UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

GABRIELE GRANADA VELEDA

SOBRE A REALIDADE EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

LONDRINA
2010

GABRIELE GRANADA VELEDA

SOBRE A REALIDADE EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profª Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2010

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

V436s Veleda, Gabriele Granada.

Sobre a realidade em atividades de modelagem matemática / Gabriele Granada Veleda. – Londrina, 2010.
87 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 3. Modelos matemáticos – Teses. 4. Matemática – Filosofia – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

GABRIELE GRANADA VELEDA

SOBRE A REALIDADE EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Profª Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Orientadora
Universidade Estadual de Londrina
Londrina (PR)

____
Profª Dra. Leônia Gabardo Negrelli
Faculdade de Ciências e Tecnologia do Paraná
Curitiba (PR)

____
Profª Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Universidade Estadual de Londrina
Londrina (PR)

Londrina, _____ de ______________ de 2010.

À minha mãe Genize, que fez e faz o possível e o impossível para a realização dos meus sonhos.
Aos meus avós Pedro e Irene, que me ensinaram o valor do estudo.

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor Deus, Pai todo Poderoso, que tem orientado e iluminado minha caminhada no percurso da vida.

À minha família, sobretudo à minha mãe e à minha irmã, que me acompanham permanentemente.

À professora Lourdes Maria Werle de Almeida, pela amizade, apoio e dedicação, o que permitiu a realização deste trabalho.

Aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), pelas discussões que auxiliaram no meu crescimento profissional e pessoal.

Às professoras Ângela Marta, Márcia Cyrino e Leônia Negrelli, pelas críticas e sugestões que engrandeceram este trabalho.

Aos meus colegas de Scriba, Joamir, Rodrigo e Ângelo, que respeitaram e compreenderam o meu envolvimento neste trabalho.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho fosse realizado.

A todos, muito obrigada.

"Sempre recebi os elogios como incentivos
dos amigos para que eu venha a ser o que
tenho consciência de que ainda não sou”
Chico Xavier (1910 – 2002)

VELEDA, Gabriele Granada. **Sobre a realidade em atividades de Modelagem Matemática**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

RESUMO

Nesse trabalho procuramos caracterizar como a realidade é tratada em trabalhos de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Para tanto, selecionamos e analisamos definições de Modelagem Matemática apresentadas em duas edições da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM) que utilizam o termo 'realidade'. Identificamos a corrente filosófica que embasa a relação entre Matemática e realidade em cada definição e a caracterização de realidade considerando a elaboração do conhecimento, conforme a exposição de Bicudo (2000). Verificamos ainda como o modelo matemático trata a realidade, adaptando as categorias de análise utilizadas por Borges e Silva (2007) conforme a proposta de Negrelli (2008), que afirma que em atividades de Modelagem Matemática a realidade é passível de ser dividida em *realidade inicial* e *realidade intermediária*. Os resultados desse trabalho apontam que a caracterização de Modelagem Matemática está relacionada com a concepção que se tem da relação entre Matemática e realidade e que a qualidade do modelo matemático desenvolvido em uma atividade de Modelagem é determinante na utilidade do resultado e nas possíveis ações na realidade.

Palavras-chaves: Educação Matemática; Modelagem Matemática; realidade.

VELEDA, Gabriele Granada. **About reality in activities of Mathematical Modelling**. 2010. Dissertation (Masters in Science and Mathematics Educations) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

ABSTRACT

This study attempts to characterize how the reality is treated in works of Mathematical Modelling in Mathematics Education. Therefore, we selected and analyzed definitions in Mathematical Modelling presented in two editions of the National Conference about Modeling in Mathematics Education (CNMEM – in Portuguese) that employ the term “reality”. We identified the philosophic line that sustains the relation between Mathematics and reality in every definition and the characterization of reality considering the knowledge’s elaboration, described by Bicudo (2000). We also verified how mathematics model embraces the reality, adapting the analysis categories used by Borges and Silva (2007) according to Negrelli’s proposal (2008), assuring that in Mathematical Modelling activities the reality is liable of being divided in initial reality and intermediary reality. The results of this study indicate that the characterization of Mathematical Modelling is related to the conception one have of the relation between Mathematics and reality and that the quality of the mathematics model developed in a modeling activity is determinant in the utility of the result and in the possible actions in reality.

Key-words: Mathematics Educations; Mathematical Modelling; reality.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO DA PROBLEMÁTICA

Nas últimas décadas a Modelagem Matemática tem sido utilizada no contexto escolar vinculada com os objetivos da Educação Matemática e, neste contexto, é possível destacar diferentes definições para a Modelagem[1].

Diversos trabalhos buscam compreender em que consiste a Modelagem Matemática na Educação Matemática, como, por exemplo, Borges e Silva (2007), Negrelli (2008), Klüber (2008), entre outros. Araújo (2007) fez um levantamento de experiências em que os autores das experiências usaram a denominação 'Modelagem Matemática' em suas atividades. Nesse levantamento a autora observou diversas definições acerca do que é Modelagem. Essa diversidade de definições sobre a Modelagem Matemática também foi abordada por Broering (2009). Em seu trabalho o autor detectou 50 diferentes definições citadas em trabalhos publicados no evento Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), que ocorreram nos anos de 2005 e 2007. Broering (2009) destacou alguns termos comuns presente nessas definições, tais como realidade, problematização e investigação.

Essa busca por elementos ou características comuns às diferentes definições de Modelagem Matemática é tema de outros trabalhos, como Anastácio (2007) e Araújo (2002; 2007). Ao analisar diferentes interpretações sobre Modelagem Matemática, Anastácio (1990) observou que expressões como 'realidade', 'problema do mundo real' estão, de modo geral, associados à Modelagem Matemática (apud ANASTÁCIO, 2007). Segundo Anastácio (2007), "todas as definições se referem, de algum modo, a um problema da realidade que poderá ser solucionado mediante um processo no qual se procurará um modelo matemático que o represente" (p.31). De acordo com a pesquisa de Araújo (2007) sobre diferentes definições para Modelagem Matemática, é possível afirmar que estas definições têm em comum o

[1] No decorrer do texto utilizaremos o termo Modelagem para nos referirmos à Modelagem Matemática a fim de evitarmos repetições.

objetivo de apresentar “a resolução de algum problema da realidade, por meio do uso de teorias e conceitos matemáticos” (p. 18).

Considerando o que destacam Anastácio (2007) e Araújo (2007) em seus trabalhos sobre modelagem, identificamos que o termo ‘realidade’ é comumente mencionado. Esse fato também pode ser confirmado no trabalho de Broering (2009). Considerando as publicações analisadas por esse autor, a expressão ‘realidade’ figurou em quinze das cinquenta definições de Modelagem Matemática encontradas nos trabalhos publicados em duas edições da CNMEM.

1.2 Objetivo e Questões de Investigação

A partir das considerações apresentadas e atentando para o fato de que existem poucos trabalhos que buscam discutir o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e os termos comumente relacionados a ele, pretendemos fomentar o debate sobre a Modelagem na Educação Matemática, colocando em discussão apenas um dos termos que aparece com frequência nas definições de Modelagem: ‘realidade’. Além disso, investigar os fundamentos teóricos subjacentes a diferentes definições é essencial para consolidar aspectos e características importantes de cada definição, que levam a reflexão dos termos utilizados e como a Modelagem Matemática é utilizada pelo professor em sua prática pedagógica.

Assim, o objetivo da nossa pesquisa consiste em caracterizar como a realidade é tratada em trabalhos de Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática.

Para esta caracterização definimos algumas questões norteadoras:

i. Qual corrente filosófica, realismo ou idealismo, parece estar refletida nas definições de Modelagem para relacionar Matemática e realidade?

ii. Levando em consideração a relação entre realidade e elaboração do conhecimento como tratada em Bicudo (2000), qual o tipo de realidade evidenciado em cada definição de Modelagem Matemática?

iii. Como o modelo matemático obtido em uma atividade de Modelagem Matemática trata da realidade?

1.3 ESTRUTURA DO TEXTO

A estrutura do texto que descreve a pesquisa contempla sete capítulos. No capítulo 1, fazemos uma apresentação do nosso trabalho, abordando a problemática da pesquisa e a estrutura do texto.

No capítulo 2 tratamos do entendimento do que é Matemática e realidade e a relação entre elas, conforme apontam as correntes filosóficas realismo e idealismo. Apresentamos ainda quatro tipos de realidade, que estão associadas com a compreensão de elaboração do conhecimento.

No capítulo 3 abordamos a Modelagem Matemática e realidade. Discorremos sobre o que é Modelagem, suas etapas e fluxogramas explicativos e expomos um breve histórico da Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática. Encerramos esse capítulo apresentando como, na compreensão de Negrelli (2008), a realidade na Modelagem Matemática pode ser dividida em duas: *realidade inicial* e *realidade intermediária*.

No capítulo 4 apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa, estruturamos um quadro teórico, adaptando as categorias de análise utilizadas por Borges e Silva (2007) a partir da compreensão do que expõe Negrelli (2008) e ainda apresentamos a condução das nossas análises.

No capítulo 5 apresentamos e analisamos 15 definições de Modelagem Matemática encontradas nos artigos publicados nos anais da IV CNMEM e da V CNMEM em que aparece o termo 'realidade'. Destacamos uma atividade, encontrada em um artigo que cita algumas das definições selecionadas, a fim de evidenciar as realidades (*inicial* e *intermediária*), a relação entre o modelo matemático encontrado e a realidade, e as possíveis ações sobre a realidade que essa atividade pode proporcionar. Em seguida, identificamos a corrente filosófica que descreve a relação entre Matemática e realidade (realismo ou idealismo) em cada definição e caracterizamos a realidade em *percebida*, *objetiva*, *criada* ou *construída*, conforme expõe Bicudo (2000). Também é apresentada uma análise global, na qual apontamos as convergências identificadas na caracterização da realidade nas definições selecionadas.

No capítulo 6 apresentamos algumas considerações levantadas com o desenvolvimento da pesquisa, assim como questões que poderão futuramente ser investigadas. Finalmente, no capítulo 7 constam as referências bibliográficas usadas para a pesquisa.

CAPÍTULO 2

SOBRE MATEMÁTICA E REALIDADE

Neste capítulo, na busca por compreender o que é Matemática, apresentamos definições etimológicas e filosóficas, bem como alguns significados usuais. O mesmo percurso foi realizado para compreender o que é realidade.

Também discutimos como as correntes filosóficas realismo e idealismo interpretam a relação entre Matemática e realidade e como essa interpretação influencia na relação do conhecimento (matemático) com a realidade.

2.1 SOBRE MATEMÁTICA

A palavra Matemática é originária do grego *máthéma*, que significa estudo, conhecimento. O sufixo *ica*, também de origem grega, designa arte, ciência, técnica. Portanto, ao analisarmos etimologicamente o vocábulo em questão, temos que Matemática é a ciência do conhecimento. Ao buscarmos o significado filosófico das palavras ciência e conhecimento, encontramos que ciência, no sentido antigo, é o "conhecimento racional que versa sobre a essência do real" (RUSS, 1994, p. 35), e conhecimento é o "ato pelo qual o espírito ou o pensamento apreendem o objeto ou o tornam presente, esforçando-se para formar uma representação que exprime perfeitamente esse objeto" (RUSS, 1994, p. 47).

No dicionário filosófico Russ temos que, de maneira geral, Matemática é a "ciência que tem por objeto o número, a quantidade, a extensão e a ordem" (RUSS, 1994, p. 177). Para o filósofo René Descartes (1596 – 1650), "apenas as coisas em que se estuda a ordem e a medida se ligam à matemática, sem que importe que esta medida seja buscada em números, figuras, astros, sons ou qualquer outro objeto" (DESCARTES, apud RUSS, 1994, p. 177).

De acordo com o dicionário eletrônico Houaiss, Matemática é a "ciência que estuda objetos abstratos (números, figuras, funções) e as relações existentes entre eles, procedendo por método dedutivo". Esse dicionário ainda apresenta o significado de algumas locuções, tais como Matemática Aplicada, “ramo da matemática que opera com grandezas mensuráveis do mundo físico, bem como com dados quantitativos referentes a fatos (sociais, econômicos) e que leva em conta a noção de movimento”; Matemática Pura, “ramo da matemática que estuda os algarismos e números enquanto quantidades abstratas, bem como a noção de ordem”; Matemática Elementar, “a que é ensinada nos cursos de primeiro e segundo graus[2]”, e Matemática Moderna, “sistema unificado e sequencial do ensino de matemática e aritmética, desenvolvido na década de 1960 a partir da teoria dos conjuntos”.

Ao analisarmos o termo Matemática, observamos as diferentes perspectivas de seu significado. Entretanto, não é possível identificar a relação entre os elementos matemáticos e os objetos reais, a realidade. Para investigar essa relação, na próxima seção discutimos o que é realidade.

2.2 Sobre Realidade

De acordo com a etimologia da palavra, a Matemática se baseava no pensamento formal para descrever elementos da realidade. Mas o que é a realidade? O que se entende por realidade?

Ao tratar da caracterização de realidade os autores Berger e Luckmann (2008) a apresentam como “uma qualidade pertencente a fenômenos que reconhecemos terem um ser independente de nossa própria volição (não podemos ‘desejar que não existam’)” (p. 11). Esses autores acreditam que a realidade é construída socialmente e propõem a existência de múltiplas esferas da realidade impregnadas de signos e símbolos que serão compreendidos pelo sujeito na medida em que ele se insere nestas esferas.

> Os objetos diferentes apresentam-se à consciência como constituintes de diferentes esferas da realidade. Reconheço meus semelhantes com os quais tenho de tratar no curso da vida diária como pertencendo a uma realidade inteiramente diferente da que têm as figuras desencarnadas que aparecem em meus sonhos. Os dois conjuntos de objetos introduzem tensões inteiramente diferentes em minha consciência e minha atenção com referência a eles é de natureza completamente diversa (BERGER; LUCKMANN, 2008, p. 37-38)

De acordo com os autores, transitar entre uma esfera da realidade e outra é como uma espécie de choque causado pelo deslocamento de atenção.

---

[2] Nos dias atuais, os cursos de primeiro e segundo graus são denominados, respectivamente, de Ensino Fundamental e Ensino Médio. Esses dois cursos compõem a formação básica de um estudante brasileiro.

Dentre as múltiplas esferas da realidade caracterizadas conforme exposto por Berger e Luckmann (2008), é destacada a esfera relativa à realidade cotidiana.

> A tensão da consciência chega ao máximo na vida cotidiana, isto é, esta última impõe-se à consciência de maneira mais maciça, urgente e intensa. É impossível ignorar e mesmo é difícil diminuir sua presença imperiosa. Consequentemente, força-me a ser atento a ela de maneira mais completa. Experimento a vida cotidiana em estado de total vigília (BERGER; LUCKMANN, 2008, p. 38).

Segundo os autores, a realidade da vida cotidiana tem uma posição privilegiada, o que autoriza a designação de realidade predominante.

> Apreendo a realidade da vida diária como uma realidade ordenada. Seus fenômenos acham-se previamente dispostos em padrões que se impõem à minha apreensão. A realidade da vida cotidiana aparece já objetivada, isto é, constituída por uma ordem de objetos que foram designados como objetos antes de minha entrada em cena (BERGER; LUCKMANN, 2008, p. 38).

Para Berger e Luckmann (2008), a realidade mais próxima é a realidade cotidiana, pois é ela que está ao nosso alcance, ela é o mundo em que atuamos. No entanto, cada indivíduo possui o seu cotidiano, portanto, cada indivíduo possui a sua realidade. Para esclarecer o seu ponto de vista, os autores lançam o exemplo de um mecânico de automóveis de passeio, que tem sua atenção voltada para os objetos e materiais que possui em seu local de trabalho e, de forma menos direta, tem interesse no que acontece nos laboratórios de provas da indústria automobilística. Não que o mecânico estará garantidamente trabalhando em um desses laboratórios futuramente, mas as tecnologias que ali estão sendo testadas estarão presentes nos carros que ele poderá arrumar, o que afetará diretamente a sua vida cotidiana, a sua realidade.

Ao procurar o vocábulo realidade no dicionário eletrônico Houaiss, encontramos três significados: 1 – qualidade ou característica do que é real, 2 – o que realmente existe; fato real; verdade e 3 – o conjunto das coisas e fatos reais. No dicionário filosófico temos que realidade é característica do que é real; o que é real. Com isso, observamos a necessidade de definir o que é *real*.

O vocábulo real pode ser utilizado como adjetivo ou substantivo. No primeiro caso, o dicionário eletrônico Houaiss define real como relativo ao que é concreto; que existe realmente; que não é falso; genuíno. No dicionário filosófico encontramos que a utilização da palavra real como adjetivo diz respeito ao “que é dado e não é somente um estado imaginário” (RUSS, 1994, p. 246). Como substantivo, o dicionário eletrônico Houaiss define real como fato verdadeiro; que existe de fato, relativo aos bens e não às pessoas, e o dicionário filosófico define como “as coisas mesmas; o que é; conjunto das coisas” (RUSS, 1994, p. 246).

Para encerrar essa seção, parafraseamos Berger e Luckmann (2008): definir o que é realidade, científica ou filosoficamente, não esgota o que é real.

2.3 Sobre a Relação entre Matemática e Realidade

Alguns filósofos como Platão e Aristóteles apresentaram seus pontos de vista sobre a relação entre a Matemática e a realidade, dando respostas para perguntas que até hoje nos causam inquietação: A Matemática existe independente da ação do homem, podendo o homem descobri-la? Ou ao contrário, o homem que a inventa? A Matemática é abstrata ou empírica?

Com o propósito de estabelecer algumas reflexões sobre questões como as que foram citadas, propomos uma discussão sobre a gênese da Matemática, abordando, nessa seção, a relação entre a Matemática e a realidade em duas correntes filosóficas: realismo e idealismo. Segundo Ponte et.al (1997), essas duas correntes filosóficas se atentam a relacionar essa Ciência com o homem, por isso nos dedicamos a estudar apenas assas.

No dicionário filosófico Russ encontramos realismo definido como "toda doutrina que afirma que o ser tem uma existência independente de quem o concebe ou de toda representação do espírito" (RUSS, 1994, p. 247). Na Matemática, realismo é a doutrina segundo a qual os objetos e seres matemáticos não são criados pelo homem, mas por ele descobertos (RUSS, 1994).

O idealismo, por sua vez, é a "concepção segundo a qual o Ser se identifica com a Ideia, tudo o que resulta do desenvolvimento desta última" (RUSS, 1994, p. 134-5).

Russ (1994), faz a distinção entre 'realismo' e 'idealismo', a partir de Hegel:

> Já que as coisas e suas determinações fazem parte do saber, pode-se, por um lado, representar que estas coisas estão, em si mesmas e para si mesmas, fora da consciência e que lhe são pura e simplesmente dadas como uma realidade estranha e acabada; mas, por outro lado, já que a consciência não é menos para o saber, pode-se representar também que a consciência se coloca ela mesma neste mundo que é seu e que, por seu comportamento e sua atividade, ela mesma produz ou modifica, de maneira total ou parcial, as determinações deste mundo. O primeiro modo de representação é chamado realismo, o segundo, idealismo (HEGEL, apud RUSS, 1994, p. 135).

Em nosso trabalho utilizamos essa mesma distinção.

O realismo está intimamente ligado ao platonismo, pois tem como base as ideias de Platão e, por isso, muitas vezes realismo e platonismo são tomados como sinônimos no âmbito da filosofia da Matemática (Ponte et al., 1997). Portanto, elucidamos a relação entre Matemática e realidade no realismo baseando-nos nas ideias do platonismo.

A escola filosófica desenvolvida por Platão, daí a origem do nome platonismo, entende que o mundo material é a síntese de dois princípios opostos: as ideias e a matéria (PADOVANI; CASTAGNOLA, 1958).

Para Platão a ideia é uma essência imutável, um ser eterno e a matéria é apenas uma reprodução das ideias. As entidades verdadeiramente reais, denominadas no platonismo de Formas ou Ideias, são “os modelos ideais dos objetos do mundo físico ou das situações ideais as quais o homem deveria esforçar-se por atingir” (MACHADO, 2005, p. 19). Essas Ideias existem independente da percepção sensível, possuem uma definição precisa e são permanentes. Para Platão, tudo o que vemos e percebemos nada mais é do que representações imperfeitas “de Formas que preexistem independente do homem, do tempo e do espaço” (ARAÚJO, 2007, p. 19).

No platonismo, para o homem entender e dominar o mundo à sua volta é necessário que ele distinga a aparência de objetos pertencentes ao mundo sensorial da realidade, que constitui o mundo das Ideias. Segundo Köner (apud ARAÚJO, 2002), para Platão, talvez essa fosse a mais importante tarefa intelectual humana.

Para elucidar a diferença entre o mundo sensorial e o mundo das Ideias, Machado (2005) cita como exemplo ilustrativo a mesa. Na mesa que usamos para alimentação ou trabalho é possível observar, por meio dos sentidos, sua cor, textura, tamanho, entre outras características, que definem essa mesa como única, diferente de todas as outras. No entanto, essa mesa é uma representação imperfeita da entidade verdadeiramente real, que é a ideia de mesa. Portanto, o mundo das Ideias não é equivalente ao mundo da percepção sensorial, e alcançá-lo seria somente por meio da razão.

Para o platonismo, a Matemática se refere a entidades que têm existência objetiva e que concedem aplicações ao mundo. Cabe ao matemático descobrir relações verdadeiras entre essas entidades e entre essas entidades e os objetos do mundo sensorial. Em outras palavras, a Matemática é verdadeira, não dependendo de qualquer verificação empírica, semelhante a definição usual de Matemática que é utilizada no dicionário. Essa independência da

Matemática nos permite conhecê-la apenas parcialmente e, para salientar esse fato, Negrelli (2008) o compara com o Mito da Caverna.

> Nesse mito sugere-nos que há uma realidade exterior "fora da caverna" mas que o acesso que o ser humano tem a ela é apenas através das sombras desse mundo que são projetadas nas paredes ao fundo da caverna. Isto é, o conhecimento que podemos ter desse mundo exterior só pode ser atingido por meio de representações, aqui constituídas pelas sombras (NEGRELLI, 2008, p. 64).

Já no idealismo, conforme a compreensão de Hegel, o homem é um ser racional e que possui consciência. A Ideia é o racional e designa o conceito objetivo ou real; alguma coisa somente é verdadeira enquanto é Ideia e a consciência é a relação, quer seja interior quer seja exterior, entre o homem e o objeto.

Assim, na corrente filosófica idealismo temos que o espírito humano cria, de maneira inconsciente, o mundo da matéria, das sensações, e é aí onde ele vive, se concretiza e é plenamente cognoscível a si mesmo (PADOVANI; CASTAGNOLA, 1958).

De acordo com Ponte et al. (1997), no idealismo "os objetctos matemáticos são livres invenções do espírito humano, que não existem autonomamente e que possuem, apenas, as propriedades que o pensamento puder determinar" (p. 3). Nesse sentido, compreendemos que os elementos matemáticos são resultantes de uma atividade do sujeito pensante. A Matemática é criada pelo homem, a partir de suas ideias e consciência, algo semelhante ao que propõem a origem da palavra.

Enquanto correntes filosóficas, o realismo e o idealismo aparecem em posições opostas referente à relação entre a Matemática e a realidade. No realismo, os elementos matemáticos constituem um mundo autônomo, existente independentemente do mundo sensível e do homem, que se limita a descobri-lo. No entanto, na corrente filosófica do idealismo, esses elementos provêm da interação do homem com o mundo sensível, e os elementos matemáticos são construções humanas.

2.4 Sobre a Relação entre Conhecimento (Matemático) e Realidade

O vocábulo conhecimento, na filosofia, é definido como o ato pelo qual o pensamento apreende, captura representativamente, da melhor maneira possível, um objeto qualquer. Para alcançar esse objetivo, são necessários alguns recursos, tais como intuição, mensuração, analogia, experimentação ou observação empírica (DICIONÁRIO ELETRÔNICO HOUAISS).

Para a escola filosófica realismo o conhecimento é a “apreensão intelectual das essências eternas e imutáveis de todas as coisas, para além de suas aparências sensíveis” (DICIONÁRIO ELETRÔNICO HOUAISS). Desse modo, compreendemos que o conhecimento está relacionado com a realidade, que é composta pelo mundo sensível e pelo mundo das Ideias, pois o conhecimento é a abstração da essência dos objetos do mundo sensível. No idealismo, conhecimento é a relação que existe entre o conceito, reunião de todas as determinações de um objeto, e a realidade (RUSS, 1994). Em ambas as correntes filosóficas observa-se que o conhecimento está relacionado à realidade.

De acordo com Bicudo (2000), a relação entre realidade e conhecimento é indissociável. Compreender a realidade é, simultaneamente, compreender como ocorre a elaboração do conhecimento. Em seu trabalho a autora cita quatro modos de compreender a realidade propostos por Lincoln e Guba (1985): *realidade objetiva*, *realidade percebida*, *realidade construída* e *realidade criada*.

Segundo Bicudo (2000), a *realidade objetiva* admite a existência de uma realidade independente do conhecimento que temos sobre ela. Estudos individuais da *realidade objetiva* são apenas aproximações dessa realidade, ou seja, essa realidade pode ser conhecida apenas parcialmente, à medida que ela é experimentada e/ou pesquisada. Nessa perspectiva de realidade, o conhecimento se desenvolve em pesquisas realizadas em conjunto na busca de abranger uma parte maior dessa realidade existente; pesquisas individuais nada mais são que aproximações deste mundo independente. Entretanto, de acordo com a autora, em algum momento essas aproximações convergirão para pontos comuns, revelando a necessidade de mais pesquisas.

No que diz respeito à *realidade percebida*, Bicudo (2000) relata que admite-se a existência dela, porém, ela não pode ser percebida como um todo. A *realidade percebida* é limitada, restrita à percepção de cada observador, por meio dos sentidos. Essa visão parcial da realidade é real, no entanto, é passível de diferentes interpretações e diferentes experiências, logo, não é possível o acesso completo a realidade, somente a partes dela. Nessa abordagem, o conhecimento sucede individualmente, pois cada pessoa tem uma percepção diferente do mundo que o cerca.

Essas duas concepções de realidade – *realidade objetiva* e *realidade percebida* – partem da admissão da existência prévia de uma realidade; a realidade está lá, em algum lugar inacessível. Por outro lado, as concepções de *realidade construída* ou de *realidade criada* negam a existência de uma realidade. A compreensão de que a realidade é construída afirma que cada pessoa concebe a sua própria realidade, ou seja, a realidade é resultado da elaboração mental de cada um e, como é possível um número infinito de construções, acredita-se que não existe uma única realidade. A realidade existe para cada pessoa, conforme o significado que ela dá às entidades em questão.

> A definição é sugerida pelo uso de algum termo referente comum, que, contudo, é compreendido diferentemente por diferentes indivíduos. Assim, por exemplo, definições sobre homossexualismo, escola etc. significam algo diferente de uma pessoa para outra, ainda que possa haver acordo a respeito de alguma definição formal que conduza a uma descrição parcial da entidade considerada (BICUDO, 2000, p. 26-7).

Na compreensão de *realidade construída*, segundo Bicudo (2000), o conhecimento é tido como uma construção individual, no entanto, o uso de termos comuns por diferentes pessoas pode conduzir à aceitação do conhecimento por esse grupo, embora cada um tenha a sua interpretação dos termos.

Ainda, de acordo com Bicudo (2000), a compreensão de *realidade criada* admite uma provável realidade que não tem sua existência garantida. A realidade virá a ser conforme a ação da pessoa, antes disso, ela permanece em estado potencial. De acordo com a exposição da autora, o indivíduo não influencia a realidade, mas a torna real por meio de suas ações, sendo o próprio indivíduo o criador da realidade. Nesse sentido, o conhecimento é criado e/ou modificado pelo indivíduo conforme a necessidade da situação. Essa ação pode não ter sido pensada previamente.

Observando a caracterização de cada um dos quatro modos de compreender a realidade, conforme exposto por Bicudo (2000) e a relação entre Matemática e realidade, apresentada na seção anterior, observamos que a compreensão de *realidade objetiva* e de *realidade percebida*, assim como o realismo, admite a existência de uma realidade independente do homem. Portanto, nessas duas compreensões de realidade, os elementos matemáticos são considerados como preexistentes. Na compreensão de *realidade objetiva* temos que o conhecimento matemático é adquirido parcialmente na medida em que se pesquisa a realidade, e essas pesquisas objetivam descobrir novas relações matemáticas para expandir o conhecimento que se tem dessa realidade preexistente e abranger uma parte maior do mundo das Ideias matemáticas. Na compreensão de *realidade percebida* são levadas em consideração as diferentes percepções e experiências que cada indivíduo tem. Com isso, o conhecimento matemático se dá de maneira individual, ao passo que cada pessoa tem a sua visão parcial.

Já nas compreensões de *realidade construída* e de *realidade criada* observa-se uma relação com o idealismo, que aponta o homem como o criador da realidade. Na compreensão de *realidade construída*, temos que cada pessoa constrói a sua própria realidade, existindo um número infinito de construções, logo, não existe uma única realidade. No entanto, a utilização de termos comuns leva a um acordo da definição de algum elemento. Isso se aplica aos conhecimentos matemáticos. Na compreensão de *realidade criada*, a existência da realidade depende das ações da pessoa; sendo assim, o conhecimento matemático é criado ou modificado conforme a necessidade.

Para Machado (2005), a elaboração do conhecimento e a realidade estão relacionadas da seguinte maneira: a elaboração do conhecimento ocorre de uma transição cíclica entre a realidade e a leitura dessa realidade e "a mediação nesse processo é realizada pelas abstrações, onde o pensamento se afasta da concreticidade como condição necessária para aproximar-se dela, para agir sobre ela" (p. 56-7). De acordo com o autor, da realidade emerge o empírico, que será pensado, refletido, abstraído, pressupondo assim uma volta à realidade em outro contexto. Esse retorno determinará não a realidade, mas sim uma leitura dela, uma interpretação baseada no referencial teórico utilizado na reflexão.

Acreditamos que um dos locais que possibilita esse movimento cíclico é a escola, e o referencial teórico utilizado para interpretar e ler a realidade é composto pelos conteúdos e conceitos trabalhados nas diferentes disciplinas escolares.

Com relação ao conhecimento matemático, é comum encontrarmos alguém que discursa de que o conhecimento matemático não possui utilidade e aplicação na realidade. Na tentativa de rever tal visão, alguns professores buscam atividades em que é possível observar aplicações da Matemática à realidade. Entretanto, algumas dessas atividades utilizadas no contexto escolar, segundo Alsina (2007), converte o que deveria ser uma motivação para uma Matemática ativa em um artifício para consagrar uma Matemática passiva.

Para Alsina (2007), existem sete tipos de "realidades" que são frequentemente utilizadas nas salas de aula de Matemática e promovem essa conversão da Matemática. Essas "realidades" estão apresentadas no quadro a seguir.

Quadro 1 – Realidades utilizadas nas aulas de Matemática (ALSINA, 2007).

Tipo de realidade	Característica
Realidade falsa e manipulada	São situações aparentemente reais (pois contam com palavras e dados de uso cotidiano) mas modificadas ou alteradas para poder dar lugar a exercícios matemáticos rotineiros. Trata-se de uma preparação ad-hoc justificada por motivos pedagógicos.
Realidade não usual	São situações de caráter inusitado ou pouco frequente que aparecem como se fossem cotidianas.
Realidade caducada	Tratam de situações passadas, em geral irrepetíveis, que algum dia foram atuais, mas com o passar do tempo desapareceram. Para os estudantes do século XXI são histórias de ficção.
Realidade remota	Estão relacionadas com culturas remotas, fatos exóticos, folclóricos e curiosos que se identificaram com a realidade local atual.
Realidade oculta	Trata de fatos não observáveis diretamente, não possibilita intuição nem experiência, produzem exercícios formais ou modelos cujos resultados não podem ser constatados (meios de transportes que não existem, balança que não se pode fabricar, inventos futurístico, etc.).
Realidade inadequada	São situações inadequadas a idade e circunstâncias dos estudantes ou incorretas, que podem confundi-los ou ofendê-los. Em geral, não são positivas nem interessantes.
Realidade inventada	Tratam de realidades fictícias, maquiadas como situações aparentemente possíveis. Ao menos incluem dados ou medidas equivocadas, guiando, perversamente, a crenças falsas e induzindo mais tarde a erros inadmissíveis

No contexto escolar, existe a questão de como proporcionar a elaboração do conhecimento matemático de maneira que este possa ter ou tenha algum uso para os alunos.

Considerando a proposta de Machado (2005) para a elaboração do conhecimento, acreditamos que uma alternativa pedagógica que proporciona o movimento cíclico entre a realidade e a interpretação dessa realidade, utilizando como referencial teórico os conceitos matemáticos, é a Modelagem Matemática. Portanto, no próximo capítulo nos dedicamos à Modelagem Matemática e a sua relação com a realidade.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM MATEMÁTICA E REALIDADE

Iniciamos esse capítulo apresentando o que é Modelagem Matemática e as etapas que, de maneira geral, estão associadas a uma atividade de Modelagem. Em seguida, oferecemos uma breve história de como a Modelagem Matemática começou a ser utilizada na Educação Matemática e citamos alguns eventos que têm auxiliado a firmar a Modelagem Matemática como uma linha de pesquisa na Educação Matemática. Também abordamos a questão sobre as diferentes definições de Modelagem nesse âmbito. Por fim, relatamos como a realidade pode ser compreendida em atividades de Modelagem Matemática, conforme a proposta de Negrelli (2008), e como adaptamos as categorias de análise utilizadas por Borges e Silva (2007) para avaliar o envolvimento da Modelagem Matemática e do modelo matemático com a realidade.

3.1 SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA

Para Caraça, segundo Fontanini (2007), um dos propósitos que impulsiona o desenvolvimento da atividade matemática é a busca da compreensão de fenômenos ou de respostas para problemas da realidade física, social e cultural em que o homem está inserido.

Nesta busca, o homem utiliza representações para os problemas ou fenômenos em questão. Estas representações são denominadas modelos e, as representações que se utilizam de símbolos e relações matemáticas são denominadas modelos matemáticos (BASSANEZI, 2002). A Modelagem Matemática consiste na obtenção, aplicação e avaliação desses modelos matemáticos.

Alguns exemplos de modelos matemáticos são tabelas, gráficos, figuras geométricas e relações funcionais. O modelo desenvolvido por Kepler para descrever o movimento dos planetas é também um exemplo de modelo matemático. Nesse exemplo, temos que os planetas se locomovem em um movimento elíptico em torno do Sol, que se situa em um dos focos da referida elipse.

Um exemplo de modelo matemático relativo à Biologia que diz respeito ao crescimento e interação entre espécies e estuda as relações entre presa e predador é o modelo Lotka-Voltera, cuja solução é determinada pela resolução de equações diferencias não lineares (BASSANEZI, 2002).

Na próxima seção apresentamos as etapas do desenvolvimento uma atividade de Modelagem Matemática e como alguns esquemas se propõem a explicá-los.

3.2 Sobre as Etapas e os Fluxogramas de Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática, de maneira geral, segue uma sequência de etapas. Mesmo que a ordem dessas etapas se altere de uma situação para outra, diversos fluxogramas procuram explicar, por meio de esquemas, as etapas que integram uma atividade de Modelagem.

Em quase todos os esquemas explicativos de Modelagem a primeira etapa é identificar o problema a ser estudado. Em seguida, vem o reconhecimento dos aspectos matemáticos do problema, a seleção de variáveis e a formulação de hipóteses. As etapas seguintes são a formulação do modelo matemático, a resolução do problema por meio do modelo e a interpretação da solução.

Na segunda etapa citada, reconhecimento dos aspectos matemáticos, seleção de variáveis e formulação de hipóteses, a situação-problema é simplificada, mas tal simplificação deve ser feita de maneira que permita a abordagem da situação por meio de estruturas matemáticas e assim conduzir à formulação de um modelo matemático mais adequado para o estudo da situação. Usualmente, o modelo matemático e seus resultados são interpretados à luz das informações obtidas na situação investigada. É nesse retorno que o modelo matemático será validado, caso os resultados obtidos sejam satisfatórios. Caso contrário, o modelo não é aceito e outro deve ser elaborado. Para isso, retorna-se à etapa inicial da Modelagem e o processo é reiterado, fazendo com que a Modelagem Matemática tenha um caráter cíclico.

Existem diferentes tipos de fluxogramas que procuram explicar e evidenciar estas etapas. A título de ilustração, apresentamos nas figuras 1, 2 e 3, três esquemas explicativos de

Modelagem Matemática. Na figura 1, o esquema explicativo de Modelagem proposto por Bienbengut e Hein, revela, de maneira simpificada, que a Modelagem Matemática é como um “trabalho conjunto” da Matemática e da situação real, resultando em um modelo. O esquema explicativo desenvolvido por Barry e Davies (figura 2) apresenta algumas etapas de modo sequencial, assim como o esquema explicativo proposto por Ferri (figura 3). A diferença entre eles consiste em que o esquema explicativo da figura 3 leva em consideração os aspectos cognitivos do modelador. Nesses dois esquemas explicativos (figuras 2 e 3) é possível observar o caráter cíclico de uma atividade de Modelagem.

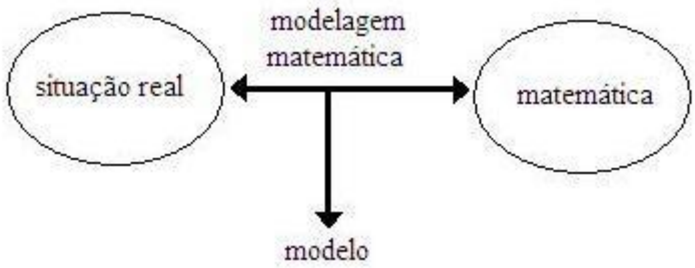


Figura 1 – Esquema de Modelagem Matemática proposto por Bienbengut e Hein (PATROCÍNIO, 2007).

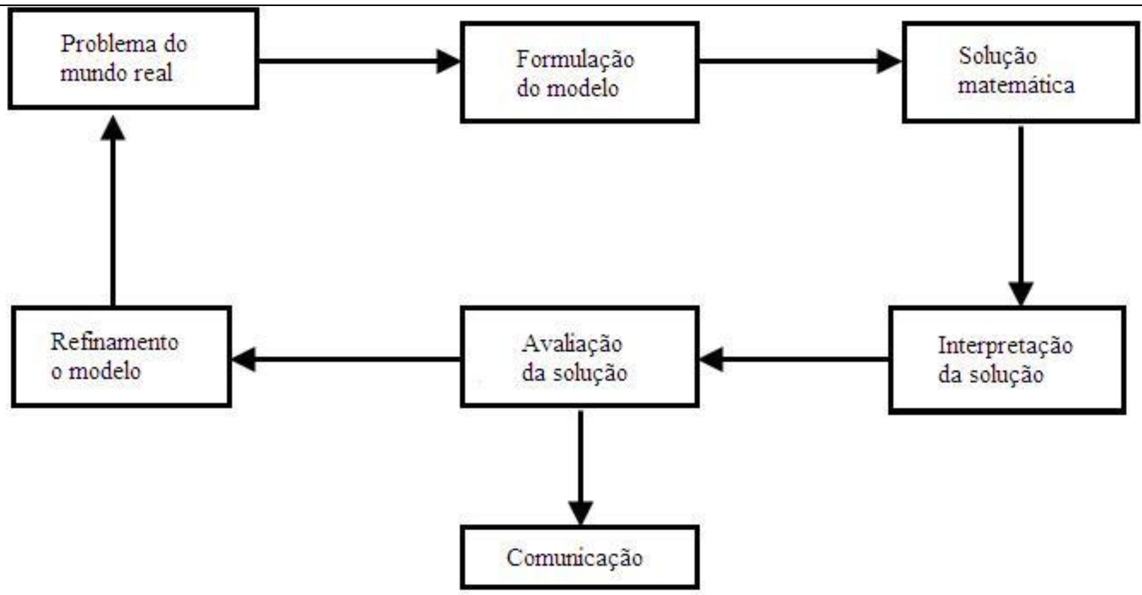
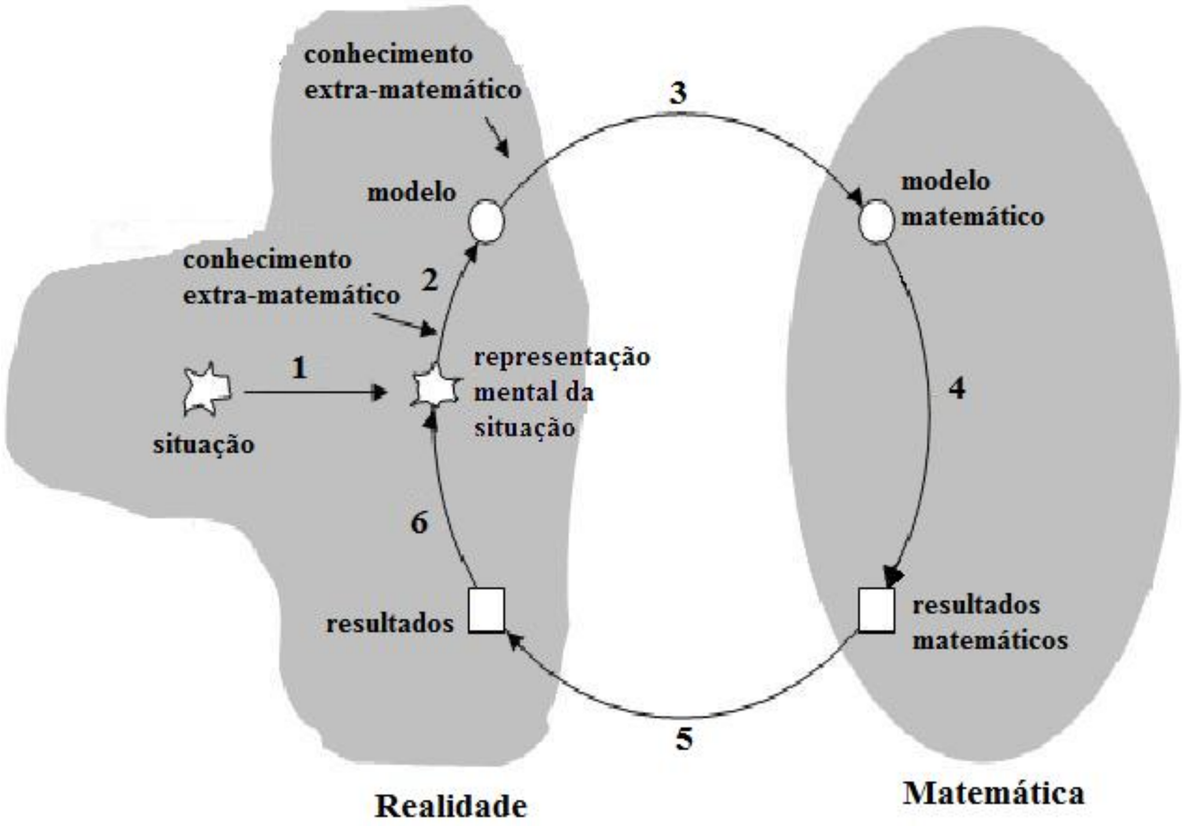


Figura 2 – Ciclo de Modelagem Matemática proposto por Berry e Davies (HAINES E CROUCH, 2007, tradução nossa).



1. Compreensão da situação
2. Simplificação/estruturação da situação
3. Matematização; o conhecimento extra-matemático se faz necessário fortemente nesse momento
4. Operações matemáticas, utilizando as competências matemáticas individuais
5. Interpretação
6. Validação

Figura 3 – Ciclo da Modelagem Matemática proposto por Ferri (FERRI, 2006, tradução nossa).

3.3 Sobre os Aspectos Históricos da Modelagem Matemática na Educação Matemática

Há indícios que o termo “Modelagem Matemática” tem sido utilizado desde o início do século XX na literatura de Engenharia e de Ciências Econômicas, com o sentido de descrever, formular, modelar e resolver um problema de alguma área do conhecimento (VIEIRA; CALDEIRA, 2008).

De acordo com Vieira e Caldeira (2008), o pesquisador Pollack encontrou evidências de que esse termo foi utilizado por Richard Stevens Burington em 1949, e passou a ser utilizado mundialmente a partir dos trabalhos desenvolvidos pelo School Mathematics Study Group (SMSG) no final da década de 1960.

Embora a Modelagem Matemática tenha suas origens na Matemática Aplicada, nas últimas décadas, diversos trabalhos têm apontado um alto potencial educativo da Modelagem Matemática, como, por exemplo, Almeida e Dias (2004), Araújo (2007), Bassanezi (2002), entre muitos outros.

De acordo com Bienbengut (2009), a percepção da Modelagem com tal potencialidade começou a ganhar força no início do século XX, quando surge o movimento utilitarista. Nesse movimento a Matemática era ensinada em virtude de sua utilidade para a ciência e para a sociedade. O movimento utilitarista visava apenas os aspectos técnicos envolvidos na aplicação, sendo seu objetivo utilizar as aplicações para ensinar conceitos e algoritmos. Segundo Vieira e Caldeira (2008), esse movimento "utilitarista" impulsionou a formação de grupos de pesquisa acerca da aplicação prática da Matemática na ciência e na sociedade.

Em 1968, com a realização do *Simpósio Lausane*, que teve como tema "Como ensinar Matemática de um modo que seja útil", percebe-se uma mudança no objetivo de se utilizar aplicações da Matemática no âmbito escolar: a preocupação principal passa a ser desenvolver no aluno a capacidade de aplicar a Matemática aprendida, modelando situações.

No Reino Unido, sob o tema "O ensino da matemática por meio da modelagem e aplicações", realizou-se, em 1983, o $1^{\underline{o}}$ ICTM (1^{st} Internacional Conference on the teaching of Modelling) e, desde então, essa conferencia vem ocorrendo a cada dois anos. Em 1987, na terceira Conferência, foi incluído o termo "and Aplications". A partir dessa data a Conferência passou a utilizar o nome pela qual é conhecida atualmente: Internacional Conference on the teaching of Modelling and Aplications (ICTMA).

No cenário nacional, segundo os registros que se tem, a Modelagem Matemática teve suas primeiras experiências no ensino na década de 1970, realizadas por um grupo de professores da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Segundo Fontanini (2007), os estudos teóricos e pedagógicos desenvolvidos por Ubiratam D'Ambrósio consolidaram a Modelagem Matemática no contexto educacional.

Nesse período foram publicadas, sob a orientação de Aristides Barreto, as duas primeiras dissertações que tratam do uso de modelos matemáticos no ensino, porém, esses trabalhos não utilizam o termo Modelagem Matemática para designar esta forma de trabalho (FONTANINI, 2007).

Em 1983, na cidade de Guarapuava (Paraná), na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, hoje chamada de Universidade Estadual do Centro-Oeste (Unicentro), teve início o primeiro curso de especialização para professores, no qual a Modelagem Matemática foi utilizada como alternativa para o ensino de Matemática.

Na busca da divulgação dos trabalhos de Modelagem Matemática desenvolvidos para e na sala de aula e visando o progresso da Modelagem como uma linha de pesquisa na Educação Matemática, surge a Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM).

A história da CNMEM teve início no ano de 1999, sob o tema “Modelagem no Ensino de Matemática”, na Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, campus Rio Claro. Desde então, o evento tem ocorrido de dois em dois anos. Em 2001 e 2003 a CNMEM aconteceu no estado de São Paulo nas cidades de Itatiba e Piracicaba, respectivamente. A IV CNMEM aconteceu em Feira de Santana, na Bahia, e o tema foi “Modelagem Matemática na Educação Matemática: seu papel na formação humana”. Em 2007, a cidade de Ouro Preto (MG) sediou a V CNMEM, que abordou o tema “A Modelagem Matemática nas diferentes práticas sociais”. Em 2009, a sexta edição da Conferência foi realizada na cidade de Londrina (PR), e o tema foi “Ações, pesquisas e o delinear de perspectivas”.

Os congressos citados têm proporcionado o desenvolvimento e estimulado o debate nacional e internacional sobre a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

Um dos temas em discussão nessa área é a existência de múltiplas definições sobre o que é Modelagem Matemática na Educação Matemática. Diferentes trabalhos apontam a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica, como uma estratégia metodológica, ou como um recurso didático. Ou seja, no âmbito da Educação Matemática a Modelagem Matemática não possui uma única definição.

Com o objetivo de compreender o que é Modelagem Matemática na Educação Matemática, Araújo (2007) fez um levantamento de experiências em que os autores usaram a denominação Modelagem Matemática em suas atividades. Nesse levantamento a autora constatou diversas definições acerca do que é Modelagem.

Essa diversidade de definições também é possível de ser detectada no âmbito acadêmico. Segundo Bassanezi (2002) “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (p. 16). Para D’Ambrosio (1986), “a modelagem é um processo muito rico de encarar situações reais, e culmina com a solução efetiva do problema real e não com uma simples resolução formal de um problema artificial” (p. 11).

Há outras definições de Modelagem Matemática que defendem uma abordagem pedagógica. Almeida e Ferruzzi (2009), por exemplo, entendem a Modelagem Matemática como “uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática” (p. 120). Biembengut e Hein (2003) propõem que a Modelagem Matemática “parte de uma situação/tema e sobre ela desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante um ferramental matemático e da pesquisa sobre o tema” (p. 28). Para Barbosa (2007), Modelagem Matemática é “um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade” (p. 161).

Identificamos nas definições citadas alguns pontos em comum. Um deles é que as definições buscam a resolução de um problema da realidade. Essa observação também foi constatada em diversos outros trabalhos, tais como Santos e Bisognin (2007), Araújo (2007), Broering (2009), entre outros. Na próxima seção abordamos como a realidade pode ser compreendida na Modelagem Matemática.

3.4 Sobre a Realidade na Modelagem Matemática

Na literatura da Educação Matemática encontramos alguns autores, tais como Anastácio (2007) e Araújo (2007), que buscaram compreender o que é Modelagem Matemática no contexto escolar. Essas duas autoras constataram que a compreensão que se tem de Modelagem depende diretamente das concepções individuais do que é Matemática e realidade. Esse fato também é salientado por Villa-Ochoa et al. (2009), que considera que existe um vínculo estreito entre as concepções que o professor tem sobre realidade e a sua prática docente relativa a Modelagem.

No estudo realizado por Araújo (2007), a autora constatou que outro fator importante, e que gera várias definições de Modelagem, são os diferentes objetivos de se resolver o ‘problema da realidade'. Segundo a autora, essas definições de Modelagem Matemática "acontecem de forma atrelada àquela [caracterização] da Matemática, ou seja, o 'problema da realidade' pode ser concebido como tal, levando-se em conta o que se entende por 'Matemática' e as possibilidades da influência exercida pelo contexto educacional" (p. 18).

Observamos que, de maneira geral, a Modelagem Matemática parte de um problema da realidade e busca soluções para esse problema por meio da Matemática. Esse fato também foi constatado em outros trabalhos, como Araújo (2007), Borges e Silva (2007), Santos e Bisognin (2007) e Negrelli (2008), entre outros. Nesse sentido, faz-se coerente o levantamento de algumas questões, tais como: A solução encontrada por meio da Modelagem Matemática está relacionada à realidade em que o problema está inserido? O modelo matemático obtido diz respeito a essa realidade?

Em sua tese de doutorado, Negrelli (2008) propõe que a realidade de que trata uma atividade de Modelagem Matemática é passível de ser dividida em duas: a *realidade inicial* e a *realidade intermediária*.

Para Negrelli (2008), a *realidade inicial* é composta por elementos de natureza econômica, social, física etc., que podem ser considerados como existentes independente do homem, conforme a ideologia de Platão. Para transpor um problema dessa realidade para a Matemática e então construir um modelo, a autora diz que há um momento intermediário,

> que consiste numa problematização que implica em uma outra realidade que denominaremos *realidade intermediária* [...]. É um recorte de uma situação daquela *realidade inicial*, propiciado pela elaboração de hipóteses e aproximações simplificadoras, a partir do qual se formulará o problema (NEGRELLI, 2008, p. 33).

De acordo com a proposta de Negrelli (2008), a *realidade intermediária* é determinada pela seleção dos elementos captados pelo sujeito, é uma realidade criada com base na relação estruturada dos elementos possíveis de serem captados, e o modelo matemático é uma maneira de "ver", compreender a *realidade inicial*, por meio do recorte desta, caracterizado pela autora como *realidade intermediária*.

Os "cortes" que formaram a *realidade intermediária* são situações limites. É a apreensão de parte da *realidade inicial* e, segundo a autora, "possui alguma correspondência com a realidade da qual se partiu, porém funciona segundo regras que nela podem ser válidas ou não" (p. 40-1).

Assim, a partir desta caracterização de realidade, Negrelli (2008) propõe uma releitura da atividade de Modelagem destacando três pontos importantes: "a consideração de uma *realidade inicial* dada, a construção de uma *realidade intermediária* e a elaboração de modelos para situações-problema identificadas nesta última" (p. 38, grifos nossos).

Negrelli (2008) salienta que o modelo matemático pode não atingir a *realidade inicial*, mas dado o caráter aproximativo do recorte, existe uma adequação empírica com os fenômenos estudados. Com isso, o modelo matemático encontrado diz respeito a essa *realidade intermediária*, e não a *realidade inicial*, pois ele considera as aproximações realizadas. Portanto, a solução do problema da *realidade intermediária* pode não ser a solução do problema da *realidade inicial*.

Para ilustrar sua posição, Negrelli (2008) lança o exemplo do cálculo do volume de uma maçã. De acordo com a autora, é possível aproximar o formato da maçã (*realidade inicial*) ao formato de uma esfera (*realidade intermediária*), que é uma simplificação do que de fato ocorre e, nesse caso, o modelo matemático é dado pela equação $4\pi r^3/3$, em que r representa o raio da maçã, e esse modelo corresponde à aproximação realizada, isto é, à *realidade intermediária*.

Ao compararmos a descrição de Negrelli (2008) de *realidade inicial* e de *realidade intermediária* às etapas de Modelagem Matemática descritas anteriormente, é possível observar que a *realidade inicial* está relacionada, de certa forma, com a primeira etapa, que é detectar um problema da realidade a ser estudado. De maneira mais evidente, observa-se a relação entre a *realidade intermediária* e a etapa que envolve a formulação de hipóteses e a seleção de variáveis, pois, entendemos que a *realidade intermediária* está condicionada a simplificação da situação-problema da *realidade inicial*.

Na busca de compreender a relação entre a Modelagem Matemática e a realidade, Borges e Silva (2007) observaram duas atividades de Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática e identificaram as formas de envolvimento dos modelos matemáticos com os problemas reais e se esses modelos podem desencadear ações sobre a realidade.

Esses autores caracterizam cinco categorias de análise. A primeira categoria diz respeito à característica da realidade contemplada no modelo, ou seja, se o modelo foi desenvolvido a partir de uma situação sem associação com a realidade, com associação a uma realidade artificial ou com a realidade; a segunda categoria identifica as limitações do modelo para descrever o problema, contribuindo assim para a discussão sobre a limitação da Modelagem em produzir informações confiáveis; a terceira categoria observa se o resultado encontrado possui utilidade, isto é, se o resultado encontrado permite intervenção na realidade; a quarta categoria trata do Âmbito da ação (escolar e/ou social) sobre a realidade proporcionada pelo modelo; finalmente, a quinta categoria descreve se o modelo matemático auxilia na formação de concepção, valores e conscientização sobre o problema em estudo.

Quadro 2 – Categorias de análise proposta por Borges e Silva (BORGES E SILVA, 2007, p. 333-4)

1. Características da realidade contemplada nos modelos	Não envolve realidade
	Envolve semirrealidades
	Envolve realidade
2. Limitações do modelo para descrever a realidade	Descreve muito bem
	Descreve parcialmente e não pode ser melhorado
	Descreve parcialmente e pode ser melhorado
	Descreve precariamente
3. Utilidade do resultado do problema investigado	Sem utilidade prática para o aluno
	Com utilidade prática além do âmbito escolar
	Com utilidade prática para o aluno/família
4. Âmbito da ação sobre a realidade	Sem ação
	Ação em Âmbito escolar/colegas
	Ação em âmbito familiar/comunitário
	Ação no sistema de produção
5. Formação de concepção sobre a realidade	Proporciona soluções para problemas pontuais
	Proporciona formação de valores, idéias e ideais
	Proporciona conscientização sobre problemas importantes

A partir dessa discussão, no próximo capítulo estruturamos um quadro teórico, fazendo uma adaptação das categorias de análise utilizadas por Borges e Silva (2007) utilizando a compreensão de Negrelli (2008). Também apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa e os procedimentos de análise.

CAPÍTULO 4

ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

4.1 A Problemática da Pesquisa e o Quadro Teórico

Segundo Machado (2005), o processo de elaboração do conhecimento envolve a passagem do concreto (realidade) para o abstrato (reflexão sobre a realidade baseada num referencial teórico) e a volta para o concreto, formando um ciclo. Para este autor, "a mediação nesse processo é realizada pelas abstrações, onde o pensamento se afasta da concreticidade como condição necessária para aproximar-se dela, para agir sobre ela" (p. 56-7). Nesse contexto podemos considerar que as atividades de Modelagem Matemática podem propiciar essa transição entre o concreto e o abstrato e podem ser entendidas como uma possibilidade para a elaboração do conhecimento matemático, conforme propõe Machado (2005).

Tomando a Modelagem Matemática nesse sentido, buscamos trabalhos e publicações que abordam a Modelagem no contexto escolar. Encontramos na literatura trabalhos que procuraram compreender o que se entende por Modelagem Matemática na Educação Matemática, abordando a concepção de pessoas do âmbito acadêmico (ANASTÁCIO, 2007; ARAÚJO, 2007; KLÜBER, 2008). De acordo com esses autores, as definições de Modelagem Matemática na Educação Matemática apresentam alguns pontos em comum. Um deles é que a Modelagem propicia relacionar a Matemática com a realidade, buscando a resolução de um problema da realidade.

Considerando que existem poucos trabalhos que buscam discutir os termos que comumente são relacionados ao desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, o objetivo dessa pesquisa é caracterizar como a realidade é tratada em trabalhos de Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática.

Para nos auxiliar nessa caracterização, definimos três questões norteadoras:

i. Qual corrente filosófica, realismo ou idealismo, parece estar refletida nas definições de Modelagem para relacionar Matemática e realidade?

ii. Levando em consideração a relação entre realidade e elaboração do conhecimento como tratada em Bicudo (2000), qual o tipo de realidade evidenciado em cada definição de Modelagem Matemática?

iii. Como o modelo matemático obtido em uma atividade de Modelagem Matemática trata da realidade?

Para estabelecer reflexões sobre a questão *i*, utilizamos o referencial teórico apresentado na seção 2.3, que descreve como as correntes filosóficas realismo e idealismo compreendem a relação entre Matemática e realidade.

Para responder à questão *ii*, apoiamo-nos em Bicudo (2000), usando a argumentação da autora de que a relação entre realidade e elaboração do conhecimento é indissociável e a caracterização de realidade como *percebida*, *objetiva*, *criada* ou *construída*, conforme apresentado na seção 2.4 deste texto.

No que diz respeito à questão *iii*, utilizamos os conceitos de *realidade inicial* e *realidade intermediária* propostos por Negrelli (2008) para adaptar as categorias de análise utilizadas por Borges e Silva (2007) apresentados no referencial teórico do nosso trabalho no capítulo 3.

No trabalho desenvolvido por Borges e Silva (2007), a primeira categoria aponta o tipo de realidade que está relacionada ao problema. As três subcategorias identificam se o problema foi obtido de uma situação sem menção à realidade, com menção a uma realidade criada (*semirrealidade*) ou com menção à realidade. Segundo Skovsmose (2000), a *semirrealidade* é um mundo sem sentido e um exercício com referência à *semirrealidade* apresenta apenas informações relevantes para resolver o problema, qualquer outra informação é dispensável. O autor ainda salienta que é importante reconhecer "que a maneira que a matemática se enquadra na *semirrealidade* não tem nada a ver com a relação entre matemática e realidade" (SKOVSMOSE, 2000 p. 9, grifos nossos). Não analisamos as atividades descritas quanto a primeira categoria proposta por Borges e Silva (2007), porque as atividades foram retiradas de trabalhos que apresentam uma definição de Modelagem Matemática que faz referência à realidade, e não a *semirrealidade*.

Segundo Negrelli (2008), o modelo matemático está relacionado às aproximações realizadas pelo modelador, ou seja, o modelo está relacionado à *realidade intermediária*, podendo ou não ser pertinente à *realidade inicial*. Com isso, em nosso trabalho, a categoria referente à segunda categoria utilizada por Borges e Silva (2007), propõe avaliar como o modelo descreve a *realidade inicial* – se descreve bem, ou se descreve parcialmente e pode ser melhorado. A Modelagem Matemática pode ser realizada por alunos de todos os níveis escolares, e a qualidade do modelo matemático está condicionada aos conhecimentos matemáticos do modelador. Portanto, nessa categoria analisamos se o modelo matemático obtido pode ser melhorado em função dos conhecimentos matemáticos esperados para os alunos que desenvolveram a modelagem.

As categorias 3 e 4 utilizadas por Borges e Silva (2007) serão mantidas e, em nosso trabalho, serão, respectivamente, as categorias 2 e 3. A última categoria indicará se o modelo matemático proporciona solução para o problema da *realidade inicial*, para a formação de valores, ideias e ideais e conscientização sobre o problema da *realidade inicial*.

Para identificar como o modelo matemático elaborado nas atividades de Modelagem descritas em nosso trabalho diz respeito à realidade, utilizamos as adaptações das categorias proposta por Borges e Silva (2007) e, de acordo com a concordância do desempenho do modelo em cada categoria, associamos “não” ou “sim”.

Deste modo, as categorias de análise utilizadas em nosso trabalho para detalhar as formas de envolvimento dos modelos matemáticos com a realidade (*inicial*) e com os problemas reais estão descritas no quadro a seguir.

Quadro 3 – Categorias de análise

1. Limitações do modelo para descrever a realidade inicial	Descreve muito bem
	Descreve parcialmente e pode ser melhorado
2. Utilidade do resultado do problema investigado	Com utilidade prática além do âmbito escolar
	Com utilidade prática para o aluno/família
3. Âmbito da ação sobre a realidade	Ação em âmbito escolar/colegas
	Ação em âmbito familiar/comunitário
	Ação no sistema de produção
4. Formação de concepção sobre a realidade inicial	Proporciona soluções para o problema da realidade inicial
	Proporciona formação de valores, ideias e ideais
	Proporciona conscientização sobre problema da realidade inicial

4.2 O Tipo de Pesquisa

Com o objetivo de responder às questões delimitadoras e atingir o objetivo da nossa pesquisa, optamos por um trabalho de cunho qualitativo interpretativo e caracterizado como uma análise documental e bibliográfica.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), existem diferentes tipos de pesquisa documental: a metanálise, que é “uma revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma avaliação crítica das mesmas e/ou produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos” (p. 103); o estudo do estado-da-arte, caracterizado como uma pesquisa com propensão histórica, buscando “identificar tendências e descrever o estado do conhecimento de uma área ou de um tema” (p. 103); e os estudos tipicamente históricos, pesquisas que se utilizam de fontes primárias, como textos e documentos originais.

Considerando as caracterizações apresentadas por Fiorentini e Lorenzato (2006) e as características do nosso trabalho, este pode ser caracterizado como metanálise, pois utilizaremos outras pesquisas e estudos para atingir o objetivo da nossa pesquisa.

4.3 Os Dados Utilizados

O nosso trabalho foca nas definições de Modelagem Matemática publicadas nos artigos da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM) e que foram destacadas por Broering (2009), que apresentam explicitamente o termo ‘realidade’, não incluindo termos relacionados como, por exemplo, ‘situação real’, ‘mundo real’, ‘fenômenos do cotidiano’.

Escolhemos analisar as definições contidas em trabalhos publicados na CNMEM por se tratar de um evento consolidado e de grande importância no cenário brasileiro de Modelagem.

Dentre as seis edições realizadas do evento, nessa pesquisa utilizamos os trabalhos da IV CNMEM e da V CNMEM por serem as edições mais atuais realizadas antes do início do nosso trabalho. A IV CNMEM ocorreu em 2005, na cidade de Feira de Santana (BA) e a V CNMEM, em 2007, na cidade de Ouro Preto (MG).

Para identificar as definições citadas nos trabalhos publicados nas Conferências que apresentam o termo ‘realidade’, utilizamos o levantamento realizado por Broering (2009). De acordo com esse autor, na IV CNMEM foram publicados 60 trabalhos e os anais da V CNMEM apresentam 57 publicações, entre comunicações científicas e relatos de experiência. Alguns desses trabalhos apresentam mais de uma definição e algumas definições são citadas em mais de um trabalho. Com isso, o autor constatou 50 diferentes definições de Modelagem Matemática presentes nos anais dessas duas edições da CNMEM.

Para investigar como a realidade é caracterizada em trabalhos de Modelagem no âmbito da Educação Matemática, buscamos apenas as definições que utilizam explicitamente o termo ‘realidade’. Das 50 definições de Modelagem Matemática apontadas por Broering (2009), encontramos 15 definições com a característica desejada.

Para responder à questão *iii*, selecionamos quatro atividades de Modelagem que foram descritas nos trabalhos publicados na IV CNMEM ou V CNMEM que citam pelo menos uma das definições de Modelagem Matemática que apresentam o termo ‘realidade’. Dado que as definições foram agrupadas de acordo com a caracterização de Modelagem Matemática, as atividades selecionadas contemplam cada desses grupos.

4.4 A Condução das Análises

A análise das definições e atividades de Modelagem selecionadas é realizada de acordo com o objetivo que desejamos atingir: caracterizar como a realidade é tratada em trabalhos de Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática, levando em consideração a corrente filosófica que parece refletir a relação entre Matemática e realidade apresentada nas definições de Modelagem, o tipo de realidade evidenciado em cada definição e como o modelo matemático obtido em uma atividade de Modelagem Matemática trata da realidade.

Nossa análise é qualitativa e realizada em três etapas. Na primeira etapa, enunciamos as 15 definições selecionadas e as agrupamos, seguindo o critério de que definições que apresentam compreensões semelhantes de Modelagem Matemática estão em um mesmo grupo.

Na segunda etapa, verificamos como o modelo matemático trata a realidade. Para isso, nas quatro atividades de Modelagem Matemática selecionadas evidenciamos a situação da realidade, a *realidade inicial* e a *realidade intermediária* propostas por Negrelli (2008) e a relação entre o modelo matemático e a realidade, conforme as nossas categorias de análise. É importante ressaltar que neste trabalho a *realidade inicial*, diferentemente do trabalho de Negrelli (2008), compreende as informações e dados selecionados previamente pelo professor ou pelos alunos que são levados para a sala de aula.

A terceira etapa consiste em identificar a corrente filosófica contida na definição que descreve a relação entre Matemática e realidade (realismo ou idealismo) e caracterizar a realidade como *percebida*, *objetiva*, *criada* ou *construída*, conforme exposição de Bicudo (2000). Finalmente fazemos também uma análise geral das definições, buscando identificar os pontos convergentes acerca da caracterização da 'realidade' em trabalhos de Modelagem Matemática em Educação Matemática.

CAPÍTULO 5

CARACTERIZAÇÃO DA REALIDADE: TRABALHOS PUBLICADOS NAS IV E V CNMEM'S COMO FOCO DE ANÁLISE

Nesse capítulo, agrupamos e analisamos as definições de Modelagem Matemática encontradas nos trabalhos publicados na IV e V CNMEM que expressam o termo 'realidade', conforme descrito no capítulo 4. Também apresentamos e analisamos atividades selecionadas a partir destes trabalhos à luz dos referenciais que discutimos.

5.1 Definições de Modelagem Matemática Encontradas na Literatura

A partir do levantamento feito por Broering (2009), analisamos 15 definições de Modelagem Matemática que utilizam o termo 'realidade'. No quadro a seguir transcrevemos cada uma dessas definições associando-as a um código, que permitirá nos referirmos a essas definições quando houver necessidade.

Quadro 4 – Definições de Modelagem Matemática com o termo ‘realidade’

código	definição
D01	“(...) consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolve-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”
D02	“Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”
D03	“(...) a Modelagem Matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir o seu papel de cidadão”
D04	“É um método da Matemática aplicada, usado em grande variedade de problemas econômicos, biológicos, geográficos, de engenharia e de outros (...) [que] foi apreendido e re-significado para o ensino-aprendizagem como uma das formas de utilizar a realidade nas aulas de Matemática”
D05	“Modelagem Matemática é um ambiente de aprendizagem onde os alunos são convidados a indagar e/ou investigar por meio da matemática situações oriundas de outras áreas da realidade”
D06	“Um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”
D07	“(...) uma ferramenta capaz e eficaz para a compreensão e interpretação da realidade”
D08	“A Modelagem é considerada uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não-matemático da realidade, ou de uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupo, de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica embasem o desenvolvimento do trabalho”
D09	“Modelagem Matemática é uma representação do chamado mundo-real através da linguagem matemática, levando a uma previsão de fatos. Dá-se através de muitos passos, sendo que exige que se faça um teste rigoroso a cada um desses passos. Através da MM[3] definem-se as estratégias de ação na realidade, sendo a própria modelagem uma alternativa de se buscar o conhecimento”

[3] Alguns autores utilizam a abreviação MM para se remeter a Modelagem Matemática.

Quadro 4 – Definições de Modelagem Matemática com o termo 'realidade' (continuação)

código	definição
D10	"(...) um processo dinâmico que envolve realidade-reflexão sobre a realidade, que resulta numa ação planejada, consciente."
D11	"(...) a Modelagem é um meio para integrar dois conjuntos disjuntos: matemática e realidade (...) é a arte de transformar situações do meio circundante em modelos matemáticos"
D12	"Um ambiente de ensino e de aprendizagem no qual o professor, através de problematizações de situações com referência na realidade, oportuniza ao aluno a construção de modelos matemáticos, sobre os quais ele faça inferências e/ou projeções, cabendo ao professor o acompanhamento das atividades, no sentido de conduzir o aluno na/para a construção do conhecimento matemático"
D13	"(...) criação de ambientes de aprendizagem em que os alunos são convidados a resolver problemas que obedeçam a uma metodologia de problematização da realidade, por meio da matemática"
D14	"Modelagem Matemática não é apenas um ajuste de uma tabela, mas sim uma análise matemática de toda uma situação, é a matemática inserida na realidade, com suas previsões e imprevistos, relacionando a ciência e fenômenos naturais, com a exatidão e a lógica da matemática, sem deixar de lado os conhecimentos populares, mas procurando, sempre que possível, formalizá-los"
D15	"A Modelagem Matemática é um recurso didático que oportuniza situações de aplicação de conteúdos da matemática escolar a elementos da realidade"

A definição de Modelagem Matemática mais utilizada, identificada neste trabalho como D01, é citada em 19 trabalhos publicados na IV CNMEM e na V CNMEM. Essa definição foi proposta por Bassanezi em 2002, em seu livro intitulado *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*.

As definições D02 e D11 parecem ser uma interpretação da definição D01, pois nessas definições encontramos os termos 'arte de transformar situações da realidade', embora na definição D02 o objetivo da Modelagem Matemática esteja mais próximo a visão da Matemática Aplicada, conforme discutido no capítulo 3 deste texto e a definição D11 evidencia a distinção entre o mundo real e o mundo matemático.

Acreditamos que na definição D02 a expressão 'situação da realidade' possui o mesmo significado de 'problema da realidade', expressão utilizada na definição D01, pois um problema pode não se configurar como "problema" para todas as pessoas. Para essa mesma expressão, a definição D11 faz menção a 'situações do meio circundante'; segundo o dicionário eletrônico Houaiss, circundante é o que está a nossa volta, nos envolve, nos rodeia. Portanto, é possível inferir que o autor usa 'meio circundante' como um sinônimo para realidade.

Com isso, entendemos que as definições D01, D02 e D11 caracterizam a Modelagem Matemática como um meio de descrever e/ou estudar problemas da realidade. Ainda que a definição D14 apresente termos diferentes dessas três definições, nela também se observa a mesma caracterização para a Modelagem, pois propõe a Modelagem como uma maneira de analisar uma situação da realidade por meio da Matemática.

Nas definições D03, D07, D09 e D10 é possível destacar alguns termos que fazem menção a compreensão e conhecimento da realidade e a ação sobre ela. Nessas definições, compreendemos que a Modelagem Matemática está caracterizada como um processo, ou ferramenta, capaz de auxiliar na compreensão e transformação da realidade.

As demais definições apontam que a Modelagem Matemática pode ser utilizada no contexto escolar. Nas definições D04, D08 e D15, a Modelagem Matemática é apresentada como um recurso didático que auxilia na aplicação da Matemática do contexto escolar à realidade. O que as diferencia é que a definição D04 relata a origem da Modelagem Matemática e propõe que esse método foi transferido para o meio escolar como um meio de utilizar a realidade nas aulas de Matemática e, na definição D08, há um destaque à Educação Matemática Crítica[4], cuja preocupação não é somente o ensino e aprendizagem da Matemática, mas também promover o desenvolvimento de habilidades matemáticas e a participação crítica dos alunos na sociedade.

A definição D05 foi a segunda definição mais utilizada, sendo citada em 17 trabalhos publicados na IV e na V CNMEM. Essa definição, assim como as definições D06, D12 e D13, utiliza a expressão 'ambiente de aprendizagem' que, de acordo com Skovsmose (2000) e Barbosa (2007), refere-se às condições proporcionadas aos alunos para desenvolverem suas ações. Outro termo comum às definições D06, D12 e D13 diz respeito à 'problematização'. Segundo o dicionário eletrônico Houaiss, o vocábulo problematizar pode ser compreendido

[4] Para maiores informações sobre a da Educação Matemática Crítica veja Aporism and Critical Mathematics Education, de Ole Skovsmose.

como o ato de por algo em dúvida, questionar, o que pode ser compreendido como um sinônimo para o termo ‘indagar’, que aparece na definição D05.

Assim, podemos inferir que algumas definições apresentam caracterizações semelhantes para Modelagem Matemática. Agrupamos estas definições de acordo com essas caracterizações, considerando termos e ideias que identificamos.

Quadro 5 – Os grupos

grupo	**caracterizações de Modelagem Matemática**	**definição**
G01	Um meio de descrever e/ou estudar problemas da realidade	D01
		D02
		D11
		D14
G02	Um processo (ou ferramenta) para compreender a realidade	D03
		D07
		D09
		D10
G03	Um recurso didático que oportuniza tratar de problemas da realidade nas aulas de Matemática	D04
		D08
		D15
G04	Um ambiente de aprendizagem que oportuniza aos alunos investigar a realidade por meio da Matemática	D05
		D06
		D12
		D13

5.2 O Modelo Matemático e a Realidade

Nessa subseção analisamos uma atividade de Modelagem Matemática para cada um dos grupos de definições com a finalidade de evidenciar a situação da realidade, a *realidade inicial* e a *realidade intermediária*, conforme a proposta de Negrelli (2008), e seus respectivos problemas e o modelo matemático.

As atividades de Modelagem Matemática analisadas são encontradas nos mesmos trabalhos que citam as definições selecionadas. No quadro 6 indicamos o título da atividade analisada em cada grupo.

Quadro 6 – Título das atividades analisadas

grupo	título da atividade
G01	Determinação da porcentagem de ocupação de um tanque fechado
G02	O caminho para a casa própria
G03	Tanque de combustível
G04	Modelagem do transporte escolar

5.2.1 Atividade referente ao grupo G01: Determinação da porcentagem de ocupação de um tanque fechado

A atividade de Modelagem Matemática analisada a seguir trata da determinação da porcentagem de ocupação de um tanque fechado e consta no trabalho de Fontanini e Almeida (2007). A atividade foi desenvolvida na disciplina de Cálculo Integral e Diferencial I com alunos da primeira série de um curso em Tecnologia em Manutenção Industrial Mecânica com o intuito de trabalhar o conceito matemático função de primeiro grau, sendo que os dados foram obtidos de uma empresa do ramo alimentício da região.

Muitas vezes a manufatura de um produto passa pela produção de subprodutos intermediários. A combinação de subprodutos diferentes e em proporções diferentes dá origem a diferentes produtos. Estes subprodutos ficam armazenados em tanques fechados. É necessário, no entanto, ter um controle após cada processo de quanto de produto está presente em cada tanque. Isto é feito através de sensores de pressão presentes em cada tanque.

Estes sensores lêem a pressão exercida pelo líquido no fundo do tanque (não é considerada a pressão exercida nas paredes laterais). Tal valor é então repassado para um computador, e este fornece a porcentagem de ocupação do tanque. Através destes valores conhecendo a capacidade total do tanque é possível estimar quanto de solução há lá dentro. Os dados abaixo foram colhidos em uma empresa que possui este sistema.

Tabela 1 – Extrato centrifugado Crenco II

Pressão (Mbar)	% de ocupação
5080,32	100
3810,24	75
2540,16	50
1270,08	25

Fonte: Fontanini e Almeida (2007)

Considerando estas informações propomos a seguinte situação problema: Qual a relação entre a pressão exercida pelo líquido no sensor e a porcentagem de ocupação do tanque?

Para o estudo do problema foram definidas as variáveis: pressão simbolizada pela letra p e ocupação simbolizada pela letra o. Em termos das variáveis escolhidas nosso problema consistia em: encontrar uma função que expressasse que fornecesse O em função de p.

Ao observarmos os dados os alunos notaram que quando o valor da porcentagem de ocupação duplica o valor da pressão também é duplicado e quando o valor da pressão quadruplica o valor da pressão também é quadruplicado. Eles assumiram então como hipótese que os valores de p e de O são proporcionais. O que após alguma discussão foi expresso por: $O = kp$. Para obter o valor de k os alunos escolheram dividir os valores de O presentes na primeira coluna da tabela 1 pelos valores de p presente na segunda coluna da mesma tabela obtendo os valores expressos na tabela 2.

Tabela 2 – Relação entre a ocupação e a pressão

P	O	O/P
5080,32	100	0,019684
3810,24	75	0,019684
2540,16	50	0,019684
1270,08	25	0,019684

Dessa forma eles concluíram que: $O = 0{,}02p$

Os alunos concluíram então que a relação entre a pressão e a ocupação no problema estudado poderia ser dada por uma função do primeiro grau e construíram seu gráfico, apresentado na figura

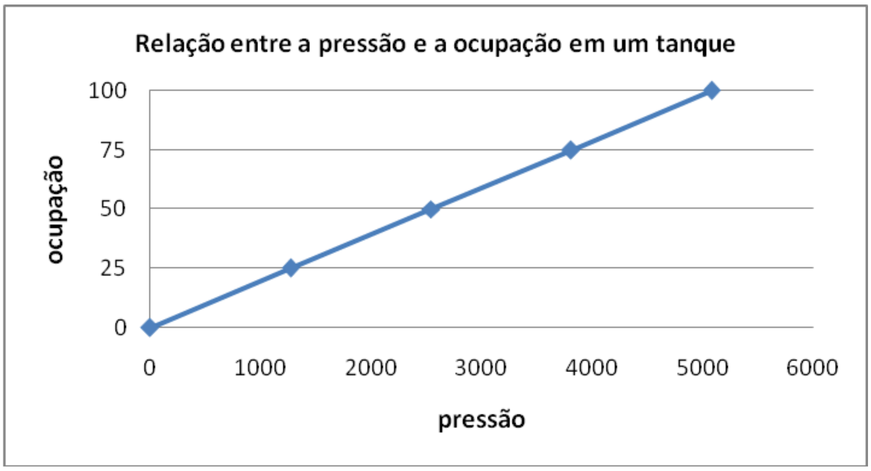


Figura 4 – Gráfico da ocupação em função da pressão

Fonte: Fontanini e Almeida (2007)

5.2.1.1 Análise da atividade

Na atividade *determinação da porcentagem de ocupação de um tanque fechado*, na qual a situação da realidade é conhecer a quantidade de produto armazenado em um tanque fechado, identificamos aspectos que nos fazem inferir que a Modelagem Matemática é um meio de descrever e/ou estudar problemas da realidade, conforme sugere o grupo G01 do quadro 5.

De acordo com Negrelli (2008), a *realidade inicial* é a realidade dada e, no caso da atividade descrita, a *realidade inicial* é a relação que existe entre a quantidade de produto armazenado no tanque (ocupação) e a pressão que esse produto exerce sobre o fundo do tanque. O problema a ser resolvido na *realidade inicial* é determinar a quantidade de subproduto que está em um tanque fechado, identificada aqui pela porcentagem de ocupação do tanque.

Para determinar a quantidade de subproduto contida no tanque é necessário analisar a *realidade inicial* e selecionar elementos, observar regularidades, formular hipóteses e aproximações simplificadoras que formularão o problema matemático. Segundo Negrelli (2008), a *realidade intermediária* será criada de acordo com essas hipóteses e aproximações.

A *realidade intermediária* nessa atividade corresponde aos dados apresentados na tabela 1, que são baseados na medição realizada pelo sensor e a aproximação de cálculos realizada pelo computador. A partir desses dados foram definidas as variáveis, pressão (p) e ocupação (O), e o problema matemático: encontrar um modelo matemático que permita determinar a porcentagem de ocupação do subproduto no interior do tanque em função da pressão exercida no fundo deste tanque.

Ao analisar os dados da tabela 1, foi observado que a pressão exercida no fundo do tanque e a ocupação do subproduto são proporcionais. Ao realizar o cálculo da razão entre a pressão e a ocupação do tanque, apresentados na tabela 2, os valores foram arredondados para o número decimal 0,02.

No quadro 7 apresentamos, resumidamente, a situação da realidade, a *realidade inicial*, a *realidade intermediária* e modelo matemático da atividade de Modelagem referente ao grupo G01. Em seguida, no quadro 8, destacamos as duas realidades (*inicial* e *intermediária*), relacionando-as com o respectivo problema a ser resolvido.

Quadro 7 – Identificação da situação da realidade, *realidade inicial*, *realidade intermediária* e o modelo matemático (grupo G01)

Situação da realidade	Conhecer a quantidade de produto armazenado em um tanque fechado
Realidade inicial	a relação que existe entre a quantidade de produto armazenado no tanque (ocupação) e a pressão que esse produto exerce sobre o fundo do tanque
Realidade intermediária	Os dados apresentados na tabela 1, obtidos por meio do sensor e do computador Associação de termos a variáveis (p, O)
Modelo matemático	$O(p) = 0{,}02\ p$ e seu respectivo gráfico (Figura 4)

Quadro 8 – Problemas da *realidade inicial* e da *realidade intermediária* (grupo G01)

Realidade inicial	Determinar a quantidade de subproduto em um tanque fechado
Realidade intermediária	Encontrar um modelo matemático que determine a porcentagem de ocupação do líquido no interior do tanque em função da pressão exercida por este líquido no fundo do tanque

Nessa atividade de Modelagem Matemática a situação da realidade é próxima à vivência dos alunos que a realizaram, pois estes são alunos de um curso de Manutenção Industrial Mecânica e trabalharão (ou já trabalham) em um ambiente como o apresentado e com problemas semelhantes.

Essa atividade possibilita a abordagem do conceito matemático função do primeiro grau e, conteúdos como, por exemplo, proporcionalidade, porcentagem, regra de três e equações do primeiro grau. Estes outros conteúdos podem ser abordados ao desenvolver essa mesma atividade no Ensino Fundamental, porém, é importante ressaltar que, neste caso, a situação da realidade não será próxima da vivência destes alunos.

Levando em consideração o modelo matemático encontrado – $O = 0{,}02p$ e seu respectivo gráfico –, o problema que efetivamente foi resolvido não corresponde à *realidade inicial*, mas à *realidade intermediária*. Segundo Negrelli (2008), para um modelo ser aceito como solução de um problema da *realidade inicial* é necessário uma adequação empírica.

Nessa atividade, a adequação empírica foi a comparação entre os dados obtidos pelos cálculos do sensor e do computador (valores de p e O) e os dados fornecidos pela equação $O = 0{,}02p$.

Como os erros porcentuais relativo foram considerados aceitáveis, o modelo encontrado para a *realidade intermediária* descreve de maneira satisfatória a *realidade inicial*, e condiz com os dados reais. Assim, concluímos que o modelo matemático descreve bem a realidade e permite determinar a quantidade de subproduto em um tanque fechado, ou seja, responde ao problema da *realidade inicial*.

Embora o desenvolvimento dessa atividade não modifique a maneira como ocorre a produção e nem auxilie na formação de valores nem na conscientização sobre o problema da *realidade inicial*, o modelo matemático, por ter sido considerado satisfatório, permite ação no âmbito comunitário, tendo em vista que esse modelo poderá ser adotado em fábricas que possuem o tipo de tanque citado na atividade.

No quadro 9 apresentamos esquematicamente a análise de como o modelo matemático trata a *realidade inicial*.

Quadro 9 – Análise de como o modelo matemático trata a *realidade inicial* (grupo G01)

1. Limitações do modelo para descrever a *realidade inicial*	Descreve muito bem	sim
	Descreve parcialmente e pode ser melhorado	não
2. Utilidade do resultado do problema investigado	Com utilidade prática além do âmbito escolar	sim
	Com utilidade prática para o aluno/família	sim
3. Âmbito da ação sobre a realidade	Ação em âmbito escolar/colegas	não
	Ação em âmbito familiar/comunitário	sim
	Ação no sistema de produção	não
4. Formação de concepção sobre a *realidade inicial*	Proporciona soluções para o problema da *realidade inicial*	sim
	Proporciona formação de valores, ideias e ideais	não
	Proporciona conscientização sobre o problema	não

5.2.2 Atividade referente ao grupo G02: O caminho para a casa própria

Descrevemos a seguir a atividade de Modelagem Matemática que é apresentada por Cirilo e Almeida (2007). Essa atividade foi desenvolvida por um grupo de alunos do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática, e tem como tema a aquisição da casa própria. De acordo com as autoras, o interesse pelo tema surgiu a partir da leitura de uma reportagem publicada em março de 2007 na revista Veja, uma revista de circulação nacional.

O maior sonho de consumo da maioria das pessoas é a aquisição da casa própria. A procura pelo financiamento da casa própria junto aos bancos teve grande aumento visto que há queda nas taxas de juros, aumento no volume de recursos e a facilidade de obtenção de crédito para a compra da casa própria. Segundo a reportagem da revista Veja

> a compra de um imóvel voltou a fazer parte das possibilidades da vida real. Desde os anos de 1970 não havia tanto dinheiro disponível para o financiamento imobiliário. No ano passado, foram 20,3 bilhões de reais, um crescimento de 48% em relação a 2005. Quando se olham os financiamentos cm recursos da caderneta de poupança, que se destinam à classe média, o salto é ainda maior. Os bancos privados destinaram 6,2 bilhões de reais e a Caixa Econômica Federal, outros 3,3 bilhões de reais. O resultado foi que o número de imóveis financiados para a classe média ultrapassou pela primeira vez desde 1988 a marca dos 100 000 (2007, p.66).

A figura 5 a seguir também é apresentada na reportagem da revista.

O CAMINHO PARA A CASA PRÓPRIA

PRAZO

Os juros dos financiamentos caíram. Os exemplos ao lado usam como base um financiamento de **250 000 reais**, com taxas de juro de **TR + 12%** e amortização pela Tabela Price. É o esquema mais usado no mercado

Fontes: Miguel José Ribeiro de Oliveira, vice-presidente da Associação Nacional dos Executivos de Finanças, Administração e Contabilidade (Anefac), e Paulo Veiga, diretor da Mercatto Gestão de Recursos

VALOR DO FINANCIAMENTO 250 000 reais			
PRAZO	20 anos (240 meses)	15 anos (180 meses)	10 anos (120 meses)
VALOR DAS PARCELAS	2 964,63 reais	3 196,08 reais	3 762,25 reais
TOTAL	711 511,20 reais	575 294,40 reais	451 470,00 reais

Figura 5 – dados apresentados na reportagem

A partir destes dados definimos como tema da atividade de modelagem o financiamento da casa própria.

Para a tabela acima foram considerados como base um financiamento de R$ 250.000,00 com taxas de juro de TR mais 12% e amortização pela tabela PRICE. Para o desenvolvimento da atividade de modelagem com o grupo de alunos apresentamos outra tabela com valores calculados no sistema SAC (Sistema de amortizações Constantes), com o valor do financiamento de R$250.000,00 para 240 prestações. Essa modificação se deve ao fato de que alguns participantes são usuários do sistema de financiamento da Caixa Econômica Federal e este sistema também é usado para compor o cálculo do valor das parcelas de um financiamento qualquer.

Fonte: Cirilo e Almeida (2007)

Tabela 3 – Informações sobre o financiamento

Valor da parcela mensal				
Mês	**Prestação**	**Juros**	**Amortização**	**Saldo devedor**
0				R$ 250.000,00
1	R$ 3.659,17	R$ 2.617,50	R$ 1.041,67	R$ 248.958,33
2	R$ 3.648,26	R$ 2.606,59	R$ 1.041,67	R$ 247.916,67
3	R$ 3.637,35	R$ 2.595,69	R$ 1.041,67	R$ 246.875,00
4	R$ 3.626,45	R$ 2.584,78	R$ 1.041,67	R$ 245.833,33
5	R$ 3.615,54	R$ 2.573,88	R$ 1.041,67	R$ 244.791,67
6	R$ 3.604,64	R$ 2.562,97	R$ 1.041,67	R$ 243.750,00
7	R$ 3.593,73	R$ 2.552,06	R$ 1.041,67	R$ 242.708,33
8	R$ 3.582,82	R$ 2.541,16	R$ 1.041,67	R$ 241.666,67
9	R$ 3.571,92	R$ 2.530,25	R$ 1.041,67	R$ 240.625,00
10	R$ 3.561,01	R$ 2.519,34	R$ 1.041,67	R$ 239.583,33

Analisando os dados da tabela definimos algumas questões: como foram calculados os valores das prestações? Qual será o valor da n-ésima prestação? Como obter o valor total do financiamento? Assim tomamos estas questões como objetivos do desenvolvimento da atividade de modelagem.

Primeiramente faremos as definições dos conceitos envolvidos. O número de prestações será **n**. Amortização (**A**) é o reembolso de uma fração do capital para um dado período. Juro ($\mathbf{J_n}$) é a remuneração paga sobre um determinado capital para um dado período. Prestação ($\mathbf{P_n}$) é o reembolso, para um dado período, de uma dívida paga através de parcelas tal que no final do prazo é liquidada, a mesma é dada pela soma da amortização com os juros. Saldo Devedor **(**$\mathbf{S_n}$**)** é o valor do financiamento menos a amortização até aquele período.

Nesta atividade consideramos o valor do financiamento fixado em R$250.000,00. No SAC temos que as amortizações são constantes e obtidas dividindo o valor do financiamento pelo prazo total, que neste problema é de 240 meses. Então temos que:

$$A = \frac{250.000}{240} = 1041{,}67$$

A taxa de juros foi obtida fazendo a média da TR nos últimos meses mais a taxa de 12% ao ano. Como as prestações são mensais, fizemos a conversão para uma taxa mensal obtendo o

Fonte: Cirilo e Almeida (2007)

valor de 1,047% ao mês. O valor do juro mensal é obtido fazendo o produto do saldo devedor anterior pela taxa de juros. Assim temos a expressão:

$J_n = S_{n-1} \cdot 0{,}01047$ (1)

De acordo com a tabela podemos escrever:

$P_n = A + J_n$ (2)

O Saldo Devedor é o Saldo Devedor anterior menos a amortização:

$S_n = S_{n-1} - A$ (3)

Considerando todas estas hipóteses, partimos para a obtenção do modelo. Como as prestações variam de acordo com o período buscamos uma função P(n) que nos dê o valor da n-ésima prestação sem que seja preciso gerar uma planilha para obter este valor. Substituindo (1) e (3) em (2) temos que:

Para $n = 1$ $P(1) = 3659{,}17 = 2617{,}50 + 1041{,}67 = J_1 + A = S_0 \cdot 0{,}01047 + A$

Para $n = 2$ $P(2) = 3648{,}26 = 2606{,}59 + 1041{,}67 = J_2 + A = S_1 \cdot 0{,}01047 + A =$

$= (S_0 - A) \cdot 0{,}01047 + A = S_0 \cdot 0{,}01047 - A \cdot 0{,}01047 + A$

Para $n = 3$ $P(3) = 3637{,}35 = 2595{,}69 + 1041{,}67 = J_3 + A = S_2 \cdot 0{,}01047 + A =$

$= (S_1 - A) \cdot 0{,}01047 + A = (S_0 - A - A) \cdot 0{,}01047 + A = S_0 \cdot 0{,}01047 - 2A \cdot 0{,}01047 + A$

...

Para $n = t$ $P(t) = S_0 \cdot 0{,}01047 - (t - 1) \cdot A \cdot 0{,}01047 + A$

Para calcular a prestação quando $t = 7$ fazemos:

$P(7) = 250.000 \cdot 0{,}01047 - (7 - 1) \cdot 1041{,}67 \cdot 0{,}01047 + 1041{,}67$

Para obter um modelo da prestação geral do sistema SAC pra uma taxa qualquer **(i)** temos:

$P(t) = S_0 \cdot i - (t - 1) \cdot A \cdot i + A$

Fonte: Cirilo e Almeida (2007)

Com a função da prestação em função do tempo partimos para o desenvolvimento da questão: como obter o valor total do financiamento? Sabemos que o valor total do financiamento é a somatória de todas as prestações. Novamente queremos uma ferramenta matemática que nos possibilite o cálculo sem que seja necessária a utilização de uma planilha. Em nossa atividade temos que a função que define o valor da prestação no decorrer do tempo, cujo gráfico é apresentado na Figura 6, é dada por:

$$P(t) = 3670{,}076285 - 10{,}9062849t$$

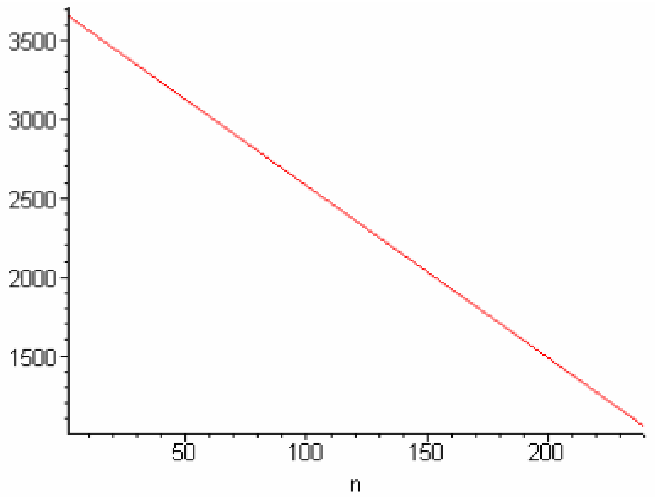


Figura 6 – Gráfico de P(t) = 3670,076285 – 10,9062849t

Considerando que $P(t)$ é uma função contínua, a soma de todas as prestações é dada pela área delimitada pelo gráfico de $P(t)$ e pelo eixo dos *x*. É neste ponto que abordamos os conceitos de integral.

Definição 1: Seja $f(x)$ uma função contínua e não negativa definida no intervalo [a, b].

A integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x)$, o eixo *x* e as verticais que passam por *a* e *b*.

A função da prestação em função do tempo é dada por:

$P(t) = 3670{,}076285 - 10{,}9062849t$

Fonte: Cirilo e Almeida (2007)

na qual a variável t está relacionada ao tempo e y à t-ésima prestação.

Tendo em mãos a função, o próximo passo é calcular a área abaixo da curva e, assim, obter a soma das prestações.

Pela definição 1 temos que a área abaixo de $P(t)$ é:

$$\int_{1}^{240} 3670{,}076285 - 10{,}9062849\,t\ dt = 3670{,}076285\,t - \left.\frac{10{,}9062849\,t^2}{2}\right]_{t=1}^{240} = 563052{,}68$$

Assim o valor total pago pelo financiamento será de R$ 563.052,68.

Fonte: Cirilo e Almeida (2007)

5.2.2.1 Análise da atividade

Nesta atividade, considerando a caracterização do quadro 5, a Modelagem Matemática constitui um processo (ou ferramenta) para compreender a realidade. O tema abordado nesta atividade é o financiamento de um imóvel. Identificamos a aquisição da casa própria como a situação da realidade.

A *realidade inicial* nessa atividade é a reportagem da revista e tabelas apresentadas pela professora que indicavam outros tipos de financiamento, diferentes do da reportagem. Diante disso, os alunos levantaram muitos questionamentos e decidiram por determinar o valor da prestação e o valor final do financiamento, o que definimos como sendo os problemas relativos à *realidade inicial*.

Observando regularidades, identificando relações entre os elementos selecionados e elaborando hipóteses, de acordo com Negrelli (2008), é construída a *realidade intermediária* que, nessa atividade, é composta por variáveis, pelo valor a ser financiado, pelo número de parcelas, pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), o valor da TR, o juro anual e a conversão para mensal, sendo esses três últimos obtidos por meio de cálculos e aproximações. Com essas hipóteses e aproximações, foram definidas três questões que são os problemas matemáticos referente à *realidade intermediária*: 1) Como foram calculados os valores das prestações? 2) Qual será o valor da n-ésima prestação? e 3) Como obter os valores das prestações?

No quadro 10 apresentamos a situação da realidade, a *realidade inicial*, a *realidade intermediária* e o modelo matemático da atividade do grupo G02 e, no quadro 11, apontamos o problema da atividade a ser resolvido na *realidade inicial* e na *realidade intermediária*.

Quadro 10 – Identificação da situação da realidade, *realidade inicial*, *realidade intermediária* e o modelo matemático (grupo G02)

Situação da realidade	O interesse dos alunos em conhecer diferentes tipos de financiamento de imóvel (casa própria) levou-os a estudar a reportagem da revista com informações quantitativas e qualitativas. Além dessas informações, os alunos tiveram contato com as informações de outros tipos de financiamento.
Realidade inicial	Reportagem da revista Dados da reportagem
Realidade intermediária	Associação de termos a variáveis (n, A, J_n, P_n, S_n) O valor de R$ 250.000,00 a ser financiado O número de prestações do financiamento (240 prestações) O Sistema de Amortização Constante (SAC) O cálculo da média da TR dos últimos 12 meses Conversão do juro anual para mensal O tipo de financiamento considerado
Modelo matemático	P(t) = 3670,076285 – 10,9062849t e seu respectivo gráfico (Figura 6)

Quadro 11 – Problemas da *realidade inicial* e da *realidade intermediária* (grupo G02)

Realidade inicial	Determinar o valor da prestação Determinar o valor final do financiamento
Realidade intermediária	Como foram calculados os valores das prestações? Qual será o valor da n-ésima prestação? Como obter os valores das prestações?

No que diz respeito a situação da realidade que deu origem a essa atividade, podemos afirmar que ela é próxima de pelo menos alguns alunos que a desenvolveram pois, segundo a autora do trabalho que descreveu a atividade, alguns estudantes possuem imóveis financiados. Levando em consideração o texto extraído da revista, a aquisição da casa própria faz parte da vida de muitos brasileiros, portanto, entendemos que essa atividade pode ser próxima de grande parte dos estudantes, pois eles, ou seus pais, podem fazer o financiamento de um imóvel.

Com diferentes tipos de financiamento em mãos, os alunos optaram por desenvolver a atividade de Modelagem utilizando o Sistema de Amortização Constante (SAC). Com base no trabalho de Negrelli (2008), esse foi o elemento captado, selecionado pelos alunos, e o modelo matemático leva em consideração esse recorte da *realidade inicial* e suas hipóteses. No caso dessa atividade, ao escolher o sistema SAC, os alunos determinaram como hipóteses as equações 1, 2 e 3.

O modelo matemático foi obtido substituindo as variáveis de um modelo matemático geral para o sistema SAC pelo valor da amortização (A), que leva em consideração os R$250.000,00 a ser financiado e o número de prestações do financiamento, e a taxa de juros, que foi considerada em 12% ao ano. Como esse modelo matemático geral foi validado ao considerar que os valores determinados por meio dele eram próximo dos valores reais do financiamento, o modelo matemático final também é considerado válido. Assim, podemos concluir que o modelo é satisfatório e descreve bem a realidade.

Utilizando o modelo matemático é possível determinar o valor de cada prestação e o valor final do financiamento pode ser calculado pelo somatório de todas as prestações. Logo, o modelo matemático soluciona os problemas da *realidade inicial*.

O resultado encontrado possui utilidade prática além do âmbito escolar e para o aluno e sua família, pois auxilia na escolha do tipo de financiamento mais adequado as suas condições financeiras e permite que aconteça uma organização financeira familiar. Assim, o resultado encontrado permite ação no âmbito familiar, proporcionando a formação de ideias e conscientizando sobre a aquisição de um imóvel próprio.

A seguir, no quadro 12, apresentamos como o modelo matemático trata a *realidade inicial*, atribuindo os pesos não e sim, de acordo com a concordância do desempenho do modelo em cada categoria.

Quadro 12 – Análise de como o modelo matemático trata a *realidade inicial* (grupo G02)

1. Limitações do modelo para descrever a *realidade inicial*	Descreve muito bem	sim
	Descreve parcialmente e pode ser melhorado	não
2. Utilidade do resultado do problema investigado	Com utilidade prática além do âmbito escolar	sim
	Com utilidade prática para o aluno/família	sim
3. Âmbito da ação sobre a realidade	Ação em âmbito escolar/colegas	não
	Ação em âmbito familiar/comunitário	sim
	Ação no sistema de produção	não
4. Formação de concepção sobre a *realidade inicial*	Proporciona soluções para o problema da *realidade inicial*	sim
	Proporciona formação de valores, ideias e ideais	sim
	Proporciona conscientização sobre o problema	sim

5.2.3 Atividade referente ao grupo G03: Volume de um tanque de combustível

A atividade *Volume de um tanque de combustível* foi apresentada no trabalho de Borges e Silva (2007). Esse tema foi escolhido por um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade do interior Rio Grande do Sul (RS) e foi desenvolvida nas aulas da disciplina de Modelagem Matemática.

Nas propriedades rurais de médio porte do noroeste do RS, o combustível usado em máquinas agrícolas é comprado em grandes quantidades (em torno de 5.000 litros) e armazenado em tanques cilíndricos colocados na posição horizontal, para ser usado de acordo com a necessidade de consumo. Os tanques não dispõem de um sistema automático de controle de volume. O método mais utilizado pelos agricultores é o “Método da Régua”. Uma régua (ou uma vareta) é introduzida em um orifício situado na parte superior do tanque que está em posição horizontal, até atingir o fundo do tanque. A parte umedecida da régua indica a altura (h) de combustível e o agricultor associa a altura da parte umedecida da régua com a quantidade de combustível no tanque. O problema proposto é determinar o volume de combustível remanescente a partir da informação da altura h e das dimensões internas do tanque (raio R e comprimento L). [...]

Fonte: Borges e Silva (2007)

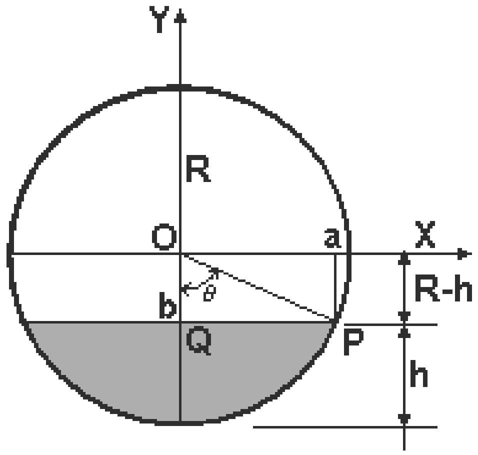


Figura 7 – Seção transversal do tanque cilíndrico de combustível representada em um plano cartesiano

A Figura 7 apresenta a seção transversal do tanque cilíndrico, com certa quantidade de combustível. O volume foi calculado usando a fórmula do volume de cilindros. [...]

$V = A \cdot h \cdot L$ (4)

onde *A* é a área da seção transversal inundada (m^2), *h* é altura de combustível (*m*) e L é o comprimento do tanque (*m*).

O cálculo da área inundada foi feito considerando duas etapas: quando a altura *h* da parte umedecida da régua é menor que o raio do tanque e quando é maior que o raio.

De acordo com a figura 7, o tanque de combustível é simétrico em relação ao eixo Y, o que permite que o volume de uma das metades seja calculado e posteriormente multiplicado por 2. Para a metade direita, foi considerado um setor circular com vértice em *O* e ângulo θ (veja Fig. 7). A área com combustível é a diferença da área do setor circular e o triângulo OPQ.

$A_C = A_{SC} - A_{OPQ}$ (5)

onde A_C é a área com combustível (m^2), A_{SC} é a área do setor circular (m^2) e A_{OPQ} é a área do triângulo OPQ (m^2).

A área do setor circular é obtida pela conhecida fórmula

Fonte: Borges e Silva (2007)

$$A_{SC} = \frac{1}{2} R^2 \Delta\theta \qquad (6)$$

onde R é o raio do cilindro (m) e $\Delta\theta$ é o arco do ângulo θ (rad).

O arco do ângulo θ pode ser obtido do triângulo OPQ, aplicando a definição da razão seno e a correspondente função inversa.

$$\theta = arcsen\left(\frac{a}{R}\right) \qquad (7)$$

onde o valor de a é obtido aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OPQ.

$$a = \sqrt{2R - h^2}\ . \qquad (8)$$

A área do triângulo OPQ é obtida multiplicando os catetos (R – h) e a, da equação (8) e dividindo por 2.

$$A_{OPQ} = \frac{(R-h)\sqrt{2Rh - h^2}}{2} \qquad (9)$$

Levando as equações (6) e (9) em (5), multiplicando por 2 e levando, finalmente, em (4), obtem-se o volume de combustível da parte inferior do tanque:

$$V_{\inf} = L\left[R^2\theta - (R-h)\sqrt{2Rh - h^2}\right] \qquad (10)$$

Quando a altura h da parte umedecida da régua é maior que o raio, o volume pode ser obtido considerando que a parte cheia de combustível corresponde à área em branco na Figura 7. Ou seja, o volume de combustível é a diferença entre o volume do tanque cheio e o volume dado pela equação (10).

$$V_{\sup} = L\left[R^2(\pi - \theta) + (R - h^*)\sqrt{2Rh^* - h^{*2}}\right] \qquad (11)$$

onde $h^* = 2R - h$, lembrando que h é a altura do combustível, medida com a régua, e que neste caso $h > R$.

Fonte: Borges e Silva (2007)

A Figura 8 apresenta o gráfico das soluções obtidas com as equações (10 e 11) para um tanque cilíndrico com 0,65*m* de raio e 3,5*m* de comprimento.Os resultados foram disponibilizados para o agricultor na forma de uma tabela impressa com valores do volume de combustível para alturas de combustível variando de centímetro em centímetro

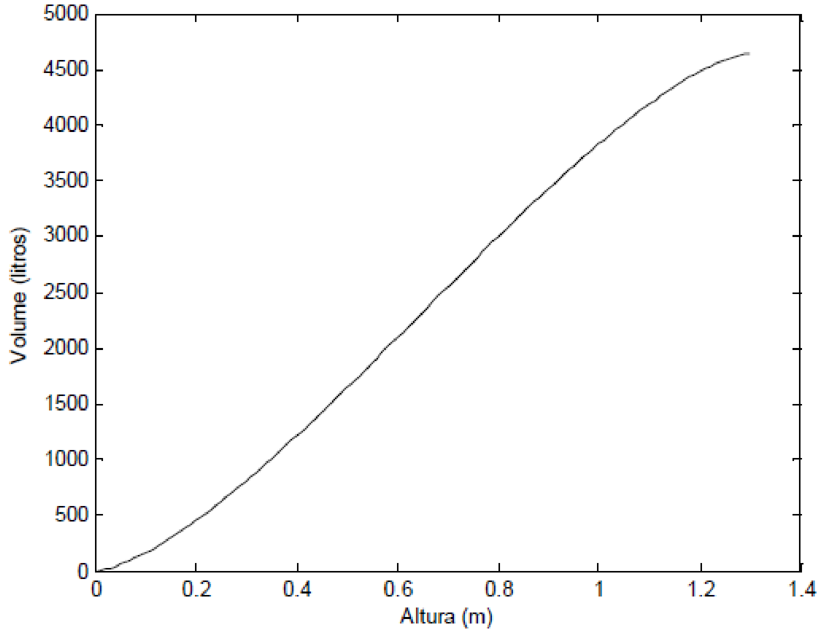


Figura 8 – Volume de combustível em função da altura da parte umedecida da régua

Fonte: Borges e Silva (2007)

5.2.3.1 Análise da atividade

Nesta atividade a Modelagem Matemática foi utilizada como um recurso didático que oportuniza tratar de problemas da realidade nas aulas de Matemática. Nela, identificamos a situação da realidade como sendo o armazenamento de combustível em tanques sem sistema de controle de volume nas propriedades rurais.

A *realidade inicial* nesta situação corresponde às informações relativas ao "método da régua" para verificar a quantidade de combustível em um tanque circular utilizado em uma propriedade rural.

Identificamos que o problema referente à *realidade inicial* é determinar a quantidade de combustível remanescente em um tanque sabendo a altura da parte umedecida da régua e as dimensões internas do tanque.

A *realidade intermediária*, segundo Negrelli (2008), corresponde à apreensão de parte da *realidade inicial*. Na situação em análise, os alunos associaram ao tanque da propriedade rural um cilindro, cuja seção transversal foi representada por um círculo com centro na origem de um plano cartesiano. O problema da *realidade intermediária* é o mesmo da *realidade inicial*, determinar a quantidade de combustível remanescente em um tanque a partir da medida da parte umedecida da régua e as medidas do raio e do comprimento interno do tanque. A partir da figura 7, que representa a seção transversal do tanque cilíndrico, foi realizado o levantamento de hipóteses.

Observando a figura 7, os alunos identificaram uma simetria em relação ao eixo Y, o que permitiu calcular o volume de um lado e, em seguida, calcular o dobro desse valor para obter o volume total. Para realizar esse cálculo, foi considerado um setor circular, um triângulo, e as fórmulas do cálculo da área para as respectivas figuras geométricas.

No quadro 13 estão indicadas a situação da realidade, a *realidade inicial*, a *realidade intermediária* e modelo matemático da atividade descrita. No quadro 14, destacamos a *realidade inicial*, a *realidade intermediária* e os respectivos problemas a serem resolvidos.

Quadro 13 – Identificação da situação da realidade, *realidade inicial*, *realidade intermediária* e o modelo matemático (grupo G03)

Situação da realidade	O armazenamento de combustível em um tanque sem controle de volume utilizado em uma propriedade rural
Realidade inicial	As informações relativas ao "método da régua" para verificar a quantidade de combustível em um tanque circular
Realidade intermediária	Associação do formato do tanque ao formato de um cilindro A figura que representa a seção transversal do tanque (Figura 7) As variáveis que identificam as medidas do tanque Associação de medidas à variáveis (*A*, *h*, *L*, *R*) A fórmula do cálculo do volume de um cilindro A simetria da figura O cálculo do volume por meio do setor circular e do triângulo, e suas respectivas fórmulas para ao cálculo de área As dimensões internas do tanque cilíndrico, 0,65*m* de raio (R) e 3,5*m* de comprimento (L)
Modelo matemático	$V_{\sup} = L\left[R^2(\pi-\theta)+\left(R-h^*\right)\sqrt{2Rh^*-h^{*2}}\right]$, quando $h > R$ $V_{\inf} = L\left[R^2\theta-(R-h)\sqrt{2Rh-h^2}\right]$, quando $h < R$ e o respectivo gráfico

Quadro 14 – Problemas da *realidade inicial* e da *realidade intermediária* (grupo G03)

Realidade inicial	Determinar a quantidade de combustível remanescente em um tanque sabendo a altura da parte umedecida da régua e as medidas internas do tanque
Realidade intermediária	Determinar a quantidade de combustível remanescente em um tanque sabendo a altura da parte umedecida da régua e as medidas internas do tanque

Conforme exposto no trabalho no qual se encontra a descrição dessa atividade de Modelagem, não é possível identificar se a situação da realidade faz parte da realidade dos alunos que desenvolveram essa atividade, mas a situação será próxima de alunos que utilizam esse tipo de tanque para armazenar combustível.

O modelo matemático obtido leva em consideração as hipóteses e aproximações realizadas pelos alunos e, de acordo com Negrelli (2008), esse modelo diz respeito à *realidade intermediária* e responde ao problema dessa realidade. No entanto, nessa atividade, o problema da *realidade inicial* coincide com o problema da *realidade intermediária*. Assim, podemos considerar que o modelo matemático aponta uma solução para a *realidade inicial*.

O modelo matemático envolve variáveis que facilmente podem ser determinadas, como o raio da seção transversal do tanque, comprimento do tanque e altura da parte umedecida da régua, e possuem um nível de precisão condizente com o problema. Dados esses aspectos, é possível concluir que o modelo descreve bem a *realidade inicial*.

O resultado obtido possui utilidade para as pessoas que utilizam esse tipo de armazenamento de combustível em suas propriedades. Portanto, o modelo matemático possibilita a ação no âmbito familiar/comunitário e no sistema de produção, pois com os dados dispostos em uma tabela, os agricultores continuarão a utilizar o "método da régua", mas saberão de maneira mais precisa o volume de combustível restante dentro do tanque.

Embora o modelo matemático seja satisfatório, é esperado que os alunos de um curso de graduação em Matemática utilizem o conceito de Integral definida para resolver o problema.

A atividade de Modelagem Matemática analisada não proporciona a formação de valores, ideias e ideais, e nem a conscientização sobre o problema, pois aborda apenas o desenvolvimento de um modelo matemático que auxilie a determinar o volume de combustível remanescente, não explorando questões sociais nem o que a solução encontrada pode modificar para o agricultor. Nesse sentido, a Modelagem Matemática é um recurso didático que trata de conteúdos curriculares aplicados a problemas da realidade, conforme a caracterização.

A seguir, expomos em forma de quadro, a análise de como o modelo matemático trata a *realidade inicial*.

Quadro 15 – Análise de como o modelo matemático trata a *realidade inicial* (grupo G03)

1. Limitações do modelo para descrever a *realidade inicial*	Descreve muito bem	sim
	Descreve parcialmente e pode ser melhorado	não
2. Utilidade do resultado do problema investigado	Com utilidade prática além do âmbito escolar	sim
	Com utilidade prática para o aluno/família	sim
3. Âmbito da ação sobre a realidade	Ação em âmbito escolar/colegas	não
	Ação em âmbito familiar/comunitário	sim
	Ação no sistema de produção	sim
4. Formação de concepção sobre a *realidade inicial*	Proporciona soluções para o problema da *realidade inicial*	sim
	Proporciona formação de valores, ideias e ideais	não
	Proporciona conscientização sobre o problema	não

5.2.4 Atividade referente ao grupo G04: Modelagem do transporte escolar

Esta atividade consta no trabalho de Machado e Cury (2005) e foi desenvolvida por alunos da 6ª série (7º ano) do Ensino Fundamental de uma escola rural do interior do Rio Grande do Sul e enfoca o transporte escolar. O tema foi proposto pelos alunos, que estavam preocupados com o transporte escolar.

O transporte oferecido pelo governo municipal, que contrata pessoas para tal fim, é, para a maioria dos alunos, a única maneira de chegar à escola. No distrito (em que foi desenvolvida a atividade), o transporte é feito por dois ônibus e um microônibus; são veículos antigos e com problemas, tanto mecânicos como físicos.

Outro fator apontado nas discussões foi o de que, no início de cada ano letivo, surgem boatos de que a Prefeitura não vai oferecer transporte para alunos de escolas estaduais, por entender

Fonte: Machado e Cury (2005)

que não é de sua competência e sim do Estado, ou que o Estado não repassa ao município verba suficiente para o transporte de seus alunos. Esses boatos causam grande aflição aos pais e estudantes, pois, não havendo este transporte, muitos não podem continuar a estudar.

Partindo destas constatações surgiram três questões que os alunos se propuseram a pesquisar: 1) por que existe o transporte escolar gratuito? 2) quem utiliza o transporte escolar? 3) o que pensam os usuários sobre a segurança do transporte escolar oferecido em nosso distrito?

De posse do tema e das questões, os alunos se organizaram em grupos, de três ou quatro componentes. O critério utilizado para a formação dos grupos foi o fato de usarem o mesmo ônibus e morarem na mesma região ou, não serem usuários do transporte (aqueles poucos que moram próximo à escola). Também nesta aula os alunos propuseram que fosse feito um levantamento do número de pessoas que utilizam cada veículo, com o objetivo de ver se não está transportando mais do que a capacidade máxima de cada veículo. Cada grupo, em seu respectivo ônibus, ficou encarregado de fazer o levantamento do número de lugares e usuários.

Os dados coletados por cada grupo (somente de alunos do turno da manhã) foram apresentados inicialmente de forma discursiva:

Ônibus A: 19 alunos da escola X[5] e 32 de outras escolas. A capacidade do veículo é de 46 lugares.

Os alunos concluíram que não há superlotação neste veículo, visto que há uma grande rotatividade de estudantes, enquanto uns sobem em algumas paradas, ouros descem, pois vão para escolas diferentes. Isso, portanto, não se configurou para eles como problema.

Ônibus B: No início da manhã, 46 alunos da escola X e 10 de outras escolas; ao meio-dia, 46 alunos da escola X e 27 de outras escolas. A capacidade do veículo é de 46 lugares.

Neste veículo, aumenta a demanda no horário do meio-dia, pois já começa a recolher alunos para o turno da tarde. Contudo, os alunos acreditam não ser preocupante esse número excessivo, porque há rotatividade.

Machado e Cury (2005)

[5] Denotação da escola que está sendo investigada.

Micro-ônibus: 4 alunos da escola X e 10 de outras escolas. A capacidade do veículo é de 16 lugares. Não há superlotação.

Não utilizam transporte escolar: 21 alunos.

Para que os alunos pudessem opinar sobre o problema do transporte escolar, a professora distribuiu para leitura o Estatuto da Criança e do Adolescente, explicando que tratava dos deveres da sociedade (família e governo) para com as crianças e adolescentes. Foi pedido, então, que lessem e discutissem o Artigo 54 que trata do direito à Educação, à Cultura, ao Esporte e ao Lazer. [...]

Foi lida uma reportagem do jornal local, trazido por um aluno, que se referia ao convênio firmado entre Estado e Municípios de um repasse de 33 milhões de reais para subsidiar o transporte escolar nos municípios. Esse assunto levou a discussão de que o município tem compromisso em transportar também os alunos da rede estadual.

Como os dados trazidos até então forneciam poucos elementos para elaborar um modelo matemático, sugerimos aos alunos que realizassem uma pesquisa com os estudantes do turno da manhã, para saber qual a opinião sobre a segurança e serviço do transporte escolar que utilizam. Surgiram, então, várias questões sobre segurança e casos vivenciados por eles sobre as condições dos veículos, tais como: *O motorista pode dirigir e falar ao celular? É mesmo necessário usar o cinto de segurança? Não existe indicação, no ônibus, de saída de emergência ou orientações de como usá-la. Alguns bancos estão soltos. É permitido dar carona a pessoas que não são estudantes? Podemos nós, chegar atrasados na escola porque o ônibus tem que esperar professoras e esta espera dura 20 minutos ou mais? Um dia desses chegamos atrasados porque o micro-ônibus ficou sem combustível no caminho. O cinto de segurança está com a fivela trancada, não abre.*

Baseados nessas colocações, concluímos que precisávamos de um especialista em legislação de trânsito para esclarecer essas dúvidas, para só então partirmos para a pesquisa. Sugerimos convidar um policial rodoviário para ministrar uma palestra sobre segurança e transporte escolar [...]. Enquanto isso, para explorar o assunto "gráfico de setores", sugerimos aos alunos que pesquisassem, nas turmas do turno da manhã, o número de estudantes que usam o transporte escolar. Construíram uma tabela de freqüência, apresentada a seguir:

Fonte: Machado e Cury (2005)

Tabela 4 – Distribuição de alunos que utilizam transporte escolar, por série

Série	**Nº**	**%**
5ª	20	74
6ª	20	77
7ª	15	68
8ª	11	79

A escola não tem microcomputadores disponíveis para o trabalho com alunos, por isso foi necessário explicar como desenhar setores. [...] A partir desse momento, iniciamos os cálculos para converter a porcentagem encontrada em graus e a construção do gráfico. Alguns alunos tiveram dificuldade no uso do transferidor e em manuseá-lo, outros com o uso da régua, pois a tendência deles é traçar o risco muito forte, deixando marcas no papel que não conseguem tirar. Mesmo assim, finalmente conseguiram representar um gráfico do tipo pizza, para cada turma. Também interessante, para os conteúdos explorados na 6ª série, foram os cálculos feitos pelos alunos para conseguir elaborar o gráfico. Por exemplo, para a 5ª série, com o total de 27 alunos, temos:

$$\frac{20}{27} = 0{,}7407 \cong 0{,}74 = \frac{74}{100} = 74\%$$

Os alunos concluíram que bastava efetuar 100 – 74 para encontrar a porcentagem dos que não utilizam transporte escolar e que, sendo aplicado 26% sobre o total de alunos da série, encontrariam quantos são os que não usam o transporte.

Para concluir o gráfico, explicamos que o ângulo de 360º corresponderia a 100%. Os alunos, então, fizeram os seguintes cálculos, após nossos questionamentos e as discussões entre eles:

100% – 360º ; então, 1% de 360º = 360:100 = 3,6º. Logo, para calcular a medida em graus, temos:

$$74 \cdot 3{,}6 = 266{,}4 \cong 266° \text{ e } 26 \cdot 3{,}6 = 93{,}6 \cong 94°.$$

Sobre o número de alunos que utilizam e os que não utilizam o transporte, fizessem um gráfico de setores e um de barras, para que comparassem os tipos e concluísse qual deles era mais adequado para esse tipo de apresentação de dados. A seguir, apresentamos, aqui com o auxílio do computador, os gráficos construídos pelos alunos:

Fonte: Machado e Cury (2005

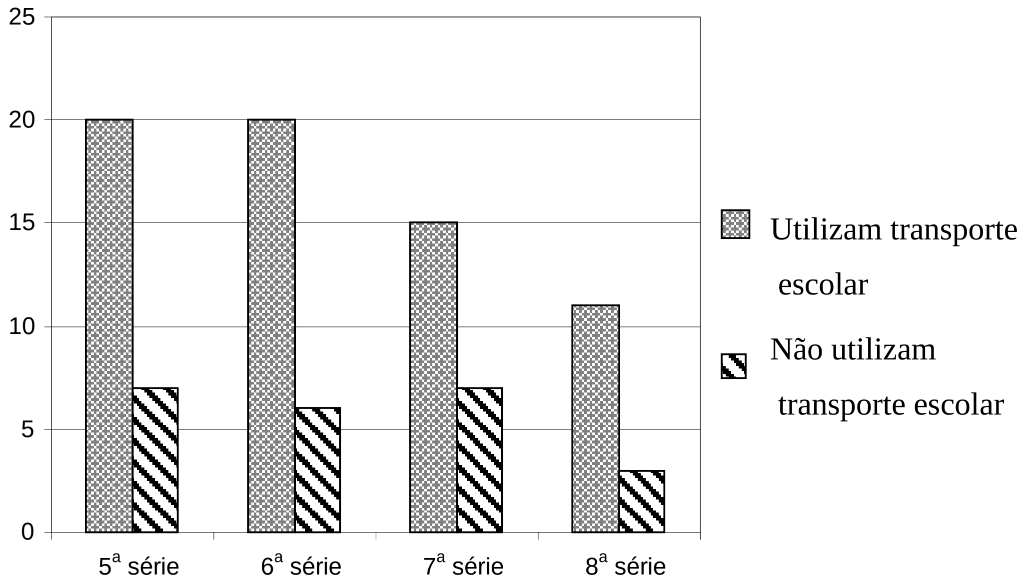


Figura 9 – Distribuição de alunos, por série, que utilizam ou não o transporte escolar

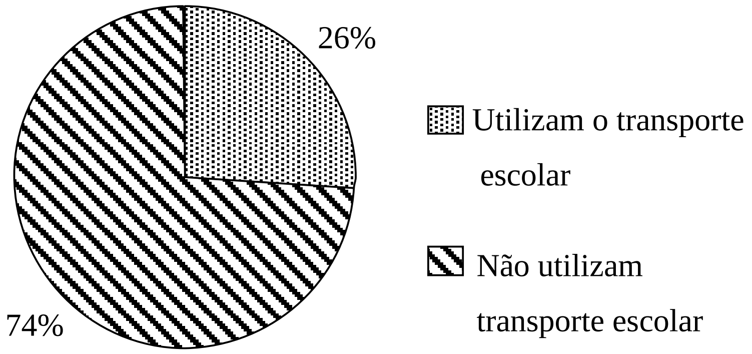


Figura 10 – Distribuição total dos alunos que utilizam ou não o transporte escolar, nas 4 séries

Os alunos realizaram a atividade com relativa facilidade, não solicitaram com tanta freqüência o auxilio da professora. Um fato importante observado é que eles procuraram explicar verbalmente o que fazem, embora nem sempre consigam expressar seu raciocínio por escrito.

Os estudantes chegaram à conclusão de que o gráfico de setores representa melhor, pois deixa mais visível que a maioria dos alunos são usuários do transporte escolar.

Fonte: Machado e Cury (2005)

Já tendo se conscientizado, inclusive por meio de gráficos, da importância do transporte escolar para a comunidade, tivemos a oportunidade de assistir a palestra do policial inspetor. [...]

O policial, em seu discurso, enfatizou que o transporte escolar é um direito constitucional do estudante, que é dever dos pais e da escola ficarem atentos às questões de segurança e exigir que as normas, estabelecidas pela legislação de trânsito, sejam cumpridas.

Complementou com a observação de que também o estudante tem que cumprir as normas legais para garantir sua segurança, como: usar o cinto de segurança, permanecer sentado durante o percurso, não tirar a atenção do motorista, não colocar a cabeça nem braços para fora da janela e sempre comunicar aos pais ou professores qualquer irregularidade que observar. Os pais e o corpo docente da escola, ao saber da irregularidade, devem por sua vez comunicar às instâncias competentes e, se for o caso, exigir providências. Somente assim, com a comunidade se mobilizando, podem ser evitadas tragédias irremediáveis. É de competência da prefeitura exigir a vistoria, a cada seis meses, dos veículos usados para o transporte escolar, mesmo que estes pertençam a empresas contratadas para esse fim. E estas empresas têm obrigação de fazer a vistoria, com veículo revisado diariamente, nos itens: sistema de freios, embreagem, limpador de pára-brisas, cintos de segurança, calibragem de pneus, sistema elétrico, óleo no motor e abastecimento. Mencionou que os motoristas de transporte escolar devem ter idade superior a 21 anos, ter habilitação na categoria D, ter sido submetidos a exame psicotécnico com aprovação especial para transporte de alunos, possuir curso de formação de condutor de transporte escolar e não ter cometido falta grave nos últimos doze meses.

Os alunos participaram, fazendo alguns comentários sobre fatos acontecidos com eles, como: motorista falando ao celular, falta de combustível no meio do trajeto, ônibus sem freios, os ônibus com cinto de segurança muito largo, que não se ajusta adequadamente. Perguntaram qual a velocidade máxima permitida, o policial respondeu que deve ser obedecidas as placas de sinalização no caso de rodovia federal e, nos trajetos internos, de acordo com as condições da estrada.

Fonte: Machado e Cury (2005)

5.2.4.1 Análise da atividade

Esta atividade diz respeito ao grupo que caracteriza a Modelagem Matemática como um ambiente de aprendizagem que oportuniza aos alunos investigar a realidade por meio da Matemática e aborda o tema transporte escolar. A situação da realidade dessa atividade é o deslocamento dos alunos, por meio do transporte escolar ofertado pela Prefeitura, até a escola em que estudam.

A *realidade inicial*, nesse trabalho, constitui-se de elementos que podem ser considerados independentes dos alunos, que são os dados levados à sala de aula pelo professor. Na atividade em questão, identificamos que a *realidade inicial* é composta pelas características físicas dos veículos que fazem o transporte escolar e por informações relativas à atribuição da responsabilidade em garantir o transporte escolar na área rural. O problema dessa realidade é identificar se as condições do transporte escolar do distrito em questão estão de acordo com as leis, incluindo se existe superlotação dos veículos que realizam o transporte.

A partir dessa *realidade inicial* os alunos elaboraram um questionário e fizeram uma entrevista com os alunos da escola. Segundo Negrelli (2008), a *realidade intermediária* é um recorte da *realidade inicial*, é uma simplificação da situação original. Portanto, o questionário, que buscava identificar o número de alunos que utilizam o transporte escolar e como eles classificam a qualidade desse serviço, pertence à *realidade intermediária*, pois é uma maneira de observar parte da *realidade inicial*.

Além desse questionário, a *realidade intermediária* nessa atividade é composta pelas respostas obtidas na pesquisa, a disposição dos dados em uma tabela de frequência e pelas aproximações numéricas realizadas nos resultados de alguns cálculos como, por exemplo, no caso do número 266,4, que foi arredondado para o número natural mais próximo, 266. Na *realidade intermediária*, o problema matemático consiste em determinar o melhor gráfico para apresentar os dados numéricos obtidos com a pesquisa.

Nos quadros a seguir apresentamos a situação da realidade, a *realidade inicial*, a *realidade intermediária* e modelo matemático da atividade analisada; e o problema referente à *realidade inicial* e à *realidade intermediária*.

Quadro 16 – Identificação da situação da realidade, *realidade inicial*, *realidade intermediária* e o modelo matemático (grupo G04)

Situação da realidade	O deslocamento dos alunos até a escola por meio do transporte escolar
Realidade inicial	As características físicas dos veículos que fazem o transporte escolar Informações relativas sobre de quem é a responsabilidade de garantir o transporte escolar na área rural
Realidade intermediária	Questionário As respostas das entrevistas A tabela de frequência Arredondamentos numéricos
Modelo matemático	O gráfico de colunas (Figura 9) e o gráfico de setores (Figura 10)

Quadro 17 – Problemas da realidade inicial e da *realidade intermediária* (grupo G04)

Realidade inicial	Identificar se as condições do transporte escolar oferecido estão de acordo com as leis e se existe superlotação
Realidade intermediária	Escolher o gráfico que melhor apresenta os resultados da pesquisa

O tema de investigação dessa atividade de Modelagem faz parte da vida diária desses alunos, pois a maioria dos estudantes utiliza o transporte escolar ofertado pela Prefeitura. Com isso, concluímos que a situação da realidade é próxima aos alunos que desenvolveram a atividade.

De acordo com Negrelli (2008), o modelo matemático revela as hipóteses e aproximações que compõem a *realidade intermediária*, podendo ou não atingir a *realidade inicial*. No caso da atividade analisada, o modelo matemático descreve parte da *realidade inicial*, levando em consideração apenas os dados relativos ao número de alunos que utilizam o transporte escolar. Dados esses aspectos, e o fato de que o modelo condiz com a habilidade e conhecimentos matemáticos esperados para alunos de 6ª série (7º ano) do Ensino Fundamental, apontamos que o modelo descreve a *realidade inicial* parcialmente e não pode ser melhorado.

Os resultados obtidos possuem utilidade prática para o aluno e para a comunidade local, pois, com as informações adquiridas, ficarão mais tranquilos sabendo que o transporte de seus filhos está garantido por lei e deve ser realizado com segurança.

No que diz respeito ao Âmbito da ação sobre a realidade, nessa atividade, entendemos que avaliar qual gráfico melhor representa os dados obtidos é uma ação no âmbito escolar. Já questionar a qualidade do transporte escolar e de quem é a responsabilidade de mantê-lo, promove uma ação comunitária. Caso as informações obtidas por meio dos textos e da palestra sejam transmitidas para a Prefeitura e para os motoristas dos veículos de transporte, é possível que haja ação no sistema de produção, nesse caso, no sistema de transporte escolar do município.

No entanto, o modelo matemático não propõe solução para o problema da *realidade inicial*, apenas disponibiliza dados estatísticos acerca do número de alunos que usam ou não o transporte escolar, sendo necessárias as informações obtidas por meio do Estatuto da Criança e do Adolescente e da palestra. Essas informações auxiliam na formação de valores, ideais e na conscientização sobre o problema.

No quadro 18 apresentamos esquematicamente como o modelo matemático trata a *realidade inicial*.

Quadro 18 – Análise de como o modelo matemático trata a *realidade inicial* (grupo G04)

1. Limitações do modelo para descrever a *realidade inicial*	Descreve muito bem	não
	Descreve parcialmente e pode ser melhorado	não
2. Utilidade do resultado do problema investigado	Com utilidade prática além do âmbito escolar	sim
	Com utilidade prática para o aluno/família	sim
3. Âmbito da ação sobre a realidade	Ação em âmbito escolar/colegas	sim
	Ação em âmbito familiar/comunitário	sim
	Ação no sistema de produção	sim
4. Formação de concepção sobre a *realidade inicial*	Proporciona soluções para o problema da *realidade inicial*	não
	Proporciona formação de valores, ideias e ideais	sim
	Proporciona conscientização sobre o problema	sim

5.3 A Caracterização da Realidade na Modelagem Matemática: as definições e as atividades

No início deste texto citamos diversos autores que propõem a utilização da Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática. Entretanto, existem diferentes definições e caracterizações de Modelagem nesse contexto.

Para desenvolver este trabalho, selecionamos um elemento comumente citado em definições de Modelagem: ‘realidade’. Com a finalidade de caracterizar como a realidade é tratada em trabalhos de Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática, definimos três questões orientadoras:

i. Qual corrente filosófica, realismo ou idealismo, parece estar refletida nas definições de Modelagem para relacionar Matemática e realidade?

ii. Levando em consideração a relação entre realidade e elaboração do conhecimento como tratada em Bicudo (2000), qual o tipo de realidade evidenciado em cada definição de Modelagem Matemática?

iii. Como o modelo matemático obtido em uma atividade de Modelagem Matemática trata da realidade?

Nas definições D1 e D2, observamos a Matemática como um mundo separado da realidade quando os autores dessas duas definições propõem que os resultados matemáticos obtidos devem ser interpretados na linguagem usual do mundo real. Assim, inferimos que a linguagem matemática não é entendida como usual e a Matemática não pertence ao mundo real. Na definição D11 fica evidente a dissociação entre Matemática e realidade na expressão "Modelagem é um meio para integrar dois conjuntos disjuntos: matemática e realidade", assim como a proposta da corrente filosófica realismo. Na definição D14, tal dissociação é observada quando o autor cita que Modelagem "é a matemática inserida na realidade", pois com essa expressão entendemos que, de modo geral, a Matemática não pertence à realidade, sendo a Modelagem é um meio de inserir os conceitos matemáticos na realidade.

Portanto, nas definições de Modelagem Matemática que compõem o grupo G01, ou seja, entendem a Modelagem Matemática como meio de descrever e/ou estudar problemas da realidade, identificamos a relação entre realidade e Matemática conforme propõe o realismo, que defende que os elementos matemáticos preexistem em um mundo a parte da realidade.

As definições do grupo G01 propõem que temos acesso a situações da realidade e não à realidade como um todo. O termo 'transformar', comum às definições D01, D02 e D11, de acordo com o dicionário eletrônico Houaiss, é fazer com que uma coisa mude de feição, se modifique, e essa ação é pessoal, depende da percepção do indivíduo, assim como os termos 'interpretação', presente nas definições D01 e D02, e 'análise', contido na definição D14. Portanto, as definições deste grupo apontam que o conhecimento matemático desenvolvido nas atividades de Modelagem Matemática é dependente da interpretação pessoal. Levando em consideração estes aspectos, e a classificação de Bicudo (2000) apresentada no capítulo 2 deste texto, nas definições do grupo G01 caracterizamos a realidade como *percebida*, pois a realidade está lá, em algum lugar, cabendo a cada indivíduo transformar a situação (ou problema) da realidade em um modelo matemático e interpretá-lo.

As definições do grupo G02 revelam a Modelagem Matemática como um processo (ou ferramenta) que auxilia na compreensão e transformação da realidade, possibilitando a previsão de tendências e fatos. Nas definições deste grupo não há menção à distinção entre a Matemática e a realidade, o que nos leva a inferir que a Matemática e a realidade pertencem a um mesmo mundo. Dado esse aspecto e a relação entre Matemática e realidade baseada nas correntes filosóficas realismo e idealismo, discutida no capítulo 2 deste trabalho, identificamos que a relação entre a Matemática e realidade apresentada nas definições do grupo G02 parece estar alinhado com o idealismo, pois nessa corrente filosófica a Matemática é construída pelo homem e faz parte da realidade.

Nas definições D03, D07, D09 e D10 (ver quadro 4), o conhecimento matemático é elaborado pelo indivíduo na medida em que ele busca meios para agir na realidade e transformá-la. Assim, de acordo com a exposição de Bicudo (2000), nas definições que compõem o grupo G02, caracterizamos a realidade como *criada*, pois essa compreensão admite uma provável realidade, que se tornará realidade após a ação do indivíduo.

Na caracterização de Modelagem Matemática como um recurso didático que oportuniza tratar de problemas da realidade nas aulas de Matemática, além da menção ao contexto escolar, as definições D04 e D15 citam que a Modelagem Matemática oportuniza a aplicação de conceitos matemáticos escolares à realidade, ou seja, a Matemática não está compreendida na realidade, assim como a corrente filosófica do realismo, que entende a Matemática como um mundo disjunto da realidade, propõem que a Matemática existe separada da realidade. Já a definição D08 cita os termos ‘problema não matemático da realidade’ e ‘situação não matemática da realidade’, o que nos leva a inferir que a realidade é constituída de problemas e situações matemáticas e não matemáticas, sendo que a situação matemática depende da construção humana. Neste sentido, a definição D08 parece revelar uma visão alinhada ao idealismo, conforme apresentado no capítulo 2.

Observamos que as definições D04 e D15 revelam a realidade como existente, independente do homem e do conhecimento que dela se tem, ou seja, os elementos da realidade existem antes do homem conhecê-los. A Matemática é apenas uma ferramenta capaz de auxiliar no estudo de partes dessa realidade, como em problemas econômicos, biológicos, geográficos, de engenharia e de outros, conforme expõe a definição D04. Baseados nisso e na exposição de Bicudo (2000), nestas definições, caracterizamos a realidade como *objetiva*.

A definição D08 propõe que o tema a ser abordado em uma atividade de Modelagem permita a discussão sobre questões políticas, econômicas e/ou ambientais, por exemplo. Isso nos leva a inferir que o tema escolhido será de interesse de todos os alunos do grupo, ou da maioria, e que as discussões levarão os alunos a uma compreensão semelhante ao assunto em questão, embora cada um tenha sua interpretação individual. Portanto, na definição D08, caracterizamos a realidade como *construída*, pois, de acordo com Bicudo (2000), na compreensão de *realidade construída* o conhecimento é elaborado de modo individual, mesmo que em determinado grupo haja compreensões semelhantes de alguns termos.

Na definição D05, que afirma que a "Modelagem Matemática é um ambiente de aprendizagem onde os alunos são convidados a indagar e/ou investigar por meio da matemática situações oriundas de outras áreas da realidade", observa-se que a realidade é formada por várias áreas, inclusive a Matemática. Já as definições D06, D12 e D13 (ver quadro 4), não evidenciam esse fato, mas mostram que a Matemática pode ser construída e é aplicável à realidade. Nessas definições, a Matemática parece ser percebida como uma ferramenta que auxilia na investigação da realidade, e pode ser melhorada, caso seja necessário. Portanto, no que diz respeito à relação entre Matemática e realidade, associamos essas definições de Modelagem ao idealismo que, conforme discutido no capítulo 2 deste trabalho, entende a Matemática como construída pelo homem (PONTE et al., 1997).

Nas definições do grupo G04, que compreendem a Modelagem Matemática como um ambiente de aprendizagem, caracterizamos a realidade como *criada*, pois a colocação de que os alunos são convidados a indagar e/ou investigar a realidade, admite que a realidade não tem sua existência garantida, e é dependente do indivíduo aceitá-la ou não. Sendo assim, o conhecimento matemático elaborado em uma atividade de Modelagem Matemática será criado e/ou modificado dependendo da situação.

No quadro a seguir, apresentamos as definições analisadas agrupadas conforme a caracterização de Modelagem Matemática que apresentam. Para cada definição identificamos a corrente filosófica que parece refletir a relação entre Matemática e realidade e como a realidade é caracterizada conforme sua relação com a elaboração do conhecimento.

Quadro 19 – Corrente filosófica e caracterização da realidade

grupo	caracterização de Modelagem Matemática	definição	corrente filosófica	caracterização da realidade
G01	Um meio de descrever e/ou estudar problemas da realidade	D01	realismo	percebida
		D02	realismo	percebida
		D11	realismo	percebida
		D14	realismo	percebida
G02	Um processo (ou ferramenta) para compreender a realidade	D03	idealismo	criada
		D07	idealismo	criada
		D09	idealismo	criada
		D10	idealismo	criada
G03	Um recurso didático que oportuniza tratar de problemas da realidade nas aulas de Matemática	D04	realismo	objetiva
		D08	idealismo	construída
		D15	realismo	objetiva
G04	Um ambiente de aprendizagem que oportuniza aos alunos investigar a realidade por meio da Matemática	D05	idealismo	criada
		D06	idealismo	criada
		D12	idealismo	criada
		D13	idealismo	criada

A partir o quadro 19, observa-se que das quinze definições analisadas sob a nossa visão, seis apresentam a relação entre Matemática e realidade conforme a corrente filosófica realismo e nove, conforme o idealismo.

Com esses dados, podemos inferir que nas definições de Modelagem Matemática que apresentam o termo realidade predomina a compreensão de que a relação que existe entre Matemática e realidade condiz com o que afirma a corrente filosófica idealismo: os elementos matemáticos são construção humana. Isso fica ainda mais evidente no contexto escolar, pois, considerando que as definições que compõem os grupos G03 e G04 expõem de maneira clara o caráter escolar das atividades de Modelagem, temos que cinco, de um total de sete definições, apresentam o idealismo como base para a relação entre Matemática e realidade.

Conforme apresentado no capítulo 2, é possível observar uma relação entre a corrente filosófica realismo e a caracterização da realidade como *objetiva* ou *percebida*, pois ambas as caracterizações, assim como o realismo, admitem a existência de uma realidade independente do homem. Já a caracterização da realidade como *criada* ou *construída*, está relacionada à corrente filosófica idealismo, tendo em vista que ambas apontam o homem como o criador da realidade.

Como a caracterização da realidade depende da corrente filosófica identificada, podemos inferir que as definições que apresentam a relação entre Matemática e realidade conforme a corrente filosófica realismo convergem para a caracterização da realidade como *percebida*, ou seja, o conhecimento matemático que será elaborado ao se desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática depende da interpretação pessoal, da percepção do modelador.

No que diz respeito às definições que apresentam a relação entre Matemática e realidade conforme a corrente filosófica idealismo, estas convergem para a caracterização da realidade como *criada*, que aponta para uma provável realidade, que poderá ser modificada dependendo da direção em que é desenvolvida a atividade de Modelagem.

De acordo com Araújo (2007), a compreensão que se tem de Modelagem está atrelada à concepção que se tem de Matemática e de sua relação com a realidade. Observando o quadro 21, é possível identificar que apenas as definições do grupo G03 apresentam diferentes concepções da relação entre Matemática e realidade, ou seja, nossa pesquisa confirma o que foi apontado por Araújo (2007).

Ao analisar como o modelo matemático trata a *realidade inicial*, enunciamos o problema da *realidade inicial* e o problema matemático referente à *realidade intermediária*. Conforme apresentado no capítulo 3 deste texto, Negrelli (2008) propõe que o modelo matemático está condicionado à *realidade intermediária*, mas como essa realidade é obtida por recortes e aproximações da *realidade inicial*, o modelo pode auxiliar na elaboração de soluções para o problema da *realidade inicial*.

Dado o caráter aproximativo entre o problema da *realidade inicial* e o da *realidade intermediária* das atividades referentes aos grupos G01 e G02, e no grupo G03 esses problemas serem o mesmo, fica evidente essa colocação de Negrelli (2008), tanto que o resultado obtido proporciona solução para o problema da *realidade inicial*. Na atividade do grupo G04, o modelo matemático não descreve de maneira satisfatória a *realidade inicial*, pois aborda apenas os elementos matemáticos que compõem a *realidade intermediária*, não abrangendo os elementos de caráter social e informativo, ou seja, os conhecimentos obtidos por meio dos textos e da palestra.

Observando os quadros 9, 12, 15 e 18, constatamos uma relação entre as categorias 2 (utilidade do resultado do problema investigado) e 3 (âmbito da ação sobre a realidade). Em todas as atividades verificou-se que o resultado possui utilidade além do ambiente escolar, o que possibilitou ação no âmbito comunitário e/ou no sistema de produção. De acordo com nossas análises, a utilidade do modelo para o aluno e sua família está relacionada com a 'proximidade' da situação e o modelador.

No que diz respeito a como o modelo matemático trata a *realidade inicial*, concluímos que a qualidade do resultado está relacionada com os elementos que compõem a *realidade intermediária*, sendo que essa qualidade é que define a utilidade do resultado e, por consequência, o âmbito da ação sobre a realidade. Para que esse resultado proporcione a ações em diferentes âmbitos, a formação de ideias e valores e a conscientização, é necessária a condução de discussões, investigações e a abordagem de questões sociais que dizem respeito ao tema da atividade de Modelagem Matemática.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o início de nossa pesquisa, durante a seleção e análise das definições de Modelagem Matemática, nossa preocupação era a de encontrar elementos que pudessem auxiliar na caracterização de um termo comumente presente nas definições de Modelagem Matemática: a realidade.

A partir do levantamento realizado por Broering (2009), que elencou as diferentes definições de Modelagem Matemática citadas nas publicações de duas edições de um evento importante no cenário nacional de Modelagem, selecionamos as definições de Modelagem que apresentam explicitamente o termo realidade, não sendo considerados termos semelhantes. Essas definições selecionadas foram agrupadas conforme a concepção de Modelagem Matemática identificada, e para cada grupo foi escolhida uma atividade de um dos trabalhos que citou alguma das definições que compõem o grupo para ser analisada.

Na busca por uma caracterização da realidade em atividades de Modelagem, verificamos que em apenas um grupo as definições que possuem a mesma concepção do que é Modelagem Matemática não apresentam a mesma compreensão acerca da relação entre realidade e Matemática, nem da relação entre a elaboração do conhecimento e a realidade. Neste sentido, os resultados da nossa pesquisa estão alinhados com o trabalho Araújo (2007), e defendem que a caracterização de Modelagem Matemática está atrelada a concepção de se tem de Matemática de sua reação com a realidade.

Concluímos também que as definições de Modelagem Matemática citadas nas publicações da IV e V CNMEM que utilizam explicitamente o termo ‘realidade’, predomina a compreensão de que a relação entre Matemática e realidade está relacionada com a corrente filosófica idealismo, cujo discurso aponta que a realidade depende da ação. Predomina também nestes trabalhos a ideia de *realidade criada*, definida por Bicudo (2000).

Ao identificarmos a situação real, a *realidade inicial,* a *realidade intermediária* e o modelo matemático nas atividades apresentadas, observamos diferentes conceitos matemáticos que foram abordados, revelando um caráter didático das atividades de Modelagem Matemática.

No que diz respeito à verificação de como o modelo matemático trata a realidade, identificamos que nem sempre o modelo auxilia na resolução do problema inicial. A qualidade do resultado depende dos recortes e aproximações que o modelador faz da realidade, e essa qualidade é que determina a utilidade do resultado no âmbito extra-escolar e no sistema de produção.

Com essa pesquisa de cunho teórico, buscamos fomentar o debate no âmbito da Educação Matemática no que diz respeito à utilização da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para estabelecer a relação entre a Matemática e a realidade e a discussão referente ao componente ‘realidade’ presente nesse processo.

A investigação de fundamentos teóricos subjacentes a diferentes definições é essencial para consolidar aspectos e características importantes de cada definição e levam a reflexão de como a Modelagem Matemática pode ser caracterizada e utilizada pelo professor em sua prática pedagógica.

Identificar como a realidade é tratada em Modelagem Matemática tem influência sobre as práticas – especialmente se considerarmos que nem sempre o modelo auxilia na resolução do problema inicial, mas sim de um problema criado para substituir aquele que de fato existe.

Deixamos como sugestão para futuras pesquisas as seguintes perguntas:

- A situação da realidade ser próxima ou não dos alunos modeladores influencia na criação da *realidade intermediária*?
- Qual é a relação entre modelo matemático e a elaboração do conhecimento matemático pelos alunos?

Também esperamos que a reflexão desencadeada por esta pesquisa possa atingir outros pesquisadores que busquem, por exemplo, compreender diferentes componentes presentes em definições de Modelagem Matemática ou ampliar essa pesquisa, considerando outros termos semelhantes ao termo ‘realidade’.

CAPÍTULO 7

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, L. M. e DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**. Rio Claro: Unesp, ano 17, n. 22. 2004.

ALMEIDA, L. M. W. e BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência e Educação** (UNESP), v. 11, n. 3, 2005.

ALMEIDA, L. M. e FERRUZZI, E. C. Uma Aproximação Socioepistemológica para a Modelagem Matemática. **Alexandria Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, v. 2, n. 2, 2009. Disponível em: <http://www.ppgect.ufsc.br/alexandriarevista/atual.htm>. Acesso em 29 set. 2009.

ALSINA, C. Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿ cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. **Revista Ibero-americana de Educacão**, n. 43, 2007. Disponível em: <www.rieoei.org/rie43a04.htm>. Acesso em: 04 out. 2009.

ANASTÁCIO, M. Q. A. Concepções de Matemática e de Realidade no processo de Modelagem Matemática: alguns apontamentos. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2007, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: UFMG, 2007. 1 CD-ROM.

ARAÚJO, J. de L. **Cálculo, tecnologias e Modelagem Matemática:** as discussões dos alunos. 2002. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

ARAÚJO, J. de L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira, CALDEIRA, Ademir Donizeti, ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais, Recife, v. 3, 2007.

BARBOSA, J. C. A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira, CALDEIRA, Ademir Donizeti, ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais, Recife, v. 3, 2007.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BERGER, P. L. e LUCKMANN, T. **A construção social da realidade**: tratado de sociologia do conhecimento. 28 ed. Trad. Floriano de Souza Fernandes. Petrópolis: Vozes, 2008.

BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia**: confrontos e avanços. São Paulo: Cortez, 2000.

BIENBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, v. 2, n. 2. 2009. Disponível em: <http://www.ppgect.ufsc.br/alexandriarevista/atual.htm>. Acesso em 29 set. 2009.

BIENBENGUT, M. S. e Hein. N. **Modelagem matemática no ensino**. 4 ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BISOGNIN, V. Modelagem Matemática na escola. In: CONGRESSO NACIONAL EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2008, Ijuí. **Anais...** Ijuí: Unijuí, 2008. 1 CD-ROM.

BORGES, P. A. P. e SILVA, D. K. Modelagem Matemática, escola e a transformação da realidade. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2007, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: UFMG, 2007. 1 CD-ROM.

BROERING, G. F. **Diferentes Conceitualizações de Modelagem Matemática**. 2009. Monografia (Especialização) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

CIRILO, K. S. S. e ALMEIDA, L. M. W. A transposição didática do conceito de integral: a modelagem matemática como caminho. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2007, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: UFMG, 2007. 1 CD-ROM.

D'AMBRÓSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. 2 ed. Campinas: Summus, 1986.

FERREIRA, D. H. L. e WODEWOTZKI, M. L. L. Questões ambientais e Modelagem Matemática: uma experiência com alunos do ensino fundamental. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira, CALDEIRA, Ademir Donizeti, ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais, Recife, v. 3, 2007.

FERRI, R. B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. **ZDM**, v. 38, 2006.

FIORENTINI, D. e LORENZATO; S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associadas, 2006.

FONTANINI, M. L. **Modelagem Matemática X Aprendizagem Significativa**: uma investigação usando mapas conceituais. 2007. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estaual de Londrina, Lonrina.

FONTANINI, M. L. de C. e ALMEIDA, L. M. W. O uso de mapas conceituais na busca de indícios de aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos em atividades de modelagem matemática In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2007, Ouro Preto. **Anais…** Ouro Preto: UFMG, 2007. 1 CD-ROM.

GIARDINETTO, J. R. B. **A matemática em diferentes contextos sociais**: diferentes matemáticas ou diferentes manifestações da matemática? Reflexões sobre a especificidade e a natureza do trabalho educativo escolar. Disponível em: <www.anped.org.br/reunioes/25/.../joserobertogiardinettot19.rtf>. Acesso em: 29 set. 2009.

KLÜBER, T. E. O que é isto, a Modelagem Matemática para e na Educação Matemática? In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2008, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: Unesp, 2008. 1 CD-ROM.

MACHADO, N. J. **Matemática e a realidade**: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. 6 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MACHADO, E. S. e CURY, H. N. Modelagem e transporte escolar: uma investigação com alunos de ensino fundamental. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2007, Feira de Santana. **Anais..**. Feira de Santana: CNMEM, 2007. 1 CD-ROM.

NEGRELLI, L. G. **Uma reconstrução epistemológica do processo de Modelagem Matemática para a Educação (em) Matemática**. 2008. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

PADOVANI, H. e CASTAGNOLA, L. **História da filosofia**. 3 ed. São Paulo: Comp. Melhoramentos de São Paulo, 1958.

PONTE, J. P., BOA VIDA, A., GRAÇA, M. e ABRANTES, P. **Didática da matemática**. DES do ME. Lisboa, 1997.

RUSS, J. **Dicionário de filosofia**. Trad. Alberto Alonso Muñhoz. São Paulo: Scipone, 1994.

SANTOS, L. M. M. dos. e BISOGNIN, V. Experiências de ensino por meio da Modelagem Matemática na educação fundamental. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira, CALDEIRA, Ademir Donizeti, ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais, Recife, v. 3, 2007.

SILVA, D. K. Ações de Modelagem para a formação inicial de professores de matemática. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira, CALDEIRA, Ademir Donizeti, ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais, Recife, v. 3, 2007.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Bolema –** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, 2000. Disponível em: <www.rc.unesp.br/igce/.../bolema/bolema14.html>. Acesso em: 17 out. 2009.

VIEIRA, E. M. e CALDEIRA, A. D. Vertentes teóricas presentes nas produções científicas de modelagem matemática no cenário internacional: análise dos artigos publicados nas International Conference on the Teaching of Matheematical Modelling and Applications – ICTMA books dos anos 2001 a 2007. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2008, Rio Claro. **Anais..**. Rio Claro: EBRAPEM, 2008. 1 CD-ROM.

VILA-OCHOA, J. A. et al.. Sentido de Realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto. **Alexandria Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, v. 2, n. 2, 2009. Disponível em: <http://www.ppgect.ufsc.br/alexandriarevista/atual.htm>. Acesso em 29 set. 2009.