosofia, Geografia, História e Sociologia. Já os cursos da UFSC e UFSM possuem formação diferenciada em Gestão Ambiental, sendo que no segundo o professor indígena pode atuar, caso escolha a área de Ciências da Natureza e Ambiente, como Agente Ambiental Indígena.

De acordo com as análises dos PPC desses cursos, a Educação Indígena engloba a Educação Escolar Indígena e a Educação Superior Indígena. A Educação Indígena é fomentada para compor um ciclo de formação, que prepara os estudantes das comunidades indígenas para terem oportunidades de formação acadêmica tanto no âmbito da Educação Superior Indígena, seja na Licenciatura Intercultural ou na Pedagogia Intercultural, quanto adentrar na Educação Superior não indígena como acadêmico de um de seus cursos, seja Licenciatura ou Bacharelado.

A Educação Escolar Indígena é o campo de atuação dos acadêmicos da Licenciatura Intercultural Indígena ou da Licenciatura em Pedagogia Intercultural. A primeira, forma professores indígenas para atuarem nas séries finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio ou na Gestão Escolar, já a segunda forma pedagogos indígenas que atuam na Educação Infantil, pelas séries iniciais do Ensino Fundamental (do primeiro ao quinto ano) e gestão escolar no âmbito da Educação Escolar Indígena.

Assim, na Figura 2 apresentamos o ciclo de que estamos nos referindo. Nela, as setas de duplo sentido (*g*) representam a transição entre as ações desenvolvidas e as reflexões que advêm dessas ações.

Figura 2 – A dinâmica de atuação na gestão das escolas indígenas.

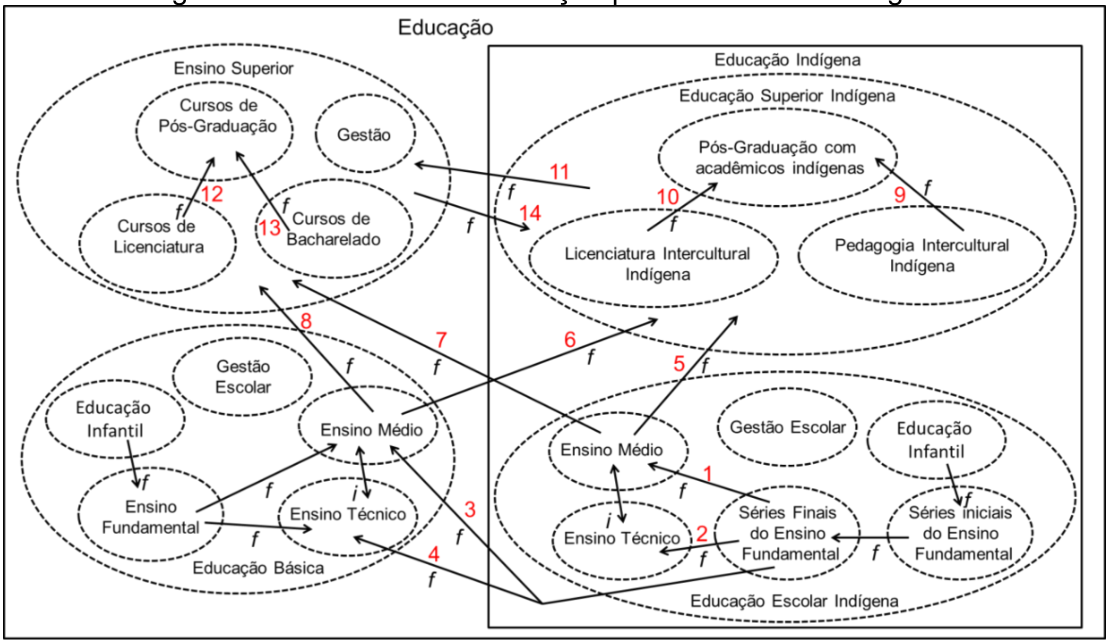


Fonte: Elaborada pelos autores.

Por exemplo, os gestores escolares da Educação Escolar Indígena ou da Educação Básica não indígena, interagem com todas as etapas escolares (Infantil, Fundamental e Médio) realizando ações de gestão para o desenvolvimento dessas etapas e, por sua vez, essas ações geram reflexões nesses gestores que conduzem a novas ações que geram outras reflexões, e assim por diante. Por esse motivo as setas são de duplo sentido. Assim como entendemos as ações e reflexões (*g*) dos acadêmicos indígenas na Educação Escolar Indígena, pois faz parte da formação inicial e continuada dos professores indígenas, planejar e executar projetos, práticas pedagógicas e de gestão nas escolas indígenas de suas comunidades.

Então, os processos de ação e reflexão da gestão, setas de duplo sentido (*g*), ocorrem tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior não indígena. Já a gestão da Educação Superior Indígena é de responsabilidade da Educação Superior não indígena, como representado pela seta (*g*) de duplo sentido em vermelho. Acontece que a gestão de cada um dos cursos da Educação Superior Indígena é de responsabilidade da gestão das instituições de Ensino Superior que ofertam esses cursos, como por exemplo, a LINTER é organizada e gestada pela gestão do IFBA – campus Porto Seguro. Na Figura 3 apresentamos a dinâmica de formação do estudante indígena.

Figura 3 – A dinâmica de formação para o estudante indígena.



Fonte: Elaborada pelos autores.

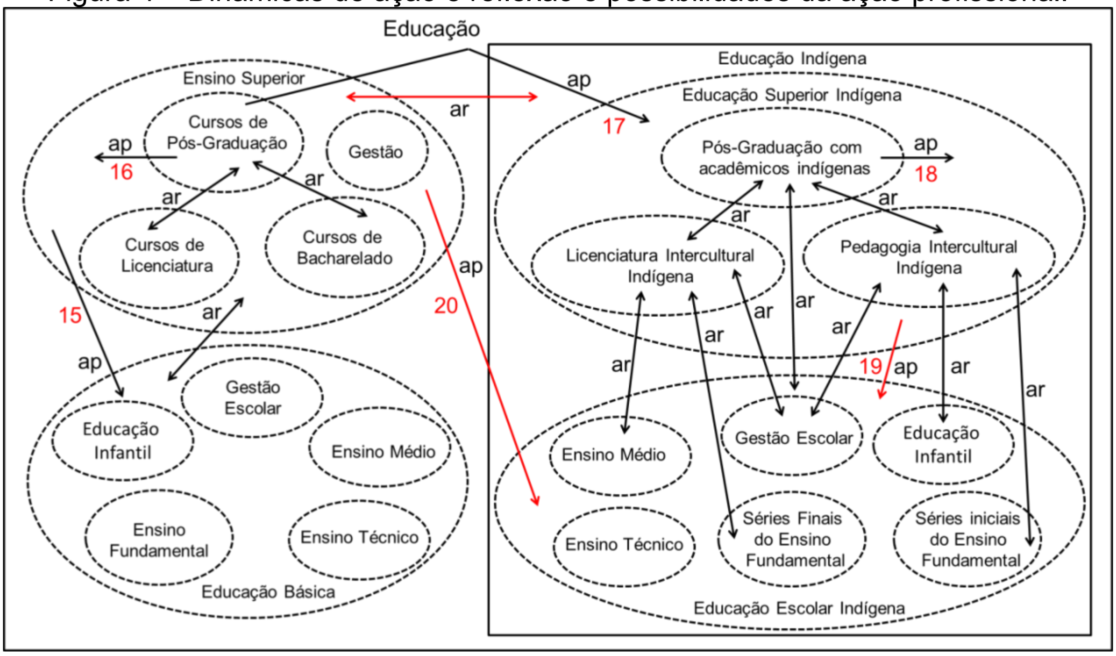
Nesse cenário, as setas (f) de trajetória de formação indicam possíveis caminhos de formação básica e profissional para estudantes indígenas. No âmbito da Educação Escolar Indígena ela pode iniciar pela Educação Infantil, passando pelas séries iniciais do Ensino Fundamental, logo depois, frequentando as séries finais do Ensino Fundamental. Ao final do nono ano, o estudante indígena pode optar entre duas trajetórias de formação, caso na Educação Escolar Indígena de sua comunidade tenha a oferta de Ensino Médio. Se sim, ele pode optar: pelo Ensino Médio da Educação Escolar Indígena (f1) ou seu Ensino Médio Integrado ao Técnico, seta (2) e seta (i), caso disponível; ou se matricular no Ensino Médio da Educação Básica seta (f3) ou optar por seu Ensino Médio Integrado, seta (4) e seta (i), caso seja ofertado em seu município.

Independentemente do Ensino Médio (na escola indígena ou não indígena) que o estudante indígena tenha escolhido fazer, ao seu final, caso queira continuar seus estudos e, via processo seletivo, ele pode ingressar: em algum curso da Educação Superior Indígena seguindo a seta (f5) ou a seta (f6); ou escolher uma formação profissional na Educação Superior não indígena, seguindo a seta (f7) ou a seta (f8).

Considerando a Educação Superior Indígena, entendemos que tanto o professor indígena, formado na Licenciatura Intercultural Indígena, quanto o pedagogo indígena, formado na Licenciatura em Pedagogia Intercultural Indígena, pode continuar seus estudos ingressando, por meio de processo seletivo, em algum curso de Pós-Graduação da Educação Superior Indígena, conforme indicamos pelas setas (f9) e (f10). Ou então, ele pode optar por fazer outro curso superior (Licenciatura ou Bacharelado) ou ainda uma Pós-Graduação no Ensino Superior não indígena, conforme indicamos pela seta (f11).

Já no âmbito da Educação Superior, o indígena licenciado ou bacharel pode continuar seus estudos ingressando, via processo seletivo, em algum curso de Pós-Graduação, conforme indicamos pelas setas (f12) ou (f13), ou ainda, no caso dele ser licenciado, pode optar ingressar em um dos cursos de graduação ou Pós-Graduação da Educação Superior Indígena, seguindo a seta (f14). Na Figura 4 apresentamos as dinâmicas de ação e reflexão dos acadêmicos indígenas, bem como suas possibilidades de atuação profissional.

Figura 4 – Dinâmicas de ação e reflexão e possibilidades da ação profissional.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Com relação às setas de ação e reflexão (ar), no âmbito da Educação Superior Indígena, pretendemos dizer que nos processos de formação inicial e continuada de professores indígenas, suas ações (pedagógicas, planejamento e desenvolvimento de projetos educacionais, construção de material didático, participação ou promoção de discussões curriculares, realização de estágios, fazer pesquisas, entre outras) são direcionadas às suas áreas de possível atuação profissional na Educação Escolar Indígena. Assim, o acadêmico da Licenciatura em Pedagogia Intercultural, por exemplo, realiza ações que o conduzem a reflexões na Educação Infantil, nas séries iniciais do Ensino Fundamental e na gestão escolar. O acadêmico indígena da Licenciatura Intercultural, por sua vez, promove ações que o conduzem a reflexões nas séries finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e na gestão escolar.

Já o acadêmico indígena em nível de Pós-Graduação, ainda no âmbito da Educação Superior Indígena, pode realizar ações que o conduzem a reflexões, setas (ar), tanto nos cursos de formação de professores indígenas quanto nas etapas de ensino da Educação Escolar Indígena, ou ainda em sua gestão escolar. A seta (ar), destacada em vermelho, corresponde às ações e reflexões advindas do Ensino Superior não Indígena com relação à Educação Indígena. Por exemplo, essa pesquisa é oriunda de programa de Pós-Graduação não indígena, mas que tem como público alvo os acadêmicos indígenas da LINTER. Ou seja, nossas ações e reflexões fomentadas pela pesquisa repercutem tanto no Programa de Pós-Graduação e em nossa formação continuada, quanto para o curso da LINTER e na formação inicial dos acadêmicos participantes.

Com relação à atuação profissional (ap), o professor indígena licenciado em cursos da Educação Superior não indígena, pode atuar na Educação Básica, conforme indicamos pela seta (ap15), em disciplina(s) de sua área de formação ou na sua gestão, ou ainda na educação infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental dependendo da sua formação acadêmica. E se for pós-graduado, ele ainda poderá atuar no Ensino Superior ou na Educação Superior Indígena, como indicamos, respectivamente, pelas setas (ap16) e (ap17). O pós-graduado no interior da Educação Superior Indígena poderá atuar na Educação Superior Indígena, conforme indicamos pela seta (ap18).

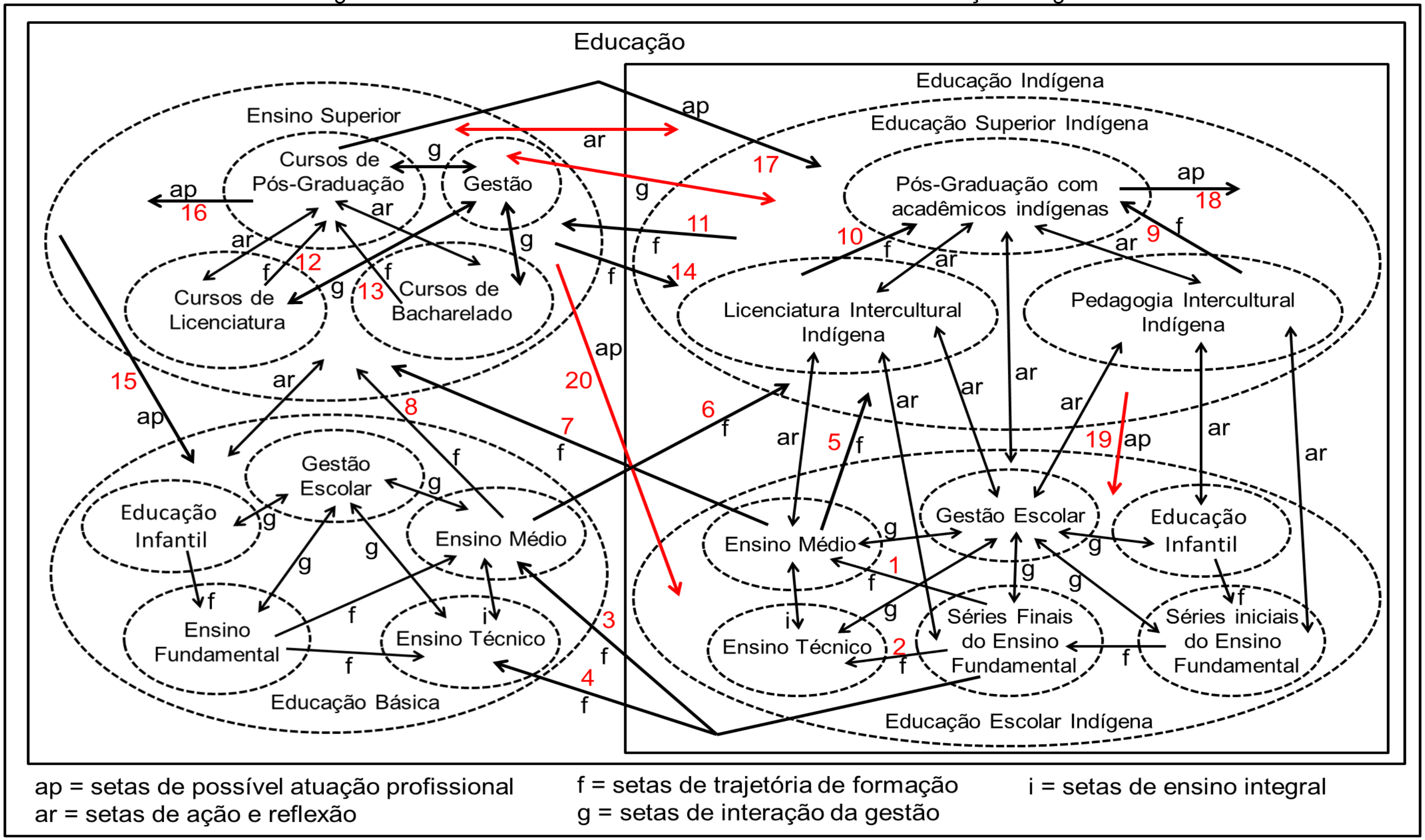
E quem pode trabalhar na Educação Escolar Indígena? A resposta a essa questão depende do plano de carreira do magistério indígena de cada estado e de cada município que oferece a educação infantil indígena e Ensino Fundamental para comunidades indígenas. Por exemplo, no Estado da Bahia, de acordo com o artigo 25 da Lei nº 12.046 de 04 de Janeiro de 2011, a partir de Janeiro de 2021 só podem participar de concurso público para o provimento de vagas na carreira do magistério indígena, para atuarem na Educação Escolar Indígena, professores indígenas licenciados no âmbito da Educação Superior Indígena.

Já no Estado de Roraima, podem participar professores indígenas licenciados tanto no âmbito da Educação Superior Indígena quanto no cenário do Ensino Superior não indígena. Nesse sentido, as setas de atuação profissional na Educação Escolar Indígena (ap19) e (ap20) estão destacadas em vermelho, pois dependendo do estado brasileiro não basta ser professor indígena para trabalhar na Educação Escolar Indígena. Ou seja, na carreira de magistério indígena do Estado da Bahia, por exemplo, a seta (ap20) não existe.

Com relação ao Estado da Bahia, nosso local de pesquisa e, de acordo com Costa (2017), limitar a participação em concurso público para o magistério indígena somente para professores indígenas que se formaram na Educação Superior Indígena, vai de encontro à formação de professor indígena nas instituições publicas e privadas que oferecem vagas, em sistema de cotas, por exemplo, para o estudante indígena que deseja fazer uma licenciatura e depois poder ser professor efetivo da escola indígena de sua comunidade. Essa discussão está sendo provocada por esses professores, que são formados em outras instituições e querem ter o direito de participarem de concurso público para atuarem na Educação Escolar Indígena.

Para Costa (2017), esse fato gera desigualdades funcionais, afinal já havia professores indígenas não formados na Educação Indígena Superior antes da referida lei ser promulgada, e o fato de que esses professores não podem assumir, por exemplo, nenhum cargo de gestão, pois esses cargos são exclusivos para professores concursados. Na Figura 5 reunimos as três figuras anteriores, formando um panorama geral da dinâmica propositada pela Educação Indígena.

Figura 5 – Dinâmica educacional envolvendo elos com a Educação Indígena.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Voltando aos objetos matemáticos de nossa pesquisa, ao analisarmos os 23 (vinte e três) PPC dos cursos de Licenciatura Intercultural Indígena, constatamos que em seis deles (IFAM, UFMS, UFGD, UFMG, UFES e IFBA) há o ensino de alguns conteúdos curriculares de Cálculo Diferencial e Integral. O curso do IFAM se destaca pela quantidade de conteúdos de Cálculo presentes em seu currículo. O Quadro 4 descreve essas ementas em cada instituição. Salientamos que o curso da UFC Pitakajá oferta uma disciplina com o nome de Introdução ao Cálculo, mas verificamos que seus conteúdos pertencem ao currículo matemático da Educação Básica.

Quadro 4 – As ementas de Cálculo nas Licenciaturas Interculturais Indígenas.

Cursos de Licenciatura Intercultural Indígena com ementas de Cálculo	
Instituição	Ementas relacionadas ao ensino de Cálculo
IFAM	Fundamentos de Cálculo: Números reais. Equações. Polinômios. Estudo das funções. Funções lineares. Funções quadráticas. Funções polinomiais. Funções racionais e irracionais. Funções exponenciais. Funções logarítmicas. Trigonometria. Funções trigonométricas. Números complexos. Sequências e séries. Cálculo I: Limites. Continuidade. Derivada. Aplicações da Derivada. Integral Indefinida. Integral Definida. Métodos de Integração. Aplicações do Cálculo Integral. Cálculo II: Integração por substituição trigonométrica. Outros métodos de integração. Funções de várias variáveis reais. Limites. Derivadas parciais. Máximos e mínimos. Integração múltipla. Cálculo III: Equações diferenciais de primeira ordem. Aplicações das equações lineares de primeira ordem. Equações diferenciais de segunda ordem. Equações homogêneas. Equações não homogêneas. Aplicações das equações diferenciais de segunda ordem.
IFBA	Matemática e Interculturalidade III: Equação da reta; Equação de circunferência; Distância entre dois pontos; Distancia entre retas. Análise de comportamentos de uma função. Noções básicas de infinitésimo, limite, derivada e integral no contexto histórico e contextualizado (Princípio de Cavalieri).
UFES	Elementos de Cálculo: Reta tangente ao gráfico de uma função. Conceito de velocidade instantânea. Derivada. Cálculo de derivadas. Aplicações às ciências físicas e biológicas. Área sob o gráfico de uma função. Integral definida. O teorema fundamental do cálculo. Comprimento, área e volume. Equações diferenciais de primeira ordem. Modelos matemáticos nas ciências físicas e biológicas.
UFGD	Noções Básicas de Cálculo Diferencial: análise de comportamentos de uma função Noções básica de infinitésimo, limite, derivada e integral no contexto histórico (principio de Cavalieri). Desenvolver conceitos básicos de Cálculo a partir de problemas históricos e filosóficos.
UFMG	Cálculo: Noções básicas sobre: sequências numéricas; limites; continuidade; cálculo e aplicação das derivadas. A modelagem matemática no desenvolvimento de projetos.
UFMS	Pré-Cálculo e Educação Intercultural: Aspectos históricos, sociológicos, culturais, tecnológicos e didático-pedagógicos dos tópicos: Funções. Noção de Limites e continuidade. Séries e sequências.

	Cálculo Diferencial e Integral e Educação Intercultural: Aspectos históricos, sociológicos, culturais, tecnológicos e didático-pedagógicos dos tópicos: Noções de Derivadas e Integrais. Aplicação de Integral e Derivada.

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos dados da pesquisa com os PPC.

Com exceção do curso do IFAM, que apresenta uma quantidade maior de conteúdos de Matemática presentes no contexto do Cálculo (Fundamentos de Cálculo, Cálculo I, Cálculo II e Cálculo III), os demais cursos trazem conteúdos relacionados ao Cálculo de forma introdutória, ou seja, suas ementas abrangem conteúdos matemáticos que reportam ao estudo introdutório do Cálculo. Percebemos que no curso da UFES os conteúdos de Cálculo devem ser contextualizados em situações problemas que envolvam contextos teóricos de Física ou Biologia.

Com relação às ementas do curso da UFMS, procurando promover o encontro entre conteúdos introdutórios de Cálculo (Pré-Cálculo) e a Educação Intercultural, notamos a preocupação em enfatizar que na abordagem desses conteúdos introdutórios de Cálculo propostos, o professor dessa disciplina, precisa dialogar seus aspectos históricos, sociológicos, culturais, tecnológicos e didáticos pedagógicos com os conteúdos curriculares de Cálculo. Ou seja, a construção de cada processo de ensino e aprendizagem desses conteúdos precisa entrelaçar seus contextos: históricos presentes na História da Matemática com abertura aos relatos históricos contados pelos acadêmicos indígenas; sociológicos envolvendo a sociedade não indígena com destaque para a sociedade indígena; tecnológicos abarcando recursos tecnológicos para seu ensino (calculadoras, celulares, *softwares* educacionais, internet, entre outros) e; didáticos pedagógicos com aportes teóricos presentes na Educação Escolar Indígena, na Didática da Matemática e na Educação Matemática.

Por outro lado, o curso da UFMG proporciona a possibilidade da abordagem introdutória de conteúdos de Cálculo, com o desenvolvimento de projetos por meio da Modelagem Matemática, com destaque para aplicações do conceito de derivada. Percebemos que há consonância entre as ementas dos cursos do IFBA e da UFGD, as quais enfatizam que os conteúdos propostos precisam ser abordados com seus aportes históricos e de forma contextualizada com os saberes tradicionais dos acadêmicos indígenas envolvidos em cada processo de ensino e aprendizagem desses conteúdos.

Nessa pesquisa, pretendemos construir propostas de ensino e aprendizagem das definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área. São definições presentes na Matemática e estão inseridas no conhecimento científico. São conteúdos que compõem tópicos do ensino de Cálculo no currículo de Matemática da LINTER e que necessitam ser contextualizados na construção e execução do seu processo educacional. Assim, no diálogo entre o conhecimento científico e os saberes da tradição, trazemos o científico para dialogar com os acadêmicos indígenas, e esses, por sua vez, trazem os seus saberes tradicionais para dialogarem conosco e com os conhecimentos científicos. Ensinamos e aprendemos, e eles aprendem e nos ensinam.

1.4. A LINTER do IFBA – Porto Seguro

A LINTER foi implementada em Outubro de 2010 com recursos do PROLIND. A primeira turma contemplou os professores indígenas em exercício oriundos das etnias Pataxó, Pataxó Hãhãhãe e Tupinambá, das regiões Sul e do Extremo Sul da Bahia. De acordo com o seu PPC (BRASIL, 2016, p. 16):

> O curso contém uma abordagem curricular flexível atendendo às necessidades específicas da formação destes professores e acatando os pressupostos legais com relação à formação de profissionais indígenas em educação escolar, bem como o atendimento às demandas locais de suas comunidades. Baseia-se em procedimentos que permitem atender as expectativas dos professores indígenas em formação, de suas comunidades e do planejamento participativo; da valorização dos conhecimentos locais e interculturais; e do ensino pela pesquisa, com base na reflexão crítica da realidade.

Nessa perspectiva curricular, a LINTER tem a capacidade de atender até 80 (oitenta) acadêmicos, sendo o período de matrícula a cada dois anos (bienal) e com a oferta de 40 (quarenta) vagas a cada biênio. Ou seja, quando uma turma de quarenta acadêmicos estiver completando o quarto semestre será aberto outro processo seletivo para a entrada de mais quarenta acadêmicos, assim o curso sempre terá a participação máxima de 80 (oitenta) acadêmicos. A LINTER tem duração mínima de quatro anos e máxima de sete anos. O público alvo são professores indígenas que atuam nas escolas de comunidades indígenas em turmas do Ensino Fundamental e Médio, gestores e técnicos (indígenas) da Educação que trabalham em escolas indígenas e indígenas egressos do magistério indígena ou do Ensino Médio. O curso oferece as opções de formação de Licenciatura Intercultural Indígena em três grandes áreas possibilitando diversidade de atuação profissional conforme descrevemos no Quadro 5.

Quadro 5 – As áreas de formação da LINTER e suas habilitações profissionais.

Área de Formação	Habilitação Profissional
Ciências da Natureza e Matemática.	Licenciado em Educação Intercultural com habilitação em Biologia, Física, Química e Matemática.
Ciências Humanas e Sociais.	Licenciado em Educação Intercultural com habilitação em Antropologia, Arqueologia, Direito, Filosofia, Geografia, História e Sociologia.
Linguagens, Códigos e suas Tecnologias.	Licenciado em Educação Intercultural com habilitação em Artes, Educação Física, Língua Portuguesa, Língua Indígena, Literatura, Língua estrangeira e Língua de Sinais.

Fonte: (BRASIL, 2016, p. 27).

Diante dessas opções de formação profissional, cada um dos acadêmicos indígenas, quando estivesse finalizando o quarto semestre do curso, deveria escolher em qual dessas áreas de formação ele continuaria seus estudos. Deveria? Sim, acontece que poucos acadêmicos optavam pela área de Ciências da Natureza e Matemática. Por exemplo, em nossas conversas com acadêmicos da turma do quarto semestre que ingressou em 2017, quando ministramos a disciplina de Princípios de Etnomatemática, composta por 78 (setenta e oito) acadêmicos, somente 11 (onze) optaram por essa área de formação profissional, dos quais apenas dois pretendem atuar como professores indígenas de Matemática. Os acadêmicos indígenas que escolheram por outra área de formação, nos relataram que gostam da área de Ciências da Natureza, sobretudo Biologia, mas por causa da Matemática estar inserida nessa área de formação, optaram pela área de Ciências Humanas e Sociais ou Linguagens, Códigos e Tecnologia.

Perante essa discrepância de escolha entre as três áreas de formação pelos acadêmicos da LINTER no encerramento do quarto semestre, o coordenador do curso e o seu colegiado, que é composto pelos professores do curso e por acadêmicos indígenas eleitos por seus pares para representá-los, decidiram que a escolha entre as três áreas de formação já deve ser feita no momento da inscrição do processo seletivo para o ingresso no curso. Assim, entre os dias 17 e 18 de Agosto de 2019 foi realizado o primeiro processo seletivo com essa nova formatação, oferecendo 40 (quarenta) vagas, sendo 20 (vinte) para a área de Ciências da Natureza e Matemática e 20 (vinte) para a área de Ciências Humanas e Sociais. A opção pela área de Linguagem, Códigos e suas Tecnologias será ofertada no próximo processo seletivo que ocorrerá em 2022.

De acordo com o edital do Processo Seletivo LINTER 2019, que é divulgado com no mínimo 45 (quarenta e cinco) dias de antecedência às datas de avaliações no portal do IFBA e na página da internet do curso, sua concorrência é restrita a candidatos indígenas brasileiros, que é comprovada, no ato da inscrição, por: uma declaração do cacique com assinatura de mais quatro lideranças indígenas da comunidade em que reside o candidato atestando o seu pertencimento ao povo ou comunidade indígena e; declaração da Fundação Nacional do Índio (FUNAI) atestando o pertencimento do candidato ao povo ou comunidade indígena (em conformidade com a declaração das lideranças indígenas). Além disso, o candidato precisa ter concluído ou estar para concluir o Ensino Médio ou o Magistério Indígena.

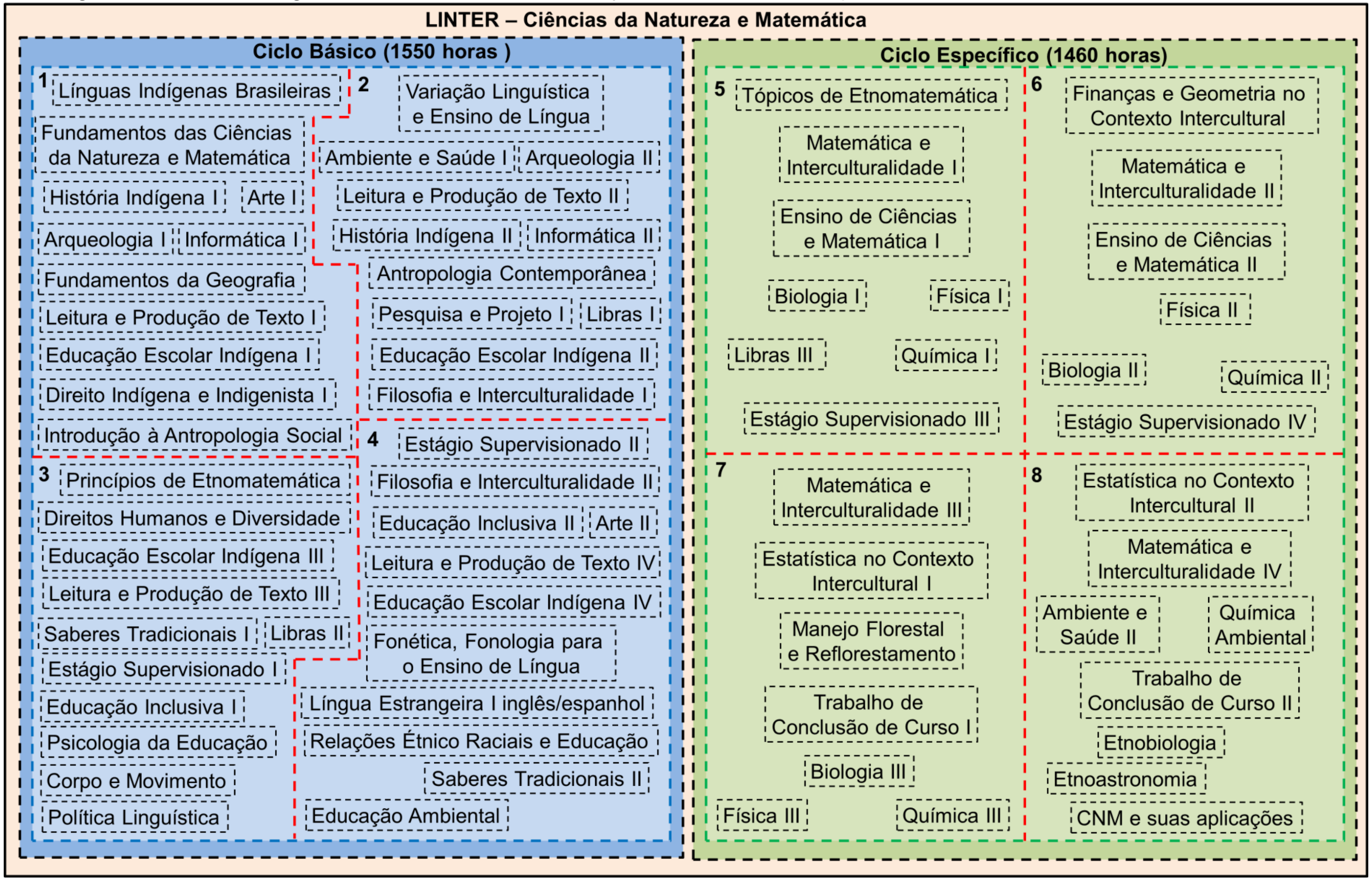
Conforme previsto em seu edital, depois de homologadas as inscrições dos candidatos, o processo seletivo é dividido em três etapas, que ocorreram sempre aos finais de semana por questões de logística do transporte e acomodação dos candidatos que vêm de todas as aldeias da região. Cada candidato entrega um memorial descritivo relatando: sua trajetória escolar e experiência na educação; como é sua participação na comunidade em que reside e nos seus movimentos sociais e; qual sua expectativa em relação ao curso superior. No primeiro dia do processo seletivo, os componentes da comissão organizadora realizam entrevistas individuais com os candidatos buscando mais informações acerca das questões que compõem o memorial descritivo que eles entregam. No segundo dia, ocorre uma prova escrita composta por cinco questões de múltipla escolha referentes à área escolhida pelo candidato e, uma questão discursiva com algum tema geral voltado para a Educação Escolar Indígena.

Fomos convidados a participar desse processo seletivo entrevistando 15 (quinze) candidatos para a área de Ciências da Natureza e Matemática. Nas entrevistas, constatamos que a formação para professor de Matemática continua em segundo plano, ou seja, estão cientes que terão que estudá-la para se formarem professores, mas, não pretendem exercer a docência em Matemática. Notamos que a maioria dos candidatos entrevistados por nós é atraída a se inscrever nessa área almejando ser professor de Ciências no Ensino Fundamental ou docente de Biologia no Ensino Médio, ambos na Educação Escolar Indígena. De fato, do montante entrevistado por nós, apenas três disseram ter interesse na Matemática para sua atuação docente.

Segundo seu PPC (BRASIL, 2016), a LINTER é dividida em duas partes. A primeira denominada de Ciclo Básico se estende do primeiro ao quarto semestre do curso, abordando o estudo dos saberes indígenas dos acadêmicos envolvidos e das características da Educação Escolar Indígena. O Ciclo Básico totaliza 1550 (mil quinhentas e cinquenta) horas sendo: 900 (novecentas) horas presenciais teóricas, 450 (quatrocentas e cinquenta) horas de práticas curriculares na comunidade e 200 (duzentas) horas de estágio.

A segunda parte denominada de Ciclo Específico em Formação Profissional, que se estende do quinto ao oitavo semestre do curso, se relaciona com uma das três áreas anteriormente citadas (Quadro 5). Esse segundo ciclo totaliza 1460 (mil quatrocentas e sessenta) horas sendo: 840 (oitocentas e quarenta) horas presenciais e teóricas, 420 (quatrocentas e vinte) horas de práticas curriculares na comunidade, e 200 (duzentas) horas de estagio curricular. Na Figura 6 apresentamos um panorama geral dos oito semestres do curso para a área de Ciências da Natureza e Matemática (CNM).

Figura 6 – Panorama geral do currículo da LINTER para a área de formação em Ciências da Natureza e Matemática.



Fonte: Elaborada pelos autores a partir de (BRASIL, 2016).

Salientamos que as fronteiras disciplinares, as bordas que delimitam cada período ou semestre, bem como as linhas que demarcam o espaço de cada ciclo educacional são pontilhadas, pois entendemos que essas fronteiras ou bordas ou linhas existem, mas são transponíveis no transcorrer do processo educacional e na dinâmica de desenvolvimento profissional prevista no PPC da LINTER. O Currículo da LINTER deve ser aberto e flexível sendo fundamentado pelo contexto das comunidades indígenas envolvidos, no qual a formação do professor indígena busca atender às necessidades dessas comunidades. Esse Currículo deve ser aprimorado por meio das pesquisas desenvolvidas pelos acadêmicos ou pelos professores indígenas. “Para tanto, o currículo, em vez de estar organizado pelo tradicional sistema de disciplinas estanques, terá uma abordagem transdisciplinar[15], que é relevante para o entendimento das questões locais” (BRASIL, 2016, p. 75).

Na disciplina de Estágio Supervisionado I, localizada no 3º Período ou Semestre, o acadêmico deve realizar uma observação geral da comunidade escolar onde ele está inserido como um movimento de pesquisa e em particular observar a relação da escola local com a comunidade. A disciplina de Estágio Supervisionado II, que está alocada no 4º Período ou Semestre, o acadêmico deve ir além de observar realizar coparticipações em turmas do Ensino Fundamental II (quinto ao nono ano) realizando ações de construção de materiais didáticos, participação na organização de oficinas educacionais. Já na disciplina de Estágio Supervisionado III, localizada no 5º Período ou Semestre, o acadêmico desenvolve o mesmo tipo de atividade do estagio anterior, porém no âmbito do Ensino Médio. E por fim, na disciplina de Estágio Supervisionado IV, alocada no 6º Período ou Semestre, o acadêmico prepara e realiza sua práxis educacional tanto no Ensino Fundamental II, quanto no Ensino Médio.

Ressaltamos que cada disciplina relacionada ao estágio possui 100 (cem) horas de duração, sendo 30 (trinta) horas teóricas desenvolvidas no

---

[15] “O essencial na transdisciplinaridade reside na postura de reconhecimento de que não há espaço nem tempo culturais privilegiados que permitam julgar e hierarquizar como mais corretos – ou mais certos ou mais verdadeiros – os diversos complexos de explicações e de convivência com a realidade. A transdisciplinaridade repousa sobre uma atitude aberta, de respeito mútuo e mesmo de humildade com relação a mitos, religiões e sistemas de explicações e de conhecimentos, rejeitando qualquer tipo de arrogância ou prepotência” (D’AMBROSIO, 2012, p. 79-80).

campus do IFBA – Porto Seguro e as outras 70 (setenta) horas, de cunho prático, acontecem nas escolas indígenas das comunidades envolvidas. Além disso, há outras 200 (duzentas) horas de Atividades Acadêmicas Científicas e Culturais, que correspondem às experiências adquiridas pelos acadêmicos no transcorrer do curso que englobam a participação em projetos de pesquisa ou de extensão, participação em cursos ou eventos (exposições, seminários, congressos, eventos de natureza científica, cultural ou esportiva) seja como organizador, ou apresentador, ou ouvinte. “Ao concluir o curso/evento, o discente deverá elaborar e apresentar um Memorial Descritivo, com a descrição das ações realizadas e a comprovação mediante certificado de participação” (BRASIL, 2016, p. 37). Nesse contexto curricular, a LINTER apresenta o total geral de 3240 (três mil duzentas e quarenta) horas. De acordo com seu PPC

> [...] esse curso de formação de professores, pretende e vem desenvolvendo a capacidade de problematizar a realidade social, histórica e política da educação como um todo e em especial a Educação Escolar Indígena dando destaque às demandas dos povos indígenas do Sul e Extremo Sul, com vistas a encontrar possíveis soluções para o cotidiano escolar. Para tanto, tem buscado o desenvolvimento da capacidade de diálogo com os pares, com a comunidade e com a própria profissão docente, compreendendo o “ser” professor indígena, o “saber fazer” e o “saber”, imprescindível em um curso de formação. Considerando as capacidades referidas, será possível o quesito “transformação” da realidade em que se vive (p. 61, grifo do autor).

Nessa perspectiva de formação, a dinâmica educacional adotada pelo curso procura conciliar a Educação e o Trabalho, assim a opção escolhida foi a da Pedagogia da Alternância[16], pois os acadêmicos indígenas executam atividades educacionais no âmbito do IFBA – Campus Porto Seguro (denominado de Tempo Universitário), sobretudo os aportes teóricos e de forma modular[17], e em locais distantes (denominado de Tempo Intermediário)

---

[16]A Pedagogia da Alternância é um método educacional que busca a interação entre o estudante que vive no campo ou nas comunidades socialmente identificadas e o contexto que ele vivencia em seu dia a dia, de forma a promover constante troca de experiências e de conhecimentos entre o seu ambiente de vida e trabalho na comunidade e o escolar.

[17]As aulas presenciais são concentradas em módulos com duração de quatro semanas. As aulas acontecem de segunda-feira a sexta-feira nos períodos matutino e vespertino, e nos sábados no período matutino.

nas suas comunidades tais como: as práticas escolares, trabalhos de pesquisa, elaboração de material pedagógico. Ou seja, o que eles estudam e debatem teoricamente no período em que estavam no campus do IFBA, os acadêmicos aplicam em suas comunidades e elaboram relatórios dessas aplicações para serem posteriormente compartilhados e discutidos com os demais acadêmicos e professores do curso.

Destacamos que essa dinâmica de formação ocorre independentemente do acadêmico já ser professor ou não. Acontece que alguns acadêmicos indígenas da LINTER já se formaram no magistério indígena e atuam como professores do Ensino Fundamental em suas séries iniciais (educação infantil e do primeiro ao quinto ano). E pode haver outros que terminaram o Ensino Médio, portanto ainda não são professores, mas, eles têm abertura nas escolas indígenas para atuarem como auxiliares de professores indígenas licenciados.

Para possíveis efeitos de transformação das comunidades indígenas envolvidas, é fundamental que todo o conteúdo teórico dialogado com os componentes curriculares da LINTER seja abordado de forma contextualizada e em acordo com a prática, em sala de aula, do futuro professor. Trata-se de um momento de possível construção de novos conhecimentos que são posteriormente conduzidos para o aprimoramento do processo de ensino e aprendizagem a ser desenvolvido por eles nas escolas indígenas. Logo, não se pode pensar em dois momentos distintos, sendo um para o conteúdo e outro para uma adaptação desse conteúdo à prática do futuro profissional. Em suma, o Tempo Universitário de caráter teórico é aplicado durante o Tempo Intermediário de cunho prático (práxis do professor).

Nesse contexto de transformação, ressaltamos que há o Tempo Universitário Comunidade que compreende formações presenciais que ocorrem no interior das comunidades e envolvem os docentes da LINTER e seus acadêmicos indígenas. Nesta etapa, o acadêmico precisa confirmar a relação entre o estudo efetuado no campus do IFBA (Tempo Universitário) e a realidade de sua escola na comunidade. São aulas presenciais, com o intuito de proporcionar ao docente de cada disciplina da LINTER conhecer a realidade da comunidade e da escola indígena. Essa troca de experiências tem a função de propiciar que cada componente curricular seja complementar às expectativas dos povos atendidos (BRASIL, 2016).

No Tempo Universitário Comunidade acontece um atendimento individualizado (professor formador e cada acadêmico), quando o estudante: expõem suas dúvidas, aprofunda conteúdos, analisa situações particulares, planeja e revisa atividades acompanhadas pelo docente do componente curricular. Esse espaço, então, permitirá ao docente da LINTER entrar em contato com a comunidade, suas lideranças e com a escola em que os acadêmicos indígenas são professores ou gestores, orientando as tarefas, o TCC e o Estágio Curricular Supervisionado.

Por exemplo, para uma disciplina de 30 horas os acadêmicos indígenas terão 10 horas, divididas ao longo de quatro ou três semanas, de conteúdos teóricos dialogados com o professor responsável nas dependências do IFBA – Porto Seguro. Essas 10 horas correspondem ao período Tempo Universitário para essa disciplina. Então, após esse tempo os acadêmicos indígenas retornam às suas comunidades com a tarefa de colocarem em prática, nas escolas indígenas locais, o que foi dialogado teoricamente. Essas atividades práticas contam outras 10 horas para a disciplina como o Tempo Comunidade. Os acadêmicos fazem relatórios e programam seminários sobre essas atividades para serem aparentados no Tempo Universitário Comunidade, que conta com a participação de todos. O professor responsável pela disciplina se desloca até as comunidades para dialogar com os acadêmicos em suas apresentações e para conhecer a comunidade.

O Tempo Universitário Comunidade corresponde às outras 10 horas da disciplina e geralmente ocorre em um dia para cada disciplina (para cada professor responsável). No caso da LINTER, são conduzidos dois professores por vez para a comunidade onde ocorrerão as atividades. Assim, cada professor responsável permanece no mínimo 24 horas na comunidade. Nesses encontros os professores responsáveis são convidados a ficarem alojados nas próprias comunidades. Nós tivemos a oportunidade de participar de um desses encontros.

Com relação aos conteúdos curriculares da área de Matemática apresentamos o Quadro 6, no qual, podemos perceber que, antes da reformulação curricular discutida e implementada em Abril de 2019, os temas voltados para a Matemática só iniciavam seus estudos a partir do quinto semestre do curso, ou seja, somente para os acadêmicos que escolhem a formação na área de Ciências da Natureza e Matemática. Destaque para as disciplinas de Etnomatemática I e Etnomatemática II, as quais têm suas ementas compostas por conteúdos curriculares da Matemática sem nenhuma discussão com relação ao conceito e tópicos de Etnomatemática na Educação Matemática como um todo, bem como na Educação Escolar Indígena em particular.

Quadro 6 – As disciplinas e suas ementas para a primeira turma da LINTER.

Disciplinas (60 horas)	**Ementas**
Fundamentos de Matemática Aplicada I (5º semestre)	Discussão introdutória sobre a Matemática através dos tempos; a relação da Matemática com as Ciências da Natureza, bem como destacar sua importância para os processos de produção e pesquisa da humanidade.
Fundamentos da Matemática Aplicada II (6º semestre)	Conjuntos numéricos; Estruturas Algébricas; Relações e Funções; Tipos de Funções; Função Afim. Função Quadrática; Função Modular; Composição de Funções; Função Inversa; Funções Polinomiais; Polinômios; Equações Polinomiais; Função Exponencial; Função Logarítmica; Funções Trigonométricas; Funções Trigonométricas Inversas. Tais conteúdos são abordados através dos processos de contextualização em relação ao cotidiano indígena no que tange a compreensão sobre medidas, quantidades e formas geométricas.
Etnomatemática I (7º semestre)	O curso contempla as quatro operações fundamentais. Divisores e Múltiplos nos Números Naturais. Frações. Números Decimais. Números Inteiros. Números Racionais. Potenciação e Radiciação. Equações e Inequações do 1º grau. Aritmética Aplicada e Estatística.
Ensino de Matemática (7º semestre)	Processo de ensino aprendizagem da Matemática e sua relação com o cotidiano indígena, no que ser refere à contagem, às formas geométricas, ao sistema de medidas, dentre outros elementos.
Etnomatemática II (8º semestre)	Números inteiros e suas operações; Números racionais e suas operações; Potenciação e Radiciação; Equações; Aritmética Aplicada. Números Reais; Cálculo Algébrico; Sistema de Equações e Estatística.

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de (BRASIL, 2014).

Diante desse quadro, os conteúdos curriculares voltados para o ensino de Matemática e de Tópicos da Educação Matemática abordados de forma teórica totalizam 270 (duzentas e setenta) horas e, caso o acadêmico escolha realizar seu TCC na área de Matemática acrescentam-se outras 200 (duzentas) horas. Em uma reunião entre o coordenador e o colegiado do curso, foi decidida a alteração nos componentes curriculares de Matemática para o curso, acrescentando mais conteúdos dessa área do conhecimento, além da necessidade de se ter ao menos uma disciplina sobre Etnomatemática, já na formação inicial (Ciclo Básico), em um dos quatro semestres iniciais, independente da área que o acadêmico escolher para sua formação docente.

Indo ao encontro dessa solicitação do colegiado do referido curso, no PPC da LINTER (BRASIL, 2016, p. 41) está descrito que:

> No caso da Educação Escolar Indígena, faz-se necessária a participação efetiva das comunidades no processo de formação curricular. Por isso, a preferência das comunidades é que os pesquisadores e professores, com formação especializada em questões indígenas, sejam oriundos de suas populações, a fim de preservar a sua autonomia e liberdade. Sendo assim, o Projeto Pedagógico de Curso – PPC de um curso para formação de docentes indígenas deve, necessariamente, levar em consideração que os processos de estruturação, planejamento e gestão da educação devem ser protagonizados pelos indígenas.

Nesse processo de reestruturação curricular as comunidades indígenas, por intermédio dos acadêmicos indígenas que fazem parte do colegiado da LINTER, solicitaram o estudo de Estatística, Matemática Financeira, Geometria e conteúdos de Cálculo. Acontece que as comunidades indígenas envolvidas são atuantes no comércio local de peças de artesanato indígena, então entendem que precisam estudar Matemática Financeira. A Estatística é fundamental para a realização das pesquisas, interpretação de gráficos e discussões envolvendo questões territoriais. Os acadêmicos indígenas compreendem que estudando Matemática Financeira e Estatística na sua formação eles estarão bem preparados para ensinarem esses conhecimentos matemáticos nas escolas indígenas. Já os conteúdos de Cálculo estão presentes nos currículos de outras licenciaturas interculturais, então eles debatem que eles devem estar presentes no currículo da LINTER.

Nessa perspectiva, a base curricular do Quadro 7 nasceu das discussões, as quais participamos com apontamentos sobre os temas de Etnomatemática e conteúdos de Matemática, com os acadêmicos, os professores da LINTER e seu coordenador. Assim, a carga horária total do curso para os conteúdos curriculares da área de Matemática foi mantida, entretanto, as disciplinas foram reestruturadas e seus conteúdos curriculares remodelados conforme solicitações elencadas nas discussões.

Quadro 7 – As disciplinas e ementas reestruturadas na área de Ciências da Natureza e Matemática da LINTER.

Disciplinas	Ementas
Princípios de Etnomatemática (3º Semestre) 30 horas	Discussão dialogada sobre o que é Matemática e seu possível enfoque antropológico e o que vem a ser Etnomatemática. Destacar a Etnomatemática como o elo pedagógico entre a Matemática do não indígena e os conhecimentos matemáticos de grupos sócios culturalmente identificados (indígenas). As variadas dimensões da Etnomatemática. A Etnomatemática como a possibilidade do licenciando compreender a Matemática como uma criação cultural resultante da cultura de cada grupo social.
Tópicos de Etnomatemática (5º semestre) 30 horas	A dimensão cognitiva da Etnomatemática: conhecimento e comportamento. A Etnomatemática e suas perspectivas pedagógicas. A Etnomatemática e a Matemática Indígena. A relação entre a Etnomatemática e a Educação Matemática, destacando a Etnomatemática como uma possível metodologia de ensino da Matemática. Abordar as pesquisas da Etnomatemática que têm sido desenvolvidas na Educação Matemática e suas principais características práticas e teóricas, bem como apresentar aspectos da natureza da Educação Matemática no contexto das escolas indígenas.
Matemática e Interculturalidade I (5º semestre) 30 horas	O Sistema de Numeração Decimal e o estudo do Sistema de Medidas Convencionais: comprimento, distância, largura, altura, superfície, volume, capacidade, tempo e massa. O desenvolvimento de diferentes campos numéricos (Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais). Os Números Racionais e suas diferentes representações: relação parte/todo, divisão e razão, diferentes representações dos números racionais (decimais e fracionários). Operações envolvendo os números racionais: adição, subtração, divisão, multiplicação.
Finanças e Geometria no Contexto Intercultural (6º semestre) 30 horas	Regra de três simples e composta, Conceito de porcentagem, juros simples e compostos, juros após vencimento, compra e venda a vista ou a prazo, planilhas de custos. As diferentes formas de ocupação do espaço (localização/ movimentação); O estudo de entes geométricos a partir da observação da natureza, arte e arquitetura indígena (ângulos e polígonos, círculos e circunferências); Classificação de formas bidimensionais: classificação de polígonos pelo número de lados e ângulos; classificação de objetos tridimensionais: prismas poliedros e corpos redondos.
Matemática e Interculturalidade II (6º semestre) 30 horas	Operações envolvendo o campo dos números inteiros e reais (adição, subtração, multiplicação, divisão, radiciação e potenciação); Linguagem simbólica da matemática na representação de campos numéricos (Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais). Resolução de problemas envolvendo equações polinomiais de 1º grau, de 2º grau,

	equações irracionais e exponenciais, Fatoração de expressões algébricas usando a distributividade. Estudo das figuras planas e espaciais por meio da manipulação de sólidos geométricos; Cálculo de área; Cálculo de volume; Recursos às tecnologias para o estudo da geometria. Classificar figuras planas a partir de objetos com formas espaciais.
Estatística no Contexto Intercultural I (7º semestre) 30 horas	Ferramentas para coleta de dados; Organização de dados; Representações gráficas e conceitos matemáticos implícitos, leitura, análise e interpretação de gráficos; Relações entre questão de investigação e as demais etapas de um estudo estatístico; A variabilidade como significante de investigação estatística; Discussão de tipos de variáveis e gráficos; Conceitos estatísticos de Moda, Média, Mediana, Variância e desvio padrão.
Estatística no Contexto Intercultural II (8º semestre) 30 horas	Sistemas Lineares; Matrizes; Determinantes e Conceito de vetor. Princípio fundamental da contagem, Princípio aditivo; Princípio multiplicativo; Permutações simples; Permutações com repetição; Combinações; Arranjos. O princípio de acaso e probabilidade; Conceituação de estocástica: probabilidade integrada à estatística.
Matemática e Interculturalidade III (8º semestre) 60 horas	Equação da reta; Equação de circunferência; Distância entre dois pontos; Distancia entre retas. Análise de comportamentos de uma função. Noções básicas de infinitésimo, limite, derivada e integral no contexto histórico e contextualizado (Princípio de Cavalieri).

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de (BRASIL, 2016).

Os acadêmicos indígenas representantes no colegiado do curso solicitaram que alguns conteúdos da Matemática deveriam constar desde o primeiro semestre do curso, para que todos os acadêmicos tenham o mínimo de contato com o conhecimento matemático. Mesmo que ele não tenha escolhido a sua formação acadêmica específica na área de Ciências da Natureza e Matemática. Essa demanda foi acompanhada pelo professor de Matemática da LINTER. Nesse sentido, foi aceita a inclusão da disciplina de Princípios da Etnomatemática, não no primeiro, mas no terceiro semestre do curso. Basicamente, ela trata o conhecimento matemático como um dos patrimônios culturais de toda humanidade, com destaque para os povos indígenas.

Já a disciplina de Tópicos de Etnomatemática, possibilita um aprofundamento teórico da própria Etnomatemática, propondo discussões sobre suas dimensões (pedagógica, metodológica, cognitiva, antropológica, filosófica, social, histórica, cultural, política e afetiva) e enfatizando sua importância no âmbito da Educação Matemática. Seus diálogos são fundamentais para a formação tanto pedagógica quanto na elaboração e desenvolvimento de pesquisa envolvendo os modos de matematizar, do povo indígena, com a Matemática presente tanto no Currículo da LINTER quanto no Currículo da Educação Escolar Indígena, ambiente de trabalho do futuro professor indígena.

A Matemática é uma construção humana presente no nosso desenvolvimento. Conhecer a Matemática é uma conquista política e social para os professores indígenas, pois a sociedade não indígena que os circunda possui conhecimentos matemáticos intrínsecos ao conhecimento científico que rege a sociedade humana. O conhecimento matemático estruturado nos currículos da Educação Escolar Indígena e da LINTER precisa conversar com as matemáticas indígenas desenvolvidas nas comunidades. Compreendemos que é o professor indígena de Matemática quem promove o elo do conhecimento matemático com os saberes tradicionais de sua comunidade.

Sobre a necessidade de alterações no Currículo da LINTER, para atender as reivindicações dos acadêmicos com relação a esse currículo abordar mais conteúdos da Matemática, concordamos com Arroyo (2013, p. 344) quando salienta que

> Há um consenso de que o professor deva ser um profissional do conhecimento e o aluno o seu aprendiz. Não há tanto consenso de que deva ser um profissional da cultura e o aluno seu aprendiz. Como há consenso de que o currículo e o tempo da escola garantam o direito ao conhecimento. Não é dada a mesma centralidade a sua função de garantir o direito à produção cultural. Os currículos têm sido pouco sensíveis ao reconhecimento dos educadores e dos educandos como sujeitos de cultura e de memória.

Nesse contexto, atendendo as solicitações dos acadêmicos e da coordenação da LINTER e, considerando que tanto os educadores quanto os educandos, são sujeitos de cultura e de memória, as disciplinas foram reformuladas e distribuídas com 30 (trinta) horas de duração, sendo: dez horas de cunho teórico dialogadas com o professor responsável no campus de Porto Seguro do IFBA; dez horas de caráter teórico, entretanto, com o professor e os acadêmicos no ambiente das comunidades e; dez horas de práxis desenvolvidas pelo acadêmico em uma das escolas indígenas que ele atue colocando em prática a teoria discutida com o professor e seus companheiros de curso.

Nessas discussões curriculares, foram acrescentados conteúdos de Estatística e Matemática Financeira, houve intensificação em conteúdos de Geometria, tópicos de Etnomatemática e discussões sobre os infinitesimais, bem como de Cálculo Diferencial e Integral abrindo espaço para os conteúdos curriculares abordados em nossa pesquisa com os acadêmicos da LINTER. Em cada nomenclatura das disciplinas foi incluído o termo intercultural ou interculturalidade[18], justamente para lembrar ao professor de Matemática do IFBA – Porto Seguro, ou professor de outra instituição convidado, que no planejamento de suas aulas tenha como um dos objetivos primordiais a inclusão de entes ou fatos das matemáticas indígenas dos acadêmicos indígenas participantes.

Nesse novo cenário curricular, destacamos a disciplina de Matemática e Interculturalidade III, que diferentemente das demais, possui 60 (sessenta) horas de duração, o que acaba por dobrar suas horas em cada período de seu desenvolvimento, com relação às demais disciplinas. Ela propõe discussões e o estudo dos conteúdos: “infinitésimo, limite, derivada e integral no contexto histórico e contextualizado (Princípio de Cavalieri)” (BRASIL, 2016, p. 220). Essa disciplina traz os objetos matemáticos que abordamos na construção da proposta de cada processo de ensino e aprendizagem dessa pesquisa (capítulos 7 e 8). Cuja elaboração começa a ser planejada com a investigação e a apresentação da construção histórica de conceitos fundamentais para o estudo dos conteúdos (limite, soma de Riemann, integral definida e função área) no âmbito da História da Matemática, enfatizando o seu contexto histórico, conforme solicitado na descrição de sua ementa, e discutido no Capítulo 2.

---

[18] “Consideramos o interculturalismo como um enfoque que afeta a educação em todas as suas dimensões, favorecendo uma dinâmica de crítica e autocrítica, valorizando a interação e comunicação recíprocas, entre os diferentes sujeitos e grupos culturais” (CANDAU, 2012, p. 45).

CAPÍTULO 2

A CONSTRUÇÃO DAS DEFINIÇÕES DE LIMITE, SOMA DE RIEMANN, INTEGRAL DEFINIDA E FUNÇÃO ÁREA NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Para a construção de cada processo de ensino e aprendizagem envolvendo as definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área para os acadêmicos indígenas da LINTER envolvidos nessa pesquisa, um de nossos objetivos específicos é investigar o desenvolvimento dessas definições, no âmbito da História da Matemática. Nesse sentido, trazemos fatos e personagens para suas posteriores contextualizações, no planejamento e execução de cada processo de ensino e aprendizagem. Como essas definições foram construídas? Quais fatos históricos estão envolvidos? Quem são os personagens que proporcionaram as construções dessas definições? Essas são questões norteadoras para iniciarmos nossa pesquisa histórica e que serão dialogadas com os acadêmicos indígenas no desenvolvimento de cada processo de ensino e aprendizagem dessa pesquisa quando puderem ser aplicados.

2.1. Iniciando pela Grécia Antiga

Os estudos em História envolvem interpretação pela lente de historiadores sobre fatos, personagens e contextos que se entrelaçam e que geralmente estão distantes do nosso tempo. Assim, é necessário escolhermos pesquisadores da História que nos guiem pelo labirinto de informações presentes em um percurso ao longo da História. Qual trajetória histórica devemos percorrer para que ela colabore com o nosso objetivo de pesquisa? Por onde começar? Analisando alguns textos no âmbito da História da Matemática, Gårding[19] (1981, p. 201), nos fornece um roteiro inicial para nossa

[19] Apesar do professor Lars Gårding não ser considerado um historiador, o seu livro Encontro com a Matemática foi construído envolvendo discussões com outros seis professores de Matemática (Kalr Gustav Andersson, Tomas Claesson, Gunnar Blom, Willian F. Donoghue Jr., Tores Herlestam e Charles Halberg), amigos do professor Gårding.

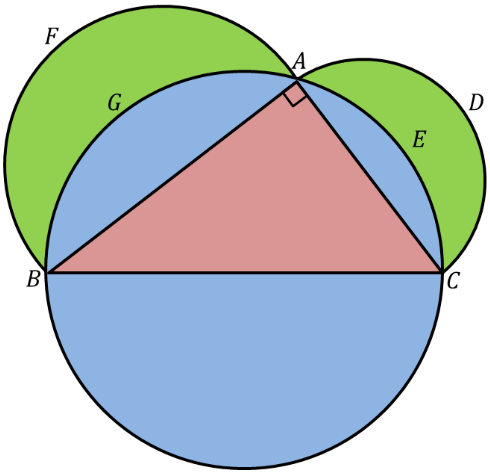
investigação histórica em busca de respostas para as questões formuladas, ao relatar que

> A teoria da integração desenvolveu-se a partir de cálculos simples de comprimento, área e volume, até atingir algumas construções bem abstratas. Começamos com alguns cálculos intuitivos de área e volume, dando, por exemplo, as fórmulas de Arquimedes para o volume e a área de uma esfera, mas depois de uma reprimenda do próprio Arquimedes ficamos mais sérios e voltamo-nos para a integral de Riemann.

Assim, quando iniciamos nossa pesquisa pela História da Matemática, assim como citado por Gårding (1981), já sabíamos que a origem do cálculo da integral definida se deu com o desenvolvimento do cálculo das áreas de regiões curvas, com destaque para as quadraturas do círculo e da parábola. Apesar de Egípcios e Babilônios efetuarem cálculos com comprimentos, áreas e volumes, não há certeza disso, no âmbito da História da Matemática, de que eles tinham métodos para o cálculo de áreas de regiões curvas ou volumes de corpos redondos, além do fato deles utilizarem valores aproximados para o número (ROQUE, 2015).

Olhando para a Grécia Antiga, o personagem Hipócrates de Quios (470 a. C. – 410 a. C.) é o mais antigo a se destacar na pesquisa com as quadraturas. Segundo Roque (2015), ele desenvolveu o estudo de lúnulas, que são porções de círculos compreendidas entre duas circunferências com a inclusão do estudo das quadraturas. A Figura 7 ilustra o desenho das lúnulas (regiões em verde) e descreve o teorema proposto por Hipócrates.

Figura 7 – A soma das áreas das lúnulas é igual à área do triângulo retângulo



Teorema: Construindo semicircunferências sobre os três lados de um triângulo retângulo qualquer ABC, tomados como diâmetros, a soma das áreas das duas lúnulas assim formadas $AGBF$ e $AECD$ (regiões em verde), é equivalente a área do triângulo retângulo.

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Vasconcelos (1919, p. 181).

Suas pesquisas envolviam razões e proporções entre as áreas dessas figuras geométricas. “As investigações de Hipócrates acerca dos primeiros destes problemas conduziram o seu autor a obter geometricamente as *primeiras quadraturas de superfícies* limitadas por curvas” (VASCONCELOS, 1919, p. 181, grifo do autor). Para Katz (2014, p. 41), Hipócrates obteve progresso na quadratura do círculo demonstrando que as áreas de certas lúnulas são iguais a certas regiões delimitadas por linhas retas. Segundo o autor

> Para fazer isso, ele primeiro teve que mostrar que as áreas dos círculos são umas para as outras como os quadrados em seus diâmetros, um fato evidentemente conhecido pelos escribas babilônios. Como ele conseguiu isso não se sabe. Em qualquer caso, ele agora poderia enquadrar a lúnula em um quadrante de um círculo.[20]

De acordo com Roque (2015), mais adiante, é Arquimedes de Siracusa (288 a. C. – 212 a. C.) que se destaca, todavia, ele foi influenciado por Eudoxo de Cnido (390 a. C. – 327 a. C.). A autora salienta que para determinar aproximadamente a área de um círculo, Eudoxo, utilizava um método datado do século V, no qual, se inscreviam polígonos regulares no círculo, duplicando o número de lados desses polígonos (4, 8, 16, 32,...), até que a diferença entre a área do polígono de mais lados e a área do círculo original, fosse menor do que qualquer área construída no processo. Posteriormente, Arquimedes aprimorou esse procedimento considerando polígonos inscritos e circunscritos, ou seja, exaurindo a área do círculo entre esses polígonos.

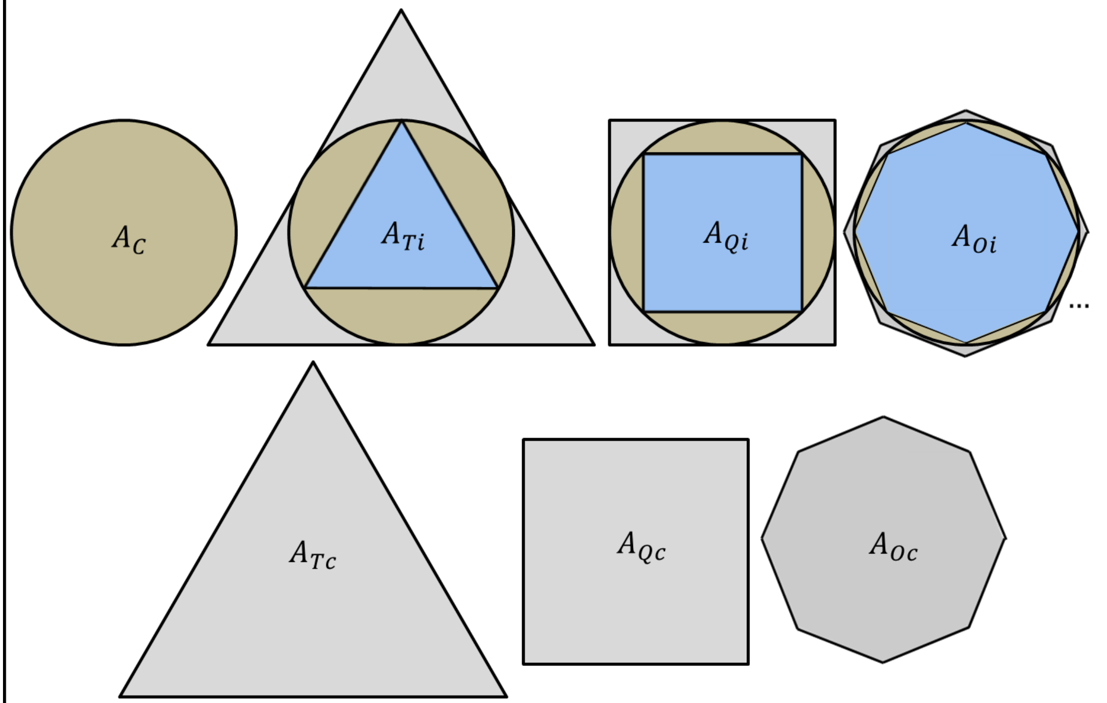
Nos desenhos da Figura 8 temos inicialmente um círculo, o mesmo círculo com triângulos, quadrados e octógonos inscritos e circunscritos, pois de acordo com Roque (2015), Arquimedes comprimia a figura curvilínea que desejava determinar o valor de sua área. No caso do círculo, ele o comprimia entre outras duas áreas que eram compostas por dois polígonos regulares, sendo um deles inscrito e o outro circunscrito. Com isso, Arquimedes afirmava que conforme fosse aumentando o número de lados desses polígonos (inscritos e circunscritos), como no caso do polígono regular de oito lados

---

[20] “To do this, he first had to show that the areas of circles are to one another as the squares on their diameters, a fact evidently known to the Babylonian scribes. How he accomplished this is not known. In any case, he could now square the lune on a quadrant of a circle”.

(octógono), suas áreas visualmente se aproximavam da área do círculo original.

Figura 8 – O método geométrico de Arquimedes no cálculo da área do círculo.



A_{Qc} = Área do quadrado circunscrito
A_{Tc} = Área do triângulo circunscrito
A_{Oi} = Área do octógono inscrito
A_{Ti} = Área do triângulo inscrito
A_{Oc} = Área do octógono circunscrito
A_{Qi} = Área do quadrado inscrito
A_c = Área da circunferência

$$(A_c - A_{Ti} > A_c - A_{Qi} > A_c - A_{Oi}) \text{ ou } (A_{Tc} - A_c > A_{Qc} - A_c > A_{Oc} - A_c)$$

ou

$$(A_{Tc} - A_{Ti} > A_{Qc} - A_{Qi} > A_{Oc} - A_{Oi})$$

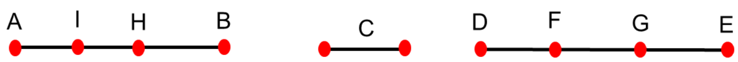
Fonte: Elaborada pelos autores com base em (ROQUE, 2015).

Se pensarmos inicialmente como Eudoxo e posteriormente como Arquimedes, à medida que o número de lados dos polígonos for aumentando e, tomarmos as áreas dos dois polígonos inscritos e circunscritos, a diferença entre suas áreas deve ser cada vez menor. Essa diferença tende à zero com polígonos de lados, sendo suficientemente grande, fazendo com que suas áreas e a do círculo original se aproximassem da igualdade. O procedimento adotado por Arquimedes, vem ao encontro da Proposição 1 do Livro X dos Elementos de Euclides. Euclides trata o termo magnitude como grandezas lineares, de superfície ou ainda volumétricas. A Figura 9 apresenta a referida Proposição 1 do Livro X e sua demonstração.

Figura 9 – A Proposição 1 do Livro X dos Elementos de Euclides.

Proposição 1 de Euclides Livro X

Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta.



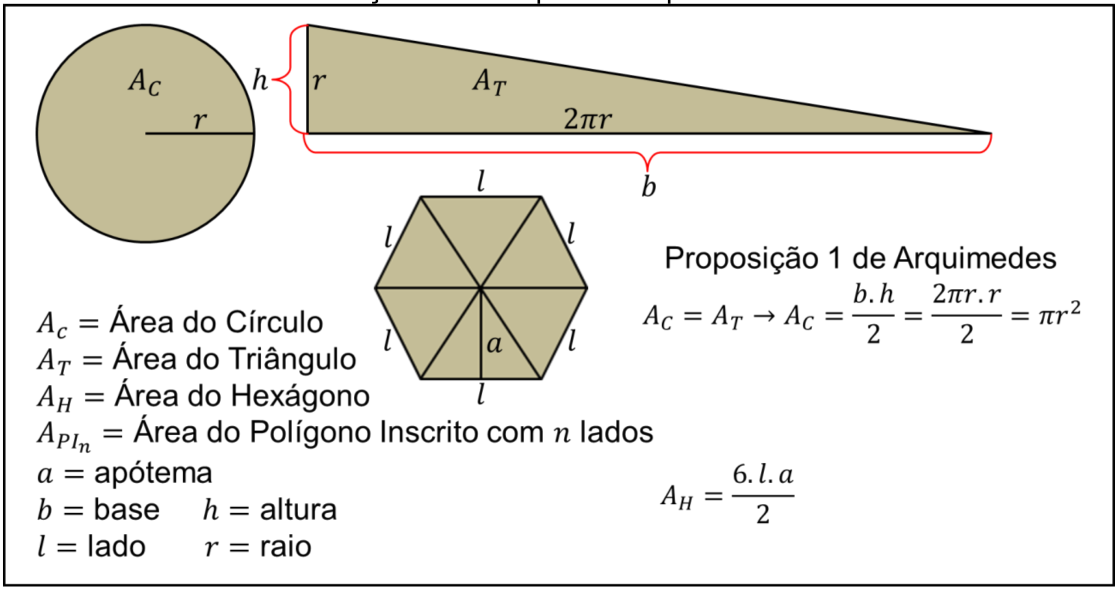
Demonstração

Sejam as duas magnitudes AB, C desiguais, das quais a AB é maior; digo que, caso da AB seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, será deixada alguma magnitude que será menor do que a magnitude C. Pois, a C, sendo multiplicada, será, alguma vez, maior do que a AB. Fique multiplicada, e seja a DE, por um lado, um múltiplo de C, e, por outro lado, maior do que a AB, e fique dividida a DE nas DF, FG, GE iguais à C, e fique subtraída, por um lado, da AB a BH, maior do que a metade, e, por outro lado, da AH, a HI, maior do que a metade, e isso aconteça sempre, até que as divisões no AB se tornem iguais em quantidade às divisões no DE. Sejam, de fato, as AI, IH, HB divisões que são iguais em quantidade às DF, FG, GE; e, como a DE é maior que a AB, e foi subtraída da DE a EG, menor do que a metade, ao passo que da AB, a BH, maior do que a metade, portanto, a GD restante é maior que a AH restante. E, como a GD é maior do que a HA, e foi subtraída da GD a metade GF, ao passo que da HA, a HI, maior do que a metade, portanto, a DF restante é maior do que a AI restante. Mas a DF é igual à C; portanto, também a C é maior do que a AI. Portanto, a AI é menor do que a C. Portanto, foi deixada da magnitude AB a magnitude AI que é menor do que a menor magnitude exposta C; o que era preciso provar. E do mesmo modo, será provado também, caso as coisas subtraídas sejam a metade.

Fonte: Elaborada pelos autores a partir de (EUCLIDES, 2009, p. 354).

Roque (2015) salienta que Arquimedes em seu livro *Medida do Círculo,* provou geometricamente que a área de um círculo pode ser determinada pela área de um triângulo retângulo. Esse procedimento é descrito na sua Proposição 1 segundo Magnaghi e Assis (2019, p. 81): “Todo círculo é equivalente a um triângulo retângulo, no qual um dos lados do ângulo reto é igual ao raio e o outro lado [do ângulo reto] é igual ao perímetro [do círculo, ou seja, é igual à circunferência]”. Compreendemos o perímetro do círculo como o comprimento de sua circunferência. A Figura 10 incorpora a Proposição 1 de Arquimedes (utilizamos essa proposição na proposta do segundo processo de ensino e aprendizagem por meio da balança de Arquimedes), além de trazermos o cálculo da área de um hexágono regular em função da medida do seu apótema e de seu perímetro.

Figura 10 – A Proposição 1 de Arquimedes e a área de um hexágono regular em função de seu apótema e perímetro.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para iniciarmos nossa demonstração, e com base em Roque (2015), tomemos como a área do polígono inscrito e como a área do polígono circunscrito, na mesma circunferência, e ambos com lados, como a área do círculo e como a área do triângulo retângulo, o qual o menor cateto tem a medida do raio da circunferência e o seu outro cateto tem medida igual ao comprimento da circunferência. Queremos demonstrar, por contradição, que Primeiro, vamos supor que e que para procurarmos obter contradições e com elas concluirmos que . Assim, supomos incialmente que , logo podemos obter uma quantidade de área qualquer de forma que , portanto Temos ainda que a , pelo lema de Euclides, é igual à área do triângulo retângulo, no qual, um dos catetos possui a medida do apótema do polígono e o outro cateto tem a medida que corresponde ao comprimento (perímetro) do polígono. A área desse polígono pode ser calculada como a do hexágono da Figura 10 .

Agora, continuando a demonstração, ressaltamos que qualquer apótema, bem como qualquer perímetro dos polígonos inscritos é menor que o raio e a circunferência do círculo, respectivamente, portanto, são menores do que os lados correspondentes do triângulo de área e nesse caso podemos concluir que para todo pode ser descrita na desigualdade Como a área então existe uma quantidade , que por meio da Proposição 1 do Livro X dos *Elementos* de Euclides, para um suficientemente grande é possível termos que Porém, , portanto, o que nos leva a uma contradição. Então, novamente pela

Preposição 1 do Livro X dos *Elementos* de Euclides, podemos considerar no argumento anterior, e supomos agora e assim temos que o que nos conduz a outra contradição, logo . O procedimento demonstrativo é análogo para polígonos circunscritos.

Entretanto, Roque (2015, p. 204, grifo da autora) salienta que

> No século XVII, esse tipo de procedimento ficou conhecido como "método da exaustão". Essa nomenclatura, no entanto, não é a mais adequada, uma vez que o método se baseia justamente no fato de que o infinito não pode ser levado à exaustão, isto é, não admite ser exaurido – pois por mais que nos aproximemos, nunca chegamos até ele.

Então, o que é o infinito? Essa é uma questão norteadora e fundamental para os diálogos com os acadêmicos indígenas da LINTER (infinito na concepção dos indígenas em consonância com a sua definição) provocando o encontro do conhecimento matemático com os saberes da tradição. E por falar em infinito, Roque (2015), nos informa que a partir da segunda metade do século XVII os métodos matemáticos envolvendo curvas, sobretudo os cálculos envolvendo tangentes e áreas de regiões sob essas curvas, fomentou o surgimento e o aprimoramento de manipulações matemáticas envolvendo os infinitesimais.

Segundo Roque (2015), isso provocou discussões nos modos de justificar os procedimentos matemáticos, desenvolvendo novas técnicas para a prova matemática e provocando uma libertação das justificativas matemáticas perante os enraizados padrões gregos, principalmente ao padrão euclidiano (prova euclidiana). Leibniz e outros matemáticos defendiam as práticas com os infinitesimais sem se importarem com as demonstrações de suas manipulações matemáticas. Eles estavam interessados no que essas práticas ou novas ferramentas matemáticas permitiam ou prometiam trazer de novidade para o desenvolvimento da Matemática.

De acordo com Roque (2015, p. 352-353, grifo da autora)

> Um dos primeiros a defender publicamente tal método foi o marquês de L'Hôpital, na obra que popularizou os métodos infinitesimais: *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Análise dos infinitamente pequenos para a compreensão das linhas curvas), editada em 1696. No prefácio, L'Hôpital faz um histórico desse método, afirmando que Descartes foi o primeiro a deixar os antigos para trás, mas

> também cita Fermat, Barrow, Leibniz e Bernoulli. Seu livro começa por duas suposições: que possam ser consideradas iguais duas quantidades que diferem uma da outra de uma quantidade infinitamente pequena; e que uma curva seja considerada a reunião de uma infinidade de retas, cada uma delas infinitamente pequena, ou um polígono com um número infinito de lados.

Conforme nos informa Bardin (2006), o desenvolvimento dos cálculos matemáticos envolvendo os infinitesimais conduziu o conceito de curvas, no final do século XVII, a se desenvolver sob três aspectos: a curva como uma expressão algébrica podendo ser infinita (equação da parábola, por exemplo); no âmbito da Cinemática a curva como a trajetória descrita por um ponto em movimento (como por exemplo, o movimento circular e o lançamento oblíquo) e; a curva como um polígono composto por um número infinito de lados. Esse último nos reconduz a ideia de Eudoxo e Arquimedes para o cálculo aproximado da área do círculo (método da Exaustão), porém, agora embasada pelos infinitesimais.

2.2. Bem-vindos infinitesimais

Os cálculos matemáticos utilizando a ideia dos infinitesimais provocaram muitas discussões entre os matemáticos, pois, como já salientamos não havia técnicas matemáticas para sua demonstração e comprovação. Isso gerou muitas discussões entre os matemáticos que defendiam a sua utilização e aqueles que desconsideravam e criticavam os cálculos com os tais infinitesimais. Ainda hoje, com relação às pesquisas com os infinitesimais, segundo Tall (2020, p. 20, grifo do autor) "Muitos matemáticos que pesquisam em análise matemática negam a existência de infinitesimais na reta numérica, enquanto os que pesquisam em matemática aplicada geralmente os consideram pragmaticamente como *quantidades arbitrariamente pequenas*. Portanto, duas abordagens teóricas aparentemente conflitantes continuam lado a lado". [21]

Sobre os infinitesimais, de acordo com Katz e Tall (2012, p. 7)

[21] "Many pure mathematicians researching mathematical analysis denied the existence of infinitesimals on the number line while applied mathematicians usually think of them pragmatically as *arbitrarily small quantities*. So, two apparently conflicting theoretical approaches continue side by side".

> As disputas fundamentais entre matemáticos são frequentemente formuladas em termos puramente matemáticos. Porém, matemáticos envolvidos em tais disputas nem sempre são eficazes para lidar com a transição da intuição para o rigor que pode ser muito difícil para os alunos. No entanto, a abordagem formal para matemática formulada por Hilbert não pergunta quais são as estruturas, somente quais são suas propriedades e o que pode ser deduzido dessas propriedades. Neste ponto de vista, o que importa não é o que são infinitesimais, mas como eles comportam-se. [22]

Gårding (1981) nos informa que o avanço da Matemática no século XVII ocorreu devido ao fato do rigor matemático ter sido colocado um pouco de lado em favor das pesquisas com os infinitesimais. Falava-se muito nas quantidades infinitamente pequenas, bem como da soma dessas quantidades infinitamente pequenas. A possibilidade de considerar o cálculo das áreas de regiões situadas sob curvas, entre as retas verticais e que demarcam um intervalo no eixo horizontal do plano cartesiano com e, acima do eixo , como a reunião de uma infinidade de retas cria um problema teórico, pois por mais retas que possamos reunir na referida área, teoricamente essa área nunca será preenchida já que a reta não possui espessura.

Mas, e se preenchermos a referida área por meio da reunião de uma infinidade de polígonos retangulares *suficientemente finos*? Aqui, envolvendo a ideia dos infinitesimais, pois agora são polígonos retangulares compostos por áreas que podem ser somadas. Podemos ressaltar outras três questões fundamentais aos acadêmicos indígenas da LINTER quando as propostas educacionais do Capítulo 7 puderem ser aplicadas: O que é ser suficientemente fino? O que são os infinitesimais? Como eles comportam-se?

No contexto histórico, para Roque (2015, p. 361, grifo da autora)

> Durante muitos anos, os matemáticos se debateram com o problema de fundamentar o uso de quantidades infinitamente pequenas, os “elementos infinitesimais”. O problema dos fundamentos deriva do fato de que o cálculo leibniziano empregava as chamadas “diferenciais”, designadas na notação

---

[22] “Foundational disputes among mathematicians are frequently formulated in purely mathematical terms. However, mathematicians involved in such disputes are not always effective in addressing the transition from intuition to rigour that may be so diffcult for learners. Yet the formal approach to mathematics formulated by Hilbert does not ask what the structures are, only what their properties are and what can be deduced from these properties. From this viewpoint, what matters is not what infinitesimals are, but how they behave”.

> de Leibniz por e . Tais quantidades eram utilizadas nos cálculos como quantidades auxiliares, e com êxito. Por exemplo, para encontrar a derivada a uma curva de equação , era preciso tomar a diferença entre as ordenadas de dois pontos vizinhos e sobre essa curva. Obtemos, assim, que Aqui, o termo pode ser desprezado, pois possui, comparativamente, ordem de grandeza bem menor que (uma vez que essa quantidade é infinitamente pequena). Logo, podemos concluir que .

Roque (2015) continua a discussão histórica salientando que esse procedimento algébrico para o cálculo da derivada de uma equação do 2º grau, obteve êxito nas aplicações, mas a utilização dessas quantidades infinitamente pequenas ainda não estava estabelecida matematicamente. Ou seja, como já ressaltamos os infinitesimais ainda não estavam definidos e algumas inconsistências emergiram conduzindo Leibniz a sugerir outros caminhos, como, por exemplo, que os infinitesimais poderiam ser interpretados como se não existissem, portanto, poderiam ser desprezados. De fato, segundo Gårding (1981, p.152): “[...] passos realmente significativos foram dados quando Newton e Leibniz voltaram às costas ao passado, justificando o cálculo infinitesimal pela sua fecundidade e coerência em vez de por demonstrações rigorosas”. Essas discussões conduziram ao desenvolvimento da definição de limite e, mais tarde, ao conceito de função matemática.

De acordo com Roque (2015, p. 367, grifo da autora)

> O matemático escocês Colin MacLaurin propôs, em 1742, uma resposta inspirada nos argumentos geométricos e cinemáticos de Newton na qual rejeitava os infinitesimais. Seus argumentos traziam de volta, por exemplo, as demonstrações indiretas, por dupla contradição, usadas por Arquimedes. Ele desprezava a algebrização e erigia a técnica geométrica de encontrar limites como base do cálculo, apesar de nem definir o que são limites nem as regras para operar com eles. Tal proposta influenciou o francês Jean le Rond d’Alembert a defender a substituição das quantidades infinitamente pequenas pelo método de limites, permitindo, contudo, a intervenção da álgebra. Impactado pelas críticas de Berkeley, d’Alembert afirmava que o uso das quantidades infinitamente pequenas pode abreviar as demonstrações, mas que ainda assim elas não devem ser aceitas, já que é preciso deduzir as propriedades das curvas com “todo o rigor” necessário. Sua posição foi publicada primeiramente nos anos 1740, só ficando mais clara por volta de 1750. [...] O verbete “Limite” é de 1765 e nele se lê que tal conceito está na base da verdadeira metafísica do cálculo diferencial. É dito ainda que o limite nunca coincide com a quantidade, ou nunca se torna igual à quantidade da qual é

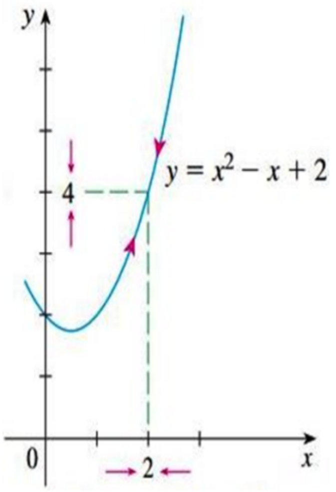
> limite; o limite sempre se aproxima, chegando cada vez mais perto da quantidade, mas difere sempre dela tão pouco quanto se deseje.

Analisando os fatos históricos podemos dizer que o princípio histórico do Cálculo se dá com as ideias presentes nos cálculos de áreas e volumes na Grécia Antiga. Com destaque para os personagens Eudoxo e Arquimedes, com o método da Exaustão desenvolvido pelo primeiro e aprimorado pelo segundo, ou o método de cálculo que deu origem às discussões sobre os infinitesimais e, mais adiante na história, do conceito de limite. Da mesma forma, os matemáticos Cavalieri, Fermat e Barrow que antecederam a Newton no desenvolvimento do Cálculo, ainda não utilizavam o conceito de limite, contudo, aprofundaram e defenderam a utilização dos infinitesimais. Coube a Newton o primeiro anúncio sobre o termo limite, salientando que esse era um conceito básico para o desenvolvimento do Cálculo. Porém, foram seus sucessores, como Cauchy, que esclareceram a concepção de Newton sobre limites.

O que dizer então dos termos suficientemente finos ou suficientemente próximos? Ou seja, é tão fino que praticamente não possui espessura (a sua finura tende a zero, mas nunca será igual a zero), ou se aproxima, mas, não atinge o limite que lhe é posto? Stewart (2014, p. 80) utiliza o seguinte exemplo com uma função quadrática para representar o suficientemente próximo: "Inicialmente precisamos analisar o comportamento da função definida por para valores de próximos de . A tabela a seguir, Figura 11, fornece os valores de para valores de próximos de , mas não iguais a ".

Figura 11 – A tabela de variação da função e o seu gráfico.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001



$f(x)$ tende a 4 quando x tende a 2.

Fonte: (STEWART, 2014, p. 80).

Da tabela e do gráfico de (uma parábola), mostrados na Figura 11, podemos perceber que quanto mais deslocamos o valor da variável atribuindo a ela valores nas proximidades de , e de qualquer um dos lados de (valores tanto menores quanto maiores), os resultados calculados para a função se aproximaram do valor . Ou seja, podemos atribuir quantos valores quisermos para nas proximidades (à esquerda ou à direita) de que, com isso, os resultados da função serão tão próximos a conforme os valores de forem próximos de . Então, os valores atribuídos a tendem ao valor enquanto que para a função, há um limite para seus resultados, que nesse caso é o valor . Na linguagem matemática escrevemos que:

Para Stewart (2014, p. 81, grifo do autor)

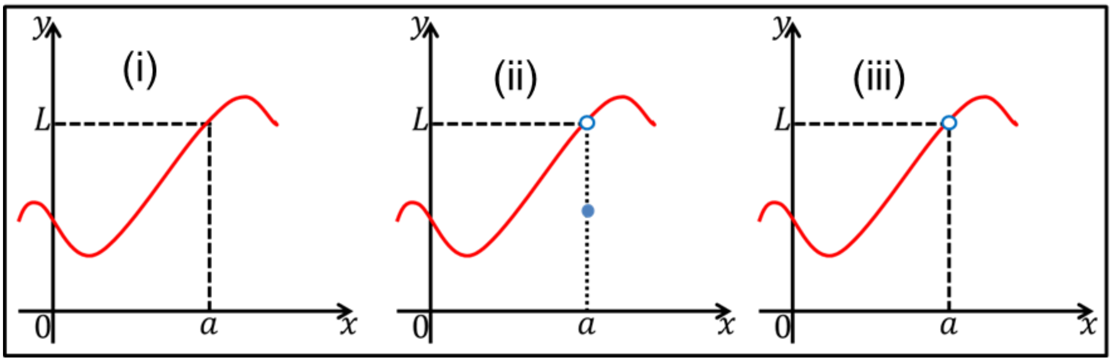
> A definição atual para limite pode ser descrita por: Suponha que seja definido quando está próximo de um número (isso significa que é definido em algum intervalo aberto que contenha , exceto possivelmente no próprio). Então escrevemos:
>
> e dizemos “o limite de , quando tende a , é igual a ” se pudermos tornar os valores arbitrariamente próximos de (tão próximos de quanto quisermos), tornando suficientemente próximo de (por ambos os lados de), mas não igual a . *Grosso modo*, isso significa que os valores de tendem a quando tende a . Em outras palavras, os valores de tendem a ficar cada vez mais próximos do número à medida que tende ao número (por qualquer lado de), mas .

Ávila (2006, p. 143) observa que considerar implica que o limite nada tem a ver com o valor

> O conceito de limite é introduzido para caracterizar o comportamento da função nas proximidades do valor de , porém mantendo-se sempre diferente de Assim, podemos mudar o valor da função no ponto como quisermos, sem que isso mude o valor do limite, e é assim mesmo que deve ser. Agora, se a função já está definida em , e seu valor aí coincide com seu limite, então ocorrerá a continuidade no ponto. É por isso mesmo que, quando a função ainda não está definida, mas tem seu limite num ponto , costuma-se defini-la nesse ponto como sendo o valor do limite.

A Figura 12 mostra os gráficos de três funções; observemos que: no esboço (i), na parte (iii), não está definida e; na imagem (ii), . Mas, em cada caso, não importando o que acontece em , é verdade que:

Figura 12 – Os gráficos do nos três casos citados.



Fonte: (STEWART, 2014, p. 81).

A definição de limite e as observações ressaltadas a partir dela, são fundamentais para discutirmos as definições de soma de Riemann, integral definida e função área com os acadêmicos indígenas da LINTER que venham a participar da futura aplicação dos processos educacionais palmejados no capítulo 7. Nessa pesquisa, o estudo de limite abre as discussões no âmbito do mundo formal da Matemática rumo a definição de integral definida e de função área.

2.3. A integral definida e a função área

A ideia de integral definida envolve conjuntamente a definição de limite e o conceito de soma de Riemann. A integral definida corresponde originalmente ao cálculo de área e no caso de regiões curvas essas podem ser calculadas por meio do limite de uma soma de Riemann. Por sua vez, a definição de função área está interligada a definição de integral definida. Já com relação ao desenvolvimento do conceito de integral definida, no contexto histórico do século XVIII, de acordo com Roque (2015, p. 456)

> Até esse momento, o cálculo da integral era um problema prático, pois, como a função era uma expressão analítica, as integrais eram calculadas para exemplos específicos. Bastava ter um método algébrico eficiente e encontrar a expressão analítica da integral, ou da área. Os matemáticos do século XVIII não estavam muito preocupados com as condições de integralidade, ou seja, com as condições que uma função deveria satisfazer para poder ser integrada.

Roque (2015) nos informa que o matemático Dirichlet (1829), ao estudar a função definida por se é um número racional, e, se é um número irracional, percebeu que ela não é derivável e é descontínua em todos os seus pontos. Assim, se considerarmos que a integral definida corresponde à área da região situada sob uma curva, entre as retas verticais e que demarcam um intervalo no eixo horizontal do plano cartesiano com e, acima do eixo , a função proposta por Dirichlet não possui integral definida como a área, nesses termos. Cauchy tinha tentado esclarecer o significado da integração, as condições que propôs foram aperfeiçoadas por Dirichlet e mais tarde por Riemann.

Dirichlet foi um dos mentores de Riemann, e com seu falecimento em 1859, Riemann o substitui na Universidade de Göttingen na Alemanha, assumindo o cargo de professor ordinário, cargo equivalente ao de professor titular no Brasil. Assim, ele pode se dedicar aos seus estudos matemáticos no desenvolvimento do conceito de integral investigando uma resposta, deixada em aberto tanto por Cauchy quanto por Dirichlet, para a seguinte questão: Sob que condições uma função é integrável? Porém, antes de responder a essa questão, Riemann desenvolveu o cálculo para a integral definida por meio de uma soma infinita cujo valor numérico é o resultado numérico da integral, ou seja:

Então, segundo Riemann (2000, p. 12-13)

> O que precisamos entender por ? Para estabelecermos isso, tomamos entre e a sequência de valores ordenados por tamanho e denotamos, de forma simplificada, por por por e por uma fração própria positiva. Então, o valor da soma:
>
> depende da escolha dos intervalos e dos valores Se ela possuir a propriedade de, se todos os tornarem-se infinitamente pequenos, tender a um limite fixado não importando quais e sejam escolhidos, então seu valor será denominado por: [23]

Assim, se tivermos um olhar mais apurado a uma dessas partes tomadas, onde a soma de Riemann converge para um valor fixado , independentemente da escolha de pontos que façamos no intervalo , então, a função será considerada integrável em e o resultado numérico será sua integral, comumente denominada de integral definida. Depois dessa definição, Riemann se dedicou a estabelecer critérios que determinassem em que condições uma determinada função pode ser considerada integrável. Ao todo foram desenvolvidos dois critérios que ficaram conhecidos como Critérios de Integralidade de Riemann e que estabeleceram um divisor de águas no desenvolvimento do Cálculo Integral. Ainda com relação à definição de integral definida, um de nossos objetos matemáticos para essa pesquisa, em uma notação moderna, de acordo com Stewart (2014, p. 337), é apresentada formalmente por

> Se é uma função contínua[24] definida em , dividimos o intervalo em subintervalos de comprimentos iguais . Sejam as extremidades desses subintervalos, e sejam pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que esteja no -ésimo subintervalo . Então a integral definida de de a é:

---

[23] "Also zuerst: Was hat man unter zu verstehen? Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen an und bezeichnen der Kürze wegen durch durch durch und durch einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe: von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen abh ängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und gewählt werden m ögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth ".

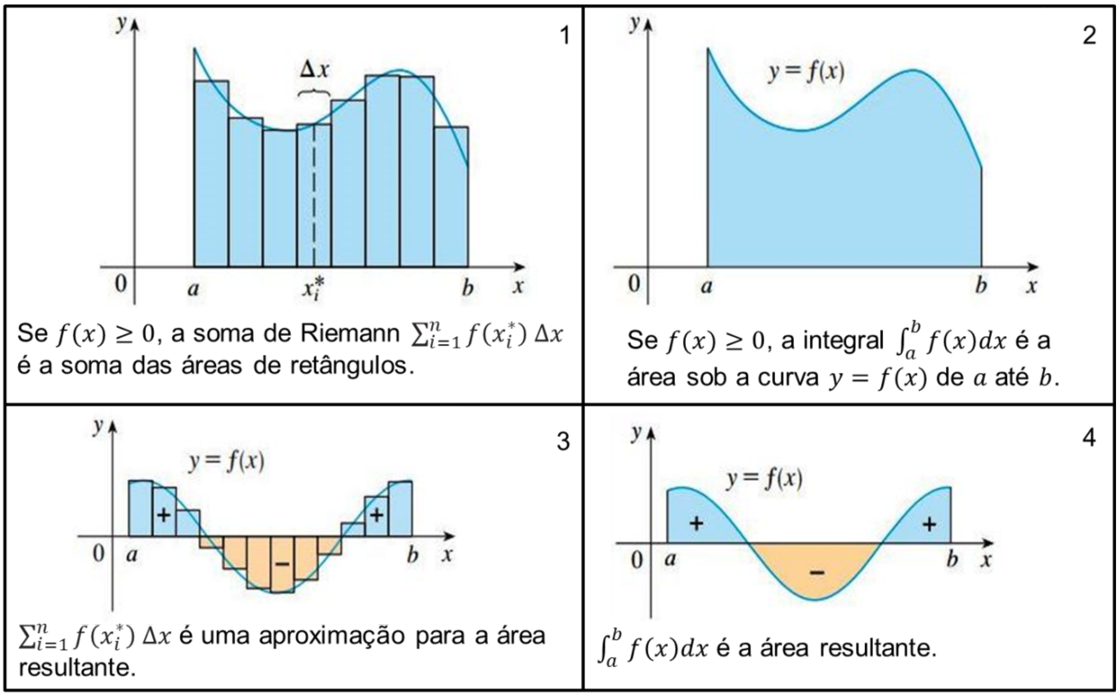
[24] "Uma função *f* é ***contínua em um número*** se Essa definição implica em três condições: precisa estar definida, ou seja, deve pertencer ao domínio de o deve existir e; A definição diz que é contínua em se tende a quando tende a . Assim, uma função contínua tem a propriedade de que uma pequena mudança em produz somente uma pequena alteração em . De fato, a alteração em pode ser mantida tão pequena quanto desejarmos, mantendo-se a variação em suficientemente pequena" (STEWART, 2014, p. 109, grifo do autor).

> desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir dizemos que é integrável em . O significado exato do limite que define a integral definida é o seguinte: Para todo número existe um número natural tal que:
>
> Para todo inteiro e toda escolha de em .

O símbolo foi introduzido por Leibniz e é denominado de sinal de integral. Na verdade ele é um alongado por que a origem da integral é um limite de somas. Na notação , é chamado integrando, e são ditos limites de integração, sendo o limite inferior e o limite superior e, o procedimento de calcular a integral é denominado de integração. A integral definida é um número, ela independe da letra que representa sua variável: . A soma é denominada de soma de Riemann em homenagem ao matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), portanto podemos dizer que a integral definida de uma função integrável pode ser aproximada em qualquer grau de precisão desejado por meio de uma soma de Riemann.

Caso a função seja positiva, então a soma de Riemann pode ser considerada como uma soma, aproximada, de áreas de retângulos conforme o gráfico 1 da Figura 13, e a integral definida pode ser considerada como a área da região situada sob curva , entre as retas verticais e que demarcam um intervalo no eixo horizontal do plano cartesiano com e, acima do eixo , como representado no gráfico 2 da Figura 13.

Figura 13 – Representações de integrais definidas.



Fonte: (STEWART, 2014, p. 338).

Segundo Stewart (2014), se a função assumir valores tanto positivos quanto negativos, como exposto no gráfico da imagem 3 da Figura 13, então a soma de Riemann é o somatório das áreas de cada um dos retângulos que estão acima do eixo e do oposto das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo . Se tomarmos o limite dessa soma de Riemann, obtemos a situação representada na imagem 4 da Figura 13. Stewart (2014) destaca que uma integral definida pode ser considerada como essa área resultante, isto é, a diferença das áreas: , em que é a área da região acima do eixo e abaixo do gráfico de , e é a área da região abaixo do eixo e acima do gráfico de . Se os comprimentos dos subintervalos forem , precisamos garantir que todos esses comprimentos tendem a no processo de limite. Isso acontece se o maior comprimento, , tender a (zero). Portanto, nesse caso a definição de integral definida pode ser descrita por:

Stewart (2014, p. 338-339) enfatiza que o cálculo de integral definida só é possível para uma função integrável

> Teorema: Se for contínua em , ou tiver apenas um número finito de descontinuidades de saltos, então é integrável em ; ou seja, a integral definida existe. Se for integrável em , então o limite da soma (soma de Riemann):

> existe e dá o mesmo valor, não importa como escolhamos os pontos amostrais . Para simplificarmos o cálculo da integral, com frequência tomamos como pontos amostrais as extremidades direitas. Então, e a definição de integral se simplifica como a seguir.
> Teorema: Se for integrável em , então:
>
> onde: e .

Ao considerarmos a escrita como a definição de integral definida de uma função limitada por um intervalo numérico , estamos assumindo que . Porém, a sua definição como o limite de uma soma de Riemann faz sentido mesmo quando , contudo, precisamos observar que se invertermos e , então mudará de para , portanto, nesse caso, podemos escrever que:

Já se , implica em e, nessa perspectiva, podemos escrever que:

A integral definida, que pode ser interpretada como a área da região situada sob a curva originada pelo gráfico de uma função contínua entre as retas verticais e com e acima do eixo , ou seja, limitada por um intervalo , é fundamental para consolidarmos, no quarto e quinto processo de ensino e aprendizagem. Porém, precisamos avançar para apresentarmos o elo entre a definição de integral definida e a definição de função área.

Afinal, temos a intenção de associarmos a função área da fórmula matemática que utilizamos para calcularmos o comprimento da circunferência, com a fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a área circular. Do mesmo modo, buscamos associar a função área da fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a superfície esférica com a fórmula matemática que utilizamos para calcularmos o volume de uma esfera. Esse elo é a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo, pois, segundo Stewart (2014, p. 350, grifo nosso)

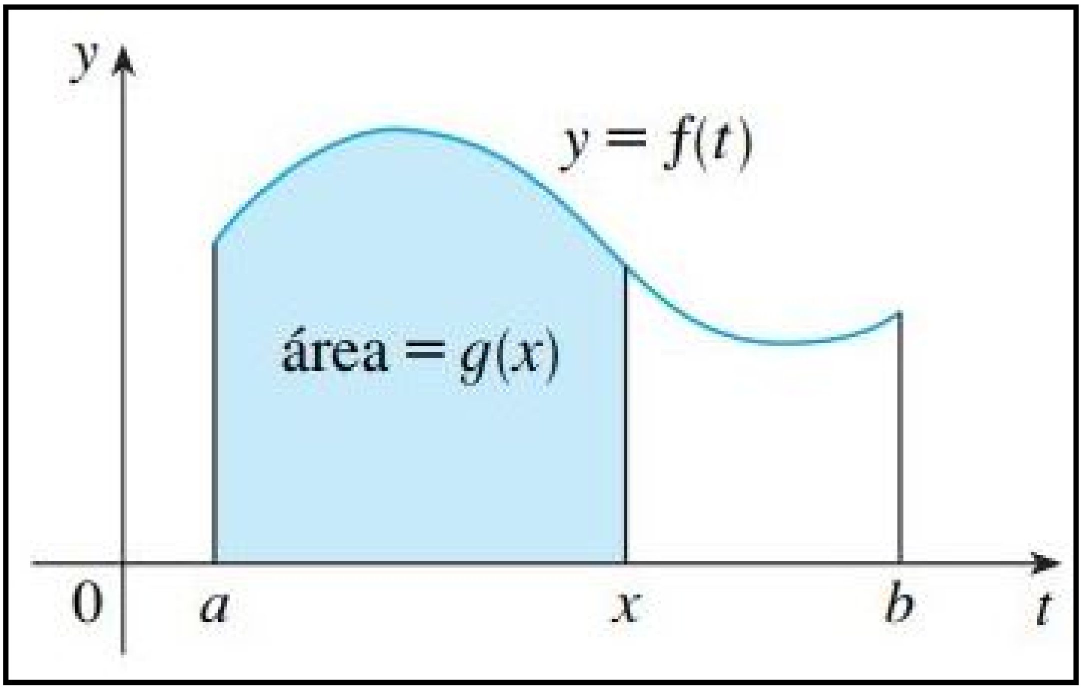
> O nome Teorema Fundamental do Cálculo é apropriado, pois ele estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. O mentor de Newton em Cambridge, Isaac

> Barrow (1630-1677), descobriu que esses dois problemas estão, na verdade, estreitamente relacionados. Ele percebeu que a derivação e a integração são processos inversos. O Teorema Fundamental do Cálculo dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral. Foram Newton e Leibniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. *Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas.*

Nessa pesquisa, não temos o objetivo de dialogar com os acadêmicos indígenas da LINTER a definição de derivada de uma função e nem a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, que provavelmente podem ocorrer no desenvolvimento da disciplina de Matemática e Interculturalidade III presente no oitavo semestre do curso, conforme o Quadro 7, do Capítulo 1. Aqui, nos interessa saber que a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo lida com a definição de função área que é definida por uma função do tipo:

A função é contínua de até , enquanto assume valores (varia) entre e . Então, a função depende somente da variável que, nesse cenário, representa o valor do limite superior da integral na função. Caso seja um valor fixado, então a integral passa a ser um número definido e a integral é uma integral definida. Todavia, se é variável o número vai variar e define uma função de denotada por “Se for uma função positiva, então a função pode ser interpretada como a área sob o gráfico de de até , onde pode variar de até ” (STEWART, 2014, p. 350). Essa afirmação é representada na Figura 14.

Figura 14 – O gráfico de .



Fonte: (STEWART, 2014, p. 350).

A ideia de função área da Figura 14, para nós, é a possibilidade de encontro entre o passado e o presente do cálculo de áreas das regiões situadas sob as curvas dos gráficos de funções e o eixo cartesiano horizontal, sendo ambas limitadas por um intervalo , ou seja, pelas retas verticais e (Figura 14) e, a variável da função área se desloca entre o referido intervalo .

Ou seja, o elo entre o método da Exaustão utilizado na Grécia Antiga por Eudoxo e aprimorado por Arquimedes no cálculo, por exemplo, da área do círculo com a definição de integral definida e função área. Por exemplo, se consideramos a função constante a sua função área em (raio de uma circunferência), por meio da integral definida, será a função que pode ser comparada a fórmula matemática que utilizamos para o cálculo do comprimento de uma circunferência em função de seu raio

Por sua vez, se considerarmos a função polinomial do 1º grau a sua função área, por intermédio da integral definida em , será a função polinomial do 2º grau , que podemos utilizar para calcularmos a área de um círculo qualquer em função de seu raio . Assim como, se considerarmos a função quadrática , a sua função área, por meio da integral definida em , será a função polinomial do 3º grau , que podemos utilizar para calcularmos o volume de uma esfera qualquer em função de seu raio . Apresentamos todos esses exemplos no Capítulo 6 e propomos dialogar com eles perante os processos educacionais do terceiro, quarto e quinto encontros presenciais descritos no Capítulo 7.

CAPÍTULO 3

O PROGRAMA ETNOMATEMÁTICA E SUA ABORDAGEM NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES INDÍGENAS DE MATEMÁTICA

Nesse capítulo trazemos uma breve apresentação do que é Etnomatemática com foco em seu programa de pesquisa e sua relação com a formação inicial de professores indígenas. Compreendemos que uma pesquisa envolvendo o público indígena perpassa por discussões no âmbito da Etnomatemática, enquanto proposta pedagógica de ensino e aprendizagem e considerando-a como um programa de pesquisa. As matemáticas são criações humanas, que fluem em favor do desenvolvimento de cada sociedade constituindo parte fundamental da cultura de cada comunidade socialmente identificada ou com relação à sociedade humana como um todo (D'AMBROSIO, 2020). A proposta pedagógica da Etnomatemática possibilita a interlocução com variadas metodologias de ensino da Matemática, assim como promove a interação social entre estudantes e professores. A Etnomatemática se encarrega de reunir, em seu programa de pesquisa (Programa Etnomatemática), as investigações de cada uma dessas matemáticas, com a inclusão delas no ambiente escolar em consonância com a Matemática presente no Currículo.

3.1. Etnomatemática: discussões iniciais e relações com a Educação Escolar Indígena

D'Ambrosio (2020b) nos relata que ao terminar seu doutorado em Matemática Pura na USP, no município de São Carlos – SP em 1963, foi convidado para um período de pesquisas nos Estados Unidos da América, na *Brown University* em *Rhode Island* (semelhante ao que hoje denominamos de Pós-Doutorado). Nessa universidade ele se envolveu com o departamento de História da Matemática. Logo depois, ele foi convidado pela Organização das Nações Unidas para Educação, Ciência e Cultura (UNESCO) para ministrar aulas de conteúdos da Matemática Pura aos acadêmicos de doutorado do

Programa de Pós-Graduação do *Centre Pédagogique Supérieur*, no município de *Bamako* na República do Mali no Continente Africano.

Segundo D'Ambrosio (2020b), nesse novo ambiente cultural, ele começou a perceber maneiras interessantes de se trabalhar ideias matemáticas, com características próprias daquele local e dos povos que ali habitam. Segundo o autor, essas maneiras de pensar matematicamente não coincidiam com a Matemática que estudamos, por exemplo, nos cursos de História da Matemática. Chamou sua atenção a riqueza de construtos culturais que não são denominados de Matemática, mas que possuem em sua concepção uma organização e um rigor, que são pressupostos do pensamento matemático e que se desenvolvem nos cotidianos daqueles povos. Essas comunidades utilizam suas matemáticas para construírem a sociedade, a economia, a arquitetura e a arte deles. Essa percepção relatada por D'Ambrosio (2020b) vai de encontro à ideia de que o conhecimento matemático é uma construção exclusiva da sociedade ocidental europeia.

D'Ambrosio (2020b), ressalta que a educação nessas comunidades se desenvolve por meio do convívio com os mestres artesãos. Mas, artesão não só no sentido de que ele constrói algo material, uma peça, um artesanato ou um artefato, mas principalmente no sentido de que esses mestres são artesãos intelectuais, é o que acontece, por exemplo, nas comunidades indígenas quando um pajé ou um dos antigos está falando, contando as histórias da comunidade e os mais jovens ficam atentos para aprenderem.

D'Ambrosio (2020b), nos fala que presenciou alguns desses momentos em uma das comunidades africanas do Mali, e nos diz que isso mostrou a ele uma situação de *natureza acadêmica*, ou seja, é equivalente a uma formação acadêmica das novas gerações que se transformam em especialistas daquilo que o ancião, o artesão ou o pajé está contando.

Segundo Knijnik *et al.* (2012), foi precisamente em 1975 que Ubiratan D'Ambrósio fala pela primeira vez a expressão Etnomatemática em uma discussão sobre ideia de noção de tempo que Isaac Newton utilizou no desenvolvimento do Cálculo Diferencial. Em 1977, D'Ambrósio em sua palestra ministrada no *Annual Meeting of the American Association for the Advancemrnt of Science*, em Denver, nos Estados Unidos, novamente utilizou o termo

Etnomatemática. Porém, de acordo com os autores, a consolidação do nome Etnomatemática veio em outra palestra de D'Ambrósio durante o quinto Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado na cidade de Adelaide na Austrália em 1984.

Antes de iniciarmos nossa trajetória pela Etnomatemática, atentemos ao que D'Ambrosio (2010, p.7-8, grifo do autor) nos diz sobre como ele vê a disciplina Matemática e a Educação

> Vejo a disciplina *matemática* como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural. Isso se dá da mesma maneira com as técnicas, as artes, as religiões e as ciências em geral. Trata-se da construção de corpos de conhecimento em total simbiose dentro de um mesmo contexto temporal e espacial, que obviamente tem variado de acordo com a geografia e a história dos indivíduos e dos vários grupos culturais a que eles pertencem – famílias, tribos, sociedades, civilizações. A finalidade maior desses corpos de conhecimento tem sido à vontade, que é efetivamente uma necessidade, desses grupos culturais de sobreviver no seu ambiente e de transcender, espacial e temporariamente, esse ambiente. Vejo a *educação* como uma estratégia de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo gerada por esses mesmos grupos culturais, com a finalidade de se manterem como tais e de avançarem na satisfação de necessidades de sobrevivência e de transcendência. Consequentemente, matemática e educação são estratégias contextualizadas e totalmente interdependentes.

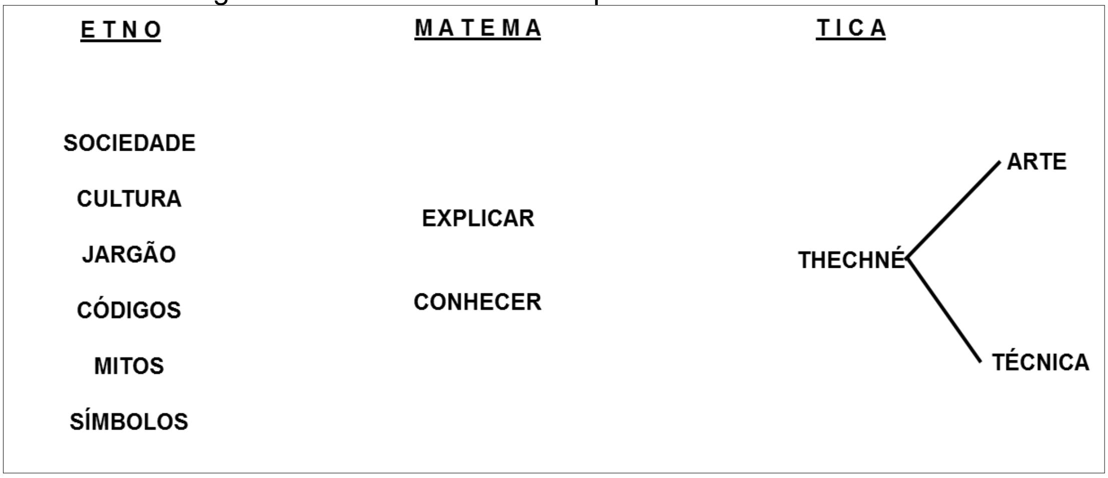
D'Ambrosio (2020b), nos informa que orientando algumas pesquisas acadêmicas ele percebeu aquele mesmo modelo de desenvolvimento de pensamento matemático nos povos andinos e nos povos amazônicos. Ele percebeu pensamentos matemáticos e ações educacionais semelhantes ao que presenciou em sua experiência no continente africano. Ainda, segundo D'Ambrosio (2020b), o pouco que ele conhece das culturas orientais, entre elas, a China, Índia e Japão, elas possuem características matemáticas que se distinguem da Matemática desenvolvida no Ocidente. Para o autor, a Indonésia ao lado dos povos de Java apresenta, por exemplo, pinturas rupestres recentemente descobertas e, que muito anteriores às pinturas vistas no continente europeu, denotam um pensamento abstrato muito sofisticado. As pessoas que fizeram essas pinturas não as fizeram de qualquer jeito, ou só por pintar. De acordo com D'Ambrosio (2020b)

> *Não é simplesmente um sujeito que vai lá e rabisca alguma coisa. Elas têm toda uma estrutura intelectual mostrando que o grande objetivo dessas pinturas era o objetivo de registrar e transmitir conhecimento. Portanto o pensamento abstrato não é privilégio europeu, o pensamento abstrato se desenvolveu praticamente em todos os lugares do mundo. Agora, nesse desenvolvimento foram-se tomando direções diversas. Essas direções diversas deram origem àquilo que passou a ser chamada Ciência. Isso lá pelo século XIII e XIV começa a se definir uma estrutura, porque que se defini essa estrutura? Circunstancias! As coisas vão acontecendo e essa estrutura se mostrou eficiente em certas coisas e passou a ser o instrumento básico na conquista de outros povos, na colonização. E aí ela se espalhou por todos porque se mostra mais eficiente para essas coisas. É difícil você chegar com Etnomatemática da Amazônia a fazer um avião voar, tem características próprias. Por outro lado, você é capaz de com esta Etnomatemática equilibrar melhor o ambiente, coisa que se perdeu do outro lado. Então, justamente esse jogo, esse equilíbrio entre você fazer alguma coisa que dá certo numa direção a custa de prejudicar outra, isto aí acabou dando ao pensamento ocidental instrumentos capazes de se impor aos demais.*

Para D'Ambrosio (1987), a Etnomatemática invoca uma conceituação bastante ampla, tanto do que representa o seu termo *etno*, que vai muito além do que simplesmente associá-lo a etnias, quanto o significado do que vem a ser a Matemática nessa conjunção de palavras. “O *etno* se refere a grupos culturais identificáveis, como por exemplo, sociedades nacionais tribais, grupos sindicais e profissionais, crianças de certa faixa etária, etc. e inclui memória cultural, códigos, símbolos, mitos e até maneiras específicas de raciocinar e inferir” (p. 14, grifo do autor).

Assim como D'Ambrosio (2016), entendemos que as matemáticas são os modos distintos, mas interligados que os grupos sociais ou as comunidades possuem para conhecer e explicar a arte ou as técnicas de contar, medir, inferir, classificar, ordenar, escrever, descrever, modelar, construir, entre outras, na busca constante de respostas para sua sobrevivência e transcendência. Dentre essas matemáticas ressaltamos a Matemática e as matemáticas indígenas. Na Figura 15, apresentamos a explicação descrita pelo autor.

Figura 15 – A Etnomatemática por D'Ambrosio em 1987.



Fonte: Elaborada pelos autores a partir de (D'AMBROSIO, 1987).

Nessa perspectiva, a Etnomatemática é caracterizada como a arte ou a técnica de conhecer e explicar a cultura de uma sociedade por intermédio de seus jargões, códigos, mitos e símbolos. Para D'Ambrosio (2018), cada cultura se desenvolve diferentemente no âmbito de cada comunidade, pois as sociedades possuem sistemas de conhecimentos diferentes nas ações de comparar, avaliar, contar, quantificar, medir, representar, demonstrar, provar. Acontece que cada grupo cultural sofre influência de seu meio ambiente e do modo como cada comunidade interage e reage a essa influência. O ambiente natural influencia no ambiente cultural e vice versa. Cada um desses sistemas de conhecimento é uma Etnomatemática. O autor enfatiza que a Matemática é um desses sistemas e que ela, assim como outras matemáticas, é motivada pelas necessidades de sobrevivência e de transcendência da sociedade humana geral, e em particular por outras matemáticas em cada grupo socialmente identificado.

De acordo com Knijnik *et al*. (2012), a Etnomatemática é um campo de pesquisa no âmbito da Educação Matemática em permanente expansão. A Matemática se impôs perante as demais matemáticas, seja como o conhecimento matemático predominante na sociedade humana ou como a linguagem técnica da Ciência. A pesquisa em Etnomatemática se movimenta nos encontros da Matemática com as outras matemáticas. Segundo os autores, a Etnomatemática

> [...] problematiza centralmente esta *grande narrativa* que é a Matemática Acadêmica – considerada pela modernidade como

> a linguagem por excelência para dizer o universo mais longínquo e também o mais próximo – introduzindo uma temática até então ausente no debate da Educação Matemática (KNIJNIK *et al*., p. 24, grifo dos autores).

Corroborando com o debate, de acordo com D'Ambrosio (2016), na perspectiva de abordagem da Etnomatemática na Educação Matemática, não há hierarquia no âmbito do conhecimento matemático, ou seja, entre as variadas matemáticas que compõem a Etnomatemática não existe aquela mais ou aquela menos importante que a outra. Há situações em que um conhecimento matemático é útil para um determinado grupo socialmente identificado e já em outro contexto cultural pode não ser apropriado. Entendemos que a abordagem da Etnomatemática tem a sensibilidade de trabalhar com as diferenças procurando diminuir as tensões e amenizar os conflitos[25] provocados pelo embate cultural de, por exemplo, em uma sala de aula composta por acadêmicos de mais de uma etnia indígena como acontece nos ambientes de aula de Matemática da LINTER.

Segundo D'Ambrosio (2018, p. 30, grifo do autor)

> É claro, que para mim, examinando várias culturas diferentes, que a palavra etno-matema-tica, que foi o resultado de um jogo etimológico, realiza nela a síntese do programa de pesquisa que eu chamo de Etnomatemática. Resumindo, "Etnomatemática é a arte ou técnica de explicar e conhecer em diferentes ambientes culturais." Certamente, etno + matemáticas tem sido usada por muitos estudiosos, principalmente por antropólogos e educadores. Mas não concordo com esse uso. Matemática, como disciplina, emerge do ambiente cultural da bacia do Mediterrâneo e do antigo Iraque (bacia Mesopotâmica). Fora desse ambiente, foi organizada em toda a antiguidade greco-romana e na Idade Média, dando origem a uma disciplina, que ficou conhecida como Matemática. Essa foi espalhada pela Europa após o Renascimento e em todo mundo na era dos impérios coloniais europeus. Em diferentes etnias não foi desenvolvido tal sistema de conhecimento. Mas, em todos os sistemas culturais, em todas as partes do mundo, grupos de indivíduos com mitos e valores comumente aceitos e comportamentos compatíveis [*ethnos*] desenvolveram *Technés* apropriadas [maneiras, artes, técnicas] de *mathema* [explicação, compreensão, aprendizagem]. Foi dessa maneira que o nome Etnomatemática surgiu no meu pensamento.

---

[25] O encontro intercultural gera conflitos que só poderão ser resolvidos a partir de uma ética que resulta do indivíduo reconhecer-se e conhecer a sua cultura e respeitar a cultura do outro. O respeito virá do conhecimento (D'AMBROSIO, 2020a, p. 47).

Para nós, cada povo indígena possui em sua cultura o que denominamos de matemáticas indígenas. E essas são formadas por seus modos de comparar, avaliar, contar, quantificar, medir, representar, inferir e classificar. Esses modos peculiares de matematizar o seu cotidiano são válidos para cada comunidade e não são menos ou mais importantes do que os modos particulares de se fazer matemática presentes no Currículo Escolar. Assim, a Educação Escolar Indígena, em cada uma de suas escolas nas aldeias, possibilita espaços *tensos e instáveis*[26] de discussões e encontros culturais com suas diferenças na arte de matematizar de modo que uma não se sobreponha sobre outras. Na qual, durante e após os diálogos promovidos pelos debates culturais, as matemáticas indígenas dos envolvidos e a Matemática precisam coexistir em comunhão no currículo das escolas indígenas.

Concordamos com Ferreira Neto (2018, p. 47-48) ao nos informar que o

> [...] uso de conceitos matemáticos tradicionais, dentro e fora da sala de aula, tem sido uma estratégia de ensino bastante eficaz para a compreensão dos conteúdos. A Etnomatemática vem consolidar essas estratégias metodológicas usadas por professores, sejam em comunidades indígenas, quilombolas, sejam em comunidades rurais, para facilitar e tornar mais significativo o conhecimento para o educando.

Ferreira Neto (2018) salienta que o ensino de Matemática nas escolas indígenas, desvinculado dos modos de matemáticas dos estudantes indígenas (Matemática Indígena), possivelmente provoca um abismo entre a Matemática presente no currículo da escola e as matemáticas desenvolvidas nos cotidianos dos povos indígenas. Não há um modelo preestabelecido para a Educação Escolar Indígena, seu ambiente educacional é dinâmico e se movimenta em função da cultura de cada um dos povos que recebem suas escolas nas aldeias. As escolas indígenas estão inseridas na comunidade e por sua vez, as comunidades precisam estar inseridas (representadas culturalmente) nas escolas. Nessa perspectiva, os conhecimentos tradicionais

---

[26] "Para a Etnomatemática, a cultura passa a ser compreendida não como algo pronto, fixo e homogêneo, mas como uma produção tensa e instável. As práticas matemáticas são entendidas não como um conjunto de conhecimentos que seria transmitido como uma "bagagem", mas que estão constantemente reatualizando-se e adquirindo novos significados, ou seja, são produtos e produtores de cultura" (KINIJNIK *et al.*, 2012, p. 26, grifo dos autores).

da comunidade necessitam dialogar com os conhecimentos curriculares com vistas a serem inseridos no currículo da Educação Escolar Indígena e dialogados em cada escola indígena. Então elencamos duas questões. Quem devem ser os instigadores desses diálogos com os estudantes indígenas? Quem são aqueles que devem fomentar os debates curriculares da Educação Escolar Indígena?

O ensino de Matemática no contexto cultural indígena seja no âmbito da Educação Superior Indígena, com a formação de professores, ou na Educação Escolar Indígena, se faz por meio da relação dialógica e com os aportes teóricos proporcionados pelos estudos em Etnomatemática, segundo Scandiuzzi (2009, p. 19, grifo do autor) é necessário

> [...] desenvolver, neste diálogo simétrico, formas de diálogo franco, aberto, que exigirá do educador e do educando um crescer no conhecimento da arte ou técnica de explicar, de compreender, de entender, de interpretar, de relacionar, de manejar e lidar com o entorno sociocultural. Será muito importante que haja uma inter/intra relação entre as etnomatemáticas, pois cada etnomatemática conhecida e aprendida exigirá uma maior abertura aos novos conhecimentos e o possível diálogo entre os grupos sociais que a produzem, quando aprendidos, se tornará mais próximo e compreensível. À medida que conhecemos a etnomatemática de um grupo social, este grupo social passa a fazer parte de nós e seus hábitos e costumes serão respeitados, não serão folclore e nem tidos como “menores”, necessitando de reeducação.

Quando falamos de Matemática Indígena estamos nos referindo aos aspectos cognitivos que cada povo indígena constrói, a partir da visão de mundo de cada comunidade. E cada povo indígena tem sua interpretação, suas histórias, seus mitos, seus rituais, crenças, suas relações interpessoais, suas maneiras de interagir com outras comunidades e com a natureza ou em seu habitat. A Etnomatemática busca compreender nessa complexidade os aspectos (observar, classificar, contar, medir, inferir, entre outros) da Matemática Indígena de cada povo em seu foco de estudo. A Educação Escolar Indígena possibilita entrelaçar esses aspectos com os conteúdos curriculares da Matemática. O professor indígena de Matemática, instigado por seus estudos em Etnomatemática, é quem pesquisa e promove elos culturais nesses entrelaçamentos. A formação de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática possibilita que cada licenciado seja voz e atue construindo pontes entre o conhecimento matemático curricular e os saberes matemáticos de seu povo.

Corroborando com essa fala, Oliveira (2018), destaca que a Etnomatemática é uma lente epistemológica que instiga o professor indígena a utilizar o espaço disponibilizado pela Educação Escolar Indígena, para resgatar os saberes matemáticos tradicionais de sua comunidade e, promover o(s) contexto(s) desses saberes com os conteúdos matemáticos do currículo escolar. Assim, o professor indígena de Matemática atua no processo de autonomia de seu povo ao promover o diálogo entre os saberes e fazeres da comunidade com saberes e fazeres de fora, bem como e, principalmente, com vistas à elevação da autoestima do seu povo reforçando suas origens e validando seus conhecimentos tradicionais. “[...] reconhecemos que a Etnomatemática pode dar base teórica para que os professores possam pensar, refletir, planejar e desenvolver práticas pedagógicas que marquem o lugar dos saberes tradicionais na educação escolar” (p. 179).

3.2. A Etnomatemática na formação inicial de professores indígenas de Matemática: uma breve análise em teses e dissertações no Brasil

Como já salientamos, a formação de professores indígenas de Matemática é essencial para o desenvolvimento da Educação Escolar Indígena. O ensino de Matemática nas escolas indígenas é um desafio epistemológico para educadores matemáticos e tem sido fonte de investigações no âmbito da Educação Matemática. Com relação ao ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos para os povos indígenas, de acordo com D’Ambrosio (2012, p. 127)

> Falar dessa matemática para os indígenas, portanto, carrega uma mensagem que vem de fora. Para aqueles mais sensibilizados com a história de seu povo, falar de matemática é falar do conquistador. É falar de algo que foi construído pelo dominador. [...] Na verdade estamos procurando misturar água e óleo: matemática e índio. Claro que essa mistura se logra. Nos esquemas da educação oficial conseguimos com muito esforço e muita química – isto em termos pedagógicos quer dizer muita metodologia – fazer a mistura. Mas nem o óleo nem

> a água manterão suas propriedades e sua pureza. No caso, a matemática assim misturada será inútil, enquanto o indígena será tolhido em sua criatividade.

Oliveira (2019) apresenta uma pesquisa com 65 (sessenta e cinco) trabalhos de teses e dissertações com a temática indígena no período de 1995 a 2018. A autora reforça o papel da Etnomatemática em construir elos entre os conhecimentos matemáticos do currículo escolar e os saberes matemáticos dos povos indígenas envolvidos. Essa ponte é base para a educação intercultural[27] no âmbito da Educação Escolar Indígena. A autora ressalta que a perspectiva pedagógica da Etnomatemática se preocupa em manter o diálogo dos saberes matemáticos indígenas que circulam pela comunidade e geralmente estão presentes nas escolas indígenas. Para nós, esse diálogo é fundamental na formação de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática tanto para atuarem nessas escolas indígenas, quanto para articularem a construção de currículos de Matemática para a Educação Escolar Indígena e, para a Educação Superior Indígena, com vistas a contemplarem esses encontros culturais.

Nesse sentido, segundo Oliveira (2019, p. 56)

> A preocupação em compreender as diversas formas de saber dos povos indígenas, e em como inserir esses saberes no currículo das escolas, é uma das questões que podemos destacar nas reflexões presentes nas pesquisas analisadas. Muitas delas se movimentam a partir de inquietações sobre como levar os saberes produzidos no cotidiano da comunidade para a sala de aula e a partir dele entender os conceitos e práticas matemáticas ali envolvidos. A etnomatemática, como teoria educacional, perpassa boa parte destes trabalhos.

Mas, o que dizem as investigações que envolvem a Etnomatemática na formação inicial de professores indígenas? Então, buscamos informações sobre as pesquisas em Etnomatemática (teses e dissertações) nos programas de Pós-Graduação *stricto sensu* das instituições

---

[27] “A educação intercultural se situa em confronto com todas as visões diferencialistas que favorecem processos radicais de afirmação de identidades culturais específicas. Rompe com uma visão essencialista das culturas e das identidades culturais. Parte da afirmação de que nas sociedades em que vivemos os processos de hibridização cultural são intensos e mobilizadores da construção de identidades abertas, em construção permanente. É consciente dos mecanismos de poder que permeiam as relações culturais. Não desvincula as questões das diferenças e da desigualdade presentes na nossa realidade e no plano internacional” (CANDAU, 2012, p. 46).

(universidades e institutos) de Ensino Superior nas esferas pública e privada no Brasil. Para tanto, cruzamos dados do Catálogo[28] de Teses e Dissertações da CAPES, com os dados da BDTD[29] do IBCTI. Inicialmente, identificamos 783 (setecentos e oitenta e três) trabalhos, sendo 523 (quinhentos e vinte e três) alocados no catálogo da CAPES e 260 (duzentos e sessenta) na BDTD.

Ao verificarmos que algumas pesquisas aparecem nas duas plataformas digitais, consideramos somente uma delas e chegamos ao montante de 696 (seiscentas e noventa e seis) pesquisas sendo: 272 (duzentas e setenta e duas) dissertações de programas de mestrado profissional; 279 (duzentas e setenta e nove) dissertações de programas de mestrado acadêmico e; 145 (cento e quarenta e cinco) teses de programas de doutorado.

Após investigarmos seus textos, extraímos todas as pesquisas que somente citam o termo Etnomatemática, ou seja, sem conexão teórica com a pesquisa em si (cita o termo etnomatemática, mas não a utiliza como base teórica), bem como as investigações que somente citaram livros ou periódicos sobre a Etnomatemática em suas referências bibliográficas. Depois desse refinamento restaram 553 (quinhentos e cinquenta e três) trabalhos, conforme os dados do Quadro 8. A busca pelas pesquisas e as investigações em seus textos foram realizadas de 22 de janeiro a 30 de julho de 2020.

Quadro 8 – O total de pesquisas nos programas de mestrado e doutorado no Brasil com relação à Etnomatemática.

<table>
<tr><td rowspan="4">Mestrado Profissional</td><td>Pesquisa de temática não indígena</td><td>162 dissertações</td></tr>
<tr><td>Pesquisa sem professor indígena</td><td>-----------------</td></tr>
<tr><td>Pesquisa com professor indígena</td><td>2 dissertações</td></tr>
<tr><td>Pesquisa com licenciando indígena</td><td>1 dissertação</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total de dissertações de Mestrado Profissional</td><td>165</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Mestrado Acadêmico</td><td>Pesquisa de temática não indígena</td><td>193 dissertações</td></tr>
<tr><td>Pesquisa sem professor indígena</td><td>17 dissertações</td></tr>
<tr><td>Pesquisa com professor indígena</td><td>30 dissertações</td></tr>
<tr><td>Pesquisa com licenciando indígena</td><td>16 dissertações</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total de dissertações de Mestrado Acadêmico</td><td>256</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Doutorado</td><td>Pesquisa de temática não indígena</td><td>86 teses</td></tr>
<tr><td>Pesquisa sem professor indígena</td><td>20 teses</td></tr>
<tr><td>Pesquisa com professor indígena</td><td>12 teses</td></tr>
<tr><td>Pesquisa com licenciando indígena</td><td>14 teses</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total de teses</td><td>132</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total de pesquisas encontradas</td><td>553</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de dados da pesquisa.

[28] http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/.
[29] http://bdtd.ibict.br/vufind/.

De acordo com as leituras realizadas nos resumos dessas investigações, a pesquisa de temática não indígena significa que seu público alvo: ou são outras populações socialmente identificadas (quilombolas, ribeirinhos, colônia de pescadores, ciganos, comunidades do campo, trabalhadores da construção civil, oleiros, entre outros); ou são estudantes da educação básica; ou ainda acadêmicos do Ensino Superior. A pesquisa sem professor indígena envolve a participação de alguma comunidade indígena, na qual, o pesquisador investiga os modos peculiares de matematizar observando o convívio dos indígenas em seus afazeres diários (caça, pesca, construções de ocas e artefatos, noções de espacialidade, sistema de numeração, modos de quantificação e classificação de objetos ou alimentos, contagem do tempo, entre outros), ou realizando entrevistas com os seus moradores, principalmente os anciãos.

A pesquisa com professor indígena envolve a Educação Escolar Indígena de alguma comunidade, na qual, o público alvo são os seus estudantes e professores indígenas de Matemática. O pesquisador investiga o entrelaçamento entre os modos de matematizar dos indígenas na comunidade em que a escola indígena está inserida com conteúdos de Matemática presentes no currículo escolar.

Já na pesquisa com licenciando indígena, o público alvo são os acadêmicos indígenas de algum curso de formação de professores indígenas (Magistério Intercultural, Educação Intercultural, Pedagogia Intercultural ou Licenciatura Intercultural) tendo como cenário de investigação a formação inicial desses professores indígenas. Nas análises de seus textos, notamos que as pesquisas podem envolver um ou mais dos seguintes temas: conteúdos curriculares de Matemática; metodologias de ensino da Matemática; recursos didáticos para o ensino de Matemática; teorias de aprendizagem com foco no ensino da Matemática; contribuições da Etnomatemática e da Didática da Matemática na formação de professores indígenas; discussões envolvendo as práticas pedagógicas de professores indígenas nas escolas indígenas das aldeias.

Das 553 (quinhentas e cinquenta e três) pesquisas alocadas no Quadro 8, é fato que a maioria delas, 441 (quatrocentos e quarenta e uma) que representam aproximadamente 80% das investigações encontradas, envolve pesquisas sem a temática indígena, ou seja, seu público alvo não abrange as comunidades indígenas. Das pesquisas envolvendo alguma etnia indígena há: 37 (trinta e sete) pesquisas sem a participação de algum professor indígena; outras 44 (quarenta e quatro) investigações trataram da Educação Escolar Indígena com a participação dos professores indígenas e; há 31 (trinta e uma) investigações cujo público alvo são professores indígenas em formação inicial. Essas últimas investigaram o contexto de público alvo dessa pesquisa (acadêmicos indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática).

O Quatro 9 descreve as instituições de Ensino Superior e os seus programas de Pós-Graduação de onde emergem as dissertações (D) e as teses (T) que produzem a soma (S) dos trabalhos analisados por nós. Além de instituições já nomeadas temos a: Universidade Federal do Pará (UFPA); Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUCMG); Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS); Universidade Católica Dom Bosco (UCDB); Universidade Regional Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ); Universidade Bandeirante/Anhanguera (UNIBAN/UNIAN); Universidade de São Paulo (USP); Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e; Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Rio Claro.

Quadro 9 – Quantitativo de teses e dissertações no Brasil sobre Etnomatemática na formação inicial de professores indígenas por instituição e seu programa.

Instituição – Programa de Pós-Graduação	D	T	S
UFAC – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).	1	---	1
UFES – Educação.	---	1	1
UFG – Educação em Ciências e Matemática.	2	---	2
UFMS – Educação Matemática.	2	--	2
UFMG – Educação.	2	--	2
UFPA – Educação em Ciências e Matemáticas.	2	1	3
UFSC – Educação Científica e Tecnológica.	---	1	1
UNIR – Ensino de Ciências da Natureza.	1	---	1
PUCMG – Ensino de Ciências e Matemática.	1	---	1
UCDB – Educação.	---	1	1
PUCRS – Educação em Ciências e Matemática.	1	---	1
UNIJUI – Educação em Ciências.	1	---	1
UNIBAN/UNIAN – Educação Matemática.	1	2	3
USP – Educação.	1	4	5
UNESP de Rio Claro – Educação Matemática.	1	---	1
UNICAMP – Educação.	---	2	2
UNICAMP – Linguística.	---	1	1
UNICAMP – Ensino de Ciências e Matemática.	---	1	1
UEA – Educação em Ciências na Amazônia.	1	---	1

Total Geral	17	14	31

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de dados da pesquisa.

Então, conforme o Quadro 9, temos 19 (dezenove) programas de Pós-Graduação em 17 (dezessete) instituições diferentes. Com relação à área de formação desses programas são: 11 (onze) trabalhos em Educação; seis pesquisas em Educação em Ciências e Matemática; seis investigações em Educação Matemática; dois trabalhos em Educação em Ciências sendo um deles na Amazônia; duas pesquisas em Ensino de Ciências e Matemática e; quatro pesquisas em cada um de outros quatro programas diferentes (Educação Científica e tecnológica, Ensino de Ciências da Natureza, Mestrado Profissional em Matemática e um deles em Linguística). No Quadro 10, em ordem cronológica de data da defesa, apresentamos os dezoito autores e os títulos de suas dissertações.

Quadro 10 – Pesquisas de Mestrado no Brasil com a Etnomatemática e acadêmicos indígenas.

Autor	Título da Pesquisa – Instituição (Ano de defesa)
Katia Cristina de Menezes Domingues	Interpretações do papel, valor e significado da formação do professor indígena do Estado de São Paulo – USP (2006).
Giovana Maciel de Amorim	A Didática da Matemática na formação do professor Indígena: possibilidades de relação com a Etnomatemática – UNIJUI (2009).
Maria Aparecida Mendes de Oliveira	Práticas vivenciadas na constituição de um curso de Licenciatura Indígena em Matemática para as comunidades indígenas Guarani e Kaiowá de Mato Grosso do Sul – UFMS (2009).
Hélio Simplício Rodrigues Monteiro	Magistério Indígena: contribuições da etnomatemática para a formação dos professores indígenas do Estado do Tocantins – UFPA (2011).
Lucélida de Fátima Maia da Costa	A Etnomatemática na educação do campo, em contextos indígena e ribeirinho, seus processos cognitivos e implicações à formação de professores – UEA (2012).
Gleide de Almeida Ribeiro	Etnomatemática: situações, problemas e práticas pedagógicas na realidade do sistema educacional Macuxi em Roraima – UNIBAN (2012).
Ruana Priscila da Silva Brito	Apropriação de práticas de numeramento em um contexto de formação de educadores indígenas – UFMG (2012).
Jonatha Daniel dos Santos	Saberes Etnomatemáticos na formação de professores indígenas do curso de Licenciatura Intercultural na Amazônia – PUCRS (2015).
Mara Rykelma da Costa Silva	Educação Matemática no contexto escolar indígena: experiências de um processo formativo – UFAC (2015).
Abner Márcio Oliveira Teixeira Cicarini	Geometria plana e o grafismo indígena: o estudo de suas relações no contexto histórico do grupo Tukano de alunos da Licenciatura Intercultural dos Povos Indígenas do Alto Rio Negro – PUCMG (2015).

Aline da Silva Lima	Licenciatura Intercultural Indígena da UEPA: saberes matemáticos e prática pedagógica – UFPA (2017).
Matheus Moreira da Silva	Etnomatemática e relações comerciais na formação de professores indígenas – UFG (2018).
Vlademir Sérgio Bondarczuk	Percursos e histórias sobre a formação de professores na Licenciatura Intercultural Indígena “Povos do Pantanal” na UFMS – UFMS (2018).
Vanessa Nascimento Silva	Projetos Extraescolares do curso de Educação Intercultural e a educação escolar indígena: um olhar etnomatemático sobre os saberes e fazeres Javaé – UFG (2018).
Jorge Isidro Orjuela Bernal	Indígenas, Cosmovisão e Ensino Superior: [algumas] tensões – UNESP de Rio Claro (2018).
Mariane Dias Araujo	"Demarcando Território": Tensionamentos nas Pesquisas de Autoria Indígena no Contexto da Formação Intercultural para Educadores Indígenas (FIEI) – UFMG (2019).
Juscinete Rosa Soares Wieczorkowski	Estado da arte de produções acadêmicas de discentes indígenas na educação superior em Rondônia – UNIR (2019).

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de dados da pesquisa.

Assim, conforme o Quadro 10, as pesquisas em nível de mestrado, de modo geral, tratam da formação inicial do professor indígena de Matemática com vistas a educação intercultural, trazendo como cenário de investigação as práxis educacionais dos acadêmicos em formação, bem como de professores indígenas atuando nas escolas das aldeias. Notamos nesses trabalhos, que a Etnomatemática atua como interlocutora entre as matemáticas indígenas desenvolvidas nas comunidades com a Matemática presente no currículo da Educação Escolar Indígena.

Para Domingues (2006), o curso de formação de professores indígenas de Matemática proporciona aos professores formadores o desafio do encontro com a interculturalidade. O curso de formação por ela pesquisado foi construído e é desenvolvido com a preocupação de trabalhar com vistas à pluralidade cultural, buscando conhecer e trazer para o debate as diferentes formas de conhecer e de explicar das comunidades representadas por seus acadêmicos indígenas. O curso de sua pesquisa é de Magistério Indígena que abarca estudantes das etnias: Kaingang, Krenak, Terena, Guarani e Tupi Guarani. Esses, em conjunto com os professores formadores não indígenas e sua coordenação, são as vozes que ecoaram nas suas discussões. Sobre o transcorrer do referido curso, Domingues (2006, p. 158) destaca que

> Os professores não indígenas trabalharam com a bagagem cultural do professor indígena tentando partir do que ele conhecia para (re)construir o conhecimento escolar, a fim de

> promover uma aprendizagem significativa, autônoma e emancipatória. De fato, ao trabalhar a interculturalidade sob a ótica da etnomatemática, encontrei durante as analises das entrevistas indícios de que os professores não indígenas e indígenas mudaram suas posturas frente ao processo ensino-aprendizagem, passando a considerar a cultura um elemento fundamental na construção e reconstrução do conhecimento.

De fato, uma das contribuições do estudo da Etnomatemática nos cursos de formação inicial e continuada de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática, está na mudança de postura dos acadêmicos indígenas com relação ao ensino e aprendizagem da Matemática. Discussões intermediadas na perspectiva da Etnomatemática possibilitam aos acadêmicos indígenas a olharem para sua cultura, seus saberes e fazeres matemáticos. Além disso, estudos em Etnomatemática conduzem a reflexões sobre possibilidades de diálogos dos saberes e fazeres das comunidades indígenas com os conteúdos de Matemática presentes nos currículos da Educação Escolar Indígena.

Em sua pesquisa sobre o processo de construção do curso de Licenciatura Intercultural da UFMS para as comunidades indígenas Kaiowá e Guarani, Oliveira (2009), aponta algumas tensões decorrentes das práticas vivenciadas pela autora no transcorrer das investigações. O PPC do curso foi elaborado a partir das reflexões oriundas das discussões envolvendo professores formadores (não indígenas) que pertencem ao quadro de docentes da UFMS, professores indígenas formados em outras instituições e acadêmicos indígenas do referido curso.

Segundo Oliveira (2009, p. 99) a proposta curricular de uma Licenciatura Intercultural Indígena, no intuito de amenizar as tensões possivelmente presentes na formação inicial de professores indígenas, deve considerar três elementos como fundamentais

> - As expectativas dos estudantes/professores indígenas, no que diz respeito a uma formação que atenda as necessidades de suas aldeias, para que, enquanto professores de Matemática, estes possam fornecer instrumentos que contribuam para um projeto futuro de suas comunidades.
> - A concepção interdisciplinar apresentada por estes professores em relação aos saberes matemáticos que não

podem estar isolados da realidade. A incorporação dos saberes matemáticos construídos nas práticas culturais deste povo, bem como a incorporação dos saberes matemáticos difundidos na sociedade não índia.

- A dimensão da língua e da linguagem quando se trata do ensino de matemática para estas comunidades.

Com relação aos saberes matemáticos destacados por Oliveira (2009), os aportes teóricos, bem como os debates proporcionados pelos estudos em Etnomatemática, têm a função de diminuir as tensões advindas dos encontros culturais entre os saberes e fazeres matemáticos dos acadêmicos em formação com os conteúdos matemáticos presentes tanto no currículo de qualquer Licenciatura Intercultural Indígena quanto nos currículos da Educação Escolar Indígena. Compreendemos que a formação de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática não pode vincular a ideia de imposição das práticas matemáticas não indígenas sobre as práticas culturais e matemáticas das comunidades indígenas envolvidas. Afinal, para D'Ambrosio (2020, p. 83) "A imposição do educador tem como objetivo maior aprimorar práticas e reflexões, e instrumentos de crítica. Esse aprimoramento se dá não como uma imposição, mas como uma opção".

Corroborando com esses apontamentos, de acordo com Amorim (2009), a pesquisa com a Etnomatemática considera as diferentes formas de conhecer promovendo o elo entre a tradição, presente na Educação Escolar Indígena, e a modernidade que se apoia no conhecimento matemático e científico para o desenvolvimento da sociedade. A autora destaca que cada Matemática Indígena é útil para sua etnia indígena e, portanto no ensino de conteúdos de Matemática os modos de matematizar da comunidade devem ser respeitados e contextualizados.

Já Monteiro (2011), salienta que a abordagem pedagógica da Etnomatemática e seu estudo proporcionam, aos acadêmicos indígenas em formação inicial, compreenderem suas práticas culturais como práticas matemáticas. Além disso, a Etnomatemática contribui para que eles reflitam essas práticas culturais e matemáticas, destacando nessas reflexões, os valores sociais dessas práticas e o estabelecimento de relações com o mundo não indígena.

Ainda com relação às tensões que emergem de cada processo de ensino e aprendizagem da Matemática na formação inicial de professores indígenas dessa área, Brito (2012), investigou os conceitos de práticas de numeramento, tendo como participantes da pesquisa, acadêmicos indígenas da etnia Pataxó. De um lado, as práticas desenvolvidas pelos indígenas e vivenciadas em sua comunidade e, de outro, as práticas de numeramento previstas no currículo escolar. O autor relata que nessas tensões "destacou-se alguns estranhamentos entre as culturas não indígena e indígena, muitas das vezes acarretando o silenciamento dessas últimas" (p. 177). Compreendemos que a abordagem da Etnomatemática abranda as tensões, mas não as elimina, ao possibilitar a valorização cultural dos indígenas envolvidos no processo educacional.

Já para Costa (2012), há uma possível relação entre a Etnomatemática e a Educação Cognitiva[30], pois ambas buscam potencializar o desenvolvimento cognitivo de forma humanizada e cooperativa. As duas vertentes educacionais consideram que a compreensão do que é comunicado em um processo educacional, não deve ser desvinculado do seu contexto gerador de onde emergem e são validados os significados sobre o que e, como está sendo ensinado. Nesse sentido, segundo a autora, as práticas matemáticas e sociais das comunidades indígenas, envolvidas em um processo de ensino e aprendizagem da Matemática, são parte essencial do contexto gerador na Educação Escolar Indígena e na formação inicial de professores indígenas dessa área.

Segundo Ribeiro (2012), é fundamental a abordagem pedagógica da Etnomatemática na formação de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática para conduzi-los ao saber e fazer matemática de forma crítica e com valorização de todas as matemáticas

[30] "É a educação que encerra uma visão dialógica do desenvolvimento cognitivo humano, uma construtivista e outra co-construtivista. A *construtivista*, inspirada em Piaget, visa a construção centrípeta, significativa e estruturada do conhecimento, e não a pura acumulação acrítica de dados de informação. A *co-construtivista*, inspirada em Vygotsky, reforça a construção centrífuga do conhecimento com bases em interações sociais interiorizadas e mediatizadas envolvendo um diálogo intencional entre indivíduos experientes e inexperientes" (FONSECA, 2009, p.8, grifos do autor).

envolvidas. Para a autora, os estudos em Etnomatemática realçam as questões de caráter político, ideológico e socioeconômico, que precisam estar presentes na formação individual e social do cidadão indígena. Ela ressalta que as discussões com aportes teóricos da Etnomatemática, aproximam os mais jovens dos anciões indígenas e, possibilitam aos educadores indígenas, a construção de currículos de matemática dinâmicos que contextualizam as matemáticas indígenas com a Matemática.

De acordo com Santos (2015), em sua pesquisa sobre os saberes etnomatemáticos na formação inicial de professores indígenas de Matemática, os professores indígenas participantes relataram que os estudos em Etnomatemática, nos cursos de Licenciatura Intercultural Indígena, vão de encontro aos preceitos ou às normas de uma Educação Escolar Indígena voltada para disciplinar, controlar e constituir o indígena como um sujeito não indígena. A Etnomatemática permite ao acadêmico e ao professor indígena a percepção de outros mecanismos de ensino por meio de dois distintos saberes, tanto os do seu povo quanto os dos não indígenas.

Para Silva (2015), a formação de professores indígenas em nível de Magistério Indígena no Estado do Acre, proporciona ao indígena participante se enxergar como indivíduo atuante na valorização cultural de seu povo, ao trazer os conhecimentos tradicionais dialogando com os conhecimentos escolares em suas práxis. Para a autora, a Educação Matemática tem papel fundamental ao oportunizar aproximações com a Antropologia promovendo relações entre a matemática curricular da escola indígena com situações advindas do cotidiano da comunidade indígena onde a escola está inserida. Ela destaca que as discussões instigadas pela Educação Matemática, no processo de formação de professores indígenas, possibilitam encontros culturais, buscando atender os anseios educacionais dos profissionais em formação e de suas comunidades indígenas, envolvidas no processo educacional, por meio da atuação dos professores formados, no âmbito da Educação Escolar Indígena.

O trabalho de Cicarini (2015) buscou investigar elementos da Geometria Tukano, por intermédio de discussões e reflexões com acadêmicos indígenas de Matemática, da Licenciatura Intercultural dos Povos Indígenas do Alto Rio Negro, no município de São Gabriel da Cachoeira – AM. Segundo

Cicarini (2015), os acadêmicos participantes relataram as histórias de seu povo relacionadas às formas e significados dos grafismos indígenas que acompanha cada Tukano desde o seu nascimento. Utilizando aportes teóricos da Etnomatemática, o autor buscou identificar possíveis relações entre elementos da Geometria nos grafismos, do referido povo, com objetos matemáticos presentes no estudo da Geometria Plana. Então, o autor planejou um material didático, pautado na Etnomatemática e na Transposição Didática, para utilizar no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Geometria Plana para os acadêmicos indígenas de Matemática do IFAM.

> Ao tratar nesse estudo as relações entre a Geometria Plana e o grafismo indígena no contexto histórico do grupo Tukano, as narrativas revelaram a forma de utilização do grafismo na aldeia e na vida do grupo étnico, sua importância na tradição e, após os conhecimentos adquiridos pelos alunos, seu valor nas aulas de Geometria, que foram incorporados ao entendimento dos significados declarados pelos narradores, se caracterizando como elementos que não puderam ser medidos e sim compreendidos (p.147).

Nessa perspectiva, no planejamento da proposta esducacional descrita no Capítulo 7 procurarmos relacionar elementos da Geometria Plana com as formas de artefatos ou artesanatos dos acadêmicos indígenas da LINTER. Buscamos entrelaçar os significados desses artefatos no intuito de familiarizar e humanizar o processo de ensino e aprendizagem desses elementos da Geometria Plana que utilizamos para atingir nosso objetivo. Inicialmente somos nós que vemos essas relações com o nosso olhar do geômetra. Salientamos que quando a referida proposta educacional puder ser aplicada (após a pandemia do Coronavirus) nós precisamos instigar os acadêmicos indígenas participantes a observarem conosco, não só por meio de nossa lente epistemológica, mas principalmente com o olhar deles. E com a visão do indígena nos convidando a ver com eles ao sermos afetados por seus relatos históricos sobre cada artefato que trazemos para o diálogo e, outros que eles venham a apresentar no transcorrer de cada processo de ensino e aprendizagem proposto.

Segundo Lima (2017b), a Etnomatemática na formação de professores indígenas, deve ser pautada na prática docente envolvendo suas experiências e os saberes tradicionais. As comunidades indígenas, com vistas à formação de seus professores indígenas e a Educação Escolar Indígena, onde esses professores atuam, possuem uma gama de possibilidades de pesquisas em Educação Matemática. Para a autora, pesquisadores não índios auxiliam, mas são necessárias e esperadas as ações de pesquisadores indígenas da própria comunidade indígena. Nesse sentido, o estudo da Etnomatemática instiga os acadêmicos indígenas a serem professores pesquisadores em suas comunidades. “Não se pretende formar, deste modo, um professor que apenas repasse conhecimento, mas sim um profissional capacitado para recriar e transformar sua realidade, em conformidade com seus alunos e com a comunidade” (p. 68).

Nesse prisma, de acordo com Silva (2018b), é fundamental que os projetos desenvolvidos pelos acadêmicos indígenas sejam incorporados ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática nas escolas indígenas que esses acadêmicos já atuam ou virão a atuar. Segundo a autora, as escolas indígenas do povo Javaé, comunidade indígena de sua pesquisa, carecem de material didático pedagógico na área de Matemática. Então, a autora promove essa sugestão e destaca que a Etnomatemática tem papel fundamental nas discussões, produção e desenvolvimento de cada projeto com relação ao conhecimento matemático. Afinal, “esses trabalhos são decididos e desenvolvidos na comunidade, abordando os temas de interesse dela, sendo assim, a escola pode ser um meio de propagação dos interesses advindos do povo” (p. 99).

Bondarczuk (2018), em sua pesquisa sobre os percursos e histórias no processo de formação de professores indígenas na Licenciatura Intercultural Indígena da UFMS, identificou pelos relatos dos licenciados, que os estudos em Etnomatemática, na formação inicial desses professores indígenas são essenciais para promoverem a aproximação entre os saberes tradicionais e o conhecimento matemático escolar. Da mesma forma, relatam que os projetos pedagógicos desenvolvidos nos TCC do curso, com aportes teóricos da Etnomatemática e aplicados na Educação Escolar Indígena de cada licenciando, contribuem para o fortalecimento e valorização dos saberes matemáticos tradicionais perante os mais jovens, possivelmente, garantindo o futuro dos saberes culturais envolvidos.

De acordo com Bernal (2018, p. 84, grifo do autor)

> O [E]ensino [S]superior, a [E]educação [M]matemática, a [E]etnomatemática e a [E]educação [I]indígena as concebemos como elementos constituintes dos diferentes retalhos que compõem a escrita-tecido e que são conectados por diversos nós, pontadas e entrecruzamentos de fios-vida que atravessam o próprio tecido, operado por nós e todos aqueles que têm aceitado o convite de vir, de junto tecer.

Segundo Bernal (2018), o ato pedagógico e social de tecer fios e nós, no âmbito da Educação Escolar Indígena e no transcorrer da formação de professores indígenas, está interligado a construção conjunta de conhecimento, com respeito à diversidade e com diálogo cultural: ouvindo, falando, discutindo, refletindo seus relatos, vivências, ideias, comentários, discursos, entre outros. Tudo isso com vistas a "entrever manifestações de tensões que emergem nos processos de subjetivação que estão presentes no encontro dos estudantes indígenas com o Ensino Superior" (p. 84).

Entendemos que essas ações de professores e acadêmicos indígenas conduzem a formação de professores indígenas direcionada para a interculturalidade que é premissa no planejamento e no desenvolvimento da LINTER. Para Candau (2012, p. 45-46)

> A interculturalidade orienta processos que têm por base o reconhecimento do direito a diferença e a luta contra todas as formas de discriminação e desigualdade social. Tenta promover relações dialógicas e igualitárias entre pessoas e grupos que pertencem a universos culturais diferentes, trabalhando os conflitos inerentes a esta realidade. Não ignora as relações de poder presentes nas relações sociais e interpessoais. Reconhece e assume os conflitos procurando as estratégias mais adequadas para enfrentá-los.

Candau (2012) ressalta que a perspectiva da educação intercultural é um processo permanente, sempre em vias de transformação, inacabado e promovendo a relação democrática entre os grupos culturais envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Não há uma única convivência pacífica num mesmo território. Com vistas à interculturalidade, a Educação Intercultural e a Etnomatemática, Silva (2018a), ressalta em sua pesquisa que estudos e reflexões das práticas socioculturais, com destaque àquelas relacionadas a questões envolvendo cálculos financeiros e comerciais, na formação de professores indígenas, são fundamentais, pois elas naturalmente possuem concepções matemáticas ocidentalizadas. As relações comerciais entre indígenas e não indígenas podem gerar conflitos culturais. Para o autor, a Etnomatemática pode diminuir esses conflitos por meio dos professores indígenas entrelaçando a educação financeira da Matemática com os processos de comercialização da comunidade indígena a qual fazem parte.

Araújo (2019) realizou uma pesquisa com acadêmicos indígenas em formação inicial no curso de Licenciatura Intercultural Indígena da UFMG em Belo Horizonte. E nela, a autora destaca que a perspectiva pedagógica da Etnomatemática em cada processo de ensino e aprendizagem de conteúdos de Matemática, aproxima esses conteúdos com os modos de matematizar dos acadêmicos indígenas envolvidos. Para a autora, a Etnomatemática promove o encontro com a perspectiva da educação intercultural no âmbito da Educação Matemática, com destaque para a Educação Escolar Indígena e, com vistas para a formação inicial de professores indígenas para ministrarem aulas de Matemática.

Ressaltamos que a pesquisa de Araújo (2019) foi realizada com acadêmicos indígenas Pataxós, a mesma etnia dos acadêmicos de nossa pesquisa. Conforme a autora, os trabalhos de pesquisa realizados pelos acadêmicos indígenas realça a Matemática Indígena do povo Pataxó e "traz contribuições para pensarmos outras matemáticas que vêm sendo excluídas, subalternizadas e desumanizadas" (p.142). Além disso, concordamos com Wieczorkowski (2019), ao destacar que as práticas desenvolvidas por acadêmicos indígenas nas escolas indígenas, transbordam o espaço escolar da sala de aula promovendo a participação de toda comunidade, pois na interculturalidade ou na educação intercultural todos educam. Segundo a autora, a Etnomatemática "tem o poder de causar nessas comunidades o orgulho de sua identidade cultural, possibilita também a reflexão dos desafios enfrentados pelas escolas indígenas no país, focando num processo educacional construtivo e contemplando no ensino e uso da matemática" (p. 76).

O Quadro 11, em ordem cronológica de defesa da tese, tráz as pesquisa de doutorado com Etnomatemática que têm como público alvo os acadêmicos indígenas de alguma das Licenciaturas Interculturais Indígenas brasileiras, ou ainda a formação desses professores em nível médio no Magistério Indígena.

Quadro 11 – Pesquisas de Doutorado no Brasil com a Etnomatemática e acadêmicos indígenas.

Autor	Título da Pesquisa – Instituição (Ano de defesa)
Samuel Edmundo López Bello	Etnomatemática: relações e tensões entre as distintas formas de explicar e conhecer – UNICAMP (2000).
Jackeline Rodrigues Mendes	Ler, escrever e contar: práticas de numeramento-letramento dos Kaiabi no contexto de formação de professores Índios do Parque Indígena do Xingu – UNICAMP (2001).
Roseli de Alvarenga Corrêa	A educação matemática na formação de professores indígenas: os professores Ticuna do Alto Solimões – UNICAMP (2001).
Cláudio Lopez de Jesus	A etnomatemática das práticas cotidianas no contexto de formação de profissionais indígenas no Xingu – USP (2006).
Jose Pedro Machado Ribeiro	Etnomatemática e formação de professores indígenas: um encontro necessário em meio ao diálogo intercultural – USP (2006).
Aparecida Augusta da Silva	Em busca do diálogo entre as duas formas distintas de conhecimentos matemáticos – USP (2008).
Helena Alessandra Scavazza Leme	Formação superior de professores indígenas de Matemática em Mato Grosso do Sul: acesso, permanência e desistência – USP (2010).
Lucí Teresinha Marchiori dos Santos Bernardi	Formação continuada em Matemática do professor indígena Kaingang: enfrentamentos na busca de um projeto educativo – UFSC (2011).
Ozirlei Teresa Marcilino	Educação escolar Tupinikim e Guarani: experiências de interculturalidade em aldeias de Aracruz, no Estado do Espírito Santo – UFES (2014).
Michael Lopes da Silva Rolim	Estudantes indígenas nos cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Roraima – UNIAN (2015).
Aldrin Cleyde da Cunha	Contribuição da Etnomatemática para a manutenção e dinamização da cultura Guarani e Kaiowá na formação inicial de professores indígenas – UNIAN (2016).
Elisângela Aparecida Pereira de Melo	Sistema Xerente de Educação Matemática: negociações entre práticas socioculturais e comunidades de prática – UFPA (2016).
Hélio Simplício Rodrigues Monteiro	O ensino de Matemática na Educação Escolar Indígena: (Im)Possibilidades de Tradução – UNICAMP (2016).
Jonatha Daniel dos Santos	Saberes matemáticos indígenas e não indígenas que circulam e se articulam no contexto da etnia Tupari no Estado de Rondônia – UCDB (2020).

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de dados da pesquisa.

Fomentando o diálogo e as tensões entre a interculturalidade na educação intercultural e a Etnomatemática na Educação Matemática, Bello (2000), em sua pesquisa com professores indígenas de nível primário, do município de Cochabamba na Bolívia, por meio de um Curso de Formação Docente e Etnomatemática, com vistas à reforma educativa para uma formação bilíngue e intercultural, aponta que as discussões em Etnomatemática são essenciais para gerir as diferentes vozes que ecoam do diálogo intercultural.

No caso, a voz do pesquisador e cada uma das vozes dos participantes do curso. O autor ressalta que as discussões incentivaram os professores a olharem para sua comunidade com os olhos de um pesquisador que investiga suas instituições (escolas, igrejas, prefeitura, posto médico) e seus saberes culturais. Alguns professores indígenas relataram que não percebiam que alguns desses saberes culturais estavam sendo esquecidos.

Mendes (2001), em sua pesquisa sobre as práticas de numeramento e letramento para formação de professores Kaiabi no Parque Nacional do Xingu, relata que na perspectiva da Etnomatemática, o conhecimento matemático não está somente ligado a escola, mas antes, esse conhecimento desponta do meio social onde a escola está inserida. Então, o autor propõe discussões sobre as noções de quantificação, medição, ordenação e classificação desenvolvidas na comunidade Kaiabi para a introdução do conceito de numeramento, que geralmente pode apresentar questões que envolvem relações de poder e a legitimação de conhecimentos. A autora destaca que nos diálogos com os Kaiabi emergiram as referências: *matemática indígena, matemática do índio, língua matemática, matemática Kaiabi, antiga matemática Kaiabi, igual matemática do branco*. Ela ainda ressalta que essas nomenclaturas para a matemática praticada pelos Kaiabi em seus afazeres, envolvem a apropriação do discurso da Etnomatemática e com isso, mostra em seus discursos que eles assumem oposição a matemática dominante.

De acordo com Corrêa (2001), a Etnomatemática se destaca como abordagem de ensino de conhecimentos matemáticos para os cursos de formação de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática. A autora destaca três argumentos que reforçam a necessidade do ensino de Matemática nas escolas indígenas: a situação de contato (é preciso compreender a Matemática para transitar e entender a sociedade não indígena que apresenta esse conhecimento como um de seus alicerces); o reconhecimento das muitas matemáticas (abrange as variadas maneiras que cada grupo social tem em contar, medir, classificar, entender, explicar e agir em suas realidades) que devem ser valorizadas no contexto escolar; a relação que a Matemática tem com outras áreas do conhecimento (Biologia, Física, Química, entre outras).

A pesquisa de Jesus (2006) investigou um grupo de indígenas do Parque Nacional do Xingú em processo de formação inicial para professores indígenas e, outros que participaram de um curso de Formação de Auxiliar de Enfermagem. O autor salienta que o fato de serem indígenas contribui para que eles estabeleçam relações entre o conhecimento matemático e os saberes matemáticos tradicionais de seu povo. Já os educadores matemáticos que ministram aulas no curso de formação de professores indígenas, precisam estar pautados nos estudos de Etnomatemática. Necessita aguçar a curiosidade, estabelecer parcerias com os acadêmicos indígenas, promover discussões com vistas à valorização cultural dos participantes, bem como a construção de novos conhecimentos a partir dos saberes tradicionais, instigando os acadêmicos indígenas a fazerem o mesmo em suas atuações nas escolas indígenas.

Segundo Ribeiro (2006), a formação de professores indígenas provoca discussões sobre as relações entre indivíduos e culturas. Nesses cursos é fundamental o encontro entre a Etnomatemática e a dinâmica cultural para a promoção do diálogo entre indivíduos de diferentes culturas. Nesse contexto educacional, se faz necessária a articulação entre os conhecimentos culturais indígenas dos envolvidos com o conhecimento matemático presente no currículo escolar. Esse processo acontece por intermédio do diálogo intercultural, que no âmbito da Educação Matemática é realizado à luz da Etnomatemática.

Silva (2008), em sua investigação com a formação de professores da etnia Gavião no Estado de Rondônia, destaca o desafio que envolve a formação de professores indígenas que considera as inter-relações entre os seus mitos, os afazeres diários e suas histórias, que geralmente são transmitidas oralmente pelos anciões da etnia. Segundo a autora, para os Gaviões as salas de aula devem ir além, elas são suas casas, a comunidade e a floresta como um todo. Nesse contexto cultural, a pesquisa de Silva (2008) se desenvolve em dois cursos para os professores da etnia. Em sua investigação, por meio da modelagem matemática, os acadêmicos indígenas participantes decodificaram o saber fazer, presente na construção de uma maloca tradicional, para dar sentido ao conhecimento matemático envolvido no processo.

Para Silva (2008), a Etnomatemática questiona a visão de ensino de uma Matemática universal neutra e isenta de valores. A Etnomatemática proporciona a exploração das relações entre as formas diferentes de matematização e a Educação Matemática. Nesse sentido, a proposta da Etnomatemática não significa a rejeição da Matemática formal, mas apenas a coloca como instrumento de uma compreensão crítica de questões sociais mais amplas.

De acordo com Leme (2010, p. 64)

> Nesse contexto em que a etnomatemática se sustenta favorece o tratamento das questões referentes a formação de grupos diferenciados, e especificamente na formação de professores indígenas em que é importante que se levem em consideração as experiências próprias desses estudantes, os aspectos culturais e sociais de seu grupo étnico, sem lhe furtar também o direito de conhecimento de outras culturas e outros modos de agir e pensar que não indígena. Essa formação deveria passar, além do desenvolvimento profissional e acadêmico, pelo desenvolvimento pessoal, em que se considerariam os saberes provenientes de seu ambiente de vida, sua cultura.

Leme (2010) pesquisou acadêmicos indígenas do curso de Licenciatura em Matemática da UEMS – Campus Dourados que disseram ter muitas dificuldades em compreender os conteúdos específicos de Matemática, o que conduz muitos deles a desistirem do referido curso. A autora salienta que buscou aportes teóricos na Etnomatemática, por entender que na abordagem da Etnomatemática não há restrição de conhecimentos e nem a valorização de um conhecimento em detrimento do outro. Há sim a valorização do que o outro traz consigo e o incentivo ao compartilhamento de conhecimentos por meio do diálogo intercultural. O curso de graduação para professores indígenas proporciona um contexto de formação com intenso confronto cultural por meio dos conteúdos, dos aportes pedagógicos, das teorias educacionais e das práticas escolares. “Compete ao graduando, futuro professor, refletir continuamente sobre sua prática, tendo em vista as variáveis que se processam dentro desse contexto escola-comunidade indígena e de seu papel enquanto agente de elo, na transposição de práticas e conhecimentos externos a sua comunidade de origem” (LEME, 2010, p.64).

Em uma investigação sobre os desafios enfrentados por professores indígenas de Matemática da comunidade indígena Kaingang em

Ipauçu – SC, perante um curso de formação continuada, Bernardi (2011), por intermédio de aportes teóricos da Etnomatemática, em parceria com a Educação Matemática Crítica, leva em consideração aspectos da Matemática Kaingang e da Matemática presente no currículo escolar em um trabalho colaborativo e de encontro cultural. Segundo a autora, os aportes teóricos da Etnomatemática, na investigação com os professores Kaingang de Matemática, promovem reflexões sobre a interculturalidade possibilitando o entendimento de que a cultura é produzida pelos sujeitos e, nela se insere a produção de conhecimento matemático em todos os grupos humanos. A perspectiva de que tanto a cultura como um todo, quanto o conhecimento matemático nela inserido, não estão consolidados, fechados em si, mas sim são produções humanas em permanente disputa pela imposição de significados.

Ainda com relação aos estudos sobre interculturalidade e a Etnomatemática, na formação inicial e continuada de professores indígenas, Marcilino (2014), ressalta que esses estudos proporcionam aos acadêmicos indígenas pesquisarem sua cultura e sua história. Reflexões advindas dessas pesquisas aproximam as práxis dos acadêmicos indígenas com o contexto da comunidade e, possivelmente, trazem a comunidade para dentro da escola indígena. Ou faz com que o âmbito escolar seja estendido para toda aldeia. Nesse diálogo entre comunidade e escola indígena, os anciões da comunidade têm papel fundamental no resgate cultural e nas aproximações entre os saberes científicos com os saberes tradicionais.

Diferentemente dos outros trabalhos que estamos apresentando de forma sucinta, Rolim (2015), em sua pesquisa com acadêmicos indígenas dos cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática da UFRR, ou seja, fora do âmbito das Licenciaturas Interculturais Indígenas salienta que

> A estrutura do curso deveria possibilitar ao aluno o desenvolvimento de capacidades que lhe permitissem identificar e resolver os problemas de sua comunidade. Ainda, a metodologia utilizada nos cursos deveria considerar o desenvolvimento de habilidades de pesquisa e também os conhecimentos específicos da educação escolar indígena. Assim, o aluno poderá elaborar programas educacionais específicos para a sua comunidade. Para que o estudante possa atuar dessa maneira, é preciso uma formação que contemple conhecimentos além daqueles puramente

> matemáticos e que esteja de acordo com os interesses profissionais desse aluno. Nesta perspectiva interdisciplinar, o estudante ampliaria sua compreensão sobre as diferentes formas de validação do conhecimento científico (p. 153).

Ressaltamos que essa discussão precisa estar presente na elaboração dos cursos de Licenciatura em Matemática que atendem acadêmicos indígenas. Compreendemos que não é o caso de transformar os referidos cursos em Licenciaturas Interculturais, mas possibilitar que os conhecimentos matemáticos presentes em seus currículos dialoguem com os saberes matemáticos dos acadêmicos indígenas envolvidos. Rolim (2015) destaca que para superar as dificuldades advindas de sua formação os acadêmicos do curso pesquisado, formam grupos de estudos entre eles para discutirem conjuntamente não só os conhecimentos matemáticos, mas como eles podem ser apresentados nas escolas indígenas em que eles atuam ou virão a atuar.

Em uma pesquisa sobre as contribuições da Etnomatemática na manutenção e dinamização da cultura Guarani e Kaiowá na formação inicial de professores indígenas, Cunha (2016, p. 54) ressalta que propor uma educação

> [...] guiada pelos fundamentos do programa de Etnomatemática, pensada com base na perspectiva da alteridade, significa romper com o modelo tradicional de ensino, centrado na verdade absoluta das ciências. Pois, desse modo, ela passará a ser concebida como um processo construído pela relação particular e intensa entre diferentes sujeitos, os quais possuem opções e projetos também diferenciados. Em meio ao processo interativo, ocorre, não apenas a aprendizagem de conceitos, informações, mas, sobretudo, a compreensão dos contextos em que surgem os contatos, os relacionamentos de sujeitos plurais para a apreensão dos elementos que adquirem significado. Com esse olhar, é possível afirmar que a opção teórico-metodológica da pesquisa em Etnomatemática vem construindo um conhecimento fundado na experiência etnográfica, percepção do outro grupo, do ângulo de sua lógica, procurando compreendê-lo na sua própria racionalidade e termos.

Cunha (2016), ainda salienta que na formação de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática, podem ser exploradas duas vertentes da Etnomatemática: no reconhecimento, na geração, na organização e na difusão dos conhecimentos Etnomatemáticos dos acadêmicos indígenas envolvidos com vistas às suas necessidades de sobrevivência e de transcendência; o professor formador partindo dos saberes tradicionais dos acadêmicos indígenas, para incluí-los no seu planejamento educacional e trabalhar as aulas de Matemática considerando e contextualizando as formas de ver, entender, e compreender o mundo dos acadêmicos indígenas.

Melo (2016), em sua pesquisa sobre a Educação Matemática direcionada para os professores indígenas de Matemática da etnia Xerente, apresenta o termo *Ser* professor indígena, ao qual, a autora se refere ao "ser humano que foi atravessado pelos distintos modos e processos educativos e formativos que o constitui na carreira docente. Destacando que esses processos distintos não afetaram a identidade do *Ser* indígena Xerente, ao contrário fortaleceu a sua identidade cultural" (p. 33, grifo da autora). Ela destaca que o professor formador do *Ser* indígena professor deve aceitar e respeitar as diversidades dos saberes tradicionais, presentes nas diferentes culturas dos acadêmicos indígenas participantes, favorecendo, o diálogo, a reflexão e a cooperação nos heterogêneos processos de formação do *Ser* indígena professor. "Nesse sentido, a Etnomatemática favorece elementos conceituais e práticos às ações de formação do *Ser* indígena professor, principalmente por reconhecer, respeitar e valorizar os saberes e fazeres que são expressos nas manifestações socioculturais que tem revelado" (MELO, 2016, p. 125, grifo da autora).

Já Monteiro (2016), em sua pesquisa com professores indígenas das etnias Xerente e Karajá no Estado do Tocantins, se apoia no filósofo austríaco Ludwig Wittigenstein para identificar jogos de linguagens ao tratar da complexidade de investigação em cada processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática para esses povos. Para o autor, cada comunidade possui características diferentes de falar sobre seus modos de matematizar o cotidiano. Cada povo tem jogos de linguagem diferentes que possuem palavras ou expressões com seus próprios significados diferentes no âmbito de cada jogo de linguagem. "Podemos então, dizer que cada um desses jogos de linguagem, que guardam certa relação com a matemática, se configura como uma Etnomatemática específica, que está ancorada em uma forma de vida, em uma dada cultura" (p.132).

Corroborando com a discussão, Santos (2020) em sua pesquisa com indivíduos da etnia Tupari, localizada no Estado de Rondônia, destaca que mesmo antes dos primeiros contatos os Tupari já tinham suas próprias pedagogias, cultivavam plantas e faziam colheitas, realizavam a construção de malocas e utensílios para caça e pesca, compreendiam as estações do ano com suas mudanças climáticas e épocas de chuva e seca. Assim como destacado por D'Ambrosio (2020), seus saberes matemáticos sempre estiveram interligados ás suas necessidades de sobrevivência e de transcendência. Santos (2020) trabalhou sua pesquisa com o conceito de Matemática Indígena como uma rasura[31] que conduz o pesquisador a pensar *para além* de uma abordagem Etnomatemática na Educação Indígena. Para ele, a Matemática Indígena de um povo se desenvolve principalmente por meio da oralidade. "A língua Tupari nas Aldeias que estive é muito forte e em função disso a língua é uma estrutura tradicional de se fazer e pensar matematicamente" (SANTOS, 2020, p. 157).

Essas pesquisas nos mostram o papel fundamental da Etnomatemática no processo de formação inicial e continuada de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática. A perspectiva da Etnomatemátiva inspira tanto o professor formador desses acadêmicos indígenas quanto eles próprios a perceberem, em suas culturas, que há elementos das matemáticas indígenas que precisam ser considerados em cada processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática. Essa dinâmica provoca reflexões desses professores em suas ações profissionais na Educação Escolar Indígena de suas escolas nas aldeias.

Compreendemos que as falas, as práxis e os debates desses professores indígenas com seus estudantes nas escolas indígenas, fomentados por seus estudos em Etnomatemática, soam como próprias de cada comunidade. Afinal, quando o professor indígena fala, planeja e atua, mais que o professor não indígena, suas ações pedagógicas têm

[31] "Nesse caso, o conceito de matemática indígena estará descentralizado de uma naturalização do conceito 'matemática', buscando perceber nas linhas cruzadas, outros significados, permitindo a manifestação de outros sentidos ao conceito secularmente definido e conceituado na academia ocidental. É pesquisar em linhas fronteiriças, pesquisando sobre outros modos que agem sobre essas matemáticas, na emergência de visualizar outras epistemologias que subvertem algumas lógicas cartesianas, produzindo pedagogias outras, pedagogias epistêmicas alternativas" (SANTOS, 2020, p. 27, grifo do autor).

representatividade perante seu povo, portanto, são reconhecidas por sua comunidade como advindas da própria comunidade. Segundo Mattos e Mattos (2020, p. 73, grifo dos autores)

> É também uma forma de restabelecer os laços afetivos com os saberes e práticas de etnias indígenas, reconhecendo suas raízes sem descuidar das outras, *mas em um processo de síntese reforçando suas próprias raízes* no intercâmbio, no diálogo e no respeito pelas diferentes culturas. [32]

Para nós, a Matemática entrelaçada, pelo professor indígena de Matemática, com a Matemática Indígena da sua etnia, pode possibilitar que os conhecimentos matemáticos envolvidos com seus saberes matemáticos sejam úteis a comunidade e, não tolhem a criatividade dos estudantes indígenas e nem de seus professores, mas sim reforce suas próprias raízes culturais com destaque para suas matemáticas indígenas.

3.3. Para além de uma proposta pedagógica: o Programa Etnomatemática e seu contexto nessa pesquisa

O Programa Etnomatemática é dinâmico em suas investigações, ele considera as características históricas e culturais do que está sendo pesquisado sob a sua perspectiva. Sua ação pedagógica tem forte valorização cultural dos participantes na pesquisa, possivelmente, trazendo empatia ao ato de ensinar com possível influência positiva na aprendizagem dos participantes no transcorrer de cada processo de ensino de conteúdos de Matemática. Em seu aporte teórico, os envolvidos possuem voz e são convidados ao diálogo cultural trazendo os modos de matematizar, presente no cotidiano dos pesquisados, contextualizando elementos das matemáticas indígenas para o ensino e aprendizagem de conteúdos de Matemática presentes no currículo da Educação Escolar Indígena.

De acordo com D’Ambrosio (2012, p. 119, grifo do autor)

[32] “It is also a way of reestablishing the affective ties with the knowledge and practices of indigenous ethnic groups, by recognizing their roots without neglecting the others “but in a synthesis process reinforcing their own roots” in the exchange, dialogue, and respect by different cultures”.

> A **etno-matema-tica** é um programa de pesquisa (um "programme" no sentido de Lakatos) em cultura, cognição, epistemologia, história e política. Em política incluo a ação social, compreendendo educação, saúde, economia, sociologia e política propriamente dita. Portanto, o programa cobre, holisticamente, toda uma teoria das ideias e uma crítica das práticas. Seu principal objetivo é entender a geração, transmissão, institucionalização e difusão do conhecimento.

Para D'Ambrosio (2012), a Etnomatemática pode ser reconhecida como um Programa de Pesquisa aos moldes de Lakatos (1978) [33]. A possibilidade de entender a Etnomatemática como um Programa de Pesquisa é fundamental em nossa pesquisa, pois além da valorização cultural proposta inicialmente em sua abordagem pedagógica, como discutimos anteriormente, a visão da Etnomatemática, como um Programa de Pesquisa, que possui um núcleo teórico consistente, que contém as hipóteses e ideias centrais que caracterizam o programa de pesquisa, bem como um cinturão protetor que debate as inconsistências e busca ou constrói respostas para solucionar esses problemas, proporciona ele ser um programa de pesquisa fecundo no âmbito da Educação Matemática.

De acordo com Mattos (2020, p. 29), o Programa Etnomatemática

> É um programa que tenta sanar alguns problemas de ensino e de aprendizagem que se arrastam por muito tempo, que perpetuam e disseminam aspectos que contêm controvérsias e que geram enganos a respeito das diferentes manifestações matemáticas existentes nos mais variados grupos socioculturais pelo mundo afora. É um programa que não se fecha, mas viabiliza possibilidades de promover a interdisciplinaridade, aliando-se as mais diferentes áreas do conhecimento. É um programa com visão holística que busca romper as barreiras imaginárias, existentes entre as disciplinas.

---

[33] De acordo com Lakatos (1978), as realizações científicas ocorrem não de forma isolada, mas em programas de pesquisas. No interior desses programas há um núcleo forte que contém as hipóteses centrais da teoria cientifica investigada pelo programa que é composto por uma comunidade de cientistas. E esses constroem um cinturão protetor ao redor do núcleo central composto de hipóteses auxiliares que defenderá as hipóteses centrais de possíveis refutações. Lakatos (1978) nos informa que pode haver programas de pesquisa progressivos em que suas teorias conduzem a fatos novos, e programas de pesquisa degenerativos em que suas teorias são construídas somente para explicarem fatos já conhecidos. Vale ressaltar que um programa de pesquisa não surge do nada, ciência não cresce do nada, e pode demorar anos, ou décadas para que um programa embrião se transforme em um programa de pesquisa promissor com um núcleo forte e com um cinturão protetor consistente.

Um programa de pesquisa assim possui uma comunidade de pesquisadores empenhados em corrigir as distorções internas do programa, apontando caminhos como possíveis soluções aos problemas de origem interna ou externa ao programa de pesquisa. Portanto o Programa Etnomatemática é dinâmico, abrangente, próspero em suas pesquisas, ou seja, como diria Lakatos (1978) ele é um programa de pesquisa promissor.

O aporte teórico proporcionado pelo Programa Etnomatemática é remodelado por cada uma de suas pesquisas. Ele é fundamental para acompanhar os acadêmicos participantes e o professor formador em suas jornadas cognitivas pelos Três Mundos da Matemática. As implicações advindas da dinâmica educacional são fonte de discussões dentro do Programa Etnomatemática que está constantemente interessado, por meio de sua comunidade de professores pesquisadores, entre outras possibilidades de investigações, nas influências etnomatemáticas em sala de aula. E essas, dentro do programa, são aprimoradas por intermédio do estudo de outras influências, que incentivam outras e assim por diante.

Nessa pesquisa, em concordância com todas as outras apresentadas anteriormente, será constante o encontro cultural das matemáticas tanto entre os próprios acadêmicos (Pataxós, Pataxós Hãhãhãe e Tupinambás), entre eles e o professor, quanto entre eles e os objetos matemáticos dessa pesquisa (estudo das definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área) que estão presentes no Currículo da LINTER. Assim, se faz necessário a valorização cultural dos atores da pesquisa sem a hierarquização de alguma cultura específica. Nesse sentido, segundo D'Ambrosio (2016, p. 7-8) a Etnomatemática

> [...] é útil para a compreensão das diversas maneiras que os indivíduos desenvolveram para lidarem com o ambiente local, com o comunitário, e com as questões tribais de suas próprias culturas. Assim a Etnomatemática é muito importante para enfatizar a dignidade cultural e para salientar o respeito por um modo de pensamento distinto que é muito importante e coerente, mas que é suprimido pela intervenção colonialista. Então, a Etnomatemática significa a restauração da dignidade cultural, pois fortalece os indivíduos intelectualmente, tornando-os criativos. Nesse sentido, os estudos de suas práticas matemáticas são importantes para a valorização de sua formação cultural.

Restaurar a dignidade cultural é fortalecer as raízes culturais dos indivíduos que fazem parte do processo educacional de conteúdos curriculares da Matemática, incentivando suas criatividades ao trazer os modos de matematizar desses indivíduos para dialogar com o que está no Currículo de Matemática. Fantinato (2014) ressalta a valorização entre as matemáticas por meio da abordagem pedagógica da Etnomatemática, pois a sua proposta educacional procura articulações entre o sistema de conhecimento matemático local e o da escola, construindo pontes entre os dois sistemas, reforçando elos e reverberando conhecimento de um contexto para o outro.

Para Mattos e Mattos (2020), a dimensão política desenvolvida no Programa Etnomatemática, apresenta aos povos indígenas, por exemplo, o papel de domínio desempenhado pelo colonizador com relação à desvalorização dos saberes indígenas tradicionais, suas histórias, seus mitos, suas matemáticas indígenas, enfraquecendo ou podando suas raízes culturais. Todavia, essa dimensão política por meio de práticas educacionais e de cunhos descoloniais promove a troca de conhecimentos de forma dialética e dialógica entre duas ou mais culturas, com destaque para a Matemática com uma ou mais matemáticas indígenas envolvidas em um ou mais processos educacionais. A dimensão política do Programa Etnomatemática possibilita a "Esses povos, por meio de ações e práticas políticas, educacionais e coletivas, reafirmarem sua existência como um ato de luta contra colonialidade, seja do poder, do conhecimento, do ser ou da mãe natureza"[34] (MATTOS; MATTOS, 2020, p. 77).

Condordamos com Mattos (2020) ao salientar que as ações desenvolvidas pelo Programa Etnomatemática, tanto em suas pesquisas, quanto em processos educacionais vão de encontro aos procedimentos de colonialidade, sobretudo aqueles que colonializam as mentes das pessoas pertencentes à comuidades socialmente indentificadas. Para a autora é preciso pensarmos e agirmos com vistas a decolonialidade. Afinal

> Não há como retroceder no tempo e no espaço, tampouco superar as opressões e as estruturas geopolíticas extremamente discrepantes. Não há como superar ou apagar

[34] "These peoples, through actions and practices political, educational, and collective, reaffirm their existence as an act of struggle against coloniality, be it of power, of knowledge, of being, or of mother nature".

> os termos históricos adotados pelo colonialismo. Não há como não constatar que houve um apagamento histórico, político, cultural e da identidade dos povos oprimidos. Nessa perspectiva, adotamos o termo decoloniedade por entendê-lo como um meio de transcender a colonialidade, ou seja, tem o objetivo de problematizar a colonialidade, refletindo sobre as condições sócio-históricas de dominação e opressão (p. 168).

Nesse contexto de decoloniedade, com relação à formação de professores indígenas de Matemática, segundo Mattos e Mattos (2020), por intermédio da dimensão política do Programa Etnomatemática, os conhecimentos tradicionais são discutidos nas aulas de formação de professores indígenas e na Educação Escolar Indígena, buscando a contextualização com os conhecimentos não indígenas sem provocar fragmentações desses conhecimentos, mas possibilitando conexões construídas nas relações culturais de forma natural. A dimensão política do Programa Etnomatemática reforça a formação de professores indígenas de Matemática, para que esses professores dialoguem as matemáticas indígenas com a Matemática presente no currículo escolar, afinal "[...] a prática do ensino indígena tem uma especificidade que é conhecer e dar a conhecer a cultura própria e suas raízes ancestrais aos jovens da etnia, empoderando-os"[35] (MATTOS; MATTOS, 2020, p. 77).

Concordamos com Vergani (2007, p. 25, grifo da autora) quando salienta que:

> É certo que a etnomatemática se debruça com respeito sobre as culturas tradicionais não europeias, conferindo-lhes uma dignidade que nem sempre lhes é reconhecida. Mas está longe de poder ser identificada "iletracia", ou de ser definida como a matemática dos "primitivos", dos "imigrantes" ou dos "pobrezinhos do 3º mundo"... .

Nas ações de decoloneidade no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, o respeito e o envolvimento das matemáticas dos participantes na abordagem educacional é fundamental. No Programa Etnomatemática as diferenças dialogam, o que era para ser obstáculo se transforma em motivação indo além dos encontros culturais e, no caso da

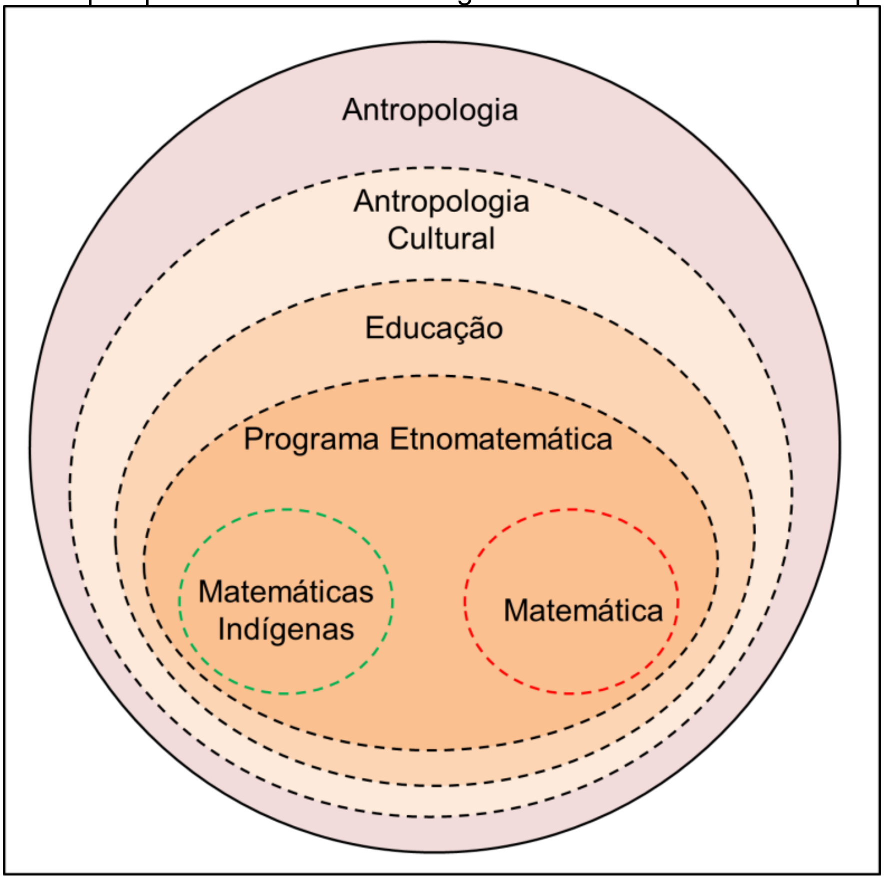
---

[35] "the indigenous teaching practice has a specificity that is to know and to make known the own culture and its ancestral roots to the young of the ethnicity, empowering them".

formação de professores indígenas possibilita a transformação da realidade dos indígenas pelos próprios indígenas transcendendo a colianiedade.

Se a Etnomatemática vai além dos modos de matematizar de comunidades socialmente identificadas, qual a área de atuação do Programa Etnomatemática? E com relação a essa pesquisa? Então, para situarmos a Programa Etnomatemática em nossa pesquisa, partimos de Vergani (2007), e construímos a Figura 16, na qual o referido programa de pesquisa desponta em uma perspectiva antropologicamente dinâmica.

Figura 16 – A perspectiva dinâmica do Programa Etnomatemática nessa pesquisa.



Fonte: Elaborada pelos autores.

De acordo com Vergani (2007, p. 34, grifo da autora) em uma perspectiva antropológica dinâmica do Programa Etnomatemática

> O conhecimento matemático adquire validade à medida que se integra, localmente, em um grupo humano. A "universalidade" é relativizada pelo crédito – pragmático e científico – que a comunidade lhe atribui. A matemática, modelizando situações ou estruturando problemas, faz parte do diálogo vital que o homem tem com o meio.

Nessa perspectiva, o Programa Etnomatemática abarca todas as matemáticas locais se envolvendo nos estudos e pesquisas sobre os modos de matematizar de cada uma das comunidades socialmente identificadas. Abrange o estudo do homem como ser cultural, isto é, fazedor de cultura.

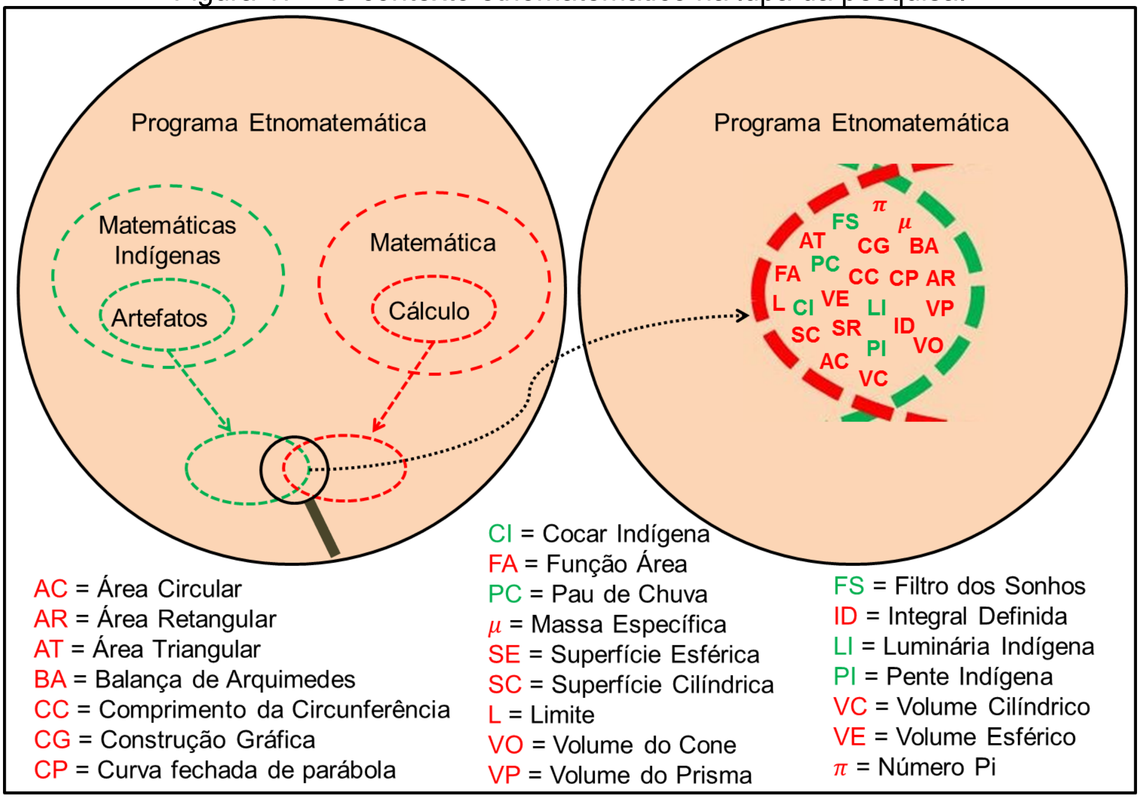
Nesse sentido, acrescentamos o conjunto da Antropologia Cultural que pesquisa "as culturas humanas no tempo e no espaço, suas origens e desenvolvimento, suas semelhanças e diferenças. Tem foco de interesse voltado para o conhecimento do comportamento cultural humano, adquirido por aprendizado, analisando-o em todas as suas dimensões" (MARCONI; PRESOTTO, 2007, p. 4). Outro diferencial corresponde às fronteiras dos conjuntos serem pontilhadas com a ideia de que essas são transponíveis permitindo os encontros de elementos de cada conjunto, bem como destacamos as matemáticas que ressaltam em nossa pesquisa, a Matemática e as matemáticas indígenas dos acadêmicos participantes.

No âmbito do Programa Etnomatemática, há confluência entre os sistemas de conhecimento matemático, ou seja, há diálogo entre as matemáticas em sua tela de ação e investigação educacional. Como por exemplo, no âmbito da Educação Escolar Indígena e na formação de professores indígenas de Matemática ao considerar a(s) Matemática(s) Indígena(s) do(s) envolvido(s) (local) no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática (universal). Os participantes se sentem valorizados, pois ao encontrarem o seu jeito de matematizar presente no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos curriculares da Matemática, se identificam com o processo, se sentem motivados e a(s) Matemática(s) Indígena(s) envolvida(s) no processo educacional com a Matemática se enriquecem mutuamente.

Para instigar o encontro de conteúdos da Matemática com as matemáticas indígenas dos acadêmicos, utilizamos cinco artefatos ou peças de artesanatos indígenas, em cada processo de ensino e aprendizagem das definições de: limite, soma de Riemann, integral definida e função área. Na Figura 17, ressaltamos que, por meio da abordagem da Etnomatemática, nasce cada contexto de ensino e aprendizagem dessa pesquisa para os acadêmicos indígenas da LINTER da área de Ciências da Natureza e Matemática.

De um lado, dentro do conjunto do Programa Etnomatemática, temos as matemáticas indígenas que são formadas pelos modos de matematizar que os povos indígenas possuem. E dentre esses modos, estão os artesanatos indígenas ou ainda os seus artefatos. Para eles, representam a materialização, dentre outras construções mentais (mentefatos), presentes em cada artefato ou artesanato, uma parte preponderante de seus modos de contar, inferir, medir, classificar, construir, entre outros, nas matemáticas indígenas.

Figura 17 – O contexto etnomatemático na lupa da pesquisa.



Fonte: Elaborada pelos autores.

É como um artesão esculpindo um busto na madeira, por exemplo, ele se preocupa naturalmente com a forma e as medidas do busto pensando em quem ou no que ele está querendo representar na peça que ele está esculpindo. Do mesmo modo, um artesão indígena quando está construindo, por exemplo, um Cocar, ele pensa naturalmente no modelo do Cocar, na escolha das penas, no seu comprimento e largura, na combinação e representatividade das cores, entre outras coisas que tornam cada Cocar uma peça única de artesanato ou artefato indígena, embora o raciocínio matemático na construção de cocares possivelmente seja o mesmo.

Nesse sentido, o conjunto dos artefatos será o representante inicial das matemáticas indígenas Pataxó, Pataxó Hãhãhãe e Tupinambá para essa pesquisa. Inicial, porque no desenvolvimento de cada processo de ensino e aprendizagem, possivelmente, emergirão outros aspectos das culturas dos envolvidos que podem ser retratados como entes das matemáticas indígenas desses povos. Ainda, no mesmo lado inicial, trazemos o conjunto da Matemática que aqui será representada pela disciplina de Cálculo, que abarca os conteúdos matemáticos presentes nessa pesquisa.

Nela, apresentamos a intersecção ou o encontro entre as partes matemáticas envolvidas. Do subconjunto Artefatos Indígenas temos o Cocar Indígena, o Filtro dos Sonhos, o Pente Indígena, o Pau-de-chuva e a Luminária Indígena. Eles são representações mentais e materiais das matemáticas indígenas dos acadêmicos envolvidos nessa pesquisa, e nos auxiliam no transcorrer de cada processo de ensino e aprendizagem, por meio de suas formas e, na construção de modelos gráficos das funções envolvidas, possivelmente, provocando sensibilização e discussões entre os acadêmicos envolvidos no processo e o professor formador.

Do subconjunto Cálculo temos: o número irracional ; o cálculo de comprimento da circunferência; o cálculo de áreas (retangular, triangular, circular, da região limitada por uma curva fechada de parábola, superfície cilíndrica e superfície esférica); o cálculo de volumes (cilindro, cone e esfera); a construção de gráficos de funções (constante, polinomial do 1º grau e polinomial do 2º grau ou função quadrática); os procedimentos com a balança de Arquimedes utilizando a definição de massa específica; as definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área.

Nesse cenário de encontro cultural, os conjuntos da Figura 17 possuem fronteiras pontilhadas para representação de que, no encontro matemático proposto pela abordagem pedagógica da Etnomatemática, as fronteiras entre as culturas existem, mas elas podem ser transpostas no desenvolvimento do processo educacional, permitindo a troca de ideias entre as culturas.

Isso possibilita outros olhares para o interior desses conjuntos e subconjuntos na busca de outras ideias matemáticas que se façam necessárias para incrementar ou embasar as discussões que vão surgindo além do que fora planejado pelo professor formador. Abre espaços para a utilização de diferentes artefatos ou artesanatos, por exemplo, distintos elementos da cultura dos envolvidos no processo educacional, mais expressões algébricas não abordadas ou ainda outros conteúdos do Cálculo. O processo educacional no interior do Programa Etnomatemática, com fronteiras culturais transponíveis, é dinâmico, pois permite o ir e vir entre as culturas que fomentam o debate dialógico entre o professor formador e os acadêmicos participantes e, entre eles mesmos.

Gerdes (2010) salienta que todos os povos têm direito a utilizar, conhecer e usufruir os saberes matemáticos acumulados, podendo inclusive contribuir para o seu enriquecimento. “A Matemática como entendida no meio acadêmico também é uma Etnomatemática desenvolvida na bacia do Mediterrâneo, que foi sendo transformada através da dinâmica de encontros culturais de muitas tradições” (D’AMBROSIO, 2016, p. 33). Gerdes (2010) enfatiza que a Etnomatemática mostra que todos têm potencial para aprender a Matemática, e para tanto se faz necessário a integração e incorporação dos conhecimentos matemáticos dos estudantes no diálogo com os conteúdos matemáticos curriculares.

Por outro lado, segundo Tall (2017, p. 2)

> Matemáticos e educadores matemáticos interpretam o que está acontecendo de várias maneiras diferentes. Os matemáticos desenvolvem significados sofisticados que podem ser escritos de maneiras sutis e flexíveis, mas os educadores estudam o que está acontecendo na sala de aula e relatam o desenvolvimento observado dos alunos. Cada um de nós, com nossa própria história particular de desenvolvimento pessoal, será favorável a alguns aspectos, ao mesmo tempo em que será menos favorável para com outros aspectos. É importante manter a mente aberta e tentar entender a relevância sobre vários pontos de vista.[36]

Nesse sentido, o contexto dessa pesquisa, sob a ótica pedagógica da Etnomatemática nos conduz a pensar na dinâmica do encontro entre a Matemática Indígena e a Matemática presente no Currículo da LINTER

---

[36] “Mathematicians and mathematics educators interpret what is going on in various different ways. Mathematicians develop sophisticated meanings that can be written in subtle, flexible ways, but educators study what is happening in the classroom and report the observed development of learners. Each of us, with our own particular history of personal development, will be sympathetic to some aspects while being less sympathetic to others. It is important to keep an open mind and attempt to grasp the relevance of various viewpoints”.

com ênfase no estudo da definição de integral definida, que perpassa pelos cálculos de comprimentos, áreas e volumes, bem como pelas definições de limite e soma de Riemann, entrelaçados pelos modelos gráficos dos artefatos ou artesanatos: Cocar; Filtro de Sonhos; Pente Indígena Pau de Chuva e Luminária Indígena a base de cipó. E sobre a ação de pensar nós concordamos com Clareto (2009, p. 130) ao destacar que

> O pensamento etnomatemático é, pois, mais potente que enfrentar contemporaneamente as crises de verdade, de conhecimento e de racionalidade... O pensamento etnomatemático abre perspectivas para enfrentar as críticas feitas ao conhecimento no que se refere à neutralidade e à objetividade. Igualmente, a Etnomatemática lança possibilidades para se abordar o conhecimento como invenção, como inventividade, como problematização e não mais como re-conhecimento, como simples repetição de sentidos. O conhecimento como possibilidade de lançar outros sentidos, abrir perspectivas outras para a cognição e para a aprendizagem.

Para Knijnik *et al*. (2012), o pensamento etnomatemático não entende a Matemática como um simples conjunto de conteúdos e métodos que precisam ser passados aos estudantes com vistas ao aprimoramento do raciocínio lógico de cada acadêmico. A Matemática é propulsora das subjetividades dos sujeitos escolares (estudantes, professores, demais membros escolares). Considerando o ambiente escolar, nós somos o que somos por intermédio do que ensinamos e do que aprendemos, as disciplinas escolares estão no centro das discussões escolares, mas suas fronteiras disciplinares devem ser transpostas.

Na Educação Escolar Indígena as subjetividades culturais dos estudantes indígenas precisam emergir nos debates escolares e, no caso das subjetividades matemáticas desses estudantes indígenas, o professor indígena de Matemática deve preparar e atuar na sua práxis com vistas ao seu pensamento etnomatemático. Então, o pensamento etnomatemático do professor formador de acadêmicos indígenas é fundamental nessa pesquisa: pela sua possibilidade de abertura ao diálogo com os acadêmicos envolvidos antes e durante o processo de ensino e aprendizagem; na utilização inicial de artefatos ou artesanatos indígenas como modelos culturais para a construção de gráficos estimulando os acadêmicos indígenas a pensarem em outras possibilidades de sua cultura; na perspectiva de abordarmos fatos e personagens históricos sobre os objetos matemáticos em estudo; na valorização cultural dos acadêmicos indígenas provocando que eles tragam outras maneiras de pensar as ideias matemáticas.

Essas discussões instigam reflexões na comunidade de pesquisadores do Programa Etnomatemática e da Educação Matemática, no sentido de aprofundamento de cada processo de ensino e aprendizagem que emerge dessa pesquisa, com sua adequação e possível expansão para a abordagem de outros conteúdos curriculares do Cálculo nas Licenciaturas Interculturais Indígenas pelo Brasil.

Por um lado teórico a abordagem pedagógica da Etnomatemática proporciona, por meio do pensamento etnomatemático do professor formador, a dinâmica no planejamento e no desenvolvimento de cada processo de ensino e aprendizagem. Por outro, David Tall e seu quadro teórico, que discutiremos a seguir, descreve o desenvolvimento cognitivo da Matemática em Três Mundos da Matemática e nos embasa em nossa caracterização da dinâmica de movimento do pensamento matemático entre esses mundos. E por sua vez, os dois campos teóricos repercutem na construção de cada processo de ensino e aprendizagem que constituem a proposta educacional descrita no Capítulo 7, a ser aplicada após o período de pandemia desencadeado pelo Coronavírus.

CAPÍTULO 4

OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA E A DINÂMICA DE MOVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

David Orme Tall é professor emérito da Universidade de *Warwick* localizada em *Conventry* na Inglaterra. Ele investigou por quase meio século como os indivíduos aprendem, sobretudo como ocorre o desenvolvimento do pensamento matemático a longo prazo, ou seja, desde o nascimento e por toda vida do indivíduo. Para tanto, ele analisou uma gama de teorias que o conduziu à construção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. “Fundamentalmente, a teoria dos Três Mundos da Matemática nos apresenta como um ser humano, em seu desenvolvimento, faz conexões matemáticas e como são desenvolvidas as estruturas de conhecimento que crescem ao longo do tempo em tamanho e sofisticação” (VISINTAINER, 2019, p. 31). Optamos por esse quadro teórico que abarca o conhecimento matemático desde seu pensamento mais elementar ao mais aprimorado, tanto para nos embasar na construção de cada processo de ensino e aprendizagem proposto, quanto para descrevermos a dinâmica de movimento do pensamento matemático no transcorrer das atividades que constituem nossa proposta do Capítulo 7.

4.1. Os Três Mundos da Matemática

Em suas pesquisas sobre teóricos da Psicologia da Educação e da Educação Matemática, Tall esteve interessado nas similaridades das teorias, abarcadas nos estudos, sobretudo, naquelas que propõem como os indivíduos constroem cognitivamente as ideias matemáticas. Essa construção geralmente emerge das percepções no mundo real captadas por nossos sentidos, com destaque para a visão. Essas percepções são direcionadas a objetos reais ou físicos com o intuito de serem explorados por ideias matemáticas. Por exemplo, os sólidos geométricos são objetos tridimensionais que servem como modelos para ações matemáticas e suas posteriores reflexões. Entre essas ações temos, por exemplo: observar, manusear, medir, contar, classificar, ordenar, inferir e modelar.

Tall (2013) ressalta que no campo da Geometria o indivíduo geralmente aprende ideias iniciais geométricas manipulando objetos, percebendo as noções de grande ou pequeno, redondo ou não redondo por meio de comparações. Em algumas ações o indivíduo pode reconhecer semelhanças entre esses objetos ordenando-os ou classificando-os, estabelecendo relações entre eles. Por outro lado, as relações sociais proporcionam ao sujeito o compartilhamento das comparações e reflexões nesses objetos provocando o desenvolvimento dessas ações concluindo com as representações desses sólidos como objetos matemáticos (prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas, entre outros).

Sobre as representações dos objetos matemáticos, de acordo com Duval (2012, p. 267, grifo do autor)

> Há uma palavra às vezes importante e marginal em matemática, é a palavra “representação”. Ela é, na maioria das vezes, empregada sob a forma verbal “representar”. Uma escrita, uma notação, um símbolo representa um objeto matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo. Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. De fato, toda confusão acarreta, em mais ou menos a longo termo, uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações “inertes” que não sugerem nenhum tratamento. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática.

Assim, as ações iniciais e geralmente intuitivas nos objetos devem ser estimuladas a provocarem reflexões, e essas reflexões podem ser compartilhadas por alguma linguagem como, por exemplo, uma linguagem simbólica por meio de objetos matemáticos: expressões algébricas, equações, funções, entre outros. O estudo dessa linguagem aprimora as percepções dos objetos iniciais e estimula o desenvolvimento de representações mentais dos objetos matemáticos em estudo. E nesse aprimoramento é fundamental utilizar conhecimentos matemáticos já construídos que auxiliam como elos no processo de aprendizagem de novos conhecimentos matemáticos. Por exemplo, essas reflexões no campo da Aritmética conduzem ao desenvolvimento da ideia e da escrita de número (TALL, 2013).

Os estímulos a outras reflexões e o compartilhamento dessas reflexões promovem o aprimoramento da linguagem simbólica e o desenvolvimento de novas representações mentais para um mesmo objeto matemático em estudo. No campo da Álgebra, outras reflexões podem conduzir a representações de objetos matemáticos para o cálculo de perímetros, áreas e volumes. A manipulação algébrica e as relações sociais reforçam o domínio da linguagem simbólica. E no possível aprimoramento da descrição e dedução dessa linguagem simbólica, tanto no campo da Álgebra quanto no campo da Geometria podem conduzir ao desenvolvimento de teorias axiomáticas formais no âmbito do conhecimento matemático.

O quadro teórico dos Três Mundos da Matemática apresenta o conhecimento matemático se desenvolvendo em mundos distintos com características próprias, mas que estão conectados e atuam de forma dinâmica para o aprimoramento do pensamento matemático. Esses três mundos de acordo com Tall (2008, p. 8, grifo do autor) são

> O *mundo conceitual-corporificado* é baseado na percepção e reflexão sobre as propriedades dos objetos, inicialmente vistos e sentidos no mundo real, mas depois imaginados na mente. O *mundo operacional-simbólico* que cresce a partir do mundo corporificado através da ação (tal como a contagem) e é simbolizado como conceitos pensáveis (como o número) que funcionam tanto como processos para fazer como conceitos para pensar (proceitos). O *mundo axiomático-formal* (baseado em definições e provas formais), que inverte a sequência de construção de significado, desde definições baseadas em objetos conhecidos até conceitos formais baseados em definições e conjuntos teóricos.[37]

Os Três Mundos da Matemática se desenvolvem de forma diferente um do outro. Tall (2008) salienta que eles são modos diferentes de pensar matematicamente que crescem em sofisticação (aprimoramento), levando-o a descrevê-los como três mundos do conhecimento matemático que

---

[37] "the *conceptual-embodied world*, based on perception of and reflection on properties of objects, initially seen and sensed in the real world but then imagined in the mind; the *proceptual-symbolic world* that grows out of the embodied world through action (such as counting) and is symbolised as thinkable concepts (such as number) that function both as processes to do and concepts to think about (procepts); *the axiomatic-formal world* (based on formal definitions and proof), which reverses the sequence of construction of meaning from definitions based on known objects to formal concepts based on set-theoretic definitions".

se desenvolvem em níveis de pensamento cada vez mais refinado (primoroso). De acordo com Tall (2020, p. 4, grifo do autor)

> *Conceitual corporificado* refere-se ao desenvolvimento de longo prazo das propriedades dos objetos, à medida que sua concepção se torna mais sofisticada, desde a compreensão das relações entre objetos físicos até as relações mais abstratas entre objetos mentais. [...] O termo *operacional-simbólico* refere-se especificamente a expressões simbólicas que representam operações, como a adição de dois números 3 + 2, com o entendimento de que o mesmo símbolo também pode representar um objeto mental, ou seja, *a soma de 3 e 2*, que é *5.* [...] O termo *formal* é utilizado por matemáticos para se referir a estruturas especificadas por axiomas verbais e definições que incluem a abordagem axiomática da geometria euclidiana.[38]

Segundo Tall (2020), as denominações para cada um dos três mundos podem ser simplificadas para Mundo Corporificado, Mundo Simbólico e Mundo Formal. Contudo, é essencial estarmos cientes do significado particular da nomenclatura de cada mundo matemático. Tall (2013) destaca que Corporificado é o mundo das percepções no qual nós agimos, ele é o propulsor do conhecimento matemático. Em nossas ações no meio ambiente, desenvolvemos imagens mentais que posteriormente são verbalizadas em linguagem matemática, que vão se aprimorando, rompendo a fronteira do Mundo Corporificado adentrando ao Mundo Simbólico ou ao Mundo Formal.

Tall (2013) realça que o Mundo Simbólico se desenvolve a partir de nossas ações no cotidiano, que são oriundas das percepções que outrora pertenciam ao Mundo Corporificado. As ações transformam as percepções em procedimentos matemáticos, com processos e símbolos flexíveis, que permitem a execução de operações, manipulações e cálculos matemáticos. Estimular operações e manipulações matemáticas, bem como a socialização dessas ações nos objetos matemáticos proporcionam o

---

[38] "*Conceptual embodiment* refers to the long-term development of the properties of objects as their conception becomes more sophisticated, from making sense of the relationships between physical objects, to more abstract relationships between mental objects. [...] The term *operational symbolism* specifically refers to symbolic expressions that represent operations, such as addition of two numbers 3+2, with the understanding that the same symbol can also stand for a mental object, namely *the sum of 3 and 2*, which is *5*. The term *formal* is used by pure mathematicians to refer to structures specified by verbal axioms and definitions which includes the axiomatic approach of Euclidean geometry".

refinamento da linguagem simbólica e o aprimoramento do conhecimento matemático.

O Mundo Simbólico caracteriza-se pelo simbolismo operacional que se desenvolve em graus de aprimoramento até romperem a fronteira do Mundo Simbólico e adentram ao Mundo Formal. A quadratura do círculo, por exemplo, que consiste em calcular a área do círculo por meio de um retângulo de área equivalente, foi desenvolvida inicialmente pelo método da Exaustão como já tratamos no Capítulo 2. O método da Exaustão provocou manipulação geométrica (construções geométricas) e sua socialização possibilitou o aprimoramento da linguagem simbólica e consequentemente o desenvolvimento do conhecimento matemático. O método da Exaustão exigiu posterior refinamento em linguagem simbólica como na Proposição 1 de Arquimedes, cuja demonstração adentra ao Mundo Formal.

No Mundo Formal "há o emprego do formalismo axiomático que constrói o conhecimento formal em sistemas axiomáticos especificados pela definição de conjuntos teóricos, cujas propriedades são deduzidas por prova matemática"[39] (TALL, 2013, p. 17). Voltando ao método da Exaustão que conduziu a Proposição 1 de Arquimedes, as interações sociais prosseguiram provocando o aprimoramento da linguagem formal do conhecimento matemático. As reflexões conduziram, por exemplo, a construção das definições de infinitesimais e de limite.

Segundo Roque (2015), a precisão das construções geométricas foi redefinida por Descartes que utilizou técnicas algébricas para a definição de curvas, entre elas a circunferência e as cónicas. Essas técnicas algébricas aprimoraram os trabalhos com as curvas na busca de tangentes e áreas que repercutiram no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Já as manipulações algébricas, em meio a isso tudo, incentivaram o desenvolvimento dos infinitesimais que posteriormente conduziram a construção da definição de limite.

Tall (2013) destaca que os Três Mundos da Matemática estão interligados dentro de um cenário amplo e complexo. Os Mundos Corporificado e Simbólico se desenvolvem em conjunto, pois as ações no cotidiano que são

---

[39] "Axiomatic formalism builds formal Knowledge in axiomatic systems specified by set-theoretic definition, whose properties are deduced by mathematical proof".

características do primeiro dão origem às operações simbólicas presentes no segundo, e por sua vez essas manipulações matemáticas têm suas representações incorporadas nas ações dos indivíduos em seu cotidiano.

Nas relações entre os Mundos Corporificado e Simbólico, Tall (2020, p. 4) ressalta que

> Há uma diferença essencial entre o desenvolvimento de longo prazo da corporificação e o do simbolismo. Enquanto a corporificação se concentra principalmente nos objetos e classifica suas propriedades verbalmente de maneiras cada vez mais sofisticadas, o simbolismo passa por muitos estágios individuais, encontrando novas maneiras de operar com novas formas de número, primeiro por meio do cálculo, depois através da manipulação de simbolismos cada vez mais sofisticados. O desenvolvimento do simbolismo é, portanto, mais complexo do que o da corporificação. [40]

As ações nos objetos reais nos trazem informações que processamos cognitivamente instigando reflexões e, possivelmente, no âmbito do conhecimento matemático, a representação desses objetos reais em objetos matemáticos (realidade informa o indivíduo que processa essa informação). As ações nos objetos matemáticos, bem como a socialização dessas ações provocam novas reflexões e com elas, outras manipulações nos objetos matemáticos que promovem o aprimoramento desses objetos com o refinamento de sua linguagem simbólica (execução de ações que modificam a realidade que informa o indivíduo).

O incentivo a novas ações nos objetos matemáticos aprimorados constituem outras reflexões que são socializadas e, conduzem ao refinamento e ao rigor da linguagem simbólica em axiomas, teoremas e prova matemática (o individuo provido de novas informações reflete e transforma a realidade). “[...] à medida que a abstração estrutural se desloca para a definição e a dedução, isso leva ao início do pensamento formal corporificado e do pensamento formal simbólico, o que pode mais tarde se traduzir em teorias conjuntas de formalismo axiomático”[41] (TALL, 2013, p. 17). Então se pode ir do

---

[40] “There is an essential difference between the long-term development of embodiment and that of symbolism. Whereas embodiment focuses mainly on objects and classifies their properties verbally in increasingly sophisticated ways, symbolism goes through many individual stages, encountering new ways of operating with new forms of number, first through calculation, then through manipulation of increasingly sophisticated symbolism. The development of symbolism is therefore more intricate than that of embodiment”.

Mundo Corporificado ao Mundo Formal sem necessariamente transitar pelo Mundo Simbólico, assim como se pode ir do Mundo Simbólico ao Mundo Formal sem adentrar necessariamente ao Mundo Corporificado.

Acontece então que, de acordo com Tall (2013, p. 404)

> A prova matemática não é o fim da história, pois os teoremas formais axiomáticos podem levar à estruturação de teoremas que dotam a teoria de novas formas de corporificação e simbolismo, devolvendo o pensamento matemático ao mundo mental sensório-motor fundamental dos experimentos mentais e à manipulação operacional de símbolos. Isso fecha o círculo para revelar a integração completa dos três mundos de corporificação, simbolismo e formalismo e reforça a necessidade de ter um arcabouço teórico geral para o pensamento matemático que combine os três mundos. [42]

Portanto, podemos compreender que as jornadas pelos três mundos matemáticos não seguem um roteiro único (Corporificado Simbólico Formal), mas que seus caminhos são dinâmicos sem demarcar início, meio e fim obrigatório. Assim, entendemos que as jornadas podem ser traçadas a partir de qualquer dos três mundos que estão interligados, e possuem fronteiras tênues entre eles. Então, compreendemos que o roteiro pode ser representado por Corporificado Simbólico Formal, no qual o ir e vir entre os mundos reflete a dinâmica de movimento do pensamento matemático entre os três mundos, acontecendo no cognitivo de cada viajante, e que não há um mundo fixo para se iniciar ou finalizar a jornada.

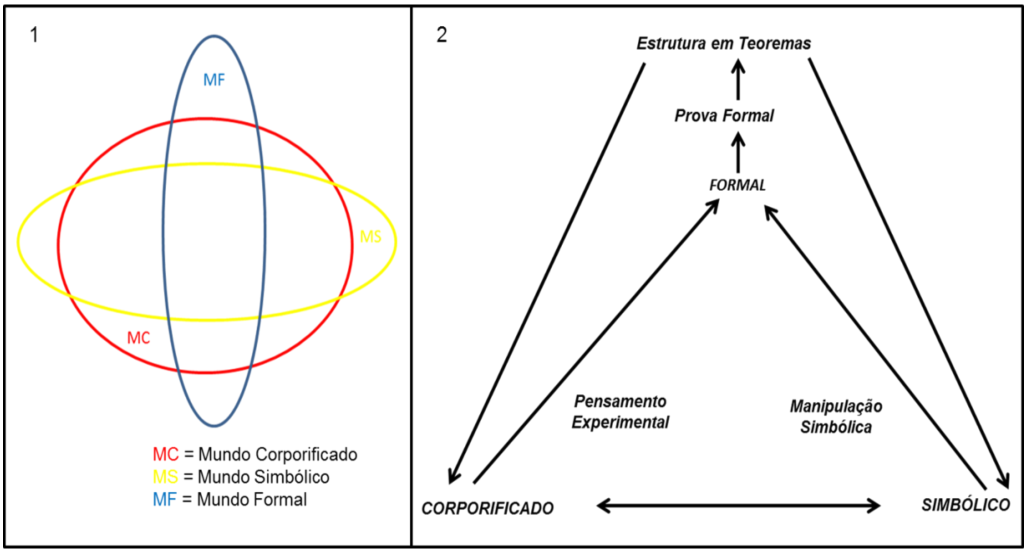
Lembramos que um dos objetivos dessa pesquisa é caracterizar a dinâmica do pensamento matemático entre os Três Mundos da Matemática como um movimento interno aos mundos que estimula e promove o desenvolvimento do conhecimento matemático. A Figura 18 representa a ideia dos Três Mundos da Matemática se desenvolvendo de forma integrada.

Figura 18 – Os Três Mundos da Matemática se complementam e coexistem.

---

[41] "As structural abstraction shifts to definition and deduction, this leads to the beginnings of embodied formal thinking and symbolic formal thinking, which may later translate into set-theoretic axiomatic formalism".

[42] "Mathematical proof is not the end of the story, for axiomatic formal theorems can lead to structure theorems that endow the theory with new forms of embodiment and symbolism, returning mathematical thinking to the fundamental sensory-motor mental world of thought experiments and the operational manipulation of symbols. This closes the circle to reveal the full integration of the three worlds of embodiment, symbolism and formalism and reinforces the need to have an overall theoretical framework for mathematical thinking that blends together all three".



Fonte: Elaborada pelos autores a partir de Tall (2005) imagem 1 e de Tall (2013) imagem 2.

Assim, as ações praticadas no Mundo Corporificado, oriundas de nossas percepções, alimentam o simbolismo matemático presente no Mundo Simbólico. Nele, os objetos matemáticos, por sua vez, vão se aprimorando em graus de refinamento matemático, perpassando por prova matemática e se estruturando em definições baseadas em teoremas no interior do Mundo Formal. O pensamento experimental e a manipulação simbólica rompem suas fronteiras rumo ao formalismo matemático, mas ele não é o fim, e sim o reinício de um novo ciclo. Afinal, segundo Tall (2020, p. 22) “Os três mundos da matemática se desenvolvem para cima enquanto corporificação e simbolismo interagem entre si para inspirar a teoria formal axiomática que, por sua vez, leva a corporificações e simbolismos mais sofisticados por meio da prova com base na estrutura de teoremas”. [43]

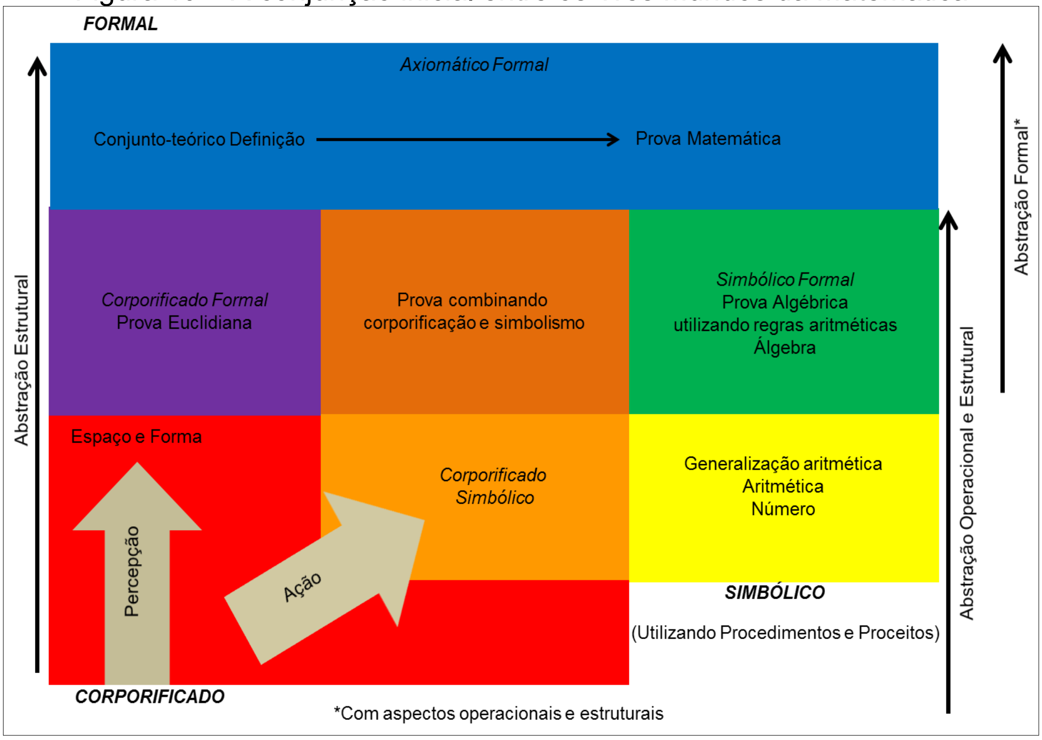
Nesse cenário, as definições estruturadas por teoremas e prova matemática presentes no Mundo Formal, devolvem aos mundos Corporificado e Simbólico novas perspectivas de atuação e manipulação respectivamente. Esse retorno possibilita outros olhares para o cotidiano, bem como suas construções e manipulações mentais (Corporificado) e consequentemente gerando novas ideias e outros objetos matemáticos (Corporificado ou Simbólico). E essas ideias vão se aprimorando novamente provocando o refinamento da linguagem simbólica e, nas reflexões do indivíduo

[43] “The three worlds of mathematics spiral upwards together as embodiment and symbolism interact with each other to inspire axiomatic formal theory which in turn leads to more sophisticated embodiment and symbolism through proving structure theorems”.

a construção de novos objetos matemáticos que induzem a outras maneiras de prova matemática (Corporificado com Formal, Simbólico com Formal, Corporificado com Simbólico e com Formal e, Formal), ainda mais eficazes em estruturas de teoremas que as sustentam. Segundo Visintainer (2019, p. 29) "Para se desenvolver demonstrações no Mundo Formal, podem-se utilizar aspectos do Mundo Simbólico e também do Mundo Corporificado, o que evidencia o inter-relacionamento dos Três Mundos da Matemática".

A Figura 19, nos mostra a união entre os Três Mundos da Matemática formando um todo incorporado e coerente. Para diferenciação e posterior confluências, escolhemos as cores vermelho, amarelo e azul para representarmos os mundos corporificado, simbólico e formal, respectivamente, por se tratarem de cores primárias.

Figura 19 – A conjunção inicial entre os Três Mundos da Matemática.



Fonte: Elaborada pelos autores a partir de (TALL, 2013, p.17).

Assim, conforme representado na Figura 19, os Três Mundos em seus entrelaçamentos, faz surgir outras cores que na verdade são as misturas das três cores primárias. Como já salientamos, as regiões em vermelho, amarelo e azul representam os mundos Corporificado, Simbólico e Formal, respectivamente. Nelas, os mundos são identificados e estudados de forma isolada mantendo as características próprias de cada mundo. A área limitada pela cor laranja claro (Corporificado Simbólico) possui elementos dos dois mundos agindo em conjunto. O espaço na cor verde (Simbólico Formal) é uma mistura de cores amarelo e azul, ou seja, uma região de confluência entre o Mundo Simbólico e o Mundo Formal.

Por sua vez, a região de cor roxa (Corporificado Formal) junta o vermelho do Corporificado com o Azul do Formal, logo nesse espaço há presença de entes característicos desses dois mundos. Já a área central de cor laranja escuro incorpora o entrelaçamento dos três mundos (prova formal combinando corporificação e simbolismo matemático). Com isso, destacamos que a transição entre os Três Mundos da Matemática não ocorre de forma abrupta, pois há regiões de intersecção entre eles, que aqui denominamos de zonas de confluências entre os mundos.

Nesse cenário, uma possível jornada pelos três mundos, no caso, rumo a uma abstração estrutural, parte do viajante em seu cotidiano com base em suas percepções e consequentes ações em seu meio. Por um lado, por exemplo, utilizando procedimentos e conceitos (*proceitos*) sob essas percepções transformando-as em números (quantificando) que se enquadram dentro da Aritmética e por meio de suas normas (regras) conduzem o viajante a duas abstrações denominadas por Tall (2013) de Abstração Operacional e Abstração Estrutural[44].

Ela possibilita o rompimento da fronteira entre o Mundo Simbólico (amarelo) adentrando ao espaço do Simbólico Formal (verde) que instiga a abordagem algébrica, mas que ainda utiliza regras aritméticas para uma possível prova algébrica. Nesse caminho, mais estudos e reflexões conduzem o viajante ao Mundo Formal, cuja passagem é possibilitada pelo que Tall (2013) denominou de Abstração Formal, mas ainda com aspectos operacionais e estruturais. Destacamos que há outros caminhos, que formam outras jornadas.

De acordo com Tall (2004a, p. 6)

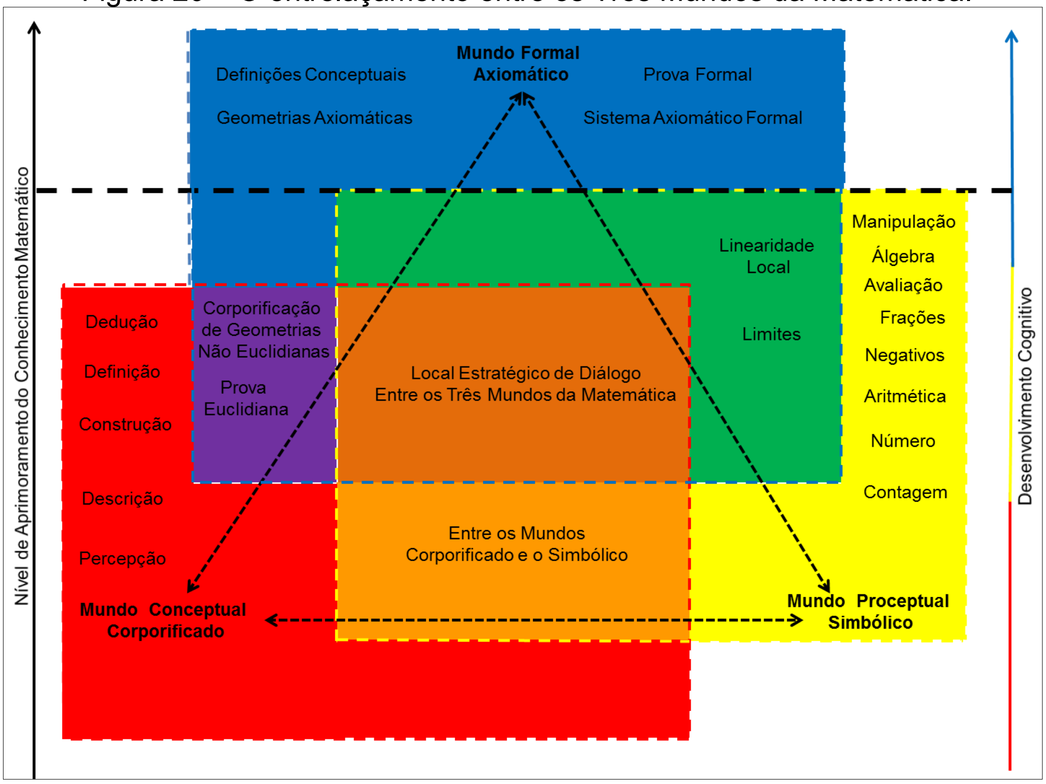
---

[44] Tall (2013) destaca em seu quadro teórico dos Três Mundos da Matemática três tipos de abstrações: a abstração estrutural que envolve a capacidade que o individuo tem em diferenciar objetos matemáticos ou não como, por exemplo, uma mesa de uma cadeira, um cilindro de uma esfera, uma equação de uma função; a abstração operacional que envolve a capacidade do indivíduo manipular operações matemáticas como adição, subtração, multiplicação, potenciação, radiciação; a abstração formal que envolve a capacidade do indivíduo de operar em definições formais e prova matemática.

> À medida que um indivíduo viaja através de cada mundo, vários obstáculos ocorrem no caminho que exigem que as ideias anteriores sejam reconsideradas e reconstruídas, de modo que a jornada não seja a mesma para cada viajante. Pelo contrário, diferentes indivíduos lidam com os vários obstáculos de diferentes maneiras, levando a uma variedade de desenvolvimentos pessoais, alguns dos quais permitem que o indivíduo progrida através de uma sofisticação crescente de uma maneira significativa, enquanto outros levam a concepções alternativas, ou mesmo a falhas. [45]

A Figura 20 condensa as imagens das Figuras 18 e 19, na qual explicitamos os Três Mundos da Matemática com seus principais elementos constituintes e com a dinâmica interativa entre os mundos. Colocamos suas fronteiras pontilhadas, pois entendemos que essas fronteiras são transponíveis entre os mundos, e esses estão em expansão tanto dentro de cada mundo, entre os mundos, incluindo as suas intersecções. O seu ciclo é complexo e em constante movimento de completude ao longo de cada jornada.

Figura 20 – O entrelaçamento entre os Três Mundos da Matemática.



Fonte: Elaborada pelos autores a partir de Tall (2013).

[45] “As an individual travels through each world, various obstacles occur on the way that require earlier ideas to be reconsidered and reconstructed, so that the journey is not the same for each traveller. On the contrary, different individuals handle the various obstacles in different ways that lead to a variety of personal developments, some of which allow the individual to progress through increasing sophistication in a meaningful way while others lead to alternative conceptions, or even failure”.

Cada indivíduo realiza a sua jornada, e no final do caminho, que já reinicia outra jornada, o viajante já não é mais o mesmo, assim como sua compreensão de cada Mundo da Matemática foi ampliada. Ou seja, durante uma jornada qualquer, o indivíduo vai construindo relações que o fazem reagir e após cada reação sua percepção de mundo matemático se amplia o que o conduz a perceber coisas (Mundo Corporificado) que ele não percebia antes e, essas novidades percebidas o levam a consequentes reações diferenciadas, abrindo outras possibilidades de manipulação matemática (Mundo Simbólico), que o conduz por outros caminhos com graus de refinamento em linguagem matemática, que podem chegar a novas estruturas de teoremas e de prova matemática (Mundo Formal) para sustentar internamente o que foi sendo construído matematicamente ao longo dessa nova jornada. E o ciclo se reinicia.

4.2. Uma breve apresentação de teses e dissertações brasileiras que envolvem os Três Mundos da Matemática

Buscando realizar uma breve apresentação de pesquisas de mestrado e doutorado brasileiras que envolvem o quadro teórico Três Mundos da Matemática, realizamos investigações no Catálogo de Dissertações e Teses da CAPES, alocado virtualmente na Plataforma Sucupira, bem como no portal da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. Nas duas investigações colocamos como termo de procura o nome Tall, das quais emergiram, inicialmente, 1013 (mil e treze) trabalhos sendo: 706 (setecentos e seis) na BDTD e 307 (trezentos e sete) no CTDC.

Ao analisarmos os resumos desses trabalhos, encontramos 30 (trinta) pesquisas que utilizaram o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática em suas investigações. Desses, 16 (dezesseis) são dissertações de mestrado e 14 (quatorze) são teses de doutorado. O Quatro 12 descreve as instituições de Ensino Superior e os seus programas de Pós-Graduação de onde emergem as dissertações (D) e as teses (T) que produzem a soma (S) dos trabalhos analisados. Aqui descrevemos os significados das siglas das instituições que não foram mencionadas anteriormente: Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP); Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP); Universidade Franciscana (UFN) e; Universidade de Caxias do Sul (UCS).

Quadro 12 – Quantitativo de teses e dissertações por instituição e seu programa de pesquisa.

Instituição – Programa de Pós-Graduação	D	T	S
UNIBAN/UNIAN – Educação Matemática.	11	6	17
UFOP – Educação Matemática.	1	---	1
PUCSP – Educação Matemática.	1	4	5
PUCRS – Educação em Ciências e Matemática.	---	1	1
UEL – Ensino de Ciências e Educação Matemática.	1	2	3
UFN – Ensino de Ciências e Matemática.	1	1	2
UCS – Ensino de Ciências e Matemática.	1	---	1
Total Geral	**16**	**14**	**30**

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos dados da pesquisa.

Desses dados, ressaltamos que são 23 (vinte e três) trabalhos desenvolvidos em programas de Pós-Graduação em Educação Matemática. A UNIBAN/UNIAN abarca aproximadamente 57% das pesquisas (teses e dissertações) envolvendo o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Brasil. As publicações das investigações se estendem de 2007 a 2020. Esses dados foram coletados nos dias 16 de maio a 30 de junho de 2020. O Quadro 13 apresenta, em ordem cronológica de data de defesa, os 16 (dezesseis) autores, os títulos das suas dissertações e as instituições que propiciaram essas pesquisas em seus programas de Pós-Graduação.

Quadro 13 – As pesquisas de mestrado no Brasil envolvendo os Três Mundos da Matemática.

Autor	Título da pesquisa – Instituição (ano da defesa)
Josias Nogueira Badaró	Significados do símbolo de igualdade numa jornada por Três Mundos da Matemática – UNIBAN (2010).
Norberto Machado Angelini	Funções: um estudo baseado nos Três Mundos da Matemática – UNIBAN (2010).
Rosangela Marazzio Koch	Uma introdução ao estudo das equações quadráticas à luz dos Três Mundos da Matemática – UNIBAN (2010).
Bárbara Nivalda Palharini Alvim Souza Robim	Modelagem Matemática e Pensamento Matemático: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática – UEL (2010).
Paulo César Freire	Uma jornada por diferentes Mundos da Matemática investigando os números racionais na forma fracionária – UNIBAN (2011).
Ricardo Pedroso dos Santos	O papel do software Apluxis na transição de equações de avaliação para equações de manipulação: o caso das equações quadráticas – UNIBAN (2011).
Ana Maria Ferreira Pinto Poggio	Um diagnóstico sobre o conceito de proporcionalidade de alunos do Ensino Médio na perspectiva dos Três Mundos

	da Matemática – UNIBAN (2012).
Daila Silva Seabra de Moura Fonseca	Convergências de sequências e séries numéricas no Cálculo: um trabalho visando a corporificação de conceitos – UFOP (2012).
Márcio Vieira de Almeida	Um panorama de artigos sobre a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva de David Tall – PUCSP (2013).
Patrícia Felipe	A proposta curricular do Estado de São Paulo e o *software* GeoGebra: uma análise de atividades sobre funções exponenciais e logarítmica à luz dos Três Mundos da Matemática – UNIAN (2013).
Douglas Paes Mação	Uma proposta de ensino para o conceito de derivada – UNIAN (2014).
Cairo Gomes Fernandes	Ângulos e paralelismo nos livros didáticos à luz dos Três Mundos da Matemática – UNIAN (2015).
Sidney Silva Santos	Equivalência de números racionais na representação fracionária: um olhar para livros didáticos à luz dos Três Mundos da Matemática – UNIAN (2016).
Marlene Rosa Sena	Resolução de problemas algébricos: uma análise à luz dos Três Mundos da Matemática – UNIAN (2017).
Gabriel de Oliveira Soares	O conceito de limite na formação inicial de professores de Matemática: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática – UFN (2018).
Bruna Moresco Rizzon	Formação continuada para professores de Matemática: o erro como recurso pedagógico e seu papel no processo de avaliação – UCS (2018).

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos dados da pesquisa.

Badaró (2010) salienta que a pesquisa por significados para o símbolo de igualdade entre os Três Mundos da Matemática pode ser diversificada, dependendo das faixas etárias e o desenvolvimento cognitivo dos pesquisados, bem como as situações de uso do símbolo de igualdade. O autor realça que ao olharmos para o símbolo de igualdade, com o seu significado operacional, estamos observando-o no campo do Mundo Corporificado. Se o observamos com o seu significado de equivalência, essa observação ocorre no Mundo Simbólico. Já se interpretarmos o símbolo de igualdade como uma identidade, esse significado traz características do Mundo Formal.

Angelini (2010), em sua pesquisa sobre as dificuldades de ensino de funções para estudantes do Ensino Médio, apresentou algumas considerações sobre o conceito de função no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. Para o autor, as tabelas numéricas, as operações aritméticas com números inteiros, a construção de gráficos (a disposição dos eixos, o ângulo entre os eixos, a identificação dos pontos) e diagramas são ações presentes no Mundo Corporificado. Já as expressões algébricas utilizadas para a representação de funções, bem como a manipulação algébrica dessas expressões são representações presentes no Mundo Simbólico. Ainda com relação ao Mundo Simbólico, o autor destaca: a questão da relação de dependência; a diferenciação entre a representação de variáveis dependentes e independentes; domínio e imagem; o significado da expressão ; bem como saber interpretar os dados de um gráfico ou de uma tabela, um gráfico ou tabela.

Koch (2010), com base no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, investigou um grupo de estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental, com vistas às dificuldades de transição entre as resoluções de equações lineares e as equações quadráticas por parte desses estudantes. De acordo com Lima (2007), há dois tipos de equações algébricas: as equações de avaliação que possuem a forma e contém o valor da incógnita em um único membro e, cuja resolução pode ser realizada desfazendo cada uma de suas operações e; as equações de manipulação do tipo , as quais, para resolução exigem manipulação algébrica. Assim, segundo Koch (2010), foram encontradas características dos três mundos nas resoluções dos estudantes: no Mundo Corporificado quando o estudante procura pela(s) raiz(es) de uma equação por avaliação; no Mundo Simbólico quando o estudante realiza manipulações algébricas para a resolução de equações de manipulação e; no Mundo Formal quando os alunos utilizam operações inversas nas resoluções dessas equações.

Robim (2010) utilizou atividades de Modelagem Matemática com acadêmicos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática. As atividades propostas envolvem operações matemáticas, supostamente já conhecidas pelos participantes, no processo de construção do modelo matemático, com destaque para os processos de representação, de abstração e de generalização que são essenciais no desenvolvimento do pensamento matemático avançado. “Assim, a partir das análises, inferimos que atividades de Modelagem Matemática têm potencial para que os alunos desenvolvam seus processos de pensamento e utilizem características relacionadas aos Três Mundos da Matemática” (p. 177).

Na pesquisa com 51 (cinquenta e um) estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, Poggio (2012), tendo como base teórica os Três Mundos da Matemática, investigou as concepções desses estudantes sobre as definições de proporcionalidade da forma direta e da forma inversa. Em seu trabalho, a autora diferencia o pensamento proporcional do raciocínio proporcional[46]. Ela buscou investigar: que definições e que imagens esses estudantes têm sobre os conceitos de proporcionalidade direta e inversa; quais características de cada um dos Três Mundos da Matemática estão presentes nas respostas às questões ou na resolução de situações envolvendo os conceitos de proporcionalidade direta e indireta. Nesse cenário de investigação, de acordo com Poggio (2012, p. 208, grifo do autor):

> Por fim, podemos resumir este nosso diagnóstico afirmando que, em relação às respostas dadas sobre a proporcionalidade direta, estas apontaram que estes alunos possuem uma *imagem de conceito* que classificamos como pobre, apresentando exclusivamente *características corporificadas*, baseadas em um gráfico de "reta com coeficiente angular positivo"; e quando mostram características do *mundo simbólico,* estas não correspondem a este conceito. Em relação às respostas apresentadas sobre a proporcionalidade inversa, estas sugerem que estes alunos não fazem uma jornada pelos *Três Mundos da Matemática* e apresentam essencialmente *características corporificadas* ao longo do trabalho. A *definição de conceito* deste grupo, tanto para a proporcionalidade direta como para a proporcionalidade inversa, mostra essencialmente *características corporificadas,* com textos muitas vezes equivocados, insuficientes para serem aceitos como uma boa definição, que pudesse ser utilizada como uma substituta da usualmente dada pela comunidade Matemática.

Já Sena (2017), destaca que a metodologia da resolução de problemas ajudou evidenciar os processos utilizados pelos estudantes da pesquisa na resolução de problemas algébricos. A socialização das ideias entre eles no transcorrer das atividades possibilitou as discussões para a resolução de cada problema proposto. As maiores dificuldades emergiram quando eles precisaram apresentar seus raciocínios de resolução por escrito. A

---

[46] "Entendemos que o pensamento proporcional envolve uma ideia geral, ampla, segundo a qual o individuo tem à sua disposição informações para tomada de decisão. E o raciocínio proporcional envolve a avaliação que o indivíduo aplica diante de um problema, o que chamamos de raciocínio típico de proporcionalidade, com o qual ele avalia o que vai usar para resolver tal problema. Entendemos que a proporcionalidade direta e a proporcionalidade inversa fazem parte do pensamento proporcional. Cada uma delas possui um raciocínio proporcional típico, isto é como são utilizados seus conceitos e propriedades. Na proporcionalidade direta o indivíduo precisa saber que a razão entre as grandezas é constante. A proporcionalidade inversa envolve outro tipo de raciocínio, o individuo precisa saber que o produto entre as grandezas é constante" (POGGIO, 2012, p. 59).

autora ressalta que as socializações nos trabalhos em grupo auxiliaram a resolver parte das dificuldades com a escrita em linguagem simbólica.

Ainda segundo Sena (2017), nas resoluções dos estudantes aparecem características de cada um dos Três Mundos da Matemática, com destaque para representações dos Mundos Corporificado e Simbólico envolvendo a resolução dos problemas por meio das quatro operações fundamentais. “Analisando as situações-problema apresentadas, podemos observar que os alunos participantes não utilizaram procedimentos algébricos com frequência, nem escreveram equações para representar as situações-problema propostas” (p. 115). Participaram da pesquisa estudantes do segundo ano do Ensino Médio e foram utilizados problemas envolvendo equações polinomiais do primeiro grau.

Em pesquisas sobre a representação de números racionais em sua forma fracionária nos Três Mundos da Matemática, Freire (2011), constatou que a maioria dos estudantes investigados não apresentaram dificuldades para representar números racionais em sua forma fracionária, utilizando características do Mundo Corporificado. Porém, ao precisar aprender e utilizar características do Mundo Simbólico para fazer essas representações eles tiveram dificuldades. O autor sugere que sejam realizadas sequências didáticas, com aportes teóricos dos Três Mundos da Matemática, na abordagem desse e de outros temas.

Almeida (2013) realizou um panorama sobre artigos científicos que publicaram pesquisas com estudos de conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral envolvendo teorias discutidas por David Tall. Segundo o autor, o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática emergiu de forma sutil em seu panorama, mas ele ressalta que somente esse quadro daria outro panorama. Já Santos (2016), analisou dez livros didáticos concluindo que além do livro didático, o professor pode realizar uma sequência de atividades que possibilite ao estudante lidar com a representação fracionária de um número racional e o que advém dessa construção: parte-todo; quociente; medida; operador e razão.

Tall (2013) ressalta a importância de trabalharmos com *softwares* educacionais no desenvolvimento de um processo de ensino e aprendizagem do conhecimento matemático, eles auxiliam a interpretação ao analisarmos gráficos construídos por meio dessas ferramentas digitais. Santos

(2011), em sua pesquisa com três estudantes do nono ano do Ensino Fundamental, proporcionou que eles utilizassem o *software* Aplusix[47] para realizarem a transição entre a resolução de situações que envolveram equações lineares com outras que traziam equações quadráticas nas suas resoluções. O autor conclui que em suas análises das atividades desenvolvidas pelos estudantes, foram evidenciadas características predominantes do Mundo Corporificado.

Fonseca (2012) em sua pesquisa com acadêmicos de um curso de Engenharia da Produção, perante a disciplina de Cálculo II, utilizou o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática em parceria com o Pensamento Matemático Avançado e apoio pedagógico do *software* GeoGebra, para investigar o desempenho dos acadêmicos no transcorrer de um processo de ensino e aprendizagem envolvendo os conceitos e a resolução de atividades sobre sequências e séries numéricas. Para a autora, o Geogebra favoreceu a corporificação dos conceitos estudados e auxiliou os acadêmicos na transição para o Mundo Simbólico durante o processo de manipulação algébrica na resolução das atividades, bem como eles atingiram o Mundo Formal ao apresentarem os conceitos envolvidos.

Felipe (2013) trabalhou com estudantes do primeiro ano do Ensino Médio na resolução de funções exponenciais e logarítmicas com a utilização do *software* GeoGebra. Segundo a autora, o GeoGebra contribui na dinâmica de visualização dos gráficos e de suas expressões algébricas, proporcionando ao estudante fazer relações entre essas representações. Com relação à jornada pelos Três Mundos da Matemática, Felipe (2013, p. 200, grifo da autora):

> Considerando que os alunos construíram gradativamente a noção de variação de cada coeficiente quando inserido na função, isto é, num primeiro momento eles utilizaram características corporificadas ao descreverem apenas as percepções daquilo que visualizavam com o movimento dos seletores, e, ao serem inseridos todos os coeficientes na

---

[47] "Aplusix é um micro mundo de álgebra destinado à realização de cálculos algébricos que possui um editor avançado de expressões algébricas e de resoluções. O aluno pode resolver exercícios preparados pelo professor e gravá-los em arquivos, o que é feito automaticamente, a partir do momento em que o aluno começa a trabalhar. A sintaxe utilizada é bastante simples, sendo de fácil familiarização tanto para alunos quanto para professores, como tem sido comprovado nas várias experiências já realizadas em diversos países, com *Aplusix*" (BITTAR; CHAACHOUA; FREITAS, 2004, p. 3, grifo dos autores).

> função, os alunos conseguiram fazer a junção desses coeficientes, visualizando a variação ocorrida no gráfico em relação a cada um, utilizando, assim, características do mundo formal. Então, podemos dizer que os alunos conseguiram fazer algumas relações entre os mundos corporificado e formal, porém, houve a predominância de características do mundo corporificado, principalmente nas tarefas sobre função logarítmica. Talvez seja pelo fato de não termos escolhido atividades que privilegiassem essa relação entre os mundos corporificado e simbólico, ou entre os mundos simbólico e formal. Sendo assim, entendemos que a jornada não foi completa porque nossas atividades escolhidas e adaptadas contemplaram muito mais as discussões entre os mundos corporificado e formal do que o mundo simbólico. O *software* também não propiciou tantas relações assim usando o mundo simbólico.

Já no âmbito do Ensino Superior, Mação (2014), ao analisar dois livros didáticos de Cálculo, apresenta uma proposta de ensino e aprendizagem sobre a derivada de funções, direcionada para acadêmicos que supostamente irão estudar esse conteúdo pela primeira vez. Com base no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, a proposta é composta por três abordagens: geométrica (caso o gráfico da função tenha reta tangente, a derivada dessa função é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função) que apresenta características do Mundo Corporificado; a derivada como uma taxa de variação (como no caso do cálculo de velocidade instantânea de uma função cuja variável é o tempo) com representações predominantes do Mundo Simbólico; por aproximação (a derivada de uma função é determinada pela aproximação linear da função em relação a um ponto) com características do Mundo Formal.

Ainda com relação à investigação de conteúdos matemáticos nos livros didáticos à luz dos Três Mundos da Matemática, Fernandes (2015), pesquisou em três coleções os temas ângulos e paralelismos. Para o autor, as abordagens educacionais e as atividades presentes nos três livros investigados promovem: as construções de ângulos e paralelismos entre elementos geométricos que estão relacionadas ao Mundo Corporificado; instigando cada estudante a medir e trabalhar as propriedades dos ângulos propiciando-o a manusear instrumentos de medida de ângulos, bem como a manipulação simbólica por meio de atividades envolvendo operações matemáticas, características presentes no Mundo Simbólico; e no Mundo Formal, apresentando a definição de ângulo com vistas à definição de paralelismo. O autor ressalta que as abordagens dos três livros podem conduzir os estudantes pelos três tipos de abstrações: estrutural, operacional e formal.

Soares (2018), em sua pesquisa sobre o conceito de limite na formação inicial de professores de Matemática, faz um estudo em três livros didáticos de Cálculo realçando suas abordagens sobre a introdução ao conceito de limite, tendo como base de análise dos dados, o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. Segundo o autor, os três livros apresentam características dos três mundos matemáticos em seus exemplos introdutórios sobre o tema: Visualização de limites por meio de construções e representações gráficas e construções de gráficos e tabelas (Mundo Corporificado); manipulações algébricas estimuladas com o cálculo de limites em vários pontos (Mundo Simbólico) e; na introdução para a construção da definição de limite (Mundo Formal). O autor destaca que nos três livros são necessários conhecimentos prévios por parte dos estudantes, como por exemplo: conceito de funções, construção de tabelas de pontos, análise de gráficos.

Em um estudo sobre como professores de Matemática do Ensino Fundamental veem o erro no processo de avaliação, Rizzon (2018), utilizou como uma de suas bases de análise o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática para identificar indícios do aprimoramento do pensamento matemático dos professores participantes. Esses professores frequentaram um curso de 30 (trinta) horas, distribuídas em nove encontros, para promover avanços na aprendizagem de conceitos de sequências e séries. A autora analisou as resoluções de duas questões propostas aos participantes com vistas à análise de erro e, de transição do pensamento matemático de cada professor entre os Três Mundos da Matemática. Na primeira questão, predominantemente, os professores transitaram entre os Mundos Corporificado e Simbólico, já na segunda questão houve predominância do Mundo Simbólico com indícios do Mundo Formal.

Com relação às 16 (dezesseis) dissertações, em dez, os conteúdos abordados nas pesquisas são da Educação Básica e as outras seis envolvem o estudo de objetos matemáticos do Ensino Superior. Destacamos que nas atividades foi utilizada alguma das metodologias de ensino da

Matemática: História da Matemática; Modelagem Matemática; Resolução de Problemas; *Softwares* Educacionais. Dentre essas metodologias destacamos a utilização dos *softwares* que segundo os autores são fundamentais para auxiliarem na construção de representações dos objetos matemáticos estudados, bem como nas relações entre as formas geométricas e algébricas que sua utilização proporciona.

O Quadro 14 apresenta, em ordem cronológica de data de defesa, os 14 (quatorze) autores, os títulos das suas teses e as instituições que propiciaram essas pesquisas em seus programas de Pós-Graduação.

Quadro 14 - As pesquisas de doutorado no Brasil envolvendo os Três Mundos da Matemática.

Autor	Título da pesquisa – Instituição (ano de publicação)
Rosana Nogueira de Lima	Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes Mundos da Matemática – PUCSP (2007).
Jayme do Carmo Macedo Leme	Aprendizagem da Derivada: uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento – PUCSP (2016).
Jeferson da Silva Gonçalves	Relações entre as funções inversa e composta: uma exploração dos conceitos com o auxílio do software GeoGebra – UNIAN (2017).
Paulo César Freire	Uma jornada dos números naturais aos racionais com uma aluna com deficiência visual – UNIAN (2017).
Rodrigo Rodrigues Dias	Aspectos cognitivos e conceituais mobilizadores na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia – UNIAN (2017).
Marta Burda Schastai	Tall e Educação Matemática Realística: algumas aproximações – UEL (2017).
Márcio Vieira de Almeida	Material para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral: referencias de Tall, Gueudt e Trouche – PUCSP (2017).
Jeronimo Becker Flores	Monitoria de Cálculo e processo de aprendizagem: perspectivas à luz da Sociointeratividade e da teoria dos Três Mundos da Matemática – PUCRS (2018).
Roberto Seidi Imafuku	O uso dos softwares SimCalc e GeoGebra para o enriquecimento da imagem de conceito de derivada – UNIAN (2018).
Paulo Ferreira do Carmo	Pensamento Matemático Avançado – como essa noção repercute em dissertações e teses brasileiras? – PUCSP (2018).
Joelson de Araújo Delfino	Uma análise sobre a imagem de conceito de integral de alunos de engenharia na perspectiva dos Três Mundos da Matemática – UNIAN (2019).
Mário Visintainer	Significados de Cônicas à luz dos Três Mundos da Matemática – UNIAN (2019).
Daniele Peres da Silva Martelozo	Interações entre cognição e afetividade na aprendizagem da Matemática – UEL (2019).
Marcia Viaro Flôres	Construção dos números racionais na licenciatura: um estudo desenvolvido à luz dos Três Mundos da Matemática – UFN (2020).

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos dados da pesquisa.

Lima (2007) realizou uma investigação sobre as concepções de estudantes em relação à resolução de equações. Participaram da pesquisa alunos da primeira e segunda série do Ensino Médio. A autora observou que os estudantes participantes: tendem a conceder as equações como os cálculos com as operações matemáticas (contas) evidenciando que os estudantes tratam as equações como expressões numéricas; objetos matemáticos como a incógnita e o sinal de igual, aparentemente, são colocados em segundo plano nas resoluções. Com relação à igualdade na equação, a autora, evidencia que ao resolverem as equações propostas os estudantes realizaram operações desconectadas nos dois membros da equação. Bem como tendem a utilizar métodos próprios de resolução considerando os objetos matemáticos presentes como entes reais, ao que a autora denomina de procedimentos corporificados, que são movimentados de um membro para o outro da equação. As equações quadráticas são resolvidas predominantemente por meio da fórmula de Bhaskara[48].

Em sua pesquisa que ressaltou os fluxos do pensamento matemático entre os Três Mundos da Matemática, com relação ao ensino e aprendizagem do conceito de derivada, Leme (2016), desenvolveu nove fluxos de pensamento que possibilitam o desenvolvimento desse conceito. Segundo o autor, no Mundo Corporificado, o fluxo de pensamento matemático está na visualização do movimento de retas secantes a uma curva, com direcionamento a inclinação da reta tangente em um determinado ponto da curva e, na linearidade de uma curva e na taxa de variação. No Mundo Simbólico o processo de contagem deve ser aprimorado para dar sentido aos símbolos do processo de derivação, bem como por meio de cálculos de derivadas de funções utilizando regras de derivação. “No mundo formal, existe uma estrutura axiomática relacionada a derivada, que a partir da definição de

[48] “Ainda que os indianos já usassem alguns símbolos, a fórmula geral que utilizamos hoje também não pode ter sido proposta por Bhaskara, uma vez que eles não dispunham de um simbolismo para os coeficientes. Fica a pergunta: quem foi, afinal, o real inventor da fórmula de resolução das equações do segundo grau, atribuída erroneamente a Bhaskara? Tal pergunta é bastante frutífera para desconstruirmos algumas concepções equivocadas sobre a história da matemática. Às vezes pensamos, erradamente, que a matemática evoluiu de modo linear: os matemáticos, em certo momento, teriam disponível uma obra inacabada cujas lacunas deveriam ir preenchendo. Não aconteceu assim, sobretudo no passado, quando os meios de comunicação eram muito distintos dos atuais” (ROQUE, 2015, p. 256-257).

derivada dada por , se esse limite existir e for finito, desenvolve-se uma estrutura de provas e demonstrações em que todas as regras e propriedades são demonstradas ou provadas matematicamente" (p. 56).

O trabalho de Almeida (2017) proporcionou a construção de um material didático para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, tendo como uma de suas referências teóricas, os Três Mundos da Matemática. O material é composto por atividades que abordam os conceitos de função, continuidade, diferenciabilidade, como obter a solução de uma equação diferencial, integral e limite de sequências. Segundo o autor, a utilização do GeoGebra é fundamental para o desenvolvimento das atividades que são pautadas para estreitar a dicotomia entre teoria e prática. Para ele, o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática se mostra com eficácia para identificar a possível aprendizagem dos estudantes envolvidos, bem como apresenta possibilidades de adequações no transcorrer do processo de ensino e aprendizagem.

Gonçalves (2017) realizou uma pesquisa com estudantes do Ensino Médio sobre as relações entre os conceitos de função inversa e função composta, por meio do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. O autor ressalta que ao analisar os livros didáticos, com relação aos objetos matemáticos em estudo, constatou que eles possuem uma abordagem predominantemente algébrica para as funções inversa e composta. Nesse sentido, buscando a diversificação de tratamentos das funções inversa e composta, o autor, optou por construir um experimento de ensino com o apoio do *software* GeoGebra. As atividades foram elaboradas com funções polinomiais do 1º e 2º graus e funções exponenciais. Os estudantes participantes formaram duplas para fazerem as atividades. De suas análises, após a aplicação do experimento de ensino, no Mundo Corporificado há a construção de gráficos, bem como suas representações e manipulações algébricas que são representações dessas funções no Mundo Simbólico. O Mundo Formal foi representado pela apresentação das definições das duas funções.

No encontro com a educação inclusiva, Freire (2017), realizou uma pesquisa sobre a jornada dos números naturais aos números racionais, pelos Três Mundos da Matemática, por uma estudante deficiente visual da quarta série do Ensino Fundamental. Como uma aluna cega constrói a imagem do conceito de número racional entre os mundos da Matemática? O autor promoveu a construção de alguns materiais didáticos (a Caixa de Operações Matemáticas e a Caixa Sonora de Números Racionais na Forma Fracionária), bem como a utilização do Material Dourado e o *software* Ritmática com algumas adaptações para a participante.

Dias (2017), investigou os aspectos cognitivos e conceituais de acadêmicos de engenharia nos processos de resolução de problemas de otimização. Com relação aos Três Mundos da Matemática, de acordo com o autor, os participantes trouxeram representações dos três mundos em suas resoluções: no Mundo Corporificado em ações para modelarem o problema de otimização, bem como a utilização de material concreto; no Mundo Simbólico com o emprego de uma linguagem simbólica que no transcorrer das resoluções foram refinadas e aprimoradas aumentando a eficácia dessa linguagem no processo de otimização da situação problema proposta; no Mundo Simbólico com a proposição, por parte dos acadêmicos participantes, de definições e deduções advindas das definições para fundamentar suas resoluções da situação problema.

De acordo com Schastai (2017), o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática age como um mapa que nos fornece pistas sobre o desenvolvimento do pensamento matemático, em longo prazo, desde seu pensamento mais elementar ao pensamento mais aprimorado. Esse quadro possibilita o desenvolvimento de jornadas cognitivas de estudantes e professores envolvidos em algum processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Para a autora, ao categorizarmos os objetos reais por meio de nossas percepções visuais e táteis, damos início ao desenvolvimento da Geometria. A socialização dessas percepções e a comunicação delas por meio de uma linguagem simbólica possibilita o aprimoramento das categorizações iniciais (abstração estrutural), promove a construção, a descrição e a definição de outras propriedades que podem ser utilizadas para prova geométrica.

Para Schastai (2017), no processo de realizar operações no campo da Aritmética, o indivíduo pode chegar a identificar algumas propriedades que ele reconheça, descreva e possivelmente as descreva com propriedades próprias da Aritmética. Por exemplo, as propriedades que caracterizam os números: números positivos ou negativos; números ímpares ou pares; números primos, entre outros. Segundo a autora, faz-se necessário o estímulo para que o estudante se aprofunde nas descrições das propriedades induzindo-o a novas reconstruções, outras definições e deduções como no caso da fatoração de um número qualquer em números primos. “Assim, o mundo do simbolismo operacional também envolve uma abstração estrutural das propriedades e o uso de símbolos torna-se cada vez mais sofisticado” (p. 55).

Carmo (2018) investigou de que maneira os estudos sobre o pensamento matemático avançado repercutem em teses e dissertações brasileiras. Foram analisados 26 (vinte e seis) trabalhos que se estendem entre os anos de 2010 a 2016, sendo 21 (vinte e uma) dissertações e cinco teses. Com relação aos níveis de ensino dos conteúdos abordados nas pesquisas analisadas pelo autor: duas no Ensino Fundamental sendo uma delas voltada para a Educação Especial; cinco no Ensino Médio e; 19 (dezenove) no Ensino Superior. O autor ressalta que as pesquisas são pautadas na investigação de obstáculos cognitivos que, possivelmente, são fontes de dificuldades no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Os estudos relacionados ao pensamento matemático tem procurado compreender como ocorre a formação desse pensamento pelos estudantes.

Em uma pesquisa com monitores de Cálculo em uma Instituição de Ensino Superior, Flores (2018), destaca o papel da monitoria na formação inicial dos monitores que atuam no mapeamento das dificuldades dos acadêmicos que procuram auxílio dos monitores de Cálculo. Na monitoria, o trabalho desenvolvido pelos monitores no processo de ensino e aprendizagem, tem o foco direcionado a discutir, com os acadêmicos que buscam os monitores, a resolução dos erros desses acadêmicos em atividades propostas por seus professores. Os monitores em contato com professores da instituição e com a equipe pedagógica traçam em conjunto, propostas com vistas à construção do conhecimento matemático. O autor ressalta a utilidade dos *softwares* educacionais no desenvolvimento do processo de resolução das atividades, tanto possibilitando visualização virtual de gráficos de funções, quanto promovendo o elo entre as representações geométrica e algébrica da função em tela, por exemplo.

> Entendemos ser oportuno que o monitor faça parte da equipe pedagógica e tenha funções ativas que o levem a pensar sobre a Matemática e sobre os processos de ensino e aprendizagem. Assim, ao analisar as dificuldades dos seus colegas, é possível que ele também pense nas suas, avaliando formas para que sejam superadas. Nesse processo, o monitor entra em contato com distintas representações, aspectos formais e simbólicos de um dado conceito, o que favorece o seu percurso pelos Três Mundos da Matemática (FLORES, 2018, p. 140).

Ainda com relação à pesquisa de Flores (2018), o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática complementa os estudos de Vygotsky sobre aprendizagem, no campo de estudo da Matemática já que Tall estende a faixa etária para os participantes em um processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Vygotsky pesquisou somente com crianças e o quadro teórico de Tall abrange todos os níveis de ensino. Por outro lado, o autor salienta que Vygotsky complementa Tall ao estender a interação do sujeito para o meio social e não somente as interações entre o indivíduo e o objeto matemático em estudo. “Entendemos que, em uma aula de Matemática ou de Cálculo, na monitoria ou em outra situação de aprendizagem, o sujeito está estabelecendo relações tanto com o próximo quanto com o objeto do conhecimento. Nesse ponto as teorias se complementam, formando um compêndio que pode ser útil para o professor no desencadear de sua prática” (p. 75).

Imafuku (2018) investigou as contribuições que os *softwares* educacionais SimCalc[49] e GeoGebra podem propiciar no ensino do conceito imagem de derivada. Fizeram parte da pesquisa, nove acadêmicos de uma Licenciatura em Matemática que já haviam estudado o conceito de derivada. O autor utilizou quatro instrumentos para coletar os dados: um questionário diagnóstico; cincos atividades com o SimCalc sobre as concepções de taxa de variação e a relação entre o gráfico de uma função e o gráfico de sua derivada; e cinco atividades pelo GeoGebra com a concepção, para a derivada de uma função, de melhor aproximação.

---

[49] “As representações no software são relacionadas a funções matemáticas, tais como: constante, afim, quadrática, exponencial, periódicas e definidas por várias sentenças. Com ele, é possível trabalhar com várias funções simultaneamente, o que possibilita, por exemplo, a comparação entre os comportamentos de duas funções, o que pode ser utilizado para dar significado à resolução de sistemas de equações lineares com duas incógnitas. Destacamos que relações que não representam uma função não podem ser trabalhadas no SimCalc” (IMAFUKU, 2018, p. 98).

Delfino (2019) realizou uma pesquisa sobre o estudo da imagem do conceito da integral de Riemann, por acadêmicos de um curso de engenharia, no processo do cálculo de área com funções de uma variável. Para coleta de dados, foram realizadas entrevistas com os acadêmicos, por meio de um questionário com dez questões abertas. Das análises, com relação aos Três Mundos da Matemática, o autor, destaca que nem todas as respostas dos acadêmicos ao questionário trazem representações dos Três Mundos da Matemática. Segundo ele, esse fato não implica que a resposta esteja incorreta ou a que qualquer das questões esteja correta por apresentar características dos Três Mundos da Matemática. O autor salienta que houve respostas com representações dos Três Mundos da Matemática e que mesmo assim a resposta não estava correta.

Em uma investigação sobre o processo de ensino e aprendizagem de Cônicas, Visintaimer (2019), pesquisou os significados que acadêmicos apresentam sobre esses objetos matemáticos antes que eles os revejam no Ensino Superior. Participaram 26 (vinte e seis) estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Matemática por meio da aplicação de um questionário, composto por doze questões, que foi elaborado após análises em livros didáticos do Ensino Médio que buscaram relações com os Três Mundos da Matemática. Suas questões abordaram desenhos de curvas e os conteúdos das cônicas: excentricidade; equações; gráficos e algumas aplicações. O autor nos informa que a maioria das características encontradas nas respostas faz parte do Mundo Corporificado. Poucas situações desenvolvidas nas resoluções das questões pelos participantes evidenciaram características das zonas de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico e, entre os Mundos Corporificado e Formal. Para o autor, nenhuma das respostas trouxe características dos Mundos Simbólico e Formal com relação ás Cônicas.

Flôres (2020) utilizou o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática para identificar indícios da aprendizagem sobre conceitos relacionados aos números racionais em uma proposta de ensino. Ela foi composta por tarefas que foram divididas em três partes e aplicada a oito acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina de Fundamentos da Análise. A primeira parte, constituída por quatro tarefas, trabalhou a construção do conjunto dos racionais por meio de suas relações e classes de equivalência. As tarefas da segunda parte exploraram as operações de adição e multiplicação no âmbito dos racionais, a terceira parte trabalhou tarefas envolvendo diferentes significados dos racionais no cenário da Educação Básica.

> Ao término das tarefas propostas para o conceito de equivalência, foi possível observar que a sequência de ensino proporcionou, aos estudantes, a oportunidade de partir do Mundo Corporificado, passar pelo Mundo Simbólico, até chegar à formalização do conceito. Essas passagens auxiliaram na criação de imagens conceituais mais ricas de significado (FLÔRES, 2020, p. 161).

Concordamos com a autora ao ressaltar que o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, proporciona uma visão geral do objeto matemático em estudo, colaborando para a construção de tarefas e suas posteriores interpretações com vistas a possível identificação de construção do conhecimento, por parte dos estudantes envolvidos, ao que foi proposto pelo professor no processo de ensino e aprendizagem. Ou seja, é um quadro teórico dinâmico para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática.

Com relação as quatorze pesquisas de doutorado, em quatro delas, há conteúdos de Matemática da Educação Básica que foram utilizados para evidenciar jornadas dos seus participantes pelos Três Mundos da Matemática. Dez teses abordaram objetos matemáticos presentes no Ensino Superior, com destaque para temas relacionados ao Cálculo (limite, derivada e integral). Uma tese apresentou pesquisas acadêmicas brasileiras sobre o pensamento matemático. Como já salientamos, não há trabalhos de pós-graduação brasileiros envolvendo o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática e o Programa Etnomatemática, nem tendo como público alvo acadêmicos indígenas ou estudantes indígenas da Educação Básica.

É unanimidade entre os trabalhos analisados, que esse quadro teórico, além de possibilitar análises no percurso de aprendizagem desenvolvido pelo estudante, com relação ao pensamento matemático desde seu estagio mais elementar ao mais aprimorado, auxilia na construção de atividades que servem para identificar, por meio do próprio quadro teórico, se os estudantes aprenderam o(s) conteúdo(s) matemático(s) relacionado(s) nas atividades. Assim como os autores das dissertações analisadas, os autores das teses ressaltam a utilidade dos *softwares* educacionais para representações geométricas e algébricas dos objetos matemáticos em tela. O trabalho de Martelozo (2019) será comentado no Capítulo 5.

4.3. A dinâmica de movimento do pensamento matemático entre os Três Mundos da Matemática: uma dentre as possíveis interpretações

Nesse trabalho, o que estamos compreendendo como pensamento matemático? O que é essa ação cognitiva que se expressa em forma de pensamento? Compreendemos que o conhecimento matemático se desenvolve cognitivamente em forma de pensamentos, que são motivados por nossas ações nos objetos reais e em objetos matemáticos provenientes do mundo das ideias matemáticas.

Segundo Tall (2013), há duas vertentes de pensamento matemático, o pensamento matemático elementar que se desenvolve por meio de nossas ações de manipulação e operacionalização os objetos matemáticos e o pensamento matemático avançado que se desenvolve nas articulações entre as definições dos objetos matemáticos e delas são criados ou descritos os conceitos matemáticos desses objetos. Na Educação Básica há predominância do pensamento matemático elementar com indícios de pensamento matemático avançado, já na Educação Superior é instigado o desenvolvimento de pensamento matemático avançado a partir do conhecimento matemático, provavelmente, construído pelo acadêmico na Educação Básica.

Ainda com relação ao pensamento matemático, ressaltamos que há três estruturas desse pensamento que constituem o campo de estudo do conhecimento matemático. O pensamento aritmético[50], o pensamento

[50] "Os conceitos aritméticos utilizados na educação matemática têm correspondido a relações quantitativas sobre coleções de objetos. Deram-se no passado duas visões: a extremamente formal ou a simplesmente manipulativa. Tem-se esquecido frequentemente que a aritmética inclui também: a) representações e significações diversas (pontos de referência e núcleos que ampliam a ideia simples do manipulativo); b) análise do por que dos algoritmos e divisibilidade (elementos conceituais); c) uso adequado e racional de regras (técnicas, destrezas e

geométrico[51] e o pensamento algébrico[52]. Nesse sentido, para nós o pensamento matemático possui duas vertentes (elementar e avançado) e engloba essas três estruturas de pensamento (aritmético, geométrico e algébrico).

De acordo com Tall (2016), podemos descrever que a dinâmica de movimento do pensamento matemático, entre um ou mais mundos, pode ser caracterizada por três modos matemáticos de pensar matematicamente: Matemática Prática, Matemática Teórica e Matemática Formal. Nesse cenário de desenvolvimento cognitivo, segundo Tall (2013), a abstração estrutural se aprimora por meio de nossas ações sobre os objetos reais para, inicialmente, identificarmos suas propriedades. Então, podemos descrevê-las (ações) para reconstruí-los (objetos) ou ainda construirmos outros objetos, inclusive suas representações mentais. A abstração operacional é promovida por intermédio de nossas ações com operações em objetos matemáticos, cuja manipulação aritmética, aprimora para a manipulação algébrica. E a abstração formal que se desenvolve por meio das operações em definições formais para dedução, tanto de outras definições formais já existentes, consolidando-as, quanto para a construção de novas propriedades formais.

Segundo Schastai (2017, p. 55):

---

habilidades); e d) descobertas ou teoremas (descobertas, elaboração de conjecturas e processos de raciocínio)" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 33).

[51] Com base na teoria do casal Van Hiele, Fonseca e Leivas (2018, p. 140-141) explicam que o pensamento geométrico se desenvolve em cinco níveis, a saber: "No nível 1 (visualização ou reconhecimento), os alunos são capazes de reconhecer e nomear visualmente figuras geométricas pela sua aparência global e forma, não sendo capazes de fazer considerações sobre as propriedades de identificação dessa figura. No nível 2 (análise), eles conseguem identificar as propriedades das figuras geométricas, mas não são capazes de usá-las para reconhecê-las ou classificá-las, ou seja, os sujeitos atuam pelo simples reconhecimento da forma. No nível 3 (dedução informal), já são capazes de estabelecer relações entre as propriedades de uma figura ou grupos de figuras. Conseguem acompanhar argumentos e informações de uma prova, mas não conseguem realizar uma demonstração. No nível 4 (dedução formal), além de identificarem propriedades das figuras geométricas, são capazes de realizar uma demonstração, a partir de axiomas e definições. No nível 5 (rigor), os alunos são capazes de trabalhar com diferentes sistemas geométricos, o que só é alcançado em uma disciplina de Geometria de nível superior e, algumas vezes, não o atingem ao final de uma licenciatura em Matemática".

[52] Para Martelozo, Savioli e Passos (2015, p.108), o pensamento algébrico "Pode manifestar-se em qualquer nível escolar, uma vez que não tem como pré-requisito que o estudante apresente uma linguagem simbólica algébrica. Enfim, este pensamento envolve: estabelecimento de relações; utilização de diferentes notações para uma mesma situação-problema; estabelecimento de regularidades; algum processo de generalização; compreensão de propriedades matemáticas importantes como, por exemplo, a comutatividade na adição, agrupamento, classificação, ordenação etc...".

> A abstração formal envolve uma mudança significativa na forma de pensamento, uma vez que a abstração estrutural e a abstração operacional a partir de percepção e ação tornam-se evidenciadas como conceitos matemáticos, a abstração formal é construída essencialmente por definições formuladas linguisticamente. Inconscientemente, pode continuar a ter ligações com percepção e ação, mas formalmente, oferece uma nova abordagem, universal para a matemática em que os teoremas provados dependem somente de definição e de demonstração.

A jornada cognitiva pelos Três Mundos da Matemática se desenvolve nos três processos de abstração com aprimoramento do pensamento matemático direcionado às definições formais, evidenciadas posteriormente pelos processos de percepção e ação nos objetos matemáticos. A abstração formal é o ápice do pensamento matemático que conduz o conhecimento matemático a universalidade. A prova matemática é construída com uma linguagem própria por meio de teoremas e demonstrações, libertando o pensamento matemático da necessidade de perceber ou agir em objetos matemáticos para descrever suas definições. A abstração formal repercute no desenvolvimento do pensamento matemático embasando tanto a abstração estrutural quanto a abstração operacional.

De acordo com Tall (2020, p. 4-5, grifo do autor)

> É útil distinguir entre matemática *teórica*, baseada em fenômenos que ocorrem naturalmente, e matemática *formal axiomática*, baseada apenas em propriedades definidas usando teoria e lógica de conjuntos. A matemática *formal axiomática* pode ser aplicada a *qualquer* contexto em que os axiomas e definições sejam válidos. Ela é conceitualmente mais poderosa que a matemática teórica, pois se aplica não apenas a contextos conhecidos, mas também a qualquer contexto futuro ainda desconhecido que satisfaça os axiomas e definições. Nesse sentido, é à "prova-futura", pois se aplica à evolução futura de ideias na matemática formal axiomática, sempre com a possibilidade de desenvolvermos maneiras de pensar ainda mais sofisticadas no futuro que ainda não consideramos. [...] o futuro já está aqui no sentido de que é possível prova formal por *estruturas de teoremas* que nos levam a formas mais sofisticadas de corporificação e simbolismo. Isso ainda pode ser englobado na estrutura atual com três formas de matemática (corporificação, simbolismo, formalismo) em três níveis de sofisticação (prática, teórica, formal axiomática). [53]

[53] "It is useful to distinguish between *theoretical* mathematics, based on naturally occurring phenomena, and *axiomatic formal* mathematics, based only on properties defined using set theory and logic. Axiomatic *formal* mathematics can be applied to *any* context where the axioms

Assim, analisando as figuras apresentadas nesse trabalho, mostrando o desenvolvimento do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática ao longo das pesquisas de David Tall e, após as análises das pesquisas (teses e dissertações) presentes nos Quadros 13 e 14, construímos a imagem da Figura 21 que, para nós, sintetiza o referido quadro teórico.

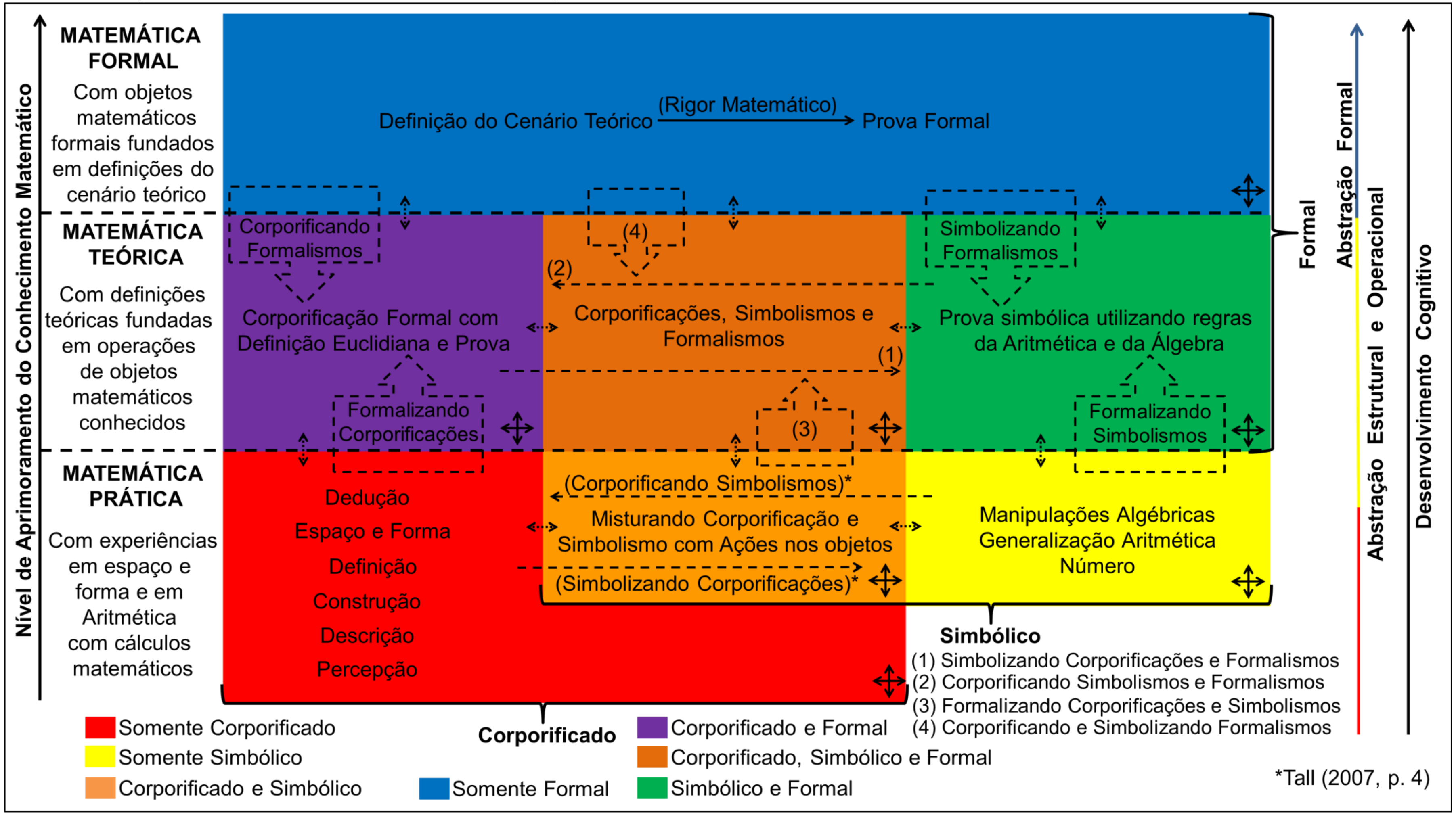
Ressaltamos que a transição do pensamento matemático entre os mundos e suas zonas de confluência geralmente demanda um prazo longo de estudos por parte de cada viajante. Principalmente com relação à Matemática Formal e a abstração formal. Com relação ao diagrama original, essa imagem apresenta a dinâmica dos movimentos do pensamento matemático: corporificando simbolismos; corporificando simbolismos e formalismos; corporificando formalismos; simbolizando corporificações; simbolizando corporificações e formalismos; simbolizando formalismos; formalizando corporificações; formalizando corporificações e simbolismos; formalizando simbolismos.

---

and definitions hold. It is conceptually more powerful than theoretical mathematics as it applies not only to known contexts, but also to any as yet unknown future context that satisfies the axioms and definitions. In this sense it is 'future-proofed' in that it applies to future evolution of ideas in axiomatic formal mathematics, always with the possibility that we will develop even more sophisticated ways of thinking in the future that we have not yet considered. I will later show that the future is already here in the sense that it is possible to prove formal *structure theorems* that take us on to more sophisticated forms of embodiment and symbolism. This can still be encompassed in the current framework with three forms of mathematics (embodiment, symbolism, formalism) in three levels of sophistication (practical, theoretical, axiomatic formal)".

[54] "This diagram will inevitably be interpreted by different individuals in different ways. A twodimensional picture cannot represent the whole theory. Not only does it omit the role of the affective aspect of mathematical thinking, it depends on how each individual interprets the diagram in terms of their own personal ways of thinking. My own view is built as the result of a personal journey in which I studied for a doctorate in pure mathematics with Michael Atiyah, who was awarded a Fields medal at the time, and later for a doctorate in the psychology of mathematics education with Richard Skemp, who was a world leader in mathematics education. This allows me to endow the diagram with a rich array of meanings. However, a reader, with completely different experiences and development, may read the diagram in many other ways".

Figura 21 – A dinâmica de movimento do pensamento matemático transitando entre os Três Mundos da Matemática.



Fonte: Elaborada pelos autores a partir de (TALL, 2007; 2016).

Antes de iniciarmos a descrição de nossa interpretação sobre a dinâmica de movimento do pensamento matemático, tendo como base de jornada o diagrama teórico da Figura 21, atentemos ao que salienta Tall (2019b, p. 14)

> Esse diagrama será inevitavelmente interpretado por diferentes indivíduos de maneiras diferentes. Uma imagem bidimensional não pode representar toda a teoria. Não apenas omite o papel do aspecto afetivo do pensamento matemático, mas também depende de como cada indivíduo interpreta o diagrama em termos de suas próprias maneiras pessoais de pensar. Minha visão é construída como resultado de uma jornada pessoal em que estudei um doutorado em matemática pura com Michael Atiyah, que recebeu uma medalha Fields na época e, posteriormente, um doutorado em psicologia do ensino de matemática com Richard Skemp, que era um líder mundial em educação matemática. Isso me permite dotar o diagrama de uma rica variedade de significados. No entanto, um leitor, com experiências e desenvolvimento completamente diferentes, pode ler o diagrama de várias outras maneiras. [54]

Então, analisando a Figura 21, podemos descrever que a Matemática Prática engloba as situações em que os indivíduos participantes do processo de ensino e aprendizagem de um objeto matemático, como, por exemplo, na resolução de atividades propostas (Resolução de Problemas), podem articular procedimentos matemáticos por meio de suas percepções com a dinâmica de movimento do pensamento matemático transitando no âmbito do Mundo Corporificado (vermelho) com predominância de desenvolvimento da abstração estrutural, via Geometria, que reluz no pensamento geométrico. E, com ou sem possíveis indícios da abstração operacional por meio de manipulações geométricas como, por exemplo, as construções viam as técnicas de desenho geométrico.

Por outro lado, dependendo da atividade matemática proposta, a Matemática Prática pode conduzir o viajante a organizar seu pensamento matemático utilizando elementos do Mundo Simbólico (amarelo), com a dinâmica de movimento do pensamento matemático limitado a esse mundo, provavelmente, possibilitando o desenvolvimento da abstração operacional por meio de combinações entre a generalização aritmética (pensamento aritmético) e manipulações algébricas (pensamento algébrico) e, com ou sem indícios de abstração estrutural. Ou ainda, apresentar suas resoluções com componentes desses dois mundos (vermelho + amarelo = laranja), o que podemos denominar de zona de confluência entre os mundos, Corporificado e Simbólico e, com o possível entrelaçamento das abstrações estrutural e operacional.

A zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico envolve tanto as percepções quanto as manipulações matemáticas, ou seja, o pensamento matemático transita entre os dois mundos. Nesse contexto, a Matemática Prática engloba as experiências em espaço e forma que promovem ações nos objetos e o possível desenvolvimento de abstração estrutural pelo indivíduo. Essas ações podem ser refinadas pelo pensamento matemático nas manipulações com números e generalização ou manipulação algébrica (pensamento aritmético e ou pensamento algébrico) conduzindo ao possível desenvolvimento da abstração operacional via Aritmética e/ou Álgebra. Nessa zona de confluência, o viajante, segundo Tall (2007), pode espontaneamente ou ser motivado a transformar corporificações em simbolismos (corporificando simbolismos) caso a atividade matemática a ser desenvolvida tenha se iniciado com alguma corporificação, ou simbolismos em corporificações (simbolizando corporificações), caso a atividade matemática tenha sido iniciada com algum simbolismo matemático.

Na mesma Figura 21, dependendo da atividade matemática proposta, o estudante pode espontaneamente ou ser motivado a se deslocar da Matemática Prática para a Matemática Teórica, promovendo o aprimoramento do seu pensamento matemático nessa ação, seja: formalizando corporificações; ou formalizando corporificações e simbolismos; ou formalizando simbolismos. A Matemática Teórica engloba as situações em que os indivíduos participantes do processo de ensino e aprendizagem de Matemática podem articular procedimentos matemáticos na transição entre dois ou três mundos. Ou seja, a Matemática Teórica se difunde nas três possíveis zonas de confluências entre os mundos, possivelmente, promovendo o desenvolvimento predominante da abstração operacional com indícios de abstração estrutural e crescentes indícios de abstração formal, aprimorando o pensamento matemático com vistas ao possível deslocamento para a Matemática Formal.

Assim, dependendo do grau de aprimoramento do pensamento matemático que a atividade proposta exija do indivíduo, sua resolução por intermédio da Matemática Teórica, pode envolver, por exemplo, elementos dos Mundos Corporificado e Formal (vermelho + azul = roxo). Com a dinâmica de movimento do pensamento matemático transitando entre esses dois mundos por meio, segundo Tall (2016), de definições teóricas com base em prova geométrica, crescente formalização de corporificações, definições euclidianas e prova euclidiana. Então, dependendo da atividade proposta e do desenvolvimento cognitivo de cada estudante, o individuo pode espontaneamente ou ser motivado a transformar corporificações em formalismos. Principalmente se essa atividade envolve conceitos abstratos do pensamento matemático, no âmbito da Geometria (pensamento geométrico), possivelmente, desenvolvendo a abstração estrutural com indícios de abstração formal e, com ou sem indícios de abstração operacional.

A Matemática Teórica, por meio das ações nos objetos matemáticos provoca predominância da abstração operacional sobre a abstração estrutural, ou seja, o estudante começa a se desvincular da abstração estrutural conforme seu pensamento matemático se desloca para a zona de confluência entre os mundos Simbólico e Formal (amarelo + azul = verde). Nela, a dinâmica de movimento do pensamento matemático transita entre esses dois mundos, utilizando relações matemáticas entre a Álgebra e a Aritmética em que, dependendo da atividade matemática proposta, segundo Tall (2016), o estudante utiliza definições teóricas com base em prova algébrica. Assim, dependendo da atividade proposta e do desenvolvimento cognitivo de cada estudante, o indivíduo pode espontaneamente ou ser motivado a transformar simbolismos em formalismos. Sobretudo se essa atividade envolve conceitos abstratos do pensamento matemático, no âmbito da Álgebra (pensamento algébrico), possivelmente, desenvolvendo a abstração operacional com indícios de abstração formal e, com ou sem indícios de abstração estrutural.

Ainda no campo de atuação da Matemática Teórica, temos a zona de confluência entre os Três Mundos da Matemática Corporificado, Simbólico e Formal (vermelho + amarelo + azul = laranja). Nela, a dinâmica de movimento do pensamento matemático envolvido no processo de ensino e aprendizagem de um objeto matemático, transita entre os três mundos, utilizando relações matemáticas entre a Álgebra e a Geometria (Geometria Analítica), o que pode conduzir à prova matemática que articula componentes geométricos (pensamento geométrico) e algébricos (pensamento algébrico), podendo ainda conter aportes da Aritmética (pensamento aritmético). Então, dependendo da atividade proposta e do desenvolvimento cognitivo de cada estudante, o individuo pode espontaneamente ou ser motivado a transformar corporificações e simbolismos em formalismos. Principalmente se essa atividade envolve conceitos abstratos do pensamento matemático, no âmbito da Álgebra, Aritmética e Geometria conjuntamente, possivelmente, desenvolvendo as abstrações operacional e estrutural com indícios de abstração formal.

Ainda na análise da Figura 21, dependendo das atividades propostas, do estudo e da motivação do estudante, a transformação de Matemática Teórica em Matemática Formal se intensifica. Ou seja, o indivíduo pode ser motivado a trabalhar com a Matemática Teórica conduzindo ao seu desenvolvimento e consequente aprimoramento, possibilitando haver cada vez mais indícios de abstração formal para, possivelmente, e com o tempo, promover o deslocamento da Matemática Teórica para a Matemática Formal. A Matemática Formal se desenvolve somente no Mundo Formal (azul) relacionando, segundo Tall (2016), definições oriundas do cenário teórico com a prova matemática a partir de axiomas e teoremas. Nesse sentido, a dinâmica de movimento do pensamento matemático propiciado pela Matemática Formal e possivelmente desenvolvendo abstração formal transita somente no Mundo Formal.

A Matemática Formal utiliza objetos formais (axiomas, postulados e teoremas) com base nas definições do cenário teórico. Salientamos que isso não quer dizer que o que é desenvolvido por ela não provoca reflexões nos outros mundos. De fato, com o desenvolvimento da Matemática Formal e consequentemente da abstração formal, o viajante, dependendo da atividade matemática proposta, pode, após compreender o desenvolvimento da prova formal, articular ações de: corporificar formalismos; ou simbolizar formalismos; ou ainda corporificar e simbolizar formalismos. Ou seja, o que é aprimorado e desenvolvido no Mundo Formal repercute nos outros dois mundos. O Quadro 15 esquematiza nossa interpretação sobre a dinâmica de movimento do pensamento matemático entre os Três Mundos da Matemática.

Quadro 15 – O esquema da dinâmica de movimento do pensamento matemático entre os Três Mundos da Matemática

<table>
<tr><th>Dinâmica de movimento</th><th>Direção – via</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Corporificado
Corporificado</td><td>Horizontal – ações de Matemática Prática envolvendo corporificações com ou sem indícios de simbolismos.</td></tr>
<tr><td>Vertical – desenvolvimento de abstração estrutural com ou sem indícios de abstração operacional.</td></tr>
<tr><td>Corporificado
Corporificado Simbólico</td><td>Horizontal – ações de Matemática Prática transitando na fronteira.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Corporificado Simbólico
Corporificado Simbólico</td><td>Horizontal – ações de Matemática Prática para simbolizar corporificações ou corporificar simbolismos.</td></tr>
<tr><td>Vertical – desenvolvimento de abstração estrutural e ou abstração operacional.</td></tr>
<tr><td>Corporificado Simbólico
Simbólico</td><td>Horizontal – ações de Matemática Prática transitando na fronteira.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Simbólico
Simbólico</td><td>Horizontal – ações de Matemática Prática envolvendo simbolismos com ou sem indícios de corporificações.</td></tr>
<tr><td>Vertical – desenvolvimento de abstração operacional com ou sem indícios de abstração estrutural.</td></tr>
<tr><td>Corporificado
Corporificado Formal</td><td>Vertical – desenvolvimento de abstração estrutural com ou sem indícios de abstração operacional e, com vistas a indícios de abstração formal. Ocorre a transição da Matemática Prática para a Teórica e ações para formalizar corporificações.</td></tr>
<tr><td>Corporificado Simbólico
Corporificado Simbólico Formal</td><td>Vertical – desenvolvimento da abstração estrutural e ou abstração operacional e, com vistas a indícios de abstração formal. Ocorre o transito da Matemática Prática para a Teórica e ações para formalizar corporificações e simbolismos.</td></tr>
<tr><td>Simbólico
Simbólico Formal</td><td>Vertical – desenvolvimento da abstração operacional com ou sem indícios de abstração estrutural e, com vistas a indícios de abstração formal. Ocorre o transito da Matemática Prática</td></tr>
</table>

	para a Teórica e ações para formalizar simbolismos.
Corporificado Formal ✥ Corporificado Formal	Horizontal – ações de Matemática Teórica envolvendo formalização de corporificações ou corporificação de formalismos com ou sem indícios de simbolismos.
	Vertical – desenvolvimento de abstração estrutural com indícios da abstração formal e, com ou sem indícios da abstração operacional.
Corporificado Formal Corporificado Simbólico Formal	Horizontal – ações de Matemática Teórica transitando na fronteira.
✥ Corporificado Simbólico Formal Corporificado Simbólico Formal	Horizontal – ações de Matemática Teórica para simbolizar corporificações e formalismos e ou corporificar simbolismos e formalismos.
	Vertical – desenvolvimento de abstrações estrutural e operacional com indícios de abstração formal.
Corporificado Simbólico Formal Simbólico Formal	Horizontal – ações de Matemática Teórica transitando na fronteira.
Simbólico Formal ✥ Simbólico Formal	Horizontal – ações de Matemática Teórica envolvendo simbolismos com indícios de formalismos, com ou sem indícios de corporificações.
	Vertical – desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração formal, com ou sem indícios de abstração estrutural.
Corporificado Formal Formal	Vertical – desenvolvimento de abstração estrutural com vistas à abstração formal, com ou sem indícios de abstração operacional. Ocorre a transição da Matemática Teórica para a Formal.
Corporificado Simbólico Formal Formal	Vertical – desenvolvimento de abstrações estrutural e operacional com vistas à abstração formal. Ocorre a transição da Matemática Teórica para a Formal.
Simbólico Formal Formal	Vertical – desenvolvimento de abstração operacional com vistas à abstração formal e, com ou sem indícios de abstração estrutural. Ocorre a transição da Matemática Teórica para a Formal.
Formal ✥ Formal	Horizontal – ações de Matemática Formal.
	Vertical – desenvolvimento de abstração formal.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Nessa perspectiva teórica do Quadro 15, esquematizamos a dinâmica de movimento do pensamento matemático: na combinação de suas transições de idas e vindas horizontais por meio das matemáticas prática, teórica e formal, bem como transições de subidas e descidas verticais por intermédio das abstrações estrutural, operacional e formal, tanto internas aos mundos e em suas zonas de confluências representadas pelo símbolo ✢ na Figura 21; na dinâmica de movimento do pensamento matemático nos seus deslocamentos horizontais com travessias das fronteiras entre os mundos e suas zonas de confluências dentro do campo de atuação de cada uma das matemáticas prática, teórica e formal e; na dinâmica de movimento do pensamento matemático nos seus deslocamentos verticais de subidas e descidas atravessando as fronteiras entre os mundos e suas zonas de confluências promovendo as transformações entre as matemáticas prática, teórica e formal, bem como o possível aprimoramento cognitivo do viajante no desenvolvimento das abstrações estrutural, operacional e formal.

Ressaltamos que a dinâmica de movimento do pensamento matemático não acontece de forma linear, ora só horizontal, ora só vertical. Para nós o movimento é dinâmico, complexo, flexível, espontâneo ou provocado, estimulado, com idas e vindas, subidas e descidas, que se desenvolve a longo prazo. Nesse cenário, pode-se, por exemplo, caracterizar a dinâmica de movimento do pensamento matemático, entre os Três Mundos da Matemática, por:

- Corporificado ✢ Corporificado: envolve a dinâmica de movimento do pensamento matemático estritamente no Mundo Corporificado com a Matemática Prática desenvolvida nas idas e vindas (por meio da percepção (dos sentidos), com destaque para a observação, a experimentação e descrição de figuras e sólidos geométricos podendo formar conjuntos com essas figuras e sólidos e, envolvendo as noções de: espaço, gráficos, arcos e ângulos. Relaciona, no movimento vertical de subidas e descidas que indica o possível desenvolvimento cognitivo de abstração estrutural com ou sem indícios de abstração operacional, provocando o aprimoramento da linguagem pictórica (por meio de figuras, desenhos, pictogramas) processo que tem inicio na construção, passando pela definição, chegando à dedução informal e a análise de objetos matemáticos, principalmente as figuras e os sólidos geométricos, os gráficos (pictogramas), ângulos, arcos, a construção geométrica das cônicas (parábola, elipse e hipérbole) a partir das secções de um cone, ambos sem envolver a ideia de número.

- Corporificado Corporificado Simbólico: engloba a dinâmica de movimento do pensamento matemático se deslocando do Mundo Corporificado à sua zona de confluência com o Mundo Simbólico e vice versa. Possivelmente o estudante viajante começa a desenvolver mais a abstração operacional sem, contudo se desvincular da abstração estrutural. A Matemática Prática promove a introdução da ideia de número (Naturais e Inteiros) associada às figuras e aos sólidos geométricos, tabelas, gráficos, ângulos e arcos. A adoção de um símbolo para o número zero promove a invenção e utilização do sistema decimal posicional hindu-arábico, esse fato histórico da Matemática é possivelmente um divisor de águas para o aprimoramento do pensamento matemático.
- Corporificado Simbólico Corporificado Simbólico: envolve a dinâmica de movimento do pensamento matemático transitando na zona de confluência do Mundo Corporificado com o Mundo Simbólico. Com ações nos objetos matemáticos, nesse estágio, em suas idas e vindas (horizontal), por intermédio da Matemática Prática: há a resolução de equações (equacionar = equilibrar) por meio do dispositivo conhecido como *balança de dois pratos*; não há somente as figuras e os sólidos geométricos, gráficos, mas as suas dimensões são notadas e medidas pelo indivíduo. Nas subidas e descidas (vertical) ocorre o possível aprimoramento cognitivo do viajante por meio do desenvolvimento conjunto das abstrações estrutural e operacional. Por intermédio da Matemática Prática há: o estudo dos conjuntos numéricos (Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais); a construção e interpretação de tabelas numéricas, comprimentos, alturas, larguras, perímetros, ângulos, arcos, as quatro operações fundamentais, potenciação com expoentes naturais, radiciação com seu índice sendo um número Natural e resolução de expressões numéricas envolvendo as operações matemáticas (manipulações aritméticas podendo envolver as figuras e os sólidos geométricos); a resolução dos problemas de contagem com a invenção da ideia de fatorial e; a criação dos logaritmos aprimorando as técnicas de cálculos em Aritmética.

- Corporificado Simbólico Simbólico: engloba a dinâmica de movimento do pensamento matemático se deslocando da região de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico (Corporificado Simbólico) ao Mundo Simbólico. A introdução de letras[55] como coeficientes e a invenção dos números complexos são possíveis divisores nesse deslocamento[56]. No possível processo de aprimoramento cognitivo do viajante a abstração operacional se sobressai perante a abstração estrutural com a Matemática Prática promovendo a construção do conceito de incógnita que compõe a ideia de associar uma letra do alfabeto a um valor numérico.
- Simbólico Simbólico: envolve a dinâmica de movimento do pensamento matemático estritamente no Mundo Simbólico. A Matemática Prática em seu movimento de idas e vindas promove o cálculo de áreas e volumes das figuras e dos sólidos geométricos, respectivamente, e introduz a ideia de variável (associação de uma letra do alfabeto a valores numéricos variáveis). Já no seu deslocamento vertical de subidas e descidas, possivelmente há o aprimoramento cognitivo do viajante com o desenvolvimento da abstração operacional com ou sem indícios de abstração estrutural. Por meio da Matemática Prática, os conceitos de incógnita e variável são vinculados às figuras e aos sólidos geométricos, gráficos e tabelas, englobando os cálculos de comprimentos, áreas e volumes além da resolução de equações envolvendo esses cálculos, bem como no aprimoramento dos conceitos

---

[55] "O divisor de águas do pensamento algébrico (separando o antigo fluxo raso da *solução manipulativa de equações* da moderna corrente profunda começa com propriedades teóricas das equações) concretiza-se no francês François Viète, que foi o primeiro, em sua *logística speciosa*, a introduzir letras como coeficientes genéricos (positivos) e a dar alguns outros toques de acabamento no simbolismo que se finalizou e atualizou na época de Newton. Mas, as contribuições mais significativas de Viète estavam em sua *De aequationum recognitione et amendatione*, publicada postumamente, em 1615" (BAUNGART, 1997, p. 14, grifo do autor).

[56] "Para Gauss os números complexos tratavam-se de relações abstratas que deviam ter plena cidadania em matemática. Essa conceitualização faz eco à sua visão de que a abstração é a característica essencial da matemática. Para ele, o processo de generalização da álgebra, que levava à extensão dos domínios numéricos, era um dos principais instrumentos dessa disciplina. Na tentativa de justificar os números negativos e imaginários como relações abstratas, Gauss formulou argumentos para defender o novo caráter teórico da matemática, que não deveria, segundo ele, se basear na realidade das substâncias e sim na concepção relacional dos objetos matemáticos. [...] A associação dos números complexos aos pontos do plano foi enfatizada por Gauss como por nenhum outro matemático antes dele, mas o passo decisivo para que o estatuto dos números complexos fosse firmemente estabelecido foi dado com a introdução da noção de *vetor*" (ROQUE, 2015, p. 451-452, grifo da autora).

de incógnita com a resolução de sistemas de equações e de variável com a identificação e construção da ideia de função matemática.

- Corporificado Corporificado Formal: envolve a dinâmica de movimento do pensamento matemático no seu deslocamento do Mundo Corporificado a sua zona de confluência com o Mundo Formal e vice versa. Possivelmente, o cognitivo do viajante é aprimorado com o desenvolvimento da abstração estrutural com vistas a indícios de abstração formal e, com ou sem indícios de abstração operacional. Nesse processo, a Matemática Prática se transforma[57] em Matemática Teórica e a dedução informal entra em crise[58] provocando a necessidade do desenvolvimento da dedução formal, no âmbito da Geometria, sem a utilização da ideia de número, como por exemplo, as técnicas de desenho geométrico com régua e compasso.
- Corporificado Simbólico Corporificado Simbólico Formal: engloba a dinâmica de movimento do pensamento matemático no seu deslocamento da zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico (Corporificado Simbólico) à zona de tripla confluência entre os Três Mundos da Matemática e vice versa. Aqui, possivelmente, há o aprimoramento cognitivo do viajante por meio do desenvolvimento das abstrações estrutural e operacional com vistas a indícios de abstração formal. Nesse procedimento, a Matemática Prática se transforma em Matemática Teórica promovendo, por exemplo: o cálculo de potenciação com expoentes e de radiação com índices inteiros e, posteriormente, racionais; a introdução de uma segunda incógnita[59] nas equações

---

[57] Ressaltamos que as transformações ou transições entre as matemáticas, Prática para Teórica ou Teórica para Formal, dificilmente ocorrem de uma hora para outra, muitas vezes temos um processo de longo prazo nessas transformações ou transições.

[58] De acordo com Kuhn (2017), o processo dinâmico de desenvolvimento científico se dá por meio de comunidades científicas, composta por cientistas associados, que desenvolvem suas pesquisas em função de um paradigma resolvendo anomalias ou quebra-cabeças que surgem no transcorrer das pesquisas e que precisam ser resolvidos. Acontece que podem emergir das pesquisas, anomalias ou uma anomalia que, apesar dos esforços dos cientistas, as técnicas científicas ou matemáticas presentes no paradigma vigente não dão conta de resolverem a anomalia gerando uma crise interna ao paradigma. Essa crise pode evoluir possivelmente provocando o surgimento de um novo paradigma com suporte teórico para a resolução da anomalia. Os infinitesimais, para nós, foi por um determinado período uma anomalia matemática, que gerou crise entre os matemáticos da época e culminou com a invenção de limite.

abrindo caminho para a introdução, posteriormente, de outras incógnitas[60]; as ações nos objetos matemáticos necessitam ser analisadas; a ideia e implementação dos infinitesimais, por exemplo, gera estágio de crise entre os matemáticos e precisa ser aprimorada; a criação do princípio fundamental da contagem provoca a necessidade dele ser demonstrado teoricamente.

- Simbólico Simbólico Formal: envolve a dinâmica de movimento do pensamento matemático se deslocando do Mundo Simbólico a sua zona de confluência com o Mundo Formal e vice versa. Há o possível aprimoramento cognitivo do viajante por intermédio da abstração operacional com vistas a indícios de abstração formal e, com ou sem indícios de abstração estrutural. Nesse processo, novamente a Matemática Prática se transforma em Matemática Teórica promovendo, por exemplo, o desenvolvimento teórico do conceito de função matemática que até antes desse deslocamento fora utilizado em situações práticas.
- Corporificado Formal Corporificado Formal: engloba a dinâmica de movimento do pensamento matemático estritamente na zona de confluência entre o Mundo Corporificado e o Mundo Formal (Corporificado Formal). Por intermédio da Matemática Teórica, em seu movimento horizontal de idas e vindas, possibilita a formalidade das ações nas figuras e nos sólidos geométricos, a prova euclidiana é sinônima desse processo. Já em seu movimento de subidas e descidas, há o possível aprimoramento cognitivo do viajante no desenvolvimento

---

[59] De acordo com Radford (2011), embora a ideia de segunda incógnita algébrica já havia aparecido na Mesopotâmia assim como de maneira muito pontual pelos árabes na obra *L'Extrait du Farikhrî* do matemático Aboû Beqr Mohammed Bem Alhaçan Alkarkhî, provavelmente escrita no início do século XI, foi precisamente no *Tratado di Fioretti,* composto por volta de 1373 por Antônio de Mazzinghi (1353 – 1383) que a segunda incógnita aparece no ocidente pela primeira vez, em seu problema 9: *Um valor (tesouro ou censo) é aumentado do seu terço. Então uma quarta parte desta aglomeração é adicionada à primeira adição. A nova adição é 30. Quanto era o valor inicial (tesouro ou censo)?* (*Libri, 1838 – 1841, p.321, tradução do autor).*

[60] "A aparição da segunda incógnita vai preparar o terreno para a aparição da álgebra de mais de duas incógnitas. A obra de Michel Stifel, *Arithmetica Integra,* publicada em 1544 – somente um ano antes da *Ars Magna* de Cardano – consagra o terceiro e último livro à álgebra – chamado "*de perfecta arte calculandi".* O capítulo 6 deste livro é destinado aos *secundis radicius,* ou seja, as outras incógnitas. Contrariamente a Cardano, Stifel começa considerando um problema muito simples, que pode facilmente ser resolvido no interior da álgebra de uma incógnita" (RADFORD, 2011, p. 63-64, grifo do autor).

da abstração operacional com indícios de abstração formal e, com ou sem indícios de abstração estrutural. Nesse procedimento, a Matemática Teórica intensifica o desenvolvimento da Geometria e da prova geométrica como, por exemplo: dos princípios de Arquimedes e Cavalieri; do Método da Exaustão e do Teorema de Pitágoras utilizando desenhos geométricos por meio da comparação de áreas (demonstração geométrica); promove as discussões sobre os entes geométricos ponto, reta, segmento de reta, plano; envolve as demonstrações geométricas por meio das técnicas de desenho geométrico utilizando régua e compasso[61], bem como a inclusão das geometrias não euclidianas expandindo o escopo (gama ou limite de operações) do campo de estudo da Geometria.

- Corporificado Formal Corporificado Simbólico Formal: envolve a dinâmica de movimento do pensamento matemático se deslocando da zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Formal com a zona tripla de confluência entre os Três Mundos da Matemática. Há possível aprimoramento cognitivo do viajante no desenvolvimento das abstrações estrutural e operacional com indícios de abstração formal. A Matemática Teórica promove, por exemplo, a associação da Geometria com a Álgebra criando a Geometria Analítica[62].

---

[61] "O fato de nos *Elementos* de Euclides as construções serem realizadas por meio da régua e do compasso deu origem à crença de que essa seria uma restrição da geometria imposta pelos cânones da época. Como já dito, para explicar o motivo dessa restrição é comum apelar para a filosofia platônica. Por valorizar a matemática teórica, Platão teria desprezo pelas construções mecânicas, realizadas com ferramentas de verdade. A régua e o compasso, apesar de serem instrumentos de construção, podem ser representados, respectivamente, pela linha reta e pelo círculo, figuras geométricas com alto grau de perfeição. Na realidade, nos *Elementos*, as construções realizáveis com régua e compasso são executadas por meio de retas e círculos definidos de modo abstrato. Essas explicações são atravessadas, no entanto, por diversos pressupostos implícitos. Euclides não afirma explicitamente, em lugar nenhum de sua obra, que as construções tenham de ser efetuadas com retas e círculos. Simplesmente elas são, de fato, realizadas desse modo. No caso de Platão, é coerente dizer que sua filosofia encarava a reta e o círculo como figuras geométricas superiores, mas também não há, em seus escritos, indicações explícitas de imposição dessas figuras como protótipos para toda a geometria, nem de proibição do uso de outras construções" (ROQUE, 2015, p. 160-161, grifo da autora).

[62] "A geometria analítica é o uso sistemático do fato de que existe uma correspondência natural entre os números reais e os pontos de uma reta, entre os pares de números reais e os pontos de um plano, e entre os termos de números reais e os pontos no espaço. Os cálculos com números podem então ser interpretados geometricamente e os problemas geométricos podem ser reformulados como problemas algébricos. Um livro de Descartes, *Géométrie*, de 1637, é geralmente considerado o início da geometria analítica (GÅRDING, 1981, p. 74, grifo do autor).

- Corporificado Simbólico Formal ✥ Corporificado Simbólico Formal: engloba a dinâmica de movimento do pensamento matemático transitando estritamente na zona de tripla confluência entre os Três Mundos da Matemática. A Matemática Teórica, em seus movimentos horizontais de idas e vindas, se desenvolve com elementos tanto da Geometria quanto da Álgebra e da Aritmética (discussões sobre o Princípio Fundamental da Contagem), envolvendo elementos corporificados nas resoluções de aplicações. Nos movimentos verticais de subidas e descidas há o possível aprimoramento cognitivo do viajante por meio do desenvolvimento conjunto das abstrações estrutural e operacional com indícios da abstração formal. As técnicas de prova geométrica são incorporadas às técnicas de prova algébrica. Ocorre a invenção dos procedimentos de integração (cálculo de áreas, integral definida, função área) e derivação (taxas de variação). Com isso, a ideia dos infinitesimais é aprimorada para a ideia de limite com as somas de Riemann aflorando nas discussões. Os debates acerca da Teoria dos Conjuntos promovem a aceitação do infinito[63] no âmbito da Matemática. A resolução de sistemas de equações ocorre tanto geometricamente (intersecção de retas ou curvas) quando algebricamente (cálculo do conjunto solução). A Geometria Analítica se desenvolve, por exemplo, com elementos geométricos como retas, circunferências, parábolas, elipses, hipérboles, que são associadas a suas equações algébricas e paramétricas que possibilitam manipulações algébricas e geométricas com aportes da Aritmética. A aplicação do conceito de função matemática transforma os variados tipos de equações em funções, com destaque para a Equação Fundamental da Trigonometria, as relações fundamentais da Trigonometria e para as funções trigonométricas. Assim, as funções matemáticas são incorporadas às manipulações

[63] "Além de ser tida como o ápice da busca pelo rigor que marcou o século XIX, a teoria dos conjuntos é associada à admissão, no interior da matemática, de ideias complexas, como a de infinito, antes renegadas ou entregues a especulações filosóficas. Na última metade do século XIX, Cantor teria introduzido o infinito na matemática, um dos ingredientes principais para o florescimento espetacular da matemática moderna. Na narrativa tradicional, a repulsa ao infinito, o *horror infiniti*, teria reinado entre os matemáticos desde os gregos, impedindo os avanços dessa ciência, até que Cantor venceu todas as barreiras e logrou fazer com que o infinito fosse, finalmente, aceito" (ROQUE, 2015, 470, grifo da autora).

matemáticas enriquecendo o desenvolvimento do pensamento matemático conduzindo ao aprimoramento dos conceitos de derivação (inclinação da reta tangente) e integração (cálculo de integrais indefinidas).

- Corporificado Simbólico Formal Simbólico Formal: envolve a dinâmica de movimento do pensamento matemático se deslocando da tripla zona de confluência entre os Três Mundos da Matemática e a zona de confluência entre os Mundos Simbólico e Formal (Simbólico Formal), e vice versa. Há o possível aprimoramento cognitivo do viajante com o desenvolvimento das abstrações operacional com indícios de abstração formal e, com ou sem indícios de abstração estrutural. Nesse procedimento, a Matemática Teórica busca intensificar a dedução, por meio da prova simbólica, de elementos da Geometria Analítica em conceitos da Álgebra Linear, bem como desenvolver os cálculos de aplicações de limites, derivadas e integrais de funções matemáticas, por meio de manipulações algébricas nas resoluções de problemas com posterior prova algébrica.
- Simbólico Formal Simbólico Formal: engloba a dinâmica de movimento do pensamento matemático transitando estritamente na zona de confluência entre os Mundos Simbólico e Formal. É nesse cenário que tem o início da formalização da Geometria Analítica e da Álgebra Linear. Há possível aprimoramento cognitivo do viajante, nos movimentos verticais de subidas e descidas, por meio do desenvolvimento da abstração operacional com indícios de abstração formal e, com ou sem indícios de abstração estrutural. Nesse processo, a Matemática Teórica, por exemplo, intensifica a manipulação algébrica desenvolvendo os mecanismos ou as técnicas de demonstrações e prova algébrica, preparando o terreno teórico para a implantação do Sistema Axiomático Formal.
- Corporificado Formal Formal: envolve a dinâmica de movimento do pensamento matemático se deslocando da zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Formal ao Mundo Formal. Há o possível aprimoramento cognitivo do viajante por meio do desenvolvimento da

abstração estrutural com vistas à abstração formal e, com ou sem abstração operacional. Nesse cenário, a Matemática Teórica se transforma em Matemática Formal proporcionando o aprimoramento das discussões fomentadas por alguns matemáticos como: Eudoxo, Arquimedes, Tales, Pitágoras, e outros, com destaque para Euclides.

- Corporificado Simbólico Formal Formal: engloba a dinâmica de movimento do pensamento matemático se deslocando da zona de confluência entre os Três Mundos da Matemática ao Mundo Formal e vice versa. Há o possível aprimoramento cognitivo do viajante por meio do desenvolvimento das abstrações estrutural e operacional com vistas à abstração formal. Nesse procedimento, a Matemática Teórica se transforma em Matemática Formal promovendo, por exemplo, o aprimoramento formal das deduções e demonstrações em teoremas com destaque para a invenção do Teorema Fundamental do Cálculo e abrindo espaço teórico para o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos.
- Simbólico Formal Formal: envolve a dinâmica de movimento do pensamento matemático se deslocando da zona de confluência entre os Mundos Simbólico e Formal e o Mundo Formal e vice versa. Há o possível aprimoramento cognitivo do viajante por meio do desenvolvimento da abstração operacional com vistas à abstração formal e, com ou sem indícios de abstração estrutural. Nesse procedimento, a Matemática Teórica se transforma em Matemática Formal prevendo, por exemplo, por meio de seu desenvolvimento simbólico (Álgebra), a criação de um Sistema Axiomático Formal para embasar a prova matemática formal, ou seja, há um deslocamento da prova simbólica, que entrou em crise, para a prova formal.
- Formal Formal: engloba a dinâmica de movimento do pensamento matemático transitando estritamente no Mundo Formal. Nesse Mundo, há o possível aprimoramento cognitivo do viajante por meio do desenvolvimento da abstração formal. A Matemática Formal se desenvolve, no âmbito da Geometria, por meio do aprimoramento das definições conceptuais transformando-as em Geometrias Axiomáticas

que proporcionam as demonstrações e formalidades (geometricamente) dos, por exemplo: Método da Exaustão, Princípio de Arquimedes, Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, Teorema Fundamental da Semelhança, Teorema Fundamental da Proporcionalidade, Relação de Euler, com destaque para os Elementos de Euclides e as proposições de Arquimedes em seu livro Medida do Círculo. As discussões oriundas da zona tripla de confluências entre os Três Mundos da Matemática fomentam o desenvolvimento da Matemática Formal na construção das provas formais para: a Teoria dos Conjuntos[64], função matemática, continuidade e descontinuidade de funções matemáticas, limites, limites de funções matemáticas, derivadas, soma de Riemann, integrais definidas, integrais indefinidas, Teorema Fundamental da Aritmética, Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema Fundamental do Cálculo que é considerando outro divisor de águas para o aprimoramento do pensamento matemático. Nessa transição pelo Mundo Formal, a Matemática Formal transforma as demonstrações e provas formais geométricas em provas formais da Matemática desenvolvendo o Sistema Axiomático Formal do pensamento matemático, destacamos os Axiomas de Dedekind – Peano e o desenvolvimento da Álgebra Abstrata.

Ressaltamos que a dinâmica de movimento do pensamento matemático apresentada não é única, ela representa nosso olhar para uma amostra do desenvolvimento cognitivo do conhecimento matemático. Então, muito menos ela é completa, estanque, linear. Nossa intenção é conduzir a discussões e reflexões, além de apresentarmos uma parcela da possibilidade de abrangência do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática tanto nos momentos de planejamento de atividades, quanto nas análises e possíveis interpretações dessas atividades após suas aplicações. Assim, perante toda

[64] “A teoria dos conjuntos teve um papel central na organização da matemática moderna e representa o ponto alto de suas expectativas. A história da análise matemática é vista, frequentemente, como uma evolução dos conceitos intuitivos usados no cálculo do século XVII às definições rigorosas propostas pelo movimento de aritmetização da análise e pela teoria dos conjuntos. Um bom exemplo é o título do livro editado por Grattan-Guinness em 1980, *From Calculus to Set Theory* (Do cálculo à teoria dos conjuntos)” (ROQUE, 2015, p. 470, grifo da autora).

essa gama de possibilidades compreendemos ser pertinente a inserção do referido quadro teórico no Programa Etnomatemática.

CAPÍTULO 5

A INSERÇÃO DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA NO PROGRAMA ETNOMATEMÁTICA: ENTRE COGNIÇÃO E AFETIVIDADE

Nesse capítulo apresentamos a inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática. Essa possibilidade nos é proporcionada pelo diálogo entre as dimensões afetiva e cognitiva do referido Programa, com a relação entre elementos afetivos e cognitivos no desenvolvimento de cada processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

O conhecimento matemático é uma produção cultural humana. As ações matemáticas de comparar, quantificar, classificar, medir, explicar, inferir, entre outras, nos conduzem a pensar inicialmente de forma individualizada. Mas, somos seres sociais e a vida em sociedade reflete no que pensamos, no desenvolvimento e disseminação do conhecimento, como agimos matematicamente e, em consequência disso, na construção de conhecimento matemático.

Para D'Ambrosio (2020a), a Matemática é uma Etnomatemática, assim se a Matemática é uma das etnomatemáticas ela está inserida no Programa Etnomatemática. Portanto é plausível a possibilidade de inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no referido Programa. Precisamos atentar que os pesquisadores desse Programa se preocupam, entre outras coisas, com o entrelaçamento dos saberes matemáticos advindos de comunidades humanas socialmente identificadas, com o conhecimento matemático presente nos currículos escolares e da Educação Superior. Nessa pesquisa, com destaque para a Educação Escolar Indígena e a Educação Superior Indígena.

Em consonância com os saberes matemáticos desenvolvidos por comunidades socialmente identificadas (indígenas, quilombolas, ribeirinhos, entre outros), a matemática prática se destaca na resolução de tarefas diárias no cotidiano dos indivíduos dessas comunidades e serve como base para o estudo da matemática teórica e da matemática formal. De acordo com Tall (2020, p. 2)

> Em um esquema mais amplo de entender a matemática, comunidades diferentes terão necessidades muito diferentes para satisfazer objetivos diferentes. Por exemplo, a maioria das pessoas utiliza matemática relativamente simples em sua vida cotidiana, mas várias profissões exigem tipos diferentes de matemática para tarefas diferentes. Alguns podem envolver matemática prática no comércio, outros podem exigir mais matemática teórica para modelar uma situação e prever seu resultado. Uma pequena proporção da população pode continuar pesquisando áreas mais avançadas de matemática formal e lógica.[65]

Compreendemos que a maioria dos indivíduos utiliza a matemática prática para resolver situações problemas advindas de seu cotidiano, e essa maioria não prossegue aprofundando ou aprimorando o pensamento matemático, pois simplesmente não precisa ou não é motivada. No campo de estudos do Programa Etnomatemática, cada grupo humano culturalmente reconhecido aplica modos distintos, com algumas similaridades, de ações matemáticas no seu cotidiano.

Como já salientamos, consideramos que existem muitas matemáticas e o Programa Etnomatemática se desenvolve nos estudos dessas matemáticas e como elas se relacionam entre si. Por sua vez, a Matemática está presente nos currículos educacionais e se enuncia em Três Mundos da Matemática segundo Tall (2004; 2006; 2007; 2008; 2013; 2016; 2019; 2020).

De acordo com D'Ambrosio (2020a, p. 35)

> Na hora em que esse australopiteco escolheu e lascou um pedaço de pedra, com o objetivo de descarnar um osso, a sua mente matemática se revelou. Para selecionar a pedra, é necessário avaliar suas dimensões, e, para lascá-la o necessário e o suficiente para cumprir os objetivos a que ela se destina, é preciso avaliar e comparar dimensões. Avaliar e comparar dimensões são uma das manifestações mais elementares do pensamento matemático. Um primeiro exemplo de etnomatemática é, portanto, aquela desenvolvida pelos australopitecos.

Avaliar e comparar dimensões são ações matemáticas características do Mundo Corporificado. D'Ambrosio (2020a), ressalta que a

[65] "In the wider scheme of making sense of mathematics, different communities will have very different needs to satisfy very different objectives. For instance, most people use relatively simple mathematics in their everyday lives, but various professions require very different kinds of mathematics for different tasks. Some may involve practical mathematics in commerce, some may require more theoretical mathematics to model a situation and predict its outcome. A small proportion of the population may go on to research more advanced areas of pure mathematics and logic".

partir dessas ações matemática, conforme situações advindas do cotidiano e as relações entre os indivíduos, inicialmente entre os do mesmo grupo e, posteriormente, entre os componentes de outras sociedades, o conhecimento matemático evoluiu. De fato, conforme Radford (2011), o pensamento matemático tem sido aprimorado desde as civilizações antigas por intermédio do desenvolvimento social, político e econômico. Tudo isso, em meio às primeiras cidades que foram construídas principalmente por causa do domínio da agricultura e domesticação de animais.

> A expansão das cidades impôs formas novas e mais elaboradas de organização interna, o que acarretou novos e complexos problemas – por exemplo, como calcular a área de certa porção de terra, como calcular os juros de um empréstimo, como resolver questões hereditárias ou como calcular o preço de diferentes mercadorias. Contudo também encontramos problemas "não práticos", ou seja, problemas que, embora formulados em termos de uma experiência semiótica concreta da vida cotidiana, não possuem uma relação direta com as necessidades práticas (p. 119, grifo do autor).

Nesse contexto de aprimoramento do pensamento matemático encontramos indícios dos Três Mundos da Matemática. Radford (2011) destaca que os problemas práticos se relacionaram com o desenvolvimento geométrico com os cálculos de perímetros, áreas e volumes. Já os problemas não práticos envolviam resolução de situações problemas contextuais acerca de números.

Em meio a fatos e personagens da História da Matemática, o pensamento etnomatemático[66] se desenvolve pesquisando e refletindo esses fatos e personagens no interior do Programa Etnomatemática. Esse programa de pesquisa, entre outras possibilidades de investigações, busca compreender como ocorre a construção do conhecimento matemático de forma individual e por meio das relações sociais entre os indivíduos, com destaque para os modos distintos de ações matemáticas (observar, classificar, medir, inferir, calcular, registrar, abstrair, entre outros) no cotidiano de cada comunidade humana socialmente identificada.

---

[66]A Etnomatemática situa a Matemática como uma Etnomatemática (D'AMBROSIO, 1998). "Essa maneira de olhar a matemática lança perspectivas para pensar a Ciência e a existência para além das legitimações e balizações de verdades dadas pela matemática. [...] Assim o pensamento etnomatemático abre perspectivas para enfrentar as críticas feitas ao conhecimento no que se refere à neutralidade e à objetividade" (CLARETO, 2009, p. 130).

Segundo Mattos e Mattos (2020), o Programa Etnomatemática atua como um programa de pesquisa que instiga a investigação das estratégias do raciocínio matemático das variadas matemáticas, buscando entender e trazer a tona, por meio de suas pesquisas, as dinâmicas que guiam tanto a produção quanto a divulgação dos saberes e fazeres promovidos pelas estratégias das variadas matemáticas. Especificamente para as comunidades indígenas, os autores destacam que as ações educacionais norteadas pelo Programa Etnomatemática dão voz e lugar aos povos indígenas. Os acadêmicos indígenas "[...] precisam ser capacitados e se perceberem como produtores e difusores de conhecimento porque seu conhecimento, que faz parte da cultura, pode ser um fator essencial para uma aprendizagem significativa"[67] (p. 72). Para os autores, as ações educacionais e de pesquisa desenvolvidas no Programa Etnomatemática possibilitam o resgate da dignidade dos povos indígenas por intermédio das atuações dos professores indígenas, entre outros atores indígenas.

Segundo Clareto (2009), o pensamento etnomatemático vai de encontro ao pensamento hegemônico que encontra na matemática ocidental uma grande aliada. Afinal, a Matemática é geralmente compreendida como uma criação cultural do mundo ocidental, que por meio de suas ações civilizatórias, estabeleceu seu pensamento matemático como um pensamento hegemônico em detrimento de cada pensamento matemático dos povos conquistados. Ou seja, imposição do pensamento matemático oriundo da Matemática sobre o pensamento matemático dos grupos socialmente identificados.

O pensamento hegemônico conduz a compreender a cognição e a aprendizagem como algo linear, como a transformação sobre o que não conhecemos e que após o processo de aprendizagem passamos a conhecer. Nessa linha de pensamento, só há uma forma para construção do conhecimento matemático. Mas, para D'Ambrosio (2020a, p. 65) "A abordagem a distintas formas de conhecer é a essência do Programa Etnomatemática". Ou seja, uma abordagem de pesquisa ou educacional, com vistas à diversidade e

---

[67] "[...] need to be empowered and to perceive themselves as producers and diffusers of knowledge because their knowledge, which is part of culture, can be an essential factor for meaningful learning".

sem o pensamento hegemônico como protagonista desses processos (pesquisa e educacional), tanto para a concepção da Matemática quanto para a construção do conhecimento matemático.

Compreendemos que todo processo de ensino e aprendizagem da Matemática quando planejado, desenvolvido e investigado sob a ótica do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, possibilita análises do desenvolvimento cognitivo dos estudantes envolvidos em cada processo pessoal e em três diferentes tipos de desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático. Nesse sentido, ao entrelaçarmos o pensamento etnomatemático no estudo do desenvolvimento do pensamento matemático entre os mundos matemáticos, provavelmente, vamos de encontro à ideia de que o pensamento matemático se desenvolve de forma linear.

De acordo com Lima (2007b, p. 279), em sua pesquisa sobre as concepções de equações algébricas desenvolvidas por estudantes do Ensino Médio, com relação aos Três Mundos da Matemática

> Entendemos que esse seria um quadro teórico adequado para nossa pesquisa, pois, com ele, teríamos condições de analisar, não só o uso que os alunos fazem dos símbolos matemáticos presentes nas equações, mas também, a existência de corporificações e de características formais fundamentando o trabalho deles.

Ou seja, ele é um quadro teórico de amplo aspecto, com muitas possibilidades de investigações, inclusive por meio de atividades educacionais desenvolvidas pelos estudantes para serem analisadas com vistas a identificar possibilidades de construção do conhecimento matemático no interior de cada mundo, bem como em suas zonas de confluência. Trazer o quadro teórico de Tall para o escopo de pesquisa do Programa Etnomatemática é salutar, afinal “[...] é importante que o professor compreenda não apenas o desenvolvimento da matemática e aspectos cognitivos e sociais associados, mas também as alterações específicas de acepção na medida em que a matemática se torna mais sofisticada” (SCHASTAI, 2017, p. 79).

Nesse sentido, estudos envolvendo o quadro teórico Três Mundos da Matemática em suas pesquisas, como aquelas brevemente apresentadas no Capítulo 4, proporciona ao professor analisar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, perante as três formas de conhecimento matemático: desde as percepções e ações corporificadas; passando pelos simbolismos e suas manipulações; chegando aos formalismos e sua linguagem axiomática.

De acordo com Mattos (2020), a dimensão política do Programa Etnomatemática busca ressaltar as raízes culturais dos estudantes indo de encontro ao que geralmente a nossa sociedade impõe. “Há sempre o que sabe e os que não sabem; o que fala e os que escutam; o que atua e os que recebem passivamente; o que disciplina e os que são disciplinados; o que tem autoridade e os que são cerceados de sua liberdade” (p. 158). De fato, há aqueles que sabem de algo ou alguma coisa que outros não sabem e querem aprender, há aqueles que falam enquanto outros escutam, há aqueles que atuam enquanto outros observam, há momentos que se necessita disciplina e, há aqueles que possuem autoridade. O problema é serem sempre os mesmos desempenhando esses papéis. Na dimensão política do Programa Etnomatemática, aqueles que ouvem têm voz, aqueles que aprendem também ensinam, aqueles que observam por vezes atuam, os momentos de disciplina são indisciplinares para o pensamento, os que possuem autoridade a utilizam para promoverem a liberdade e, vice-versa.

Estudar, debater, questionar e refletir sobre o conhecimento matemático entrelaçado aos saberes tradicionais é fundamental para a formação dos professores indígenas de Matemática. Por sua vez essa é uma questão política de fortalecimento de suas raízes culturais, que emergem de suas práxis e pesquisas com os estudantes indígenas em suas escolas nas aldeias. Compreendemos que somente o professor indígena tem respaldo cultural e de autoridade que promova a liberdade, para ensinar e aprender Matemática nas escolas indígenas.

Esses acadêmicos ao ingressarem no curso de formação de professores assumem compromissos com suas comunidades e têm a responsabilidade de formação dos estudantes indígenas para que falem e não somente ouçam, ensinem o que aprenderam ou que já sabem, observem, mas sejam atuantes, tenham disciplina por escolha própria, porém com a mente sempre indisciplinada, conquistem autoridade sem serem autoritários.

Nesse sentido, a inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática, possibilita por intermédio do pensamento etnomatemático, por exemplo, a promoção de discussões práticas e, ou teóricas entre as matemáticas indígenas e o conhecimento matemático como um todo coerente e coeso. E assim, reforçando a dimensão política do referido programa ao não cercear o estudo da Matemática Formal nos cursos de formação inicial de professores indígenas de Matemática. Devemos escolher o que os acadêmicos indígenas devem estudar em Matemática, ou podemos debater o conhecimento matemático trazendo um pouco de matemática formal. Por meio dessa inserção estamos escolhendo pela possibilidade do debate.

Por outro lado, compreendemos que por intermédio do pensamento etnomatemático, os estudantes e os modos de matematizar em seus cotidianos são motivação do planejamento pedagógico do professor para o desenvolvimento de cada processo de ensino e aprendizagem de conteúdos de Matemática. Essa consideração possibilita dar significado ao que está sendo ensinado e permite que os estudantes sejam agentes da sua construção de conhecimento matemático. Para Mattos (2020, p. 119, grifo nosso) “Dessa maneira, cria-se possibilidade para que os alunos produzam novos conhecimentos tomando por base aquilo que eles *já sabem”*. E o que os estudantes provavelmente *já sabem* aprenderam, em grande parte, por intermédio de suas ações em objetos, no ambiente, mas principalmente nas interações sociais com outros indivíduos. As interações sociais envolvem questões de afetividade, assim a dimensão afetiva do Programa Etnomatemática, possivelmente, tem papel primordial no processo de construção do conhecimento matemático.

De acordo com Mattos (2020, p. 119, grifo nosso)

> A dimensão afetiva possibilita acreditar nos alunos, que são capazes de aprender e apreender significativamente. Além disso, quando envolve a cultura e aquilo que eles *já sabem* torna-os mais autônomos. As situações cotidianas, por eles desempenhadas, envolvem relações com o outro e com o mundo. Há negociação e respeito quando se contextualiza os conceitos escolares na cultura do aluno. Nessa perspectiva, o ato de ensinagem é um ato de tomar consciência de si, do outro, e do meio envolvente. A dimensão afetiva aliada aos aspectos socioculturais auxilia os alunos a obterem resultados escolares positivos pela auto eficácia e pelo reconhecimento de que aquilo que *já sabe* e conhece é importante.

Nessa perspectiva, a dimensão afetiva do Programa Etnomatemática, possibilita a relação de professores e estudantes, pesquisadores e pesquisados em interações sociais na busca pela construção do conhecimento matemático. O ambiente onde se desenvolve o processo de ensino e aprendizagem precisa ser afetivo, tanto para estudantes quanto para professores, com respeito à diversidade cultural e pautada na relação dialógica que promove o encontro e o debate de ideias entre os envolvidos.

Então, nesse contexto de interação entre indivíduos, entre culturas, e entre indivíduos e culturas, o entrelaçamento das variadas matemáticas abarcadas pelo Programa Etnomatemática constitui a base do planejamento e desenvolvimento de cada processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática. Para Mattos (2020), uma das características da dimensão afetiva do Programa Etnomatemática é que em suas pesquisas as pessoas envolvidas não se constituem sozinhas, mas sim em seu meio sociocultural. “Elas são mediatizadas pelos *outros* existentes dentro e fora de seu grupo sociocultural, na troca de saberes e fazeres imprescindíveis a existência das pessoas no mundo” (p. 120, grifo da autora).

A dimensão afetiva do Programa Etnomatemática tem papel fundamental nas mediações das interações entre os indivíduos e entre seu meio social, bem como procura ancorar a construção do conhecimento matemático a partir do que o estudante *já sabe* e, ao lado da dimensão cognitiva, promover a possibilidade de construção do conhecimento matemático.

A interação social que instiga a produção de conhecimento vem ao encontro de: Radford (2011) que ressalta a importância da interação entre as pessoas e as sociedades, para o desenvolvimento e aprimoramento do pensamento matemático ao longo da História da Matemática, afinal a Matemática é uma forma de linguagem; e de Lakatos (1978) que destaca a interação entre os pesquisadores de um programa de pesquisa como o elo fundamental para o desenvolvimento e aprimoramento do próprio programa de pesquisa e da sua comunidade de investigadores.

No campo de estudo dos Três Mundos da Matemática, durante o processo de construção do conhecimento matemático, há o que Tall (2004b) denomina de “já-encontrado” (uma construção mental que o indivíduo utiliza, em um determinado momento, para a construção de novos conhecimentos matemáticos, baseada em experiências matemáticas anteriores) pode ter sido originado de uma experiência anterior mal sucedida o que, possivelmente, pode prejudicar o entendimento de uma experiência matemática "a-encontrar" (experiências que levam à construção de novos conhecimentos matemáticos). Por outro lado, uma experiência matemática anterior bem sucedida, provavelmente, pode auxiliar na compreensão de uma experiência matemática nova.

Geralmente os professores de Matemática planejam o processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo novo ("a-encontrar") considerando a sua introdução sem se preocupar com o que os estudantes já sabem ("já-encontrados") para interligarem a essa experiência matemática nova. Não basta supor o que cada estudante, provavelmente, já sabe, é preciso investigar se cada um deles teve experiência matemática bem sucedida com o objeto matemático que precisa saber para, a partir dele, estudar um objeto matemático novo ("a-encontrar").

Corroborando com essa discussão, segundo Martelozo (2019, p. 63, grifo da autora)

> Portanto, experiências com a aprendizagem da Matemática podem gerar "já-encontrados" que apoiam ou então causam dificuldades na aprendizagem de conceitos matemáticos, sendo que um mesmo "já-encontrado" pode ser colaborador ou dificultador, dependendo da interpretação de cada sujeito. Ou ainda, para um mesmo indivíduo, um determinado conceito matemático pode ter "já-encontrados" colaboradores e dificultadores. Assim, nesse processo de aprendizagem, particular, dinâmico, não linear, podem ocorrer momentos de prazer ao estabelecer relações entre conceitos matemáticos, ou então ao resolver um problema, por exemplo, mas, também, momentos de conflitos.

Assim como interações sociais mal ou bem sucedidas podem interferir de forma negativa ou positiva, respectivamente, no processo de construção do conhecimento matemático, interações mal ou bem sucedidas com experiências matemáticas do tipo "já-encontrados" deixam rastros desencadeados no processo de aprendizagem da Matemática que podem, respectivamente, dificultar ou colaborar na construção de conhecimento em experiências matemáticas novas, ou seja, "a-encontrar".

Tall (2004b) relata, por exemplo, que no processo de transição da Aritmética para a Álgebra, um típico “já-encontrado” é a ideia de que toda adição tem uma resposta, por exemplo, é . Porém, no caso de uma expressão algébrica como não há uma resposta sem que seja conhecido. Então, se é desconhecido, o indivíduo que considera uma adição como uma operação a ser realizada, se depara com algo que não pode ser feito, ou seja, uma operação de adição que não pode ser realizada de forma direta. O autor destaca que se isso não for resolvido no processo de ensino e aprendizagem, a resolução bem sucedida de uma expressão algébrica possivelmente estará prejudicada.

Além do que fica com relação às experiências desenvolvidas no processo de aprendizagem da Matemática (experiências do tipo “já-encontradas”) e dos rastros deixados nesse processo e não apenas experiência em si, segundo Martelozo (2019), o sucesso ou o insucesso da aprendizagem matemática em longo prazo, pode estar interligado com as experiências afetivas no transcorrer do processo de aprendizagem atual e/ou em processos futuros. E da mesma forma, com o foco de estudo não nas experiências afetivas em si e sim nos rastros de estruturas afetivas deixadas ao longo do processo de aprendizagem da Matemática.

> A maneira como os estudantes interpretam as experiências vivenciadas e as relacionam às novas informações e conhecimentos, ao longo desse processo, é essencial para que tenham sucesso ou apresentem dificuldades na aprendizagem matemática em longo prazo, já que essas dificuldades podem se estender a outros domínios, por exemplo, dificuldades afetivas. Logo, reflexões como essa apontam para a necessidade de que professores de Matemática, pesquisadores, formadores de professores, tenham consciência do papel dos “já-encontrados” na aprendizagem da Matemática, na maneira como os estudantes estão interpretando suas aprendizagens anteriores na construção de novos conhecimentos (MARTELOZO, 2019, p. 63-64).

Compreendemos que essas discussões precisam adentrar ao Programa Etnomatemática. A visão epistemológica proporcionada por Tall (2004b), com relação aos “já-encontrados” com o foco de estudo no que permanece das experiências matemáticas já vistas pelo estudante que podem interferir positivamente ou negativamente na construção de conhecimentos matemáticos atuais e/ou novos, oriundos de experiências matemáticas “a-encontrar”, aliada a visão da afetividade proposta por Martelozo (2019), são discussões epistemológicas que fomentam o debate na Educação Matemática.

Concordamos com Mattos (2020, p. 111) ao dizer que: “A aprendizagem propriamente dita ocorre quando o aluno está motivado e já selecionou em sua estrutura mental uma estratégia para aprender e vai pô-la em prática”. Entendemos em Tall (2004b) que com relação à construção de conhecimento matemático a estratégia do estudante para aprender um objeto matemático novo, “a-encontrar”, envolve a interação cognitiva com algum ou alguns objeto(s) matemático(s) “já-encontrado(s)” por esse estudante.

Dito isso, Martelozo (2019) salienta em sua pesquisa, que os professores devem ir além da busca pela resposta sobre o que os estudantes precisam aprender, com relação aos conteúdos curriculares de Matemática, sem se dar conta de *onde* eles estão e o que eles já sabem. Ou seja, no processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo novo, “a-encontrar”, o professor precisa, antecipadamente, analisar o possível ou possíveis “já-encontrado(s)” necessário(s) para auxiliar(em) a construção da experiência matemática nova que é proposta. Que relação cada estudante tem com esse(s) “já-encontrado(s)”? Bem ou mal sucedida(s)? Que estruturas afetivas emergem da relação entre o objeto matemático e o cognitivo do indivíduo?

Mattos (2020) destaca a necessidade de que no processo de ensino e aprendizagem é preciso considerar o que o(s) estudante(s) já sabe(m) para, a partir do que já sabem, compreender(em) um conhecimento novo. Martelozo (2019, p. 67, grifo da autora) nos informa que a relação mal sucedida com uma experiência matemática anterior pode conduzir à produção cognitiva de um “já-encontrado dificultador” que precisa ser identificado e transformado em “já-encontrado colaborador”

> A partir da identificação de um “já-encontrado dificultador” ou então, que pode tornar-se dificultador, o professor aproveita para estabelecer um diálogo com o intuito de transformar o que “seria um problema” – no sentido de que não favorece a aprendizagem naquele determinado contexto – em uma possibilidade de discussão e reflexão com seus alunos, analisando como determinado conceito foi coerente em outra situação, encorajando-os a estabelecerem relações válidas na nova situação, de forma que a Matemática tenha significado e que não seja motivo de tensão, resultando em ansiedade.

Martelozo (2019) ressalta que além de identificarmos possíveis "já-encontrados dificultadores" para transformá-los em "já-encontrados facilitadores" por meio do diálogo reflexivo entre o professor e os estudantes, possibilitando que os estudantes vejam que as ideias matemáticas têm sentido, é preciso considerar e discutir, nessa dinâmica de transformação, "as consequências afetivas advindas de "já-encontrados colaboradores" (prazer, satisfação, confiança), auxiliando na relação estabelecida entre o indivíduo e a Matemática, e "já-encontrados dificultadores" (incapacidade, medo, tensão), interferindo negativamente na aprendizagem da Matemática" (p. 70, grifo da autora).

Buscando fomentar o debate de que é preciso discutir a presença de elementos afetivos interagindo com elementos cognitivos no processo de aprendizagem da matemática, Martelozo (2019, p. 71, grifo da autora), apresenta um tipo de "já-encontrado" o qual denominou de "já-encontrado afetivo"

> "[...] apresentamos a expressão "já-encontrado afetivo", como um tipo de "já-encontrado" que compreende significados afetivos que afetam o desenvolvimento do pensamento matemático de maneira positiva ou negativa. Da mesma forma em que a atenção aos "já-encontrados" está no que fica das experiências com a Matemática, nos rastros que deixaram na aprendizagem e não apenas na experiência em si, ao trazermos "já-encontrados afetivos" como uma extensão ao conceito formulado pelos autores Lima e Tall (2008), nosso interesse incide nas consequências de elementos do domínio afetivo, quando os estudantes lidam com conceitos na aprendizagem matemática atual e/ou em contextos futuros. Assim, caracterizamos um "já-encontrado afetivo" como: *significados afetivos construídos em experiências na aprendizagem da Matemática, que carregam sentimentos, emoções, valores, crenças, dentre outros elementos que interferem no desenvolvimento do pensamento matemático. Os significados afetivos podem ser determinados por: medo, tensão, ansiedade, confiança, prazer, satisfação, curiosidade, orgulho, entre outros*.

Em nossa pesquisa, o público alvo são acadêmicos indígenas que irão atuar ou já atuam como professores de Matemática nas escolas indígenas de suas comunidades. Nossos objetos matemáticos de pesquisa são oriundos da Matemática e ecoam para os participantes como algo que vem de fora, do dominante. Como já salientamos, o processo de ensino e aprendizagem da Matemática para acadêmicos indígenas é tenso e envolve questões afetivas: tensão, ansiedade, confiança ou desconfiança, satisfação ou insatisfação, suas crenças em confronto com outras crenças, orgulho, curiosidade, entre outros. “Conciliar a necessidade de ensinar a matemática dominante e ao mesmo tempo dar o reconhecimento para a etnomatemática das suas tradições é o grande desafio da educação indígena” (D’AMBROSIO, 2020a, p. 27).

Nesse contexto tenso, aqui proporcionado pela formação inicial de professores indígenas de Matemática, concordamos com Martelozo (2019, p. 93) quando nos informa que

> Nas situações de sala de aula, em que os indivíduos estão inseridos em uma cultura, mediados por algumas regras e condições sociais, as emoções, as atitudes, as crenças e os valores de seus professores e de seus amigos são compartilhados e interagem o tempo todo com os afetos de cada indivíduo, proporcionando a representação de diferentes significados afetivos e cognitivos, por meio de sistemas internos diferentes de cada sujeito. Assim, há uma troca e influência mútua entre elementos afetivos e cognitivos nas relações e interações no contexto de sala de aula entre os sujeitos envolvidos.

De fato, por isso é fundamental a formação de professores indígenas de Matemática, para que eles façam essa conciliação ressaltando elementos das matemáticas indígenas de cada comunidade no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática. Compreendemos que ninguém é mais indicado do que o professor indígena de Matemática da comunidade ensinando aos seus estudantes indígenas nas suas escolas das comunidades. O professor indígena, planejando, construindo seus materiais pedagógicos e atuando nas escolas indígenas, soa como algo que é da comunidade, afinal é o indígena dialogando com o indígena. Suas aulas têm representatividade perante sua comunidade e seus estudantes.

Por sua vez, o professor formador de acadêmicos indígenas precisa atentar a esses fatos. Entendemos que discussões oriundas do Programa Etnomatemática intermediadas pelo quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, na formação inicial e continuada dos professores indígenas de Matemática, abre os olhares do professor formador ampliando sua perspectiva epistemológica e, possivelmente, favorece o desenvolvimento do conhecimento matemático nas comunidades indígenas por meio da ação pedagógica de seus professores indígenas.

E isso envolve elementos afetivos que podem colaborar no desenvolvimento de elementos cognitivos no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática. Os indígenas podem e conseguem aprender Matemática sem, contudo, desconsiderarem as matemáticas indígenas nesse processo. O trabalho do professor indígena favorece a troca de influência mútua entre elementos afetivos e cognitivos nas suas relações e interações com os estudantes indígenas, o que pode ser fundamental no processo de aprendizagem da Matemática.

Consideramos nessa dinâmica os “já-encontrados afetivos”, conforme apresentado por Martelozo (2019), que envolvem sentimentos, emoções, valores, crenças, entre outros. Afinal “Já-encontrados” bem ou mal sucedidos possivelmente produzem elementos afetivos positivos ou negativos que deixam rastros ao longo do processo educacional que podem interferir no sucesso ou no insucesso de um processo de aprendizagem em Matemática.

Nesse contexto, de acordo com Martelozo (2019, p. 96)

> Durante a aprendizagem da Matemática, há uma correspondência entre elementos cognitivos e elementos afetivos, implicando em codificações de significados referentes às experiências vivenciadas nas diferentes formas de operar matematicamente. Nessa interação, no que se refere a elementos do domínio cognitivo, destacamos os “já encontrados colaboradores” e “já-encontrados dificultadores”, uma vez que, como apresentamos nesta tese, deixam rastros que interferem na aprendizagem atual e em longo prazo.

Nessa perspectiva de inserção, com relação ao Programa Etnomatemática e o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática com suas três formas de operar matematicamente: os rastros deixados pelos estudantes desencadeados por experiências afetivas oriundas da interação social com o professor e outros estudantes, bem como com o contexto cultural envolvido no processo, são mais caraterizados no primeiro, embora estejam presentes no segundo; ao passo que, a interação cognitiva entre o objeto matemático em estudo e o sujeito que o estuda, deixa rastros desencadeados por experiências matemáticas, tanto no campo cognitivo (“já-encontrados”) quanto no campo afetivo (“já-encontrados afetivos”) é mais aprimorada no segundo, embora seja discutida no primeiro. Entendemos que as duas situações são primordiais no desenvolvimento do conhecimento matemático em longo prazo.

Segundo Mattos (2020), as dimensões cognitiva e afetiva do Programa Etnomatemática se complementam, já com relação aos elementos cognitivos e afetivos em processos de aprendizagem da Matemática concordamos que: “Elementos desses domínios comunicam-se de forma indissociável, trocando informações entre suas estruturas cognitivas e estruturas afetivas, influenciando no desenvolvimento do pensamento matemático” (MARTELOZO, 2019, p. 96).

Tall (2020) salienta que apenas uma parcela pequena da sociedade geral precisa ou se preocupa em estudar ou pesquisar elementos da Matemática Formal. Esses estudos são importantes para o nosso desenvolvimento científico e tecnológico. No campo da Educação Matemática, o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática perpassa pelo estudo do pensamento matemático nos três níveis discutidos e entrelaçados como, por exemplo, apresentado no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. “A mensagem aqui é que diferentes comunidades podem ter razões genuínas para pensar matematicamente de diferentes maneiras, apropriadas tanto para os indivíduos dessa comunidade quanto para a sociedade como um todo”[68] (TALL, 2020, p. 22).

De fato, como já destacado por D’Ambrosio (2020a), Mattos (2020) e Santos (2020) diferentes comunidades socialmente identificadas, como por exemplo, as comunidades indígenas, possuem modos diferenciados, mas com singularidades de pensar matemática. O pensamento etnomatemático considera essas dinâmicas diferenciadas e genuínas de pensamento matemático. Então, perante o que discutimos, a imagem da Figura 22 promove a inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática da Figura 21 no Programa Etnomatemática e, ela emergirá em cada um dos encontros que compõem cada processo de ensino e aprendizagem, com vistas às definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área para os acadêmicos indígenas da LINTER, conforme descrevemos no Capítulo 7.

---

[68] “The message here is that different communities may have genuine reasons to think mathematically in different ways that are appropriate both for individuals within that community and for society as a whole”.

Entendemos que a dinâmica de movimento do pensamento matemático, que se articula no cognitivo de cada indivíduo, por meio do estudo de objetos matemáticos e suas ações com as matemáticas prática, teórica e formal e, com vistas ao possível desenvolvimento das abstrações estrutural, operacional e formal, na formação inicial ou continuada de professores indígenas de Matemática, tendo como mapa de percurso o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, se faz necessário inicialmente com o entrelaçamento do pensamento etnomatemático do professor formador.

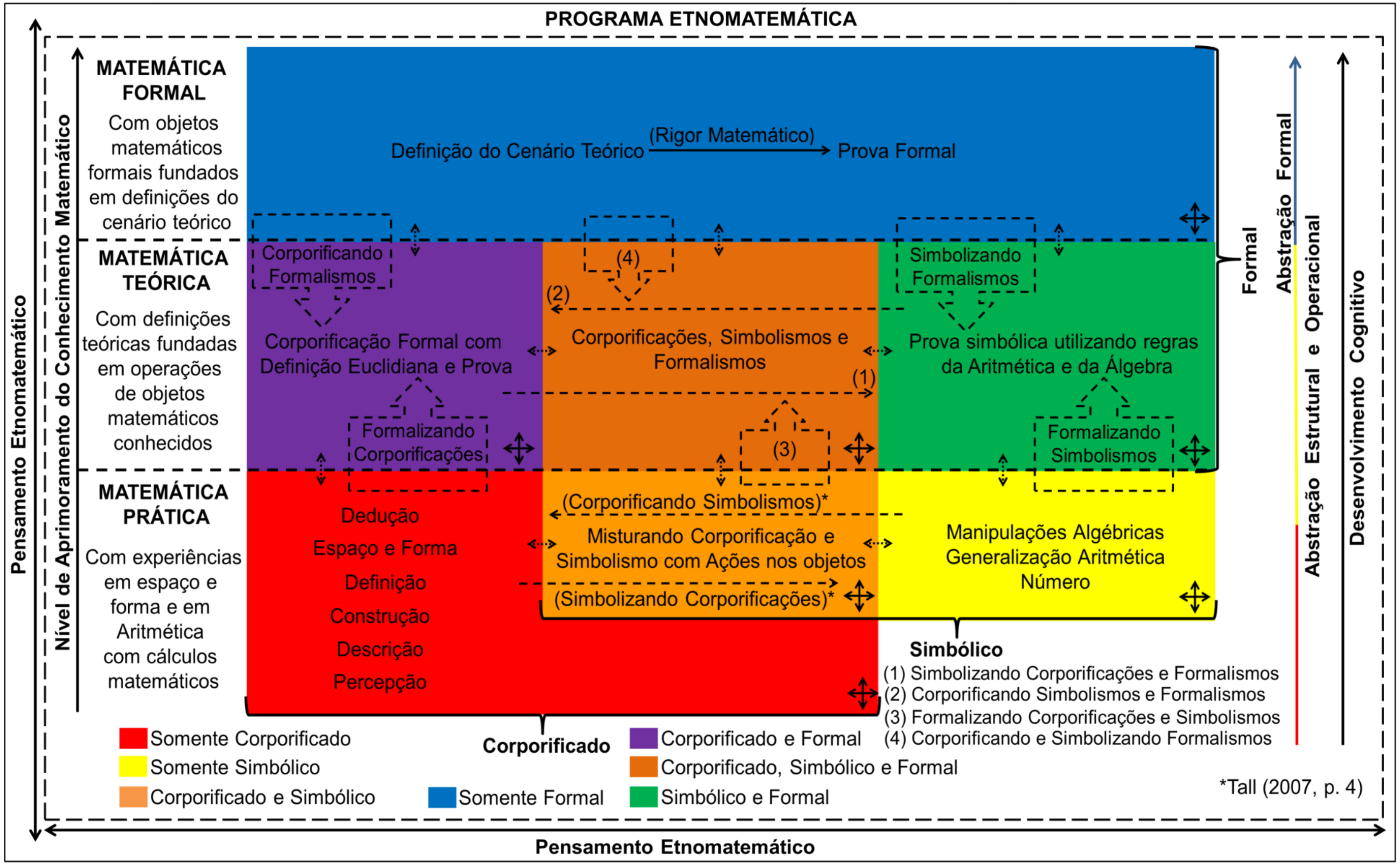
Nesse processo educacional, o professor formador tem o papel de instigar os acadêmicos indígenas a desenvolverem o seu pensamento etnomatemático. Inicialmente com o próprio formador, e dele com os acadêmicos indígenas, pois compreendemos que eles precisam ser motivados a desenvolverem o pensamento etnomatemático, em suas atividades matemáticas, no transcorrer de seu curso superior e, posteriormente, em suas aulas de Matemática, no âmbito da Educação Escolar Indígena, nas escolas das aldeias envolvidas.

A interação social entre os envolvidos em um processo de aprendizagem da Matemática, bem como o ambiente físico no qual se dá o processo em si e o contexto cultural envolvido, podem desencadear rastros de estruturas afetivas, positivos ou negativos, que podem colaborar ou dificultar, respectivamente, a construção de conhecimento no transcorrer do processo.

Nessa perspectiva, os rastros deixados por um estudante em função das experiências afetivas originadas da interação social com o professor e outros estudantes, além daquelas oriundas de suas relações com o ambiente e o contexto cultural relacionado no processo educacional, podem contribuir para que os rastros deixados pelo estudante, em função de experiências afetivas na aprendizagem da Matemática, tenham mais probabilidade de serem colaboradores do que dificultadores para a construção do conhecimento matemático estudado e/ou futuros. Pois, como destaca Martelozo (2019), os rastros originados de estruturas afetivas no processo de aprendizagem da Matemática ("já-encontrados afetivos") influenciam na construção de rastros oriundos das experiências matemáticas no transcorrer do processo educacional. E esses podem ser "já-encontrados colaboradores" ou "já-encontrados dificultadores".

Por intermédio do quadro teórico da Figura 22, compreendemos que o pensamento etnomatemático acompanha a dinâmica de movimento do pensamento matemático. E isso, tanto na sua transição horizontal entre os mundos por meio das matemáticas prática, teórica e formal, quanto nos seus deslocamentos verticais, que promovem a transição entre as referidas matemáticas e, provavelmente, fomentando o desenvolvimento cognitivo do indivíduo por intermédio das abstrações estrutural, operacional e formal.

Figura 22 – A inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesse trabalho, enfatizamos que o pensamento etnomatemático carrega consigo os pressupostos teóricos e práticos debatidos pelas dimensões política, histórica, cognitiva, afetiva e epistemológica do Programa Etnomatemática. Ressaltamos que o pensamento etnomatemático acompanha a dinâmica de movimento do pensamento matemático pelo quadro teórico dos Três Mundos da Matemática não de forma paralela, mas sim entrelaçados com interação entre os dois pensamentos.

O entrelaçamento entre o pensamento etnomatemático e o pensamento matemático no processo da dinâmica de movimento conduz a reflexões teóricas e de práxis profissional. Um não se sobrepõe ao outro, eles se complementam por meio do compartilhamento de ideias, *feedbacks* e *insights* desenvolvidos no cognitivo de cada viajante. Assim, compreendemos que as ações do pensamento etnomatemático no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, construído e analisado pelo quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, se entrelaçam às ações em objetos matemáticos que propulsionam à dinâmica de movimento do pensamento matemático entre os mundos. E isso, tanto no transcorrer de atividades matemáticas propostas, quanto em suas posteriores análises considerando: elementos culturais dos participantes; o que os estudantes possivelmente já sabem; os diferentes e genuínos modos de contar, inferir, medir, classificar, construir, entre outros nas matemáticas indígenas.

Entendemos ser revelador considerarmos que a possível construção do conhecimento matemático se desenvolve em movimentos do pensamento matemático de cada participante, e aqui entrelaçado ao pensamento etnomatemático do professor e de cada acadêmico envolvido, possibilita outros olhares epistemológicos para o processo educacional. O pensamento matemático se desenvolve pelas ações nos objetos matemáticos com as matemáticas prática, teórica e formal e, em níveis de abstração: estrutural, operacional e formal. O pensamento etnomatemático guia o acadêmico indígena ou qualquer outro estudante participante, em suas ações nos objetos matemáticos envolvidos e por esses níveis de abstração, possibilita diferentes formas de pensar indo de encontro ao pensamento hegemônico e, instiga a socialização no pensar matemáticas em suas jornadas cognitivas pelos Três Mundos da Matemática.

CAPÍTULO 6

ARTEFATOS INDÍGENAS E SUAS RELAÇÕES COM OS OBJETOS MATEMÁTICOS DESTA PESQUISA

Nesse capítulo, trazermos alguns elementos culturais dos envolvidos na pesquisa para iniciarmos o diálogo com cada conteúdo de Matemática previsto no planejamento dessa pesquisa. Salientamos que esses artefatos ou peças de artesanato indígena têm, perante a visão destes pesquisadores, têm a provável função de entrelaçar elementos culturais dos acadêmicos indígenas, no desenvolvimento de cada processo de ensino e aprendizagem proposto. Provavelmente, quando a proposta de ensino planejada nesse trabalho puder ser aplicada, acreditamos que devem emergir tanto críticas à utilização desses artefatos quanto sugestões de outros elementos culturais pelos próprios acadêmicos indígenas participantes.

De acordo com Fischbein (1993), precisamos sempre considerar três tipos de corporificações mentais quando estamos realizando ações em figuras geométricas: sua definição, sua imagem que se constitui a partir de nossas experiências perceptivas e sensoriais e o seu conceito figural. Segundo o autor, o conceito figural é uma realidade desenvolvida mentalmente, é uma construção mental possibilitada pelo raciocínio matemático no campo de estudo da Geometria. O conceito figural de uma esfera, por exemplo, é desprovido de quaisquer propriedades sensoriais concretas como cor, peso, densidade, textura, entre outros. Porém, o seu conceito figural possui propriedades figurais que são controladas e manipuladas por regras e procedimentos lógicos no domínio de um determinado sistema axiomático.

> A dificuldade de aceitar a existência deste terceiro tipo de entidades mentais é determinada pelo fato de que nós estamos diretamente cientes apenas da representação mental (incluindo várias propriedades sensoriais como a cor) e o conceito correspondente. *Precisamos de um esforço intelectual para compreendermos que as operações lógico-matemáticas manipulam apenas uma versão purificada da imagem, o conteúdo figural-espacial da imagem*[69] (FISCHBEIN, 1993, p.

148, grifo do autor).

Quando olhamos para o cotidiano de uma comunidade indígena, sob a perspectiva da Matemática, notamos a presença de variadas formas geométricas, podemos citar que nas construções das ocas e casas encontramos as formas triangulares, retangulares e circulares. “Esses aspectos permitiram aos povos indígenas desenvolver, por exemplo, formas de medir, estabelecer perímetros e áreas e desenvolver figuras geométricas”[70] (MATTOS; MATTOS, 2020, p. 88). Por exemplo: o formato circular está no terreno base ao se construir a Oca, a forma triangular nas partes de cima da casa e no momento da sua armação, já o formato retangular está presente na divisão dos quartos, nas roças e nas pinturas indígenas e, com relação à caça, nos formatos das lanças, nos arcos, nas flechas.

> A etnomatemática parte das formas de matematização desenvolvidas pelos povos indígenas, ao longo do tempo, para chegar ao conhecimento tradicional que se apresenta em uma forma não fragmentada. Em muitos artefatos indígenas, conhecimentos e práticas ancestrais estão presentes. Assim, em todas as pesquisas apresentadas há a identificação deste conhecimento e a necessidade de usá-los na sala de aula[71] (MATTOS; MATTOS, p. 88).

Com relação aos seus utensílios domésticos, artefatos ou artesanatos variadas formas geométricas estão presentes: nos cestos e peneiras; nas construções de armadilhas para pesca (jequi, jereré, munzuá, redes, tacape, zarabatana); nos trajes indígenas e nas peças de artesanato (gamela, cuia, pilão, tábua de carne, petisqueiras, farinheiras, filtro dos sonhos, pente, luminária, tecelagens, colares, brincos, pulseiras, cocar, cintos, colheres, entre outros).

---

[69] “The difficulty to accept the existence of this third type of mental entities is determined by the fact that we are directly aware of only the mental representation (including various sensorial properties like color) and the corresponding concept. *We need an intellectual effort in order to understand that mathematical-logical operations manipulate only a purified version of the image, the spatial-figural content of the image*”.

[70] “These aspects allowed indigenous peoples to develop, for example, ways to measure, establish perimeters and areas, and develop geometric figures”.

[71] “Ethnomathematics starts from the forms of mathematization developed by indigenous peoples, over time, to reach the traditional knowledge that is presented in a non-fragmented way. In many indigenous artifacts, ancestral knowledge and practices are present. Thus, in all research presented there is the identification of this knowledge and the need to use them in the classroom”.

Esses artefatos ou artesanatos indígenas possuem formas geométricas que se constroem a partir de suas imagens que estão carregadas de elementos perceptivos que induzem a identificar, cada artefato ou artesanato desses, com uma ou mais figuras geométricas (criadas por estudiosos da Matemática). Porém, é preciso ir além da construção dessas imagens. Instigar o *esforço intelectual* em cada estudante para que ele construa os conceitos figurais dessas imagens em sua mente. De forma que cada um deles compreenda, por exemplo, que as circunferências, os prismas, retângulos, quadrados, triângulos, círculos, cilindros, cones e as esferas (entre outros), são conceitos geométricos que se desprendem das suas percepções para serem trabalhados ou manipulados por meio de simbolismos e, operações matemáticas que são regidas por um sistema axiomático.

6.1. O estudo do número irracional e do comprimento da circunferência a partir do artefato Filtro dos Sonhos

Diante do montante de elementos da cultura indígena que apresentam a forma circular, escolhemos o artesanato indígena conhecido como Filtro dos Sonhos. Ele não tem sua origem na cultura indígena dos povos do Brasil. Segundo um dos professores indígenas, esse elemento cultural foi trazido por turistas há muito tempo, afinal a Região Sul do Estado da Bahia é muito visitada por turistas do mundo todo. Os artesãos indígenas viram no Filtro dos Sonhos, a oportunidade de adaptação para vendê-lo em seu comércio de artesanato indígena. Então alguns artesãos indígenas começaram a confeccioná-lo utilizando cipós nativos e penas de aves locais.

Seu formato característico o diferencia de outros filtros dos sonhos que geralmente apresentam uma rede feita de barbante colorido e ornado com penas coloridas artificialmente. O Filtro dos Sonhos de origem indígena é formado por aros, aparentemente concêntricos, e todo construído a base de cipós que vão desde sua cor natural a pinturas com outras cores. Há o detalhe das três linhas compostas pelas mesmas quantidades de sementes de plantas que, segundo os pataxós, ajudam a espantar os maus sonhos. Aliás, para os indígenas locais os sonhos podem ser filtrados e não apanhados, a ideia é que por esses filtros dos sonhos somente os sonhos bons passem e visitem o sono das pessoas.

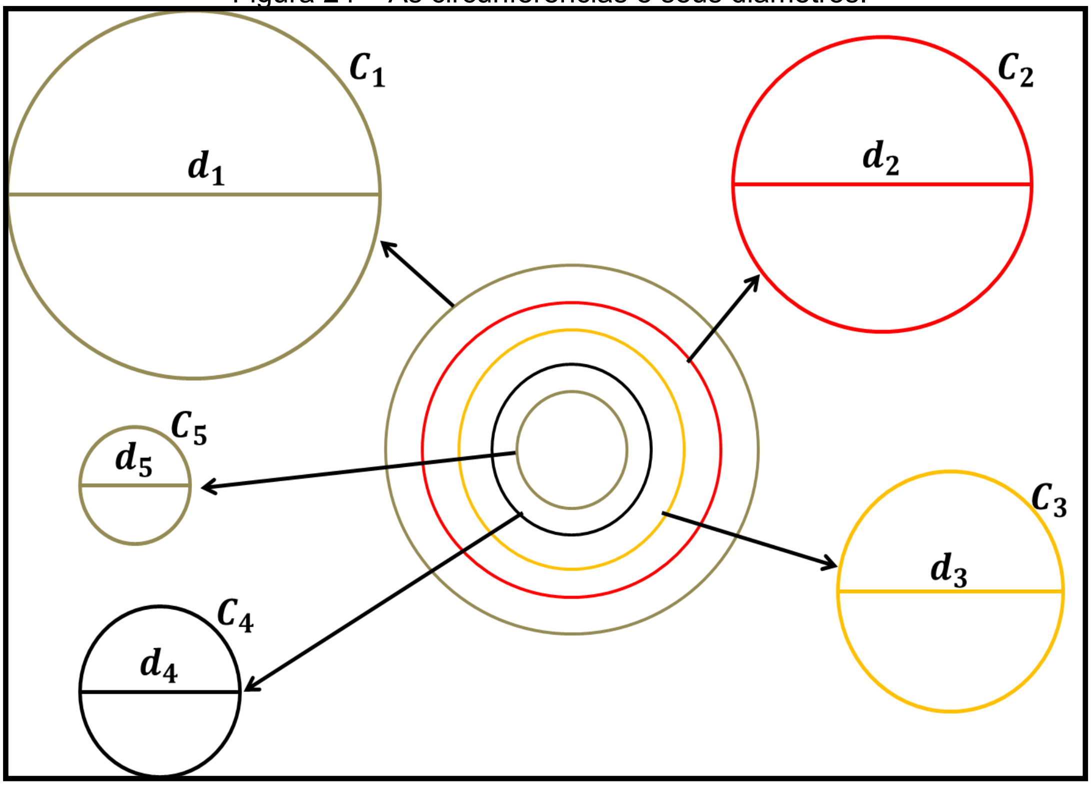
Seu diâmetro sofre pouca variação de extensão de um filtro para outro, os indígenas que o fazem disseram que seu tamanho depende do artesão e do material disponível. Há, por exemplo, filtros dos sonhos tão pequenos que são utilizados como brincos, e outros são colares. Os seus aros compostos por diâmetros diferentes, nos chamou a atenção para propormos a atividade envolvendo as discussões do número do comprimento da circunferência e da área do círculo. A imagem da Figura 23 apresenta a nossa ideia inicial.

Figura 23 – As circunferências concêntricas a partir do Filtro dos Sonhos.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Como podemos observar pela imagem da Figura 23, o seu formato se estende em aros que trançam seu entorno, com entrelaçamento de cipós, servindo como uma rede por onde passam somente os sonhos bons. Esses aros nos conduzem a imaginar circunferências, como indicamos na imagem da Figura 23. Assim, nesse artefato há cinco aros, os quais, identificamos com as cores presentes no artefato para diferenciação entre eles. Salientamos que seus aros não são perfeitos, ou seja, eles servem para lembrarmos de circunferências e como modelos para a introdução do estudo do número irracional . Posteriormente, para os cálculos: do comprimento da circunferência; da área do círculo; de superfícies cônicas, cilíndricas e esféricas; os volumes de cones, cilindros e esferas. A Figura 24 apresenta a nossa ideia inicial sobre essa abordagem.

Figura 24 – As circunferências e seus diâmetros.



Fonte: Elaborada pelos autores.

De acordo com Moise e Downs (1971), de um modo intuitivo uma circunferência corresponde ao contorno de uma região redonda no plano. Em uma linguagem formal a definição de circunferência pode ser descrita por “Seja um ponto num plano dado e seja um número positivo. A *circunferência de centro e raio* é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a é igual a ” (p. 389, grifo dos autores). Toda circunferência tem um comprimento. Como esse comprimento pode ser calculado?

Segundo Roque (2015), desde o século XVII eram fornecidas diversas aproximações para o valor da razão entre o diâmetro e o comprimento de uma circunferência. “Mas apenas em meados desse século os matemáticos perceberam que, ao invés de buscar o verdadeiro valor de , poderiam mostrar que não há *verdadeiro valor*, ou que esse valor é impossível” (p. 435, grifo da autora). A autora ressalta que verdadeiro valor para tem relação com a busca constante de matemáticos do século XVII, por um valor racional para a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Perceberam que seria salutar não mais procurar pelo valor racional dessa razão passando a interpretá-la como um número irracional, ou seja, o número como um número irracional. Fazendo uma síntese sobre o emprego da letra grega ao longo da História da Matemática, de acordo com Carvalho (2011, p. 23, grifo do autor)

> O uso da letra grega para representar esta constante foi inicialmente proposto pelo matemático galês William Jones (1675-1749). A razão desta escolha fica óbvia se observarmos a história: o famoso matemático e cientista grego Arquimedes, no seu tratado *Da Medida do Círculo*, designa o comprimento da circunferência pela palavra grega (“perímetro”). Em 1647, o matemático inglês William Oughtred, e depois outro matemático também inglês, Isaac Barrow, professor de Newton, abreviam para o perímetro de um círculo de raio *R*. Em 1706, William Jones publica *A New Introduction to Mathematics* e usa a letra não mais para designar o perímetro de um círculo, mas para designar a razão entre este e seu diâmetro, como fazemos hoje. Mas nem todo mundo usava a mesma notação. Por exemplo, na mesma época, Jean Bernoulli usa a letra *c* para designar a mesma razão. Em 1737, Leonhard Euler retoma o símbolo na sua obra sobre séries infinitas *Variae observationes circa series infinitas*. A notoriedade de Euler e de suas obras imporá definitivamente a notação para esta constante.

Diante desse contexto histórico, é interessante que os acadêmicos da LINTER envolvidos nessa pesquisa, pesquisem e conheçam a discussão histórica que permeia a construção do número irracional . Então, a partir das circunferências presentes na Figura 24, com seus respectivos comprimentos e diâmetros , propomos aos acadêmicos da LINTER que meçam esses comprimentos e diâmetros para efetuarmos a divisão entre cada comprimento por cada diâmetro e então, construirmos a seguinte expressão algébrica:

Sobre o número D’Amore (2011, p. 6, grifo do autor) salienta que

> : o quociente constante entre o comprimento de qualquer circunferência e o seu diâmetro, cerca de 3,14; tal número é o mais calculado desde sempre na história; vai-se do valor 3, oferecido pela *Bíblia* a 3,16 dos Egípcios, e passando pelo

> valor calculado hoje em dia com 2 bilhões de casas decimais depois da vírgula.

Então, após discussões com os acadêmicos indígenas concluímos que:

É interessante e primordial essa discussão com os acadêmicos indígenas, pois um professor indígena de Matemática nos informou da dificuldade de compreender a ideia de representatividade do número que, por exemplo, na Educação Básica pode assumir um valor aproximado de . Podemos justificar que para efeito de cálculo aproximado o valor citado realmente é muito utilizado no âmbito da Educação Básica, mas que no Cálculo, na Educação Superior, não substituímos por um valor numérico aproximado aumentando a quantidade de casas decimais. Ele é um número irracional com infinitas casas decimais e não periódicas, somente sendo descrito em forma de fração ou decimal para efeitos de aproximação para resolução de atividades práticas, mas nunca exato.

A partir da expressão anterior, e considerando que o diâmetro corresponde ao dobro do raio da circunferência podemos descrever a fórmula matemática que calcula o comprimento de uma circunferência em função de e de seu raio :

Salientamos que essa atividade é abordada no primeiro processo de ensino e aprendizagem proposto sendo incrementada com a utilização de cinco aros de metal com os mesmos diâmetros dos aros do Filtro dos Sonhos, bem como cinco hastes do mesmo metal medindo, aproximadamente, os comprimentos de cada um dos aros.

6.2. O Pente Indígena no cálculo da área do círculo pelo método da Exaustão

Um círculo corresponde a reunião de uma circunferência com o seu interior. Na construção intuitiva da fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a área de um círculo, optamos pelo formato ou o modelo peculiar do Pente Indígena. Assim como o artefato Filtro dos Sonhos, o Pente Indígena é feito por artesãos indígenas para ser vendido no comércio indígena do distrito de Coroa Vermelha que pertence ao município de Santa Cruz Cabrália – BA.

Coroa Vermelha é uma grande aldeia Pataxó que recebe turistas do Brasil e do mundo. O pente, em questão, é feito com bambu e cordão para o traçado e o amarro dos palitos finos. Ele é bem procurado pelos turistas, pois possui uma forma peculiar de ser construído com grafismos em barbante colorido, que os pataxós desenvolveram para diferenciar dos pentes de madeira e de plástico comuns no comércio local. Cada pente indígena é único, pois seus desenhos de grafismos e os dentes de palitos finos feitos manualmente, os tornam peças únicas. A Figura 25 apresenta a imagem do Pente Indígena Pataxó utilizado.

Figura 25 – O Pente Indígena dos Pataxós.

Fonte: Arquivo digital dos autores.

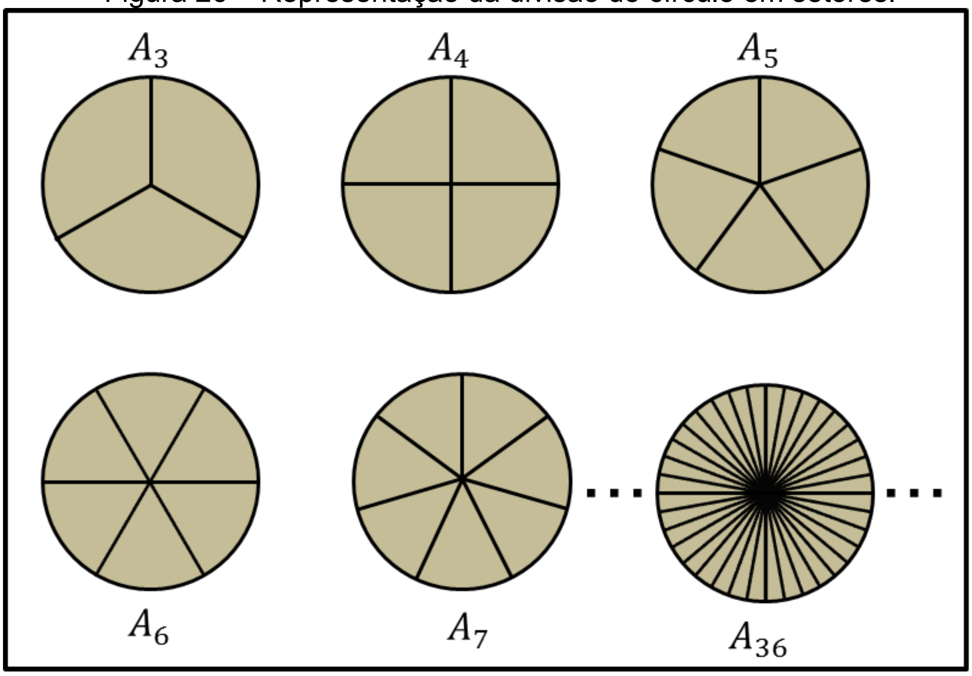
O cálculo da área da região limitada por uma circunferência ou a área de um círculo, como já descrevemos no Capítulo 2, destacou-se ao longo da História da Matemática como o problema da quadratura do círculo, ou como um dos problemas no âmbito da História do Cálculo, provocando discussões e enriquecendo o desenvolvimento do conhecimento matemático. Seguindo o relato histórico podemos discutir com os acadêmicos da LINTER primeiramente o método da Exaustão desenvolvido na Grécia Antiga por Eudoxo e, posteriormente, aprimorado por Arquimedes. Esse método consiste em inscrever e circunscrever o círculo dado com polígonos regulares. Quanto mais lados regulares tiver o polígono, mais próxima é sua área em relação à área circular dada.

De acordo com Ávila (2006, p. 212-213)

> Um raciocínio apenas intuitivo, baseado na visualização geométrica, permite ver que a área do círculo é igual à área de um triângulo de base igual a circunferência do círculo e altura igual ao raio . Para isso, dividimos o círculo em setores iguais por meio da divisão da circunferência em partes iguais. Esses setores são mais e mais parecidos com triângulos, quanto maior for . E como eles têm a mesma altura , a soma de suas áreas é o produto da soma dos comprimentos das bases pelo raio dividido por . Mas a soma dos comprimentos das bases é exatamente o comprimento da circunferência, que é , de sorte que a área do círculo é a área do referido triângulo, com base e altura , ou seja, área do círculo = .

Assim, promovemos a discussão da exaustão da área de um círculo por meio da soma das áreas de infinitos setores. Ou seja, a priori dividimos o círculo em quantidades cada vez maiores de setores até o alcance da nossa visão e, então a soma das áreas dessa infinidade de setores tende a ser, intuitivamente, igual à área do círculo. A Figura 26 representa esse procedimento de divisão da área do círculo em quantidades cada vez maiores de setores.

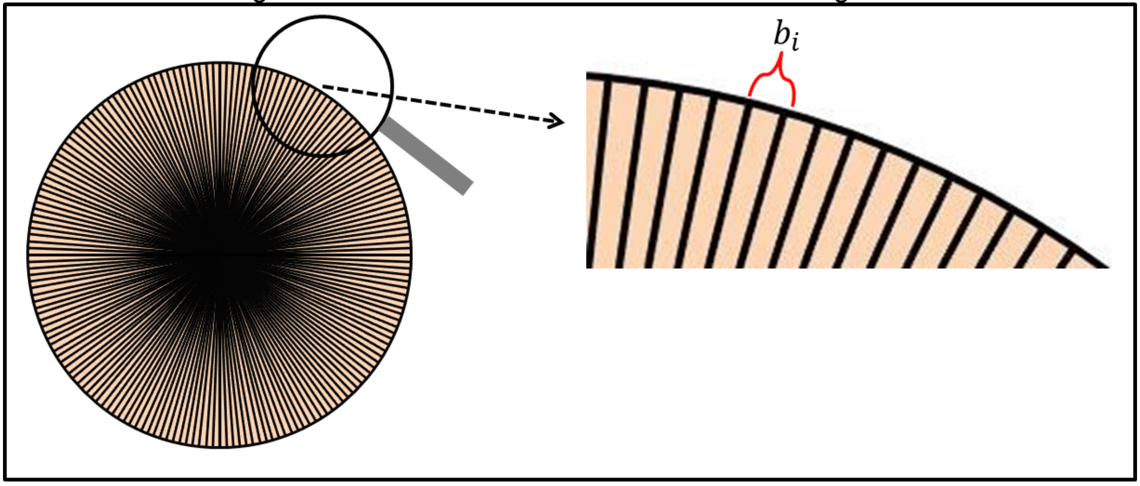
Figura 26 – Representação da divisão do círculo em setores.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, conforme vamos aumentando a quantidade de setores que dividem o círculo, como salientado por Ávila (2006), a forma de cada um desses setores vai se aproximando do formato triangular. Ou seja, intuitivamente podemos perceber que à medida que há mais e mais setores, as suas bases, cuja soma corresponde ao comprimento da circunferência do círculo, tendem a ficar *menos curvas* até o limite que se tornam sem curvatura. Para exemplificar, utilizamos um círculo dividido em 180 setores, como representado na Figura 27. Nela, promovemos a ampliação (com uma lupa) para visualização da possível linearidade local (de modo prático sendo questionado teoricamente) de cada uma das bases dos setores as quais denominamos de .

Figura 27 – O círculo dividido em 180 setores iguais.

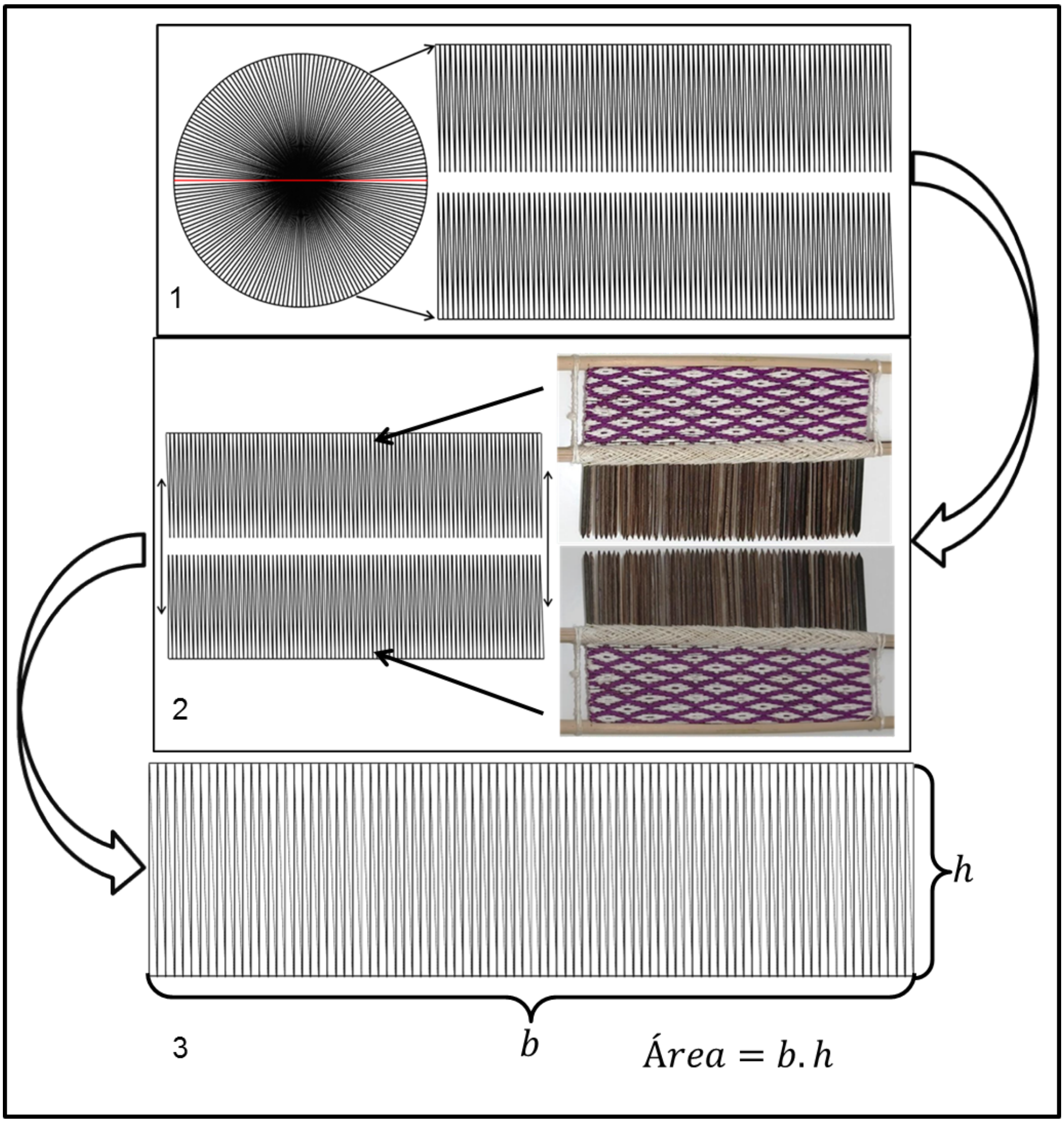


Fonte: Elaborada pelos autores.

Nossa proposta é a de construir a fórmula matemática que podemos utilizar para calcularmos a área circular a partir da soma -ésima dessas áreas dos setores cujas bases são suficientemente pequenos (ideia intuitiva de limite) tais que, em sua linearidade local ampliada assumem a possibilidade de forma praticamente sem curvatura, conforme a aproximação da Figura 27. E, a soma de todas as bases desses 180 setores aparenta corresponder, aproximadamente, ao comprimento da circunferência do círculo original.

Agora, podemos dividir o círculo com seus 180 setores de mesma área, em duas partes (semicírculos) compostas por 90 setores cada, que se opõem (1) e que podem se agrupar (2) assumindo uma forma aproximada de um retângulo (3), que se assemelha ao formato característico do Pente Indígena da Figura 25. Assim, na imagem da Figura 28, trazemos a representação dos três momentos (1, 2, 3) a que estamos nos referindo.

Figura 28 – A divisão do círculo em dois *pentes* com dentes em forma de setores.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Destarte, na imagem 1 da Figura 28, apresentamos o desmembramento do círculo original em dois semicírculos que após serem estendidos assumem o formato muito próximo de dois *pentes finos* que são compostos pelos 180 setores oriundos da divisão do círculo (90 setores em cada). Com o intuito de sensibilizarmos os acadêmicos indígenas da LINTER, esses *pentes finos* podem ser comparados a dois Pentes Indígenas (imagem 2 da Figura 28). Continuando, podemos promover o agrupamento desses *pentes finos* ou Pentes indígenas, com um complementando os espaços entre os setores do outro, que intuitivamente atuam como se fossem os dentes dos pentes.

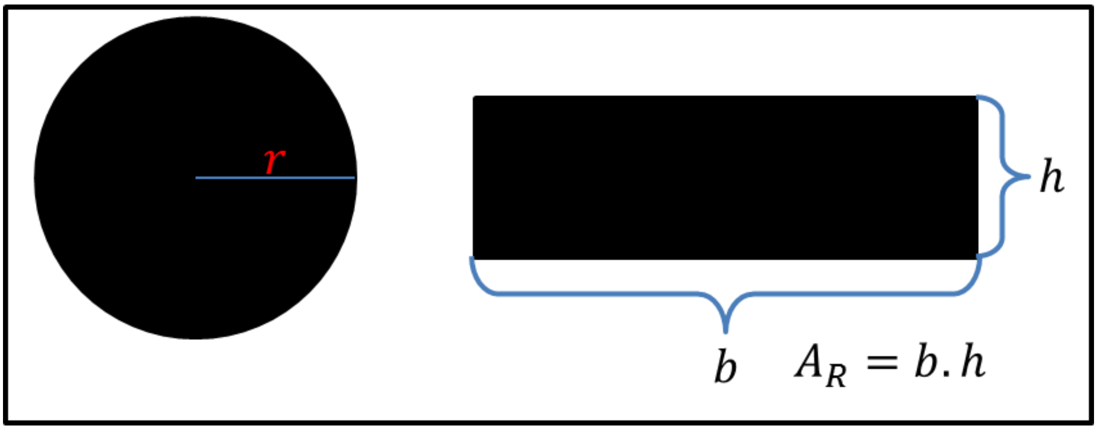
As setas de duplo sentido mostram esse agrupamento com o intuito de formarmos um quadrilátero que se aproxima ao formato de um retângulo. Salientamos que a comparação com os pentes indígenas se encaixando para formarem o retângulo, serve como motivação visual e cultural aos acadêmicos da LINTER como algo que lhes soa familiar, pois os dentes do pente não são perfeitos setores que se encaixam formando um quadrilátero como é plausível de acontecer com os 90 setores de cada um dos semicírculos.

Para representação matemática do cálculo da área do quadrilátero, imagem 3 da Figura 28, podemos considerar a altura desses setores como uma aproximação do raio do círculo, ou seja, Já sua base, pode ser denotada como a soma das 90 bases dos setores (soma de Riemann), cujo resultado se aproxima da metade do comprimento da circunferência do círculo. Logo:

Assim, a área do referido quadrilátero tem valor próximo ao da área do círculo original. Acontece que seguindo o método da Exaustão, se dividir o círculo em uma quantidade ainda maior de setores, a tendência é que a soma das áreas desses setores seja ainda mais próxima do resultado da área do círculo. Mas, qual o limite dessa divisão do círculo em setores? Justamente, precisamos do limite dessa soma para uma infinidade de setores.

Na imagem da Figura 29, denotamos que o retângulo originário do ato de estender os semicírculos, possui altura que corresponde, aproximadamente, ao raio do círculo e, comprimento igual à metade do limite da soma infinita das bases dos setores, ou seja, aproximadamente, a metade do comprimento da circunferência do círculo.

Figura 29 – A área do círculo a partir da área do retângulo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, na imagem da Figura 29 o mesmo círculo da Figura 28, foi dividido por uma quantidade de setores de forma que visualmente não conseguimos distinguir cada um desses setores, ou seja, a quantidade de setores tende ao infinito . De tal forma que nem se utilizarmos a ideia metafórica da lupa de Tall (2016), aproximando a imagem, como representamos na Figura 27 com a divisão do círculo em 180 setores, é possível identificarmos cada um desses setores. Agora precisamos discutir e acrescentar a ideia de limite à soma das infinitas bases dos setores (limite à soma de Riemann), bem como na extensão da altura desses infinitos setores, que no seu limite de extensão, corresponde ao raio do círculo original. Na linguagem matemática escrevemos que:

Então, concluímos que o cálculo da área do retângulo, que foi formado pela junção dos dois semicírculos, considerando a sua base como o limite da soma das bases dos setores que dividem cada semicírculo quando o total de setores tende ao infinito e, que o limite das alturas desses infinitos setores, altura do retângulo, equivale ao raio do círculo. Nos diálogos com os acadêmicos da LINTER, precisamos destacar que a divisão do círculo em setores, como sugere a imagem da Figura 30, deve acontecer com setores em que e , sendo que quanto maior for o número de setores que repartem o círculo, maior será a aproximação da área retangular com a área do círculo que lhe deu origem. Então, qual o número ideal para a quantidade desses setores? Essa discussão é instigada no tema do segundo vídeo a ser enviado aos acadêmicos indígenas e no debate inicial do segundo encontro presencial, quando o que estamos propondo puder ser aplicado conforme descrevemos no Capítulo 7.

6.3. O cálculo da superfície esférica e do volume esférico a partir da Luminária Indígena

Outro artefato indígena muito comercializado pelos pataxós é a Luminária Indígena feita totalmente por cipó, que possui o formato aproximado de uma esfera. Ela foi incorporada à cultura indígena Pataxó após contatos com turistas: os indígenas viram nesse artefato a possibilidade inicial de lucrarem com sua venda. Assim, um dos acadêmicos indígenas nos conta que a partir de um modelo que eles viram no comércio dos não indígenas, e ao perceberem que eles enfeitam suas casas com essas luminárias, alguns artesãos pataxós resolveram fabricar essas luminárias, utilizando como modelo a mesma forma aproximada de uma superfície esférica[72], porém, promovendo o entrelaçamento com cipós no lugar do vidro.

Logo, o que iniciou como uma simples adaptação, com o tempo passou a fazer parte da cultura indígena dos pataxós. A luminária se transformou em um exemplo de encontro cultural. Cada luminária é composta por materiais simples, mas cada uma delas é uma peça única do artefato indígena local. Por meio do entrelaçamento dos cipós eles constroem três tamanhos diferentes de luminárias: a menor de raio aproximado 10 (dez) centímetros; a intermediária de raio aproximado 15 (quinze) centímetros e; a maior de raio aproximado 18 (dezoito) centímetros. Geralmente a cor da luminária varia de acordo com a tonalidade do cipó utilizado, mas a pedido eles podem pintar com outras cores. É comum sua utilização nos bares, lojas e barracas das praias da região. Na Figura 30, apresentamos uma dessas

[72] “A grosso modo [...], a superfície esférica é a superfície de uma bola redonda no espaço. [...] Definição: Seja um ponto e seja um número positivo. A *superfície esférica de centro e raio* é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a é igual a ” (MOISE; DOWNS, 1971, p. 389, grifo dos autores).

luminárias em tamanho médio (raio próximo de 15 centímetros) e com a cor do cipó utilizado em uma tonalidade natural mais escura.

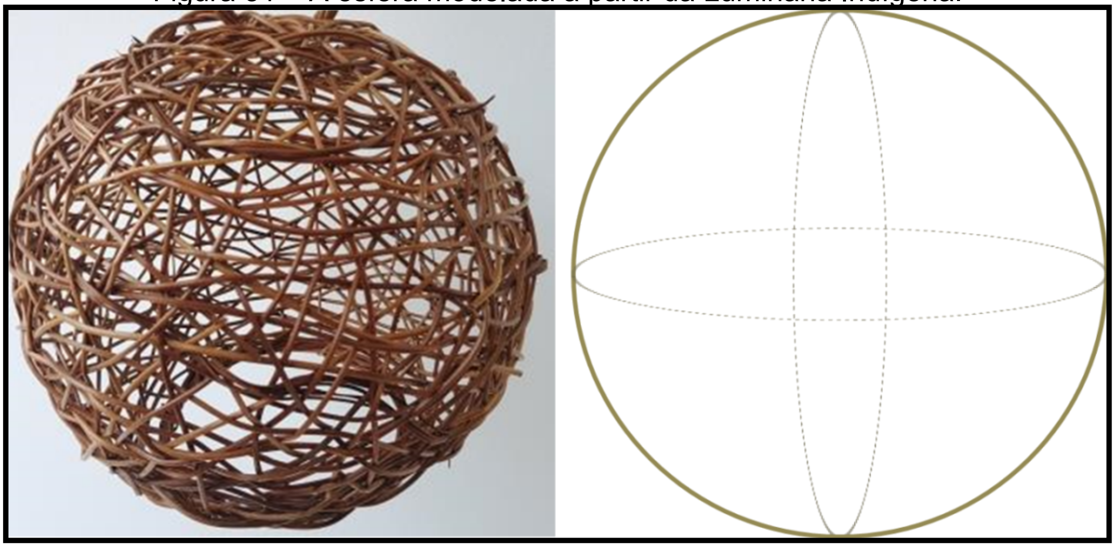
Figura 30 – A Luminária Indígena feita de cipó.

Fonte: Arquivo digital dos autores.

Nosso objetivo é partir do aproximado modelo de superfície esférica da luminária pataxó para a introdução da discussão sobre o cálculo de superfícies e volumes de cilindros, esferas e cones. Nessa ótica, aproveitando o modelo dessa luminária que sensibilizou os artesãos pataxós construímos, na Figura 31, uma esfera[73] que serve como base (mesma medida de raio) para a construção do cilindro e do cone retos de bases circulares. Afinal, o cilindro que circunscreve tanto a esfera quanto o cone, possui raio da base medindo o raio da esfera e sua altura equivale ao diâmetro da mesma circunferência. Da mesma forma, essas medidas se aplicam ao cone inscrito no cilindro. No caso, a luminária considerada tem, aproximadamente, 12 (doze) centímetros de raio.

[73] "Esfera é a reunião da superfície esférica e seu interior" (MOISES; DOWNS, 1971, p. 518).

Figura 31 – A esfera modelada a partir da Luminária Indígena.



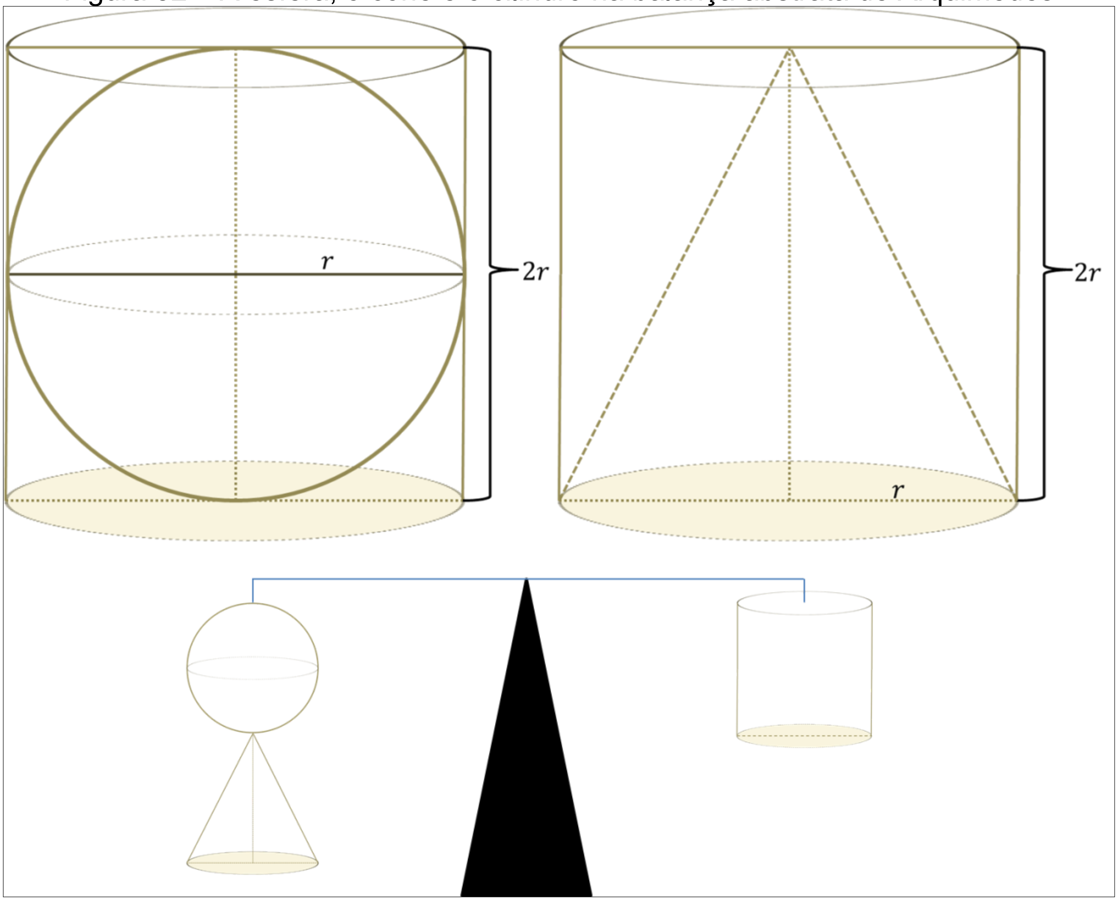
Fonte: Elaborada pelos autores.

Para buscarmos subsídios ou pistas sobre as relações geométricas entre o cilindro, a esfera e o cone, precisamos investigar o passado para trazer fatos e personagens da História da Matemática e, assim contextualizarmos e fomentarmos o debate com os acadêmicos da LINTER. Como já discutimos no Capítulo 2, no estudo das relações métricas (áreas e volumes) desses três sólidos geométricos destaca-se Arquimedes de Siracusa. Segundo Roque (2015, p. 198, grifo da autora)

> Arquimedes empregava uma balança abstrata que deveria equilibrar figuras geométricas equivalentes. O objetivo era defender um método que permitisse entender certas realidades matemáticas por meio da mecânica, ainda que esse método possibilitasse apenas a descoberta de propriedades que deveriam ser, em seguida, demonstradas geometricamente. Sabemos, hoje, que alguns dos resultados demonstrados geometricamente por Arquimedes eram obtidos de modo puramente mecânico. Haveria, portanto, uma distinção entre métodos de descoberta, que poderiam ser mecânicos, e métodos de demonstração, que deveriam ser *puramente geométricos*.

Arquimedes era mais adepto da Mecânica do que da própria Matemática. Para representarmos a sua ideia da balança abstrata, vamos utilizar o modelo esférico da Figura 31 colocando-o exatamente dentro de um cilindro cuja altura equivale ao diâmetro da esfera e, no interior do mesmo cilindro, colocamos um cone com altura equivalente ao diâmetro da esfera e a mesma área da base cilíndrica. Ambos os desenhos estão representados na Figura 32.

Figura 32 – A esfera, o cone e o cilindro na balança abstrata de Arquimedes.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, a Figura 32 mostra a ideia proposta por Arquimedes para contrapor em sua balança abstrata, sendo que de um lado ele coloca a esfera e o cone, e do outro o cilindro perfazendo um equilíbrio na balança. Contudo, de acordo com Ávila (2009), para Arquimedes, nesse equilíbrio abstrato (não de massa) no lado esquerdo da balança podemos ter a superfície total do cone, bem como a superfície esférica, que juntas, se equilibram ao valor da superfície total do cilindro. Para essa pesquisa, nos interessa a fundamental relação proporcional entre a superfície total da esfera e a superfície total do cilindro que a contem, como representado no desenho superior esquerdo da Figura 33. Nesse contexto, para Arquimedes:

De acordo com Ávila (2009, p. 2, grifo do autor)

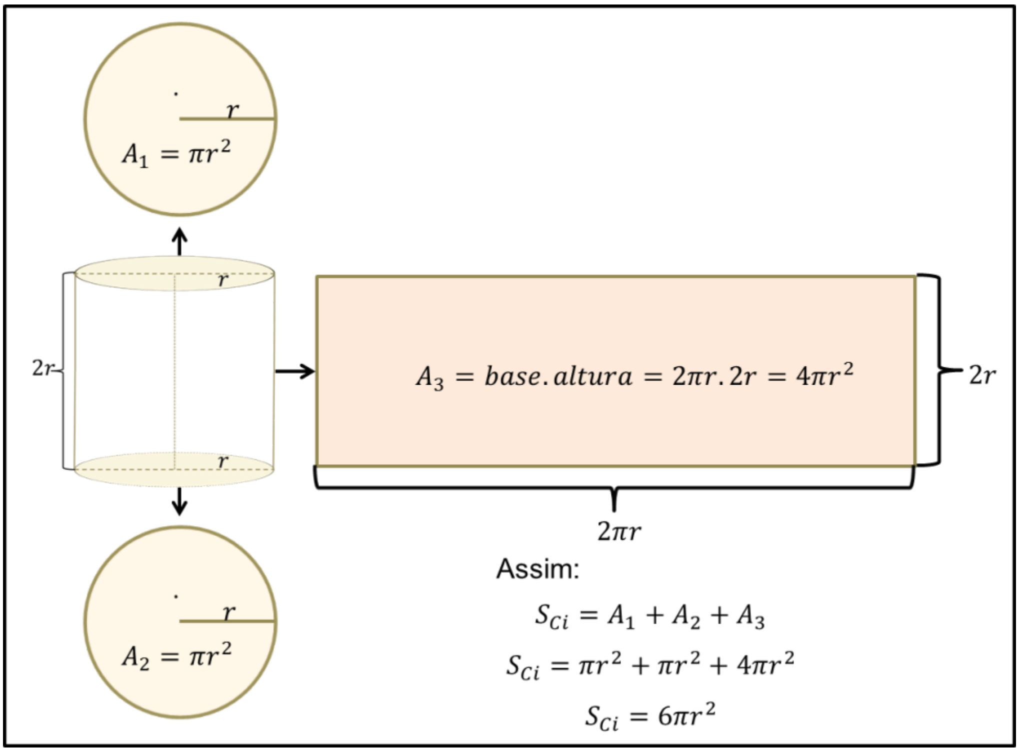
> As relações de áreas e de volumes do cilindro e da esfera nele contida como descreveram acima, figura como um corolário das Proposições 33 e 34 de um dos livros de Arquimedes, intitulado "Sobre a Esfera e o Cilindro, parte I". Esse livro está vazado em estilo rigoroso, num encadeamento preciso de

> postulados, definições e teoremas. Aliás, esse é o estilo das demais obras de Arquimedes que chegaram até nós e que são conhecidas desde a Idade Média. Tão grande é a preocupação com o rigor e com a estruturação lógica das demonstrações, que o leitor sequer percebe como o autor teria chegado a suas descobertas. Aliás, isto é frequente em Matemática, pois os caminhos da descoberta quase sempre são diferentes dos processos da demonstração.

Agora, por meio dessa relação entre as áreas da esfera e do cilindro que a contém, podemos desenvolver a manipulação algébrica para chegarmos à fórmula matemática que utilizamos para o cálculo de uma superfície esférica em função de seu raio de formação. Compreendemos que esse é o caminho mais curto, mas não menos interessante, pois conta com o apoio de fatos e personagens históricos da Matemática. Existe a demonstração moderna dessa fórmula matemática, no âmbito do Cálculo, mas essa é uma possível abordagem posterior, no decorrer do desenvolvimento profissional dos acadêmicos indígenas da LINTER. Assim, nessa pesquisa, partiremos da relação apresentada por Arquimedes para descrevermos a fórmula matemática que possibilita o cálculo da superfície esférica em função de seu raio .

Então, com base no desenho superior esquerdo da Figura 32, observamos que a altura do cilindro equivale ao diâmetro da esfera e sua base circular é formada pelo mesmo raio da esfera. Esse sólido geométrico recebe o nome de cilindro equilátero. Para calcularmos a superfície total do cilindro , nós precisamos separar as três áreas que o compõe, conforme apresentado na Figura 33 e, podemos realizar os cálculos das áreas das superfícies separadamente (fundo, tampa e lateral). Posteriormente, efetuamos a adição dos resultados desses cálculos, para enfim, encontrarmos a área da superfície total do cilindro que utilizaremos na proporção da balança abstrata de Arquimedes.

Figura 33 – Apresentação da área total do cilindro.



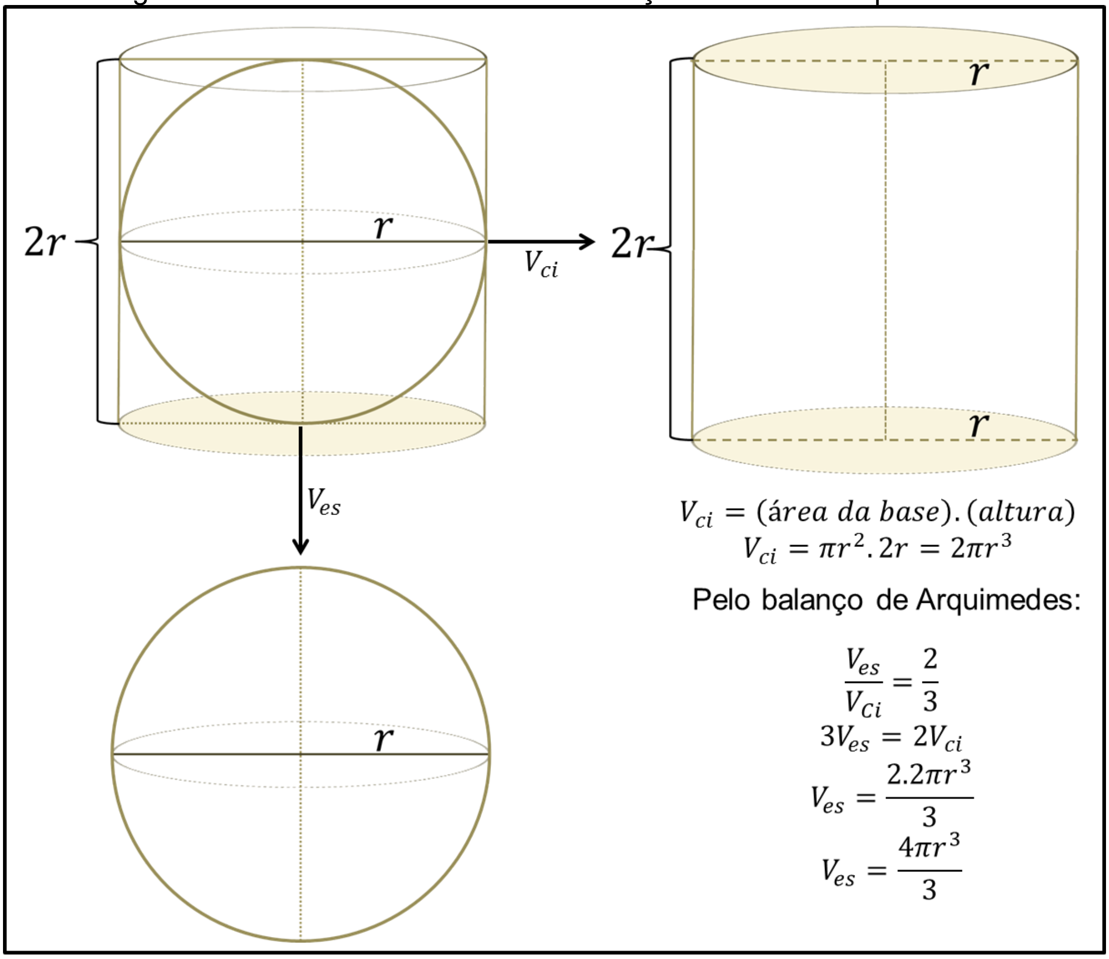
Fonte: Elaborada pelos autores.

Agora, utilizamos a relação proporcional de Arquimedes, destacada por Ávila (2009) para manipularmos algebricamente e encontrarmos a fórmula que calcula a superfície esférica em função de seu raio

Porém, como já calculamos na Figura 33, , logo:

Como fomento de discussão com os acadêmicos da LINTER, verificamos que coincidentemente a área esférica é equivalente a área lateral do cilindro, na Figura 33, que contém a referida esfera. Posteriormente, prosseguiremos em busca da fórmula matemática que possibilita o cálculo do volume de uma esfera a partir do valor de seu raio . De acordo com Ávila (2009), Arquimedes por meio de sua balança abstrata, apresenta que a mesma proporção utilizada nas áreas vale para os volumes da esfera e do cilindro que a contém (Figura 34), ou seja:

Figura 34 – O volume da esfera na balança abstrata de Arquimedes.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Nesse cenário, a Figura 34 nos mostra essa apresentação de Arquimedes, bem como a construção da fórmula matemática que utilizamos para o cálculo do volume de uma esfera em função de seu raio . Salientamos que essas ideias repercutam no Capítulo 7, com a utilização de uma balança seguindo o modelo da balança abstrata de Arquimedes, construída em madeira, bem como um cilindro, um cone e uma esfera.

6.4. Do Cocar às definições de integral definida e função área

O Cocar é um artefato que está presente em todas as culturas indígenas do Brasil permitindo ser adaptada e ampliada para qualquer comunidade indígena brasileira. Ao observarmos sua representatividade, seus significados, bem como, seu formato e construção, percebemos a sua flexibilidade tanto para tratarmos de modelo para a construção dos gráficos da função constante e função polinomial do primeiro grau, quanto para representarmos graficamente a parábola da função quadrática. Na Figura 35, apresentamos o Cocar Indígena Pataxó utilizado como artefato e modelo nessa pesquisa.

Figura 35 – O Cocar Indígena da pesquisa.

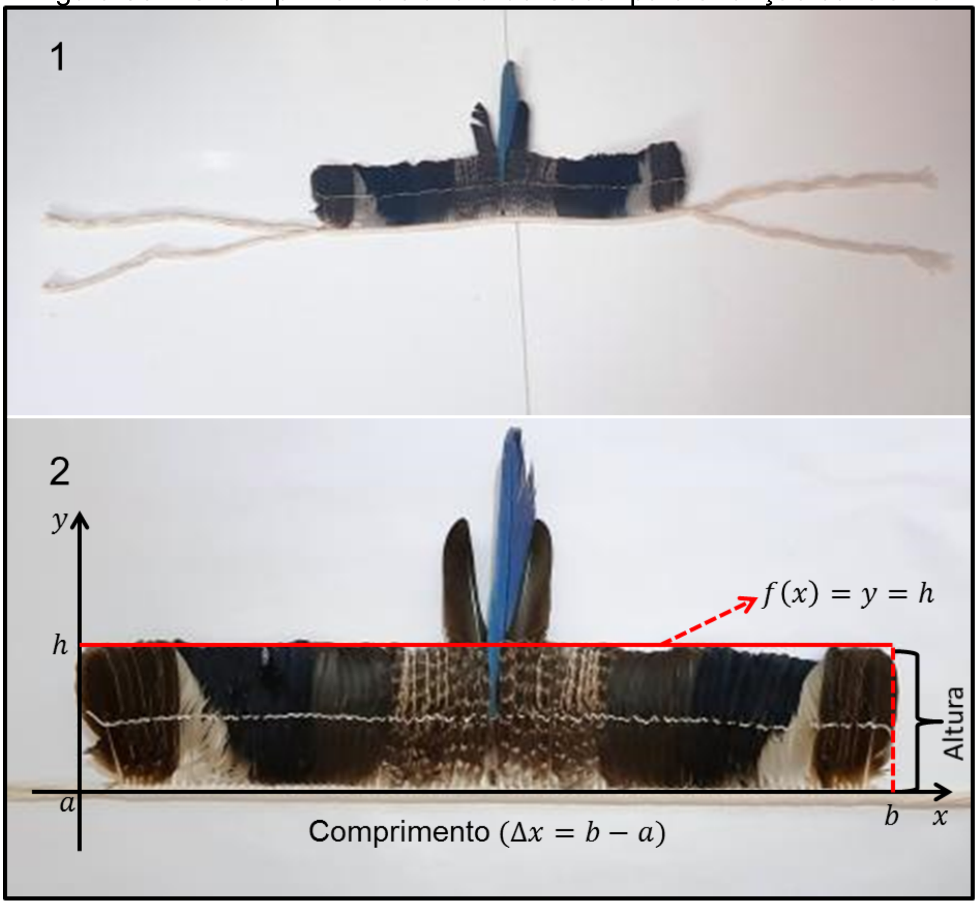
Fonte: Arquivo digital dos autores.

Propositalmente, todo Cocar Pataxó possui três penas maiores e centrais que se destacam. Elas representam as aldeias icônicas de quem o usa. A pena do meio é sempre maior para se destacar perante as outras, por representar a comunidade indígena de Barra Velha que é considerada pelos pataxós como a aldeia mãe do povo Pataxó. No caso, ela é a pena azul do Cocar da Figura 36. Foi a partir da aldeia de Barra Velha que se formaram as demais aldeias pataxós. As duas penas, um pouco maiores que as demais, representam as aldeias da Jaqueira e a de Coroa Vermelha.

Hoje eles utilizam penas de araras, galinhas, pombas, entre outras aves. Eles não caçam mais, simplesmente criam essas aves ou fazem a coleta das penas nas matas. Não há restrições sobre quem pode ou não utilizar um Cocar entre os próprios pataxós, o primordial é a preservação e divulgação da cultura indígena Pataxó. Nesse sentido, eles fabricam os cocares e os vendem como fonte de renda, mas principalmente para a divulgação de sua cultura.

Segundo um professor da etnia Pataxó, já formado pela LINTER, a primeira coisa a ser considerada na fabricação do Cocar é o seu comprimento, esse valor depende da intenção de quem o fabrica, ou seja, na verdade para quem ele está sendo feito. Para uma criança o comprimento de suas linhas será menor, para mulheres um pouco maior, e para os homens adultos, a maioria, exige um comprimento maior e com mais sobras de barbante para ser amarrado na cabeça. Nessa perspectiva, com base na imagem 1 da Figura 36, colocamos o Cocar na posição horizontal para pensarmos em seu comprimento e na sua altura (padrão das penas menores) e a partir dele, como um modelo, desenharmos o gráfico de uma função constante (imagem 2 da Figura 36).

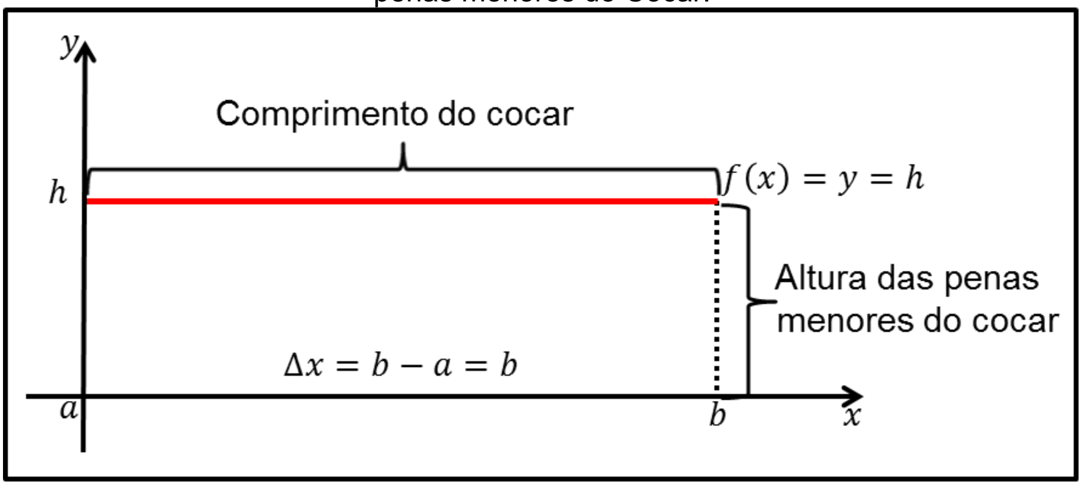
Figura 36 – O comprimento e altura do Cocar para a função constante.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A imagem 1 da Figura 36, mostra o Cocar da pesquisa com seus barbantes em toda sua extensão. Já na sua imagem 2, esticamos as pontas de seus barbantes para que ele ficasse o mais reto possível, e assim pudemos considerar o seu comprimento e sua altura como base para a construção do gráfico da função constante limitado por um intervalo fechado , cuja dimensão, corresponde ao próprio comprimento do Cocar. Salientamos que o comprimento do Cocar é variável, dependendo do seu público alvo para a venda, mas a altura de suas penas aqui se mantém constante com exceção das três centrais. Para nós não importa os valores numéricos do comprimento e da altura do Cocar, pois nosso objetivo é utilizarmos as ideias de comprimento e altura presentes na construção do Cocar, para construirmos o gráfico da função constante , conforme representamos na Figura 37.

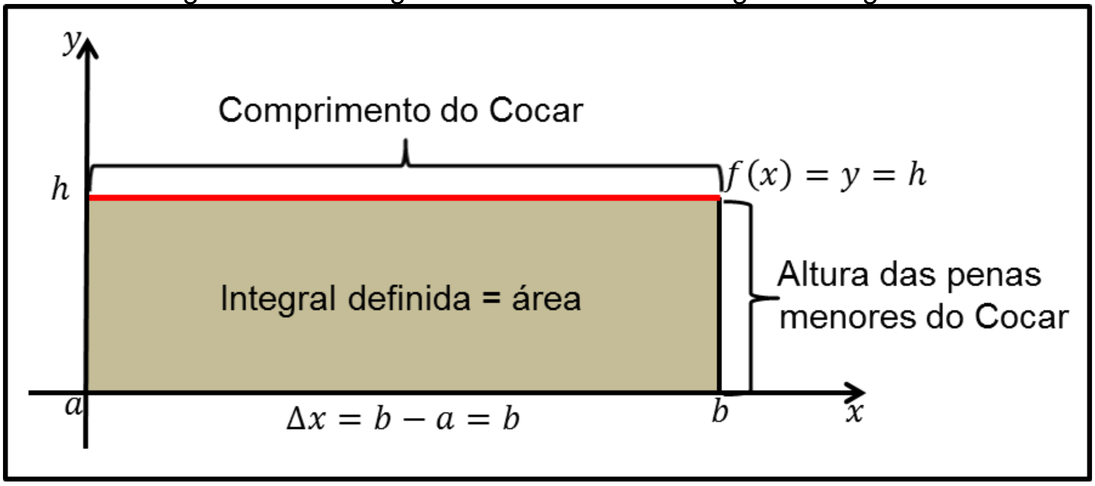
Figura 37 – O gráfico da função constante por meio do comprimento e da altura das penas menores do Cocar.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A partir da ideia contextualizada de comprimento e altura no Cocar, nosso propósito é o cálculo da área da região limitada pelo comprimento do Cocar estendido em função da altura das penas menores que compõe o artefato em questão. Salientamos que o Cocar é uma peça de artesanato indígena que nos serve como contexto cultural dos acadêmicos indígenas da LINTER. Suas penas menores não possuem exatamente a mesma altura, apesar de que o indígena ao construir o Cocar apara as pontas sobressalentes dessas penas procurando estabelecer uniformidade em suas alturas. Isso pode gerar algumas discussões interessantes no diálogo com os acadêmicos, já que no gráfico da Figura 38 nós precisamos considerar que as penas menores do Cocar, tenham precisamente a mesma altura. Na Figura 38 delimitamos a área da região que representa a integral definida da função .

Figura 38 – A integral definida na área da região retangular.



Fonte: Elaborada pelos autores

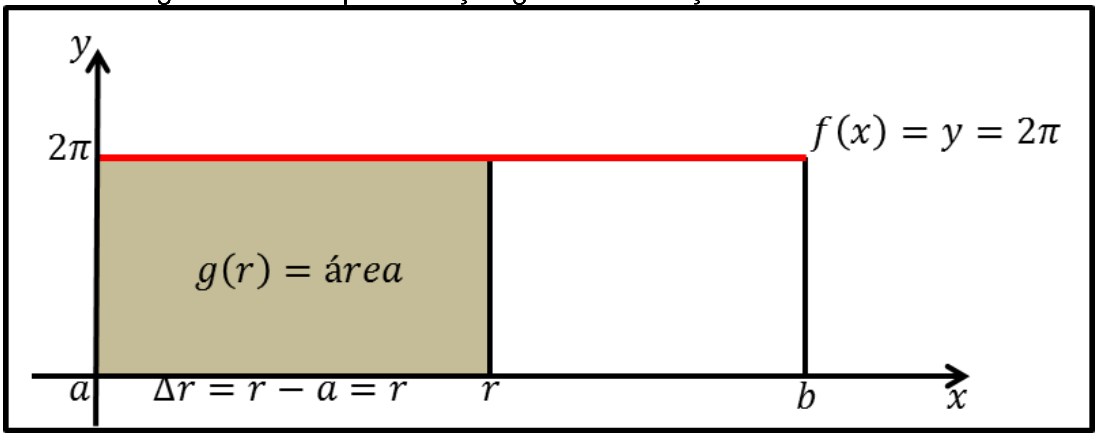
O cálculo dessa área é simples, pois a área da região situada sob a curva , entre as retas verticais e com e acima do eixo , tem a forma retangular, cuja área pode ser calculada pelo produto de sua altura por sua base , e, ao considerarmos teremos Logo, podemos escrever que a área dessa região é a integral definida de da seguinte maneira:

Destacamos ser primordial que os acadêmicos já conheçam o conceito de conjuntos numéricos, função constante, bem como a fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a área de uma região retangular. A novidade é a questão de associação da área da referida região com a definição de integral definida que corresponde a um valor numérico, ou seja, o resultado dessa área. A partir disso, podemos implementar a ideia possibilitada pela primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo que discutimos no Capítulo 2 com relação a definição de função área.

O Ciclo Trigonométrico possui um comprimento que corresponde a radianos. Uma volta na circunferência. Então, por exemplo, podemos considerar o comprimento de uma circunferência como uma função constante se o seu raio for 1, e aplicando a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo temos que:

Na qual, o valor de é variável entre o intervalo e corresponde ao raio de uma circunferência. A imagem da Figura 39 representa a ideia da função descrita:

Figura 39 – A representação gráfica da função área oriunda de .



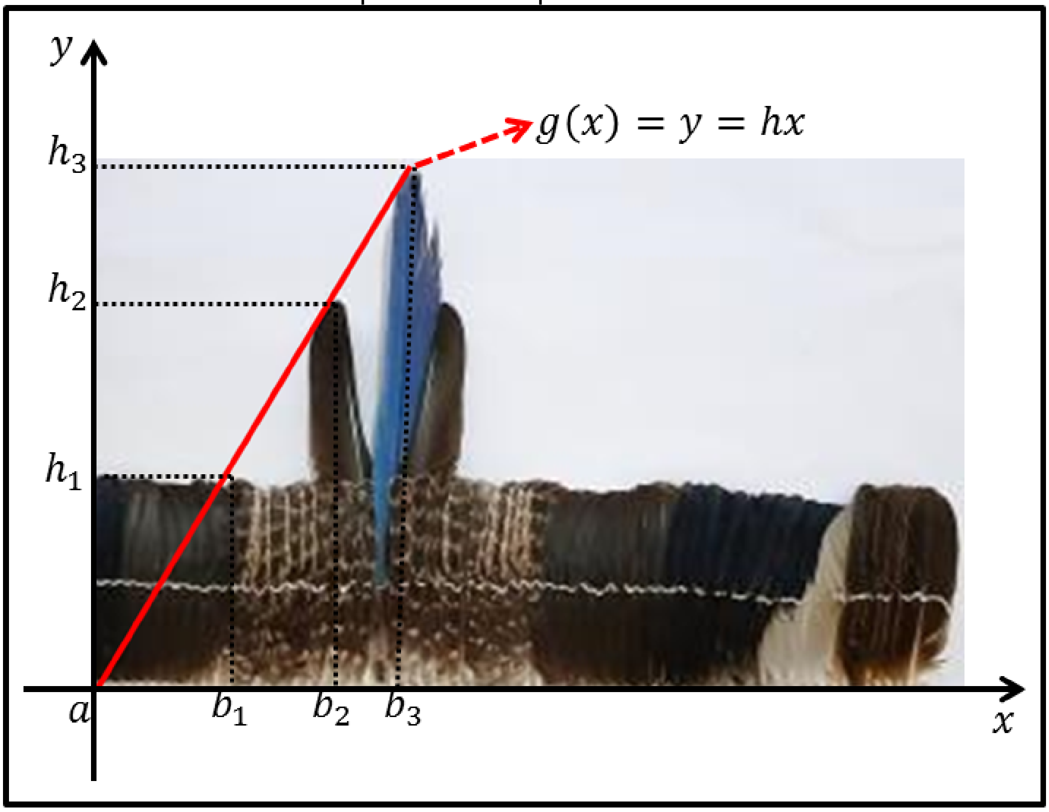
Fonte: Elaborada pelos autores.

Ou seja, a função com indica uma função polinomial do 1º grau positiva, contínua e dependente da variação de seu raio entre e . Ela foi construída a partir do cálculo da área da região situada sob a curva , entre as retas verticais e com e acima do eixo , tem a forma retangular, cuja área pode ser calculada pelo produto de sua altura por sua base , ao considerarmos teremos Logo, podemos escrever que a área dessa região é a integral definida de da seguinte maneira:

A mesma fórmula matemática que utilizamos para calcularmos o comprimento de uma circunferência, construída anteriormente por meio da divisão ente o comprimento da circunferência por seu diâmetro, pode ser obtida por intermédio da construção da função área a partir da função constante utilizando a definição de integral definida.

Agora, observamos a função polinomial do 1º grau para verificarmos que gráfico ela nos fornece. Como podemos associar sua construção gráfica com o Cocar utilizado? Vamos considerar que tanto o comprimento do Cocar quanto as alturas de suas três penas centrais podem variar de Cocar para Cocar considerando o tipo e o tamanho de pena utilizada, pois no caso dos pataxós, as três penas localizadas ao centro do Cocar devem se destacar em tamanho, perante as demais, com alturas maiores como nos foi informado pelos próprios pataxós. Nessa construção gráfica, podemos intuitivamente variar o valor da altura de suas penas (no eixo) em função do seu comprimento (no eixo . Na Figura 40 trazemos a imagem que nos mostra essa ideia.

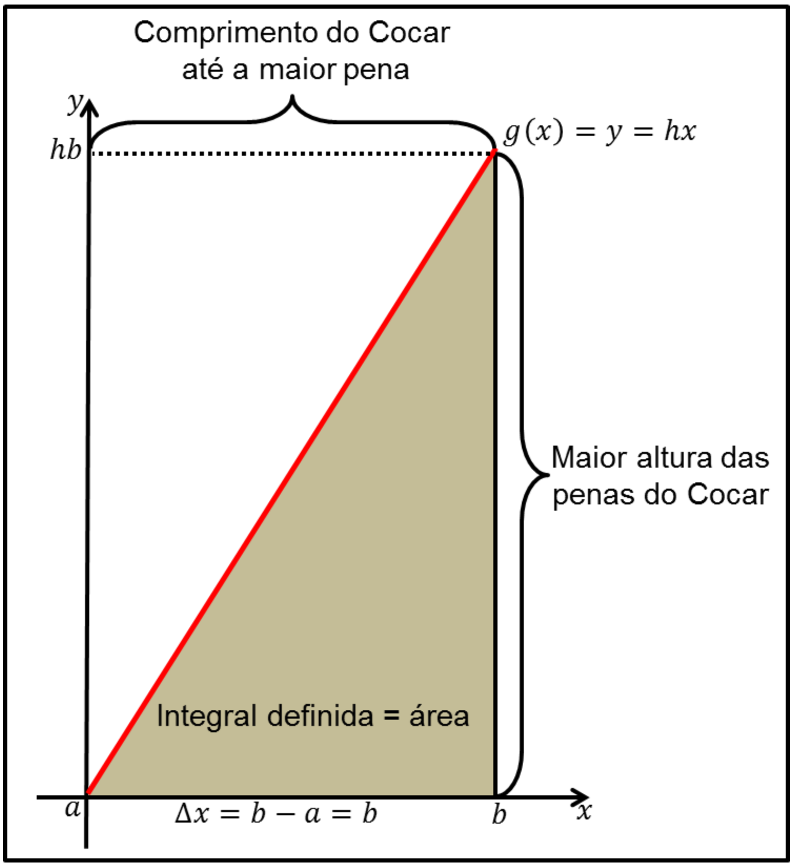
Figura 40 – O gráfico da função polinomial do 1º grau positiva na variação de altura e comprimento das penas do Cocar.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Nossa intenção é utilizarmos as alturas diferentes das penas do Cocar para a inclinação do esboço do gráfico de uma função polinomial do 1º grau crescente. Assim, na construção do gráfico da Figura 40 a linha do comprimento, sofre uma inclinação para cima, ao considerarmos as três alturas distintas das penas que constituem o Cocar e que provocam a inclinação do gráfico, em função de suas três posições horizontais que determinam a extensão do segmento de reta. Nesse sentido, a imagem da Figura 41 representa o gráfico da função polinomial do 1º grau positiva .

Figura 41 – O gráfico da função polinomial positiva do 1º grau a partir do Cocar.

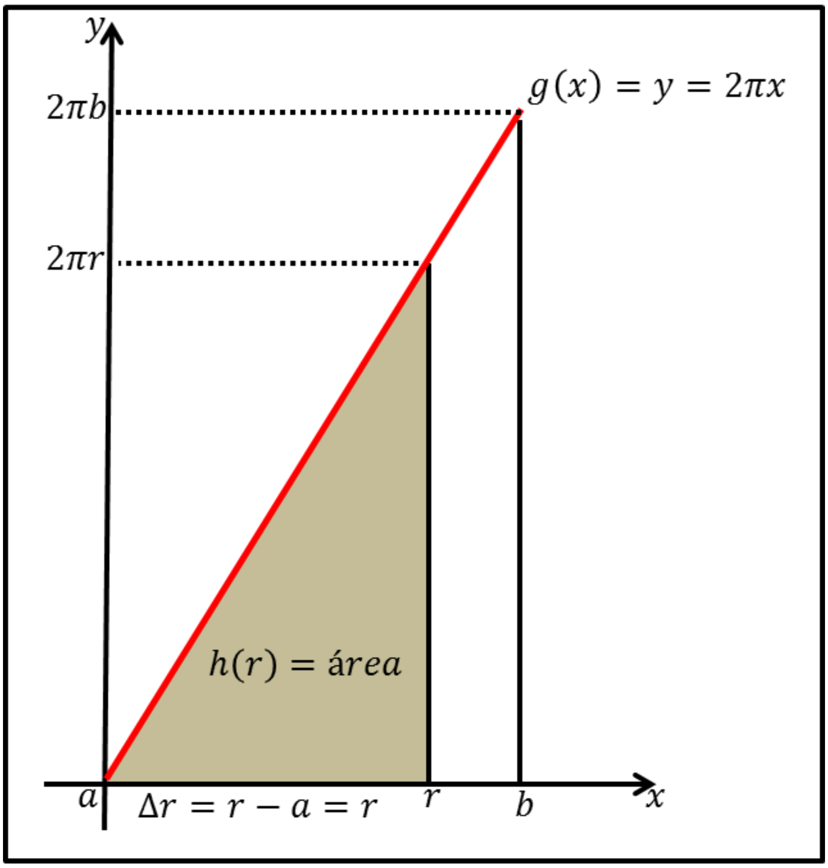


Fonte: Elaborada pelos autores.

Observando a Figura 41, verificamos que então, podemos escrever . O cálculo dessa área é simples, pois a área da região situada sob a curva , entre a reta vertical com e acima do eixo , tem a forma triangular, cuja área pode ser calculada pela metade do produto de sua altura por sua base Logo, podemos escrever que a área dessa região é a integral definida de da seguinte maneira:

Agora, mais uma vez, promovendo uma associação com o capítulo anterior vemos que a fórmula matemática que utilizamos para calcular a área de um círculo, em função do seu raio, é dada por Podemos implementar a ideia possibilitada pela primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo partindo da função do comprimento da circunferência com sendo variável em função do raio da circunferência e consequentemente do círculo. A imagem da Figura 42 nos mostra a ideia da função descrita.

Figura 42 – A representação gráfica da função área oriunda de .



Fonte: Elaborada pelos autores.

Se tomarmos e , novamente o cálculo dessa área é simples, pois a área da região situada sob a curva , entre a reta vertical com e acima do eixo , tem a forma triangular, cuja área pode ser calculada pela metade do produto de sua altura por sua base Logo, podemos escrever que a área dessa região é a integral definida de da seguinte maneira:

Ou seja, a função com indica uma função polinomial do 2º grau positiva e dependente da variação do raio entre e . Ela foi construída a partir da área da região sob a reta , integral definida, e corresponde a fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a área de um círculo em função do seu raio. Assim, promovemos um elo com a História da Matemática, pois esse cálculo vai ao encontro da Proposição 1 de Arquimedes, como discutimos no Capítulo 2 e apresentamos no quarto processo de ensino e aprendizagem do Capítulo 7.

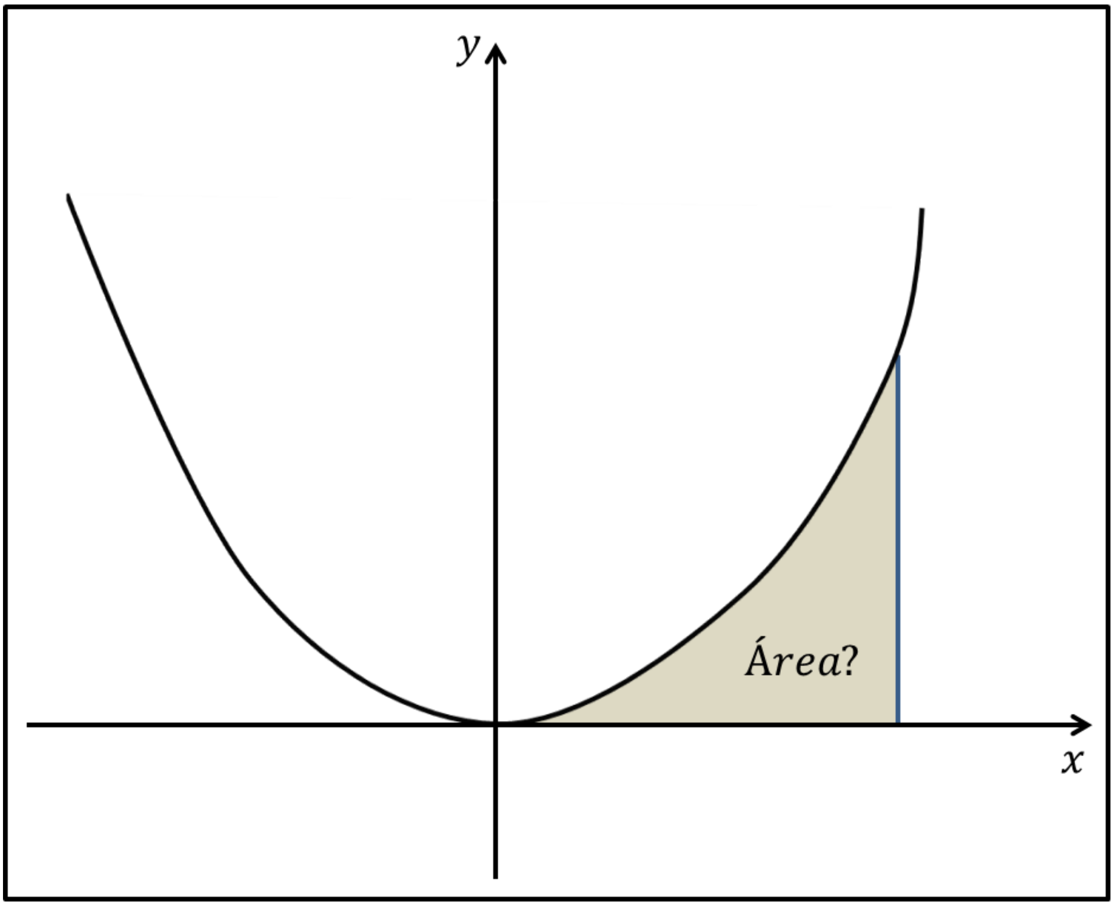
Salientamos que as funções constante, polinomial do primeiro grau e quadrática são fundamentais na composição de modelos teóricos do conhecimento matemático. Na Educação Básica, quando construímos com nossos alunos o gráfico de uma função quadrática, obtemos uma curva denominada parábola. Ao observarmos de perto a imagem do Cocar utilizado nessa pesquisa (Figura 43), percebemos que ele pode representar, aproximadamente, a forma gráfica parabólica de uma função quadrática. Ressaltamos que a intenção aqui é arrumar o Cocar para que ele molde uma parábola, mas poderia em outro estudo ser uma catenária, por exemplo.

Figura 43 – A parábola no Cocar Indígena.

Fonte: Arquivo digital dos autores

Nesse sentido, utilizamos o modelo curvo do Cocar para esboçar, aproximadamente, o gráfico parabólico de uma função quadrática (Figura 44), no qual podemos delimitar a área que pretendemos calcular com a finalidade de encontrarmos a expressão algébrica para o cálculo da integral definida (área) de uma função quadrática. Optamos por inverter a imagem do Cocar para obtermos uma parábola com concavidade voltada para cima evitando a utilização de valores negativos que devem ser dialogados posteriormente com os acadêmicos da LINTER. A área que delimitamos corresponde à região entre a curva da parábola e o eixo cartesiano das abscissas como apresentado na Figura 44.

Figura 44 – O gráfico da parábola moldada no Cocar Indígena e a área procurada.



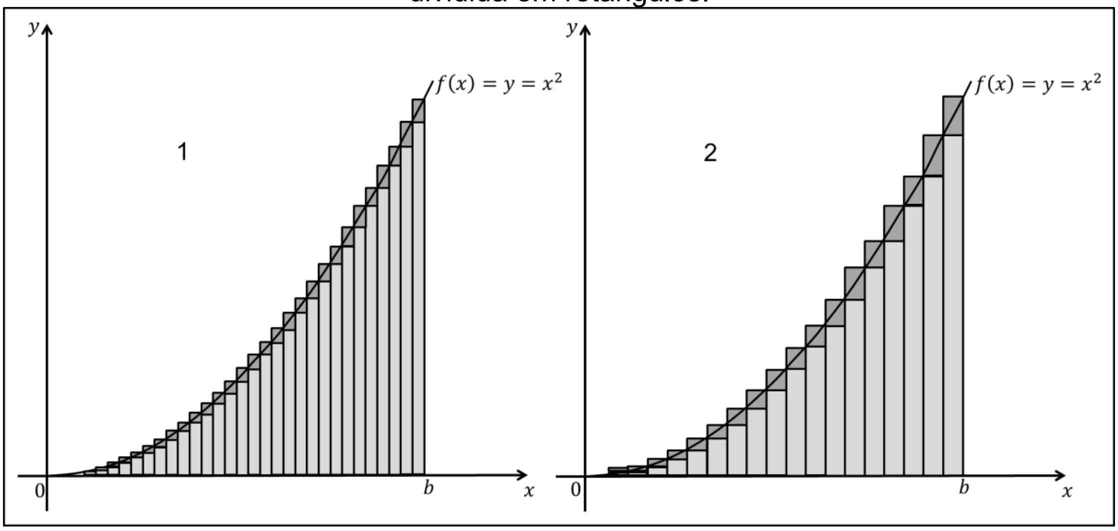
Fonte: Elaborada pelos autores.

Com esse molde gráfico e a área delimitada podemos calcular a integral definida de uma função quadrática que corresponde ao cálculo da superfície cinza da Figura 44. Porém, agora temos uma região curva e não mais retângulos ou triângulos como nos casos da função constante e função polinomial do primeiro grau, respectivamente.

Como já descrevemos no Capítulo 2, de acordo com Roque (2015), durante os anos de 1630, tanto Fermat quanto Pascal, utilizaram a ideia dos indivisíveis para o cálculo da área de regiões originadas de curvas, entre elas, a parábola O método revolucionário consistiu em dividir a área da região situada sob a curva , entre a reta vertical com e acima do eixo , em retângulos cada vez com menor largura, ou seja, *mais finos*. O número desses retângulos aumenta indefinidamente quanto menos largos esses forem, nessa perspectiva, basta considerar uma aproximação da soma das áreas desses retângulos. Isso ocorre quando o número desses retângulos se torna muito grande.

O objetivo do procedimento é calcular a área de uma região curva qualquer fazendo aproximação e por meio de uma expressão algébrica oriunda dessas aproximações, construída por manipulações simbólicas. Com essa expressão algébrica construída, basta substituirmos valores numéricos em suas variáveis e efetuarmos as operações da expressão para calcularmos a área procurada. Na Figura 45, apresentamos os retângulos para o cálculo da área da região que mencionamos.

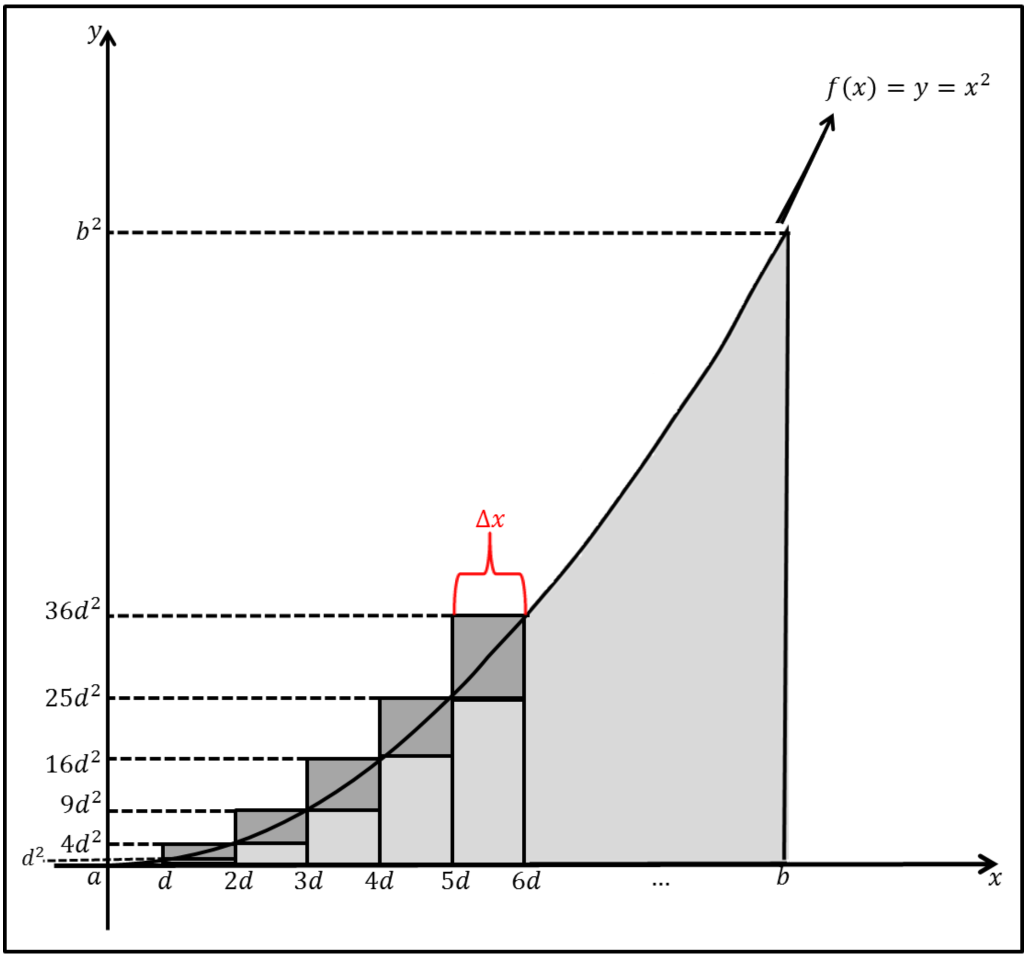
Figura 45 – A área da região sob a curva entre a reta vertical com e acima do eixo dividida em retângulos.



Fonte: Elaborada pelos autores.

No desenho, representamos a mesma parte positiva da curva dividida em retângulos menores no gráfico 1 da Figura 45, para visualizar que quanto *mais finos* forem esses retângulos menores serão as diferenças retangulares, que ultrapassam as fronteiras da curva, representadas nos retângulos mais escuros. Ou seja, quanto mais retângulos utilizarmos suas larguras serão menores diminuindo as diferenças entre a soma das áreas desses retângulos com a área da região a ser calculada. O fato é que a área dessa referida região limitada pela fronteira da curva é a soma das *infinitas* áreas dos retângulos, a soma de Riemann. Esse é um cálculo semelhante ao da área do círculo por meio da soma das áreas de infinitos setores que ele foi dividido. Na Figura 46, ampliamos a largura dos retângulos para uma visualização detalhada do procedimento que será adotado no cálculo dessa área.

Figura 46 – Os elementos para o cálculo algébrico da área (integral definida).



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para essa representação, delimitamos a área da região sob a curva pela reta vertical sendo e o eixo horizontal . No eixo das abscissas estão postas as posições dos retângulos, no eixo das ordenadas (eixo vertical) temos os valores das alturas dos retângulos que variam em função de , ou seja, para um retângulo de largura temos uma altura como apresentado no gráfico. Assim, a área da referida região é composta pela soma infinita das áreas desses retângulos começando em e terminando em , logo podemos considerar a posição final como , bem como no eixo vertical a posição como

Embora, não pretendamos realizar a manipulação algébrica que envolve o desenvolvimento desse limite para os acadêmicos indígenas da LINTER que participariam de nossa pesquisa, todavia, entendemos que a demonstração faz parte do conhecimento matemático, então a faremos aqui utilizando uma manipulação algébrica para execução do cálculo da soma . Para tanto, vamos partir da expressão promovendo seu desenvolvimento:

Agora, vamos aplicar o mesmo raciocínio para :

Como nós pretendemos encontrar uma equação que sintetize a soma dos quadrados dos primeiros números naturais, vamos substituir o valor de por números naturais de a e por , pois pretendemos considerar números naturais.

A adição é comutativa não importando a ordem dos termos que estão sendo somados. Os resultados dessa soma serão sempre o mesmo, e podemos eliminar os zeros, pois na soma o zero é elemento neutro. Então:

Podemos simplificar a equação:

Ainda podemos simplificar e escrever a soma de números naturais em parênteses no primeiro membro da equação como a soma de termos de uma Progressão Aritmética com termos naturais, na qual, o primeiro termo é 1 e o seu último termo sendo :

Então, prosseguimos multiplicando os termos da equação por para simplificar a divisão e depois isolamos a soma :

Então se:

Logo:

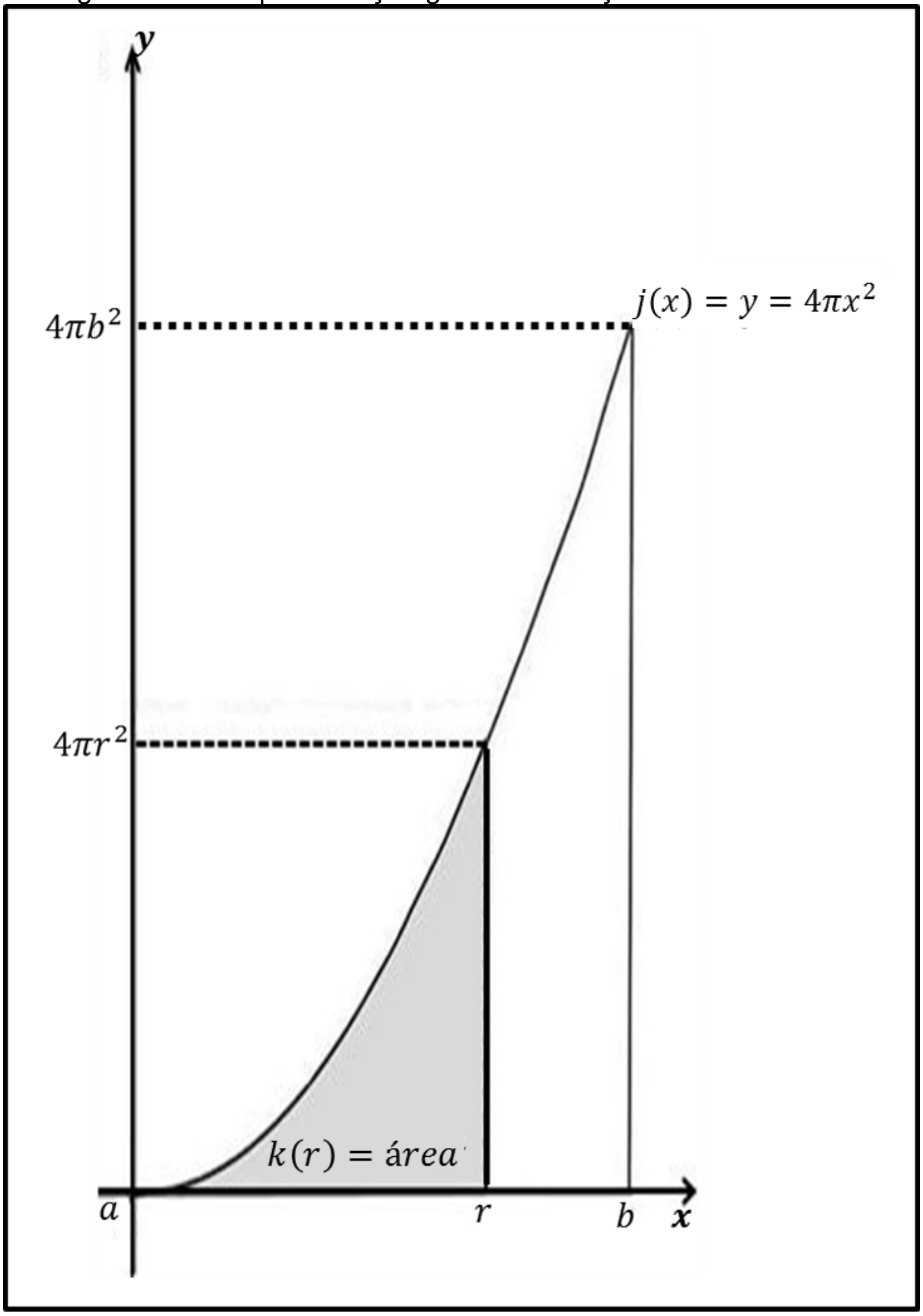
Porém, , então:

Como representa o número de retângulos do gráfico e quanto mais esse número de retângulos aumenta, tendendo ao infinito, dividir por ele, ou seja, o resultado da divisão por tende a zero. Assim, dessas divisões resultam a seguinte equação que representa a área da região sob a curva iniciando em e terminando em

Ressaltamos que não utilizaremos esse procedimento algébrico no quinto processo de ensino e aprendizagem. Nele, o cálculo será realizado por meio da balança de Arquimedes, conforme descrevemos no planejamento do quinto encontro no Capítulo 7. De acordo com Roque (2015), esse método pode ser aplicado facilmente para outras curvas originadas graficamente a partir de funções matemáticas do tipo com e Para isso, basta que tenhamos uma equação que substitua as alturas dos retângulos. No entanto, é preciso conhecer a soma das -ésimas potências dos primeiros números naturais. Para Roque (2015, p. 136): “Por volta de 1636, Fermat já sabia que, para racional e diferente de , a área sob o gráfico de entre dois pontos e (a uma distância de) é dada por ”. Ou seja, podemos definir de forma geral que a integral definida de uma função polinomial do tipo como:

Agora, novamente, faremos uma associação com o capítulo anterior no qual vimos que fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a superfície de uma esfera em função do seu raio é dada por Podemos implementar a ideia possibilitada pela primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo partindo da função quadrática . A imagem da Figura 47 representa a ideia descrita.

Figura 47 – A representação gráfica da função área oriunda de .



Fonte: Elaborada pelos autores.

Fazendo e teremos que:

Ou seja, a função com indica uma função polinomial do 3º grau positiva e dependente da variação do seu raio entre e . Ela foi construída a partir do cálculo da área da região sob a curva , com a reta vertical sendo e o eixo das abscissas e, corresponde a fórmula matemática que utilizamos para calcularmos o volume de uma esfera em função do seu raio.

De acordo com Gårding (1981, p. 204)

> Vamos agora imaginar que Arquimedes tenha ressuscitado de modo que podemos mostrar-lhe nossas provas, traduzidas, claro, para o grego por algum intérprete competente. Numa conversa posterior Arquimedes então nos diz que ele próprio poderia ter feito alguma coisa semelhante embora esteja surpreso com a facilidade de nossos cálculos. Mas, ele está longe de ficar satisfeito. Ele duvida de que seja possível simplesmente ignorar o método da exaustão usado por ele e baseado numa comparação entre figuras inscritas e circunscritas cujos volumes e áreas são conhecidos ao certo. Com essa observação um tanto cáustica Arquimedes desaparece e ficamos comtemplando a situação.

Essa imaginação proposta pelo autor é interessante, embora não concordamos com o termo *facilidade* para esses cálculos, compreendemos que o termo *praticidade* seria apropriado. Esse vislumbre proposto por Gårding (1981) nos conduz a construir o processo de ensino e aprendizagem, sobre o cálculo da integral definida da função contínua e, consequentemente, com o da função utilizando a balança de Arquimedes, associada ao cálculo da área de uma região limitada por uma curva fechada de parábola com o apoio da definição física de massa e massa específica, conforme descrito na proposta do processo de ensino e aprendizagem do quinto encontro no Capítulo 7. Porém, contextualizando com os acadêmicos indígenas participantes, nesse processo educacional, o método da Exaustão aliado a soma de Riemann.

CAPÍTULO 7

PLANEJANDO CADA PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Nas dinâmicas dos encontros, pretendemos promover a realização de jornadas pelos Três Mundos da Matemática, sendo que, em cada encontro propomos uma jornada para cada acadêmico indígena que participe da aplicação dessa proposta de ensino e aprendizagem. Apresentamos a caracterização da dinâmica de movimento do pensamento matemático pelos três mundos matemáticos em cada encontro com vistas ao estudo das definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área. Ou seja, o que fora relatado e discutido até aqui será desencadeado no planejamento e no desenvolvimento de cada processo de ensino e aprendizagem desses conteúdos da Matemática, presentes no Currículo da LINTER.

Enquanto professores pesquisadores desses processos, concordamos com Monteiro (2010, p. 440, grifos da autora), quando salienta que

> Nossa função, ao dirigirmos um olhar crítico ao cotidiano, não é a de demonstrar hipóteses sobre o saber de um grupo, ou seja, não nos compete demonstrar verdades estabelecidas a priori, como: "eles não sabem nada" ou eles "já sabem tudo" sobre algum fenômeno. Ao contrário, compreender um grupo é algo complexo, sendo necessário mais um processo de "mostração" do que uma lógica de demonstração. É necessário estar mais voltado para a descoberta, para o que surpreende, possibilitando ao professor-pesquisador buscar a realidade pelos indícios, pelos significados e representações construídas pelo próprio grupo. Nesta perspectiva a realidade é algo que se insinua pelo cotidiano, mas não se entrega totalmente.

Assim, destacamos que cada processo de ensino e aprendizagem é flexível e pautado na relação dialógica, entre os próprios acadêmicos (Pataxós, Pataxós Hãhãhãe e Tupinambás), e entre eles e o professor formador, que atua como norteador das discussões: observando, fazendo indagações pontuais, elencando hipóteses, apontando caminhos, ofertando pistas, fomentando o debate para que cada acadêmico trilhe a sua jornada cognitiva pelos Três Mundos da Matemática no transcorrer de cada processo de ensino e aprendizagem.

7.1. Antevendo os encontros presenciais

O planejamento do processo educacional conta com cinco encontros de 2 horas cada, perfazendo 10 (dez) horas no total. Os artefatos ou artesanatos utilizados no desenvolvimento de cada processo são como personificações dos propósitos e, ao mesmo tempo, os instrumentos que conduzem a realizar tais propósitos. Eles são tanto subjetivos quanto objetivos. Portanto, são sujeitos e objetos concomitantemente, são entes personificados dos pensamentos dos seus criadores, que possuem os seus espaços físicos, mas que vão além do seu corpo levando os pensamentos de seus artesãos (RADFORD, 2011). Nesse sentido, como já discutimos no Capítulo 6, o estudo das definições de limite, somas de Riemann, integral definida e função área são incrementados com a utilização de peças de artefatos ou artesanatos indígenas dos acadêmicos participantes.

Com relação à Educação Superior Indígena, de acordo com Domite (2009, p. 188-189)

> A educação superior indígena tem como perspectiva que os educadores, como formadores, devem ir ao encontro do modo transdisciplinar do professor indígena construir conhecimento, uma vez que a construção do conhecimento de artefatos e ideias para eles se dá, quase sempre, simultaneamente a partir: da fusão/imbricamento/entrelaçamento de reflexões e ações práticas; da construção de coisas ligadas às tradições e costumes; da interação em trabalho cooperativo; da relação mito, religião e ciência; do vínculo em atividades do pai e/ou da mãe. Em outras palavras, os sujeitos indígenas têm como fonte de conhecimento a realidade na qual estão imersos, a qual é, em geral, gerada de modo transdisciplinar/holístico. Na verdade, os sujeitos indígenas têm uma maneira própria de ler o mundo e essa leitura é feita por meio de categorias/técnicas de que dispõem, as quais não são construídas pelo caminho acadêmico, pelo acúmulo dos conhecimentos disciplinares (escolares).

Nessa perspectiva, com o propósito de familiarizar cada processo de ensino e aprendizagem, o planejamento inicial conta com a participação dos modelos oriundos dos artefatos ou artesanatos: Filtro dos

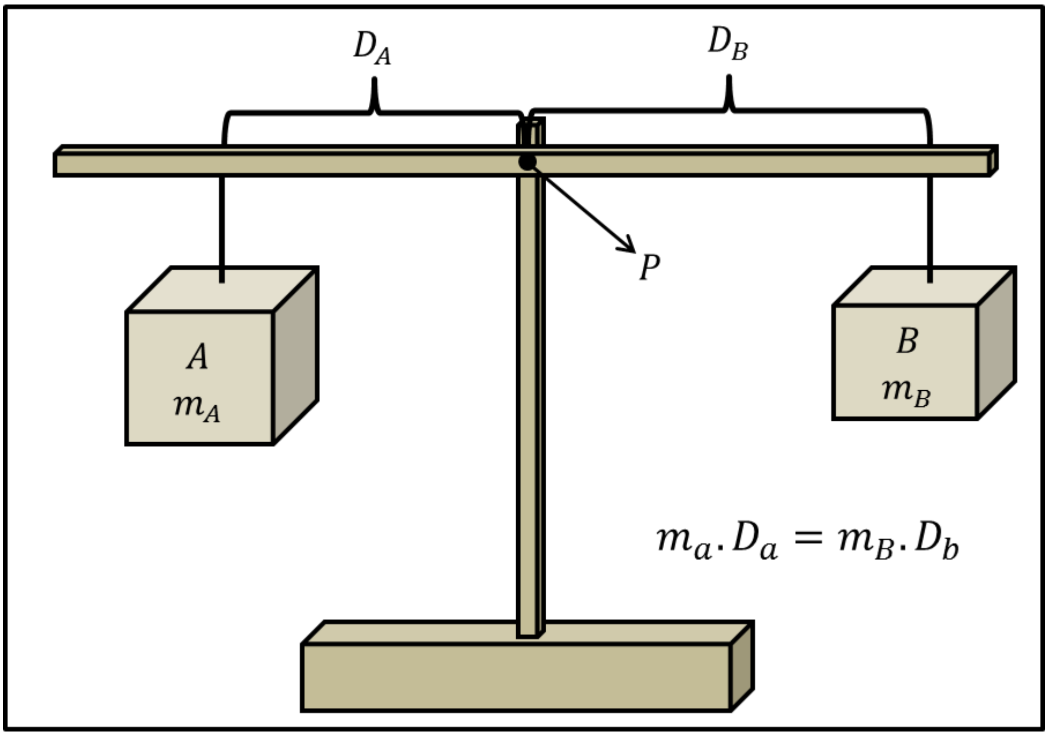
Sonhos, Pau de Chuva, Pente Indígena, Cocar e Luminária Indígena. Salientamos que no desenvolvimento do processo, possivelmente emergem outras peças de artefatos ou artesanatos dos diálogos com os acadêmicos. Esses artefatos ou artesanatos são partes representativas das matemáticas indígenas dos acadêmicos envolvidos em cada processo de ensino e aprendizagem e, são incorporados para dialogarem com os componentes curriculares do Cálculo, subconjunto da Matemática, como apresentado na Figura 17 do Capítulo 3.

Além dos artefatos ou artesanatos indígenas citados, que servem de modelos para possivelmente sensibilizar os acadêmicos indígenas no transcorrer do processo educacional, utilizamos algumas ideias de Arquimedes presentes em seu livro *O Método* publicado em 1635. Ao analisarem essa obra de Arquimedes, Magnaghi e Assis (2019, p. 32-33), apresentam o seguinte relato

> Vemos então que os resultados modernos mais importantes ligados ao círculo e a esfera são devidos a Arquimedes, a saber: 1. Aproximações excelentes para o limite superior e para o limite inferior da razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro , ou seja, . Hoje em dia essa relação pode ser expressa como; 2. O comprimento de uma circunferência de raio é dado por ; 3. A área de um círculo de raio é dada por ; 4. A área de uma esfera de raio é dada por ; 5. O volume de uma esfera de raio é dado por . [...] Seu método heurístico utiliza a lei da alavanca, em uma combinação brilhante da física com a matemática.

Destarte, aqui aplicamos a dinâmica da balança abstrata de Arquimedes, que se constrói por meio do conceito físico de uma alavanca que traz dois corpos e em equilíbrio quando: o produto entre a distância do corpo em relação a um ponto fixo do braço da alavanca e sua massa é igual ao produto entre a distância do corpo em relação ao mesmo ponto fixo da alavanca e sua massa . Optamos pela sua utilização para possibilitar o manuseio tanto da balança quanto dos corpos (cilindro, cone, esfera, entre outros) utilizados no processo. A imagem da Figura 48 retrata o que está descrito.

Figura 48 – A alavanca com dois corpos quaisquer em equilíbrio.

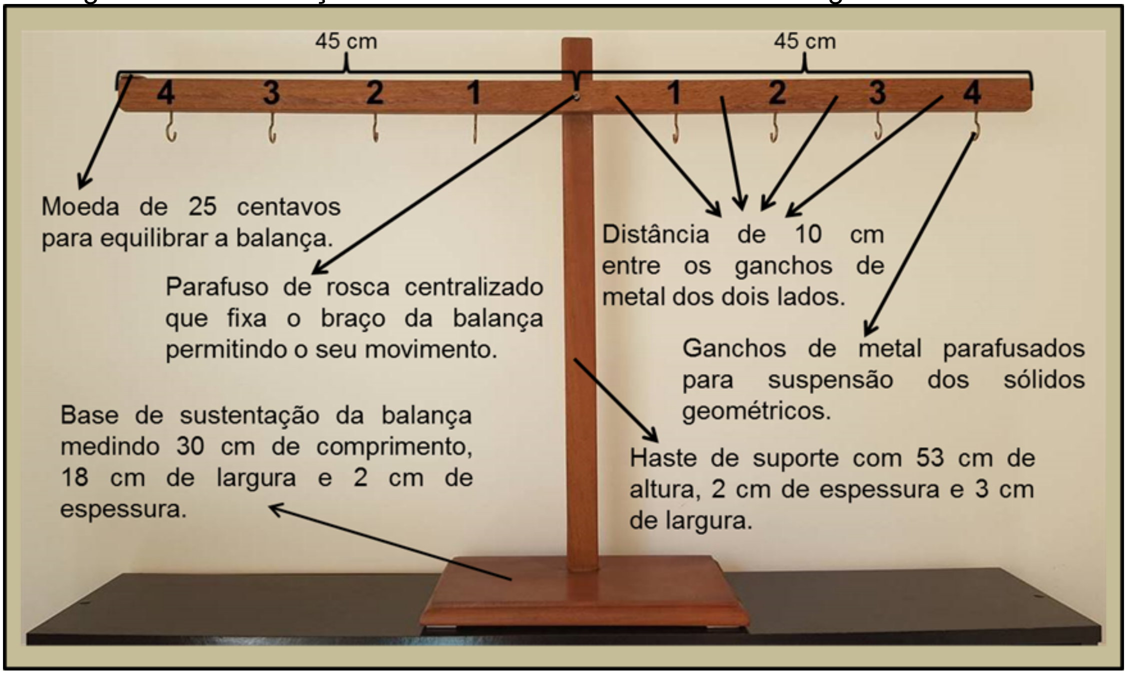


Fonte: Elaborada pelos autores.

Nesse cenário, se dois corpos estiverem equidistantes do ponto fixo , em lados opostos da alavanca, e essa em equilíbrio, significa que esses corpos possuem a mesma massa. Então, com o objetivo de utilizarmos as ideias de Arquimedes em cada processo de ensino e aprendizagem das definições de limite, somas de Riemann, integral definida e função área, aos acadêmicos indígenas da LINTER, encomendamos a construção de um modelo de alavanca que Arquimedes denominava de balança abstrata.

A peça foi confeccionada em madeira em uma marcenaria local. Nós desenhamos o modelo com suas características e medidas e enviamos ao marceneiro. Ele sugeriu construí-la em Cedro, que é o tipo de madeira mais utilizado pelos artesãos locais na confecção de peças em madeira (gamelas, barcos, colheres, garfos, pentes, arcos e flechas, canecas, canoas, farinheiras, petisqueiras, entre outros). Esses artesanatos são comercializados em Porto Seguro, na Passarela do Descobrimento e, no comércio indígena de Coroa Vermelha distrito de Santa Cruz Cabrália – BA. A imagem da Figura 49 retrata a balança abstrata confeccionada com suas medidas. Apesar de todo cuidado com a precisão nas medidas da alavanca móvel da balança, foi necessário acrescentarmos uma moeda de 25 centavos em seu lado esquerdo para obtermos o equilíbrio inicial necessário.

Figura 49 – A balança confeccionada com suas medidas e ganchos de metal.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para Fischbein (1993), a construção de conhecimento ocorre na interação produtiva entre situações que ocorrem ou são provocadas no cotidiano das pessoas e aquelas desenvolvidas pelo conhecimento científico, o que inclui uma interação permanente e dinâmica entre o conceito e a imaginação. “O desenvolvimento do processo de raciocínio é determinado essencialmente por construções conceituais (simbolizadas ou mediadas por meios imaginários) ou vice-versa: é o jogo de imagens que impulsiona o processo de raciocínio em suas tentativas criativas?” [74] (p. 144). Segundo o autor, esses fenômenos cognitivos são complexos implicando em não haver uma resposta definitiva para essa questão.

> A hipótese mais plausível parece ser a de que lidamos de fato com um jogo, no qual, redes conceituais ativas interagem com fontes imaginativas. Além disso, temos razões para admitir que, no decurso dessa interação, as imagens e seus significados mudam de uma categoria para outra, adquirindo significados e conceitos mais generalizados, enriquecendo em grande medida suas conotações e seu poder combinatório[75]

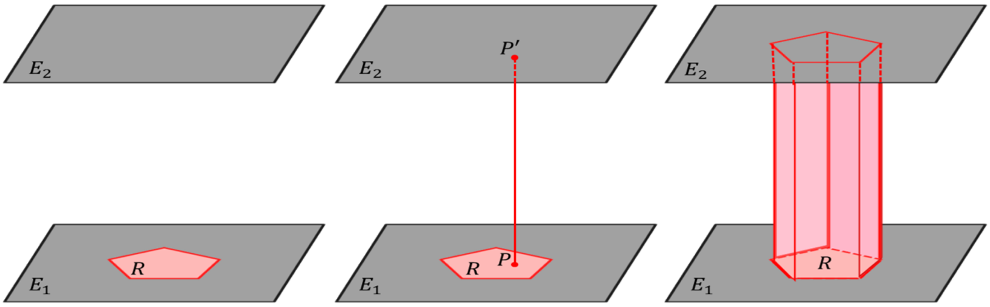
[74] “Is the course of the reasoning process determined essentially by conceptual constructions (symbolized or mediated by imaginary means) or vice versa: is it the play of images which pushes forward the reasoning process in its creative attempts?”.
[75] “The most plausible hypothesis seems to be that we deal in fact with one game in which active conceptual networks interact with imaginative sources. Moreover we have reasons to admit that, in the course of that interplay meanings shift from one category to the other images

(FISCHBEIN, 1993, p. 144).

Nesse sentido, além do modelo de balança abstrata, enviamos ao marceneiro os desenhos de alguns sólidos geométricos (dois cilindros, um cone, uma esfera e dois prismas retos de base triangular) com suas especificações e dimensões. Entendemos que eles são sólidos geométricos construídos artesanalmente e, como enfatizado em sua encomenda, necessitando da precisão do artesão marceneiro quanto a suas formas e medidas. Na Figura 50 trazemos a definição de prisma reto que varia seu nome em função do formato da região poligonal de sua base (triangular, retangular, pentagonal, entre outras).

Figura 50 – Definição de prisma reto e região poligonal.

Suponha que tenhamos dois planos paralelos e uma região poligonal* em um deles. Nas figuras, a região poligonal dada é R, contida no plano E_1. Em cada ponto P de R, levantamos um segmento $\overline{PP'}$, perpendicular a E_1, ligando P ao ponto P' do segundo plano. A reunião de todos esses segmentos é chamada *prisma reto.* A região R é chamada *base inferior* ou simplesmente *base.* Podemos imaginar um prisma reto como o sólido que é gerado quando a base se move verticalmente para cima, de E_1 até E_2 (MOISE; DOWNS, 1971, p. 495).



*Uma *região triangular* é a reunião de um triângulo e seu interior. Uma *região poligonal* é a reunião de um número finito de regiões triangulares, em um plano, de tal modo que, se duas se interceptam, a interseção é um ponto ou um segmento (MOISE; DOWNS, 1971, p. 271).

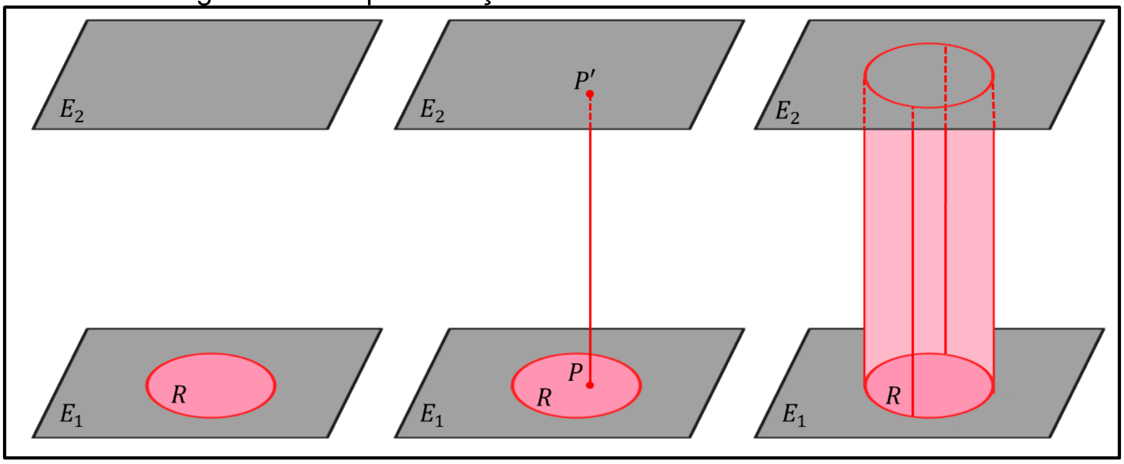
Fonte: Elaborada pelos autores a partir de (MOISE; DOWNS, 1971).

O prisma é denominado reto porque todos os segmentos que levantamos são perpendiculares ao plano de sua base. O volume de qualquer prisma é calculado pelo produto entre a área de sua base e sua altura. No caso do cilindro, a área de base considerada nesse trabalho é um círculo, pois podemos obter outros tipos de cilindros conforme varia a forma da região de

getting more generalized significance and concepts largely enriching their connotations and their combinational power”.

sua base (elipse, hipérbole, parábola, entre outras). Com base em Moise e Downs (1971), na Figura 51 e de forma análoga a Figura 50, representamos o cilindro reto de base circular, ou seja, a região em questão não é poligonal e sim circular.

Figura 51 – Representação do cilindro reto de base circular.



Fonte: Elaborada pelos autores.

De forma semelhante ao prisma reto, o cilindro é denominado reto porque todos os segmentos que levantamos são perpendiculares ao plano de sua base, bem como seu volume pode ser calculado por meio do produto entre a área de sua base e sua altura, desde que estejam na mesma unidade de medida (metro, centímetro, entre outras). O cilindro em questão é composto pela reunião de todos os segmentos onde o ponto está em sua base no plano e, o ponto em .

Com relação aos sólidos em madeira, a partir deles pretendemos instigar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos acadêmicos indígenas envolvidos provocando suas fontes imaginativas, buscando ativar redes conceituais já existentes, para que haja interações entre essas fontes e redes, e assim, possivelmente, possibilitar a construção de outros significados e conceitos generalizados. Na Figura 52, apresentamos os sólidos confeccionados.

Figura 52 – Os sólidos em madeira.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Esses sólidos foram construídos a partir de algumas especificações presentes em conceitos geométricos e que são pertencentes ao Mundo Corporificado da Matemática. Na imagem 1 da Figura 52 destacamos que as alturas do cone e do cilindro correspondem ao valor do diâmetro da esfera. Os raios das bases do cone e do cilindro são iguais como podemos verificar na imagem 2 da Figura 52 e, possuem o mesmo valor do raio da esfera. Ou seja, o cone e a esfera são circunscritos pelo cilindro. Essas peças foram confeccionadas com o mesmo tipo de madeira da balança (Cedro), seguindo recomendações do marceneiro e para procurar equalizar a questão física de suas massas específicas. Ou seja, mesma madeira implica teoricamente na mesma densidade absoluta ou massa específica entre as peças:

A utilização da balança abstrata e dos sólidos geométricos em madeira vem ao encontro do que salienta (TALL, 2008, p. 5) "A matemática escolar constrói a partir da corporificação de concepções e ações físicas: brincando com formas, colocando-as em conjuntos, apontando e contando, compartilhando, medindo"[76]. Assim, a partir da interação da balança com os sólidos geométricos em madeira, que em conjunto com os artefatos indígenas utilizados no processo de ensino e aprendizagem de volumes e superfícies desses sólidos serão fundamentais, na trajetória de cada acadêmico indígena

[76] "School mathematics builds from embodiment of physical conceptions and actions: playing with shapes, putting them in collections, pointing and counting, sharing, measuring".

na dinâmica de movimento do pensamento matemático pelos Três Mundos da Matemática.

Em consonância com Tall (2008), a observação, o manuseio e tomadas de medidas pelos acadêmicos indígenas, a partir desses sólidos geométricos, conduz, possivelmente, a um processo de ensino e aprendizagem dinâmico, possibilitando a ação dos sentidos (visual, tato) no processo educacional dos conteúdos da Matemática que estão sendo ensinados. E provavelmente, favorecendo o desenvolvimento da aprendizagem desses conteúdos. Destacamos o planejamento de uma das possíveis trajetórias do pensamento matemático envolvendo os conteúdos em foco, salientando que cada acadêmico indígena participante desenvolve a sua jornada pelos Três Mundos da Matemática ao percorrer cada trajetória desenhada e descrita ao final de cada encontro.

Então, após o contato com esses sólidos geométricos e a verificação da interação dos mesmos por meio da balança provocamos o desenvolvimento das fórmulas matemáticas de cálculos de suas áreas e volumes. Assim, promovemos o movimento do pensamento matemático do Mundo Corporificado para o Mundo Simbólico da Matemática com o desenvolvimento e a prática de operações matemáticas e com manipulações algébricas. Isso vai ao encontro do que é salientado por Tall (2008, p. 5)

> Uma vez que essas operações sejam praticadas e se tornem rotineiras, elas podem ser simbolizadas como números e utilizadas como operações ou como entidades mentais nas quais as operações podem ser realizadas. À medida que o foco da atenção muda da corporificação para a manipulação de símbolos, o pensamento matemático muda do mundo corporificado para o mundo simbólico. [77]

Nesse contexto, as fórmulas para os cálculos de superfícies e volumes de sólidos geométricos são objetos matemáticos do Mundo Simbólico da Matemática que precisam ser manipulados pelos acadêmicos indígenas da LINTER e compreendidos por eles: que essas fórmulas emergem das

[77] "School mathematics builds from embodiment of physical conceptions and actions: playing with shapes, putting them in collections, pointing and counting, sharing, measuring. Once these operations are practiced and become routine, they can be symbolized as numbers and used dually as operations or as mental entities on which the operations can be performed. As the focus of attention switched from embodiment to the manipulation of symbols, mathematical thinking switches from the embodied to the (proceptual) symbolic world".

propriedades corporificadas dos sólidos geométricos em madeira; que os sólidos ao serem manipulados e medidos envolvem reflexões sobre os números.

E com relação aos números, ressaltamos a ideia da construção do número que está presente, por exemplo, no cálculo: do comprimento da circunferência; área do círculo; da área total do cilindro; da superfície esférica; do volume do cilindro, do cone e da esfera, entre outros. O pensamento matemático que envolve o valor de será o ponto inicial para o estudo da ideia de infinito. O número irracional possui infinitas casas decimais. Já o cálculo da área do círculo, pelo método da Exaustão, conduz a definição de limite e soma de Riemann que são experiências matemáticas do tipo “a-encontrar”. São oriundas do aprimoramento do pensamento matemático a partir de corporificações e simbolismos e, que habitam o Mundo Formal da Matemática. Afinal, segundo Tall (2008, p. 5)

> A transição posterior para o mundo axiomático formal baseia-se nessas experiências de corporificação e simbolismo para formular definições formais e para provar teoremas por meio de prova matemática. A prova formal escrita é o estágio final do pensamento matemático; ela se baseia em experiências de que teoremas devem ser provados e como as provas devem ser realizadas muitas vezes construindo implicitamente a experiência simbólica e corporificada. [78]

Então, no processo de ensino e aprendizagem, iniciamos a trajetória no Mundo Corporificado com a confecção dos sólidos geométricos em madeira com vistas aos modelos presentes em alguns artefatos indígenas. O trabalho, as discussões e reflexões a partir da visualização, observação e manipulação desses sólidos instiga o movimento do pensamento matemático do Mundo Corporificado para a zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico, verificando as formas e realizando as medições das dimensões desses sólidos geométricos.

Os cinco processos de ensino e aprendizagem propostos estão direcionados a iniciar as discussões a partir de conteúdos matemáticos que os

---

[78] “The later transition to the formal axiomatic world builds on these experiences of embodiment and symbolism to formulate formal definitions and to prove theorems using mathematical proof. The written formal proof is the final stage of mathematical thinking; it builds on experiences of what theorems might be worth proving and how the proof might be carried out, often building implicitly on embodied and symbolic experience”.

acadêmicos indígenas, possivelmente, já conhecem (as figuras planas, os sólidos geométricos, o número , o cálculo de áreas de figuras planas, superfícies e volumes de sólidos geométricos utilizados nos processos), pois eles estão presentes no currículo de Matemática da Educação Básica.

Tomar como ponto de partida um objeto matemático com aprendizagem mal sucedida, provavelmente, dificulta a aprendizagem de objetos matemáticos novos (TALL, 2004; 2013). Compreendemos que essa preocupação já ocorre nas pesquisas do Programa Etnomatemática, contudo, entendemos que a inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no referido Programa, favorece o aprimoramento dessa perspectiva nas pesquisas do Programa Etnomatemática em consonância com o referido quadro teórico.

Então, conforme as discussões do Capítulo 5, entendemos que as figuras planas, os sólidos geométricos e os simbolismos matemáticos que advém deles, bem como as funções matemáticas (constante, polinomial do primeiro grau e quadrática), são experiências matemáticas vivenciadas pelos acadêmicos indígenas que deixaram rastros de aprendizagem do tipo "já-encontrados". Afinal, antes de iniciarem a LINTER eles frequentaram a Educação Básica. Mas, será que são "já-encontrados" bem sucedidos? Ou seja, são "já-encontrados colaboradores"?

Por outro lado, como destacamos no Capítulo 5, é preciso atentar tanto aos elementos cognitivos do conhecimento matemático quanto às estruturas afetivas que emergem do processo de aprendizagem da Matemática. E, como se relacionam entre si no transcorrer do processo cognitivo de cada acadêmico indígena envolvido. Afinal de acordo com Martelozo (2019, p. 77, grifo da autora)

> Nas relações estabelecidas entre o estudante e a aprendizagem da Matemática, destacamos "já-encontrados afetivos", decorrentes de experiências ao lidar com a Matemática, que carregam significados afetivos que influenciam na aprendizagem, muitas vezes deixando marcas que interferem no desenvolvimento do pensamento matemático atual e em longo prazo.

Nesse sentido, por um lado, as dimensões cognitiva e afetiva do Programa Etnomatemática afloram: na representatividade proporcionada inicialmente pelos artefatos utilizados; na possível inclusão de outros artefatos ou artesanatos mencionados pelos acadêmicos durante o processo educacional; nos demais apontamentos dos acadêmicos indígenas participantes e; na relação dialógica entre todos os envolvidos. Por outro lado, é preciso atentar para a interação entre os elementos cognitivos (objetos matemáticos) e os elementos afetivos medo, tensão, ansiedade, confiança, prazer, satisfação, curiosidade, orgulho, entre outros (MARTELOZO, 2019).

> Assim, na aprendizagem da Matemática, bem como na jornada pelos mundos, os quais consideramos como diferentes maneiras de lidar e interpretar matematicamente, o foco não está somente na aprendizagem futura, mas na forma em que operamos com as experiências anteriores, a fim de que não sejam problemáticas para situações atuais e para o progresso na aprendizagem matemática [...] (p. 64).

Então, com o intuito de identificarmos rastros de aprendizagem do tipo “já-encontrados dificultadores” ou do tipo “já-encontrados colaboradores”, deixados pelos acadêmicos indígenas envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, elaboramos cinco vídeos que são enviados, via *WhatsApp*, para cada acadêmico com os conteúdos e discussões presentes no Quadro 16.

Com a produção e envio dos vídeos partimos da premissa que os objetos matemáticos abordados nesses vídeos deixaram rastros de aprendizagem, provavelmente, do tipo “já-encontrados dificultadores”, perante os acadêmicos indígenas participantes, procurando nessa ação transformá-los em rastros de aprendizagem do tipo “já-encontrados colaboradores”. E ainda podemos aproveitar a comunicação pelo aplicativo, para dialogar individualmente com os acadêmicos, buscando identificar possíveis rastros de afetividade do tipo “já-encontrados afetivos” com relação à aprendizagem dos objetos matemáticos abordados nos vídeos, conforme discutimos no Capítulo 5.

Nas dimensões cognitiva e afetiva do Programa Etnomatemática, descrevemos as indagações apresentadas em cada vídeo. Elas têm a função de fazer o acadêmico indígena pensar em sempre trazer elementos de sua Matemática Indígena para dialogar com conteúdos da Matemática. E nos “já-encontrados afetivos” elencamos questões para procurarmos identificar estruturas afetivas que emergem das interações entre os objetos matemáticos abordados no vídeo e suas construções cognitivas.

Quadro 16 – Buscando identificar "já-encontrados" e "já-encontrados afetivos" na dinâmica dos vídeos.

Vídeo 1 – Cálculo de áreas de polígonos	Rastros de aprendizagem do tipo "já-encontrados colaboradores" ou "já-encontrados dificultadores" deixados pelos participantes nos processos de aprendizagem sobre: reconhecimento das figuras planas e a utilização das fórmulas matemáticas para os cálculos de suas áreas. Conclusão de que não é possível segurarmos em nossas mãos essas figuras planas, elas só existem no mundo das ideias.
	Dimensões cognitiva e afetiva, por meio de reflexões sobre: se é possível segurarmos em nossas mãos as figuras planas; figuras planas presentes na cultura indígena; como o indígena delimita seu espaço; o ensino de geometria na Educação Escolar Indígena.
	Rastros de afetividade do tipo "já-encontrados afetivos" deixados nos processos de aprendizagem envolvendo: as figuras planas; a utilização de peças de artefatos e ou artesanatos para modelar as figuras planas; que estruturas cognitivas desse tipo emergem nos cálculos dessas áreas antes e após as discussões presenciais.
Vídeo 2 – Cálculo da área do círculo	Rastros de aprendizagem do tipo "já-encontrados colaboradores" ou "já-encontrados dificultadores" nos processos de aprendizagem sobre: reconhecimento do número irracional ; saber diferenciar circunferência de círculo; saber calcular o comprimento da circunferência e área circular; Concluir que não é possível segurarmos esses objetos matemáticos em nossas mãos, mas podemos considerar demarcar suas dimensões em um cilindro, por exemplo.
	Dimensões cognitiva e afetiva por meio de reflexões sobre: a presença de formas circulares na cultura indígena; como o indígena delimita seu espaço em formas circulares; a utilização de valor arredondado para o número irracional em situações problemas na comunidade indígena e nas escolas indígenas das aldeias.
	Rastros de afetividade do tipo "já-encontrados afetivos" deixados nos processos de aprendizagem sobre: o número irracional ; a circunferência e o círculo; a utilização do Filtro dos Sonhos no processo educacional; que estruturas cognitivas desse tipo emergem do cálculo do comprimento da circunferência e da área do círculo antes e após as discussões presenciais.
Vídeo 3 – Cálculo do volume do prisma de base triangular e de base retangular	Rastros de aprendizagem do tipo "já-encontrados colaboradores" ou "já-encontrados dificultadores" deixados nos processos de aprendizagem sobre: reconhecimento dos sólidos geométricos prismas de base retangular e triangular com a utilização das fórmulas matemáticas para os cálculos de seus volumes.
	Dimensões cognitiva e afetiva por meio de reflexões sobre: sólidos geométricos presentes na cultura indígena; como o indígena calcula volumes; como é abordado o ensino do calculo

	de volumes de sólidos geométricos nas suas escolas indígenas.
	Rastros de afetividade do tipo "já-encontrados afetivos" deixados nos processos de aprendizagem sobre: os sólidos geométricos; a utilização da balança de Arquimedes; que estruturas cognitivas desse tipo emergem dos cálculos de suas áreas e de seus volumes antes e após as discussões presenciais.
Vídeo 4 – Construção de gráficos de funções	Rastros de aprendizagem do tipo "já-encontrados colaboradores" ou "já-encontrados dificultadores" deixados nos processos de aprendizagem sobre: reconhecimento dos três tipos de gráficos das funções: constante, polinomial do primeiro grau e quadrática.
	Dimensões cognitiva e afetiva: reflexões sobre os moldes dos gráficos advindos do cocar indígena e o porquê aprender funções matemáticas.
	Rastros de afetividade do tipo "já-encontrados afetivos" deixados nos processos de aprendizagem sobre: os gráficos das funções abordadas; a utilização do Cocar no processo de construção dos gráficos; há outros elementos culturais que podem ser relacionados no estudo dessas funções; antes e após as discussões presenciais.
Vídeo 5 – Método da Exaustão no cálculo de áreas sob curvas.	Rastros de aprendizagem do tipo "já-encontrados colaboradores" ou "já-encontrados dificultadores" deixados nos processo de aprendizagem envolvendo: compreensão sobre as definições de limite e soma de Riemann.
	Dimensões cognitiva e afetiva: reflexões sobre como podem ser descritas essas definições na Língua Indígena, a partir da tradução da Língua Portuguesa.
	Rastros de afetividade do tipo "já-encontrados afetivos" deixados nos processos de aprendizagem: quais são os elementos afetivos que cada acadêmico relata com relação a essas definições, bem como a escrita delas por meio da Língua Indígena.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesse cenário, a dinâmica de utilização desses vídeos tem a função de: identificar possíveis "já-encontrados dificultadores" ou "já-encontrados colaboradores" por parte de cada acadêmico participante; aguçar a criatividade dos acadêmicos indígenas para trazerem elementos de sua Matemática Indígena para dialogarem com conteúdos da Matemática em suas aulas nas escolas das aldeias; identificar possíveis rastros de afetividade do tipo "já-encontrados afetivos" que interagem com as estruturas cognitivas nos processos de aprendizagem dos objetos matemáticos em tela.

Há ainda o envio de um sexto vídeo que aborda o cálculo da área de uma região sob uma curva qualquer que é limitada pelas retas verticais e formando um intervalo com . Apresentamos o método da Exaustão para esse cálculo por meio da soma infinita das áreas retangulares. Então definimos que a referida área é o limite da soma das áreas retangulares quando a quantidade de retângulos tende ao infinito. Logo após, como exemplo, o vídeo apresenta a mesma resolução para a curva . Ao final, o vídeo trás a definição de integral definida.

7.2. Planejando o primeiro encontro

Nesse primeiro encontro temos os seguintes objetivos específicos: resgatar o cálculo das áreas de regiões com as formas retangular, quadrada e triangular que já são conhecidas pelos acadêmicos da LINTER, pois esses cálculos são discutidos no contexto do Ensino Fundamental e Médio (Mundo Corporificado, zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico e Mundo Simbólico); que os acadêmicos indígenas compreendam a ideia de infinito e que o valor numérico de possui infinitas casas decimais e não periódicas (Mundo Simbólico, zona de confluência entre os Mundos Simbólico e Formal e Mundo Formal); e que não é possível segurarmos nas mãos as figuras planas (Mundo Corporificado, zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Formal e Mundo Formal).

Ao final do primeiro vídeo enviado anteriormente a esse encontro, acrescentamos cinco questões: As formas dessas regiões geométricas, quadrangulares, retangulares e triangulares, estão presentes no cotidiano das comunidades indígenas?; Como o indígena ou a comunidade indígena delimita seu espaço a ser ocupado?; Por que o indígena precisa saber o cálculo de áreas?; Por que ensinar Geometria nas escolas indígenas?; É possível segurarmos figuras planas em nossas mãos? As respostas a essas questões podem ser coletadas de forma individual via *WhatsApp* e são objetos de diálogo no primeiro encontro presencial.

Para incrementarmos o debate em sala de aula, providenciamos a confecção de algumas peças em madeira (prismas retos) com bases quadrangulares, retangulares e triangulares para que os acadêmicos observem, manuseiem, quantifiquem suas medidas com auxílio de réguas fornecidas na atividade. Aqui cabe o reforço de que não é possível segurar figuras planas em nossas mãos, elas são objetos matemáticos. O que observamos e manuseamos são prismas retos e deles utilizamos suas bases para calcularmos as áreas nos formatos: retangular, quadrangular, triangular, entre outras.

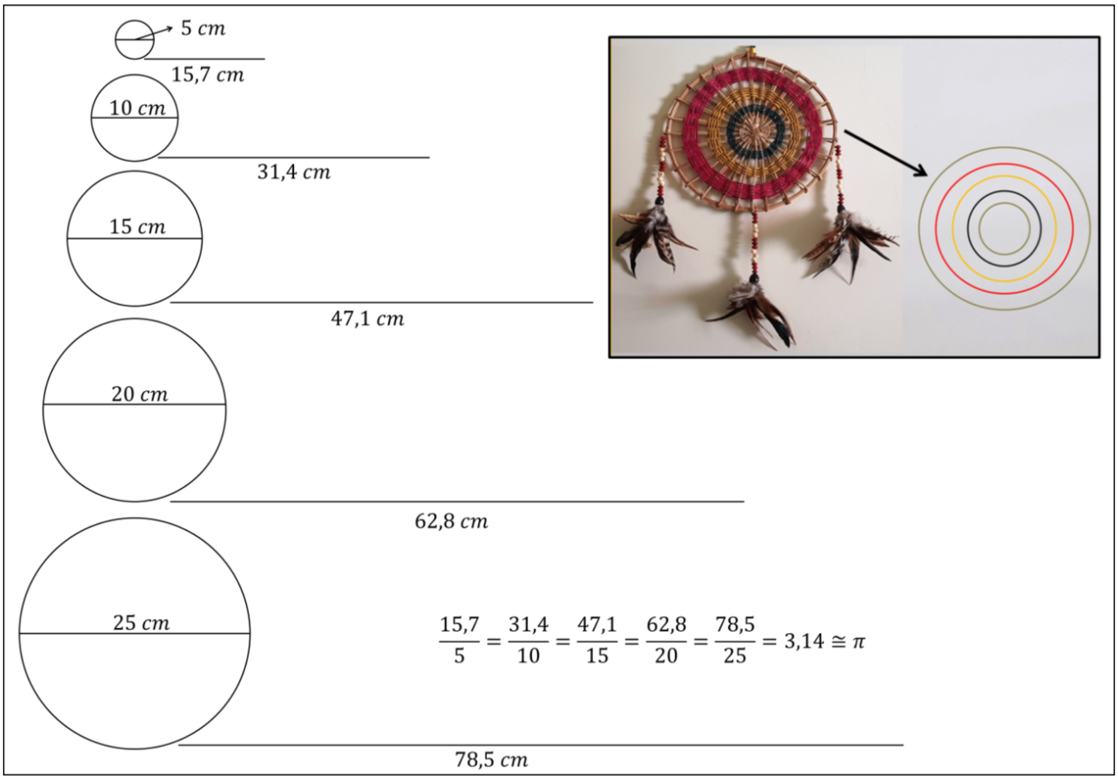
Nesse primeiro encontro, não propomos o cálculo da área do círculo. Promovemos discussões com os acadêmicos indígenas da LINTER sobre o cálculo de áreas com a forma retangular e triangular, encontradas por eles em seu cotidiano cultural, destacando nessa ação elementos da dimensão afetiva do Programa Etnomatemática, bem como os “já-encontrados afetivos”. É preciso instigar o trânsito pelo Mundo Simbólico por meio das manipulações algébricas com as fórmulas matemáticas que utilizamos para o cálculo das áreas das bases dos prismas retos (triangular e retangular) e, buscando identificar em cada acadêmico indígena participante, rastros de aprendizagem do tipo “já-encontrados dificultadores” ou “já-encontrados colaboradores”.

No decorrer das discussões, os acadêmicos precisam ser instigados a identificarem, em seu contexto cultural, os cálculos intuitivos de áreas nas formas trabalhadas: triângulos, retângulos e quadrados. Então, é necessário promover as discussões das respostas aos cinco questionamentos e o reconhecimento dessas formas geométricas no contexto cultural dos acadêmicos da LINTER, intercalando os modos intuitivos dos indígenas delinearem áreas com as fórmulas matemáticas para o cálculo dessas áreas.

Ou seja, como os acadêmicos calculavam as áreas dessas regiões e como passaram a calcular após os debates? Os cálculos dessas áreas deixaram rastros de aprendizagem do tipo “já-encontrados colaboradores”? Que elementos afetivos emergem dessas discussões por parte dos acadêmicos indígenas participantes? E no final dessa atividade com os cálculos dessas áreas, refazemos as perguntas para contrapormos suas respostas com as respostas de antes da atividade, assim como os registros das reflexões pelos acadêmicos.

Logo após, propomos o debate do valor do número irracional por meio de uma atividade envolvendo o artefato indígena Filtro dos Sonhos, cinco aros em metal com seus diâmetros e cinco hastes, do mesmo metal, com comprimentos iguais aos comprimentos das circunferências de cada aro. Então, os acadêmicos são instigados a visualizar, observar, manusear esses aros e hastes, medindo os diâmetros dos aros e os comprimentos das hastes por meio de réguas fornecidas pelo professor. Logo depois, são fomentados a dividir cada medida desses comprimentos pela medida do diâmetro correspondente (, como descrito na Figura 53, comparando e debatendo seus resultados até concluírem que esses valores tendem ao número 3,14.

Figura 53 – O Filtro dos Sonhos, os aros metálicos com diâmetros e os seguimentos metálicos ambos com suas medidas.



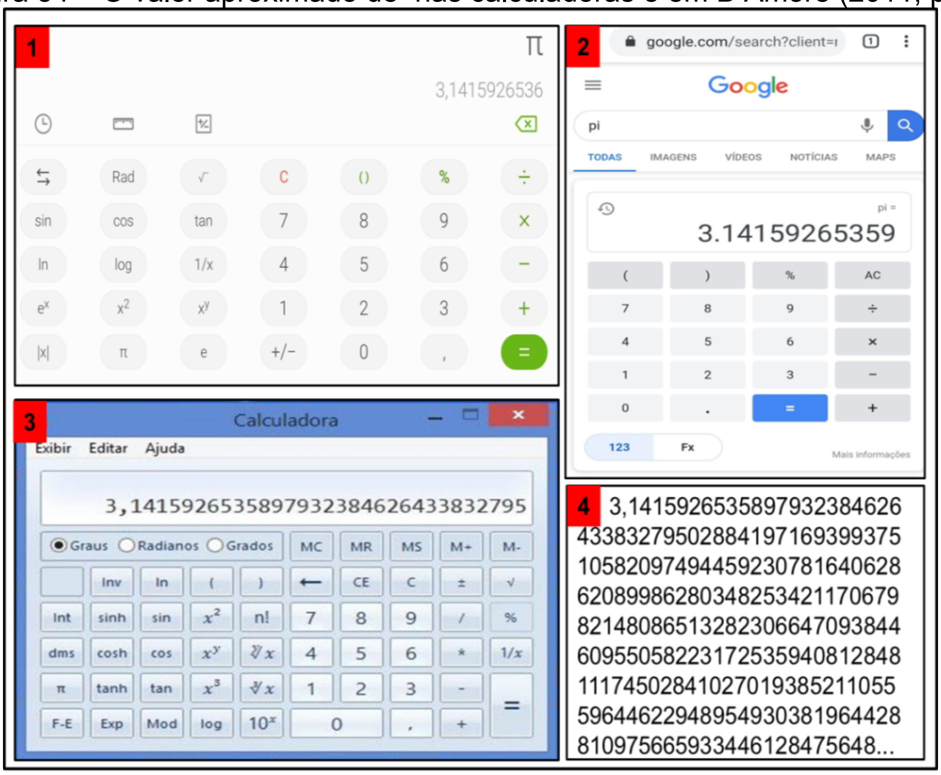
Fonte: Elaborada pelos autores.

Então, nos diálogos dessa atividade os acadêmicos indígenas são motivados a compreenderem que o número tem uma aproximação de duas casas decimais para o valor 3,14. Pois, analisando os resultados dessas divisões é possível observar que eles tendem para o decimal 3,14 apontando o valor numérico aproximado, com duas casas decimais, valor esse geralmente utilizado para a resolução de problemas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.

Mas, qual é o valor de Existe um valor exato? D'Amore (2011) descreve o valor aproximado de iniciando na página 6 e finalizando na página 11 destacando ao final que essa listagem para o número é somente uma migalha em relação às suas infinitas casas decimais. O que significa infinito na Matemática? E nas culturas indígena Pataxó, Pataxó Hãhãhãe e Tupinambá?

Buscando fomentar os debates sobre essas quatro questões, apresentamos alguns parâmetros sobre o valor de com a seguinte ordem: na calculadora científica dos celulares dos acadêmicos comparando os resultados; na internet ao pesquisarmos o termo pi; na calculadora dos notebooks presentes na sala de aula; na citação de Bruno D'Amore (2011); o valor de atualizado em 14 de Março de 2019 por Emma Haruka Iwao, funcionária do *Google* no Japão, com 31 trilhões de dígitos[79]. Salientamos com os acadêmicos indígenas que o cálculo do número continua indefinidamente. A Figura 54 retrata os valores de na calculadora do celular, na calculadora do *Google* da internet, na calculadora de um *notebook* e na citação de D'Amore (2011).

Figura 54 – O valor aproximado de nas calculadoras e em D'Amore (2011, p. 6).



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, iniciamos o debate sobre o número destacando sua apresentação em alguns livros didáticos de Matemática dialogando sobre o seu valor aproximado, que geralmente é adotado na resolução de exercícios que envolvem, por exemplo, o cálculo do comprimento da circunferência e da área do círculo. A imagem 1 da Figura 54 descreve o valor aproximado para na calculadora de um celular, a imagem 2 apresenta o valor de ao realizarmos a

[79] https://www.bbc.com/portuguese/geral-47558503.

pesquisa na *internet*, a imagem 3 representa o valor de na calculadora científica de um *notebook* e a imagem 4 descreve as 228 (duzentas e vinte e oito) primeiras casas decimais do número presentes em D'Amore (2011, p. 6).

Nas discussões ressaltamos que as calculadoras eletrônicas possuem limitações de capacidade de alocação de dígitos, o que conduz a esses dispositivos efetuarem o arredondamento do valor de em sua última casa decimal. Por exemplo, ao compararmos os valores de presentes na imagem 1 (calculadora de um celular), com doze dígitos, e na imagem 2 (calculadora do *Google*), com treze dígitos, podemos constatar que a calculadora do celular promoveu, automaticamente, um arredondamento em sua última casa decimal. Assim, podemos concluir que o valor decimal 3,141592653 é uma aproximação para com nove casas decimais.

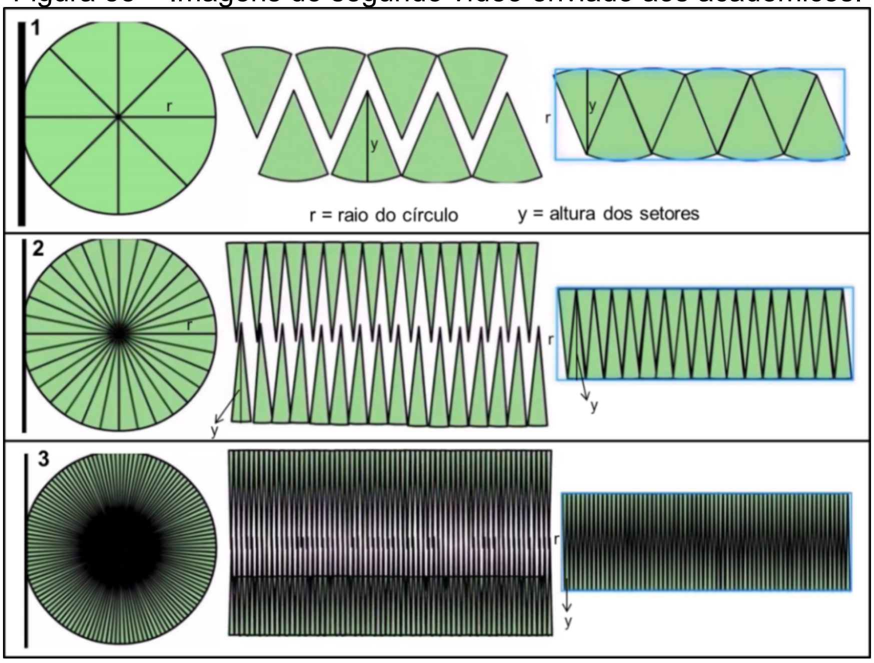
Indo além, ao compararmos os valores aproximados de presentes na imagem 3, calculadora de um *notebook*, com 31 (trinta e uma) casas decimais e na imagem 4, citação de D'Amore (2011), com 228 (duzentas e vinte e oito) casas decimais, podemos constatar que a calculadora, desse *notebook*, apresenta um valor aproximado de com 31 (trinta e uma) casas decimais, pois o próximo decimal seria o número zero o que não gera, nessa calculadora, um arredondamento em sua última casa decimal. Salientamos que no decorrer dessa atividade, provavelmente, emergem outros valores decimais presentes nas calculadoras dos celulares e *notebooks* dos acadêmicos indígenas participantes, fomentando os diálogos sobre o valor numérico de que possui infinitas casas decimais e não periódicas. O que é infinito ? Logo após as discussões sobre essa questão promoveremos o cálculo do comprimento de algumas circunferências.

Após o primeiro encontro, enviamos as mesmas questões que movimentam o debate presencial, de forma individual via *WhatsApp,* com o intuito de coletarmos respostas individuais para posterior análise e confronto de respostas, antes e depois das discussões, para, possivelmente, analisar a aprendizagem individual dos acadêmicos em sua Jornada pelos Três Mundos da Matemática, bem como identificar possíveis estruturas cognitivas do tipo "já-encontrados afetivos" em cada acadêmico indígena participante.

7.3. Planejando o segundo encontro

Antes do momento presencial do segundo encontro com os acadêmicos, enviamos dois vídeos no grupo de *WhatsApp* dos participantes. Um deles apresenta o cálculo da área circular por meio da divisão de um círculo em uma quantidade crescente de setores até sua exaustão. No referido vídeo[80], essa infinidade de setores é reunida em uma forma retangular, cuja base corresponde à metade do comprimento da circunferência do círculo e sua altura é formada pela medida do raio do mesmo círculo. O vídeo prossegue e mostra que ao calcularmos a área desse retângulo obtemos a fórmula matemática para o cálculo da área do círculo. Essa dinâmica foi retratada nas Figuras 28 e 29 do Capítulo 6. Na Figura 55 apresentamos três situações dinamizadas no vídeo com o círculo ao ser dividido em 8 setores (imagem 1), 32 setores (imagem 2) e 360 setores (imagem 3).

Figura 55 – Imagens do segundo vídeo enviado aos acadêmicos.



Fonte: Elaborada pelos autores a partir do vídeo 2.

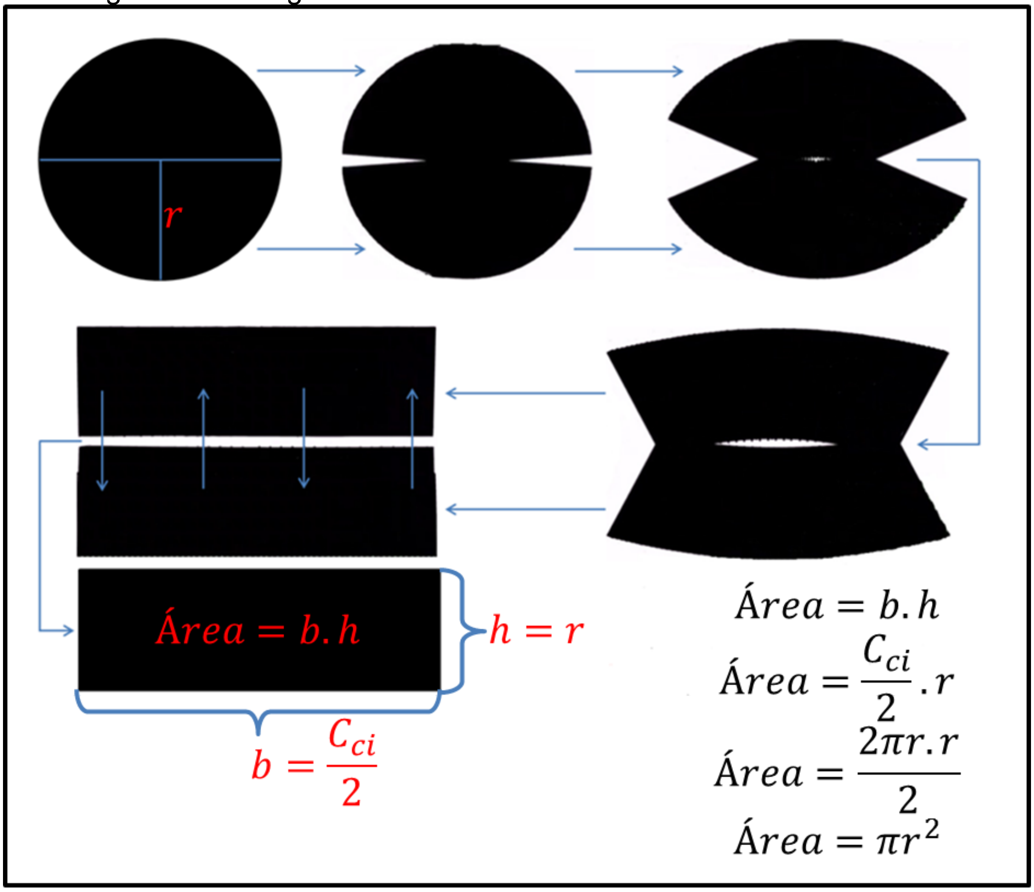
Percebemos que conforme vamos aumentando a divisão do círculo em mais setores, a soma de suas áreas aproxima-se da área do retângulo em azul, bem como quanto mais setores tivermos a altura desses setores se aproxima do valor do raio do círculo. O vídeo prossegue dividindo o círculo em quantidades cada vez maiores de setores. Nele o recurso virtual do

---

[80] https://www.youtube.com/watch?v=Jfnq9AxroJg

zoom para aproximação da imagem, discutido em Tall (2008), é útil para propiciar a visualização de mais divisões de setores, até o limite da visão de quem está assistindo o referido vídeo, provocando a exaustão da área do círculo. As sequências de imagens da Figura 56, retiradas do vídeo enviado aos acadêmicos, retratam o que descrevemos.

Figura 56 – Imagens coletadas do Vídeo 2 enviado aos acadêmicos.



Fonte: Elaborada pelos autores a partir do vídeo 2.

Essa dinâmica visual chega ao ponto em que não é mais possível enumerar a quantidade de setores que o círculo foi dividido. Dizemos intuitivamente que há uma infinidade de setores. Então, ao reunir esses inúmeros setores em uma forma retangular, como apresentado na Figura 56, a diferença da área do círculo para a área do retângulo não é mais perceptível. A base desse retângulo corresponde à metade do limite da soma das bases desses setores com a quantidade de setores tendendo ao infinito () e, o limite de extensão de sua altura corresponde ao raio do círculo original.

A Figura 56 além de retratar seis sequências de imagens do vídeo transformando intuitivamente a área do círculo em sua correspondente na forma de um retângulo, traz a manipulação algébrica embasada pela percepção visual concluindo, intuitivamente, que a área desse retângulo corresponde à área do círculo original. Com esse vídeo pretendemos fomentar as discussões sobre o método da Exaustão, a definição de limite e a soma das áreas desses setores como o limite dessa soma e o número de setores que dividem o círculo tendendo ao infinito.

Essa soma infinita não é discutida no vídeo, ela deve ser dialogada presencialmente com os acadêmicos indígenas. Ela indica a metade do comprimento da circunferência do círculo que originou os setores. E na infinidade de setores as suas alturas tendem a se aproximar do valor do raio do círculo. Ou seja, se tomarmos como sendo a base de cada um dos setores que dividem o círculo e, como a altura de cada um desses setores, como sendo a base do retângulo da Figura 55, como a altura desse mesmo retângulo, como a sua área e, como o raio do círculo original, teremos que:

Ressaltamos que a divisão do círculo em setores começa por no mínimo dois, ou seja, em dois semicírculos. Acontece que o limite da soma das bases dos setores (soma de Riemann), quando o número de setores tende ao infinito é o comprimento da circunferência do círculo original. Então, prosseguindo, se:

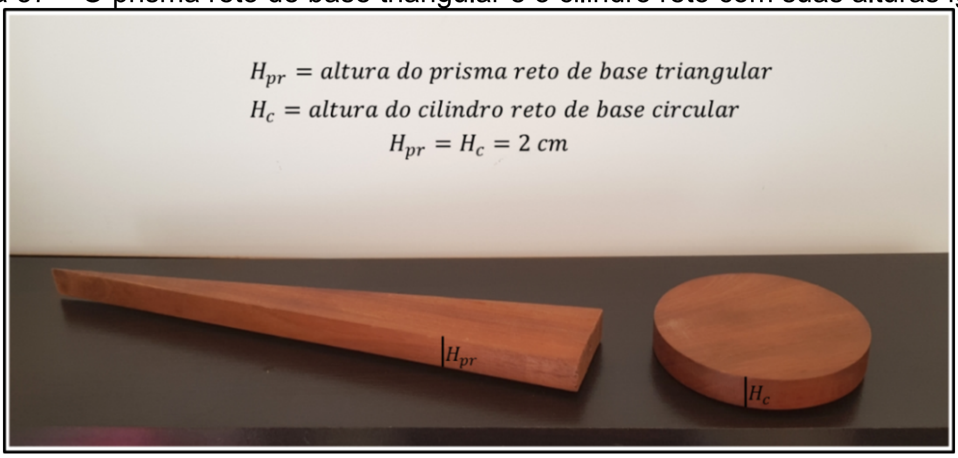
Logo, teremos que:

Assim, propomos iniciar o segundo encontro presencial com as discussões sobre como esse vídeo propõe a construção da fórmula matemática que possibilita calcularmos a área de um círculo ao equipará-la com a área de um retângulo, cuja base é a metade do comprimento da circunferência do círculo e sua altura corresponde ao raio do círculo (Proposição 1 do livro *O Método* de Arquimedes). Então, ao calcularmos a área desse retângulo, como descrito na Figura 56 obtemos a fórmula ou o objeto matemático para o cálculo da área do círculo, porém com as devidas discussões envolvendo a ideia de infinito e a soma de Riemann.

Após esse debate inicial, propomos a fomentação de discussões sobre o cálculo do volume dos sólidos geométricos, prisma reto de base retangular e prisma reto de base triangular, conforme será apresentado no terceiro vídeo enviado aos acadêmicos via *WhatsApp*. O objetivo é que eles compreendam que para calcularmos os volumes desses prismas retos, basta multiplicarmos o resultado de sua área da base por sua altura. Com isso, pretendemos identificar rastros de aprendizagem do tipo “já-encontrados dificultadores” ou do tipo “já-encontrados colaboradores” em cada acadêmico indígena participante.

Logo após esses diálogos, é importante debater os conceitos físicos de massa () e massa específica () que são fundamentais no processo de construção da fórmula matemática para o cálculo da área do círculo, por meio da balança abstrata de Arquimedes. Para a atividade com a referida balança, solicitamos ao marceneiro que confeccionasse um cilindro reto de base circular e um prisma reto cuja base é um triângulo retângulo, ambos com a mesma altura de 2 cm e confeccionados em madeira (Cedro), conforme as suas imagens na Figura 57.

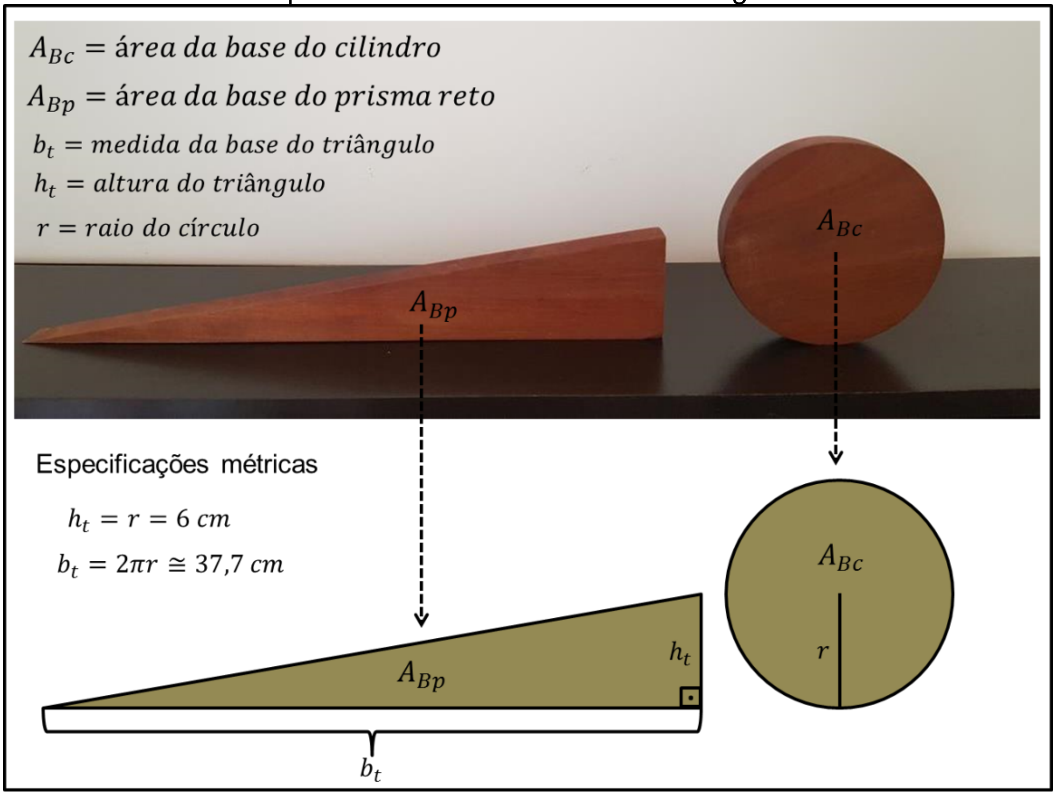
Figura 57 – O prisma reto de base triangular e o cilindro reto com suas alturas iguais.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Figura 58, alteramos a posição dos sólidos da Figura 56 para ilustrarmos suas bases e descrevermos suas medidas. No caso, a base do prisma reto tem a forma de um triângulo retângulo cuja altura, na posição indicada na Figura 57, tem a mesma medida do raio do círculo do cilindro. Já o comprimento da base do referido triângulo retângulo mede, aproximadamente, o valor do comprimento da circunferência do círculo utilizado.

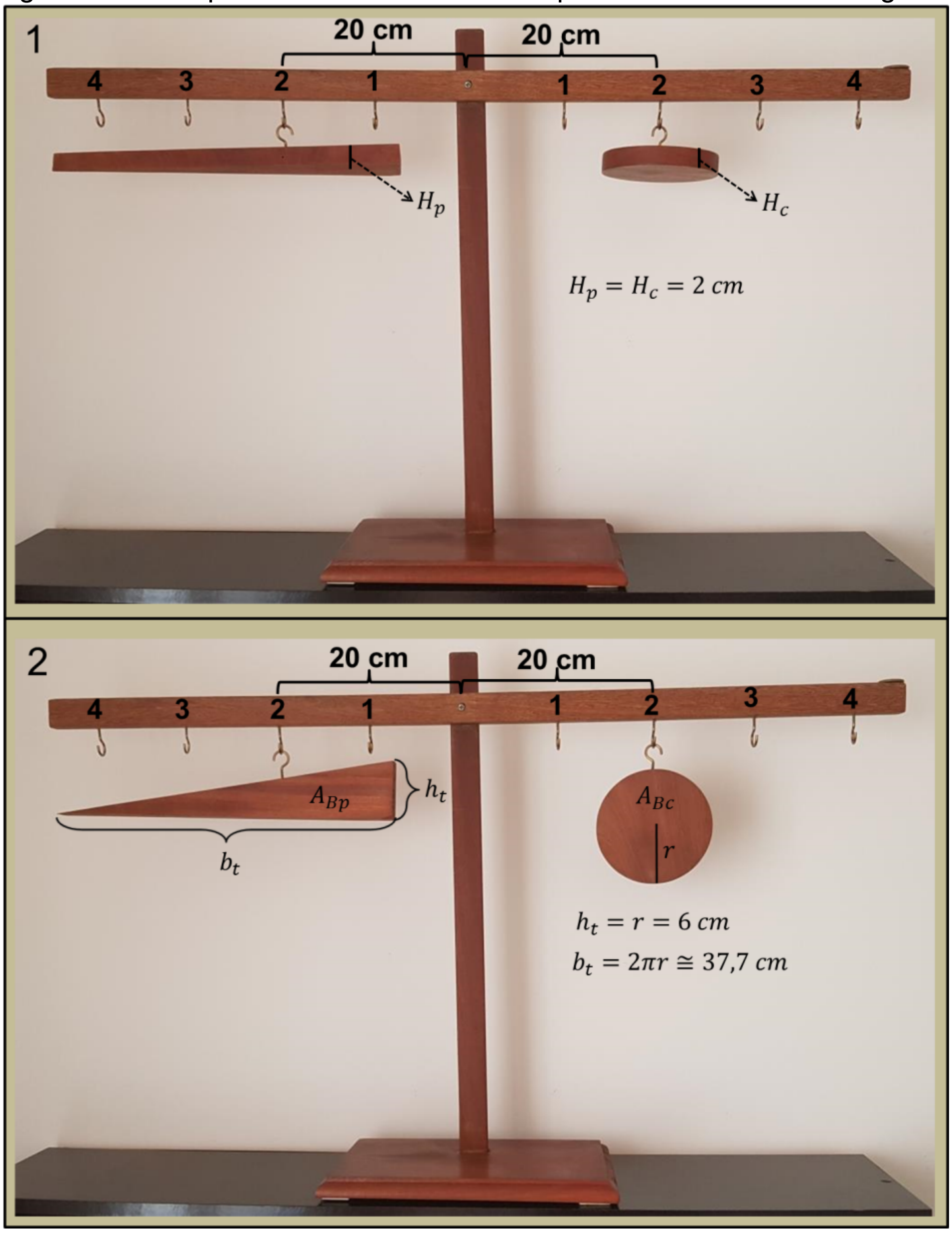
Figura 58 – As bases do prisma reto e do cilindro reto da Figura 57 com suas medidas.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Então, ao colocarmos esses dois sólidos geométricos em lados opostos da balança e equidistantes 20 cm, em relação ao seu parafuso de sustentação, notamos que há equilíbrio entre os sólidos, indicando que eles possuem massas equivalentes. A Figura 59 detalha os sólidos em equilíbrio colocados na posição 2, ou seja, equidistantes 20 cm do parafuso central da balança. Na imagem 1 trazemos os sólidos na posição que destaca suas alturas, já na imagem 2 os sólidos estão posicionados para realçarem suas bases.

Figura 59 – O equilíbrio entre o cilindro e o prisma reto de base triangular.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Considerando as massas do cilindro e do prisma de base triangular e, que a alavanca está em equilíbrio quando esses dois sólidos são posicionados equidistantes (20 cm) do seu ponto fixo e em lados opostos, ou seja, podemos simplificá-las e concluir inicialmente que esses dois sólidos possuem a mesma massa:

Salientamos que a posição 2 foi escolhida por nós por uma questão estética, para centralizarmos os sólidos na alavanca. Agora, considerando o volume do cilindro e o volume do prisma reto de base triangular e que eles foram confeccionados com o mesmo material (Cedro), ou seja, a massa específica do cilindro é igual à massa específica do prisma reto de base triangular em questão. Assim, podemos escrever:

Como notado anteriormente, o equilíbrio da balança indica que suas massas são equivalentes. Logo, podemos simplificar essa igualdade e, ao realizarmos uma manipulação algébrica, concluímos que os volumes desses sólidos geométricos são iguais.

Então, a partir dessa igualdade entre os volumes dos sólidos, podemos manipular suas expressões algébricas para obtermos a fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a área do círculo. Afinal, tanto o volume do cilindro quanto o volume do prisma reto de base triangular são calculados pelo produto entre a área da base e a altura de cada um deles. Agora, conforme especificamos na Figura 58, consideramos a área da base do cilindro e sua altura , bem como a área da base do prisma de base triangular e sua altura . Além disso, precisamos atentar ao fato que essas alturas são iguais (2 cm) podendo simplificá-las. Logo:

Acontece, que a área da base do cilindro corresponde a área de um círculo e a área da base desse prisma reto é um triângulo retângulo como apresentado na Figura 58. A medida da base do triângulo retângulo corresponde ao comprimento da circunferência da base circular do referido cilindro . Já a altura desse triângulo retângulo corresponde a medida do raio da base circular do mesmo cilindro. Logo, a partir da igualdade das áreas das bases dos sólidos geométricos, podemos aplicar essas igualdades para chegarmos a fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a área de qualquer círculo em função do seu raio.

Assim, concluímos o segundo encontro destacando os objetos matemáticos que utilizamos para calcularmos o comprimento de uma circunferência e a área circular, sem a substituição de por um valor numérico aproximado. Embora, nas atividades contextualizadas essa substituição seja necessária para obtermos resultados aproximados de comprimentos de circunferências e de áreas circulares. É preciso rediscutir a ideia de infinito, ressaltada no primeiro encontro e reforçada no contexto do vídeo 2, bem como a soma de Riemann e a definição de limite, que nesse encontro compreendemos como um objeto matemático que está presente no Mundo Formal.

7.4 Planejando o terceiro encontro

No terceiro encontro, propomos iniciar fomentando discussões acerca do cálculo da superfície e do volume de um cone, bem como da superfície esférica e do volume esférico a partir das relações proporcionais desses sólidos com o cilindro que os circunscreve. Então, para direcionarmos o tema previsto podemos elencar algumas questões aos acadêmicos indígenas: O que é volume? Como você calcula o volume? Para que calcular o volume? O objetivo é provocar os acadêmicos a identificar em seu contexto cultural, os cálculos intuitivos de volumes, assim como a identificação dos sólidos geométricos (cilindros, cones e esferas) em seu cotidiano nas comunidades indígenas.

Como modelos do artesanato indígena local para esse processo de ensino e aprendizagem sugerimos o Pau-de-chuva, para representar a forma cilíndrica e, uma Luminária Indígena construída a base de cipó para lembrar a forma esférica. O Pau-de-chuva é um instrumento indígena que busca imitar ou repetir o barulho da chuva. Originário dos povos indígenas do Chile, ele é feito de madeira com a forma aproximada de um cilindro, oco, onde são colocadas sementes ou pedrinhas que, conforme a sua movimentação, reproduz o som da chuva (da água caindo). É utilizado pelas crianças indígenas em suas brincadeiras e em rituais de adoração ao Sol após a chuva. Sobre a questão de reproduzir os sons presentes ao seu redor, segundo Bertolini (2016, p. 34)

> A repetição é intrínseca à relação do indígena com a natureza. Estamos diante de um mundo sonoro construído pela audição, e que reflete por vezes, na elaboração da sonoridade de seus instrumentos, a imitação dos sons do rio, das cachoeiras, do vento, da chuva, dos animais na mata, sons cujo caráter repetitivo lhe é intrínseco. Sob este ponto de vista, a repetição pode sugerir uma ação afirmativa de um modo de existir.

Ressaltamos que no decorrer das discussões podem emergir outros artefatos ou peças do artesanato indígena, bem como outras construções que apresentam as formas cilíndrica e esférica. Em uma abordagem etnomatemática, no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática, é essencial trazer o contexto dos estudantes na relação dialógica e na utilização de elementos culturais nas atividades. A Figura 59 retrata os modelos que sugerimos para o processo de ensino e aprendizagem desse encontro.

Figura 60 – Dos artefatos aos sólidos em madeira.

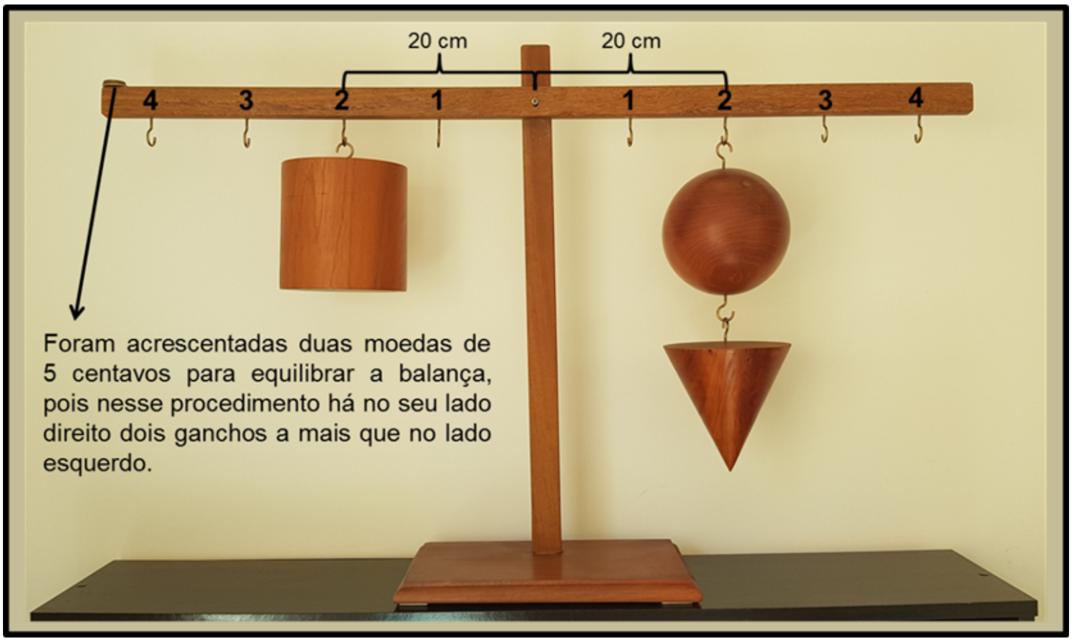
Fonte: Elaborada pelos autores.

Em um primeiro momento, as discussões desse encontro envolvem as respostas aos três questionamentos e o reconhecimento desses sólidos geométricos sem a necessidade, inicial, de identificarmos as suas medidas. Ou seja, estamos interessados em dialogar como os acadêmicos indígenas calculam esses volumes e, em que situações do seu cotidiano eles utilizam o cálculo de volumes, com destaque para os corpos redondos. Logo após esses diálogos, temos como foco inicial o artefato Pau-de-chuva e o cilindro em madeira. Os acadêmicos indígenas devem observar, manusear e, com apoio de uma régua, realizar as medidas desses sólidos geométricos (diâmetro, raio da base e altura) para o cálculo dos volumes desses cilindros (). Ressaltamos a fórmula para o cálculo do volume de qualquer cilindro.

Com a expressão algébrica do cálculo do volume de um cilindro reto circular e com a dinâmica da balança de Arquimedes construímos com os acadêmicos indígenas as fórmulas matemáticas que utilizamos para os cálculos dos volumes de um cone e de uma esfera. No caso, em tese, seguindo o experimento de Arquimedes (ÁVILA, 2006; ÁVILA, 2009; MAGNAGHI e ASSIS, 2019), o cilindro que circunscreve o cone e a esfera tem área total equivalente à soma das áreas totais da esfera e do cone, assim como o volume do cilindro corresponde à soma dos volumes do cone e da esfera.

Nesse contexto, a partir dessas relações entre os sólidos e partindo da fórmula matemática que utilizamos para calcular o volume do cilindro reto de base circular, propomos três atividades envolvendo a balança e os referidos sólidos, para a construção das fórmulas matemáticas que utilizamos para calcular o volume do cone, o volume da esfera e a superfície esférica. A Figura 61 retrata o equilíbrio entre a massa do cilindro com a soma das massas da esfera e do cone, quando os sólidos são dispostos em uma mesma distância do ponto fixo do braço da balança.

Figura 61 – A massa do cilindro é igual à soma das massas do cone e da esfera inscritos no cilindro.



Fonte: Elaborada pelos autores.

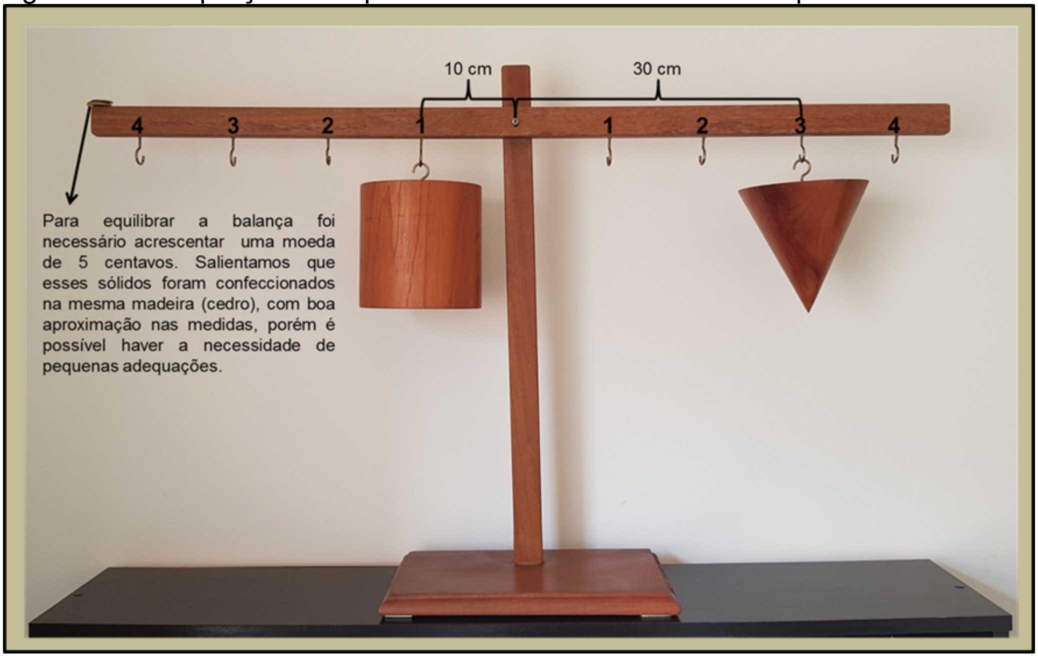
Então, após os acadêmicos debaterem o que estão observando e manuseando, realizamos o procedimento de descrever no quadro branco a igualdade entre as expressões algébricas das massas desses sólidos. Destacamos que o material utilizado na confecção dos sólidos precisa ser o mesmo para garantir a igualdade de suas massas específicas , no caso como já mencionamos, madeira do tipo Cedro.

Considerando que as distâncias entre o cilindro e o ponto fixo da balança e a distância do cone e a esfera em relação ao mesmo ponto fixo da balança são iguais (20 cm), bem como a massa do cilindro, a massa da esfera e a massa do cone, por meio do equilíbrio da balança temos que:

Continuando a atividade, a partir do conceito de massa específica e, considerando que as massas específicas do cilindro , e do conjunto cone e esfera são iguais, já que os três são confeccionados do mesmo material (cedro), propomos uma discussão envolvendo as relações entre os volumes do cilindro , do cone e da esfera , ou seja:

O volume do cilindro reto de base circular corresponde a soma dos volumes da esfera e do cone circunscritos por ele. Após as discussões sobre essa relação entre os volumes dos sólidos relacionados e, com o intuito da construção da fórmula matemática que utilizamos para calcular o volume de um cone, propomos a realização da atividade da balança representada na Figura 62.

Figura 62 – Proporção de equilíbrio entre o cone e o cilindro que o circunscreve.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Nesse cenário, os acadêmicos indígenas podem perceber que o cilindro posicionado à distância (de 10 cm do parafuso fixo central do lado esquerdo da alavanca, se equilibra com o cone ao ser posicionado a distância de 30 cm do mesmo parafuso, mas no lado direito da alavanca. Então, simplificamos a equação por 10 e propomos discutir com os estudantes que as massas do cilindro () e do cone (estão em equilíbrio na razão de 1 para 3, ou seja a massa do cilindro corresponde ao triplo da massa do cone.

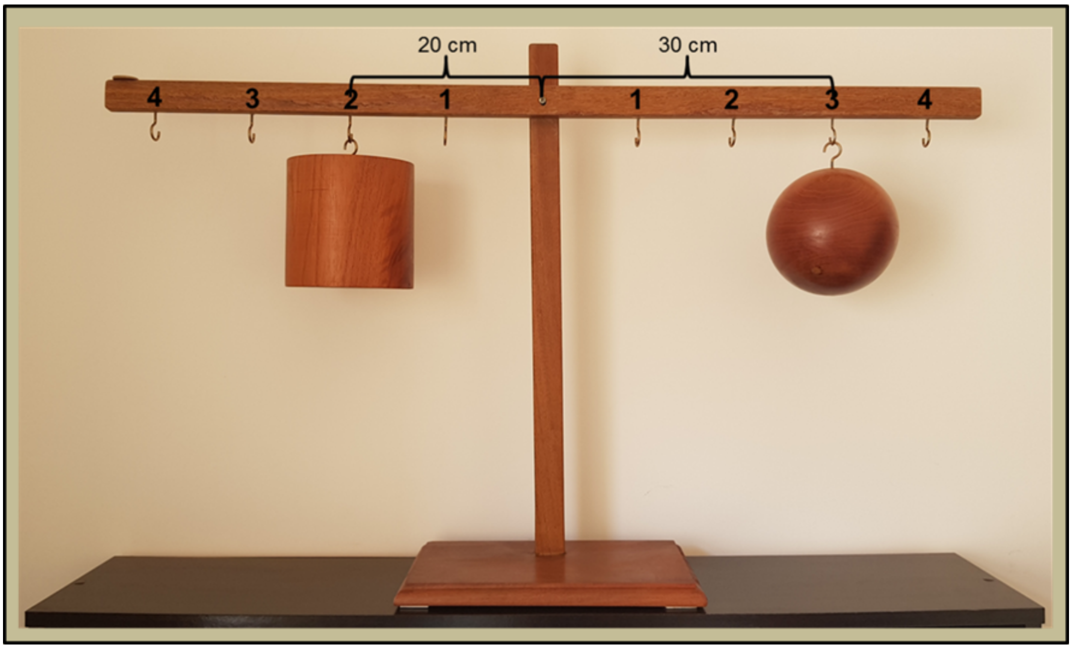
Após essa conclusão, prosseguimos com a atividade trazendo a igualdade entre a massa específica do cilindro () e a massa específica do cone () que são confeccionados com o mesmo material (madeira tipo Cedro):

Acontece que o volume de um cilindro pode ser calculado multiplicando o resultado de sua área da base circular por sua altura. Será que para o cálculo do volume de um cone basta proceder da mesma maneira? Pausa para reflexões. Então, substituindo por e por sua expressão algébrica (e simplificando as massas temos a expressão algébrica que determina o cálculo do volume de um cone em função de seu raio da base e de sua altura :

Essa fórmula matemática possibilita o cálculo do volume de qualquer cone em função de seu raio da base e de sua altura. Contudo, o cone utilizado na alavanca, é inscrito no cilindro, portanto a altura desse cone corresponde ao dobro do seu raio da base, ou seja, Então, podemos substituir a altura em sua fórmula matemática para o cálculo do seu volume por para seu cálculo em função somente do seu raio da base. Assim, para um cone inscrito em um cilindro, temos que:

Depois de esgotadas as discussões sobre o cálculo do volume do cone, iniciamos o debate sobre a construção da fórmula matemática que utilizamos para o cálculo do volume de uma esfera. Novamente, utilizamos a balança de Arquimedes colocando o cilindro e a esfera em posições que provoquem o equilíbrio entre os sólidos geométricos. A imagem da Figura 63 representa a atividade que descrevemos.

Figura 63 – Proporção de equilíbrio entre a esfera e o cilindro que a circunscreve.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, os acadêmicos indígenas percebem que o cilindro posicionado a uma distância (de 20 cm do parafuso fixo central, do lado esquerdo da alavanca, se equilibra com a esfera posicionada a uma distância de 30 cm do mesmo parafuso, mas no lado direito da alavanca. Então, simplificamos a equação por 10 e propomos discutir com os participantes que as massas do cilindro () e a da esfera (estão em equilíbrio na razão de 2 para 3, ou seja:

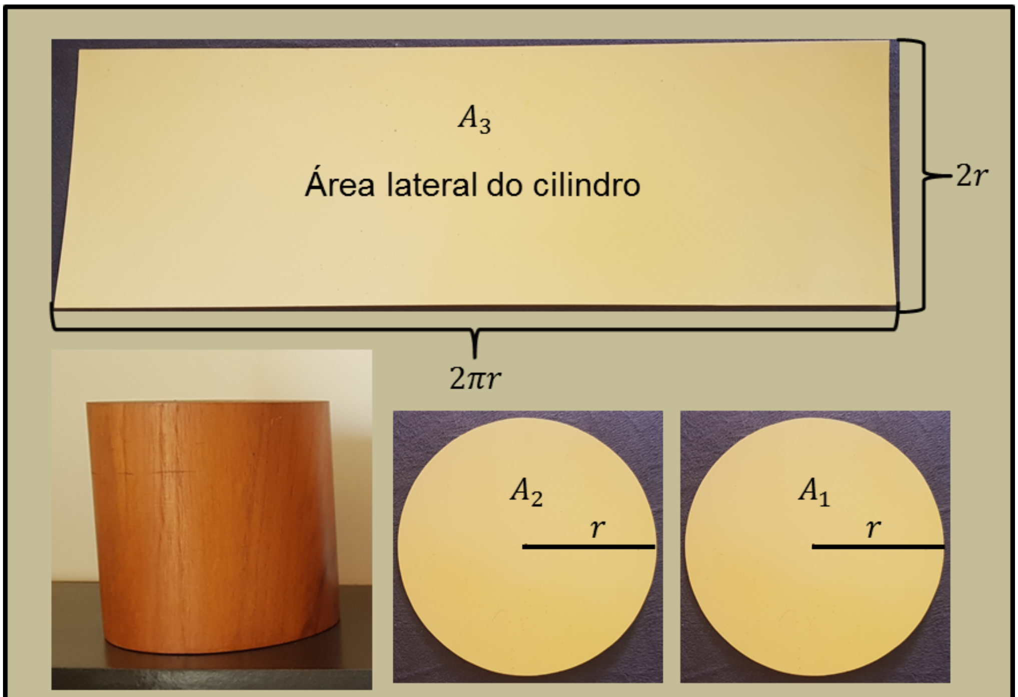
Após essa conclusão, prosseguimos com a atividade trazendo a igualdade entre a massa específica do cilindro () e a densidade da esfera () que são confeccionados com o mesmo material (madeira tipo Cedro):

Então, substituímos por e por sua expressão algébrica (, sendo que no cilindro utilizado sua altura corresponde a E, simplificando as massas temos a fórmula matemática que utilizamos para o cálculo do volume de uma esfera em função de seu raio .

Magnaghi e Assis (2019) ressaltam que Arquimedes desenvolveu o mesmo procedimento para a determinação da fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a superfície esférica em função de seu raio. Então, refazemos essa dinâmica envolvendo o cilindro e a esfera inscrita nele, relacionando as superfícies totais dos dois sólidos. Com essa atividade, pretendemos dialogar com os acadêmicos indígenas a construção da fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a superfície esférica. Primeiramente, precisamos determinar a fórmula matemática que possibilita o cálculo da área total do cilindro reto de base circular.

Então, sendo a superfície ou área total do cilindro podemos determinar a sua expressão algébrica pela soma das suas duas áreas circulares, base e tampa, com a área lateral do cilindro conforme retratado na imagem da Figura 64. Solicitamos ao mesmo marceneiro que construísse um prisma de base retangular. Sendo que seu comprimento corresponde à medida aproximada ao comprimento da circunferência do cilindro e sua altura medindo a altura do cilindro. A área desse retângulo representa a superfície lateral do cilindro. Além disso, solicitamos a confecção de dois cilindros, bem finos, que representam os círculos da tampa e da base do cilindro. Com a soma das áreas dessas superfícies construímos a fórmula matemática que possibilita o cálculo da superfície total do cilindro.

Figura 64 – Construindo a fórmula matemática para calcularmos a superfície total do cilindro reto de base circular.



$$S_{ci} = A_1 + A_2 + A_3$$
$$S_{ci} = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r.2r$$
$$S_{ci} = \pi r^2 + \pi r^2 + 4\pi r^2$$
$$S_{ci} = 6\pi r^2$$

Fonte: Elaborada pelos autores.

Nessa atividade, destacamos que a altura do cilindro nem sempre corresponde ao dobro do raio de sua base, nesse caso em específico sim, pois estamos trabalhando com um cilindro que circunscreve uma esfera, portanto sua altura corresponde ao diâmetro da esfera, que por sua vez, equivale ao dobro do seu raio. Assim, em uma fórmula matemática para o cálculo da superfície total de um cilindro qualquer, devemos considerar a sua altura como podendo assumir qualquer valor positivo. Então, a fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a superfície total de qualquer cilindro é determinada por:

Então, logo após as discussões sobre a construção da fórmula matemática que possibilita calcularmos a superfície total do cilindro, realizamos a construção da fórmula matemática que permite o cálculo de qualquer superfície esférica em função de seu raio), por meio da relação existente entre o cilindro e a esfera na balança de Arquimedes da Figura 56. Agora no lugar do volume colocamos as superfícies totais dos sólidos, como sugerido por Arquimedes.

Logo após, realizamos algumas atividades envolvendo o cálculo de superfícies e volumes dos sólidos de madeira utilizados. Assim, concluímos o terceiro encontro destacando os objetos matemáticos que utilizamos para calcularmos: a área do círculo; a área total e o volume do cilindro; o volume do cone; a superfície e o volume de uma esfera. Ressaltamos que nos cálculos que envolvem o número irracional não há a substituição por um valor numérico aproximado. Embora, nas atividades contextualizadas essa substituição seja necessária para obtermos resultados aproximados.

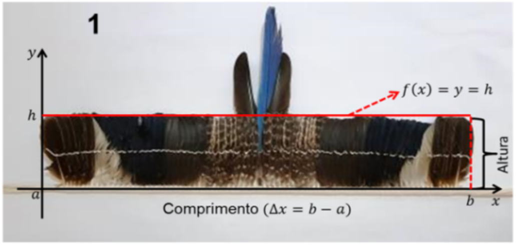
7.5. Planejando o quarto encontro

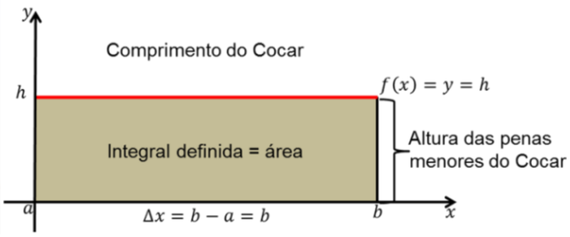
No quarto encontro, temos o objetivo de dialogar com os acadêmicos indígenas, o conceito de integral definida e função área. Para tanto, enviamos um vídeo no grupo de *WhatsApp* dos acadêmicos, retomando as construções de gráficos das funções constante e polinomial do 1º grau. Essas construções são essenciais, pois seus modelos gráficos evocam possíveis rastros de aprendizagem do tipo "já-encontrados colaboradores" ou "já-encontrados dificultadores", bem como rastros de afetividade do tipo "Já-encontrados afetivos" que são deixados pelos acadêmicos indígenas em processos de aprendizagem envolvendo esses gráficos.

Então, para direcionar o tema previsto podemos elencar alguns questionamentos: Como construímos o gráfico da função constante? Como construímos o gráfico da função polinomial do 1º grau? O que é integrar? O que é função área? Questões norteadoras como essas não são elencadas de uma só vez, mas ao longo do processo de ensino aprendizagem. Com isso, nesse quarto encontro, os acadêmicos indígenas da LINTER precisam ser motivados a fazerem um resgate de conteúdos de Matemática, estudados por eles, no Ensino Médio (função constante e função polinomial do 1º grau). Será que as formas gráficas dessas funções aparecem em outros artefatos ou artesanatos, ou ainda em outros elementos culturais? Após as discussões iniciais os acadêmicos precisam ser instigados a olharem para a História da Matemática buscando os contextos e as motivações de personagens matemáticos que promoveram a construção da definição de integral definida e função área.

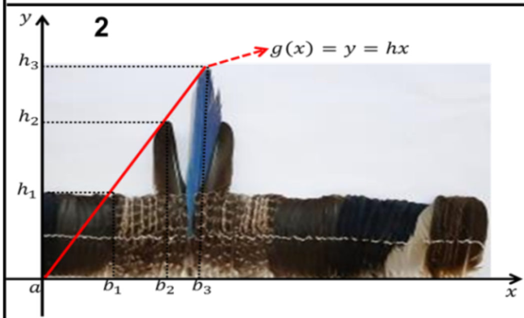
E então, partimos dessa definição para calcularmos a área (integral definida) da região situada sob a curva , entre as retas verticais e que demarcam um intervalo no eixo horizontal do plano cartesiano com e, acima do eixo . Depois de esgotadas as discussões, debatemos com os acadêmicos indígenas a definição de função área e a aplicamos ao gráfico da função constante , que, por acaso, corresponde ao comprimento de uma circunferência de raio medindo 1. Como resultado dessa atividade do terceiro encontro, chegamos à conclusão de que, por meio da construção da função área de , nós obtemos a função , que corresponde à fórmula matemática que utilizamos para calcularmos o comprimento de qualquer circunferência em função de seu raio As imagens da Figura 65 retratam essa parte das discussões no quarto encontro.

Figura 65 – As construções gráficas a partir das alturas das penas do Cocar.

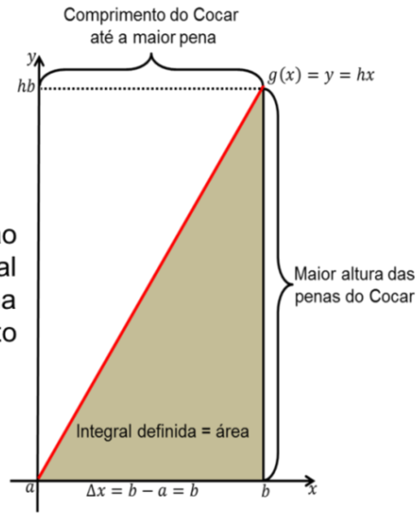




O cálculo dessa área é simples, pois a área da região situada sob a curva $f(x) = h$, entre as retas verticais $x = a = 0$ e $x = b$ com $b \geq a$ e acima do eixo x, tem a forma retangular, cuja área pode ser calculada pelo produto de sua altura h por sua base $\Delta x = b - a$, e ao considerarmos $a = 0$, teremos $\Delta x = b$. Logo:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b h\,dx = Área = b.h = h.x]_0^b.$$



O cálculo dessa área é simples, pois a área da região situada sob a curva $g(x) = hx$, entre a reta vertical $x = b$ com $b \geq 0$ e acima do eixo x, tem a forma triangular, cuja área pode ser calculada pelo produto de sua altura hb por sua base $\Delta x = b$. Logo:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_0^b hx\,dx = Área$$

$$Área = \frac{(altura).(base)}{2} = \frac{(h.b).(b)}{2} = \frac{hb^2}{2} = \frac{hx^2}{2}\Big]_0^b$$

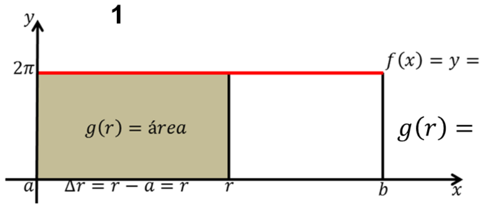
Fonte: Elaborada pelos autores.

Após todas as discussões, propomos outro olhar para os tamanhos das três penas maiores do Cocar Indígena, instigando os acadêmicos indígenas participantes a construírem o gráfico de uma função polinomial do 1º grau, questionando-os se esse tipo de gráfico da Matemática aparece em outros elementos de sua cultura. Encerradas as discussões faremos a comparação do gráfico de uma função linear com a construção do gráfico da função , com a qual, provocaremos os cálculos de sua integral definida e de sua função área.

Então, após as discussões, realizaremos com os acadêmicos indígenas o cálculo da área da região sob o gráfico da função polinomial do 1º grau com , pois, como anteriormente, o cálculo da área da região situada sob a curva , entre as retas verticais e que demarcam um intervalo no eixo horizontal do plano cartesiano com e, acima do eixo tem como resultado a integral definida da função. As imagens da Figura 66 representam o desenvolvimento dessa atividade.

Figura 66 – Construindo as funções área de e de .

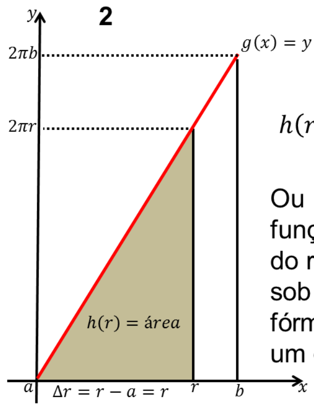
1



$$g(r) = \int_0^r f(x)\,dx = \text{área} = altura.base = 2\pi.r = 2\pi r$$

Ou seja, a função $g(r) = 2\pi r$ com $0 \leq r \leq b$ indica g uma função polinomial do 1º grau positiva, contínua e dependente da variação de seu raio r entre 0 e b. Ela foi construída a partir do cálculo da área da região situada sob a curva $f(x) = 2\pi$, entre as retas verticais $x = a = 0$ e $x = r$ com $r \geq a$ e acima do eixo x, tem a forma retangular, cuja área pode ser calculada pelo produto de sua altura 2π por sua base $\Delta r = r - a$, ao considerarmos $a = 0$, teremos $\Delta r = r$.

2



$$h(r) = \int_0^r g(r)\,dr = \text{área} = \frac{altura.base}{2} = \frac{2\pi.r.r}{2} = \pi r^2$$

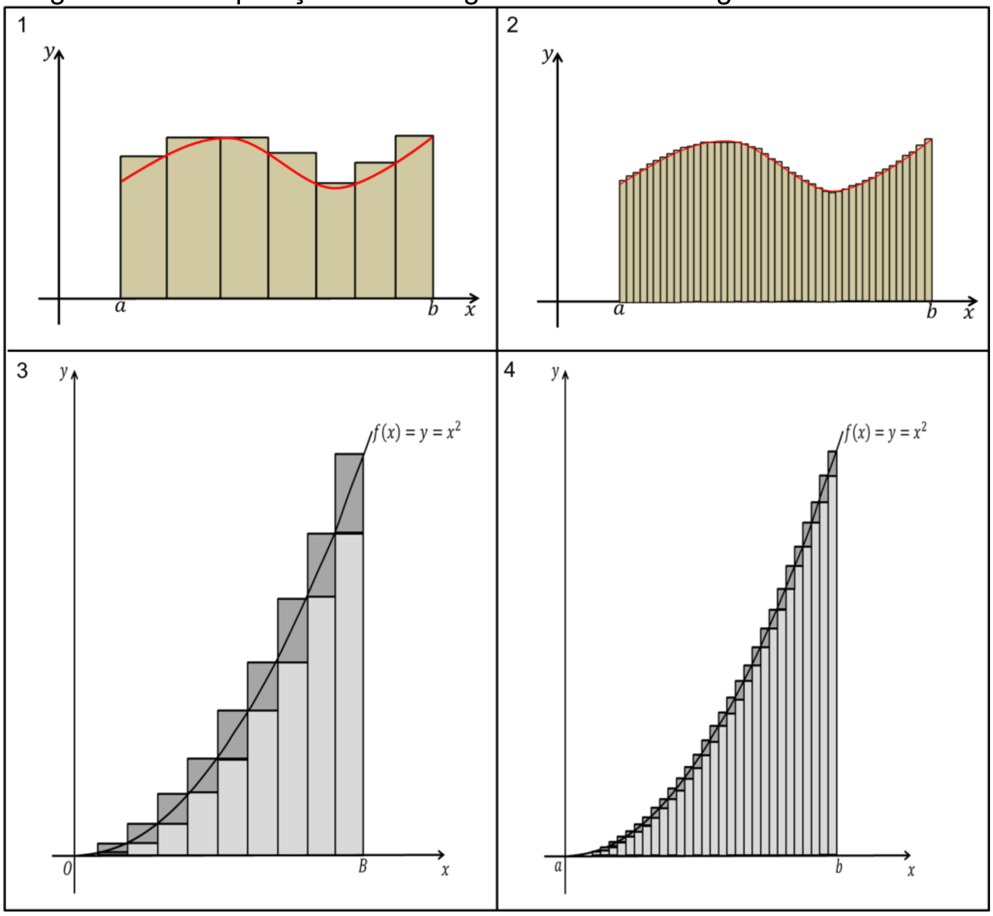
Ou seja, a função $h(r) = \pi r^2$ com $0 \leq r \leq b$ indica h uma função polinomial do 2º grau positiva e dependente da variação do raio r entre 0 e b. Ela foi construída a partir da área da região sob a reta $g(r) = y = 2\pi r$, integral definida, e corresponde a fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a área de um círculo em função do seu raio.

Fonte: Elaborada pelos autores.

7.6. Planejando o quinto encontro

No quinto encontro, temos o objetivo de dialogar com os acadêmicos indígenas o cálculo de integral definida e função área por meio do cálculo das áreas da região situada sob uma curva qualquer , entre as retas verticais e que demarcam um intervalo no eixo horizontal do plano cartesiano com e, acima do eixo presente no vídeo enviado anteriormente. E, posteriormente, o cálculo da integral definida e da função área da região situada sob a curva , entre as retas verticais e que demarcam um intervalo no eixo horizontal do plano cartesiano com e, acima do eixo , assim como o cálculo da integral definida e da função área da região situada sob a curva , entre as retas verticais e que demarcam um intervalo no eixo horizontal do plano cartesiano com e, acima do eixo . A Figura 67 retrata as imagens do preenchimento da área da região sob uma curva qualquer e da função quadrática cujas dinâmicas de construções estão presentes no quinto vídeo.

Figura 67 – A repartição em retângulos da área da região sob as curvas.

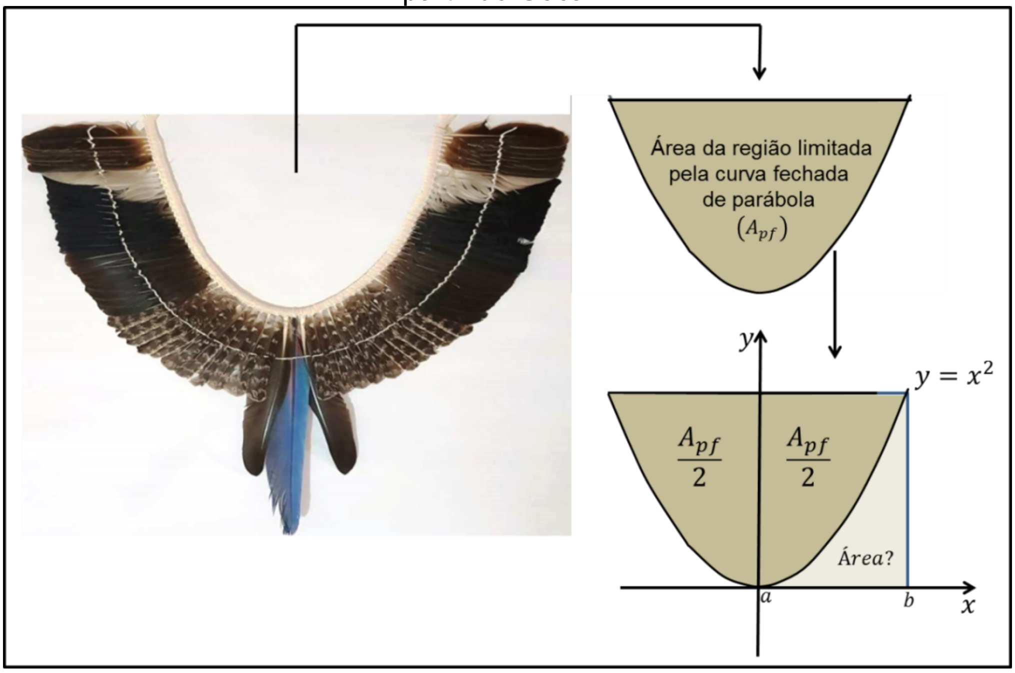


Fonte: Elaborada pelos autores.

Além da construção visual, o vídeo desenvolve a definição de integral definida como o resultado dessa área demarcada em cinza. Essa área é preenchida pelo limite da soma das infinitas áreas retangulares, nas quais, cada uma de suas infinitas bases tende a medir zero. Assim, discutimos novamente com os acadêmicos indígenas o método da Exaustão e a soma de Riemann (aqui consideramos a exaustão da área sob a curva por meio da soma infinita de áreas retangulares) para o cálculo de áreas curvas, que foi destaque no cálculo da área de um círculo no terceiro encontro. Além disso, o vídeo trás a definição de integral definida:

Então, depois de finalizadas as discussões sobre o conteúdo apresentado no vídeo, fomentamos os diálogos para o cálculo da integral definida da curva oriunda de uma função quadrática. Aqui apresentamos uma parábola originada do gráfico da função quadrática . Para tanto, iniciamos dialogando com os acadêmicos indígenas a construção da parábola por meio do Cocar quando o posicionamos, propositalmente, para lembrar a curva de uma parábola. A região limitada pela curva fechada de parábola projeta uma área curva sob o eixo horizontal do plano cartesiano. O cálculo da área da região sob a curva, entre as retas verticais e e o eixo horizontal nos indica a integral definida. As imagens da Figura 68 retratam e fomentam o início das discussões do quinto encontro.

Figura 68 – O molde da parábola e a região limitada pela curva fechada de parábola a partir do Cocar.

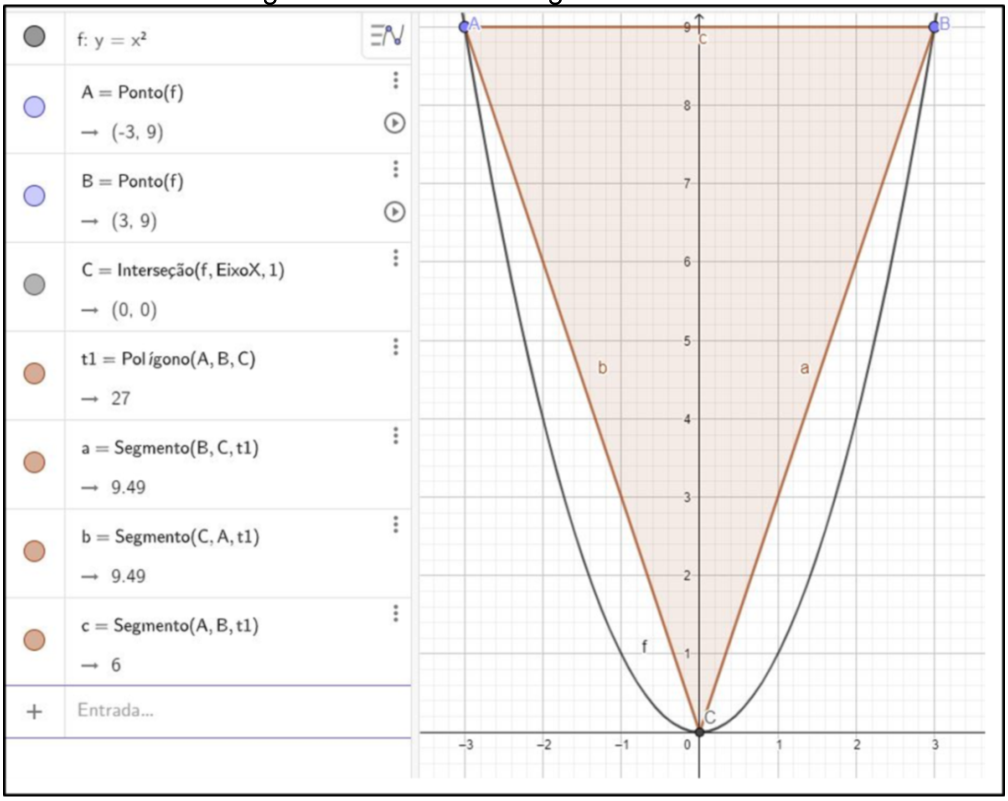


Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, o Cocar serve de inspiração cultural aos acadêmicos indígenas no processo de ensino e aprendizagem da construção do gráfico de uma função quadrática. Por sua vez, há uma região entre a curva da parábola e o eixo positivo das abscissas que representa a integral definida da referida curva . Como podemos calcular a área ou integral definida? Para começarmos a responder essa questão, conforme Magnaghi e Assis (2019, p. 76), Arquimedes em seu livro *O Método* de 1632, propõe uma relação entre a área da região limitada pela curva fechada de parábola e a área de um triângulo inscrito a essa região :

Com o objetivo de comprovarmos essa proposição de Arquimedes junto aos acadêmicos indígenas, construímos o gráfico da função fechando a curva a uma altura qualquer, por meio do GeoGebra, no qual inserimos um triângulo, conforme sugerido na proposição de Arquimedes. A imagem da Figura 69 retrata a região limitada pela curva fechada de parábola e o triângulo que construímos no GeoGebra.

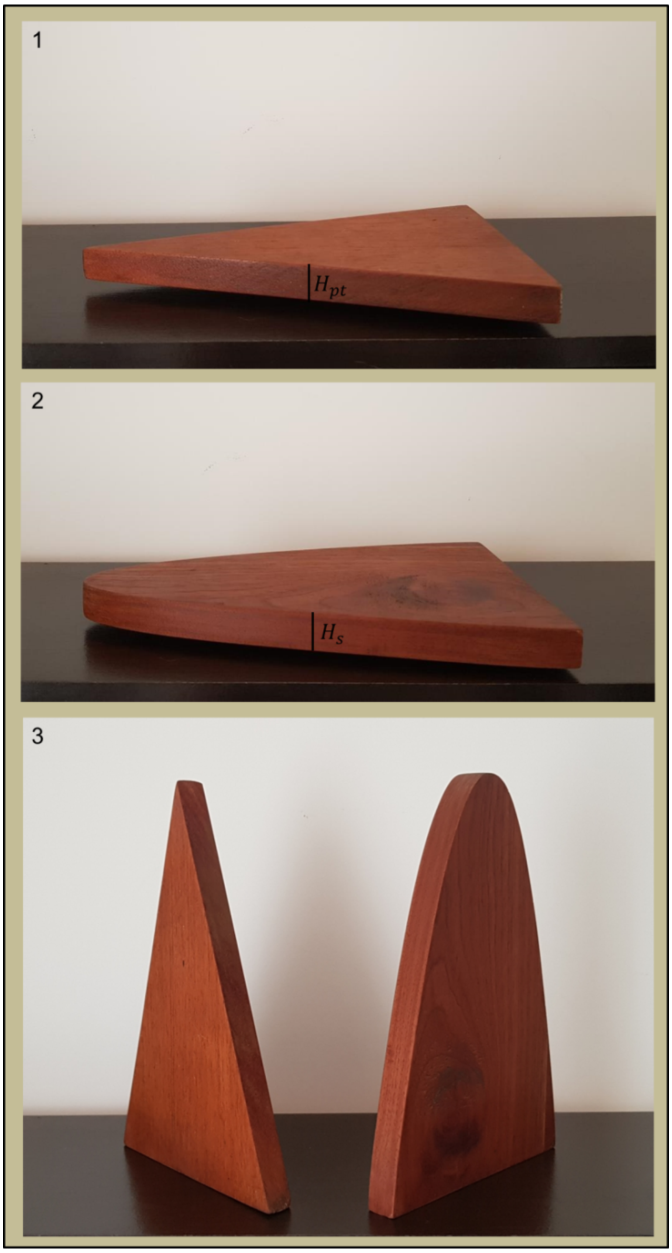
Figura 69 – A construção da região limitada pela curva fechada de parábola e do triângulo inscrito a essa região via GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Então, imprimimos esse desenho gráfico no tamanho de uma folha sulfite A4 e levamos essa impressão ao mesmo marceneiro que construiu os dois sólidos em madeira. A partir do desenho com as dimensões do triângulo inscrito ele confeccionou um prisma reto de base triangular medindo 1,8 cm de altura . Com as medidas e a forma da região limitada pela curva fechada de parábola, o marceneiro construiu um sólido que possui em suas bases, inferior e superior, o formato da referida região curva fechada. A distância entre as bases, ou seja, a altura desse sólido , também mede 1,8 cm. Na Figura 70 apresentamos os dois sólidos confeccionados em Cedro.

Figura 70 – Os sólidos em Cedro a partir da imagem do GeoGebra.

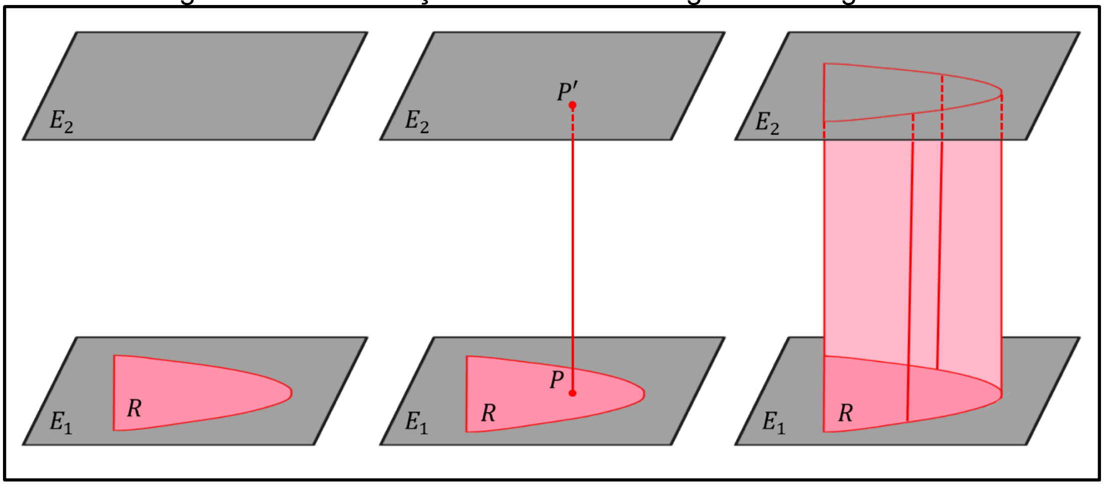


Fonte: Elaborada pelos autores.

Na imagem 1 da Figura 70 trazemos o prisma reto de base triangular com destaque para sua altura . Na imagem 2 ilustramos o sólido que tem como base a área da região limitada pela curva fechada de parábola e ressaltamos sua altura . Já na imagem 3 da Figura 70 colocamos os dois sólidos próximos e em uma posição diagonal realçando o formato de suas bases.

Segundo Moise e Downs (1971, p. 514) da mesma forma “como construímos um prisma com uma região poligonal como base, você verá que o mesmo processo funciona igualmente bem para bases que não são regiões poligonais”. O próprio cilindro é um exemplo. Então, para explicitarmos mais detalhadamente o sólido da imagem 2 (Figura 70), elaboramos a Figura 71, que de forma análoga ao cilindro apresenta o sólido em estudo, cuja base corresponde a região limitada pela curva fechada de parábola construída no GeoGebra e confeccionado pelo marceneiro.

Figura 71 – A descrição do sólido da imagem 2 da Figura 70.



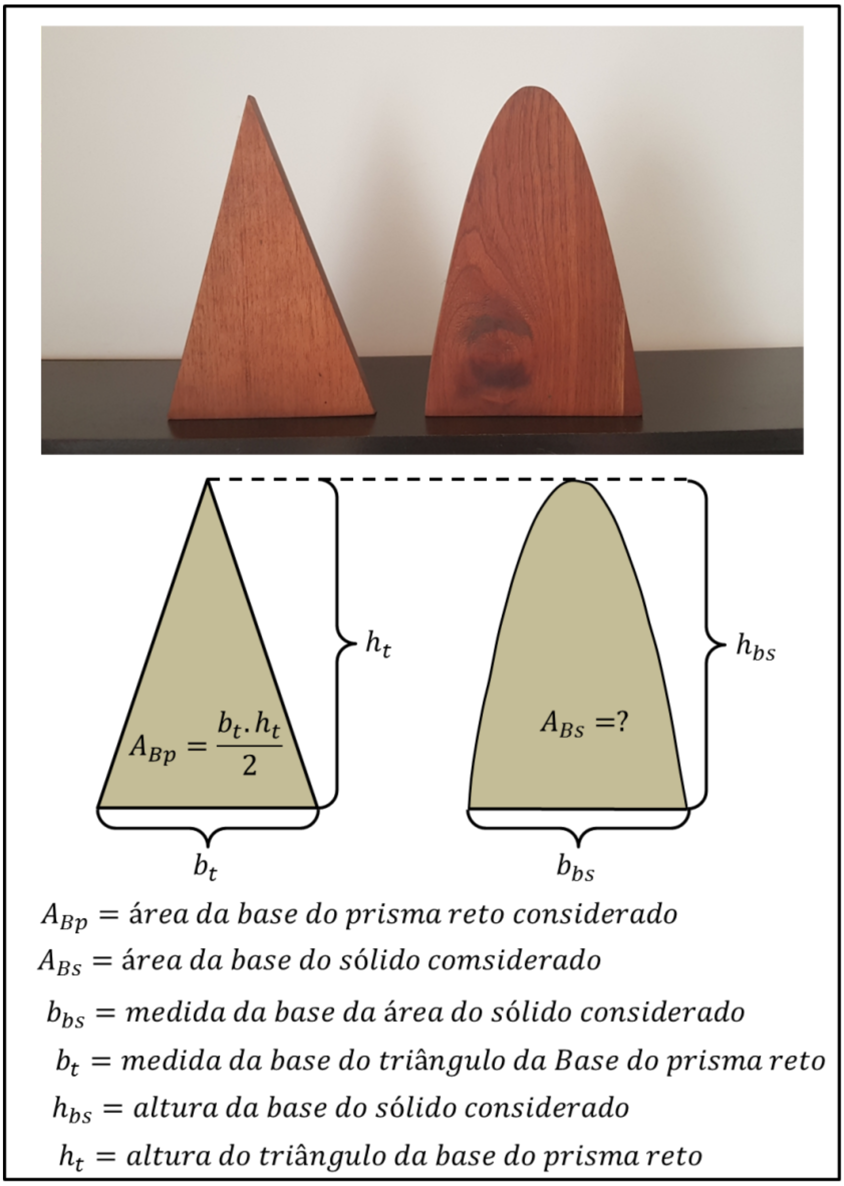
Fonte: Elaborada pelos autores.

A base desse sólido é composta pela região limitada pela curva fechada de parábola. Conforme a Figura 71, considerando a região como a base do sólido e que ela está sob o plano , o sólido em questão é formado pela reunião de todos os segmentos perpendiculares ao plano , onde está em e está em .

Nosso propósito é trabalhar a relação que há entre as áreas das bases dos dois sólidos presentes na imagem 3 da Figura 70 quando colocados em equilíbrio na balança de Arquimedes para, a partir da expressão algébrica da área da base do prisma reto de base triangular , elaborarmos a fórmula matemática para calcularmos a área da base do sólido , destacado na Figura 71. Ou seja, qual a fórmula matemática para calcularmos a área da região do sólido explicitado na Figura 71 originada do sólido presente na imagem 2 da Figura 70?

Na Figura 72 realçamos as bases dos dois sólidos e indicamos as nomenclaturas das medidas dessas bases com relação à posição que nós adotamos para elas trazendo suas alturas e bases.

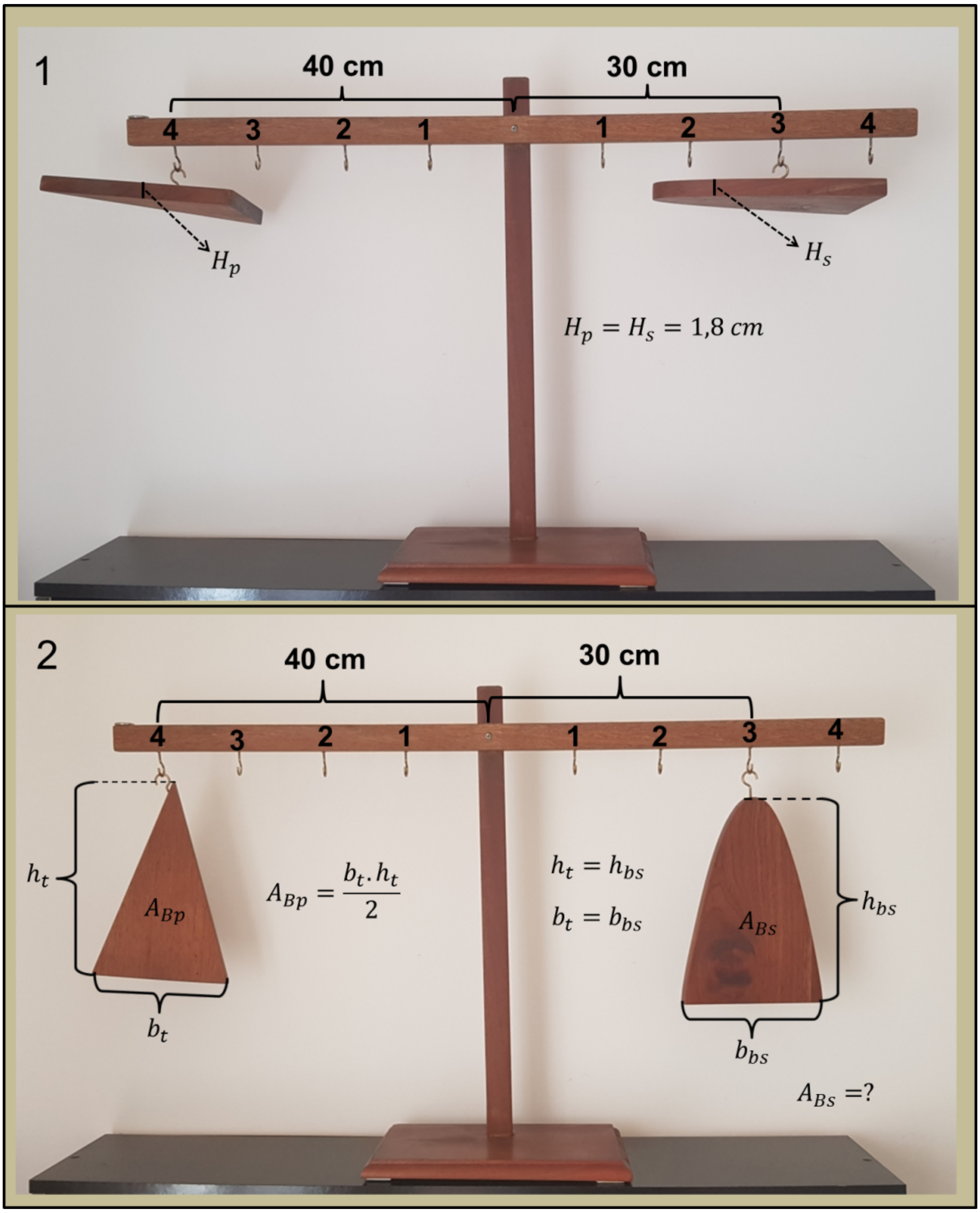
Figura 72 – As bases dos sólidos e suas nomenclaturas para as medidas.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Então, com esses sólidos em madeira, realizamos a apresentação da proposição de Arquimedes posicionando os sólidos na alavanca da balança abstrata. O prisma reto de base triangular foi alocado na posição 4, ou seja, distante 40 cm do ponto fixo central da alavanca. Já o outro sólido foi colocado na posição 3, que dista 30 cm do ponto fixo central da alavanca da balança. A Figura 73 retrata o que descrevemos, sendo que na sua imagem 1 trazemos os sólidos na posição que destaca suas alturas, já na imagem 2 os sólidos estão posicionados para realçarem suas bases.

Figura 73 – Imagem do equilíbrio entre o sólido e o prisma reto de base triangular.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, os acadêmicos indígenas podem perceber que o sólido cuja base tem a forma da área da região limitada pela curva fechada de parábola construída no GeoGebra, quando posicionado a distância (de 30 cm do parafuso fixo central, do lado esquerdo da alavanca, se equilibra com o prisma reto de base triangular posicionado à distância de 40 cm do mesmo parafuso, mas no lado direito da alavanca. Logo, após simplificarmos por 10, propomos discutir com os estudantes que a massa do sólido () e a massa do referido prisma (estão em equilíbrio na razão de 3 para 4, ou seja:

Após essa conclusão, prosseguimos com a atividade trazendo a igualdade entre massa específica do sólido () e a massa específica do prisma reto de base triangular () que são confeccionados com o mesmo material (Cedro). Considerando o volume do sólido cuja base possui a forma da região cuja área é limitada pela curva fechada de parábola (Figura 71) como e o volume do prisma reto de base triangular como , após a substituição de por sua igualdade acima e algumas manipulações algébricas chegaremos à relação entre os volumes dos sólidos em tela.

Contudo, entendemos que o volume de um sólido qualquer é calculado pelo produto entre a área de sua base e a sua altura. Sabemos que a altura do sólido e a altura do prisma reto de base triangular possuem a mesma medida de 1,8 cm, então podemos simplificá-las no processo. Logo, concluímos com a construção da fórmula matemática que podemos utilizar para calcular a área da base do sólido em questão , em função da área da base triangular do prisma reto que é inscrita nela. Ou seja:

Como apresentamos na Figura 73, a área da base do prisma triangular pode ser calculada por:

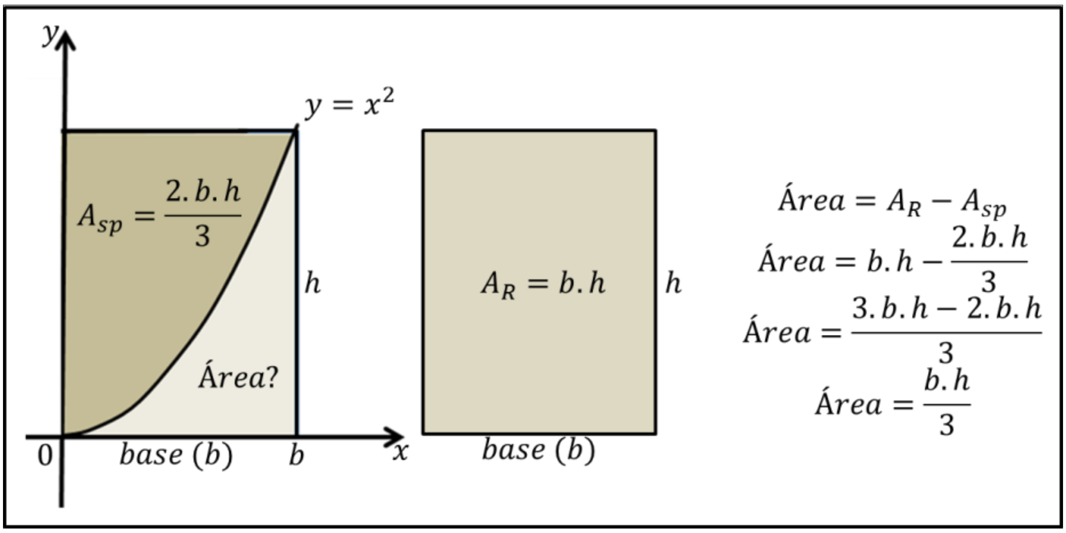
Logo,

Contudo, como o prisma reto de base triangular é circunscrito pelo sólido cuja base corresponde a área da região limitada pela curva fechada de parábola, sabemos que: e , conforme apresentado na imagem 2 da Figura 73. Logo,

Então, concluímos que a área da região limitada pela curva fechada de parábola corresponde a dois terços do produto entre a medida da área de sua base e a medida de sua altura. Mas, o que isso tem a ver com o cálculo da área da região sob a curva da parábola e limitada por um intervalo definido? Acontece que se conhecemos o cálculo dessa referida região, completamos o desenho do retângulo que possui base e altura correspondentes à base e a altura da região em questão.

Então, a soma da área da região limitada pela curva fechada de parábola com a área que estamos procurando equivale à área do retângulo citado. Ressaltamos que a área que estamos procurando, área da região sob a curva que corresponde a integral definida da referida curva para um intervalo definido com e . A imagem da Figura 74 retrata o que descrevemos.

Figura 74 – O cálculo da área da região sob a curva e as retas verticais e e o eixo horizontal .

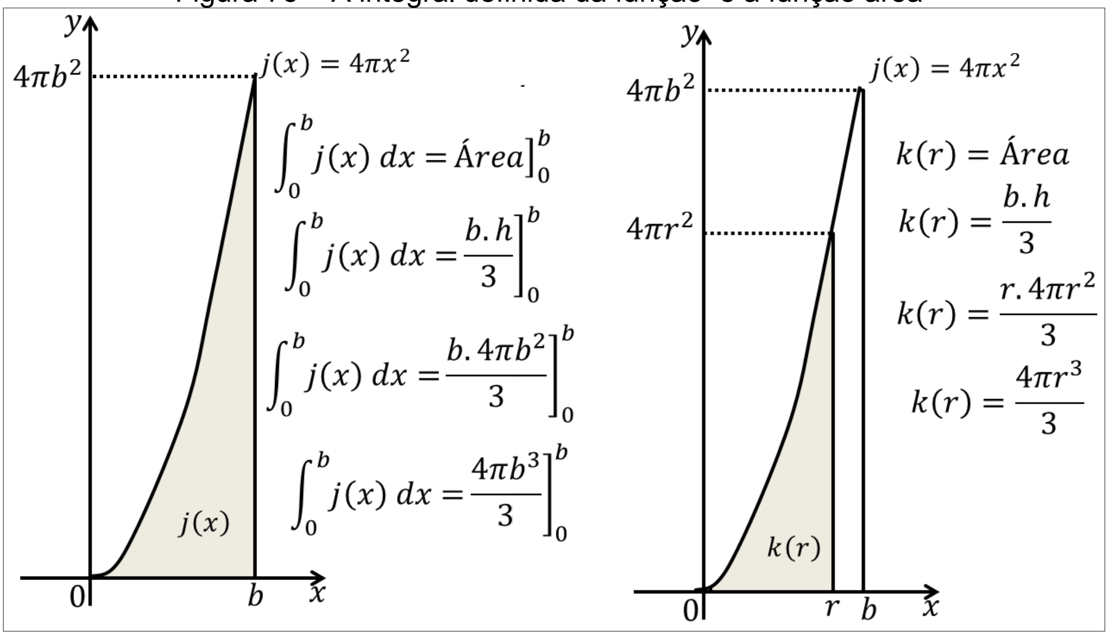


Fonte: Elaborada pelos autores.

Considerando essa fórmula matemática que possibilita o cálculo da área da região procurada cuja base assume qualquer valor de entre e e, sua altura correspondente equivale ao quadrado do valor de , ou seja, podemos determinar a integral definida da curva utilizando essa expressão algébrica da área da Figura 74, considerando nela: e; . Assim temos que:

Com o objetivo de dialogarmos a construção de uma função área a partir da integral definida de uma curva com a variável elevada ao quadrado, utilizamos como exemplo a curva . Então construímos o seu gráfico indicando o cálculo da área da região situada sob essa curva entre as retas verticais e que demarcam um intervalo no eixo horizontal do plano cartesiano com e, acima do eixo . A imagem da Figura 75 retrata o que estamos descrevendo trazendo as construções: do gráfico de ; da integral definida de ; da função área a partir do cálculo da área da referida região.

Figura 75 – A integral definida da função e a função área



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, a função área da função quadrática é a função que corresponde à fórmula matemática que utilizamos para calcularmos o volume esférico em função do seu raio.

CAPÍTULO 8

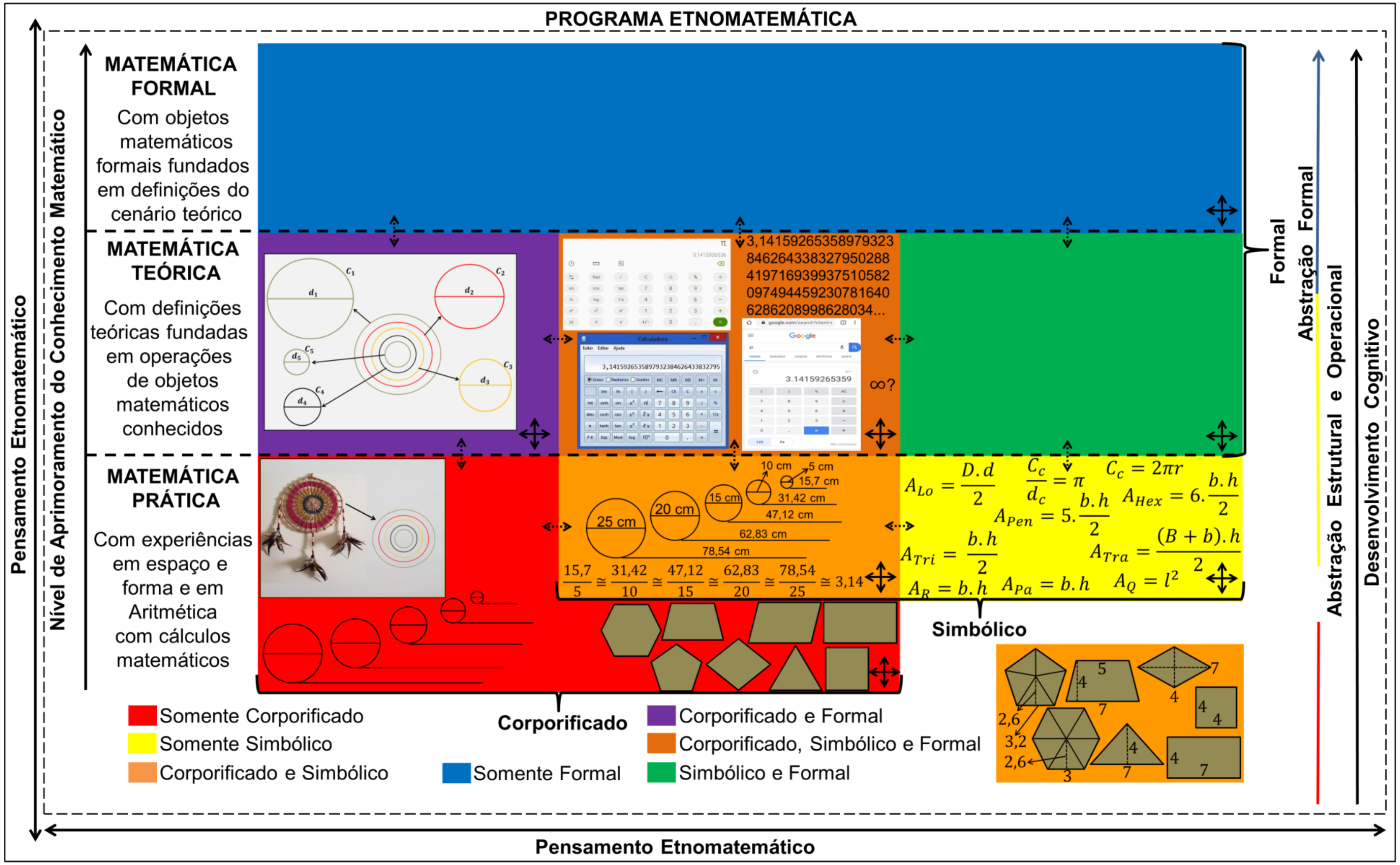
PROVÁVEIS DINÂMICAS DE MOVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO ENTRELAÇADO AO PENSAMENTO ETNOMATEMÁTICO NAS ATIVIDADES COM OS ACADÊMICOS INDÍGENAS

Nesse capítulo, apresentamos nossa interpretação sobre uma possível jornada, pelos Três Mundos da Matemática imerso no Programa Etnomatemática, para cada processo de ensino e aprendizagem descrito no Capítulo 7. Assim, sob nossa perspectiva, apresentamos a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado com o pensamento etnomatemático. Cada jornada foi mapeada seguindo o transcorrer do planejamento proposto em cada encontro e, tendo como base interpretativa o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática inserido no Programa Etnomatemática, conforme a Figura 22. Salientamos que são interpretações dos pesquisadores e que servem como embasamento para as análises de uma provável aplicação de cada processo de ensino e aprendizagem elaborado no Capítulo 7. Ressaltamos que o movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático no desenvolvimento das atividades não é linear, nem ao menos ocorre ora só horizontal, ora somente vertical.

8.1. Uma provável jornada às atividades do primeiro encontro.

Na Figura 76 caracterizamos a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, no âmbito dos Três Mundos da Matemática, delineado no planejamento das atividades desenvolvidas no primeiro encontro. Aqui, destacamos as discussões sobre o número irracional e a construção da fórmula matemática que utilizamos para o cálculo do comprimento de uma circunferência qualquer.

Figura 76 – Uma provável dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático no 1º encontro.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, perante o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática imerso no Programa Etnomatemática, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita estritamente no Mundo Corporificado, em suas idas e vindas, por meio da Matemática Prática: na visualização e manuseio de objetos em madeira com as suas bases nas formas das figuras planas, retangulares e triangulares, abordadas no primeiro vídeo; nas discussões sobre as mesmas formas dessas bases presentes nos contextos culturais dos acadêmicos indígenas participantes; na confecção do artefato ou artesanato Filtro dos Sonhos analisando os materiais utilizados, bem como a identificação de seus aros que apresentam diâmetros e comprimentos de tamanhos diferentes; no manuseio dos aros de metais observando suas formas e seus diâmetros, assim como nas hastes do mesmo metal que possuem comprimento igual ao comprimento de cada aro.

A dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, em suas subidas e descidas pelo Mundo Corporificado, o acadêmico indígena viajante deve ser instigado a, possivelmente, realizar o desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional no procedimento cognitivo de: compreender que as bases dos prismas utilizados na atividade formam as figuras geométricas do retângulo e do triângulo sendo que elas só existem no mundo das ideias matemáticas; transição dos aros oriundos do Filtro dos Sonhos para circunferências, compreendendo que não é possível, por exemplo, segurarmos circunferências em nossas mãos assim como acontece com as figuras planas. E nessas ações, identificar possíveis rastos do tipo “já-encontrados” deixados pelos participantes no transcorrer do processo de aprendizagem proposto, bem como identificar prováveis rastros afetivos do tipo “já-encontrados afetivos” deixados pelos participantes ao longo do referido processo educacional.

O pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita verticalmente do Mundo Corporificado a zona de confluência entre o Mundo Corporificado e o Mundo Formal (Corporificado Formal). E, nessa ação dinâmica, tende a instigar cada acadêmico indígena a, formalizar corporificações e a transformar Matemática Prática em Matemática Teórica, favorecendo o possível desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional e, com vistas a indícios de abstração formal. Ou seja, convertendo, em sua mente, os aros do Filtro dos Sonhos em objetos matemáticos definidos como circunferências.

Por sua vez, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita em suas idas e vindas por essa zona de confluência (Corporificado Formal) por meio do diálogo entre o professor, os acadêmicos e a Matemática Teórica, promovendo a comparação do tamanho de cada haste de metal com o comprimento do respectivo aro, assim como os diâmetros dos referidos aros, possibilitando a construção teórica para o cálculo aproximado de um valor para o número em função da divisão entre o comprimento de cada aro por seu diâmetro.

Ainda na zona de confluência entre o Mundo Corporificado e o Mundo Formal (Corporificado Formal), a dinâmica de movimento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático em suas subidas e descidas, instigando cada acadêmico indígena a, por meio do possível desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional e formal, formalizar as corporificações de cada um dos aros, oriundos do Filtro dos Sonhos, transformando-os mentalmente, em circunferências com seus diâmetros.

A dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita na zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico (Corporificado Simbólico) por meio da Matemática Prática em suas idas e vindas, transformando corporificações em simbolismos ou simbolismos em corporificações: na incorporação de medidas numéricas nas bases dos prismas indicando suas larguras, comprimentos, perímetros, alturas; efetuando as medições dos comprimentos e diâmetros dos aros, bem como operando os cálculos de divisões entre cada comprimento com seu respectivo diâmetro, representados nessa dinâmica, pelos aros e suas respectivas hastes de metal (agindo nos objetos reais e matemáticos misturando corporificações e simbolismos).

Na dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático em suas subidas e descidas pela zona de confluência entre o Mundo Corporificado e o Mundo Simbólico (Corporificado Simbólico), o acadêmico indígena viajante deve ser instigado a, possivelmente, realizar o desenvolvimento de abstração estrutural e operacional comparando os resultados dessas divisões chegando ao mesmo valor aproximado em todos. Ou seja, concluir que a divisão entre qualquer comprimento de circunferência por seu respectivo diâmetro corresponde, aproximadamente, ao mesmo valor.

Então, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita verticalmente da zona de confluência entre os mundos Corporificado e Simbólico à zona tripla de confluência entre os Três Mundos da Matemática (Corporificado Simbólico Formal), transformando Matemática Prática em Matemática Teórica, formalizando corporificações e simbolismos e, possivelmente desenvolvendo abstração estrutural e operacional com vistas a indícios de abstração formal. Ou seja, nesse caso, cada acadêmico indígena viajante é instigado nos diálogos a construir a ideia, em sua mente, de que o número é um número irracional com infinitas casas decimais e não periódicas, portanto seu valor numérico por mais casas decimais que tenha, sempre será um valor aproximado.

A dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita na zona de tripla confluência entre os Três Mundos (Corporificado Simbólico Formal), por meio da Matemática Teórica em suas idas e vindas seja formalizando corporificações e simbolismos ou corporificando e simbolizando formalismos: nas discussões sobre o número irracional utilizando calculadoras científicas dos celulares e de *notebooks*, o valor de presente na calculadora do *Google*, o valor de em pesquisas científicas apresentando infinidade de casas decimais não periódicas.

Por sua vez, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático transita na zona de tripla confluência entre os Três Mundos (Corporificado Simbólico Formal), em suas subidas e descidas, nela o acadêmico indígena viajante deve ser instigado a, possivelmente, realizar o desenvolvimento de abstração estrutural e operacional com indícios de abstração formal, formalizando corporificações e simbolismos do número irracional participando dos debates sobre a ideia de infinito , bem como nas discussões sobre a ideia de infinito nos contextos culturais deles próprios, com vistas a identificarmos possíveis rastros de afetividade do tipo "já-encontrados afetivos" deixados pelos participantes no desenvolvimento do processo de aprendizagem proposto.

A dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita estritamente no Mundo Simbólico em suas idas e vindas, por meio da Matemática Prática: nas manipulações simbólicas com as fórmulas matemáticas que utilizamos para calcularmos as áreas de retângulos, quadrados e triângulos; nas manipulações simbólicas envolvendo o cálculo do comprimento da circunferência (manipulações algébricas com generalização aritmética e a utilização de números).

Enquanto isso, na dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático em suas subidas e descidas pelo Mundo Simbólico, o acadêmico indígena viajante deve ser instigado a, possivelmente, realizar o desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural: ao manipular as fórmulas matemáticas das áreas dos polígonos trabalhados no processo de ensino e aprendizagem, ao acrescentar a essas fórmulas matemáticas as medidas efetuadas anteriormente e, executar os cálculos dessas áreas, com destaque para o cálculo do comprimento de uma circunferência por meio da fórmula , que é fundamental nos processos educacionais dos demais encontros.

E, no transcorrer desse primeiro processo de ensino e aprendizagem, identificar possíveis rastros de aprendizagem do tipo "já-encontrados" deixados pelos participantes ao longo do processo de aprendizagem, bem como por meio das análises das respostas de questionamentos anteriores *versus* questionamentos posteriores, a esse primeiro processo de ensino e aprendizagem, possivelmente, podermos identificar rastros de afetividade do tipo "já-encontrados afetivos" deixados pelos acadêmicos indígenas viajantes no transcorrer do processo educacional proposto.

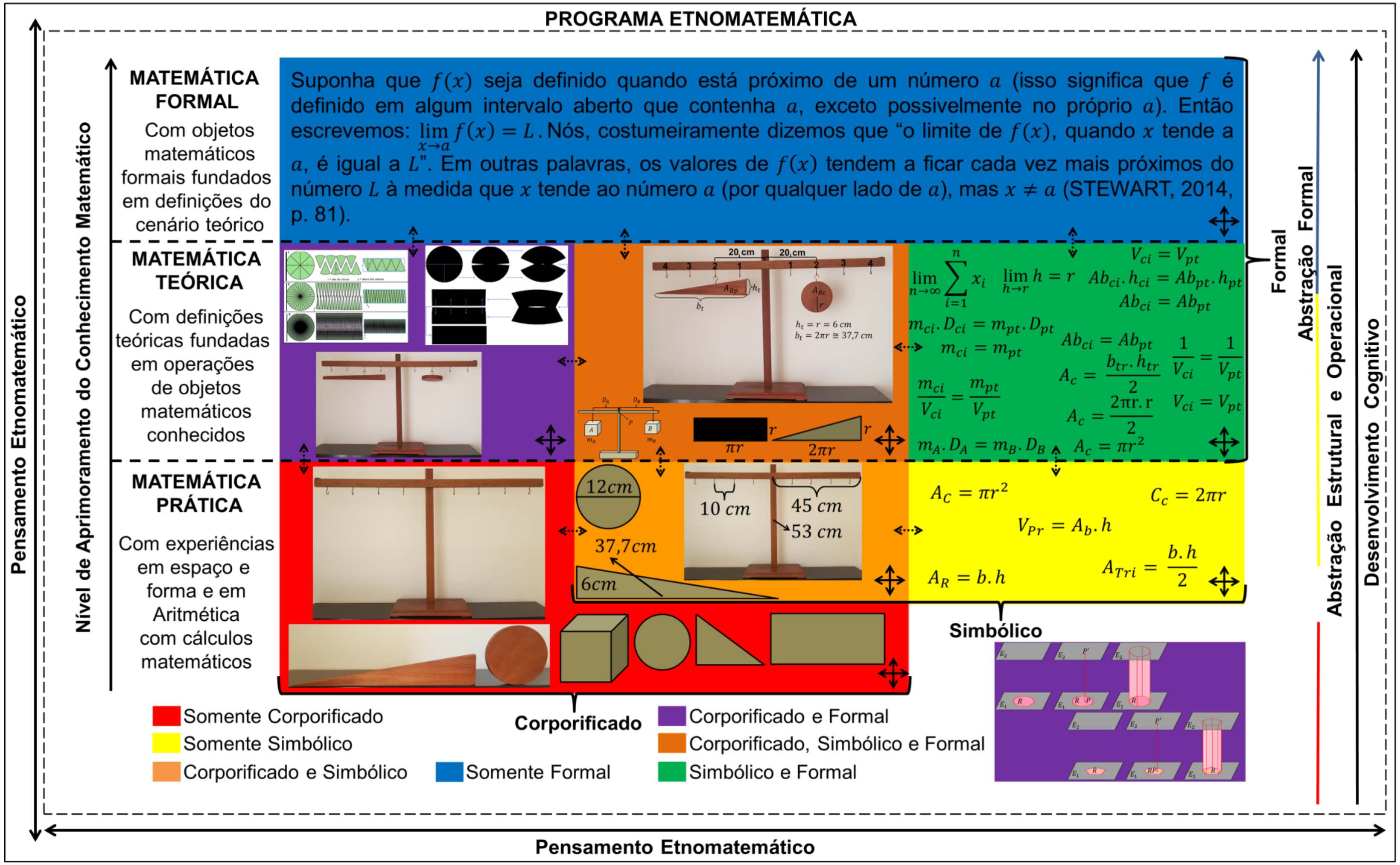
8.2. Uma provável jornada às atividades do segundo encontro

Diferentemente do primeiro encontro, no segundo processo de ensino e aprendizagem, cada acadêmico indígena participante é instigado a possivelmente adentrar ao Mundo Formal para estudar e compreender a definição de limite. No desenvolvimento das atividades, destacamos a primeira utilização do dispositivo da balança de Arquimedes com a atividade de construir a fórmula matemática que utilizamos para o cálculo da área de um círculo, a partir da equiparação da região circular com uma região com a forma de um triângulo retângulo, sendo que a sua base corresponde ao comprimento da circunferência do círculo e sua altura equivale ao raio desse mesmo círculo. E nesse procedimento destacamos a intensificação de manipulação algébrica para realização da atividade.

Na Figura 77 caracterizamos a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, por meio do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática imerso no Programa Etnomatemática, conforme o planejamento das atividades desenvolvidas nesse segundo encontro.

Destarte, perante o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática imerso no Programa Etnomatemática, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita estritamente no Mundo Corporificado, em suas idas e vindas, por meio da Matemática Prática: na visualização, observação e manipulação de três prismas geométricos, construídos em madeira (Cedro), sendo um de base quadrangular, outro de base retangular e outro de base triangular, além de um cilindro; nas discussões sobre as mesmas formas desses sólidos geométricos presentes nos contextos culturais dos acadêmicos indígenas; na visualização, observação e manuseio da balança abstrata de Arquimedes confeccionada em madeira (Cedro).

Figura 77 – Uma provável dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático no 2º encontro.



Fonte: Elaborada pelos autores.

No movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático no âmbito do Mundo Corporificado, proporcionado pelas atividades do segundo encontro presencial, o participante, possivelmente, tende a realizar o desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional ao considerar, por exemplo, que a área de um círculo qualquer é igual à área de um triângulo retângulo cuja altura equivale ao raio do círculo, e a base corresponde ao comprimento da circunferência do mesmo círculo.

O movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita verticalmente, do Mundo Corporificado à zona de confluência entre os mundos Corporificado e Formal, possibilitando nessa ação, que cada acadêmico indígena, provavelmente, desenvolva abstração estrutural com indícios de abstração operacional e com vistas a indícios de abstração formal, ao transformar Matemática Prática em Matemática Teórica e, ao formalizar corporificações. Nesse cenário, cada acadêmico indígena tende a construir, em sua mente, a ideia do equilíbrio entre o cilindro e o prisma reto de base triangular, por intermédio da balança abstrata de Arquimedes.

Já na zona de confluência entre o Mundo Corporificado e o Mundo Formal (Corporificado Formal), a dinâmica de movimento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático possibilita que cada acadêmico indígena, por meio do provável desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional e formal, a formalizar corporificações, nas ações cognitivas de: entender que o cilindro e o prisma reto de base triangular da atividade estão em equilíbrio; compreender a possibilidade de calcular a área de um círculo por meio da sua divisão em quantidades cada vez maiores de setores e; estudar as definições de prisma reto e de cilindro reto para realizar os cálculos de seus volumes.

Por sua vez, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita em suas idas e vindas pela zona de confluência Corporificado Formal por meio do diálogo entre o professor, os acadêmicos e a Matemática Teórica: para desenvolver a ideia de dividir o círculo em uma quantidade cada vez maior de setores e, por meio da soma das áreas desses setores calcularmos, aproximadamente, a área do referido círculo e; na execução da atividade de equilibrar o cilindro e o prisma de base triangular na balança de Arquimedes.

O movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita na zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico por meio da Matemática Prática em suas idas e vindas ao simbolizar corporificações ou corporificar simbolismos: nas alocações das medidas numéricas na balança de Arquimedes; no processo de medir as dimensões do cilindro e do prisma de base triangular ressaltando sua largura, altura e comprimento, bem como a altura e o raio do cilindro.

No processo dinâmico de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, em suas subidas e descidas pela zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico, o acadêmico indígena viajante, possivelmente, realiza o desenvolvimento de abstração estrutural e operacional ao observar e manipular a base do prisma e ao identificar e compreender as relações de igualdade entre o raio do círculo e a altura do triângulo retângulo da base do prisma reto, bem como entre comprimento da circunferência do círculo com a base do referido triângulo retângulo que compõe a base do prisma reto.

O movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita verticalmente da zona de confluência entre os mundos Corporificado e Simbólico à zona tripla de confluência entre os Três Mundos da Matemática (Corporificado Simbólico Formal). Nessa ação, transforma Matemática Prática em Matemática Teórica, formaliza corporificações e simbolismos e, desenvolve abstração estrutural e operacional com vistas a indícios de abstração formal.

Nesse contexto, cada acadêmico indígena viajante é instigado nos diálogos com o professor e demais acadêmicos, a construir a ideia, em sua mente, de que podemos calcular, aproximadamente, a área de um círculo, pelo método da Exaustão, ao equiparar a área do círculo com a área de um retângulo, cuja base mede metade do comprimento da circunferência do círculo e sua altura é igual ao raio do mesmo círculo. Ou ainda, ao utilizar a balança de Arquimedes para converter a forma circular da área do círculo em um triângulo retângulo cuja base mede, aproximadamente, o comprimento da circunferência do mesmo círculo e a sua altura corresponde ao raio do círculo.

Por sua vez, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita na zona de tripla confluência entre os Três Mundos (Corporificado Simbólico Formal), por meio da Matemática Teórica em suas idas e vindas ao simbolizar corporificações e simbolismos ou corporificar simbolismos e formalismos: nas discussões sobre os conceitos físicos de massa, peso e massa específica; na corporificação com medidas do processo de equilíbrio entre o cilindro e o prisma de base triangular, por intermédio da balança de Arquimedes; na corporificação do triângulo retângulo com medidas, ao verificar que sua base mede, aproximadamente, o comprimento da circunferência do cilindro e sua altura corresponde ao raio do mesmo cilindro; na constatação de que o retângulo originado da reunião das áreas dos infinitos setores, que compõem um círculo, possui base medindo a metade do comprimento da circunferência do mesmo círculo e, sua altura corresponde ao raio desse círculo.

O movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático no âmbito da zona de tripla confluência entre os Três Mundos da Matemática (Corporificado Simbólico Formal), o acadêmico indígena viajante, possivelmente, desenvolve abstração estrutural e operacional com indícios de abstração formal, no processo de formalizar a corporificação e o simbolismo do cálculo da área de um círculo, tanto pelo método da Exaustão (soma das infinitas áreas dos setores que compõem o círculo), quanto por meio da atividade proposta com o cilindro, o prisma reto de base triangular e a balança de Arquimedes (dois procedimentos e o mesmo resultado).

Por sua vez, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita estritamente no Mundo Simbólico em suas idas e vindas, por meio da Matemática Prática, nas manipulações simbólicas com as fórmulas matemáticas que utilizamos para o cálculo da área de um retângulo, de um triângulo, do comprimento da circunferência, da área do círculo, do volume de um prisma reto e do volume de um cilindro.

No processo dinâmico de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático em suas subidas e descidas pelo Mundo Simbólico, o acadêmico indígena viajante, possivelmente, realiza o desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural ao manipular as fórmulas matemáticas das áreas das figuras planas e dos volumes do prisma reto e do cilindro acrescentando a elas, as medidas efetuadas anteriormente e ao executar os cálculos dessas áreas e volumes, com destaque para o cálculo da área de um círculo qualquer utilizando a fórmula

O movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita do Mundo Simbólico à zona de confluência Simbólico Formal, ao transformar Matemática Prática em Matemática Teórica, ao formalizar simbolismos e, possivelmente, desenvolvendo abstração operacional, com indícios de abstração estrutural e com vistas a indícios de abstração formal. Nesse cenário, cada acadêmico indígena participante por meio dos diálogos com o professor e demais acadêmicos, tende a construir a ideia de que podemos trabalhar algumas fórmulas matemáticas por meio de manipulações algébricas com intenção operacional de construirmos outras fórmulas matemáticas. Ou seja, por intermédio de possíveis manipulações algébricas entre dois ou mais objetos matemáticos, podemos construir outros objetos matemáticos relacionados (prova simbólica utilizando regras da Aritmética e da Álgebra).

A dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita na zona de confluência entre o Mundo Simbólico e o Mundo Formal (Simbólico Formal) em suas idas e vindas, por meio da Matemática Teórica, ao executar as manipulações algébricas previstas nessa atividade e imaginadas no processo de transição anterior. Aqui, o acadêmico indígena manipula as fórmulas matemáticas do cálculo do volume do prisma reto de base triangular e do volume do cilindro, que estão em equilíbrio na balança de Arquimedes. Nesse procedimento, é indicado que eles possuem a mesma massa, que são feitos do mesmo material (massa específica igual), o que conduz a construção da fórmula matemática que utilizamos para calcularmos a área de um círculo qualquer em função de seu raio.

O movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático em suas subidas e descidas pela zona de confluência entre o Mundo Simbólico e o Mundo Formal (Simbólico Formal), formaliza simbolismos. Nesse cenário, o acadêmico indígena, possivelmente, desenvolve abstração operacional com indícios de abstração estrutural e abstração formal: ao buscar compreender o processo de manipulação simbólica e ao construir a ideia de soma de Riemann; ao compreender que o processo do cálculo da soma das infinitas áreas dos setores que compõem o círculo pelo método da Exaustão, depende da compreensão da definição de limite.

Então, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita verticalmente da zona de confluência entre os mundos Simbólico e Formal ao Mundo Formal, ao transformar Matemática Teórica em Matemática Formal, ao formalizar simbolismos e, possivelmente, desenvolver abstração operacional com indícios de abstração estrutural e com vistas à abstração formal. Nesse processo, cada participante busca compreender a necessidade de construção de objetos matemáticos com estruturas formais que dão sustentação e aprimoramento ao pensamento matemático.

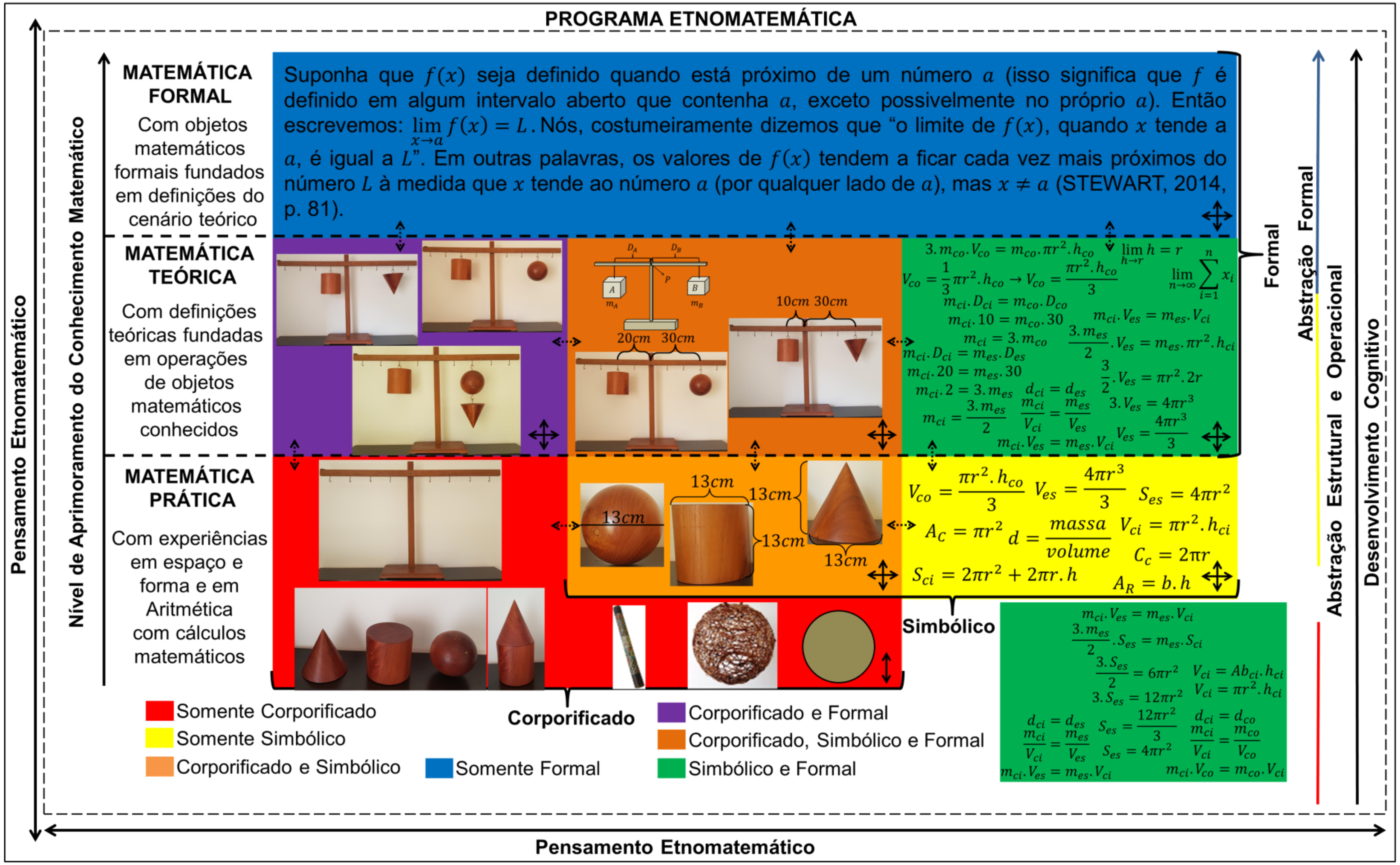
Por sua vez, a dinâmica de movimento do pensamento matemático atrelado ao pensamento etnomatemático transita no Mundo Formal em suas idas e vindas, por meio da Matemática Formal, nas ações de discutir e estudar a definição de limite com o professor e demais acadêmicos indígenas participantes. Já na dinâmica de movimento conjunto dos pensamentos matemático e etnomatemático em suas subidas e descidas pelo Mundo Formal, cada participante, possivelmente, desenvolve abstração formal na ação de compreender a necessidade, a construção e a utilização da definição de limite. Após esse procedimento, o acadêmico indígena deve ser motivado a ação cognitiva de simbolizar formalismos, compreendendo o cálculo do limite de uma soma, quando esse limite tende ao infinito, no caso:

E, no transcorrer desse segundo processo educacional, buscamos identificar rastros de aprendizagem do tipo “já-encontrados” deixados pelos participantes no processo de aprendizagem, bem como por meio das análises das respostas de questionamentos anteriores *versus* questionamentos posteriores, a esse segundo processo educacional, buscamos identificar possíveis rastros de afetividade do tipo “já-encontrados afetivos” deixados pelos participantes ao longo do processo de aprendizagem desse segundo encontro presencial.

8.3. Uma provável jornada às atividades do terceiro encontro

Na proposta desse terceiro encontro intensificamos a utilização do dispositivo da balança de Arquimedes, assim como, consequentemente, as manipulações algébricas para as construções das fórmulas matemáticas que utilizamos para calcularmos as superfícies cilíndrica e esférica, assim como os volumes do cilindro, do cone e da esfera. Aqui, novamente, cada acadêmico indígena participante estuda a definição de limite, bem como soma de Riemann que são essenciais para o posterior desenvolvimento das atividades presentes no quarto e no quinto encontro. Na Figura 78 caracterizamos a dinâmica de movimento do pensamento matemático, no âmbito dos Três Mundos da Matemática, delineada no planejamento das atividades a serem desenvolvidas nesse terceiro encontro.

Figura 78 – Uma provável dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático no 3º encontro.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, na perspectiva da Figura 78, seguindo o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática imerso no Programa Etnomatemática, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita estritamente no Mundo Corporificado, em suas idas e vindas, por meio da Matemática Prática: nas discussões sobre as mesmas formas desses sólidos geométricos presentes nos contextos culturais dos acadêmicos indígenas; nas ações de observação e manuseio dos sólidos geométricos em madeira (cone, cilindro e esfera); na observação e manuseio da balança abstrata de Arquimedes confeccionada em madeira (Cedro).

A dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático pelo Mundo Corporificado, possivelmente, desenvolve a abstração estrutural com indícios de abstração operacional, em cada participante, ao comparar os sólidos geométricos em madeira com os artefatos indígenas presentes nessa atividade, além de questionar e indicar outros artefatos incrementando as discussões.

Ao transitar do Mundo Corporificado a zona de confluência Corporificado Formal, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transforma Matemática Prática em Matemática Teórica e, provavelmente, instiga o desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional e com vistas a indícios de abstração formal. Nesse processo, ocorre a formalização de corporificações no qual, especificamente, cada acadêmico indígena participante compreende o equilíbrio de massas entre o cilindro e a união da esfera com o cone por intermédio da balança de Arquimedes.

A relação dialógica entre o professor e os acadêmicos indígenas, permeada pela Matemática Teórica presente na zona de confluência Corporificado Formal e, envolvida pela dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, promove as ações de corporificar formalismos ou simbolizar corporificações: ao visualizar, observar e manusear os sólidos geométricos; ao colocar em equilíbrio o cilindro, de um lado, com a união da esfera e cone de outro lado da balança de Arquimedes; ao experimentar ou manusear o cilindro e o cone nos ganchos e, em lados opostos da balança, até que se equilibrem e; ao experimentar ou manusear o cilindro e a esfera nos ganchos e, em lados opostos da balança, até que se equilibrem.

Ainda na zona de confluência Corporificado Formal, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, provavelmente, promove o desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional e formal, ao formalizar corporificações, nas ações cognitivas de cada participante que busca compreender: que o cilindro e a união entre a esfera e o cone estão em equilíbrio; que o cilindro e o cone estão em equilíbrio; que o cilindro e a esfera estão em equilíbrio. Será que a esfera e o cone possuem a condição de estarem em equilíbrio em algum ponto na balança?

Por intermédio da Matemática Prática, o movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita na zona de confluência Corporificado Simbólico, ao simbolizar corporificações ou corporificar simbolismos: nas alocações das medidas numéricas na balança de Arquimedes e; no processo de medir e anotar essas medidas nas dimensões do cilindro, do cone e da esfera.

O pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, ao se movimentar pela zona de confluência entre os mundos Corporificado e Simbólico, possivelmente, realiza o desenvolvimento de abstração estrutural e operacional em cada acadêmico participante ao construir em sua mente as ideias de que: apesar das medidas dos sólidos envolvidos não serem, precisamente, as mesmas, no mundo das ideias matemáticas é provável essa precisão; a questão de tanto a esfera quanto o cone estarem inscritos no cilindro, indica que eles possuem as mesmas medidas para os raios das bases do cilindro e do cone, bem como o raio da esfera; o diâmetro da esfera corresponde às alturas do cilindro e do cone.

A transformação de Matemática Prática em Matemática Teórica, o processo de formalizar corporificações e simbolismos, o provável desenvolvimento de abstração estrutural e operacional com vistas a indícios de abstração formal, são ações promovidas pelo movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, ao transitar verticalmente da zona de confluência entre os mundos Corporificado e Simbólico à zona tripla de confluência entre os Três Mundos da Matemática

(Corporificado Simbólico Formal). Nesse cenário dinâmico, os diálogos com o professor e os acadêmicos conduzem a reflexões de que os sólidos geométricos em tela (cilindro, cone e esfera) possuem pontos de equilíbrio e, que podemos determiná-los ao fazermos manipulações por meio da constatação prática (Matemática Prática) desses equilíbrios, bem como que eles podem ser teorizados em manipulações algébricas (Matemática Teórica).

Por meio da Matemática Teórica presente na zona de tripla confluência entre os três mundos, o movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático corporifica simbolismos e formalismos ou simboliza corporificações e formalismos: nas discussões sobre os conceitos físicos de massa e massa específica; nas ações de manusear, observar, analisar e refletir no transcorrer das atividades de equilíbrio entre o cilindro e a união da esfera com o cone, entre o cilindro e a esfera, entre o cilindro e o cone, todos por intermédio da balança de Arquimedes considerando as medidas entre os seus ganchos.

Ainda considerando o movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático pela zona tripla de confluência entre os três mundos, o desenvolvimento de abstração estrutural e operacional com indícios de abstração formal se dá, possivelmente, nas ações de formalizar corporificações e simbolismos. Nas discussões que promovem a construção das fórmulas matemáticas que utilizamos para calcularmos a superfície total do cilindro, a superfície esférica, o volume do cone e o volume da esfera.

Já a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita estritamente no Mundo Simbólico, por meio da Matemática Prática, nas manipulações simbólicas com as fórmulas matemáticas que utilizamos para o cálculo: da massa específica; da área de um retângulo; do comprimento de uma circunferência; da área de um círculo; da superfície total de um cilindro; da superfície esférica; dos volumes do cilindro, do cone e da esfera.

Ainda no Mundo Simbólico, o desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural pode ocorrer nas ações de manipulações algébricas de cada participante, com as fórmulas matemáticas a serem trabalhadas nesse encontro e, com o professor buscando identificar possíveis rastros de aprendizagem do tipo “já-encontrados” e rastros de afetividade do tipo “já-encontrados afetivos” deixados pelos participantes ao longo do processo de aprendizagem.

Por sua vez, no âmbito da zona de confluência entre os mundos Simbólico e Formal, as ações do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático buscam transformar Matemática Prática em Matemática Teórica, formalizar simbolismos e, possivelmente, desenvolver abstração operacional com indícios de abstração estrutural e com vistas a indícios de abstração formal. Nesse cenário, os diálogos com o professor e demais acadêmicos debatem a ideia de que podemos trabalhar algumas fórmulas matemáticas por meio de manipulações algébricas com intenção operacional de construirmos outras fórmulas matemáticas (prova simbólica utilizando regras de Aritmética e da Álgebra).

A Matemática Teórica se faz presente no entrelaçamento do pensamento matemático com o pensamento etnomatemático na zona de confluência entre os Mundos Simbólico e Formal. Nesse contexto, cada participante manipula as fórmulas matemáticas do cálculo do volume do cilindro e da superfície total do cilindro, busca determinar algebricamente as fórmulas matemáticas da superfície esférica, dos volumes do cone e da esfera, conforme as condições de equilíbrio entre esses sólidos, observadas anteriormente.

A dinâmica de movimento conjunto dos pensamentos matemático e etnomatemático pela zona de confluência entre o Mundo Simbólico e o Mundo Formal, busca o provável desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural e abstração formal, ao promover a compreensão de cada participante pelo processo de manipulação simbólica e sendo provocados a revisitarem, em suas mentes, a ideia de soma de Riemann e da definição de limite.

Na transição da zona de confluência entre os Mundos Simbólico e Formal para o Mundo Formal, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático transforma Matemática Teórica em Matemática Formal, formaliza simbolismos e, possivelmente desenvolve abstração operacional com indícios de abstração estrutural e com vistas à abstração formal. Nesse processo, cada participante busca compreender a necessidade de construção de objetos matemáticos com estruturas formais que dão sustentação e aprimoramento ao conhecimento matemático.

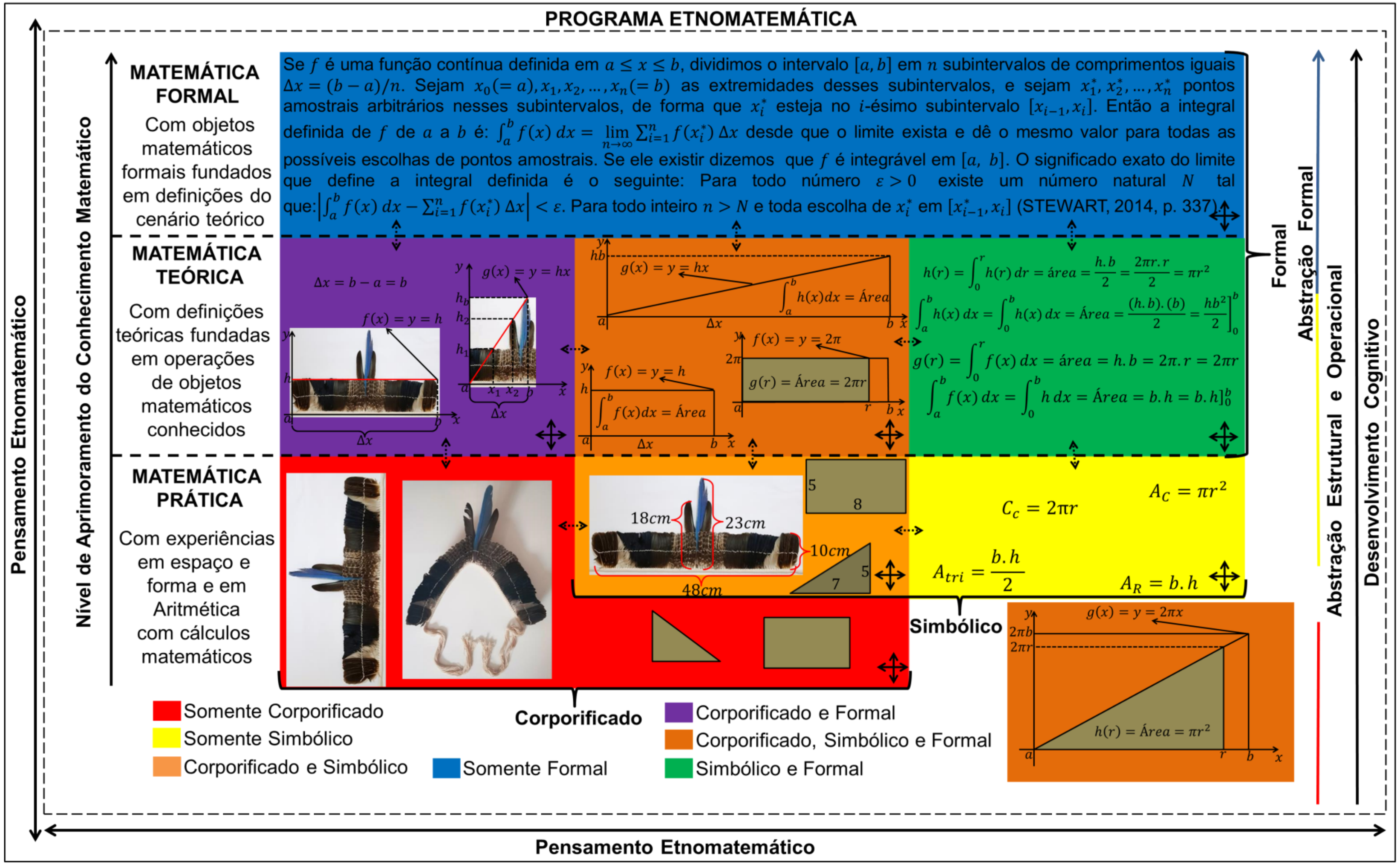
O pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático transita no Mundo Formal por meio da Matemática Formal e, nessa pesquisa, busca conduzir cada participante a reestudar a definição formal de limite. O processo de simbolizar formalismos e o provável desenvolvimento de abstração formal é instigado na ação de compreender a necessidade da construção e utilização de definição de limite, com destaque para o cálculo do limite de uma soma quando esse limite tende ao infinito.

E, no transcorrer desse terceiro processo educacional o professor busca identificar rastros de aprendizagem do tipo “já-encontrados” visando os próximos encontros presenciais, bem como por meio das análises das respostas de questionamentos anteriores *versus* questionamentos posteriores, a esse terceiro encontro, provavelmente, identificar possíveis rastros de afetividade do tipo “já-encontrados afetivos” em cada participante.

8.4. Uma provável jornada às atividades do quarto encontro

Na Figura 79 caracterizamos a dinâmica de movimento do pensamento matemático, no âmbito dos Três Mundos da Matemática, delineada no planejamento das atividades desenvolvidas nesse quarto encontro. Nessa imagem, houve a necessidade de expandirmos do espaço da zona de confluência entre os mundos Corporificado, Simbólico e Formal.

Figura 79 – Uma provável dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático no 4º encontro.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, na perspectiva da Figura 79, seguindo o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática imerso no Programa Etnomatemática, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita estritamente no Mundo Corporificado, em suas idas e vindas, por meio da Matemática Prática nas ações de visualização, observação e manipulação: dos prismas retos de base retangular e triangular; do Cocar utilizado na atividade ao estender ou analisar sua forma de parábola.

Com relação ao movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático pelo Mundo Corporificado, por meio da Matemática Prática, possivelmente, ocorre o desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional no procedimento cognitivo de: compreender que esses prismas retos possuem bases na forma retangular e triangular; que o Cocar pode servir de inspiração para construção de gráficos.

E nessas ações cognitivas dos participantes buscamos identificar rastros de aprendizagem "já-encontrados", bem como rastros de afetividade do tipo "já-encontrados afetivos", ambos deixados pelos estudantes no transcorrer do processo de aprendizagem. Afinal, quais os significados que o cocar indígena carrega consigo e que são interpretados pelos acadêmicos indígenas? O que representa os tamanhos diferentes das penas? Suas cores? Para que, onde, quando e como ele é utilizado pelos indígenas?

Ao transitar do Mundo Corporificado à zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Formal, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, promove o desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional e com vistas a indícios de abstração formal. Essa dinâmica transforma Matemática Prática em Matemática Teórica e formaliza corporificações. Ou seja, cada acadêmico participante busca compreender e criticar a possibilidade de desenhar o gráfico de uma função constante e de uma função polinomial do primeiro grau, a partir do Cocar.

No âmbito da zona de confluência entre o Mundo Corporificado e o Mundo Formal, o movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, por meio do diálogo entre o professor, os acadêmicos e a Matemática Teórica: ao manusear o Cocar, utilizando o seu formato, sua flexibilidade, o tamanho diferenciado de suas penas para moldarem as construções dos gráficos das funções envolvidas na atividade. Nessa dinâmica, possivelmente, o desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional e formal emerge ao formalizar corporificações e, nas ações cognitivas de compreender e identificar o tipo de função matemática a partir do desenho de seu gráfico.

E, novamente, nessas ações cognitivas almejamos identificar rastros de aprendizagem do tipo “já-encontrados”, bem como rastros de afetividade do tipo “já-encontrados afetivos” deixados pelos participantes ao longo do processo de aprendizagem da Matemática. Quais sentidos ou sentimentos a utilização do Cocar, destacando a forma como foi proposta sua utilização, emergiram em cada acadêmico indígena participante? Há outra(s) possibilidade(s)? Utilizando outro(s) artefato(s)?

Por intermédio da Matemática Prática e com o objetivo de simbolizar corporificações ou de corporificar simbolismos, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita na zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico: ao colocar medidas numéricas no Cocar; na ação de medir o comprimento do Cocar; mensurar as quantidades de penas utilizadas na sua construção; na simetria de sua construção; ao medir as alturas das penas; ao executar as medições das dimensões dos prismas retos envolvidos na atividade.

Ainda no cenário da zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, provavelmente, possibilita o desenvolvimento de abstração estrutural e operacional nas reflexões sobre as ideias de que: apesar das medidas relacionadas a cada Cocar não serem, precisamente as mesmas, (por exemplo, as penas menores do Cocar não possuem exatamente a mesma altura), no mundo das ideias matemáticas é possível essa precisão para a construção do gráfico de funções. E, novamente, nesse contexto buscamos identificar rastros de aprendizagem do tipo “já-encontrados”, bem como rastros de afetividade do tipo “já-encontrados afetivos”, ambos deixados pelos participantes no processo de aprendizagem. Se utilizarmos outro Cocar os resultados obtidos serão os mesmos? E os cocares de outras etnias servem como molde? Há outro(s) artefato(s) que pode(m) servir para essa atividade?

A Matemática Prática é a propulsora do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático no âmbito do Mundo Simbólico, nas manipulações simbólicas com as fórmulas matemáticas que utilizamos para o cálculo: da área de um retângulo; da área de um triângulo; do comprimento de uma circunferência qualquer; da área de um círculo qualquer (prova simbólica utilizando regras de Aritmética e da Álgebra). Essas ações, provavelmente, articulam o desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural, ao manipular as fórmulas matemáticas trabalhadas nas atividades do processo de ensino e aprendizagem.

Ao transitar da zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico à zona tripla de confluência entre os Três Mundos da Matemática (Corporificado Simbólico Formal), o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático transforma Matemática Prática em Matemática Teórica, ao formalizar corporificações e simbolismos e, possivelmente, desenvolvendo abstração estrutural e operacional com vistas a indícios de abstração formal. Nesse cenário, os diálogos entre o professor e os acadêmicos indígenas participantes, buscam a construção da ideia de que podemos calcular a área de uma região situada sob uma curva, entre as retas verticais e com e acima do eixo .

Em um primeiro momento da atividade, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita na zona de tripla confluência entre os Três Mundos (Corporificado Simbólico Formal), por meio da Matemática Teórica, seja corporificando simbolismos e formalismos ou simbolizando corporificações e formalismos, em suas idas e vindas: promovendo o cálculo das áreas das regiões situadas sob uma curva entre as retas verticais e com e acima do eixo tanto com a forma retangular, função constante , quanto com a forma triangular, função polinomial do primeiro grau . Ambas considerando as alturas das penas do Cocar utilizado nessa atividade como descrevemos no Capítulo 6.

Ao transitar pela zona tripla de confluência entre os Três Mundos da Matemática, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, possivelmente, desenvolve abstração estrutural e operacional com indícios de abstração formal, ao formalizar corporificações e simbolismos, nas ações envolvendo o cálculo das áreas das regiões citadas e nas discussões sobre o que representa os resultados dessas áreas. Integral definida? Função área?

Então, buscando possíveis respostas a essas questões, o movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita verticalmente da zona de tripla confluência entre os Três Mundos da Matemática ao Mundo Formal, ao transformar Matemática Teórica em Matemática Formal e formalizar corporificações e simbolismos. Nessa dinâmica, possivelmente, ocorre o desenvolvendo abstração operacional com abstração estrutural e com vistas à abstração formal, por meio dos diálogos entre o professor e os participantes para buscar compreender a necessidade de construção de objetos matemáticos com estruturas formais, que dão suporte e aprimoramento ao pensamento matemático.

A dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático transita no Mundo Formal, por meio da Matemática Formal, promovendo discussões entre o professor e demais acadêmicos indígenas sobre a definição de integral definida. Nesse contexto, possivelmente, há o desenvolvimento de abstração formal na ação de compreender a necessidade, a construção e a utilização de definição de integral definida, bem como a sua relação com a definição de função área.

Após estudar e discutir as definições de integral definida e função área e para transformar Matemática Formal em Matemática Teórica ao simbolizar formalismos, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita do Mundo Formal à zona de confluência entre o Mundo Simbólico e o Mundo Formal. Nessa dinâmica, possivelmente, há o desenvolvimento da abstração operacional, com indícios de abstração estrutural com vistas a descrever, simbolicamente, as integrais definidas e funções áreas das funções e

Então, o movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita pela zona de confluência entre o Mundo Simbólico e o Mundo Formal (Simbólico Formal), por meio da Matemática Teórica, buscando descrever e operacionalizar as integrais definidas e funções áreas das funções e como sendo, respectivamente, as integrais definidas e , bem como, respectivamente, as funções áreas e .

Nesse cenário, possivelmente, há o desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural por meio dos diálogos entre o professor e os participantes: na compreensão dos simbolismos oriundos das definições de integral definida e função área das funções trabalhadas na atividade; no entendimento que a integral definida corresponde à área de cada região citada anteriormente, bem como que a função área de uma função constante é uma função polinomial do 1º grau e a função área de uma função polinomial do 1º grau é uma função quadrática.

Posteriormente, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita na zona de tripla confluência entre os Três Mundos (Corporificado Simbólico Formal), por meio da Matemática Teórica, alocando nas áreas das regiões citadas no primeiro momento as suas integrais definidas e funções áreas. E como atividade seguinte, fazendo um elo com as atividades do segundo e terceiro encontros, os acadêmicos indígenas devem ser instigados a desenvolverem o mesmo processo para as funções e .

Nessa segunda atividade, por meio da Matemática Teórica ao simbolizar corporificações e formalismos ou corporificar simbolismos e formalismos, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático transita na zona de tripla confluência entre os Três Mundos: na construção dos gráficos das funções e ; alocando, nas áreas das regiões construídas, as suas respectivas integrais definidas e funções áreas.

No âmbito da zona de confluência entre os Mundos Simbólico e Formal, por intermédio da Matemática Teórica, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático efetua os cálculos das integrais definidas e das funções áreas de cada uma das funções propostas. Nessa dinâmica, possivelmente, realiza o desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural ao compreender os simbolismos oriundos das definições de integral definida e função área das funções trabalhadas na atividade, no entendimento que a integral definida corresponde à área de cada região citada anteriormente.

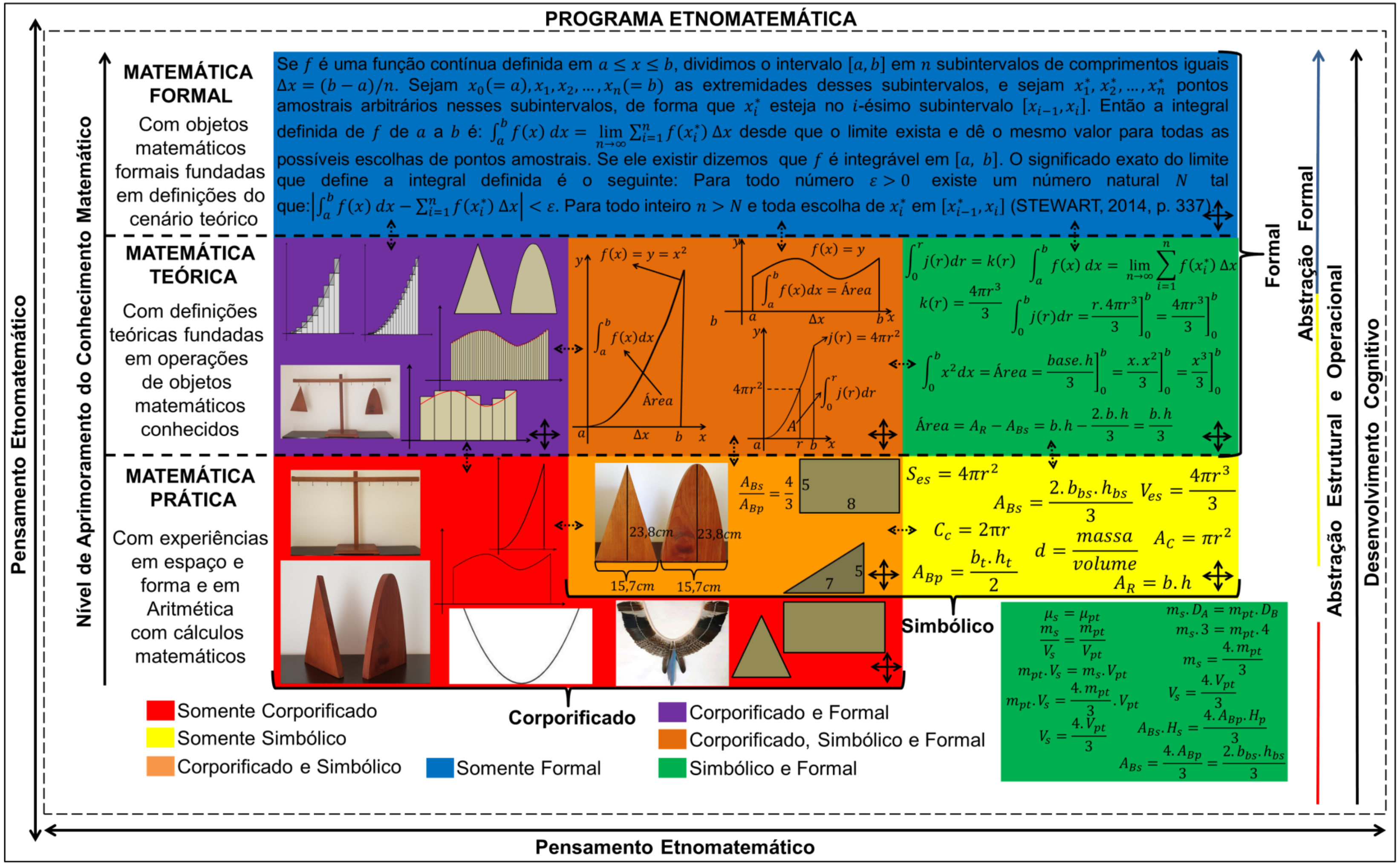
Nesse cenário, a função área em da função corresponde à função a qual podemos utilizar para calcularmos o comprimento de uma circunferência qualquer se considerar como o raio da circunferência. Além disso, a função área em da função corresponde à função a qual podemos utilizar para calcular a área de um círculo qualquer se considerarmos como o raio do círculo.

8.5. Uma provável jornada às atividades do quinto encontro

Nesse quinto encontro, buscamos intensificar a utilização da definição de integral definida e novamente, por meio do dispositivo da balança de Arquimedes, para a construção da fórmula matemática que utilizamos para calcular a área de uma região limitada por uma curva fechada de parábola. O método da Exaustão emerge nos cálculos de áreas de regiões sob curvas, com destaque para as curvas e , que por meio da área da região supracitada, obtemos as suas respectivas funções área. Aqui, os acadêmicos indígenas participantes precisam revisar a definição de integral definida para o desenvolvimento das manipulações algébricas que atuam com os cálculos de integrais definidas.

Na Figura 80 caracterizamos a dinâmica de movimento do pensamento matemático, no âmbito dos Três Mundos da Matemática, delineada no planejamento das atividades desenvolvidas nesse quinto encontro.

Figura 80 – Uma provável dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático no 5º encontro.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, na perspectiva da Figura 80, seguindo o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática imerso no Programa Etnomatemática, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita estritamente no Mundo Corporificado, por meio da Matemática Prática, nas ações de visualização, observação e manipulação: dos prismas retos de base retangular e triangular; do sólido cuja base corresponde a região limitada pela curva fechada de parábola; do Cocar utilizado na atividade analisando sua forma de parábola; da balança de Arquimedes; no desenho de uma curva qualquer e de uma parábola perante o plano cartesiano.

Na dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático pelo Mundo Corporificado, as discussões entre o professor e os participantes são fomentadas para o possível desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional: na compreensão de que os prismas retos possuem bases na forma retangular e triangular, bem como que o sólido utilizado possui uma base com a forma de uma região limitada por uma curva fechada de parábola; que o Cocar pode servir de inspiração para construção de uma parábola; que existem outras curvas estudadas na Matemática além da parábola.

A dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita do Mundo Corporificado a zona de confluência entre o Mundo Corporificado e o Mundo Formal, transformando Matemática Prática em Matemática Teórica e ao formalizar corporificações. Nesse processo, há o desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional e com vistas a indícios de abstração formal com a possibilidade de conceber o gráfico de uma função quadrática a partir do Cocar.

O movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita pela zona de confluência entre o Mundo Corporificado e o Mundo Formal, por meio do diálogo entre o professor, os acadêmicos participantes e a Matemática Teórica: encontrando os pontos de equilíbrio entre o prisma reto de base triangular e o sólido cuja base é formada pela área da região limitada pela curva fechada de parábola, por meio da balança de Arquimedes; dividindo a área da região sob a curva qualquer limitada por duas retas verticais e pelo eixo horizontal do plano cartesiano em retângulos cada vez mais finos; realizando o mesmo processo de divisão para a curva oriunda da parábola.

Ainda na zona de confluência entre o Mundo Corporificado e o Mundo Formal, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, por meio da relação dialógica entre o professor e os participantes busca o possível desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional e formal, ao formalizar corporificações, nas ações cognitivas de compreender: que se aumentamos a quantidade de retângulos que utilizamos para preencher as áreas das regiões citadas menor será a diferença entre a soma dessas áreas retangulares com a área de cada região. Esse procedimento é muito parecido com a divisão do círculo em setores.

Então, novamente, nessas ações cognitivas buscamos identificar rastros de aprendizagem do tipo “já-encontrados”, bem como rastros de afetividade do tipo “já-encontrados afetivos”, ambos deixados pelos participantes ao longo do processo de aprendizagem proposto. Quais sentidos ou sentimentos a utilização do Cocar, destacando a forma como foi proposta sua utilização, emergiram em cada acadêmico indígena participante? Há outra(s) possibilidade(s)? Utilizando outro(s) artefato(s) para a construção da parábola?

A dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita na zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico por meio da Matemática Prática, ao simbolizar corporificações ou corporificar simbolismos: nas alocações das medidas numéricas nos prismas retos de base triangular e retangular, bem como no sólido cuja base tem a forma da região limitada por uma curva fechada de parábola; na verificação, via balança de Arquimedes, da relação proporcional entre o prisma reto de base triangular e do sólido em questão.

No movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático pela zona de confluência entre os Mundos Corporificado e Simbólico, há o possível desenvolvimento de abstração estrutural e operacional por meio das discussões de como podemos calcular a área de uma região limitada por uma curva fechada de parábola. Será que basta procedermos como no cálculo da área de um triângulo? E, novamente, nessas ações cognitivas identificar rastros de aprendizagem do tipo "já-encontrados", bem como rastros de afetividade do tipo "já-encontrados afetivos", ambos deixados pelos participantes no transcorrer do processo de aprendizagem proposto.

O movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita estritamente no Mundo Simbólico, por meio da Matemática Prática, nas manipulações simbólicas com as fórmulas matemáticas que utilizamos para o cálculo: da área de um retângulo; da área de um triângulo; do comprimento de uma circunferência qualquer; da área de um círculo qualquer; da superfície esférica; do volume esférico. Nessa dinâmica dialógica entre o professor e os participantes, buscamos o provável desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural, manipulando as fórmulas matemáticas trabalhadas nas atividades do processo de ensino e aprendizagem.

Continuando, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita da zona de confluência entre os mundos Corporificado e Simbólico à zona tripla de confluência entre os Três Mundos da Matemática, ao transformar Matemática Prática em Matemática Teórica e ao formalizar corporificações e simbolismos. Nesse contexto, há o provável desenvolvimento da abstração estrutural e operacional com vistas a indícios de abstração formal, Nesse caso, por meio das discussões entre o professor e os participantes de que podemos considerar a possibilidade de calcularmos a área de uma região situada sob uma curva entre as retas verticais e com e acima do eixo .

No âmbito da zona de tripla confluência entre os Três Mundos da Matemática, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, por meio do debate entre o professor e os participantes, busca o desenvolvimento de abstração estrutural e operacional com indícios de abstração formal, ao formalizar corporificações e simbolismos, trabalhando o cálculo das áreas das regiões citadas, bem como o que representam os resultados dessas áreas. Integral definida? Função área?

Então, buscando possíveis respostas a essas questões, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita da zona de tripla confluência entre os Três Mundos da Matemática para o Mundo Formal, ao transformar Matemática Teórica em Matemática Formal e ao formalizar corporificações e simbolismos. Nessa dinâmica, possivelmente, há o desenvolvendo abstração operacional com abstração estrutural e com vistas à abstração formal na busca pela compreensão da necessidade de construção de objetos matemáticos com estruturas formais que dão suporte e aprimoramento ao pensamento matemático.

O pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático transita no Mundo Formal, por meio da Matemática Formal, nos estudos das definições de integral definida e de função área. O provável desenvolvimento de abstração formal se faz presente na busca de compreender a necessidade da construção e da utilização da definição de integral definida, bem como a sua relação com a definição de função área.

Após reestudar e rediscutir com o professor e demais acadêmicos participantes as definições de integral definida e função área, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita do Mundo Formal à zona de confluência entre o Mundo Simbólico e o Mundo Formal, ao transformar Matemática Formal em Matemática Teórica e simbolizar formalismos. Nesse cenário, ocorre, possivelmente, o desenvolvimento da abstração operacional, com indícios de abstração estrutural com vistas a descrever simbolicamente: a fórmula matemática para o cálculo da área de uma região limitada por uma curva fechada de parábola; a integral definida e função área de uma curva qualquer e em específico da curva .

Então, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático transita pela zona de confluência entre o Mundo Simbólico e o Mundo Formal, por meio da Matemática Teórica, ao descrever e operacionalizar: a fórmula para o cálculo da área da região limitada por uma curva fechada de parábola como ; a integral definida de uma curva qualquer e, em particular, da curva como sendo, respectivamente, as integrais definidas:

e

Nesse cenário, o pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, possivelmente, realiza o desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural ao buscar compreender: as manipulações simbólicas para obtermos a fórmula matemática da área de uma região limitada por uma curva fechada de parábola, constituídas a partir da relação proporcional entre o prisma reto de base triangular e o sólido com a base na forma da referida região, por meio da balança de Arquimedes; os simbolismos oriundos das definições de integral definida e função área das funções trabalhadas na atividade, entendendo que a integral definida corresponde à área de cada região citada anteriormente; que a função área de uma função quadrática é uma função polinomial do 3º grau.

Então, a dinâmica de movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático, transita na zona de tripla confluência entre os Três Mundos (Corporificado Simbólico Formal), por meio da Matemática Teórica, alocando nas áreas das regiões citadas no primeiro momento as suas integrais definidas e funções áreas. E como atividade seguinte, fazendo o elo com as atividades do quarto encontro, os acadêmicos indígenas são instigados a desenvolverem o mesmo processo para a função .

Nessa segunda atividade, o movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático transita na zona de tripla confluência entre os Três Mundos, por meio da Matemática Teórica: na construção do gráfico da função e de sua função área; ao alocar, nas áreas das regiões construídas, as suas respectivas integrais definidas e funções áreas.

O movimento do pensamento matemático entrelaçado ao pensamento etnomatemático transita na zona de confluência entre os Mundos Simbólico e Formal, por meio da Matemática Teórica: ao efetuar os cálculos da integral definida e da função área da função proposta. Há o possível desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural ao buscar compreender os simbolismos oriundos das definições de integral definida e função área das funções trabalhadas na atividade e, na compreensão de que a integral definida corresponde à área de cada região citada anteriormente. E, nesse caso: que a função área em da função corresponde à função , que podemos utilizar para calcularmos o volume de uma esfera qualquer ao considerar como o raio da esfera.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa qualitativa emergiu das discussões sobre a reestruturação do currículo da LINTER, com relação aos conhecimentos matemáticos abordados no transcorrer do curso, o que culminou com a inclusão de conteúdos de Cálculo para os acadêmicos indígenas que optam pela formação específica na área de Ciências da Natureza e Matemática. Então, como ensinar as definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área utilizando uma abordagem contextualizada e envolvendo aspectos históricos, como destaca seu PPC, para esses acadêmicos indígenas da LINTER?

Para tanto, iniciamos nossas investigações analisando os PPC de cursos de formação inicial de professores indígenas, especificamente com relação àqueles que possibilitam a área de atuação profissional em Matemática. Das leituras e análises desses documentos, bem como nossas visitas ao IFBA – Campus Porto Seguro e escolas indígenas dos Pataxós, Pataxós Hãhãhãe e Tupinambás, além de diálogos com o coordenador, professores e acadêmicos da LINTER, compreendemos a dinâmica, a diversidade e a complexidade que envolve o contexto da Educação Indígena, que engloba a Educação Escolar Indígena e a Educação Superior Indígena. Ou seja, assim atingimos um de nossos objetivos específicos ao apresentarmos um quadro geral sobre a formação de professores indígenas de Matemática no Brasil.

Foi nas investigações desses PPC que identificamos a relação teórica que há entre a formação inicial de professores indígenas de Matemática e a Etnomatemática, que por meio do Programa Etnomatemática, promove e instiga as discussões epistemológicas que emergem dos encontros culturais dos modos de matematizar de cada comunidade indígena dos acadêmicos com o conhecimento matemático presente no currículo das Licenciaturas Interculturais Indígenas ou da Pedagogia Intercultural e, com vistas a Educação Intercultural. Nesse sentido, trouxemos para nossa fundamentação teórica o Programa Etnomatemática.

Por outro lado, com o intuito de construirmos um processo de ensino e aprendizagem para cada objeto matemático em estudo, direcionamos nossos estudos à investigação do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, que segundo pesquisas brasileiras (teses e dissertações) apontam que estudos envolvendo esse quadro teórico são essenciais para o planejamento de atividades e para análises posteriores a essas atividades em processos educacionais envolvendo a construção de conhecimento matemático. Ou seja, o referido quadro teórico colabora na construção de cada processo de ensino e aprendizagem, funcionando como um mapa que fornece pistas ao professor sobre o possível desenvolvimento do conhecimento matemático envolvido em cada processo no cognitivo de cada participante.

Ampliando nosso escopo teórico e com vistas a um de nossos objetivos específicos, investigamos, no âmbito da História da Matemática, os fatos e personagens que contribuíram para a construção das definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área. Nessa trajetória histórica, percebemos a importância do método da Exaustão para, inicialmente, desenvolver o problema da quadratura do círculo que posteriormente passou a incorporar outras curvas, entre elas a parábola. Constatamos que a ação pedagógica de utilizar a História da Matemática, na construção e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem da Matemática, está presente tanto nas pesquisas envolvendo o Programa Etnomatemática, quanto nas investigações com o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática.

De fato, as ideias desenvolvidas por Eudoxo, Euclides, Arquimedes e Riemann nos conduziram no planejamento das atividades de cada processo de ensino e aprendizagem proposto e apresentado no Capítulo 7. A construção dos prismas e sólidos geométricos em madeira, assim como o dispositivo pedagógico da balança de Arquimedes e o contexto das matemáticas indígenas representadas pelos artefatos utilizados nos diálogos com os objetos matemáticos de cada processo, compreendemos como ações essenciais para o possível sucesso, ou para que cada processo de ensino e aprendizagem proposto seja, provavelmente, bem sucedido.

Então, perante nosso objetivo geral de pesquisa, qual seja, caracterizar a dinâmica de movimento do pensamento matemático entre os Três Mundos da Matemática de David Tall no desenvolvimento de propormos um processo de ensino e aprendizagem para cada uma das definições de limite, soma de Riemann, integral definida e função área, sob a perspectiva da Etnomatemática e para acadêmicos indígenas LINTER da área de Ciências da Natureza e Matemática, foi que realizamos a reunião dos seis contextos de leituras: os PPC das Licenciaturas Interculturais Indígenas e Educação Indígena; História da Matemática; Etnomatemática e o Programa Etnomatemática; as pesquisas brasileiras envolvendo a Etnomatemática na formação inicial de professores indígenas; o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática; as pesquisas brasileiras envolvendo o referido quadro teórico.

Nesse sentido, retornamos as leituras e por meio dos textos e trabalhos discutidos no Capítulo 5 propusemos a inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática. Esse foi um de nossos objetivos específicos. Com essa ação, as discussões epistemológicas que emergem do Programa Etnomatemática ganham ainda mais consistência, profundidade, densidade. A dinâmica de movimento do até então pensamento matemático, a partir dessa inserção, passa a ter a possibilidade de acontecer de forma entrelaçada ao pensamento etnomatemático.

Assim, como já salientamos, as ações do pensamento etnomatemático no desenvolvimento de cada processo de ensino e aprendizagem da Matemática, construído e analisado por meio do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, se entrelaçam à dinâmica de movimento do pensamento matemático entre os mundos, tanto no transcorrer de atividades matemáticas propostas, quanto em suas posteriores análises considerando: elementos culturais dos participantes; o que os estudantes possivelmente já sabem; os diferentes e genuínos modos de contar, inferir, medir, classificar, construir, entre outros nas matemáticas indígenas. A ação de entrelaçar dos pensamentos destoa da ideia de serem paralelos, pois no desenvolvimento de cada processo de ensino e aprendizagem proposto os dois pensamentos atuam inerentes um ao outro.

Por um lado, com relação ao quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, o pensamento matemático se desenvolve pelas ações nos objetos matemáticos por intermédio das matemáticas prática, teórica e formal e, em possíveis níveis de abstração: estrutural, operacional e formal. Já pelo lado do Programa Etnomatemática, o pensamento etnomatemático guia o estudante, em suas ações nos objetos matemáticos envolvidos e por esses níveis de abstração, possibilitando diferentes formas de pensar, instigando a socialização no pensar matemáticas em suas jornadas cognitivas pelos Três Mundos da Matemática. Nessa pesquisa destacamos as dimensões: política, epistemológica, cognitiva, histórica e afetiva. Compreendemos que na formação de professores indígenas de Matemática essas discussões são fundamentais.

Salientamos novamente que as dinâmicas de movimentos do pensamento matemático entrelaçado com o pensamento etnomatemático não são estanques, definidas, não há ora movimento horizontal e ora movimento vertical. As dinâmicas de movimento dependem de cada participante, das atividades propostas, da motivação por parte de cada participante e do professor, dos rastros de aprendizagem do tipo "já-encontrados" e dos rastros de afetividade do tipo "já-encontrados afetivos", ambos deixados pelos participantes no transcorrer do processo de aprendizagem da Matemática.

Nessa perspectiva, as dinâmicas de movimentos que descrevemos são propostas de possíveis trajetórias cognitivas pelo quadro teórico dos Três Mundos da Matemática imerso no Programa Etnomatemática. Elas não são definitivas, afinal analisar a construção de conhecimento matemático por cada acadêmico participante, por mais informações que coletamos, por mais observações que façamos, poderá haver sempre algo mais a ser observado, investigado ou questionado. O quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, assim como apontado em todas as pesquisas que analisamos, brevemente apresentadas no Capítulo 4 se mostra como um mapa que colabora no planejamento, na execução e nas análises das atividades propostas em processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Por outro lado, essa investigação busca colaborar com futuras pesquisas em Educação Matemática:

- Ao trazermos uma síntese do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Figura 21) construída após leituras, análises e reflexões com os textos de David Tall, bem como leituras, análises e reflexões com os trabalhos (teses e dissertações) publicados no Brasil envolvendo o referido quadro teórico. E, por meio dele a dinâmica de movimento do pensamento matemático que guia o estudante no processo de desenvolvimento do conhecimento matemático que se mostra todo coeso, coerente, conexo, complexo, diverso, dinâmico.

- Ao promovermos discussões sobre o Programa Etnomatemática que desponta como um programa de pesquisa em Educação Matemática, englobando as matemáticas e suas possíveis relações, construindo elos entre os saberes tradicionais e o conhecimento matemático, se mostrando mais do que o estudo dos modos de matematizar das comunidades socialmente identificadas. Nesse cenário, o pensamento etnomatemático guia os professores pela diversidade cultural de seus estudantes, conduzindo a reflexões de ir além do pensar Matemática, para a possibilidade de pensar matemáticas e suas relações com o conhecimento matemático presente nos currículos, seja da Educação Básica ou do Ensino Superior.
- Ao possibilitarmos a inserção do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática no Programa Etnomatemática, na qual ressaltamos as dimensões afetiva e cognitiva do segundo com a relação entre a afetividade e a cognição no processo de aprendizagem da Matemática no primeiro. Com essa inserção (Figura 22) abrem-se novas possibilidades de pesquisas do referido quadro teórico por pesquisadores em Etnomatemática e vice-versa. Nesse contexto, o pensamento matemático se entrelaça ao pensamento etnomatemático em dinâmicas de movimentos pelo desenvolvimento do conhecimento matemático. As matemáticas são consideradas e dialogadas em cada processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Essa pesquisa é direcionada para acadêmicos indígenas da LINTER da área de Ciências da Natureza e Matemática. Contudo, salientamos que o processo educacional descrito pode ser utilizado em qualquer Licenciatura Intercultural Indígena envolvendo os objetos matemáticos aqui abordados ou outros. O dispositivo da balança de Arquimedes despontou como excelente material didático para o ensino de superfícies e volumes de sólidos geométricos. Recomendamos ser utilizado na Educação Básica, inclusive em trabalhos conjuntos com professores de Física e para acadêmicos da Licenciatura em Matemática.

Com relação à formação de professores indígenas de Matemática, entendemos que por mais que um professor ou pesquisador não indígena estude Etnomatemática e a Matemática Indígena de uma determinada etnia, ele não é indígena. Se esse professor não indígena for falar de cultura indígena para indígena, ou se o professor de Matemática não indígena, for falar de Matemática Indígena de certa comunidade para essa mesma comunidade, soa como estranho para os integrantes dessa comunidade. Então, para nós é primordial que se formem professores indígenas, para que eles mesmos falem ao atuarem em suas escolas indígenas, pois nesse caso tem representatividade. Afinal é o indígena falando da Matemática Indígena, entrelaçada com a Matemática não indígena, nas aulas deles para os estudantes indígenas no âmbito da Educação Escolar Indígena.

Todavia pode haver o questionamento de que os professores indígenas são formados por professores não indígenas. Os trabalhos de pesquisa em Etnomatemática, envolvendo a formação inicial de professores indígenas, apontam que os indígenas querem compreender a Matemática, eles sentem essa necessidade. De fato, os acadêmicos indígenas precisam compreender Matemática, e para tanto eles têm aulas com professores não indígenas de Matemática, porque serão eles os responsáveis por ensinar os estudantes indígenas nas suas escolas nas aldeias (Educação Escolar Indígena). As formações desses estudantes indígenas como ressaltaram na dinâmica da Educação Indígena, é fundamental para que eles tenham oportunidades e condições de competir com estudantes não indígenas por vagas no Ensino Superior não indígena (Licenciaturas e Bacharelados), por exemplo, ou em concursos públicos, disputar vagas no mundo do trabalho.

Podemos supor que um determinado estudante indígena queira ser médico, ou advogado, ou engenheiro, ou outra formação superior. Então, por meio da atuação de professores indígenas esse estudante tem a oportunidade de se formar, no âmbito da Educação Escolar Indígena, que corresponde a Educação Básica não indígena. Com aulas das variadas áreas dos conhecimentos não indígenas, dialogadas com elementos de sua cultura e no seu ambiente de comunidade. Depois ele poderá concorrer a uma vaga em seu curso desejado participando de processos seletivos e, caso seja aprovado, iniciará seu curso com o conhecimento básico necessário. Portanto, a formação desses professores indígenas é de suma importância para essas comunidades.

O nosso papel enquanto professor formador de professores indígenas da área de Ciências da Natureza e Matemática é instigar cada um desses acadêmicos, a enxergarem a sua Matemática Indígena e aprimorar o que estamos propondo, de como ela pode ser entrelaçada no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Discutimos Etnomatemática com os acadêmicos indígenas para provocá-los, ou seja, para que eles mesmos olhem para a sua cultura e se permitam enxergar coisas que nós, enquanto não indígenas, não vemos ou não percebemos, ou ainda nos equivocamos em nossas contextualizações. E que eles mesmos façam esses entrelaçamentos com os conteúdos de Matemática presentes no currículo escolar.

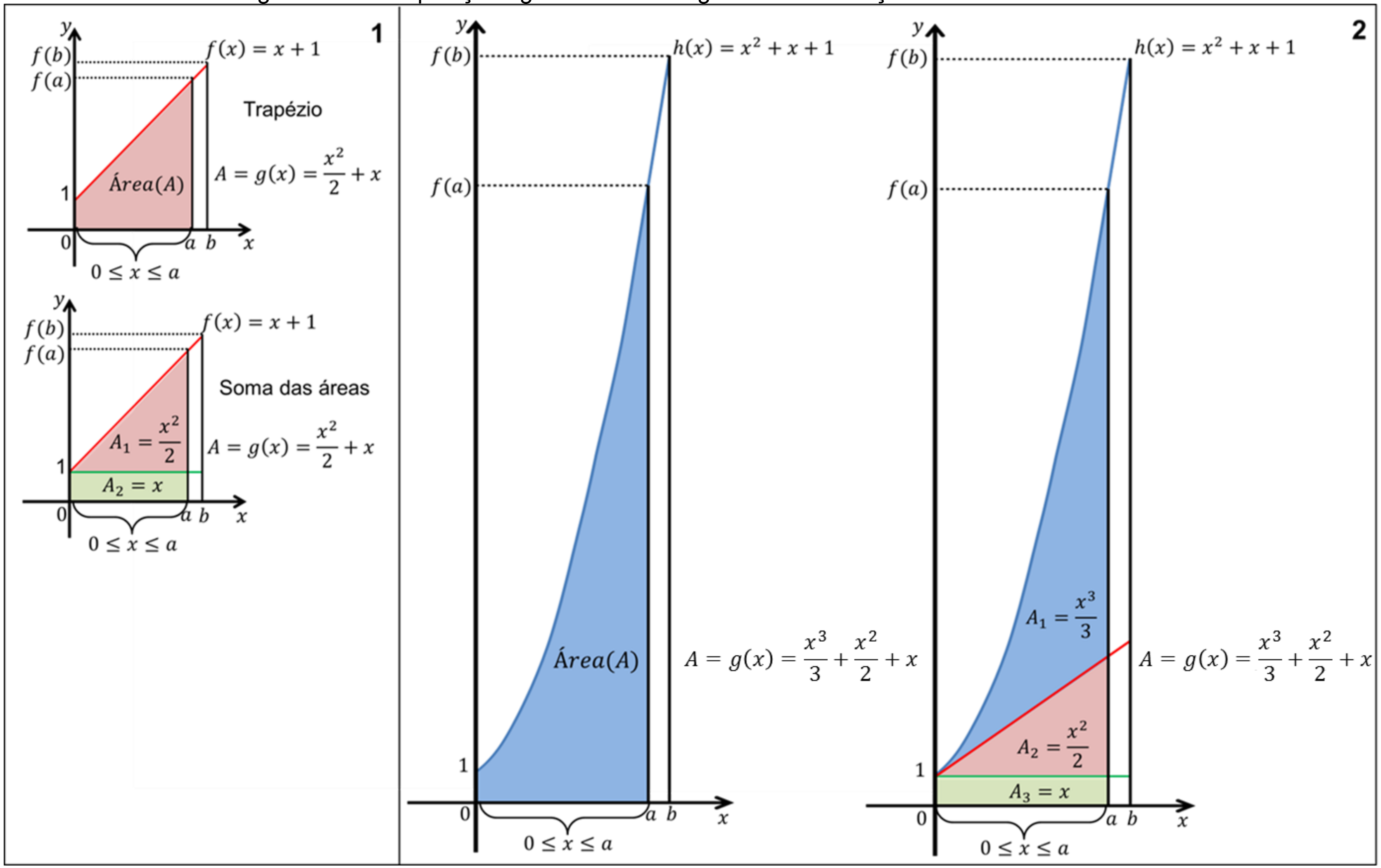
A ideia é que eles reflitam, que vão além do que estamos pensando e propondo. Se o professor de Matemática da LINTER, que não é indígena, está trazendo esses possíveis encontros culturais, como eu, que sou indígena, posso aprimorar esses entrelaçamentos? Compreendemos que o professor indígena pensando nessas possibilidades irá muito além do que está sendo proposto nas aulas de Matemática da LINTER e essas reflexões, irão repercutir nas suas aulas de Matemática no âmbito da Educação Escolar Indígena por meio das escolas indígenas envolvidas.

Para além dessa pesquisa, sugerimos o seu aprimoramento a partir da definição de função área, para se chegar à definição de integral definida. Por exemplo, como calculamos a função área da curva ou ainda da curva , sendo limitadas por um intervalo e acima do eixo das abscissas. Podemos partir da construção dos gráficos e calcularmos a área da região sob cada curva, a reta vertical e o eixo horizontal das abscissas. Assim como apontado pelas pesquisas brasileiras (dissertações e teses) envolvendo o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, conforme os quadros 13 e 14 do Capítulo 4, o *software* GeoGebra auxilia bastante nas construções desses gráficos além do manuseio com as expressões algébricas envolvidas.

Aqui falamos de aprimoramento, pois as funções matemáticas envolvidas nessa tese não são descritas em seu modo completo. Diferentemente, para apresentar a nossa sugestão é necessário dialogar com os estudantes envolvidos que podemos calcular separadamente, para cada monômio da função a sua referida área e posteriormente somar ou promover a união dos resultados. Assim, para fazemos separadamente e , da mesma forma, para a curva repartimos o processo em três partes , e . Afinal estamos calculando áreas, e podemos promover os cálculos separadamente para depois efetuarmos a junção dos resultados em uma única expressão algébrica de função área. E isso pode ser geometricamente como apresentamos na Figura 81.

Assim, na imagem 1 da Figura 81 apresentamos a área total da região delimitada pela função área entre a curva , que aqui pode ser calculada como a área de uma região em forma de trapézio, ou seja, por cada monômio de . Na imagem 2, repetimos o procedimento geométrico apresentando a área total delimitada pela função área da curva , bem como sua construção geométrica se consideramos a área da referida função área como uma composição ou soma das áreas das regiões delimitadas por cada monômio da curva

Figura 81 – Composições geométricas e algébricas das funções áreas das curvas e .



Fonte: Elaborada pelos autores.

Compreendemos ser interessante dialogar com os acadêmicos que a composição da área total calculada algebricamente por uma função área, pode ser apresentada geometricamente. Por exemplo, é visível na imagem 2 da Figura 81, que conforme o valor de for aumentando as áreas das regiões com cores diferentes crescem gradativamente de acordo com o seu monômio. A região verde mantem um aumento constante de 1 para 1, ou seja quando o valor de cresce uma unidade a área da região em verde acompanha esses mesmo crescimento. Já a área da região em rosa não possui um aumento linear como a área da região em verde, ela começa a crescer de forma lenta, mas conforme o valor de vai aumentando essa área da região em rosa vai crescendo mais rapidamente. Já na área da região em azul o processo de crescimento é mais acelerado ainda. Essas são discussões para próximas pesquisas dentro e fora da Educação Indígena.

Essas ideias podem evoluir para o estudo do Cálculo Integral e Diferencial de funções, tanto nas Licenciaturas Interculturais Indígenas quanto em outros cursos de graduação não indígenas. Com relação ao Cálculo Diferencial sugerimos sua introdução pelo estudo da tangente e taxas de variação, sobretudo envolvendo conteúdos de Física como a Movimento Uniforme, velocidade média, Movimento Uniformemente Variado, Lançamentos, Equação de Torricelli, entre outros. Afinal a derivada da função do espaço para um Movimento Uniformemente Variado nos fornece a sua função da velocidade. Não só, mas no caso dos acadêmicos indígenas da LINTER, que possuem formação na área de Ciências da Natureza e Matemática trabalhar conteúdos de Física é fundamental.

Por fim, recomendamos fortemente discussões envolvendo o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura Intercultural Indígena. Afinal, como já salientamos, ele se mostra com uma gama de possibilidades para discussões, construções, e análises de processos de ensino e aprendizagem da Matemática. É um quadro completo, que apresenta o desenvolvimento do conhecimento matemático em longo prazo, indo do pensamento matemático elementar ao pensamento matemático avançado. Por seu intermédio, podemos, possivelmente, interpretar a construção de conhecimento matemático dos estudantes envolvidos em cada processo educacional. E quando imerso no Programa Etnomatemática, expande as possibilidades de investigações futuras em Educação Matemática. Assim, entendemos que estamos apresentando somente uma ponta, nessa pesquisa, de tudo que ainda pode vir à tona em futuras pesquisas. Então, que comecem os debates, as pesquisas, as reflexões, as críticas, entre outras ações educacionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M. V.. **Um panorama de artigos sobre a aprendizagem do cálculo diferencial e integral na perspectiva de David Tall.** 2013. 154 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

ALMEIDA, M. V.. **Material para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral:** referências de Tall, Gueudt e Trouche. 2017. 261 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

AMORIM, G. M.. **A Didática da Matemática na formação do professor Indígena:** possibilidades de relação com a Etnomatemática. 2009. 148 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2009.

ANGELINI, N. M. **Funções:** um estudo baseado nos Três Mundos da Matemática. 2010. 219 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

ARAÚJO, M. D. **"Demarcando Território":** Tensionamentos nas Pesquisas de Autoria Indígena no Contexto da Formação Intercultural para Educadores Indígenas (FIEI). 2019. 165 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.

ARROYO, M. G.. **Currículo, território em disputa.** Petrópolis: Vozes, 2013.

ÁVILA, G. S. S.. **Análise Matemática para licenciatura.** 3ª ed.. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

ÁVILA, G. S. S.. Arquimedes, a esfera e o cilindro**. RPM.** São Paulo: USP, 2009, p. 1-8. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf Acesso em Maio de 2019.

BADARÓ, J. N. **Significados do símbolo de igualdade numa jornada por Três Mundos da Matemática**. 2010. 122 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

BARDIN, E. **La révolution mathématique du XVIIᵉ siècle.** Ellipses, 2006.

BAUMGART, J. K.. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula:** Álgebra. São Paulo: Atual, 1997.

BELLO, S. E. L.. **Etnomatemática:** relações e tensões entre as distintas formas de explicar e conhece. 2000. 320 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

BERNAL, J. I. O.. **Indígenas, Cosmovisão e Ensino Superior:** [algumas] tensões. 2018. 121 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2018.

BERNARDI, L. T. M. S.. **Formação continuada em Matemática do professor indígena Kaingang:** enfrentamentos na busca de um projeto educativo. 2011. 266 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V.; LEIVAS, J. C. P.. Aprendizagem de sequências numéricas: pesquisa sobre dificuldades de Licenciandos em Matemática. **Zetetiké.** Campinas, v. 24, set./dez. 2016, p. 361-377.

BITTAR, M.; CHAACHOUA, H.; FREITAS, J. L. M.. Aplusix: um software para o ensino de álgebra elementar. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 8, 2004, Recife. **Anais** [...]. Recife, 2004.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K.. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BONDARCZUK, V. S.. **Percursos e histórias sobre a formação de professores na Licenciatura Intercultural Indígena "Povos do Pantanal" na UFMS**. 2018. 152 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

BRASIL**. Projeto Pedagógico de Curso:** Licenciatura Intercultural Indígena. Instituto Federal da Bahia – IFBA. Porto Seguro, BA: 2014.

BRASIL**. Projeto Pedagógico de Curso:** Licenciatura Intercultural Indígena. Instituto Federal da Bahia – IFBA. Porto Seguro, BA: 2016. Disponível em: https://portal.ifba.edu.br/portoseguro/documentos/outros-documentos/ppc-linter-2016.pdf Acesso em Abril de 2020.

BRITO, R. P. S.. **Apropriação de práticas de numeramento em um contexto de formação de educadores indígenas**. 2012. 269 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

BUNT, L. N. H.; JONES, F. S.; BEDIENT, J. D.. **The Historical Roots of Elementary Mathematics.** New York: Dover Publications, 1988.

CANDAU, V. M.. Sociedade multicultural e educação: *tensões e desafios.* In: CANDAU, V. M.. (Org.). **Didática crítica intercultural:** *aproximações.* Petrópolis: Vozes, 2012, p. 19-54.

CARMO, P. F.. **Pensamento Matemático Avançado – como essa noção repercute em dissertações e teses brasileiras?** 2018. 128 f. Tese (Programa de

Pós-Graduação em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

CARVALHO, S. P.. A área e o perímetro de um círculo. *In:* COLÓQUIO DA REGIÃO SUDESTE, 1, 2011, Belo Horizonte. **Anais** [...]. Belo Horizonte, 2011.

CICARINI, A. M. O. T.. **Geometria plana e o grafismo indígena:** o estudo de suas relações no contexto histórico do grupo Tukano de alunos da Licenciatura Intercultural dos Povos Indígenas do Alto Rio Negro. 2015. 198 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

CLARETO, S. M.. Conhecimento, inventividade e experiências: Potências do pensamento etnomatemático. In: FANTINATO, Maria Cecília de Castelo Branco. (Org.). **Etnomatemática:** Novos desafios teóricos e pedagógicos. Niterói: Editora da UFF, 2009, p. 125-134.

CORRÊA, R. A.. **A educação matemática na formação de professores indígenas: os professores Ticuna do Alto Solimões.** 2001. 427 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

COSTA, L. de F. M.. **A Etnomatemática na educação do campo, em contextos indígena e ribeirinho, seus processos cognitivos e implicações à formação de professores.** 2012. 122 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ciências na Amazônia) – Universidade Estadual do Amazonas, Manaus, 2012.

COSTA, F. V. F.. **Revitalização e ensino de língua indígena.** Curitiba: Editora Prismas, 2017.

CUNHA, A. C.. **Contribuição da Etnomatemática para a manutenção e dinamização da cultura Guarani e Kaiowá na formação inicial de professores indígenas.** 2016. 142 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

DALL'AGNOL, L.. **Um estado da arte das pesquisas acadêmicas brasileira sobre etnomatemática e formação de professores de matemática (de 2006 a 2016).** 2019. 245 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

D'AMBROSIO, U.. **Da Realidade à Ação:** reflexões sobre Educação (e) Matemática. 5ª ed.. Campinas: Summus, 1986.

D'AMBROSIO, U.. **Etnomatemática:** Raízes Socioculturais da Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer. Campinas: 1987.

D'AMBROSIO, U.. **Etnomatemática**. 4ª ed.. São Paulo: Ática, 1998.

D'AMBROSIO, U.. História da Matemática no Brasil: Uma Visão Panorâmica Até 1950. **Saber y Tiempo,** v. 2, n. 8, Julio-Deciembre, p. 7-37, 1999.

D'AMBROSIO, U.. **Uma História Concisa da Matemática no Brasil**. Petrópolis: Vozes, 2008.

D'AMBROSIO, U.. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 19ª ed.. Campinas: Papirus, 2010.

D'AMBROSIO, U.. **Transdisciplinaridade.** 3ª ed.. São Paulo: Palas Athena, 2012.

D'AMBROSIO, U.. Prefácio. In: BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** 5º ed. São Paulo: Autêntica, 2013a, p. 11-22.

D'AMBROSIO, U.. **Vida de Cientista:** Ubiratan D'Ambrosio. Canal da UNIVESP no YouTube, 2013b. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=A4WRwftHXeo Acesso Maio de 2020.

D'AMBROSIO, U.. **Educação para uma sociedade em transição**. 3ªed.. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

D'AMBROSIO, U.; ROSA,N.. Um diálogo com Ubiratan D'Ambrosio: uma conversa brasileira sobre etnomatemática. In: BANDEIRA, F. A.; GONÇALVES, P. G. F.. (Orgs.). **Etnomatemáticas pelo Brasil:** aspectos teóricos, ticas de matema e práticas escolares. Curitiba: CRV, 2016.

D'AMBROSIO, U.. Como foi gerado o nome etnomatemática ou alustapasivistykselitys. In: FANTINATO, M. C.; FREITAS, A. V.. (Orgs.). **Etnomatemática:** concepções, dinâmicas e desafios. Jundiaí: Paco, p. 21-30, 2018.

D'AMBROSIO, U.. **Etnomatemática:** Elo entre as tradições e a modernidade. 6ª ed.. Belo Horizonte: Autêntica, 2020a.

D'AMBROSIO, U.. **Etnomatemática.** Canal do History of Science no YouTube, 2020b. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=kUCNDK7DeKs Acesso em Junho de 2020.

D'AMORE, B.. **Matemática, estupefação e poesia.** São Paulo: Livraria da Física, 2011.

DELFINO, J. A.. **Uma análise sobre a imagem de conceito de integral de alunos de engenharia na perspectiva dos Três Mundos da Matemática**. 2019. 194 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2019.

DIAS, R. R.. **Aspectos cognitivos e conceituais mobilizadores na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia**. Tese (Programa de

Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

DOMINGUES, K. C. M.. **Interpretações do papel, valor e significado da formação do professor indígena do Estado de São Paulo**. 2006. 250 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

DOMITE, M. do C. S.. Perspectivas e desafios da formação do professor indígena: O formador externo à cultura do centro das atenções. In: FANTINATO, M. C. de C. B. (Org.). **Etnomatemática:** Novos desafios teóricos e pedagógicos. Niterói: Editora da UFF, p. 181-192, 2009.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. Rio Claro: Editora da UNESP, 2009.

FANTINATO, M. C.. Educação Matemática de jovens e adultos e diversidade cultural: contribuições da pesquisa em etnomatemática. In: MOREIRA, A. F.; CANDAU, V. M. (Orgs.). **Currículos, disciplinas escolas e culturas.** Petrópolis: Vozes, p. 77-111, 2014.

FELIPE, P.. **A proposta curricular do Estado de São Paulo e o software GeoGebra:** uma análise de atividades sobre funções exponenciais e logarítmica à luz dos Três Mundos da Matemática. 2013. 240 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013.

FERREIRA NETO, A.. **Ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Escolar Indígena *Paiter Suruí.*** 2018. 195 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, 2018.

FERNAMDES, C. G.. **Ângulos e paralelismo nos livros didáticos à luz dos Três Mundos da Matemática**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

FISCHBEIN, E.. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 24, n. 2, 1993, p. 139-162. Disponível em: http://web.math.unifi.it/users/dolcetti/Fischbein.pdf Acesso em Agosto de 2020.

FONSECA, V.. **Cognição, Neuropsicologia e Aprendizagem:** abordagem neuropsicológica e psicopedagógica. Petrópolis: Vozes, 2009.

FONSECA, J. A.; LEIVAS, J. C. P.. Triângulos: uma experiência utilizando a teoria de Van Hiele. **e-Mosaicos.** v. 7, n. 14, Abril 2018, p. 137-154.

FREIRE, P. C.. **Uma jornada por diferentes Mundos da Matemática investigando os números racionais na forma fracionária**. 2011. 194 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

FREIRE, P. C.. **Uma jornada dos números naturais aos racionais com uma aluna com deficiência visual**. 2017. 204 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

FLORES, J. B.. **Monitoria de Cálculo e processo de aprendizagem: perspectivas à luz da Sociointeratividade e da teoria dos Três Mundos da Matemática**. 2018. 277 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

FLÔRES, M. V.. **Construção dos números racionais na licenciatura:** um estudo desenvolvido à luz dos Três Mundos da Matemática. 2020. 181 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2020.

FONSECA, D. S. S. M.. **Convergências de sequências e séries numéricas no Cálculo:** um trabalho visando a corporificação de conceitos. 2012. 210 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

GÅRDING, L. J.. **Encontro com a Matemática.** Brasília: Editora da UnB, 1981.

GERDES, P.. **Geometria dos traçados Bora na Amazônia Peruana.** São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GONÇALVES, J. S.. **Relações entre as funções inversa e composta:** uma exploração dos conceitos com o auxílio do software GeoGebra. 2017. 466 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

IMAFUKU, R. S.. **O uso dos softwares SimCalc e GeoGebra para o enriquecimento da imagem de conceito de derivada**. 2018. 437 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2018.

JESUS, C. L.. **A etnomatemática das práticas cotidianas no contexto de formação de profissionais indígenas no Xingu.** 2006. 123 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

KATZ, M.; TALL, D. O.. The tension between intuitive infinitesimals and formal analysis. In: Bharath Sriraman, (Ed.), *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education, (The Montana Mathematics Enthusiast Monographs in Mathematics Education 12),* 2012, p. 1-18. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2012b-katz-luzin-infinitesimal.pdf Acesso em Junho de 2019.

KATZ, V. J.. **A History of Mathematics.** 3ª ed.. Edinburgh: Pearson, 2014.

KNIJNIK, G.; WANDERER, F.; GIONGO, I. M.; DUARTE, C. G.. **Etnomatemática em movimento.** Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

KOCH, R. M.. **Uma introdução ao estudo das equações quadráticas à luz dos Três Mundos da Matemática**. 2010. 156 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

KUHN, T. S.. **A Estrutura das Revoluções Científicas.** 13ª ed.. São Paulo: Perspectiva, 2017.

LAKATOS, I.. **História da Ciência e Suas Reconstruções Racionais:** e outros ensaios. Lisboa, Portugal: Edições 70, 1978.

LEME, H. A. S.. **Formação superior de professores indígenas de Matemática em Mato Grosso do Sul:** acesso, permanência e desistência. 2010. 185 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

LEME, J. C. M.. **Aprendizagem da Derivada:** uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento. 2016. 117 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

LIMA, A. S.. **Licenciatura Intercultural Indígena da UEPA:** saberes matemáticos e prática pedagógica. 2017. 146 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

LIMA, R. N.. **Equações Algébricas no Ensino Médio:** uma jornada por diferentes Mundos da Matemática. 2007. 357 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J.. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

MAÇÃO, D. P.. **Uma proposta de ensino para o conceito de derivada**. 2014. 166 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

MAGNAGHI, C. P.; ASSIS, A. K. T.. ***O Método* de Arquimedes:** análise e tradução comentada. Montreal: Apeiron, 2019. Disponível em: https://www.ifi.unicamp.br/~assis/O-Metodo-de-Arquimedes.pdf Acesso em Janeiro de 2020.

MARCILINO, O. T.. **Educação escolar Tupinikim e Guarani:** experiências de interculturalidade em aldeias de Aracruz, no Estado do Espírito Santo. 2014. 244 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade Federal do Espirito Santo, Vitória, 2014.

MARCONI, M. A.; PRESOTTO, Z. M. N.. **Antropologia:** Uma Introdução. 6ª ed. São Paulo: 2007.

MARTELOZO, D. P. S.; SAVIOLI, A. M. P. D.; PASSOS, M. M.. Caracterizações do pensamento algébrico manifestadas por estudantes em uma tarefa da Early Álgebra. **R. B. E. C. T.**, v. 8, n. 3, maio/ago. 2015, p. 104-135.

MARTELOZO, D. P. S.. **Interações entre cognição e afetividade na aprendizagem da Matemática**. 2019. 137 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

MATTOS, J. R. L.; FERREIRA NETO, A.. **Etnomatemática e educação escolar indígena Paiter Suruí.** São Paulo: Livraria da Física, 2019.

MATTOS, J. R. L.; MATTOS, S. M. N.. Etnomatematics in the Brazilian Indigenous Context. In: ROSA, N.; OLIVEIRA, C. C.. (Editors). **Etnomatematics in Action:** Mathematical Pratics in Brazilian Indigenous, Urban and Afro Communities. Switzerland: Springer, p. 71-90, 2020.

MATTOS, S. M. N.. **O sentido da Matemática e a Matemática do Sentido:** aproximações com o Programa Etnomatemática. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

MELO, E. A. P.. **Sistema Xerente de Educação Matemática:** negociações entre práticas socioculturais e comunidades de prática. 2016. 211 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2016.

MENDES, J. R.. **Ler, escrever e contar:** práticas de numeramento-letramento dos Kaiabi no contexto de formação de professores Índios do Parque Indígena do Xingu. 2001. 254 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

MOISE, E. E.; DOWNS, F. L.. **Geometria Moderna.** São Paulo: Editora Edgard, 1971.

MONTEIRO, A.. A Etnomatemática em cenários de escolarização: alguns elementos de reflexão. In: KNIJNIK, G.; WANDERER, F.; OLIVEIRA, C. J. **Etnomatemática:** currículo e formação de professores. Santa Cruz do Sul: EDUNISC, 2010, p. 432-446.

MONTEIRO, H. S. R.. **Magistério Indígena:** contribuições da etnomatemática para a formação dos professores indígenas do Estado do Tocantins. 2011. 133 f.

Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2011.

MONTEIRO, H. S. R.. **O ensino de Matemática na Educação Escolar Indígena:** (Im)Possibilidades de Tradução. 2016. 173 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.

OLIVEIRA, J. S. B.. **Etnomatemática e práticas pedagógicas:** saberes matemáticos escolares e tradicionais na educação escolar indígena Karipuna. 2018. 196 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

OLIVEIRA, M. A. M.. **Práticas vivenciadas na constituição de um curso de Licenciatura Indígena em Matemática para as comunidades indígenas Guarani e Kaiowá de Mato Grosso do Sul**. 2009. 133 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2009.

OLIVEIRA, M. A. M.. Aproximações da Etnomatemática e Interculturalidade nas produções acadêmicas com a temática indígena. **Hipátia.** v. 4, n. 1, p. 48-61, jun. 2019.

OLIVEIRA, M. A. M.. Knowledge Networks in the Training of Indigenous Mathematics Teacher. In: ROSA, N.; OLIVEIRA, C. C. de. (Editors). **Etnomatematics in Action:** Mathematical Pratics in Brazilian Indigenous, Urban and Afro Communities. Switzerland: Springer, p. 91-109, 2020.

POGGIO, A. M. F. P.. **Um diagnóstico sobre o conceito de proporcionalidade de alunos do Ensino Médio na perspectiva dos Três Mundos da Matemática**. 2012. 237 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

POLEGATTI, G. A.; SAVIOLI, A. M. P. D.. Quinze anos de pesquisas em Etnomatemática nos mestrados profissionais de Educação Matemática no Brasil: uma breve análise de suas dissertações. **EMR.** v. 23, n. 60, p. 59-74, out./dez. 2018.

POLEGATTI, G. A.; CAMARGO, L. B. F.; SAVIOLI, A. M. P. D.. Ensinar, aprender e avaliar na Educação Matemática em perspectiva no Programa Etnomatemática. **REnCiMa.** v. 11, n. 3, p. 486-505, abr./jun. 2020.

RADFORD, L.. **Cognição Matemática**: História, Antropologia e Epistemologia. 1° ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

RIBEIRO, G. A.. **Etnomatemática:** situações, problemas e práticas pedagógicas na realidade do sistema educacional Macuxi em Roraima. 2012. 166 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

RIBEIRO, J. P. M.. **Etnomatemática e formação de professores indígenas:** um encontro necessário em meio ao diálogo intercultural. 2006. 192 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

RIEMANN, G. B. F.. **Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe**: Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Abril de 2000. Disponível em: https://www.emis.de/classics/Riemann/Trig.pdf Acesso em Maio de 2019.

RIZZON, B. M.. **Formação continuada para professores de Matemática:** o erro como recurso pedagógico e seu papel no processo de avaliação. 2018. 121 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2018.

ROBIM, B. N. P. A. S.. **Modelagem Matemática e Pensamento Matemático**: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática. 2010. 190 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

ROLIM, M. L. S.. **Estudantes indígenas nos cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Roraima.** 2015. 184 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

ROQUE, T.. **História da Matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

SANTOS, R. P.. **O papel do software Aplusix na transição de equações de avaliação para equações de manipulação:** o caso das equações quadráticas. 2011. 151 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2011.

SANTOS, J. D.. **Saberes Etnomatemáticos na formação de professores indígenas do curso de Licenciatura Intercultural na Amazônia.** 2015. 121 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

SANTOS, J. D.. **Saberes matemáticos indígenas e não indígenas que circulam e se articulam no contexto da etnia Tupari no Estado de Rondônia**. 2020. 183 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade Católica Dom Bosco, Campo Grande – MS, 2020.

SANTOS, S. S.. **Equivalência de números racionais na representação fracionária:** um olhar para livros didáticos à luz dos Três Mundos da Matemática. 2016. 141 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

SCANDIUZZI, P. P.. **Educação indígena x educação escolar indígena:** uma relação etnocida em uma pesquisa etnomatemática. São Paulo, SP: Editora UNESP, 2009.

SCHASTAI, M. B.. **Tall e Educação Matemática Realística:** algumas aproximações. 2017. 179 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

SENA, M. R.. **Resolução de problemas algébricos: uma análise à luz dos Três Mundos da Matemática**. 2017. 126 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

SILVA, A. A.. **Em busca do diálogo entre as duas formas distintas de conhecimentos matemáticos**. 2008. 174 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

SILVA, M. R. C.. **Educação Matemática no contexto escolar indígena:** experiências de um processo formativo. 2015. 90 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Mestrado Profissional em Rede Nacional) – Universidade Federal do Acre, Rio Branco, 2015.

SILVA, M. M.. **Etnomatemática e relações comerciais na formação de professores indígenas**. 2018. 156 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018a.

SILVA, V. N.. **Projetos Extraescolares do curso de Educação Intercultural e a educação escolar indígena:** um olhar etnomatemático sobre os saberes e fazeres Javaé. 2018. 162 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018b.

SOARES, G. O.. **O conceito de limite na formação inicial de professores de Matemática:** um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática. 2018. 121 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2018.

STEWART, J.. **Cálculo.** Vol. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

TALL, D. O.. Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 2004a, p. 29-33. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004a-3worlds-flm.pdf Acesso em Novembro de 2018.

TALL, D. O.. Thinking Through Three Worlds of Mathematics**.** In: *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, An introduction to the origins and ideas in the three worlds Bergen, Norway, 4, 2004b, p. 1–8. Disponível em:

http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004d-3worlds-pme.pdf Acesso em Agosto de 2019.

TALL, D. O.. The transition from embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof. In: *M. Bulmer, H. MacGillivray & C. Varsavsky (Eds.), Proceedings of Kingfisher Delta'05, Fifth Southern Hemisphere Symposium on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning*. Fraser Island, Australia, 2005, p. 1-16. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2005g-delta-plenary.pdf Acesso em Novembro de 2018.

TALL, D. O.. A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. In: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg. v.11, 2006, p.195–215. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2006e-theory-math-growth-annales.pdf Acesso em Janeiro de 2019.

TALL, D. O.. Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education, Plenary at *10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Feb 22–27, San Diego, California, USA, 2007, p. 1-18. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall//pdfs/dot2007b-rume-keynote.pdf Acesso em Janeiro de 2020.

TALL, D. O.. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal,* 2008, p. 1-18. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2008e-merj-3worlds.pdf Acesso em Dezembro de 2018.

TALL, D. O.. Cognitive and social development of proof through embodiment, symbolism & formalism**.** Paper for the *ICMI Conference on Proof.* May 2009*,* Taipei, p.1-6. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009a-icme-proof.pdf Acesso em Dezembro de 2018.

TALL, D. O.. **How Humans Learn to Think Mathematically:** Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O.. Three worlds of mathematics and the brain and Three worlds and the calculus that discuss current developments of the theoretical framework as yet unpublished**.** Abril de 2016, p. 1-17. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2016-3-worlds-calculus.pdf Acesso em Maio de 2019.

TALL, D. O.. Making sense of elementary arithmetic and algebra for long-term success. In: *Draft chapter for Japanese Elementary School Teachers,* 2017, p. 1-15. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2017x-long-term-sense-making.pdf Acesso em Dezembro de 2018.

TALL, D. O.. The Evolution of Calculus: A Personal Experience 1956-2019. *Conference on Calculus in Upper Secondary and Beginning University Mathematics*, Norway. Entre 06 a 09 de Agosto de 2019a, p. 1-18. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2019d-norway-calculus.pdf Acesso em Julho de 2019.

TALL, D. O.. Complementing supportive and problematic aspects of mathematics to resolve transgressions. In*: long-term sense making. Fourth Interdisciplinary Scientific Conference on Mathematical Transgressions, Krakow, Opening Plenary Presentation.* Março de 2019b, p. 1-27. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2019a-transgressions-krakow.pdf Acesso em Julho de 2019.

TALL, D. O.. Making Sense of Mathematical Thinking over the Long Term: The Framework of Three Worlds of Mathematics and New Developments. *Draft.*To appear in Tall, D. & Witzke, I. (Eds.)*: MINTUS: Beiträge zur mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Bildung. Wiesbaden: Springer,* 2020, p. 1-26. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2020a-3worlds-extension.pdf Acesso em Junho de 2020.

VASCONCELOS, F. A.. **História das Matemáticas na Antiguidade.** Lisboa: Aillaud e Bertrand, 1919.

VERGANI, T.. **Educação Etnomatemática:** o que é? Natal: Flecha do Tempo, 2007.

VERGANI, T.. **A criatividade como destino:** transdisciplinaridade, cultura e educação. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

VISINTAINER, M.. **Significados de Cônicas à luz dos Três Mundos da Matemática**. 2019. 228 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2019.

WIECZORKOWSKI, J. R. S.. **Estado da arte de produções acadêmicas de discentes indígenas na educação superior em Rondônia**. 2019. 134 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza) – Universidade Federal de Rondônia, Rolim de Moura, 2019.