Universidade Estadual de Londrina

ADEMIR PEREIRA JUNIOR

O USO DA LINGUAGEM POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Londrina
2020

ADEMIR PEREIRA JUNIOR

O USO DA LINGUAGEM POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Profª. Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

A231 Pereira Junior, Ademir .

O Uso da Linguagem por Alunos do Ensino Fundamental em Atividades de Modelagem Matemática / Ademir Pereira Junior. - Londrina, 2020.
159 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida Almeida.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3. Jogos de Linguagem - Tese. 4. Ensino Fundamental - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de Almeida. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

ADEMIR PEREIRA JUNIOR

O USO DA LINGUAGEM POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profa. Dra. Cintia da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – IF SUL DE MINAS

Prof. Dr. Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 30 de junho de 2020.

Mais uma vez, a dedicatória é para a minha mãe por tudo o que tem feito por mim.

AGRADECIMENTOS

Chegar a um momento como esse da minha vida é algo inexplicável! Eu tenho muito para agradecer.

A meu **Deus** que tornou mais este sonho possível na minha vida, que guarda os meus passos, que meu deu forças nessa caminhada tão difícil, proporciona maravilhas em minha vida e faz por mim o que eu nunca imaginei.

À minha mãezinha, mulher guerreira, caráter de Jesus Cristo, que sempre esteve ao meu lado, que nunca mediu esforços para que eu pudesse estudar, sempre exerceu o papel de pai e mãe, durante uma vida de muita pobreza na minha infância e adolescência, que enxergou na Educação o caminho para que eu pudesse ter uma vida melhor; sempre esteve ao meu lado durante a minha luta para estudar e, mais uma vez, durante o doutorado, me incentivou a lutar, a batalhar, algo que a senhora me ensinou desde muito cedo.

Aos meus irmãos Daniella e Rafael, que me incentivaram a não desistir dos meus sonhos.

À minha sobrinha Laura, que é tão pequena ainda, não entende o que está acontecendo na minha vida agora eu espero que, um dia, este trabalho e as minhas atitudes de lutar pelos meus sonhos lhe sirvam de exemplos.

À minha orientadora, a professora Lourdes Maria Werle de Almeida, por me aceitar como aluno de doutorado, pela enorme paciência, pelas valiosas orientações, por respeitar as minhas limitações, pela amizade, por fazer com que eu me apaixonasse por Modelagem Matemática, pelas cobranças firmes e nos momentos oportunos, por me deixar fazer uma pesquisa que vai ao encontro do meu sonho. A convivência contigo no doutorado foi uma experiência de muita aprendizagem! Professora Lourdes, os meus sentimentos de gratidão, admiração e carinho por você são enormes!

Aos professores, Emerson Tortola, Cíntia da Silva, Magna Natália Marin Pires, Regina Luzia Corio de Buriasco, por aceitarem o convite para fazerem parte da banca, pelas valiosas contribuições para que esta tese pudesse ser concluída.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL com os quais eu pude conviver e aprender muito durante o período do mestrado e do doutorado.

Aos meus colegas do GRUPEMMAT, que me ajudaram durante esse período, pela convivência, pelos momentos de estudo e aprendizagem, pelo socorro, alguns de vocês pegaram na minha mão em diversos momentos, foram solidários.

À minha amiga Tânia Camila, que sempre teve palavras de incentivo, por repetir várias vezes que eu tinha capacidade para escrever a minha tese, por acreditar em mim.

Aos meus alunos do 6º A e do 9º B do Colégio Estadual Adaile Maria Leite, de 2018, que participaram desta pesquisa de doutorado; alunos muito especiais para mim, que se envolveram tanto com as atividades de modelagem matemática, que não mediram esforços e estiveram ao meu lado.

Aos colegas do Colégio Estadual Adaile Maria Leite que se tornaram meus amigos, que sempre têm palavras amigas, que me incentivam, elogiam tanto o meu trabalho, que me acompanharam durante esse período. Não tenho palavras para expressar o meu carinho por vocês, e não vou citar nomes para não correr o risco de ser injusto.

Aos professores Aparecida Delorenci e Edner Abelini, diretores do Colégio Estadual Adaile Maria Leite, que me apoiaram muito neste momento.

À professora Marise Ozieranski, amiga e colega de trabalho, que, em 2018, permitiu com que eu ficasse com a turma do 9º B para dar aulas e desenvolver a minha pesquisa.

Às professoras de língua portuguesa, Maria Aparecida Cirino, do 6º A, e Celi Moraes, do 9º B, que cederam gentilmente as suas aulas para que eu pudesse dar continuidade à minha coleta de dados.

Às pedagogas Alessandra, Taísa, Marci e Lilian do Colégio Estadual Adaile Maria Leite, que acreditam tanto no meu trabalho e que também me deram muito apoio durante este período.

Aos acadêmicos do Curso de Matemática da UEM e alunos do Pibid, Joabe Araujo, Luís Miguel, Samara, Tiago, Vitor Sales, que me ajudaram durante o período de coleta de dados.

Aos meus alunos, da minha carreira de magistério, que tiveram e têm uma contribuição ímpar na minha formação profissional.

Aos professores Luiz Márcio Pereira Imenes, Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, Magna Natália Marin Pires, Marilda Trecenti Gomes, Clélia Ignatius Nogueira, que plantaram em mim a semente da Educação Matemática.

Ao professor Emerson Tortola, que escreveu uma tese de doutorado tão linda, que serviu como fonte de inspiração para a realização da minha pesquisa.

À professora Regina Luzia Corio de Buriasco, professora que eu admiro e com quem aprendo muito.

Ao professor Rodolfo Vertuan, cujas falas demonstram sua paixão e seu compromisso pela Educação Básica, pelo uso da Modelagem Matemática em sala de aula, e servem como fonte de inspiração para mim.

À professora Marisa Castilho Dias, do Núcleo Regional de Educação de Maringá, amiga e companheira nessa carreira tão linda do magistério.

A todos que, de alguma forma, contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

E Será que, se ouvires a voz do Senhor teu Deus, tendo cuidado de guardar os seus mandamentos que eu te ordeno hoje, o Senhor teu Deus te exaltará sobre todas as nações da terra.

Deuterônomio 28:1

PEREIRA JUNIOR, Ademir. **O Uso da linguagem por alunos do ensino fundamental em atividades de modelagem matemática**. 2020. 159 f. Tese de (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Nesta pesquisa, investigamos a constituição de *jogos de linguagem* em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos do 6º e do 9º ano do Ensino Fundamental. O quadro teórico da pesquisa leva em consideração a caracterização da Modelagem Matemática na Educação Matemática, bem como elementos da filosofia da linguagem de Ludwig Wittgenstein, particularmente no que se refere à segunda fase de suas argumentações filosóficas. A análise qualitativa e interpretativa dos dados nos permite inferir que os *jogos de linguagem* constituídos podem ser agrupados em *jogos de linguagem* no contexto das relações entre realidade e matemática e *jogos de linguagem* relativamente ao conteúdo matemático que emerge nas atividades de modelagem matemática.

Palavras-chave: educação matemática; modelagem matemática; filosofia da linguagem de Wittgensein; jogos de linguagem; ensino fundamental.

PEREIRA JUNIOR, Ademir. **The use of the language by students of the Fundamental Teaching in mathematical modeling activities.** 2020. 159f. Thesis (Doctoral on the Teaching of Sciences and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

In this research we investigated the constitution of *language games* in mathematical modeling activities developed by students of 6th grade and 9th grade of the Fundamental Teaching. The theoretical framework of the research takes into account the characterization of the Mathematical Modeling in Mathematical Education, as well as elements of Ludwig Wittgenstein's philosophy of language, particularly regarding the second phase of his philosophical arguments. The qualitative and interpretative analysis of the data allows us to infer that the *language games* constituted can be grouped into: *language games* in the context of the relations between reality and mathematics, *language games* regarding the mathematical content that emerges in mathematical modeling activities.

Keywords: mathematical education; mathematical modeling; philosophy of the language of Wittgensein's; language games; fundamental teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GRUPEMMAT	Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática
SEED	Secretaria de Educação do Estado do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desenvolver uma pesquisa em Modelagem Matemática[1] foi um desafio[2], ao ingressar no Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Não tive aulas de Modelagem Matemática na graduação, nem na Especialização em Educação Matemática, por isso não me sentia seguro para usar atividades de modelagem nas minhas aulas. A sensação era de ser algo quase impossível de acontecer em sala de aula, uma vez que eu não tinha bases teóricas nem práticas em relação à modelagem matemática.

Trabalhar com a professora orientadora deste doutorado trouxe, além da oportunidade de fazer uma pesquisa em Modelagem e Filosofia da Linguagem, uma chance de aprender a usar a Modelagem nas aulas de matemática para lidar com situações reais que pudessem ser matematizadas, de modo que os alunos pudessem, também, aprender matemática.

Uma das inferências na pesquisa desevolvida em Pereira Junior (2014) com professores da Educação Básica que atuam nos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental acerca dos enunciados de itens de provas de matemática era que, na prática desses professores, parecia ausente o lidar com problemas da vida real, em que é necessário algum tratamento matemático.

O refletir nos resultados dessa pesquisa de mestrado tornou-se mais intenso com a participação nos encontros do GRUPEMMAT, Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemátca, assim como no primeiro semestre do curso, em 2016, na disciplina Modelagem Matemática e suas Perspectivas na Educação Matemática.

A participação no GRUPEMMAT trouxe mudanças para a minha prática pedagógica e me impulsionou a desenvolver esta pesquisa de doutorado com alunos de 6º e 9º anos do Ensino Fundamental, que eram turmas em que atuava naquele momento, e, também, a intenção de realizar uma pesquisa com alunos que estão, respectivamente, no início e no término dessa etapa de escolarização.

Uma das vertentes das pesquisas desenvolvidas no GRUPEMMAT é a linguagem na perspectiva de Wittgenstein[3] em atividades de modelagem matemática com o interesse de olhar para o papel da linguagem nas atividades de modelagem.

Por Modelagem Matemática, entenddemos uma alternativa pedagógica para

---

[1] Neste trabalho, as expressões Modelagem Matemática e Modelagem têm o mesmo significado.
[2] O uso da primeira pessoa do singular é devido a algumas reflexões pessoais do autor. Em outros momentos, os verbos são utilizados na primeira pessoa do plural fazendo referência ao autor e sua orientadora.
[3] No capítulo 3, apresentamos a perspectiva de linguagem baseada na filosofia de Wittgenstein.

o ensino e a aprendizagem da matemática, conforme consideram Almeida e Brito (2005). Nesse contexto, uma atividade[4] de modelagem na sala de aula tem como ponto de partida uma situação-problema, que é a situação inical problemática, um questionamento, em que se identifica um problema, não essencialmente matemático, e culmina com uma solução do problema associada a um modelo matemático (ALMEIDA, 2010). O caminho que é perocrrido da situação inicial até a situação final envolve os usos da linguagem da situação, da matemática e da transição entre elas, que é viabilizada por meio da matematização[5] da situação.

Almeida, Sousa e Tortola (2015) consideram que

> A modelagem matemática viabiliza uma leitura, ou até mesmo uma interpretação, ainda que parcial e idiossincrática, de fenômenos não matemáticos com apoio da matemática. Trata-se de um procedimento criativo e interpretativo que faz uso ou estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar, com certo nível de fidelidade, características essenciais do fenômeno, indicando uma possível solução para um problema associado a este fenômeno (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015, p.3).

Segundo Almeida (2014, p.107, tradução nossa[6]), no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, há "processos de ação e transformação por meio da linguagem", em que a linguagem do fenômeno é transformada em linguagem matemática.

O nosso olhar para o desenvolvimento das atividades de modelagem na presente pesquisa tem como referência a obra póstuma de Ludwig Wittgenstein intitulada Investigações Filosóficas. Nesta perspectiva de Wittgenstein, devemos olhar para a linguagem a partir de seu funcionamento, de seus usos, o que confere um caráter dinâmico à filosofia da linguagem, em que o significado das palavras se dá pelo uso.

A partir dessa segunda fase, Wittgenstein pondera que não devemos perguntar o que é liguagem, mas como ela funciona (CONDÉ, 1998). O filósofo assume que o significado de uma palavra emerge do seu uso, ou seja, dos diferentes usos de uma palavra ou expressão linguística em situações diversas.

A analogia feita por Wittgenstein ao uso da palavra *jogo*, na expressão *jogo de linguagem*, refere-se às atividades envolvidas no uso da linguagem. O significado das expressões tem relação, por um lado, com as regras que são seguidas ao jogar um jogo e, por

---

[4] Conjunto de ações em que se envolvem os modeladores que desenvolvem a atividade de modelagem, no âmbito da sala de aula, que reside na iniciativa e ações dos alunos, na dinâmica que professor e aluno estabelecem ao lidar com a situação e nas condições que os alunos têm para atuar na situação, podendo esta última vir a ser um problema, ou não, para o aluno, algo essencial em modelagem (ALMEIDA; VERTUAN, 2014).

[5] As situações investigadas em Modelagem Matemática apresentam-se em linguagem natural, linguagem do fenômeno, e há a necessidade da escrita em linguagem matemática, evidenciando um problema para ser resolvido. Faz-se necessário o uso de técnicas, procedimentos matemáticos, formulação de hipóteses, simplificações, seleção de variáveis em relação ao problema matemático formulado, isto é, lidar matematicamente com uma situação real.

[6] *the process of action and transformation by means of language.*

outro lado, com as proposições gramaticais que possibilitam fazer inferências no interior das expressões linguísticas.

Na articulação entre linguagem e Modelagem Matemática, com o interesse de olhar para a linguagem no desenvolvimento de atividades de modelagem, no âmbito do GRUPEMMAT, foram desenvolvidas pesquisas considerando diferentes elementos da filosofia wittgensteiniana.

Tortola (2012) investiga os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental de uma escola ública no norte do Paraná. Os resultados dessa investigação apontam para a emergência de diversos *jogos de linguagem* em que os modelos matemáticos, que foram produzidos pelos estuantes, têm características específicas desse nível de escolaridade, em decorrência dos usos que os alunos fazem da linguagem.

A pesquisa de Merli (2012) investigou usos da linguagem em modelos clássicos e em modelos *fuzzy*, com a intenção de procurar relações entre as linguagens clássica e *fuzzy* utilizadas na construção de um modelo matemático. O autor identificou algumas aproximações entre os modelos, bem como diferentes *jogos de linguagem*, mas as semelhanças de família entre esses modelos mantinham-se.

O trabalho de Tortola (2016) investigou quais configurações as atividades de modelagem matemática podem assumir quando desenvolvidas por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os resultados da pesquisa mostram configurações específicas em relação aos usos da linguagem para lidar com os símbolos matemáticos e para caracterizar modelos matemáticos.

Sousa (2017) pesquisou o uso da linguagem em atividades de modelagem matemática com alunos de um curso da Licenciatura em Matemática, nas disciplinas de Equações Diferencias Ordinárias e de Introdução à Modelagem Matemática. A autora definiu três categorias *a posteriori* em que é possível detalhar a natureza das justificativas, proposições e uso de regras em atividades de modelagem matemática, bem como a formação de conceitos matemáticos no desenvolvimento das atividades.

Souza (2018) realizou uma investação acerca de como se dá o seguir regras dos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, em uma universidade pública, no fazer modelagem matemática, quando usam recursos de tecnologias digitais.

O trabalho de Oliveira (2018) investigou os efeitos terapêuticos em relação ao conceito de função em atividades de modelagem desenvolvidas por alunos de um curso de tecnologia na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. O uso das atividades de modelagem propiciou aos alunos o tratamento das dificuldades quanto ao conceito e uso de funções de uma variável independente. Os resultados da investigação levam à inferência de que os alunos que participaram da pesquisa ampliaram a gramática arbitrária do conceito de função em sala de aula.

Seki (2019) realizou uma inverstigação acerca da compreensão em atividades de modelagem matemática na disciplina de Matemática Financeira, em um curso de Licenciatura em Matemática. Os resultados indicam que a compreensão dos alunos em atividades de modelagem acontece por meio do seguir regras de uso de expressões linguísticas da situação-problema e de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática na obtenção e análise dos modelos matemáticos.

O que essas pesquisas nos viabilizam considerar é que diferentes usos podem ser feitos de uma mesma palavra ou expressões linguísticas, e o siginificado é associado a esse uso. O uso da linguagem não é uma atividade arbitrária, mas guiada por regras de modo que "aprender o significado de uma palavra pode consistir na aquisação de uma regra, ou um conjunto de regras, que governa seu uso dentro de um ou mais jogos de linguagem" (GOTTSCHALK, 2004, p.321).

Em Modelagem, usar a linguagem matemática para lidar com situações reais exige que o modelador siga regras. Por exemplo, no âmbito das aulas de matemática, quando professor e aluno analisam um fenômeno real ou o comportamento dos dados em uma situação empírica, eles precisam agir em conformidade ao *jogo de linguagem* da matemática. Isto requer agir, também, segundo as regras matemáticas para matematizar situações reais.

Na presente pesquisa o nosso interesse reside na investigação da constituição de *jogos de linguagem* em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Isso se justifica pelo interesse em olhar as interpretações que os alunos fazem das atividades de modelagem, do uso dos conceitos e ferramentas matemáticas na articulação com informações relativas das situações-problema.

A caracterização dessa constituição de *jogos de linguagem*, por um lado, vai se fundamentar na análise de possíveis articulações entre informações relativas à situação investigada, aos conceitos e às ferramentas matemáticas, a fim de apresentar uma solução para o problema que os alunos se propõem a resolver nessa situação. Nesse contexto, a inclusão de atividades de modelagem matemática pode ser analisada com base no seu potencial de estruturar aulas de matemática, nas quais a articulação da matemática com fenômenos da realidade pode ser explorada. Por outro lado, indícios de constituição de *jogos de linguagem* serão pesquisados nos procedimentos matemáticos dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Com essa finalidade, nossa atenção é dirigida às ações e aos procedimentos dos alunos e do professor no decorrer do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática realizadas por alunos do 6º e do 9º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública do Paraná.

As atividades de modelagem matemática que os alunos desenvolveram estão em consonância com os momentos de familiarização propostos por (ALMEIDA; DIAS, 2004).

A estrutura do relatório de pesquisa compreende seis capítulos e as referências bibliográficas, além dessa Introdução.

No capítulo 1 apresentamos elementos relativos à Modelagem Matemática na Educação Matemática. No capítulo 2 apresentamos a concepção de linguagem de Wittgenstein, considerando pressupostos do filósofo em relação à linguagem a partir da obra póstuma Investigações Filosóficas, bem como interpretações de comentadores das obras de Wittgenstein e alguns do trabalhos desenvolvidos no interior do GRUPEMMAT. No capítulo 3 apresentamos os procedimentos metodológicos da pesquisa e o contexto em que ocorreu a coleta de dados. No capítulo 4 apresentamos uma análise local de cada uma das quatro atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos. No capítulo 5 apresentamos a análise global, considerando as quatro atividades de modelagem. Esta análise será à luz da Filosofia da Linguagem de Wittgenstein, em especial à constituição de *jogos de linguagem*, com as categorias de análise construídas com a intenção de identicar a constituição dos *jogos de linguagem*. No capítulo 6 apresentamos as Considerações Finais com algumas reflexões a respeito da pesquisa desenvolvida. Por fim, apresentamos a lista de referências bibliográficas usadas na pesquisa.

1 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos considerações a respeito da modelagem matemática pertinentes para dar suporte às nossas deliberações relativas ao uso da linguagem em atividades de modelagem matemática.

1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Conforme sugere o matemático português Bento de Jesus Caraça,

> a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre (CARAÇA, 2003, p.xxiii).

A modelagem matemática pode ser considerada como uma espécie de "óculos" para compreender, ver e interpretar esses problemas da vida real a que se refere Caraça. Nesse sentido, modelagem matemática é uma das possibilidades para que os alunos estabeleçam relações entre a Matemática e a realidade. O que os alunos fazem ao desenvolver atividades de modelagem se alinha com um *fazer matemática*. Este *fazer* refere-se às situações na sala de aula em que os alunos têm a oportunidade de investigar, formular hipóteses, buscar padrões e regularidades, conjecturar, testar, refletir acerca das soluções e respostas encontradas em situações investigadas, bem como ter a oportunidade de comunicar suas estratégias e procedimentos de resolução a respeito das situações investigadas para outras pessoas.

Pollak (1979) defende a modelagem como meio de os alunos entenderem quando, como e por que a Matemática funciona na aplicação. Para o autor, o uso da modelagem matemática como oportunidade para os alunos resolverem e formularem problemas tem grande valor pedagógico.

Pollak (2012) também considera a modelagem matemática como um processo em que a origem é o mundo real, que o autor chama de "não editado" e requer a formulação de problemas, que é uma parte integrante da modelagem matemática. Downton (2013) argumenta que a formulação de problemas constitui a base da modelagem e deve ser incentivada pelo professor. Segundo esse autor, ela oportuniza que os alunos idealizem e matematizem uma situação. English (2003), por sua vez, afirma que a formulação de problemas em atividades de modelagem propicia aos alunos desenvolver habilidades, como questionar, descrever, construir, justificar e explicar. Na visão de Pollak (2012), a formulação de problemas é o coração da modelagem matemática, que vem antes da solução. Além disso, formular problemas exige dos alunos conhecer o que se investiga, levantar informações, bem como estabelecer pressupostos e hipóteses (PEREIRA JUNIOR; SEKI; ALMEIDA, 2017). Formular um problema para ser resolvido leva à idealização, que ocorre mediante a simplificação da situação, uma vez que não é possível considerar todas as facetas do mundo real, mas é preciso decidir quais são as variáveis relevantes. A situação idealizada pode ser escrita em linguagem matemática, que requer o uso de aproximações, teoremas, algoritmos para a produção de um modelo matemático. Os resultados obtidos por meio de um modelo matemático precisam ser confrontados com a realidade. Com isso, o julgamento da qualidade dos resultados não é apenas por meio da matemática, considera também se a solução faz sentido na situação original. Esse aspecto é apontado por Pollak (2015) quando o autor pondera que o contexto real é tão importante quanto o matemático, de modo que o equilíbrio entre o uso da matemática e a consideração de aspectos do problema da realidade é fundamental no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Para Bassanezi (2009, p.16), "a modelagem matemática" consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Em outro livro, Bassanezi (2015) apresenta outra visão ao considerar que "a modelagem matemática é simplesmente uma estratégia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais*"* (p.15). As situações reais podem ser provenientes de diversos contextos relacionados a natureza, sociedade ou cultura, vida cotidiana, disciplinas científicas e acadêmicas (BLUM, 2001; 2002).

A habilidade de empregar a matemática em situações que são originárias de outras áreas do conhecimento humano consiste em traduzir a situação que se procura compreender na linguagem dos números, gráficos, tabelas, equações etc., a fim de buscar uma solução que possa ser reinterpretada no contexto da situação original. Sendo assim, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual que possibilita realizar uma síntese de ideias a respeito de situações empíricas que são quase sempre camufladas em ideias que aparentemente não são relevantes (BASSANEZI, 2009).

Acerca do que apresentamos nos parágrafos anteriores, a modelagem matemática é uma das maneiras de o aluno e o professor, nas aulas de matemática, olharem para situações reais e verem a oportunidade de fazer uso da matemática, dos conteúdos que estão no currículo dos anos finais do Ensino Fundamental, na busca de formular e resolver problemas associados à realidade que podem ser escritos em linguagem matemática. Além de usar a matemática para matematizar situações reais, o professor pode, com o uso da Modelagem, oportunizar momentos de aprendizagem, bem como obter indícios de que os alunos aprendem matemática com o uso da modelagem nas aulas de matemática.

Na busca de formular e resolver problemas, associados à realidade, que podem ser escritos em linguagem matemática nas aulas de matemática, é preciso levar em consideração as hipóteses que os alunos formulam, porque elas auxiliam nos encaminhamentos para a produção de modelos matemáticos que mostram a solução dos problemas.

Hipótese, *modelo matemático e problema*, bem como outros termos, são recorrentes na literatura quando entra em pauta discussões a respeito da modelagem matemática. Esses três termos são destacados porque vão ao encontro da temática deste trabalho.

Para escrevermos sobre *modelo matemático*, primeiro é preciso olhar para o significado da palavra modelo. No que se refere a essa palavra, o dicionário Aurélio da Língua Portuguesa (2009, p.559) indica como um de seus significados o seguinte: "Representação de algo a ser reproduzido". O uso de modelos é algo comum na vida das pessoas, uma costureira, por exemplo, precisa conhecer qual é o modelo que uma cliente quer de um vestido para a sua confecção. A planta de um apartamento é um modelo que o representa[7] e serve como norte para a sua construção.

Para D'Ambrosio (2009)

> Modelos são representações do real e modelagem é a elaboração sobre essas representações, particularmente como essas representações são criadas e como se pode, elaborando sobre os modelos, extrair informações sobre o real. (D'AMBROSIO, 2009, p.91, tradução nossa[8]).

Diversas são as finalidades para as quais os modelos são construídos, como "prever o comportamento de um fenômeno, ser demonstrativo de algo (como uma maquete), ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de algum conceito), ser descritivo de algo, entre outras" (ALMEIDA, SILVA E VERTUAN, 2012, p.13). Modelo matemático, por sua vez, é um termo clássico no âmbito da modelagem matemática.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) encontramos a definição:

---

[7] Ao tecermos considerações a respeito de modelo matemático na literatura em Modelagem Matemática, é natural aparecer a palavra representação, porém isso não significa que estamos nos referindo a uma concepção referencial de Linguagem, algo que vamos tratar no segundo capítulo. Nas análises das atividades de Modelagem desenvolvidas, vamos adotar a palavra apresentação ao invés de representação para modelo matemático, por trabalharmos com a Filosofia da Linguagem de Wittgenstein, em sua segunda fase.

[8] *Models are representations of the real and modeling is the elaboration about these representations, particularly how these representations are created and how one can, by elaborating about the models, can draw information about the real.*

> “modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. Um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p.13).

Um modelo matemático é a escrita em linguagem matemática simplificada de uma situação real. Essa escrita exibe a solução de um problema idealizado, possibilitando, em alguns casos, prever resultados futuros e levar à tomada de decisões. Sousa (2017, p.46) entende modelo matemático “como um conjunto de relações matemáticas, pode ser um gráfico, um registro tabular, uma expressão algébrica, ou, ainda, um amálgama destes, e de outros instrumentos matemáticos que auxiliem o sujeito a responder à situação matemática idealizada e à situação-problema inicial”.

Nas pesquisas de Tortola (2012) e Tortola (2016), os modelos matemáticos formulados pelos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental são escritos por meio de desenhos, registros numéricos em linguagem natural, com uso de registros tabulares, gráficos, figurais e geométricos. Podemos entender, então, que os modelos matemáticos estão vinculados à matemática utilizada por aqueles que as formulam. No entanto, conforme pondera Tortola (2012),

> É preciso ter claro que um modelo matemático não representa fielmente a situação em questão, mas representa uma leitura da realidade que permite uma abordagem matemática para a situação, contemplando conteúdos matemáticos que, em geral, são propostos para estudo na escola. Dessa forma, além de contemplar o estudo e aplicação de conteúdos da Matemática, a produção de modelos matemáticos pode preparar o estudante para lidar com diferentes situações-problema em sua vida, nas quais a linguagem matemática não aparece de maneira isolada, mas arraigada a muitas outras linguagens (TORTOLA, 2012, p.31).

Para Almeida, Tortola e Merli (2012, p.217), “a Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. O *modelo matemático*, neste caso, é o que ‘dá forma’ à solução do problema e a modelagem matemática é a ‘atividade’ de busca por esta solução”.

No mesmo sentido, Bassanezi (2009, p.24) pondera que “a modelagem é eficiente a partir do momento em que nos conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele”.

Para o autor,

> A modelagem matemática é simplesmente uma estratégia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais. No processo de reflexão sobre a porção da realidade, selecionamos os argumentos considerados essenciais e procuramos uma formalização artificial (modelo matemático) que contemple as relações que envolvem tais argumentos (BASSANEZI, 2015, p.15-16).

Do que apresentamos anteriormente acerca de modelo matemático decorre o que é um problema.

Blum e Niss (1991) consideram que um problema refere-se a

> "uma situação que traz consigo certas questões abertas que desafiam alguém intelectualmente, que não estão de posse imediata de métodos/procedimentos/algoritmos diretos etc. suficientes para responder às perguntas (BLUM; NISS, 1991, p.31, tradução nossa[9]).

Almeida, Tortola e Merli (2012, p.218) consideram problema "como uma situação na qual o indivíduo não possui esquemas a priori para a sua resolução e não há procedimentos específicos previamente conhecidos ou soluções já indicadas".

Baron (1985), referindo-se às atividades matemáticas, considera que:

> Até certos níveis, a matemática é uma atividade para resolver problemas. O seu desenvolvimento depende sobretudo da introdução de apropriados problemas nos momentos mais oportunos. Estes problemas podem surgir através de aplicações da matemática em astronomia ou física, ou ainda de qualquer situação em que ela seja utilizada como uma ferramenta. Eles podem surgir durante o processo de generalização de problemas existentes, já resolvidos (BARON, 1985, p.9).

A consideração de Baron (1985) a respeito do surgimento de problemas em momentos oportunos, bem como utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas, vai ao encontro do que propõem as atividades de modelagem matemática. Problemas investigados em atividades de modelagem matemática, de modo geral, têm origem na realidade e resolvê-los "requer dos alunos uso da matemática, o que pode se configurar como um meio de levar os alunos a experienciar novos usos da matemática, de sua linguagem" (TORTOLA, 2016, p.26).

Os problemas nas atividades de modelagem são abertos, o que requer do modelador a formulação de hipóteses para a sua condução, simplificação da situação, seleção de variáveis para a escrita em linguagem matemática.

---

[9] *"a situation wich carries with it certain open questions that challenge somebody intellectually who is not in immediate possession of direct methods/procedures/algorithms etc. suficiente to answer the questions".*

As hipóteses conduzem o caminho a ser percorrido na atividade, a intencionalidade na busca de resolver um problema em modelagem, que inclui a formulação de hipóteses para indicar direções e diferentes resoluções matemáticas (ALMEIDA, 2018).

Almeida (2014, p.109, tradução nossa[10]) pondera que hipótese em atividades de modelagem matemática "está mais próximo do que se poderia chamar de uma suposição bem fundamentada, uma espécie de guia para uma pesquisa". Nesse sentido, quando se observa um fenômeno e com isso se identifica um problema para ser solucionado geram-se hipóteses

> cujo papel é incorporar na modelagem matemática características relevantes do problema na visão do modelador, e ao mesmo tempo, orientar o encaminhamento da atividade, seja nas estratégias de resolução, seja no uso da matemática, seja na construção de modelos para o fenômeno em estudo (ALMEIDA, SOUSA, TORTOLA, 2015, p.11-12).

Bean (2001) aponta a formulação de hipóteses e aproximações simplificadoras como requisitos para a criação de modelos para quem realiza uma atividade de modelagem. Para Bassanezi (2009), a formulação de hipóteses constitui formulações gerais que possibilitam dirigir as investigações. Na discussão realizada por Almeida e Vertuan (2011) a respeito da introdução da modelagem matemáticas nas aulas de matemáticas, as hipóteses "são como fatores que se colocam no caminho para indicar direções e em que diferentes resoluções matemáticas são empreendidas com vistas a resolver um problema" (ALMEIDA, VERTUAN, 2011, p.22).

Fazer modelagem matemática requer dos alunos conhecimentos matemáticos e não matemáticos do fenômeno investigado. O foco da atividade está nos encaminhamentos e procedimentos do desenvolvimento que permeiam a transição da situação inicial para a situação final na atividade, "de modo que o modelador – aquele que faz a modelagem – seja capaz de utilizar ou estabelecer uma estrutura matemática e, ainda, manter fidedignamente, características essenciais do fenômeno" (TORTOLA, 2016, p.46).

1.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E A SALA DE AULA

Entendemos modelagem matemática como uma alternativa pedagógica[11], "na qual fazemos uma abordagem, por meio da matemática, de uma situação-problema não

---

[10] *it seems that the term is closer to what one could call a well-based supposition, a sort of guide for a search.*

[11] "trata-se de uma alternativa pedagógica, pois consiste em uma prática que não se restringe às aulas regulares, às paredes da sala de aula. Pode ser utilizada para o encaminhamento de cursos de formação, grupos de estudos e pesquisas, tarefas e projetos extraclasses ou mesmo por interesse dos estudantes" (TORTOLA, 2016, p. 46).

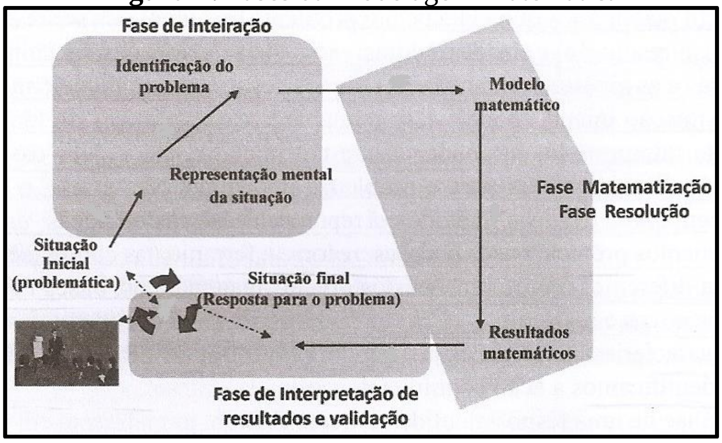
essencialmente matemática" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p.17). Para Almeida e Vertuan (2011),

> A modelagem tem como aporte maior a realização de investigações em sala de aula que tem o problema como ponto de partida, a intencionalidade na busca, as hipóteses como fatores que se colocam no caminho para indicar direções e em que diferentes resoluções matemáticas são empreendidas com vistas a resolver um problema. A condução destas investigações em ambientes educativos coaduna-se com o que caracterizamos "como fazer" Modelagem Matemática (ALMEIDA, VERTUAN, 2011, p.22).

Para Bassanezi (2009), a modelagem matemática na sala de aula é uma estratégia em que "o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem-sucedido, mas caminhar segundo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado" (BASSANEZI, 2009, p.38).

Assim, conceitos matemáticos podem ser introduzidos pelo professor em sala de aula por meio da atividade, ou seja, a atividade é um meio de oportunizar o estudo de novos conceitos, bem como uma oportunidade para os alunos aplicarem os conhecimentos que possuem para lidar com a atividade e, com isso, resolver problemas gerados por ela. Almeida e Vertuan (2014) consideram que uma atividade de modelagem matemática envolve um conjunto de procedimentos necessários para a configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema e identificam as seguintes fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. A Figura 1 ilustra as fases da modelagem matemática.

Figura 1: Fases da Modelagem Matemática



Fonte: (Almeida, Vertuan, 2014, p.8, adaptado).

Estas fases são caracterizadas pelos autores conforme segue:

Inteiração é o primeiro contato dos alunos com a situação-problema. Trata-se de investigar todas as informações possíveis e específicas a respeito da situação-problema, por meio da coleta de dados quantitativos e qualitativos. Essa inteiração conduz à formulação do problema, bem como ao estabelecimento de metas para a sua resolução. A formulação é cercada pela compreensão da situação. Tal etapa, embora seja inicial, pode acontecer durante o desenvolvimento da atividade, porque a busca por novas informações é o aspecto central dessa fase, que pode ser importante durante a realização da atividade.

Matematização é a escrita em linguagem matemática relativa à situação original a ser investigada, que se apresenta em linguagem natural, evidenciando o problema matemático a ser resolvido. A transição entre as linguagens natural e matemática ocorre por meio do uso de símbolos matemáticos. É preciso a idealização da situação, formulação e julgamento das hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação ao problema definido na fase de inteiração. A realização dessa fase envolve também o uso dos conhecimentos prévios dos alunos em relação à situação inicial, as experiências anteriores como modeladores, a matemática que

Resolução consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de analisar os aspectos relevantes da situação inicial. Como foram feitas simplificações, selecionadas variáveis e hipóteses elencadas, os alunos obtêm a solução para o problema, bem como interpretam a situação inicial e respondem às perguntas formuladas. Nessa fase, os alunos utilizam-se de conceitos, técnicas, métodos, conhecimentos prévios, buscam padrões, coordenam diferentes apresentações dos objetos matemáticos, buscam novos conceitos matemáticos, bem como ressignificam os conhecidos.

Interpretação de Resultados e Validação implica a análise de uma resposta para o problema, um processo de avaliação dos resultados obtidos por meio de um modelo matemático. Além disso, envolve a validação do modelo matemático, bem como da adequação em relação à situação-problema investigada.

É preciso ponderar, entretanto, que o caminhar dos alunos modeladores ao longo dessas fases, em geral, não se dá de forma linear. Ao invés disso, idas e vindas por essas fases conduzem as ações dos alunos. Também é preciso considerar, conforme sugerem Almeida e Vertuan (2014), que não há uma duração específica para uma atividade de modelagem. As atividades podem ser desde projetos prolongados que duram semanas, situações que podem ser investigadas em algumas aulas, até mesmo atividades desenvolvidas em uma única aula. A caracterização da atividade reside nas iniciativas, ações e procedimentos realizados pelo professor e pelos alunos.

Neste sentido,

> a atividade de modelagem visa obter um resultado matematicamente produtivo para um problema, que, em geral, é não matemático; os conceitos e ferramentas matemáticas não podem ser previamente escolhidos, mas, pelo contrário, a matemática apropriada para resolver o problema emerge do

> problema em si e de suas especificidades (ALMEIDA, 2018, p.21, tradução nossa[12]).

Na sala de aula, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.17), a modelagem é ‘uma “maneira’ de trabalhar com atividades na aula de Matemática”. O professor tem o papel de orientador. Nesse sentido,

> a) Orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos; b) orientar não é dar respostas prontas e acabadas, orientar é sinalizar que não “vale tudo”; c) orientar não é esperar que o aluno simplesmente siga exemplos; d) orientar não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da função; e) orientar não é despir-se da autoridade do professor (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p.24).

Ao aluno cabe papel central no uso de atividades de modelagem nas aulas de matemática, “no que se refere à articulação entre definição, investigação e resolução, essencial em uma atividade de modelagem” (ALMEIDA, VERTUAN, 2014, p.11).

O uso da modelagem matemática como alternativa pedagógica pode ocorrer em sala de aula de acordo com três momentos de familiarização para o aluno com a modelagem, conforme Almeida e Dias (2004) e Almeida; Silva; Vertuan (2012). Em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com a situação-problema a ser investigada, junto com os dados e as informações necessárias. As ações dos alunos em definir variáveis, formular hipóteses, realizar simplificações, obter um modelo matemático como solução para o problema, validá-lo acontecem sob orientação do professor. No segundo momento, o professor sugere uma situação-problema aos alunos, que, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação, selecionam variáveis, definem hipóteses simplificadoras, obtêm, validam e analisam um modelo matemático para a situação. O que difere esses dois momentos é a independência dos alunos em relação à realização da investigação. Finalmente, no terceiro momento, os alunos são responsáveis pela realização da atividade de modelagem. Eles pesquisam informações, propõem a situação-problema a ser investigada, bem como a coleta de dados, e mobilizam os conceitos matemáticos necessários para a situação. A responsabilidade na obtenção e validação do modelo é dos alunos, que, após o resultado da investigação, eles apresentam para a comunidade escolar.

Almeida e Vertuan (2011) ressaltam que esse encaminhamento da introdução das atividades de modelagem nas aulas de matemática não é uma prescrição rigorosa, o que

---

[12] *the modeling activity aims to obtain a mathematically productive outcome for a problem, which, in general, is non-mathematical; the mathematical concepts and tools cannot be previously chosen, but on the contrary, the appropriate mathematics to solve the problem emerges from the problem itself and its specificities.*

subjaz a essa familiarização das atividades de modelagem é possibilitar ao aluno o desenvolvimento da “habilidade de fazer modelagem”.

> Nestes termos, a orientação e a colaboração do professor, mais intensa no primeiro e segundo momentos, confere ao aluno confiança, independência e autoridade para delimitar uma situação-problema e buscar, por meio da matemática, uma solução (ALMEIDA, VERTUAN, 2011, p.29).

Ainda a respeito da introdução de atividades de modelagem nas aulas de matemática, Almeida (2018) entende que é preciso, entre outros aspectos, considerar que:

> (a) A matemática utilizada não pode ter sido previamente escolhida ou definida; em vez disso, a matemática necessária emerge do problema e de suas especificidades. (b) Diferentes percepções de uma situação do mundo real e critérios diferentes para o que constitui uma solução quase aceitável podem surgir em qualquer situação (ALMEIDA, 2018, p.19, tradução nossa[13]).

O desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática na sala de aula, a partir do olhar do professor e do aluno a respeito do fenômeno, da linguagem do fenômeno, da observação e interpretação dos dados reais, de hipóteses formuladas, simplificação, seleção de variáveis, gera a formulação de um problema idealizado, o que possibilita “entrar em cena” o uso da linguagem matemática, que leva à matematização e à solução do problema.

1.3 LINGUAGEM E MODELAGEM MATEMÁTICA

O caminhar do professor e dos alunos[14] em uma atividade de modelagem de uma situação-problema, para a solução de um problema, é permeado pelos usos da linguagem, e diferentes ações dos sujeitos envolvidos com uma atividade de modelagem acontecem em função da linguagem.

Inicialmente, o contato é com a linguagem do fenômeno, do mundo real, com aspectos externos à matemática, às variáveis, e o modelador busca compreender algo, problematizar. Essa compreensão acontece por meio dos usos da linguagem matemática “como meio de análise e argumentação” (TORTOLA, 2016, p.84).

---

[13] *(a) The mathematics used may not be previously chosen or defined; rather, the required mathematics emerges from the problem and its specificities. (b) Different perceptions of a messy world situation and different criteria for what constitutes an acceptable solution may arise in almost any situation.*

[14] Durante a fundamentação teórica, a palavra aluno será utilizada com frequência quando a referência for a modeladores em uma atividade de modelagem matemática, o que se justifica pelo tema do trabalho.

Para o uso da linguagem matemática em atividades de modelagem matemática, alguns aspectos reais são mantidos. Para a formulação e resolução de um problema, o modelador realiza simplificações, formula hipóteses e seleciona variáveis (SOUZA, 2017). A transição da linguagem do fenômeno para a linguagem da matemática leva em consideração aspectos reais observados, comportamento dos dados, informações relativas ao fenômeno em estudo para que conceitos matemáticos possam ser usados para lidar com a situação investigada e agir conforme as regras convencionadas no âmbito da Matemática. O uso da linguagem matemática e dos símbolos matemáticos está vinculado ao que o modelador se propõe a alcançar com o problema que resolve, também com o tipo de problema que investiga e o conhecimento de matemática que possui. Nesse sentido, "O conteúdo e a linguagem matemática utilizados devem ser equilibrados e circunscritos tanto ao tipo de problema como ao objetivo que se propõe alcançar" (BASSANEZI, 2009, p.25). Outro aspecto do uso da linguagem matemática na resolução dos problemas nas atividades de modelagem é que o mesmo problema pode ser investigado por alunos de diferentes níveis de escolaridade, conforme sinalizado na seção anterior deste capítulo. Nos trabalhos de Tortola (2012, 2016), alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental utilizaram registros tabulares, gráficos, figurais e geométricos na obtenção de modelos para os problemas de modo a responder o que era investigado por eles. No entanto, se alguns desses problemas também fossem investigados por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, o uso da linguagem algébrica[15] poderia emergir com a finalidade de obter o modelo matemático para resposta dos problemas. "A linguagem matemática, portanto, revela-se como o fio condutor que conduz o modelador da problemática em investigação a uma resposta para o problema, obtida por meio de um modelo matemático" (TORTOLA, 2016, p.84).

O modelo obtido para o problema por meio de uma linguagem, de uma estrutura matemática, precisa fazer sentido no contexto matemático, bem como na situação empírica. Caso aconteça de o modelo matemático ir de encontro à linguagem do fenômeno investigado, é preciso olhar para os dados novamente, para outros aspectos relativos aos dados, refutar informações reais, pesquisar outras, olhar para outras variáveis. A matemática e sua linguagem não são refutadas, com isso, elas servem de parâmetro de correção, da organização da realidade. Não se quer dizer que a linguagem matemática seja soberana à linguagem do fenômeno, mas, sim, que a matemática e sua linguagem possuem regras próprias, independentes

[15] Podemos ver isso, por exemplo, nas Atividades *Tamanho de Anéis, Câmbio entre as moedas dólar e real,* em Tortola (2012), *Crescimento das Unhas* e com tema *Peixes* em Tortola (2016).

de fenômenos reais[16]. A linguagem da matemática, assim como suas regras, não muda em função dos fatos reais, como sinaliza Souza (2012), atua como base para a matematização das investigações em atividades de modelagem.

A socialização dos resultados obtidos nas atividades acontece por meio do uso da linguagem matemática e linguagem do fenômeno, os modeladores expressam as interpretações que tiveram junto a linguagem do fenômeno, diferentes formas de pensamento são manifestadas por meio da linguagem. O uso da linguagem matemática nesse momento acontece não só por meio dos alunos que apresentam resultados, conclusões que chegaram acerca das atividades, bem como de alunos e professor que assistem à socialização, é comum em aulas mediadas com atividades de modelagem, contribuições dos alunos que assistem as apresentações que chamam a atenção para aspectos importantes e, com isso outros modelos matemáticos também podem emergir na socialização, novos usos da linguagem matemática.

Quanto aos usos da linguagem em atividades de modelagem matemática, nas pesquisas desenvolvidas no interior do GRUPEMMAT, podem ser vistos diferentes aspectos. No trabalho de Merli (2012), há aproximações na elaboração de modelos clássicos e modelos *fuzzy*. Segundo o autor, o uso da linguagem da Matemática *fuzzy* é uma oportunidade para o modelador trabalhar com uma linguagem mais próxima daquela utilizada no cotidiano das pessoas, e o uso de diferentes linguagens pode levar a diferentes resultados/significados, que é uma possibilidade para o modelador pensar e refletir nos diferentes resultados e significados. Além disso, a análise feita pelo o autor sinaliza que é possível identificar articulações, aproximações, pontos divergentes quando se usam diferentes linguagens em uma atividade de modelagem.

Os trabalhos de Tortola (2012, 2016) mostram que, nas atividades de modelagem matemática, os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental reconhecem as variações da linguagem envolvidas, conseguem identificá-las, além de conseguir simplificar e formular hipóteses, ainda que de forma implícita nas resoluções. Os usos da linguagem contribuem, ainda, para a formação de conceitos matemáticos e mostram como os alunos lidam com os símbolos matemáticos, como elaboram um modelo matemático, bem como especificidades das atividades de modelagem quando desenvolvidas por alunos dos diferentes anos desse nível de escolaridade.

Considerando a linguagem utilizada em atividades de modelagem no Ensino Superior, o trabalho de Sousa (2017) mostra que, nas disciplinas de Equações Diferenciais

---

[16] Isso significa que a Matemática é normativa segundo Wittgenstein (1987), trataremos disso no próximo capítulo.

Ordinárias e Introdução a Modelagem Matemática de um curso de Licenciatura em Matemática, de uma universidade pública, os usos da linguagem matemática estão associados à matemática escolar. Em relação à escolha dos conteúdos matemáticos no desenvolvimento das atividades de modelagem por parte dos alunos, ela acontece em função do que eles observam nas situações-problema, do problema idealizado. Logo, a justificativa dos alunos a respeito de matemática usada nas atividades de modelagem é com base nos conteúdos que eles estudam na graduação e nos que vão ensinar como professores na Educação Básica.

No trabalho de Seki (2019), os usos que os alunos fazem da linguagem, nas atividades de modelagem matemática, na disciplina de Matemática Financeira, de um curso de Licenciatura em Matemática, de uma universidade pública, são evidenciados na inter-relações entre a Matemática e a situação-problema, da linguagem matemática e da própria modelagem matemática, na compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática.

Oliveira (2018), em seu trabalho com alunos de um curso de tecnologia, de uma Faculdade de Tecnologia, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, mostra que, nas atividades de modelagem associadas ao conceito de função, os alunos fazem diferentes usos das linguagens matemáticas (algébrica, gráfica e tabular), de forma não fragmentada, no estabelecimento de relações entre os conceitos, sentido que os alunos atribuem ao desenvolvimento das atividades, uso de conceitos associados a Eletricidade Básica e Eletrotécnica.

No que tange ao apresentado anteriormente acerca dos usos da linguagem nos trabalhos desenvolvidos no GRUPEMMAT e olhando para o nosso trabalho, o uso da linguagem está associado ao modo como os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental articulam informações a respeito das situações que eles investigam com conceitos e ferramentas matemáticas para apresentar uma solução para o problema que se propõe nessa situação.

2 PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA DE LINGUAGEM

Neste capítulo abordamos a perspectiva filosófica da linguagem de Wittgenstein. Organizamos o capítulo do seguinte modo: algumas considerações a respeito de Wittgenstein; a Linguagem na perspectiva filosófica de Wittgenstein; Linguagem, Matemática e Wittgenstein.

2.1 SOBRE WITTGENSTEIN

Ludwig Josef Johann Wittgenstein foi um filósofo austríaco que nasceu em Viena no ano de 1889. Wittgenstein era o filho caçula de uma família vienense rica, viveu em um lar como ele mesmo denominou de "bom treinamento intelectual pré-escolar", que propiciou contato com um centro de vida artística, em especial com a música do classicismo vienense (GLOCK, 1996).

O início da vida acadêmica de Wittgenstein aconteceu na Universidade de Manchester, em que o filósofo começou a estudar engenharia aeronáutica. A leitura da obra do lógico e matemático Gottlob Frege despertou o seu interesse pela filosofia. Na universidade, inscreveu-se inscreveu no curso de Bertrand Russell no Trinity College, em Cambridge, sob a influência de Gottlob Frege. O contato com esses dois filósofos influenciou a primeira fase da filosofia de Wittgenstein (GOTTSCHALK, 2012).

A primeira fase da filosofia wittgensteiniana tem como pilar a obra *Tractatus Logico-philosophicus* publicada no ano de 1921. Trata-se de um dos clássicos da filosofia, em que Wittgenstein por meio da lógica, buscou uma essência para a linguagem, considerando-a linguagem uma estrutura universal para além do que é observável.

Segundo Glock (1996), a forma lógica essencial da linguagem é idêntica à forma metafísica essencial da realidade, uma vez que encerra os traços estruturais que a linguagem e a realidade precisam ter em comum para que aquela possa representar esta (GLOCK, p.26, 1996). Nessa perspectiva, a linguagem é entendida como representativa, descritiva do mundo, dos conceitos e objetos, uma espécie de veículo que tem a finalidade de expressar nossas ideias ou uma "roupagem que veste" nosso pensamento.

Wittgenstein, durante a Primeira Guerra Mundial, decidu tornar-se professor primário no interior da Áustria e, nessa atuação, dedicou-se à elaboração de um dicionário ortográfico junto às crianças nas escolas em que atuou. Segundo Gottschalk (2012), a organização desse dicionário tinha como objetivo facilitar a aprendizagem da ortografia e da gramática e resultou numa publicação, no ano de 1926, que continha por volta de 5700 palavras.

No dicionário eram empregados dialetos utilizados pelos alunos que precisavam ser incluídos na forma culta, palavras compostas que ofereciam dificuldade para as crianças e palavras estrangeiras, caso apresentassem uso universal. O fundamental, segundo Gottschalk (2012), era que

> O critério último para a seleção e composição das palavras era o uso que se fazia delas em contextos específicos do cotidiano do aluno e não uma ordem lógica determinada por critérios externos e distantes do contexo do aluno. As palavras significativas eram as que eram utilizadas efetivamente pelas crianças (GOTTSCHALK, 2012, p.9-10).

Interpretadores de Wittgenstein, no decorrer do tempo, ponderam que a sua experiência como professor primário contribuiu para que, aos poucos, a concepção referencial da linguagem do filósofo, apresentada na obra Tractatus, fosse se modificando, passando a considerar o significado das palavras mediante o seu uso. Segundo seus comentadores Bartley (III, 1978), Moreno (2003) e Gottschalk (2012, 2014), Wittgenstein percebeu que a linguagem parecia cumprir funções muito diferentes. Não se tratava mais apenas de expressar uma relação de verdade acerca da proposições, mas de pensar que as relações entre linguagem e mundo são mais complexas.

Segundo Izmirli (2013) e Souza (2018), a atuação de Wittgenstein como professor na Universidade de Cambridge foi de grande importância para o que viria a se constituir a segunda fase da filofofia de Wittgenstein, que tem como ícone a obra Investigações Filosóficas (1953). Nessa obra, Wittgenstein carcterizou sua nova filosofia e indicou claramente que a relevância da linguagem está no seu funcionamento, nos seus usos. Para exemplificar, vejamos o aforismo 60.

> Se digo: “Minha vassoura está no canto”, - é esta, realmente, uma asserção acerca do cabo e da vassoura? Em todo caso, poder-se-ia substituir a asserção por uma outra que indique a posição do cabo e a posição da escova. E esta asserção é, por certo, uma forma mais analisada da primeira. – Mas, por que a chamo de “mais analisada”? – Ora, se a vassoura se encontra ali, isto significa que ali têm que estar cabo e escova e dispostos um ao outro numa determinada posição; e isto estava anteriormente como que escondido no sentido da frase e é proferido na frase analisada. Portanto, aquele que diz que a vassoura está no canto, na verdade, tem em mente: ali estão o cabo e a escova, e o cabo está enfiado na escova? – Se perguntássemos a alguém se ele tem isso em mente, certamente diria que não pensou especialmente no cabo ou especialmente na escova. E esta seria uma resposta correta, pois ele não queria falar especialmente nem do cabo da vassoura nem da escova. Imagine você, ao invés de dizer a alguém “Traga-me a vassoura!”, dissesse “Traga-me o cabo da vassoura e a escova que está pregada nele!” – A resposta seria: Você quer a vassoura? E por que expressa isto de forma tão estranha?” – Ele quer,

> portanto, entender melhor a frase mais analisada? – Poder-se-ia dizer que esta frase realiza o mesmo que a frase usual, mas por um caminho mais complicado (WITTGENSTEIN, 2016, §60, pp48-49).

Para Gottschalk (2012),

> Como se vê através desta passagem das Investigações Filosóficas, cai por terra a concepção de significado como decomposição em unidades mínimas de sentido, pois se compreende a proposição "minha vassoura está no canto" independente de uma definição exata de seus constituintes, analisados exaustivamente. Não preciso de uma definição exata das partes da vassoura para compreender o que está sendo dito (GOTTSCHALK, 2012, p.13).

É essa segunda fase da perspectiva de linguagem de Wittgenstein que nos interessa nesta pesquisa.

2.2 LINGUAGEM: A PERSPECTIVA DE WITTGENSTEIN

A segunda fase da filosofia wittgensteiniana é caracterizada pelo entendimento de que o significado na linguagem se dá a partir de seu funcionamento e dos seus usos. É com esse entendimento do modo pragmático da linguagem que Wittgenstein revolucionou a filosofia da linguagem.

Uma das comparações que Wittgenstein faz com o funcionamento da linguagem é com uma caixa de ferramentas.

> Pense nas ferramentas dentro de uma caixa de ferramentas: encontram-se aí um martelo, um alicate, uma serra, uma chave de fenda, um metro, uma lata de cola, cola, pregos e parafusos. – Assim como são diferentes as funções desses objetos, são diferentes as funções das palavras. (E há semelhanças aqui e ali) (WITTGENSTEIN, 2016, p.20).

Desse modo, é possível ponderar que as palavras podem ser utilizadas para diferentes propósitos. Se pensarmos no significado da palavra *oceano*, por exemplo, pode vir à nossa mente um dos significados que o dicionário Aurélio da Língua Portuguesa apresenta: "a vasta extensão de águas salgadas que cobre maior parte da Terra; mar" (FERREIRA, 2008, p.588). No entanto, o uso dessa mesma palavra em outro contexto pode assumir outro significado.

Vejamos uma das estrofes da letra da múscia *Oceano* do cantor e compositor brasileiro Djavan Caetano Viana:

> *"Vem me fazer feliz porque eu te amo*
> *Você deságua em mim, e eu, oceano*

Me esqueço que amar é quase uma dor
Só sei viver se for por você!"

Nesse contexto, o uso do substantivo masculino *oceano* pode ser interpretado com significados diferentes. O compositor da música parece transformar *oceano* no verbo *oceanar*[17], quando diz: *e eu*, *oceano*. Nesse caso, há uma ação, *oceanar*, que, no contexto da música, traz à tona o romantismo almejado pelo compositor na música. Por outro lado, o compositor também pode valer-se do significado de *oceano* para dizer que recebe o amor da pessoa amada da forma como o oceano recebe as águas. Nesse caso, oceano é um substantivo.

Assim, "fazemos diversos usos de uma mesma palavra, isto é, uma palavra pode ser usada com significados muito diferentes em situações diferentes." (VILELA, 2013, p.185).

Ao uso das palavras, em diversos contextos, Wittgenstein denominou *jogos de linguagem*. Na obra Investigações Filosóficas, o filósofo escreve:

> A expressão "jogo de linguagem" deve salientear aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida[18]. Tenha presente a variedade de jogos de linguagem nos seguintes exemplos, e em outros:
> Ordenar, e agir segundo ordens –
> Descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas –
> Produzir um objeto de acordo com uma descrição (desenho) –
> Relatar um acontecimento –
> Fazer suposições sobre o acontecimento –
> Levantar uma hipótese e examiná-la –
> Apresentar os resultados de um experimento por meio de tabelas e diagramas –
> Inventar uma história; e ler –
> Representar teatro –
> Cantar cantiga de roda –
> Adivinhar enigmas –
> Fazer uma anedota; contar –
> Resolver uma tarefa de cálculo aplicado –
> Traduzir de uma língua para a outra –
> Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar
> (WITTGENSTEIN, 2016, §23, p. 27).

Segundo Gottschalk (2014), o uso da expressão *jogo de linguagem* tem como finalidade

> se referir às atividades envolvidas nas palavras e que, junto com elas, constituem o significado de nossas expressões linguísticas. A analogia com jogo tem a ver, por um lado, com as regras que se seguem e, por outro, com as proposições gramaticais que permitem as inferências que se fazem dentro de nossas diferentes atividades linguísticas (GOTTSCHALK, 2014, p.42).

---

[17] Exemplo dado pela Professora Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco nas aulas da disciplina 2MAT187 A Avaliação da Aprendizagem Escolar.
[18] Mais adiante no texto, vamos tecer algumas considerações a respeito de *forma de vida*.

O acréscimo da palavra *jogo* ao conceito de linguagem não é fortuito. Com isso, porém, Wittgenstein quer enfatizar o fato de que a linguagem não se reduz a um mero aglomerado de palavras: fragmentos do empírico, como ações, estados mentais, determinados objetos etc. são incorporados pela linguagem e passam a ser utilizados como instrumentos linguísticos, fazendo parte da constituição de significados e de suas conexões (GOTTSCHALK, 2008, p.82).

Wittgenstein chama a atenção para os diversos tipos de jogos: jogos de tabuleiro, os jogos de cartas, jogo de bola, os jogos de combate, jogo de xadrez, jogo de ludo, jogo de paciência, jogo de tênis. O que há em comum entre todos esses jogos?

> "[...] Não diga: "Tem que haver algo que lhes seja comum, do contrário não se chamariam 'jogos'" – mas olhe se há algo que seja comum a todos. – Porque, quando olhá-los, você não verá algo que seria comum a todos, mas verá semelhanças, parentescos, aliás, uma boa quantidade deles" (WITTGENSTEIN, 2016, §66).

Assim, Wittgenstein afirma: "Chamarei de 'jogo de linguagem' também a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada" (WITTGENSTEIN, 2016, p.19).

Para Wittgenstein (2016, § 43), "o significado de uma palavra é o seu uso na linguagem". Nesse contexto, Sousa, Tortola e Almedia (2017) entendem que

> O significado, portanto, na perspectiva de Wittgenstein, é algo que não existe para além da linguagem, aliás, para o autor, tudo o que conhecemos, o que dizemos, o que interpretramos e o que pensamos ocorre ou se manifesta por meio da linguagem. É na e pela linguagem que se constituem os significados (SOUSA; TORTOLA; ALMEIDA, 2017, p.6).

Na obra Investigações Filosóficas, Witttgenstein (2016, § 66) sugere ao leitor que não pense, mas olhe como as palavras são utilizadas, nos diferentes *jogos de linguagem* em que estão inseridas. Nesse sentido, o significado está vinculado a um contexto que é resultado de uma construção histórica e social. Para ele, as palavras são utlilizadas de diversos modos e apresentam certo parantesco umas com as outras, análogo ao parantesco que há entre os membros de uma família.

> Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que por meio das palavras "semelhanças familiares"; pois assim se sobrepõem e se entrecuzam as várias semelhanças que existem entre os membros de família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, andar, temperamento etc. etc. – E eu direi: os "jogos" formam uma família (WITTGENSTEIN, 2016, §67).

Segundo Glock (1996), podemos entender a noção de semelhança de família não como um fio único que perpassa todos os *jogos de linguagem*, mas como diferentes fios em uma corda que leva à constituição de *jogos de linguagem*.

Isso significa que,

> Quando "olhamos e vemos" se todos os jogos possuem algo em comum, notamos que se unem, não por um único traço definidor comum, mas por uma complexa rede de semelhanças que se sobrepõem e se entrecruzam, do mesmo modo que os diferentes membros de uma família se parecem uns com os outros sob diferente aspectos (compleição, feições, cor dos olhos etc.) (GLOCK, 1996, pp.324-325).

Wittgenstein escreve que "a expressão 'jogo de linguagem' deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida" (WIITGENSTEIN, 2016, §23). Para o filósofo, "o que deve ser aceito, o dado – Poder-se-ia dizer – são formas de vida" (WITTGENSTEIN, 2016, p.292). Segundo Spaniol (1990), há uma associação entre *formas de vida* e *jogos de linguagem* como um dos significados da expressão "Chamarei de 'jogo de linguagem' também a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada (WITTGENSTEIN, 2016, §7, p.18).

A expressão *forma de vida*, em Wittgenstein (2016), está associada a *jogos de linguagem* de modo que, como ele afirma, "Pode-se imaginar facilmente uma linguagem que seja consituída somente de comandos e informes na batalha.[...] – E representar uma linguagem equivale a representar uma forma de vida" (WITTGENSTEIN, 2016, §19, p.23). Para Almeida (2014), essa consideração de Wittgenstein é um exemplo da importância da expressão *forma de vida*, tanto quanto a de *jogo de linguagem*. Com isso, entendemos que diferentes *formas de vida* determinam diferentes *jogos de linguagem*, ou seja, diferentes usos da linguagem estão associados a diferentes *formas de vida*.

Glock (1996) entende que *forma vida* "é uma formação cultural ou social, a totalidade das atividades comunitárias em que estão imersos nossos jogos de linguagem" (GLOCK, 1996, p.174).

Na visão de Moreno (2003), *formas de vida* são

> sistemas regrados de ações convencionais e imersos na prática efetiva de nossa vida com a linguagem; sistemas em que se entrecruzam hábitos, atitudes éticas, concepções a respeito do conhecimento e decisões da vontade. As formas de vida são fundantes e não possuem outro fundamento senão os usos gramaticais do empírico através da linguagem (MORENO, 2003, p.129).

Por sua vez, Spaniol (1990) afirma que o conceito de *forma de vida* vem "situar a linguagem no nível do agir, do comportamento" (SPANIOL, 1990, p.23). Esse conceito responde pelo caráter específico de cada *jogo de linguagem*. A *forma de vida* é intrínseca ao fenômeno da linguagem.

Gottschalk (2008) considera que a expressão *formas de vida* foi utilizada por Wittgenstein para designar "nossos hábitos, costumes, ações e instituições que fundamentam nossas atividades em geral, envolvidas com a linguagem" (GOTTSCHALK, 2008, p. 80).

Outro conceito presente na segunda fase da filosofia wittgensteiniana é o de *regra*. O que é uma regra?

> Uma regra está aí como uma placa de orientação. Ela não deixa em aberto nenhuma dúvida sobre o caminho que devo seguir? Mostra ela em que direção devo ir quando passo por ela: se seguindo a estrada, ou o caminho do campo, ou pelo meio do pasto? Mas onde está dito em qual sentido devo segui-la, se na direção da mão ou (p.ex.) na direção oposta? E se ao invés de uma placa de orientação estivesse ali uma cadeia fechada de placas ou corressem traços de giz sobre o solo, - há apenas uma interpretação para eles? – Posso dizer, portanto, que a placa de orientação não deixa nenhuma dúvida em aberto. Ou antes: algumas vezes ela deixa uma dúvida em aberto, outras vezes não. [...] Joga-se um jogo de linguagem como (2)[19] com o auxílio de uma tabela. Os signos que A dá a B são os caracteres. B tem uma tabela; na primeira coluna estão os signos que são usados no jogo; na segunda, figuras de formas de pedra de construção. A mostra a B um tal caracter; B procura na tabela, olha para a figura que se encontra em frente etc. A tabela é, portanto, uma regra pela qual ele se orienta ao executar a ordem (WITTGENSTEIN, 2016, § 85-86).

Para Gottschalk (2008), as *regras* têm condição de significado e função de paradigmas. Nesse sentido, Sousa (2017, p.60) pondera que as "as regras são colocadas no contexto da atividade humana". Nas diversas atividades humanas, seguimos regras, regras em sala de aula, regras no trânsito, regras para efetuar uma compra, regras para fazer uso de talheres, regras para escrever um trabalho acadêmico.

Para Wittgenstein, seguir uma regra é um "hábito" (WITTGENSTEIN, 2016, § 199), "uma prática" (WITTGENSTEIN, 2016, § 202). Por exemplo, no âmbito da matemática, regra está associada aos conceitos matemáticos. Um hábito, uma prática para obter as raízes de uma equação do segundo grau, por exemplo, pode ser usar a fórmula de Bhaskara como regra. Em outro exemplo, podemos pensar: Qual é o resultado da multiplicação "2 × 3?" Nós sabemos que o produto é 6. Se estivéssemos em uma feira, e perguntássemos qual é o preço de dois abacaxis. A resposta poderia ser "um por três, dois por cinco". Tortola (2016) salienta que os feirantes têm consciência das regras da matemática, cinco é menor do que seis. Mas também sabem que dar um desconto chama a atenção dos clientes. São escritas diferentes, uma se refere ao contexto[20] dos feirantes, enquanto a outra ao da matemática. Desse modo, podemos dizer que há dois usos da linguagem que seguem regras diferentes.

---

[19] O filósofo refere-se ao jogo de linguagem da lajota que é apresentado no Investigações Filosóficas.

[20] A nossa compreensão de contexto nessa perspectiva de linguagem é de *jogos de linguagem* imersos na *forma de vida*.

Sousa (2017, p.61) considera que “regras são advindas de acordos, convenções firmadas por determinada comunidade e que se cristalizam sob a forma de regras”. Para Wittgenstein, “a palavra ‘concordância’ e a palavra ‘regra’ são parentes, são primas”. (WITTGENSTEIN, 2016, §224, p.120), e essa concordância, conforme exposto anteriormente, dá-se na *forma de vida*. Isso significa que “são acordos linguísticos tácitos que aceitamos por fazerem parte de nossos hábitos, costumes e instituições” (SILVEIRA, TEIXEIRA JUNIOR, 2015, p. 215).

Sousa (2011) considera que *regra* não contém em si mesma suas aplicações, faz-se necessário ensino e aprendizagem das regras. *Regras* são passíveis de mal-entendidos ou erros em seu emprego. Saber aplicar uma *regra* em um contexto não significa saber aplicá-la em outro contexto. No entanto, segundo Vilela (2013), as *regras* em um *jogo de linguagem* são preestabelecidas. Isso remete ao clássico exemplo das “lajotas” das Investigações Filosóficas em que dois construtores A e B constroem um edifício. Nessa situação, quando A precisa de uma lajota, por exemplo, grita a palavra “lajota”, o seu ajudante B entende que é necessário “passar uma lajota para A”. Nessa situação há um significado em relação a palavra lajota, uma regra que foi prescritiva. “É o caso em que a significação não se esgota na referência, mas está ligada a uma série de comportamentos codificados por regras explícitas ou por regras de contextos consensuais” (MORENO, 2005, p.81).

Para Silveira (2015),

> saber seguir uma regra é uma capacidade técnica, porém não é mecânica porque ela não contém todos os casos de sua aplicação, que se encontram dentro da gramática de nossa linguagem. A regra não é apreendia de uma só vez, ela surge de uma prática constante (SILVEIRA, 2015, p.177).

As *regras* são regidas pela *gramática*. Para Wittgenstein, o significado de *gramática* difere do sentido usual de uma língua. Gramática se refere a “um conjunto de usos que fazemos de nossas expressões linguísticas que expressam as regras que seguimos em nossa linguagem, ou mesmo em diferentes jogos de linguagem” (GOTTSCHALK, 2015, p.315).

Mendes e Vilela (2011) consideram que é por meio da *gramática* que se pode fazer uso das expressões em diferentes contextos. A *gramática* indica as regras de uso das palavras, bem como das *proposições gramaticais*.

Segundo Moreno (2003), para Wittgenstein, *gramática* diz respeito ao conjunto de usos que fazemos das palavras, que podem ser expressos por meio de um sistema de regras, que, quando cristalizados e sistematizados em *regras*, elucidam o significado dos conceitos e enunciados.

> O termo "gramática" subsume, em Wittgenstein, os diversos conjuntos de tais regras, particulares a cada setor da experiência. É no interior desses conjuntos de regras conceituais, as diferentes gramáticas, que são construídos os diversos sentidos da experiência, ou melhor, é de acordo com essas regras que construímos raciocínios, juízos, hipóteses, descrições e inferências ao combinarmos os conceitos, e que adquirimos, também, certezas e dúvidas (MORENO, 2003, p. 116).

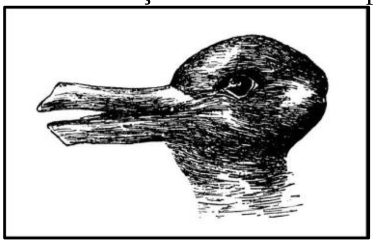
Para Gottschalk (2004), *gramática* designa as *regras* constitutivas da linguagem e sua organização. Essas *regras* possibilitam determinar se há ou não sentido em dizer uma palavra. Por exemplo, a palavra altura de um triângulo significa "segmento que une perpendicularmente um vértice ao lado oposto!" (SILVEIRA, 2008, p.94). A gramática dessa palavra determina que o uso dessa palavra no *jogo de linguagem* da matemática segue essa *regra*. Em outro *jogo de linguagem,* a palavra altura pode designar a estatura de uma pessoa na posição vertical.

Outro exemplo: a palavra triângulo, no *jogo de linguagem* da matemática, significa polígono rígido fechado de três lados, no entanto, triângulo também pode remeter a uma placa de trânsito, que lembra o modo como dirigir em conformidade às regras de trânsito; no *jogo de linguagem* musical, trata-se de um instrumento musical (GOTTSCHALCK, 2004).

Do olhar para o uso da linguagem emerge o outro conceito na perspectiva de Wittgenstein: *ver como*.

Na segunda parte das Investigações Filosóficas, Wittgenstein apresenta uma figura retirada de Jastrow (1901) em que o leitor, ao olhar, pode ver um pato ou um coelho[21], conforme o olhar que é direcionado.

Figura 2: Cabeça de coelho ou de pato



Fonte: Silveira e Silva (2014).

Para Wittgenstein (2016), olhar para essa imagem tem relação com a interpretação, pois ela é vista como é interpretada.

[21] Considerações a respeito do *ver como* também são apresentadas em outros dois trabalhos: Análise do Conceito De Área Em Uma Atividade de Modelagem Matemática: uma interpretação wittgensteiniana (PEREIRA JUNIOR; AMEIDA, 2018) e O Uso Da Linguagem Em Uma Atividade De Modelagem Matemática (PEREIRA JUNIOR; ALMEIDA, 2019).

> Vejo, realmente, cada vez algo diferente, ou apenas interpreto o que vejo de uma maneira diferente? Estou inclinado a dizer a primeira coisa. Mas por quê? – Interpretar é pensar, agir; ver é um estado. Bem são fáceis de reconhecer os casos em que interpretamos. Se interpretamos, então fazemos hipóteses que podem revelar-se falsas. – “Vejo essa figura como um...” pode ser tão pouco verificada (ou só no sentido) quanto “Vejo um vermelho brilhante”. Existe, portanto, uma semelhança no emprego de “ver nos dois contextos. Não pense, porém, que você saberia de antemão o que “estado de ver” significa aqui! Deixe que o uso lhe ensine o significado (WITTGENSTEIN, 2016, p.276).

Gottschalk (2006) considera que o ato de ver exige domínio de uma técnica ou de uma série de técnicas. Uma criança, por exemplo, no início de sua escolarização, quando começa a aprender o que é um triângulo, vê objetos que têm a forma triangular, desenha vários tipos de triângulos. Por meio de gestos ostensivos, desenhos, objetos empíricos, a criança começa a ver quando é possível empregar a palavra triângulo.

> Em um segundo momento, já de posse do conceito de triângulo, uma outra atitude pode ser introduzida, a partir do mesmo conceito, a saber, a organização dos aspectos de modo diferente: “veja esse lado agora como base e esse ponto como vértice”. Aqui surge uma diferenciação essencial entre essas duas atitudes, pois essa variação de aspectos **pressupõe** que sejamos capazes de empregar essa figura como espera no interior da linguagem matemática, ou seja, que saibamos trazer um objeto de uma forma triangular se isto nos for pedido, ou que sejamos capazes de classificá-la como sendo um triângulo, enfim, que apresentemos algum indício público de que vemos um triângulo (GOTTSCHALK, 2006, p.77).

Nas palavras de Wittgenstein (2016),

> No triângulo posso agora ver isto como vértice, aquilo como base – agora isto como vértice e aquilo como base. – É evidente que para o aluno que somente agora trava conhecimento com os conceitos vértice, base, etc., as palavras “Agora vejo isto como vértice” não lhe pode dizer nada ainda. Mas não tenho isto em mente como proposição empírica. Ele vê isto assim diríamos isto somente de alguém que está em condições de fazer certas aplicações da figura com agilidade. O substrato desta vivência é o domínio de uma técnica (WITTGENSTEIN, 2016, parte II, §11, p. 272).

Ver aspectos de um triângulo organizados de outro modo, “isto como vértice e aquilo como base, pressupõe um certo domínio do emprego da palavra triângulo” (GOTTSCHALK, 2006, p.78). Em Silva (2011), há o exemplo de uma situação hipotética em que um professor, ao ensinar o Teorema de Pitágoras para um aprendiz, resolve exemplos com vários triângulos retângulos, com medidas diferentes, e, dependendo da situação, calcula a medida da hipotenusa, ou dos catetos. Imagine-se que o aprendiz compreendeu as explicações feitas pelo professor e é capaz de resolver exercícios semelhantes. O professor espera que o aprendiz, por meio dos seus ensinamentos, calcule a medida da diagonal de um retângulo de base “a” e altura “h”. No entanto, o aluno, ao se deparar com tal situação, não consegue resolver a questão e, ainda, pode dizer para o professor que não aprendeu tal conteúdo.

Se um professor espera que seus alunos consigam aplicar uma *regra* de um contexto em outro, é preciso que ele oportunize isso, não adianta acreditar que a aprendizagem de uma *regra* em um contexto fará com que o aprendiz a aplique em outro. Perceber que, ao traçar a diagonal do retângulo, determina dois triângulos retângulos depende do domínio de técnicas, depende do ensino de um novo modo de ver (SILVA, SILVEIRA, 2014).

Ver o triângulo de um de modo ou de outro, bem como ver a diagonal de um retângulo como a hipotenusa de um triângulo retângulo, um coelho ou um pato, mostra que o *ver como* é ver aspectos que aparentemente não são visíveis, é um novo modo de *ver,* é um interpretar, e isso depende do domínio de técnicas. ‘Técnica, aqui, no sentido de um ‘saber-fazer’, do domínio do uso de regras. Quando dizemos ‘Eu sei...’, estamos dizendo algo semelhante a ‘Eu posso...’ ou ‘Sou capaz de...’ ou, ainda, ‘Eu compreendo’ (SILVA, SILVEIRA, 2014, p.25).

2.3 LINGUAGEM, MATEMÁTICA E WITTGENSTEIN

Wittgenstein rejeitou as correntes filosóficas da matemática tais como o intuicionismo, o formalismo e o logicismo (SOUSA, 2017). O filósofo afirmava que a matemática se fundamenta nos *jogos de linguagem*. “Matemática – eu diria – não apenas ensina resposta a uma pergunta; mas todo um jogo de linguagem, com perguntas e respostas” (WITTGENSTEIN, 1987, p. 322).

Wittgenstein considera a matemática como uma construção humana.

> [...] Agora eu poderia dizer: o matemático sempre inventa novas formas de representação. Alguns, estimulados por necessidades práticas; outros, por necessidades estéticas, e vários outros ainda. E imagine aqui um arquiteto de jardins que desenha estradas para uma instalação de jardineira; pode muito bem acontecer que você os trace na prancheta apenas como bandas ornamentais e não pense em nada que alguém os pisará um dia (WITTGENSTEIN, 1987, p. 74).

Em outra passagem das Observações sobre os Fundamentos da Matemática, encontramos a asserção: “O matemático é um inventor, não um descobridor” (WITTGENSTEIN, 1987, p. 74). Para o filósofo, a matemática é um tipo de *jogo de linguagem*, de modo que o conhecimento matemático, proposições, teoremas, conceitos, são formas de expressão matemática, são construções que acontecem na mente de cada matemático que participa do *jogo de linguagem* (IZMIRLI, 2013). Ainda que um conceito matemático tenha origem em alguma situação empírica, quando é formalizado, não depende mais dessa situação, torna-se uma *regra* matemática.

Para Gottschalk (2008), a matemática é um dos *jogos de linguagem* que fazem parte da *forma de vida* de professores e pesquisadores da área de matemática. No *jogo de linguagem* da matemática, faz sentido fazer afirmações, com base nas definições, teoremas, fórmulas, técnicas de cálculo, porque há proposições que funcionam como *regras* que determinam como jogar nesse *jogo de linguagem.*

Segundo Gottschalck (2004, p. 325), "uma proposição matemática é uma estipulação, ou um resultado de estipulações de acordo com um método definido. Para Wittgenstein (1987),

> a proposição matemática tem a dignidade de uma regra. A proposição matemática determina um caminho. A proposição matemática me diz: prossiga assim! [...] Elas (as proposições) não são proposições da experiência, mas são princípios de juízo (WITTGENSTEIN, 1987, p. 77, 326, 368).

Para jogar *o jogo de linguagem* da matemática, é preciso seguir a *regra*. Para Silveira (2014), seguir uma regra matemática é um *jogo de linguagem* e, para jogar, é preciso compreender a descrição da regra. Ainda para a autora,

> O processo de seguir uma regra matemática não é mecânico e a regra não contém em si todos os casos de sua aplicação. A regra é pública, ela advém de costumes de atitudes coletivas. Ela resulta de uma prática constante e não se segue uma regra uma única vez, a regularidade é necessária. Quando o sujeito segue uma regra de forma que não é aceita pela comunidade, ele não está aplicando corretamente a regra, e sim outra regra. Saber seguir uma regra é uma capacidade técnica. A relação entre a regra e sua aplicação é interna ou gramatical, ela se faz no interior da linguagem (SILVEIRA, 2015, p. 260-261).

Para Wittgenstein, a matemática é normativa. Os enunciados matemáticos têm o caráter de regras, a Matemática é como uma *gramática* que possui regras próprias que são colocadas em prática no interior dos *jogos de linguagem* que fazem parte das nossas formas de vida. Segundo Vilela (2007),

> Quando dizemos que a matemática é normativa, queremos dizer que ela indica não como a coisa é, mas como deve ser, ou seja, quais são as regras que devem ser seguidas para que a coisa se comporte como definição. Isso porque, as regras estão profundamente enraizadas nas formas de vida. As regras conduzem, de certo modo, os modos de proceder, sem que uma decisão consciente esteja em jogo (VILELA, 2007, p.153).

O entendimento de Wittgenstein da matemática como normativa, de que as proposições gramaticais estruturam e dão sentido à experiência empírica, vai ao encontro da concepção de modelagem matemática desta pesquisa. Os encaminhamentos do modelador visam identificar um problema oriundo de uma situação de natureza empírica (situação real) e fazer uso de proposições matemáticas para resolver esse problema mediado pela matematização, que requer simplificações, formulação de hipóteses, seleção de variáveis. A matemática não é refutada, caso o modelo matemático obtido não concorde com os dados reais. O que se pode conjecturar é que é preciso admitir outros *modos de ver* a situação, por isso novas proposições matemáticas normativas são buscadas/usadas para obter outro modelo matemático. Assim, novos usos da linguagem podem ocorrer, novos conceitos e ferramentas matemáticas podem emergir, de modo que é preciso ponderar que novos *jogos de linguagem* irão se constituir.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos os procedimentos metodológicos da pesquisa, o contexto em que aconteceu a coleta de dados e os procedimentos de análise.

3.1 O CONTEXTO DA PESQUISA E A COLETA DE DADOS

As atividades de Modelagem Matemática foram desenvolvidas no segundo semestre de 2018 por alunos de duas turmas, uma do 6º ano e outra do 9º ano do Ensino Fundamental, cujo professor de Matemática é o primeiro autor da pesquisa[22]. Identificam-se, portanto, dois papéis do doutorando, o de professor e o de pesquisador, cabendo-lhe, simultaneamente, a função de ensinar e de pesquisar.

A primeira etapa da pesquisa a que se refere o presente relatório foi a definição de temáticas que seriam investigadas pelos alunos nas atividades, que se iniciou em 2017, ano em que as atividades foram desenvolvidas com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental e do 2º e 3º ano do Ensino Médio sob a forma de um projeto piloto. Os problemas propostos para esses alunos e os modelos por eles obtidos foram discutidos no GRUPEMMAT.

A escolha dos temas das atividades aconteceu de modo que as atividades pudessem gerar problemas que pudessem ser investigados pelos alunos das faixas etárias de 6º e 9º ano do Ensino Fundamental e que, também, contemplassem os conteúdos de matemática que os alunos dessas séries estudam.

No segundo semestre de 2018, esses mesmos temas foram propostos para os alunos do 6º e do 9º ano. Foi assinado um termo de consentimento pela direção da escola e pelos pais dos estudantes para que as informações e registros dos alunos e gravações de áudio e de imagens das aulas pudessem ser usadas.

A pedido da direção da escola, foi realizada uma reunião com os pais dos alunos dessas turmas com a finalidade de apresentar-lhes detalhes da realização da pesquisa e solicitar-lhes a autorização para utilizar os dados obtidos por gravações de áudio e vídeo das ações dos alunos nas aulas em que as atividades seriam desenvolvidas. Participaram da pesquisa 29 alunos do 6º ano e 32 alunos do 9º ano. A idade dos alunos do 6º ano variava de 10 a 12 anos e de 14 a 16 anos, no 9º ano.

[22] Utilizo a expressão primeiro autor da pesquisa, porque considero a minha orientadora como minha parceira na pesquisa realizada.

As atividades de Modelagem Matemática foram desenvolvidas em consonância com os momentos de familiarização dos alunos com a Modelagem Matemática conforme sugerem Almeida e Dias (2004).

Quadro 1: As atividades de modelagem matemática desenvolvidas

Tema da Atividade	Turmas que participaram	Momento de familiarização dos alunos com a modelagem matemática
Fotografia	6º ano 9º ano	Primeiro momento
Painel Triedro	6º ano 9º ano	Segundo momento
Quantidade de tinta para pintar paredes externas do colégio	6º ano	Terceiro momento

Fonte: Elaborado pelo autor.

No quadro 1, apresentamos os temas das atividades que cada turma de alunos desenvolveu, bem como o momento de familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática em cada situação particular.

O desenvolvimento das atividades ocorreu durante o horário de aula, visto que o professor pesquisador também era professor das turmas. Foram formados grupos de de 2 a 5 alunos para o trabalho em sala com as duas turmas. A composição dos grupos, em todas as atividades, foi feita conforme a escolha dos alunos. O professor procurou não interferir na formação dos grupos, dando autonomia para os alunos.

Os dados da pesquisa consistem em gravações de áudios e de imagens das falas dos alunos, diálogos dos alunos com o professor, fotografias feitas durante o desenvolvimento de todas as atividades de modelagem, bem como registros dos alunos, sejam do caderno sejam dos relatórios das atividades entregues pelos alunos.

Foram utilizados códigos para o uso dos dados da pesquisa. No momento em que os alunos começavam a desenvolver as atividades, o professor atribuía um número para cada grupo, por exemplo, G1, G2, G3 etc., nas duas turmas. Quanto aos alunos, o código adotado foi o seguinte: uma letra seguida do algarimo 6 para alunos do 6º ano e do 9 para alunos do 9º ano seguidos do número do aluno na relação de nomes da turma. Por exemplo: A6.1 significa aluno do 6º ano que é o primeiro na relação nominal.

3.2 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA E PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS

3.2.1 A CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Trata-se de uma pesquisa qualitativa em que as análises possibilitam apresentar inferências e reflexões com relação à constituição de *jogos de linguagem* em atividades de modelagem matemática.

Para Garnica (2012, p. 99), o adjetivo qualitativa é adequado para as pesquisas que reconhecem:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-la podem ser (re) configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas. Aceitar esses pressupostos é reconhecer, em última instância, que mesmo esses pressupostos podem ser radicalmente reconfigurados à luz do desenvolvimento das pesquisas

Para Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa tem as seguintes características: a fonte direta de dados é o ambiente natural; é descritiva; o interesse reside mais no processo do que nos resultados ou produtos; o significado é de importância vital.

3.2.2 A ANÁLISE DOS DADOS

A presente pesquisa visa investigar a constituição de *jogos de linguagem* em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

A caracterização dessa constituição de *jogos da linguagem*, por um lado, vai se fundamentar na análise das possíveis articulações entre informações relativas à situação investigada com conceitos e ferramentas matemáticas para apresentar uma solução para o problema que os alunos se propõe a resolver nessa situação. Nesse contexto, a inclusão de atividades de modelagem matemática pode ser analisada relativamente ao seu potencial de estruturar aulas de matemática em que a articulação da matemática com fenômenos da realidade pode ser explorada. Por outro lado, indícios de constituição de *jogos de linguagem* serão pesquisados nos procedimentos matemáticos dos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

Com essa finalidade, a atenção é dirigida às ações e aos procedimentos dos alunos e do professor em cada uma das fases da modelagem matemática. Para isso, o nosso olhar se volta para:

- as interpretações que os alunos fazem das situações-problema, das informações relativas a essas situações e do problema formulado a partir delas;
- os usos dos conceitos e ferramentas matemáticas dos alunos para resolver os problemas e a interpretação que realizam dos resultados obtidos diante da situação real que originou a investigação.

Para investigar a constituição de *jogos de linguagem* dos alunos nessas atividades, o processo de análise compreende duas etapas, inciando com uma análise local de três atividades de modelagem matemática desenvolvidas, que visa elucidar aspectos específicos de cada atividade em relação aos *jogos de linguagem*. Em seguida, faz-se uma análise global visando reunir e articular elementos relativos à análise local de cada atividade. Desta análise, devem emergir categorias de constituição de *jogos de linguagem* em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos do Ensino Fundamental em aulas regulares de Matemática.

4. ANÁLISE LOCAL DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Neste capítulo, apresentamos a análise local de três atividades. No Quadro 2, estão especificadas as atividades analisadas por cada turma de alunos, bem como o mommento de familiarização dos alunos com a modelagem matemática a que se refere cada atividade.

Quadro 2: As atividades analisadas

Tema da Atividade	Turmas que participaram	Momento de familiarização dos alunos com a modelagem matemática
Fotografia	6º ano 9º ano	Primeiro momento
Painel Triedro	6º ano 9º ano	Segundo momento
Quantidade de tinta para pintar paredes externas do colégio	6º ano	Terceiro momento

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1 ATIVIDADE *FOTOGRAFIA*

A atividade *Fotografia* foi proposta pelo professor para as duas turmas. Foi uma atividade do primeiro momento de familiarização, conforme caracterizado em Almeida e Vertuan (2014). Durante o desenvolvimento da atividade houve diálogo entre os alunos e professor e entre os alunos visando estruturar os procedimentos para desenvolver a atividade.

Os alunos das duas turmas foram orientados *a priori* a tirar uma fotografia de um local elevado, por exemplo, uma igreja, um sobrado, um prédio, o prédio da escola, uma árvore, um poste, a parede de um *shopping*, de modo que um dos integrantes de cada grupo aparecesse na fotografia ao lado ou na frente do local escolhido. Os alunos foram convidados a estimar, com auxílio da fotografia, a altura do local escolhido por eles.

Participaram da atividade 29 alunos do 6º ano, que formaram 8 grupos constituídos de 2 a 5 alunos cada um. No 9º ano, participaram 32 alunos que trabalharam em 9 grupos de 3 e 4 alunos em cada um. A duração da atividade foi de 6 aulas no 6º ano e de 7 aulas no 9º ano.

Vamos apresentar os encaminhamentos dos grupos.

a) 6º ano: G1, constituído pelos alunos A6.6, A6.11, A6.15, A6.20; G2, pelas alunas A6.9, A6.13, A6.25 e G5, pelas alunas A6.10, A6.22, A6.24, A6.27, A6.28

b) 9º ano: G1, constituído pelos alunos A9.25, A9.26, A9.29; G2 formado pelas alunas A9.6, A9.10, A9.22, A9.31; G3 formado pelos alunos A9.17, A9.18, A9. 28 e G8 formado pelos alunos A9.13, A9.14, A9.15, A9.24.

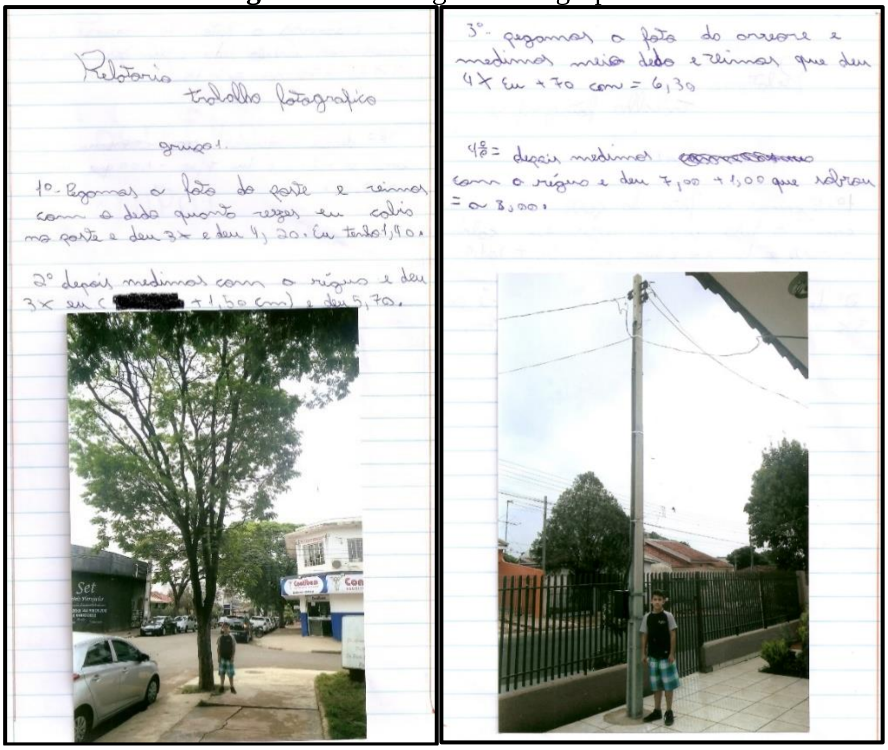
4.1.1 ENCAMINHAMENTO DA ATIVIDADE *FOTOGRAFIA* NO 6º ANO

O desenvolvimento da atividade teve início no 6º ano com o uso da expressão "*distâncias inacessíveis*", que foi utilizada em referência a locais de altura elevada. Os alunos entenderam o uso de expressão e citaram a Igreja Catedral de Maringá como exemplo. Durante essa conversa inicial, os alunos relatavam os locais escolhidos para a fotografia levada para a aula, e foi-lhes apresentado o problema de *estimar a altura do local escolhido com auxílio da fotografia*. No início, houve espanto e exclamações: *"Como?!"*, *"Isso é uma fotografia?!"*, *que* fazem parte da reação dos alunos. Durante a atividade em grupos, foram utilizados alguns instrumentos de medida: o uso do dedo dos alunos, papel, régua.

Apresentamos a seguir a resolução de três grupos de alunos, G1, G2, G5, com a intenção de expor uma ideia geral das estratégias e dos conceitos matemáticos utilizados pelos grupos de alunos no desenvolvimento da atividade. Esses grupos foram escolhidos pela diversidade de procedimentos que usaram.

O grupo G1, constituído pelos alunos A6.6, A6.11, A6.15, A6.20, escolheu dois pontos para estimar a altura, uma árvore e um poste, conforme indica a Figura 3.

Figura 3: As fotografias do grupo G1



Fonte: Relatório do Grupo G1.

Os alunos desse grupo apresentaram duas abordagens para estimar a altura da árvore e do poste com o auxílio das fotografias. Primeiro, utilizaram o dedo de um dos integrantes do grupo como instrumento de medida. Nesse caso, um dos alunos do grupo colocou o dedo sobre as imagens da árvore e do poste e verificou quantas vezes a altura do aluno cabia nas alturas da árvore e do poste. Em seguida, multiplicou os resultados da contagem pela altura do aluno, que é de 1,40 m.

Durante a socialização com a turma, o grupo G1 respondeu às perguntas feitas pelo professor, o que levou o grupo à criação de uma escala para a segunda resolução do problema de *estimar a altura*.

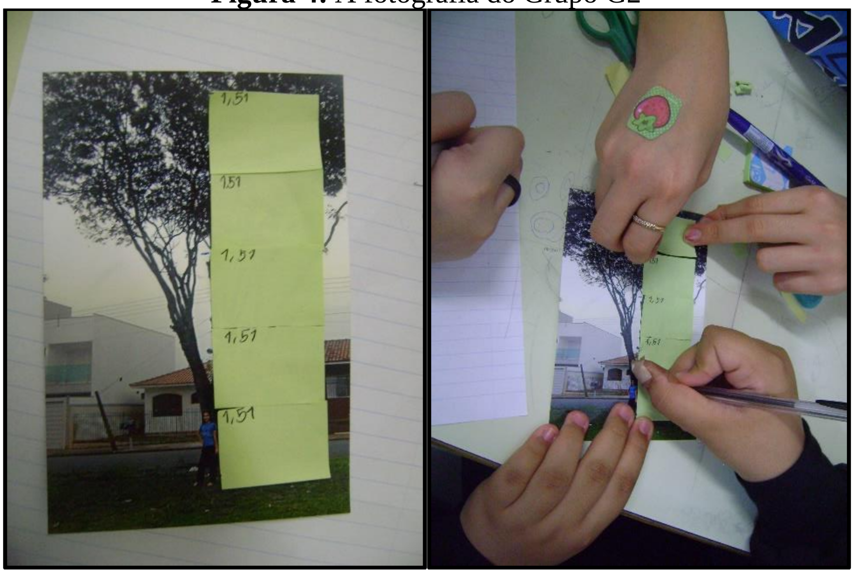
> *Aluno A6.20: Bom, Primeiro, pegamos a foto da árvore e medimos com o meu dedo e vimos que deu 4 vezes eu mais 70 centímetros, e sobrou um espaço, nesse espaço a gente imaginou o seguinte: 1,40 m dividido por dois, a gente imaginou que era 70 centímetros, a gente juntou e deu 6,30 m. Depois o professor perguntou para o nosso grupo sobre o dedo, como os dedos das pessoas variam de tamanho, nós achamos melhor usar a régua, a gente pegou a régua, deu 7 centímetros e sobrou 1 centímetro, consideramos que sobrou 1 metro, com isso deu 8 metros o tamanho da árvore.*
> *Aluno A6.6: Depois de fazer a foto da árvore, a gente fez a do poste. Então, a gente fez a mesma coisa, na foto cabia 3 vezes o Aluno A6.20, daí nós multiplicamos a altura do Aluno A6.20, 1,40 m por 3, e deu 4,20 m. Depois nós medimos com a régua, deu 3 vezes o Aluno A6.20 mais 1,50 m que é o que sobrou, e a gente somou e deu 5,70 m.*
> *PP: Com o uso da régua sobrou 1,5 cm e vocês consideraram isso como 1,50 m?*
> *Aluno A6.20: sim.*

[...]
PP: Vocês consideraram que um centímetro na régua corresponde a um metro na situação real. Por quê?
Aluno A6.20: Nós consideramos que um centímetro na régua é um metro na vida real, porque a foto é pequena. Porque na régua não mostra um metro e sim um centímetro.

Na segunda abordagem para estimar a altura da árvore e do poste, os alunos mediram a altura do aluno que aparece na fotografia com o auxílio de uma régua. Verificaram quantas vezes a altura dele cabia nas alturas da árvore e do poste e estipularam que 1cm nas imagens correspondia a 1 metro na situação real. Os modelos foram obtidos por meio de adição e multiplicação de números decimais. A validação foi feita pelo grupo, que comparou os modelos obtidos com as duas estratégias de resolução. Os alunos consideraram que o segundo modelo é mais viável em função do uso da régua e da escala estabelecida. A validação aconteceu por meio da comparação dos dois modelos, da aprovação do professor e dos colegas que assistiam à socialização e também da busca feita na Internet naquele momento, encontrando que um poste possui 9 m de altura.

O problema do grupo G2, conforme sugere a Figura 4, era estimar a altura de uma árvore. Esse grupo utilizou um pedaço de papel como instrumento de medida para estimar essa altura.

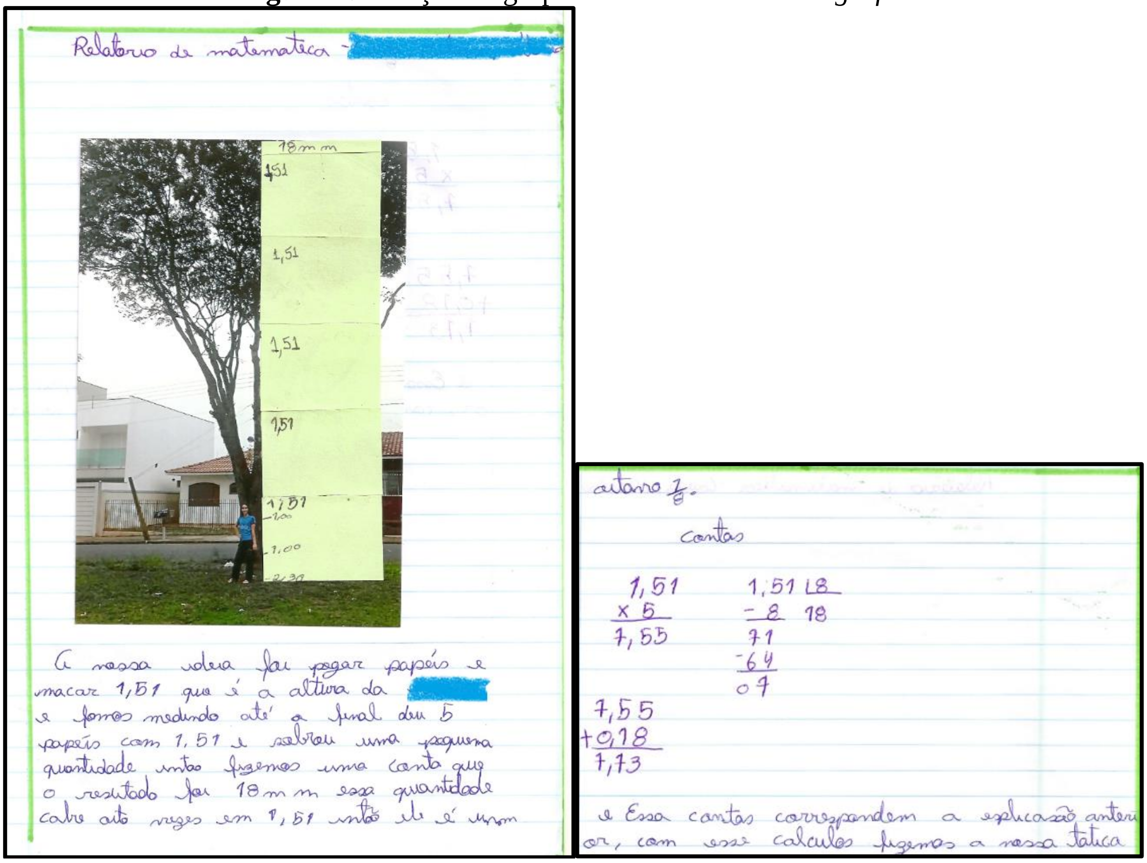
Figura 4: A fotografia do Grupo G2



Fonte: Relatório do Grupo G2.

O relatório entregue pelo grupo G2 mostra as estratégias e os conceitos matemáticos que emergiram na atividade, conforme sugere a Figura 5.

Figura 5: Solução do grupo G2 na Atividade *Fotografia*

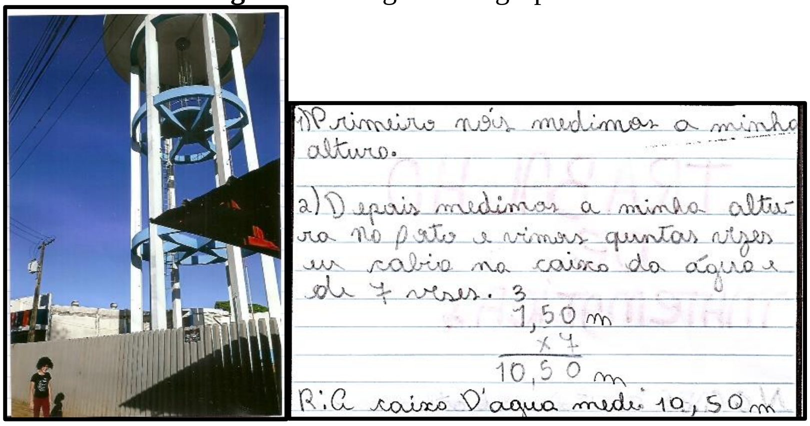


Fonte: Relatório do Grupo G2 6º ano.

As alunas desse grupo utilizaram um papel como instrumento de medida, após testá-lo na imagem da aluna que aparece na fotografia e verem que é possível associar a altura do papel à altura da aluna na imagem. Colaram cinco papéis e, por isso, multiplicaram a altura da aluna por cinco. Sobrou um espaço na imagem, no qual as alunas colaram outro papel menor. Medindo esse papel menor, investigaram qual era a fração desse papel em relação ao papel maior. Após concluírem que a altura do papel menor era um oitavo da altura do papel maior, as alunas dividiram a altura real da aluna que aparece na imagem da fotografia por oito, pois tinham associado à altura da aluna na fotografia a altura do papel maior e somaram o resultado dessa divisão ao resultado da multiplicação da altura da aluna por cinco.

O grupo G5 fotografou uma caixa d'água e fez uso da contagem e da multiplicação de números decimais para estimar a altura com o auxílio da fotografia, conforme indica a Figura 6.

Figura 6: Fotografia do grupo G5



Fonte: Relatório do Grupo G5 6º ano.

Os alunos desse grupo, com o auxílio da fotografia e de uma régua, mediram a altura da aluna na imagem e verificaram quantas vezes a altura dela cabia na altura da caixa d’água e concluíram por sete vezes. Após a contagem, multiplicaram a altura por sete, estimando que a caixa d’água da imagem tem 10,50 m de altura.

4.1.2 ENCAMINHAMENTO DA ATIVIDADE *FOTOGRAFIA* NO 9º ANO

O encaminhamento da atividade com os alunos do 9º ano aconteceu de modo análogo ao do 6º ano. Os alunos fotografaram um local com uma altura elevada, em que um dos integrantes do grupo aparecia ao lado ou na frente do local escolhido. Aqui, os encaminhamentos referem-se a quatro grupos: G1, G2, G3 e G8.

No início da atividade, o professor também usou a expressão “*distâncias inacessíveis*” com os alunos para se referir a locais que têm altura elevada. O uso dessa expressão era conhecido pelos alunos que já haviam tido contato com problemas de estimar a altura de locais elevados com auxílio de ângulos que apareciam no enunciado. No entanto, nesse caso, a situação se apresentava de forma distinta de modo que um dos alunos perguntou: *Como? Nesse caso, não tem nenhum ângulo!*

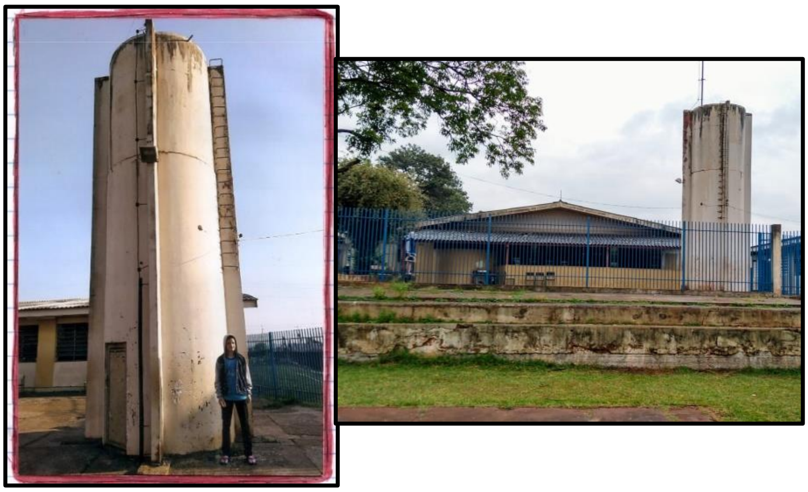
Durante o desenvolvimento da atividade, emergiram estratégias de resolução, como uso de uma ferramenta do *aplicativo WhatsApp*, contagem e desenho de triângulos na fotografia. Na matematização, emergiram conteúdos matemáticos, como semelhança de triângulos, proporção com uso da regra de três, multiplicação, razão, operações de adição, multiplicação e divisão de números decimais, soma dos ângulos internos de um triângulo e conversão de unidades de medidas.

Os modelos matemáticos foram construídos pelos alunos por meio das operações fundamentais com multiplicações de números racionais, com uso de regra de três e desenhos de triângulos semelhantes.

Primeiro, os alunos trabalharam em grupos e o professor passou em cada um dos grupos e fez perguntas acerca das estratégias de resolução com a intenção de provocar reflexões nos alunos. Após o trabalho nos grupos, aconteceram as apresentações de cada grupo à turma, durante as quais os colegas de sala faziam perguntas e considerações que contribuíam para refinar os modelos obtidos pelo grupo. No término da apresentação de cada grupo, acontecia a validação da resposta pelo professor e pelos alunos. O critério adotado como validação do modelo foi avaliar e interpretar se a altura estimada para o local escolhido na fotografia fazia sentido na situação real.

O grupo G1 tinha como problema estimar a altura da caixa d’água do colégio (Figura 7) e, para isso, fez uso de duas imagens para desenvolver a atividade e de duas estratégias para estimar a altura.

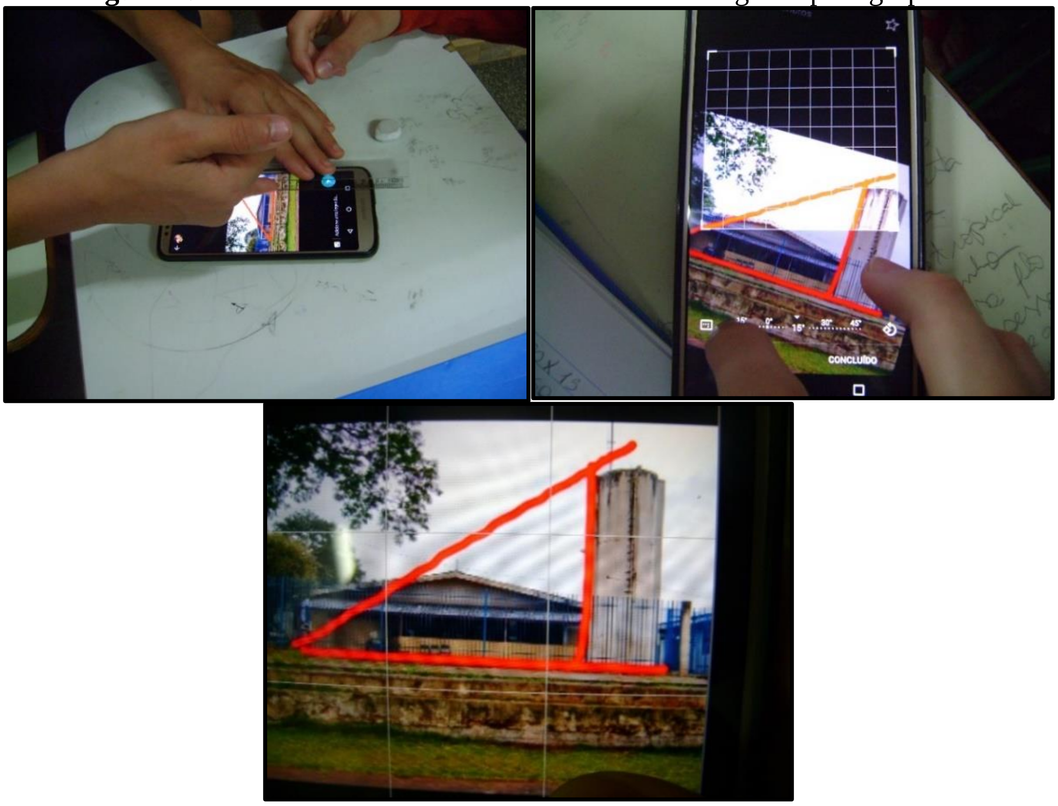
Figura 7: Imagens da caixa d’água do colégio obtidas pelo grupo G1



Fonte: Relatório do Grupo G1 9º ano.

Na primeira resolução, o ponto de partida foi trabalhar com a ferramenta *Fotografia* do Aplicativo *WhatsApp.* Algumas imagens do uso do aplicativo por esse grupo estão na Figura 8. Esses alunos pensaram, inicialmente, em desenhar um triângulo com a ferramenta de modo que isso pudesse auxiliar no desenvolvimento da atividade. Com essa ferramenta usaram semelhança de triângulos para resolver o problema, estimando que a caixa d’água do colégio possui 7,6 m de altura.

Figura 8: Início do desenvolvimento da Atividade Fotografia pelo grupo G1



Fonte: Diário de Campo do Professor.

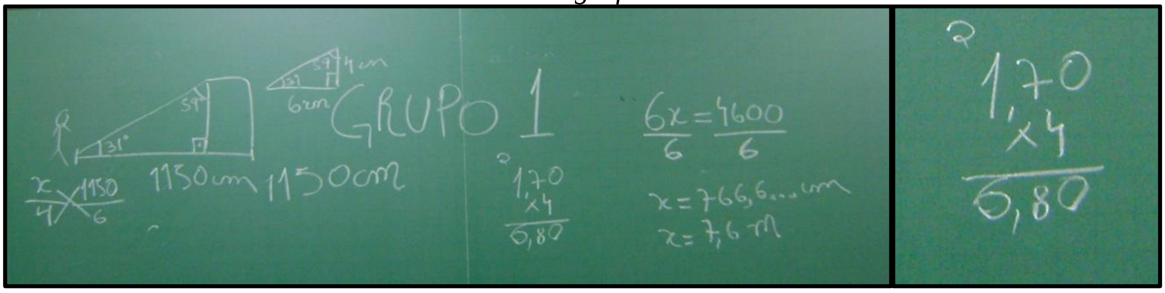
Na segunda resolução, os alunos usaram a fotografia em que um dos alunos do grupo aparece. Com o auxílio de uma régua, mediram a altura dele e da caixa d’água na imagem. Verificaram quantas vezes a altura do aluno cabia na caixa d’água e multiplicaram a altura real do aluno, 1,70 m, por quatro, estimando que a caixa d’água possui 6,80 m. Nesse caso, o modelo matemático foi obtido por meio de uma multiplicação de números racionais.

Durante a apresentação das resoluções à turma, os alunos do grupo G1 relataram que fizeram as duas soluções com a intenção de comparar as respostas para saber se eles estavam certos, que foi um critério de validação para o grupo.

Na Figura 9 apresentamos as duas resoluções[23] feitas pelo grupo G1 durante a apresentação à turma.

[23] Na imagem apresentada na Figura 9, a multiplicação de 1,70 por 4, na parte inferior da imagem, corresponde à segunda resolução do grupo G1. Nessa resolução, o grupo multiplicou a altura do aluno que aparece na imagem por 4, após medir com a régua e verificar que cabe quatro vezes. Optamos por destacar essa solução para facilitar a leitura da imagem, fazendo um recorte da imagem da solução e acrescentando-a ao lado.

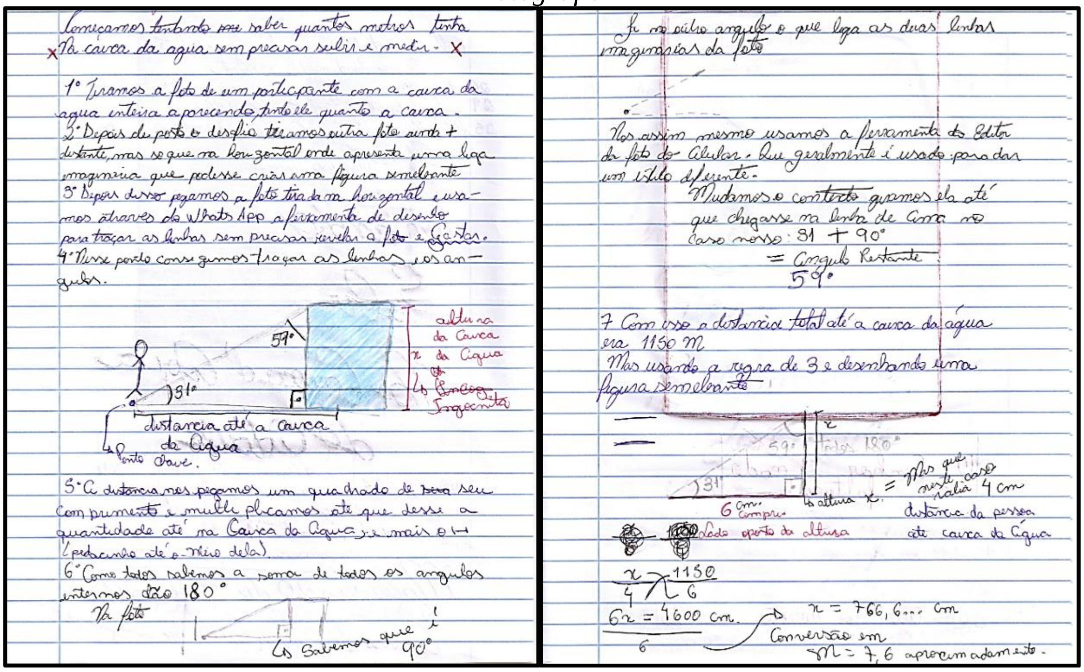
Figura 9: Apresentação da solução do grupo G1 do Problema *Estimar A Altura Com Auxílio da Fotografia*



Fonte: Registros dos alunos do Grupo G1 9º ano na lousa.

Logo após a apresentação, os alunos do grupo G1 entregaram o relatório, conforme indica a Figura 10.

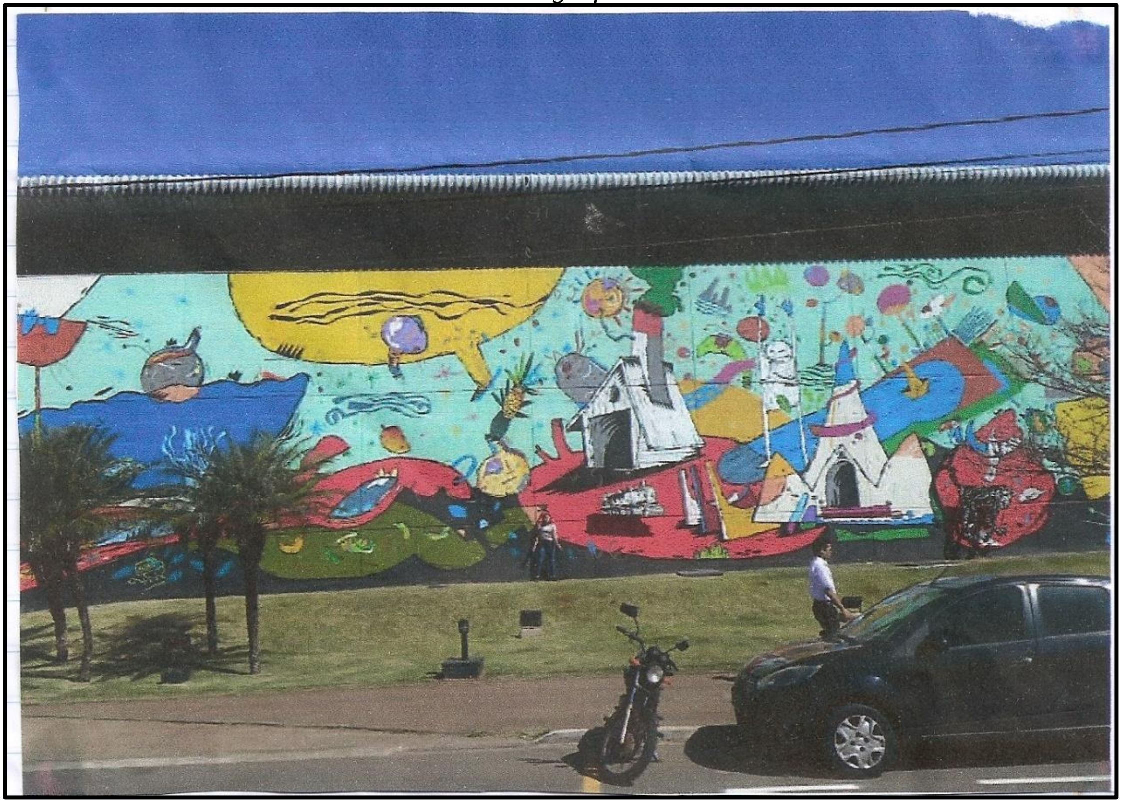
Figura 10: Relatório do grupo G1 com a solução do Problema *Estimar A Altura Com Auxílio da Fotografia*



Fonte: Relatório do Grupo G1 9º ano.

Outro grupo, o G2, tinha como problema estimar a altura da parede de um *shopping*, conforme sugere a Figura 11.

Figura 11: Local escolhido pelo grupo G2 para O Problema *Estimar A Altura Com Auxílio da Fotografia*



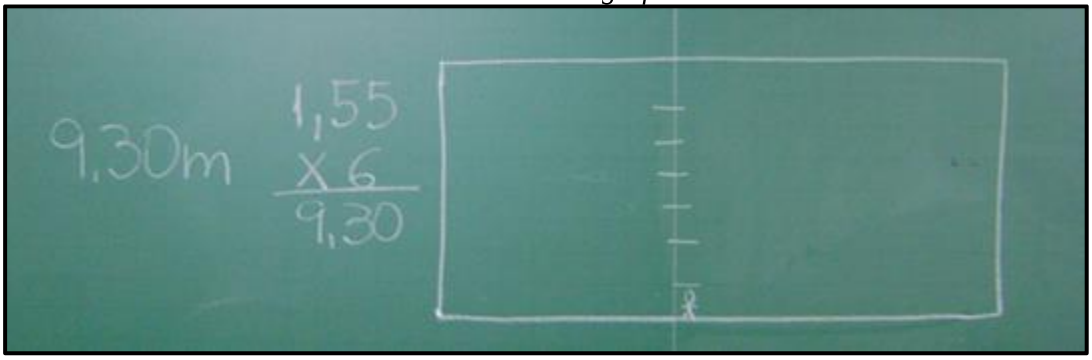
Fonte: Do Relatório do Grupo G2 9º ano.

As alunas desse grupo resolveram o problema de duas maneiras. Primeiro, com o uso da proporção por meio da multiplicação explorando a ideia de "quantas vezes cabe", em seguida, usando conceito de semelhança de triângulos.

Incialmente, o grupo verificou, com o auxílio de uma régua, quantas vezes a altura da aluna que aparece na imagem da fotografia cabia na altura da parede. Viu que eram seis vezes, então multiplicaram a altura real dela por seis, estimando que a parede do *shopping* possui 9,30 m. Na segunda resolução, as alunas desenharam um triângulo retângulo sobre a fotografia e, com o auxílio de um transferidor, mediram os ângulos internos. Para determinar a medida da base desse triângulo, mediram a altura da aluna na imagem e a base do triângulo com uma régua. Observaram quantas vezes a medida da altura da aluna no desenho cabia na medida da base do triângulo e chegaram a quinze vezes. Multiplicaram, então, a altura real da aluna por quinze, determinando a medida da base desse triângulo. Em seguida, com o auxílio de régua e transferidor, desenharam em escala outro triângulo semelhante, montaram uma proporção e estimaram, com essa resolução, que a parede do *shopping* possui 8,45 m de altura.

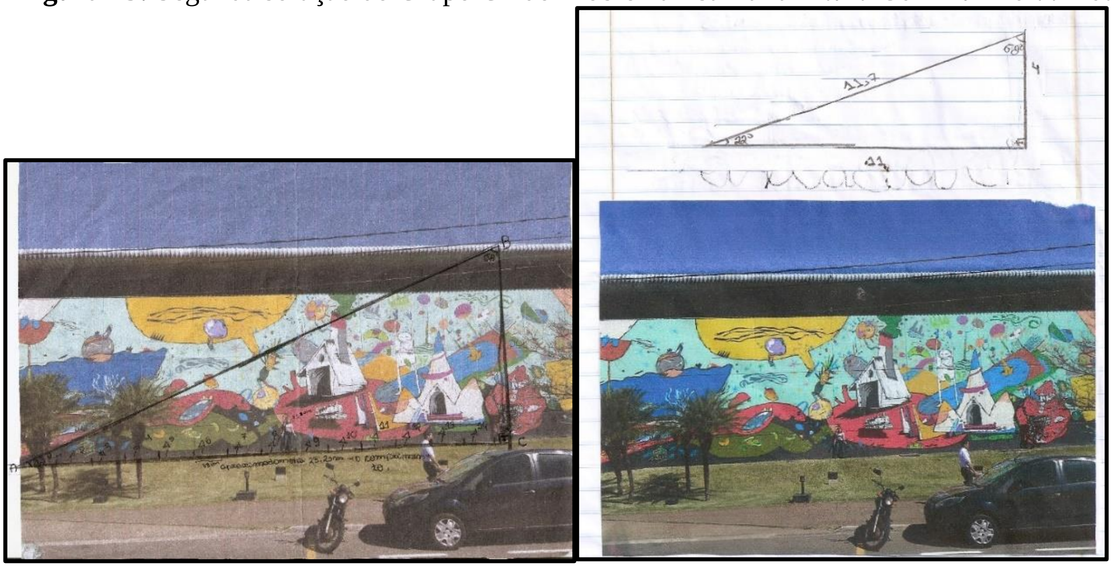
As Figuras 12 e 13 apresentam as soluções que as alunas do grupo G2 fizeram na lousa durante a socialização e no relatório entregue por elas.

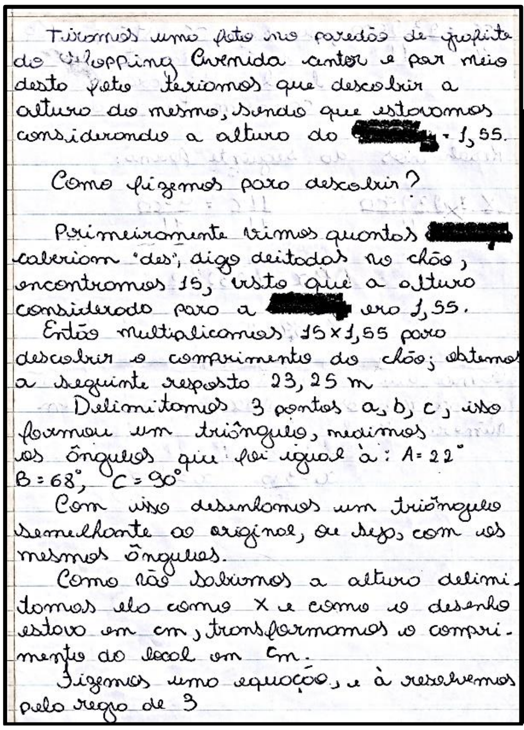
Figura 12: Primeira solução apresentada pelo grupo G2 para o Problema *Estimar A Altura Local Com Auxílio da Fotografia*



Fonte: Registros do Grupo G2 9º ano na lousa.

Figura 13: Segunda solução do Grupo G2 do Problema Estimar a *Altura Com Auxílio da Fotografia*





Tiramos uma foto no paredão de grafite do Shopping Avenida Center e por meio desta foto teríamos que descobrir a altura do mesmo, sendo que estávamos considerando a altura do [redacted] = 1,55.

Como fizemos para descobrir?

Primeiramente vimos quantos [redacted] caberiam "des", digo deitados no chão, encontramos 15, visto que a altura considerada para a [redacted] era 1,55.

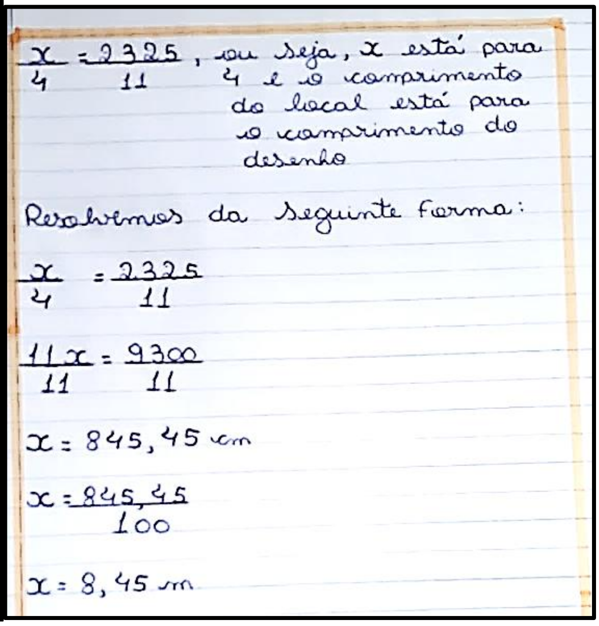
Então multiplicamos 15 × 1,55 para descobrir o comprimento do chão; obtemos a seguinte resposta 23,25 m

Delimitamos 3 pontos a, b, c, isso formou um triângulo, medimos os ângulos que foi igual à: A = 22° B = 68°, C = 90°

Com isso desenhamos um triângulo semelhante ao original, ou seja, com os mesmos ângulos.

Como não sabíamos a altura delimitamos ela como x e como o desenho estava em cm, transformamos o comprimento do local em cm.

Fizemos uma equação, e à resolvemos pela regra de 3



$\frac{x}{4} = \frac{2325}{11}$, ou seja, x está para 4 e o comprimento do local está para o comprimento do desenho

Resolvemos da seguinte forma:

$$\frac{x}{4} = \frac{2325}{11}$$

$$\frac{11x}{11} = \frac{9300}{11}$$

$$x = 845,45 \text{ cm}$$

$$x = \frac{845,45}{100}$$

$$x = 8,45 \text{ m}$$

Fonte: Relatório do Grupo G2 9º ano.

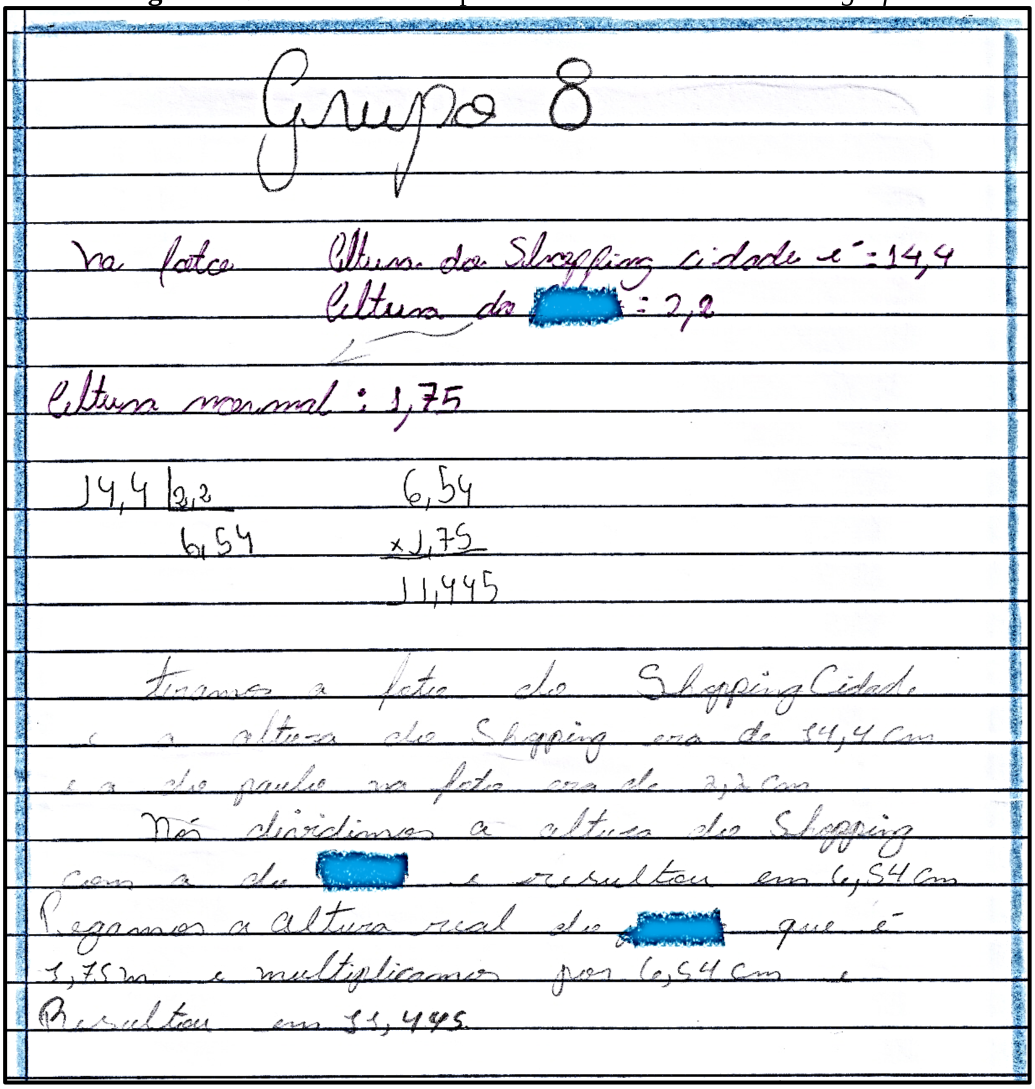
O grupo G8 tinha como problema estimar a altura de um *shopping* conforme indica a Figura 14.

Figura 14: Local escolhido pelo grupo G8 9º ano para estimar a altura com auxílio da fotografia

Fonte: Relatório do Grupo G8 9º ano.

Os alunos do grupo G8 dividiram a altura da parede do *shopping* pela altura do aluno na fotografia, e o quociente 6,54 obtido indica que a altura real do aluno cabe 6,54 vezes na altura real do *shopping*. Em seguida, eles multiplicaram a altura real do aluno, 1,75 m, por 6,54, estimando que a parede do *shopping* possui aproximadamente 11,54 m de altura, o modelo obtido por meio da multiplicação de números racionais. O relatório entregue por esse grupo mostra como os alunos resolveram o problema.

Figura 15: Relatório do Grupo G8 9º Ano da Atividade *Fotografia*



Grupo 8

Na foto Altura do Shopping cidade é: 14,4
Altura do [redacted]: 2,2

Altura normal: 1,75

14,4 | 2,2 6,54
6,54 x 1,75
11,445

tiramos a foto do Shopping Cidade e a altura do Shopping era de 14,4 cm e a do paulo na foto era de 2,2 cm
Nós dividimos a altura do Shopping com a do [redacted] e resultou em 6,54 cm
Pegamos a altura real do [redacted] que é 1,75 m e multiplicamos por 6,54 cm e Resultou em 11,445.

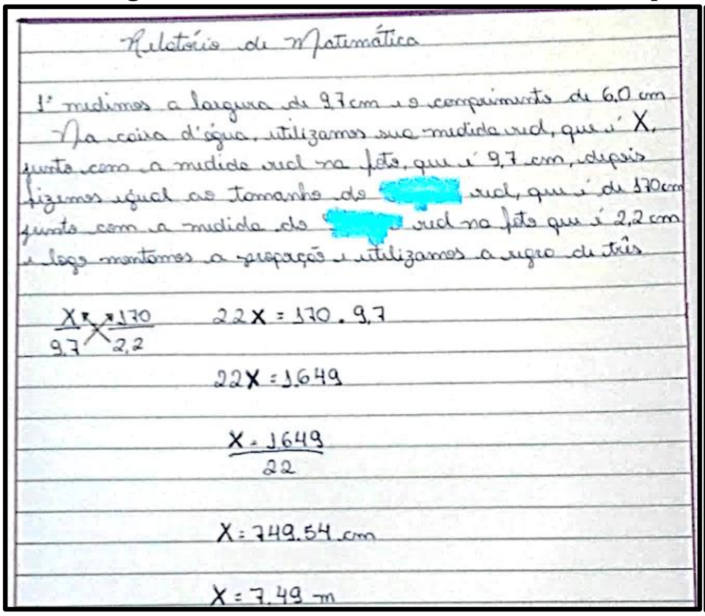
Fonte: Relatório do Grupo G8 9º ano.

Outro grupo, o G3, tinha como problema estimar a altura da caixa d'água do colégio e de uma árvore (Figuras 16 e 17). Para isso, fizeram uso de proporção e regra de três e, nas duas estratégias de resolução, chamaram de x a altura a ser determinada. Eles obtiveram as medidas das alturas do aluno e do local a ser estimado nas fotografias com auxílio de uma régua.

Em seguida, montaram uma proporção para verificar em que as alturas a serem determinadas, x nos dois casos, estão para as alturas nas fotografias, assim como a altura real do aluno das imagens está para a altura dele na fotografia. Resolvendo essa proporção, os alunos estimaram as alturas de 13,26 m para a árvore e 7,49 m para a caixa d'água da escola.

Apresentamos nas Figuras 16 e 17 o relatório entregue pelo grupo com a solução do problema.

Figura 16: Primeira Parte do Relatório do Grupo G3 da Atividade *Fotografia*



Relatório de Matemática

1º medimos a largura de 9.7cm e o comprimento de 6.0 cm

Na caixa d'água, utilizamos sua medida real, que é X, junto com a medida real na foto, que é 9,7 cm, depois fizemos igual ao tamanho do [redacted] real, que é de 170cm junto com a medida do [redacted] real na foto que é 2,2 cm e logo montamos a proporção e utilizamos a regra de três

$\frac{X}{9.7} = \frac{170}{2,2}$ $\quad 2.2X = 170 . 9.7$

$22X = 1.649$

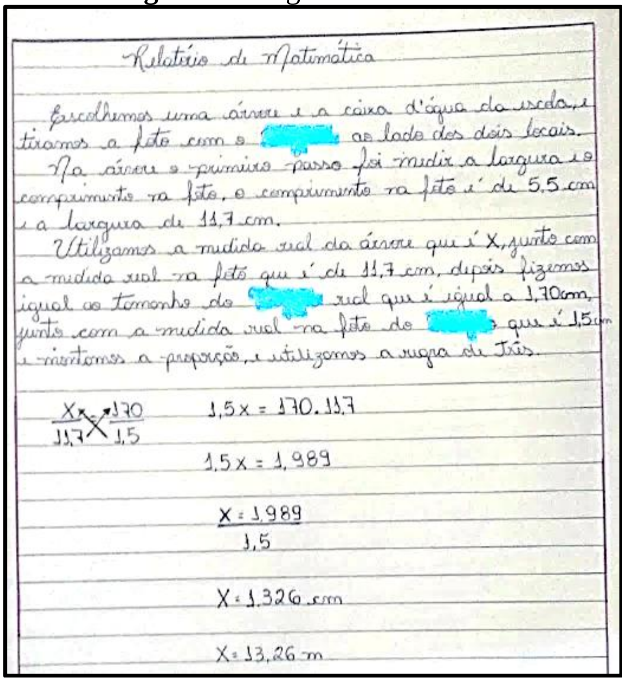
$X = \frac{1.649}{22}$

X = 749.54 cm

X = 7.49 m

Fonte: Relatório do Grupo G3 9º ano.

Figura 17: Segunda Parte do Relatório do Grupo G3 da Atividade *Fotografia*



Relatório de Matemática

Escolhemos uma árvore e a caixa d'água da escola, e tiramos a foto com o [redacted] ao lado dos dois locais.

Na árvore o primeiro passo foi medir a largura e o comprimento na foto, o comprimento na foto é de 5.5 cm e a largura de 11,7 cm.

Utilizamos a medida real da árvore que é X, junto com a medida real na foto que é de 11,7 cm, depois fizemos igual ao tamanho do [redacted] real que é igual a 1,70cm, junto com a medida real na foto do [redacted] que é 1,5cm e montamos a proporção, e utilizamos a regra de Três.

$\frac{X}{11.7} = \frac{170}{1.5}$ $\quad 1,5x = 170 . 11.7$

$1,5x = 1,989$

$X = \frac{1,989}{1,5}$

X = 1.326 cm

X = 13,26 m

Fonte: Relatório do Grupo G3 9º ano.

4.1.3 ANÁLISE LOCAL DA ATIVIDADE *FOTOGRAFIA*

Para dirigir a nossa atenção à constituição de *jogos de linguagem* nessa atividade, olhamos para as interpretações da situação-problema feitas pelos alunos, aos conceitos e ferramentas matemáticas usadas, bem como às interpretações dos resultados obtidos pelos alunos.

A inteiração com a situação real - Fotografia aconteceu no momento em que o professor iniciou a conversa com os alunos a respeito da Fotografia e dos locais fotografados. Durante essa conversa, surgiu o problema: *estimar a altura do local escolhido com auxílio da fotografia*.

Inicialmente, os alunos do 6º e do 9º ano fizeram diferentes interpretações e algumas hipóteses foram consideradas por eles. Embora não tenham se referido a essas hipóteses, elas estão implícitas em seus procedimentos e relatórios. Por exemplo, o grupo G1 do 6° ano, na segunda estratégia de resolução, considerou que cada um centímetro na fotografia correspondia a um metro na situação real, hipótese que leva à constituição do *jogo de linguagem* de usar escala.

Esse mesmo grupo (G1 do 6º ano), constituído pelos alunos A6.6, A6.11, A6.15, A6.20, decidiu inicialmente utilizar o dedo de um dos integrantes do grupo como instrumento de medida para estimar as alturas da árvore e do poste. O aluno A6.20 explicou para o professor, com um gesto de posicionar o dedo sobre a fotografia, o que acontecia: "*Tipo assim*, *professor, eu peguei o meu dedinho, ó"; "A outra foto eu peguei os meus dois dedos".* Desse modo, os alunos do grupo, após contarem quantas vezes a altura de A6.20 cabia na altura da árvore e do poste, multiplicaram a altura desse aluno pelo resultado da contagem (o relatório do grupo com as resoluções está na seção anterior deste capítulo). O gesto feito pelo aluno A6.20 para explicar o uso do dedo como instrumento de medida se constitui em um *jogo de linguagem*. Por conseguinte, uma multiplicação é utilizada, pois o grupo multiplicou a altura do aluno A6.20 na fotografia pelo resultado da contagem, evidenciando a constituição de outro *jogo de linguagem*: estabelecer uma relação proporcional.

Outra interpretação feita pelo grupo G1 do 6º ano, bem como o uso de outra estratégia de resolução, aconteceu após um questionamento do professor que procurava entender o que acontecia. Apresentamos, a seguir, a transcrição do diálogo do professor com o grupo, em socialização com a turma, no qual os alunos do grupo responderam às perguntas feitas pelo professor.

> *PP: Usando a medida do seu dedo, deu três vezes, então o instrumento de medida usado aí foi o dedo?*
> *Aluno A6.20: Sim. Não tinha uma régua aqui!*
> [...]
> *PP: E se vocês utilizassem o dedo de outra pessoa, de outro integrante do grupo, será que as respostas obtidas seriam as mesmas, seriam próximas? E se o meu dedo fosse utilizado, qual seria a resposta?*
> [...]
> *Aluno A6.20:* [...]. *Depois o professor perguntou para o nosso grupo sobre o dedo, como os dedos das pessoas variam de tamanho, nós achamos melhor usar a régua, a gente pegou a régua, deu 7 centímetros e sobrou 1 centímetro, consideramos que sobrou 1 metro, com isso deu 8 metros o tamanho da árvore.*
> *Aluno A6.6: [...] Depois nós medimos com a régua, deu 3 vezes o Aluno A6.20 mais 1,50 m que é o que sobrou, e a gente somou e deu 5,70 m.*
> *PP: Com o uso da régua sobrou 1,5 cm e você consideraram isso como 1,50 m?*
> *Aluno A6.20: sim.*
> *[...]*
> *PP: Vocês consideraram que um centímetro na régua corresponde a um metro na situação real. Por quê?*
> *Aluno A6.20: Nós consideramos que um centímetro na régua é um metro na vida real, porque a foto é pequena. Porque na régua não mostra um metro e sim um centímetro.*

As perguntas do professor colaboraram para que outros *jogos de linguagem fossem* constituídos, o *jogo de linguagem* de usar escala e os *jogos de linguagem* de multiplicar e adicionar para estimar a altura com auxílio das fotografias.

O grupo G2, constituído pelas alunas A6.9, A6.13, A6.25, do 6º ano, tinha como objetivo estimar a altura de uma árvore. A interpretação feita pelo grupo era que é possível estimar a altura com o auxílio de um papel como instrumento de medida. Assim, as alunas do grupo mediram a altura da aluna que aparece na imagem com esse papel, conforme sugere a fala da aluna A6.25: *O tamanho da A6.9 é 1,51 m, pegamos desde do pé dela até a cabeça e deu esse papelzinho aqui, nós usamos o papel e sobrou esse pedacinho,* [...] *cabe 5 e sobra um pedacinho.* O grupo fez uso das operações fundamentais com os números racionais, calculou a fração de uma medida e realizou a conversão de unidades de medida, como se pode comprovar por este diálogo das alunas com o professor durante o desenvolvimento da atividade:

> *PP: Contem para mim, como vocês estão resolvendo o problema.*
> *Aluna A6.25: O tamanho da A6.9 é 1,51 m, pegamos desde do pé dela até a cabeça e deu esse papelzinho aqui, nós usamos o papel e sobrou esse pedacinho.*
> *PP: Vocês utilizaram esse papel como instrumento de medida?*
> *Aluna A6.25: Isso.*
> *PP: E vocês querem saber quantos papeizinhos desse cabe até chegar aqui?*
> *Aluna A6.25: Isso! Cabe 5 e sobra um pedacinho. O que vocês querem saber?*
> *Aluna A6.9: Como nós fazemos para determinar a medida desse pedacinho?*
> *PP: O que vocês acham? Como determinar a medida desse pedacinho que faltou?*
> *[...]*

Aluna A6.25: Professor, sobrou esse pedacinho, tem muito pouco espaço, a gente está deduzindo que tem uns 60 centímetros e termina a árvore. Ou, acho que nós temos que colocar uns 20 centímetros ou uns 30 centímetros.
[...]
PP: Vocês querem ver o quanto esse pedacinho de papel cabe no papel maior?
Alunas: Sim.
PP: É como se fosse uma fração do papel maior?
Alunas: Isso professor!

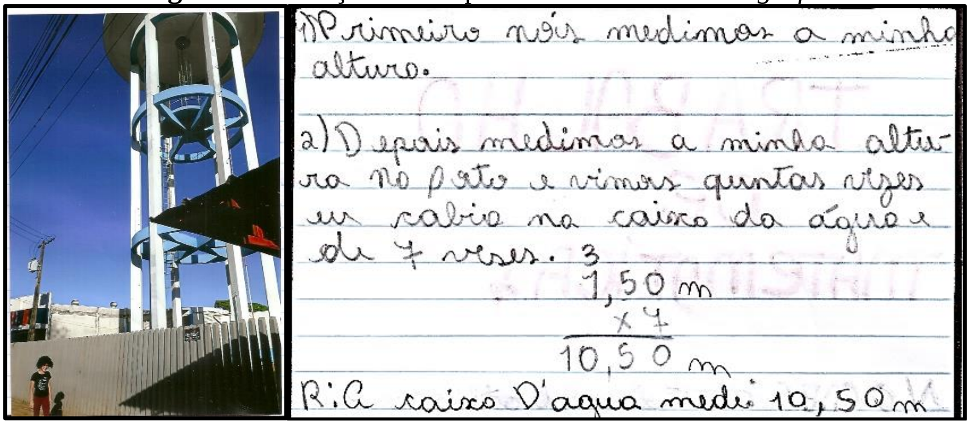
Após esse diálogo, o grupo G2 conseguiu estimar a altura de uma árvore, que era o que se propunha a investigar, e deu a seguinte explicação ao professor:

Aluna A6.25: Professor, como três milímetros é um oitavo de dois centímetros e meio [medida da altura do papel utilizado como instrumento de medida], *então, nós dividimos a altura da A6.9 por oito, um metro e cinquenta e um por oito que deu 0,18 m, daí nós multiplicamos a altura dela por 5 [altura da aluna A6.25], por causa dos cinco papeizinhos, deu 7,55 m, como esse papelzinho cabe aqui 8 vezes no outro papel, nós somamos o resultado da multiplicação da altura dela por cinco com o resultado da divisão, que deu 7,73 m, esse é o resultado que nós estimamos para a altura da árvore.*

A ação do grupo G2 de utilizar o papel como instrumento de medida se constitui no *jogo de linguagem* de medir, e houve uma finalidade para o uso desse papel. A partir daí, outros *jogos de linguagem* foram constituídos, como o *jogo de linguagem* de estabelecer uma relação proporcional com o uso da multiplicação, de fração, divisão, conversão de unidades de medida e de adição.

O grupo G5 também considerou que existe proporcionalidade na situação de estimar a altura com o auxílio da fotografia e manifestou isso por meio da ideia de verificar “quantas vezes cabe”. Por conseguinte, utilizou uma multiplicação de números racionais, ao usar a medida da aluna que aparece na imagem da fotografia. Desse modo, constitui-se o *jogo de linguagem* de estabelecer uma relação proporcional e, por conseguinte, o uso da multiplicação. Na Figura 20 apresentamos o relatório do grupo G5.

Figura 18: Solução do Grupo G5 da Atividade *Fotografia*



Fonte: Relatório do Grupo G5 6º ano.

Os grupos G1, G2 e G8, do 9º ano, também utilizaram a ideia de "quantas vezes cabe" para determinar a altura. Os alunos do grupo G3 mediram, na fotografia, a altura do aluno e do local, cuja altura seria estimada, e utlizaram a altura real do aluno que aparece na fotogafia. Então, estabeleceram esta relação: a altura do aluno na fotografia está para a altura real, bem como a altura do local na fotografia está para a altura real a ser estimada. Essas ações do grupo G3 são indícios da constituição do *jogo de linguagem* de usar regra de três.

Os grupos G1 e G2, do 9º ano, além de utilizar o conceito de proporção por meio de ver "quantas vezes cabe", também utilizaram outra estratégia de resolução. Após esses grupos interpretarem que é possível estimar a altura da caixa d'água do colégio e da parede de um *shopping*, considerando a altura de um triângulo, emergem o conceito de semelhança de triângulos e os procedimentos matemáticos associados a esse conceito. Os alunos, inicialmente, fizeram desenhos de triângulos com o auxílio da ferramenta *Fotografia* (grupo G1) e da própria fotografia (grupo G2), bem como de triângulos semelhantes em escala. Nesse caso, tem-se de usar o desenho como um *jogo de linguagem*.

O aluno A9.26, do grupo G1, no início do desenvolvimento da atividade, perguntou ao professor: *Pode usar o celular?*. Essa pergunta parece indicar que o grupo pretendia trabalhar com semelhança de triângulos. Em outros momentos, os alunos do grupo explicaram para o professor o uso da Ferramenta *Fotografia* do Aplicativo *WhatsApp*, quando desenharam o triângulo e mostraram como medir os ângulos internos do triângulo desenhado. O Aluno A9.25, do grupo G1, por exemplo, sugeriu: *Aqui o ângulo é de 31º, outro é de 59º, aqui é de 90º.* As medidas dos ângulos foram determinadas com o auxílio dessa ferramenta. As ações do grupo para determinar as medidas necessárias dos lados e ângulos de dois triângulos são: desenho do triângulo com a ferramenta *fotografia*, desenho de outro triângulo semelhante em escala com os ângulos internos congruentes, medir a distância da caixa d'água até um determinado ponto no pátio da escola. Com essas informações, montaram uma proporção e estimaram a altura. Todas essas ações mostram a constituição do *jogo de linguagem* de usar semelhança de triângulos. Para exemplificar, apresentamos algumas falas dos alunos A9.25 e A9.26, do grupo G1, durante o desenvolvimento da atividade.

> *A gente precisa medir a distância da base da caixa d'água até um local escolhido lá no pátio por nós, eu acho que isso vai ajudar"*, *"A gente vai lá fora e pega a trena com o Evandro*[24] *e mede a base desse triângulo"*, *"Com esses ângulos dava para desenhar um triângulo semelhante, a gente desenhou outro triângulo semelhante com essas medidas, 6 cm, 4 cm, os ângulos dos dois triângulos são iguais, daí ficou x que era a altura que a gente não sabia no caso, sobre 4, 1150 sobre 6, aí a gente resolveu essa proporção* [...] *e deu 7,66 m.*

A constituição do *jogo de linguagem* de usar semelhança de triângulos, feita pelo grupo G1, vem acompanhada por outros *jogos de linguagem*: usar escala, medir, usar proporção e regra de três.

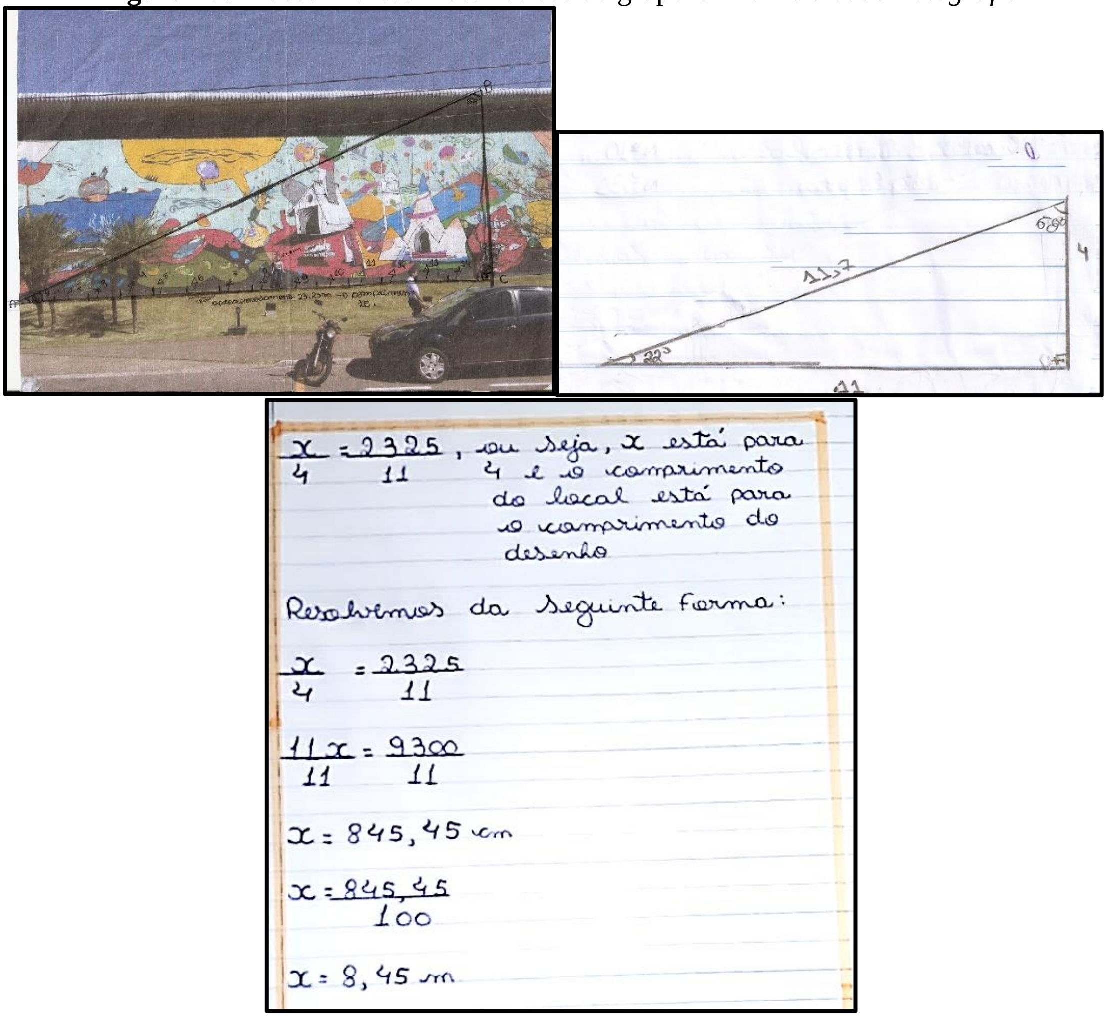
O grupo G2 também formulou a hipótese de que a altura da parede do *shopping* da fotografia pode ser associada à altura de um triângulo. Por conseguinte, os procedimentos matemáticos do grupo foram desenhar um triângulo sobre a fotografia medindo os ângulos internos com auxílio de um transferidor, desenhar outro triângulo em escala com ângulos internos congruentes a esse primeiro triângulo. Para determinar a medida da base do primeiro triângulo desenhado sobre a fotografia, as alunas utilizaram a altura real da aluna A9.6, que aparece na fotografia, imaginando-a deitada sobre a base do triângulo. Assim, compararam a altura de A9.6 no desenho com a medida da base do primeiro triângulo desenhado. A aluna A9.6 explicou como procedeu após o desenho do triângulo feito na fotografia para determinar a medida da base do triângulo na socialização: [...]*nós medimos o meu tamanho na foto, deu 1,8, como nós não sabíamos o valor da base do triângulo desenhado, nós vimos quantas A9.6 deitadas cabiam aqui, e deu 15 vezes, ou seja, deu 15 A9.6 deitadas, aí pegamos a minha altura real e multiplicamos por 15, que deu 23,25 m* [medida real da base do triângulo desenhado sobre a fotografia]. *Aí nós consideramos que a altura era x e fizemos a regra de três e nós desenhamos outro triângulo, esse, com lados medindo 4 cm, 11 cm e 11,7 cm".* Todas essas ações do grupo G2 do 9º ano evidenciam a constituição do *jogo de linguagem* de usar semelhança de triângulos, que vem acompanhado da constituição de outros *jogos de linguagem*: medir, usar escala, proporção e regra de três.

---

[24] Nome fictício atribuído a um vice-diretor do colégio, para a transcrição da atividade no texto da tese.

Apresentamos a seguir um recorte do relatório do grupo G2 com os procedimentos matemáticos. No início do relatório do grupo G2, vemos o desenho feito pelo grupo após considerar que a altura do *shopping* poderia ser associada à altura de um triângulo. Nesse caso, acontece a constituição do *jogo de linguagem* de usar o desenho. Em seguida, vem a imagem da resolução do problema de estimar a altura pelo grupo G2, em que vemos o *jogo de linguagem* de usar semelhança de triângulos para estimar a altura do *shopping*.

Figura 19: Procedimentos Matemáticos do grupo G2 na Atividade *Fotografia*



Fonte: Diário de Campo do Professor.

Todas as ações citadas anteriormente mostram as intenções dos alunos modeladores na articulação entre situação real - fotografia, uso da matemática e sua linguagem na busca de solucionar o problema de *estimar a altura*.

Quanto à matematização no desenvolvimento da atividade feito pelos alunos do 6º e 9º ano, todos os grupos escreveram a situação investigada em linguagem matemática usando procedimentos matemáticos. Isso fez emergir conceitos matemáticos: proporção por meio da multiplicação de números racionais, estabelecer uma escala, realizar conversão de unidades de medidas, usar semelhança de triângulos, estabelecer uma relação proporcional, usar a escrita formal de regra de três, resolver multiplicação e divisão, desenhar triângulos semelhantes, determinar medidas de ângulos e lados dos triângulos, resolver uma equação que provém da escrita formal de uma proporção. Os usos desses conceitos matemáticos mostram *jogos de linguagem* da matemática que foram constituídos pelos alunos no desenvolvimento da atividade *fotografia*.

Algo que aconteceu com todos os grupos do 6º ano e com a maioria dos grupos do 9º ano foi ver “quantas vezes cabe” (proporção), ou seja, ver quantas vezes a altura da pessoa que aparece na imagem da fotografia cabe na altura do local escolhido por eles para estimar a altura: o *jogo de linguagem* de usar proporção para estimar a altura com o auxílio da fotografia.

A matematização da situação investigada leva a diferentes estratégias de resolução, com o uso dos diferentes procedimentos matemáticos e com a intenção dos grupos que participaram da atividade de resolver a situação. Outro aspecto da matematização é que os alunos usaram ferramentas matemáticas que eles já conheciam. As diversas estratégias de resolução também mostram o carácter idiossincrático de uma atividade de modelagem matemática, conforme ponderam Almeida, Sousa e Tortola (2015).

Todas essas ações dos alunos mostram um uso da matemática em que as características essenciais do fenômeno: estimar a altura do local com auxílio da fotografia. Para produzir os modelos matemáticos, os alunos dos grupos G1, G2, G3, G8, do 9º ano, usaram a escrita formal de proporção. No caso dos grupos G1 e G2, isso aconteceu em função do uso do conceito de semelhança de triângulos; no caso do grupo G3, por considerar que existe proporcionalidade na situação fotografia e, por isso, escrever uma proporção e resolver uma regra de três. Resolver a regra de três também evidencia a constituição do *jogo de linguagem* de resolver equação do primeiro grau, o que foi feito pelos grupos G1, G2 e G3 do 9º ano. Os grupos G1 e G2 do 9º ano também escreveram modelos matemáticos por meio da multiplicação de números racionais, quando os alunos procuraram ver “quantas vezes cabe”. Em relação aos alunos do 6º ano, os modelos matemáticos foram escritos por meio da multiplicação e adição de números racionais.

Uma diferença nos *jogos de linguagem* constituídos pelos alunos do 6º e 9º ano na atividade fotografia está no *jogo de linguagem* de usar regra de três, que também está relacionado ao *jogo de linguagem* de usar proporção. Os grupos G1, G2 e G3 do 9º ano fizeram uso da linguagem algébrica para obter os modelos de que precisavam.

No âmbito de sala de aula, usar esses conceitos matemáticos em atividades de modelagem é uma oportunidade para os alunos de estudá-los novamente. Além disso, o professor tem a oportunidade de aprofundar o que os alunos sabem, conforme argumentam Almeida e Vertuan (2011) e Almeida (2018). Nesse sentido, a modelagem matemática é mais uma oportunidade de ressignificar os conteúdos conhecidos para os alunos, conforme argumentam Almeida e Vertuan (2014). No ambiente empírico em que ocorreu a coleta de dados com os alunos para este trabalho de tese, o professor chamou a atenção dos alunos do 9º ano para a possibilidade do uso da Semelhança de Triângulos, quando os grupos G1 e G2 socializaram as resoluções, os modelos matemáticos. Naquele momento, os alunos do 9º ano tiveram a oportunidade de *ver novamente*, ou seja, ter um outro olhar a respeito desse conteúdo.

O professor também aproveitou a atividade fotografia para oportunizar o estudo de frações e números decimais, e de medidas para os alunos do 6º ano, foi um momento de estudar os conteúdos de modo integrado, visto que, em uma atividade de modelagem, o professor não sabe *a priori* quais serão as estratégias de resolução que vão emergir por parte dos alunos. A formalização de números decimais, frações, medidas e do trabalho desses conteúdos nas aulas com o 6º ano aconteceu de forma integrada pelo professor durante e após o desenvolvimento dessa atividade. Em relação aos aspectos que escrevemos anteriormente é que defendemos que o uso da modelagem nas aulas de matemática propicia um novo olhar a respeito dos conteúdos matemáticos pelos alunos e professor, isso é apontado na literatura, por exemplo, em Almeida, Silva e Vertuan (2012) e em Almeida e Vertuan (2014).

A partir dos modelos matemáticos obtidos, houve intepretação dos resultados obtidos diante da situação que originou a investigação, o que aconteceu em diferentes momentos durante o desenvolvimento da atividade, enquanto o professor atendia os grupos e na socialização. Os alunos sempre demonstraram atenção quanto à resposta obtida estar em consonância com a situação real.

O grupo G1, do 6º ano, e os grupos G1 e G2, do 9º ano, obtiveram dois modelos matemáticos para as investigações realizadas, compararam os modelos, interpretaram e validaram as respostas obtidas. O grupo G1 do 6º ano, durante a socialização, explicou os modelos elaborados e fez a interpretação dos modelos, o que pode ser observado na fala do aluno A6.6 durante a socialização: *"*[...] *a segunda resposta foi melhor, professor, nós usamos a régua!*".

Os grupos G1 e G2 do 9º ano também apresentaram duas estratégias de resolução para estimar as alturas da caixa d'água e da parede de um *shopping*. Cada grupo pôde comparar as respostas obtidas e interpretá-las, conforme é possível observar nas falas dos alunos

A9.26 (grupo G1) e A9.6 (grupo G2), respectivamente, no término da socialização da atividade com a turma do 9º ano.

> *No final, a gente usou a outra foto que saí, daí a gente contou quatro de mim, como eu tenho mais ou menos 1,70 m, isso vezes 4 dá 6,80 m, as respostas são próximas [6,80 m e 7,60 m], a gente sabe que é aproximadamente, o que ajudou muito foi tirar as duas fotos.*
> *Nós encontramos duas respostas, 9,30 m e 8,45 m, há 85 cm de diferença nas respostas das duas soluções, a gente acha que está bom.*

Os alunos que assistiam às socializações também estavam atentos à interpretação das respostas apresentadas pelos grupos. A aluna A6.25 do grupo G2 do 6º ano, que assistia à socialização do grupo G1, reforçou a importância do uso da régua pelo grupo na obtenção do segundo modelo.

> *Professor, cada um tem um tamanho de dedo, daria outro resultado, se ele tivesse outro dedo dele daria outro resultado, para ficar coerente ele utilizou a régua.*

Essa consideração da aluna A6.25 fez com que o aluno A6.20 do grupo G1 apresentasse uma justificativa à turma do 6º ano, pensada após a pergunta do professor a respeito do uso do dedo como instrumento de medida e da importância do uso da régua.

> *Aluno A6.20: Professor, eu pensei nisso que ela está falando, eu medi o meu dedo também, eu pensei nisso! Tanto que eu pensei nisso que ela está falando, tipo assim, eu já sei que quando a gente rela o nosso dedo em uma superfície plana, ele meio que achata, por ele ter sangue, carne, essas coisas, por isso eu medi o meu dedo e deu 1 centímetro e quatro pontinhos daquele lá da régua que eu não sei o nome daquilo, considerando isso então, eu medi certinho, mesmo assim, eu sei que o tamanho do meu dedo não é do tamanho de outras pessoas. Por isso, nós decidimos usar a régua.*

Todas as ações apresentadas, a fala do aluno A6.20 do grupo G1 do 6º ano, dos alunos A9.26 do grupo G1 e A9.6 do grupo G2 do 9º ano, a contribuição da aluna A6.25 do 6º ano durante as socializações evidenciam a constituição do *jogo de linguagem* de validar as respostas encontradas pelos grupos na atividade fotografia.

Todos os grupos conseguiram transcender da situação real para a matemática, ou seja, para a escrita em linguagem matemática da situação investigada, que envolveu a quantificação de características não matemáticas – a fotografia, na construção de modelos que respondessem ao problema investigado, *estimar a altura do local escolhido com auxílio da fotografia*.

No que concerne à comunicação dos resultados obtidos durante o desenvolvimento da atividade, todos os grupos das duas turmas socializaram as estratégias de resolução, apresentando-as na lousa, o que possibilitou discussões acerca da matemática, bem como interpretação dos resultados e validação. A validação aconteceu com a aprovação do professor durante a socialização dos grupos a respeito das resoluções e dos resultados obtidos, bem como dos alunos que assistiam às apresentações.

Todos os grupos das turmas que participaram da atividade levaram em conta os aspectos extramatemáticos da situação *fotografia*, isso ficou evidente na validação dos modelos encontrados pelos grupos, por exemplo, contribuições da aluna A6.25 durante a socialização do grupo G1 do 6º ano. Segundo argumentam Almeida e Vertuan (2014), na validação levam-se em consideração os procedimentos matemáticos e a adequação da apresentação do modelo à situação. Além disso, conforme pondera Pollak (2015), o sucesso de uma resposta em uma atividade de modelagem se faz pelo confronto do contexto matemático com a situação real.

Olhar para as ações dos alunos do 6º e do 9º ano, nos Quadros 2 e 3, respectivamente, dá indícios da constituição dos *jogos de linguagem* pelos alunos durante as fases de desenvolvimento da atividade *fotografia*, pois eles conseguiram lidar matematicamente com essa situação. Isso foi visto no uso dos conceitos e procedimentos matemáticos que emergiram da situação. Os alunos respeitaram os procedimentos matemáticos para resolver os algoritmos da adição e multiplicação de números decimais, quando separam as ordens decimais das ordens inteiras, souberam articular os critérios de semelhança de triângulos, realizar conversão de unidades nos momentos oportunos, fazer uso de escala.

Nos quadros a seguir, sumarizamos as ações dos alunos no desenvolvimento da Atividade *Fotografia*. Os Quadros 3 e 4 evidenciam o modo como os alunos fizeram articulações relativas à situação investigada com conceitos e ferramentas matemáticas para resolver o problema de *estimar a altura do local escolhido com auxílio da fotografia*.

Quadro 3: Ações dos alunos do 6º ano[25] na Atividade *Fotografia*

Situação Inicial (problemática)

Fotografia

Inteiração

Formulação do problema

Com auxílio da fotografia, vocês vão estimar a altura do local escolhido.

"Nós estamos pensando em usar o meu dedinho, estamos contando, professor".

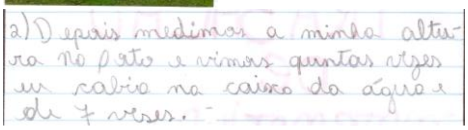
"O tamanho da A6.9 é 1,51 m, pegamos desde o pé dela até a cabeça e deu esse papelzinho aqui".

Hipóteses

"Nós consideramos que um centímetro na régua é um metro na vida real, porque a foto é pequena".

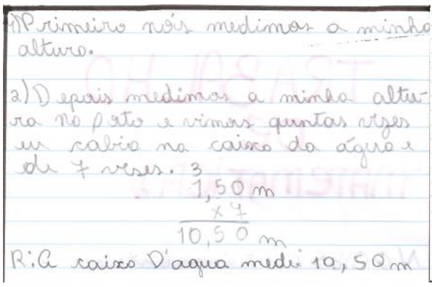
"Nós usamos o papelzinho"

[a altura do papelzinho foi associada à altura da aluna na imagem]



2) Depois medimos a minha altura no poste e vimos quantas vezes ele cabia na caixa da água e deu 7 veses.

Matematização, Resolução e Formulação do Modelo Matemático

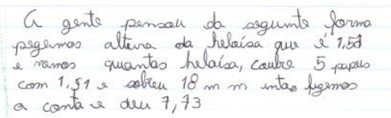


1) Primeiro nós medimos a minha altura.

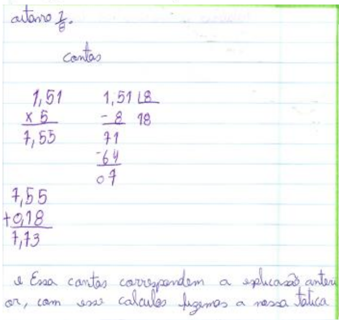
2) Depois medimos a minha altura no poste e vimos quantas vezes ele cabia na caixa da água e deu 7 veses.

$$\begin{array}{r} 1{,}50\ m \\ \times\ 7 \\ \hline 10{,}50\ m \end{array}$$

R: A caixa D'agua medi 10,50 m



A gente pensou da seguinte forma pegamos altura da heloísa que é 1,51 e vemos quantas heloísa, caube 5 papeis com 1,51 e sobreu 18 cm m então fizemos a conta e deu 7,73



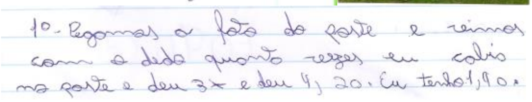
aluno 7.

contas

$$\begin{array}{r} 1{,}51 \\ \times\ 5 \\ \hline 7{,}55 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1{,}51 & 18 \\ -8 & 18 \\ \hline 71 & \\ -64 & \\ \hline 07 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7{,}55 \\ +0{,}18 \\ \hline 7{,}73 \end{array}$$

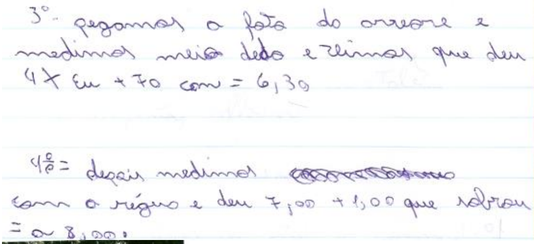
e Essa contas correspondem a explicasão anterior, com esse calculos fizemos a nossa tatica



1º- Pegamos a foto do poste e vimos com o dedo quanto vezes eu cabia no poste e deu 3x e deu 4, 20. Eu tenho 1,40.

---

[25] O Quadro 2 apresenta as ações dos grupos G1, G2 e G5 do 6º ano.

	 3º- pegamos a foto do arvore e medimos meio dedo e vimos que deu 4X Eu + 70 cm = 6,30 4º= depois medimos com a régua e deu 7,00 + 1,00 que sobrou = a 8,00.  
Socialização, Interpretação, Validação e Comunicação do Resultados  *"Professor, eu pensei nisso que ela está falando, eu medi o meu dedo também, eu pensei nisso! Tanto que eu pensei nisso que ela está falando, tipo assim eu já sei que quando a gente rela o nosso dedo em uma superfície plana, ele meio que achata, por ele ter sangue, carne, essas coisas, por isso eu medi o meu dedo e deu 1 centímetro e quatro pontinhos daquele lá da régua que eu não sei o nome daquilo, considerando isso então, eu medi certinho, mesmo assim, eu sei que o tamanho do meu dedo não é do tamanho de outras pessoas. Por isso, nós decidimos usar a régua".*	

Fonte: Diário de Campo do Professor.

Quadro 4: Ações dos alunos do 9º ano na Atividade *Fotografia*

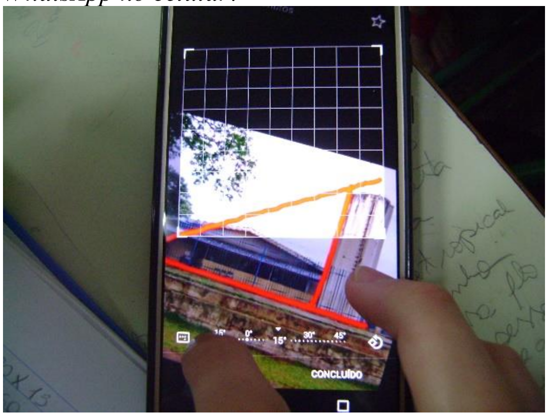
Situação Inicial (problemática)
Fotografia 

Inteiração

Formulação do problema

Com auxílio da fotografia, estimar a altura do local escolhido por vocês

"Professor, eu posso usar ferramenta do WhatsApp no celular?"

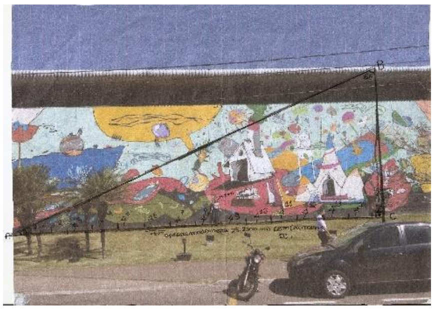


"*A gente vai medir a minha altura. Não! A gente vai desenhar um triângulo, a gente precisa saber os ângulos".*

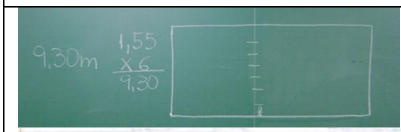
"Nós medimos a altura do A9.6 na fotografia e altura da parede do shopping na fotografia, daí nós pensamos em ver quantas vezes cabe à altura da A9.6 cabe na altura da parede, com isso a gente pode multiplicar a altura verdadeira dela por quantas vezes a gente encontrar".

Hipóteses

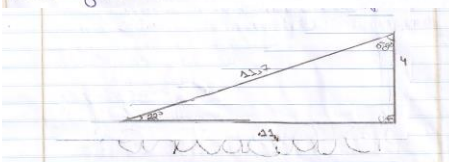
"A gente tirou a foto daquele paredão em gravite do Shopping. [...] Aí a gente pensou ver quantas A9.6 cabiam em pé, e a gente foi medindo, coube 6 vezes, depois a gente pegou a altura real dela e fez 6 vezes".

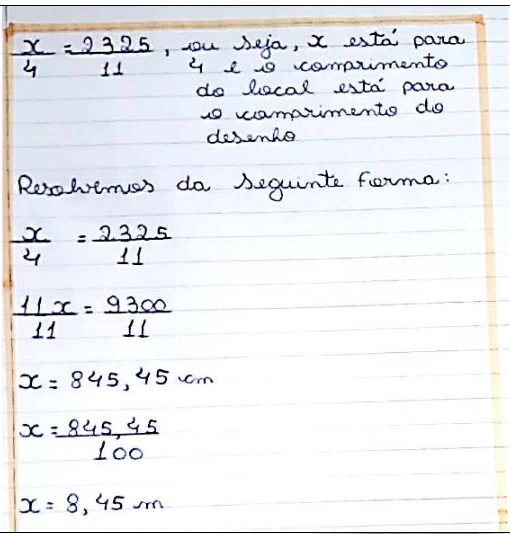
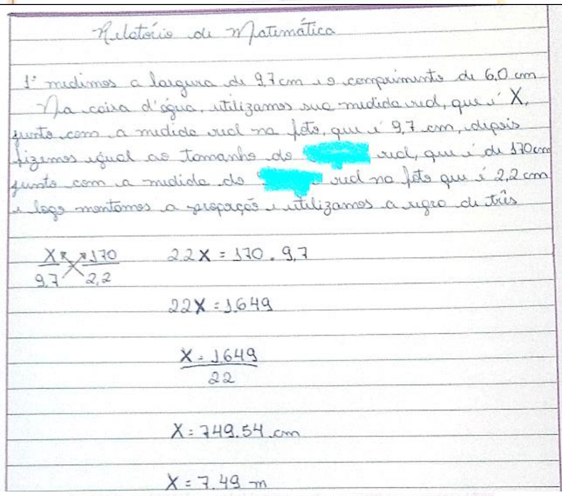


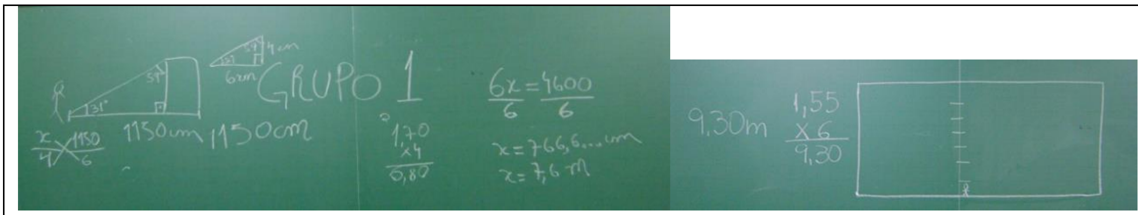
Matematização, Resolução e Formulação do Modelo Matemático



Primeiramente vimos quantos [redacted] caberiam "des", digo deitadas no chão, encontramos 15, visto que a altura considerada para a [redacted] era 1,55.
Então multiplicamos 15 x 1,55 para descobrir o comprimento do chão; obtemos a seguinte resposta 23,25 m
Delimitamos 3 pontos a, b, c, isso formou um triângulo, medimos os ângulos que foi igual à: A = 22°
B = 68°, C = 90°
Com isso desenhamos um triângulo semelhante ao original, ou seja, com os mesmos ângulos.
Como não sabemos a altura delimitamos ela como X e como o desenho estava em cm, transformamos o comprimento do local em cm.
Fizemos uma equação, e à resolvemos pelo regra de 3



	 $\frac{x}{4} = \frac{2325}{11}$, ou seja, x está para 4 e o comprimento do local está para o comprimento do desenho Resolvemos da seguinte forma: $\frac{x}{4} = \frac{2325}{11}$ $\frac{11x}{11} = \frac{9300}{11}$ $x = 845,45$ cm $x = \frac{845,45}{100}$ $x = 8,45$ m
"montamos a proporção e utilizamos a regra de três" [isso mostra a hipótese implícita de considerar que há proporcionalidade nessa situação].	 Relatório de Matemática 1° medimos a largura de 9,7 cm e o comprimento de 6,0 cm Na caixa d'água, utilizamos sua medida real, que é X, junto com a medida real na foto, que é 9,7 cm, depois fizemos igual ao tamanho do [redacted] real, que é de 170 cm junto com a medida do [redacted] real na foto que é 2,2 cm e logo montamos a proporção e utilizamos a regra de três $\frac{X}{9,7} = \frac{170}{2,2}$ $2,2X = 170 \cdot 9,7$ $22X = 1649$ $X = \frac{1649}{22}$ $X = 749,54$ cm $X = 7,49$ m 
Socialização, Interpretação, Validação e Comunicação do Resultados	



"No final, a gente usou a outra foto que saí, daí a gente contou mais ou menos quatro de mim, como eu tenho mais ou menos 1,70 m, isso vezes quatro dá 6,80 m, as respostas são próximas [6,80 m e 7,66 m], a gente sabe que é aproximadamente, o que ajudou muito foi tirar as duas fotos", "Nós encontramos duas respostas, 9,30 m e 8,45 m, há 85 cm de diferença nas respostas das duas soluções, a gente acha que está bom".

Fonte: Diário de Campo do Professor.

4.2 ATIVIDADE *PAINEL TRIEDRO*

A atividade *Painel Triedro*[26] refere-se ao segundo momento de familiarização dos alunos com a modelagem matemática. Foi sugerida pelo professor e desenvolvida com os alunos das duas turmas, 6º e 9º ano, que buscaram as informações complementares necessárias para a abordagem matemática da situação.

A temática foi introduzida por meio de vídeos a respeito de Painel Triedro[27]. Depois de os alunos realizarem uma pequisa para buscar o significado da palavra triedro, eles assisitiram a três vídeos que mostravam painéis triedros em movimento.

Logo após assistirem aos dois primeiros vídeos, os alunos começaram a comentar o formato do painel na exibição de três anúncios diferentes. Nas duas turmas houve questionamentos por parte dos alunos, como: "*E se o formato do painel fosse diferente, formado por prismas quadrangulares ou prismas hexagonais?.* Alguns alunos achavam que era possível que o *outdoor* fosse formado por prismas hexagonais, outros afirmavam que não, embora eles ainda não soubessem dizer o motivo. Nesse momento, começaram a questionar a viabilidade de o painel ser formado por outros tipos de prismas, bem como pela junção de prismas triangualares com quadrangulares ou hexagonais. Os alunos deram justificativas usando linguagem matemática porque painéis triedros são formados por prismas triangulares.

Os alunos das duas turmas realizaram investigações e aconteceram algumas formulações de hipóteses, verificação das medidas dos ângulos internos das bases de diferentes tipos de prismas, investigação com auxílio de malhas triangulares regulares e de sólidos

---

[26] Essa atividade foi inspirada no livro Geometria da Coleção Pra que serve a matemática? dos autores Imenes, Jakubo e Lellis.

[27] Os vídeos estão disponíveis no Youtube nos links a seguir: https://www.youtube.com/watch?v=wAFFnbcC1lk, https://www.youtube.com/watch?v=7kHs2cE-z60, https://www.youtube.com/watch?v=toCcRCdmgds.

geométricos. Após essas investigações, os alunos apresentaram oralmente a justificativa matemática e entregaram um relatório para o professor.

Quanto às justificativas, os alunos do 6º ano conseguiram justificar oralmente nas aulas o motivo de o painel triedro possuir esse formato, porém não conseguiram escrever, nos relatórios entregues ao professor, a justificativa matemática. Os alunos do 9º ano, por sua vez, indicaram verbalmente o motivo e conseguiram apresentar as jusitifcativas matemáticas por escrito.

Participaram da atividade os 29 alunos do 6º ano, divididos em grupos de 3 ou 4 alunos, e 32 alunos do 9º ano também divididos em grupos de 3 ou 4 alunos. A atividade foi desenvolvida durante 7 aulas no 6º ano e 5 aulas no 9º ano.

4.2.1 ENCAMINHAMENTO DA ATIVIDADE *PAINEL TRIEDRO* NO 6º ANO

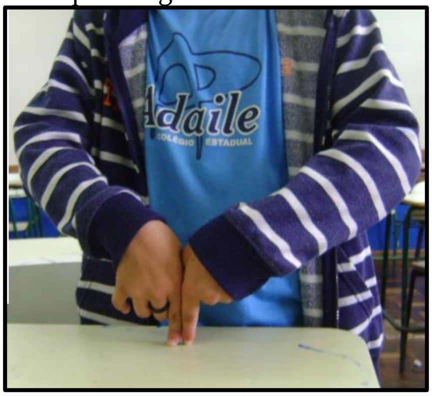
A apresentação dos encaminhamentos da atividade com o 6º ano vai ser exemplificada com ações dos grupos: G1, constituído pelos alunos A6.6, A6.11, A6.15, A6.20; G3, constituído pelas alunas A6.1, A6.10, A6.22, A6.24 e G6, constituído pelas alunas A6.9, A6.13, A6.25.

Conforme apresentamos na seção anterior, os alunos procuraram informações do que é um Painel Triedro e assistiram a três vídeos que o professor passou com a intenção de complementar a coleta de dados feita pelos alunos. Os primeiros questionamentos acerca do Painel Triedro surgiram quando o professor passou os vídeos. Os alunos ficaram um pouco inquietos e falavam com o professor e os colegas referindo-se a aspectos que chamavam sua atenção, como, por exemplo, as falas de alguns alunos do 6º ano no início da atividade.

> *Aluno A6.15: Por que não pode ser um prisma de base quadrangular?*
> *Aluna A6.22: Porque se for quadrado não vai girar.*
> *Aluno A6.20: Professor, eu descobri porque, os prismas não vão girar ao mesmo tempo. Quando mostrou o mecanismo dentro, eu vi que era um negócio que girando deitado, enquanto isso ele vai batendo nos triângulos que faz rodar. Como é roldana vai devagar. Existe uma diferença em segundos.*
> *[...]*
> *Aluno A6.9: Se o prisma fosse de base quadrada, ia bater.*
> *Aluno A6.25: Ia bater as pontas.*
> *Aluno A6.20: Se fôsse assim, ia bater. As faces não são do mesmo tamanho, o quadrado do meio que vai bater [o aluno se refere a base do prisma quandrangular].*

Nesse momento, o aluno A6.20 do grupo G1 explica com um gesto para os colegas e o professor que, se o prisma fosse formado por prismas quadrangulares, as faces frontais iam bater quando elas girassem.

Figura 20: Gesto feito pelo aluno Aluno A6.20 do 6º ano para especificar contato entre as faces de prismas quadrangulares

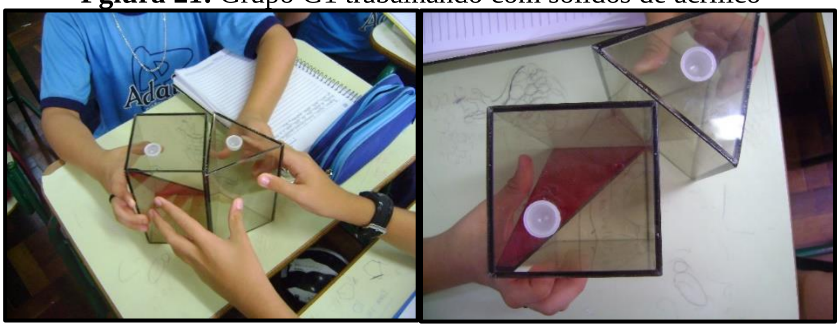


Fonte: Diário de Campo do Professor.

Durante a explicação feita pelo aluno A6.20, os alunos do 6º ano demonstraram entender o motivo pelo qual o Painel Triedro não pode ser formado por prismas quadrangulares. Alguns alunos afirmavam que, se o Painel fosse formado por prismas hexagonais ou pentagonais, haveria um espaço entre as propagandas. Outros afirmavam que as faces frontais iriam se chocar. O professor aproveitou as inquietações dos alunos, as falas que demonstravam interesse em entender o funcionamento do painel e os convidou a justificar matematicamente o motivo de o Painel Triedro ser formado por prismas triangulares. Assim surgiu a pergunta: Como a matemática pode ser usada para justificar o funcionamento do Painel Triedro?

Algo comum a todos os grupos que participaram da atividade foi imaginar se o painel iria funcionar com a combinação de dois tipois de prismas, o triangular e o quadrangular, conforme vemos nas imagens a seguir, que mostram os alunos A6.6 e A6.20 do grupo G1 trabalhando com os sólidos de acrícilico.

Fgiura 21: Grupo G1 trabalhando com sólidos de acrílico



Fonte: Diário de Campo do Professor.

O professor, que passou em cada um dos grupos, procurou entender o que os levava a testar a combinação dos dois tipos de prismas, bem como entender a interpretação dos alunos a respeito da atividade. Nos atendimentos aos grupos, alguns alunos demonstravam estar convencidos de que o Painel tem que ser formado apenas por prismas triangulares, ainda que não soubessem, naquele momento, a justificativa matemática, como se pode verificar na fala da Aluna A6.24 do grupo G3: *"*[...]*a gente fez uma explicação, professor, não dá para fazer o painel sem ser com três, se for com quatro, seis ou sete vão trombar. E para ser prisma de base triangular, as arestas da base têm que ser do mesmo tamanho".* Os alunos estavam intrigados com o funcionamento do painel, pois a maioria ainda não havia se manifestado acerca da possibilidade de as medidas dos ângulos internos do prisma triangular regular serem a justificativa para o painel ser formado por prismas triangulares regulares.

Nessa atividade, o professor precisou intervir mais que nas outras para que os alunos conseguissem apresentar a justificativa matemática. Após o primeiro encontro, foram providenciadas malhas triangulares regulares, impressão de desenhos de polígonos regulares, bem como os alunos foram ensinados a usar o transferidor.

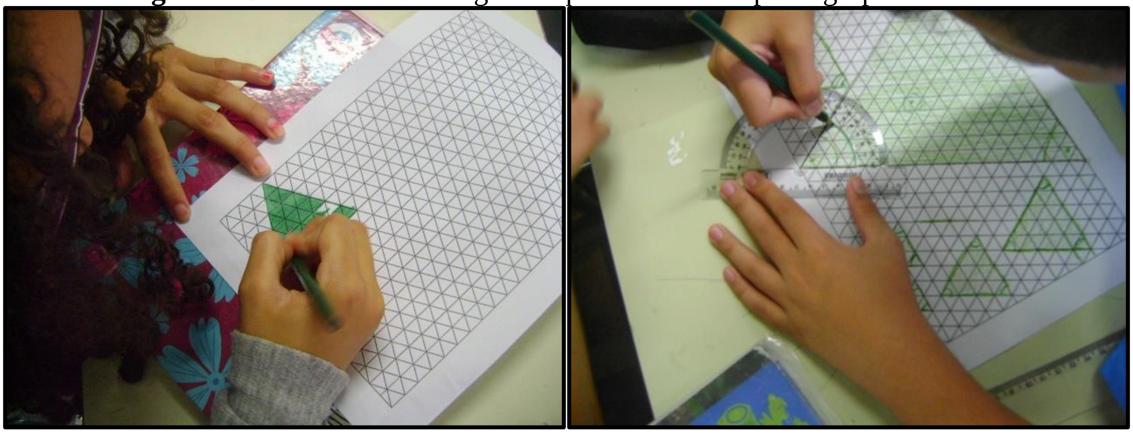
> *PP: Olhem para esse prisma aqui, que prisma é esse?*
> *Aluno A6.20 [grupo G1]: Esse é um prisma triangular regular.*
> *PP: Por que ele é regular?*
> *Aluno A6.20: Por que a base é um triângulo equilátero.*
> *PP: O que é um triângulo equilátero?*
> *Aluno A6.20: É um triângulo que cada ângulo interno mede 60º e a soma dos três dá 180º.*
> *PP: Isso! A base é um triângulo equilátero, isso significa que os lados têm a mesma medida e os ângulos internos também, cada um mede 60º.*

O professor aproveitou a fala do aluno A6.20 do grupo G1 e entregou uma malha triangular para eles, solicitando que cada um desenhasse um triângulo equilátero e, com o auxílio do transferidor, confirmassem que a medida de cada ângulo interno é de 60º.

> *PP: Olhem para essa malha que eu estou mostrando aqui, essa malha é triangular, ela é formada por triângulos equiláteros, eu vou entregar uma malha dessa para cada aluno, vocês vão desenhar um triângulo equilátero, tomando como base os triângulos equiláteros menores da malha. Vocês veem vários triângulos equiláteros, eu quero que vocês desenhem outro triângulo equilátero, entenderam?*
> *Alunos: sim [muitos falam ao mesmo tempo].*

As imagens a seguir mostram os alunos seguindo as orientações do professor.

Figura 22: Desenhos de triângulos equiláteros feitos pelos grupos G1 e G3



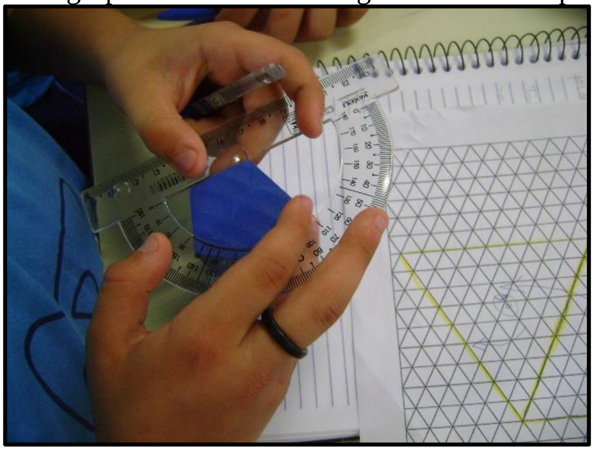
Fonte: Diário de Campo do Professor.

Após a realização dessa parte da atividade, novamente foi retomada a conversa com todos os alunos do 6º ano.

> PP*: Agora eu quero que vocês recortem os desenhos dos triângulos equiláteros e coloquem ao lado do que o seu colega desenhou, encostem um vértice do triângulo no vértice do outro triângulo. Quem desenhou mais de um triângulo equilátero na malha que eu entreguei, pode recortar os triângulos desenhados e colocar um ao lado do outro.*
> PP: *Agora que vocês estão colocando dois triângulos equiláteros um ao lado do outro, eu quero que vocês imaginem a vista superior dos prismas, entenderam o que eu disse?*
> *Alunos: sim.*
> PP: *Agora imaginem o painel funcionando com os prismas triangulares e vocês estão enxergando a vista superior. Um prisma ao lado do outro, do modo como vocês estão colocando na carteira, vocês enxergam uma vista superior. Agora prestem atenção no que acontece, porque o painel funciona?*
> [nesse momento, um representante de cada grupo começou falar para os demais alunos da sala de aula].
> [...]
> Aluno A6.20: *Nós estamos olhando de cima!*
> *[...]*
> Aluno A6.25*: Porque a soma dos três ângulos internos dá 180º.*
> Aluno A6.20*: Por causa de três coisas, não passa de três ângulos internos em cada triângulo, cada um mede 60º, com isso não mostra a outra propaganda, na hora de virar ao invés de um bater na face do outro, eles acabam se encontrando.*

Novamente a condução da atividade foi retomada. Foram entregues para os alunos desenhos de quadrados, pentágonos regulares e hexágonos regulares e pedido que imaginassem o que iria acontecer se o painel fosse formado por prismas quadrangulares, pentagonais e hexagonais. Nesse momento, os alunos também fizeram uso dos sólidos de acrílico, de madeira e mediram cada ângulo interno da base dos prismas, conforme indica a Figura 23.

Figura 23: Aluno A6.20 do grupo G1 medindo os ângulos da base do prisma pentagonal regular



Fonte: Diário de Campo do Professor.

Novamente o professor passou em cada um dos grupos, ouviu os alunos a respeito do que eles faziam, quando imaginavam a possibilidade de um painel ser formado por prismas, quadrangulares, pentagonais ou hexagonais. Transcrevemos a seguir alguns desses momentos em que que os grupos faziam observações para o professor.

Aluna A6.22 [grupo G3]: Professor, a justificativa de novo é pelos ângulos.
Aluna A6.22: Professor, de cada lado do hexágono, desce um retângulo, são seis retângulos, vão ser seis anúncios, não vai dar certo, vai ficar um anúncio escondido.
Aluno A6.20: Não ia dar certo! Cada ângulo mede 108º [o aluno refere-se a medida do ângulo da base de um prisma pentagonal regular].

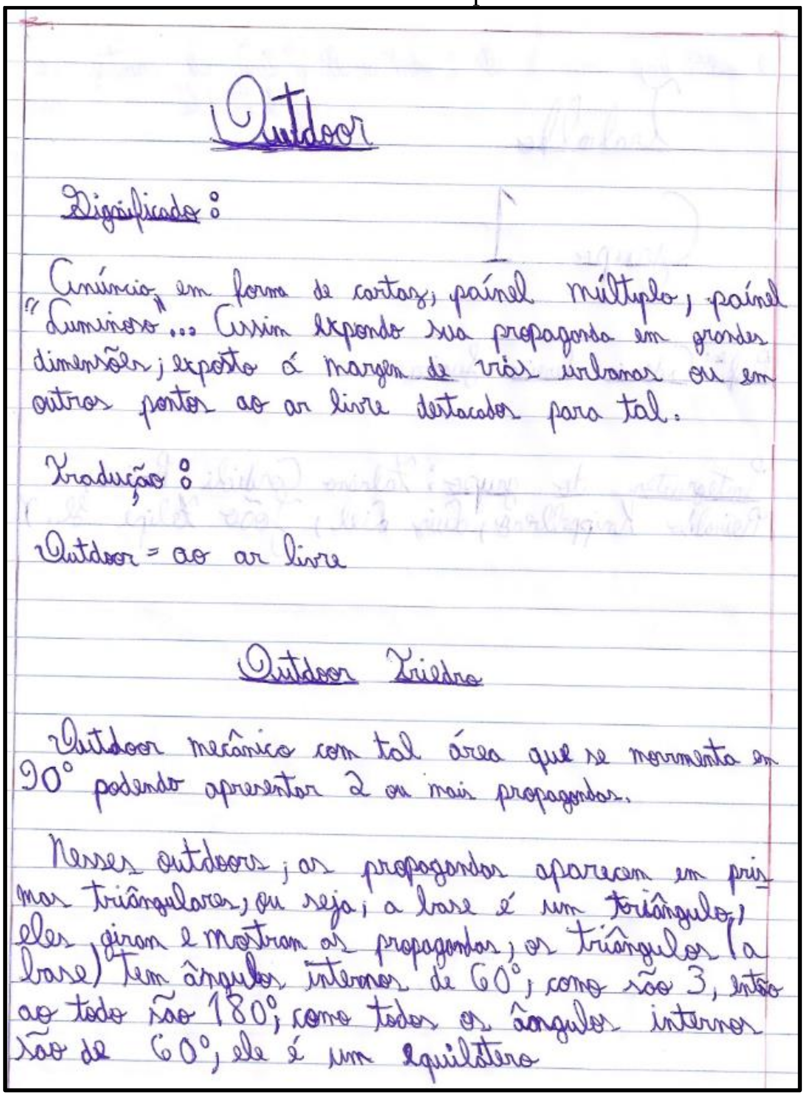
Novamente o professor retomou a condução da atividade, envolveu todos os alunos, solicitou que cada grupo apresentasse oralmente as conclusões a que haviam chegado, as justificativas matemáticas. Na sequência, transcrevemos algumas conclusões a que os alunos chegaram.

PP: E, se o prisma fosse de base quadrada, o que ia acontecer?
Aluno A6.20 [grupo G1]: Um ia bater no outro, as faces de um vão bater no outro.
Aluno A6.5 [grupo G6]: Vai ter ângulo de 90º, não vai dar.
Aluno A6.20: Se colocarmos um quadrado um ao lado do outro, não vai dar certo, tem que deixar um espaço de um prisma para o outro, para não bater, a propaganda não vai ficar inteira.
PP: É viável que a propaganda não fique inteira? Quem observa o outdoor vê os espaços entre uma propaganda e outra, isso é bom?
Alunos: não! [todos respondem ao mesmo tempo]
Aluna A6.24 [grupo G3]: No prisma triangular, quando sai de um anúncio, vai para o outro, isso acontece, por causa dos ângulos.
PP: Todos concordam que a justificativa acontece em função dos ângulos?
Alunos: Sim! [todos falam ao mesmo tempo]

Aluno A6.6 [grupo G1]: A soma dos ângulos do triângulo dá 180º, professor! Por isso preenche os espaços, não vai ficar nenhum anúncio escondido no painel triedro.

Após esse fechamento, cada grupo entregou um relatório para o professor. Para ilustrar as conclusões a que os alunos chegaram a respeito da atividade, a seguir apresentamos os relatórios de dois grupos, G1 e G3.

Figura 24: Primeira Parte do Relatório do Grupo G1 da Atividade *Painel Triedro*



Outdoor

Significado:

Anúncio em forma de cartaz, painel múltiplo, painel "luminoso"... assim expondo sua propaganda em grandes dimensões, exposto á margem de vias urbanas ou em outros pontos ao ar livre destacados para tal.

Tradução:

Outdoor = ao ar livre

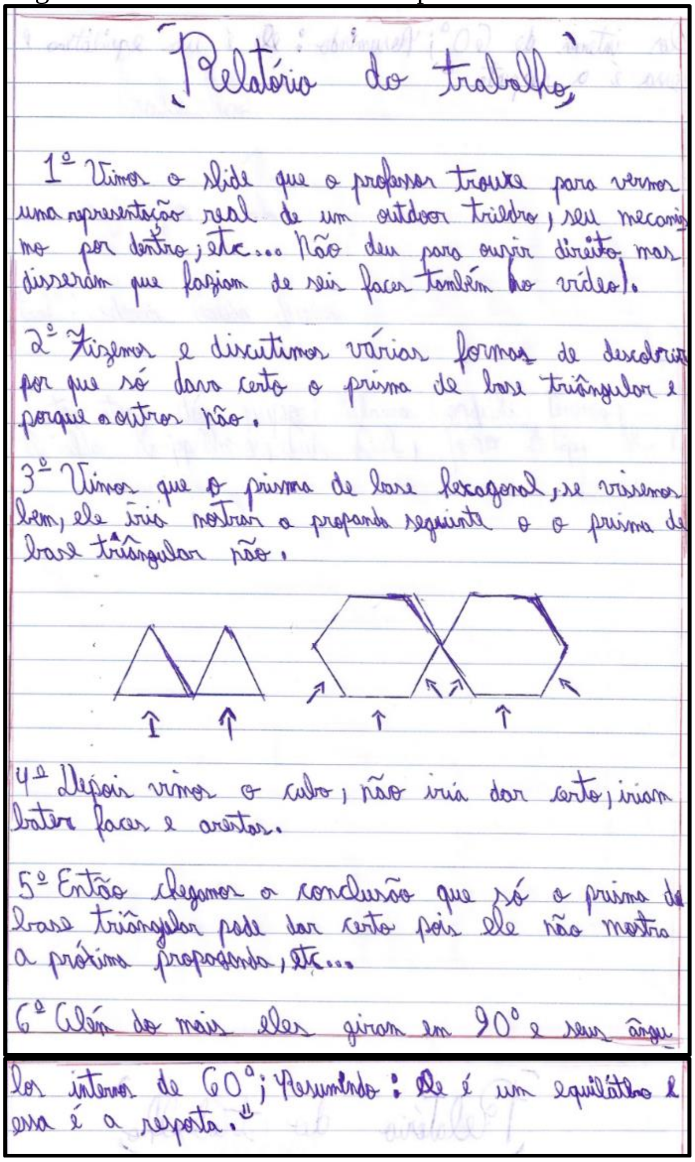
Outdoor Triedro

Outdoor mecânico com tal área que se movimenta em 90° podendo apresentar 2 ou mais propagandas.

Nesses outdoors, as propagandas aparecem em prismas triangulares, ou seja, a base é um triângulo, eles giram e mostram as propagandas, os triângulos (a base) tem ângulos internos de 60°, como são 3, então ao todo são 180°, como todos os ângulos internos são de 60°, ele é um equilátero

Fonte: Relatório do Grupo G1 6º ano.

Figura 25: Segunda Parte do Relatório do Grupo G1 da Atividade *Painel Triedro*



Relatório do trabalho.

1º Vimos o slide que o professor trouxe para vermos uma apresentação real de um outdoor triedro, seu mecanismo por dentro; etc... Não deu para ouvir direito, mas disseram que faziam de seis faces também (no vídeo).

2º Fizemos e discutimos várias formas de descobrir por que só dava certo o prisma de base triângular e porque os outros não.

3º Vimos que o prisma de base hexagonal, se virássemos bem, ele iria mostrar a propaganda seguinte e o prisma de base triângular não.

4º Depois vimos o cubo, não iria dar certo, iriam bater faces e arestas.

5º Então chegamos a conclusão que só o prisma de base triângular pode dar certo pois ele não mostra a próxima propaganda, etc...

6º Além do mais eles giram em 90º e seus ângulos internos de 60º; Resumindo: Ele é um equilátero e essa é a resposta.

Fonte: Relatório do Grupo G1 6º ano.

Figura 26: Primeira Parte do Relatório do Grupo G3 da Atividade *Painel Triedro*

RELÁTORIO:

O triedro significa 3 faces, e é uma mídia dinâmica que dá muito mais impacto a qualquer propogonda exposta. in todo de sempre de preferencia em pontos diferenciada como cruzamentos de longas intervalas ou pachadas de lojas ou até mesmo em areas internas, consegue chamar muito mais a atenção do que qualquer outro tipo de mídia, pois os sistemas de giro proporcionam muito mais qualidades em seus anuncios.

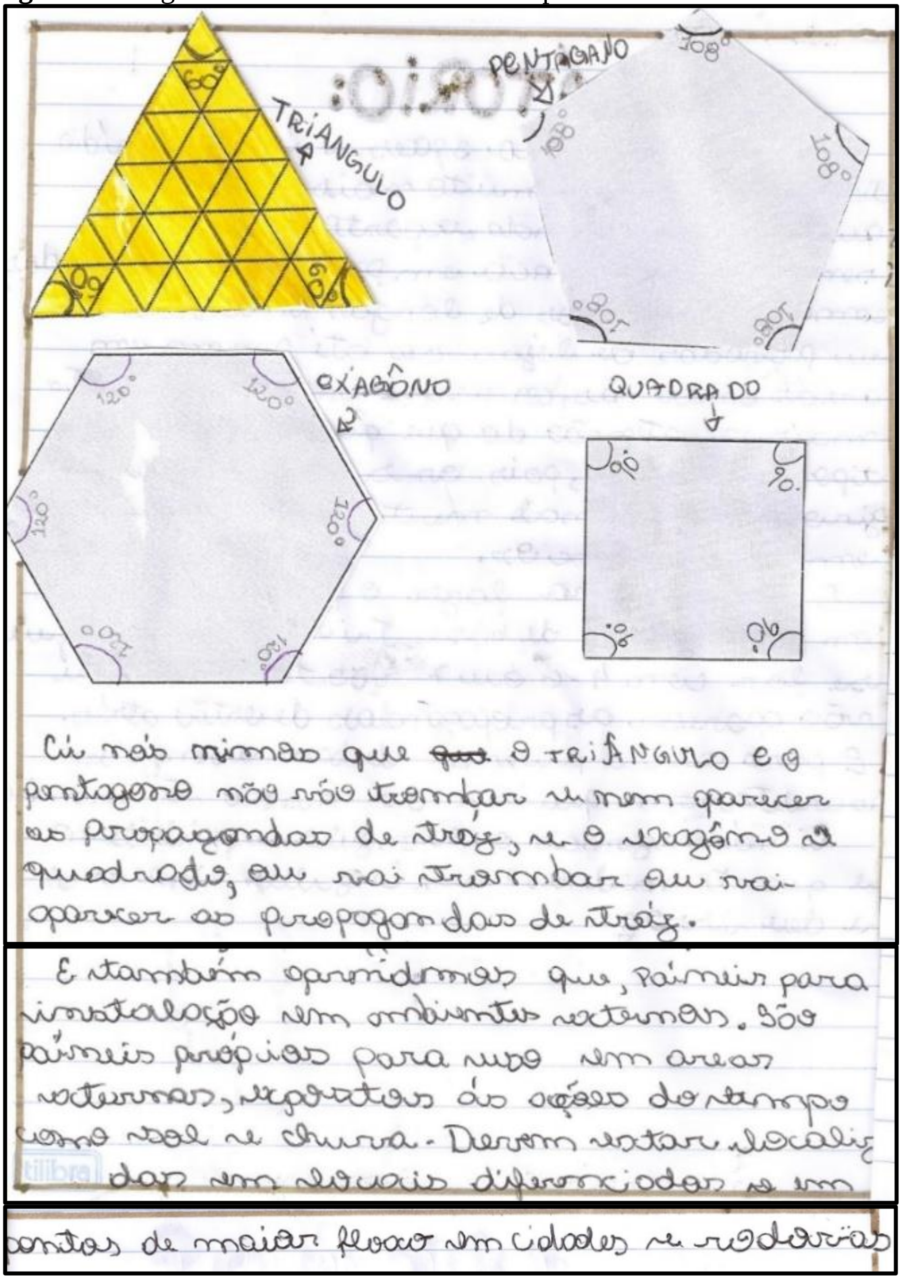
E não dá para fazer o painel sem ser com o prisma de base Triangular, porque se for com 4-6 ou 7 não trambar ou não aparecer as propogondas de estão atrás.

E para ser o prisma de base triangular as arestas tem que ser do mesmo tamanho

Ai nós pegamos o triangulo equilátero e quanto mede os seus angulos internos e deu isso ?

Fonte: Relatório do Grupo G3.

Figura 27: Segunda Parte do Relatório do Grupo da Atividade *Painel Triedro*



Fonte: Relatório do grupo G3 6º ano.

4.2.2 ENCAMINHAMENTO DA ATIVIDADE *PAINEL TRIEDRO* NO 9º ANO

Apresentamos, nesta seção, o encaminhamento da atividade *Painel triedro* com a turma do 9º ano, exemplificando com ações dos grupos G1, constituído pelos alunos A9.13, A9.25, A9.26 e A9.29; G2, formado pelos alunos A9.4, A9.5, A9.16 e A9.30; G4, formado pelas alunas A9.6, A9.10 e A9.26; G5, constituído pelos alunos A9.3, A9.12, A9.19 e A9.24 e com um gesto do aluno A9.9 do grupo G8.

Optamos por quatro grupos e pelo aluno A9.9, do grupo G8, em função da especificidade da atividade e do interesse de olhar para a constituição de *jogos de linguagem* nessa atividade.

No início dessa atividade aconteceu por meio de um diálgo do professor com os alunos, eles haviam apresentado o que tinham encontrado como tarefa de casa a respeito do que é um painel triedro.

A seguir, destacamos alguns momentos dessa conversa inicial do professor com a turma.

> *Aluno A9.26 [grupo G4]: Nesses outdoors aparecem três imagens, acho que são triângulos.*
> *Aluno A9.2 [grupo G8]: Os paineis são trifaciais.*
> *PP: Por que esses paineis são trifaciais?*
> *Aluno A9.33 [grupo G8]: Porque têm três faces, é tridimensional.*
> *Aluno A9.26: Por isso é triedro.*
> *Aluno A9.2: Tem como fazer um painel com prisma assim? [o aluno refere-se ao prisma de base quadrangular e mostra um sólido de acrílico com esse formato para o professor].*
> *Aluno A9.26: A imagem não seria tão grande por causa do tamanho.*
> *Aluno A9.9 [grupo G8]: Vai se chocar.*

Após essa conversa inicial, os alunos assistiram a três vídeos a respeito do Painel Triedro e, logo após, começaram a fazer observações, por exemplo, que o painel não poderia ser formado por prismas quadrangulares, pois haveria problemas nas mudanças de propagandas. Como já foi colocado, o aluno A9.9, do grupo G8, recorrendo a um gesto, explicou o que aconteceria caso o painel fosse formado por prismas quandrangulares.

> *Aluno A9.9: Professor, se for prisma de base quadrada, vai girar assim [um gesto é feito pelo aluno com o auxílio de um caderno e de um livro para a turma], não ia dar, há um desnível, não tem um encaixe entre as faces.*

A Figura 28 indica a explicação feita pelo Aluno A9.9 do grupo G8.

Figura 28: Explicação feita pelo aluno Aluno A9.9 do grupo G8 a respeito da possibilidade de o painel ser formado por prismas quadrangulares

Fonte: Diário de Campo do Professor.

Logo após essa explicação do aluno A9.9, o aluno A9.26, do grupo G1, fez a seguinte pergunta para o professor: *"Você quer saber por que com prisma quadrado, hexagonal não dá certo?"*. O professor, aproveitando a pergunta do aluno A9.26, convidou-os a justificar, matematicamente, por que o Painel Triedro é formado por prismas triangulares, ou seja, como a matemática pode ser usada para justificar o funcionamento do Painel Triedro.

No início do trabalho em grupos, o professor fez atendimentos com a intenção de ouvir o que os alunos estavam fazendo e de realizar questionamentos, intervenções, quando necessário. Na sequência, apresentamos um exemplo desse atendimento a feito alguns grupos.

No primeiro grupo, o G1, os alunos testavam se poderia existir um painel formado pela combinação de dois tipos de prismas, o triangular com o hexagonal (Figura 29).

Figura 29: Hipótese inicial do Grupo G1

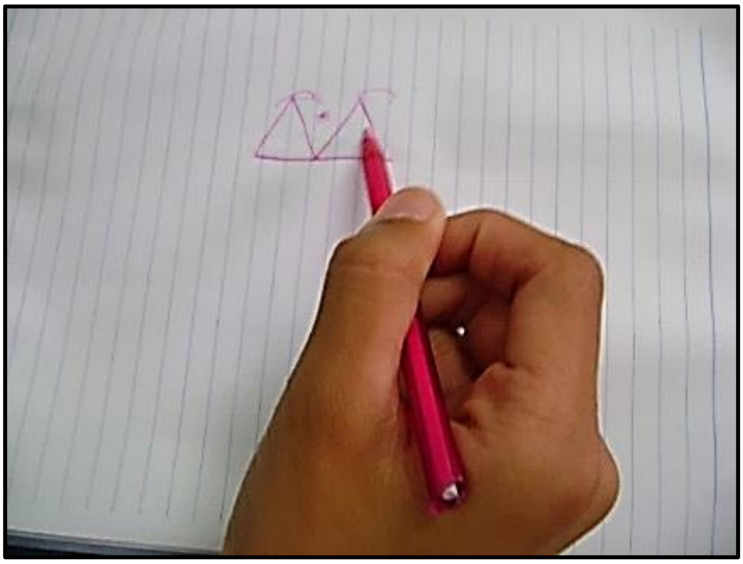
Fonte: Diário de Campo do Professor.

Esses alunos, após medirem as arestas da base dos prismas e imaginarem o movimento do Painel formado por esses tipos de prismas, bem como medir os ângulos internos das bases dos prismas, chegaram à conclusão de que isso não era possível. Em seguida, começaram a investigar o que o professor havia pedido.

O grupo G2 discutia o problema e apresentou o que entedia ser a justificativa.

Aluna A9.30: Professor, em cada triângulo os ângulos dele o total mede 180º. Se colocar três triângulos desses só numa imagem, vai precisar girar 180º. Então professor...
PP: Então?
Aluna A9.30: Eu fiz isso no caderno, olha aqui. Só que eu pensei em fazer algum cálculo para chegar aos 180º.
PP: Será que precisa fazer algum tipo de cálculo?
[imagem feita pela aluna durante a explicação].

Figura 30: Desenho feito pela aluna A9.30 do grupo G2 para justificar o funcionamento do Painel Triedro



Fonte: Diário de Campo do Professor.

PP: Você sabe o nome desse tipo de triângulo?
Aluna A9.30: Equilátero.
PP: Você sabe quanto mede cada ângulo interno de um triângulo equilátero?
[os alunos do grupo ficam pensativos]
PP: O que é um triângulo equilátero?
[nenhum aluno responde à pergunta do professor]
Aluna A9.30: Precisa girar 180º para aparecer a outra propaganda.

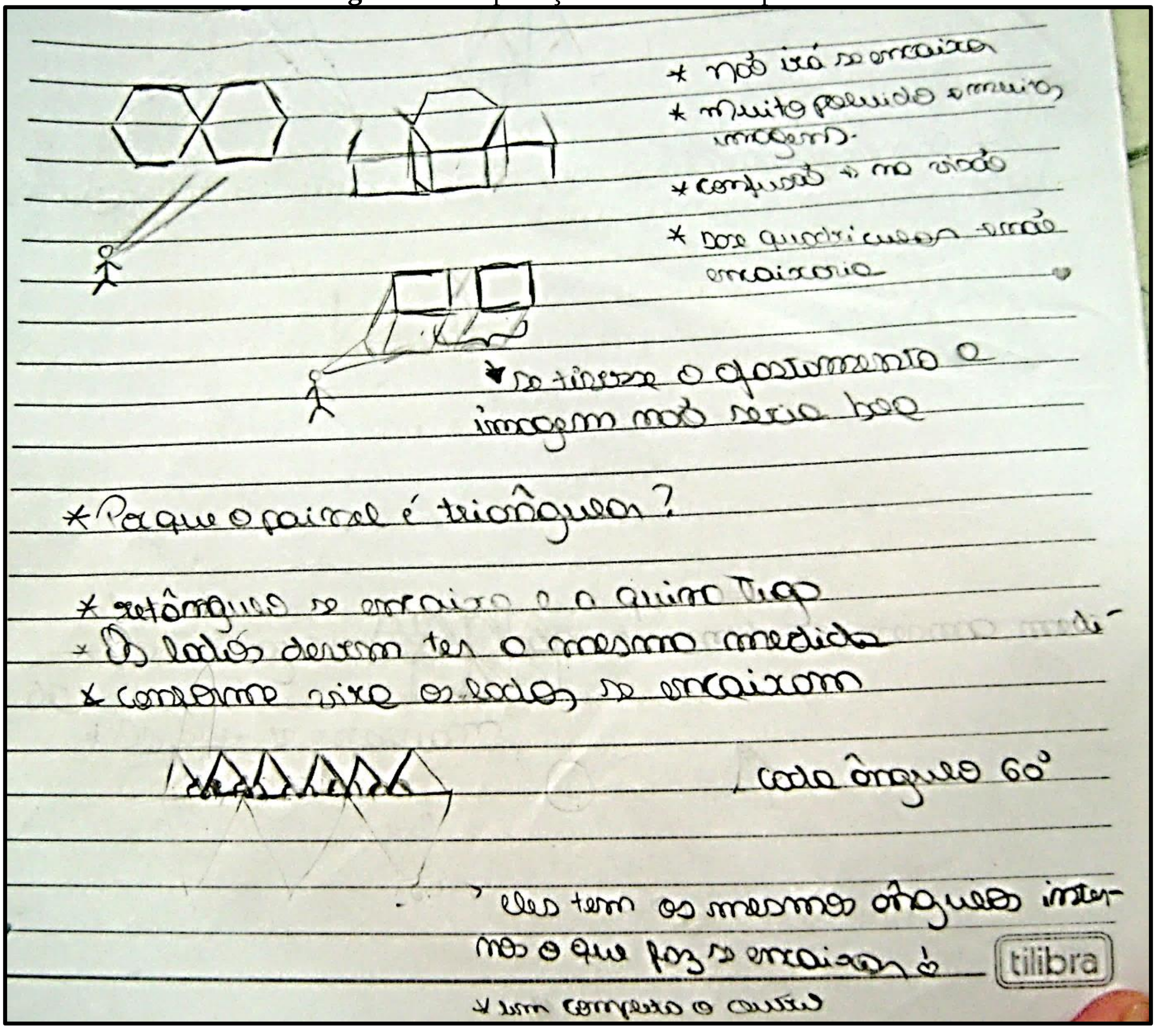
Os alunos do grupo G4, assim como o grupo G2, tinham, quase pronta, a justificativa do que havia sido pedido pelo professor, conforme observamos no diálogo a seguir.

Aluna A9.6: Professor, nós estamos marcando esses pontos, nós observamos que os triângulos se encaixam e aqui fica livre, os lados devem ter a mesma medida, conforme vira os lados se encaixam, cada ângulo interno a gente marcou 60º, só aqui em cima não tem, seria 120º. O quadrado tem duas quinas para ligar, enquanto o triângulo tem apenas uma.
PP: Cada quina se chama vértice. Por que vocês marcaram 60º para cada ângulo interno do triângulo?

Aluna A9.6: Porque é um triângulo equilátero.

Em seguida, o grupo mostrou para o professor os desenhos feitos como auxílio para justificar o que havia sido pedido, os registros das observações do grupo.

Figura 31: Explicação inicial do Grupo G4



Fonte: Diário de Campo do Professor.

Após esse primeiro encontro com os alunos, procurou-se colaborar na realização da atividade, de modo análogo ao que aconteceu com o 6º ano, entregando desenhos dos polígonos regulares, quadrado, pentágono regular e hexágono regular, solicitando aos alunos que imaginassem a vista superior de um prisma quadrangular, pentagonal e hexagonal e como seria um painel formado por esses prismas, sem se esquecer da justificativa matemática.

A Figura 32 apresenta as ações dos alunos dos grupos G1 e G2 do 9º ano dando continuidade ao desenvolvimento da atividade.

Figura 32: Ações dos alunos na Atividade Painel Triedro

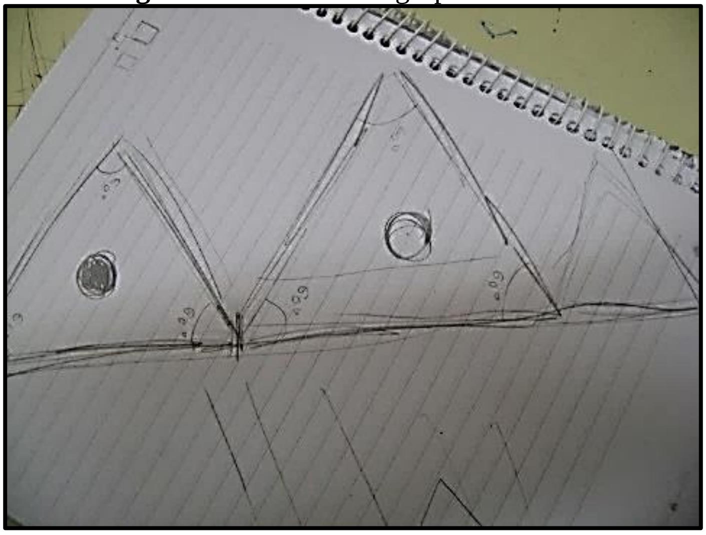
Fonte: Diário de Campo do Professor.

Um aspecto que chamou a atenção dos alunos foi a medida do ângulo interno de cada um dos polígonos regulares, porque, desde o início da atividade, os alunos afirmavam que a justificativa para o funcionamento do painel triedro tinha relação com os ângulos, embora eles ainda não soubessem qual era. Desse modo, as ações dos alunos eram direcionadas para medir cada ângulo interno com auxílio de um transferidor. Novamente, o professor continuou com o atendimento individual aos grupos de trabalho, ouvindo os alunos. O diálogo que transcrevemos a seguir mostra algumas observações de A9.25, do grupo G1, e de A9.6, do grupo G4, durante esses atendimentos.

> *Aluno A9.25 [grupo G1]: Professor, se o painel fosse pentagonal, ia ter propagandas que não iam aparecer direito.*
> *Aluna A9.6 [grupo G4]: Nós fizemos isso daqui primeiro, os desenhos de dois triângulos, deu 120º cada ângulo interno mede 60º, com os dois prismas dá 120º, aqui tem dois triângulos equiláteros. No caso dos triângulos o giro é de 180º.*

A aluna 9.6, do grupo G4, mostrou o seguinte desenho para o professor, enquanto apresentava a justificativa acerca de o painel triedro ser formado por prismas triangulares.

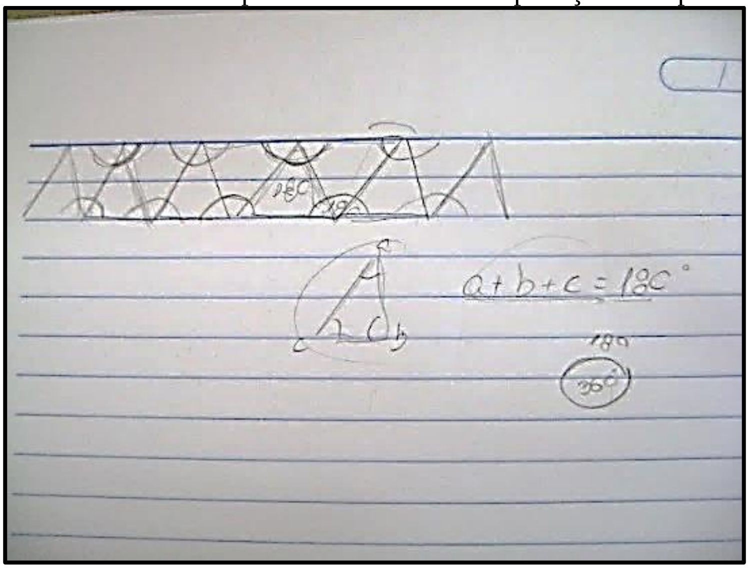
Figura 33: Desenho do grupo G4 na aula



Fonte: Diário de Campo do Professor.

O aluno A9.16, do grupo G2, utilizou o desenho indicado na Figura 34 durante a explicação.

Figura 34: Desenho utilizado pelo aluno A9.16 na explicação feita para o professor



Fonte: Diário de Campo do Professor.

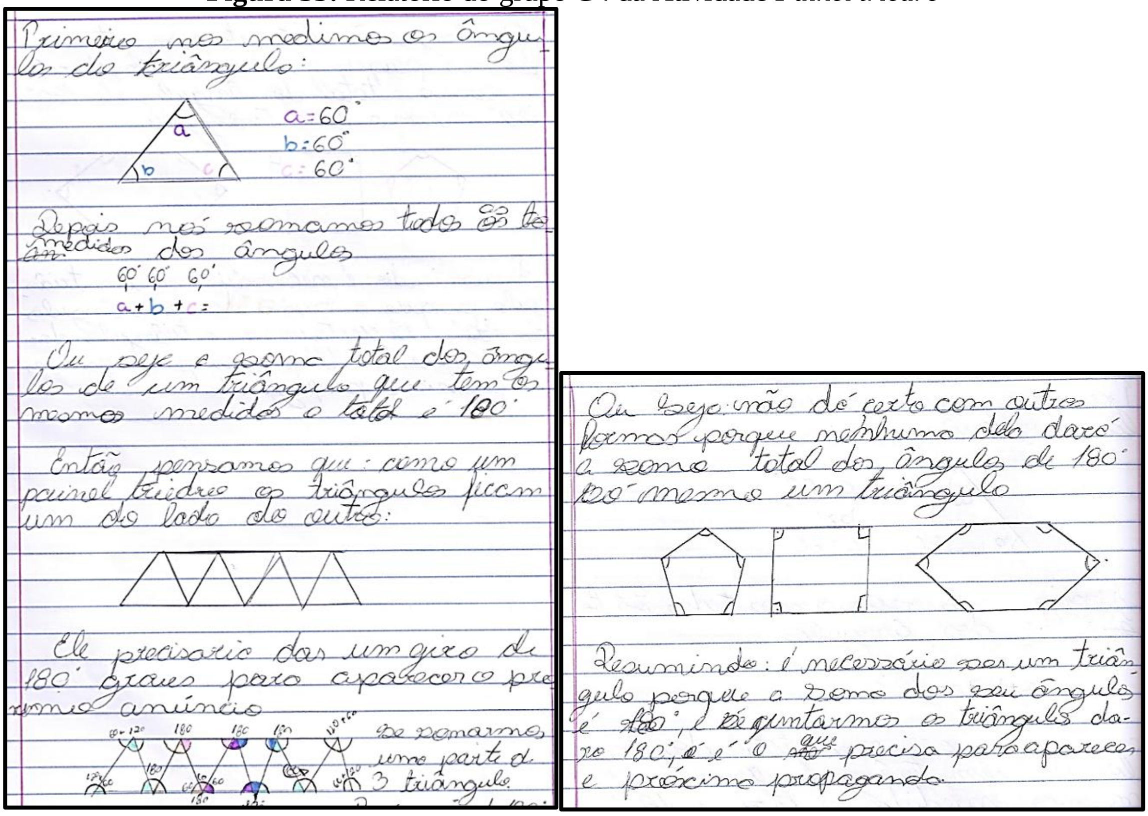
Após os atendimentos do professor a cada grupo, aconteceu o momento da socialização das conclusões, e um representante de cada grupo apresentou a conclusão à turma e ao professor. A seguir transcrevemos alguns momentos da socialização da atividade.

Aluno A9.26 [grupo G1]: no centro da base de cada prisma, existe um motor que faz com que os prismas girem. O giro corresponde a um ângulo de 180º.
PP: E se o painel fosse formado por um prisma quadrangular?
Alunos: Teria que ter uma distância entre os prismas para que as bases não batessem uma na outra.
PP: É viável ter um espaço entre um prisma e outro no outdoor?

Alunos: não.
PP: Por quê?
Aluno A9.9 [grupo G8]: As propagandas vão ficar cortadas por causa da distância entre os prismas.
PP: E qual é a justificativa matemática para isso?
Alunos: O giro seria de 360º [alguns alunos falam ao mesmo tempo]
PP: E se o painel fosse formado por um prisma pentagonal?
Aluno A9.26: Ia sobrar um espaço, daria para colocar mais um anúncio que as pessoas não iam enxergar.
[...]
PP: E se fosse um prisma hexagonal?
Alunos: do mesmo jeito que no pentagonal, iam sobrar espaços [vários alunos falam ao mesmo tempo].

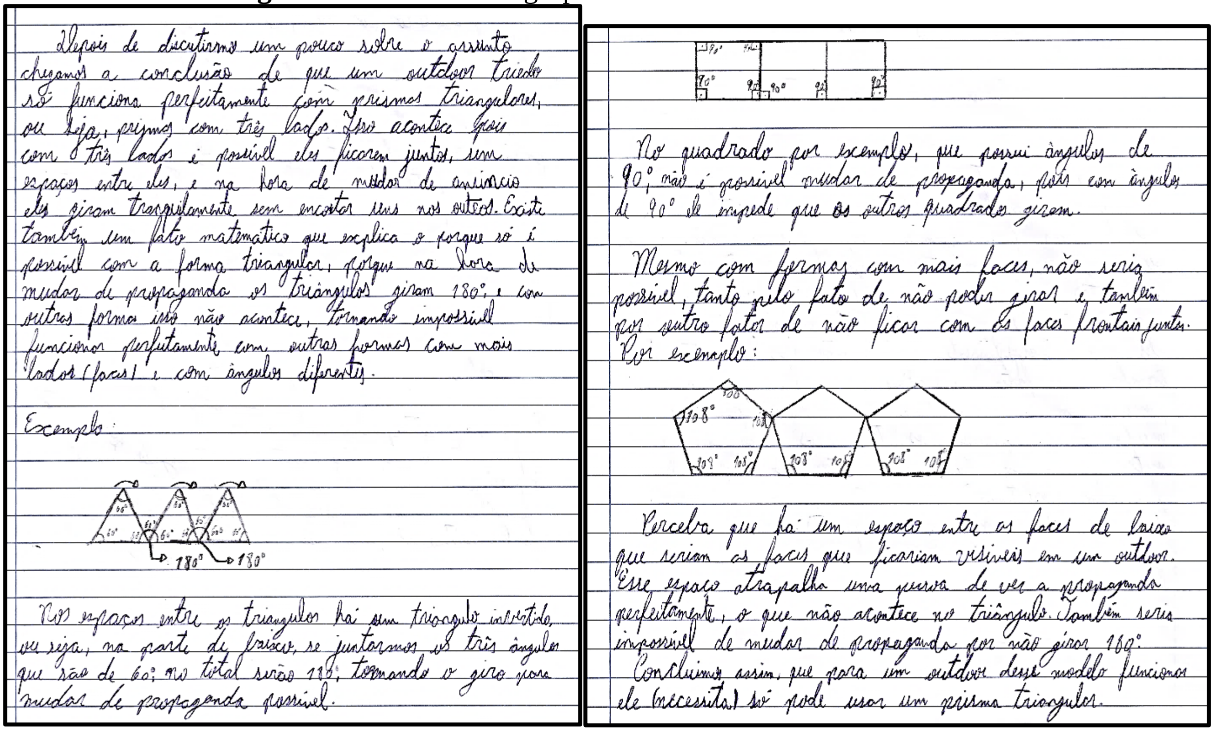
Após todas as apresentações, os grupos entregaram relatórios. A seguir, são apresentamos os relatórios dos grupos G4 e G5.

Figura 35: Relatório do grupo G4 da Atividade *Painel triedro*


Primeiro nós medimos os ângulos do triângulo:
a=60°
b=60°
c=60°
Depois nós somamos todas as medidas dos ângulos
60° 60° 60°
a+b+c=
Ou seja a soma total dos ângulos de um triângulo que tem as mesmas medidas o total é 180°
Então pensamos que: como um painel triedro os triângulos ficam um do lado do outro:
Ele precisaria dar um giro de 180° graus para aparecer o próximo anúncio
60+120 180 180 180 120+60
Se somarmos uma parte de 3 triângulo
Ou seja não dá certo com outras formas porque nenhuma delas daria a soma total dos ângulos de 180° mesmo um triângulo
Resumindo: é necessário ser um triângulo porque a soma dos seus ângulos é 180°, e juntarmos os triângulos dará 180°, e é o que precisa para aparecer a próxima propaganda

Fonte: Grupo G4 9º ano.

Figura 36: Relatório do grupo G5[28] da Atividade *Painel triedro*


Depois de discutirmos um pouco sobre o assunto chegamos a conclusão de que um outdoor triedro só funciona perfeitamente com prismas triangulares, ou seja, prismas com três lados. Isso acontece pois com três lados é possível eles ficarem juntos, sem espaços entre eles, e na hora de mudar de anúncio eles giram tranquilamente sem encostar uns nos outros. Existe também um fato matemático que explica o porque só é possível com a forma triangular, porque na hora de mudar de propaganda os triângulos giram 180°, e com outras forma isso não acontece, tornando impossível funcionar perfeitamente com outras formas com mais lados (faces) e com ângulos diferentes.

Exemplo:

Nos espaços entre os triangulos há um triangulo invertido, ou seja, na parte do frisco, se juntarmos os três ângulos que são de 60°, no total serão 180°, tornando o giro para mudar de propaganda possível.

No quadrado por exemplo, que possui ângulos de 90°, não é possível mudar de propaganda, pois com ângulos de 90° ele impede que os outros quadrados girem.

Mesmo com formas com mais faces, não seria possível, tanto pelo fato de não poder girar e também por outro fator de não ficar com as faces frontais juntas. Por exemplo:

Perceba que há um espaço entre as faces de baixo que seriam as faces que ficariam visíveis em um outdoor. Esse espaço atrapalha uma pessoa de ver a propaganda perfeitamente, o que não acontece no triângulo. Também seria impossível de mudar de propaganda por não girar 180°.

Concluímos assim, que para um outdoor desse modelo funcionar ele (necessita) só pode usar um prisma triangular.

Fonte: Relatório do grupo G5 9º ano.

4.2.3 ANÁLISE LOCAL DO ENCAMINHAMENTO DA ATIVIDADE *PAINEL TRIEDRO*

Para os alunos, lidar com essa atividade era algo diferente em relação às outras que eles haviam desenvolvido anteriormente, pois era um momento de justificar, não de calcular.

Quando assistiram aos vídeos que mostravam o painel triedro em movimento, uma interpretação dos alunos das duas turmas, desde o início da atividade, era que, se o painel fosse formado por outros tipos de prismas, acarretaria problemas relacionados ao seu funcionamento e às propagandas que fossem veiculadas. Isso pode ser visto, por exemplo, no gesto do aluno A6.20, do grupo G1 do 6º ano, na Figura 20 e na fala do próprio aluno: *"Se fosse assim, ia bater. As faces não são do mesmo tamanho, o quadrado do meio que vai bater".* Nesse caso, o aluno refere-se à base superior do prisma quadrangular. Gesto análogo foi feito pelo aluno A9.9, do grupo G8 do 9º ano, com o uso do caderno e do livro (Figura 28). Os gestos desses alunos evidenciam o propósito de explicar problemas no painel triedro, caso seja formado por prismas quadrangulares. Essas ações mostram a constituição de um *jogo de*

[28] Em alguns locais do texto, os alunos escreveram prismas com três lados, em vez de, três faces; quadrado, em vez de prisma quadrangular, e triângulo em vez de prisma triangular. Isso parece mostrar falta de atenção dos alunos.

linguagem, o de usar o gesto, e o uso desses gestos exemplifica o que os alunos queriam explicar.

Durante a inteiração da situação, os alunos começam a interpretar a situação Painel Triedro. O aluno A6.20, do grupo G1 do 6º ano, após assistir a um dos vídeos sobre o Painel Triedro, explicou que entendia o motivo pelo qual painel é formado por prismas triangulares.

> *Professor, eu descobrir porque, os prismas não vão girar ao mesmo tempo. Quando mostrou o mecanismo dentro, eu vi que era um negócio que ia girando deitado, enquanto isso ele vai batendo nos triângulos que faz rodar. Como é roldana vai devagar. Existe uma diferença em segundos.*

A interpretação dos alunos acerca do funcionamento do Painel Triedro fez com que todos os grupos do 6º ano, com o auxílio de sólidos de acrílico, testassem se havia a possibilidade de existir um painel formado pela junção de prismas triangulares e quadrangulares, e que o grupo G1, do 9º ano, testasse se a combinação dos prismas triangular e hexagonal poderia formar outro painel. Para isso, os alunos mediram e compararam as arestas das bases dos prismas, assim como as faces frontais. Isso mostrou a constituição de outro *jogo de linguagem*, o de comparar, que lhes possibilitou concluir que não existe a possibilidade de um painel ser formado pela combinação de diferentes tipos de prismas.

A interpretação do grupo G2, do 9º ano, no início da atividade, de que o painel triedro era formado de prismas triangulares estava associada ao fato de a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo ser 180º. As alunas do grupo G2 exemplificam, com o auxílio de um desenho (Figura 30), o que o grupo inicialmente entendia ser a justificativa matemática da atividade. O propósito do uso desse desenho se constitui em um *jogo de linguagem*. O grupo G4 fez anotações no caderno com o auxílio de desenhos (Figura 31) que também evidenciam a constituição do *jogo de linguagem* de desenhar. A constituição desse *jogo de linguagem* aconteceu após a interpretação inicial do grupo em relação aos problemas que o painel triedro teria caso fosse formado por outros tipos de prismas, assim como em outros momentos durante o desenvolvimento da atividade. Esse aspecto será retomado mais adiante no texto.

No início, os grupos G2, G4 e G5, do 9º ano, tinham a hipótese de que a justificativa para o funcionamento do painel se dava pelos ângulos internos da base do prisma triangular regular ou pelo fato de a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo ser 180º, bem como pela possibilidade de não existir painel formado por outros tipos de prisma em função das medidas dos ângulos internos da bases desses prismas.

Os conceitos e ferramentas matemáticas foram utilizados pelos alunos das duas turmas. No 6º ano, ficou mais evidente o uso dos conceitos matemáticos após as intervenções do professor. Um exemplo dessas intervenções do professor é este diálogo com o grupo G1.

> *Aluno A6.20: Nós estamos considerando como base 30, 60, 90 [o aluno se refere às medidas dos ângulos internos da base dos prismas triangulares, hexagonais e quadrangulares, embora ele ainda não sabia das medidas dos ângulos internos dos polígonos das bases], eu tenho um transferidor aqui na mochila!*
> *PP: Então, tente usar o transferidor.*
> *PP: Quanto mede cada ângulo interno da base desse prisma?*
> *[o aluno usa o transferidor e mede cada ângulo interno do triângulo da base do prisma]*
> *Aluno A6.20: Cada ângulo interno mede 60º, 180º! [uma reação de espanto nesse momento, quando o aluno faz referência à soma dos três ângulos internos]*
> *PP: Isso, a soma dos três ângulos internos em qualquer triângulo dá 180º.*
> *Aluno A6.20: Cada ângulo interno mede 60º, porque é um triângulo equilátero.*
> *PP: Isso! Um triângulo é equilátero quando os três lados possuem a mesma medida e cada ângulo interno de 60º.*
> *PP: Pensem se essas informações são úteis para resolver o problema.*

A matematização acontece quando os alunos medem ângulos internos de polígonos, lidam com a definição de polígono regular, medem ângulos internos das bases de diferentes tipos de polígonos regulares. Os alunos dos grupos G2 e G4 (Figuras 30 e 31), do 9º ano desenharam triângulos, nos cadernos, articulando-os com a situação real. Os alunos do 6º ano, fizeram desenhos de triângulos equiláteros em malha triangular e alguns alunos do 9º ano usaram o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo no início da atividade. O uso de desenhos como ferramenta, quando os alunos lidam com conceitos e procedimentos matemáticos, constitui o *jogo de linguagem* de desenhar.

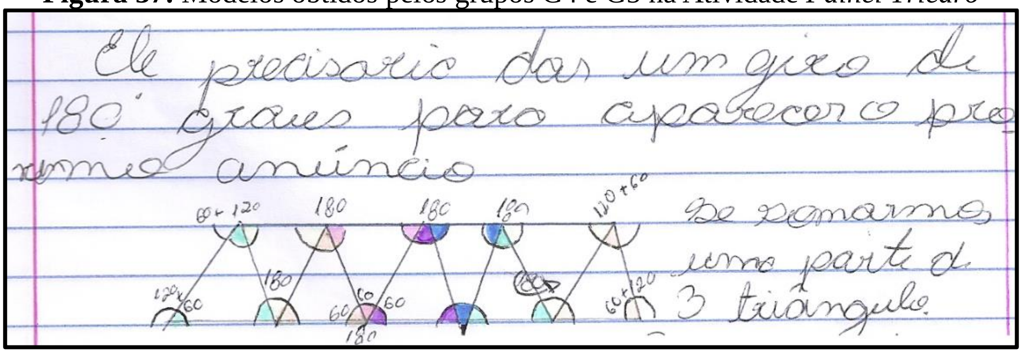
Durante a matematização, os alunos buscaram relações entre características da situação e conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos, como medir os ângulos internos da base de um prisma triangular regular e de outros tipos de prismas. Essas ações mostram a constituição do *jogo de linguagem* de medir.

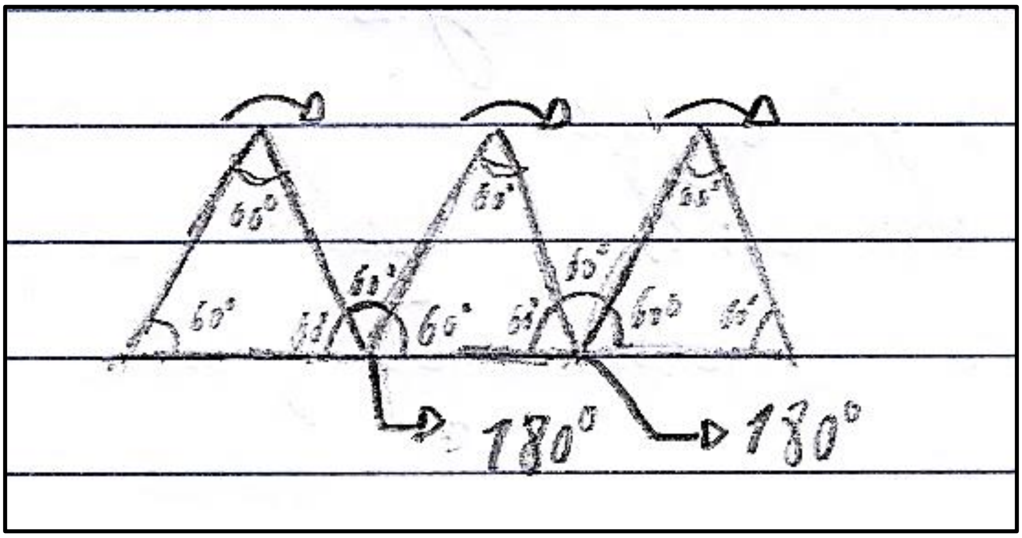
Ao desenvolver a atividade, os alunos do 6º ano aprenderam novos conteúdos matemáticos e os alunos do 9º ano tiveram a oportunidade de usar conceitos matemáticos que eles conheciam. Usar atividades de modelagem matemática em sala de aula, por um lado, possibilita aos alunos um novo uso da matemática que eles conhecem e, por outro, a oportunidade de o professor trabalhar novos conteúdos matemáticos para que os alunos possam usá-los como ferramenta para responder à investigação realizada, algo que é bastante discutido na literatura, por exemplo, em Almeida Silva e Vertuan (2012), Almeida (2014) e Almeida, (2018).

O modelo matemático, para essa situação, corresponde ao teorema da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é de 180º, na Geometria Euclidiana. O uso desse teorema explica o ponto de vista matemático da justificativa do Painel Triedro ser formado por prismas triangulares. Durante a realização da atividade, o teorema foi verbalizado pelos alunos do 6º e do 9º ano várias vezes, conforme exemplifica a fala do aluno A6.20 do 6º ano: *“Porque a soma dos três ângulos internos dá 180º”*. Usar esse teorema na atividade com o propósito de justificar o funcionamento do Painel Triedro constitui-se em um *jogo de linguagem*. O modelo matemático possibilitou uma abordagem matemática, que contemplou o estudo, por parte dos alunos, de conteúdos matemáticos que integram o currículo dos anos finais do Ensino Fundamental, de modo a prepará-los para interpretar uma situação-problema real, na qual a linguagem matemática está arraigada à linguagem do fenômeno (TORTOLA, 2012).

O modelo matemático também apareceu nos relatórios dos alunos do 9º ano, nos desenhos feitos nos cadernos no desenvolvimento da atividade que apresenta a justificativa matemática da atividade (Figuras 33 e 34). Na Figura 37, há um recorte dos relatórios dos grupos G4 e G5, respectivamente. O modelo obtido pelo grupo G4 em linguagem matemática também está escrito por meio de um desenho. Assim, é possível observar a constituição do *jogo de linguagem* de usar desenho. Desenhos de triângulos e de flechas serviram como ferramentas para auxiliar na justificativa matemática que os alunos precisavam fazer na atividade. O *jogo de linguagem* de usar desenho auxilia na constituição do *jogo de linguagem* de apresentar a justificativa matemática da atividade.

Figura 37: Modelos obtidos pelos grupos G4 e G5 na Atividade *Painel Triedro*





Fonte: Grupos G4 e G5 9º ano.

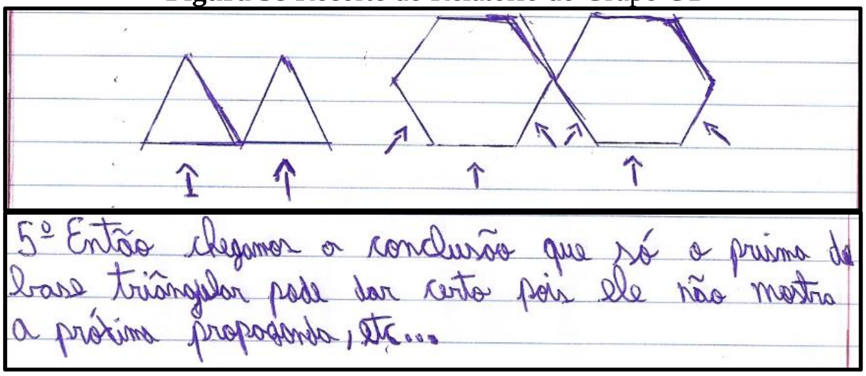
O confronto da justificativa matemática do funcionamento do Painel Triedro com a situação real foi feito pelos alunos. Aliás, nessa atividade, o contexto real permeou o tempo todo as ações dos alunos, não que isso não tenha acontecido na outra atividade, mas, nessa, eles demonstraram atenção constante à situação real. É possível observar isso na fala do aluno A6.20, do grupo G1 do 6º ano, e nas falas de alguns alunos do 9º ano no final da atividade.

> *Por causa de três coisas, não passa de três ângulos internos em cada triângulo, cada um mede 60º, a soma dá 180º, com isso mostra três propagandas, na hora de virar ao invés de um bater na face do outro, eles acabam se encontrando.*
> *No centro da base de cada prisma, existe um motor que faz com que os prismas girem; O giro corresponde a um ângulo de 180º"; "Há um triângulo invertido, isso completa 180º.*

Todas essas justificativas mostram *jogos de linguagem* constituídos pelos alunos no confronto da justificativa matemática com a situação real. Nos relatórios entregues pelos alunos, há o confronto da justificativa matemática associada à situação real, bem como possíveis problemas, caso o painel fosse formado por outros tipos de prismas. Um recorte dos relatórios do grupo G1 do 6º ano e do grupo G5 do 9º ano (Figuras 38 e 39) exemplifica isso.

No relatório do grupo G1 do 6º ano (Figura 38), os desenhos mostram a interpretação dos alunos associada ao contexto real. As flechas indicam que, se o painel fosse formado por prismas hexagonais, as propagandas não seriam visíveis para quem olha para o *outdoor*. O uso das flechas também mostra que esse problema não existe no painel triedro, porque é formado por prismas triangulares, algo que os alunos também escreveram no relatório. O uso das flechas nesses desenhos evidencia a constituição do *jogo de linguagem* de usar desenho pelos alunos do grupo G1. Outro *jogo de linguagem* constituído pelos alunos está na justificativa apresentada no relatório: *Então chegamos à conclusão que só o prisma de base triangular pode dar certo pois ele não mostra a próxima propaganda.* A expressão “não mostra a próxima propaganda” significa que, se o painel triedro fosse formado por prismas hexagonais, iria aparecer mais de uma propaganda, porém quem olha para o painel não iria ver do mesmo modo as propagandas.

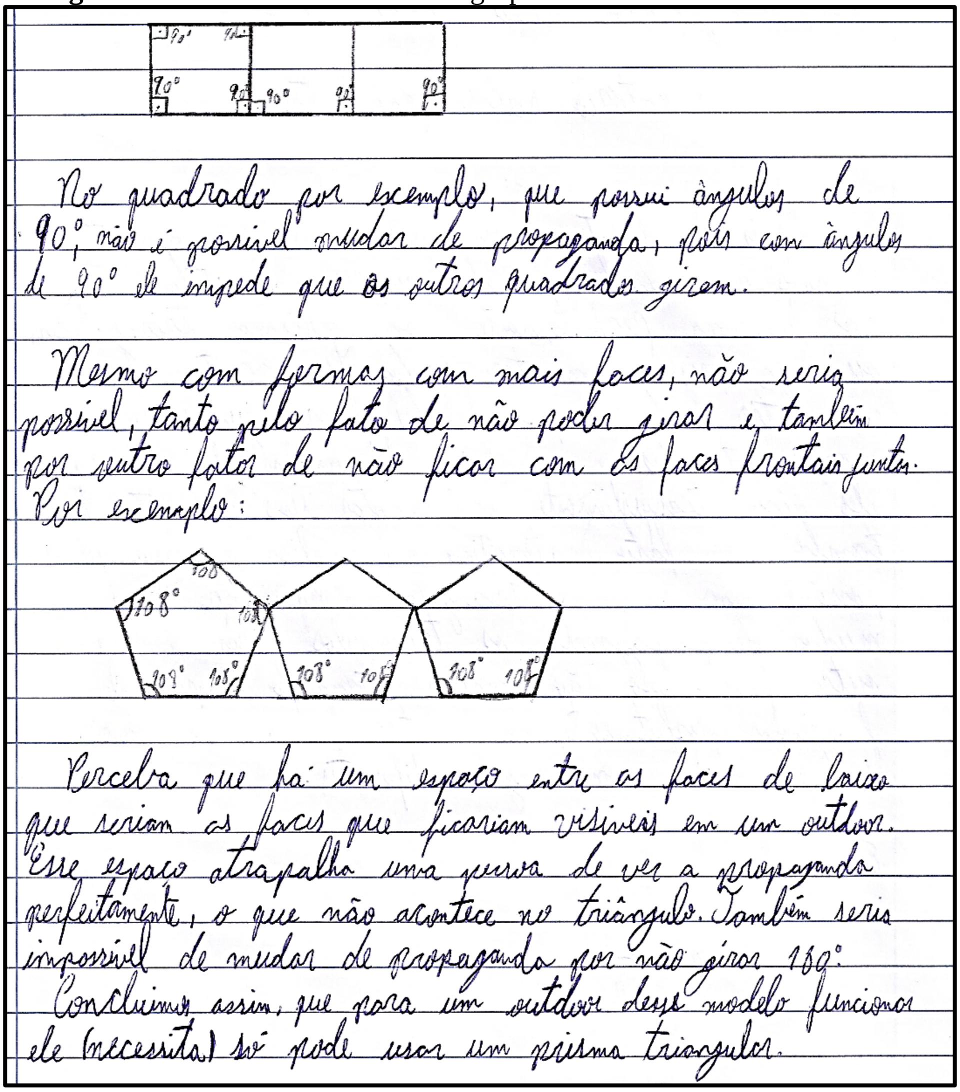
Figura 38 Recorte do Relatório do Grupo G1



Fonte: Relatório do Grupo G1 6º ano.

No relatório do grupo G5 do 9º ano, no confronto da justificativa matemática com a situação real, é preciso fazer uma ressalva: a palavra triângulo foi usada, de modo equivocado, no lugar de prisma triangular. Ao escrever o relatório, os alunos do grupo imaginaram a vista superior dos prismas, conforme indica a Figura 39, no recorte do relatório.

Figura 39: Recorte do Relatório do grupo G5 da Atividade Painel Triedro


No quadrado por exemplo, que possui ângulos de 90°, não é possível mudar de propaganda, pois com ângulos de 90° ele impede que os outros quadrados girem.

Mesmo com formas com mais faces, não seria possível, tanto pelo fato de não poder girar e também por outro fator de não ficar com as faces frontais juntas.
Por exemplo:

Perceba que há um espaço entre as faces de caixa que seriam as faces que ficariam visíveis em um outdoor. Esse espaço atrapalha uma pessoa de ver a propaganda perfeitamente, o que não acontece no triângulo. Também seria impossível de mudar de propaganda por não girar 180°.
Concluímos assim, que para um outdoor desse modelo funcionar ele (necessita) só pode usar um prisma triangular.

Fonte: Relatório do grupo G5 9º ano.

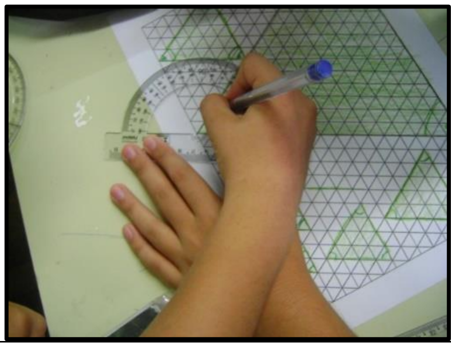
Os alunos do grupo justificaram possíveis problemas caso o painel fosse formado por prismas quadrangulares e pentagonais, por isso utilizaram desenhos de quadrados e pentágonos como ferramentas para exemplificar os problemas na possibilidade de o painel ser formado por prismas quadrangulares e pentagonais. Novamente, observa-se a constituição do *jogo de linguagem* de usar desenho.

A justificativa matemática para o Painel Triedro precisa fazer sentido com o modo como ele funciona, no contexto real. Segundo Almeida (2018), em uma atividade de modelagem, a resposta requer a integração do conhecimento matemático com o impacto na situação investigada. Ao se olhar para todos os relatórios que foram entregues, vemos a importância do contexto real. Na justificativa matemática (o modelo obtido pelos os alunos), os alunos avaliaram a resposta no contexto real, isso mostra a importância tanto da Matemática quanto da situação real em atividades de Modelagem e de integrar o conhecimento matemático com a situação investigada, conforme argumentam Pollak (2015) e Almeida (2018).

Na constituição dos *jogos de linguagem*, as ações dos alunos no desenvolvimento da atividade, descritas nos parágrafos anteriores, mostram as articulações que foram feitas por eles a respeito do que precisavam investigar com as ferramentas matemáticas utilizadas para justificar o funcionamento do Painel Triedro. Procuramos sumarizar essas ações nos quadros a seguir.

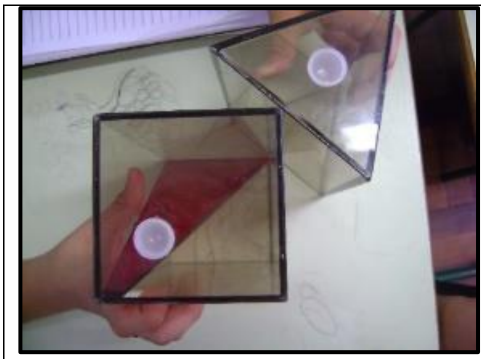
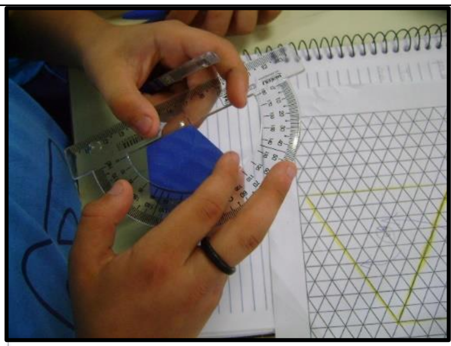
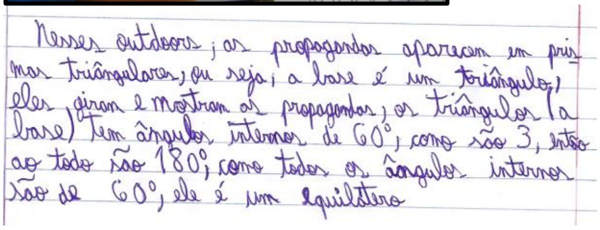
Quadro 5: As ações dos alunos do 6º ano[29] na Atividade *Painel Triedro*

<table>
<tr><td colspan="2">Situação Inicial (problemática)
Painel Triedro[30]
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inteiração
Professor, eu descobri por que os prismas não vão girar ao mesmo tempo. Quando mostrou o mecanismo de dentro, eu vi que era um negócio que girando deitado, enquanto isso ele vai batendo nos triângulos que faz rodar. Como é roldana vai devagar. Existe uma diferença em segundos.

Formulação do problema
Como a matemática pode ser usada para justificar o funcionamento do Painel Triedro?</td></tr>
<tr><td>Hipóteses
Professor, nós pensamos que o painel fosse formado por um prisma triangular e por um prisma quadrangular.
[hipótese inicial e que foi descartada pelo grupo G1]</td><td>Matematização, Resolução e Formulação do Modelo Matemático
</td></tr>
</table>

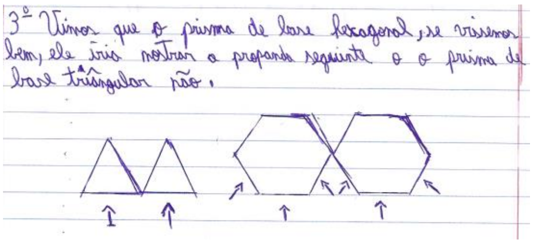
[29] Formulou-se o quadro com ações e informações dos grupos G1, G3 e G6.

[30] Essa imagem foi retirada do *site* https://mt.olx.com.br/regiao-de-cuiaba/comercio-e-escritorio/outros-itens-para-comercio-e-escritorio/painel-triedro-3-faces-70-cm-x-40-cm-716249553

 *“Professor, eu acho que as medidas dos ângulos internos interferem”.*	  Nesses outdoors; as propogandas aparecem em prismas triângulares, ou seja; a base é um triângulo; eles giram e mostram as propogandas; os triângulos (a base) tem ângulos internos de 60°; como são 3, então ao todo são 180°; como todos os ângulos internos são de 60°, ele é um equilátero *“Porque a soma dos três ângulos internos dá 180º”.*

Socialização, Interpretação, Validação e Comunicação do Resultados

"Por causa de três coisas, não passa de três ângulos internos em cada triângulo, cada um mede 60º, a soma dá 180º, com isso mostra três propagandas, na hora de virar ao invés de um bater na face do outro, elas acabam se encontrando.



Fonte: Diário de Campo do Professor.

Quadro 6: As ações dos alunos do 9º ano[31] na Atividade *Painel Triedro*

Situação Inicial (problemática)

Painel Triedro

Inteiração

Os painéis são trifaciais.

Nos prismas quadrangulares, as imagens vão se chocar.

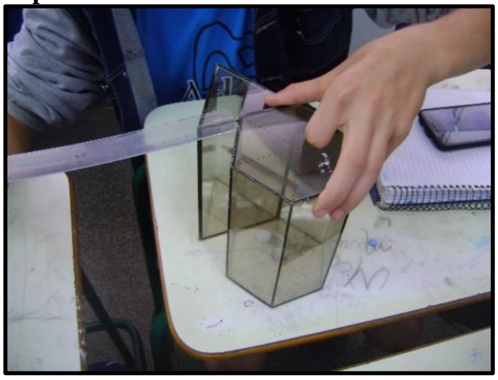
Formulação do problema

Como a matemática pode ser usada para justificar o funcionamento do Painel Triedro?

---

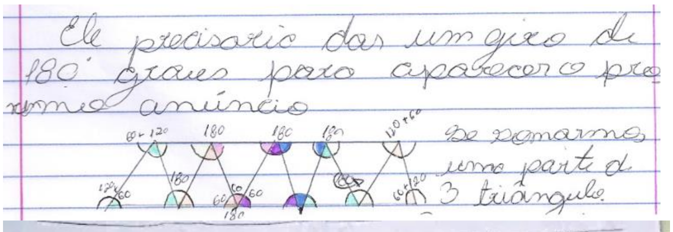
[31] O quadro é constituído por ações dos grupos G1, G2, G4 e G5.

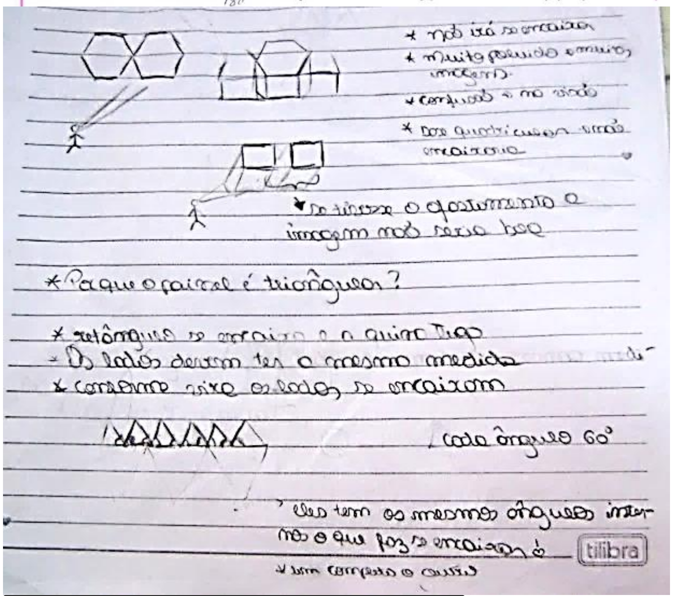
<table>
<tr><th>Hipóteses</th><th>Matematização, Resolução e Formulação do Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td>

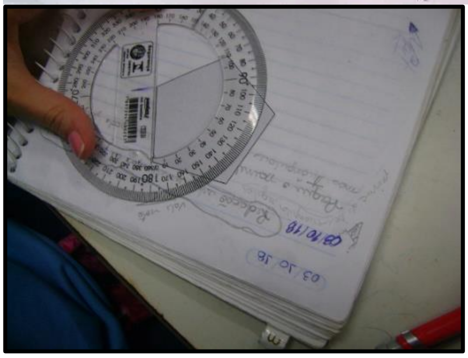


Se colocar três triângulos desses só, numa imagem vai precisar girar 180º.

</td><td>



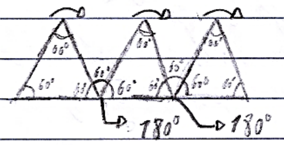




Nós fizemos isso daqui primeiro fizemos os desenhos de dois triângulos, deu 120º cada ângulo interno mede 60º, com os dois prismas dá 120º, aqui tem dois triângulos equiláteros. No caso dos triângulos o giro é de 180º.

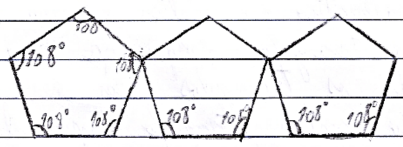
</td></tr>
</table>

Socialização, Interpretação, Validação e Comunicação do Resultados
Aluno A9.26 [grupo G1]*: [...] no centro da base de cada prisma, existe um motor que faz com que os prismas girem. O giro corresponde a um ângulo de 180º.*
PP: *E se o painel fosse formado por um prisma quadrangular?*
Alunos*: Teria que ter uma distância entre os prismas para que as bases não batessem uma na outra.*
PP*: É viável ter um espaço entre um prisma e outro no outdoor?*
Alunos*: não.*
PP*: Por que?*
Aluno A9.9 [grupo G8]: *As propagandas vão ficar cortadas por causa da distância entre os prismas*.



Nos espaços entre os triangulos há um triangulo invertido, ou seja, na parte de baixo, se juntarmos os três ângulos que são de 60°, no total serão 180°, tornando o giro para mudar de propaganda possível.

Mesmo com formas com mais faces, não seria possível, tanto pelo fato de não poder girar e também por outro fator de não ficar com as faces frontais juntas. Por exemplo:



Perceba que há um espaço entre as faces de baixo que seriam as faces que ficariam visíveis em um outdoor. Esse espaço atrapalha uma pessoa de ver a propaganda perfeitamente, o que não acontece no triângulo. Também seria impossível de mudar de propaganda por não girar 180°.
Concluimos assim, que para um outdoor desse modelo funcionar ele ~~(necessita)~~ só pode usar um prisma triangular.

Fonte: Diário de Campo do Professor.

4.3 ATIVIDADE *QUANTIDADE DE TINTA PARA PINTAR ALGUMAS PAREDES EXTERNAS DO COLÉGIO*

Essa atividade refere-se ao terceiro momento de familiarização dos alunos com a modelagem matemática e foi desenvolvida por três grupos, com três a cinco alunos do 6º ano, denominados G1, G2 e G3. O grupo G1, constituído pelos alunos A6.6, A6.11, A6.15 e A6.20; o grupo G2, pelas aluna A6.22, A6.24, A6.27 e o grupo G3, pelas alunas A6.1, A6.9, A6.13, A6.25 e A6.26.

Ainda que essa atividade fosse do terceiro momento de familiarização, em alguns momentos, os alunos recorreram à ajuda do professor.

O desenvolvimento da atividade aconteceu durante as aulas, e os alunos trabalharam em grupos e solicitavam a intervenção do professor quando necessário. Em muitos momentos, a calculadora foi uma ferramenta útil. A atividade propiciou o estudo de alguns conceitos matemáticos, como área, perímetro, cálculo da área de triângulo.

O interesse do 6º ano pelo tema Quantidade de tinta surgiu no momento em que o colégio estava sendo pintado, quando os alunos estavam imersos em um contexto de barulho realizado pelos pintores para pintar as paredes externas e de cheiro de tinta. Uma das alunas sugeriu esse tema, conforme indica o diálogo:

> *Aluna: Professor, a escola está sendo pintada. Todo o dia esse barulho dos pintores, nós também podíamos calcular a quantidade de tinta gasta para pintar as paredes da escola. Quantas latas de tinta os diretores precisam comprar para pintar essas paredes.*

A partir da sugestão da aluna, houve consenso na turma de que, para abordar a temática da pintura da sala, seria necessário conversar com a direção da escola e com o pintor responsável pela pintura.

Da conversa com o vice-diretor e da entrevista com o pintor responsável pela pintura da escola, os alunos obtiveram as seguintes informações: 1) Uma lata de tinta pinta, em média, de 36 m^2 a 40 m^2. 2) Uma *demão de tinta* é uma camada de tinta. Para cada *demão* são gastos 4 galões de tinta. 3) O ideal é passar *duas demãos* de tinta em cada parede. 4) O pintor calcula a área da parede. Ele aproxima todas as paredes por retângulos, desconsiderando as janelas e portas das paredes. Segundo o pintor, a área de portas e janelas é incluída na metragem da área a ser pintada, considerando que a mão de obra nos acabamentos nesses locais demanda muito tempo. 5) O vice-diretor do colégio comprou 20 galões de tinta para pintar as paredes da escola.

A partir dessas informações, os alunos mediram as paredes, cuja pintura estava sendo planejada. A Figura 40 mostra alguns alunos nessa ação de medir as paredes.

Figura 40: Alunos do 6º ano medindo as paredes da escola

Fonte: Diário de Campo do Professor.

Com as medidas obtidas, os alunos organizaram as informações e iniciaram a matematização da situação. A Figura 41 apresenta algumas imagens das paredes cuja área seria calculada pelos alunos.

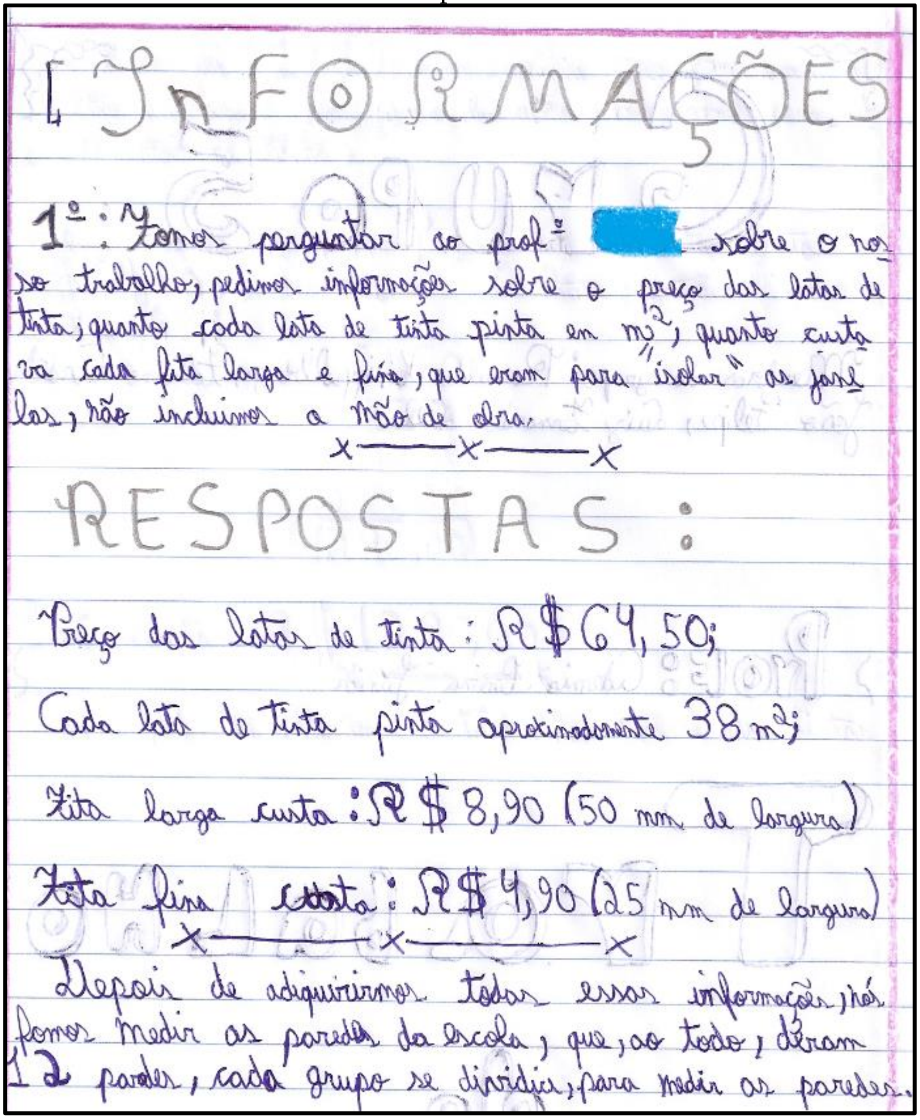
Figura 41: Algumas das paredes que seriam pintadas

Fonte: Diário de Campo do Professor.

Após a coleta de dados, parte da atividade foi desenvolvida nas aulas de matemática e parte em outros horários. Os alunos resolveram o problema de calcular a quantidade de tinta a ser comprada para pintar as paredes da escola, bem como o valor a ser gasto pela direção nessa pintura.

Para essa atividade, os alunos do 6º ano formaram 3 grupos. Refirimo-nos aqui de forma detalhada ao desenvolvimento realizado pelo grupo G1. Inicialmente, o grupo considerou as informações obtidas na escola, conforme sugere a Figura 42.

Figura 42: Informações obtidas pelo grupo G1 na entrevista com o diretor da escola acerca da pintura das paredes



Informações

1º: Fomos perguntar ao prof.º [redacted] sobre o nosso trabalho, pedimos informações sobre o preço das latas de tinta, quanto cada lata de tinta pinta em m², quanto custava cada fita larga e fina, que eram para "isolar" as janelas, não incluimos a mão de obra.

x——x——x

RESPOSTAS:

Preço das latas de tinta: R$ 64,50;

Cada lata de tinta pinta aproximadamente 38 m²;

Fita larga custa: R$ 8,90 (50 mm de largura)

Fita fina custa: R$ 4,90 (25 mm de largura)

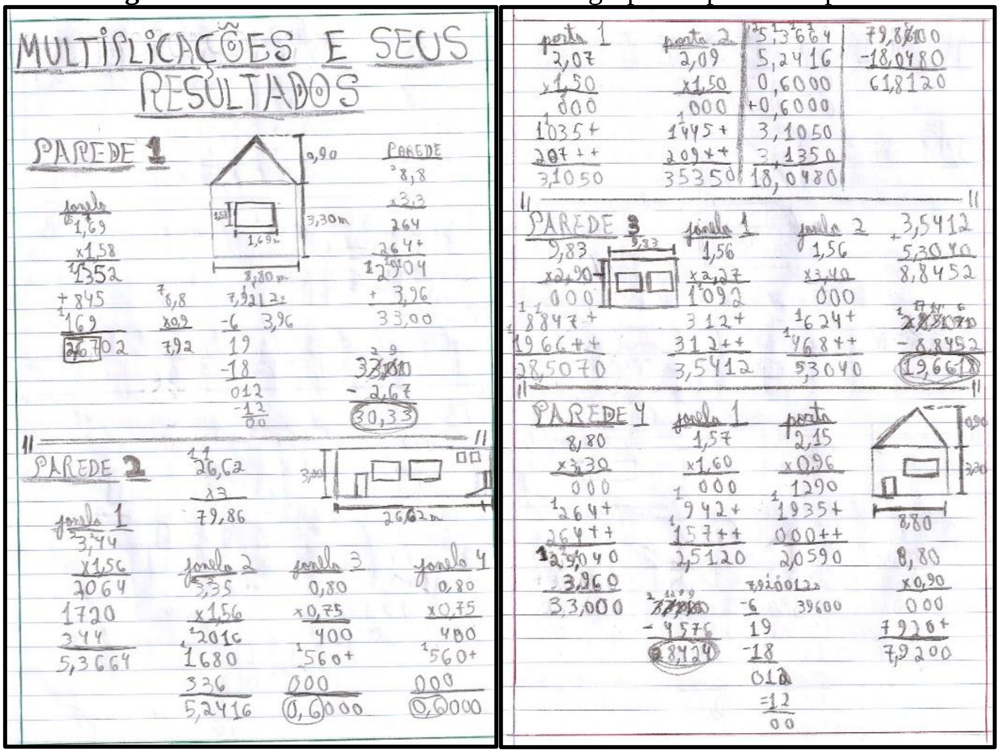
x——x——x

Depois de adiquirirmos todas essas informações, nós fomos medir as paredes da escola, que, ao todo, deram 12 paredes, cada grupo se dividiu, para medir as paredes.

Fonte: Relatório do Grupo G1.

A partir das medições realizadas nas paredes da escola, o grupo determinou que 12 paredes precisavam ser pintadas. Os alunos mediram essas 12 paredes, identificando a presença de portas e janelas em cada uma delas, assim como suas medidas. Para cada parede, porta ou janela, os alunos usaram técnicas de cálculo de área conforme a figura geométrica correspondente. Assim, determinaram a área de regiões retangulares e triangulares, conforme a forma da parede, porta ou janela. A Figura 43 ilustra como os alunos procederam para cada uma das 12 paredes.

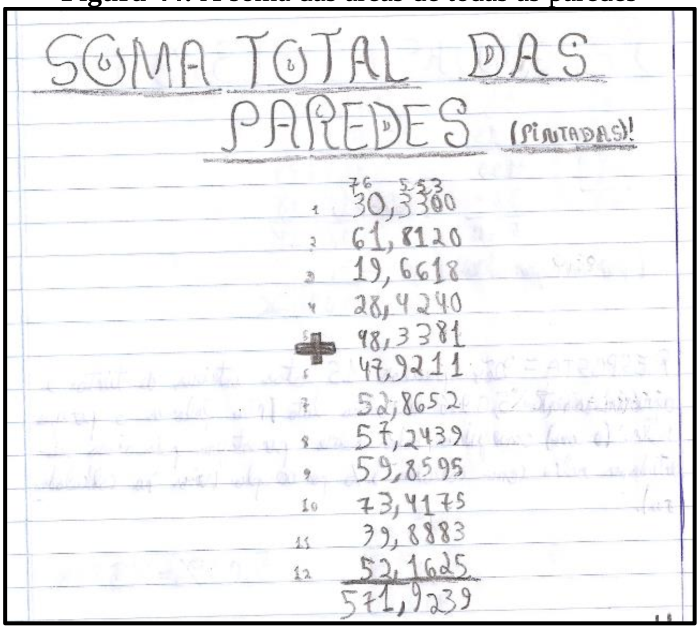
Figura 43: Procedimentos dos alunos do grupo G1 para cada parede



Fonte: Relatório do grupo G1.

Em seguida, somaram essas medidas, conforme indica a Figura 44.

Figura 44: A soma das áreas de todas as paredes

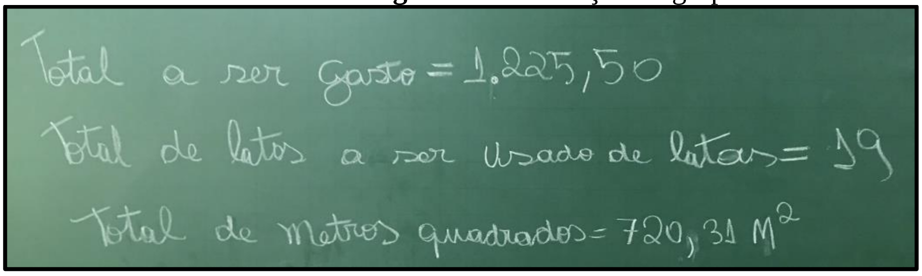


Fonte: Relatório do grupo G1.

Para obter o valor a ser gasto com a tinta, consideraram o preço da tinta e a quantidade necessária, conforme indica a Figura 42.

Com procedimentos idênticos, os alunos dos grupos G2 e G3 obtiveram seus resultados, conforme indicam as Figuras 45 e 46, respectivamente.

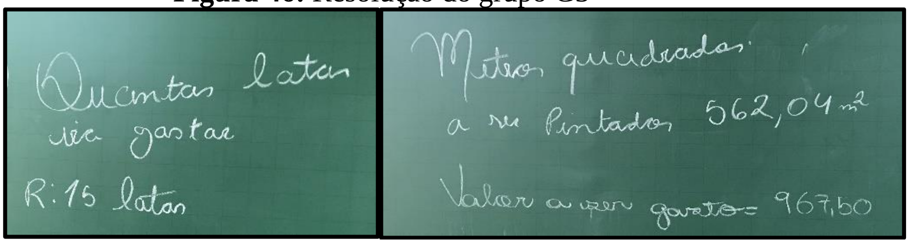
Figura 45: Resolução do grupo G2



Fonte: Dados da pesquisa.

A imagem a seguir, é das anotações feitas pelo grupo G3 durante a apresentação.

Figura 46: Resolução do grupo G3



Fonte: Dados da pesquisa.

Os três grupos fizeram a apresentação de seu desenvolvimento da atividade. A resposta de dois grupos – 15 latas – foi discutida em relação à resposta do terceiro grupo – 19 latas. Entretanto, como a escola comprara 20 latas de tinta, não houve consenso na turma sobre qual poderia ser "o melhor" resultado nesse caso.

4.3.1 ANÁLISE LOCAL DA ATIVIDADE *QUANTIDADE DE TINTA PARA PINTAR AS PAREDES EXTERNAS DO COLÉGIO*

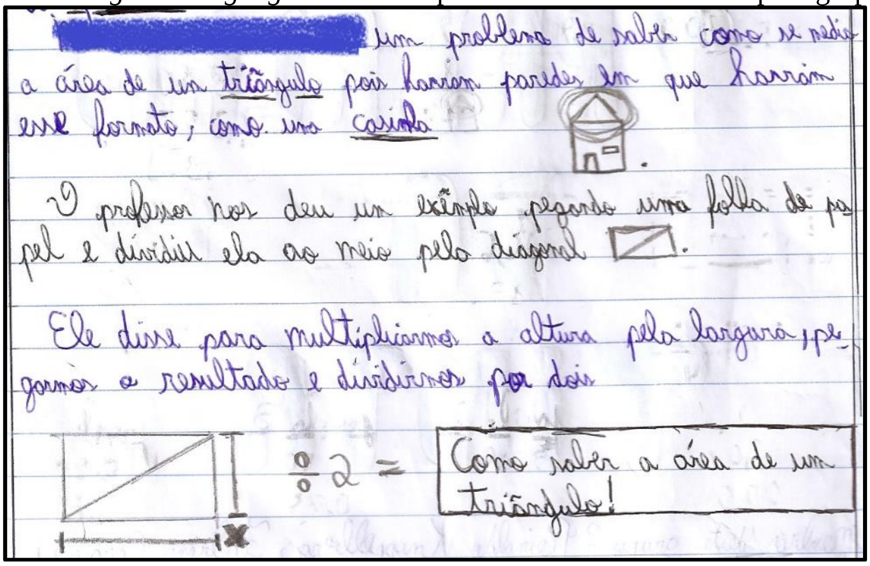
No desenvolvimento dessa atividade, os alunos realizaram duas entrevistas para coleta de dados, uma com o vice-diretor e outra com o pintor. Na entrevista com o pintor, os alunos descobriram que ele aproximava todas as paredes da escola por retângulos, independentemente do formato, conforme indica um trecho da entrevista.

Aluno A6.11: Como você faz para saber a quantidade de tinta de cada parede?

Pintor: Eu calculo a área da parede, eu considero como se fosse uma parede lisa, um retângulo liso. Na prática eu desconsidero áreas das janelas, porque a fita que eu preciso comprar é cara e dá muito trabalho proteger a janela para não cair tinta. Eu incluo o valor da fita na minha mão de obra, eu uso fita larga que custa R$ 8,90 que é de 50 mm de largura e fita fina que custa de R$ 4,00 a R$ 4,90 que é de 25 mm de largura.
[...]
Aluno A6.20: Nem todas as paredes são retângulos, têm umas que são casinhas [o aluno refere-se ao formato da parede].
Pintor: Eu faço isso na prática para calcular a área, aproximo tudo para um retângulo, na matemática essas paredes que você chama de casinha são formadas por retângulos e triângulos, vocês sabem calcular a área de um retângulo, base vezes altura, para calcular a área de um triângulo, multiplica a base pela altura e divide por dois, daí soma a área do retângulo com a área do triângulo.

Nessa entrevista com o pintor, identificamos a constituição de um *jogo de linguagem* quando o aluno A6.20 utilizou a palavra casinha. A constituição desse *jogo de linguagem* pelos alunos serviu para referir ao formato de algumas paredes, bem como para exemplificar a necessidade de aprender a calcular área de triângulo. Desse modo, usar a palavra casinha associava-se à constituição de outro *jogo de linguagem*, o de usar desenho. Os alunos do grupo G1 grifaram a palavra casinha no relatório associando a necessidade do calcular área de triângulo e relatando o exemplo que o professor deu quando ensinou os alunos a calcularem área de triângulo, exemplificando com desenhos. A Figura 47 indica esses *jogos de linguagem.*

Figura 47: *Jogos de linguagem* de usar a palavra casinha e desenhar pelo grupo G1


[redacted] um problema de saber como se medir a área de um triângulo pois haviam paredes em que haviam esse formato; como uma casinha.

O professor nos deu um exemplo pegando uma folha de papel e dividiu ela ao meio pelo diagonal.

Ele disse para multiplicarmos a altura pela largura, pegarmos o resultado e dividirmos por dois

Como saber a área de um triângulo!

Fonte: Relatório do grupo G1.

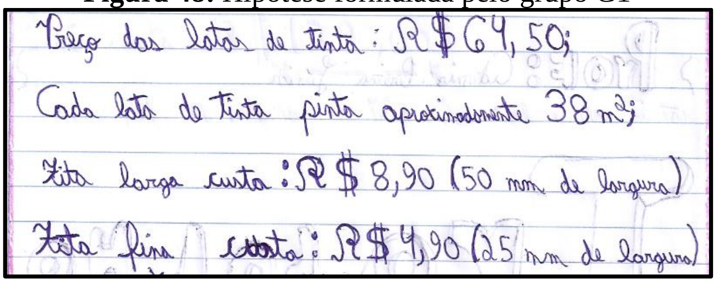
Após essa entrevista com o pintor, surgiu a oportunidade de os alunos estudarem como calcular a área de um triângulo. Esse foi um momento em que os alunos pediram a ajuda do professor, que aproveitou a oportunidade para introduzir o assunto de área de triângulo, conforme exemplificado na Figura 47**,** no relatório do grupo G1.

A partir da entrevista com o pintor, os alunos deram continuidade à atividade das paredes que seriam pintadas. Mediram doze paredes (Figura 40). Novamente, observamos a constituição do *jogo de linguagem* de medir. Medir as paredes tinha como finalidade o cálculo da área para responder ao que os alunos investigavam.

Quanto às informações fornecidas pelo pintor, que desconsiderava janelas e portas e fazia uma aproximação por retângulo, os alunos as desconsideraram, porque interpretaram que não fazia sentido. Pediram a opinião do professor, e ele explicou que, matematicamente, isso não faz sentido. Além disso, concordaram com o professor que era necessário calcular as áreas de cada uma das janelas, portas e subtraí-las da área total de cada parede. Observamos que agiram em conformidade ao *jogo de linguagem* da matemática, orientando-se pelas regras do cálculo da área de retângulo e triângulo.

Ao desconsiderarem alguns aspectos das paredes, certas rugosidades, os alunos simplificaram a situação aproximando para um retângulo e um triângulo, conforme o formato de cada parede. Outra hipótese considerada pelos alunos foi de que cada lata de tinta pinta 38 m^2, eles consideraram a média aritmética dos valores citados pelo pintor na entrevista, isto é, de que cada lata de tinta pinta, em média, de 36 m^2 a 40 m^2, dependendo da parede. Isso pode ser visto no recorte do relatório do grupo G1.

Figura 48: Hipótese formulada pelo grupo G1



Preço das latas de tinta: R$ 64,50;
Cada lata de tinta pinta aproximadamente 38 m^2;
Fita larga custa: R$ 8,90 (50 mm de largura)
Fita fina custa: R$ 4,90 (25 mm de largura)

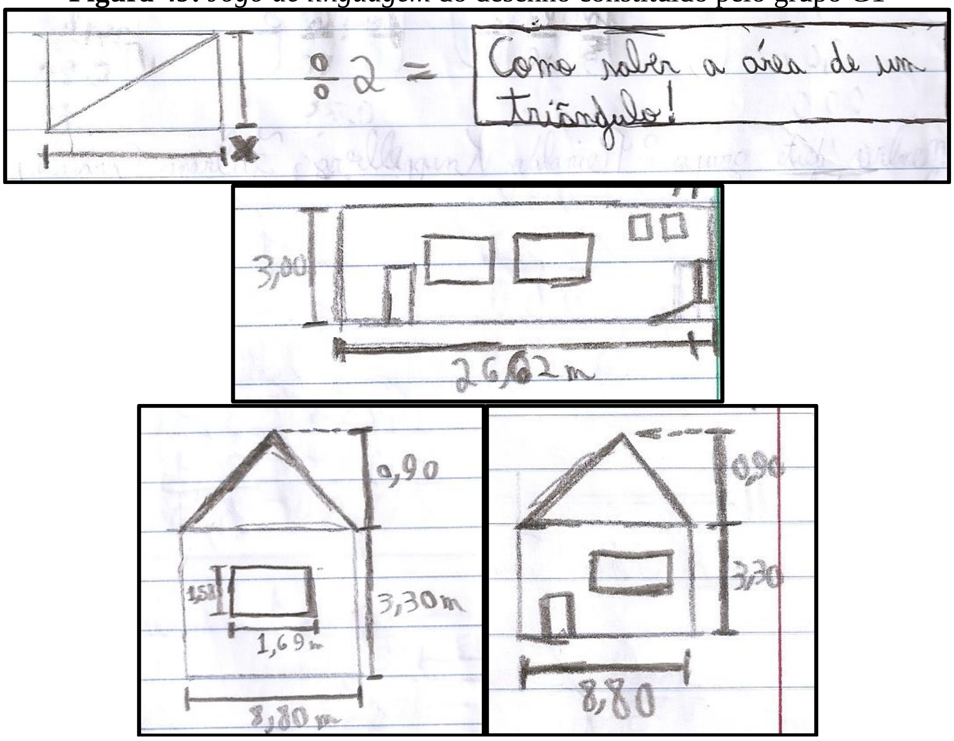
Fonte: Relatório do grupo G1.

A formulação dessas hipóteses possibilitou a condução da investigação, no cálculo da área de cada parede, janelas e portas, bem como em relação a determinar a quantidade de latas de tinta a ser usada nas paredes.

Na matematização, para calcular a quantidade de tinta necessária para pintar as paredes, emergiram procedimentos relativos às operações fundamentais com os números racionais, conversão de unidades de medida, estimativas. Isso evidencia a constituição de outros *jogos de linguagem*, realizar conversão de unidades de medida, estimar, multiplicar, adicionar e subtrair. O uso do conceito de área e os procedimentos para o cálculo de área, como calcular área de retângulo e triângulo, mostram a constituição do *jogo de linguagem* de calcular área. Os alunos, de modo geral, souberam lidar com as fórmulas para o cálculo da área de retângulo, triângulo, com os algoritmos das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números decimais. Em alguns momentos, o uso da calculadora aconteceu por parte de alguns grupos, em outros, parece que os alunos tinham a intenção de agilizar os cálculos, que eram muitos para eles. Em relação às janelas e portas nas paredes, os alunos se orientaram pelas dimensões. Calcularam as áreas de janelas e portas, que foram subtraídas da área total de cada parede.

Nos cálculos relativos à área de cada parede, outro *jogo de linguagem* foi constituído, o *jogo de linguagem* de usar desenhos. A Figura 49 indica alguns desenhos que foram feitos pelo grupo G1.

Figura 49: *Jogo de linguagem* do desenho constituído pelo grupo G1

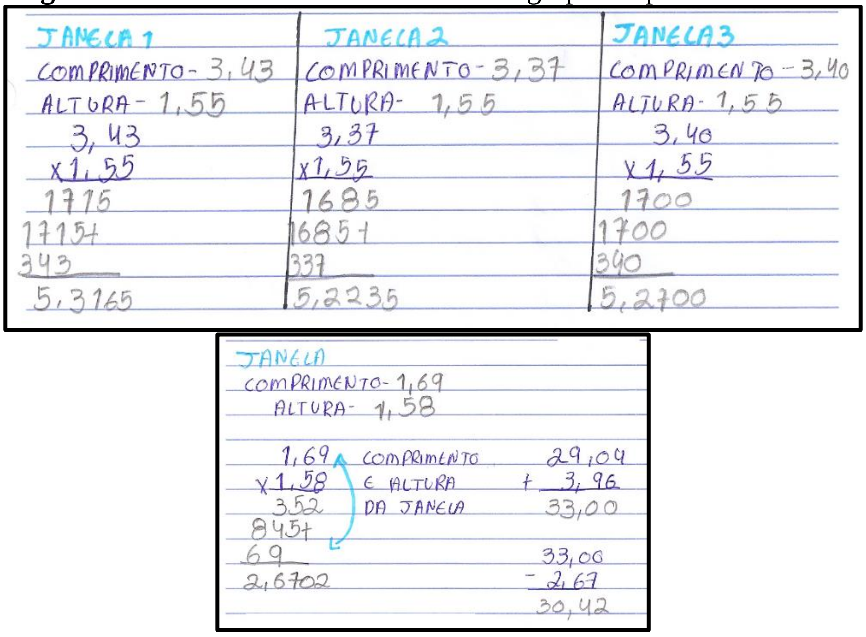


Fonte: Relatório do grupo G1.

Esse *jogo de linguagem* tinha a finalidade de apresentar por meio de figuras geométricas o formato de cada parede, das janelas e portas, bem como as dimensões.

As ações dos alunos no desenvolvimento da atividade dão indícios da constituição de *jogos de linguagem*. Isso envolve o uso dos procedimentos matemáticos, das regras de uso dos algoritmos que os alunos seguiram nos cálculos relativos à área de cada parede, janela e porta, algo que se pode ver na Figura 50.

Figura 50: Procedimentos matemáticos do grupo G3 para calcular área


JANELA 1
COMPRIMENTO - 3,43
ALTURA - 1,55
3,43
x1,55
1715
1715+
343
5,3165

JANELA 2
COMPRIMENTO - 3,37
ALTURA - 1,55
3,37
x1,55
1685
1685+
337
5,2235

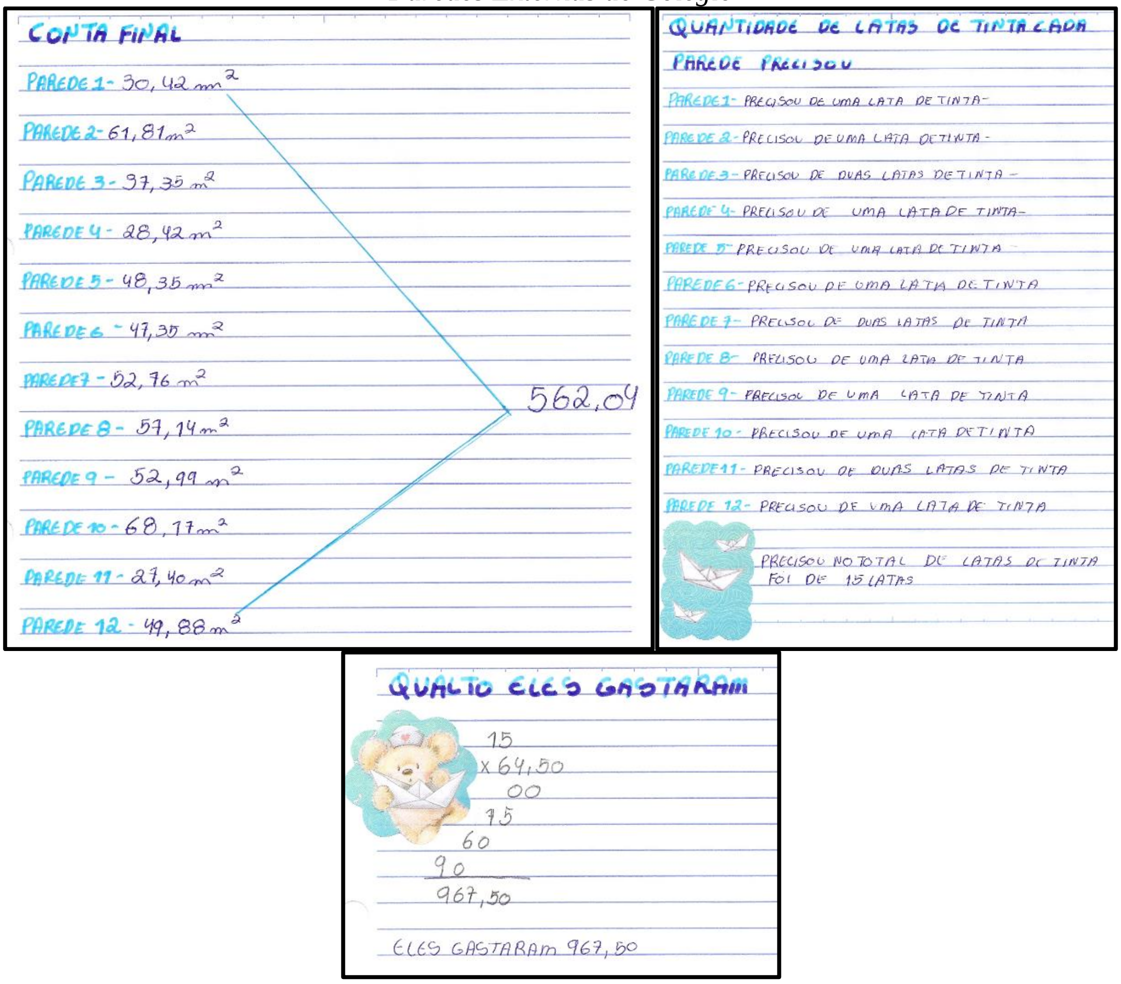
JANELA 3
COMPRIMENTO - 3,40
ALTURA - 1,55
3,40
x1,55
1700
1700
340
5,2700

JANELA
COMPRIMENTO - 1,69
ALTURA - 1,58
1,69
x1,58
352
845+
69
2,6702
COMPRIMENTO E ALTURA DA JANELA
29,04
+ 3,96
33,00
33,00
- 2,67
30,42

Fonte: Relatório do grupo G3.

Na transição da linguagem do fenômeno – paredes da escola que seriam pintadas - para o uso da linguagem matemática, os alunos quantificaram características não matemáticas, mediram paredes, janelas, portas. Com uso das operações matemáticas fundamentais construíram um modelo matemático que possibilita calcular a quantidade de tinta a ser comprada e o gasto em reais. O grupo G3, por exemplo, usando uma adição de números decimais, determinou a área total a ser pintada. Em seguida, as alunas do grupo compararam a área de cada parede a ser a pintada com a hipótese de que cada lata de tinta pintava 38 m^2 para saber a quantidade de latas de tinta a ser usada em cada parede, o que evidencia a constituição do *jogo de linguagem* de comparar. Por meio de uma adição de números decimais determinaram a quantidade total de latas de tinta e, por fim, multiplicaram essa quantidade pelo valor de uma lata, obtendo o gasto em reais com a compra da tinta. A Figura 51 apresenta um recorte do relatório do grupo G3 que mostra essas ações.

Figura 51: Modelo Matemático do grupo G3 da Atividade *Quantidade de Tinta para Pintar as Paredes Externas do Colégio*



Fonte: Relatório do Grupo G3.

A matematização da situação possibilitou aos alunos deliberarem a respeito do problema de calcular a quantidade de tinta necessária e o gasto em reais que investigaram; chegaram a uma resposta para a atividade; identificaram a relação da matemática com o problema de calcular a quantidade de tinta e o gasto em reais; conseguiram idealizar a situação, e a formulação de hipóteses conduziu os alunos nos cálculos que foram efetuados.

O critério para validar essa situação aconteceu com base no número de latas de tinta que o vice-diretor comprou para pintar a escola, 20, uma sugestão do pintor, que, na entrevista com os alunos, relatou que havia paredes que precisariam de muita tinta. Durante a socialização dos resultados da investigação feita pelos alunos, o tempo de apresentação foi inferior ao das outras atividades devido à característica dessa atividade, que envolve muitos cálculos.

Na finalização da atividade, o professor chamou a atenção dos alunos para as respostas encontradas pelos três grupos que participaram da atividade. Os alunos não decidiram qual era a “melhor resposta”, por isso essas foram as respostas para a atividade.

> *PP: 15 latas, 19 latas de tinta são bom valores, quem sabe dizer o porque?*
> *Aluno A6.11: Porque o professor Evandro comprou 20 latas para pintar todas as paredes.*
> *Aluna A6.24: Professor, ainda o pintor disse que tem paredes que gasta mais tinta e paredes que gasta menos.*
> *PP: Isso mesmo.*

Ainda que essa atividade tenha sido do terceiro momento de familiarização, conforme a caracterização de Almeida e Dias (2004), o professor teve um papel importante, que colaborou para as articulações que os alunos fizeram acerca do uso da matemática com os aspectos extramatemáticos da atividade. Por exemplo, chamou a atenção dos alunos para o fato de não aproximar as paredes para um retângulo, como o pintor faz, nem desconsiderar as áreas das janelas e paredes, porque não faz sentido matematicamente, ensinou os alunos a calcularem área de triângulo. As atitudes do professor colaboraram para a constituição de *jogos de linguagem*, por exemplo, *jogos de linguagem* de calcular área, medir.

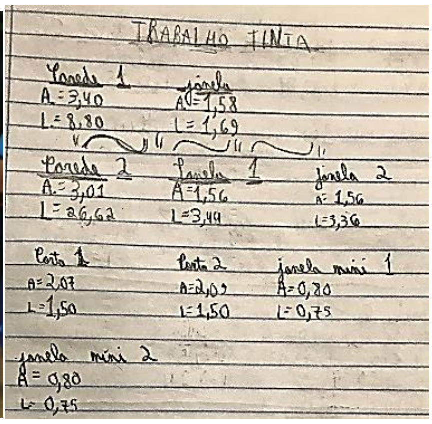
No Quadro 7 sumarizamos as ações dos alunos no desenvolvimento da atividade, indicando o modo como os alunos articularam as informações relativas à investigação do cálculo da quantidade de tinta com conceitos e ferramentas matemáticas que emergiram na atividade.

Quadro 7: As ações dos alunos do 6º ano na Atividade Quantidade de *tinta para pintas as paredes externas do colégio*

Situação Inicial (problemática)

Quantidade de tinta para as paredes externas do colégio

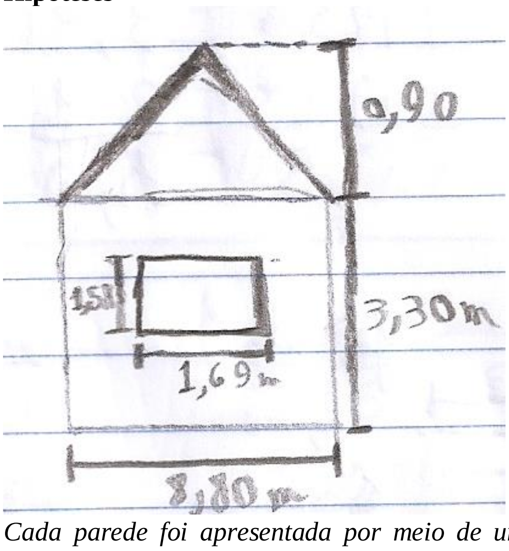
Inteiração



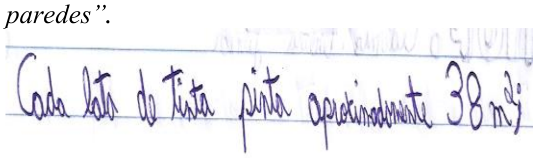
Formulação do problema

Calcular a quantidade de tinta e o gasto em reais para pintar as paredes externas do colégio

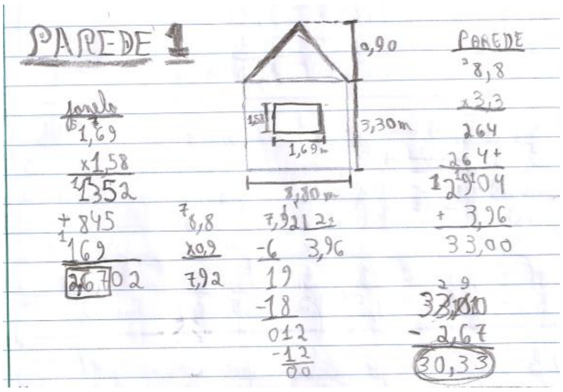
Hipóteses

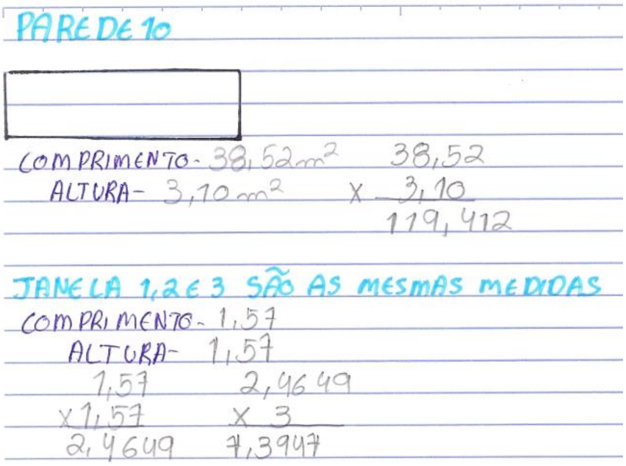
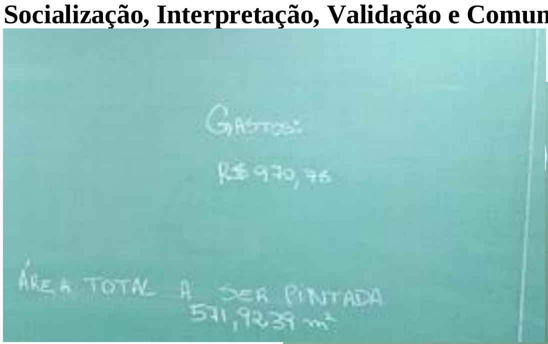


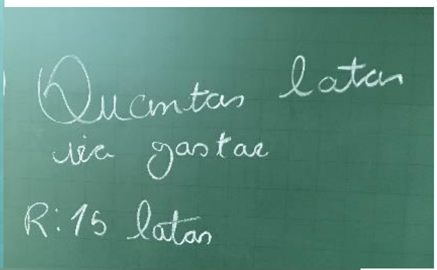
Cada parede foi apresentada por meio de um retângulo ou triângulo, conforme o formato.
"nós desconsideramos as irregularidades das paredes".

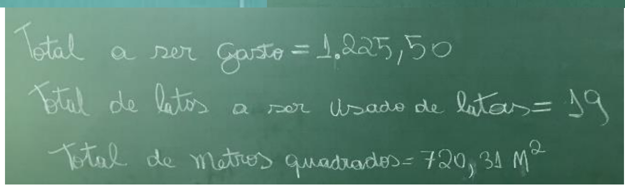


Matematização, Resolução e Formulação do Modelo Matemático



<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Socialização, Interpretação, Validação e Comunicação do Resultados






No nosso trabalho, consideramos as áreas das janelas e portas nas paredes, algo que o pintor não considera, mas isso não faz sentido matematicamente. Calculamos as áreas das portas e janelas e, assim, fizemos uma subtração das áreas das paredes, assim sabíamos a área total a ser pintada. Aprendemos como esse trabalho, muitas coisas, entre elas, a calcular a área de um triângulo, que basta multiplicar a medida da base pela altura e depois dividir por dois, precisávamos da área do triângulo, porque tem paredes que tem o foramto de casinha. A área de retângulo nós já sabíamos calcular. Inicialmente nós entrevistamos o professor Evandro que disse que cada lata de tinta custa R$ 64,50 e depois o pintor contrato pela escola que disse cada lata de tinta pinta de 36 m^2 a 40 m^2.
No trabalho para calcular a quantidade de tinta, o nosso grupo encontrou 19 latas de tinta, para pintar 720,31 m^2, após fazer todos os cálculos, calcular a área das paredes e das portas que não usa tinta para pintar. Como cada lata de tinta custa R$ 64,50 que foi a informação que o Professor Evandro disse, nós multiplicamos 19 por R$ 64,50 e deu R$ 1225,50. Nós calculamos a área de cada parede professor, em algumas paredes bastava calcular a área de um retângulo, em outras tinha que calcular a área de um retângulo e depois do triângulo, porque uma parte da parede era um triângulo, daí nós somamos as áreas dos retângulos e dos triângulos. Esse foi o nosso trabalho!"
PP: 15 latas, 19 latas de tinta são bons valores, quem sabe dizer o porque?
Aluno A6.11: Porque o professor Evandro comprou 20 latas para pintar todas as paredes.
Aluna A6.24: Professor, ainda o pintor disse que tem paredes que gasta mais tinta e paredes que gasta menos.
PP: Isso mesmo.</td></tr>
</table>

Fonte: Diário de Campo do Professor.

5 ANÁLISE GLOBAL DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Neste capítulo apresentamos a análise global das três atividades analisadas no capítulo anterior. Essas análises se realizam à luz do quadro teórico considerando a modelagem matemática e a filosofia de Wittgenstein, particularmente no que diz respeito aos *jogos de linguagem*.

Na presente pesquisa, nosso interesse reside na investigação da constituição de *jogos de linguagem* em atividades de modelagem matemática. Nesse contexto, a pesquisa empírica, desenvolvida em aulas regulares de matemática com alunos do 6º ano e do 9º ano do Ensino Fundamental, visa elucidar a constituição de *jogos de linguagem* considerando conteúdos e procedimentos matemáticos próprios desse nível de escolaridade, bem como a característica peculiar da modelagem matemática de possibilitar a abordagem de situações da realidade por meio da matemática.

A respeito das diferentes intepretações realizadas pelos alunos, dos *diferentes modos de ver* cada atividade, das relações estabelecidas entre realidade e matemática, os alunos tiveram diferentes ações no desenvolvimento das atividades analisadas. Formularam diferentes hipóteses, mediram distâncias, paredes, janelas, portas, arestas das bases de diferentes tipos de prismas, ângulos internos de polígonos regulares, criaram diferentes instrumentos de medidas, elaboraram escalas, usaram diferentes conceitos e procedimentos matemáticos, compararam diferentes estratégias de resolução avaliando a viabilidade dos modelos matemáticos no contexto da situação real, bem como compararam os próprios modelos.

Levando em consideração as três atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos do 6º e do 9º ano, inferimos que a constituição de *jogos de linguagem* pode ser agrupada em duas categorias:

a) os *jogos de linguagem* no contexto das relações entre realidade e matemática;
b) os *jogos de linguagem* relativamente ao conteúdo matemático que emerge nas atividades de modelagem matemática.

5.1 OS *JOGOS DE LINGUAGEM* NO CONTEXTO DAS RELAÇÕES ENTRE REALIDADE E MATEMÁTICA

Na atividade *fotografia,* no 6º ano, na relação entre realidade e matemática, os alunos lidaram com o problema de *estimar a altura com o auxílio da fotografia* de diferentes maneiras.

A constituição do *jogo de linguagem* de medir aconteceu com o uso de diferentes instrumentos de medida, dedo, papel, régua. Os usos desses instrumentos evidenciavam o propósito de obter informações de modo a estimar a altura do local escolhido. O *jogo de linguagem* de medir está associado a diferentes usos de instrumentos e mostra como os alunos estabeleceram a relação da fotografia que eles tinham com o que precisavam investigar, estimar a altura de algo cuja imagem estava na fotografia.

Outro jogo *de linguagem* foi o de usar a expressão "quantas vezes cabe". Os alunos *viram* a possibilidade de ver quantas vezes a altura da pessoa que aparece na imagem da fotografia cabe na altura do local a ser estimado. Por conseguinte, a ação dos alunos é usar uma régua para determinar quantas vezes cabe.

Em relação aos alunos do 9º ano, a constituição *dos jogos de linguagem,* relativamente entre à realidade e a matemática, aconteceu de diferentes maneiras. Os alunos associaram as alturas a serem estimadas à altura de triângulos, a desenhos de triângulos, desenhos de triângulos em escala. O *jogo de linguagem* de usar desenho funcionou como auxílio para as alturas que precisavam serem estimadas. Outro *jogo de linguagem* foi o de usar a expressão "quantas vezes cabe", análogo ao que aconteceu no 6º ano, cuja constituição estava associada à possibilidade de ver quantas vezes a altura da pessoa na fotografia cabia na altura do local. O *jogo de linguagem* de comparar nessa atividade também aconteceu quando os alunos compararam a altura da pessoa que aparece na fotografia com a altura real.

Quanto à atividade *painel triedro*, os alunos compreenderam a situação real, verbalizaram algumas vezes, fizeram uso de gestos para exemplificar possíveis problemas, caso o painel fosse formado com outros tipos de prismas que não o triangular. O *jogo de linguagem* de usar gestos exemplifica problemas relacionados a mudanças de anúncios, caso o painel triedro fosse formado por prismas quadrangulares.

Outro *jogo de linguagem* constituído foi o de comparar. Os alunos compararam diferentes tipos de sólidos de acrílico, prisma triangular com quadrangular e prisma triangular com hexagonal para testar a possibilidade de um painel ser formado pela combinação de diferentes tipos de prismas. O *jogo de linguagem* de comparar, nesse caso, é acompanhado pelo uso de régua, com a qual os alunos medem as arestas das bases desses sólidos. Esse *jogo de linguagem* serviu para os alunos se convencerem de que não existia a possibilidade de ter um painel formado pela junção de diferentes tipos de prismas.

Outro *jogo de linguagem* constituído no desenvolvimento dessa atividade foi o de usar desenho, usado no início da atividade e para apresentar o modelo obtido. Os desenhos feitos pelos alunos aconteciam na busca de entender o funcionamento do Painel Triedro formado por prismas triangulares e de possíveis problemas, caso o painel fosse formado por outros tipos de prismas.

As diversas ações dos alunos no desenvolvimento da atividade *painel triedro,* como realizar comparação entre diferentes tipos de sólidos de acrílico, desenhar e usar gestos, tinham a finalidade de explicar os possíveis problemas de o painel ser formado por prismas quadrangulares, bem como exemplificar o início de uma justificativa para o fato de o painel ser formado por prismas triangulares e auxiliar na justificativa da atividade. Essas ações remetem ao seguinte parágrafo do Investigações Filosóficas: "[...] Tenha presente a variedade de jogos de linguagem nos seguintes exemplos, e em outros: [...] Relatar um acontecimento -, Fazer suposições sobre o acontecimento -, Levantar uma hipótese e examiná-la - " (WITTGENSTEIN, 2016, §23, p. 27).

Em relação à Atividade *Quantidade de Tinta para Pintar as Paredes do Colégio*, um *jogo de linguagem* constituído pelos alunos do 6º ano foi o de usar desenhos, que mostrou o uso de desenhos para apresentar, por meio de figuras geométricas, o formato de paredes, janelas, portas, de modo a auxiliá-los, posteriormente, no cálculo da área de cada parede. O *jogo de linguagem* de usar desenhos também possibilitou que os alunos justificassem o procedimento para calcular a área de triângulo, do modo semelhante ao do professor quando ele explicou como calcular área de triângulo.

Outro *jogo de linguagem,* relativo à relação entre realidade e matemática, refere-se ao uso da palavra casinha. De fato, um aluno na entrevista com o pintor afirmou: "*Nem todas as paredes são retângulos, têm umas que são casinhas".* A palavra casinha foi utilizada pelo aluno para se referir ao formato de algumas paredes que seriam pintadas. Inferimos que o aluno, nesse momento, percebeu que não fazia sentido o que o pintor havia dito a respeito de associar todas as paredes a um retângulo para calcular a área. Além disso, esse *jogo de linguagem* também possibilitou a associação do formato da parede à necessidade de aprender a calcular área de triângulo.

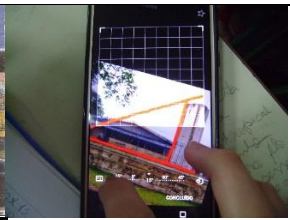
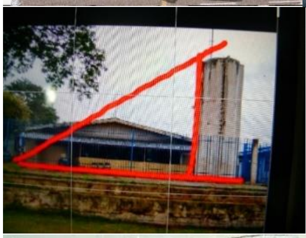
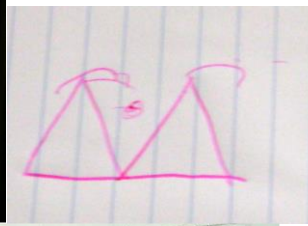
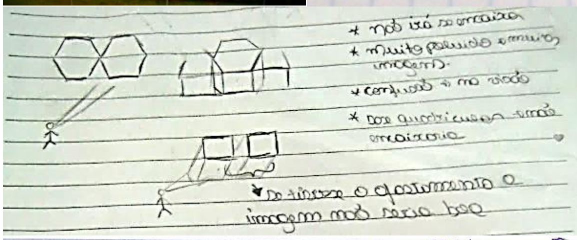
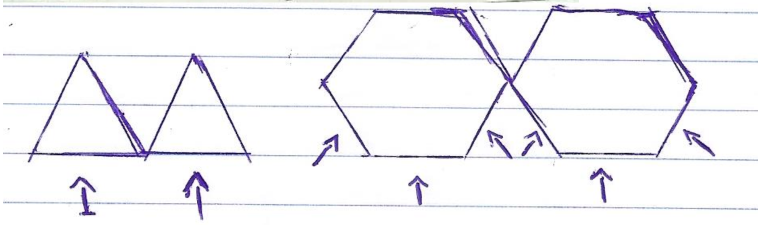
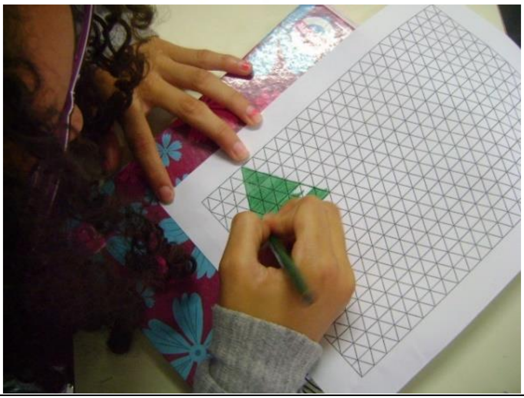
Todos esses *jogos de linguagem* evidenciam a relação que os alunos estabeleceram entre as situações reais e a matemática. Os desenhos, por exemplo, foram utilizados para diferentes propósitos, como comparar, apresentar o tipo de uma parede, auxiliar no entendimento do funcionamento do painel triedro, exemplificar possíveis problemas em relação à mudança do tipo de prisma, como a palavra casinha em referência a um formato de parede para associar o formato da parede à necessidade de saber como calcular área de triângulo, o dedo para exemplificar o instrumento de medida utilizado. Isso remete à comparação que Wittgenstein (2016) faz do uso das palavras com uma caixa de ferramentas:

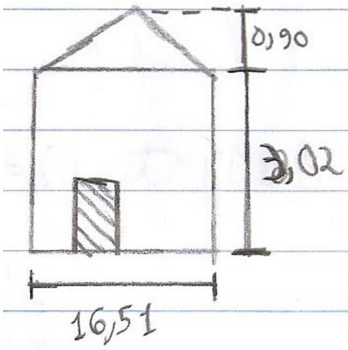
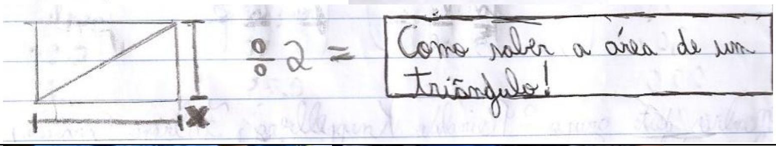
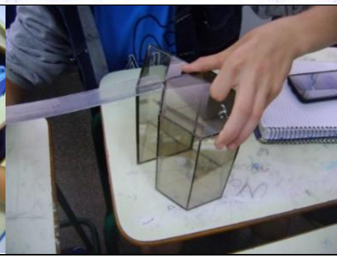
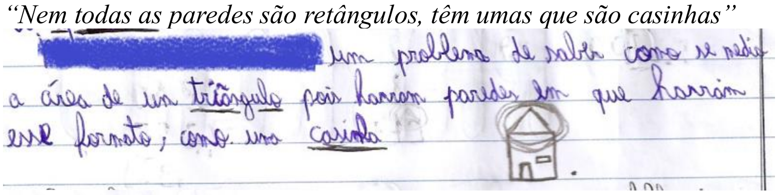
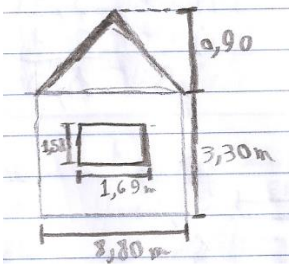
cada objeto de uma caixa de ferramentas tem uma função. Assim, diferentes usos das palavras, nesses casos, dos desenhos, tiveram uma função para os alunos.

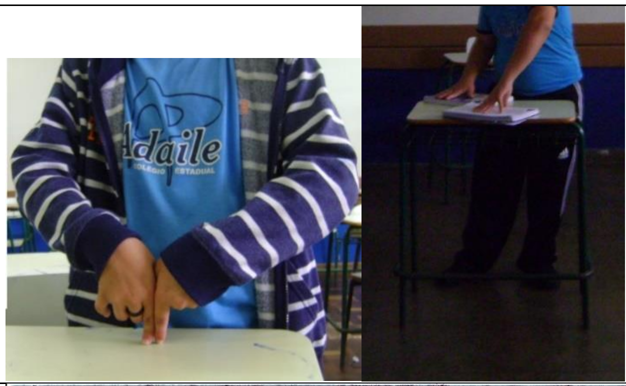
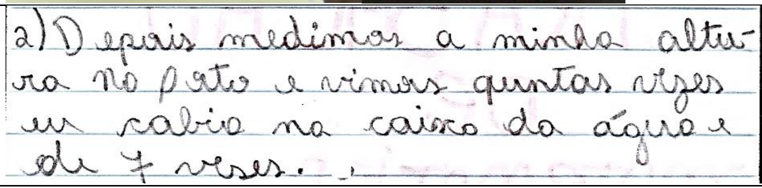
Por parte dos alunos, esses usos não foram arbitrários, pois há uma *gramática* que designa as *regras* constitutivas da linguagem e sua organização, conforme pondera (GOTTSCHALK, 2004). Essas *regras* possibilitaram aos alunos dizer o que tinha sentido, por exemplo, usar a palavra dedo, "*eu usei o meu dedinho, ó"*. Isso mostra o sentido do uso dessa palavra: exemplificar o instrumento de medida utilizado. Os desenhos e os gestos também foram utilizados para justificar problemas que os alunos *viam*, bem como tentar auxiliar na justificativa da Atividade *Painel Triedro*. A comparação com sólidos acrílicos não aconteceu de modo aleatório, os alunos mediram as arestas das bases, compararam o tamanho das faces frontais de cada prisma, testaram a viabilidade de um painel ser formado pela combinação de diferentes tipos de sólidos. Por fim, tem-se o uso da palavra casinha, em referência a um formato de parede, entendido pelo pintor, que, na entrevista, imediatamente respondeu ao aluno, confirmando que há paredes que são formadas por retângulos e triângulos. Além disso, esse uso culminou na necessidade de aprender a calcular área de triângulo. A *gramática* da Matemática é que possibilitou ao pintor e ao aluno o uso da palavra casinha, por conhecerem o que é um retângulo e um triângulo no *jogo de linguagem* da matemática. O uso da palavra casinha também remete a um tipo de desenho conhecido pelas crianças.

No Quadro 8 sumarizamos os *jogos de linguagem* constituídos pelos alunos entre a realidade e matemática nas atividades analisadas.

Quadro 8: *Jogos de linguagem* que se referem às relações entre realidade e matemática vislumbradas nas atividades de modelagem matemática

Jogo de linguagem de usar desenho	      

	  
Jogo de linguagem de comparar	 
Jogo de linguagem de medir	*"eu usei o meu dedinho, ó"* *"pegamos desde do pé dela até a cabeça e deu esse papelzinho aqui, nós usamos o papel e sobrou esse pedacinho".* 
Jogo de linguagem de usar a palavra casinha	*"Nem todas as paredes são retângulos, têm umas que são casinhas"*  

Jogo de linguagem de usar gestos	
Jogo de linguagem de usar a expressão "quantas vezes cabe"	 2) Depois medimos a minha altura no poste e vimos quantas vezes eu cabia na caixa da água e deu 7 vezes.

Fonte: Diário de Campo do Professor.

5.2 OS *JOGOS DE LINGUAGEM* RELATIVAMENTE AO CONTEÚDO MATEMÁTICO QUE EMERGE NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

A constituição dos *jogos de linguagem* relativos ao conteúdo matemático que emergiu nas atividades de modelagem analisadas aconteceu em função das diferentes interpretações feitas pelos alunos das situações-problema, dos problemas nas atividades, das hipóteses formuladas pelos alunos e dos encaminhamentos feitos por eles no desenvolvimento das atividades.

Na Atividade *Fotografia*, a constituição do *jogo de linguagem* do uso da expressão "quantas vezes cabe" leva ao uso da multiplicação, divisão e adição de números racionais para estimar a altura dos locais escolhidos. Isso mostra um dos modos que aconteceu a constituição do *jogo de linguagem* de estabelecer uma relação proporcional. A constituição desse *jogo de linguagem* aconteceu após a elaboração de uma escala, embora também haja, nesse caso, a constituição do *jogo de linguagem* de usar escala, de realizar comparação das alturas dos alunos na fotografia com a altura real, de modo a auxiliá-los a estimar a altura dos locais que apareciam nas fotografias. Nessa comparação, além da constituição do *jogo de linguagem* de usar proporção, também se constituiu o *jogo de linguagem* de usar regra de três.

Outros *jogos de linguagem* constituídos no desenvolvimento da atividade fotografia relacionavam-se a usar multiplicação, adição, divisão de números racionais, fração, conversão de unidades de medida. A ideia de que as alturas de locais a serem estimadas também podiam ser associadas às alturas de triângulos colaborou para a constituição de dois *jogos de* *linguagem*: o de usar proporção e o de usar semelhança de triângulos. Tais *jogos* ocorreram por meio de ações, como medir, desenhar triângulos semelhantes em escala, realizar conversões de unidades de medidas, montar proporções, resolver equações do primeiro grau, que decorre da necessidade de resolver a regra de três formulada.

Uma característica observada nos alunos do 6º e 9º ano é o uso da ideia de "quantas vezes cabe", na constituição do *jogo de linguagem* de estabelecer uma relação proporcional na atividade *fotografia*. Isso parece ser uma característica da *forma de vida* escolar desses alunos. O que mostra que "[...] representar uma linguagem equivale a representar uma forma de vida" (WITTGENSTEIN, 2016, § 19), os *jogos de linguagem* são determinados pelas *formas de vida*. A *forma de vida* é intrínseca ao fenômeno da linguagem. Segundo Wittgenstein "a expressão 'jogo de linguagem' deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida" (WIITGENSTEIN, 2016, §23).

Em relação à Atividade *Painel Triedro*, a constituição do *jogo de linguagem* de medir aconteceu com o uso do transferidor para medir os ângulos das bases de diversos tipos de prismas, de polígonos regulares, bem como das medidas dos ângulos internos nos desenhos de polígonos. Os *jogos de linguagem* de medir ângulos, desenhar polígonos regulares foram constituídos para justificar por que o painel triedro é formado por prismas triangulares. Esses *jogos de linguagem* levam ao uso de o *jogo de linguagem* da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer ser 180°, que foi verbalizado várias vezes pelos alunos e escrito nos relatórios: *A soma dos ângulos do triângulo dá 180º, professor, por isso preenche os espaços, não vai ficar nenhum anúncio escondido no painel triedro; O giro corresponde a um ângulo de 180º; Há um triângulo invertido, isso completa 180º; Ele precisa dar um giro de 180º para aparecer o próximo anúncio*.

A constituição, pelos alunos do 6º ano, dos *jogos de linguagem* relativos aos conteúdos de matemática na atividade *Quantidade de tinta para pintar as paredes externas do colégio,* aconteceu quando os alunos mediram as paredes, janelas e portas do colégio. Além disso, os alunos consideraram apenas o que fazia sentido para eles na *forma de vida* escolar e não na *forma de vida* do pintor para o cálculo da área das paredes que seriam pintadas, o que pode ser exemplificado por uma das falas de um aluno do 6º ano na socialização da atividade.

> *No nosso trabalho, consideramos as áreas das janelas e portas nas paredes, algo que o pintor não considera, mas isso não faz sentido matematicamente. Calculamos as áreas das portas e janelas e assim fizemos uma subtração das áreas das paredes, assim sabíamos a área total a ser pintada. Aprendemos como esse trabalho, muitas coisas, entre elas, a calcular a área de um triângulo, que basta multiplicar a medida da base pela altura e depois dividir por dois, precisávamos da área do triângulo, porque tem paredes que tem o foramto de casinha. A área de retângulo nós já*

> *sabíamos calcular. Inicialmente nós entrevistamos o professor Evandro que disse que cada lata de tinta custa R$ 64,50 e depois o pintor contratado pela escola que disse cada lata de tinta pinta de 36 m^2 a 40 m^2.*

O *jogo de linguagem* de calcular área na atividade *Quantidade de tinta para pintar as paredes externas do colégio* foi constituído de procedimentos para calcular área de retângulo e de triângulo com o auxílio das operações de multiplicação e divisão de números racionais e da conversão de unidades de medida.

Outro *jogo de linguagem* identificado foi o de comparar, que está associado ao *jogo de linguagem* de calcular área, porque possibilitou saber a quantidade de latas de tinta que seriam utilizadas em cada uma das paredes pintadas, cuja base de comparação foi a área de cada parede a ser pintada com a hipótese considerada pelos alunos de que cada lata de tinta pintava 38 m^2.

Os alunos respeitaram as *regras* matemáticas na constituição dos *jogos de linguagem*. Por exemplo, separaram as ordens inteiras das decimais quando efetuaram as adições e subtrações nos diversos cálculos efetuados. Para calcular a área de um triângulo, multiplicaram a medida da base pela altura e dividiram o produto dessas medidas por dois. De modo análogo, para calcular a área de um retângulo, multiplicaram a medida da base pela altura. Nesse sentido, as regras, a área de um retângulo é o produto da base pela altura e a área do triângulo é a metade do produto da base pela altura, forneceram condições de significado nos *jogos de linguagem* da matemática.

A Regra, dois triângulos são semelhantes quando possuem os ângulos internos congruentes e os lados correspondentes proporcionais, forneceu condições de sentido de uso para estimar as alturas dos locais escolhidos pelos alunos com auxílio da fotografia. Os procedimentos usados, como a ferramenta *fotografia*, o aplicativo *WhatsApp*, desenho sobre a fotografia, construção de triângulos semelhantes em escala, informações reais para montar as proporções junto às medidas em escala dos triângulos desenhados, evidenciam que a *regra*, ou seja, “[...] a placa de orientação não deixa nenhuma dúvida em aberto [...] (WITTGENSTEIN, 2016, § 85-86). O domínio da *regra* possibilitou aos alunos se orientarem no caminho que seguiram para a constituição dos *jogos de linguagem* de usar proporção e semelhança de triângulos no desenvolvimento da atividade *fotografia*.

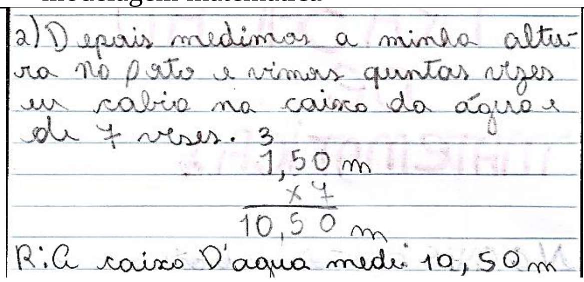
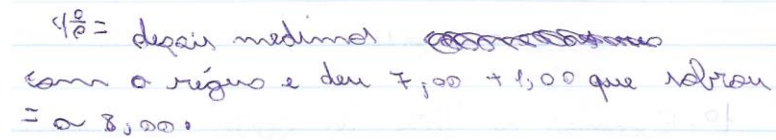
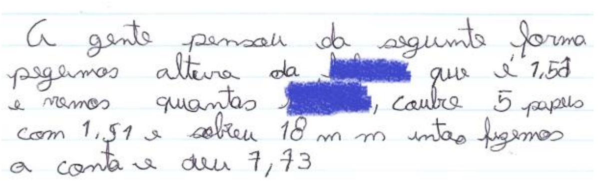
Em relação à constituição dos *jogos de* linguagem dessas atividades, os alunos seguiram as regras. Para jogar o *jogo de linguagem* da matemática é preciso aceitar *seguir a regra*, os enunciados matemáticos, os algoritmos das operações fundamentais, as fórmulas matemáticas para o cálculo de área, o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Plana. Segundo Wittgenstein (1987), a Matemática é como uma *gramática* que possui regras próprias, é *normativa*, e possibilita dar sentido à experiência, conforme argumenta (VILELA, 2007).

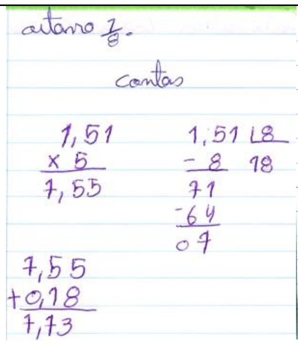
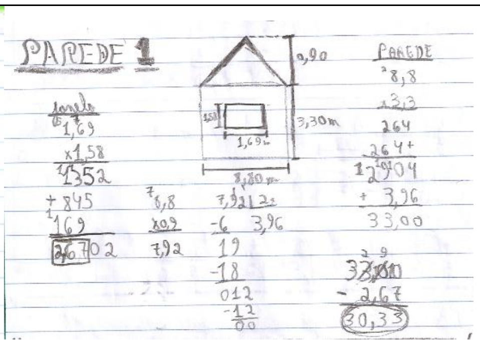
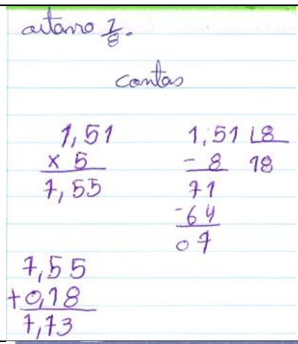
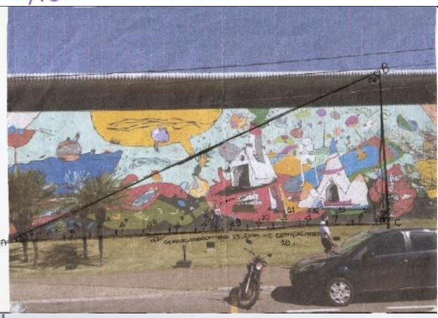
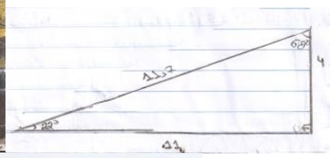
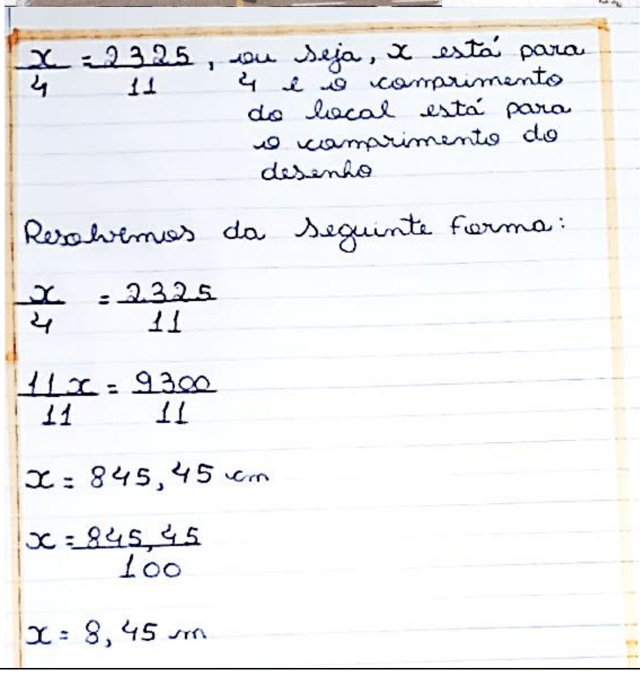
Acerca do que analisamos anteriormente, usos da linguagem, procedimentos matemáticos nas atividades na constituição dos *jogos de linguagem*, nos remete ao seguinte parágrafo do Investigações Filosóficas: "Todo signo, sozinho, parece morto. O que lhe confere vida? – Ele está vivo no uso. [...]" (WITTGENSTEIN, 2016, §432). Conforme ponderam Sousa, Tortola e Almeida (2017, p.6), "O significado, portanto, na perspectiva de Wittgenstein, é algo que não existe para além da linguagem, [...]. É na e pela linguagem que constituem os significados".

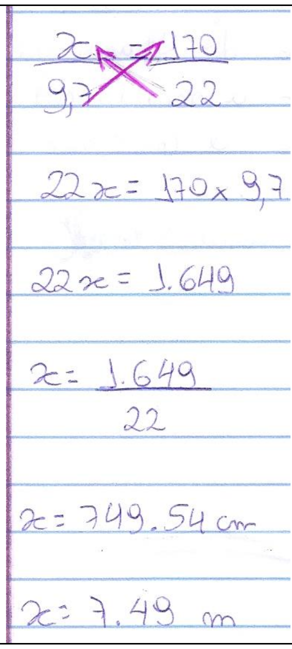
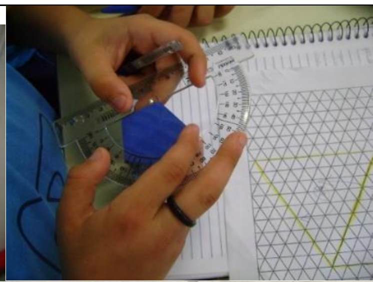
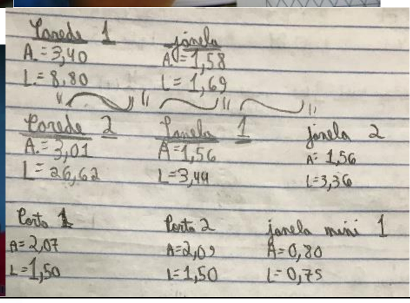
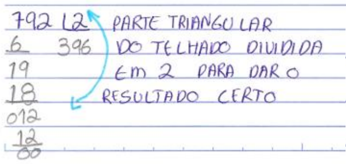
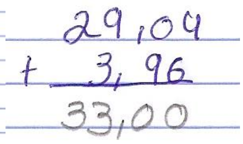
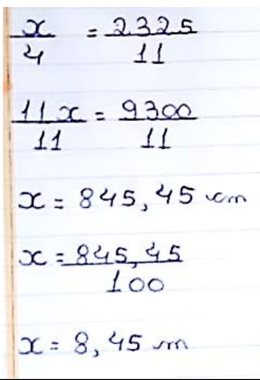
As três atividades analisadas, *fotografia, painel triedro, quantidade de tinta para as paredes externas da escola*, em relação aos usos da linguagem matemática para estimar alturas, justificar o funcionamento do painel triedro, calcular a quantidade de tinta necessária para pintar as paredes da escola, remetem às considerações de Wittgenstein (2016) de que as palavras podem ser usadas para diferentes propósitos. Nesse sentido, a constituição dos *jogos de linguagem* de matemática aconteceu em função dos diferentes propósitos que os alunos tinham no desenvolvimento das atividades.

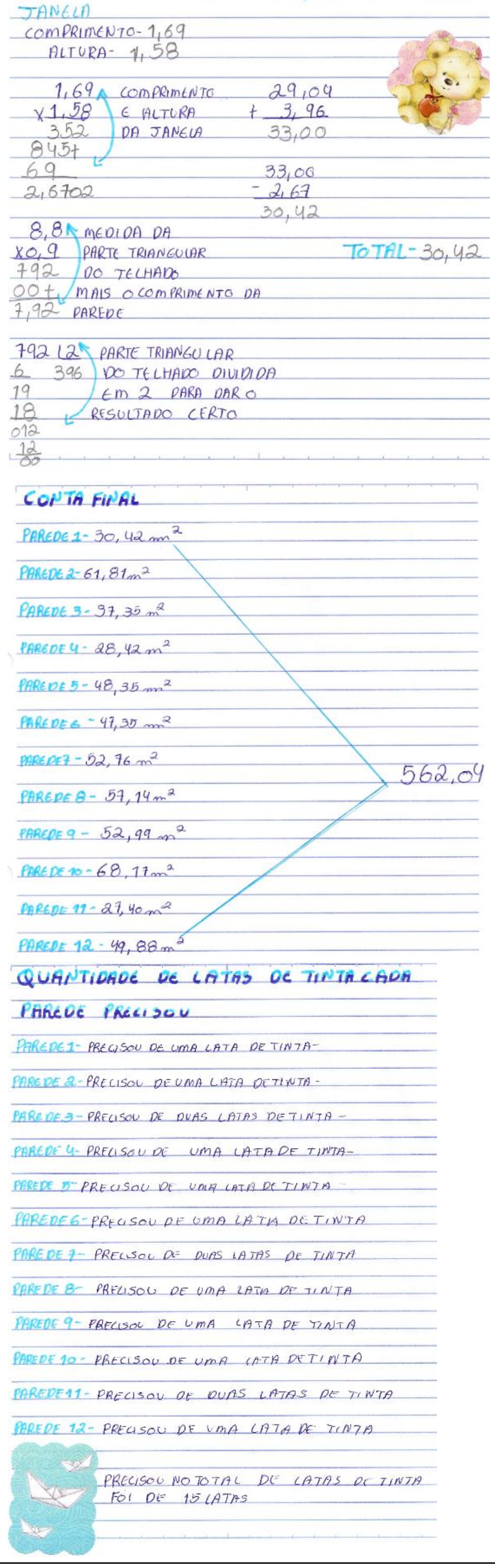
No quadro a seguir, procuramos sumarizar os *jogos de linguagem* relativos ao conteúdo matemático que emergiu nas atividades analisadas.

Quadro 9: *Jogos de linguagem* relativos ao conteúdo matemático que emerge nas atividades de modelagem matemática

Jogo de linguagem de estabelecer uma relação proporcional	 2) Depois medimos a minha altura no porto e vimos quantas vezes eu cabia na caixa da água e deu 7 vezes. 3 1,50 m x 7 10,50 m R: A caixa D'agua medi 10,50 m
Jogo de linguagem de usar escala	 4º = depois medimos com a régua e deu 7,00 + 1,00 que sobrou = a 8,00.
Jogos de linguagem de adicionar, multiplicar e dividir	 A gente pensou da seguinte forma pegamos altura da [redacted] que é 1,51 e vemos quantas [redacted], caube 5 papels com 1,51 e sobrou 18 m m então fizemos a conta e deu 7,73

	
Jogo de linguagem de usar fração	
Jogo de linguagem de usar semelhança de triângulos	

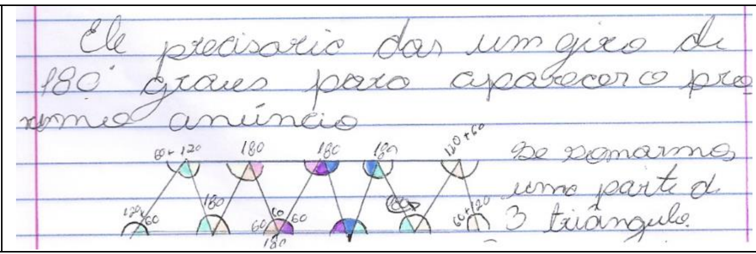
Jogos de linguagem de usar regra de três e equação do primeiro grau	
Jogo de linguagem de medir	   
Jogo de linguagem de realizar conversão de unidades de medida	  

<table>
<tr>
<td>Jogo de linguagem de calcular área</td>
<td>
JANELA
COMPRIMENTO- 1,69
ALTURA- 1,58

1,69 COMPRIMENTO 29,04
x1,58 E ALTURA + 3,96
352 DA JANELA 33,00
845+
69
2,6702 33,00
- 2,67
30,42
8,8 MEDIDA DA
x0,9 PARTE TRIANGULAR TOTAL- 30,42
792 DO TELHADO
00+ MAIS O COMPRIMENTO DA
7,92 PAREDE

792 L2 PARTE TRIANGULAR
6 396 DO TELHADO DIVIDIDA
19 EM 2 PARA DAR O
18 RESULTADO CERTO
012
12
00

CONTA FINAL
PAREDE 1- 30,42 m²
PAREDE 2- 61,81 m²
PAREDE 3- 37,35 m²
PAREDE 4- 28,42 m²
PAREDE 5- 48,35 m²
PAREDE 6 - 47,35 m²
PAREDE 7 - 52,76 m²
PAREDE 8- 57,14 m² 562,04
PAREDE 9 - 52,99 m²
PAREDE 10- 68,17 m²
PAREDE 11- 27,40 m²
PAREDE 12- 49,88 m²
QUANTIDADE DE LATAS DE TINTA CADA PAREDE PRECISOU
PAREDE 1- PRECISOU DE UMA LATA DE TINTA-
PAREDE 2- PRECISOU DE UMA LATA DE TINTA-
PAREDE 3- PRECISOU DE DUAS LATAS DE TINTA -
PAREDE 4- PRECISOU DE UMA LATA DE TINTA-
PAREDE 5- PRECISOU DE UMA LATA DE TINTA
PAREDE 6- PRECISOU DE UMA LATA DE TINTA
PAREDE 7- PRECISOU DE DUAS LATAS DE TINTA
PAREDE 8- PRECISOU DE UMA LATA DE TINTA
PAREDE 9- PRECISOU DE UMA LATA DE TINTA
PAREDE 10- PRECISOU DE UMA LATA DE TINTA
PAREDE 11- PRECISOU DE DUAS LATAS DE TINTA
PAREDE 12- PRECISOU DE UMA LATA DE TINTA
PRECISOU NO TOTAL DE LATAS DE TINTA FOI DE 15 LATAS</td>
</tr>
</table>

Jogo de linguagem de usar a soma dos ângulos internos de um triângulo	

Fonte: Elaborado pelo autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desenvolver uma pesquisa proporciona uma realização pessoal e profissional. Não se trata de escrever as considerações finais, apenas algumas palavras, algumas reflexões. as que eu consigo escrever nesse momento, porque essa pesquisa continuará fazendo parte da minha vida, eu tenho muito para estudar e aprender.

Neste trabalho pesquisamos a constituição de *jogos de linguagem* em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

A caracterização dessa constituição de *jogos de linguagem*, por um lado, se fundamentou na análise das articulações entre informações relativas às situações investigadas com conceitos e ferramentas para apresentar uma solução para o problema que os alunos se propuseram a resolver nessas situações. As articulações entre informações relativas às situações investigadas com conceitos e ferramentas matemáticas utilizados pelos alunos na busca de apresentar uma solução para o problema que investigavam aconteceram de diferentes modos.

Esses diferentes modos apareceram nas interpretações que os alunos faziam incialmente em contato com as situações-problema, com os problemas, o que fez com que eles formulassem diferentes hipóteses para desenvolver as atividades. Os aspectos que os alunos *viam* nas atividades, ou seja, as diferentes interpretações que eles fizeram das atividades de modelagem, apareceram em ações, como testar, comparar, criar instrumentos de medida, usar a tecnologia, desenhos como ferramentas que auxiliassem nas resoluções, formular e responder outros problemas diante do problema que investigavam. Essas diferentes ações caracterizavam a constituição dos diferentes *jogos de linguagem* que emergiram no contexto das atividades entre a realidade e a matemática.

Em alguns grupos de alunos, diferentes aspectos *vistos* inicialmente possibilitaram o uso de diferentes conteúdos e procedimentos matemáticos na constituição de *jogos de linguagem*. Nesse sentido, os alunos conseguiram obter dois modelos matemáticos para o mesmo problema, o que também fez com que os alunos interpretassem e avaliassem os modelos matemáticos construídos. Diferentes aspectos também foram *vistos* pelos alunos não somente no início das atividades de modelagem, mas também nas interpretações dos modelos obtidos, o que fez os alunos avaliarem o modelo obtido no contexto da situação real.

No desenvolvimento das atividades, o uso de conceitos e ferramentas matemáticas também emergiu diante de algumas atitudes do professor, que fez perguntas para os alunos nos trabalhos em grupos. Isso propiciou aos alunos pensarem a respeito dos modelos obtidos, avaliarem procedimentos matemáticos que eram utilizados. O professor realizou intervenções em alguns procedimentos dos alunos, proporcionou-lhes o uso de conteúdos matemáticos que eles já sabiam, bem como possibilitou o estudo de novos conteúdos para obter modelos matemáticos que respondessem ao problema que investigavam. Além disso, o professor também auxiliou os alunos em alguns aspectos que eles não *viam* no início do desenvolvimento da atividade, isso colaborou para o uso de conceitos e procedimentos matemáticos. O professor também auxiliou os alunos em algumas dúvidas para que eles pudessem propor a temática de uma atividade de modelagem do terceiro momento de familiarização. As ações do professor também colaboraram para a constituição de *jogos de linguagem* relativos ao uso dos conteúdos de matemática pelos alunos. Em aulas mediadas com atividades de modelagem matemática, o papel do professor é o de orientador, conforme argumentam (ALMEIDA; SILVA e VERTUAN, 2012).

A constituição dos *jogos de linguagem*, nas atividades analisadas, mostra que os alunos souberam fazer uso dos conteúdos matemáticos no desenvolvimento das atividades. Esses usos estavam acompanhados dos procedimentos matemáticos, das regras matemáticas que orientaram os alunos para obter modelos matemáticos, avaliar e responder problemas investigados por eles. Nos momentos em que o professor oportunizou estudo de alguns conteúdos matemáticos, como aconteceu na Atividade *Painel Triedro,* os alunos souberam como usar o que o professor trabalhou no desenvolvimento da atividade.

O uso da linguagem matemática, dos procedimentos matemáticos pelos alunos do 6º e 9º anos, no desenvolvimento das atividades analisadas, mostra que a linguagem não é uma atividade arbitrária, é uma atividade guiada por *regras*. As ações dos alunos no desenvolvimento das atividades mostram que eles foram orientados pelas *regras,* que também serviram como condição de significado para os alunos. Outro aspecto da constituição dos *jogos de linguagem* pelos alunos envolvidos com as atividades analisadas está no fato de que a matemática é um dos *jogos de linguagem* que fazem parte das nossas *formas de vida*. As afirmações que os alunos fizeram no desenvolvimento das atividades aconteceram em função das *regras*, das *proposições matemáticas*, que funcionam como regras que determinam como jogar no *jogo de linguagem* da matemática, o que se pode exemplificar, novamente, com a fala do aluno A6.6 do 6º ano na socialização da Atividade *Quantidade de Tinta para as Paredes Externas do Colégio*.

> *No nosso trabalho, consideramos as áreas das janelas e portas nas paredes, algo que o pintor não considera, mas isso não faz sentido matematicamente. Calculamos as áreas das portas e janelas e assim fizemos uma subtração das áreas das paredes, assim sabíamos a área total a ser pintada. Aprendemos como esse trabalho, muitas coisas, entre elas, a calcular a área de um triângulo, que basta multiplicar a medida da base pela altura e depois dividir por dois, precisávamos da área do triângulo,*

porque tem paredes que tem o foramto de casinha. A área de retângulo nós já sabíamos calcular. Inicialmente nós entrevistamos o professor Evandro que disse que cada lata de tinta custa R$ 64,50 e depois o pintor contratado pela escola que disse cada lata de tinta pinta de 36 m^2 a 40 m^2.

Na perspectiva wittgensteiniana, a aprendizagem de uma palavra está associada à aquisição de uma regra

> aprender o significado de uma palavra pode consistir na aquisição de uma regra, ou um conjunto de regras, que governa seu uso dentro de um ou mais jogos de linguagem. Uma das consequências dessa ideia para a educação é que não há sentido em se ensinar um significado essencial de uma palavra independente de seus diversos usos. Uma palavra só adquire significado quando se opera com ela, ou seja, segundo uma regra em determinado contexto linguístico (GOTTSCHALK, 2004, p.321).

Assim, levando em consideração as diferentes nuances, jogos *de linguagem* podem ser agrupados em duas categorias: *jogos de linguagem* no contexto das relações entre realidade e matemática; jogos *de linguagem* relativamente ao conteúdo matemático que emerge nas atividades de modelagem matemática.

As inferências dessas categorias nos leva a sugerir que aulas de matemática sejam estruturadas com o uso de atividades de modelagem matemática, de modo que os alunos tenham oportunidade de fazer diversos usos dos conteúdos matemáticos, da linguagem matemática, dos símbolos matemáticos vinculados à diversidade de aspectos extramatemáticos aos quais as atividades de modelagem estão vinculadas. Nesse sentido, a *gramática* da Matemática possibilita aos alunos diferentes usos dos conteúdos matemáticos, indicando como as *regras* da matemática podem ser utilizadas, de modo que os alunos tenham a oportunidade de investigar se há ou não sentido no uso de conteúdos matemáticos nos contextos reais que originam as atividades de modelagem.

É muito comum ouvir professores que atuam no ensino de Matemática na Educação Básica falarem que os alunos não conseguem fazer uso dos conteúdos que estudam nas aulas em outros contextos, em situações reais que podem ser matematizadas. Defendemos que, se o professor espera que os seus alunos saibam aplicar as *regras* de um contexto em outro, ele deve oportunizar isso aos seus alunos. Um exemplo dessa oportunidade é por meio do uso de atividades de modelagem em aulas regulares de matemática.

O uso de uma mesma atividade pode acontecer em séries diferentes, com isso, o professor pode propiciar que os alunos *vejam* diferentes aspectos na atividade, e diferentes conceitos matemáticos podem emergir para resolver a atividade e aprender matemática.

Em relação ao que apresentamos anteriormente, na estruturação de aulas de matemática com o uso de atividades de modelagem, isso não significa que primeiro os alunos precisam aprender os conteúdos matemáticos para em seguida desenvolver as atividades de modelagem, uma espécie de um “ensino tradicional invertido”. Os alunos usam a matemática que sabem para desenvolver uma atividade de modelagem. Um exemplo é o que aconteceu com os grupos G1 e G2 do 9º ano na atividade *fotografia*. Eles fizeram uso do conteúdo de Semelhança de Triângulos que era o que eles sabiam. No âmbito da sala de aula, os modelos obtidos por esses alunos podem servir para uma discussão entre professor e alunos, e para o início do estudo de um novo conteúdo, Trigonometria no Triângulo Retângulo, como consequência do que os alunos sabem de Semelhança de Triângulos. Nesse caso, a atividade *fotografia* pode ser utilizada para o início do trabalho com Trigonometria no Triângulo Retângulo em aulas regulares de matemática.

A nossa defesa do uso das atividades de modelagem em aulas regulares de matemática também é para que os alunos, com essas atividades, também possam *fazer matemática* nas aulas.

A respeito das diversas estratégias de resolução que emergiram no desenvolvimento das atividades de modelagem analisadas, vemos que ao olharmos para as semelhanças e diferenças dos conceitos que emergiram, a robustez de um conceito vai sendo constituído. Fundamentados na Filosofia da Linguagem de Wittgenstein, quando olhamos para as semelhanças e as diferenças das palavras, das aplicações, constitui-se,

> “assim gradualmente, a “robustez” do conceito. E deste modo, constatamos que os limites de sentido deste conceito não existem a priori, em algum reino celestial, mas sim dependem fundamentalmente de nossas ações e do contexto de seu uso” (GOTTSCHALK, 2010, p.69).

Nessa perspectiva, é que essa pesquisa se alinha, bem como as pesquisas que foram desenvolvidas anteriormente no interior do GRUPEMMAT em Modelagem Matemática na filosofia da linguagem de Wittgenstein. No nosso entendimento, a robustez de um conceito vai sendo constituída olhando para um *jogo de linguagem*, para outro *jogo de linguagem* nas atividades de modelagem, com a intenção de ver o que é um *jogo de linguagem*, bem como de olhar para a constituição dos *jogos de linguagem*.

No ambiente empírico, no colégio, que foi a fonte direta de coleta de dados com as turmas do 6º e 9º anos do Ensino Fundamental, algumas dificuldades foram encontradas. O tempo que os alunos gastaram para desenvolver as atividades em alguns momentos superava o que o professor/pesquisador esperava. Foi necessário utilizar as aulas de outros professores nos dias que eles não tinham aulas de matemática. Alguns eventos aconteceram no colégio durante o período da coleta de dados, o que fazia com que uma atividade fosse interrompida e precisasse continuar nas aulas seguintes.

O período de coleta de dados, previsto para o segundo semestre de 2018, de 6 de agosto a 14 de novembro, foi estendido até o dia 30 de novembro.

Nesse sentido, na presente pesquisa configura-se também a produção apresentado por Garnica:

> Existe, sim, um cenário que o pesquisador procura compreender, cenário este com limitações bastante rigorosas, impostas, principalmente, pela impossibilidade de serem focadas, numa pesquisa, todas as instâncias que nela própria se vislumbram e que, nitidamente, estão ligadas a entornos que, por sua vez, têm outras ramificações que exigem compreensão (GARNICA, 2012, p.100) .

A escolha das turmas do 6º ano e 9º ano se justifica, porque eram turmas em que o professor trabalhava naquele momento no Ensino Fundamental, bem como o desejo de realizar uma pesquisa com alunos que estivessem no início e término dessa etapa de escolarização.

Uma das fragilidades desta pesquisa foi o tempo de coleta de dados. A coleta deveria ter começado no primeiro semestre de 2018. Essa restrição de tempo da coleta de dados colaborou para que o professor não conseguisse enxergar alguns procedimentos matemáticos desenvolvidos pelos alunos, alguns erros de cálculo, retomar alguns modelos matemáticos formulados, levá-los a refletir a respeito do que fizeram, bem como discutir alguns modelos matemáticos com os alunos de modo que eles fossem reformulados.

A respeito do exposto no parágrafo anterior, outra fragilidade da pesquisa foi a atuação do professor, pois a inexperiência com o uso de atividades de modelagem matemática na sala de aula fez com que deixasse de agir em alguns momentos oportunos.

Esta pesquisa tem a intenção de abrir possibilidades para outras pesquisas e práticas de modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Algumas investigações podem acontecer, por exemplo: questões associadas ao desenvolvimento das atividades de modelagem matemática pelos alunos, os modelos matemáticos por eles obtidos; constituição dos *jogos de linguagem* em atividades de modelagem matemática e o currículo de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental; o caminhar de um professor de matemática na condução do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, à luz da constituição dos *jogos de linguagem* em atividades de modelagem matemática.

Não se trata de chegar ao fim, ainda há muito para estudar!

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, p. 19–30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W. DE. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké, Campinas**, v. 18, p. 387–414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W. DE; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Boletim de Educação Matemática**, v. 17, n. 22, p. 19–35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W. DE; SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. **Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses**. VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. **Anais**...Goiás: 2015.

ALMEIDA, L. M. W. The "practice" of mathematical modeling under a Wittgensteinian perspective. **RIPEM**, v. 4, n. 2, p. 98–113, 2014.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. O conceito de função em situações de Modelagem. **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 23, p. 63-83, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; Jogos de Linguagem Em Atividades de Modelagem Matemática. **VIDYA: Revista Eletrônica**, v.34, n.1, p.241-256, 2914.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, H. C. A matematização em atividades de modelagem matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 8, n. 3, p. 207–227, 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. DA; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Básica. **São Paulo: Contexto**, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes? **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 2, p. 215-239, maio/ago. 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: **Modelagem Matemática em Foco**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014. p. 1–21.

ALMEIDA, L. M. W.; W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação Sociepistemológica para a Modelagem Matemática. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Santa Catarina, v.2, n. 2, p.117-134, jul.2009. Disponível em https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37952/28980 .

BARBOSA, J. C. Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 293–301, 2006.

BARBOSA, J. C. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. In: **Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis. v. 2, n. 2, p. 69-85, jul. 2009.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73–80, 2004.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3. ed. Lisboa: Edições 70, 2016.

BARON, M.E. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo, unidade 2**. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1974.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2009.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.
BEAN, D. O que é modelagem matemática? **Educação Matemática em Revista** (São Paulo), São Paulo, v. 8, n. 9/10, p. 49-57, 2001.

BERGER, P. L.; LUCKMANN, T. **A construção social da realidade: tratado de sociologia do conhecimento.** 28.ed. Trad. Floriano de Souza Fernandes. Petrópolis: Vozes, 2008.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática**. Editora da FURB: Blumenau, 1999.

BLUM, W. ICMI Study 14: applications and modelling in mathematics education – discussion document. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 51, n. 1-2, p. 149-171, jul. 2002.

BLUM, W.; NISS, M. Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects: State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 22, n. 1, p. 37-68, fev. 1991.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Portugal: Porto Editora, 1994.

CARAÇA, B.J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva 2003.

CONDÉ, M. L. L. **Wittgenstein**: linguagem e mundo. São Paulo: Annablume, 1998.

FERREIRA, A. B. H. **Miniaurélio: O Dicionário da Língua Portuguesa**. 7. Ed. Curitiba: Ed. Positivo, 2008.

D' Ambrosio. U. **Por que se ensina matemática?** Disciplina à distância. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, 2003.

D'Ambrosio.U. Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical And Political Dimensions. **Journal of Mathematical Modelling And Application** 2009, Vol. 1, No 1, pp. 89-98.**do conhecimento.** 28.ed. Trad. Floriano de Souza Fernandes. Petrópolis: Vozes, 2008.

DOWNTON, A. Problem Posing: a possible pathway to mathematical modelling. In: STILLMAN, G. A.; et al. (eds.). **Teaching Mathematical Modelling**: connecting to research and practice. New York: Springer, 2013. p. 527-536.

ENGLISH, L. D. (2003). Engaging students in problem posing in an inquiry-oriented mathematics classroom. In F. K. Lester Jr. & R. I. Charles (Eds.), **Teaching mathematics through problem solving**, Prekindergarten-Grade 6 (pp. 187–196). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

GALBRAITH, P. Models of Modelling: genres, purposes or perspectives. In: **Journal of Mathematical Modelling and Applications**. v, 1, n. 5, 3-16, 2012.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GIL PEREZ, D., MARTINEZ TORREGROSA, J. e SENENT PEREZ, F. (1988). El fracaso en la resolución de problemas de Física: una investigación orientada por nuevos supuestos. **Enseñanza de las Ciencias,** 6(2): 131-146.

GOTTSCHALK, C. M. C. A atividade matemática escolar como introdução de paradigmas na linguagem. **Revista de Educação, Ciência e Cultura**, v. 23, n. 1, p. 113–124, 2018.

GOTTSCHALK, C. M. C. A Construção e Transmissão do Conhecimento Sob Uma Perspectiva Wittgensteiniana. **Cadernos Cedes**, Campinas, v.28, n.74, pp.75-96, jan./abr. 2008.

GOTTSCHALK, C. M. C. A inserção nos jogos de linguagem da perspectiva de uma epistemologia do uso. **International Studies on Law and Education**, v.15, p.63-70, 2013.

GOTTSCHALK, C. M. C. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul.-dez. 2004.

GOTTSCHALK, C. M. C. A terapia wittgensteiniana como esclarecedora de conceitos fundamentais do campo educacional. **Revista Latinoamericana de Filosofía de la Educación**, v. 2, n. 4, p. 299–315, 2015.

GOTTSCHALK, C. M. C. Educational implications of some of wittgenstein's remarks on mathematics: proposition, inference and proof. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, SBEM, v. 4, n. 2, p. 36-51, 2014.

GOTTSCHALK, C. M. C. O conceito de compreensão – a mudança de perspectiva de Wittgenstein após uma experiência docente. **International Studies on Law and Education**, v.12, p.49-56, 2012.

GOTTSCHALK, C. M. C. O papel do método no ensino: da maiêutica socrática à terapia wittgensteiniana. **Educação Temática Digital**, v. 12, n. 1, p. 64–81, 2010.

GOTTSCHALK, C. M. C. Os rituais educacionais à luz da filosofia da linguagem de Wittgenstein. **Sophia, Colección de Filosofía de la Educación**, n. 22, p. 126–144, 2017.

GOTTSCHALK, C. M. C. Ver e ver como na construção do conhecimento matemático. In: IMAGUIRE, Guido; MONTENEGRO, Maria Aparecida; PEQUENO, Tarcísio (Org.). **Colóquio Wittgenstein.** Fortaleza: Edições UFC, 2006, pp. 73-93. Instituto de Física. Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2012.

IMENES, L. M., **Geometria Imenes, Jakubo e Lellis**. São Paulo: Atual, 1992.

IZMIRLI, I. M. Wittgenstein as a social constructivist. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, Exeter, n. 27, p. 1-12, abr. 2013.

JASTROW, J. **Fact and fable in psychology.** London: Macmillan, 1901.

KNIJNIK, G. Fazer perguntas... ter a cabeça cheia de pontos de interrogação: uma discussão sobre etnomatemática e modelagem matemática escolar. **Unión**: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 44, p. 10-23, dez. 2015.

KNIJNIK, G. A ordem do discurso da matemática escolar e jogos de linguagem de outras formas de vida. **Perspectivas da Educação Matemática**: Revista do Programa de Pós-Graduação Em Educação Matemática Da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, n.22, p.45-64, 2018.

MERLI, R. F. **Modelos clássico e fuzzy na educação matemática**: um olhar sobre o uso da linguagem. 2012. 154 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

MORENO, A. R. Descrição fenomenológica e descrição gramatical – ideias para uma pragmática filosófica. **Revista olhar**. Ano 4, n. 7, p. 93-139, jul-dez, 2003.

NEGRELLI, L.G. **Uma Reconstrução Epistemológica Do Processo De Modelagem Matemática Para A Educação (Em) Matemática**. 2008. Tese (Doutorado em Educação – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008).

PARANÁ. **Plano De Abandono Escolar Módulo III**. Curitiba: Coordenadoria Estadual de Defesa Civil do Paraná. Disponível em http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=242. Acesso em 13 fevereiro 2018.

PERALES, F.J. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. **Enseñanza de las Ciencias**, 11(2):170-178.

PEREIRA JUNIOR, A. **Enunciados De Itens De Provas De Matemática: Um Estudo Na Perspectiva Da Educação Matemática Realística**. 2014.68F. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de

Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2019.

PEREIRA JUNIOR, A. SEKI, J.T., ALMEIDA, L.M.W. **Implicações das Formas de Vida Na Formulação de Problemas**. Anais da X CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, **Anais..**.2017.

PEREIRA JUNIOR, A., ALMEIDA, L.M.W. **Análise do Conceito de Área Em Uma Atividade de Modelagem Matemática: Uma Interpretação Wittgensteiniana**. Anais do VIII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática EPMEM, **Anais...**2018.

PEREIRA JUNIOR, A., ALMEIDA, L.M.W., GOULART, T.C.K., **O Uso da Linguagem Em Uma Atividade de Modelagem Matemática**. II Congresso Internacional de Ensino CONIEN, 2019, Cornélio Procópio, **ISSN: 2526-8899**

PEREIRA JUNIOR, A., ALMEIDA, L.M.W., **As hipóteses definidas pelos alunos em uma atividade de modelagem matemática.** XV Encontro Paranaense de Educação Matemática EPREM, **Anais**...2019.

POLLAK, H. O. The interaction between Mathematics and other school subjects, **New Trends in Mathematics Teaching**, Volume IV, Paris: UNESKO, 1979.

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. New York: Springer, 2015. p. 265-276.

POLLAK, H. O. What is mathematical modeling? In: **Mathematical Modelin Handbook**. Bedfort: COMAP, 2012. Disponível em www.comap.com

PORTO, A. **As Dízimas Periódicas na Filosofia da Matemática de Wittgenstein**. Philósophos, 8, 2003, pp. 127-157.

SEKI, J.T.P. **Modelagem Matemática, Compreensão E Linguagem: Interlocuções Fundamentados Na Filosofia De Wittgenstein**. 2019.150F. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2019.

SILVA, P. V.; SILVEIRA, M. R. A. O ver-como wittgensteiniano e suas implicações para a aprendizagem da Matemática: um ensaio. **Boletim Online de Educação Matemática**, Joinville, v.2. n.3, p. 17-34, ago./dez. 2014.

SILVEIRA, M. R. A. Aplicação e interpretação de regras matemáticas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.10, n.1, p. 93-113, 2008.

SILVEIRA, M.R.A **Matemática, discurso e linguagens:** contribuições para a Educação Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2015. 305 p.

SOUSA, B.N.P.A. **A Matemática Em Atividades De Modelagem Matemática: Uma Perspectiva Wittgensteiniana.** 2017. 316f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2017.

SOUSA, B.N.P.A.; TORTOLA, E.; ALMEIDA, L.M.W.de. **Modelagem Matemática e Semelhanças de Família: Uma discussão Fundamentada na Perspectiva Wittgensteiniana**. XIV Encontro Paranaense de Educação Matemática EPREM, **Anais**...2017.

SOUZA, E. G. **A aprendizagem matemática na modelagem matemática**. Tese de Doutorado—Feira de Santana: Universidade Federal da Bahia, 2012.

SOUZA, E. G.; BARBOSA, J. C. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetiké**, v. 22, n. 41, jun. 2014.

SOUZA, H. C. T.; OLIVEIRA, C. F.; ALMEIDA, L. M. W. **O seguir regras em uma atividade de Modelagem Matemática**. Anais da X Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. **Anais**...2017

SOUZA, H.C.T.de. **Um olhar sobre o fazer modelagem matemática à luz da filosofia de Wittgenstein.** 2018. 210f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SPANIOL, W. "FORMAS DE VIDA": SIGNIFICADO E FUNÇÃO NO PENSAMENTO DE WITTGENSTEIN. **Síntese: Revista de Filosofia,** Belo Horizonte, v. 17, n. 51, p.11-31, 1990. Disponível em: <http://faje.edu.br/periodicos/index.php/Sintese/article/view/1720>. Acesso em: 13 jul. 2017.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. **Um olhar sobre os usos da linguagem por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental em atividades de modelagem matemática**. Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 5, p. 83-105, 2016.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2016.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

VELEDA, G.G., ALMEIDA, L.M.W.A **Caracterização Da Realidade Em Trabalhos de Modelagem Matemática Na Educação Matemática**. X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador.

VELLOSO, Araceli. FORMA DE VIDA OU FORMAS DE VIDA? **Philósophos - Revista de Filosofia,** [s.l.], v. 8, n. 2, 2008, pp.159-184, 23.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. Dissertação de Mestrado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2007.

VERTUAN, R. E. **Práticas de Monitoramento cognitivo em atividades de modelagem matemática**. Tese de Doutorado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2013.

VILELA, D. S. **Matemáticas nos usos e jogos de linguagem: Ampliando concepções na Educação Matemática**. Tese de Doutorado—Campinas: Unicamp, 2007.

VILELA, D. S. **Usos e jogos de linguagem na matemática**: diálogo entre Filosofia e Educação Matemática. São Paulo (SP): Editora Livraria da Física, 2013.

VILELA, D. S.; MENDES, J. R. A linguagem como eixo da pesquisa em educação matemática: contribuições da filosofia e dos estudos do discurso. **Zetetiké** – FE/Unicamp – v. 19, n. 36, pp. 7-25, – jul/dez 2011.

WITTGENSTEIN, L. **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática**. Madrid: Alianza Editorial, 1987

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 9. ed. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2016.

WITTGENSTEIN, L. **Tractatus Logico-Philosophicus**. Salt Lake City: Project Gutenberg, 2010. Disponível em: <https://www.gutenberg.org/files/5740/5740-pdf.pdf>.

APÊNDICES

APÊNDICE A

OFÍCIO PARA A ESCOLA: AUTORIZAÇÃO PARA A COLETA DE DADOS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
PECEM MESTRADO E DOUTORADO
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 3 de agosto de 2018

À Senhora Aparecida Delorenci
Diretora
Colégio Estadual Adaile Maria Leite
Rua Armando Crippa 735 – Jardim Liberdade
CEP: 87047-140
Assunto: Autorização para coleta de dados

Prezada senhora

Vimos por meio deste, requerer a Vossa Senhoria autorização para coleta de dados relativa ao desenvolvimento da pesquisa de doutorado de Ademir Pereira Junior, matriculado sob o registro acadêmico nº 201612350015 no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina e sob orientação da professora Doutora Lourdes Maria Werle de Almeida.

Os dados serão coletados com duas turmas do Ensino Fundamental 6º A e 9º B e consistem em gravações em áudio, vídeo e imagens capturadas do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática com os alunos dessas turmas.

O estudante e sua orientadora comprometem-se a utilizar os dados coletados apenas para fins de pesquisa e publicações associadas a essa, bem como a não divulgar a identidade dos participantes, fazendo uso de nomes fictícios para se referir aos alunos. Faremos uso das imagens dos alunos na pesquisa se for necessário.

Atenciosamente

Lourdes Maria Werle de Almeida
Orientadora

Ademir Pereira Junior
Estudante de doutorado

APÊNDICE B

OFÍCIO PARA OS PAIS: AUTORIZAÇÃO PARA A COLETA DE DADOS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
PECEM MESTRADO E DOUTORADO
Universidade Estadual de Londrina

AUTORIZAÇÃO

Eu, ____,
Portador da cédula de identidade, R.G Nº _______________________________________, inscrito no CPF Nº _______________________, Residente à Rua____________________ Nº_______, Bairro: _________________ na cidade de ____________________________, autorizo por meio deste instrumento particular Ademir Pereira Junior e Lourdes Maria Werle de Almeida respectivamente, aluno e docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, que utilizem as produções escritas, imagens se for necessário do (a) estudante para fins de pesquisa do trabalho de doutorado de Ademir Pereira Junior, podendo divulgá-las em publicações científicas, congressos e eventos da área, sem restrições de prazo e citações, desde a presente data no relato de pesquisa. Declaro ainda que fui devidamente informado (a) e esclarecido acerca da investigação que será desenvolvida. Abdicando diretos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Londrina, _______ de _________________ de 2018.

Assinatura do responsável:____

Aluno (a): ____

Data de Nascimento: _______/_______/_______

Telefone: (   ) _____________________________

Celular: (   )______________________________

APÊNDICE C

AS OUTRAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS

AS OUTRAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS

Apresentamos de modo suscinto as outras três atividades de modelagem matemática que foram desenvolvidas com os alunos.

ATIVIDADE *BRIGADA ESCOLAR*

A atividade *Brigada Escolar* desenvolvida com as duas turmas 6º e 9º anos, foi do primeiro momento de familarização dos alunos com atividade de modelagem matemática, conforme a caracterização de (ALMEIDA; DIAS, 2004).

Em relação a essa atividade, a condução foi de responsabilidade do professor, que procurou informações a respeito da temática.

Brigada Escolar é um programa de treinamento e conscientização da Comunidade Escolar do Estado do Paraná, para ações de enfrentamento de situações emergenciais no interior das escolas. O prograama é formado pelos servidores das escolas que passam pelo treinamento do Curso de Brigadistas Escolares.

Em uma situação de emergência, como início de incêndio no interior das escolas, o alarme da escola é acionado, o professor posiciona os alunos em filas indianas para a saída das salas de aula com rapidez e segurança, aguardando o sinal de um pessoa responsável pelo corredor para que possa deslocar os alunos para a quadra do colégio – ponto de encontro. Na quadra os alunos devem permanecer sentados, conforme as orientações do III Plano de Abandono do curso Brigadistas Escolares da SEED – Secretaria de Educação do Estado do Paraná.

Para iniciar a atividade em ambas um texto[32] foi entregue com as informações relativas à temática. Durante a leitura do texto por parte do professor com as duas turmas teve início a atividade visando a inteiração dos alunos com a temática, nessa inteiração o professor propôs o problema: Em uma situação de emergência, quantos alunos sentados cabem no ponto de encontro do nosso colégio?

Para a resolução do problema os alunos das turmas foram à quadra para obter as dimensões, mediram um aluno de cada grupo sentado na quadra, no chão da sala de aula, calcularam a área da quadra, da sala de aula que estudam. Além disso, socializaram os encaminhamentos matemáticos com à turma e o professor, cada grupo entregou um relatório explicando a resolução, o modelo matemático obtido.

---

[32] As informações do texto trabalhado com os alunos foi retirado do site http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=242 e do módulo III Plano de Abandono Escolar do curso Brigadistas Escolares. Acesso em 13 de fevereiro 2018.

ATIVIDADE *NÚMERO DE ALUNOS POR SALA DE AULA*

A atividade Número de Alunos Por Sala de Aula foi o tecerceiro momento de familiarização, segundo Almeida e Dias (2004) e foi desenvolvida com três grupos de alunos do 6º ano, um constituído por três alunos e os outros dois por quatro alunos.

Essa atividade proposta por um dos alunos do 6º ano, no momento em que os alunos precisavam definir um tema para ser investigado. O interesse por essa situação-problema surgiu quando alguns grupos de alunos pretendiam realizar algum tipo de investigação em que fosse preciso medir a sala de aula. Esse interesse começou quando os alunos desenvolveram a atividade *Brigada Escolar*. Inicialmente os alunos não sabiam porque medir a sala de aula. Após algumas conversas entre os alunos e o professor, surge a proposta de um alunos em investigar quantos alunos cabem uma sala de aula.

Esses três grupos mediram a sala de aula, foram até o Laboratório de Informática pesquisaram informações a respeito da composição de turmas na Rede Estadual de Ensino do Paraná[33].

Os três grupos apresentaram a solução à turma e entregaram um relatório para o professor.

[33] As informações pesquisadas pelos três grupos que participaram dessa atividade estão disponíveis no site https://www.legislacao.pr.gov.br/legislacao/pesquisarAto.do?action=exibir&codAto=69392&indice=1&totalRegistros=1 Pesquisa realizada em 22 de outubro de 2018.

ATIVIDADE *SALA DE AULA NOVA PARA O COLÉGIO*

A atividade Sala de Aula Nova para o Colégio foi do terceiro momento de familiarização dos alunos com modelagem matemática, desenvolvida pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Essa atividade consistiu em um projeto que foi elaborado pelos alunos do 9º ano a respeito da construção de uma sala de aula nova para o colégio.

No desenvolvimento dessa atividade cada grupo de alunos do 9º ano ficou responsável por uma parte da atividade, que era apresentar um projeto de uma nova sala de aula para a direção do colégio, bem como do material a ser utilizado e dos gasto em reais com essa nova sala de aula.

O desenvolvimento da atividade envolveu todos os alunos da turma que trabalharam em oito grupos constituídos de três a cinco alunos.

Cada grupo de alunos se responsabilizou por uma parte da atividade, elaborar a planta da sala de aula, construir a maquete, investigar a quantidade de pisos necessários, de tinta para pintar as paredes, gesso, tijolos, elaborar um projeto de fiação para a sala, comprar equipamentos para a nova sala de aula.