Universidade Estadual de Londrina

EMERSON TORTOLA

OS USOS DA LINGUAGEM EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Londrina
2012

EMERSON TORTOLA

OS USOS DA LINGUAGEM EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2012

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

T712u Tortola, Emerson.
Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental / Emerson Tortola. – Londrina, 2012.
168 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Matemática (Ensino fundamental) – Estudo e ensino – Teses. 2. Linguagem e lógica – Teses. 3. Educação matemática – Teses. 4. Modelos matemáticos – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

EMERSON TORTOLA

OS USOS DA LINGUAGEM EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientadora. Profª Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Profª. Drª. Andréia Maria Pereira de Oliveira
Universidade Estadual de Feira de Santana - UFS

____
Profª. Drª. Elaine Cristina Ferruzzi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Londrina, 03 de dezembro de 2012.

Aos meus pais, fonte de inspiração para todos os esforços que investi nesta empreitada.

A todos aqueles que em mim acreditaram e me fizeram acreditar.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus pela fé e perseverança que nesses dois anos me acompanharam na busca de meus ideais, que não me desamparou em nenhum momento e que, mesmo nos tempos mais difíceis, Ele não me deixou esmorecer, me dando sempre um motivo para seguir em frente.

Quero também agradecer à minha família, que representa meu alicerce, minha fortaleza, pois esteve sempre ao meu lado e me apoiou em minhas escolhas e decisões. Aos meus pais, que não mediram esforços para que eu chegasse aonde cheguei. Aos meus padrinhos, por me acolherem em sua casa durante esse período. Às minhas irmãs, que fizeram o possível para me ajudar e aos meus sobrinhos, pela compreensão quando não podia lhes dar muita atenção devido às tarefas e prazos que tinha para cumprir.

Agradeço ainda aos meus amigos, que não só nos momentos felizes, mas também nos mais difíceis, estiveram de alguma forma presentes, me dando conselhos e me lembrando que em um futuro não muito distante todo o esforço será recompensado, que tudo isso valerá a pena – e com a concretização deste trabalho, posso dizer que já está valendo.

Neste momento, não posso deixar de lembrar e agradecer aos meus professores da graduação que me mostraram o caminho da pesquisa e me incentivaram a seguir nesta caminhada. Também aos professores do programa de pós-graduação, que com suas lições, contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Gostaria ainda de agradecer aos colegas do Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT) pelo companheirismo e trocas de experiências, proporcionadas pelas discussões que tivemos durante os encontros realizados ao longo desses dois anos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo apoio financeiro, por meio do Programa Observatório da Educação (Obeduc).

À direção e à equipe de professores da Escola em que esta pesquisa foi realizada, que me acolheu e colocaram-se à disposição no que fosse preciso.

À professora regente da turma, que aceitou a proposta de realização da pesquisa, e muito me ajudou durante os encontros que ela estava presente, auxiliando na organização e incentivando à participação dos estudantes.

Aos estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental que participaram da pesquisa, desenvolvendo as atividades de Modelagem Matemática, sempre assíduos e fervorosos nas discussões a respeito dos diferentes temas propostos para estudo.

Às professoras Andréia Maria Pereira de Oliveira e Elaine Cristina Ferruzzi, pelas críticas e sugestões, que contribuíram para o aprimoramento deste trabalho.

E, claro, não podia deixar de agradecer, de modo muito especial, à minha orientadora, a professora Lourdes Maria Werle de Almeida, pela oportunidade que me ofereceu, por toda a paciência, cobranças, correções, produções, ensinamentos e várias lições que me proporcionou.

Enfim, quero agradecer a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a concretização deste trabalho.

“Os limites de minha linguagem significam os limites de meu mundo”

Ludwig Wittgenstein

TORTOLA, Emerson. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

RESUMO

O desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática tem se configurado como uma alternativa pedagógica que pode potencializar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, uma vez que favorece a interação entre linguagem matemática e diferentes linguagens utilizadas nas práticas cotidianas, contribuindo para que os estudantes se tornem cidadãos críticos, capazes de participar ativamente nas tomadas de decisões em prol da sociedade. Com essas características, a Modelagem Matemática vem conquistando espaço no âmbito da Educação Matemática, atingindo cada vez mais a sala de aula, porém, ainda são poucos os estudos que contemplam tal alternativa nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nesse sentido, propomos o desenvolvimento de uma série de atividades de Modelagem Matemática, segundo os três momentos sugeridos por Almeida e Dias (2004), a uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Pública e Municipal, localizada no Norte do Estado do Paraná, com o intuito de investigar os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática. Para isso nos baseamos em três referenciais teóricos: a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática; a Linguagem, sob uma perspectiva wittgensteiniana; e os Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval. Os resultados apontam para a emergência de diversos jogos de linguagens, dos quais, segundo a forma de vida envolvida, resulta a produção de diferentes representações semióticas, que se diferem dos demais níveis de escolaridade pela linguagem utilizada, mas mantendo semelhanças de família entre eles. Os diferentes modelos matemáticos, produzidos pelos estudantes, têm características específicas neste nível de escolaridade em decorrência dos usos que eles fazem da linguagem, os quais orientam o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Modelos matemáticos. Anos iniciais. Linguagem. Registros de representações semióticas.

TORTOLA, Emerson. **The uses of language in Mathematical Modelling activities in the first years of Elementary School**. 2012. 168 f. Dissertation (Masters in Teaching Science and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

ABSTRACT

The development of Mathematical Modeling activities has been configured as an alternative pedagogy that can potentiate the teaching and learning of Mathematics, since it favors the interaction between mathematical language and different languages used in daily practices, contributing to students become critical citizens, able to participate actively in decision-making on behalf of society. With characteristics, the Mathematical Modeling is gaining space in Mathematics Education, increasingly affecting the classroom, however, there are few studies that consider such an alternative in the early years of Elementary School. Accordingly, we propose the development of a series of Mathematical Modeling activities, according to the three stages suggested by Almeida and Dias (2004) to a group of 4th year of Elementary School a Public School and Municipal, located in the North of Paraná State, in order to investigate the uses of language in Mathematical Modeling activities. For this we base on three theoretical frameworks: Mathematical Modeling in Mathematics Education; Language, under a wittgensteinian perspective, and the Registers of Semiotic Representations of Raymond Duval. The results point to the emergence of several language games, of which, according to the way of life involved, resulting in the production of different semiotic representations, which differ from other levels of education by the language used, but keeping family resemblances between them. The different mathematical models, produced by students, have specific characteristics in educational level as a result of the uses they make of language, which guide the development of Mathematical Modeling activities.

Key-words: Mathematical modeling. Mathematical models. Early years. Language. Registers of semiotic Representations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquema de uma atividade de Modelagem Matemática 27
Figura 2 – Fases da Modelagem Matemática 28
Figura 3 – Diferentes momentos da Modelagem Matemática na sala de aula 33
Figura 4 – Registro gráfico de uma função quadrática 54
Figura 5 – Exemplo de problema envolvendo o preço da gasolina 56
Figura 6 – Registro gráfico para o exemplo do preço da gasolina 58
Figura 7 – Registro Figural para o exemplo do preço da gasolina 58
Figura 8 – Registro geométrico para o exemplo do preço da gasolina 58
Figura 9 – Exemplos de Tratamento para o problema do preço da gasolina 59
Figura 10 – Folha reduzida com informações a respeito do tema „Tamanho de Anéis" 73
Figura 11 – Texto com informações referente à atividade dos anéis 73
Figura 12 – Moldes para os anéis de tamanhos pares 74
Figura 13 – Problema proposto aos estudantes para investigação 74
Figura 14 – Estratégia de medida utilizada pelos estudantes 76
Figura 15 – Modelos matemáticos para o problema de Tamanho de Anéis 77
Figura 16 – Resposta do Estudante 30 para o problema do „Tamanho de Anéis" 78
Figura 17 – Resposta do Estudante 16 para o problema do „Tamanho de Anéis" 78
Figura 18 – Texto com as informações a respeito dos anéis 80
Figura 19 – Informações selecionadas pelos estudantes 80
Figura 20 – Nomeação dada pelo Estudante 22 ao fecho 81
Figura 21 – Simplificação realizada pelos estudantes 82
Figura 22 – Representações dos estudantes para a segunda questão do problema 83
Figura 23 – Uso da régua para medir o fecho 85
Figura 24 – Diferentes tipos de modelos matemáticos para o problema dos anéis 86
Figura 25 – Tabela para a Estudante 9 86
Figura 26 – Gráfico dos tamanhos de anéis 87
Figura 27 – Síntese da resolução dos estudantes para o problema dos tamanhos de anéis 88
Figura 28 – Folha com informações a respeito do tema „Espaço dos estudantes na sala de aula" 90
Figura 29 – Texto com informações e problema da atividade „Espaço dos estudantes

na sala de aula" 91
Figura 30 – Informações selecionadas pela Estudante 5 92
Figura 31 – Representação dos gestos do Estudante 16 para comprimento e largura..... 93
Figura 32 – Representações do espaço na sala de aula destinado aos estudantes 94
Figura 33 – Cálculo da área apenas com números inteiros 94
Figura 34 – Cálculo da área considerando os Números Racionais representados na forma decimal 94
Figura 35 – Aproximação do Estudante 21 para o cálculo da área 95
Figura 36 – Modelos matemáticos para calcular o espaço dos estudantes na sala de aula 95
Figura 37 – Operações realizadas pela Estudante 33 para solucionar o problema proposto..... 97
Figura 38 – Resposta da Estudante 33 para o problema 98
Figura 39 – Área sob um ponto de vista geométrico..... 99
Figura 40 – Termos apropriados para o jogo de linguagem da multiplicação 100
Figura 41 – Síntese da resolução dos estudantes para o problema da área dos estudantes na sala de aula 101
Figura 42 – Donald e o retângulo áureo 104
Figura 43 – Relações áureas no corpo humano 104
Figura 44 - olha com informações a respeito do tema „Beleza" – Frente e verso 105
Figura 45 – Texto com informações e problema da atividade relacionada à beleza..... 106
Figura 46 – Tabela com as relações áureas 106
Figura 47 – Tabela preenchida pela Estudante 27 107
Figura 48 – Quocientes obtidos pela Estudante 27 108
Figura 49 – Protocolos de alguns estudantes comparando os quocientes obtidos 108
Figura 50 – Registros de estudantes que ainda não relacionaram o número de ouro com a beleza..... 109
Figura 51 – Algoritmo da divisão conhecido pelos estudantes 112
Figura 52 – Aproximação realizada pelos estudantes dos Números Racionais 113
Figura 53 – Exemplo de conversão de tabela para lista 113
Figura 54 – Segmento Áureo 115
Figura 55 – Séries que convergem para o número de ouro 115
Figura 56 – Representações geométricas para a razão áurea 116
Figura 57 – Número de ouro na natureza, em obras de arte e em construções

humanas 116
Figura 58 – Conclusões dos estudantes em relação aos quocientes 117
Figura 59 – Síntese da resolução dos estudantes para o problema da beleza 118
Figura 60 – Problema formulado pelos estudantes em relação ao câmbio Dólar-Real 120
Figura 61 – Valor do dólar no dia 28/11/2011 121
Figura 62 – Informações a respeito do dólar 121
Figura 63 – Valores para compra e venda do dólar comercial e turismo 121
Figura 64 – Operações realizadas pelos estudantes em relação ao problema do câmbio Dólar-Real 122
Figura 65 – Respostas dos estudantes para o problema da Relação Dólar-Real 123
Figura 66 – Cartazes confeccionados pelos grupos para a atividade Relação Dólar-Real 123
Figura 67 – Representações para as informações coletadas pelos estudantes 124
Figura 68 – Representações para o cálculo do câmbio Dólar-Real 125
Figura 69 – Exemplo de tratamento entre as representações numéricas 125
Figura 70 – Modelos matemáticos para o problema do câmbio Dólar-Real 126
Figura 71 – Representação gráfica da função linear $f(x) = 1,86.\ x$ 126
Figura 72 – Síntese da resolução dos estudantes para o problema da relação Dólar-Real 128
Figura 73 – Informações e curiosidades para o problema relacionado ao flúor 129
Figura 74 – Informações obtidas na entrevista com a diretora da escola 132
Figura 75 – Cálculo do rendimento de bochechos com um litro (Estudante 31) 132
Figura 76 – Cálculo da quantidade de solução de flúor necessária para os 155 estudantes 133
Figura 77 – Número de saches utilizado em um dia de higienização 133
Figura 78 – Gastos com flúor em um dia de higienização 134
Figura 79 – Resposta para o problema referente aos gastos com o flúor nessa escola 134
Figura 80 – Variáveis envolvidas no problema referente aos gastos com o flúor 136
Figura 81 – Hipóteses e Simplificações para a atividade „gastos com o flúor" 137
Figura 82 – Linguagem numérica utilizada na resolução da atividade relacionada ao flúor 137

Figura 83 – Uso da linguagem algébrica para expressar o modelo matemático da situação referente ao flúor 138
Figura 84 – Uso da linguagem gráfica para expressar o modelo matemático da situação referente ao fluor 139
Figura 85 – Síntese da resolução dos estudantes para o problema dos gastos com o flúor 141
Figura 86 – Coordenação entre registros em atividades de Modelagem Matemática 149

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Registro Tabular para o exemplo do preço da gasolina 57
Tabela 2 – Relação entre as variáveis „Número de molde" e „Medida do dedo" 87
Tabela 3 – Uso da linguagem tabular para expressar o modelo matemático da situação referente ao flúor.. 139

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO - DELINEANDO OS CAMINHOS DA PESQUISA 16

APRESENTAÇÃO DO TEMA E JUSTIFICATIVA 16

OBJETIVO DA PESQUISA 21

ESTRUTURA DO TEXTO 22

CAPÍTULO 1 - MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: DISCUTINDO O ASSUNTO 24

1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 24

1.2 MODELO MATEMÁTICO 28

1.3 ENCAMINHAMENTO PARA A SALA DE AULA 32

1.4 MODELAGEM MATEMÁTICA E MODELO MATEMÁTICO: UM OLHAR SOBRE OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL ....

CAPÍTULO 2 - LINGUAGEM E SEMIÓTICA: NOSSO MEIO DE ACESSO AO MUNDO E SUAS MANIFESTAÇÕES 41

2.1 LINGUAGEM: UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA 41

2.2 JOGOS DE LINGUAGEM: O JOGO DAS PALAVRAS 44

2.3 SEMELHANÇAS DE FAMÍLIA: HÁ ALGO EM COMUM? 46

2.4 FORMAS DE VIDA: O PAPEL DO CONTEXTO NOS JOGOS DE LINGUAGEM 48

2.5 UM COMPLEXO DE REGRAS: A GRAMÁTICA WITTGENSTEINIANA 50

2.6 REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS COMO DIFERENTES MANIFESTAÇÕES DE LINGUAGEM 52

2.7 A LINGUAGEM MATEMÁTICA COMO FOCO 60

CAPÍTULO 3 - ASPECTOS METODOLÓGICOS: O CAMINHAR DA PESQUISA 62

3.1 CONTEXTO DA PESQUISA 62

3.1.1 O Projeto “Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática” 62

3.1.2 A Turma 64

3.1.3 As atividades e sua condução 64

3.1.4 A coleta dos dados 67

3.1.5 A análise dos dados 67

3.2 NATUREZA DA PESQUISA 69

CAPÍTULO 4 - A LINGUAGEM NAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS 72
4.1 AS ANÁLISES LOCAIS: UM OLHAR SOBRE CADA ATIVIDADE 72
4.1.1 Atividade 1 – Tamanho de Anéis 72
4.1.1.1 Descrição da Atividade 72
4.1.1.2 Análise da Atividade 79
4.1.2 Atividade 2 – Espaço dos Estudantes na sala de aula 90
4.1.2.1 Descrição da Atividade 90
4.1.2.2 Análise da Atividade 96
4.1.3 Atividade 3 – Medindo a beleza de uma pessoa 103
4.1.3.1 Descrição da Atividade 103
4.1.3.2 Análise da Atividade 110
4.1.4 Atividade 4 – Relação entre as moedas Dólar e Real 120
4.1.4.1 Descrição da Atividade 120
4.1.4.2 Análise da Atividade 124
4.1.5 Atividade 5 – Gastos com o Flúor 129
4.1.5.1 Descrição da Atividade 129
4.1.5.2 Análise da Atividade 135
4.2 UMA ANÁLISE GLOBAL: O QUE NOS MOSTRAM AS ATIVIDADES? 142

CONSIDERAÇÕES FINAIS ....

CONCLUSÕES E REFLEXÕES A RESPEITO DA PESQUISA 152

REFERÊNCIAS 156

APÊNDICES 163
APÊNDICE A – FOLHA COM INFORMAÇÕES DA ATIVIDADE „TAMANHO DE ANÉIS" 164
APÊNDICE B – FOLHA COM INFORMAÇÕES DA ATIVIDADE „ESPAÇO DOS ESTUDANTES NA SALA DE AULA" 165
APÊNDICE C – FOLHA COM INFORMAÇÕES DA ATIVIDADE „ENERGIA ELÉTRICA" 166
APÊNDICE D – FOLHA COM INFORMAÇÕES DA ATIVIDADE „MEDINDO A BELEZA DE UMA PESSOA" 167

INTRODUÇÃO

DELINEANDO OS CAMINHOS DA PESQUISA

APRESENTAÇÃO DO TEMA E JUSTIFICATIVA

A Matemática surgiu em nossas vidas como resposta às necessidades do ser humano de organizar-se em sociedade. O uso de uma linguagem apropriada para abordar os problemas da época resultou no desenvolvimento de uma ciência que hoje se faz presente em inúmeras situações, seja nas tarefas mais simples do dia a dia ou nas práticas mais complexas, relacionadas ao desenvolvimento de novas tecnologias e da própria Matemática.

Os estudos associados a essa ciência, no âmbito escolar, têm por objetivo preparar os estudantes para o uso da linguagem matemática, uma vez que o estudo da Matemática só é possível na e pela linguagem, devido à natureza conceitual e não física de seus objetos, sendo assim, a "linguagem fornece algum tipo de meio para criar, preservar e comunicar o pensamento matemático" (BROWN, 2001, p. 192, tradução nossa[1]).

Todavia, as práticas matemáticas que constituem o cenário escolar não podem se restringir ao estudo da linguagem matemática, uma vez que tal atitude pode provocar um distanciamento entre os conteúdos estudados na escola e as práticas cotidianas, de modo que os estudantes possam aprender os conteúdos matemáticos, mas quando se deparam com situações em que seu uso é necessário, não sabem colocá-los em prática.

Neste contexto, estudos e pesquisas têm sido realizados no âmbito da Educação Matemática, na intenção de propor novas estratégias que possam contribuir para o ensino e aprendizagem da Matemática e sua utilização no cotidiano. Uma dessas estratégias é a Modelagem Matemática, uma alternativa pedagógica que permite o estudo da Matemática a partir de temas diversos da realidade, sejam eles matemáticos ou não, oportunizando ao estudante o transitar entre a linguagem natural do fenômeno sob investigação e a linguagem matemática. Desta forma, a Modelagem Matemática pode propiciar aos estudantes o estabelecimento de conexões entre Matemática e realidade, como aponta Borromeo Ferri

[1] Texto original: language provides some sort of medium for creating, preserving and communicating mathematical thinking.

(2010), além de contribuir para o ensino e aprendizagem da Matemática, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Face ao exposto, nos propomos, nesta pesquisa, investigar os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois acreditamos que esse é o momento propício para os estudantes aprenderem a lidar com diferentes linguagens, uma vez que eles estão iniciando o estudo da linguagem matemática. Para esta pesquisa, olhamos para os registros produzidos pelos estudantes durante as atividades de Modelagem[2], a fim de analisar a linguagem a partir das representações utilizadas por eles na produção dos modelos matemáticos. Para o desenvolvimento das atividades, assumimos a Modelagem Matemática na perspectiva de Almeida e Brito (2005), como alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem por meio da Matemática, de uma situação problema não essencialmente matemática.

Na esfera da Educação Matemática, os estudos a respeito da Modelagem têm apresentado uma tendência de crescimento, conforme aponta Silveira (2007) em sua pesquisa a respeito das teses e dissertações desenvolvidas no Brasil e, em um cenário internacional, Blum e Borromeo Ferri (2009, p. 45, tradução nossa[3]), afirmam ser a Modelagem Matemática “um dos tópicos em Educação Matemática que tem sido discutido e propagado mais intensamente durante as últimas décadas”.

Entretanto, esse crescimento nas pesquisas não diz respeito apenas à quantidade, mas à diversidade de assuntos e enfoques que estão associados à Modelagem. Nesta pesquisa, optamos por investigar a linguagem em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A linguagem tem um importante papel em nossas vidas, é por meio dela que podemos estruturar nossas ideias, expor nossos pensamentos e nos comunicar com as pessoas. Ela é responsável pela mediação entre pessoas e mundo.

No que diz respeito ao ensino e aprendizagem, Vygotsky (2008) coloca que:

---

[2] Neste texto, utilizamos os termos Modelagem e Modelagem Matemática como sinônimos.
[3] Texto original: one of the topics in mathematics education that has been discussed and propagated most intensely during the last few decades.

> A formação de conceitos é o resultado de uma atividade complexa, em que todas as funções intelectuais básicas tomam parte. No entanto, o processo não pode ser reduzido à associação, à atenção, à formação de imagens, à inferência ou às tendências determinantes. Todas são indispensáveis, porém insuficientes sem o uso do signo, ou palavra, como o meio pelo o qual conduzimos as nossas operações mentais, controlamos o seu curso e às canalizamos em direção à solução do problema que enfrentamos (p. 72-73).

A importância da linguagem no âmbito da Matemática justifica-se pela necessidade do uso de signos[4] e palavras para representar e lidar com os objetos matemáticos, uma vez que o acesso a esses objetos só é possível mediante o uso de representações e seu estudo está intrinsecamente associado ao uso de linguagens apropriadas, devido à natureza conceitual e abstrata dos mesmos, nesse sentido, os usos adequados de uma linguagem podem auxiliar na formação de conceitos, segundo Vygotsky (2008), e na construção e transmissão do conhecimento matemático, conforme aponta Gottschalk (2008).

É nesse sentido que desenvolvemos nossa investigação. Vislumbramos nesta pesquisa o estudo do uso que estudantes, dos anos iniciais do Ensino Fundamental, fazem das palavras, bem como dos ‘signos’ que utilizam em suas representações na produção de modelos matemáticos. Assim, o foco está na linguagem utilizada por esses estudantes durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.

A linguagem foi, e ainda é, objeto de pesquisa de muitos estudiosos, e sua filosofia, a filosofia da linguagem, constitui um ramo de estudo essencial à Filosofia, como uma peça de um quebra-cabeça, que se torna importante na medida em que o completa. Dentre os estudiosos que se dedicaram ao estudo da linguagem e de seu funcionamento, destacamos o filósofo e lógico austríaco Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889 – 1951), pois é especialmente em suas contribuições para a filosofia da linguagem que nos embasamos para a realização desta pesquisa.

As contribuições de Wittgenstein para com a filosofia da linguagem são comumente divididas em duas fases, marcadas na literatura especialmente pela publicação de duas de suas obras: o *Tractatus Logico-Philosophicus* e as *Investigações Filosóficas*.

O primeiro livro, *Tractatus Logico-Philosophicus* (1918), caracteriza o período em que Wittgenstein defendia uma concepção essencialista da linguagem, a questão que permeava seus pensamentos e de muitos outros filósofos dessa época era: O que é linguagem? A busca por uma definição última para a linguagem debruçava-se sobre os

[4] As discussões em relação à noção de “signo” podem ser encontradas no capítulo 2, na seção 2.6.

princípios e fundamentos da lógica, abrangendo traços característicos de uma perspectiva metafísica. O que nos parece, é que esta visão está carregada de um misticismo, ao acreditar que a razão de muitos dos problemas filosóficos está enraizada na má compreensão da lógica de nossa linguagem. A ideia de que "cada palavra da linguagem designa alguma coisa" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 21, § 13) ilustra essa concepção. Defende-se que existe uma relação unívoca entre as palavras e objetos do mundo, ou seja, "[...] toda palavra tem um significado. Este significado é atribuído à palavra. Ele é o objeto que a palavra designa" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 15, § 1). As produções, cujos pressupostos se embasam nessa concepção tractatiana de linguagem, são reflexos das ideias propostas pelo Primeiro Wittgenstein, como o autor é referido nos estudos relativos a esta primeira concepção de linguagem (MORA, 2004).

Já na publicação do segundo livro citado, *Investigações Filosóficas* (1953), a concepção de linguagem com a qual Wittgenstein trabalha difere daquela abordada no *Tractatus*. Alguns autores acreditam que é uma nova visão de linguagem, outros que é uma visão complementar à anterior, contudo, essa discussão foge ao escopo deste texto, no qual nos preocupamos, especialmente, com as propostas inovadoras deste segundo livro e com o conteúdo de suas proposições. O livro representa um importante marco na história da filosofia da linguagem, como resultado da 'virada linguística'. Essa, que aconteceu por volta do final do século XIX e início do século XX, teve Wittgenstein como um de seus principais idealizadores. Ele propõe um novo olhar para a linguagem, segundo o qual devemos abandonar a busca pela essência e admitir a existência de não apenas 'a' linguagem, mas de diversas 'linguagens'.

A questão desta nova perspectiva não repousa mais na busca por descobrir o que é linguagem, mas sobre o seu funcionamento, a partir dos usos que fazemos das palavras. Atribuímos os créditos dessa visão pragmática de linguagem, emergente do livro *Investigações Filosóficas*, ao Segundo Wittgenstein, nomeação associada ao autor, para fazer referência aos estudos que envolvem os pressupostos e ideias suscitadas a partir dessa obra (MORA, 2004).

É nas considerações do Segundo Wittgenstein[5] a respeito da linguagem que nos embasamos para o desenvolvimento desta pesquisa.

A linguagem está intimamente ligada à fala e, assim, ao uso das palavras, cuja relação com os objetos do mundo é demarcada por um complexo de significados, os quais são historicamente construídos e transmitidos de geração a geração, de um grupo social para outro. Contudo, a linguagem não se limita à fala ou à escrita, envolve também gestos, sons, representações gráficas, dentre outros registros semióticos. Nessa perspectiva, ela é mais do que um sistema convencional de signos, pois é a partir dos usos das palavras, dos usos da linguagem, que se formam os conceitos (VYGOTSKY, 2008). Apesar de termos optado por uma abordagem a respeito da linguagem que se aproxima mais de uma linha filosófica, não podemos nos afastar demasiadamente do que em Matemática é tão importante, os registros escritos, as representações semióticas[6], pois são nesses registros que encontramos evidências das representações utilizadas pelos estudantes e, por sua vez, da linguagem utilizada pelos mesmos. Para contemplar tais aspectos, buscamos suporte na teoria dos Registros de Representações Semióticas, de Raymond Duval.

De acordo com Duval (2011a, p. 13) o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas e estas formam "condição essencial para a evolução do pensamento matemático". Ainda segundo o autor, as representações semióticas são elementos de um sistema semiótico, cujas representações constituem signos. Sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e a própria língua natural, são alguns exemplos de representações semióticas. Assim, vemos nas representações, identificadas nos registros dos estudantes, uma boa oportunidade para estudar a linguagem utilizada, manifesta por meio dos signos e das representações que a constituem. Buscamos nas representações subsídios para fazermos inferências a respeito da linguagem, que aqui é analisada sob a ótica da teoria de Duval, em consonância com as ideias de Wittgenstein e em conformidade com o contexto propiciado pelas atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas.

Fundamentados nas ideias de Wittgenstein, pensamos que a posição mais ingênua e imediata em relação à linguagem é acreditar que o significado das palavras é o

[5] Ao assumir os pressupostos teóricos do 'Segundo Wittgenstein' como um dos pilares de base para nossa pesquisa, consideramos desnecessário e repetitivo o uso dessa expressão. Assim, a partir deste momento, sempre que nos reportarmos ao Segundo Wittgenstein, utilizaremos apenas o termo 'Wittgenstein'.
[6] As discussões em relação à noção de representações semióticas são realizadas no Capítulo 2, seção 2.6.

próprio objeto ao qual elas fazem referência. Neste sentido, Duval (2011a, p. 21), defende a ideia de que “não se deve jamais confundir um objeto e sua representação”. Já Wittgenstein (2012, p. 38, § 43) afirma que “o significado de uma palavra é seu uso na linguagem” e não o objeto a que ela se refere.

Assim, a base teórica de nossa pesquisa é constituída sobre três pilares: a Modelagem Matemática, a Linguagem e a teoria dos Registros de Representações Semióticas. Trata-se de um estudo com abordagem qualitativa e que está associado ao desenvolvimento do projeto ‘Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática’, financiado pelo ‘Programa Observatório da Educação’, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), em parceria com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), em vigência no período de 2011 a 2014 e que tem por objetivo fomentar estudos e pesquisas relacionados à formação de professores que ensinam Matemática, bem como contribuir com a melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática.

OBJETIVO DA PESQUISA

Os estudos que envolvem a Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental são poucos[7], conforme indicam Luna e Alves (2007), Silveira (2007), Dias e Chaves (2009) e Dias e Smith (2010), e revelam a existência de um vasto campo de pesquisa ainda a ser explorado. Esses estudos nos fornecem alguns indícios de como é um modelo matemático neste nível de escolaridade, contudo, reforçam a necessidade de um estudo mais cauteloso em relação à linguagem nesse contexto, uma vez que a linguagem utilizada pelos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental difere-se das linguagens utilizadas por estudantes de outros níveis de escolaridade, especialmente no que se refere ao uso de signos e representações específicos da Matemática.

Em virtude dessa complexidade que paira sobre a linguagem no que condiz ao seu uso em Matemática, esta pesquisa tem como objetivo investigar os usos que estudantes de anos iniciais do Ensino Fundamental fazem da linguagem para o desenvolvimento de modelos matemáticos. Neste contexto, apontamos algumas questões que orientam o desenvolvimento desta investigação:

[7] Alguns exemplos são apontados na seção 1.4 do Capítulo 1.

Como os estudantes de uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental representam seus modelos matemáticos? Quais jogos de linguagem[8] são constituídos na produção e interpretação desses modelos? E por fim, qual o papel da linguagem em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por esses estudantes dos anos iniciais?

ESTRUTURA DO TEXTO

O texto desta dissertação está organizado em quatro capítulos e aborda os aspectos teóricos e metodológicos que tomamos como base para realização da pesquisa e que nortearam o seu desenvolvimento, bem como as análises e as discussões das atividades desenvolvidas pelos estudantes e os resultados e conclusões obtidas a partir da pesquisa. Nossa base teórica se fundamenta sobre três pilares: a Modelagem Matemática, a Linguagem e os Registros de Representações Semióticas; e a metodologia está em consonância com uma pesquisa de abordagem qualitativa.

A estrutura contempla uma Introdução, na qual delineamos os caminhos da pesquisa, apresentamos o tema e a justificativa pela escolha do mesmo, apontamos os objetivos e as questões que orientaram o desenvolvimento da investigação.

No Capítulo 1 abordamos a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática, discutimos o que é um modelo matemático, o encaminhamento para a sala de aula e apontamos alguns trabalhos de Modelagem Matemática já desenvolvidos no âmbito dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

No Capítulo 2 abordamos a linguagem sob uma perspectiva voltada para os pressupostos de Wittgenstein, cujas concepções estão fundamentadas no período que sucede a virada linguística e tem como referência, especialmente, o livro Investigações Filosóficas. Discutimos a respeito dos ‘jogos de linguagem’ e de seu papel na esfera das palavras, nos usos que delas fazemos e nas implicações desses usos nas aulas de Matemática. Atentamo-nos às suas características, à complexa rede de semelhanças que os entrelaçam, bem como às regras que formam sua gramática e que regem suas relações, de acordo com as ‘formas de vida’ que as constituem. Fazemos algumas reflexões a respeito da Matemática como

[8] A noção de jogos de linguagem é discutida no Capítulo 2, na seção 2.

linguagem e dos jogos de linguagem que podem emergir a partir de um ambiente proporcionado pela Modelagem Matemática. Neste capítulo discutimos também algumas noções da teoria dos Registros de Representações Semióticas, de Duval, apresentando o que é um signo e argumentando sobre o que eles diferem das representações, bem como sobre a relação entre signos e objetos, em particular, os objetos matemáticos. Por fim, refletimos sobre o papel das 'representações semióticas' no âmbito da Matemática, em como podem auxiliar na análise da linguagem utilizada durante as atividades de Modelagem.

No Capítulo 3 revelamos os aspectos metodológicos que nortearam o caminhar da pesquisa. Discutimos o que é uma pesquisa qualitativa, bem como suas características. Apontamos pontos que nos dão subsídios para argumentar quanto à convergência de nossa pesquisa para com esta abordagem e descrevemos os procedimentos e instrumentos utilizados para a realização da mesma.

No Capítulo 4, apresentamos as atividades de Modelagem Matemática que foram desenvolvidas pelos estudantes. Analisamos e discutimos cinco destas atividades à luz do referencial teórico adotado, e, sempre que necessário, fazemos alusão aos registros dos estudantes, assim, ao longo do texto apontamos recortes de alguns desses registros para ilustrar essas análises e discussões. Encerramos o capítulo com algumas análises mais gerais, que encaminham para a solução das questões que nos propomos investigar.

Para finalizar, nas Considerações Finais, apresentamos as conclusões e reflexões em relação aos usos da linguagem nas atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com vistas ao problema que suscitou nesta investigação.

E, por fim, apresentamos as Referências que fundamentaram e subsidiaram o desenvolvimento desta pesquisa.

CAPÍTULO 1

MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: DISCUTINDO O ASSUNTO

1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Apesar de a inserção da Modelagem Matemática ser recente no âmbito da Educação Matemática, segundo Rosa e Orey (2012, p. 272), ela "se manifesta desde os tempos mais remotos, através de situações isoladas e pouco sistematizadas, nas quais a humanidade utilizou o conhecimento matemático para entender e compreender os fenômenos da vida cotidiana". Em consonância com essa ideia, Chaves e Santo (2008, p. 154) colocam que a "Modelagem Matemática pode ser considerada como um processo intrínseco da construção da Matemática, pois, foi a modelagem de problemas reais na forma de linguagem matemática que propiciou a construção de grande parte dessa ciência, através da ampliação ou da adequação dos modelos à realidade".

No desenrolar da história, como resultado dos processos sócio-culturais, a Matemática desenvolveu uma linguagem própria e constituiu um modo de pensar que lhe é característico, e diante desse fato, Rosa e Orey (2012, p. 273) afirmam que nosso objetivo, na qualidade de professores de Matemática, é "levar os alunos ao entendimento desta linguagem e à aplicação do raciocínio matemático na resolução de situações-problema contextualizadas". Não se trata, portanto, como adverte Barbosa (2004, p. 3), de "contextualizar a matemática, mas de discuti-la à luz de um contexto que não é o da área específica".

A Modelagem Matemática, neste contexto, pode ser entendida a partir da perspectiva de Bassanezi (2004, p. 16), como a "arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real", de modo que o ensino de Matemática possa ser estimulante, útil e interessante; e, por que não, visto como fonte de prazer? Bassanezi (2004, p. 16, grifos do autor) acredita que "a matemática não deve ser considerada importante simplesmente por alguma definição arbitrária ou porque *mais tarde ela poderá ser aplicada*", sua importância deve também estar associada à possibilidade de ser tão agradável quanto interessante.

E, de acordo com Almeida e Dias (2004, p. 25) a Modelagem Matemática vem ao encontro dessa ideia, podendo se configurar como:

> [...] uma alternativa para o ensino e aprendizagem da Matemática escolar, que pode proporcionar aos alunos oportunidades de identificar e estudar situações problema de sua realidade, despertando maior interesse e desenvolvendo um conhecimento mais crítico e reflexivo em relação aos conteúdos da Matemática.

Assim como Bassanezi (2004), as autoras vêem na Modelagem Matemática a oportunidade de estudar a Matemática sob outro olhar, não como uma linguagem restrita ou isolada, mas que vem ao encontro das diferentes linguagens utilizadas no mundo real, possibilitando a interação entre elas e, com isso, o estudo de situações mais próximas a suas práticas cotidianas.

Tais características da Modelagem Matemática corroboram para a formação de cidadãos mais críticos e participativos nas tomadas de decisões da sociedade, assim como aponta Barbosa (2003, p. 68):

> Se estamos interessados em educar matematicamente os nossos alunos para agir na sociedade e exercer a cidadania - e esse é o objetivo da educação básica -, podemos tomar as atividade de Modelagem Matemática como uma forma de desafiar a ideologia da certeza e colocar lentes críticas sobre as aplicações da matemática.

Para o autor, essa formação é possível porque o ambiente de Modelagem Matemática está associado, essencialmente, a duas características, à problematização, na medida em que os estudantes necessitam fazer perguntas, formular questões e criar problemas; e à investigação, ato que se refere à busca, seleção, organização e manipulação das informações, bem como à reflexão sobre elas; trata-se de duas atividades intrínsecas, que se articulam na medida em que o estudante se envolve na abordagem do tema, podendo resultar em questões e investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo.

As ações de problematização e investigação, características da Modelagem Matemática, quando estimuladas, podem tornar as aulas de Matemática mais interessantes e levar os estudantes a desenvolver a habilidade de lidar criticamente com situações problema que envolvem a Matemática, seja na escola ou em outras situações de sua vida, como colocam Almeida e Dias (2004), pois levam os estudantes a pensar e refletir as informações e as variáveis envolvidas, bem como as possibilidades e estratégias de resolução.

É nesse cenário que a Modelagem Matemática vem se solidificando como uma importante alternativa pedagógica, que apresenta possibilidades para o ensino de Matemática, cuja abordagem tem produzido resultados positivos, em favor da aprendizagem, e é nesse sentido, que propomos a Modelagem Matemática nesta pesquisa, "como uma abordagem, por meio da Matemática, de um problema não essencialmente matemático" (ALMEIDA e BRITO, 2005, p. 487), na qual os estudantes devem buscar na Matemática subsídios para solucionarem problemas que se fazem presentes nas práticas do ser humano, direta ou indiretamente.

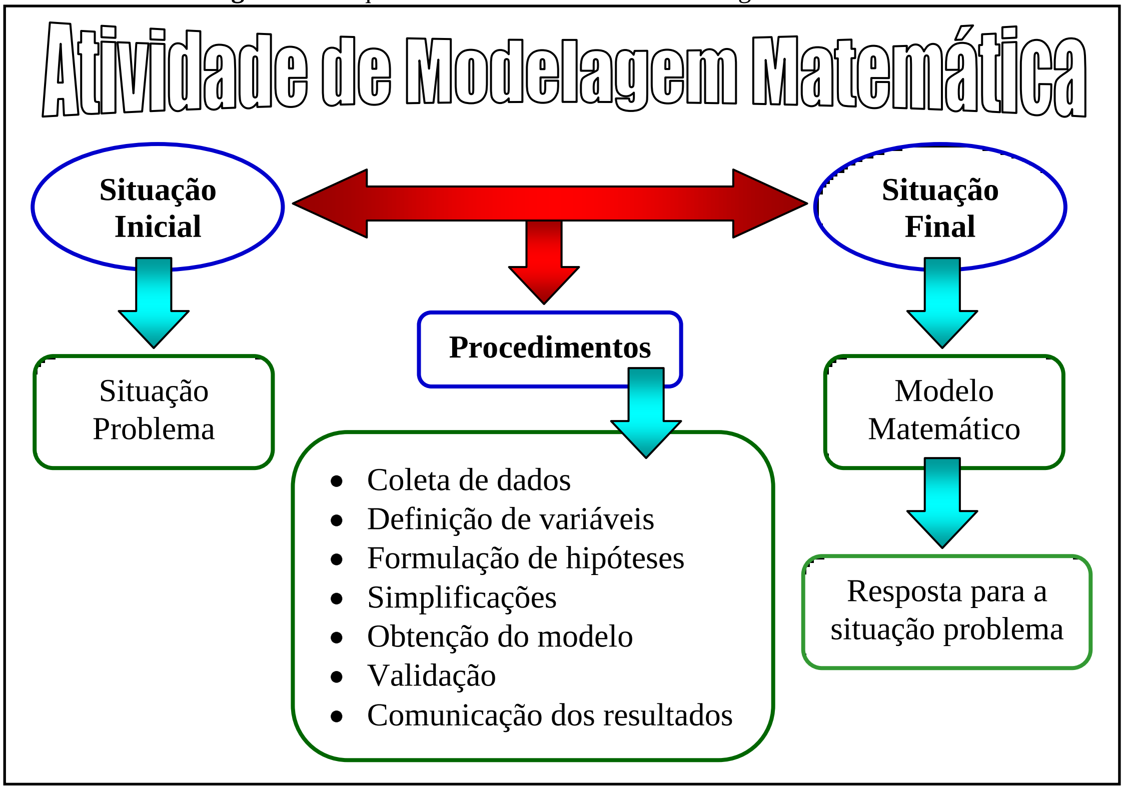
Sob essa perspectiva, a Modelagem Matemática envolve "um processo que liga o *mundo real* e a *matemática* nos dois sentidos: da realidade para a matemática e – isto é importante – no sentido contrário, da matemática para a realidade" (BORROMEO FERRI, 2010, p. 19, grifos da autora), estimulando, assim, o estabelecimento de relações entre a linguagem matemática e as diferentes linguagens, cujos usos podem ser observados no mundo real. O modelo matemático é o que possibilita essa conexão.

No contexto de uma discussão didática, a Modelagem Matemática "significa, de uma forma pragmática, resolver problemas da vida real com a ajuda de modelos matemáticos" (BORROMEO FERRI, 2010, p. 19), os quais são expressos por meio de símbolos específicos da linguagem matemática e permitem a abordagem, por meio da Matemática, de situações problema não essencialmente matemáticas, conforme colocam Almeida e Brito (2005).

> Logo, pode-se assumir que o processo da Modelagem Matemática consiste na tradução/organização de situações-problema, provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, segundo a linguagem simbólica da Matemática, fazendo aparecer um conjunto de símbolos ou relações matemáticas – *Modelo Matemático* – que procura representar ou organizar a situação-problema proposta, com vistas a compreendê-la ou solucioná-la (CHAVES; SANTO, 2011, p. 163).

A obtenção desse modelo matemático, ao qual se referem Borromeo Ferri (2010) e Chaves e Santo (2011), está associada ao desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, que de modo geral, pode ser descrita, segundo Almeida (2010), em termos de uma situação inicial, referente à situação problema em estudo, uma situação final, referente ao modelo matemático, que representa uma solução para esse problema, e uma série de procedimentos, que permite a passagem da situação inicial para a situação final; esses procedimentos podem ser visualizados na Figura 1, na qual buscamos esquematizar a ideia apresentada pela autora.

Figura 1 – Esquema de uma atividade de Modelagem Matemática

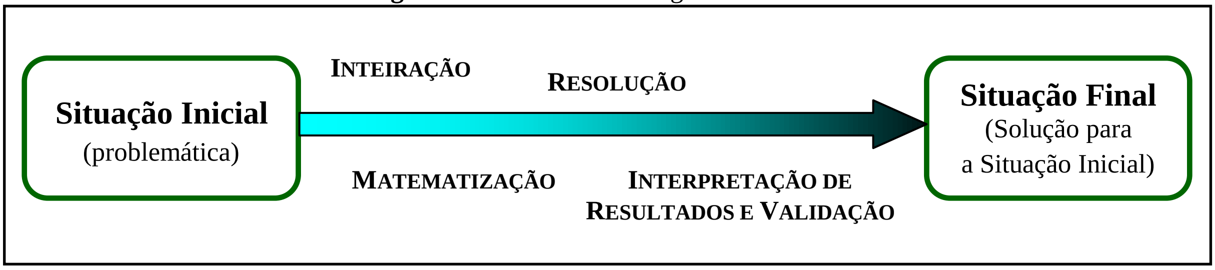


Esses procedimentos são organizados em quatro fases ou etapas conforme colocam Almeida, Silva e Vertuan (2012): inteiração, fase em que os estudantes, orientados por um problema, buscam se familiarizar com o tema sob investigação por meio da coleta de dados e informações a seu respeito; matematização, fase em que ocorre a transição da linguagem natural do fenômeno para a linguagem matemática, por meio de ações como a definição de variáveis, formulação de hipóteses, simplificações e o uso de signos e representações característicos da Matemática; Resolução, que consiste na produção de um modelo matemático, capaz de fornecer uma resposta para o problema condizente com a situação; e, finalmente, Interpretação de Resultados e Validação, fase em que ocorre a análise e interpretação dos resultados indicados pelo modelo, a partir de uma atitude avaliativa que visa a validação, ou não, do modelo matemático produzido. Caso não haja a validação do modelo, as fases anteriores devem ser retomadas, conforme a necessidade do modelador[9]. Na Figura 2, apresentamos um esquema que representa o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, que parte de uma situação inicial, problemática, em direção a uma situação final, resposta para o problema, e nesse trâmite estão as quatro fases da Modelagem, cujas fronteiras não podem ser bem definidas, uma vez que elas não ocorrem de forma linear,

[9] Entendemos por modelador qualquer pessoa que se depare com uma situação problema não essencialmente matemática, para a qual realiza uma abordagem matemática, ou seja, é aquele que realiza ou desenvolve a atividade de Modelagem Matemática.

mas sob a forma de um emaranhado de ações, que podem ser retomadas sempre que houver a necessidade.

Figura 2 – Fases da Modelagem Matemática



Fonte: Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15)

Neste contexto, Blum e Borromeo Ferri (2009) e Blum (2011) afirmam que a Modelagem Matemática pode contribuir no entendimento dos estudantes em relação ao mundo em que vivem; na aprendizagem em Matemática, auxiliando na formação, compreensão e retenção de conceitos e motivando os estudantes; no desenvolvimento de competências matemáticas e atitudes adequadas em relação a essa disciplina; e na constituição de uma imagem adequada da Matemática, afastando a ideia de que é uma disciplina destinada a poucos.

1.2 MODELO MATEMÁTICO

O uso de modelos é uma prática comum em nossas vidas. Usamos modelos em diversas situações, seja para fazer um bolo, escrever um artigo ou resolver um algoritmo; os modelos estão presentes em nossas atividades diárias e no mundo ao nosso redor.

Podemos também observar o uso de modelos ao longo da história da humanidade, os quais foram alvo de importantes descobertas e ponto de partida para novos estudos e construções. Modelos teóricos, modelos artísticos, modelos industriais, modelos matemáticos, cada qual com suas finalidades, produzidos para atender os propósitos de um determinado grupo ou instituição.

D’Ambrósio (2009) cita diversos exemplos de modelos, que foram produzidos em diferentes situações – cada qual com seus objetivos em particular –, como podemos observar no trecho a seguir.

> Uma catedral, por exemplo, é um modelo de um ambiente para respeito – enraizado em ambientes naturais místicos – percebido como um edifício com elementos arquitetônicos específicos, é um modelo de natureza artística. Uma teoria geométrica, a geometria Euclidiana, por exemplo, é um modelo teórico de formas e relações entre os componentes destas formas. O sistema cósmico, especificamente o sistema solar, foi modelado por Ptolomeu, no século I. Era extremamente importante e útil. As grandes descobertas portuguesas do século XV foram baseadas no modelo ptolomaico. Mas, como novas observações do sistema real estão disponíveis, novos elementos são introduzidos na representação e um modelo mais refinado é proposto. Assim, foi possível para Copérnico para fazer outro modelo do sistema solar, no início do século XVI (D'AMBRÓSIO, 2009, p. 92, tradução nossa[10]).

Assim também é na Matemática, novos modelos são constituídos com base em fenômenos ou em modelos anteriores, novas variáveis são envolvidas e novas relações estabelecidas, apurando mais e mais sua representação.

Existem diversos tipos de modelos, que são construídos com múltiplos objetivos, como "prever o comportamento de um fenômeno, ser demonstrativo de algo (como uma maquete), ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de algum conceito), ser descritivo de algo, entre outras" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13). Os modelos, portanto, são utilizados "para a construção, descrição ou explicação de sistemas complexos" como colocam Lesh, Carmona e Hjalmarson (2006, p. 93, tradução nossa[11]).

Para D'Ambrósio (2009, p. 91, tradução nossa[12]):

> Observações sobre o comportamento de um modelo podem servir como orientação para testes experimentais. Além disso, os modelos podem ajudar a identificar e fazer novas perguntas.
>
> Uma vez que os modelos fornecem apenas aproximações do comportamento real, eles também podem ajudar a reformular hipóteses e até mesmo formular novas, preparando o terreno para novas teorias, mais apropriadas para lidar com a questão original. Assim, os modelos podem ser mais ou menos úteis, e são submetidos a reformulações, conduzindo a melhores aproximações.

---

[10] Texto original: For example, a cathedral is a model of an ambiance for worship -- rooted in mystical natural environments – realized as a building with specific architectural elements, is a model of artistic nature. A geometric theory, for example, Euclidean geometry is a theoretical model of forms and relations among the components of these forms. Cosmic system, specifically the solar system, was modeled by Ptolemy, in the 1st century. It was extremely important and useful. The great Portuguese discoveries in the 15th century, were based on the Ptolemaic model. But as new observations of the real system are available, new elements are being introduced in the representation and a more refined model is proposed. Thus it was possible for Copernicus to make another model of the solar system, at the beginning of the 16th century.

[11] Texto original: for construction, description, or explanation of complex systems.

[12] Texto original: Observations on the behavior of a model may serve as a guide for experimental tests. Besides, models can help to identify and to ask new questions.

Since models provide only approximations of the real behavior, they also may help reformulate hypotheses and even to formulate new ones, laying the ground for new theories, more appropriate to deal with the original question. Thus, models may be more or less useful, and are subjected to reformulations, leading to better approximations.

De acordo com o autor, a prática de criar modelos e elaborar sobre eles utiliza instrumentos materiais e intelectuais e, quando utilizamos instrumentos matemáticos, essa prática constitui a Modelagem Matemática.

Com a Modelagem Matemática deixa-se de privilegiar o uso de modelos prontos e passa-se a enfatizar o processo de tradução de fenômenos ou de construção de modelos (BLUM, 1993), exigindo do modelador mais envolvimento com a situação a ser modelada, de modo que ele possa enxergar os aspectos matematizáveis dessa situação e representá-los por meio de uma linguagem ou estrutura matemática. Sua importância, segundo Bassanezi (2004), consiste em se ter uma linguagem concisa capaz de expressar nossas ideias. Trata-se, portanto, de um processo complexo, mas dinâmico e interativo.

Face ao exposto, entendemos modelo matemático na perspectiva de Lesh, Carmona e Hjalmarson (2006, p. 92, tradução nossa[13]), como "um sistema conceitual que se expressa por meio de um suporte externo de representação, e que é usado para construir, descrever ou explicar os comportamentos de outros sistemas", ou seja, os modelos matemáticos são ferramentas conceituais e de representação que nos permitem aprender, desenvolver e aplicar conceitos matemáticos relevantes, além de compreender como se dá esse entendimento.

Assim, um modelo matemático pode ser "qualquer representação matemática da situação em estudo", como coloca Barbosa (2007, p. 161), uma vez que os objetos matemáticos necessitam de representações para serem expressos, logo, modelos matemáticos são "aqueles que empregam símbolos matemáticos, sejam tabelas, gráficos, equações, inequações, etc., ou, em outras palavras, empregam conceitos, notações e/ou procedimentos matemáticos" (BARBOSA, 2009, p. 70).

Para Bassanezi (2004, p. 20) tal ideia apresentada por Barbosa (2007; 2009) significa que um modelo matemático é constituído por "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado", o que corrobora com a concepção de Lesh, Carmona e Hjalmarson (2006). Um modelo matemático é, portanto, uma representação que se dá a partir da tradução da linguagem natural do fenômeno para uma linguagem matemática (CIFUENTES; NEGRELLI, 2011) e que pode ser formulado de acordo com as situações analisadas e conforme o tipo de Matemática utilizada.

[13] Texto original: a conceptual system that is expressed by using external representational media, and that is used to construct, describe, or explain the behaviors of other systems.

Assim, a criação de um modelo matemático depende da situação que se deseja representar, bem como daquele que visa representar essa situação. Deve possibilitar a interpretação, por meio de uma linguagem matemática, da situação em questão, levando em conta o corpo de conceitos e regras da Matemática, mas também permitindo a interação entre essa linguagem matemática e a linguagem do fenômeno sob investigação, como podemos constatar no seguinte trecho.

> A utilização de modelos matemáticos da realidade depende do conhecimento de fatos e fenômenos, do comportamento reconhecível dos objetos reais e sistemas, normalmente expressos por leis, em sua maioria derivadas empiricamente. Para lidar e tirar benefícios a partir de modelos matemáticos, ferramentas intelectuais são fornecidas pela matemática, considerada um corpo de conceitos e teorias e as regras operacionais para lidar com eles (D'AMBRÓSIO, 2009, p. 92, tradução nossa[14]).

Neste contexto, um modelo matemático também "cria um pedaço da realidade" e depende das intenções e interesses do solucionador de problemas (BLUM, 1993, p. 4, tradução nossa[15]), problemas estes que dão margem a diferentes representações e, consequentemente, a diferentes modelos para uma mesma situação.

É preciso ter claro que um modelo matemático não representa fielmente a situação em questão, mas representa uma aproximação da realidade que permite uma abordagem matemática para a situação, contemplando conteúdos matemáticos que, em geral, são propostos para estudo na escola. Desta forma, além de contemplar o estudo e aplicação de conteúdos da Matemática, a produção de modelos matemáticos pode preparar o estudante para lidar com diferentes situações problema em sua vida, nas quais a linguagem matemática não aparece de maneira isolada, mas arraigada a muitas outras linguagens.

Em consonância com essa ideia, Bassanezi (2004, p. 24) alega que "a modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando representações de um sistema ou parte dele", pois um modelo matemático nada mais é do que uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação não tem um fim em si só, visa fomentar a solução de algum problema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

---

[14] Texto original: The utilization of mathematical models of reality depends on the knowledge of facts and phenomena, of the recognizable behavior of the real objects and systems, normally expressed by laws, mostly derived empirically. To deal and draw benefits from mathematical models, intellectual tools are provided by mathematics, considered a body of concepts and theories and the operations rules to deal with them.

[15] Texto original: creates a piece of reality.

Desta forma, a Modelagem configura-se como “um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos” (BASSANEZI, 2004, p. 24), e “a relação estabelecida com o objeto matemático visa a aplicação ou a produção de conhecimento matemático. Nessa perspectiva ocorrem aprendizagens, interações e criatividade” (KLÜBER; BURAK, 2009, p. 3).

A produção de um modelo matemático, portanto, envolve o estudo de conceitos matemáticos, por meio do uso de signos e representações características da Matemática e a partir da transição da linguagem natural do fenômeno para a linguagem matemática, além de contribuir com o desenvolvimento de um senso crítico e reflexivo a partir de uma atitude interpretativa em relação ao modelo matemático para com a realidade.

1.3 ENCAMINHAMENTO PARA A SALA DE AULA

O desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula exige dos estudantes uma atitude investigativa em relação à situação problema que lhes é proposta ou escolhida por eles para estudo. Contudo, quando estudantes que estão acostumados com aulas desprovidas de investigação são colocados em contato com a Modelagem, eles podem sentir-se desnorteados em relação a como proceder e em como utilizar a Matemática para solucionar o problema em estudo; neste sentido, a mudança repentina para o ambiente proporcionado pela Modelagem Matemática pode interferir de forma negativa na aprendizagem dos estudantes, indo de encontro com os objetivos que se deseja atingir quando se propõe atividades de Modelagem.

Visando evitar tais efeitos nos estudantes e potencializar o uso da Modelagem Matemática em sala de aula, favorecendo o ensino e aprendizagem em Matemática, propomos com base em Almeida e Dias (2004) a inserção de atividades de Modelagem Matemática de forma gradativa, a partir de três momentos, de modo que os estudantes, organizados em grupos, possam aos poucos se familiarizar com esse contexto.

Conforme a proposta das autoras, em um primeiro momento, o professor propõe um problema aos estudantes e fornece as informações necessárias para sua solução; cabendo aos estudantes a seleção das informações, a formulação de hipóteses, a definição de variáveis, a simplificação, a transição para a linguagem matemática e a obtenção de um modelo matemático capaz de representar a situação e solucionar o problema. Essas ações são, em certa medida, orientadas pelo professor.

Em um segundo momento, o professor sugere um problema, mas as informações devem ser coletadas ou complementadas pelos estudantes, assim como a determinação dos procedimentos matemáticos ou extramatemáticos para a investigação e a obtenção, análise e interpretação de um modelo matemático que seja válido para a situação em estudo.

E, finalmente, em um terceiro momento, os estudantes, devidamente assessorados pelo professor, são responsáveis pela condução de toda a atividade de Modelagem, desde a escolha de um tema e identificação de um problema para investigação, até a obtenção e validação de um modelo matemático, bem como sua comunicação para a comunidade escolar.

Esses diferentes momentos são esquematizados na Figura 3, por Almeida e Vertuan (2011), de modo a ilustrar essa dinâmica.

Figura 3 – Diferentes momentos da Modelagem Matemática na sala de aula

Fonte: Almeida e Vertuan (2011, p. 28)

De acordo Almeida e Dias (2004, p. 26), esse encaminhamento tem se mostrado adequado para as práticas de Modelagem Matemática em sala de aula, nos diferentes níveis de ensino, pois, na medida em que os estudantes desenvolvem as atividades segundo esses momentos, "sua compreensão acerca do processo de Modelagem, da resolução dos problemas em estudo e da reflexão sobre as soluções encontradas vão se consolidando".

O argumento utilizado em defesa da inserção de atividades de Modelagem Matemática segundo esses três momentos é a possibilidade dos estudantes desenvolverem a "habilidade de fazer modelagem" (ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p. 29). Assim, nessa proposta, há a preocupação com o modo que os estudantes interagem com o ambiente proporcionado pela Modelagem, visando a independência dos mesmos em relação aos seus procedimentos.

1.4 Modelagem Matemática e Modelo Matemático: um olhar sobre os anos iniciais do Ensino Fundamental

Em nossa pesquisa, optamos pelo desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, cujo nível de escolaridade é, internacionalmente, pouco contemplado com pesquisas desta natureza, conforme indicam estudos de Luna e Alves (2007), Silveira (2007), Dias e Chaves (2009) e Dias e Smith (2010), que corroboram com Stillman (1998), ao afirmar que tradicionalmente a Modelagem Matemática não é apresentada aos estudantes até os últimos anos da Educação Básica (por volta dos 11 e 12 anos). Em contrapartida, English e Watters (2004) defendem a ideia de que a Modelagem Matemática pode e deveria ser inserida já nos primeiros anos da Educação Básica, uma vez que os autores argumentam que nesse nível de escolaridade os estudantes já possuem uma estrutura propícia para isso. Ademais, atividades de Modelagem Matemática contribuem para o desenvolvimento de competências como:

> (a) interpretação de informações matemáticas e científicas apresentadas no texto e em forma de diagrama, (b) leitura de tabelas simples de dados, (c) coleta, análise e representação de dados, (d) preparo de relatórios escritos a partir da análise de dados; (e) trabalho cooperativo em situações em grupo, e (f) partilha dos produtos finais com os colegas de classe, por meio de relatos verbais e escritos (ENGLISH; WATTERS, 2004, p. 337, tradução nossa[16]).

No Brasil, os primeiros registros de atividades de Modelagem Matemática nesse nível de escolaridade estão associados a um curso de especialização proposto por Burak (1992) em sua tese de doutorado, no qual uma professora de 4ª série propõe a sua turma um estudo relacionado à pintura da sala de aula. Os estudantes se envolveram em um projeto que buscava quanto seria gasto na pintura e qual deveriam ser o valor e o número de rifas vendidas para que essa pintura fosse possível. O estudo proporcionou o cálculo de áreas e a realização de diversas operações elementares da Matemática e resultou na efetivação da pintura da sala de aula.

Desde então poucos estudos em Modelagem Matemática surgiram levando em consideração os anos iniciais do Ensino Fundamental. Para ilustrar a peculiaridade da Modelagem Matemática nesse nível de escolaridade, nesta seção apontamos alguns exemplos

---

[16] Texto original: (a) interpreting mathematical and scientific information presented in text and diagrammatic form; (b) reading simple tables of data; (c) collecting, analysing, and representing data; (d) preparing written reports from data analysis; (e) working collaboratively in group situations, and (f) sharing end products with class peers by means of verbal and written reports.

que nos permitem ter uma noção de como é um ambiente de Modelagem Matemática nesse contexto.

Sob uma perspectiva internacional temos como exemplo os trabalhos de English e Watters (2004; 2005), que apresentam os resultados de um programa desenvolvido na Austrália, envolvendo estudantes de quatro classes de 3ª série (aproximadamente 8 anos de idade) e seus professores. O primeiro (ENGLISH; WATTERS, 2004), aponta os resultados do primeiro ano do programa, expondo uma atividade em que os estudantes examinam o crescimento de grãos de cacau. Como situação inicial, eles deveriam analisar quais eram as melhores condições para o cultivo das sementes de cacau a fim de produzir a melhor safra, sob à luz do sol, ou, sob à sombra. Para isso, tinham disponíveis tabelas que apresentavam o peso das sementes de acordo com as semanas 6, 7 e 8 de cultivo. Os estudantes deveriam escrever uma carta para um "fazendeiro", na qual eles explanavam qual era a melhor opção, e qual era o peso previsto para a semana 12. Para a redação da carta eles utilizaram desenhos, para os quais produziram explicações, argumentando suas recomendações. Neste contexto, o modelo matemático produzido corresponde aos desenhos e as explicações dos estudantes expostos na carta. O segundo (ENGLISH; WATTERS, 2005), aponta os resultados do segundo ano do programa e expõe uma atividade que envolve a seleção de um time australiano de natação para as olimpíadas de 2004. A situação inicial foi constituída a partir de informações a respeito da história dos jogos olímpicos e de uma tabela com dados relativos aos recordes masculinos nos 100 m, estilo livre, de 1956 a 2000, disponibilizadas aos estudantes. O problema proposto para investigação consistia em selecionar dois dos sete melhores nadadores da Austrália, a partir de uma tabela organizada pelo Comitê Olímpico de Natação, tendo em vista a dificuldade que estavam tendo para a seleção da equipe masculina. Novamente, o modelo matemático para a situação, consistiu na produção de um relatório, destinado agora ao "Comitê Olímpico de Natação", no qual os estudantes apresentavam suas escolhas e explicavam o método utilizado na seleção, para que os seletores pudessem aplicar esse método em outras competições. Além dessas atividades, expostas em seus trabalhos (ENGLISH; WATTERS, 2004; 2005), os autores citam também o desenvolvimento de outras atividades que estavam vinculadas ao mesmo programa, mas sem adentrar em detalhes.

Já no âmbito nacional, temos alguns trabalhos como o de Sgrott-Rodrigues, Alves e Silva (2005), que na busca por caminhos para a criatividade para as séries iniciais do

Ensino Fundamental, problematizaram a organização de um "festival de papagaios[17]". Os envolvidos foram estudantes da 2ª série e a situação inicial foi suscitada com a pergunta: "Quanto vai custar o festival?" A busca por sua solução desencadeou na pesquisa a respeito da história do papagaio, sua utilização na comunicação e sua importância na invenção dos pára-raios; nos estudos sobre os períodos sazonais das chuvas, conteúdos da Física, referentes à "arte de empinar", e conteúdos matemáticos da aritmética, geometria, dentre outros; na construção de um glossário com expressões próprias da brincadeira, valorizando os conhecimentos e cultura regionais; e a pesquisa de preços dos materiais, que resultou na construção de tabelas de custos referente ao orçamento do festival, as quais representam o modelo matemático para a situação, pois respondem o problema inicialmente proposto e constituem a situação final da atividade. Após esse estudo a direção da escola comprou os materiais e efetivou a realização do festival, para o qual os estudantes construíram seus próprios papagaios, colocando em prática os estudos realizados durante a atividade de Modelagem.

O trabalho de Luna e Alves (2007) é um segundo exemplo, no qual as autoras apresentam um estudo a respeito do tema "Anorexia", tendo como objetivo "compreender as interações discursivas entre professor-aluno e aluno-aluno nas séries iniciais a partir do ambiente de Modelagem Matemática". O estudo foi desenvolvido por 22 estudantes de uma turma de 4ª série do Ensino Fundamental, com idades entre 9 e 11 anos. A situação inicial dessa atividade de Modelagem configura-se a partir do interesse dos estudantes por uma reportagem, referente a uma garota que fora vítima de anorexia, e resulta na elaboração de algumas perguntas, que constituem o problema para pesquisa: "O que leva uma pessoa a recusar o alimento a ponto de adoecer e correr risco de morte? O que é anorexia? Qual a relação entre a medida de massa de uma pessoa e uma vida saudável?". Um dos procedimentos utilizados para solucionar o problema foi a realização de uma entrevista com um fisiologista, momento em que os estudantes aprenderam a lidar com o Índice de Massa Corporal (I.M.C.). Neste caso, o modelo matemático, que expressa uma resposta para a situação inicial e constitui a situação final, foi o relatório produzido pelos estudantes no término da atividade, no que apresentaram os conteúdos e reflexões acerca do tema investigado.

---

[17] A palavra papagaio, neste contexto, não se refere à ave, mas a um brinquedo de papel, que se lança ao vento e possui diversas formas. Em algumas regiões do Brasil é conhecido como "pipa".

Nesta mesma linha, foram desenvolvidos outros trabalhos com Modelagem Matemática, provenientes do mesmo grupo de estudos[18], como o de Luna (2007); Luna e Santiago (2007); Luna, Souza e Santiago (2009); Lopes e Azevedo (2010); Santiago, Santos e Luna (2010); Souza, Santiago e Luna (2011); Carvalho, Oliveira e Luna (2012) e Luna, Souza e Lima (2012), no qual as autoras, em geral, fazem um convite a seus estudantes (situação inicial), propõem a busca por informações e contam com a presença de um profissional, ou, em alguns casos, com vídeos e reportagens a respeito do tema (procedimentos) e apresentam um relatório escrito, com registros individuais e coletivos, no qual os estudantes apresentam suas conclusões e reflexões a respeito do estudo (situação final). Vejamos esses trabalhos.

Luna (2007) analisou os registros orais transcritos de filmagens e registros escritos de 22 estudantes de uma turma de 2ª série, com idades entre 8 e 9 anos, com o objetivo de "contribuir para uma melhor compreensão sobre o papel das discussões matemáticas em situações de modelagem nas séries iniciais". A investigação foi orientada pelo tema "Assim funciona um Restaurante Natural...", em que os estudantes foram convidados a discutir o que é necessário saber para ativar um restaurante natural, sendo esta a situação inicial da atividade de Modelagem. Os procedimentos adotados foram: a visita a um restaurante natural próximo a escola, para entender como é o seu funcionamento, sua organização, seu cardápio, por meio de entrevista com a proprietária do local; a realização de uma enquete com estudantes e funcionários da escola para verificar quais itens deveriam constar no cardápio do restaurante natural da escola; o teste de receitas de sanduíches – item escolhido; e a definição dos preços. Os modelos matemáticos para essa situação foram constituídos por meio das discussões realizadas pelos estudantes e expressos a partir das operações, bem como de suas falas e anotações.

Luna e Santiago (2007) propõem a estudantes de uma 4ª série a investigação da mudança do plano na telefonia fixa de pulsos para minutos, a fim de compreender qual o impacto dessa mudança no orçamento familiar e quais os critérios poderiam ser adotados na escolha do plano por cada família, uma vez que as famílias poderiam fazer a opção até um dado momento (situação inicial); os dados foram coletados pelos estudantes com a ajuda de seus pais, por meio de ligações à telefonia fixa e resultaram na produção de um relatório escrito (situação final), no qual foram apresentadas as conclusões do estudo, que contemplou

[18] Há em Feira de Santana – Bahia, um grupo de formação, chamado Despmat, em uma instituição particular de ensino, no qual as professoras participantes mantêm desde 2007 um trabalho a respeito de Modelagem Matemática nos Anos Inicias do Ensino Fundamental.

a realização de operações com Naturais e Racionais, bem como o cálculo com a média aritmética.

O trabalho de Luna, Souza e Santiago (2009), que foi desenvolvido com a intenção de compreender como os estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental podem analisar de forma crítica o papel dos modelos matemáticos em debates sociais, por meio da Modelagem Matemática; para isso 17 estudantes entre 9 e 11 anos de idade, do 5º ano, dialogaram com um geógrafo a respeito da construção de cisternas no semi-árido baiano, eles analisaram o consumo de suas famílias a partir das faturas de água e concluíram que a construção de cisternas tem seus efeitos positivos e negativos, os modelos obtidos refere-se as repostas dos estudantes aos questionamentos iniciais da professora.

Em Lopes e Azevedo (2010) as autoras discutem os desafios da Modelagem Matemática na sala de aula, apresentando duas atividades “Gripe suína: saúde pública e impactos no orçamento familiar” e “Amazônia: problemas sociais e ambientais causados pelo desmatamento”, cujos temas foram discutidos por estudantes de um 4º ano do Ensino Fundamental e os modelos matemáticos obtidos envolveram a formulação de gráficos, tabelas e textos coletivos e/ou individuais.

Santiago, Santos e Luna (2010) propõem a 19 estudantes de um 5ª ano (entre 9 e 11 anos de idade) uma abordagem transdisciplinar, visando reflexões a respeito dos métodos contraceptivos e do impacto das políticas públicas na Educação Sexual no Brasil, levando em consideração que os adolescentes iniciam suas relações sexuais cada vez mais cedo, aumentando o número de adolescentes grávidas. Para esse estudo, além da coleta de dados, uma sexóloga foi consultada e os resultados encontrados foram expostos por meio de um relatório produzido coletivamente pelos estudantes.

Nessa mesma perspectiva, transdisciplinar, desenvolve-se a investigação apresentada em Souza, Santiago e Luna (2011), que diz respeito ao comportamento dos motoristas no trânsito. Participaram dessa investigação 26 estudantes de um 5º ano e duas professoras, que contaram com a visita de um policial rodoviário federal, que esclareceu dúvidas relacionadas às leis do trânsito brasileiro e questões do gênero. O estudo envolveu operações com Números Racionais, cálculo com porcentagem, cálculo mental, sistema monetário brasileiro e medidas de tempo e comprimento. A resposta para o problema foi apresentada por meio de um registro reflexivo.

Carvalho, Oliveira e Luna (2012) apresentam em seu trabalho o relato de um atividade de Modelagem Matemática desenvolvida por estudantes de 3 anos de idade, da Educação Infantil, a respeito do tema “proteção solar” e cuja investigação foi orientada pela questão “qual a importância da proteção solar para nossa saúde?”. O estudo que envolveu a participação de um dermatologista abordou os cuidados com a pele e os usos do protetor solar e desencadeou na produção de um gráfico de barras pictórico – com as fotos dos estudantes constituindo as barras –, referente aos cuidados dos estudantes com a proteção solar, sendo esse o modelo matemático para a situação.

Já Luna, Souza e Lima (2012) analisam na prática pedagógica como são produzidos os textos do discurso matemático escolar no ambiente de Modelagem, a partir do desenvolvimento de uma atividade, que foi orientado pelo problema: “Quais os impactos para os usuários da internet se projetos de lei, que propõem que um site acusado de ferir os direitos autorais seja fechado, forem aprovados?”, como situação inicial, foi exibido aos estudantes um vídeo referente à pirataria e na sequência foram lidos trechos da reportagem de uma revista, também a respeito do tema. Os estudantes discutiram questões como os sites que têm pirataria na internet e o número de habitantes ou a porcentagem da população brasileira que acessa esses sites. O estudo desencadeou na produção de um relatório no qual os estudantes dão um retorno a questão inicialmente proposta.

Outros exemplos do desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática no âmbito dos anos iniciais podem ainda ser encontrados na literatura, como o trabalho de Dias e Chaves (2009), que abordam o tema “Pirataria e qualidade de vida”, por meio de um estudo desenvolvido por 21 estudantes de uma 3ª série do Ensino Fundamental, com média de idade de 9 anos, em uma Escola Pública de Belém, Estado do Pará. O tema surgiu durante a “roda de conversa”, quando um dos estudantes afirmou possuir noventa e três DVD’s piratas, constituindo a situação inicial da atividade de Modelagem. Os procedimentos utilizados para estudo do tema envolvem a realização de uma enquete dirigida aos demais estudantes, professores e funcionários da escola; e uma entrevista com um profissional da área de Economia, pai de um dos estudantes envolvidos no estudo. Depois de realizada a enquete os dados coletados foram organizados em tabelas e gráficos, os quais foram confeccionados em papel quadriculado e expostos na Feira Cultural da Escola, junto com os desenhos feitos pelos estudantes representando os pontos positivos e negativos da prática de pirataria. As tabelas, os gráficos e os desenhos obtidos podem ser considerados os modelos matemáticos desse caso, ou seja, que caracterizam a situação final da atividade de Modelagem.

Como podemos observar nos diferentes exemplos apresentados, a concepção de Modelagem Matemática adotada não faz distinção quanto aos níveis de escolaridade. A ideia de abordar um problema não essencialmente matemático por meio da Matemática permanece a mesma. O que muda, de fato, são os conhecimentos e a familiarização que os estudantes têm para com os conceitos matemáticos. Porém, não podemos esperar e nem exigir que um estudante dos anos iniciais do Ensino Fundamental obtenha um modelo matemático com a mesma sofisticação que um estudante do Ensino Médio, ou mesmo, dos anos finais do Ensino Fundamental. O suporte matemático que os estudantes dos anos iniciais têm difere-se do suporte de estudantes dos demais níveis de escolaridade, estando associado a conteúdos como as quatro operações elementares da Matemática, e nesse contexto, as representações utilizadas pelos estudantes serão outras, isso implica na estrutura que fundamenta a produção de seus modelos, de modo que os modelos matemáticos obtidos podem ser para eles tão sofisticados quanto os demais.

Assim, olhamos para as representações utilizadas pelos estudantes, a fim de identificar as ‘linguagens’ que emergem a partir de seus registros produzidos durante o desenvolvimento de uma série de atividades de Modelagem Matemática, uma vez que nos propomos investigar os usos da linguagem neste nível de escolaridade nesse contexto. Para isso, faz-se necessário um estudo sobre a linguagem, que realizamos no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 2

LINGUAGEM E SEMIÓTICA: NOSSO MEIO DE ACESSO AO MUNDO E SUAS MANIFESTAÇÕES

2.1 LINGUAGEM: UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

A linguagem foi constituída a partir de um longo processo histórico e cultural, como resultado das relações sociais e emergente da necessidade do ser humano de comunicar-se. Neste processo, diferentes tipos de linguagem foram constituídos, dos quais muitos utilizamos até hoje, como as linguagens escrita, oral, gestual, simbólica, etc. Neste sentido, a linguagem tornou-se fonte de inúmeras investigações, por desempenhar a função de mediação na relação entre as pessoas e os objetos do mundo.

A busca por compreender o papel da linguagem nessa relação tem perturbado filósofos, linguistas, teóricos da comunicação e ganha alguns esclarecimentos a partir dos estudos do filósofo e lógico austríaco Ludwig Wittgenstein. Segundo Vilela e Mendes (2011), Wittgenstein sempre teve a linguagem como tema central de sua filosofia e em seus trabalhos iniciais, como o *Tractatus Logico-Philosophicus*, inspirados em Frege[19], atribuía à linguagem a função de representar os objetos do mundo por meio de uma forma lógica, que seria a essência da relação entre as palavras e os objetos. Posteriormente, com a obra póstuma de Wittgenstein, *Investigações Filosóficas*, há um corte epistemológico nessa concepção referencial de linguagem, e esta não é "mais submetida à função exclusiva da nomeação ou designação, quer dizer o signo não se limita a estabelecer uma relação direta com a coisa nomeada" (ARAÚJO, 2004, p. 11-12), esta concepção é "substituída pela descrição dos usos sobre como se designam as coisas em diferentes situações, na prática da linguagem" (VILELA; MENDES, 2011, p. 12).

A ideia central da filosofia de Wittgenstein, a partir da obra *Investigações Filosóficas*, está associada ao termo *usos*, pois para o filósofo a chave para compreender a relação entre linguagem e mundo está nos usos que fazemos das palavras. Nesse sentido, "a pergunta filosófica deixa de ser 'o que é a realidade em si?', 'O que há?' e passa a ser 'Como

[19] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) foi um matemático, lógico e filósofo alemão, considerado o principal criador da lógica matemática moderna, representando, assim, um importante ícone da revolução semiótica que se produz em Matemática.

é?’, ou seja, busca saber como está sendo usada a expressão ou a palavra na prática da linguagem” (VILELA; MENDES, 2011, p. 12). Enquanto a primeira questão “O que é?” aponta para a busca de uma essência, a segunda “Como é?” está associada às práticas, aos usos das palavras, o que implica em “olhar o modo como a linguagem, entendida como um sistema de símbolos que depende de regras de uso, expõe o mundo” (VILELA; MENDES, 2011, p. 13).

Compreender a linguagem na perspectiva de Wittgenstein não é tarefa fácil, envolve o estudo de uma complexa rede de significados com os quais ela vem entrelaçada; porém, as contribuições de Wittgenstein para com a filosofia da linguagem, constituem uma importante ferramenta para as análises que objetivamos, com vistas à interpretação das ‘linguagens’ utilizadas pelos estudantes no desenvolvimento de modelos matemáticos.

Segundo Vilela e Mendes (2011, p. 9-10, grifos das autoras) aspectos significativos da abordagem filosófica de Wittgenstein podem ser esclarecidos explorando características presentes nos estudos da linguagem, no que diz respeito

> à relação da palavra com o seu contexto de uso e não como um referente fixo; à noção de significado associado ao contexto de produção e não prévio e anteriormente estabelecido; e à ideia de considerar a linguagem como uma *atividade*, isto é, a linguagem como criação (permanente) para nossas necessidades e propósitos, por isso múltipla, cultural e histórico-socialmente produzida; e que se modifica e, por isso, se aprende na prática de uso, no transcorrer discursivo de situações que são vivenciadas, na medida em que se empenha e se pratica.

Esses aspectos estão presentes nas discussões propostas por Wittgenstein e são fundamentais para o entendimento de sua abordagem sobre a linguagem e seus usos.

“É na e pela linguagem que se pode não somente expressar ideias e conceitos, mas significar como um comportamento a ser compreendido, isto é, como comportamento que provoca relações e reações” (ARAÚJO, 2004, p. 9). A linguagem assume, portanto, uma função de mediação entre homem e mundo, assim como sustenta Vygotsky (2008).

Quando falamos em linguagem, estamos arraigados na concepção referencial, e tendemos vê-la apenas como uma espécie de vestimenta para os objetos, ou, como afirma Condé (1995), como um espelho do mundo, todavia, esta visão não é totalmente descartável, essa é uma função importante das palavras, pois para aprender uma linguagem necessitamos denominar objetos. E, segundo Wittgenstein (2012, p. 28, § 26), “Pode-se chamar isto de preparação para o uso de uma palavra", "referir passa a ser apenas uma entre as inúmeras facetas da linguagem" (ARAÚJO, 2004, p. 99).

Para Vilela e Mendes (2011) há duas maneiras de se entender a linguagem: como representação ou como constitutiva da realidade. Quando entendemos a linguagem como representação, ela assume uma função descritiva de mundo, dos conceitos, dos objetos. Já quando a entendemos como constitutiva das coisas, ela deve ser vista em termos de atividade, deixando de ser meramente descritiva e passando, também, a participar da constituição das coisas. A posição adotada por Wittgenstein se aproxima desta segunda.

Neste sentido, o aprendizado de uma linguagem inicia-se com o designar, com o "etiquetar objetos" e se estende às práticas da linguagem, aos usos que fazemos das palavras em diferentes contextos. Assim "ensinar a linguagem aqui não é explicar, mas treinar" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 17, § 5), isto é, o ato de aprender uma linguagem está associado a treinar o uso das palavras.

De acordo com Glock (1998, p. 225), em seu '*Dicionário Wittgenstein*', "aprendemos o significado das palavras aprendendo a utilizá-las, da mesma forma que aprendemos a jogar xadrez, não pela associação de peças a objetos, mas sim pelo aprendizado dos movimentos possíveis para tais peças".

Da mesma forma como no jogo de xadrez não basta saber o nome das peças, aprender uma linguagem não se reduz a conhecer os significados das palavras, "é preciso também exercitar, praticar, empenhar-se nesta atividade, num universo discursivo para conhecer os lances possíveis" (VILELA; MENDES, 2011, p. 15).

> Ainda que o significado de algumas palavras esteja associado a objetos – como, por exemplo, a palavra "bola", que está associada a um objeto determinado –, uma mesma palavra adquire sentidos diferentes: nas expressões "ele está com a bola toda" ou "a questão levantou a bola para a discussão", "bola" aparece com sentido metafórico ou simbólico, e não como um rótulo. O que se pode dizer é que não há, nestas sentenças, um uso literal, mas, sim, atrelado ao universo do discurso (VILELA; MENDES, 2011, p. 13).

Isto é, as palavras adquirem significado conforme o contexto em que são utilizadas e segundo a intenção que se tem ao utilizar a palavra, de quem fala.

E o que é significado para Wittgenstein? Observemos o trecho a seguir, no qual o filósofo discute o termo significado conforme seu uso em uma frase e nos propicia um exemplo de seu entendimento.

> Falemos, primeiramente, sobre o ponto central desta argumentação: a palavra não tem significado algum quando nada lhe corresponde. – É importante constatar que a palavra "significado" é usada de um modo que vai contra a linguagem quando com ela se designa a coisa que "corresponde" à palavra. Isto significa: confundir o significado de um nome com o *portador* do nome. Se morre o Sr. N.N., costuma-se dizer, morre o portador do nome e não o significado do nome. E seria absurdo falar assim, pois, se o nome deixasse de ter significado, não teria sentido dizer "o Sr. N.N. morreu" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 37, § 40, grifos do autor).

A afirmação de Wittgenstein parece indicar que o significado de uma palavra não é o objeto a que se refere, pois se fosse, caso o objeto por algum motivo deixasse de existir, então, a palavra não teria mais significado, e também não faria mais sentido existir. Como sabemos não é o que acontece na realidade; mesmo os nomes, que exercem a função de designar, de fazer referência a alguém ou a um objeto, não perdem o significado quando o objeto nomeado deixa de existir.

De acordo com Vilela e Mendes (2011, p. 12) "os significados se dão no contexto, como parte do universo do discurso, e, nesse sentido, um novo uso sempre é possível, em oposição a um significado previamente determinado, fixado independentemente da situação". Neste sentido, nos interessam

> [...] a descrição dos usos e a análise da linguagem nas situações em que ocorrem, não tendo uma gramática fixa como referência, e, sim, perguntando "como é usada aquela palavra na situação determinada". A análise da linguagem na prática propicia identificar aspectos de uma forma de vida, decodificar elementos constituintes que não estão explícitos na linguagem, e, por isso, a fecundidade de diversos tipos de análises da linguagem em pesquisas, inclusive as da Educação Matemática. Isto é, a linguagem como eixo de investigação possibilita conhecimento (VILELA; MENDES, 2011, p. 15).

É com esta ideia em mente que desenvolvemos nossa investigação; vislumbramos com as análises desvendar o papel que a linguagem desempenha em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, de modo a compreender como eles utilizam a linguagem nesse contexto.

2.2 JOGOS DE LINGUAGEM: O JOGO DAS PALAVRAS

Como apontamos na seção anterior, a ideia central da filosofia da linguagem de Wittgenstein está em olhar para os usos que fazemos das palavras nos mais variados contextos. Esses usos constituem o que Wittgenstein (2012, p. 19, § 7) convencionou chamar de *jogos de linguagem*. Os jogos de linguagem desempenham um importante papel na filosofia de Wittgenstein, neles se encontram as explicações que sustentam o entendimento da linguagem.

> O uso depende de uma série de fatores, tais como meio, necessidades, desejos, emoções, capacidades sensórias, que sugerirão quais conceitos são mais adequados. O que uma pessoa expressa não depende só do que ela diz, mas das circunstâncias que mostram qual jogo de linguagem está sendo jogado (ARAÚJO, 2004, p. 111).

Segundo Glock (1998), o termo "jogo de linguagem" surge quando Wittgenstein estende a analogia dos jogos à linguagem:

"Podemos imaginar também que todo o processo de uso de palavras [...] seja um dos jogos por meio dos quais as crianças aprendem sua língua materna. Quero chamar esses jogos de 'jogos *de linguagem*'" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 18-19, §7, grifos do autor).

Segundo o filósofo, os jogos de linguagem estão associados aos processos de denominação das palavras, bem como de repetição da palavra pronunciada, constituindo assim, um processo de aprendizado da linguagem, com o qual as crianças começam a se inteirar e posteriormente aprendem a se comunicar, estendendo a função dessas palavras aos mais variados usos, nos diversos contextos possíveis.

Neste sentido, Wittgenstein chama também de jogo de linguagem "a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 19, § 7). Os jogos de linguagem não se limitam, portanto, aos usos das palavras, mas se constituem a partir da complexidade que envolve a atividade em que se dão esses usos.

Em consonância com esta ideia, proposta por Wittgenstein, Vilela e Mendes (2011, p. 15) afirmam que "a prática envolve o contexto de uso e, quando isolada desse contexto [...], pode criar confusões: ao buscar um sentido fora do contexto de uso ou fora de um jogo de linguagem, a tendência é buscar um sentido absoluto, uma essência", contudo, para Wittgenstein, quando um filósofo busca a essência das coisas, a confusão pode ser evitada reconduzindo a palavra ao seu uso.

Vilela e Mendes (2011, p. 10) concluem que "os significados não estão fora da linguagem, no mundo externo ou numa estrutura mental universal e necessária, mas no uso da linguagem", isto é, nos jogos de linguagem. Estes jogos de linguagem não independem do contexto, nem daqueles que utilizam as palavras e podem assumir diversas funções.

> Pense nas ferramentas dentro de uma caixa de ferramentas: encontra-se aí um martelo, um alicate, uma serra, uma chave de fenda, um metro, uma lata de cola, cola, pregos e parafusos. – Assim como são diferentes as funções desses objetos, são diferentes as funções das palavras. (E há semelhanças aqui e ali.) (WITTGENSTEIN, 2012, p. 20, § 11).

Uma palavra em um determinado contexto pode não ser interpretada da mesma maneira que em outro contexto.

> [...] os jogos de linguagem constituem seus significados a partir dos diversos usos das palavras que fazemos dentro de variados contextos, isto é, de diferentes jogos de linguagem. Na medida em que os contextos mudam, as significações das palavras que são dadas pelo uso nesses contextos ou jogos de linguagem também mudam (CONDÉ, 1999, p. 41).

A expressão 'jogos de linguagem', como Wittgenstein afirma, deve salientar que falar uma língua é parte de uma atividade. Assim, é a linguagem constituída por inúmeras designações, cujas palavras podem assumir múltiplas funções, segundo aqueles que as utilizam e de acordo com um determinado contexto, ou seja, no interior de um jogo de linguagem.

2.3 SEMELHANÇAS DE FAMÍLIA: HÁ ALGO EM COMUM?

A multiplicidade de jogos de linguagem, que podem ser constituídos a partir das práticas da linguagem, nos induz a pensar sobre o que então caracteriza um jogo de linguagem. Neste contexto, Wittgenstein coloca:

> Aqui nos deparamos com a grande questão que está por trás de todas estas considerações. – É que alguém poderia retorquir: "Você facilita muito a coisa! Você fala de todos os jogos de linguagem possíveis, mas não disse, em nenhum lugar, o que é a essência do jogo de linguagem e, portanto, da linguagem. O que é comum a todos esses processos e os torna uma linguagem ou peças da linguagem. Você se dá de presente, portanto, exatamente a parte da investigação que, a seu tempo, lhe deu as maiores dores de cabeça, a saber: a parte que diz respeito à *forma geral da proposição* e da linguagem" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 51, § 65, grifos do autor).

E não faria sentido Wittgenstein tentar elucidar a essência de todos os jogos de linguagem ou buscar identificar algo que seja comum a todos eles, tal atitude é se contrapor à ideia inovadora de Wittgenstein que revolucionou a filosofia da linguagem, é ir de encontro com a concepção pragmática de linguagem assumida a partir das *Investigações Filosóficas* e acreditar que existe uma essência por detrás de todos os jogos de linguagem, assim como Wittgenstein propôs no *Tratactus*, levando-nos a um reducionismo da real dimensão expressa pelos jogos de linguagem, buscando desvendar uma estrutura lógica que se revela em todos eles. Wittgenstein nos propõe que olhemos para o funcionamento da linguagem, como observamos no parágrafo seguinte.

> Ao invés de indicar algo que seja comum a tudo que chamamos de linguagem, digo que não há uma coisa sequer que seja comum a estas manifestações, motivo pelo qual empregamos a mesma palavra para todos, – mas são *aparentadas* entre si de muitas maneiras diferentes. Por causa deste parentesco, ou destes parentescos, chamamos a todas de "linguagens" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 51, § 65, grifos do autor).

Desta forma, Wittgenstein (2012) reconhece a existência de várias linguagens e não apenas "a" linguagem. Essa diversidade de linguagens é refletida nos diversos jogos de linguagem, que não possuem uma essência comum a todos eles, mas semelhanças, ou parentescos, como de uma família.

> Observe, por exemplo, os processos que chamamos de "jogos". Tenho em mente os jogos de tabuleiro, os jogos de cartas, o jogo de bola, os jogos de combate etc. O que é comum a todos esses jogos? – Não diga: "*Tem que* haver algo que lhe seja comum, do contrário não se chamariam 'jogos'" – mas *olhe* se há algo que seja comum a todos. – Porque, quando olhá-los, você não verá algo que seria comum a *todos*, mas verá semelhanças, parentescos, aliás, uma boa quantidade deles. Como foi dito: não pense, mas olhe! (WITTGENSTEIN, 2012, p. 51, § 66, grifos do autor).

Wittgenstein nos convida a olhar para as semelhanças existentes entre os diversos tipos de jogos, e por meio dessa analogia nos conduz a uma trama que nos leva a encontrar inúmeras semelhanças entre os jogos, mas nenhuma que seja comum a todos eles.

> [...] Olhe, por exemplo, os jogos de tabuleiro, com seus variegados parentescos. Passe agora para os jogos de cartas: aqui você encontra muitas correspondências com aquela primeira classe, mas muitos traços comuns desaparecem, outros se apresentam. Se passarmos agora para os jogos de bola, veremos que certas coisas comuns são mantidas, ao passo que muitas se perdem. – Prestam-se todos eles ao "*entretenimento*"? Compare o xadrez com o ludo. Ou há, por toda parte, ganhar e perder, ou uma concorrência dos jogadores? Pense nas paciências. Nos jogos de bola há ganhar e perder; mas, se uma criança atira a bola contra a parede e a agarra novamente, neste caso este traço desapareceu. Veja que papel desempenham habilidade e sorte. E quão diferente é habilidade no jogo de xadrez e habilidade no jogo de tênis. Pense agora nas brincadeiras de roda: aqui se encontra o elemento entretenimento, mas quantos dos outros traços característicos desapareceram! E assim podemos percorrer os muitos, muitos outros grupos de jogos, ver as semelhanças aparecerem e desaparecerem (WITTGENSTEIN, 2012, p. 51-52, § 66, grifos do autor).

O que então nos permite que chamemos todos eles de jogos?

> [...] o resultado desta observação é: vemos uma complicada rede de semelhanças que se sobrepõem umas às outras e se entrecruzam. Semelhanças em grande e em pequena escala (WITTGENSTEIN, 2012, p. 52, § 66).

É essa complexa rede de relações e semelhanças que os caracterizam como jogos; e esta complexidade também se faz presente na linguagem, pois segundo Araújo (2004) “não há um núcleo comum, um fio único a amarrar os jogos ou os usos linguísticos todos. Tal como uma corda, a trama é tecida por vários fios que garantem sua resistência” (p. 106-107). Ou nas palavras de Wittgenstein (2012), essas semelhanças se apresentam

> [...] do mesmo modo que, ao tecermos um fio, traçamos fibra por fibra. E a robustez do fio não consiste em que uma fibra qualquer perpasse toda sua extensão, mas em que muitas fibras se sobreponham umas às outras (p. 52, § 67).

A essas semelhanças, expressa nessa rede de relações, Wittgenstein chamou de *semelhanças familiares* ou *semelhanças de família*.

> Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que por meio das palavras “semelhanças familiares”; pois assim se sobrepõem e se entrecruzam as várias semelhanças que existem entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, andar, temperamento etc. etc. – E eu direi: os “jogos” formam uma família (WITTGENSTEIN, 2012, p. 52, § 67, grifos do autor).

Portanto, as semelhanças presentes num determinado grupo de jogos de linguagem se estendem a todos os seus componentes, como em uma família, podendo haver certas semelhanças entre um primeiro e segundo jogo de linguagem, as quais podem desaparecer e dar lugar a novas semelhanças quando comparamos o primeiro, ou, o segundo, com um terceiro jogo, e assim sucessivamente, esses entrelaçamentos se estendem aos outros jogos de linguagem.

2.4 FORMAS DE VIDA: O PAPEL DO CONTEXTO NOS JOGOS DE LINGUAGEM

Ao olhar para os jogos de linguagem, Wittgenstein não dispensa o papel do contexto e das pessoas que o praticam. E ao acreditar que a linguagem faz parte de uma atividade, também acredita que ela depende de uma forma de vida.

Segundo Gottschalk (2008, p. 80) a expressão *formas de vida* (*Lebensformen*) é utilizada por Wittgenstein “para designar nossos hábitos, costumes, ações e instituições que fundamentam nossas atividades em geral, envolvidas com a linguagem”. E neste sentido, podemos dizer que uma forma de vida é constituída das práticas e ações desenvolvidas por um determinado grupo ou comunidade, levando em conta sua cultura, crenças, folclore e intenções.

Nesta perspectiva, nos deparamos com a representatividade das formas de vida, pois são elas que determinam o contexto em que os jogos de linguagem são utilizados e constituídos, assim como aponta Wittgenstein (2012, p. 23, § 19), ao figurar alguns tipos de linguagem no trecho a seguir e indicar a existência de inúmeras outras, expressando sua relação com o as formas de vida a que correspondem.

> Pode-se imaginar facilmente uma linguagem que seja constituída somente de comandos e informes na batalha. – Ou uma linguagem constituída apenas de questões e de uma expressão de afirmação ou de negação. E inúmeras outras. – E representar uma linguagem equivale a representar uma forma de vida.

Segundo Vilela e Mendes (2011, p. 14), a linguagem "traz uma lógica para ver o mundo e, ainda, pode ser reveladora, porque expressa o que é importante numa forma de vida; ela dá indícios das características culturais de uma comunidade", influenciando nas relações entre as pessoas de um grupo.

"Assim como há inúmeros jogos de linguagem, há também incontáveis formas de vida" (GLOCK, 1998, p. 174). Como observamos na afirmação deste autor, o conceito de forma de vida está intimamente relacionado ao conceito de jogo de linguagem, e de acordo com o mesmo, são "os padrões específicos de comportamento que, juntos, constituem *uma* forma de vida (GLOCK, 1998, p. 174, grifos do autor).

São as formas de vida que regulam o uso que se faz das palavras, e que, consequentemente, determinam os jogos de linguagem. No âmbito da Matemática, são em nossas formas de vida que

> [...] as proposições matemáticas permitem ou proíbem certas inferências, somos autorizados por elas a passar de uma posição empírica para outra, isto é, são consideradas, segundo Wittgenstein, como regras de substituição ou regras de inferência. Permitem-nos passar de uma proposição empírica, para outra, estas sim com função descritiva e passíveis de verificação por meio de observações e experimentos (GOTTSCHALK, 2008, p. 80).

Ou seja, são nas formas de vida que encontramos os fundamentos necessários para o uso da Matemática escolar em situações cotidianas e que determinam as condições necessárias para essa adequação.

Algumas destas ações empíricas, segundo Gottschalk (2008, p. 80), "se cristalizam na forma de regras e passam a traçar os limites do que faz e do que não faz sentido, formam o que Wittgenstein chama de Gramática, com suas regras e princípios de juízos próprios, e que discutimos na próxima seção.

2.5 UM COMPLEXO DE REGRAS: A GRAMÁTICA WITTGENSTEINIANA

A noção de gramática para Wittgenstein não tem a mesma conotação que para os linguistas, no seu caso ela não é única e nem atribui à linguagem uma estrutura fixa, ela nos fornece e regula as regras de uso das palavras, que segundo Araújo (2004, p. 110), “são flexíveis e modificáveis”.

> A gramática não diz como a linguagem tem que ser construída para cumprir com sua finalidade, para agir, desta ou daquela maneira sobre as pessoas. Ela apenas descreve o emprego dos signos, mas de maneira alguma os elucida (WITTGENSTEIN, 2012, p. 186, § 496).

Segundo Gottschalk (2004, p. 318) “todo jogo de linguagem envolve uma gramática dos usos, as quais estão ancoradas em uma práxis, em uma forma de vida.

“Em nossa cultura, temos formas de vida que sabem fazer regras e que sabem aplicá-las. As regras são compartilhadas e permitem saber o que é relevante em dada situação” (ARAÚJO, 2004, p. 111). Essas regras são produções culturais, resultado de uma construção histórica de uma forma de vida, passada de geração a geração, sendo constantemente modificadas e adequadas ao contexto que abrange os jogos de linguagem em seu entorno social.

> A possibilidade de explicar essas coisas sempre depende de alguma outra pessoa usar a linguagem da mesma maneira que eu uso. Se ela afirma que certa seqüência de palavras tem sentido para ela e essa seqüência não tem nenhum sentido para mim, só posso supor que, nesse contexto, ela está usando as palavras com um significado diferente daquele que dou a elas ou, então, está falando sem pensar (WITTGENSTEIN, 2005, § 7, p. 40).

Nesse contexto, a gramática “não tem seu significado usual. Ela comporta as regras e a estrutura da linguagem e, assim, indica como podem ser usadas as expressões em diferentes contextos. Indica as regras de uso das palavras, o que faz sentido e o que é certo ou errado” (VILELA; MENDES, 2011, p. 13), funcionando como princípio de juízo.

> A regra pode ser um recurso de instrução no jogo. Ela é transmitida ao aprendiz e sua aplicação é treinada. – Ou é um instrumento do próprio jogo. – Ou: uma regra não encontra uma aplicação nem na instrução nem no jogo; nem está assentada num catálogo de regras. Aprende-se o jogo assistindo como os outros jogam. Mas dizemos que é jogado de acordo com tais regras, porque um observador pode ler estas regras a partir da prática do jogo – é como uma lei natural, em cuja regência as jogadas se desenrolam (WITTGENSTEIN, 2012, p. 45, § 54).

Diante da analogia feita por Wittgenstein entre jogo e linguagem e que deu origem aos jogos de linguagem, também podemos estender a importância das regras para os jogos, apontada pelo filósofo no trecho anterior, aos jogos de linguagem; e, neste sentido, são as regras da gramática wittgensteiniana que nos instruem em relação ao uso das palavras, e desta forma, determinam e regulamentam os jogos de linguagem. “Pode-se chamar as regras da gramática de ‘arbitrárias’, se com isso se deve dizer que a finalidade da gramática é apenas a finalidade da linguagem” (WITTGENSTEIN, 2012, p. 186, § 497).

Conforme Gottschalk (2004, p. 315) “é só na aplicação das palavras que se mostra o uso que é feito do conceito e, por conseguinte, seu sentido”. Para a autora, dizer “essa parede é branca” pode tanto se desdobrar em uma função descritiva quanto em uma função gramatical, “podemos *descrever* a parede ou utilizá-la como um *paradigma* da cor branca” (GOTTSCHALK, 2004, p. 315, grifos da autora).

Vamos pensar na palavra “triângulo”, como propõe Vilela e Mendes (2011, p. 14), de fato, “seu significado depende do jogo de linguagem em que ocorre, isto é, podemos falar em ‘triângulo amoroso’ ou numa figura geométrica denominada triângulo, ambos pertinentes em nossa gramática e não associados necessariamente a um referente”.

De acordo com Gottschalk (2004, p. 315), “em termos wittgensteinianos, uma mesma proposição pode ter um uso gramatical ou empírico, dependendo da situação em que é aplicada”. Para ilustrar esta ideia, Vilela e Mendes (2011, p. 14) sugerem que consideremos o que em Matemática convencionamos chamar de triângulo: “A afirmação ‘um triângulo é um polígono fechado de três lados’ é uma proposição gramatical, porque negá-la implica alterar a definição do que é um triângulo. Já se falarmos ‘esta figura tem a forma triangular’ estaremos fazendo uma descrição da figura.

> Uma vez formado o conceito [de triângulo], este prescinde de formas triangulares para que tenha significado e possa ser aplicado. Neste sentido, a definição da palavra *triângulo* – “um polígono fechado de três lados” – também pode ser vista como uma regra de utilização desta palavra. Dizer que “triângulo é um polígono que tem três lados” não é uma *descrição* de triângulo – essa proposição *define* o que é um triângulo. [...] A palavra não se refere a um ente ideal [...] A definição de um símbolo é apenas uma regra para o uso deste símbolo (Gottschalk, 2004, p. 321, grifos da autora).

Em consonância com esta ideia, Gottschalk (2008, p. 79) aponta que Wittgenstein, ao investigar o funcionamento da nossa linguagem, observou que “utilizamos as proposições da matemática como normas: 2 + 2 *deve* ser igual a 4! Essa proposição não é negada nem confirmada, é apenas uma regra de como proceder (um princípio de juízo)”.

Diante dessas considerações, concordamos com Gottschalk (2004, p. 321, grifos da autora) quando ela afirma que "*aprender* o significado de uma palavra pode consistir na aquisição de uma regra, ou um conjunto de regras, que governa seu uso dentro de um ou mais jogos de linguagem", pois é aprendendo as regras de uso, que aprendemos a usar as palavras para representar nossos pensamentos de uma forma que nos é adequada.

Neste contexto, as regras são determinadas no interior dos jogos de linguagem pelas formas de vida que os constituem e pode resultar em diversos usos da linguagem, com inúmeras semelhanças de família e que podem ser observadas por meio de diferentes representações semióticas.

2.6 Registros de Representações Semióticas como diferentes manifestações de Linguagem

Durante muito tempo, acreditou-se que havia uma correspondência unívoca entre as palavras e os objetos, e compreender a essência submersa nessa relação seria o mesmo que desvendar a relação entre linguagem e mundo.

Essa ideia refere-se ao papel de "designar" dos signos, entendidos por Duval (2011b) como unidades elementares de sentido e discutidos por Wittgenstein no § 10 da sua obra *Investigações Filosóficas*, a fim de evitar mal-entendidos à respeito da função que eles desempenham na linguagem. Para Wittgenstein (2012, p. 21, § 15, grifos do autor) "a palavra 'designar' é empregada de modo mais direto talvez lá onde o signo repousa sobre o objeto que designa". E "quando dizemos: 'cada palavra da linguagem designa alguma coisa' com isso ainda não se disse por enquanto *absolutamente* nada; a não ser que explicássemos, exatamente, *que* distinção desejamos fazer (WITTGENSTEIN, 2012, p. 21, § 13, grifos do autor).

A partir destas ideias, vemos que "o signo não tem o sentido imbuído nele, mas depende das regras que regulam o sistema" (VILELA; MENDES, 2011, p. 12). Um signo só faz sentido quando é utilizado para representar algo.

Segundo Wittgenstein (2012, p. 35, § 23), há inúmeras espécies diferentes de emprego daquilo que chamamos de "signo", "palavras", "frases". "E essa pluralidade não é nada fixo, um dado para sempre; mas novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem, como poderíamos dizer, nascem e outros envelhecem e são esquecidos". Em consequência disto, dar-se-iam as modificações da Matemática.

Para Vygotsky (1991) a linguagem é constituída por um sistema de signos que tem a função de mediação entre homem e mundo. De acordo com Alexander Ramanovich Luria, na introdução do livro 'A formação social da mente', Vygotsky (1991, p. 11), "Os sistemas de signos (a linguagem, a escrita, o sistema de números) [...] são criados pelas sociedades ao longo do curso da história humana e mudam a forma social e o nível de seu desenvolvimento cultural". Deste modo, Vygotsky (2008, p. 156) acredita que "os significados das palavras são formações dinâmicas, e não estáticas [...] se alteram em sua natureza intrínseca, então a relação entre pensamento e a palavra também se modifica".

É neste sentido, que Wittgenstein revoluciona a filosofia da linguagem, assumindo que o significado de uma palavra não se limita ao objeto a que se refere, é o "seu uso na linguagem" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 38, § 43), pode variar conforme o contexto e de acordo com aqueles que a utilizam. Podemos inferir que essa significação trata da constituição de um jogo de linguagem, proposto por Wittgenstein, numa atitude interpretativa em relação às palavras, aos signos e, consequentemente, aos conteúdos e conceitos matemáticos. Neste sentido, a linguagem pode se apresentar sob diversas representações, dada a variedade de jogos de linguagem, bem como as múltiplas possibilidades de usos das palavras ou signos.

Segundo Duval (2011b, p. 16) "a noção de signos é falsamente simples", e, por isso, muitas vezes são confundidos com as representações, e como consequência têm seus papéis invertidos, faz-se necessário, portanto, entender a diferença entre eles. Segundo o autor, ambos, signos e representações

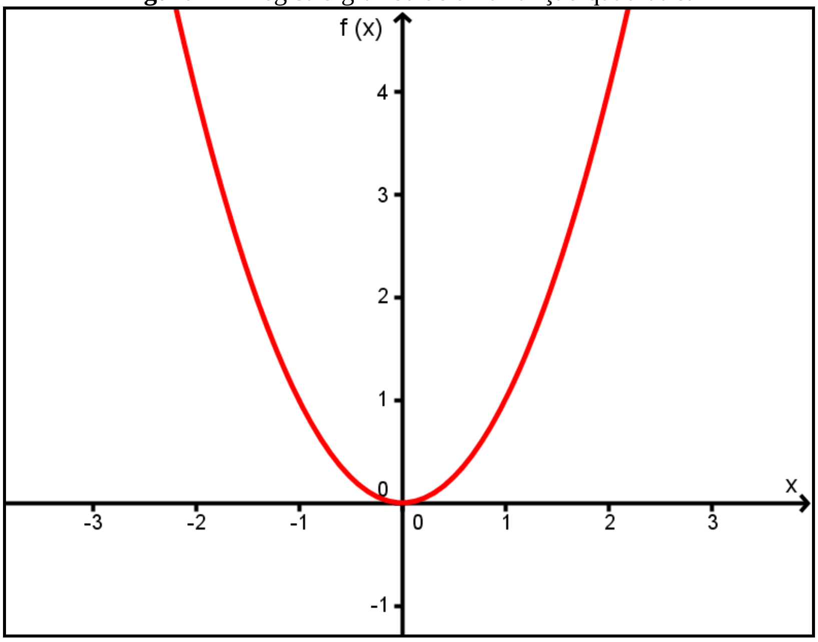
> [...] cumprem uma função comum que é "se colocar no lugar de" o que eles representam ou designam e surgem da mesma exigência epistemológica fundamental que é de jamais se confundirem com os próprios objetos. O que separa radicalmente as representações e os signos é a natureza da relação com os próprios objetos. A relação entre os signos e os objetos não contém nenhuma interação, mas é apenas uma relação de referência dependendo do sistema semiótico utilizado, a língua, um sistema de numeração etc. (DUVAL, 2011b, p. 37).

Segundo Duval (2011b, p. 37-38) as representações semióticas apresentam duas características que não são identificadas nos signos:

> Primeiramente, *elas têm uma organização interna que varia de um tipo de representação semiótica* para outra. A organização de uma frase simples não é mesmo a de uma equação. A organização interna de uma representação gráfica não é a de uma figura geométrica ou de um esquema etc. Depois, e não importa qual representação semiótica, existem sempre várias maneiras de distinguir as unidades de sentido ou os níveis de organização. Isso é evidente tanto para as frases quanto para as equações, nas quais as unidades de sentido verdadeiras não são as unidades separadas por brancos (as palavras, ou os símbolos), mas os agrupamentos de unidades que têm um sentido diferente das unidades reagrupadas [...] Para resumir, as representações semióticas são as frases em linguagem natural, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras. São as figuras, os esquemas, os gráficos e não os pontos, raramente visíveis, ou os traços. Muitas vezes associamos os signos a essas unidades elementares de sentido, que são apenas caracteres para codificar: letras, siglas, algarismos, às vezes palavras-chave, ou gestos da mão.

Vejamos na Figura 4, o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$.

Figura 4 – Registro gráfico de uma função quadrática



Na Figura 4 temos alguns exemplos de signos, como os segmentos direcionados, que chamamos de eixos; os algarismos; os pontos que, em conjunto, formam a parábola; o $f(x)$ e o x. De acordo com Duval (2011a), esses signos, que são específicos da Matemática, são chamados de símbolos, pois, graças a seu caráter convencional dado neste âmbito, eles evocam o objeto matemático Função Quadrática, cuja representação gráfica é constituída pelo conjunto de todos esses símbolos, enquanto sua representação algébrica é constituída pelos símbolos $f(x) = x^2$.

Neste contexto, Duval (2009) coloca que as representações semióticas são constituídas pelo emprego de signos e símbolos pertencentes a um mesmo sistema de representação.

No que tange à Matemática, Damm (2008, p. 169) defende que "[...] não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação", ou, nas palavras de Duval (2009, p. 29) "não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação".

Como resposta a essa necessidade de uma representação, Duval (2011a) defende o uso de representações semióticas, cuja importância se deve a duas razões, consideradas pelo autor fundamentais:

> Primeiramente, há o fato de que as possibilidades de tratamento matemático – por exemplo, as operações de cálculo – dependem do sistema de representação utilizado. Por exemplo, o sistema de numeração decimal de posição oferece mais possibilidades que os sistemas grego ou romano de numeração e, no entanto, a aquisição desse sistema de numeração pelos alunos não é simples [...]. A seguir, há o fato de que os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O acesso aos números está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar (DUVAL, 2011a, p. 13-14).

Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 34) afirmam que:

> falar de representação equivale a falar de conhecimento, significado, compreensão uma vez que se pode considerar que a compreensão de um objeto matemático está diretamente relacionada com a identificação das diferentes representações que lhe são associadas.

Em relação à compreensão de objetos matemáticos, Duval distingue dois termos, semiósis e noésis. De acordo com Duval (2009, p. 15, grifos do autor) semiósis é "a apreensão ou a produção de uma representação semiótica", e *noésis* são "os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto". Analisando a relação entre elas, o autor conclui que "não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e exercício da *noésis*" (DUVAL, 2009, p. 17, grifos do autor). Olhando para o processo de semiósis, Araújo (2004, p. 9-10), coloca que

> O processo de semiose ou de significação requer, basicamente, sistemas de símbolos e de signos linguísticos codificados por meio de regras de emprego. Porém, sem os fatores da situação de fala, contexto, intenção, comportamento verbal, circuito da comunicação, efetividade do dito e do dizer, simplesmente não há linguagem. O processo de semiose não se restringe a que algo (como um signo ou sistema de signos) substitua algo para alguém. A linguagem não é uma tradução automática das coisas, o significado não é um substituto do objeto.

Segundo Duval (2011a, p. 21) "o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas", sendo fundamental não confundir um objeto com sua representação, ou seja, os signos e as representações têm a função de evocar ou tornar presente os objetos matemáticos, mas não podemos reduzir sua função a isso e acreditar que a expressão algébrica *f(x)* = x^2 é o objeto função quadrática, quando na verdade, esta expressão é apenas uma representação deste objeto matemático.

Duval (2009, p. 15) afirma que em Matemática, “as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática” e, neste sentido, [...] o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático (DUVAL, 2011a, p. 13).

Existe em Matemática uma grande variedade de representações semióticas que podem ser utilizadas. De acordo com Duval (2011a, p. 14), “além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, mesmo se ela é utilizada de outra maneira que não a da linguagem corrente”. E “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação” (DUVAL, 2011a, p. 14). “O que importa primeiro nas representações semióticas é a potencialidade intrínseca de serem facilmente transformadas em outras representações semióticas” (DUVAL, 2011b, p. 40).

De acordo com Duval (2011a, p. 16) as representações semióticas podem ser submetidas a dois tipos de transformações, radicalmente diferentes, os tratamentos e as conversões:

> - Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.
> - As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registros conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica.

Vamos pensar, por exemplo, na situação, apresentada na Figura 5.

Figura 5 – Exemplo de problema envolvendo o preço da gasolina

João foi a um posto de gasolina para abastecer seu carro e, enquanto abastecia, a roleta com os números que calcula o valor a ser pago travou, mas apenas ela. Diante do acontecido, como o frentista pode fazer para determinar o valor a ser pago por João, para qualquer quantidade de gasolina, sabendo que o preço da gasolina é de R$ 2,39 o litro e a capacidade do tanque é de 45 litros?

Como podemos observar, trata-se de um problema que envolve a noção de função, e que facilmente conseguimos identificar que a variável ‘preço’, valor a ser pago em reais, depende da variável ‘quantidade’, em litros de gasolina. Sua solução pode envolver o uso de diferentes registros de representações semióticas[20], vejamos:

- Registro numérico

1 litro $\rightarrow$ R$ 2,39
2 litros $\rightarrow$ 2 × R$ 2,39 = R$ 4,78
3 litros $\rightarrow$ 3 × R$ 2,39 = R$ 7,17
4 litros $\rightarrow$ 4 × R$ 2,39 = R$ 9,56
5 litros $\rightarrow$ 5 × R$ 2,39 = R$ 11,95
...
45 litros $\rightarrow$ 45 × R$ 2,39 = R$ 107,55

- Registro Tabular

Tabela 1 – Registro Tabular para o exemplo do preço da gasolina

Qtde (litros)	**Preço (R$)**
0	0
1	2,39
2	4,78
3	7,17
4	9,56
5	11,95
...	...
45	107,55

- Registro algébrico

$$f(x) = 2{,}39 \,.\, x,$$

Onde:
f(x) é o preço a ser pago em reais
x é a quantidade de gasolina em litros

Ou ainda, em uma forma mais generalizada:

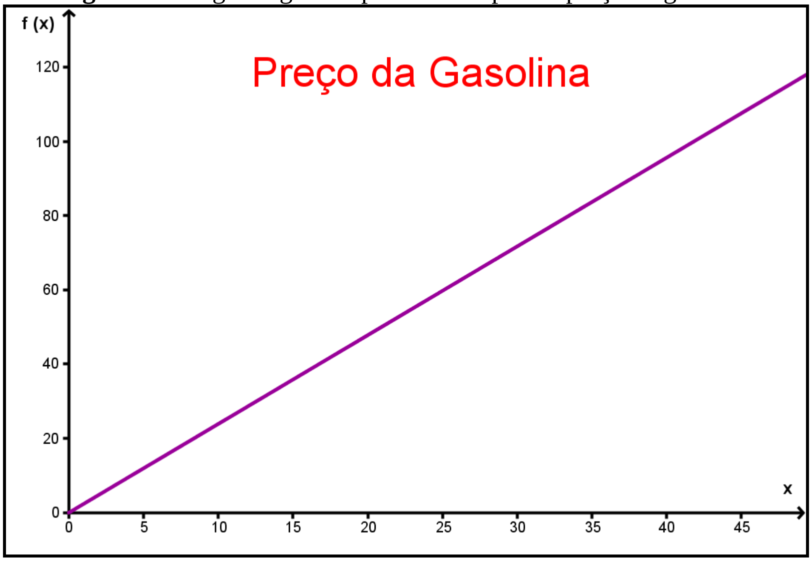
$$f(x) = k \,.\, x,$$

Onde:
f(x) é o preço a ser pago em reais
x é a quantidade de gasolina em litros
k é uma constante e representa o valor de um litro de gasolina.

[20] As representações apresentadas são apenas ilustrativas, produzidas pelo pesquisador, de modo a exemplificar a ‘linguagem’ utilizada em cada registro de representação semiótica.

- Registro Gráfico

Figura 6 – Registro gráfico para o exemplo do preço da gasolina

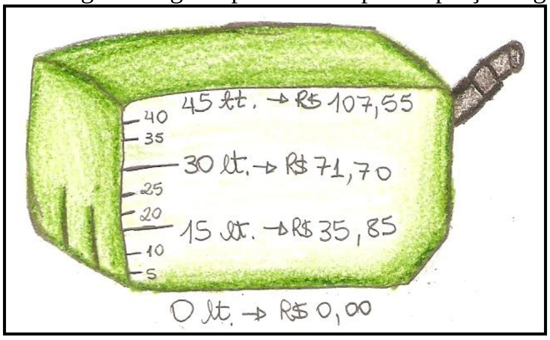


- Registro Linguagem Natural

Para determinar o valor a ser pago em reais, deve-se multiplicar o valor de um litro de gasolina, pela quantidade de litros de gasolina abastecida.

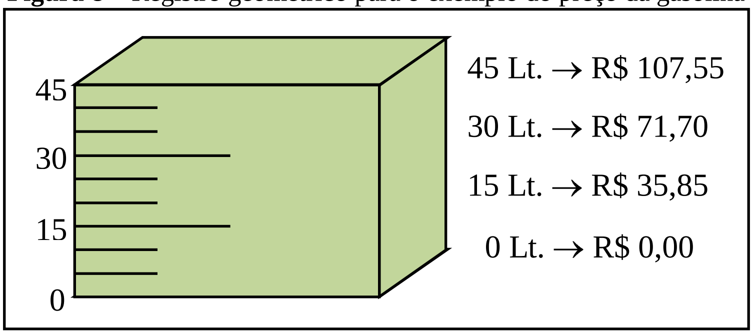
- Registro Figural

Figura 7 – Registro Figural para o exemplo do preço da gasolina



- Registro Geométrico

Figura 8 – Registro geométrico para o exemplo do preço da gasolina



A transição entre esses registros de representações semióticas se dá por meio da conversão, e na medida em que mudamos de representação, mudamos também, o sistema de signos envolvidos nelas. Contudo, há também a possibilidade dos estudantes realizarem tratamentos, para que possam lidar melhor com os registros, como por exemplo, na Figura 9.

Figura 9 – Exemplos de Tratamento para o problema do preço da gasolina

Registro Numérico

2 litros $\rightarrow$ 2 × R\$ 2,39 = R\$ 4,78
3 litros $\rightarrow$ 3 × R\$ 2,39 = R\$ 7,17
4 litros $\rightarrow$ 4 × R\$ 2,39 = R\$ 9,56

$$\begin{array}{r} 2{,}39 \\ \times\ 2 \\ \hline 4{,}78 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}39 \\ \times\ 3 \\ \hline 7{,}17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}39 \\ \times\ 4 \\ \hline 9{,}56 \end{array}$$

Registro Algébrico

$f(x) = 2{,}39 \,.\, x,$ $\qquad$ $f(x) = k \,.\, x,$

Sob um ponto de vista matemático, Duval coloca que a conversão intervém apenas em escolher qual o registro lhes é mais conveniente, o que lhes permitem economizar nos tratamentos a serem efetuados, contudo, é essa transformação, agora sob um ponto de vista cognitivo, que permite que os estudantes reconheçam o objeto matemático em suas diferentes representações, que os conduz a mecanismos subjacentes à compreensão, já que a interpretação desses diferentes registros exige dos estudantes certo nível de abstração.

Para Duval (2009; 2011a; 2011b) a construção do conhecimento, e, consequentemente, a aprendizagem em Matemática, está associada à semiósis, o uso de deferentes registros de representações semióticas para um mesmo objeto matemático, e à noésis, a coordenação entre esses diferentes registros; sendo que o aprendizado de um objeto matemático se dá a partir do reconhecimento e interpretação de suas possíveis representações, bem como saber transitar entre esses diferentes registros.

Diante de tais considerações, vislumbramos com a teoria de Raymond Duval, como um de nossos alicerces, a análise da linguagem utilizada pelos estudantes, olhando para o uso que fazem dos signos e sua coordenação sobre os registros de representações semióticas.

2.7 A LINGUAGEM MATEMÁTICA COMO FOCO

Segundo Glock (1998) Wittgenstein acreditou que sua maior contribuição foi para com a filosofia da Matemática. A concepção que Wittgenstein tinha de Matemática não era "como um corpo de verdades sobre entidades abstratas, mas como parte das práticas humanas" (GLOCK, 1998, p. 33).

De acordo com Glock (1998), Wittgenstein entende as proposições da Matemática como normativas, portanto, nada que as contrariem faz sentido.

> As proposições matemáticas são regras da gramática, "paradigmas" para a transformação de proposições empíricas. As equações aritméticas não descrevem relações entre entidades abstratas, mas constituem normas para a descrição dos números de objetos do mundo empírico, isto é, são regras de substituição. Com "2 + 2 = 4", estamos autorizados a passar de "Há dois pares de maçãs na cesta" para "Há quatro maçãs na cesta". [...] As proposições geométricas são regras para a descrição das formas de objetos e de suas relações espaciais, e para o uso de expressões como "comprimento", "comprimento igual" etc. Estabelecem, além disso, ideais ou normas para a atribuição de exatidão a uma medição (GLOCK, 1998, p. 243).

Essas noções facilitam a compreensão de que criamos a linguagem para nossas necessidades e propósitos, pois ela realça nossas práticas reais e significativas (VILELA; MENDES, 2011, p. 14).

A linguagem, neste contexto, pode ser entendida na perspectiva de Santos (2009, p. 117) "como uma criação social que utiliza símbolos, também criados socialmente [e] a linguagem matemática é um sistema simbólico de caráter formal, cuja elaboração é indissociável do processo de construção do conhecimento matemático".

Segundo Smole (2005, p. 64), "aprender a escrever e ler em língua materna tem características distintas do aprender a escrever enunciados matemáticos", cada um desses sistemas possui características próprias e seu aprendizado envolve aprender os signos e suas regras de uso em cada sistema.

> [...] o "significado" de um signo matemático, assim como o de uma peça de xadrez, é a soma das regras que determinam os seus "lances" possíveis. O que distingue a matemática aplicada e a linguagem do jogo de xadrez e da matemática pura é simplesmente sua "aplicação", o modo como interagem com outras atividades (lingüísticas e não lingüísticas) (GLOCK, 1998, p. 225).

Diante da necessidade de olhar para a "aplicação" ou para o uso que fazemos dos signos matemáticos, reconhecemos a importância dos jogos de linguagem na Matemática, cuja aprendizagem está associada ao uso de diferentes representações de um mesmo objeto matemático que emergem a partir desses jogos, constituídos no interior desta disciplina.

> Um símbolo matemático é vazio, não há uma necessidade lógica que nos obrigue a uma determinada direção, como, por exemplo, a de um desenvolvimento natural e espontâneo de supostas estruturas cognitivas. O que vai nos dar a essência de um conceito matemático é a sua aplicação, pois é no momento do uso do conceito que nos conectamos com toda a sua gramática. [...] Uma vez que as atividades e os procedimentos que acompanham o uso de símbolos matemáticos são de natureza convencional, não cabe esperar que o aluno *adivinhe* como se dá uma nova aplicação de um determinado conceito ou proposição matemática (GOTTSCHALK, 2008, p. 88).

Assim, a obtenção de um resultado, como na igualdade “12 × 12 = 144, só tem sentido se formos capazes de utilizar as regras de cálculo que relacionam os algarismos 1, 2 e 4 entre si” (GOTTSCHALK, 2008, p. 82).

Nessa perspectiva, aprender Matemática envolve entre outros aspectos aprender a utilizar uma linguagem matemática, o que implica em aprender uma série de regras e suas aplicações. Face ao exposto, acreditamos que o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, que consiste em abordar matematicamente situações problema que podem não ser essencialmente matemáticas, vem ao encontro dessas ponderações, no sentido de propiciar aos estudantes a familiarização com a linguagem matemática por meio da produção de modelos matemáticos, além de contribuir para o desenvolvimento da habilidade de transitar entre linguagem natural do fenômeno e linguagem matemática, estabelecendo conexões entre Matemática e suas aplicações na realidade.

Portanto, a mudança da linguagem natural do fenômeno para uma linguagem matemática, que é uma condição necessária para a produção de um modelo matemático, é resultado da mudança entre os jogos de linguagem constituídos nas atividades de Modelagem. Daí a importância de se articular os três referenciais teóricos enunciados: Modelagem Matemática, Linguagem e Registros de Representações Semióticas, a fim de potencializar a aprendizagem em Matemática.

CAPÍTULO 3

ASPECTOS METODOLÓGICOS: O CAMINHAR DA PESQUISA

3.1 CONTEXTO DA PESQUISA

Nesta seção, buscamos elucidar o contexto em que a pesquisa foi realizada. Para isso, apresentamos alguns aspectos que consideramos relevantes para compreender o cenário de investigação. Assim, caracterizamos o projeto e o programa a que a pesquisa está associada, apresentando seus objetivos e discutindo suas implicações para o estudo; a turma envolvida, descrevendo a escola, o espaço e os estudantes que a constituem; a condução das atividades desenvolvidas, bem como os encontros realizados e os instrumentos e procedimentos utilizados na coleta e análise dos dados.

3.1.1 O Projeto "Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática"

A pesquisa que constitui esta dissertação está associada ao "Programa Observatório da Educação" (OBEDUC)[21], por meio do Projeto "Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática". Esse projeto centra-se sobre os eixos temáticos Formação Continuada e Educação Básica e sua vigência é de quatro anos, a saber, de 2011 a 2014. Tem por objetivo fomentar a produção acadêmica relativa à Formação de Professores que ensinam Matemática e à formação de recursos humanos em Educação Matemática na Educação Básica, na Graduação e na Pós-graduação (mestrado e doutorado), que colaborem para elevação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB. Assim, um dos motivos que culminou na elaboração deste projeto foi a nota obtida pelas escolas participantes no IDEB, sendo este um dos critérios considerados na escolha das escolas.

O desenvolvimento do projeto foi ainda norteado por outros objetivos que geraram ações de intervenção, pesquisa, avaliação e disseminação. Dentre eles, citamos

[21] Esse programa foi instituído pelo Decreto Presidencial nº 5.803, de 08 de junho de 2006, em decorrência da parceria entre Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep).

alguns na tentativa de elucidar como nossa pesquisa se encaixa e contribui para cumprir os objetivos elencados.

- Investigar contextos em que os participantes desenvolvam sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, e comunicar suas ideias matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem e interpretam problemas em uma variedade de situações.

Neste caso, propomos aos participantes envolvidos, os estudantes do 4º ano, o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, que organizados em grupos, tiveram a oportunidade de discutir suas ideias, explicar o raciocínio utilizado na produção dos modelos matemáticos, em uma diversidade de situações, contemplando temas como ‘Tamanho de Anéis’, ‘Espaço dos estudantes na sala de aula’, ‘Energia Elétrica’, ‘Medindo a beleza de uma pessoa’, ‘Qual caixa d’ água comprar?’, “Relação entre as moedas Dólar e Real” e “Os gastos com o Flúor”.

- Fomentar, disseminar e desenvolver metodologias de prática de ensino significativas, para enfrentamento dos problemas na área de Matemática.

Em resposta a esse objetivo propomos a Modelagem Matemática, como alternativa que permite potencializar o ensino e a aprendizagem em Matemática, cuja metodologia prima por uma abordagem mais integrada dos conteúdos, permitindo que os estudantes, na busca por um modelo matemático adequado a uma determinada situação, lidem com problemas que os aproximam da realidade, buscando na Matemática subsídios para solucioná-los, e ao mesmo tempo, promover a aprendizagem dessa disciplina.

- Produzir algum material didático para dar suporte às ações desenvolvidas nas escolas participantes.

Além da produção desta dissertação, com os resultados da pesquisa, as folhas com as informações, utilizadas no desenvolvimento das atividades, são apresentadas no Apêndice, para que os interessados possam utilizá-las, ou, adequá-las, conforme as necessidades de suas salas de aula.

No projeto, estão envolvidas professoras de duas escolas Públicas do Norte e Noroeste do Paraná, uma escola municipal, envolvendo professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental, e outra Estadual, com professoras dos anos finais do Ensino

Fundamental, respectivamente. O projeto conta com a participação de estudantes de Mestrado e Doutorado, bem como estudantes de Graduação, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

A pesquisa abordada nesta dissertação está vinculada à Escola Municipal localizada no Norte do Paraná, sendo desenvolvida no âmbito dos anos iniciais do Ensino Fundamental, no primeiro ano de vigência do projeto, ou seja, em 2011.

Os encontros eram semanais, realizados às sextas-feiras, com duração de três horas. Os estudantes de doutorado, mestrado e graduação, se reuniam na escola para o desenvolvimento do projeto, sua execução era da seguinte maneira: A doutoranda envolvida ministrava um curso com as professoras da escola, enquanto os estudantes de mestrado e de graduação assumiam as salas de aula, trabalhando especialmente com atividades e tarefas matemáticas, de acordo com a série e a idade. A escola funciona em tempo integral e, neste ano, possuía seis turmas: duas de 2º ano, duas de 3º ano, uma de 4º ano e uma de 4ª série. Dentre essas turmas, uma foi escolhida para o desenvolvimento desta pesquisa, a qual apresentamos e descrevemos na seção a seguir.

3.1.2 A Turma

A turma escolhida para nossa pesquisa foi um 4º ano, o único da escola em 2011. Possuía trinta e seis estudantes com idades que variavam entre 8 e 9 anos. E, apesar de tratar de uma turma numerosa, os estudantes, em sua maioria, eram participativos. A professora da turma era bem comprometida e, assim que fizemos a proposta da pesquisa, se colocou a nossa disposição, assim como os estudantes, que colaboraram com o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática.

3.1.3 As atividades e sua condução

A inserção das atividades de Modelagem Matemática nas aulas do 4º ano foi realizada de forma gradativa, de acordo com os três momentos sugeridos por Almeida e Dias (2004), com o intuito de promover a familiarização dos estudantes com esse tipo de atividade e contribuir para o desenvolvimento de uma atitude investigativa em relação às situações problema selecionadas para estudo.

Neste contexto, os estudantes desenvolveram sete atividades, sendo duas do primeiro momento, tendo como temas ‘Tamanho de Anéis’ e ‘Espaço dos estudantes na sala de aula’; duas do segundo momento, com os temas ‘Energia Elétrica’ e ‘Medindo a beleza de uma pessoa’; e, por fim, três do terceiro momento, cujos temas escolhidos pelos estudantes foram: ‘Qual caixa d’ água comprar?’, ‘Relação entre as moedas Dólar e Real’ e ‘Os gastos com o Flúor’.

A atividade ‘Tamanho de Anéis’ foi a primeira atividade de Modelagem Matemática realizada pelos estudantes, e para o seu desenvolvimento a turma foi organizada em oito grupos com 3, 4 ou 5 estudantes. O espaço utilizado foi a sala de aula e os instrumentos disponíveis eram: quadro com moldes para os tamanhos pares de anéis, fecho de arame revestido de plástico, régua e folhas para anotações. Nesta atividade, os estudantes tinham que descobrir como determinar o tamanho de anel para uma pessoa qualquer, a partir do quadro de moldes.

Para a atividade ‘Espaço dos estudantes na sala de aula’, que foi a segunda atividade de Modelagem desenvolvida pelos estudantes, eles foram organizados em oito grupos com 3 ou 4 estudantes cada. O espaço utilizado foi também a sala de aula, sendo essa o objeto de investigação dos estudantes. Para o desenvolvimento da atividade foram disponibilizadas aos estudantes trenas, fitas métricas, réguas e folhas para anotações. O objetivo desta atividade era determinar quantos estudantes cabiam na sala de aula, respeitando as condições propostas pela Constituição Federal Brasileira a respeito da área garantida a cada estudante na sala de aula.

A atividade ‘Energia Elétrica’ foi a terceira desenvolvida pelos estudantes. Neste caso, a turma foi organizada em oito grupos com 4 ou 5 estudantes. O espaço utilizado foi a sala de aula e dentre os recursos utilizados citamos uma fatura de energia elétrica da residência dos estudantes, calculadora e folhas para anotações. Nesta atividade os estudantes se empenharam em descobrir quanto eles gastam de energia elétrica e quanto é pago por isso para eles assistirem seu desenho favorito e para tomar banho no período de um mês.

Já a atividade ‘Medindo a beleza de uma pessoa’ foi a quarta atividade desenvolvida pelos estudantes. Para o seu desenvolvimento a turma foi disposta em oito grupos com 3 ou 4 estudantes. O espaço utilizado foi a biblioteca, por ser mais amplo e contar com mesas e cadeiras mais propícias para sua realização. Os instrumentos disponíveis eram: fita métrica, calculadora e folhas para anotações. Os estudantes deveriam realizar algumas medidas de seu corpo, bem como do corpo de seus colegas de grupo e, por meio do cálculo da razão entre essas medidas, verificar se há alguma maneira de 'medir' a beleza de uma pessoa.

Para o desenvolvimento da quinta, sexta e sétima atividades, referentes ao terceiro momento de inserção de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, os estudantes foram organizados em seis grupos, dentre os quais dois deles escolheram o tema 'Relação entre as moedas Dólar e Real', envolvendo treze estudantes; um escolheu o tema 'Qual caixa d' água comprar?', envolvendo oito estudantes; e três deles escolheram o tema 'Os gastos com o flúor', envolvendo catorze estudantes. Os espaços utilizados para o desenvolvimento dessas atividades foram a sala de aula e o laboratório de informática da escola, onde pesquisaram informações a respeito dos temas. Além do computador, os estudantes tinham disponíveis folhas para anotações e cartolinas para confeccionarem cartazes com suas soluções do respectivo problema.

No caso da atividade 'Relação entre as moedas Dólar e Real', o objetivo dos estudantes era desvendar a relação entre essas moedas. Já na atividade 'Qual caixa d' água comprar?', os estudantes pretendiam descobrir qual a melhor capacidade de caixa d' água para sua residência, dado o número de pessoas que ali residem e as normas brasileiras que regulamentam tal situação. E, finalmente, a atividade 'Os gastos com o Flúor', em que os estudantes envolvidos buscavam os gastos com o flúor pela Secretaria de Saúde do Estado do Paraná com a escola na qual estudavam. Nesse caso, além das informações coletadas pelos estudantes no laboratório de informática, eles complementaram essa busca por meio de uma entrevista com a diretora e a secretária da escola.

Ao término de cada atividade, os procedimentos utilizados e os resultados obtidos por cada grupo eram discutidos com os demais estudantes, com a intenção de validar os modelos matemáticos produzidos.

Apesar de estar presente em alguns encontros, a professora da turma não interferiu no desenvolvimento das atividades, apenas auxiliou na organização dos estudantes.

Para a dissertação, optamos por abordar cinco dessas atividades: as duas do primeiro momento: 'Tamanho de Anéis' e 'Espaço dos estudantes na sala de aula'; uma do segundo: ‘Medindo a beleza de uma pessoa’; e duas do terceiro: ‘Relação entre as moedas Dólar e Real’ e ‘Os gastos com o Flúor’; as quais descrevemos e analisamos com base nos dados coletados e à luz dos referenciais teóricos adotados.

3.1.4 A coleta dos dados

Para a coleta dos dados, foi utilizada uma filmadora para captar as imagens e auxiliar o pesquisador na identificação dos estudantes, dois gravadores para captar o áudio, ficando um sempre junto ao pesquisador e o outro revezado entre os grupos, e uma máquina fotográfica, a fim de registrar imagens dos estudantes desenvolvendo as atividades. Também foi utilizado um diário de campo, no qual o pesquisador fazia os relatos dos encontros, anotando fatos que lhe chamava atenção e que desencadeava na solução do problema ou em discussões que estimulavam a aprendizagem matemática. E, por último, os registros dos estudantes, que constituem uma peça fundamental para as nossas análises sobre a linguagem.

Além desses instrumentos utilizados para a coleta dos dados, também tivemos os instrumentos que auxiliaram no desenvolvimento das atividades, como o projetor multimídia, os computadores do Laboratório de Informática da Escola, o espaço da biblioteca, quadro, giz, fitas métricas, trenas, fecho de arame, calculadoras, papéis para anotação, etc.

3.1.5 A análise dos dados

A análise dos dados é feita à luz dos referenciais teóricos adotados e frente aos objetivos que nos propomos a cumprir. Trata, assim, de uma análise de caráter descritivo e interpretativo, com vistas a refletir sobre os usos que estudantes de anos iniciais do Ensino Fundamental fazem da linguagem para o desenvolvimento de modelos matemáticos. Para isso, olhamos para as três questões decorrentes do objetivo da pesquisa, com as quais orientamos nossas análises: Como os estudantes de uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental representam seus modelos matemáticos? Quais jogos de linguagem são constituídos na produção e interpretação desses modelos? E por fim, qual o papel da linguagem em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por esses estudantes dos anos iniciais?

A partir destas questões, optamos por realizar dois tipos de análises: análises locais, nas quais olhamos para as características de cada atividade em particular, os modelos matemáticos produzidos pelos estudantes, bem como as hipóteses, conjecturas, variáveis e os procedimentos que usaram para essa produção; e uma análise global, na qual por meio de uma visão mais holística sobre as análises locais, fazemos discussões a respeito do que é um modelo matemático para estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental e o que o difere dos modelos matemáticos produzidos em outros níveis de escolaridade, além de levantar algumas conjecturas em relação aos usos que esses estudantes fazem da linguagem na produção de modelos matemáticos nas atividades de Modelagem desenvolvidas. Sempre que preciso fazemos referência à base teórica assumida e aos registros dos estudantes para fundamentar nossas inferências.

Antes de qualquer coisa, organizamos os registros dos estudantes, de acordo com os grupos que desenvolveram as atividades, depois criamos uma lista na qual organizamos seus nomes em ordem alfabética e lhes atribuímos um código para poder identificá-los; chamamos de ‘Estudante 1’ o primeiro nome da lista, ‘Estudante 2’ o segundo, e assim por diante, até o ‘Estudante 36’.

Em seguida, começamos as análises locais. Procuramos nos registros de cada estudante as representações utilizadas durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática e que os conduziram à produção dos modelos matemáticos, classificamos essas representações segundo o registro de representação semiótica, a fim de identificar a o tipo de linguagem utilizada em cada uma delas e as semelhanças de família existente entre elas. Também buscamos identificar as transformações realizadas pelos estudantes entre as representações utilizadas, com o intuito de responder a questão “Como os estudantes envolvidos representam seus modelos matemáticos?”.

Paralelamente, apontamos a partir dos usos que os estudantes faziam das palavras, os jogos de linguagem que foram constituídos nas atividades e que levou a forma de vida dos estudantes a utilizarem tais representações, respondendo a segunda questão “Quais jogos de linguagem são constituídos na produção e interpretação desses modelos?”.

Neste sentido, encontramos subsídios para responder a terceira questão “Qual o papel da linguagem em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por esses estudantes dos anos iniciais?”

Por fim, olhamos para os resultados das análises locais e fazemos a articulação entre as evidências encontradas, constituindo a análise global, na qual discutimos sobre as linguagens identificadas nas representações dos estudantes e as implicações dessas linguagens para a produção do modelo matemático.

3.2 Natureza da Pesquisa

Diante do problema de pesquisa e dos objetivos apontados na seção anterior, optamos por uma abordagem predominantemente qualitativa, em consonância com os pressupostos de Bogdan e Biklen (1994). Utilizamos o adjetivo predominantemente, pois nos resguardamos o direito de fazer algumas análises de cunho quantitativo sempre que necessário, a fim de auxiliar na compreensão, bem como na comprovação de evidências de considerações resultantes da análise qualitativa.

De acordo com o Dicionário Eletrônico Houaiss, a palavra ‘qualitativo’ vem do latim *qualitatívus*, e refere-se a um adjetivo “relativo à qualidade, que qualifica”, enquanto o Dicionário Priberam da Língua Portuguesa a define como “relativo à qualidade ou natureza dos objetos”. Desta forma, optamos por uma abordagem que prima pela qualidade.

Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 49) “A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo”. Neste sentido, questões como ‘Por quê?’ e ‘Como?’ são importantes aliadas ao pesquisador que opta por uma abordagem qualitativa.

Bogdan e Biklen (1994) apontam cinco características que assinalam para o desenvolvimento de uma pesquisa cuja abordagem é qualitativa, essas características designam alguns aspectos que são comuns a pesquisas desta natureza. Elas podem ser abordadas com mais ou menos ênfase e variam conforme o caráter de cada pesquisa. Algumas delas podem nem ser contempladas, o que não descaracterizaria a abordagem da pesquisa como qualitativa. A seguir, apresentamos essas características relacionando-as com aspectos de nossa pesquisa, com a intenção de justificar nossa escolha.

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal

No nosso caso, a fonte de dados são os registros produzidos durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática por estudantes de uma turma dos anos iniciais do Ensino Fundamental, um 4º ano de uma Escola Pública e Municipal do Norte do Estado do Paraná, em conjunto com o pesquisador, professor da turma durante os encontros do projeto.

2. A investigação qualitativa é descritiva

O pesquisador, com a finalidade de subsidiar suas análises, busca durante uma investigação descrever os fatos o mais fielmente possível. É essa descrição, fundamentada nos materiais coletados, por meio dos instrumentos adequados – filmagens, gravações, fotografias, registros dos estudantes; que dará credibilidade e atribuirá confiabilidade à pesquisa, revelando detalhes-chave na compreensão do estudo realizado, desde a escolha dos referenciais teóricos até as argumentações utilizadas para a análise e discussão sobre o material coletado em campo.

3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos

É de práxis, em uma atividade de Modelagem Matemática, a análise de todas as fases que constituem o seu desenvolvimento, pois só assim é possível compreender a produção de um modelo matemático, que representa a solução para a situação problema inicialmente proposta. Desta forma, analisamos a partir dos registros dos estudantes, desde a fase da inteiração até a fase da Interpretação de Resultados e Validação a linguagem utilizada pelos mesmos, com o intuito de compreender o seu papel nas atividades de Modelagem, bem como que ‘linguagens’ emergem destas atividades.

4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva

Neste caso, os dados não são coletados a fim de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente, pelo contrário, as abstrações são construídas à medida que os dados são coletados, conforme indicam Bogdan e Biklen (1994). Para que essas abstrações sejam possíveis, o pesquisador deve estabelecer uma relação de impregnação com os dados, assim como aponta Bardin (1977), o que lhe permite fazer inferências, de forma indutiva, com base nas constatações feitas a partir dos registros dos estudantes, fazendo menção a eles sempre que necessário, bem como os apontando para fundamentar suas induções. Nesse tipo de análise a lógica envolvida não é como a lógica que está presente na sentença 2 + 2 = 4, ela busca explicar como os estudantes construíram esse raciocínio a partir das evidências encontradas em seus registros, até chegarem a essa afirmação.

5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa

As análises realizadas estão fundamentadas nas bases teóricas enunciadas, sendo importante sua articulação com os pressupostos teóricos adotados. Isso não significa ser neutro em relação às análises, mas adotar uma atitude crítica e reflexiva sobre os dados disponíveis. Em nosso caso, ao analisar os registros produzidos pelos estudantes a partir do desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e as ‘linguagens’ que deles emergem, o significado vem ao encontro dos pressupostos de Wittgenstein, ao colocar que o significado de uma palavra é seu uso na linguagem. Assim, por estarmos interessados nos usos que os estudantes fazem das palavras e dos signos, estamos segundo Wittgenstein, interessados nos significados atribuídos pelos estudantes a ambos, de acordo com a linguagem utilizada.

Essas características estão em consonância com as apresentadas por Garnica (2004, p. 86) para descrever uma pesquisa qualitativa:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

Neste sentido, desenvolvemos uma pesquisa de cunho qualitativo, na qual buscamos a partir da observação direta dos estudantes, em sua forma de vida constituída mediante suas práticas no ambiente proporcionado pela Modelagem Matemática, investigar e interpretar o papel da linguagem neste contexto.

CAPÍTULO 4

A LINGUAGEM NAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

4.1 AS ANÁLISES LOCAIS: UM OLHAR SOBRE CADA ATIVIDADE

Nesta seção, direcionamos nosso olhar para cada uma das atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental envolvidos na investigação. Em cada atividade, fazemos uma descrição sobre os encaminhamentos dados pelos estudantes em resposta ao problema enunciado, buscamos elucidar a linguagem utilizada pelos mesmos naquele contexto, e, à luz dos referenciais teóricos adotados, apontamos os jogos de linguagem constituídos na produção dos modelos matemáticos, bem como os signos e as representações identificados nos registros dos estudantes, que fundamentam nossas inferências e/ou conjecturas em relação ao problema de pesquisa.

4.1.1 Atividade 1 – Tamanho de Anéis

4.1.1.1 Descrição da Atividade

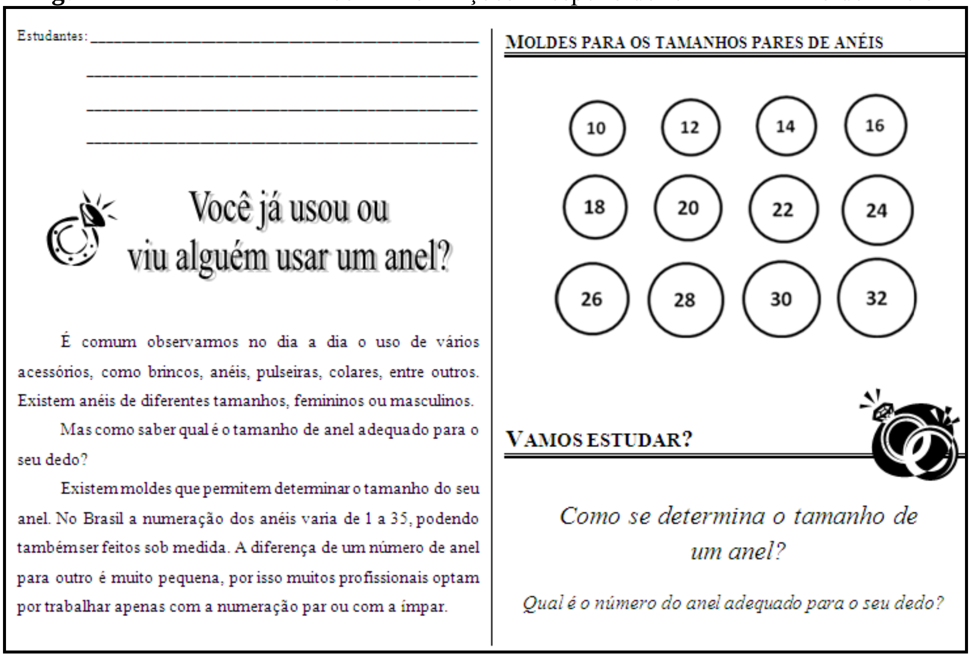
Esta foi a primeira atividade de Modelagem Matemática desenvolvida pelos estudantes e corresponde ao primeiro momento de inserção de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, conforme sugere Almeida e Dias (2004). Para o seu desenvolvimento a turma foi organizada em 8 grupos com 3, 4 ou 5 estudantes e foram necessários dois encontros.

O professor[22] iniciou a aula com alguns questionamentos em relação ao tema Anéis, questões como “Quem aqui usa ou já usou um anel?”, “Todos já viram alguém

[22] A partir de agora, chamaremos o pesquisador de professor, pois foi este o papel desenvolvido por ele naquele momento.

usando um anel?” e “Todos os anéis possuem o mesmo tamanho?”. Neste instante, muitos estudantes se manifestaram e alguns fizeram questão de mostrar os anéis que traziam consigo nos dedos. Segundo eles, além de tamanhos diferentes os anéis também possuem modelos diferentes.Após essa discussão inicial foi entregue a cada um dos estudantes uma folha com informações a respeito do tema ‘Tamanho de Anéis’, como mostra a Figura 10.

Figura 10 – Folha reduzida com informações a respeito do tema ‘Tamanho de Anéis’



Estudantes: ____________________

Você já usou ou viu alguém usar um anel?

É comum observarmos no dia a dia o uso de vários acessórios, como brincos, anéis, pulseiras, colares, entre outros. Existem anéis de diferentes tamanhos, femininos ou masculinos.

Mas como saber qual é o tamanho de anel adequado para o seu dedo?

Existem moldes que permitem determinar o tamanho do seu anel. No Brasil a numeração dos anéis varia de 1 a 35, podendo também ser feitos sob medida. A diferença de um número de anel para outro é muito pequena, por isso muitos profissionais optam por trabalhar apenas com a numeração par ou com a ímpar.

MOLDES PARA OS TAMANHOS PARES DE ANÉIS

10 12 14 16

18 20 22 24

26 28 30 32

VAMOS ESTUDAR?

Como se determina o tamanho de um anel?

Qual é o número do anel adequado para o seu dedo?

Essas informações foram apresentadas na forma de um texto (Figura 11) e de um quadro com os moldes para os tamanhos pares de anéis (Figura 12), desencadeando na proposta do problema a ser investigado (Figura 13). A leitura das informações foi realizada em conjunto com os estudantes.

Figura 11 – Texto com informações referente à atividade dos anéis

Você já usou ou viu alguém usar um anel?

É comum observarmos no dia a dia o uso de vários acessórios, como brincos, anéis, pulseiras, colares, entre outros. Existem anéis de diferentes tamanhos, femininos ou masculinos.

Mas como saber qual é o tamanho de anel adequado para o seu dedo?

Existem moldes que permitem determinar o tamanho do seu anel. No Brasil a numeração dos anéis varia de 1 a 35, podendo também ser feitos sob medida. A diferença de um número de anel para outro é muito pequena, por isso muitos profissionais optam por trabalhar apenas com a numeração par ou com a ímpar.

Figura 12 – Moldes para os anéis de tamanhos pares

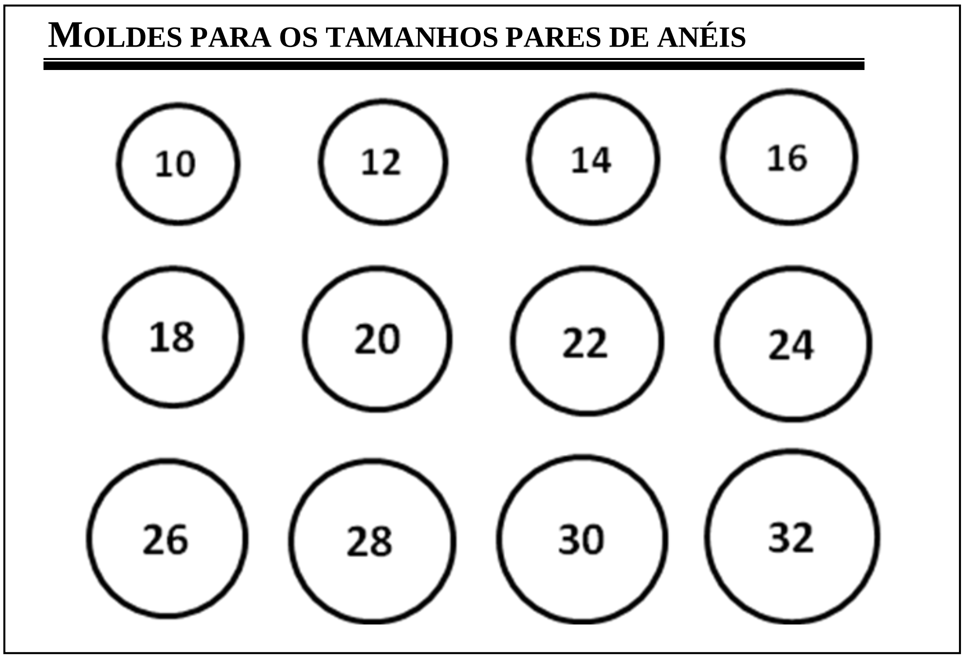
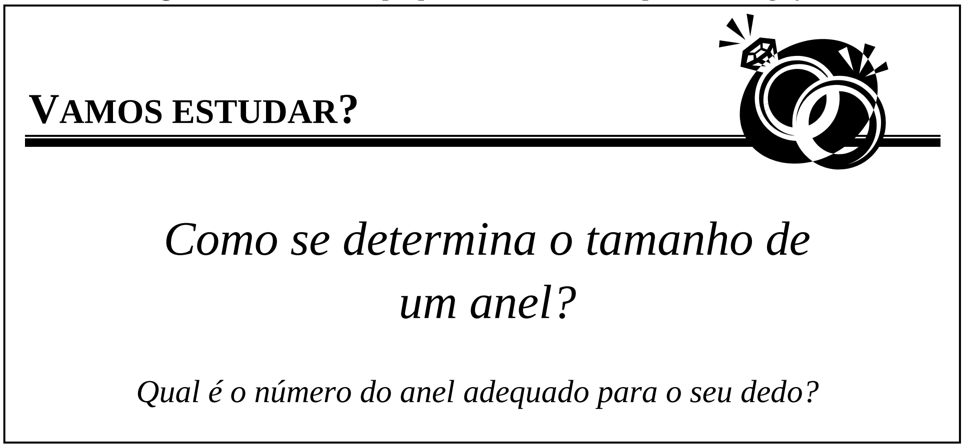


Figura 13 – Problema proposto aos estudantes para investigação



Ao tomarem conhecimento do problema, o professor questionou os estudantes se imaginavam como solucioná-lo, a resposta de vários deles foi "*medindo o dedo*". Todavia, a questão era: Como realizar essa medida?

Alguns estudantes deram algumas sugestões conhecidas por eles, como o uso de uma aneleira[23] (Estudante 26), ou, por meio da experimentação, provando anéis de todos os tamanhos para verificar qual é o adequado e depois consultar o quadro de moldes para descobrir o seu número (Estudante 22). Contudo, não tínhamos disponíveis nem uma aneleira, nem anéis de todos os tamanhos, pois era nosso objetivo que os estudantes se deparassem com uma situação semelhante à de um consumidor de anéis que desconhece qual é o tamanho de anel adequado para seu dedo e não tem esses instrumentos à disposição.

[23] Instrumento utilizado por vendedores de anéis para verificar o número do anel de seus clientes.

O professor lembrou os estudantes das informações apresentadas na folha entregue a eles e questiona se alguma pode lhes ajudar na solução do problema, eles apontaram algumas, como "*Os anéis vão ter diferentes formas*" (Estudante 20), "*diferentes números... de molde*", "*[tamanhos] de 1 a 35*", além disso, observaram que a diferença do tamanho entre dois moldes de números consecutivos era muito pequena.

Dada a situação e as condições, o professor questionou os estudantes como eles poderiam fazer para determinar o tamanho dos anéis, e, a partir das informações disponíveis, eles compreenderam a necessidade de utilizar um instrumento que os auxiliassem a realizar as medidas dos dedos. Inicialmente o Estudante 28 sugeriu o uso de uma garrafa descartável, no entanto, imediatamente notaram que com o gargalo da garrafa conseguiriam apenas a medida de um dos moldes, não solucionando o problema. Então o Estudante 16 propôs o uso de uma fita métrica ou barbante para enrolar no dedo, pois assim todos os tamanhos seriam considerados.

A ideia levou o professor a entregar a cada um dos estudantes um fecho de arame revestido com plástico[24], o qual foi chamado pelos estudantes de "araminho" ou "fiozinho". Com esse fecho, os estudantes puderam rapidamente determinar uma estratégia para descobrir o número de anel adequado para seus dedos: eles enrolaram o fecho no dedo, moldando-o na forma de um anel e, depois, o colocaram sobre o quadro de moldes, descobrindo o número de anel adequado para os seus dedos, uma solicitação específica da segunda questão do problema apresentado na Figura 13.

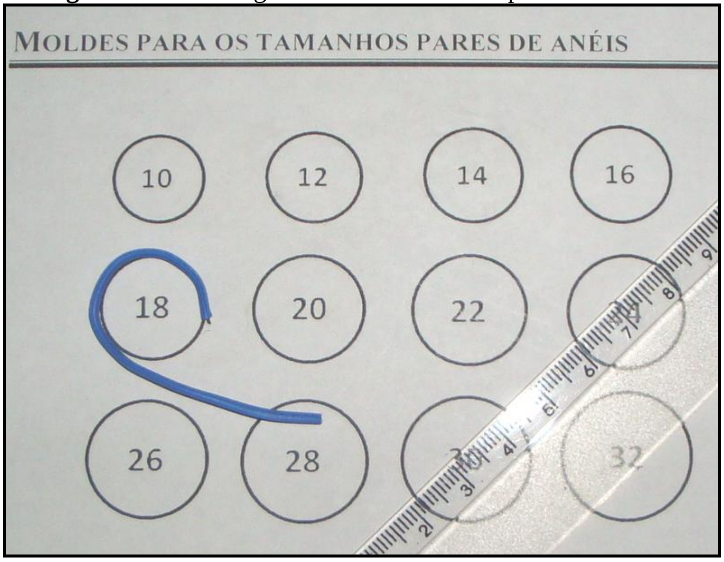
Deste modo, essa estratégia não foi suficiente para solucionar o problema por completo, os estudantes ainda precisavam encontrar uma maneira de determinar o tamanho de anel para uma pessoa qualquer, e, essa primeira descoberta apontou indicativos para que os estudantes notassem que não adiantaria medir todos os dedos, uma vez que não saberiam qual molde corresponderia a essas medidas. Foi então que o Estudante 16 teve a ideia de medir primeiro os moldes de anéis ao invés dos dedos, pois assim quando medissem seus dedos saberiam a quais números de anéis correspondem suas medidas.

---

[24] Aqueles utilizados como lacre pelas indústrias alimentícias, como por exemplo, a indústria de pão de forma. Preferimos este material por ser mais firme que o barbante e mais fácil de manipular, além de exigir o uso da régua, fazendo desta uma oportunidade para os estudantes aprenderem a utilizá-la corretamente.

Para essas medidas os estudantes moldavam o fecho sobre a imagem da circunferência dos moldes, depois o esticavam e com o auxílio de uma régua verificavam a medida de cada molde (Figura 14).

Figura 14 – Estratégia de medida utilizada pelos estudantes



Como até então os estudantes haviam realizado poucas atividades envolvendo o uso de réguas, eles se depararam com algumas dificuldades que tiveram que sanar para seguir adiante. Uma delas é a dúvida em relação ao ponto inicial de medida: Por onde começar medindo, do zero ou do um?

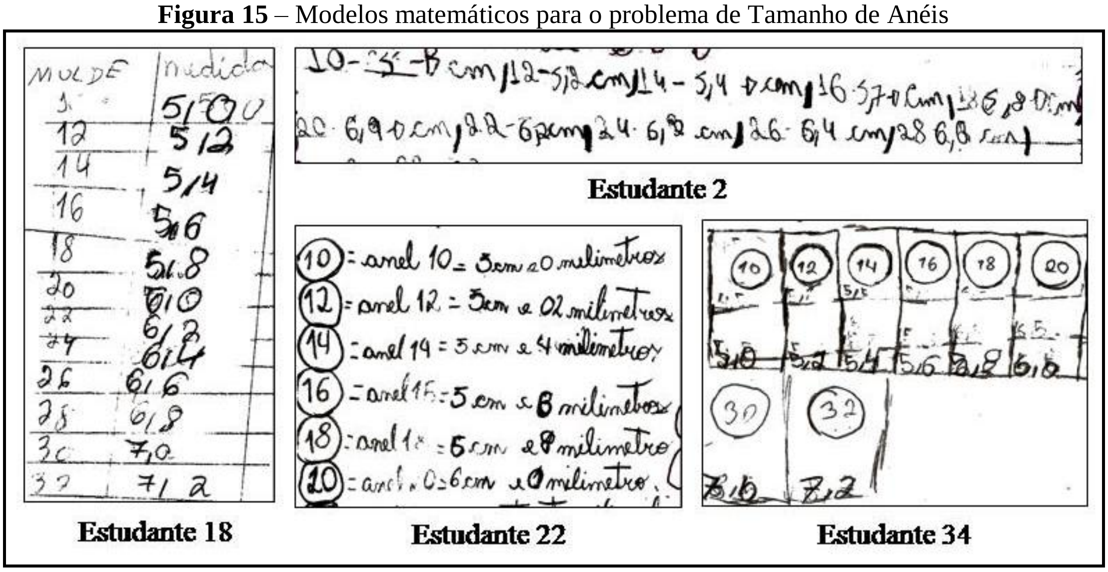
O professor explicou a diferença entre adotar o zero ou o um como ponto inicial de medida e que, geralmente, começamos do zero, uma vez que a medida torna-se mais fácil, pois, o que fazemos quando medimos? Calculamos o espaço entre dois ‘risquinhos’ da régua, ou seja, se a medida é do zero até o vinte, calculamos vinte menos zero, que é vinte, daí emerge a facilidade de começar com o zero, já que sempre que temos o zero como subtraendo, a diferença ou resto é o próprio minuendo, ou, como os estudantes dizem: “*um número menos zero é o próprio número*”, como indica a propriedade do Elemento Neutro.

Contudo, o professor deixou claro, que há também a possibilidade de começar com outro número como ponto inicial, o um, por exemplo, como alguns grupos fizeram. O que muda é que a resposta da subtração referente à medida não é tão simples como se fosse o zero o subtraendo, pois quando medimos do um até o vinte, temos que tirar aquele um centímetro (do zero ao um) que foi desconsiderado, ou seja, temos de fazer vinte menos um, que é dezenove; assim é também para os outros números. Essa explicação ajudou os estudantes a manusearem melhor suas réguas, sendo que algumas delas, que estavam quebradas na parte inicial, puderam também ser utilizadas.

Outra questão que também necessitou de esclarecimentos foi em relação aos milímetros, na verdade, em como representar suas medidas. Eles perceberam que os comprimentos das circunferências dos moldes de numeração entre 20 e 30 não tinham nem cinco centímetros, nem seis, suas medidas estavam entre eles, e para medirem, deveriam usar as medidas dos milímetros. O professor então explicou que além de descrever a medida obtida, por exemplo, 5 centímetros e 2 milímetros, como muitos estudantes fizeram, eles poderiam representá-la por meio de um Número Racional expresso na forma decimal. Isto é, nosso sistema tem base dez, e se desejamos manter o centímetro como unidade de medida, nesse caso, os risquinhos dos milímetros tornam-se menores do que uma unidade, ou seja, corresponde a uma unidade dividida em dez partes (1/10), isto resulta em um Número Racional, o “0,1”, pois não temos um centímetro completo, por isso o zero, e apenas um milímetro, uma parte do centímetro dividido em 10. No caso do nosso exemplo, 5 centímetros e 2 milímetros, podemos escrever como 5,2; pois temos 5 centímetros completos e ainda mais dois risquinhos correspondentes a dois milímetros, ou duas partes do centímetro dividido em dez (2/10), logo temos 5 + 0,2 centímetros, que é 5,2; e que é diferente de 52.

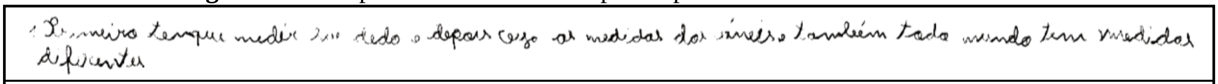
Com tais questões esclarecidas, as medidas obtidas foram organizadas pelos estudantes de diversas formas, as estruturas utilizadas representam os modelos matemáticos para a situação. Na Figura 15 podemos visualizar alguns exemplos.

Figura 15 – Modelos matemáticos para o problema de Tamanho de Anéis



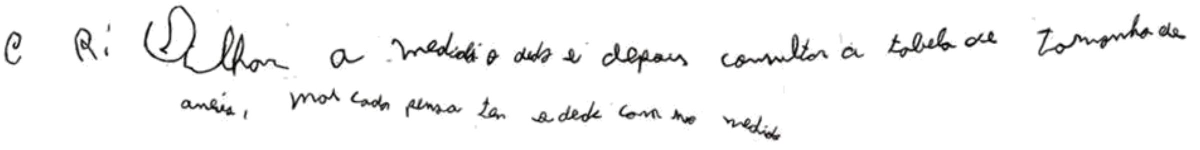
Geralmente, essas estruturas vinham acompanhadas de uma justificativa ou explicação de como proceder ou utilizar a estrutura constituída (Figura 16 e Figura 17)[25].

Figura 16 – Resposta do Estudante 30 para o problema do 'Tamanho de Anéis'



Primeiro tem que medir seu dedo e depois veja as medidas dos anéis e também todo mundo tem medidas diferentes

Figura 17 – Resposta do Estudante 16 para o problema do 'Tamanho de Anéis'



Olhar a medida do dedo e depois consultar a tabela de tamanho de anéis, mas cada pessoa tem o dedo com uma medida

Desta forma, os modelos matemáticos para esta situação assumiram diversas representações, como listas, tabelas e quadros verticais ou horizontais, anotações acima dos moldes ou mesmo o uso de linguagem natural para descrever a relação entre as variáveis 'número de molde' e 'comprimento da circunferência do molde'.

Os modelos matemáticos obtidos pelos grupos foram apresentados à turma e a verificação das medidas foi feita no quadro com a ajuda do professor, assim quando alguma medida era discrepante em relação às medidas dos outros grupos, uma nova medida era realizada para tirar as dúvidas.

No que concerne à discussão referente ao problema, os estudantes notaram que as medidas seguem uma regularidade, a diferença entre as medidas do comprimento da circunferência dos moldes pares é sempre dois milímetros. Além disso, os últimos algarismos da medida em cm e do número de molde eram iguais, por exemplo, o molde 22 mede 5,2 centímetros e o molde 24 mede 5,4 centímetros. No caso de obter uma medida como 5,3 centímetros eles conjecturaram que ela corresponde ao molde 23, pois está entre as medidas do molde 22 e 24, usando intuitivamente a ideia de média aritmética, mas no caso do vendedor de anel não trabalhar com moldes ímpares, nesse caso, eles teriam que optar pelo anel de tamanho 24, pois o de número 22 ficaria apertado.

[25] As respostas dos estudantes foram transcritas e editadas para que alguns erros ortográficos fossem ajustados.

Quanto aos erros cometidos, eles relacionaram à dificuldade em obter uma medida precisa, pois quando olhavam um pouquinho de lado eles tinham a impressão que o fecho estava perfeitamente sobre o molde, mas se olhassem de cima, eles poderiam ver que o fecho estava um pouco fora, isto é, para os estudantes a precisão, nesse caso, também esteve relacionada à noção de perspectiva. Todavia, eles consideraram os modelos matemáticos obtidos válidos e capazes de representar a situação problema em estudo.

4.1.1.2 Análise da Atividade

O tema desta atividade foi proposto pelo professor aos estudantes visando um estudo a respeito dos anéis, que por sua vez, é um objeto de uso comum na vida das pessoas. Entretanto, esse tema, por mais simples que pareça, envolve mais Matemática do que podemos imaginar e uma prova disso está na descrição da atividade, feita na seção anterior. Trata de um tema não essencialmente matemático, que neste contexto, originou um problema e recebeu dos estudantes uma abordagem matemática, caracterizando assim, de acordo com Almeida e Brito (2005) e Bassanezi (2004), uma atividade de Modelagem Matemática.

As perguntas feitas pelo professor a respeito dos anéis configuram-se como um “convite” aos estudantes para o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática, conforme propõe Barbosa (2003). A empolgação identificada nas suas respostas e a disposição em relação ao estudo indica a aceitação desse convite feito pelo professor em investigar o tema ‘Tamanhos de Anéis’.

Durante a discussão sobre o uso de anéis, ou sobre como determinar o tamanho de um anel, a linguagem natural prevaleceu, a comunicação naquele momento era estritamente oral. Apenas em alguns momentos, como no instante em que a estudante 26 explica sobre a aneleira, ela também se apóia em uma linguagem gestual, com o intuito de expressar a representação do objeto que estava em seu pensamento.

Ainda nesse momento inicial, os estudantes selecionaram as informações que consideraram úteis para o estudo do problema, as palavras utilizadas foram retiradas da folha com as informações a respeito dos anéis (Figura 18). Eles as copiaram ou reproduziram na área da folha destinada à resolução e como podemos observar na Figura 19 trata-se de uma representação escrita, cujo sistema semiótico é a linguagem natural do fenômeno.

Figura 18 – Texto com as informações a respeito dos anéis

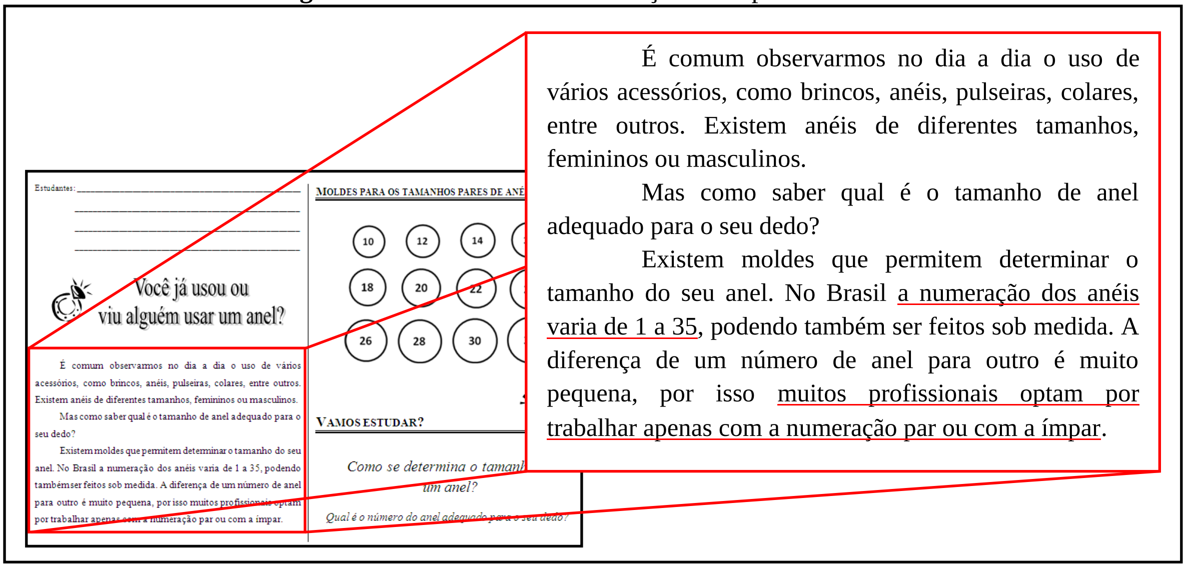
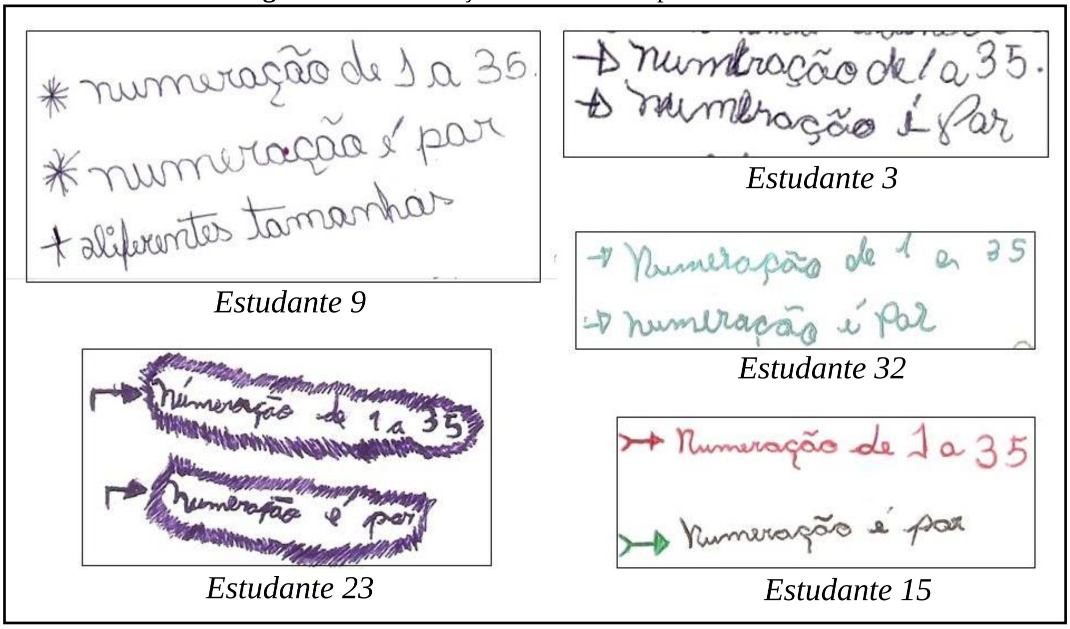


Figura 19 – Informações selecionadas pelos estudantes



Sustentados nos pressupostos de Wittgenstein, vemos que até então, os estudantes se mantiveram no mesmo jogo de linguagem em que as informações foram apresentadas, eles mantêm suas características e suas regras, fazendo uso até das mesmas palavras.

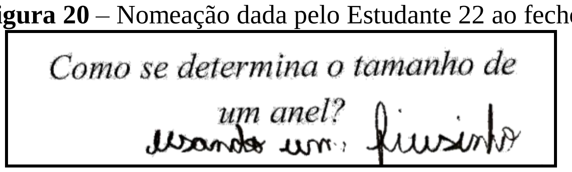
Contudo, para solucionar o problema eles tiveram que ir adiante, fazer, a partir dessas informações, a conversão da linguagem natural do fenômeno para uma linguagem matemática, ou seja, era necessária a mudança de jogo de linguagem; essa transição entre as linguagens é uma das ações realizadas no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.

Essa mudança ocorre quando os estudantes são questionados sobre ‘Como determinar o tamanho de um anel?’. Inicialmente, eles responderam “*medindo o dedo*” e, para isso, propuseram o uso de uma aneleira (Estudante 26), ou, de anéis de todos os tamanhos (Estudante 22). Eles mostraram na sequência as regras praticadas no jogo de linguagem dos vendedores de anéis, que necessitam dessas ferramentas para descobrir o número de um anel, no entanto, como não tinham essas ferramentas disponíveis, tiveram que se adequar a um novo jogo de linguagem que foi se constituindo no âmbito da atividade de Modelagem.

A saída para esta situação foi o fecho entregue pelo professor. Neste contexto, o fecho que outrora é utilizado como lacre em indústrias alimentícias – como, por exemplo, nas embalagens de pão de forma –, recebe uma nova função, a de um instrumento capaz de realizar as medidas necessárias para aquele momento – em relação ao comprimento da circunferência dos moldes de anéis. Isto é, o significado dado pelos estudantes àquele fecho como instrumento de medida, difere daquele dado pelas indústrias alimentícias que o utilizam como lacre, e, de acordo com Condé (1999), baseado em Wittgenstein, a mudança no contexto de uso, acarreta na mudança dos significados envolvidos e, consequentemente, na mudança do jogo de linguagem.

Neste contexto, os estudantes deixam o jogo de linguagem dos consumidores de anéis, que necessita de ferramentas específicas, e passam a constituir um novo jogo de linguagem, que faz do fecho um instrumento de medida. Outro aspecto relacionado a esse novo jogo de linguagem é a forma como os estudantes se referiam ao fecho, alguns os denominaram de “*fiozinho*”, outros, de “*araminho*” (Figura 20).

Figura 20 – Nomeação dada pelo Estudante 22 ao fecho

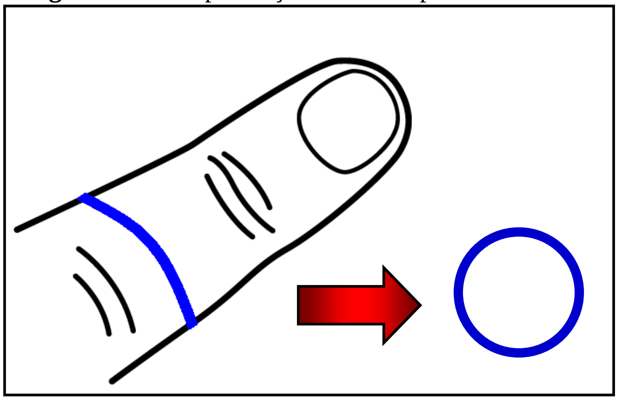

Como se determina o tamanho de um anel?
usando um fiusinho

Como eles não sabiam exatamente qual o nome daquele objeto que lhes foi entregue, foram aceitas essas nomeações. Acreditamos que elas podem ser provenientes das semelhanças do fecho com outros materiais que os estudantes conhecem e denominam fiozinho ou araminho, ou que apresentam as mesmas regras de uso que fizeram do fecho. Segundo Wittgenstein, são as regras de uso que validam ou não essas nomeações.

Assim, esse jogo de linguagem associado ao fecho como instrumento de medida, emergiu da necessidade dos estudantes em medir os dedos e os moldes de anéis.

No que diz respeito a medir os dedos, outro jogo de linguagem foi também constituído em consonância com as simplificações realizadas nas atividades de Modelagem Matemática. Para que os estudantes pudessem estabelecer a relação entre medida do dedo e número de molde de anel, eles tiveram que considerar a medida ao redor do dedo como a medida do comprimento de uma circunferência (Figura 21), ou seja, tiveram que considerar o dedo como um sólido geométrico, como um cilindro ou um tronco de um cone, cujas secções que interceptam o seu eixo perpendicularmente, formam circunferências.

Figura 21 – Simplificação realizada pelos estudantes

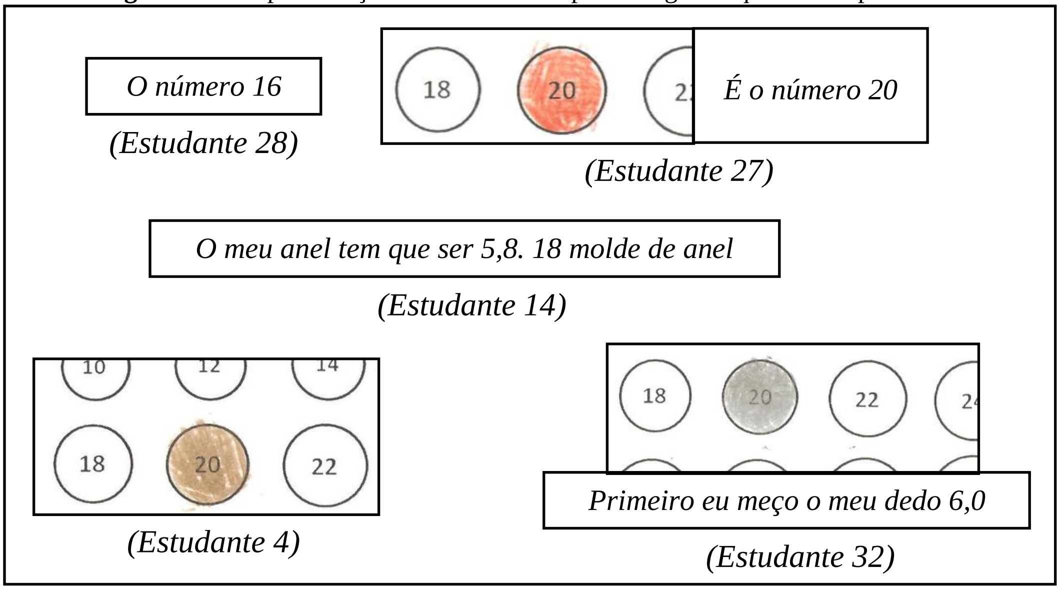


Essa simplificação deu suporte aos estudantes nas medidas do comprimento da circunferência dos moldes, pois, a partir dessas medidas, eles puderam descobrir qual o número do anel que melhor se ajustava ao seu dedo. Ela também validou a estratégia utilizada pelos estudantes logo no início da atividade para determinar o número do seu anel e responder a segunda questão do problema: ‘Qual é o número do anel adequado para o seu dedo?’.

A estratégia utilizada, de enrolar o fecho no dedo, moldando-o na forma de um anel, e depois o colocar sobre os moldes para verificar qual é o número de anel adequado, nos remete novamente ao jogo de linguagem dos vendedores de anéis, cujas semelhanças de família ficam evidentes quando comparadas com o jogo de linguagem dos estudantes. As regras de uso dessas estratégias se assemelham: o vendedor utiliza um anel que serve no dedo de seu cliente, o estudante enrola o fecho no dedo até ficar confortável, depois, ambos colocam sobre o quadro de moldes e verificam qual é o número de molde correspondente.

As representações utilizadas para responder a segunda questão do problema variaram entre pintar o molde correspondente e anotar o número do molde, ou ambas. Além disso, alguns estudantes também anotaram a medida do comprimento da circunferência de seu molde (Figura 22).

Figura 22 – Representações dos estudantes para a segunda questão do problema



Essa estratégia 'preliminar', utilizada pelos estudantes provocou alguns equívocos, pois na hora de retirar o fecho, o mesmo poderia afrouxar ou apertar, assim, muitos estudantes tiveram que conferir o número de seus anéis a partir de uma nova estratégia elaborada no decorrer da atividade, ou seja, medir o dedo e consultar o seu modelo matemático construído, seja uma tabela, um quadro, etc., o que indica que os estudantes quase que automaticamente tiveram que se inserir em um novo jogo de linguagem, que apresentasse mais proximidade, ou semelhanças de família, com o jogo de linguagem da Matemática.

Isso acontece no momento em que o Estudante 16 sugere primeiro medir o comprimento da circunferência dos moldes, pois não há como determinar o número do anel sem saber essas medidas, o que muitos vendedores de anéis não precisam fazer já que eles possuem outras estratégias de medida que nesse jogo de linguagem não ajudaria. Os estudantes começam a pensar em estruturas matemáticas para abordar o problema, e passam a fazer o uso de uma linguagem mais apropriada à ocasião, a linguagem matemática. Nesta perspectiva a coordenação entre os sistemas de representação assume um importante papel, possibilitando essa transição entre as linguagens.

Um exemplo disso é o uso que os estudantes fizeram da régua para, com o auxílio do fecho, medir o comprimento da circunferência dos moldes de anéis. Em primeiro lugar, muitos dos estudantes não sabiam como medir com a régua, e, em segundo, eles não sabiam representar as medidas não inteiras, o que exigiu do professor uma explicação mais cautelosa quanto ao uso desse instrumento. Essa explicação acabou por apontar dois novos jogos de linguagem, que se constituíram no âmbito da própria Matemática, e que foram o ponto de partida para o estudo de dois conceitos matemáticos, a propriedade do Elemento Neutro na subtração e os Números Racionais, em particular aqueles representados na forma decimal.

No primeiro caso, a dúvida de alguns estudantes era qual o ponto inicial para se começar a medir, enquanto a questão de outros era trocar de régua, pois a parte inicial estava quebrada. O professor lhes explicou que apesar de ser comum começarmos a medir do zero, qualquer número poderia ser tomado como ponto inicial; no caso de ser um número diferente de zero, eles só precisariam desconsiderar a parte inicial da régua que não foi utilizada na medida, matematicamente falando, isto é, buscando as regras já convencionadas no jogo de linguagem da Matemática, eles precisavam fazer uma subtração para achar a medida: Ponto Final – Ponto Inicial = Medida desejada.

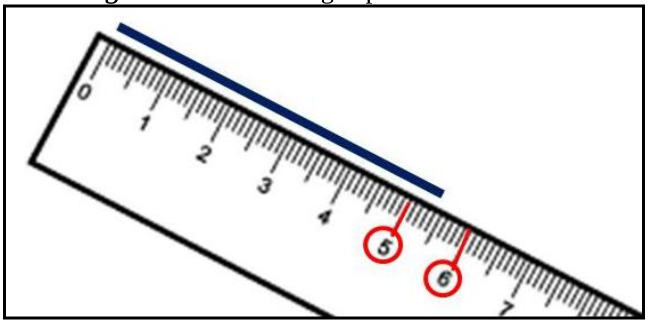
Com alguns exemplos o professor mostrou a diferença entre tomar o zero ou um número diferente de zero como ponto inicial, o que levou os estudantes a entender o porquê de ser mais fácil começar a medir a partir do zero: porque qualquer número menos o zero tem como resultado o próprio número. Essa observação, nada mais é do que em Matemática chamamos de ‘propriedade do elemento neutro’.

Como consequência dessa propriedade temos que em uma subtração cujo subtraendo é zero, o resultado da diferença entre minuendo e subtraendo é sempre o minuendo, em outras palavras: seja M o minuendo, S o subtraendo, D a diferença e válida a seguinte relação $M - S = D$, se $S = 0$, logo, $M = D$ ou $D = M$.

Como podemos observar existem diferentes representações para expressar a propriedade do elemento neutro, as quais caracterizam diferentes jogos de linguagem, mas com muitas semelhanças de família entre si. Todavia, algumas dessas representações tornam-se inviáveis dependendo da forma de vida envolvida, no caso dessa atividade, que os envolvidos eram estudantes de um 4º ano do Ensino Fundamental, a primeira representação foi suficiente: “qualquer número menos o zero tem como resultado o próprio número”. Já no jogo de linguagem praticado pelos matemáticos especialistas, pode ser mais proveitosa a representação que faz uso da notação em linguagem algébrica, uma vez que esta pode facilitar a realização de cálculos matemáticos.

Já no segundo caso, olhamos para as representações das medidas não inteiras. Observamos o exemplo de medida proposto na Figura 23, cuja marcação é de 5,4 cm.

Figura 23 – Uso da régua para medir o fecho



O professor observou que os estudantes, por não terem ainda estudado a representação decimal dos Números Racionais, descreviam a medida encontrada, ou seja, eles escreviam: 5 centímetros e 4 milímetros, então o professor lhes chamou a atenção para o espaço utilizado por essa representação e propôs o uso de uma nova representação que tanto economizaria espaço como facilitaria sua escrita. A princípio os estudantes pensaram ser a abreviatura cm para centímetros e mm para milímetros, o professor explicou que isso ajudaria, mas ele estava se referindo a uma nova representação numérica, por meio do uso de Números Racionais. No caso do exemplo, o fecho tem 5 centímetros completos e, além disso, 4 partes de um centímetro dividido em 10, ou seja, 4 milímetros, logo, os estudantes poderiam utilizar a seguinte representação: 5,4 cm, colocando sempre a parte inteira antes da vírgula e a parte decimal depois; como o centímetros é dividido em dez partes teremos apenas uma casa depois da vírgula, se fosse no caso de representar 5 metros e 3 centímetros a representação seria 5,03 m, pois o metro é dividido em cem partes e não dez.

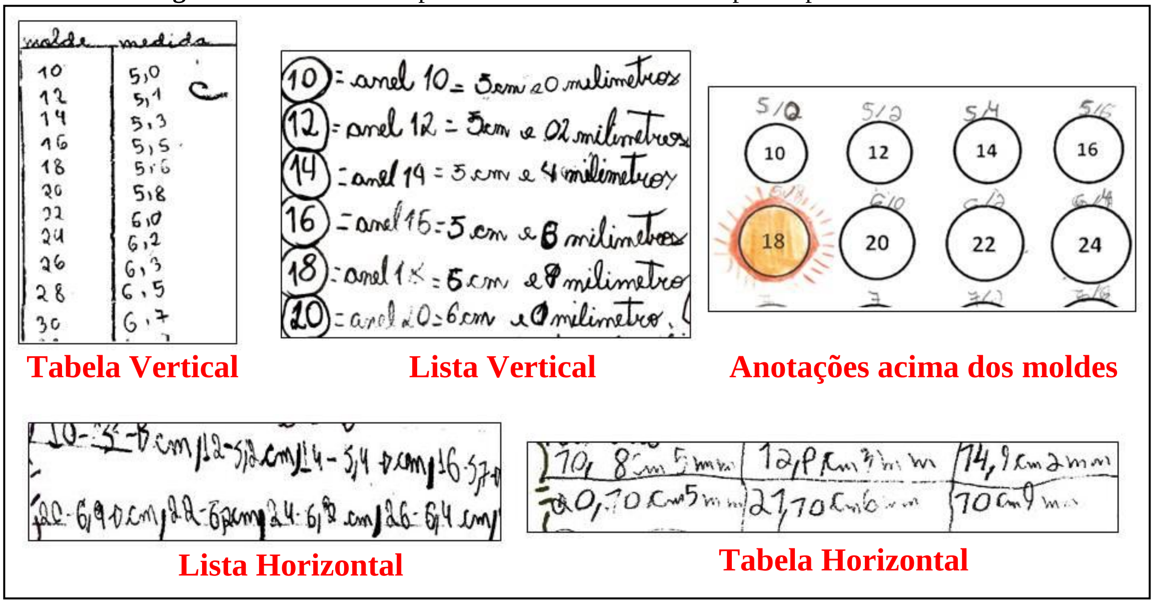
O número de casas depois da vírgula pode também ser determinado pela situação, de acordo com o jogo de linguagem em que o número está sendo utilizado. Como exemplo disso, pensamos no 5,4 cm encontrado na medida da régua, se este número deixasse o jogo de linguagem das medidas dos anéis e fosse analisado no interior do jogo de linguagem do sistema monetário, não faria tanto sentido 5,4; mas R$ 5,40, já que o real é dividido em cem centavos, logo, se eu pegar quatro partes de um real dividido em dez, teremos 40 e não 4, o que nos dá subsídios para dizer que 5,4 é o mesmo que 5,40.

Nesta situação, não entramos em detalhes quanto à definição de Número Racional utilizada no jogo de linguagem da Matemática, procuramos um jogo de linguagem em que fosse possível explicar para os estudantes o uso de Números Racionais para representar as medidas realizadas por eles. As mudanças entre essas representações configuram o que Duval (2011a) chama de tratamento, transformação entre representações no mesmo registro semiótico. Essas transformações, tratamento e conversão, propostas por Duval

(2011a), estiveram presente durante todo o desenvolvimento da atividade de Modelagem e culminaram em diferentes representações para os modelos matemáticos dessa situação problema (Figura 15), as quais discutimos na sequência.

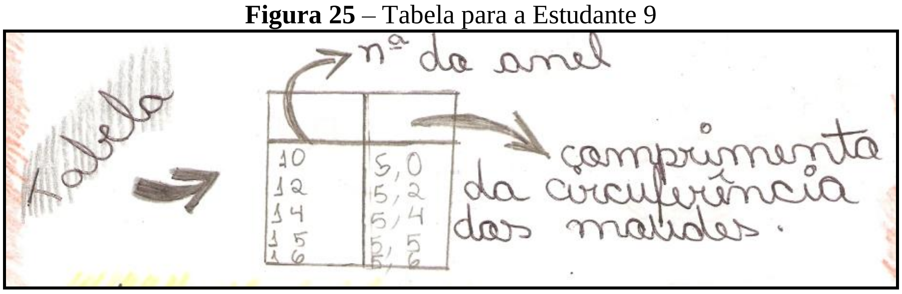
Dentre essas representações para os modelos matemáticos produzidos, observamos listas, tabelas e quadros verticais ou horizontais, bem como anotações acima dos moldes e o uso de linguagem natural. Na Figura 24 apresentamos exemplos desses diferentes tipos de modelos com sua classificação.

Figura 24 – Diferentes tipos de modelos matemáticos para o problema dos anéis



Vamos agora olhar especialmente para as tabelas. Na Figura 25, vemos um exemplo da representação de uma tabela para a Estudante 9.

Figura 25 – Tabela para a Estudante 9



Contudo, existem regras e normas específicas que regulamentam a elaboração de quadros e tabelas, como a as normas NBR 6029 e NBR 6822, da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). De acordo com essas normas elaboramos a Tabela 2, como exemplo.

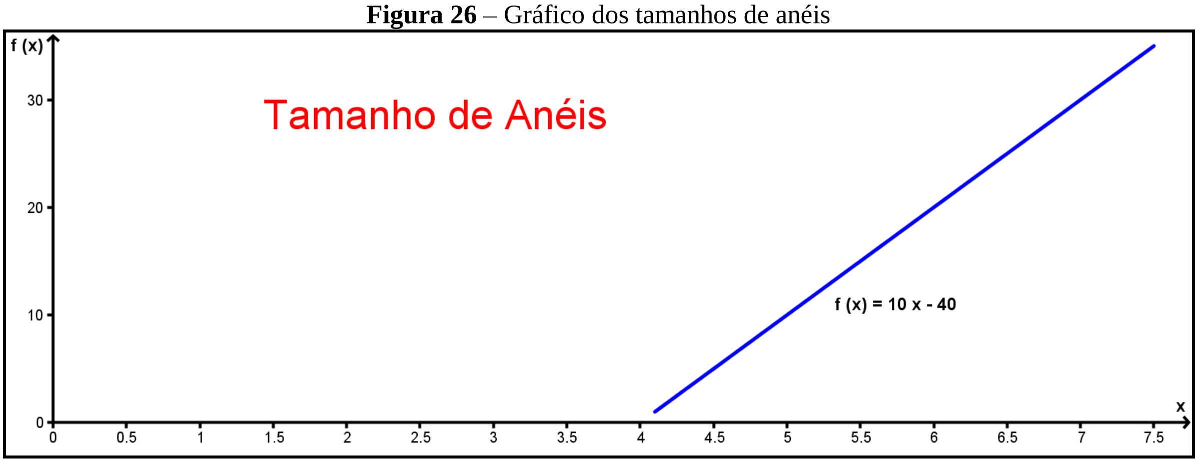
Tabela 2 – Relação entre as variáveis 'Número de molde' e 'Medida do dedo'

Número do molde	Medida do dedo (cm)
10	5,0
12	5,2
14	5,4
16	5,6
18	5,8
20	6,0
22	6,2
24	6,4
26	6,6
28	6,8
30	7,0
32	7,2

A normatização de tabelas tem seu valor no meio acadêmico, no entanto, para aqueles estudantes, naquele momento, eles tinham a necessidade de utilizar uma representação para organizar as medidas dos moldes, e de acordo com o jogo de linguagem em que estavam inseridos, as regras para a produção dessas tabelas poderiam ser provenientes de representações já conhecidas pelos estudantes, por meio da observação de livros, jornais, revistas, etc. e que também chamamos de tabela.

Se analisarmos essas representações, veremos que elas se referem a um mesmo objeto matemático, uma função afim, que em outro jogo de linguagem, cuja forma de vida envolve estudantes de outros níveis de escolaridade, pode ser representada da seguinte forma: f(x) = 10 x – 40, onde x é a medida do dedo em cm e f(x) é o número do molde de anel. Também poderíamos converter essa representação a outro registro, um gráfico, por exemplo, como o apresentado na Figura 26.

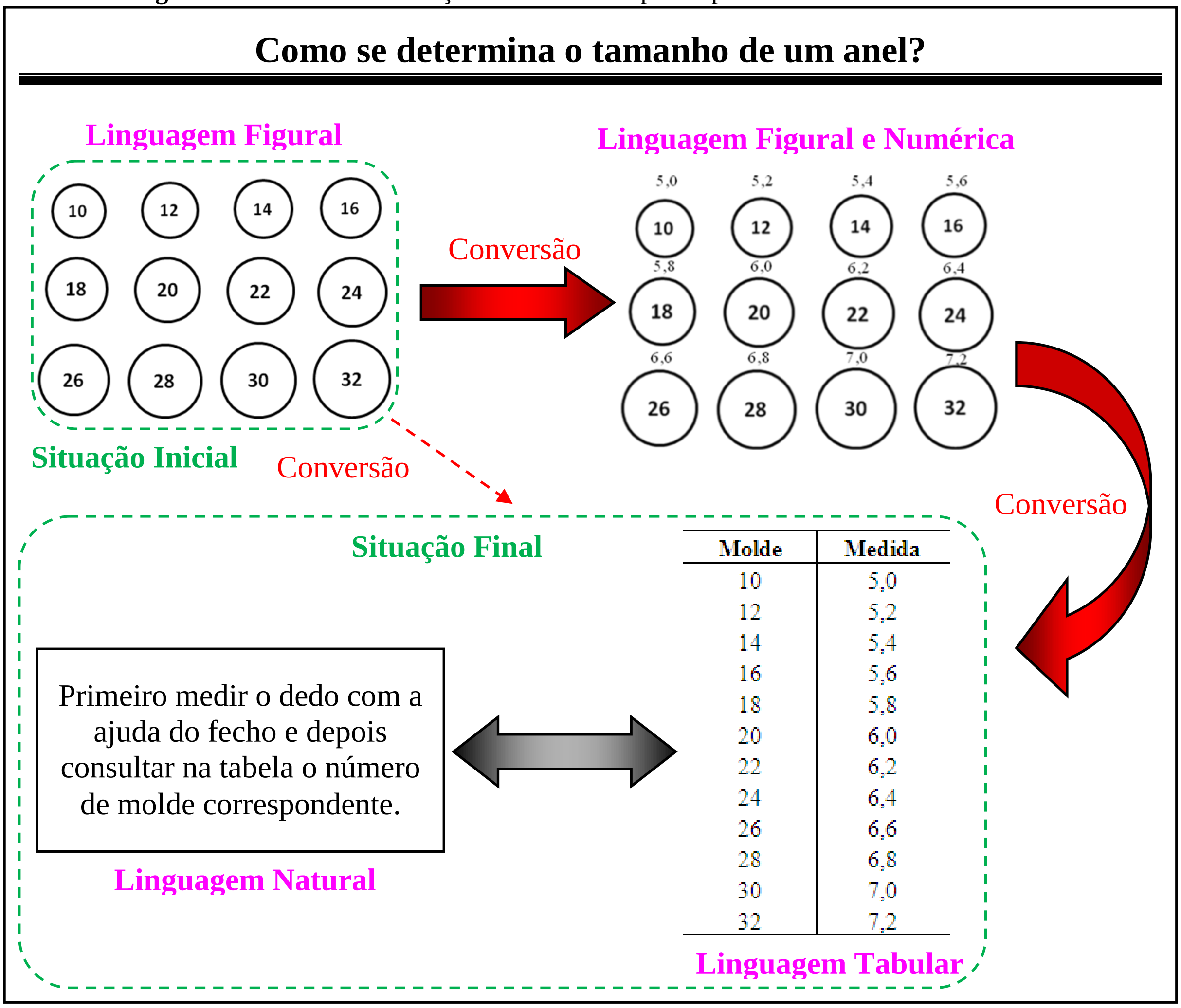
Figura 26 – Gráfico dos tamanhos de anéis



Essas diferentes representações podem ser interpretadas como diferentes jogos de linguagem que guardam entre si semelhanças de família, ou seja, apesar de serem diferentes representações referem-se ao mesmo objeto matemático, uma função afim. De modo geral, podemos interpretar essas diferentes representações como constituinte de um único jogo de linguagem, que está fundamentado nas regras e convenções matemáticas. O conjunto de todas essas regras forma o que Wittgenstein chama de 'gramática', que determina o que faz sentido ou não em um jogo de linguagem. Por isso essa gramática pode variar suas regras, de acordo com a forma de vida envolvida.

Na Figura 27, apresentamos uma síntese do desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática com o tema 'Tamanho dos Anéis', na qual apresentamos a coordenação entre os registros realizada pelos estudantes e as linguagens utilizadas por eles nesses registros.

Figura 27 – Síntese da resolução dos estudantes para o problema dos tamanhos de anéis



A Figura 27 mostra que os estudantes partiram da questão 'Como se determina o tamanho de um anel?', apresentada em linguagem natural, e para sua investigação foram utilizados os moldes de anéis disponíveis. A primeira ação dos estudantes em relação a esses moldes foi converter a representação figural de sua numeração a uma representação numérica com a medida do comprimento de sua circunferência. Alguns estudantes preferiram anotar inicialmente acima dos moldes essas medidas, para depois converter em tabelas, quadros, listas, etc., outros preferiram fazer uma conversão direta da numeração dos moldes para essas representações, e teve também aqueles que ficaram satisfeitos com essas anotações, contudo, todos utilizaram uma linguagem matemática para solucionar o problema, seja tabular, numérica ou natural. Esse caminhar resulta na obtenção dos diferentes modelos matemáticos que apontamos nesta seção, associados às suas explicações e/ou justificativas em linguagem natural.

Ao olhar para as representações utilizadas pelos estudantes, observamos que eles, apesar de não conhecerem muitas normas ou regras matemáticas, relacionadas à organização de dados, como propõe o conteúdo estruturante Tratamento da Informação, os estudantes conseguiram representar matematicamente as informações que tinham disponíveis e solucionar o problema matemático com uma linguagem que lhes é característica, resultado dos diversos jogos de linguagem constituídos ao longo do desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática.

4.1.2 Atividade 2 – Espaço dos Estudantes na sala de aula

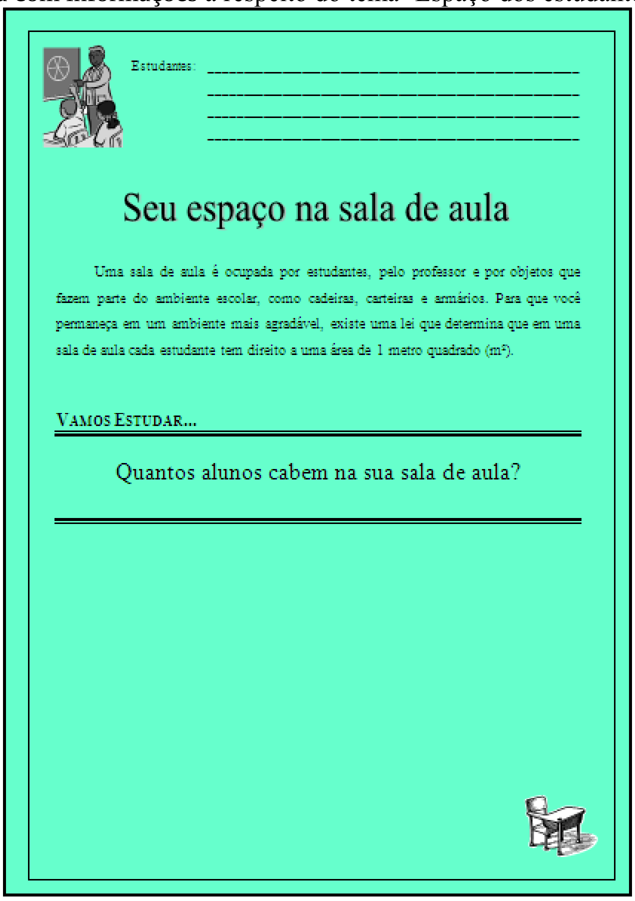
4.1.2.1 Descrição da Atividade

Esta foi a segunda atividade desenvolvida pelos estudantes e também corresponde ao primeiro momento de inserção de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, conforme sugerido por Almeida e Dias (2004). Para seu desenvolvimento a turma foi organizada em oito grupos com 3 ou 4 estudantes.

A atividade teve duração de dois encontros e suscitou o estudo de conteúdos como a determinação de área, perímetro e unidades de medida de comprimento e de área, além de contemplar algumas propriedades operativas, como a comutativa da multiplicação, e apresentar aos estudantes a interpretação de área sob um ponto de vista geométrico.

A folha com as informações que foram entregues aos estudantes é apresentada na Figura 28 e o texto com essas informações pode ser visualizado na Figura 29.

Figura 28 – Folha com informações a respeito do tema ‘Espaço dos estudantes na sala de aula’



Estudantes: ________________________________

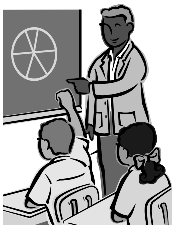
Seu espaço na sala de aula

Uma sala de aula é ocupada por estudantes, pelo professor e por objetos que fazem parte do ambiente escolar, como cadeiras, carteiras e armários. Para que você permaneça em um ambiente mais agradável, existe uma lei que determina que em uma sala de aula cada estudante tem direito a uma área de 1 metro quadrado (m^2).

VAMOS ESTUDAR...

Quantos alunos cabem na sua sala de aula?

Figura 29 – Texto com informações e problema da atividade ‘Espaço dos estudantes na sala de aula’



Estudantes: ____

____

____

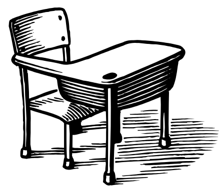
____

Seu espaço na sala de aula

Uma sala de aula é ocupada por estudantes, pelo professor e por objetos que fazem parte do ambiente escolar, como cadeiras, carteiras e armários. Para que você permaneça em um ambiente mais agradável, existe uma lei que determina que em uma sala de aula cada estudante tem direito a uma área de 1 metro quadrado (m²).

VAMOS ESTUDAR...

Quantos alunos cabem na sua sala de aula?



Após entregar a folha, o professor realizou a leitura das informações com os estudantes e de imediato eles responderam que na sala de aula cabia 38 estudantes. Quando questionados o porquê de tal resposta eles mostraram se basear no número de estudantes que atualmente estavam matriculados naquela turma. O professor então lhes chamou atenção com a pergunta: “Mas será que cabe mais?”, eles afirmaram que sim e começaram com alguns palpites, uns diziam que cabia 38, alguns, 40, outros ainda, 42, 50, e assim foram surgindo novos palpites.

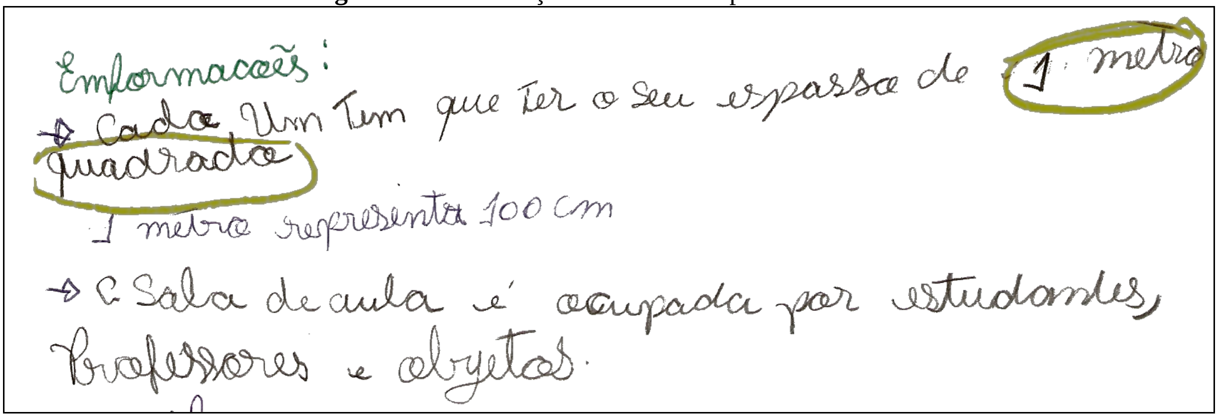
As informações que consideravam importantes em relação ao problema eram anotadas pelo professor no quadro e pelos estudantes em seus registros, como por exemplo, a informação de que “cada um tem que ter um metro de espaço pra ele”, conforme aponta o Estudante 35 e que “primeiro a gente vai ter que saber o tanto de metro da sala”, como sugere o Estudante 16.

Ao observar o uso equivocado da palavra “metro” ao invés de “metro quadrado” para expressar uma unidade de medida de área, o professor questionou os estudantes se eles sabiam a diferença entre metro e metro quadrado, que demonstraram não fazer distinção entre estes termos até então. Diante de tal fato, foram discutidas com estudantes as palavras e noções desconhecidas, como por exemplo, área e metro quadrado. Para explicar a ideia de metro quadrado, foi confeccionado diante dos estudantes um bloco de papelão na forma quadrangular de lados 1 metro, ou seja, cuja área de sua superfície correspondia a 1 metro quadrado, para que eles tomassem consciência desse espaço. Para auxiliar nessa tarefa, colocamos sobre o papelão, já com um metro quadrado de área, uma carteira e uma cadeira, na intenção de representar qual era o espaço reservado a cada estudante na sala de aula, segundo informações da Figura 29. Coube neste momento a ressalva feita pelo professor que apesar da ideia de metro quadrado surgir a partir de um quadrado de lados 1 m, essa unidade de medida pode ser estendida a outras superfícies, sendo elas de quaisquer outras formas.

Para explicar a ideia de área (de um quadrado ou retângulo), o professor desenhou no quadro um retângulo, representando a sala de aula, e explicou aos estudantes que para encontrar sua área eles precisariam descobrir "quantos quadradinhos de 1 m² cabiam na sala", uma vez que a área é uma medida de superfície e o metro quadrado é uma de suas unidades de medida. O exemplo dos quadradinhos foi suficiente para que o Estudante 16 observasse que ao invés de contar os quadradinhos um a um, bastava contar os quadradinhos de uma linha e multiplicar pela quantidade de linhas que havia no retângulo.

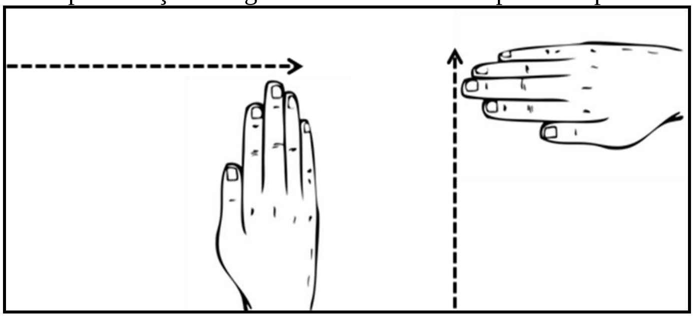
Após essa discussão inicial, o problema foi retomado e mais uma informação foi apontada pela Estudante 2, que "a sala de aula é ocupada por estudantes, professor e objetos... como cadeiras, carteiras, armários", completando assim a coleta de informações (Figura 30).

Figura 30 – Informações selecionadas pela Estudante 5


Emformacoẽs:
→ Cada Um Tem que Ter o Seu espasso de 1 metro quadrado
1 metro representa 100 cm
→ a Sala de aula é ocupada por estudantes, Professores e objetos.

Logo de início o Estudante 16 parece ter traçado uma boa estratégia para solucionar o problema, explicando aos demais que bastava multiplicar as medidas referentes ao comprimento e a largura da sala de aula para encontrar sua área. Todavia, o estudante não chegou a mencionar as palavras "comprimento" e "largura", mas fez com a mão gestos que, respectivamente, indicavam essas medidas em relação à sala.

Figura 31 – Representação dos gestos do Estudante 16 para comprimento e largura



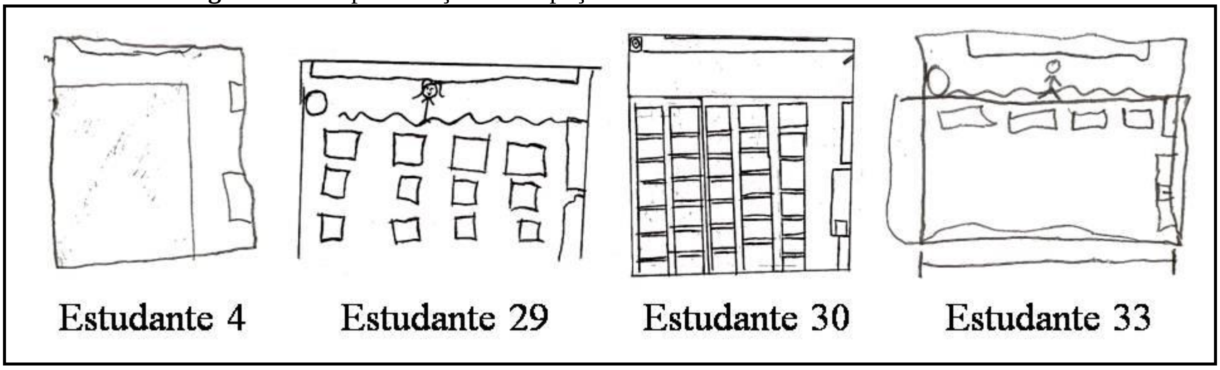
Cabe ressaltar que o professor deixou livre para que os grupos formulassem suas estratégias e não demoraram a perceber que para obterem uma resposta para o problema precisavam medir a sala de aula. Para realizar essas medidas, foram fornecidas fitas métricas, trenas e até mesmo réguas aos estudantes.

Enquanto alguns, ao receber o instrumento de medida colocaram-se a medir, outros estudantes ainda apresentaram algumas dúvidas e necessitaram de ajuda, pois não sabiam ao certo o que deveriam medir. O professor os questionou a respeito do que eles queriam calcular e como resposta obteve: "a área da sala", tal afirmação apontou uma direção a esse grupo de estudantes, que também se colocou a medir.

A princípio, os estudantes em geral estavam medindo a sala de aula como um todo, sem observar o fato de que era preciso desconsiderar o espaço ocupado pelos armários ou o espaço destinado ao professor. Quando questionados a respeito, os estudantes afirmaram que era preciso tirar os armários, o professor então lhes questionou onde iriam colocar esses armários se os tirassem dali, alguns estudantes responderam em um tom de brincadeira "então vamos ter que colocar dentro do armário". Neste momento, eles concordaram de que para solucionar o problema eles teriam que considerar a hipótese de que os armários e demais objetos não seriam retirados da sala.

Dada essa condição, os estudantes determinaram qual era o espaço da sala destinado a eles, como podemos observar na Figura 32, em que apresentamos alguns registros em que os estudantes indicam seu espaço na sala por meio de figuras.

Figura 32 – Representações do espaço na sala de aula destinado aos estudantes



Os estudantes mediram esse espaço, considerando-o como um retângulo e calcularam sua área. Todavia, inicialmente os estudantes limitaram-se a utilizar números inteiros (Figura 33), sendo necessária a intervenção do professor para que levassem em conta também as medidas em centímetros, estimulando o cálculo da multiplicação com Números Racionais representados na forma decimal, como apresentado na Figura 34.

Figura 33 – Cálculo da área apenas com números inteiros

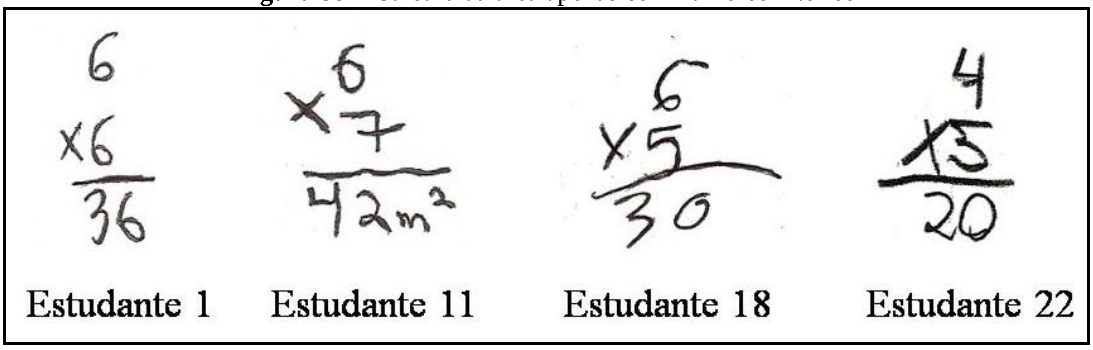
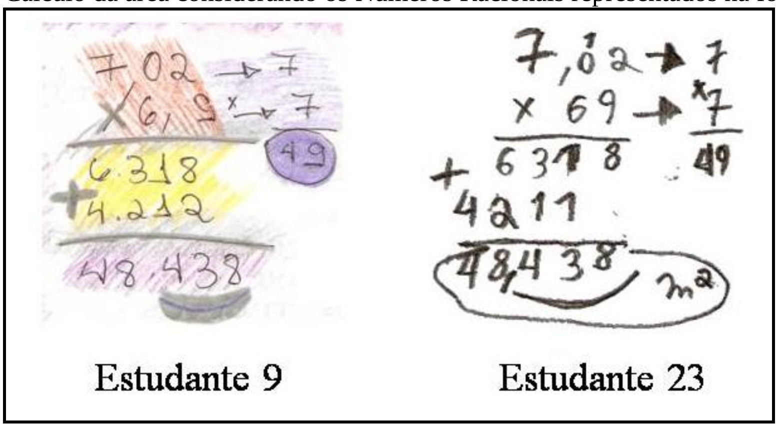


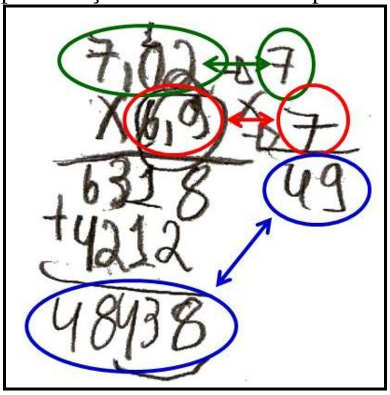
Figura 34 – Cálculo da área considerando os Números Racionais representados na forma decimal



O professor explicou aos estudantes que o cálculo da área com os Números Racionais lhes forneceria uma medida mais precisa da área e, desta maneira, a resposta seria mais condizente com a situação, mas ainda assim, eles poderiam utilizar o cálculo com os números inteiros para verificar o resultado, trabalhando com aproximações como mostra a

Figura 35, em que o Estudante 21 aproxima 7,02 e 6,9 para 7, com o intuito de verificar onde colocar a vírgula e se o resultado obtido faz sentido para a conta realizada.

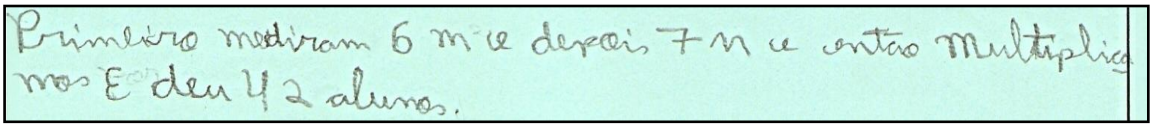
Figura 35 – Aproximação do Estudante 21 para o cálculo da área



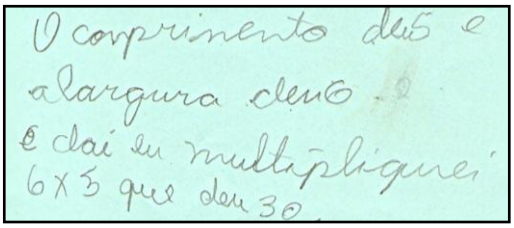
Como resposta para o problema os estudantes obtiveram valores como 36, 39, 40, 42, etc., que na ótica da situação-problema representam o número de estudantes que cabem na sala de aula; apenas um grupo chegou a um valor discrepante em relação aos demais, não sendo possível segundo os estudantes, já que era um número menor que o número de estudantes que atualmente estavam na sala, nesse sentido, as medidas foram retomadas e com o auxílio do professor chegaram a um resultado que consideraram mais pertinente à situação.

O modelo matemático obtido nesse caso, apesar de ser bastante conhecido no âmbito da Matemática foi a fórmula da área, expressa pelos estudantes em linguagem natural, como podemos observar na Figura 36.

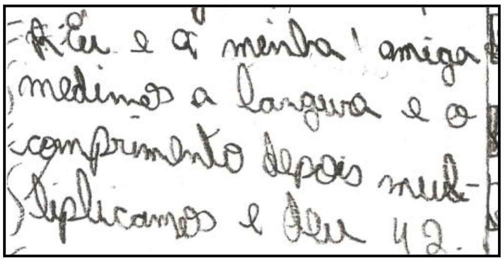
Figura 36 – Modelos matemáticos para calcular o espaço dos estudantes na sala de aula



Primeiro mediram 6 m e depois 7 m e então multiplicamos e deu 42 alunos. (Estudante 11)



O comprimento deu 5 e a largura deu 6 e daí eu multipliquei 6 × 5 que deu 30. (Estudante 18)



Eu e a minha amiga medimos a largura e o comprimento depois multiplicamos e deu 42. (Estudante 11)

Em relação ao modelo matemático apresentado na Figura 36, podemos dizer que os estudantes se atentaram ao fato de que obtida a área do seu espaço necessitavam dividir pelo espaço que é direito de cada aluno, contudo, segundo as informações fornecidas aos estudantes, cada um tinha direito a um metro quadrado de área e quando se divide um número qualquer por 1, a resposta "não muda", conforma explica o Estudante 16. Nesse sentido, eles concluíram que bastava encontrar o espaço destinado aos estudantes e a resposta para o problema seria o menor número inteiro da área calculada, o que justifica o modelo matemático produzido.

4.1.2.2 Análise da Atividade

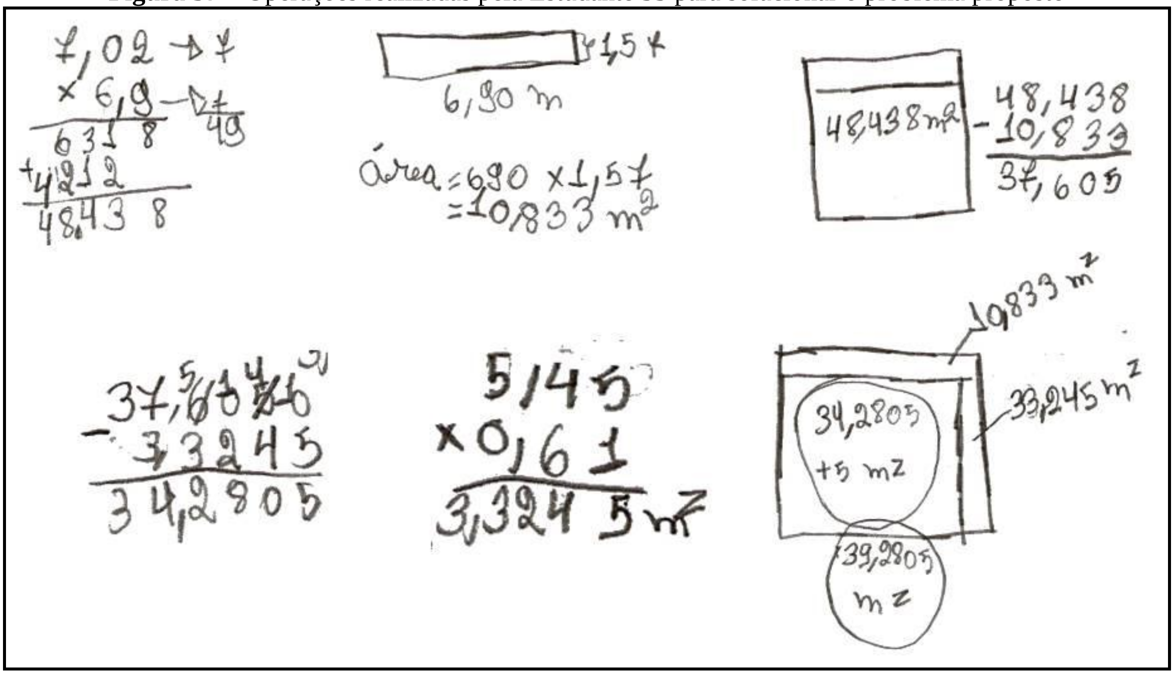
O tema "Espaço dos estudantes na sala de aula" foi escolhido por contemplar um contexto que está diretamente associado ao ambiente escolar dos estudantes, além de envolver aspectos associados à cidadania e análise crítica.

Os estudantes partiram da linguagem natural, em que as informações se apresentavam – situação inicial da atividade de Modelagem –, para uma linguagem matemática, necessária para a abordagem do problema e produção do modelo matemático – situação final. Nesse sentido, a atividade de Modelagem Matemática, de modo geral, foi orientada pela transição entre essas duas linguagens, ou seja, pela mudança de jogo de linguagem.

As hipóteses, variáveis e simplificações, realizadas no transcorrer da atividade foram realizadas sob a forma de um diálogo, entre estudantes e professor. Cabe dizer que essas ações não eram realizadas de forma direta, as variáveis, por exemplo, eram enunciadas pelos estudantes de modo que deixava claro que eles sabiam que as variáveis envolvidas no problema eram o comprimento e a largura da sala, como mostram a representação do gesto feito pelo Estudante 16 para essas grandezas, Figura 31, e os modelos matemáticos obtidos, Figura 36.

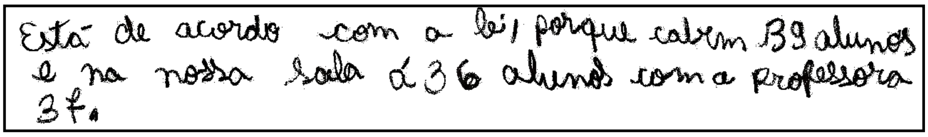
No caso das hipóteses, elas foram levantadas conforme se tornavam necessárias, como no caso da hipótese de que a posição dos objetos que estavam na sala não seria modificada, ou seja, não seriam colocados mais objetos, nem retirados aqueles que lá estavam, a análise seria feita de acordo com a sala naquele dia da pesquisa. E no que diz respeito às simplificações, uma única simplificação foi inicialmente realizada pelos estudantes, em considerar apenas as medidas inteiras. Todavia, essa não foi uma boa simplificação, pois muito espaço seria desconsiderado, mas é justificável, dado o fato de que eles estavam apenas iniciando os estudos em relação aos Números Racionais. Sob a perspectiva de Wittgenstein, podemos dizer que os estudantes estavam fazendo uso de uma linguagem que lhes era conhecida, sendo esse uso mais cômodo aos estudantes, levando em conta o jogo de linguagem que já estavam inseridos. No entanto, um dos objetivos desta série é o estudo de Números Racionais, expressos na forma decimal, nesse sentido, foi necessária a intervenção do professor para que os estudantes considerassem também as medidas em centímetros, fazendo, desta maneira, o uso de Números Racionais, uma vez que as medidas em relação à área seriam mais precisas e a resposta mais apropriada para o problema. Neste contexto, são abordadas diversas operações com Números Racionais referente às medidas da sala de aula, como mostra a Figura 37.

Figura 37 – Operações realizadas pela Estudante 33 para solucionar o problema proposto



Na Figura 37 podemos observar que a Estudante 33 calculou inicialmente a área total da sala de aula destinada aos estudantes (7,02 m × 6,9 m = 48,438 m²) e desse valor retirou o espaço reservado ao professor (48,438 m² – 10,833 m² = 37,605 m²) e o espaço ocupado pelos armários e demais objetos da sala (37,605 m² – 3,3245 m² = 34,2805 m²), não satisfeita com o resultado a estudante reduziu 5 m² do espaço do professor adicionando à área dos estudantes, obtendo assim uma resposta para o problema (39,2805 m²). Mediante esses cálculos, a resposta da Estudante 33 para o problema é apresentada na Figura 38.

Figura 38 – Resposta da Estudante 33 para o problema


Está de acordo com a lei, porque cabem 39 alunos e na nossa sala á 36 alunos com a professora 37.

Está de acordo com a lei, porque cabem 39 alunos e na nossa sala há 36 alunos, com a professora 37 (Estudante 33)

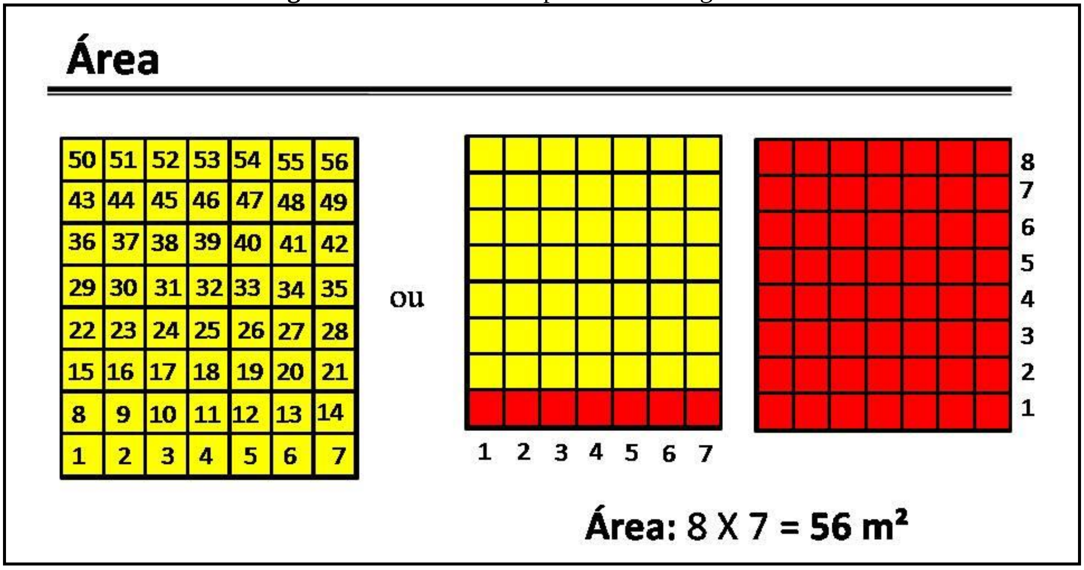
Com esse resultado os estudantes fizeram a volta da linguagem matemática para a linguagem natural da situação, para interpretação da solução no contexto do problema, de acordo com os pressupostos da Modelagem Matemática, ou seja, os estudantes verificaram o que significava o valor 39,2805 m² no contexto da situação que deu origem ao problema, concluindo que esse valor, como mostra a Figura 38, indica que na sala de aula cabem 39 estudantes, estando assim nos conformes da lei.

O desenvolvimento desta atividade também possibilitou aos estudantes a inserção de em um novo jogo de linguagem, referente ao metro quadrado como unidade de medida de uma superfície. Até esse momento os estudantes conheciam apenas o uso da palavra "metro" e não faziam distinção com a mesma palavra acrescida do adjetivo "quadrado", como se pode observar nas falas de alguns estudantes ao serem questionados sobre o que era o metro quadrado: "um metro representa 100 cm" (Estudante 16), "é o metro da sala?" (Estudante 27), "é o metro que é quadrado" (Estudante 10). Nesse sentido, foi necessária a intervenção do professor para que um novo significado para a palavra "metro" fosse conhecido pelos estudantes, dentro de um novo contexto, e em outro jogo de linguagem – quando essa palavra, até então conhecida pelos estudantes apenas como unidade de medida de comprimento, estivesse acompanhada pelo adjetivo "quadrado", representando uma unidade de área.

Para que fosse possível essa mudança de jogo de linguagem, o professor confeccionou o bloco quadrangular de papelão, chamando a atenção dos alunos para que "metro quadrado" é a unidade de medida utilizada para medir a superfície daquele bloco, ao passo que o "metro" é a unidade de medida utilizada para medir o lado daquele bloco, seja o comprimento ou a largura, uma medida que parte de um ponto rumo a outro. Por sua vez, o "metro cúbico" questionado pelo Estudante 35, diz respeito à unidade de medida utilizada para medir a capacidade de um sólido, ou seja, para medir seu volume.

Familiarizados com essa nova unidade de medida, o professor explicou aos estudantes o que era área, cuja ideia já havia sido explicitada indiretamente na explicação do que era metro quadrado. Para essa explanação em relação à área, o professor se sustentou no ponto de vista geométrico, dentro do jogo de linguagem da geometria (Figura 39), dada a forma de vida em questão.

Figura 39 – Área sob um ponto de vista geométrico

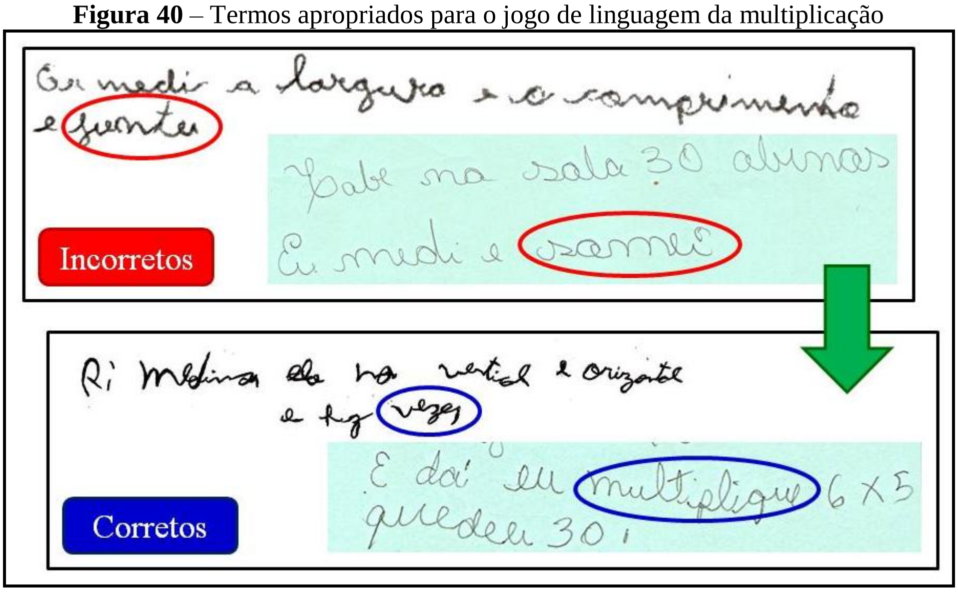


Na Figura 39, é possível observar duas formas distintas para o cálculo da área de um retângulo, seja contando cada quadradinho, um a um, ou, de uma forma mais prática, contando os quadradinhos de uma linha e multiplicando pelo número de linhas ou o número de quadradinhos de uma coluna e multiplicando pelo número de colunas – o que mostra a validade da propriedade comutativa da multiplicação. Essa forma prática de contar o número de quadradinhos pode em outros níveis de escolaridade ser expressa de outra maneira, a partir do uso de outras representações, por exemplo: $A = Q \times L$, onde A é a área do retângulo, Q o número de quadradinhos de uma linha e L o número de linhas. Trata-se de uma linguagem algébrica, cujo uso depende da forma de vida envolvida. Outra fórmula algébrica bastante conhecida no âmbito da Matemática é $A = b \times h$, onde A é a área do retângulo, b a medida da base e h a altura do retângulo. Apesar de ser comum o uso da linguagem algébrica na Matemática, a forma de vida envolvida na atividade de Modelagem exigia uma linguagem que possibilitasse o cálculo da área e fosse compreensível naquele nível de escolaridade, dos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, e, nesse sentido, vemos o uso de representações geométricas (Figura 39), numéricas (Figura 37) e em linguagem natural (Figura 36) para representar o cálculo da área de um retângulo qualquer. O que permite o uso dessas diferentes representações são as semelhanças de famílias entre essas linguagens, todas elas fazem uso de símbolos específicos, mas dizem respeito à multiplicação entre a medida de um dos lados do retângulo pela medida do outro lado.

Entretanto, mesmo após a explicação do professor, quanto à ideia de metro quadrado, ao resolver a atividade os estudantes preferiram relacionar a área à quantidade de quadradinhos que era possível imaginarem cobrindo o chão da sala, ou seja, fazendo o uso de valores inteiros. Novamente foi necessária a intervenção do professor para que o conceito de área se ampliasse, e, por conseguinte, os estudantes constituíssem um jogo de linguagem mais apropriado no âmbito da Matemática, onde a área não é vista apenas como o número de quadradinhos, mas como a medida de uma superfície, resultante da multiplicação entre os lados, nesse caso, do retângulo.

Alguns estudantes também tiveram dificuldades em constituir o jogo de linguagem da multiplicação, utilizando em alguns momentos palavras que se referem à adição, como “juntar” e “somar”, cujo jogo de linguagem é mais familiar para os estudantes dessa forma de vida, o professor então explicou quais eram os termos apropriados de acordo com a linguagem matemática. Na Figura 40, podemos constatar a mudança nos usos incorretos para os usos corretos dos termos no jogo de linguagem da multiplicação.

Figura 40 – Termos apropriados para o jogo de linguagem da multiplicação

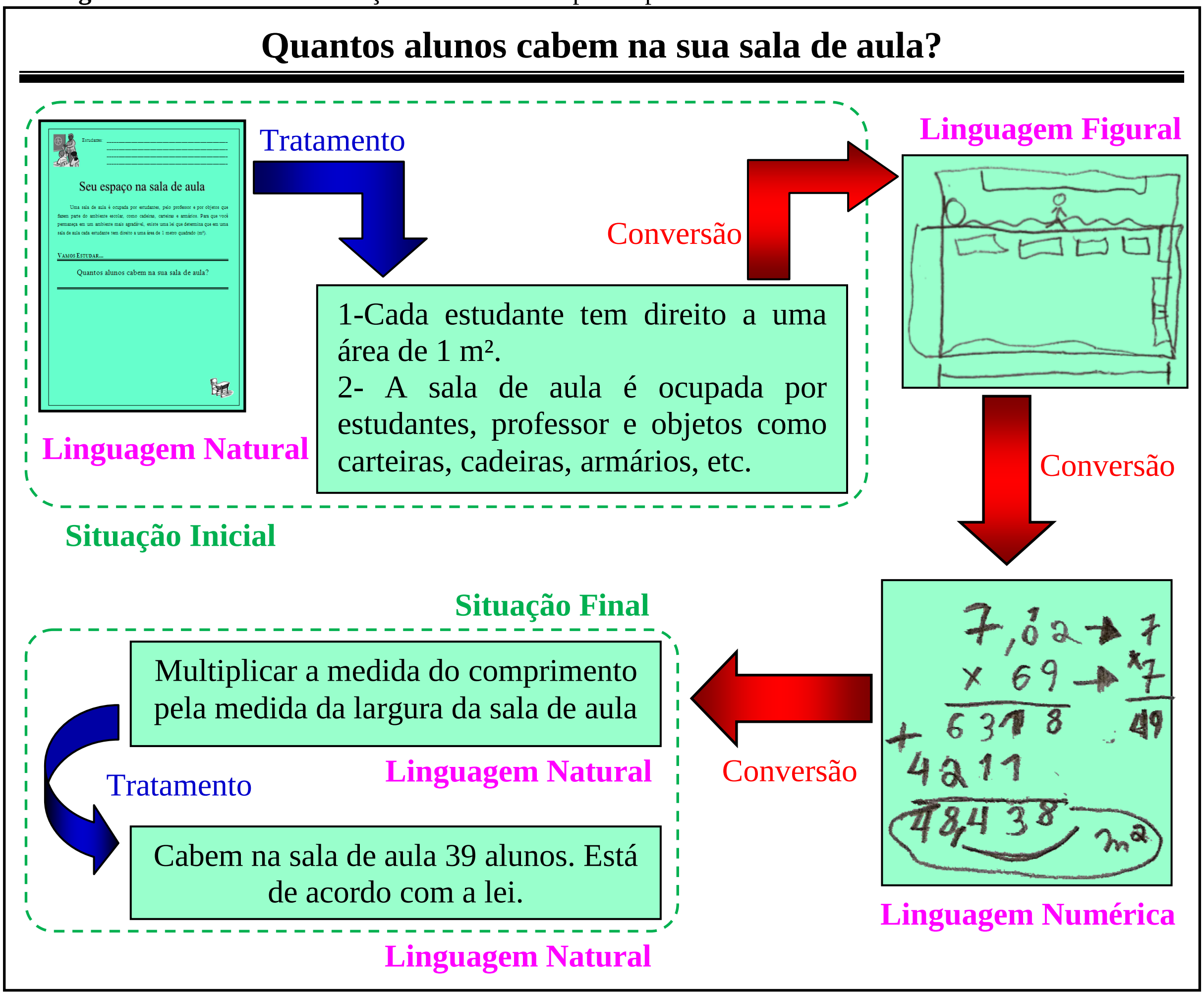


As representações utilizadas na produção do modelo matemático dessa situação foram variadas, envolvendo registros figurais, numéricos e em linguagem natural. A partir dos quais obtiveram a resposta para o problema. Como já mencionado anteriormente, apesar de cada modelo apresentar uma linguagem, cujas representações lhes são peculiares, todos podem representar a situação do espaço dos estudantes na sala de aula, graças às semelhanças de famílias existentes entre essas linguagens.

Queremos também chamar atenção para o fato de o modelo matemático produzido estar em consonância com a concepção de modelo proposta por Lesh, Carmona e Hjalmarson (2006), no qual um modelo matemático é produzido na intenção de descrever, explicar, ou mesmo prever o comportamento de um sistema. Além disso, pode ser utilizado em outras situações, com ou sem adaptações, como no caso do modelo matemático produzido pelos estudantes para a área da sala de aula, que pode ser utilizado em inúmeros outros contextos, com semelhanças de família com o da situação que apresentamos. Um exemplo disso é a recordação do Estudante 8 em relação a uma tarefa que haviam realizado em uma outra oportunidade: “Ah professor... é igual a gente fez na quadra”, o professor lhe questiona o que fizeram na quadra e o Estudante 16 responde: “medimos a largura e o comprimento”, uma vez que eles estavam estudando as unidades de medida de comprimento.

Em síntese, o desenvolvimento da atividade de Modelagem “Espaço dos estudantes na sala de aula” pode ser representado pelo esquema apresentado na Figura 41, no qual são expressos os usos da linguagem nesta atividade de Modelagem.

Figura 41 – Síntese da resolução dos estudantes para o problema da área dos estudantes na sala de aula



No esquema da Figura 41 podemos observar que a partir do problema "Quantos alunos cabem na sala de aula, os estudantes fizeram o uso de diferentes linguagens, começando com a linguagem natural do problema em estudo. Na sequência foram utilizados registros figurais para indicar a área destinada aos estudantes e com as medidas realizadas eles calcularam por meio de multiplicações a área desse espaço. Com a linguagem natural eles explicaram o que eles precisavam fazer para resolver a situação, ou seja, construíram o modelo matemático da situação, e apresentaram uma resposta que satisfazia o problema sob investigação.

4.1.3 Atividade 3 – Medindo a beleza de uma pessoa

4.1.3.1 Descrição da Atividade

O número de ouro, ou número áureo (Φ) é um número bastante conhecido na Matemática, e por tratar-se de um Número Irracional, seu ensino muitas vezes é direcionado a estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. Contudo, esta atividade de Modelagem Matemática, mostra que os estudos que envolvem esse número podem também gerar um ambiente propício à aprendizagem envolvendo estudantes dos anos iniciais.

Essa atividade foi desenvolvida em um encontro e explorou essencialmente a divisão, além de outros conceitos como unidades de medidas de comprimento, proporção, comparação, Números Racionais, etc. Corresponde ao segundo momento de inserção de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula e foi a quarta atividade desenvolvida, neste caso, a turma foi organizada em 8 grupos com 3 ou 4 estudantes cada.

Para promover a interação e provocar uma discussão com os estudantes a respeito do tema, o professor apresentou em alguns slides fotos de pessoas famosas, como cantores, apresentadores de televisão, jogadores de futebol, etc. que poderiam ser reconhecidas por eles. Para cada imagem que apresentava, o professor pedia aos estudantes que levantassem a mão caso achassem a pessoa bonita. Todos ficaram animados, alguns apenas levantavam a mão, como solicitado, outros, falavam alto e até comentavam suas opiniões. O professor questionou se eles observaram que para uma mesma pessoa na foto, alguns colegas levantavam a mão e outros não, ou seja, uma pessoa que é bonita pra um colega, pode não ser para outro.

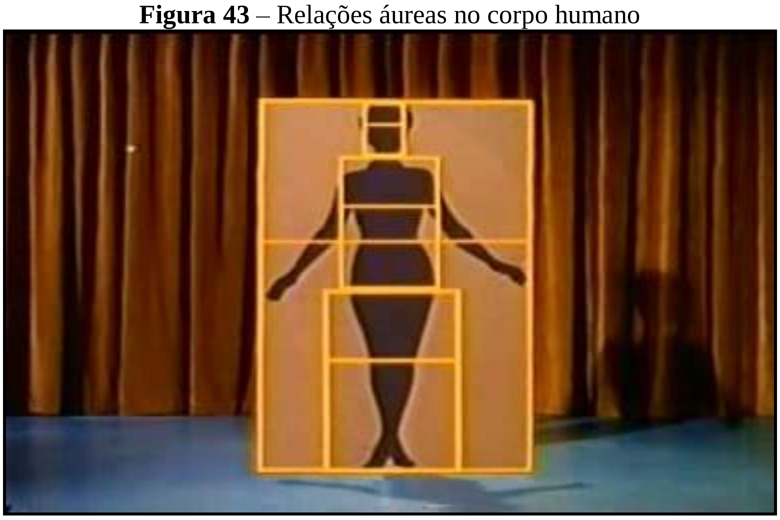
Neste contexto o professor indagou os estudantes com a seguinte questão: ‘Será que é possível medir a beleza de uma pessoa?’, essa questão caracteriza o problema proposto para investigação. Muitos estudantes falaram que não acreditavam ser possível medir a beleza das pessoas, pois achar bonito, ou não, é um sentimento pessoal, e outros achavam que era possível fazer essa medida, mas sem conseguirem justificar ao certo o porquê de acreditarem nessa possibilidade. Isso levou os estudantes a uma discussão com alguns dizendo ‘sim’ e outros dizendo ‘não’.

Diante desse interesse em expressar suas opiniões, o professor propôs aos estudantes que assistissem um trecho do vídeo[26] "Donald no país da Matemágica" (Figura 42). Dentre as temáticas abordadas no vídeo está a 'regra de ouro', ele faz menção à crença dos gregos, de crer que o retângulo de ouro representava a lei da beleza matemática e, por isso, buscavam, sempre que possível, apresentar essa relação em suas arquiteturas e obras de arte; este conceito se estendeu a outros povos e está presente ainda hoje nas construções do mundo moderno. Essa relação também está presente na natureza e o corpo humano é um exemplo dela, por tal motivo recebe o enfoque nesta atividade (Figura 43).

Figura 42 – Donald e o retângulo áureo

Fonte: Vídeo "Donald no país da Matemágica"

Figura 43 – Relações áureas no corpo humano



Fonte: Vídeo "Donald no país da Matemágica"

Para auxiliar no desenvolvimento desta investigação entregamos uma folha, que apresentamos na Figura 44, com informações a respeito do tema, o problema para ser

[26] "Donald no país da Matemágica" é um curta educativo lançado pela Disney em 1959, foi dirigido por Hamilton Luske e até hoje tem sido referência no ensino de Matemática. O vídeo pode ser encontrado na íntegra no seguinte endereço: http://www.youtube.com/watch?v=TphWfs_OXkU&feature=related.

investigado, bem como uma tabela na qual os estudantes deveriam anotar as medidas realizadas e a partir delas indicar suas conclusões e apontar evidências que os levaram a tais considerações, culminando em uma resposta para o problema.

Figura 44 – Folha com informações a respeito do tema ‘Beleza’ – Frente e verso

Estudantes: ____

____

____

____

Φ

Pessoas famosas, como atores e modelos, geralmente são consideradas bonitas. Pense em uma pessoa famosa e que você acha bonita. Será que seu colega também acha essa pessoa bonita? Há casos, em que uma pessoa é bonita para você, mas não é bonita para seu colega. Com isso, podemos pensar sobre a seguinte questão:

Será que é possível medir a beleza de uma pessoa?

Nesta atividade, vocês deverão medir uns aos outros com uma fita métrica. Para isso, siga as indicações de medidas que devem ser realizadas para cada colega do grupo e que estão apresentadas no quadro (verso da folha). Anote os valores encontrados.

Na linha **QUOCIENTE**, vocês deverão efetuar a divisão da primeira medida pela segunda. Para esta tarefa vocês podem utilizar uma calculadora.

ESTUDANTES / MEDIDAS				
1ª) Da altura do seu corpo				
2ª) Do umbigo até o chão				
QUOCIENTE				
1ª) Do queixo até a raiz dos cabelos				
2ª) Do queixo até as sobrancelhas				
QUOCIENTE				

O QUE PODEMOS CONCLUIR COM OS RESULTADOS OBTIDOS?

Na Figura 45, apresentamos o texto introdutório e o problema proposto para investigação, bem como algumas instruções em relação as medidas que os estudantes deveriam realizar.

Figura 45 – Texto com informações e problema da atividade relacionada à beleza

Φ

Pessoas famosas, como atores e modelos, geralmente são consideradas bonitas. Pense em uma pessoa famosa e que você acha bonita. Será que seu colega também acha essa pessoa bonita? Há casos, em que uma pessoa é bonita para você, mas não é bonita para seu colega. Com isso, podemos pensar sobre a seguinte questão:

Será que é possível medir a beleza de uma pessoa?

Nesta atividade, vocês deverão medir uns aos outros com uma fita métrica. Para isso, siga as indicações de medidas que devem ser realizadas para cada colega do grupo e que estão apresentadas no quadro (verso da folha). Anote os valores encontrados.

Na linha **QUOCIENTE**, vocês deverão efetuar a divisão da primeira medida pela segunda. Para esta tarefa vocês podem utilizar uma calculadora.

Já na Figura 46, podemos visualizar a tabela a ser preenchida pelos estudantes e as medidas que tiveram que realizar. Essa tabela serviu como um instrumento de apoio para as análises dos estudantes em relação à beleza, sob uma perspectiva matemática. Para isso, instruímos os estudantes com a pergunta "O que podemos concluir com os resultados obtidos?" a olharem para os quocientes calculados e interpretá-los à luz do tema sob investigação, uma vez que neste nível de escolaridade é comum eles apenas realizarem os cálculos sem se preocuparem com uma análise crítica sobre os resultados.

Figura 46 – Tabela com as relações áureas

ESTUDANTES / **MEDIDAS**				
1ª) Da altura do seu corpo				
2ª) Do umbigo até o chão				
QUOCIENTE				
1ª) Do queixo até a raiz dos cabelos				
2ª) Do queixo até as sobrancelhas				
QUOCIENTE				

O QUE PODEMOS CONCLUIR COM OS RESULTADOS OBTIDOS?

Conforme instruções da Figura 45, para o cálculo do quociente entre as medidas indicadas, os estudantes puderam fazer o uso de calculadora, pois eles ainda não estavam acostumados com as divisões de divisores com mais de dois algarismos, e nem com quocientes racionais e não inteiros. Além disso, cada grupo recebeu uma fita métrica para realizar as medidas solicitadas, sendo estes os instrumentos utilizados.

O professor orientou e auxiliou os estudantes em como fazer as medidas, lembrando que, para facilitar, poderiam começar a medir sempre do zero e anotar as medidas em centímetros. Como as fitas métricas utilizadas tinham 150 centímetros de comprimento e alguns estudantes eram mais altos que isso, ocasionalmente eles necessitavam realizar operações de adição, as quais observamos que, mesmo com a calculadora à disposição, eles realizavam mentalmente.

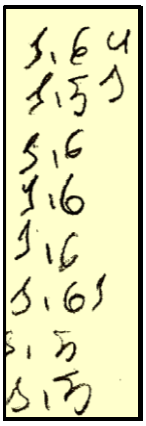
Eles mediram e foram medidos pelos colegas, assim, cada um obteve a sua tabela, de acordo com o seu grupo. Na Figura 47, podemos visualizar a tabela de um dos estudantes preenchida.

Figura 47 – Tabela preenchida pela Estudante 27

Estudantes / Medidas	Estudante 27	Estudante 4	Estudante 24	Estudante 33
1ª) Da altura do seu corpo	130	157	130	128
2ª) Do umbigo até o chão	79	100	81	80
Quociente	1,64	1,57	1,6	1,6
1ª) Do queixo até a raiz dos cabelos	16	21	18	18
2ª) Do queixo até as sobrancelhas	10	13	12	12
Quociente	1,61	1,63	1,5	1,5

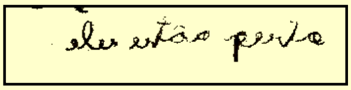
Após todos terminarem de realizar suas medidas e encontrarem os quocientes entre elas, o professor solicitou que eles comparassem os resultados encontrados a fim de obter alguma conclusão em relação ao problema. Para isso, a estratégia utilizada por alguns estudantes, como a Estudante 27, foi copiar em uma lista os quocientes encontrados, como mostra a Figura 48, para compará-los.

Figura 48 – Quocientes obtidos pela Estudante 27

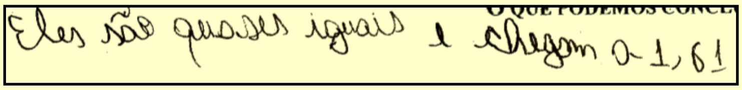


A comparação desses quocientes levou a Estudante 27, bem como outros, a concluir que os resultados obtidos estão próximos de 1,6 ou 1,61; como mostram os protocolos apresentados na Figura 49.

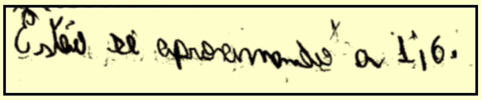
Figura 49 – Protocolos de alguns estudantes comparando os quocientes obtidos



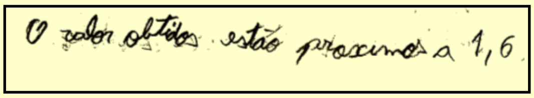
Eles estão pertos
(Estudante 30)



Eles são quase iguais e chegam a 1,61
(Estudante 25)



Estão se aproximando a 1,6.
(Estudante 2)

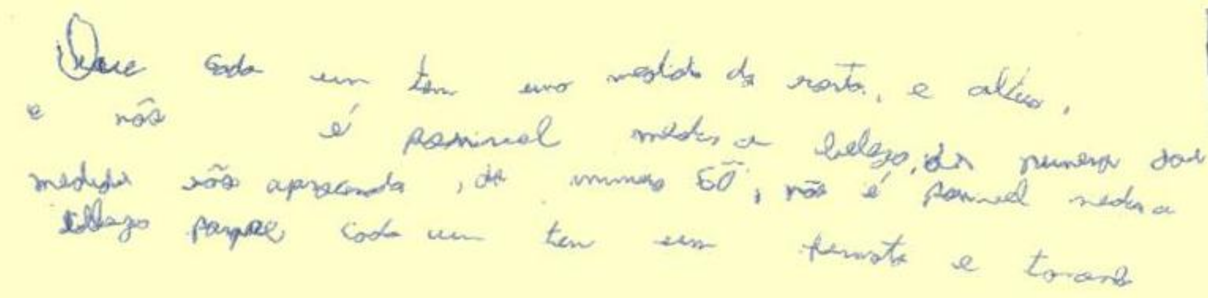


Os valores obtidos estão próximos a 1,6
(Estudante 23)

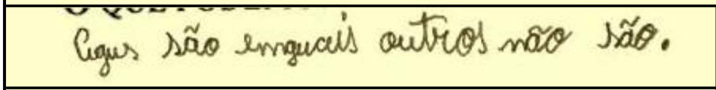
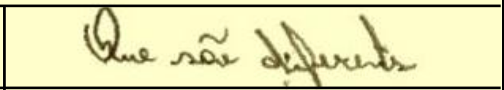
A primeira consequência dessa observação foi que quando o valor de um quociente que lhes aparentava ser discrepante em relação a 1,6 significava que as medidas necessitavam ser revistas, e, geralmente, quando isso ocorria, eles consertavam suas medidas e o valor do novo quociente também se aproximava a 1,6.

Apesar de a maioria observar a aproximação dos valores obtidos no cálculo dos quocientes a 1,6 ou 1,61; os estudantes apresentaram dificuldades em relacionar este número à beleza, ou mesmo em visualizar essa aproximação, como indicam os registros da Figura 50.

Figura 50 – Registros de estudantes que ainda não relacionaram o número de ouro com a beleza



Que cada um tem uma medida de rosto, e altura.
e não é possível medir a beleza das pessoas, as medidas são aproximadas do número [1,]60
não é possível medir a beleza porque cada um tem um formato e tamanho. (Estudante 16)

	
Alguns são iguais outros não são. (Estudante 21)	*Que são diferentes (Estudante 28)*

Na verdade, os estudantes não viam como explicar essa relação por meio de um número, já que para eles a beleza era algo essencialmente pessoal. Durante o desenvolvimento da atividade, quando o professor questionava sobre essa relação alguns estudantes até reconheciam sua existência, mas não conseguiam explicá-la. Para ajudar nessa interpretação, o professor promoveu um momento de socialização, assim como sugere uma atividade de Modelagem Matemática, momento em que os resultados são apresentados e os modelos matemáticos obtidos são avaliados.

No caso desta atividade, o modelo matemático foi constituído verbalmente com a ajuda do professor, que orientou os estudantes na articulação das informações disponíveis e evidências encontradas, e para sua constituição, o professor solicitou aos estudantes que, grupo a grupo, apresentasse suas conclusões.

Os estudantes logo notaram que os valores dos quocientes estavam sempre próximos a 1,6. E quando não se aproximavam, as medidas eram verificadas e corrigidas, caso estivessem incorretas. Tal fato levou os estudantes a concluírem que a beleza está relacionada com esse número, que quanto mais próximo a ele, mais bela é a pessoa, isto é, mais harmônicas são suas medidas.

Nesta perspectiva, o modelo matemático obtido envolve a ideia de proporcionalidade, decorrente da razão áurea. O professor então explicou aos estudantes que o valor 1,6 ou 1,61 se aproxima de um número conhecido na Matemática como ‘número de ouro’, e que este número, desde os tempos antigos, como mencionado no vídeo que assistiram, é associado à beleza, à divina proporção. Na verdade, o 1,6 é também uma aproximação do número de ouro, cujo símbolo matemático é Φ (lê-se *Fi*). O número de ouro é um Número Irracional, que difere daqueles ‘tipos de números’ que eles estudam nos anos iniciais do Ensino Fundamental, ele é um número com infinitas casas decimais após a vírgula, ou como dizemos aos estudantes, “*com casas decimais que não acabam mais*”, por isso a necessidade de usar os três pontinhos ou reticências (...) no final. Além disso, não há um padrão ou uma regularidade nesses algarismos, não há uma ordem que nos permite descobrir qual é o algarismo que vem na próxima casa decimal. O que sabemos é que os primeiros algarismos do número de ouro são: 1,618033989... e, portanto, o 1,6 ou 1,61 é apenas uma aproximação desse número.

Neste contexto, os estudantes entenderam que o número de ouro está associado a formas matematicamente perfeitas e, por isso, pode ser relacionado à beleza, pois esse número revela a proporção áurea, ou seja, as pessoas que apresentam os quocientes calculados próximos a 1,618033989... apresentam medidas consideradas matematicamente harmônicas, assim, quanto mais próximo o quociente deste valor mais harmônicas são as medidas das pessoas, essas considerações representam o modelo matemático da situação.

4.1.3.2 Análise da Atividade

O tema ‘Medindo a beleza de uma pessoa’ também foi um tema que despertou interesse nos estudantes, eles mostraram-se animados com a visualização das fotos apresentadas nos slides e participaram dessa discussão, o que parece tê-los motivado ao desenvolvimento desta atividade.

A proposta de estudo que fizemos, exigiu dos estudantes um olhar para a beleza sob um novo ponto de vista, segundo Wittgenstein, sob um novo jogo de linguagem, a partir de uma perspectiva matemática. Acreditamos que essa foi a maior dificuldade dos estudantes no desenvolvimento desta atividade, pois de acordo com sua descrição, eles só conseguiram fazer essa mudança completamente na etapa final da atividade; os estudantes estavam impregnados do jogo de linguagem, referente à beleza, praticado em seu cotidiano, no qual a beleza é vista como algo pessoal e não há como ser medida, essa significação de beleza demorou a ser modificada.

Quando propomos a questão: “Será que é possível medir a beleza de uma pessoa?” (Figura 45), muda-se o contexto em que a beleza está inserida e de acordo com Wittgenstein, quando o contexto muda, o jogo de linguagem que o envolve também muda, assim como a significação das palavras. Neste novo contexto, a beleza não deixa sua característica de ser algo pessoal, mas com base em princípios matemáticos, como a proporcionalidade do corpo em relação ao número de ouro, poderíamos inferir sobre sua harmonia e, consequentemente, sobre sua beleza.

Consideramos que o vídeo que passamos foi o primeiro passo para que os estudantes vissem a beleza com esse novo olhar, pois ele mostra diversas formas, construções e relações na natureza e no corpo humano, que são consideradas pelos gregos, e outros povos da antiguidade, matematicamente perfeitas, pois seguem a regra de ouro. Descobrir essa regra era um dos objetivos da atividade desenvolvida pelos estudantes.

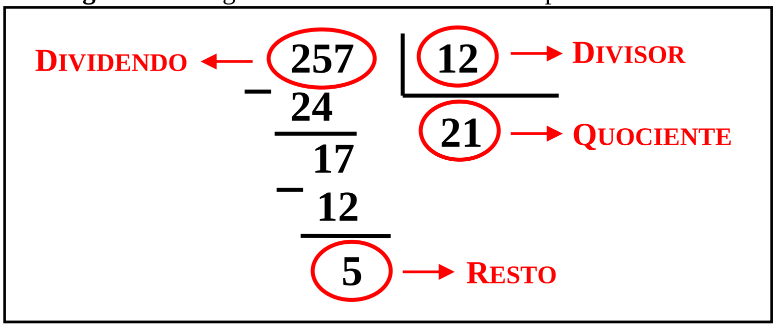
Para isso, os estudantes deveriam medir partes de seu corpo e de seus colegas e encontrar o quociente entre essas medidas, como determinado na folha entregue a eles (Figura 46). Neste momento, observamos que os estudantes, em geral, não sabiam o que significava a palavra quociente, em consonância com Wittgenstein, podemos dizer que um novo jogo de linguagem emergiu, a partir da necessidade dos estudantes atribuírem uma significação àquela palavra.

Acostumados a trabalharem com as outras operações, muitos como a Estudante 5, questionaram o professor: “*É de vezes?*”. A justificativa da estudante para tal pergunta foi que na atividade anterior, da Energia Elétrica, as contas realizadas por eles eram de multiplicação. O professor explicou que o termo ‘quociente’ era o nome que se dava ao resultado da conta de divisão, assim como produto para a conta de vezes, ou multiplicação; soma para a conta de mais, ou de adição; e diferença para a conta de menos, ou subtração; ajudando-lhes a organizar as nomeações e os jogos de linguagem das operações.

Ainda assim, após a explicação do professor a respeito do quociente ser o resultado de uma divisão, a Estudante 5, mostra não estar tão adaptada com às palavras desse novo jogo de linguagem, como está com o jogo das demais operação, confundindo várias vezes o termo ‘dividir’ com o termo‘somar’. Uma evidência que fundamenta esta inferência é o fato dos estudantes terem disponíveis calculadoras para fazer as operações, e mesmo assim quando alguns estudantes tinham altura maior que 150 cm, tamanho da fita métrica, eles se deparavam com uma adição simples, como 150 + 12, a qual observamos que eles realizavam mentalmente, como se essa operação ativasse uma ação automática de somar, que não necessita de instrumentos para auxiliar.

O professor então fez no quadro um exemplo de algoritmo da divisão, como estavam acostumados a fazer e mostrou-lhes as regras de uso, bem como o nome de cada elemento desse algoritmo, como podemos visualizar na Figura 51.

Figura 51 – Algoritmo da divisão conhecido pelos estudantes



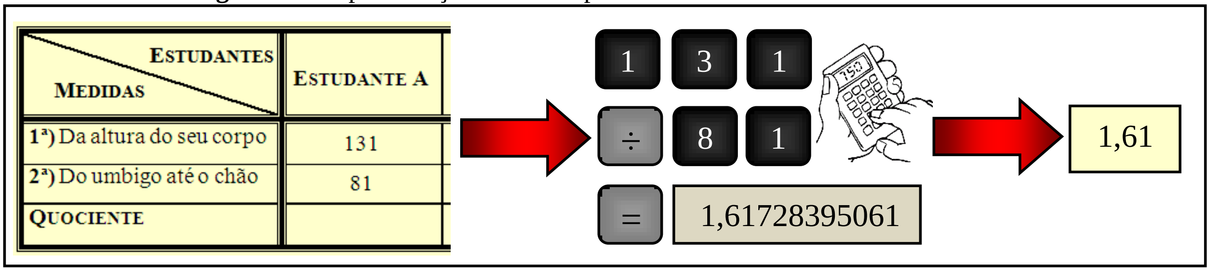
Além disso, a ideia divisão pode se apresentar sob diversas representações. Seja por meio do algoritmo como apresentado na Figura 51, conhecido como ‘método da chave’, na forma de fração: $\frac{257}{12}$, por meio das expressões: 257 ÷ 12, 257 / 12, ou 257 : 12, escrevendo 257 divido por 12, ou ainda, algebricamente, por meio do algoritmo da divisão euclidiana para Números Naturais, que constitui o seguinte Teorema: Para dois números naturais D e d, $d \neq 0$, existem naturais q e r únicos tais que $D = d \times q + r$, tal que $0 \leq r < d$, (DIAS; MORETI, 2011), sendo D o dividendo, d o divisor, q o quociente e r o resto.

Apesar de essas representações apresentarem signos diferentes, cada um com sua função, com base em Wittgenstein, podemos dizer que elas são aparentadas entre si, ou como se costuma dizer, possuem semelhanças de família; uma evidência dessas semelhanças é o fato de possuírem regras similares (dividendo dividido pelo divisor, o resultado é o quociente e o que ‘sobra’ é o resto), e também, de representarem o mesmo objeto, portanto, podemos obtê-las realizando transformações entre elas, ou seja, por meio da coordenação entre os registros, conforme propõe Duval.

Neste contexto, podemos dizer que cada representação emerge de acordo com o jogo de linguagem envolvido. Nesta atividade, por exemplo, os estudantes tiveram que calcular o quociente entre duas medidas realizadas e, por meio da calculadora, obter um Número Racional, o qual, por aproximação, foi representado na forma decimal, transformando assim, aquelas duas medidas em um número.

Quando os estudantes realizam as medidas que lhes foram solicitadas, novamente se depararam com o jogo de linguagem das medidas e, por conseguinte, com o jogo de linguagem dos Números Racionais. Entretanto, de acordo com características próprias de sua forma de vida, eles representam esses números na forma decimal e os aproximam a outros com apenas duas casas decimais após a vírgula. Vejamos o exemplo da Figura 52.

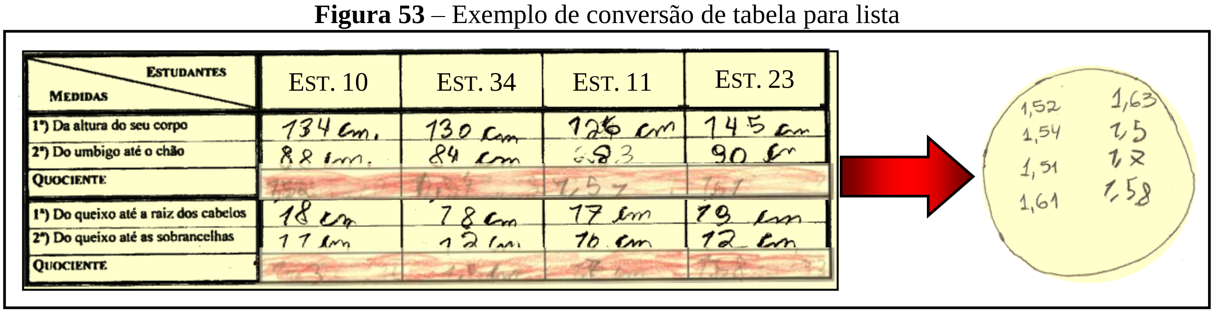
Figura 52 – Aproximação realizada pelos estudantes dos Números Racionais



Sabemos que o número 1,61728395061... é um Número Racional, pois pode ser escrito na forma de fração com numerador e denominador inteiros: 131/81, já que ele é resultado desta divisão, além disso, ele é uma dízima periódica, com período 617283950, o que é mais uma característica desse conjunto numérico. Contudo, fez-se necessária a aproximação desse número para o número 1,61, uma vez que não era objetivo naquele momento o estudo de outras características do conjunto numérico dos Racionais, como por exemplo, as dízimas periódicas, apenas dos Números Racionais representados na forma decimal, cujo jogo de linguagem, bem como regras da gramática desse jogo estavam em estudo pela forma de vida envolvida, neste caso, estudantes de um 4º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Com essa adequação dos números ao jogo de linguagem que estavam inseridos, os estudantes conseguiram comparar os resultados obtidos. Para isso, muitos deles optaram por converter a tabela que construíram em uma lista com os valores dos quocientes, como o Estudante 34 (Figura 53).

Figura 53 – Exemplo de conversão de tabela para lista



Com essa conversão ficou fácil para os estudantes compararem os resultados e observarem que os valores se aproximam de 1,6 ou 1,61, e nesse jogo de linguagem constituído, uma nova regra surgiu: os valores de quociente que se mostravam discrepantes em relação a 1,6 ou 1,61 deveriam ser revistos e as medidas verificadas, sendo na maioria das vezes readequadas.

Esses resultados nos remetem novamente aos jogos de linguagem dos diferentes ‘tipos de números’, mas agora, emergindo o conceito de Números Irracionais, pois esse valor 1,61 que os estudantes afirmam estarem se aproximando os quocientes, nada mais é do que uma aproximação do número de ouro.

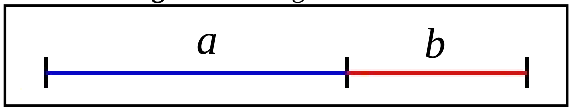
Ao explicar aos estudantes o que é o número de ouro, o professor busca palavras que possam ser compreendidas por essa forma de vida, ou seja, tenta trazer o número de ouro para o jogo de linguagem em que os estudantes estão envolvidos.

Neste sentido o número de ouro é apresentado como um número especial na Matemática, um tipo de número que eles estudarão em anos posteriores, geralmente, nos anos finais do Ensino Fundamental, e que em Matemática chamamos de Números Irracionais.

Esses números caracterizam-se por apresentar infinitos algarismos após a vírgula, ou seja, as casas decimais não acabam e sempre há um próximo algarismo, por isso o uso dos três pontinhos, as reticências (...), no final desses números. Contudo, os algarismos após a vírgula não apresentam nenhum padrão, como por exemplo, os números 1,0202... ou 5,4444..., que conseguimos descobrir os próximos números de forma simples; no caso dos Números Irracionais a regra é mais complexa, o que justifica as aproximações realizadas pelos estudantes, uma vez que, no momento, as regras do jogo de linguagem dos Números Racionais estão mais acessíveis à sua forma de vida do que as regras do jogo de linguagem dos Números Irracionais.

O número de ouro possui diversas representações, que podem ser úteis em diferentes jogos de linguagem, envolvendo formas de vida de estudantes de todos os níveis de escolaridade. Ele pode ser representado pelo signo Φ, pela razão $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pelo valor 1,618033989..., pela equação de segundo grau $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, ou ainda, algebricamente, pela proporção áurea $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$, com a e b, representados na Figura 54.

Figura 54 – Segmento Áureo



Esse número também pode ser obtido por meio da convergência da Série de Fibonacci, dividindo o n-ésimo termo pelo anterior; de uma Série de Frações, por meio de frações sucessivas; ou de uma série de raízes; cujas representações podem ser visualizadas na Figura 55. No caso da Série de Fibonacci, por exemplo, podemos representar sua convergência por meio de um limite, que pode ser discutido no âmbito do Ensino Superior, e, por envolver uma nova forma de vida, constitui um novo jogo de linguagem: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f_{(n+1)}}{f_{(n)}} = \Phi$.

Figura 55 – Séries que convergem para o número de ouro

Série de Fibonacci	Série de Frações
$\frac{2}{1} = 2$ $\frac{3}{2} = 1,5$ $\frac{5}{3} = 1,666...$ $\frac{8}{5} = 1,6$ $\frac{13}{8} = 1,625$	$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$
	Série de Raízes $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}$

Além disso, a relação que resulta no número de ouro pode ser visualizada geometricamente no pentagrama ou no retângulo e espiral áurea, por exemplo, apresentados na Figura 56, e também visualmente, em uma diversidade de figuras que encontramos na natureza, obras de arte e construções humanas, como na Figura 57.

Figura 56 – Representações geométricas para a razão áurea

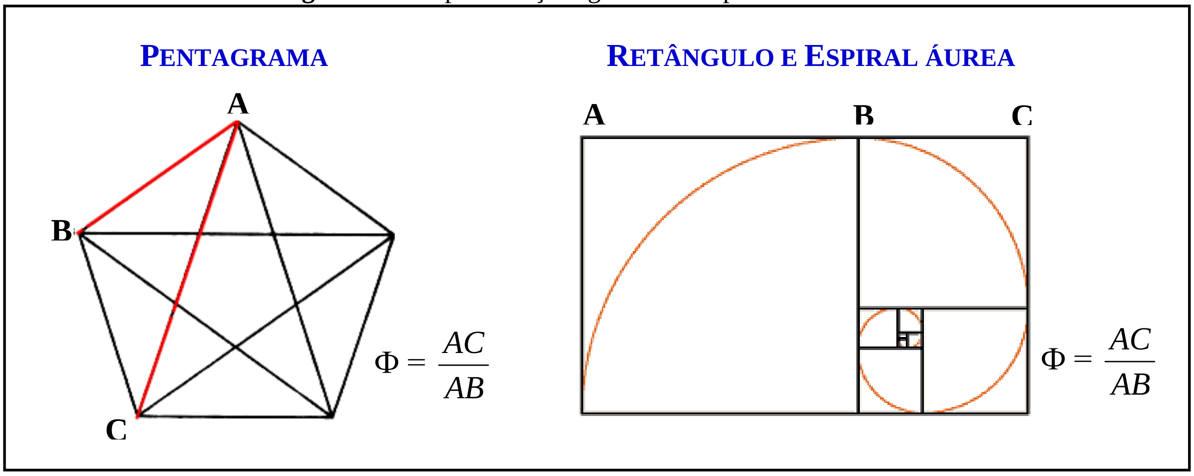
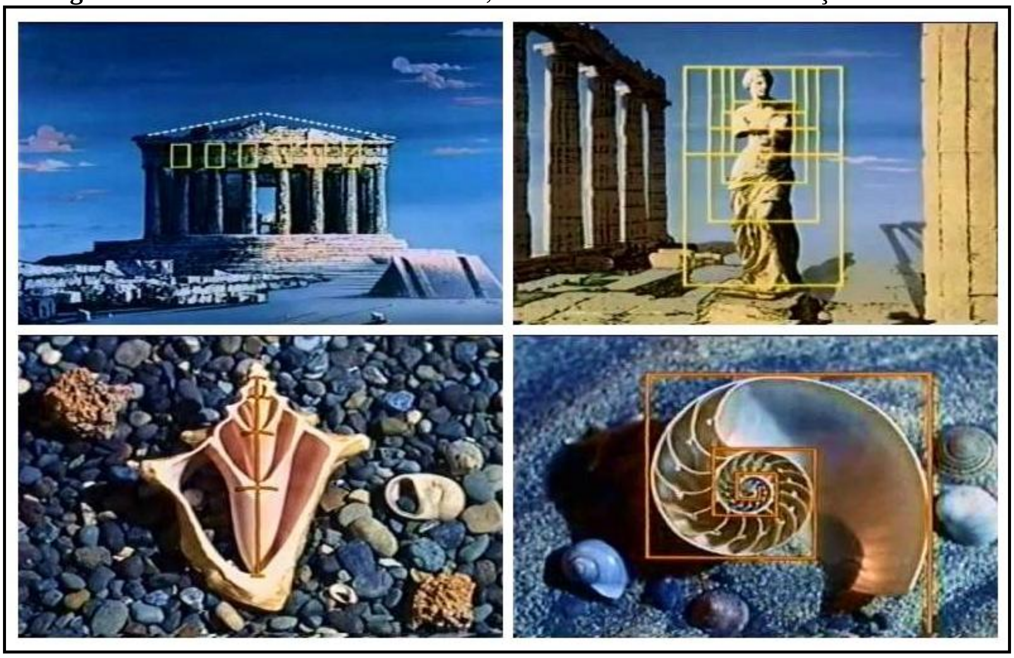


Figura 57 – Número de ouro na natureza, em obras de arte e em construções humanas



Fonte: Vídeo "Donald no país da Matemágica"

Como podemos observar o número de ouro pode se manifestar por meio de diversas representações e o que as difere é a linguagem utilizada em cada registro, isto é, mudam-se os registros, mudam-se as representações, e, por conseguinte, mudam-se os signos. Nesta perspectiva, algumas representações constituem o mesmo sistema semiótico, e outras não. Na Figura 54, temos exemplos de representações em um sistema geométrico, assim como na Figura 56; temos a Série de Frações na Figura 55, bem como o signo Φ, a equação do segundo grau e a proporção áurea, apresentadas anteriormente, como exemplos de um sistema algébrico; temos na Figura 57, exemplos de representações de um sistema figural, com alguns signos geométricos; e, por fim, temos o valor 1,618033989..., a razão $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e as Séries de

Fibonacci e de raízes, na Figura 55, que constituem um sistema numérico; bem como o termo “número de ouro” como exemplo de representação na linguagem natural.

A coordenação entre esses registros se dá por meio das transformações sugeridas por Duval: tratamento, entre as representações de um mesmo registro ou sistema semiótico; e conversão, para as mudanças entre diferentes registros. No caso da forma de vida envolvida na atividade, os estudantes tiveram contato, por meio do vídeo, com representações figurais e geométricas do número de ouro, e, por meio da folha que lhes foi entregue, com o signo Φ, uma representação algébrica desse número; contudo, os signos utilizados nas representações produzidas pelos estudantes são essencialmente numéricos, provenientes dos jogos de linguagem matemáticos que mantêm contato em sala de aula, uma vez que se manifestam basicamente por meio de linguagem natural.

Como consequência, o modelo matemático produzido pelos estudantes para esta atividade foi constituído verbalmente.

Na Figura 58, podemos observar as considerações dos estudantes quando comparam os quocientes encontrados.

Figura 58 – Conclusões dos estudantes em relação aos quocientes

Eles são quase iguais

(Estudantes 5, 22, 25)

Eles estão sempre próximos

(Estudantes 6, 7, 29)

Podemos concluir que todos têm seu tamanho, não importa a idade, e também [os quocientes] estão entre 1,6 e 1,5

(Estudante 33)

Eles estão muito perto

(Estudantes 35)

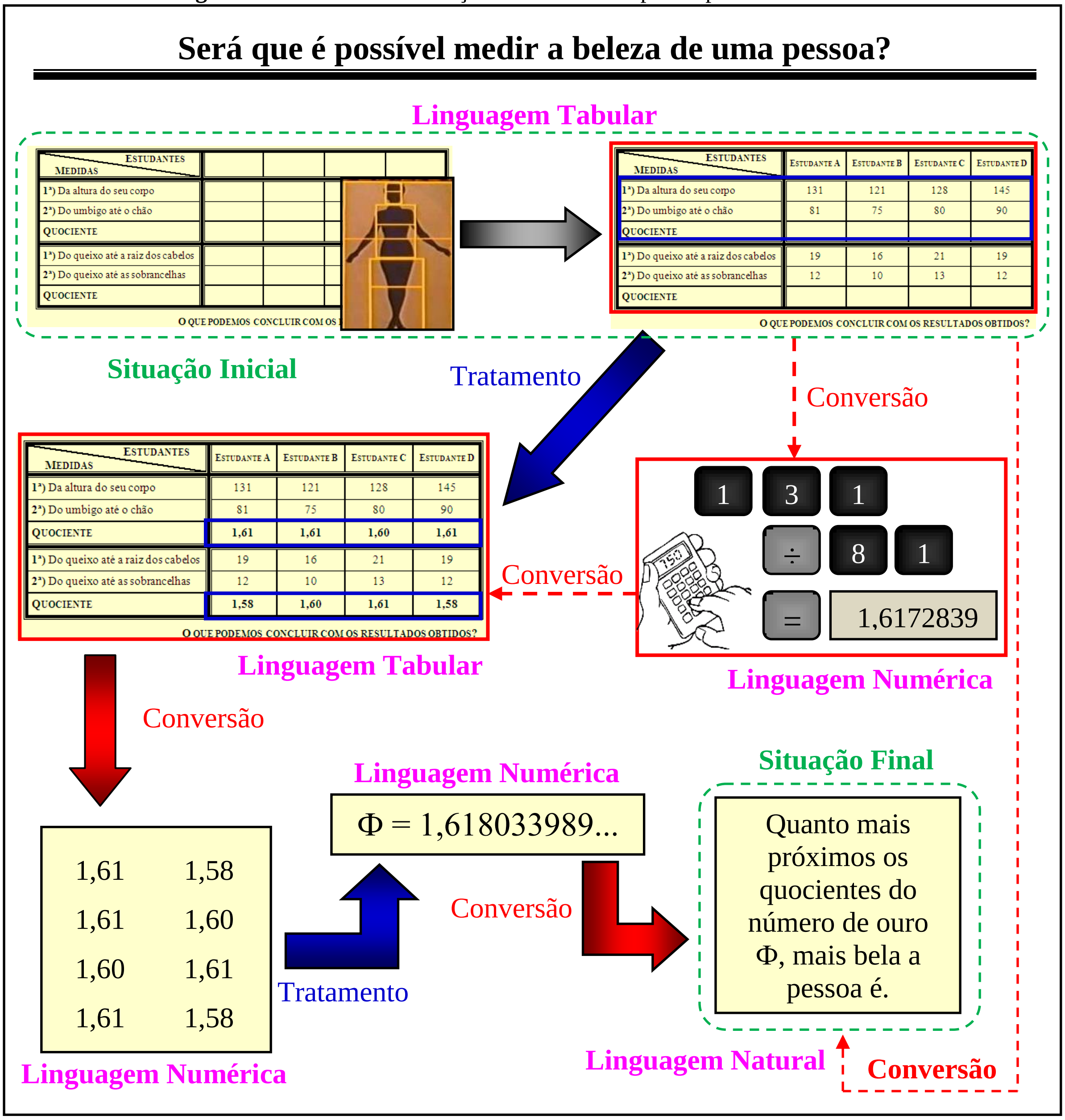
Os valores obtidos estão próximos a 1,6

(Estudantes 10, 11, 23, 34)

A discussão com toda a turma em torno dos quocientes obtidos levou os estudantes a estruturarem a seguinte resposta, que pode ser considerada o modelo matemático da situação: “*Quanto mais os quocientes entre as medidas de uma pessoa se aproximam do número de ouro Φ, mais bela ela é*”, ou seja, matematicamente é possível medir a beleza de uma pessoa, verificando a harmonia entre as medidas do corpo humano, para isso, tomamos como base a proporção áurea, que o jogo de linguagem da Matemática nos permite escrever da seguinte forma: $\frac{M_1}{M_2} = \Phi$, com $M_1 > M_2$, ou ainda, $M_1 = \Phi\ M_2$, sendo M_1 a primeira medida e M_2 a segunda.

Na Figura 59, apresentamos uma síntese do desenvolvimento dessa atividade de Modelagem Matemática, apontando as linguagens utilizadas, bem como as representações por meio das quais se manifestaram, e as transformações realizadas pelos estudantes entre estas representações.

Figura 59 – Síntese da resolução dos estudantes para o problema da beleza



A partir dessa síntese, vemos que os estudantes partiram de uma situação em linguagem natural envolvendo medidas do corpo humano, nesse caso o objeto de investigação eram eles mesmos e questão norteadora da atividade foi: ‘Será que é possível medir a beleza de uma pessoa?’, que se configurou como o problema da atividade de Modelagem Matemática. Após obterem as medidas solicitadas, com uma calculadora conseguiram transformar os valores de suas medidas em uma divisão, realizando um tratamento a fim de encontrar os quocientes. Para que esse tratamento fosse possível eles realizaram duas conversões, primeiro do registro tabular para o registro numérico, representado na calculadora, e depois, do numérico para o tabular novamente. Os valores encontrados eram Números Racionais, que foram representados pelos estudantes na forma decimal.

Preenchida a tabela, alguns estudantes preferiram convertê-la em uma lista com os valores dos quocientes encontrados, usando uma linguagem numérica; enquanto outros compararam esses valores na linguagem tabular. A conclusão dos estudantes foi que esses valores se aproximavam de 1,6 ou 1,61, que nada mais é do que uma aproximação do número de ouro, o que conduziu os estudantes a sua última conversão para encontrar um modelo matemático adequado à situação, neste caso, produzido verbalmente pelos estudantes, representado no sistema semiótico da linguagem natural.

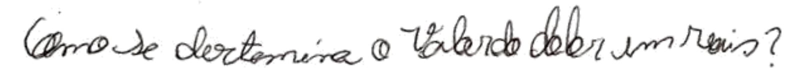
4.1.4 Atividade 4 – Relação entre as moedas Dólar e Real

4.1.4.1 Descrição da Atividade

Esta atividade foi desenvolvida pelos estudantes em consonância com o que se propõe no terceiro momento de inserção de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, conforme Almeida e Dias (2004), o que significa que os estudantes envolvidos foram responsáveis pela condução da atividade. A duração desta atividade foi de dois encontros e participaram do seu desenvolvimento treze estudantes, que foram organizados em dois grupos: um com sete estudantes e outro com seis.

O tema escolhido por eles, ‘Relação entre as moedas Dólar e Real’, surgiu do interesse de uma estudante em entender a relação entre a moeda americana e a moeda brasileira, a partir de uma notícia que havia assistido no jornal, na noite anterior, junto a seu pai. Assim, eles já partiram de uma pergunta, proveniente de seus interesses: ‘Quanto o dólar vale em reais?’. Posteriormente essa questão foi melhorada pelos estudantes: ‘Como se determina o valor do dólar em reais?’ (Figura 60), ou seja, a proposta para estudo estava associada ao processo de câmbio entre as moedas dólar e real.

Figura 60 – Problema formulado pelos estudantes em relação ao câmbio Dólar-Real

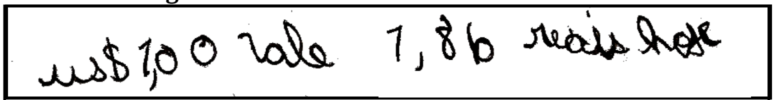


Como se determina o valor do dólar em reais?(Estudante 36)

Como ainda não havia dados disponíveis para essa situação, o professor propôs aos estudantes o uso do laboratório de informática para que pesquisassem informações, notícias ou curiosidades a respeito do tema escolhido. Neste episódio, o professor auxiliou os estudantes a utilizarem a internet nas suas buscas, lhes explicou como fazer uma pesquisa e como selecionar as informações, instruindo-os a sempre anotar os dados que considerassem úteis para solucionar o problema.

Rapidamente os estudantes encontraram o valor do dólar para aquele dia, como mostra a anotação da Estudante 14 na Figura 61.

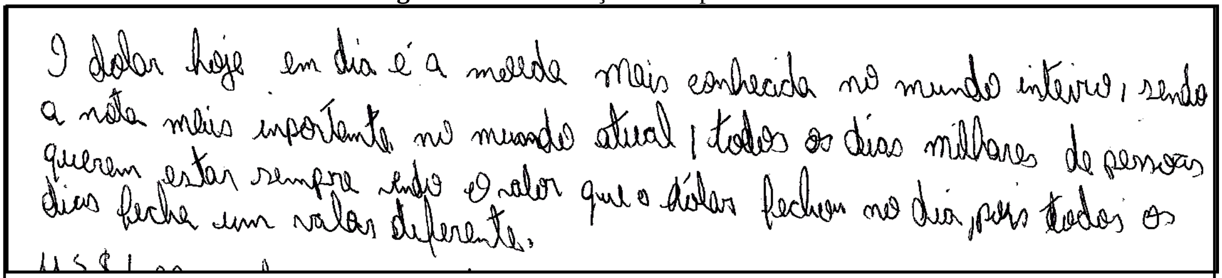
Figura 61 – Valor do dólar no dia 28/11/2011



US$ 1,00 vale 1,86 reais hoje

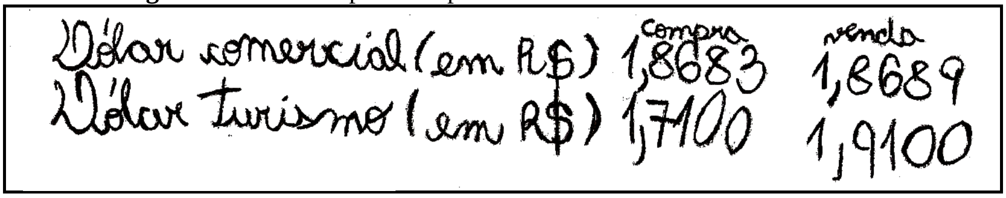
Todavia, logo eles descobriram que aquele valor do dólar não era fixo, mas que variava a cada dia (Figura 62). Além disso, eles também observaram a existência de vários tipos de dólar: comercial, paralelo e turismo, e que estes, possuíam valores diferentes para compra e venda, conforme registro do Estudante 22 (Figura 63). Devido à existência de tais tipos de dólar, combinamos com os estudantes de focarem o estudo em apenas um tipo, o escolhido foi o dólar comercial.

Figura 62 – Informações a respeito do dólar



O dólar hoje em dia é a moeda mais conhecida no mundo inteiro, sendo a nota mais importante no mundo atual, todos os dias milhares de pessoas querem estar sempre vendo o valor que o dólar fechou no dia, pois todos os dias fecha um valor diferente. (Estudante 2)

Figura 63 – Valores para compra e venda do dólar comercial e turismo



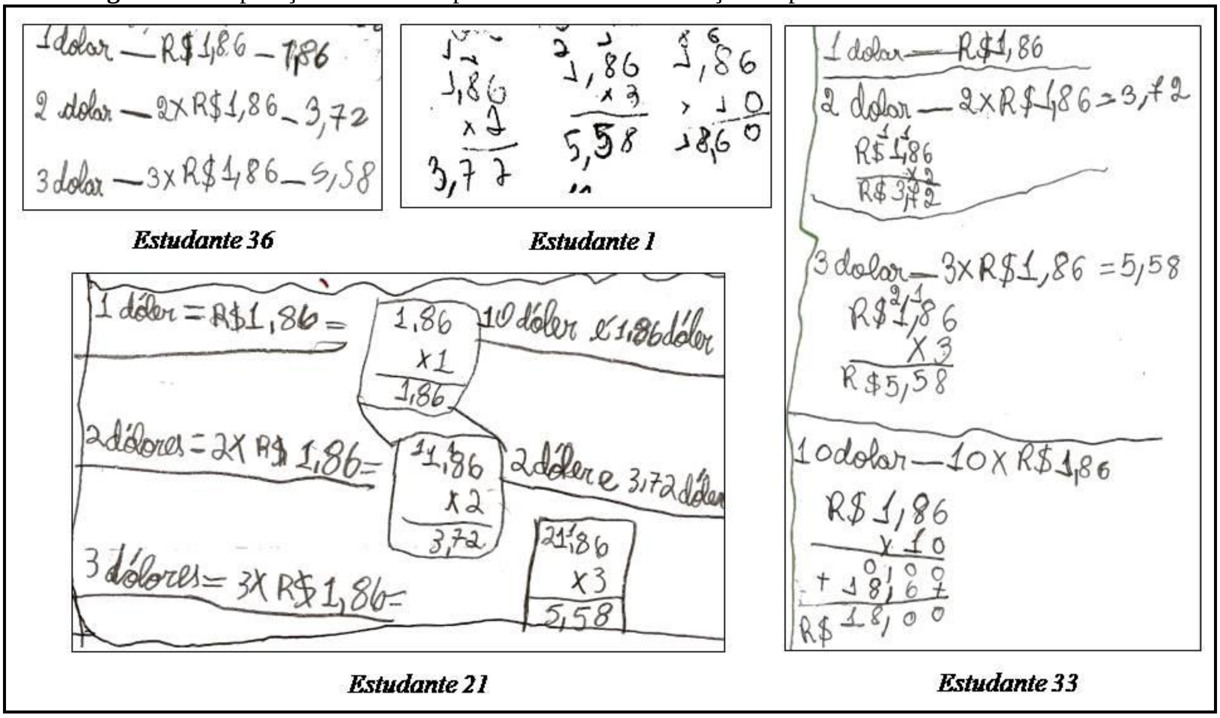
	compra	venda
Dólar comercial (em R$)	1,8683	1,8689
Dólar turismo (em R$)	1,7100	1,9100

Todas essas informações, além de outras curiosidades registradas pelos estudantes, como o fato do dólar, assim como o real, ser dividido em cem partes, as quais os americanos chamam de céntimos, ou em dez partes, que são denominadas dimes, configuram a primeira etapa do desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, a inteiração, que consiste no momento inicial, no qual os estudantes se familiarizaram com o tema e estabeleceram um problema para investigação. A busca por informações com o intuito de resolver o problema conduziu os estudantes à Matematização, próxima etapa do processo.

Neste momento, os estudantes, já na sala de aula, articularam as informações encontradas para solucionar o problema anunciado. O professor lhes explicou que a pergunta formulada era semelhante a do problema do anel, desta forma, não adiantava saber apenas o valor de um dólar, para solucionar o problema eles deveriam encontrar uma maneira para determinar o valor em reais de uma quantidade qualquer de dólares. Para isso, lhes bastava saber como proceder para calcular outras quantidades diferentes de um.

Seguindo esta dica os estudantes elaboraram a seguinte estratégia junto ao professor: eles sabiam o valor em reais para um dólar, então eles calcularam o valor em reais para dois dólares, três dólares, dez dólares, etc. e a partir daí, eles buscaram desvendar a relação existente entre as duas moedas. A Figura 64 mostra o raciocínio utilizado e as operações realizadas pelos estudantes.

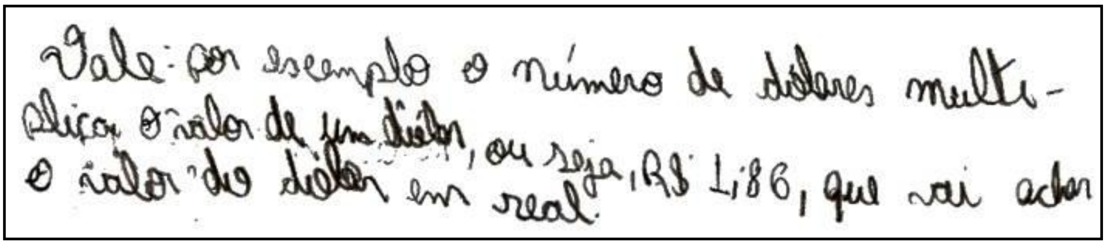
Figura 64 – Operações realizadas pelos estudantes em relação ao problema do câmbio Dólar-Real



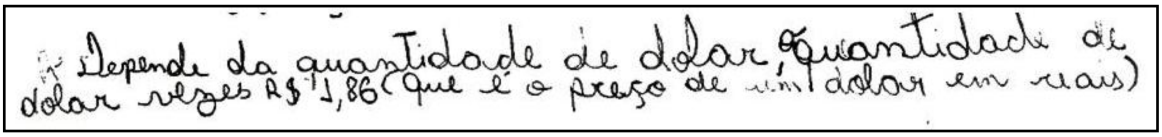
Como podemos observar na Figura 64, os estudantes utilizaram diversas representações para determinar o valor em reais de uma determinada quantidade de dólares. Eles utilizaram a ideia de proporcionalidade, armaram as continhas e efetuaram as operações, que auxiliaram na compreensão dos procedimentos do câmbio Dólar-Real.

Com a compreensão desses procedimentos, os estudantes conseguiram responder a questão que os motivaram a estudar esse tema. Alguns exemplos das explicações dadas pelos estudantes podem ser observados nos registros apresentados na Figura 65. Essas explicações podem ser consideradas os modelos matemáticos para a situação.

Figura 65 – Respostas dos estudantes para o problema da Relação Dólar-Real



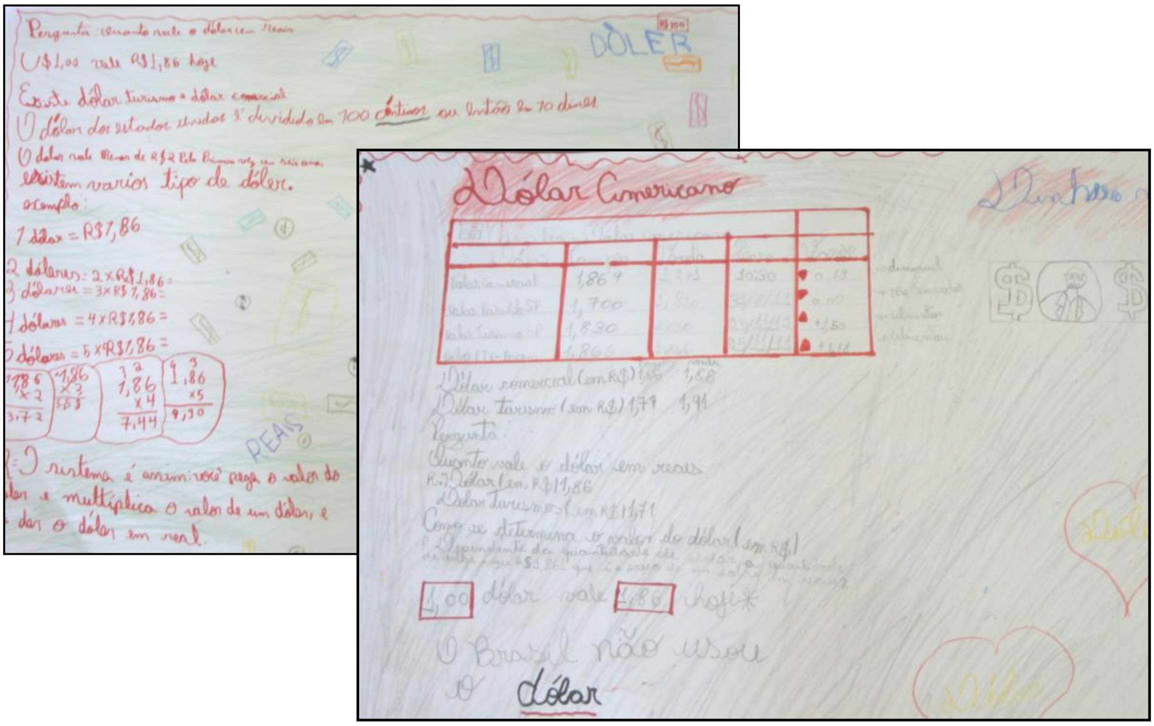
Vale: por exemplo o número de dólares multiplica o valor de um dólar, ou seja, R$ 1,86, que vai achar o valor do dólar em real (Estudante 2)



Depende da quantidade de dólar, a quantidade de dólar vezes R$ 1,86 (que é o preço de um dólar em reais) (Estudante 1)

As resoluções dos grupos foram apresentadas em momento posterior a toda a turma, para isso os grupos confeccionaram cartazes com suas resoluções para apresentar aos colegas (Figura 66).

Figura 66 – Cartazes confeccionados pelos grupos para a atividade Relação Dólar-Real



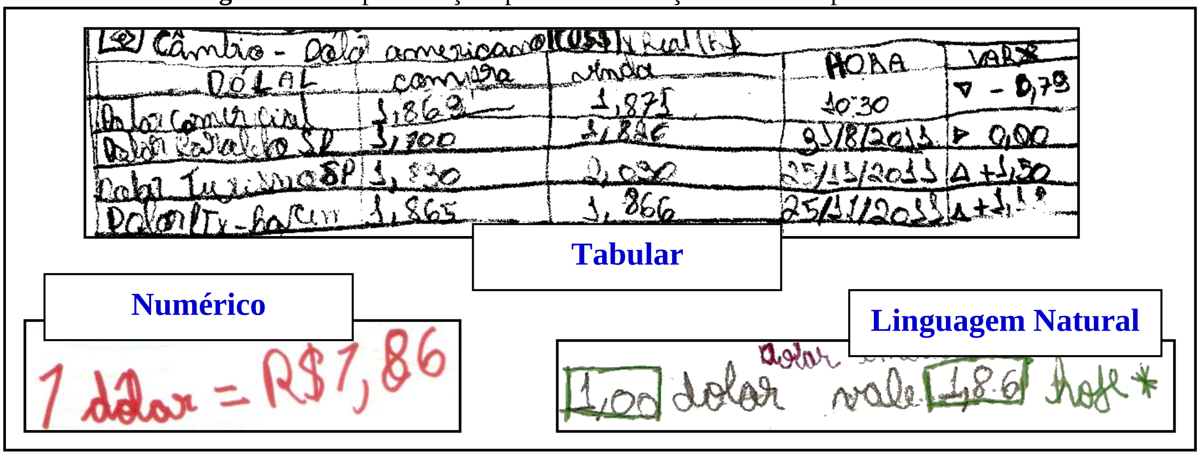
Os modelos matemáticos obtidos pelos grupos em questão foram avaliados pela turma como bons, ou como costumamos dizer no âmbito da Modelagem Matemática, eles foram considerados consistentes e adequados para representar matematicamente a situação, ou seja, os modelos matemáticos produzidos foram validados.

4.1.4.2 Análise da Atividade

Esta foi a quinta atividade de Modelagem Matemática desenvolvida pelos estudantes, o que indica que eles já tinham adquirido certa familiaridade com atividades nesse contexto e com essas características. Todavia, esta foi uma atividade do terceiro momento, e, em consonância com Almeida e Dias (2004), foram os estudantes os responsáveis pela sua condução. No caso deste grupo, eles optaram por trazer para o contexto da Matemática um tema que envolve a Relação entre as moedas Dólar e Real, que é bastante comum na Economia. Neste sentido houve uma troca de jogo de linguagem, já que essa relação para os economistas assume uma conotação diferente daquela assumida pelos estudantes, a caráter de curiosidade e sob um ponto de vista matemático.

A pergunta que caracterizou o problema foi: ‘Como se determina o valor do dólar em reais?’. Para a busca de informações eles utilizaram o laboratório de informática, e, por meio da internet, tiveram acesso a sites de Economia, cujas informações foram obtidas sob diversas representações, contemplando registros em linguagem natural do fenômeno, tabulares e numéricos (Figura 67).

Figura 67 – Representações para as informações coletadas pelos estudantes

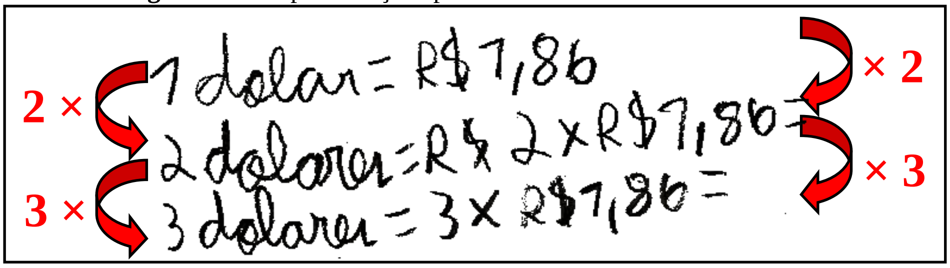


O desenvolvimento da atividade deu-se a partir de tratamentos e conversões desses registros, permitindo a produção de uma estrutura matemática capaz de fornecer uma solução para o problema.

Decorrente das informações encontradas os estudantes observaram a existência de três diferentes tipos de dólares, o comercial, o paralelo e o turismo, dentre os quais, eles optaram por abordar o dólar comercial, devido ao tempo que lhes foi designado para o desenvolvimento da atividade de Modelagem. O valor do dólar comercial no dia da pesquisa era de R$ 1,86 tanto para compra, como para venda, levando-os a formular a seguinte relação: US$ 1,00 = R$ 1,86.

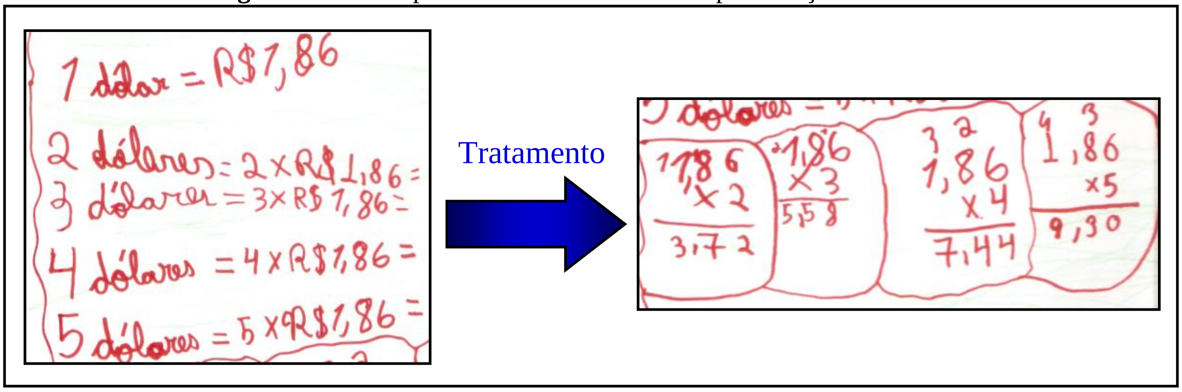
De modo geral, a estratégia adotada pelos estudantes para resolver o problema envolveu a ideia de proporção, utilizando multiplicações sucessivas: se US$ 1,00 corresponde a R$1,86, então US$ 2,00 corresponde a 2 × R$ 1,86, US$ 3,00 a 3 × R$ 1,86, US$ 4,00 a 4 × R$ 1,86, e assim por diante (Figura 68).

Figura 68 – Representações para o cálculo do câmbio Dólar-Real



Esse raciocínio estimulou o uso de representações numéricas e suscitou o tratamento entre elas (Figura 69).

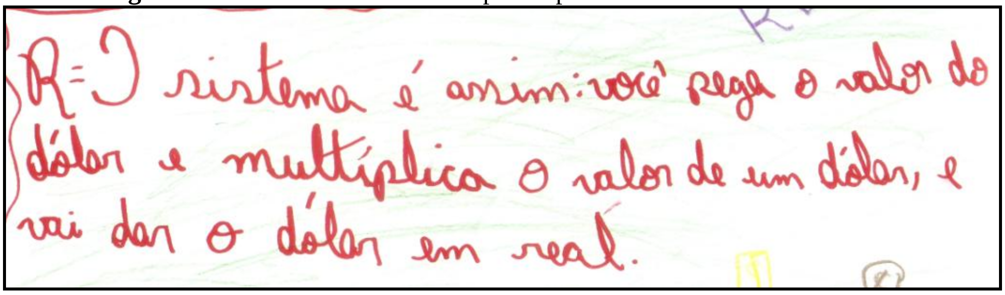
Figura 69 – Exemplo de tratamento entre as representações numéricas



Os estudantes logo descobriram que a relação entre as moedas dólar e real não era fixa e a relação estabelecida, com a regra US$ 1,00 = R$ 1,86 nem sempre era válida. Como consequência eles notaram que naquele jogo de linguagem as regras de proporção, às quais recorreram, não seriam suficientes para responder à questão do problema, e se adotassem o valor 1,86 para todas as relações estas se tornariam muito pontuais e os cálculos realizados logo não estariam condizentes com a situação, já que esse valor muda frequentemente.

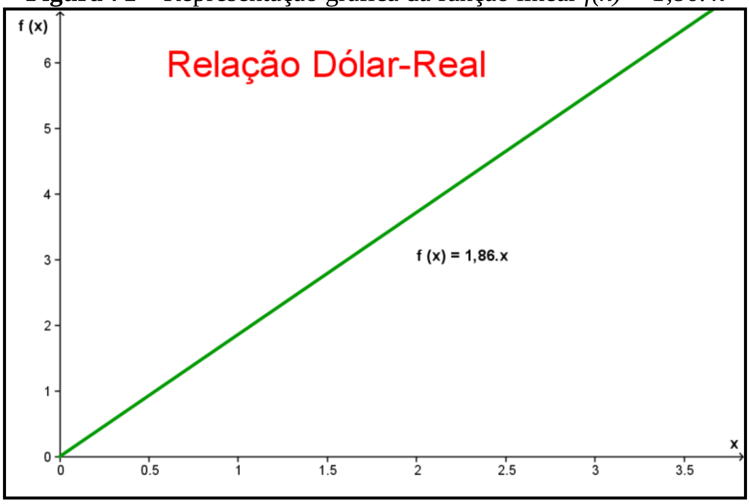
Essa característica levou os estudantes a desenvolverem a ideia de generalização, muito útil em atividades de Modelagem Matemática, pois envolve a previsão de fenômenos; para isto, os estudantes buscaram na linguagem natural subsídios para estruturar matematicamente uma solução para o problema, de modo que contemplasse a característica de flexibilidade dessa relação. Os modelos matemáticos, decorrentes dessa preocupação, podem ser visualizados na Figura 65, apresentada anteriormente, bem como na Figura 70.

Figura 70 – Modelos matemáticos para o problema do câmbio Dólar-Real



Como podemos observar, o câmbio entre as moedas Dólar e Real segue as regras de uma função linear, ou seja, do tipo *f(x) = k.x*, sendo *f(x)* o valor em reais procurado, *x* o valor em dólar e *k* a constante de proporcionalidade que relaciona o valor de um dólar com seu valor em reais. Um exemplo dessa função é a situação evocada pelos estudantes no dia da pesquisa (28/11/2011), cuja correspondência entre dólar e real era: US$ 1,00 = R$ 1,86, logo a função que representava essa relação era *f(x) = 1,86.x*. Nesta representação os signos utilizados constituem uma linguagem algébrica, da qual, com o devido tratamento, podemos obter sua função inversa, referente à troca do valor em reais para o valor em dólar, $f^{-1}(x) = x / 1{,}86$, na qual o signo $f^{-1}(x)$ representa o valor em dólar e o signo *x*, agora, o valor em reais. No entanto, na primeira representação, a variável independente da função diz respeito ao valor em dólar, enquanto a variável dependente ao valor em reais, já na segunda, ocorre o contrário. Também poderíamos, por meio de uma conversão, transformar essa representação álgebra *f(x) = 1,86.x* em uma representação gráfica, conforme Figura 71.

Figura 71 – Representação gráfica da função linear *f(x) = 1,86. x*



Contudo, as linguagens algébrica e gráfica, são linguagens ensinadas aos estudantes essencialmente a partir dos anos finais do Ensino Fundamental, o que não impediu os estudantes dos anos iniciais de representarem a situação em questão por meio de um modelo matemático, neste caso, o modelo produzido envolveu uma representação escrita, proveniente do sistema semiótico da linguagem natural, ou seja, eles expressaram a função da seguinte forma: para obter o valor em reais de um determinado valor em dólar precisamos multiplicar a quantidade de dólares pelo valor em reais de um dólar.

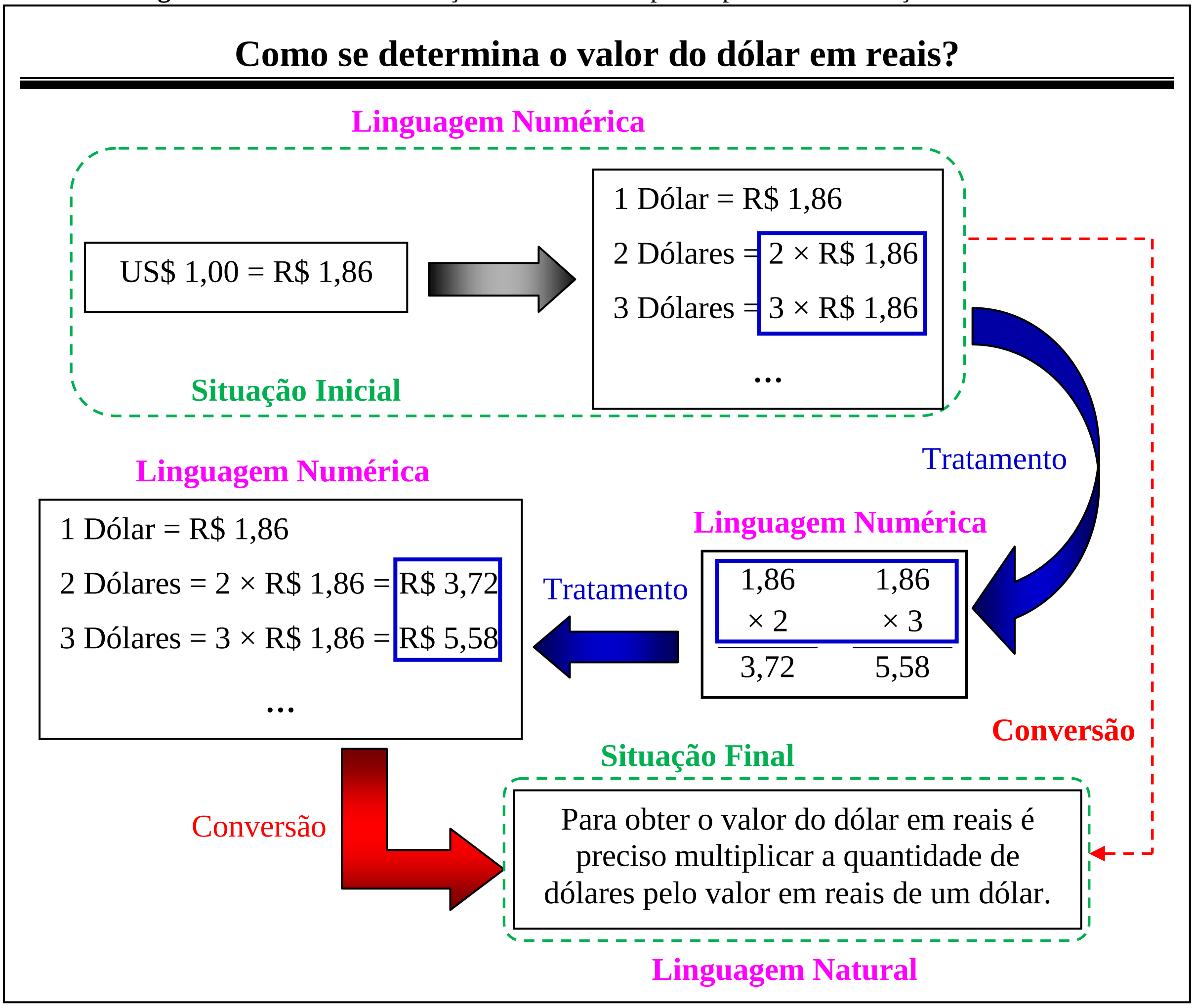
Neste contexto, observamos semelhanças de família entre as representações, cujas regras e lei de formação da função são as mesmas. Vejamos: o valor em reais, na linguagem natural, pode ser traduzido para a linguagem algébrica pelo signo $f(x)$; como é este o valor que eles desejam obter, na linguagem algébrica ele vem antes da igualdade, representada pelo signo =; o valor de um dólar, na linguagem natural, é o valor 1,86 ou a constante de proporcionalidade k, na linguagem algébrica; o valor em dólar que se deseja cambiar para real, é representado algebricamente pelo signo x; e, por fim, a multiplicação, na linguagem natural, é representada pelo ponto (.) na linguagem algébrica.

Quando comparamos com o registro gráfico, enquanto algumas semelhanças desaparecem, outras se mantêm e novas podem ser descobertas, como o fato de que o conjunto de todos os valores possíveis para a quantia em dólar, denominado matematicamente por domínio da função, é representado pelo eixo x, com $x \geq 0$; o conjunto de todos os valores possíveis para a quantia em reais, denominado matematicamente por Imagem da função, é representado pelo eixo f(x) ou y, com $f(x) \geq 0$; enquanto a relação entre eles, ou seja, a função linear, é representada graficamente por uma reta, nesta situação, uma semirreta, pois o conjunto Domínio e o conjunto Imagem estão limitados aos valores não negativos.

A produção desse modelo matemático além de contribuir para os estudantes desenvolverem a noção de função, trazendo este conceito para o jogo de linguagem em que estavam envolvidos, permitiu a abordagem de outros conceitos, que são comuns aos Anos Inicias do Ensino Fundamental, como, por exemplo, a multiplicação e a ideia de proporcionalidade, conceitos estes que possibilitaram a estruturação matemática da função linear por meio da linguagem natural. Além disso, envolveu a multiplicação de Números Racionais, evocando um jogo de linguagem com conceitos já estudados em outras atividades, mas desta vez, no contexto do sistema monetário, ou seja, em um novo jogo de linguagem.

Apresentamos na Figura 72 a síntese desta atividade, evidenciando as diferentes linguagens, suas representações e transformações realizadas entre elas.

Figura 72 – Síntese da resolução dos estudantes para o problema da relação Dólar-Real



Como podemos visualizar na Figura 72, os estudantes partiram do seguinte problema 'Como se determina o valor do dólar em reais?', em linguagem natural. Esta questão os levou a buscar na internet informações que revelassem a relação existente entre essas duas moedas. A partir da relação encontrada, eles representaram numericamente a noção de proporcionalidade envolvida. A princípio as operações de multiplicação foram expressas em linhas, necessitando do tratamento adequado para resolvê-las, isto é, eles necessitaram "armar e efetuar as continhas", como é comum fazerem no jogo de linguagem da sala de aula. Neste momento, não eram os produtos o foco dos estudantes, eles estavam interessados em descobrir uma regularidade nas contas que estavam fazendo, e quando encontraram, constituíram o modelo matemático convertendo aquele conjunto de operações no sistema numérico para uma linguagem natural, por meio da escrita.

4.1.5 Atividade 5 – Gastos com o Flúor

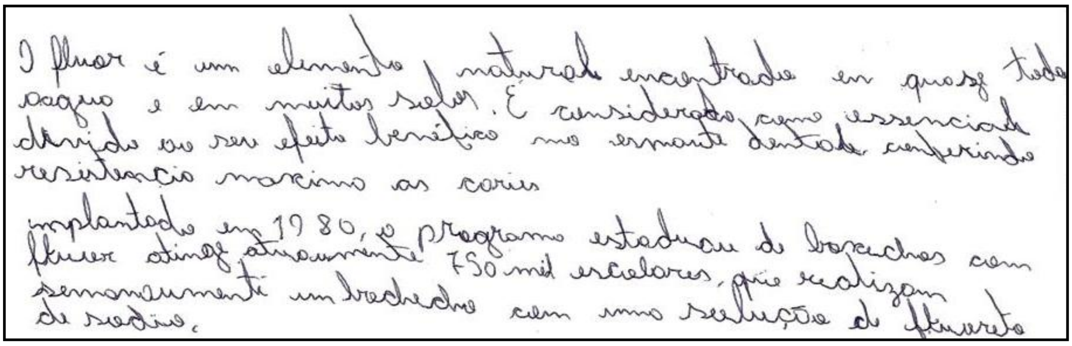
4.1.5.1 Descrição da Atividade

A atividade “Gastos com o Flúor” foi a última de uma série de atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos estudantes do 4º ano, cuja escolha do tema foi realizada em comum acordo entre estudantes e professor. Nesse sentido, configura-se como uma atividade do terceiro momento, conforme propõem Almeida e Dias (2004).

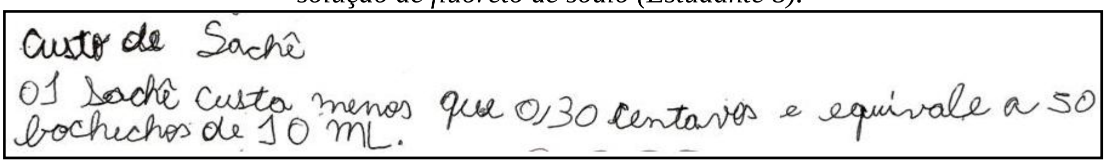
O tema envolve uma ação que é realizada com frequência pelos estudantes na escola – uma vez por semana –, a higienização bucal por meio do bochecho com flúor, estimulando o interesse dos estudantes em pesquisá-lo. Estiveram envolvidos nessa investigação 14 estudantes, os quais foram organizados em três grupos e levados ao laboratório de informática da escola para buscarem informações a respeito do flúor.

Os estudantes buscaram informações e curiosidades na internet, as quais anotaram em uma folha em branco que lhes foi entregue (Figura 73). A partir das informações obtidas, um problema foi formulado: “Qual é o gasto com o flúor em nossa escola?”

Figura 73 – Informações e curiosidades para o problema relacionado ao flúor



O flúor é um elemento natural encontrado em quase toda água e em muitos solos. É considerado como essencial devido ao seu efeito benéfico no esmalte dental conferindo resistência máxima às cáries. Implantado em 1980, o programa estadual de bochechos com flúor atinge atualmente 750 mil escolares, que realizam semanalmente um bochecho com uma solução de fluoreto de sódio (Estudante 8).



Custo do sache
01 sache custa menos que 0,30 centavos e equivale a 50 bochechos de 10 ml (Estudante 31).

Com base no problema, eles selecionaram as informações que seriam úteis na sua resolução. Entretanto, havia ainda algumas dúvidas quanto ao processo referente à higienização com o flúor e uma maneira que encontraram de sanar suas dúvidas foi entrevistar a diretora da escola, que se colocou a disposição dos estudantes.

Na sequência apresentamos alguns trechos dessa entrevista, que revelam as perguntas feitas pelos estudantes à diretora e os dados que obtiveram, além de uma discussão que propiciou um momento de conscientização em relação à higienização bucal com o flúor.

Estudante 5*: Quantos alunos têm no colégio?*
Diretora*: alunos nós temos 179. [...] [só que] o flúor não são esses alunos todos que fazem...*
Professor*: Quantos alunos será que fazem professora?*
Diretora*: 155 fazem o flúor [...] Tá, agora vocês vão perguntar pra mim por que esses outros aí que sobraram não fazem flúor, por que será?[...] Quantos alunos sobraram?*
Estudante 20*: 155.*
Diretora*: Não, dos 179...*
Estudante 7*: menos 155.*
[...]
Professor*: Façam a continha.*
[...]
Alguns Estudantes*: 21*
Diretora*: quem são esses 21 alunos que não fazem flúor? Por que esses 21 alunos não fazem flúor?*
Professor*: 21?*
Estudante 30*: É 24.*
Diretora*: então por que esses não fazem flúor, hein?*

Nesse momento os estudantes levantaram algumas suposições para os 24 estudantes que não faziam o flúor, como: “tem preguiça”, “porque não gostam”, “porque eles não querem fazer flúor”, “por que não dá tempo” (Estudante 5), “porque não tem flúor suficiente” (Estudante 27 e 29), “porque são relaxados” (Estudante 28). Todavia a diretora explicou que não se tratava de nada disso que eles tinham suposto e lhes revelou o porquê.

Diretora*: Vocês me perguntaram quantos alunos tem na escola, não foi?*
Alunos*: Sim.*
Diretora*: 179 alunos, mas crianças eu tenho 155. [...] esses alunos que estão aí, que vocês vão saber porque não fazem flúor são alunos da EJA [...] de Educação de Jovens e Adultos...*

A diretora explicou que a higienização com o flúor é um privilégio das crianças das escolas públicas, que jovens e adultos não fazem mais bochecho, uma vez que o uso do flúor ajuda no fortalecimento do esmalte dos dentes, o que é importante para as crianças. Esclarecida tal questão, a diretora deixou espaço para novas questões, contando agora com o apoio da secretária da escola, que também estava presente e ajudou a responder as perguntas dos estudantes.

Estudante 8*: quantos saches são dados? [...] quanto é gasto?*
Diretora*: quantos que são gastos?*
Estudante 20*: cada sexta-feira...*
Secretária*: olha... para cada litro de água, dois desses aqui [mostra os saches]*

Mas não foi apenas a diretora que forneceu dados aos estudantes, eles também apresentaram à ela alguns dados que encontraram em suas pesquisas, como o preço de um sache de flúor, segundo o site da Secretaria Estadual de Saúde do Paraná. A entrevista tornou-se, desta maneira, um espaço favorável à interação entre os presentes.

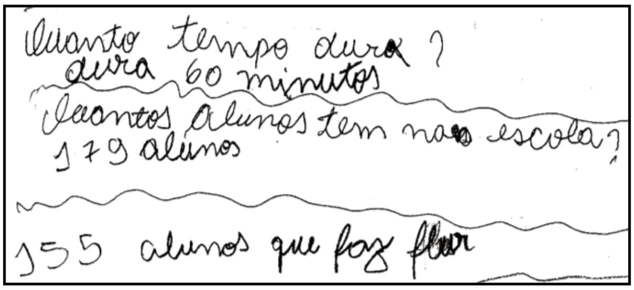
***Diretora**: quanto custa?*
***Estudante 5**: 30 centavos.*
***Diretora**: cada um?*
***Alunos**: é...*
***Diretora**: está caro.*
***Estudante 5**: ou menos de 30 centavos.*
***Diretora**: estão vendo a importância de se usar tão bem?[...] se a escola fosse comprar... olha o dinheirão que a escola ia gastar. Porque [...] quantas vezes é feita [a higienização bucal com o flúor] por semana?*
***Alunos**: uma vez.*
***Diretora**: uma vez. Tem mês que tem 4...*
***Estudante 20**: 4 semanas...*
***Diretora**: 4 sextas-feiras, não é na sexta-feira que faz? E tem mês que tem cinco, não é? Então quanto seria para escola?[...] depois vocês fazem essa continha, está bem? Que mais?*
***Estudante 5**: quantos bochechos vêm aqui pro colégio?*
***Diretora**: quantos vêm? Vem assim, olha, no começo do ano eles mandam pra gente não é?[pergunta para a secretária da escola] Aí quando está acabando a gente pede ou eles mesmos repõem.*
***Secretária**: mas é na média de 6 meses a reposição.*
***Professor**: então a gente pode ver depois, calcular quantos saches precisam a cada 6 meses.*
***Estudante 20**: quantos saches vêm, é... vêm no comecinho do ano? Quanto mais ou menos?*
***Diretora**: quanto?*
***Estudante 20**: é...*
***Secretária**: geralmente vem duas vezes no ano.*
***Estudante 20**: é... mas quanto?*
***Secretária**: Ah... eles mandam em média uns 50 saches depois eles repõem, se faltar a gente pede.*
***Diretora**: então a escola não compra flúor...*
[...]
***Professor**: depois a gente vai ver quanto que cabe em cada copinho, pra poder ver um litro dá para quantas crianças.*
***Secretária**: [acho que é] 5 ml.*

Além das perguntas associadas ao problema, outras discussões, de outras dimensões, também foram propiciadas.

***Diretora**: O que sobra, aí já vai vencer e para o ano que vem já não dá mais.*
***Estudante 20**: aí joga no lixo, joga fora?*
***Diretora**: ele é descartável [...] Olha, o flúor que faz, por exemplo, quando não tinha período integral era uma turma de manhã, uma turma de tarde, a servente ia lá fazia o flúor de manhã, sobrava para a tarde, ela não podia usar. Não pode! O flúor tem que ser eliminado na hora. Sobrou? Tem que jogar fora, não pode ser usado para tarde, nem para outro horário, tem que ser tudo na mesma hora, por isso que vão as turmas bem rapidinho uma atrás da outra...*
[...]
***Estudante 5**: Diretora, quantos dias dura o bochecho?*
***Diretora**: Como assim? Não... o líquido? Lá é na hora, não pode guardar nem de manhã nem pra [tarde]... é na hora tem que ser usado.*
***Estudante 20**: não... Quanto dura no nosso dente?*
***Diretora**: Ah... a recomendação é assim... ai, eu vou falar de ciências, mas eu vou explicar: não pode comer, a gente tem que chegar de manhã, levantar... Por que vocês fazem bem cedinho o flúor? Porque vocês já escovaram os dentes e vão demorar mais de uma hora pra comer, não é? Então, ele tem que ficar no mínimo uma hora sem comer nem beber... Não é isso que a gente fala para vocês? Então ele vai ficar agindo ali por uma hora.*
[...]
***Estudante 8**: ô diretora, se tomar dá dor de barriga?*
***Diretora**: claro, faz mal para o estômago.*

Como podemos constatar nos trechos apresentados, a entrevista com a diretora além de esclarecer dúvidas dos estudantes quanto à higienização com o flúor forneceu muitas informações para a resolução do problema sob investigação, as quais foram também registradas pelos estudantes, como mostra a Figura 74.

Figura 74 – Informações obtidas na entrevista com a diretora da escola



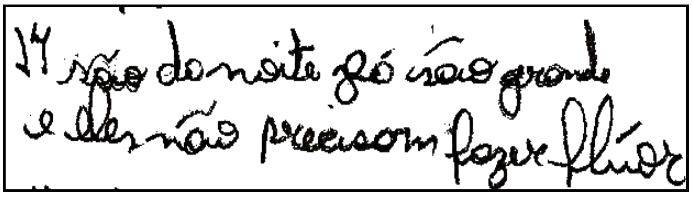
Quanto tempo dura?
dura 60 minutos

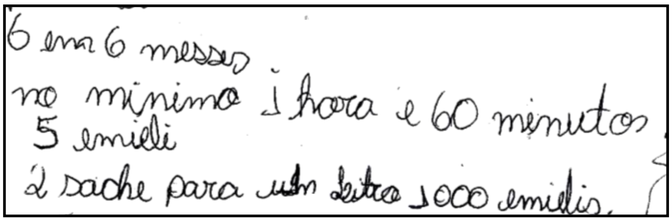
Quantos alunos têm na escola?
179 alunos

155 que fazem flúor

(Estudante 31)

24 são da noite, já são grades e eles não precisam fazer flúor (Estudante 28)



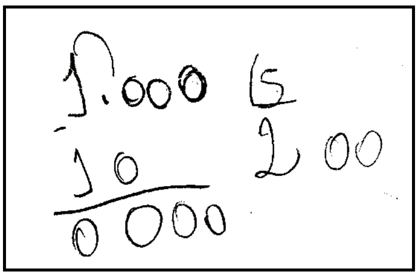


6 em 6 meses
No mínimo 1 hora, [que] é 60 minutos
5 ml
2 saches para um litro, 1000 ml
(Estudante 29)

Após a entrevista com a diretora, os estudantes voltaram para a sala de aula, onde deram prosseguimento à atividade. Inicialmente os estudantes calcularam quantos saches eram utilizados por dia. Para esse cálculo eles utilizaram as informações de que para o preparo da solução eram utilizados dois saches para cada litro de água e que cada estudante recebia no copinho 5 ml dessa solução, preparada com o flúor, para fazer a higienização.

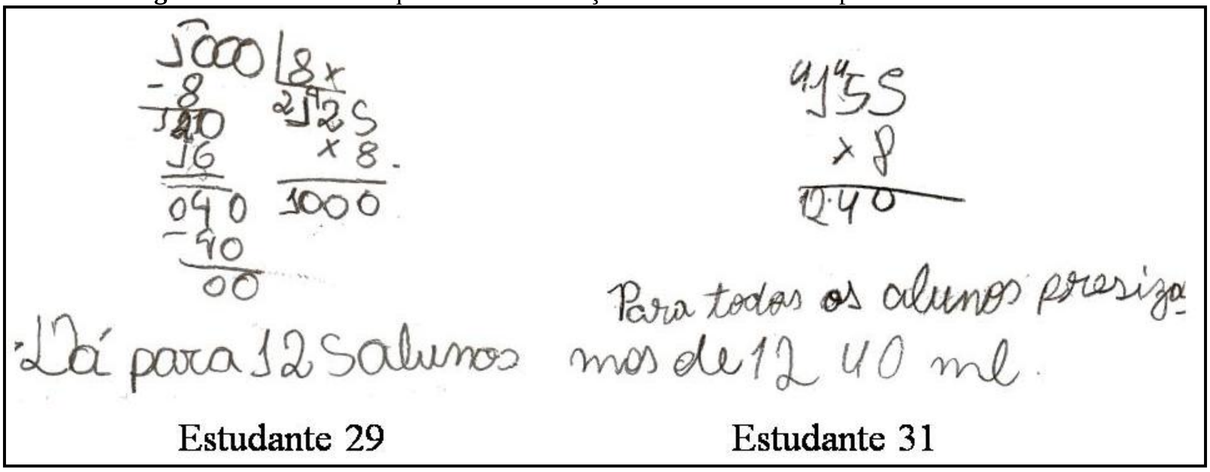
Em primeiro lugar, os estudantes verificaram por meio da divisão 1000 ÷ 5, quantos copinhos de 5 ml rendia a solução (Figura 75), o resultado de 200 copinhos indicava que um litro era suficiente para todos os estudantes da escola.

Figura 75 – Cálculo do rendimento de bochechos com um litro (Estudante 31)



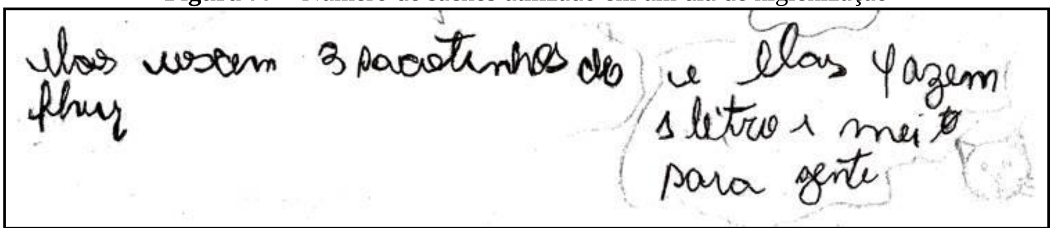
Contudo, os estudantes desconfiaram da resposta, então o professor propôs que eles medissem quanto de solução cabia em um copinho. Para isso, eles colocaram em um copinho uma quantidade de água equivalente à quantidade de solução que eles recebiam cada dia de higienização, a qual foi medida por meio de um copinho milimetrado e descobriu-se que, na verdade, cada estudante recebia 8 ml de solução. Mediante tal descoberta, os estudantes realizaram uma nova conta, agora considerando que cada estudante recebe 8 ml de solução, logo, a divisão 1000 ÷ 8, revela que um litro de solução dá para 125 bochechos, não sendo suficiente para todos os 155 estudantes da escola. Os estudantes verificaram, então, quantos mililitros eram necessários para preparar 155 bochechos, desta vez, por meio da multiplicação 8 × 155, obtendo 1240 ml de solução, como pode ser visualizado na Figura 76.

Figura 76 – Cálculo da quantidade de solução de flúor necessária para os 155 estudantes



Como eram utilizados 2 saches para preparar um litro, eles deduziram que com 1 sache se preparava meio litro, ou seja, 500 ml, e, desta forma, concluíram que para cada dia de higienização na escola eram necessários 3 saches de flúor (Figura 77).

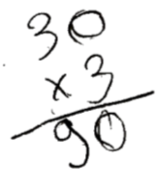
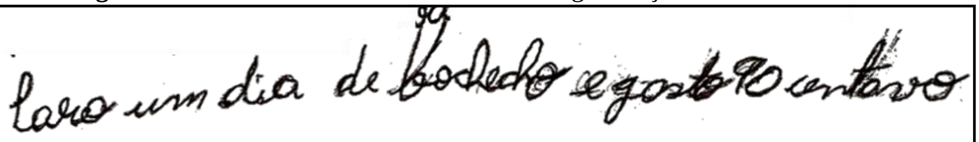
Figura 77 – Número de saches utilizado em um dia de higienização



Elas usam 3 pacotinhos de flúor [...] e elas fazem 1 litro e meio para gente. (Estudante 27)

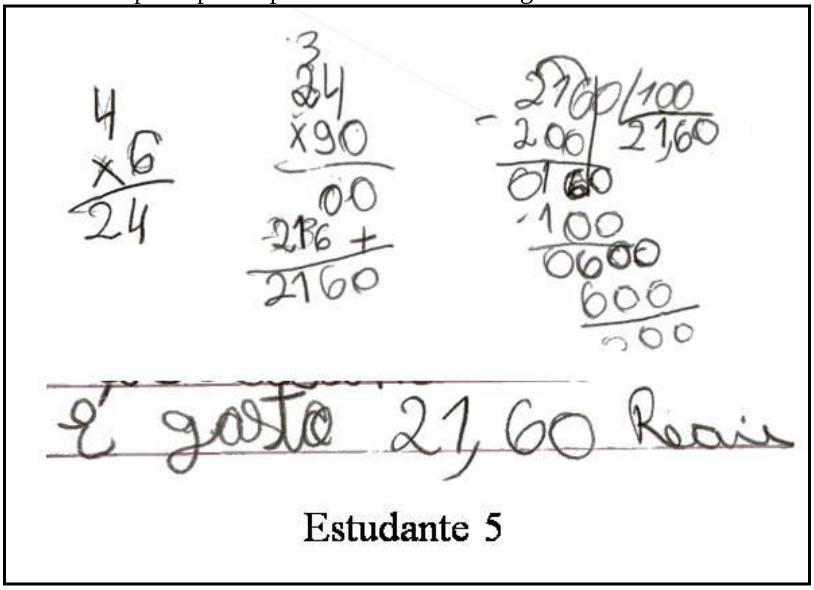
Segundo informações do site da Secretaria de Saúde do Estado do Paraná, um sache custa menos que 30 centavos, então, para efeito dos cálculos, os estudantes concordaram em utilizar esse valor como sendo 30 centavos, encontrando que por dia de higienização são gastos 90 centavos (Figura 78).

Figura 78 – Gastos com flúor em um dia de higienização

<table>
<tr><td rowspan="2">
(Estudante 5)</td><td></td></tr>
<tr><td>Para um dia de bochecho é gasto 90 centavos
(Estudante 28)</td></tr>
</table>

Como os saches de flúor são enviados à escola a cada 6 meses pela Secretaria Estadual de Saúde e a higienização é feita uma vez por semana, eles calcularam quantos dias de higienização há no semestre por meio da multiplicação 6 × 4 – considerando que cada mês possui 4 sextas-feiras –, logo, em 6 meses há aproximadamente 24 dias de higienização e, portanto, são gastos com flúor, nessa escola, 24 × 90 = 2160 centavos, ou seja, R$ 21, 90 (Figura 79).

Figura 79 – Resposta para o problema referente aos gastos com o flúor nessa escola



Nesta situação, em particular, os estudantes não construíram um modelo matemático de forma explícita, esse é revelado em suas discussões e em seus registros, por meio da sequência de operações que realizaram para solucionar o problema, desde as operações utilizadas na busca pela quantidade de saches, de dias de higienização em um semestre e pelo valor gasto com esses saches de flúor.

4.1.5.2 Análise da Atividade

Essa atividade seguiu um rumo distinto das demais, o tema que foi escolhido pelos estudantes com a ajuda do professor, faz referência a uma das práticas cotidianas escolares dos estudantes, contribuindo além do estudo de conteúdos matemáticos, a conscientização e o esclarecimento de dúvidas em relação à higienização bucal com o flúor.

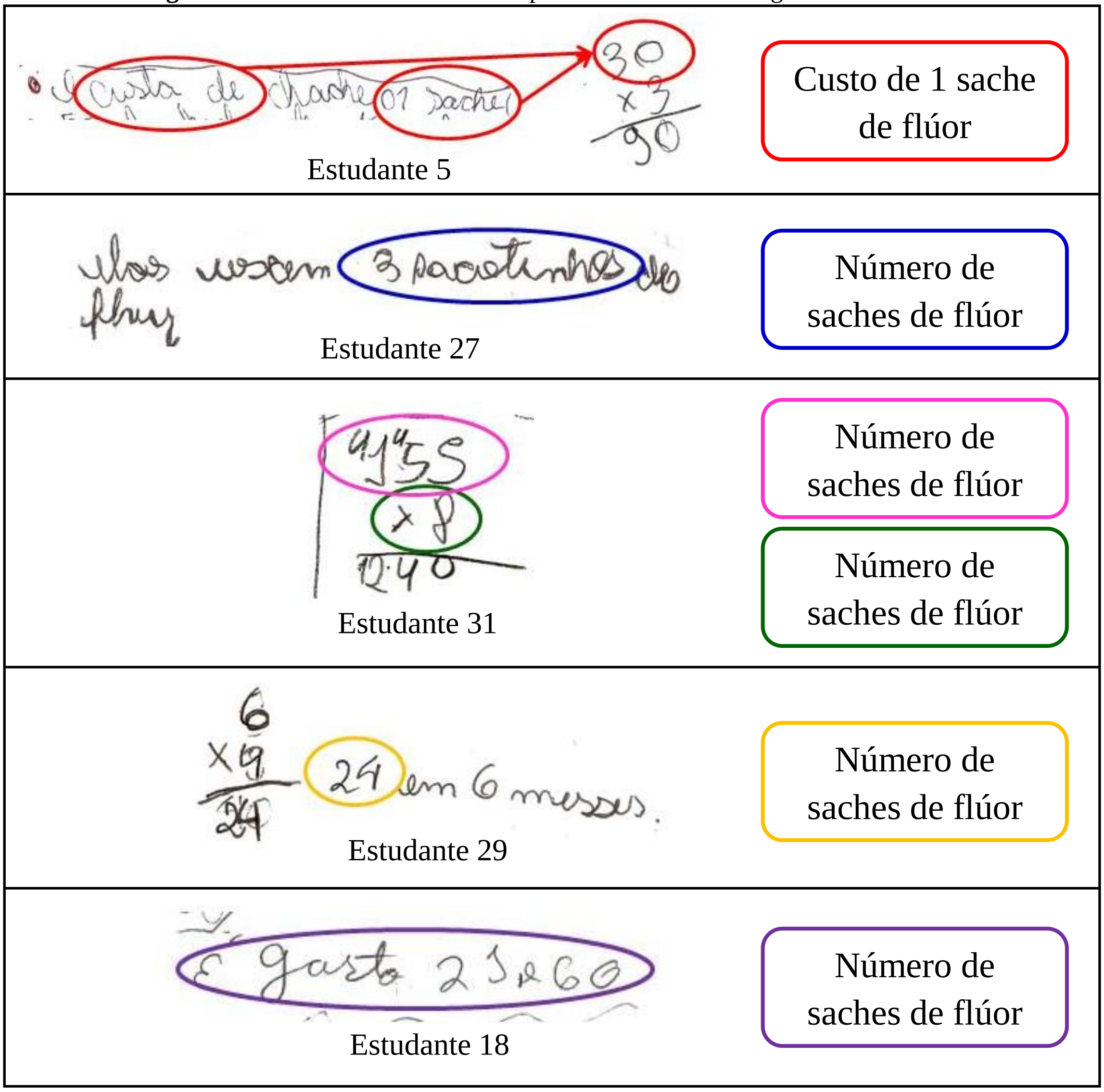
Os conteúdos matemáticos abordados durante o desenvolvimento dessa atividade giraram em torno das quatro operações elementares da Matemática, adições, subtrações e, de modo especial, as multiplicações e divisões, contemplando o conjunto dos Números Naturais e dos Números Racionais, em particular, aqueles representados na forma decimal. Além disso, envolveu algumas noções do sistema monetário brasileiro.

Para o estudo dos gastos com o flúor, os estudantes tiveram, em primeiro lugar, que inserir-se no jogo de linguagem natural da situação, conhecer informações, familiarizar-se com o tema, assim como sugere a primeira etapa do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, a inteiração. Nesta etapa, a linguagem natural prevaleceu, mesmo com diversas informações numéricas, sejam elas obtidas na internet, ou por meio da entrevista com a diretora.

A mudança para o jogo de linguagem da Matemática vem com a segunda fase, da matematização, onde são selecionadas as variáveis, formuladas as hipóteses e realizadas as simplificações necessárias, preparando o estudante para o uso da linguagem matemática, com seus símbolos e representações que lhes são característicos, na próxima etapa a resolução. No caso dessa forma de vida, envolvendo os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, essas ações foram realizadas, mas não de forma explícita. Nos registros dos estudantes encontramos indícios de quais variáveis eles estão utilizando, das hipóteses formuladas e das simplificações realizadas.

Às variáveis, por exemplo, que foram utilizadas nessa atividade, não foram atribuídas letras como é de costume em outros níveis de escolaridade, uma vez que os estudantes do 4º ano ainda não dominam o uso da linguagem algébrica. Nesse caso, a forma de vida envolvida na atividade foi determinante para o uso das representações. As variáveis foram apenas selecionadas, conforme as grandezas a que se referem se fizeram necessárias na resolução. Sob essa perspectiva, os estudantes utilizaram a capacidade de um copinho – no qual é distribuída a solução com flúor aos estudantes –, o número de estudantes da escola, o número de saches utilizados em um dia de higienização, o número de dias em um semestre que há a higienização, o custo de um sache de flúor e os gastos com o flúor, que estavam procurando. Buscamos na Figura 80 apresentar os registros dos estudantes que nos dão indícios para inferir que foram essas as variáveis selecionadas.

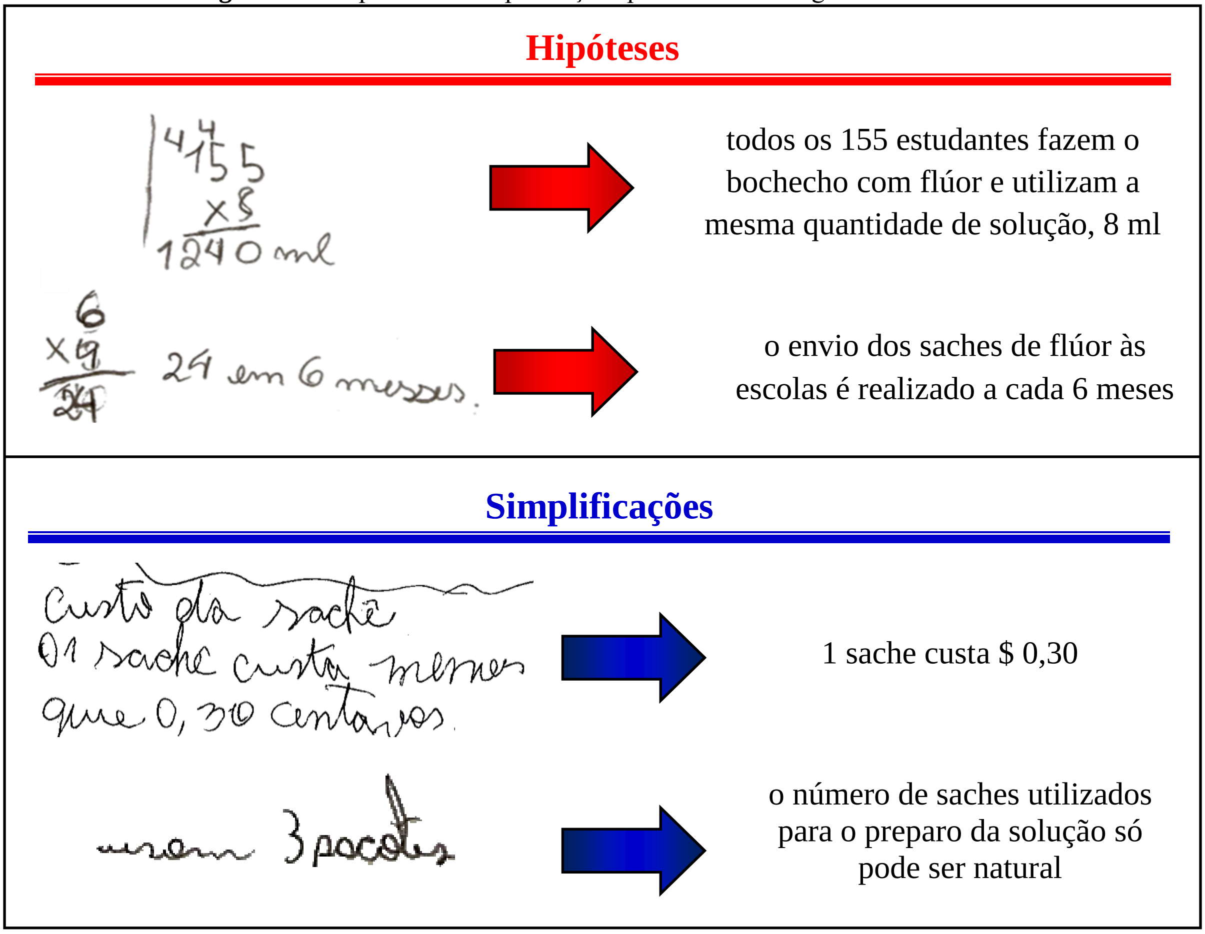
Figura 80 – Variáveis envolvidas no problema referente aos gastos com o flúor



Cabe ressaltar que a transição entre a linguagem natural do fenômeno para a linguagem matemática, realizada durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática nem sempre é realizada de forma imediata, devido à complexidade dos fenômenos que se pode investigar, ficando muitas vezes condicionadas a hipóteses e simplificações. No caso da atividade referente aos gastos com o flúor, as hipóteses formuladas pelos foram: todos os 155 estudantes fazem o bochecho com flúor e utilizam a mesma quantidade de solução, 8 ml – com essa hipótese foram desconsideradas as faltas dos estudantes no dia da higienização – e o envio dos saches de flúor às escolas é realizado a cada

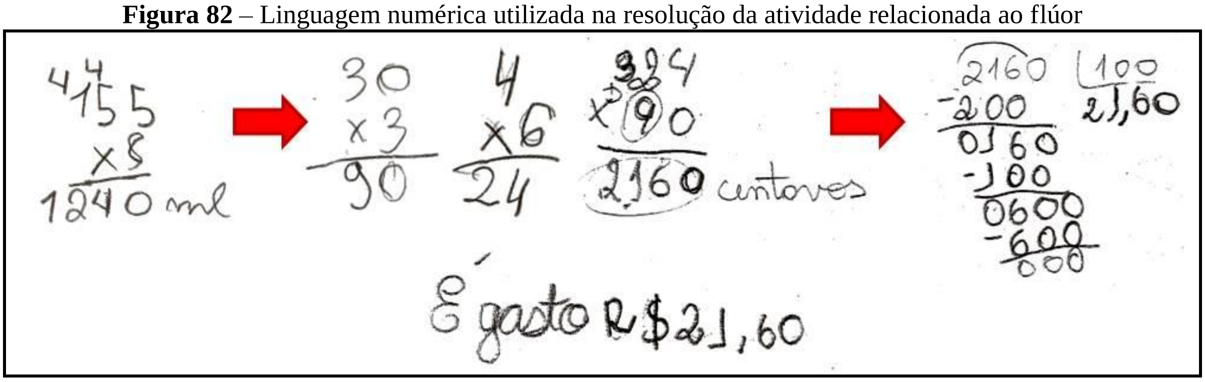
6 meses. A partir dessas hipóteses as seguintes simplificações foram realizadas: 1 sache custa R$ 0,30, nem mais, nem menos, e não podem ser utilizadas frações dos saches, ou seja, o número de saches utilizados para o preparo da solução só pode ser natural, 1, 2, 3, etc. Como essas ações não são realizadas explicitamente pelos estudantes, na Figura 81 apontamos os registros dos estudantes que indicam as hipóteses assumidas e as simplificações realizadas.

Figura 81 – Hipóteses e Simplificações para a atividade ‘gastos com o flúor’



Essas ações conduziram os estudantes ao uso de uma linguagem matemática, essencialmente expressa por meio de registros numéricos (Figura 82), que resultou em uma solução para o problema proposto.

Figura 82 – Linguagem numérica utilizada na resolução da atividade relacionada ao flúor



O modelo matemático para a situação, apesar de não explicitado pelos estudantes, pode ser obtido a partir da explicação das contas realizadas pelos estudantes, podendo ser expresso – a partir da linguagem numérica utilizada pelos estudantes do 4º ano – por meio de uma linguagem natural, por exemplo:

Primeiro deve-se encontrar a quantidade de solução de flúor que deve ser preparada para cada dia de higienização, de acordo com o número de estudantes da escola e a quantidade de solução entregue a cada um deles, para isto, basta multiplicar esses dois valores. Esse produto indicará quantos saches serão necessários em um dia de higienização, pois se sabe que a cada 500 ml de água se utiliza 1 sache de flúor para preparar a solução. Para conhecer o gasto com o flúor em um dia, devemos multiplicar o número de saches necessário pelo custo de um sache e para conhecer o gasto com o flúor na escola multiplica-se o gasto de um dia pelo número de dias de higienização em um semestre, período que a Secretaria Estadual de Saúde leva para enviar os saches de flúor às escolas.

Como podemos observar, expressar esse modelo matemático em linguagem natural é um tanto trabalhoso. Contudo, essa não é a única linguagem que pode ser utilizada para expressar esse modelo matemático, podemos também fazer o uso da linguagem algébrica, gráfica ou tabular, por exemplo. Na Figura 83, apresentamos um possível modelo matemático para a situação do flúor, fazendo uso da linguagem algébrica.

Figura 83 – Uso da linguagem algébrica para expressar o modelo matemático da situação referente ao flúor

$$G = S \times P \times D$$

Sendo:
G gastos com o flúor
S número de saches utilizados em um dia
P preço de um sache (R$ 0,30)
D número de dias de higienização com flúor

O número de saches **S** é determinado pela função menor inteiro:

$$S = \lceil C.N/500 \rceil$$

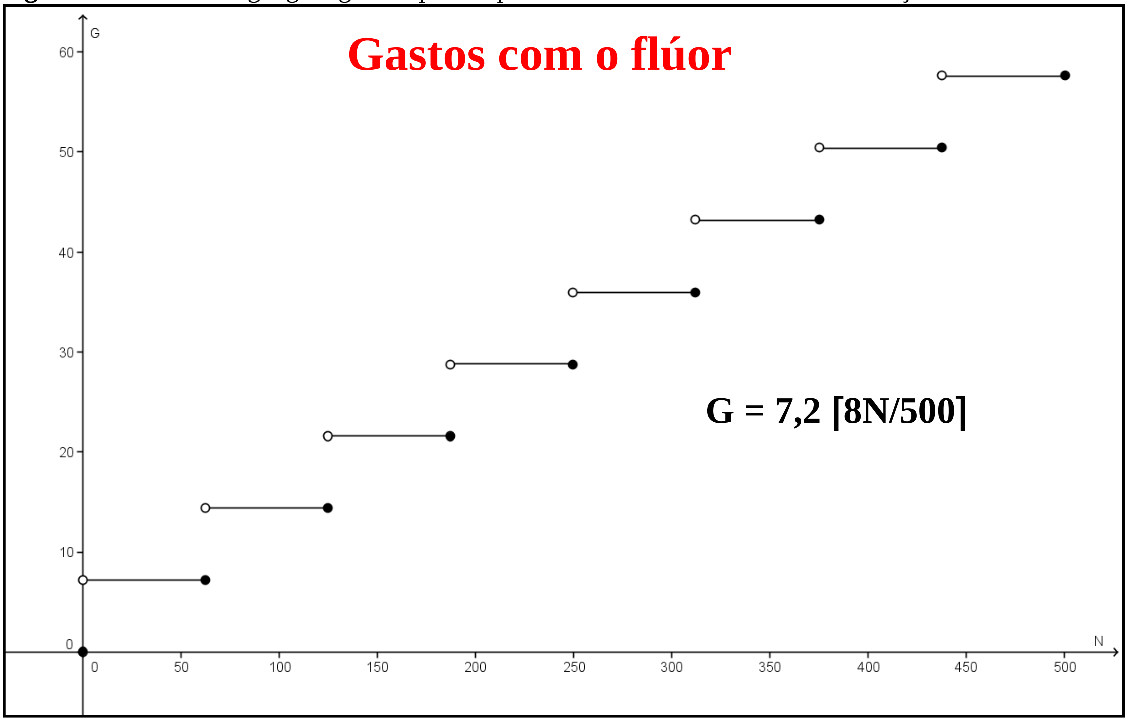
Sendo:
C capacidade do copinho (ml)
N número de estudantes

ou

$$G = \lceil C.N/500 \rceil \times P \times D$$

Como o número de saches é sempre inteiro, o valor dessa variável está condicionado a uma função que em Matemática chamamos de ‘função menor inteiro’ ou ‘função teto’, cujo valor em qualquer número x é o menor inteiro maior ou igual a x, sendo esta denotada por $\lceil x \rceil$. Na Figura 84, apresentamos como seria o gráfico dessa função, no caso da situação referente ao flúor. Para isso, fixamos os valores C = 8 ml, P = 0,30 e D = 24 dias de higienização; como consequência, temos G como variável dependente e N como variável independente.

Figura 84 – Uso da linguagem gráfica para expressar o modelo matemático da situação referente ao flúor



Para auxiliar na visualização dos valores provenientes da função menor inteiro que representa o gasto com o flúor, convertemos o registro gráfico da Figura 84, para o registro tabular, que apresentamos na Tabela 3.

Tabela 3 – Uso da linguagem tabular para expressar o modelo matemático da situação referente ao flúor

Número de estudantes - N	**Gasto com o flúor (em R$) - G**
0	0,00
0 —| 62,5	7,20
62,5 —| 125	14,40
125 —| 187,5	21,60
187,5 —| 250	28,80
250 —| 312,5	36,00
312,5 —| 375	73,20
375 —| 437,5	50,40
437,5 —| 500	57,60
...	...

O que possibilita o uso dessas diferentes representações e, por conseguinte, diferentes linguagens, são as semelhanças existentes entre elas. Vejamos alguns exemplos dessas semelhanças, para isso, vamos comparar a linguagem natural com as demais.

A linguagem natural assume um papel de indicar quais operações – linguagem numérica – podem ser feitas pelos estudantes para resolver o problema. A linguagem algébrica mantém esse papel, contudo, são utilizados símbolos matemáticos ao invés de palavras. Essas três linguagens resultam nos valores numéricos que são apresentados pelas linguagens gráfica e tabular, uma vez que nessas duas últimas, a visualização desses valores é de forma imediata, ao contrário das anteriores. Como podemos observar existem semelhanças que condizem mais com umas linguagens do que outras, formando desta maneira, uma complexa rede de semelhanças, que entrelaça e permeia as representações constituintes dessas diferentes linguagens. A essas semelhanças, Wittgenstein convencionou chamar de semelhanças de família.

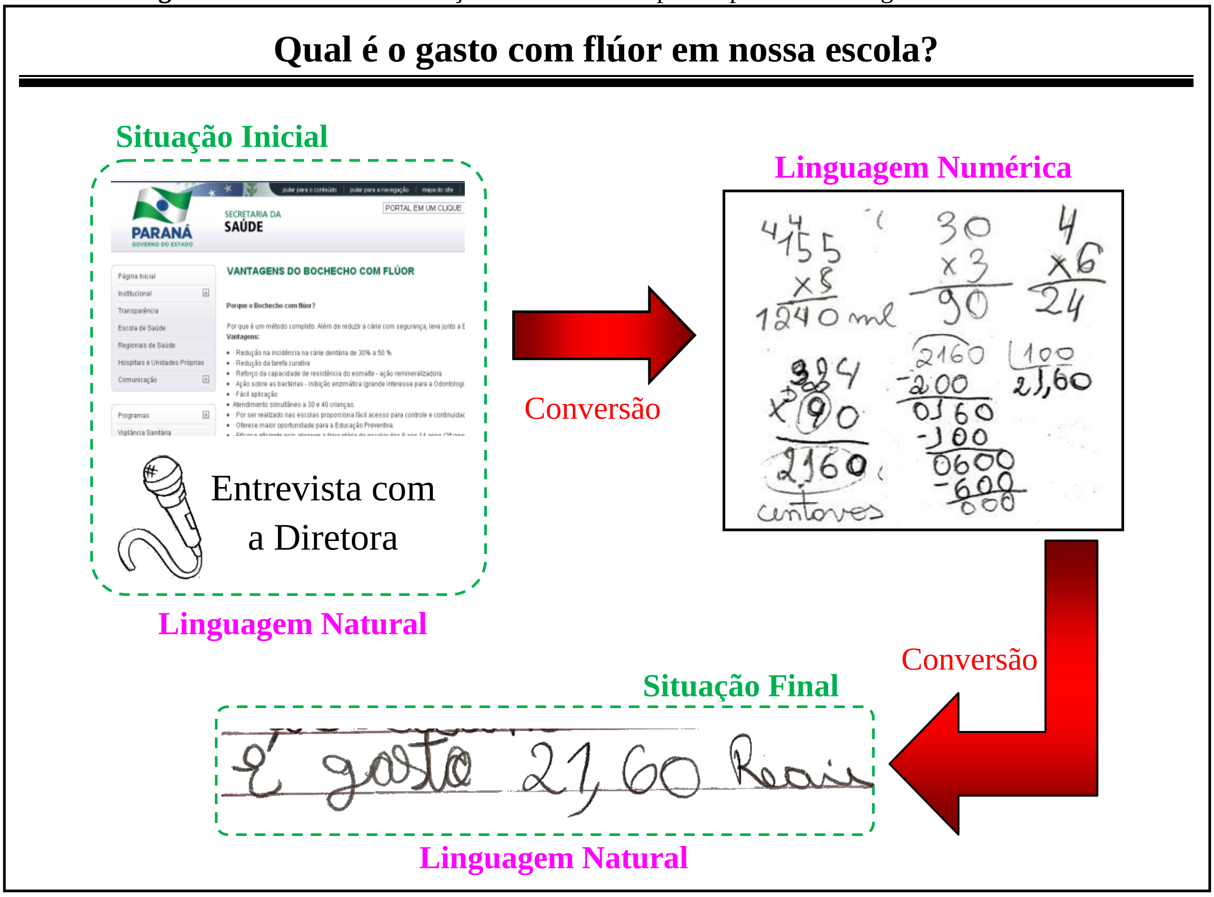
De fato, não esperávamos que os estudantes conseguissem utilizar tais representações – algébrica, gráfica, tabular –, uma vez que a função menor inteiro não é conteúdo dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Contudo, tal fato não impediu que os estudantes encontrassem uma forma de proceder e encontrar uma solução para o problema proposto para investigação; no caso dessa atividade eles recorreram, especialmente, ao uso de uma linguagem numérica, realizando operações de multiplicação e divisão. Um estudante do Ensino Médio, por sua vez, poderia optar pelo uso de uma linguagem algébrica, gráfica ou outra qualquer.

Não há uma linguagem que mereça ser privilegiada em relação às demais, o que determinará o uso é a forma de vida envolvida, de acordo com o contexto em que se encontra.

Nessa perspectiva, ao olhar para as operações realizadas pelos estudantes nessa atividade (Figura 82), podemos inferir que apesar de não haver uma intencionalidade, por parte deles, em expressar um modelo matemático, as operações realizadas não deixam de ser um modelo para situações semelhantes a essas, como por exemplo, para calcular o gasto com o flúor em outra escola qualquer, ou, o gasto com o flúor em todas as escolas do Estado do Paraná.

Em síntese, a atividade ‘Gastos com o flúor’ pode ser descrita em termos dos elementos que apresentamos no esquema da Figura 85.

Figura 85 – Síntese da resolução dos estudantes para o problema dos gastos com o flúor



Os registros dos estudantes revelam que eles partiram do uso de uma linguagem natural, condizente com a situação eleita para estudo (situação inicial), e seguiram em direção do uso de uma linguagem matemática (situação final). Para isso, eles converteram as representações em linguagem natural para a linguagem numérica, por meio da formulação de hipóteses, seleção de variáveis e algumas simplificações. Com o uso da linguagem numérica eles obtiveram a resposta para o problema proposto, cuja representação foi convertida para a linguagem natural, para poder ser interpretada sob a ótica da situação problema.

4.2 UMA ANÁLISE GLOBAL: O QUE NOS MOSTRAM AS ATIVIDADES?

Para um olhar global sobre as atividades, pensamos ser necessário recordar o objetivo desta pesquisa, que consiste em investigar os usos que estudantes de anos inicias do Ensino Fundamental fazem da linguagem para o desenvolvimento de modelos matemáticos. Vislumbrando cumprir este objetivo elencamos três questões que orientaram nossas análises: Como os estudantes de uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental representam seus modelos matemáticos? Quais jogos de linguagem são constituídos na produção e interpretação desses modelos? E por fim, qual o papel da linguagem em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por esses estudantes dos anos iniciais?

Ao olhar para cada atividade em particular, buscamos a partir dos dados coletados, em especial, dos registros dos estudantes, discutir aspectos condizentes com essas questões, cuja reflexão faz-se necessária nesse momento. Assim, apresentaremos para cada questão algumas reflexões que apontam para as respostas da problemática enunciada.

No que concerne à primeira questão “Como os estudantes de uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental representam seus modelos matemáticos?”, observamos nos registros dos estudantes o uso de diversas representações, como tabelas, quadros ou listas para a atividade ‘Tamanho de Anéis’, na qual os estudantes buscaram relacionar as variáveis ‘número de molde’ e ‘comprimento da circunferência do molde’; o uso de figuras para representar a sala de aula e o espaço destinado aos estudantes e o uso de registros numéricos para o cálculo dessa área na atividade ‘Espaço dos estudantes na sala de aula’; o uso de representações numéricas, bem como de uma descrição em linguagem natural na atividade ‘Medindo a beleza de uma pessoa’, na tentativa de explicitar a proporção áurea existente no corpo humano; o uso de uma sequência de operações numéricas que desencadearam em uma generalização escrita por meio de linguagem natural na atividade ‘Relação entre as moedas Dólar e Real’ e em uma resposta para a atividade ‘Os gastos com o flúor’.

Neste sentido, vemos que estudantes de anos iniciais do Ensino Fundamental utilizam representações que se fundamentam especialmente na linguagem conhecida por eles, a linguagem natural e a linguagem numérica, todavia, os temas propostos e escolhidos nas atividades de Modelagem Matemática requereram e suscitaram o uso de outras representações como, por exemplo, a tabular, como resposta na atividade ‘Tamanho de Anéis’, como modo de organizar os dados na atividade ‘Medindo a beleza de uma pessoa’ e como informação na atividade ‘Relação entre as moedas Dólar e Real’, ou ainda, como as figuras, utilizadas para representar a área dos estudantes na atividade ‘Espaço dos estudantes na sala de aula’; além disso, o desenvolvimento dessas atividades forneceu-lhes indícios da existência de outras representações, como na atividade relacionada à beleza, que apresenta o Φ, como símbolo para representar o número áureo ou número de ouro.

Ao compararmos as representações utilizadas pelos estudantes do 4ª ano, que participaram desta pesquisa, com as representações que encontramos nos trabalhos referentes à Modelagem Matemática no âmbito dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que apontamos na seção 1.4 do capítulo 1, constatamos que os usos da linguagem observados são característicos dos estudantes desse nível de escolaridade, ou seja, da forma de vida inserida nesses contextos, que por sua vez, influencia na escolha das regras e gramática a ser utilizada, bem como nos usos das representações e, por conseguinte, da linguagem. Vejamos algumas relações entre as atividades apresentadas nesses trabalhos, presentes na literatura a respeito de Modelagem Matemática, com as atividades desenvolvidas pelos estudantes desta pesquisa.

Em praticamente todas as atividades, os estudantes apresentaram uma justificativa ou uma explicação em linguagem natural, que complementava o modelo matemático, quando esse não era representado essencialmente por meio dessa linguagem, ao passo que nos trabalhos das professoras do grupo Despmat, em geral, o modelo consistia na produção de um relatório com as reflexões e conclusões a respeito do estudo, essa linguagem também apareceu nos trabalhos de English e Watters (2004, 2005), nas cartas produzidas pelos estudantes para o “fazendeiro” e para o “comitê olímpico de natação”.

Observamos ainda o uso de registros tabulares, os quais estiveram presentes nas atividades ‘Tamanho de Anéis’, na qual os estudantes construíram uma tabela para relacionar o número do molde com a medida do dedo; na atividade ‘Medindo a beleza de uma pessoa’, em que os estudantes utilizaram uma tabela para organizar suas medidas e orientar as divisões na busca por um padrão, nesse caso, o número de ouro; e na atividade ‘Relação entre as moedas Dólar e Real’, cujas informações relacionadas ao câmbio entre essas moedas foram disponibilizadas por meio de uma tabela. Esta representação também esteve presente nas atividades expostas por Sgrott-Rodrigues, Alves e Silva (2005), na qual os estudantes construíram uma tabela de custos referente aos materiais para realizar um festival de papagaios, e por Dias e Chaves (2009), associada à Pirataria e qualidade de vida, em que os estudantes organizaram em uma tabela os resultados de uma enquete realizada por eles e dirigida aos colegas e funcionários da escola a respeito do tema que estavam investigando.

Também observamos nos registros que analisamos, em particular, na atividade ‘Espaço dos estudantes na sala de aula’, algumas figuras, utilizadas para representar a área destinada aos estudantes na sala de aula e o número de estudantes que cabiam nesse espaço. O uso de figuras também foi constatado nos trabalhos de English e Watters (2004), para representar o plantio de cacau, e também no de Dias e Chaves (2009) representando os pontos positivos e negativos da pirataria.

Uma representação que não surgiu nas atividades desenvolvidas pelos estudantes participantes desta pesquisa, mas que esteve presente nos registros dos estudantes que encontramos na literatura, refere-se a uma linguagem gráfica, como aponta Dias e Chaves (2009), cujo trabalho envolveu a construção de um gráfico para expor a pesquisa realizada referente à pirataria; por Lopes e Azevedo (2010), ao representarem graficamente os gastos com a vacina contra a gripe H1N1; e por Carvalho, Oliveira e Luna (2012), ao confeccionarem um gráfico de barras pictórico – com a foto dos estudantes constituindo as barras do gráfico – a respeito dos usos de objetos de proteção solar, utilizando o lúdico para trabalhar com os estudantes da Educação Infantil.

E, por fim, observamos em todos os trabalhos o uso de registros numéricos, sendo essa linguagem na maioria das atividades essencial para a obtenção dos resultados e produção do modelo matemático, tanto nas atividades que analisamos nesta pesquisa, como naquelas da literatura que apontamos – desde os estudantes da Educação Infantil, na representação numérica de uma quantidade, até a realização das operações elementares da Matemática, um dos requisitos para a aprendizagem dos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Os usos dessas linguagens foram determinantes na elaboração dos modelos matemáticos produzidos, uma vez que o processo de produção do modelo matemático inicia desde o primeiro momento da atividade, quando os estudantes buscam ou selecionam dados para a resolução do problema proposto para investigação e realiza ações como a definição de variáveis, formulação de hipóteses e realização de simplificações, as quais encaminham para o uso de uma representação específica da Matemática e culmina na produção do modelo matemático. De modo particular, nesse nível de escolaridade, observamos tanto nas atividades relatadas na literatura, como nas atividades que abordamos aqui, que essas ações se dão na e pela linguagem, pois elas são realizadas na maioria dos casos de forma verbal, em linguagem natural.

Olhemos para a ação definição de variáveis, por exemplo, é comum em outros níveis de escolaridade o uso de uma linguagem algébrica para realizar essa ação, porém, essa ainda não é conhecida pelos estudantes dos anos iniciais, necessitando ser realizada de outra maneira, isto é, por meio da enunciação das variáveis. Observamos nas análises locais, que mesmo não definindo algebricamente, os estudantes tinham consciência de quais eram as variáveis que estavam em jogo: medida do dedo e número do anel, na atividade relativa ao anel; comprimento e largura (área), na atividade referente ao espaço dos estudantes na sala de aula; medidas das alturas, na atividade referente à beleza; valor do dólar e do real, na atividade referente ao câmbio entre essas moedas; e número de estudantes e gastos com o flúor na atividade referente aos gastos com a higienização com flúor na escola. Nas atividades que encontramos na literatura, também constatamos as mesmas condições para essa ação. Da mesma forma, há algumas diferenças quanto à formulação de hipóteses e realização de simplificações. Muitas vezes essas não eram expressas de forma objetiva, sendo admitidas de forma implícita e percebidas apenas no diálogo com os estudantes. Contudo, em seus registros encontramos evidências da realização dessas ações, as quais revelam a importância da linguagem no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.

Os usos da linguagem influenciaram de forma direta na constituição dos jogos de linguagem que emergiram durante as atividades de Modelagem, sendo esses usos determinantes na elaboração dos modelos matemáticos produzidos. Tais considerações nos conduzem a pensar na segunda questão “Quais jogos de linguagem são constituídos na produção e interpretação desses modelos?”.

Observamos a emergência de diversos jogos de linguagem ao longo do desenvolvimento das atividades, os quais encaminhavam para a produção dos modelos matemáticos. O primeiro deles, mais geral, está na mudança do jogo de linguagem em que se encontra o fenômeno para o jogo de linguagem da Matemática, pois a situação problema refere-se a temas não essencialmente matemáticos que recebem dos estudantes uma abordagem matemática, ou seja, há uma mudança da linguagem natural do fenômeno para uma linguagem matemática. Na atividade ‘Tamanho de Anéis’, por exemplo, os estudantes deixaram o jogo de linguagem dos vendedores de anéis e passaram a constituir seu próprio jogo de linguagem, com princípios e regras fundamentados na Matemática; na atividade

‘Espaço dos estudantes na sala de aula’, na qual os estudantes passam a refletir, por meio do jogo de linguagem da Matemática, uma questão que na prática eles encaram por meio de outro jogo de linguagem, o da experimentação, ou seja, eles só se atêm ao questionamento ‘cabem ou não mais estudantes na sala de aula?’, caso novos estudantes tenham que se instalar em sua sala, podendo acarretar na falta de espaço para acomodar a todos; na atividade ‘Medindo a beleza de uma pessoa’, na qual a beleza deixa de ser algo que não pode ser mensurável e toma como referência o número de ouro; na atividade ‘Relação entre as moedas Dólar e Real’ em que o câmbio Dólar-Real, característico da Economia, recebe uma abordagem matemática; e na atividade ‘Os gastos com o flúor’, em que o assunto, que antes interessava apenas a administração da escola, passa a integrar os interesses dos estudantes, graças à abordagem matemática realizada sobre a situação.

Podemos encarar a própria Matemática como um jogo de linguagem, dentro do qual, existem inúmeros outros jogos de linguagem, assim como podemos observar na seguinte colocação de Wittgenstein: “Chamarei de ‘jogo de linguagem’ também a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada” (WITTGENSTEIN, 2012, p. 19, § 7). Para ilustrar tal ideia, vamos pensar, por exemplo, nos usos da palavra número. Para efeitos de compreensão, vamos considerar o número no seu sentido mais amplo e assumir a existência do jogo de linguagem dos números. Mesmo no interior desse jogo de linguagem existem ainda outros jogos de linguagem que podem surgir, pois o número, em Matemática, pode ser utilizado para expressar uma quantidade, uma medida, uma posição, etc. e o que determinará o significado da palavra número é o contexto em que ocorre o emprego dessa palavra, ou seja, de acordo com o jogo de linguagem. Essa ideia pode ser estendida aos conjuntos numéricos, o significado da palavra número quando acompanhada do adjetivo ‘natural’, por exemplo, difere-se do significado da palavra número quando acompanhada do adjetivo ‘irracional’. Além disso, existe uma gama de classes que denominamos números: naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais, complexos, etc. cada significado é identificado no interior do jogo de linguagem e, em cada jogo de linguagem, a palavra número assume um significado que lhe é peculiar.

No desenrolar das atividades, jogos de linguagem mais específicos foram constituídos, em uma atitude de significação das palavras por meio de seu uso. Temos como exemplo o jogo de linguagem referente ao fecho de arame utilizado na atividade ‘Tamanho de Anéis’, que surgiu como resposta à necessidade dos estudantes de nomeá-lo e utilizá-lo como instrumento de medida, ou ainda, o jogo de linguagem da propriedade do Elemento Neutro, a qual os estudantes enunciaram em linguagem natural, respeitando as regras e princípios algébricos. Além desses, outros jogos de linguagem também foram constituídos como os relativos aos conjuntos numéricos, que emergiram a partir da necessidade de utilizar Números Racionais nas cinco atividades: para representar a medida do comprimento da circunferência do molde de anel e do comprimento e largura da área destinada aos estudantes na sala de aula, para aproximar a Números Racionais os Números Irracionais, até então não estudados pela turma, e para abordar a relação entre dois sistemas monetários diferentes, o Dólar e o Real; e os jogos de linguagem relativos às operações, nos quais os estudantes aprenderam o significado das nomenclaturas de cada operação, diferenciando soma como resultado da adição, diferença como resultado da subtração, produto como resultado da multiplicação e quociente como resultado da divisão.

Os jogos de linguagem constituídos durante o desenvolvimento das atividades, não garantem que em outras circunstâncias eles também emergirão, dado que um jogo de linguagem, conforme coloca Wittgenstein, depende diretamente do contexto e da forma de vida. Segundo o filósofo, inúmeros jogos de linguagem podem surgir, da mesma forma que há inúmeras espécies diferentes de emprego de signos e palavras, o autor também esclarece que "essa variedade não é algo fixo, dado de uma vez por todas; mas [...] novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem surgem, outros envelhecem e são esquecidos" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 27, § 23).

Todos esses jogos de linguagem constituídos no desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática suscitaram a produção dos modelos matemáticos, que também podem ser considerados diferentes jogos de linguagem, cuja linguagem envolvida varia conforme a representação utilizada. Tal observação nos conduz a terceira questão "Qual o papel da linguagem em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por esses estudantes dos anos iniciais?".

A linguagem está presente ao longo de todo o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, partindo da situação inicial, na qual se faz o uso de uma linguagem que está em consonância com o fenômeno sob investigação, influenciando na efetivação de ações como a definição de variáveis, formulação de hipóteses e realização de simplificações, e chegando à situação final, o modelo matemático, que é expresso por meio de uma linguagem matemática apropriada (símbolos e representações em linguagem natural, algébrica, gráfica, numérica, tabular, geométrica e figural).

Isso nos indica que os usos da linguagem orientam o movimento que caracteriza o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, possibilitando a transição da linguagem natural do fenômeno para a linguagem matemática e vice-versa. E como resposta, a Modelagem Matemática, fornece o respaldo necessário para a constituição de diferentes jogos de linguagem, segundo as regras que estão em jogo e de acordo com a forma de vida que está jogando, proporcionando a significação das palavras conforme os usos da linguagem nesses contextos.

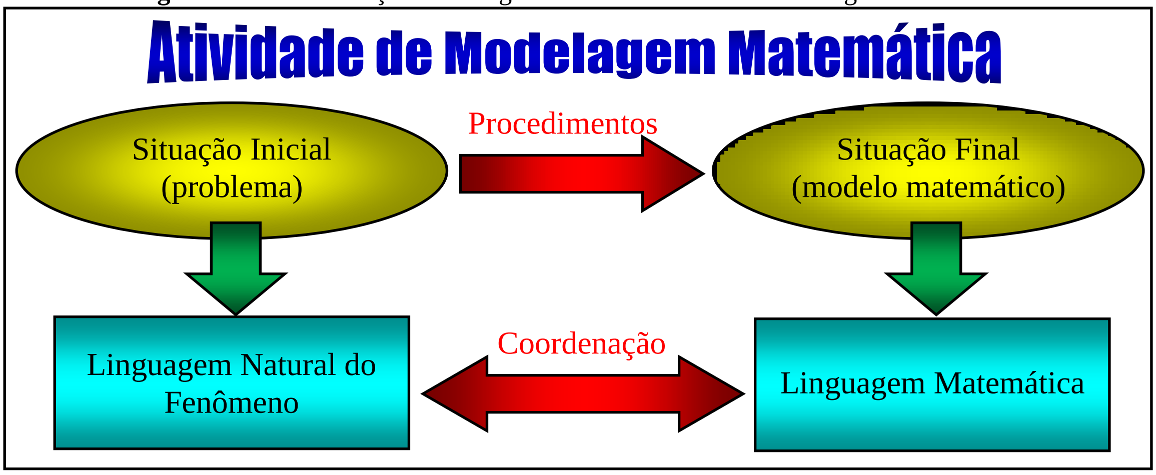
De modo geral, podemos dizer que a linguagem auxilia no uso de diferentes representações, que se configuram como o meio de acesso aos objetos matemáticos e se diferenciam por estarem imbricadas de linguagens que lhes são peculiares, mas com inúmeras semelhanças de família entre si; e como consequência, o uso dessas diferentes linguagens, presentes nas representações, fundamenta a produção dos modelos matemáticos nas atividades de Modelagem.

Diante dessas reflexões, vemos que os diferentes usos que os estudantes fizeram das palavras, símbolos e signos no desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática em sala de aula suscitaram a emergência de diferentes jogos de linguagem, os quais foram constituídos intencionalmente, ou não, pelos estudantes, como respostas às situações problema propostas para estudo. Os jogos de linguagem, como Wittgenstein convencionou chamá-los, vêm ao encontro de nossas necessidades de significação das palavras, e consequentemente, da conceitualização dos objetos matemáticos, que só é possível graças ao uso de representações.

Conforme Duval, para um mesmo objeto matemático pode haver diferentes representações, que se apresentam sob diferentes linguagens, ou seja, sob diferentes registros de representações semióticas, seja um registro gráfico, algébrico, numérico, linguagem natural, tabular, figural, geométrico, etc. Esse uso se dá segundo a forma de vida envolvida na atividade de representar e o que permite essas diferentes representações para um mesmo objeto são as semelhanças de família propostas por Wittgenstein, isto é, os diferentes jogos de linguagem em que essas representações são utilizadas formam uma família, com inúmeras semelhanças entre eles. Como observamos nas análises locais, essas semelhanças de família podem estar associadas às regras utilizadas em cada jogo de linguagem, que evocam a representação semiótica a ser utilizada. Essas regras de uso em cada jogo de linguagem se assemelham nos registros, sendo que duas representações, gráfica e algébrica, por exemplo, podem apresentar regras que em uma terceira representação, seja numérica, tabular, figural, linguagem natural, etc., podem permanecer, desaparecer ou serem substituídas por outras.

Para Duval (2011a, p. 15) “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas”. Nesse sentido, o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática vem ao encontro da fala de Duval, pois uma atividade de Modelagem consiste basicamente em selecionar ou formular um problema para estudo e, por meio dos procedimentos adequados, produzir um modelo matemático que representa uma solução para esse problema, portanto, envolve a coordenação de pelos menos dois registros: a linguagem natural do fenômeno, da qual se formula o problema, e a linguagem matemática, que fornece a estrutura necessária para a solução desse problema, ambas são articuladas pelo estudante, por meio dos jogos de linguagem, com o intuito de obter o modelo matemático, e que, consequentemente, pode resultar na aprendizagem em Matemática (Figura 86).

Figura 86 – Coordenação entre registros em atividades de Modelagem Matemática



Dessa coordenação emerge o uso de diferentes linguagens que se manifestam por meio dos diferentes registros de representações semióticas, evocados pela forma de vida envolvida para representar os objetos matemáticos em questão nas atividades de Modelagem e provenientes dos temas abordados, isto é, as representações são utilizadas conforme os jogos de linguagem constituídos na atividade.

Como consequência, os modelos matemáticos produzidos com o desenvolvimento dessas atividades contemplam o uso de diferentes representações, como tabelas, quadros ou listas na atividade ‘Tamanho de Anéis’, figuras na atividade ‘Espaço dos estudantes na sala de aula’, descrições verbais, provenientes de procedimentos matemáticos, na atividade ‘Medindo a beleza de uma pessoa’, ou, a generalização de uma sequência de operações indicando a regularidade existente entre elas, nas atividades 'Relação entre as moedas Dólar e Real' e 'Os gastos com o flúor'.

Os estudantes do 4º ano mostraram que não é porque ainda são estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental e não conhecem representações matemáticas mais 'sofisticadas', como uma equação diferencial, que não são capazes de solucionar problemas que envolvem fórmulas ou equações algébricas, por exemplo; não podemos esperar que esses tipos de representações apareçam nos modelos matemáticos dos estudantes, seus modelos são de outra natureza, com características específicas, expressos em outros jogos de linguagem e por meio de outras representações, as quais são determinadas de acordo com sua forma de vida e que para eles podem ser tão sofisticadas quanto às demais.

Portanto, o diferencial dos modelos matemáticos obtidos pelos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental em relação aos outros níveis de escolaridade está na linguagem utilizada por eles. O que permite essa abordagem diferenciada são os diferentes jogos de linguagem, a partir dos quais os estudantes podem, segundo as regras do jogo, estruturar matematicamente soluções para as situações propostas, por meio de signos, símbolos e representações peculiares a sua forma de vida, mas que guardam semelhanças de família com outras representações do objeto matemático, como mostram as análises locais das atividades.

Todas essas análises nos direcionam à discussão da questão 'O que é um modelo matemático para os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental?' ou 'O que caracteriza um modelo matemático neste nível de ensino?'. À luz da base teórica adotada e diante dos resultados apontados pelas análises, podemos dizer que um modelo matemático nada mais é do que a resposta de uma situação problema, uma estrutura construída para dar o suporte matemático necessário para solucionar um problema que pode não ser essencialmente matemático, como no caso dos problemas abordados na pesquisa referente a esta dissertação.

Nesta perspectiva, um modelo matemático pode ser entendido como uma estrutura, expressa por meio de uma linguagem matemática, que pode assumir diferentes representações, sejam elas, numérica, algébrica, gráfica, tabular, geométrica, figural ou linguagem natural. E o que, de fato, muda em relação aos demais níveis de escolaridade é a linguagem utilizada nessas representações.

Contudo, conforme coloca Duval (2011a), alguns registros podem ser mais privilegiados que outros e com base nos registros dos estudantes, parece que esse privilégio nos anos iniciais do Ensino Fundamental é atribuído aos registros numéricos e à linguagem natural, já que estes se referem às primeiras linguagens aprendidas pelos estudantes, e cujo uso é frequente nos jogos de linguagem emergentes dessa forma de vida.

Apesar disso, os estudantes fizeram o uso de diferentes linguagens, por meio das representações utilizadas nas atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas, como mencionamos anteriormente, e que foram evocadas a partir da constituição de diferentes jogos de linguagem, o que a partir da articulação entre os pressupostos teóricos de Duval e Wittgenstein podemos associar à aprendizagem de Matemática, resultante desses diferentes usos da linguagem nas atividades de Modelagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

CONCLUSÕES E REFLEXÕES A RESPEITO DA PESQUISA

Após percorrer toda essa jornada, faz-se necessário retomar as questões que nos levaram ao desenvolvimento desta pesquisa: Como os estudantes de uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental representam seus modelos matemáticos? Quais jogos de linguagem são constituídos na produção e interpretação desses modelos? E por fim, qual o papel da linguagem em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por esses estudantes dos anos iniciais?

Se no capítulo anterior, mostramos como as questões que constituem o problema de nossa pesquisa orientam nossas análises e discussões, agora chega o momento em que apresentamos nossas reflexões e conclusões a respeito dessas questões.

Não esperamos colocar um ponto final nesta discussão, pelo contrário, esta pesquisa é uma iniciativa para novos estudos relacionados à linguagem e à Modelagem Matemática no âmbito dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Neste momento, vislumbramos que ao fazer reflexões sobre essas questões, possamos contribuir para a compreensão dos usos que estudantes de anos iniciais do Ensino Fundamental fazem da linguagem para o desenvolvimento de modelos matemáticos.

Ao olharmos para a primeira questão 'Como os estudantes de uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental representam seus modelos matemáticos?', notamos que os estudantes, baseados nos princípios da Matemática, procuram sempre partir do uso de uma linguagem que lhes é conhecida, utilizam registros numéricos, em linguagem natural, e partindo destes, passam a utilizar registros tabulares, gráficos, figurais, geométricos e até mesmo algébricos – dependendo da forma de vida – suscitados de acordo com o contexto das situações problema propostas para estudo nas atividades de Modelagem Matemática. Portanto, com base nos registros dos estudantes que participaram desta pesquisa e daqueles que encontramos na literatura, podemos dizer que os estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental representam seus modelos matemáticos por meio da linguagem, mediante o uso de diferentes representações, seja por meio de uma linguagem natural, numérica, tabular, gráfica ou figural, as quais podem servir como ponte para o uso de outras linguagens, como a geométrica e a algébrica.

No que concerne à segunda questão ‘Quais jogos de linguagem são constituídos na produção e interpretação desses modelos?’, já o próprio Wittgenstein, no seu livro Investigações Filosóficas, ressaltava a infinidade e variedade de jogos de linguagem possíveis. Cada contexto de investigação pode constituir diferentes jogos de linguagem, que estão envolvidos em uma complexa rede de semelhanças, as quais ele denominou semelhanças de família, sendo nesse contexto, a forma de vida determinante na escolha das representações e, por sua vez, nos usos da linguagem. Na seção anterior, apontamos alguns exemplos de jogos de linguagem que emergiram durante as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental; esses jogos de linguagem emergiram a partir da mudança do contexto da situação inicial para a situação final, isto é, de uma situação não essencialmente matemática que recebe dos estudantes, os modeladores, uma abordagem por meio da Matemática. Além disso, em cada atividade, jogos de linguagem específicos emergiram, auxiliando os estudantes a lidarem com os conteúdos matemáticos, como no jogo de linguagem dos Números Racionais, no jogo da divisão e demais operações, nos jogos da área, perímetro e suas respectivas unidades de medidas, entre outros.

Ademais, os usos da linguagem podem se diferenciar até mesmo na própria Matemática, no âmbito dos anos iniciais do Ensino Fundamental, uma vez que estudantes do primeiro ano, por exemplo, estão em fase de alfabetização, conhecendo e reconhecendo letras, números, associando os símbolos ao que representa, ou seja, estão aprendendo os usos de uma linguagem que Wittgenstein chama de primitiva, em que ainda há relação entre o signo e o objeto a que se refere, contudo, trabalhando para que a linguagem se estenda aos seus mais diversificados usos, passando a ser constitutiva das atividades, assim como defende o filósofo em sua obra Investigações Filosóficas, a qual nos embasamos para a realização desta pesquisa. Nesse sentido, a Modelagem Matemática pode oferecer os subsídios necessários para os diferentes usos da linguagem, propiciando a emergência de jogos de linguagem que incitam os usos da linguagem em diferentes contextos, de maneira mais avançada, como ocorreu, por exemplo, no 4º ano, cujos estudantes estão mais familiarizados com as representações matemáticas do que os estudantes da situação anterior.

E no que diz respeito à terceira questão ‘Qual o papel da linguagem em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por esses estudantes dos anos iniciais?’ podemos dizer que os usos da linguagem foram fundamentais na realização da atividade, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos só é possível na e pela linguagem.

Observamos que são os jogos de linguagem que sustentam o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, a qual aborda por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático, ou seja, aborda por meio de uma linguagem matemática um problema que se apresenta na linguagem natural do fenômeno. A relação entre essas linguagens é mediada pelo uso de diferentes registros de representações semióticas, que nada mais são do que diferentes jogos de linguagem de um mesmo objeto, mas que guardam semelhanças de família entre si e são utilizadas de acordo com o contexto, ou seja, emergem da forma de vida envolvida na atividade de Modelagem Matemática.

Inserir-se em um novo jogo de linguagem pode significar aprender um novo conceito matemático, por isso, os estudantes devem ser colocados em contato com os diferentes registros de representações semióticas de um mesmo objeto matemático, bem como as transformações possíveis entre eles, para que o estudante possa se inteirar com o ambiente da Matemática e se adequar às regras já definidas e convencionadas pela forma de vida referente à comunidade matemática.

Conforme mostram as análises, o ambiente proporcionado por uma atividade de Modelagem Matemática pode ser apropriado para contemplar tais aspectos, propiciando a partir dos diferentes jogos de linguagem constituídos nas atividades o uso de registros numéricos, figurais, tabulares e linguagem natural, além de possibilitar o contato com os registros algébricos e geométricos. Daí a importância dos três referenciais teóricos adotados: Modelagem Matemática, Linguagem e Registros de Representações Semióticas, que em conjunto pode nos fornecer respostas para o ensino e aprendizagem em Matemática.

Nossas reflexões nos levam, portanto, a conjecturar que as atividades de Modelagem Matemática possibilitam a constituição de diferentes jogos de linguagem, dos quais emergem o uso de diferentes registros de representações semióticas, segundo as regras estabelecidas nesses jogos. As representações para os objetos matemáticos que surgem no desenvolvimento das atividades de Modelagem são determinadas pela forma de vida envolvida, neste caso, estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Neste sentido, a linguagem tem um papel fundamental nas atividades de Modelagem Matemática, o de subsidiar a construção dos modelos matemáticos; suscitando o uso de diferentes registros de representações semióticas em relação a um objeto matemático (semiósis) e estimulando a coordenação entre esses registros (noésis), que segundo Duval, propicia a aprendizagem em Matemática.

Em linhas gerais, observamos que a inserção de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, segundo os três momentos sugeridos por Almeida e Dias (2004), contribuiu para com a familiarização dos estudantes com atividades dessa natureza, desenvolvendo nos estudantes a habilidade de lidar com o uso de diferentes representações e com a transição entre diferentes linguagens, de modo geral, entre linguagem natural dos fenômenos e linguagem matemática.

O fato de a Matemática ter uma linguagem com uma gramática própria pode dificultar a compreensão dos estudantes em relação a alguns conceitos, especialmente estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que estão se inserindo no jogo de linguagem da Matemática, bem como se adaptando às regras e convenções nele envolvidas. Neste sentido, o uso de diferentes representações pode fornecer o arcabouço necessário para o aprendizado da linguagem matemática, cujo uso é propiciado pelos jogos de linguagem, propostos por Wittgenstein.

Wittgenstein revolucionou a filosofia da linguagem com sua proposta de jogos de linguagem, um olhar mais pragmático em direção aos usos que fazemos das palavras, e, por conseguinte, aos signos e representações. O uso de diferentes jogos de linguagem pode influenciar no uso de diferentes registros de representações semióticas, contribuindo com a aprendizagem, como defende por Duval. E, esse uso de diferentes representações está associado à constituição das estruturas utilizadas nos modelos matemáticos. Ou seja, o uso de diferentes jogos de linguagem, que reflete no uso de diferentes representações semióticas pode influenciar na produção de diferentes modelos matemáticos. Em suma, o que determina um modelo matemático é a linguagem utilizada em sua estrutura. Olhar para a linguagem nas atividades de Modelagem Matemática revelou o movimento que traduz o seu desenvolvimento, desvendando os diferentes usos que os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental fazem da linguagem nesse contexto e suas implicações no âmbito da Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, FE/Unicamp, Campinas, v. 18, Número Temático, p. 379-406, 2010.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; BRITO, Dirceu dos Santos. Atividades de Modelagem Matemática: Que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência & Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; DIAS, Michele Regiane. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Pessôa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012. 157 p.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Discussões sobre "como fazer" Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; ARAÚJO, Jussara de Loiola; BISOGNIN, Eleni (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011. p. 19-43.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos**. 2002. 173 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Paulista, Rio Claro, 2002.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim, v. 27, n. 98, p. 65-74, jun. 2003.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. A "contextualização" e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais**... Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. A prática dos alunos no ambiente de modelagem matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizeti; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Org.). **Modelagem matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 161-174.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Santa Catarina, v. 2, n. 2, p. 69-85, jul. 2009.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004. 389 p.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. 3. ed. Lisboa: Edições 70, 2004. 223 p.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BLUM, Werner. Mathematical Modelling in Mathematics Education and Instruction. In: BREITEIG, Trygve; HUNTLEY, Ian; KAISER, Gabriele – Messmer (Ed.). **Teaching and Learning Mathematics in Context**. London: Ellis Horwood Limited, 1993. p. 3-14.

BLUM, Werner. Can Modelling be taught and learnt? Some answers from Empirical Research. In: KAISER, Gabriele; BLUM, Werner; BORROMEO FERRI, Rita; STILLMN, Gloria (Eds.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. ICTMA 14. New York: Springer, 2011. p. 15-30.

BLUM, Werner; BORROMEO FERRI, Rita. Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994. Tradução de: Qualitative Research for Education: an introduction to theory and methods.

BORROMEO FERRI, Rita. Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. **Educação e Matemática**: Revista da Associação de Professores de Matemática, Lisboa, n. 110, p. 19-25, nov./dez. 2010.

BROWN, Tony. **Mathematics Education and Language**: Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism. 2. ed. Kluwer Academic Publishers: London, 2001.

BURAK, Dionísio. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. 1992. 460 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

CARVALHO, Luana Souza da Silva; OLIVEIRA, Luana Alves, LUNA, Ana Virginia de Almeida. Modelagem Matemática na Educação Infantil: um estudo sobre a proteção solar com crianças de três anos. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2012, Fortaleza. **Anais**... Fortaleza: FA7, 2012.

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque; SANTO, Adilson Oliveira do Espírito. Modelagem Matemática: uma concepção e várias possibilidades. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, Ano 21, n. 30, p. 149-161, 2008.

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque; SANTO, Adilson Oliveira do Espírito. Possibilidades para Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; ARAÚJO, Jussara de Loiola; BISOGNIN, Eleni (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011. p.161-180.

CIFUENTES, José Carlos; NEGRELLI, Leônia Gabardo. O processo de Modelagem Matemática e a discretização de modelos contínuos como recurso de criação didática. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; ARAÚJO, Jussara de Loiola; BISOGNIN, Eleni (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011. p. 123-140.

CONDÉ, Mauro Lúcio Leitão. Dos Limites da Filosofia. In: Maria Clara Dias. (Org.). **O Que é Filosofia**. Ouro Preto, 1995.

CONDÉ, Mauro Lúcio Leitão, Nietzsche e Wittgenstein: Semelhanças de Família. In: Olímpio José Pimenta Neto; Miguel Angel de Barrenechea. (Org.). **Assim Falou Nitzsche**. Rio de Janeiro, 1999.

D’AMBRÓSIO, Ubiratan. Mathematical Modelling: Cognitive, Pedagogical, Historical and Political Dimensions. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 89-98, 2009.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008. p. 167-188.

DIAS, Josete Leal; CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque. Diálogos com/na Modelagem Matemática nas Séries Iniciais. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2009, Londrina. **Anais**... Londrina: UEL, 2009.

DIAS, Josete Leal; SMITH, Silvia Danielle da Cunha. Atividades em Modelagem Matemática como princípio gerador de um ambiente de aprendizagem nas Séries Iniciais. In: ENCONTRO PARAENSE DE MODELAGEM MATEMÁTICA, 3., 2010, Marabá. **Anais**... Marabá: IEMCI/UFPA, 2010.

DIAS, Marisa da Silva; MORETTI, Vanessa Dias. **Números e operações**: elementos lógico-históricos para atividade de ensino. Curitiba: Ibpex, 2011. (Série Matemática em sala de aula).

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009, 120 p. (Coleção Contexto da Ciência).

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011a. 160 p. (Coleção Papirus Educação).

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011b. 160 p. Tradução de: Voir et enseigner les mathematiques autrement.

ENGLISH, Lyn D.; WATTERS, James J. Mathematical Modelling with young children. In: HØINES, Johnsen; FUGLESTAD, Anne Berit (Eds.). **The 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Bergen, v. 2, p. 335-342, 2004.

ENGLISH, Lyn D.; WATTERS, James J. Mathematical Modelling with 9-year-olds. In: CHICK, Helen L.; VINCENT, Jill L (Eds.). **Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Melbourne, v. 2, p. 297-304, 2005.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário Wittgenstein**. Tradução de Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998. 398 p. (Dicionários de Filósofos). Tradução de: AWittgenstein dictionary.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, Série 3, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul.-dez. 2004.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cadernos Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 75-96, jan./abr. 2008.

KLÜBER, Tiago Emanuel; BURAK, Dionísio. **Bases epistemológicas e implicações para práticas de Modelagem Matemática em sala de aula**. In: SEMIÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., Brasília. **Anais**... Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009.

LESH, Richard; CARMONA, Guadalupe; HJALMARSON, Margret. Working group: models and modeling. In: PME-NA, Mérida. **Proceedings**... Mérida, 2006, p. 92-95.

LOPES, Rosane Prado; AZEVEDO, Josiene Ramos de Lima Azevedo. Modelagem Matemática nas Séries Iniciais: os desafios do trabalho com a Modelagem na sala de aula. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010.

LUNA, Ana Virginia de Almeida. Modelagem Matemática nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental: um estudo de caso no 1º ciclo. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., Santiago de Querétaro. **Anais**... Santiago de Querétaro: Comitê Interamericano de Educação Matemática, 2007.

LUNA, Ana Virginia de Almeida; ALVES, Josélia. Modelagem Matemática: as interações discursivas de crianças da 4ª série a partir de um estudo sobre anorexia. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2007, Ouro Preto. **Anais**... Ouro Preto: UFOP, 2007, p. 855-876.

LUNA, Ana Virginia de Almeida; SANTIAGO, Ana Rita Cerqueira Melo. Modelagem Matemática: um estudo sobre a mudança dos planos de telefonia. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007.

LUNA, Ana Virginia de Almeida; SOUZA, Elizabeth Gomes; LIMA, Larissa Borges de Souza. Textos sobre Matemática em uma prática pedagógica no ambiente de modelagem nos anos iniciais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Petrópolis. **Anais**... Petrópolis: SBEM, 2012.

LUNA, Ana Virginia de Almeida; SOUZA, Elizabeth Gomes; SANTIAGO, Ana Rita Cerqueira Melo. A Modelagem Matemática nas Séries Iniciais: o germém da criticidade, **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Santa Catarina, v. 2, n. 2, p. 135-157, jul. 2009.

MORA, J. Ferrater. **Dicionário de Filosofia, Tomo III (K-P)**. 2. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2004. 2424 p.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. A Modelagem como um Ambiente de Aprendizagem para a Conversão do Conhecimento Matemático. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 26, n. 42A, p. 261-290, abr. 2012.

SANTIAGO, Ana Rita Cerqueira Melo; SANTOS, Anne Jackeline Barbosa dos; LUNA, Ana Virginia de Almeida. Modelagem Matemática: um estudo sobre os métodos contraceptivos numa abordagem transdisciplinar. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010.

SANTOS, Vinício de Macedo. Linguagens e comunicação na aula de Matemática. In: NACARATO, Adair Mendes; LOPES, Celi Espasandin. (Org.). **Escritas e Leituras na Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

SGROTT-RODRIGUES, Ana Maria; ALVES, Gleiciane; SILVA, Francisco Hermes Santos da. Educação Matemática: caminhos de criatividade para as Séries Iniciais. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 3., 2005, Canoas. **Anais**... Canoas, FAPERGS, 2005.

SILVEIRA, Everaldo. **Modelagem Matemática em Educação no Brasil**: entendendo o universo de teses e dissertações. 2007. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. **A Matemática na Educação Infantil**: A Teoria das inteligências múltiplas na prática escolar. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000. 205 p.

SOUZA, Larissa Borges de; SANTIAGO, Ana Rita Cerqueira Melo; LUNA, Ana Virginia de Almeida. Modelagem Matemática nos Anos Iniciais: uma análise sobre o comportamento dos motoristas no trânsito numa perspectiva transdisciplinar. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2011, Belém. **Anais**... Belém: UFPA, 2011.

STILLMAN, Gloria. The emperor’s new clothes? Teaching and assessment of mathematical applications at the senior secondary level. In: GALBRAITH, Peter; et. al. (Eds). **Mathematical modelling: Teaching and assessment in a technology-rich world**. West Sussex: Horwood Publishing Ltd., 1998, p. 243-254.

VILELA, Denise Silva; MENDES, Jackeline Rodrigues. A linguagem como eixo da pesquisa em educação matemática: contribuições da filosofia e dos estudos do discurso. Zetetiké, FE/Unicamp, Campinas, v. 19, n. 36, jul./dez. 2011.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch. **A formação social da mente**. 4. ed. Tradução de José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. São Paulo: Editora Martins Fontes, 1991. Tradução de: The social formation of mind.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch. **Pensamento e Linguagem**. 4. ed. Tradução de Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Editora Martins Fontes, 2008. Tradução de: Thought and Language.

WITTGENSTEIN, Ludwig Josef Johann. **Observações Filosóficas**. Tradução de Adail Sobral e Marisa Stela Gonçalves. São Paulo: Edições Loyola, 2005. 299 p. Tradução de: Philosophical Remarks.

WITTGENSTEIN, Ludwig Josef Johann. **Investigações Filosóficas**. 7. ed. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Editora Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2012. 350 p. (Coleção Pensamento Humano). Tradução de: Philosophische Untersuchungen.

APÊNDICES

APÊNDICE A – FOLHA COM INFORMAÇÕES DA ATIVIDADE ‘TAMANHO DE ANÉIS’

Estudantes: ____

____

____

____

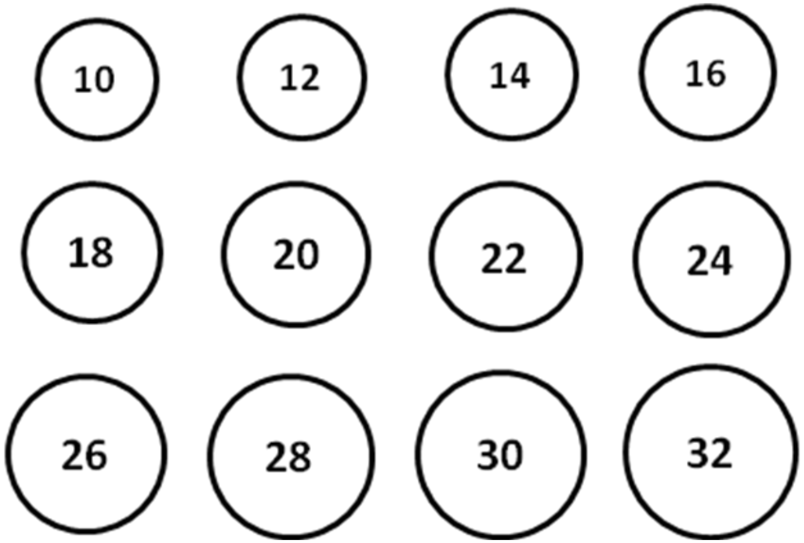
Você já usou ou viu alguém usar um anel?

É comum observarmos no dia a dia o uso de vários acessórios, como brincos, anéis, pulseiras, colares, entre outros. Existem anéis de diferentes tamanhos, femininos ou masculinos.

Mas como saber qual é o tamanho de anel adequado para o seu dedo?

Existem moldes que permitem determinar o tamanho do seu anel. No Brasil a numeração dos anéis varia de 1 a 35, podendo também ser feitos sob medida. A diferença de um número de anel para outro é muito pequena, por isso muitos profissionais optam por trabalhar apenas com a numeração par ou com a ímpar.

MOLDES PARA OS TAMANHOS PARES DE ANÉIS

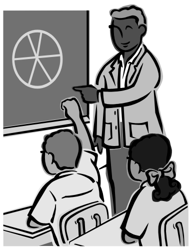


VAMOS ESTUDAR?

Como se determina o tamanho de um anel?

Qual é o número do anel adequado para o seu dedo?

APÊNDICE B – FOLHA COM INFORMAÇÕES DA ATIVIDADE 'ESPAÇO DOS ESTUDANTES NA SALA DE AULA'



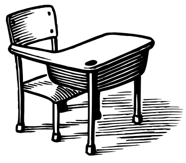
Estudantes: ____
____
____
____

Seu espaço na sala de aula

Uma sala de aula é ocupada por estudantes, pelo professor e por objetos que fazem parte do ambiente escolar, como cadeiras, carteiras e armários. Para que você permaneça em um ambiente mais agradável, existe uma lei que determina que em uma sala de aula cada estudante tem direito a uma área de 1 metro quadrado (m²).

VAMOS ESTUDAR...

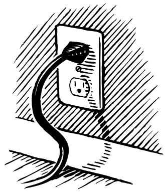
Quantos alunos cabem na sua sala de aula?



APÊNDICE C – FOLHA COM INFORMAÇÕES DA ATIVIDADE ‘ENERGIA ELÉTRICA’

Estudantes: ____

____



Todo mês chega a nossa casa uma fatura que mostra os nossos gastos com energia elétrica.

O valor cobrado depende de duas coisas:

- Quantidade de energia elétrica utilizada no mês, medida em quilowatts-hora (kWh);
- Valor da tarifa por kWh, determinada pela Companhia de Energia Elétrica de acordo com cada região.

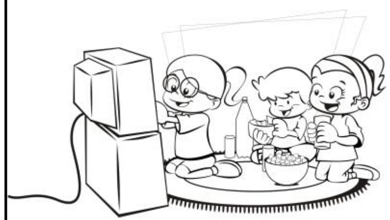
Esses dados podem ser encontrados em sua fatura de energia elétrica.

QUANTA ENERGIA ELÉTRICA É GASTA EM SUA CASA? E QUANTO SE PAGA POR ISSO?

VAMOS ESTUDAR...

Qual é o seu desenho favorito?

Quanta energia elétrica você gasta para assistir esse desenho? Quanto é pago por isso?



Quanto tempo você gasta para tomar banho?

Quanta energia elétrica você gasta? Quanto é pago por isso?

APÊNDICE D – FOLHA COM INFORMAÇÕES DA ATIVIDADE 'MEDINDO A BELEZA DE UMA PESSOA'

Estudantes: ______________________________

____

____

____

Φ

Pessoas famosas, como atores e modelos, geralmente são consideradas bonitas. Pense em uma pessoa famosa e que você acha bonita. Será que seu colega também acha essa pessoa bonita? Há casos, em que uma pessoa é bonita para você, mas não é bonita para seu colega. Com isso, podemos pensar sobre a seguinte questão:

Será que é possível medir a beleza de uma pessoa?

Nesta atividade, vocês deverão medir uns aos outros com uma fita métrica. Para isso, siga as indicações de medidas que devem ser realizadas para cada colega do grupo e que estão apresentadas no quadro (verso da folha). Anote os valores encontrados.

Na linha **QUOCIENTE**, vocês deverão efetuar a divisão da primeira medida pela segunda. Para esta tarefa vocês podem utilizar uma calculadora.

ESTUDANTES / MEDIDAS				
1ª) Da altura do seu corpo				
2ª) Do umbigo até o chão				
QUOCIENTE				
1ª) Do queixo até a raiz dos cabelos				
2ª) Do queixo até as sobrancelhas				
QUOCIENTE				

O QUE PODEMOS CONCLUIR COM OS RESULTADOS OBTIDOS?