



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

BÁRBARA NIVALDA PALHARINI ALVIM SOUSA

A MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM
MATEMÁTICA:
UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

Londrina
2017

BÁRBARA NIVALDA PALHARINI ALVIM SOUSA

A MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM
MATEMÁTICA:
UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para obtenção do Título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática..

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S725m Sousa, Bárbara Nivalda Palharini Alvim.

A Matemática em atividades de modelagem matemática: uma perspectiva wittgensteiniana / Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa. - Londrina, 2017.
316 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) -
Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2017.

Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3.
Matemática - Estudo e ensino - Tese. 4. Wittgenstein, Ludwig, 1889-1951 - Crítica
e interpretação - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade
Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-
Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

BÁRBARA NIVALDA PALHARINI ALVIM SOUSA

A MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM

MATEMÁTICA:

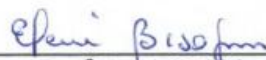
UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para obtenção do Título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática

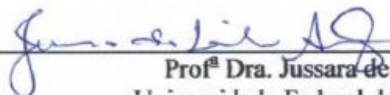
BANCA EXAMINADORA



Prof^ª Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Orientadora
Universidade Estadual de Londrina



Prof^ª Dra. Eleni Bisognin
Centro Universitário Franciscano
Santa Maria (PR)



Prof^ª Dra. Jussara de Loiola Araújo
Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte (MG)



Prof^ª Dra. Marisa Rosani de Abreu da Silveira
Universidade Federal do Pará
Belém (PA)



Prof^ª Dra. Simone Luccas
Universidade Estadual do Norte do Paraná
Cornélio Procópio (PR)

Londrina, 14 de março de 2017.

*A todos aqueles que posso chamar de família.
Em especial a Deus que até aqui me guiou.*

AGRADECIMENTOS

À Deus por guiar meus passos e me auxiliar, a cada dia, a ser uma pessoa melhor;

À minha família, por todos os momentos de dificuldade, de tristeza e de felicidade que, de algum modo, me impulsionaram a chegar até esse momento. Meus avós, meus pais, meus irmãos, meus tios e tias, meus primos e primas, vocês são especiais;

Ao Erick por todo amor e companheirismo, por optar sempre pela minha felicidade e pela minha saúde, você é e será sempre especial! E aos seus pais Fátima e Luís, que serão sempre minha família;

À minha orientadora Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida que com suas palavras sábias me fez refletir, me fez desconstruir posicionamentos e construir novos, que me mostrou com simples gestos como é orientar, como é pesquisar e como é ser amiga e companheira. Agradeço pelas horas de orientação, pela paciência, pela amizade, pelo carinho, pelo companheirismo e pela realização dessa pesquisa. Não há palavras para agradecer a confiança em mim depositada!

Às professoras Eleni Bisognin, Jussara de Loiola Araújo, Marisa Rosâni de Abreu da Silveira e Simone Luccas, por todas as contribuições que aprimoraram esse relatório de pesquisa.

Aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT). Neste grupo encontrei amigos que levarei para a vida, que me apoiaram e me auxiliaram a ser a pessoa que sou hoje, na academia e na vida. Com cada um de vocês eu aprendi algo, muitos de vocês acreditaram em mim, mesmo quando eu mesma não acreditava. Emerson, Ana Paula, Camila, Karina, Adriana, Cíntia, Daiany, Tiago, Dirceu, Henrique, Gustavo, Jeferson, Bianca, Ademir, Angela, Leandro, Rodolfo, Michele e Lourdes, a vocês, muito obrigada!

Aos meus amigos: Rudolph, um amigo pessoal, um companheiro de trabalho, alguém que tenho ao lado nos momentos bons e nos momentos difíceis; Emerson, meu irmãozinho de orientação, carinhoso, atencioso, que me auxiliou nessa caminhada, me ensinou e me motivou; Ana Paula, pela alegria, pelas palavras doces, pela companhia nos cafés, pelas

risadas, pelas confidencias; Gabriele, que a amizade criada no mestrado se mantenha sempre; Simone, mais que uma professora, uma amiga e uma inspiração; João, amigo chefe, companheiro. A todos vocês, obrigada por me fazer acreditar, pelo carinho, pela amizade, pelo auxílio, pelos abraços, pelos sorrisos, por me fazerem alguém melhor e mais feliz.

Aos meus alunos e ex-alunos, em especial aos alunos da UENP, Campus de Cornélio Procópio. Principalmente aos participantes dessa pesquisa, pela dedicação, pelo tempo dispensado, pelo carinho e por todos os momentos de aprendizado. Com vocês eu aprendi e aprendo a cada dia a ser uma profissional melhor. André, Ariel, Bianca, Cristiane, Edilaine, Josiane, Geovani, Hevyllyn, Lucimara, Naiara, Rafael e Thais, sem vocês essa pesquisa não seria possível, obrigada pelos momentos em aula, pelas aulas de sábado, pelas risadas, por acreditarem.

Aos amigos do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática (GEPIEEM), pelo acolhimento, pelo aprendizado. Em especial aos amigos queridos que as pesquisas me trouxeram: Bianca, pela amizade e pelo companheirismo, obrigada por tornar meus dias mais felizes; Ariel, pela inspiração, pelas boas ideias, que você continue inspirando outros professores em sua vida acadêmica e na vida; Jeferson, bom aluno, inteligente, desafiador, que você possa acreditar na Educação Matemática, em seus alunos e em dias melhores, que possa aprender sempre. A vocês e aos líderes do GEPIEEM, muito obrigada.

Ao Colegiado de Matemática da UENP, campus de Cornélio Procópio, pelo acolhimento, pelo carinho, pela confiança, por me auxiliarem sempre.

A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para realização dessa pesquisa.

Na linguagem, tocam-se expectativa e
realização.

Ludwig Wittgenstein

PALHARINI, Bárbara N. **A Matemática em atividades de modelagem matemática**: uma perspectiva wittgensteiniana. 2017. 316 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2017.

RESUMO

Nessa pesquisa buscamos investigar, sob uma perspectiva wittgensteiniana, o uso da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática. O estudo está fundamentado na Modelagem Matemática na Educação Matemática e tem como base filosófica os estudos de Ludwig Wittgenstein sobre linguagem e matemática. Para compor os dados empíricos da pesquisa, atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática nas disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias e de Introdução à Modelagem Matemática. O desenvolvimento da pesquisa, a coleta de dados e o encaminhamento da análise fundamentam a metodologia de pesquisa como qualitativa. Os dados foram coletados por meio de registros escritos, gravações em áudio e vídeo, questionários e entrevistas. A análise dos dados, coletados com treze alunos no desenvolvimento de onze atividades de modelagem matemática, tem como suporte a metodologia de análise de dados que considera o uso da linguagem e as práticas discursivas dos alunos engajados nas atividades de modelagem matemática. No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática a linguagem em uso é analisada e árvores de associação de ideias e linhas narrativas são os recursos analíticos que apresentam os resultados para a investigação. A partir da pesquisa empírica por meio de análises específicas investigamos os usos da linguagem e dos procedimentos matemáticos utilizados nas atividades de modelagem matemática, ou seja, equações diferenciais de primeira ordem, equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e o recurso ao ajuste de curvas. Com base nas análises específicas, o cruzamento com as teorias de base nos permitiram definir três categorias *a posteriori*, às quais detalham, com base na perspectiva wittgensteiniana, a natureza das justificativas e proposições utilizadas em atividades de modelagem matemática, o uso de regras nas atividades de modelagem matemática e a ocorrência da formação de conceitos matemáticos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Linguagem. Wittgenstein. Práticas Discursivas.

PALHARINI, Bárbara N. **Mathematics in mathematical modelling activities: a wittgensteinian perspective.** 2017. 316 p. Doctorate Thesis (Post-Graduation on the Teaching of Sciences and Mathematics Education) – State University of Londrina, UEL, Londrina, 2017.

ABSTRACT

In this research we seek to investigate, from a Wittgensteinian perspective, the use of language and mathematical procedures in mathematical modelling activities. The study is based on Mathematical Modelling in Mathematics Education and has as its philosophical basis the studies of Ludwig Wittgenstein regarding language and mathematics. To compose the research empirical data, mathematical modelling activities were developed by students of a Mathematics Degree during the disciplines of Ordinary Differential Equations and of Introduction to Mathematical Modelling. The research development, the data collection and the routing of the analysis bases the research methodology as qualitative. Data were collected through written records, audio and video recordings, questionnaires and interviews. The data analysis, collected with thirteen students in the development of ten mathematical modelling activities, is supported by the methodology of data analysis that considers the language uses and the discursive practices of students engaged in mathematical modelling activities. In the development of mathematical modelling activities the language in use is analyzed, and trees of association of ideas and narrative lines are the analytical resources that present the results for the investigation. From the empirical research through specific analyzes we investigate the uses of language and mathematical procedures in mathematical modeling activities, that is, first order differential equations, second order ordinary differential equations and the use of curve fitting. On the basis of the specific analyzes, the intersection with the basic theories allowed us to define three categories a posteriori, to which they detail, based on Wittgensteinian perspective, the nature of the justifications and propositions used in mathematical modeling activities, the use of rules in the activities Of mathematical modeling and the occurrence of the formation of mathematical concepts in the development of mathematical modeling activities.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modelling. Language. Wittgenstein. Discursive Practices.

LISTA DE QUADROS

Quadro 4.1 Codificação utilizada nas análises dos dados.....	83
Quadro 4.2 Atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos	84
Quadro 4.3 Preconcepções dos alunos sobre Matemática.....	87
Quadro 4.4 Grupos de alunos e o desenvolvimento das atividades	88

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Ações cognitivas dos alunos na atividade de modelagem matemática	47
Figura 4.1	Texto entregue aos alunos para o desenvolvimento da atividade 2	89
Figura 4.2	Gráfico elaborado pelos alunos de G1	93
Figura 4.3	Resolução da situação-problema utilizando a Lei do Resfriamento de Newton	93
Figura 4.4	Resolução do aluno A1	94
Figura 4.5	Interpretação feita pelos alunos do grupo G2 sobre a atividade 2	96
Figura 4.6	Definição de variáveis alunos do grupo G2 na atividade 2.....	96
Figura 4.7	Hipótese declarada pelos alunos do grupo G2 na atividade 2.....	96
Figura 4.8	Obtenção do modelo matemático pelos alunos do grupo G2 na atividade 2	97
Figura 4.9	Obtenção dos parâmetros da função feita pelos alunos do grupo G2	98
Figura 4.10	Resposta para a situação-problema dos alunos do grupo G2 na atividade 2 ...	98
Figura 4.11	Desenvolvimento matemático dos alunos do grupo G3.....	99
Figura 4.12	Validação e argumentação dos alunos do grupo G3	100
Figura 4.13	Informações gerais de G1 sobre a atividade de modelagem matemática	102
Figura 4.14	Informações sobre a atividade <i>ônibus espacial</i>	103
Figura 4.15	Ajuste de curvas para a aceleração (G1).....	106
Figura 4.16	Função que descreve a aceleração – alunos do grupo G1	106
Figura 4.17	Ônibus espacial	107
Figura 4.18	A resposta do grupo para a velocidade no interior de um ônibus espacial	108
Figura 4.19	Resposta à situação-problema AT3.1.....	109
Figura 4.20	Informações sobre a atividade <i>armazenamento de grãos de soja</i>	109
Figura 4.21	Esboço do silo estudado na atividade AT3.2	112
Figura 4.22	Texto entregue aos alunos para o desenvolvimento da atividade	115
Figura 4.23	Interpretação da situação do Bungee Jump pelo grupo G4.....	119
Figura 4.24	Definição de variáveis e identificação de constantes AT6_G4.....	120
Figura 4.25	Obtenção dos parâmetros da EDO AT6_G4.....	122
Figura 4.26	Obtenção da EDO e identificação da equação característica AT6_G4.....	123
Figura 4.27	Resolução da equação característica AT6 – G4.....	124

Figura 4.28 Identificação da solução da EDO do grupo G4 AT6.	124
Figura 4.29 Informações levantadas pelos alunos do grupo G5 – AT6	126
Figura 4.30 Interpretação dos alunos do grupo G5 sobre o salto Bungee Jump	127
Figura 4.31 Situação-problema formulada pelo grupo G5.....	128
Figura 4.32 Interpretação e identificação de conceitos matemáticos – AT6 G5.....	129
Figura 4.33 Definição de variáveis e formulação de EDO – AT6 G5	129
Figura 4.34 Dedução de EDO e problema de valor inicial – AT6 G5	130
Figura 4.35 Resolução de EDO de segunda ordem – AT6 G5.....	130
Figura 4.36 Identificação da solução da EDO – AT6 G5.....	131
Figura 4.37 Formulação do problema, de hipóteses e definição de variáveis, AT6 grupo G3	134
Figura 4.38 Esquema elaborado pela aluna C5 para resolução da AT6, grupo G3.....	134
Figura 4.39 Análise das forças em relação à posição de equilíbrio, AT6, grupo G3	135
Figura 4.40 Dedução da EDO de segunda ordem associada ao salto de Bungee Jump, G3.....	135
Figura 4.41 Resolução EDO homogênea, AT6, G3	136
Figura 4.42 Solução geral da EDO e resposta para o problema, AT6, G3.....	136
Figura 4.43 Texto entre aos alunos para o desenvolvimento da atividade.....	137
Figura 4.44 Informações sobre o Slackline coletadas pelos alunos do grupo G6	138
Figura 4.45 Informações Coletadas pelos alunos e sistematizadas pelo grupo G6	139
Figura 4.46 Gráfico da distância percorrida durante a prática do Slackline	142
Figura 4.47 Desenvolvimento do método dos mínimos quadrados e dedução do método para ajuste de funções polinomiais.....	142
Figura 4.48 Ajuste de curvas feito pelos alunos do Grupo G6 – AT7	144
Figura 4.49 Interface do <i>software</i> VCN	145
Figura 4.50 Tutorial para praticar Slackline – grupo G7.....	146
Figura 4.51 Esboço de um praticante com massa de 68 kg.....	147
Figura 4.52 Dedução Modelo 1 dos alunos do grupo G7 – AT7	149
Figura 4.53 Dedução Modelo 2 dos alunos do grupo G7 – AT7	150
Figura 4.54 Uso do modelo 2 para interpretar a situação-problema – AT7	150
Figura 4.55 Justificativa e argumentação para o uso do Modelo 3 – AT7.....	152

Figura 4.56 Dedução do Modelo 3, grupo G7 – AT7	153
Figura 4.57 Esquema de forças elaborado pelos alunos do grupo G8 – AT7	156
Figura 4.58 Dedução do modelo matemático, grupo G8.....	157
Figura 4.59 Interpretação e ajuste do modelo com a situação-problema, grupo G8.....	157
Figura 4.60 Dedução das forças atuantes sobre o corpo, grup G8 – AT7.....	158
Figura 4.61 Informações Iniciais AT8, grupo G5	160
Figura 4.62 Informações do Sino	162
Figura 4.63 Dados coletados do pêndulo	162
Figura 4.64 Resolução da atividade 8 pelo grupo G5	163
Figura 4.65 Informações sobre a temática da atividade 10, grupo G4.....	167
Figura 4.66 Dedução Modelo 1, AT10, grupo G5	173
Figura 4.67 Dedução do Modelo 2, AT10, grupo G5	175
Figura 4.68 Dedução do Modelo 3, AT10, grupo G5	178
Figura 5.1 Fluxo de ideias que mobilizaram as análises específicas.....	184
Figura 5.2 Usos da linguagem e procedimentos dos alunos: as EDO's de primeira ordem	187
Figura 5.3 Modelagem Matemática e Filosofia da Linguagem.....	189
Figura 5.4 Situações-problema e o uso de EDO's de primeira ordem	190
Figura 5.5 Teste e refutação de hipóteses.....	193
Figura 5.6 Linha Narrativa – definição do problema	194
Figura 5.7 Formulação de hipóteses e filosofia da linguagem no uso de EDO de primeira ordem	197
Figura 5.8 Linha narrativa sobre a argumentação dos alunos do grupo G2 na AT1 para considerar a Lei do Resfriamento de Newton	198
Figura 5.9 O uso de regras para modelos matemáticos associados às EDOs de primeira ordem e a Filosofia da Linguagem	206
Figura 5.10 Cálculo para obter a velocidade de um ônibus espacial, alunos do grupo G1	203
Figura 5.11 Linha narrativa, desenvolvimento da AT3.1 e AT3.2.....	204
Figura 5.12 Gráfico de dispersão AT1	208

Figura 5.13 Usos da linguagem matemática, matematização nas atividades de modelagem matemática	212
Figura 5.14 O uso da linguagem e de procedimentos dos alunos: as EDOs de segunda ordem	213
Figura 5.15 Atividades de modelagem matemática e Filosofia da Linguagem, EDO de segunda ordem	215
Figura 5.16 Esquemas elaborados na formulação do problema – AT6.....	216
Figura 5.17 A formulação de hipóteses e o uso de EDO de segunda ordem	221
Figura 5.18 Problema de valor inicial e soluções obtidas pelos alunos – AT6.....	222
Figura 5.19 Linha narrativa para o desenvolvimento das da formulação de hipóteses à dedução de modelos matemáticos.....	224
Figura 5.20 Desenvolvimento de modelos matemáticos, regras e jogos de linguagem, EDO de segunda ordem	225
Figura 5.21 Resposta à situação-problema da AT8.....	226
Figura 5.22 Linha narrativa sobre o desenvolvimento do modelo matemático no grupo G4 na AT10, o uso de EDO de segunda ordem	227
Figura 5.23 Atividades de modelagem matemática e o <i>fazer matemática</i> no uso de EDOs de segunda ordem	228
Figura 5.24 A investigação de situações-problema e o ajuste de curvas.....	230
Figura 5.25 Procedimentos dos alunos no recurso ao ajuste de curvas.....	231
Figura 5.26 Linha narrativa da argumentação de A1 - G1	232
Figura 5.27 Registro de A1 sinalizando a investigação matemática	233
Figura 5.28 Linha narrativa – G3 definindo um modelo matemático para os dados	234
Figura 5.29 Gráfico elaborado pelos alunos de G1 para o resfriamento do café na garrafa térmica.....	236
Figura 5.30 Resolução do aluno A1	236
Figura 5.31 Ajuste de curvas na atividade AT3.1	238
Figura 5.32 Ajuste de curvas em atividades de modelagem matemática sem o auxílio de tecnologias digitais e Filosofia da Linguagem	240
Figura 5.33 Ajuste de curvas e tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática e a Filosofia da Linguagem	243

Figura 5.34 A emergência das categorias de análise da pesquisa	244
Figura 5.35 Árvore de associação de ideias com relação as justificativas e proposições utilizadas pelos alunos.....	253
Figura 5.36 Árvore de associação de ideias, o uso de regras em atividades de modelagem matemática	257
Figura 5.37 Árvore de associação de ideias sobre a formação de conceitos em atividades de modelagem matemática	264
Figura 6.1 Sobre as concepções prévias dos alunos sobre Matemática e Matemática Escolar	268
Figura 6.2 O que é importante nas atividades de modelagem matemática	269
Figura 6.3 O uso de conceitos matemáticos e as dificuldades dos alunos em atividades de modelagem matemática	271
Figura 6.4 Árvore de associação de ideias da pesquisa desenvolvida.....	287

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	19
CAPÍTULO 1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	29
OPÇÃO METODOLÓGICA DA PESQUISA	29
ASPECTOS METODOLÓGICOS PARA ANÁLISE DOS DADOS.....	35
CAPÍTULO 2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	39
A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO REGIÃO DE INQUÉRITO	39
MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA	44
SOBRE A MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	49
CAPÍTULO 3 MATEMÁTICA E LINGUAGEM NA PERSPECTIVA DE WITTGENSTEIN	56
A FILOSOFIA DA LINGUAGEM DE WITTGENSTEIN: A ESTRUTURA DA CONCEPÇÃO JOGOS DE LINGUAGEM	59
A MATEMÁTICA NA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN.....	68
A FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	77
CAPÍTULO 4 AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	83
OS ALUNOS MODELADORES E A FORMAÇÃO DOS GRUPOS DE TRABALHO	85
DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 2: A TEMPERATURA DO CAFÉ E A GARRAFA TÉRMICA... 89	
DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES 3.1 ÔNIBUS ESPACIAL E 3.2 ARMAZENAMENTO DE GRÃOS DE SOJA	100
DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 6: A PRÁTICA DO BUNGEE JUMP	114
DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 7: SLACKLINE UM SHOW DE MANOBRAS	136
DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 8: PÊNDULO.....	159
DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 10: PRINCÍPIO BÁSICO DO AMORTECEDOR AUTOMOTIVO	166
CAPÍTULO 5 AS ANÁLISES ESPECÍFICAS E A EMERGÊNCIA DE CATEGORIAS	183
O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM	185
O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM	212
O RECURSO AO AJUSTE DE CURVAS	229
CATEGORIA 1: O USO DE PROPOSIÇÕES E JUSTIFICATIVAS EM ATIVIDADES DE	

MODELAGEM MATEMÁTICA	245
CATEGORIA 2: O USO DE REGRAS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	254
CATEGORIA 3: FORMAÇÃO DE CONCEITOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM	
MATEMÁTICA	259
CAPÍTULO 6 DISCUSSÃO E RESULTADOS.....	265
LINGUAGEM E MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA:	
REFLEXÕES COM RELAÇÃO AO OBJETIVO DA PESQUISA	272
PALAVRAS FINAIS.....	288
REFERÊNCIAS	294
ANEXO A - QUESTIONÁRIO DE PERFIL DO ACADÊMICO	307
ANEXO B - QUESTÕES DA ENTREVISTA	308
ANEXO C - QUESTIONÁRIO FINAL	309
ANEXO D - TERMO DE COMPROMISSO DISCIPLINA EDO.....	310
ANEXO E - TERMO DE COMPROMISSO DISCIPLINA MM.....	311
ANEXO F - INFORMAÇÕES DA AT1 “O RESFRIAMENTO DA CERVEJA”	312
ANEXO G - INFORMAÇÕES DA AT4 “VARIAÇÃO DA TEMPERATURA NA PRODUÇÃO DO	
SORVETE”	313
ANEXO H - INFORMAÇÕES DA AT5 “PREPARO DA GELATINA”	315
ANEXO I - INFORMAÇÕES DA AT9 “MOLA MALUCA”	316

INTRODUÇÃO

Questionamentos de ordem ontológica sobre a natureza da Matemática têm espaço no âmbito da filosofia e repercutem nos campos político, social e cultural. A indagação sobre *o que é Matemática*¹ atravessa séculos. Encarada como arte, como ciência ou como linguagem, a Matemática tem sido foco de discussões em diferentes cenários da sociedade. No que tange aos usos da Matemática, tanto no ambiente escolar quanto na sociedade, nos interessamos pela Modelagem Matemática na Educação Matemática, em que a abordagem de conceitos matemáticos está, de modo geral, associada ao ensino e à aprendizagem ou à aplicação da Matemática em situações e problemas que podem não ser matemáticos.

A investigação em Modelagem Matemática na Educação Matemática está associada a questões metodológicas, ontológicas e epistemológicas. De modo geral, a pesquisa nessa área sinaliza uma visão de ensino em que a Matemática é vista como instrumento para compreender o mundo, como área do conhecimento que conduz à curiosidade, à investigação e à resolução de problemas. A relevância social e cultural da Matemática é, algumas vezes, acionada, visando o desenvolvimento dos alunos. Também conceitos, procedimentos e atitudes são valorizados em documentos oficiais e em artigos científicos e livros didáticos. Quando as pesquisas se referem ao ensino e à aprendizagem da Matemática, destacam a importância da superação de uma organização linear de conteúdos e a necessidade de explicitar as conexões entre eles, e conexões entre os conteúdos matemáticos e diferentes setores da sociedade (PIRES; SILVA, 2011).

O uso de abordagens como a resolução de problemas, a modelagem matemática, as investigações matemáticas, entre outras alternativas para o ensino de Matemática, é colocado como ponto de partida da atividade Matemática e o *fazer Matemática* é sinalizado por meio de propostas em que os alunos se tornem investigadores em Matemática, por meio da reprodução dos passos do trabalho de um matemático (BRASIL, 1997; PIRES; SILVA, 2011).

¹ Sinalizamos que não temos, neste texto, a pretensão de definir ou responder tal questionamento. O colocamos aqui para abordar o debate em torno dessa temática, e construir os elementos que dão vida a nosso problema de pesquisa.

Para problematizar os usos de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática trazemos a tona discussões com relação aos usos da Matemática na sociedade. Inicialmente abordamos a visão de Matemática como universal, para adentrar em uma visão que considera as práticas matemáticas na sociedade e a importância de enfatizar os usos da Matemática no ensino e na aprendizagem de Matemática, em particular quando mediados pela modelagem matemática.

D'Ambrosio (2007, p. 174, tradução nossa), ao discorrer sobre o uso da Matemática na sociedade, enfatiza que:

Desde a Grécia clássica, a Matemática tem sido uma disciplina com foco nos sistemas educacionais. Tem sido a forma mais estável de pensamento na tradição mediterrânea que persiste até hoje como uma manifestação cultural imposta e incontestada, para além de outras. Embora nenhuma religião seja universal, nenhuma língua é universal, nem a culinária e a medicina são universais, a Matemática é considerada universal.

Essa visão de Matemática como algo universal é problematizada por D'Ambrósio (2007) a fim de enfatizar que ao assumir tal visão a sociedade pode 'enxergar' a Matemática como *rainha das ciências*, mas também atribui à Matemática um importante papel no que tange às práticas dos sujeitos na sociedade.

Em contrapartida a essa visão absolutista, Vilela (2009) aborda as práticas matemáticas como realizações humanas, práticas intencionais e condicionadas pela estrutura da linguagem, a qual limita e regula as possibilidades de desenvolvimento da Matemática nas diferentes práticas específicas.

Quando abordamos uma visão 'pragmática' de Matemática, é possível tecer considerações sobre os diferentes usos da Matemática em situações que não são oriundas da Matemática. Nesse contexto, trazemos à tona a discussão sobre Matemática e Modelagem Matemática na Educação Matemática. Recorremos a Sriraman e Lesh (2006, p. 247-248, tradução nossa, ênfase dos autores), que sinalizam que tanto na Matemática quanto nas Ciências:

(a) a modelagem é principalmente sobre a descrição, explicação ou conceituação proposital (quantificação, dimensionalização, coordenação, ou em geral matematização) – mesmo que processos de computação e dedução também estejam envolvidos.

(b) os modelos para criar ou dar sentido a sistemas complexos são, por si mesmos, “pedaços de conhecimento” importantes que devem ser enfatizados no ensino e na aprendizagem – especialmente para os alunos se prepararem para o sucesso nos diferentes campos em que serão usuários de Matemática, ciência e tecnologia. Portanto, é importante iniciar e estudar modelagem desde os anos iniciais, particularmente a modelagem de sistemas complexos que ocorrem em situações da vida real.

Estes autores sinalizam a importância do estudo da modelagem matemática para que os sujeitos, em particular os alunos, saibam lidar com diferentes situações do cotidiano em que necessitam da Matemática ou podem se beneficiar com o seu uso. Neste contexto, a modelagem matemática representa uma maneira de matematizar situações do cotidiano, sejam elas complexas ou não. Já os modelos matemáticos produzidos correspondem a *pedaços de conhecimento*, oriundos dessa matematização.

No que tange ao uso de modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática, Levy (2016, p. 293) indica que:

Quando se procura conhecer uma parte daquilo que se considera o mundo real, tendo-se em vista, através de matematizações, explicá-la, entendê-la ou até agir sobre ela, normalmente se busca selecionar, no objeto em foco, argumentos ou referenciais avaliados como relevantes, aspirando-se a uma representação – alicerçada em ações sistematizadas/formais – a que se dá o nome de modelo matemático.

Nosso entendimento a respeito do uso de Matemática em atividades de modelagem matemática vai ao encontro das discussões relacionadas à *matematização* já disponíveis na literatura (KAISER, SRIRAMAN, 2006; FREITAS, 2013; ALMEIDA, SILVA, 2015; VIDIGAL, BEAN, 2016; entre outros)².

Segundo Kaiser e Sriraman (2006), o termo *matematização* pode ser entendido no sentido de *matematizar a realidade*. No âmbito da modelagem matemática, Almeida e Silva (2015, p. 209) sinalizam que o termo *matematização* aparece na maior parte dos esquemas que visam retratar a atividade de modelagem matemática. As autoras justificam que:

[...] a matematização faz parte do desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. A inclusão da matematização na modelagem tem se expressado nos ciclos que diferentes autores vêm associando ao

² No capítulo três deste texto abordamos com mais detalhes considerações sobre matematização em atividades de modelagem matemática.

desenvolvimento de atividades de modelagem, passando a constituir uma etapa deste desenvolvimento.

Vidigal e Bean (2016) dedicaram-se à compreensão do significado do termo *matematização* no âmbito da modelagem matemática. Neste contexto, a modelagem matemática é entendida como a construção de modelos, entendimento próximo a dos matemáticos que trabalham “com aplicações da matemática em situações concebidas em quadros conceituais que não sejam matemáticos” (VIDIGAL, BEAN, 2016, p. 251). Para estes autores, o uso do termo *matematização* pode se dar no mesmo sentido do uso da linguagem matemática para conceituar situações sob consideração, e “a *matematização*, por sua vez, é uma conceituação ou estruturação matemática de uma situação considerada”.

Ainda no que tange à pesquisa a respeito da Matemática em atividades de modelagem matemática, Freitas (2013) buscou entender o processo de *matematização* em um ambiente de modelagem matemática sustentado pela Educação Matemática Crítica. Nesse contexto, entende-se que a Matemática não deve ser ensinada como um produto pronto e acabado, mas “deve ser ensinada de uma forma que os alunos se comportem como investigadores matemáticos, construindo e fazendo matemática” (FREITAS, 2013, p. 24).

Concordamos com Vidigal e Bean (2016) que a *matematização* pode ser concebida como a conceituação e ou estruturação de uma situação por meio da linguagem matemática e com Freitas (2013) no sentido de que a Matemática não deve ser ensinada como um produto pronto e acabado. Entendemos que *olhar* para a Matemática por meio de uma visão absolutista, na busca por verdades universais, pode não dar conta das especificidades associadas aos usos da Matemática, de sua linguagem e procedimentos, nos diferentes contextos. Como educadores, entendemos que a visão de Matemática como algo absoluto, para além dos limites de nossa linguagem, deve ser desmistificada.

É nesse contexto que assumimos, nessa pesquisa, uma posição filosófica que considera os usos da linguagem em diferentes contextos, em particular os usos da linguagem matemática. Para explicitar nosso entendimento de Matemática, e a posição

filosófica assumida na tese, recorreremos à filosofia de Ludwig Wittgenstein³ (1889 – 1951), filósofo que percorreu as duas fases da filosofia da linguagem contemporânea.

Para Wittgenstein (2013), a Matemática se fundamenta em *jogos de linguagem*⁴. Assim, entendemos que para tratar de Matemática em atividades de modelagem matemática é necessário investigar os usos da Matemática em atividades de modelagem matemática, da linguagem matemática e dos múltiplos jogos de linguagem que a rodeiam e a constituem.

No que diz respeito às pesquisas que investigam o uso da linguagem, Oliveira e Silveira (2016, p. 271) consideram que:

A linguagem matemática tem sido focalizada como objeto de pesquisa no campo da educação matemática e essas pesquisas têm contribuído para compreendermos como os processos linguísticos interferem no ensino e na aprendizagem da matemática.

Pesquisas apontam que os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática são influenciados pelos processos linguísticos que emergem em sala de aula, em particular, pelos usos da linguagem matemática, por professores e alunos. A comunicação em Matemática aborda, para além da linguagem de alunos e professores, os textos matemáticos. Silveira e Silva (2016) evidenciam que:

O texto matemático pode ser escrito em linguagem matemática que contem símbolos, gráficos e expressões algébricas, como também pode ser escrito em linguagem natural com expressões do vocabulário matemático. A linguagem matemática utiliza símbolos para representar signos, tais como: \leq , \geq , \div , \times , entre outros; abreviaturas: ∞ , km, etc; letras: h para altura, l para lado e números. A linguagem matemática com seus códigos, dentre outras coisas, representa de forma abreviada o texto escrito pela linguagem natural (SILVEIRA, SILVA, 2016, p. 475).

Nesse contexto, a linguagem matemática na Educação Matemática pode ser considerada como um obstáculo à formação de conceitos em Matemática. Muitas vezes, os sujeitos utilizam cálculos em suas vidas diárias, no entanto, no âmbito escolar, é necessário efetuar uma tradução, ora da linguagem natural para a linguagem matemática, ora da

³ Filósofo nascido em Viena, estudou engenharia em Berlim e posteriormente em Manchester na Inglaterra. Interessado em matemática e lógica estudou com Bertrand Russel em Cambridge (MARCONDES, 2007).

⁴ Este conceito será detalhado no capítulo três.

linguagem matemática para a linguagem natural. A formalização de conceitos em linguagem matemática depende da compreensão sobre os usos de regras e procedimentos matemáticos veiculados por meio do discurso matemático. Costa, Moraes e Silveira (2016, p. 205) abordam o caráter simbólico da linguagem matemática e as dificuldades quando os alunos *tentam* decodificar os símbolos matemáticos para a linguagem natural e vice-versa.

No âmbito da modelagem matemática, diferentes linguagens se fazem presente, o uso das palavras, ações, gestos, registros escritos, entre outros. Almeida, Tortola e Merli (2012, p. 220) evidenciam que “não se pode ignorar que a linguagem matemática, preponderantemente escrita, e que embora se pretendendo formal, necessita da linguagem natural, de figuras, para a comunicação das ideias”. Tal entendimento corrobora com assertivas de que no ensino e na aprendizagem da Matemática, em particular, quando mediado pela modelagem matemática, uma pluralidade de linguagens, ou de acordo com Wittgenstein (2013), por meio de diferentes *jogos de linguagem* são acionados ou requeridos.

A investigação sobre o uso de jogos de linguagem em atividade de modelagem matemática recebe destaque em Almeida (2014a; 2014b). Nesses artigos, os usos da linguagem são evidenciados, e no que tange à linguagem matemática, diferentes jogos de linguagem emergem quando os alunos utilizam regras e procedimentos matemáticos. Para Almeida (2014a, p. 100, tradução nossa), “no contexto da Matemática [...], não se trata de procurar o significado dos objetos matemáticos na realidade interdependente da linguagem matemática ou na multiplicidade de usos em situações empíricas”.

Tortola (2012; 2016) utiliza da perspectiva wittgensteiniana para analisar os usos da linguagem, em particular, da linguagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A pesquisa de Tortola (2012, p. 61) coloca em foco a linguagem matemática e aborda que:

[...] aprender Matemática envolve entre outros aspectos aprender a utilizar a linguagem matemática, o que implica em aprender uma série de regras e suas aplicações. Face ao exposto, acreditamos que o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, que consiste em abordar matematicamente situações problema que podem não ser essencialmente matemáticas, vem ao encontro dessas ponderações, no sentido de propiciar aos estudantes a familiarização com a linguagem matemática por meio da produção de modelos matemáticos, além de contribuir para o desenvolvimento da habilidade de transitar entre linguagem natural do

fenômeno e linguagem matemática, estabelecendo conexões entre Matemática e suas aplicações na realidade.

O autor constata que a linguagem tem um papel fundamental nas atividades de modelagem matemática, fornece subsídios para a construção de modelos, o que suscita diferentes usos da linguagem e dá suporte para a aprendizagem da linguagem matemática (TORTOLA, 2012).

Ainda no âmbito da Modelagem Matemática na Educação Matemática, Souza (2012) investiga a aprendizagem matemática na modelagem matemática e aborda a ideia de Matemática como uso normativo da linguagem, em particular da linguagem utilizada no sistema matemático escolar. Neste contexto, a autora entende modelagem matemática como uma maneira de organizar situações empíricas e, quando utilizada no âmbito escolar, tal organização ocorre por meio da linguagem matemática regida pelas regras e procedimentos deste sistema:

[...] argumentamos que as situações-problema abordadas em modelagem sejam elaboradas com base na legitimidade do uso do sistema matemático escolar na organização dessas situações. Para nós, essa questão, pode nos auxiliar a usarmos modelagem não descaracterizando essas situações, quanto à forma de vida, a qual são mobilizadas e também, não somente como um meio para ensinar os conteúdos matemáticos disciplinares. [...] julgamos que a tematização da aprendizagem matemática que se constitui na modelagem embute questionamentos sobre que utilidade arguimos que a matemática deve se pautar, sobre que matemática consideramos útil para adotar em âmbito escolar e sobre que dinâmica envolve a aprendizagem da matemática na modelagem (SOUZA, 2012, p. 123).

A mesma temática é abordada por Souza e Barbosa (2014, p. 118-119, tradução nossa), e por meio de uma perspectiva wittgensteiniana os autores enfatizam que “A aprendizagem da matemática escolar pode então ser entendida como aprendizagem do sistema da matemática escolar ou dos usos das palavras que compõem este sistema”.

Já a pesquisa de Oliveira (2010) apresenta uma investigação sobre a produção de sentidos de alunos quando no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e nesse contexto expressa uma preocupação particular no que tange ao uso da linguagem matemática pelos alunos e a pluralidade de sentidos que os alunos podem produzir a partir

da interpretação do discurso do professor e de outros alunos, o que independe da pretensão dos usos da linguagem matemática. Segundo Oliveira (2010, p. 51):

[...] não podemos negar que a Matemática possui, de maneira muito perceptível, uma relação de significados nos signos e representação de sentidos, usos linguísticos peculiares e organização simbólica própria, evidenciando as questões acerca das especificidades da sintaxe, da semântica e da pragmática da linguagem matemática.

A investigação sobre a Matemática em atividades de modelagem matemática faz-se importante na medida em que problematiza os usos da linguagem, da linguagem matemática, dos procedimentos e das regras que emergem em atividades de modelagem matemática. Neste contexto, essa pesquisa tem por objetivo *investigar o uso da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática*.

Para apresentar reflexões com relação ao uso da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática, pautados em uma perspectiva wittgensteiniana, consideramos também uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, no ano de 2015, e na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática no ano de 2016.

Na realização da pesquisa empírica utilizamos uma metodologia de ensino em que olhamos para a matemática e para a linguagem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Nesse contexto, entendemos a modelagem matemática como uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem de Matemática em que situações-problema, em geral não matemáticas, são investigadas por meio da Matemática⁵ (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012).

Como metodologia de pesquisa utilizamos os pressupostos da pesquisa qualitativa (LÜDKE, ANDRÉ, 1986; BORBA, ARAUJO, 2004). Após revisão da bibliografia sobre modelagem matemática e sobre linguagem na perspectiva wittgensteiniana, fomos a campo a fim de estudar o fenômeno, sobre o uso da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática, buscamos considerar pontos de vista relevantes,

⁵ No capítulo três deste texto apresentamos visões e perspectivas sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática e trazemos as vozes dos pesquisadores que tem em seu objeto de estudo tal temática.

e nesse contexto o ambiente proporcionado pela realização de atividades de modelagem matemática foi a principal fonte de coleta de dados. Para coleta e análise de dados utilizamos a metodologia de análise de *práticas discursivas* descrita por Spink (2010; 2013)⁶, a perspectiva sobre linguagem e Matemática na filosofia de Wittgenstein e a Modelagem Matemática na Educação Matemática.

O texto que relata a pesquisa desenvolvida está dividido em seis capítulos. Inicialmente delineamos os aspectos metodológicos da investigação, explicitamos a metodologia utilizada na pesquisa teórica, detalhamos os aspectos metodológicos que deram vida à pesquisa empírica, o contexto investigado, os instrumentos de coleta de dados. Por fim, explicitamos, e justificamos, a opção metodológica utilizada na análise dos dados.

Os capítulos dois e três contemplam, respectivamente, as teorias de base que fundamentam essa tese e servem de óculos para elucidar nossas reflexões. No capítulo dois apresentamos um panorama sobre a modelagem matemática como região de inquérito, o uso da modelagem matemática na sala de aula, o uso da Matemática em atividades de modelagem matemática. Já no capítulo três, a fim de explicitar a posição filosófica assumida na pesquisa, apresentamos considerações sobre o uso da perspectiva wittgensteiniana em pesquisas da Educação Matemática, em particular na modelagem matemática e apresentamos aspectos teórico-filosóficos com relação à filosofia da linguagem de Wittgenstein.

No capítulo quatro apresentamos o contexto investigado, os procedimentos pedagógicos que possibilitaram o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática bem como as características das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos na parte empírica da pesquisa. Neste contexto, o perfil dos alunos/modeladores é delineado a fim de fundamentar e justificar os diferentes contextos investigados e os diferentes usos da linguagem e de procedimentos matemáticos feitos pelos alunos no decorrer do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

A análise dos dados coletados durante a pesquisa é feita no capítulo cinco. Por meio de *árvores de associação de ideias e linhas narrativas*⁷, as práticas discursivas são

⁶ Detalhes sobre os aspectos metodológicos utilizados no desenvolvimento da tese serão descritos no capítulo um deste texto de tese.

⁷ Árvores de associação de ideias e linhas narrativas são instrumentos analíticos utilizados no processo de análise. Estes instrumentos serão descritos no primeiro capítulo deste texto.

interpretadas. Considerando a posição filosófica assumida na pesquisa, o uso da linguagem e de procedimentos matemáticos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática direcionou nosso olhar para a interpretação dos dados e, as práticas discursivas dos alunos nos permitiram investigar as diferentes proposições utilizadas, os diferentes jogos de linguagem que permearam as atividades de modelagem matemática, as regras matemáticas utilizadas, enfim, os conceitos matemáticos que emergiram das diferentes atividades de modelagem matemática desenvolvidas. A fim de sistematizar o processo analítico três categorias são delineadas. Tais categorias são analisadas por meio do recurso de *árvores de associação de ideias* e fazemos uma análise interpretativa dos dados, com base nos pressupostos teóricos da modelagem matemática e da filosofia de Wittgenstein.

A partir das análises empreendidas no capítulo cinco, discutimos e detalhamos os resultados da pesquisa de modo a contemplar o objetivo da pesquisa no capítulo seis. Procuramos, neste capítulo, fomentar o debate a respeito da Modelagem Matemática na Educação Matemática, considerando um ponto de vista filosófico. Reflexões com relação aos usos da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática são então sistematizados. Por fim, tecemos as considerações finais da pesquisa. Retomamos o percurso traçado na investigação, identificamos as limitações da pesquisa, sinalizamos o que poderia ter sido diferente e o que a pesquisa realizada pode indicar para futuras pesquisas. Contribuições para a Educação Matemática são delineadas, bem como fragilidades da pesquisa realizada são apontadas.

CAPÍTULO 1

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Definido o objetivo dessa tese, considerando que seu esclarecimento é o ponto crucial da pesquisa, neste capítulo apresentamos os aspectos metodológicos que fundamentam o percurso da investigação. Para tanto, consideramos importante destacar duas vertentes: a opção metodológica da pesquisa, juntamente com os procedimentos pedagógicos utilizados na realização da pesquisa empírica, os quais possibilitaram a coleta de dados; a metodologia utilizada na análise dos dados coletados.

OPÇÃO METODOLÓGICA DA PESQUISA

A pesquisa delineada é de natureza qualitativa e, para elucidar os aspectos que fundamentam essa opção metodológica, consideramos importante explicitar o contexto da pesquisa e as características que, de certo modo, fundamentam a pesquisa como qualitativa.

A reflexão sobre a investigação do uso da linguagem e dos procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática nos levou a investigar o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em diferentes contextos. Nesse sentido, atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas com treze alunos⁸ do curso de Licenciatura em Matemática nas disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias, durante o ano letivo de 2015, e de Introdução à Modelagem Matemática, no ano letivo de 2016, ambas de duração anual. Enunciamos a seguir os procedimentos pedagógicos adotados em cada disciplina.

A disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias foi ministrada pela própria pesquisadora e o desenvolvimento das aulas engloba:

⁸ O consentimento dos alunos participantes da pesquisa foi solicitado de acordo com o modelo dos Anexos D e E. O perfil destes alunos será apresentado no Capítulo 4 juntamente com as atividades de modelagem matemática por eles desenvolvidas.

- ✓ *Aulas expositivas*: aulas abordando aspectos teóricos das equações diferenciais, em particular das equações diferenciais ordinárias, ou abordando métodos e técnicas para a resolução de equações diferenciais ordinárias.
- ✓ *Desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em que as temáticas a serem investigadas foram sugeridas pela professora*⁹. Estas atividades foram desenvolvidas em grupos e temáticas são indicadas na Tabela 1.1.

Tabela 1.1 Atividades de modelagem matemática, temáticas sugeridas pela professora – EDO

Atividade de modelagem	Período	
O resfriamento da cerveja	1º	Semestre 2015
A temperatura do café e a garrafa térmica	1º	Semestre 2015
A prática do Bungee Jump	2º	Semestre 2015

Optamos pelo desenvolvimento das atividades de modelagem matemática em grupos, considerando assertivas da literatura da área, como:

[...] durante este compromisso coletivo com a situação-problema e uns com os outros, os estudantes são propensos ao desenvolvimento do pensamento articulado, do raciocínio, e a manifestação de crenças sobre modelagem e matemática, bem como a confiança no uso de seus conhecimentos matemáticos, e dos outros do grupo (STILLMAN, BROWN, GEIGER, 2015, p. 98, tradução nossa).

- ✓ *Desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em que as temáticas a serem investigadas foram definidas pelos alunos*. Neste caso, ao final do primeiro e do segundo semestres os grupos foram solicitados a elaborar uma atividade de modelagem matemática sendo de sua responsabilidade a escolha do tema, do problema a ser resolvido, bem como sua resolução, concluindo com uma apresentação sob a forma de seminário para todos os alunos da disciplina (Tabela 1.2).

⁹ As temáticas foram sugeridas pela professora e validadas no Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática – GRUPEMMAT. Informações sobre o grupo podem ser obtidas em <<http://www.uel.br/grupo-pesquisa/grupemat/>> e no diretório de grupos de pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPQ <dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/8157313401216172>. Acesso em: 17 mai. 2016.

Tabela 1.2 Atividades de modelagem matemática, temáticas sugeridas pelos alunos – EDO

Atividade de modelagem		Período
Variação da temperatura da produção do sorvete	1º	Semestre 2015
Preparo da gelatina: variação da temperatura da gelatina em relação do tempo	1º	Semestre 2015
Ônibus espacial	1º	Semestre 2015
Armazenamento de grãos de soja	1º	Semestre 2015
Pêndulo		2015/2016
Mola Maluca		2015/2016
Princípio básico do amortecedor automotivo		2015/2016

As atividades de modelagem matemática em que são utilizados os conceitos de equações diferenciais de segunda ordem: pêndulo, mola maluca e sistema massa-mola: princípio básico do amortecedor automotivo, foram iniciadas na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias e finalizadas na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática.

A disciplina de Introdução à Modelagem Matemática também foi ministrada pela pesquisadora, e o desenvolvimento das aulas da disciplina engloba:

- ✓ *Aulas expositivas, debates e apresentação de seminários:* aulas abordando aspectos teóricos sobre Modelagem Matemática, em particular na Educação Matemática, enfatizando as diferentes perspectivas da Modelagem Matemática na Educação Matemática, no âmbito nacional e internacional, bem como as fases e etapas compreendidas em uma atividade de modelagem matemática.
- ✓ *Desenvolvimento de atividades de modelagem matemática que constam na literatura:* o desenvolvimento dessas atividades foi feito em grupo, e ao final da comunicação de cada atividade os alunos, junto com a professora, teciam reflexões de ordem prática aliando as teorias estudadas sobre modelagem matemática.
- ✓ *Desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em que a sugestão de temáticas a serem investigadas foi feita pela professora¹⁰:* duas atividades de modelagem matemática foram (Tabela 1.3) desenvolvidas em grupos.

¹⁰ As temáticas foram sugeridas pela professora e validadas no Grupo de Pesquisa GRUPEMMAT, informações sobre o grupo podem ser obtidas em <<http://www.uel.br/grupo-pesquisa/grupemat/>>, e no

Tabela 1.3 Atividades de modelagem matemática, temáticas sugeridas pela professora –
Disciplina de Introdução à Modelagem Matemática

Atividade de modelagem	Período	
A prática do Bungee Jump	1º	Semestre 2016
Slackline: um show de manobras	1º	Semestre 2016

Vale observar que a atividade “A prática do Bungee Jump” foi iniciada no segundo semestre de 2015 e finalizada no início do primeiro semestre de 2016, entre os meses de março e abril de 2016, pelos mesmos grupos de alunos.

- ✓ *Desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em que as temáticas a investigar foram definidas pelos alunos.* Essas atividades se iniciaram na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, na qual os alunos decidiram pelo tema, coletaram informações e elaboraram questões para solucionar. As ideias não foram concluídas no segundo semestre de 2015 e, como os alunos permaneceriam os mesmos na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática cujo foco está em atividades de modelagem matemática, o trabalho continuou nesta disciplina (Tabela 1.4). A finalização dos trabalhos ocorreu no primeiro semestre letivo de 2016. As atividades de modelagem matemática foram de responsabilidade dos alunos, desde a escolha do tema, do problema a ser resolvido, bem como sua resolução, concluindo com uma apresentação sob a forma de seminário para todos os alunos da disciplina.

Tabela 1.4 Atividades de modelagem matemática elaboradas pelos alunos – Disciplina de
Introdução à Modelagem Matemática

Atividade de modelagem	Período
Pêndulo	2015/2016
Mola Maluca	2015/2016
Princípio básico do amortecedor automotivo	2015/2016

A elucidação dos procedimentos utilizados no desenvolvimento em ambas as disciplinas, que deram suporte à coleta de dados, nos permite tecer considerações sobre a pesquisa qualitativa realizada.

A pesquisadora atuou como professora de ambas as disciplinas em que ocorreu a coleta de dados. Os dados coletados, por sua vez, são predominantemente descritivos, visto que são advindos das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos.

Na tentativa de ‘capturar’ o máximo possível de aspectos da prática dos alunos e em relação ao uso da matemática durante as atividades de modelagem matemática dados foram coletados durante a realização da pesquisa empírica, no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Os dados foram coletados por meio dos instrumentos:

- Aplicação de questionários

Inicialmente, com a finalidade de obter informações sobre os alunos que integrariam o *corpus* dessa pesquisa, um questionário foi respondido por cada um dos treze alunos (Anexo A). Com esse questionário foram constatados aspectos como preferências dos alunos com relação à Matemática, às disciplinas cursadas, o ano em que o aluno iniciou o curso, as experiências como professor de Matemática, qual sua familiaridade com modelagem matemática, entre outros¹¹.

Quando da finalização das atividades de modelagem matemática, os alunos responderam um questionário a fim de detalhar a experiência com a realização das atividades de modelagem matemática e aos diferentes usos da Matemática por eles vislumbrados no desenvolvimento dessas atividades (Anexo C).

- Entrevistas semiestruturadas

Planejamos que a cada bloco de atividades de modelagem matemática desenvolvidas, uma entrevista seria realizada com os alunos a fim de detalhar os procedimentos utilizados por eles no desenvolvimento dessas atividades. Essa entrevista foi feita por meio de um roteiro semi-estruturado (Anexo B).

As entrevistas foram realizadas, no final do segundo semestre letivo de 2015 e primeiro semestre letivo de 2016, e cada entrevista foi gravada em áudio.

- Gravações, em áudio e vídeo, dos alunos durante suas atividades

¹¹ Resultados deste questionário serão explicitados no Capítulo quatro deste texto.

As aulas, das disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias e de Introdução à Modelagem Matemática em que os alunos desenvolviam as atividades de modelagem matemática, foram gravadas em áudio e vídeo. Utilizamos uma câmera que capturava a imagem e o som, posicionada de modo a ‘capturar’ a imagem de todos os alunos, e um gravador de áudio em cada grupo de alunos reunidos na realização da atividade de modelagem matemática.

- Registros escritos dos alunos, entregues a cada atividade de modelagem matemática desenvolvida

Os registros escritos produzidos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática foram solicitados de modo a compor o *corpus* de análise dessa pesquisa.

Visando identificar indícios e evidências relativas às *práticas discursivas* a respeito dos usos da linguagem e de procedimentos matemáticos adotados pelos alunos em atividades de modelagem matemática, *olhamos* para os dados a fim de analisar a interação dos alunos com o outro e consigo próprio; os registros escritos; os diferentes usos da linguagem emergentes no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

É por meio dos diferentes usos da linguagem que os alunos formam, formatam, articulam e expõem suas ideias durante a atividade de modelagem matemática. Desse modo, nossa investigação incide sobre a linguagem em uso no desenvolvimento de atividades de atividades de modelagem matemática. Para subsidiar nossas inferências apoiamo-nos em ponderações de Spink (2013) sobre a linguagem em uso e a análise das práticas discursivas.

Os instrumentos utilizados na coleta de dados foram detalhados a partir da opção metodológica de pesquisa qualitativa, e considerando as especificidades da pesquisa qualitativa delineada vemos a necessidade de uma metodologia específica para a análise dos dados, bem como da explicitação e delimitação da roupagem teórica que deve vir à tona na discussão dos mesmos. Assim, na segunda seção deste capítulo abordamos a opção metodológica que considera as *práticas discursivas* e que auxiliará no processo de interpretação dos dados coletados e nas reflexões sobre o objetivo de pesquisa dessa tese.

ASPECTOS METODOLÓGICOS PARA ANÁLISE DOS DADOS

Os aspectos metodológicos, utilizados para análise dos dados dessa tese, consideram a *linguagem em uso* e as *práticas discursivas* de alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Utilizamos elementos da metodologia de análise de práticas discursivas delineada por Spink (2010; 2013).

De acordo com os pressupostos delineados por Spink (2013), a interpretação da linguagem e das práticas discursivas dos sujeitos conduzem à produção de sentidos de quem as analisa. Nesse contexto, o sentido é compreendido como:

[...] uma construção social, um empreendimento coletivo, mais precisamente interativo, por meio do qual as pessoas – na dinâmica das relações sociais historicamente datadas e culturalmente localizadas – constroem os termos a partir dos quais compreendem e lidam com as situações e fenômenos a sua volta (SPINK, 2013, p. 22).

A linguagem é vista como prática social em que o discurso remete às regularidades linguísticas, ou seja, ao uso convencional da linguagem, como, por exemplo, em diferentes domínios do saber e, particularmente, na Matemática.

Segundo Spink (2013, p. 26) *práticas discursivas* consistem na “linguagem em ação” e indicam o posicionamento das pessoas nas relações com os outros. Segundo a autora, na coleta de dados o pesquisador deve considerar instrumentos que deem conta de ‘capturar’ as práticas discursivas dos sujeitos, como textos de diferentes naturezas, entrevistas, questionários, narrativas, entre outros.

Após a coleta dos dados:

[...] a análise inicia-se com uma imersão no conjunto de informações coletadas, procurando deixar aflorar os sentidos, sem encapsular os dados em categorias, classificações ou tematizações definidas *a priori*. [...] Há um confronto possível entre sentidos construídos no processo de pesquisa e de interpretação e aqueles decorrentes da familiarização prévia com nosso campo de estudo (nossa revisão bibliográfica) e de nossas teorias de base.

É desse confronto inicial que emergem nossas categorias de análise. Buscamos, então, analisar o material que temos ao nosso dispor (entrevistas, discussões de grupos, textos, etc.) a partir dessas categorias. Mas não são apenas os conteúdos que nos interessam. Para fazer aflorar os

sentidos, precisamos entender, também, o uso feito desses conteúdos (SPINK, 2013, p. 83-84).

Segundo Spink (2013), podemos considerar três passos necessários para o desenvolvimento da análise dos dados da pesquisa: a imersão do pesquisador no conjunto de dados; o confronto entre os sentidos construídos na pesquisa empírica com a revisão bibliográfica e as teorias de base; o uso de procedimentos para entendimento dos usos associados aos conteúdos dos textos e a definição de categorias de análise *a posteriori* a partir dos sentidos construídos na análise dos dados coletados.

Algumas técnicas podem ser utilizadas para dar visibilidade ao processo de interpretação do pesquisador: mapas de associação de ideias; árvores de associação de ideias; linhas narrativas (SPINK, 2013). Nessa pesquisa utilizamos dois destes recursos, as árvores de associação de ideias e as linhas narrativas.

As *árvores de associação de ideias* permitem visualizar o fluxo das associações de ideias por meio dos textos considerados dados da pesquisa. Desse modo, as árvores de associação de ideias “possibilitam [...] entender as singularidades da produção de sentido, presas tanto à história de cada pessoa quanto à dialogia intrínseca do processo de entrevista” (SPINK, 2013, p. 91). A construção dessas árvores tem início com a pergunta do pesquisador e seguem o fluxo do discurso, utilizando-se de linhas simples para associações dos sujeitos da pesquisa e linhas duplas para as intervenções do pesquisador.

Em suma, as árvores associativas são estratégias adequadas para a compreensão de determinadas passagens das entrevistas (ou de qualquer outro material discursivo), em que buscamos entender a construção (ou coconstrução) do argumento. [...] São, assim, mais sintéticas e, por isso mesmo, estratégias potentes de visualização da construção argumentativa. Constituem, portanto, estratégias analíticas complementares aos mapas (SPINK, 2013, p. 93).

As *linhas narrativas* são utilizadas para esquematizar os conteúdos como ilustrações e/ou posicionamentos indentitários, por exemplo as respostas às perguntas de um questionário, ou, ainda, sempre que no contexto de uma entrevista ou de um texto emergir uma narrativa (SPINK, 2013).

Sempre que no contexto de uma entrevista ou texto, emergir uma narrativa, pode-se usar a linha narrativa como recurso analítico. Constitui,

sem dúvida, uma imposição de linearidade, visto que busca situar cronologicamente (numa linha horizontal) os eventos marcadores da história contada. Como nem sempre as histórias são contadas de forma linear, as linhas narrativas, constituem esforços de compreensão pautados numa perspectiva temporal que nem sempre faz justiça à construção argumentativa (SPINK, 2013, p. 94).

Essas técnicas visam o processo de interpretação dos sentidos produzidos e/ou utilizados, e a possibilidade de uma hermenêutica em que “o rigor passa a ser concebido como a *possibilidade de explicar os passos da análise e da interpretação de modo a propiciar o diálogo*” (SPINK, 2013, p. 80, grifo da autora).

Spink (2013) concebe o processo de interpretação como um processo de produção de sentidos do pesquisador em relação à questão norteadora da pesquisa, sendo este:

[...] o meio e o fim de nossa tarefa de pesquisa. Como *atividade-meio*, propomos que o diálogo travado com as informações que elegemos como nossa matéria-prima de pesquisa nos impõe a necessidade de dar sentido: conversar, posicionar, buscar novas informações, priorizar, selecionar são todos decorrências do sentido que atribuímos aos eventos que compõe o nosso percurso da pesquisa. [...] A interpretação emerge, dessa forma, como elemento intrínseco ao processo de pesquisa. Não haveria, assim, momentos distintos entre o levantamento das informações e a interpretação. Durante todo o percurso da pesquisa estamos imersos no processo de interpretação (SPINK, 2013, p. 82).

Visando os procedimentos metodológicos delineados por Spink (2013), nessa pesquisa a imersão no conjunto de dados se dá na medida em que os dados são coletados. A produção de sentidos a partir dos dados coletados é feita nas idas e vindas a cada coleta, notas são tomadas e a interpretação aflora pensando e repensando os próximos passos da análise de dados, à luz das teorias de base adotadas.

A análise dos dados coletados foi feita por meio da análise das práticas discursivas que, aos olhos das pesquisadoras, dá indícios do uso da linguagem e dos procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática. A interpretação dos dados e o confronto com o referencial teórico, assumido nos capítulos dois e três, são delineados por meio do uso das técnicas de análise *árvores de associação de ideias e linhas narrativas*. A partir do uso dessas técnicas de análise elaboramos categorias que dizem respeito ao uso de Matemática em atividades de modelagem matemática, considerando a perspectiva

wittgensteiniana, e, neste momento, utilizamos as árvores de associação de ideias de Spink (2010; 2013) de modo a entender como os conteúdos analisados se organizam em torno dos eixos temáticos de cada categoria de análise, definida *à posteriori*.

Consideramos que se faz necessário apresentar a revisão bibliográfica e as teorias de base que se transformaram nos *óculos* para a interpretação dos dados coletados na pesquisa empírica, tanto para o confronto entre os sentidos construídos inicialmente, quanto para a construção das categorias de análise da pesquisa.

CAPÍTULO 2

MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Este capítulo está organizado de modo a contemplar três aspectos que são importantes para a realização de nossa pesquisa:

- A fim de situar o local dessa pesquisa no que tange à área de Modelagem Matemática na Educação Matemática, delineamos aspectos da modelagem matemática como região de inquérito na Educação Matemática – como área de pesquisa.
- A literatura sobre modelagem matemática na sala de aula é abordada a fim de introduzirmos nosso entendimento de Modelagem Matemática na Educação Matemática.
- Por fim, refletimos sobre as indicações da literatura a respeito dos usos de Matemática em atividades de modelagem matemática.

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO REGIÃO DE INQUÉRITO

A pesquisa em modelagem matemática, no âmbito nacional e internacional data de mais de trinta anos e contempla diferentes propósitos. Araújo (2010) e Klüber e Burak (2014), são alguns dos autores que indicam um panorama das pesquisas sobre modelagem matemática no âmbito nacional, bem como Sriraman, Kaiser e Blomhøj (2006) no âmbito internacional.

Dos anos iniciais do Ensino Fundamental (LUNA; SOUZA; SANTIAGO, 2009; SILVA; KLÜBER, 2012; TORTOLA, 2012; 2016; entre outros) ao Ensino Superior (BASSANEZI, 2002; PALHARINI, 2010; ALMEIDA, 2014a; 2014b, entre outros) a pesquisa em modelagem matemática contempla diferentes concepções e possibilidades, em particular no cenário nacional.

A modelagem matemática como região de inquérito já tem seu espaço no âmbito da Educação Matemática Crítica (ARAÚJO, 2009; 2012), na formação de professores (SILVA; BARBOSA, 2011; BISOGNIN; BISOGNIN, 2012; TAMBARUSS; KLÜBER,

2014), e aliada ao uso das tecnologias digitais da informação e da comunicação (DALLAVECHIA; MALTEMPI, 2012), bem como em pesquisas que associam modelagem matemática e Etnomatemática (ROSA; OREY, 2012), e que versam sobre modelagem matemática e filosofia da linguagem (ALMEIDA, 2014; ALMEIDA; TORTOLA; MERLI, 2012; SOUZA, 2012), entre outros.

O uso de teorias cognitivas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática também tem espaço nas pesquisas brasileiras: associadas à semiótica (ALMEIDA; SILVA, 2012; ALMEIDA, 2010), à aprendizagem significativa (ALMEIDA; FONTANINI, 2010); e no desenvolvimento do pensamento matemático (ALMEIDA; PALHARINI, 2012; BURAK; BRANDT, 2010), por exemplo.

Neste cenário, algumas pesquisas abordam discussões filosóficas no sentido de descrever, analisar e conhecer o fenômeno da Modelagem Matemática na Educação Matemática. Por meio dessa descrição é possível explicar, colocar em evidência, confrontar interpretações de pesquisadores com a prática de modelagem matemática (CIFUENTES; NEGRELLI, 2012; VELEDA; ALMEIDA, 2010; SOUZA 2012).

Uma pluralidade de ideias é veiculada, bem como uma multiplicidade de concepções sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, entre eles: ambiente de aprendizagem (BARBOSA, 2001); alternativa pedagógica (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012); tendência pedagógica (BRASIL, 1997); metodologia de ensino (BURAK, 2010).

No âmbito internacional Kaiser e Sriraman (2006) sistematizaram diferentes perspectivas da modelagem matemática no âmbito de pesquisas: a Perspectiva Realística, associada à Matemática Aplicada; a Modelagem Contextual, associada à resolução de problemas de palavras; a Modelagem Educacional, contemplando Modelagem Didática e Modelagem Conceitual; a Modelagem Sócio Crítica; e a Modelagem Teórica ou Epistemológica.

Segundo Niss (2015, p. 67), o esboço do entendimento de modelagem matemática com o propósito de “capturar, representar, compreender, ou analisar a existência de fenômenos, situações ou domínios, extra-matemáticos, geralmente como um meio de responder a questões práticas, intelectuais e científicas – e resolver problemas relacionados – pertencentes ao domínio em análise”, nos leva a dois propósitos distintos: modelagem

matemática associada à concepção, organização ou estruturação de domínios extramatemáticos – *modelagem prescritiva* –, e modelagem matemática com o foco na descrição de fenômenos – *modelagem descritiva* –.

Para este autor, questões envolvendo dinâmicas populacionais, variação de temperaturas, a contaminação do vírus das inúmeras gripes da atualidade, entre outras, não podem ser respondidas apenas utilizando de conceitos matemáticos, e ao mesmo tempo, não podem ser respondidas, satisfatoriamente, sem que se utilize Matemática (NISS, 2015).

Para Galbraith (2012), a pesquisa em modelagem matemática, para além das perspectivas delineadas por Kaiser e Sriraman (2006), pode ser distinguida em dois gêneros, em que tais perspectivas poderiam ser acopladas, como conteúdo e como veículo:

Modelagem como um “veículo”, para introduzir um conteúdo curricular, bem como suas especificidades relacionadas, ou modelagem para capacitar os alunos a aprender e aplicar técnicas de modelagem para resolver problemas reais, relevantes em seu mundo – modelagem como “conteúdo”. Faz-se justo permitir que ambos os gêneros de modelagem possam ser incluídos em alguns contextos educativos a fim de atingir metas complementares (GALBRAITH, 2012, p. 4, tradução nossa).

Estes gêneros de modelagem matemática não se contrapõem, e podem, por vezes, se complementar, como discute Galbraith (2012, p. 5, tradução nossa): “na tentativa de resolver problemas genuínos, novos conteúdos matemáticos podem surgir, do mesmo modo que os contextos do mundo real podem fornecer veículos legítimos para a introdução da Matemática desejada”.

Para introduzir conteúdos de matérias curriculares, a modelagem matemática se torna o veículo que pode proporcionar a aprendizagem de conteúdos. No cenário nacional, uma das abordagens da Modelagem Matemática na Educação Matemática está associada à perspectiva de modelagem como veículo, por exemplo, os documentos oficiais brasileiros (BRASIL, 1997; PARANÁ, 2008) ressaltam a importância do uso de situações contextualizadas, nas quais os alunos utilizem de conceitos matemáticos para lidar com os problemas da vida. Neste contexto, a modelagem matemática é sugerida como uma alternativa para o ensino de Matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

A modelagem matemática como conteúdo pode ser entendida a partir de uma “relação simbiótica entre matemáticos e educadores matemáticos”, visto que o foco se dá

na aprendizagem de técnicas de modelagem matemática a fim de resolver problemas não matemáticos (GALBRAITH, 2012, p. 7, tradução nossa). Como exemplo de modelagem matemática como conteúdo podemos citar o uso de modelagem matemática nas engenharias, em que o foco está na resolução de um problema não matemático e não na aprendizagem do conteúdo matemático, especificamente.

Para essa pluralidade de pesquisas, desafios e possibilidades são apontados, por exemplo, por Blum et. al. (2002) que ao discutir os objetivos de pesquisa do ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*) para aplicações e modelagem na Educação Matemática, lança questões e desafios para a modelagem matemática. No que diz respeito à questão sobre epistemologia da modelagem matemática alguns dos questionamentos são:

Como ocorre a relação entre Aplicações e Modelagem e Matemática, incluindo seus domínios, conceitos, representações, habilidades, métodos e meios de prova? [...] Que partes da Matemática, caso existam, são menos propensas a ser representadas por meio de aplicações e Modelagem?; Quais partes das Aplicações e Modelagem, caso existam, são menos propensas a serem representadas por meio de matemática?; Qual o significado e o papel da abstração, formalização e generalização em Aplicações e Modelagem?; Qual o significado e o papel das provas e do ato de provar em Aplicações e Modelagem? [...] (BLUM et. al., 2002, p. 159, tradução nossa).

Mais de uma década depois, Pollak (2015, p. 268, tradução nossa), sinaliza que ao lidar com a Matemática em atividades de modelagem matemática os envolvidos estão sujeitos a questionamentos que não fariam em outro tipo de atividade.

Em uma situação de modelagem matemática, a matemática pura perde parte de sua soberania. A qualidade de um resultado é julgada, não só com base nos procedimentos matemáticos utilizados na situação matemática idealizada, mas também pelo sucesso do confronto desta com a realidade. Se o resultado não faz sentido em termos da situação original no mundo real, não é uma solução aceitável (POLLAK, 2015, p. 268, tradução nossa).

Mesmo que a Matemática Pura não seja o foco em atividades de modelagem matemática, faz-se importante se atentar para o rigor nos usos de conceitos matemáticos, bem como na justificação de tais usos. Nesse contexto, Otte e Barros (2015) indicam que o

principal perigo para a Educação Matemática está associado ao empirismo e reducionismo que os pensamentos do dia a dia podem causar.

Especificamente, em modelagem matemática, entre os principais problemas que alunos e professores enfrentam está o fato de que a modelagem matemática é, antes de tudo, sempre sobre alguma coisa, sobre uma situação e um problema que decorre desta situação, e, nesse contexto, a Matemática se torna *apenas* parte do processo (PERRENET; ZWANEVELD, 2012).

Segundo Klüber e Burak (2009, p. 13), quando o foco, na Educação Matemática, é a modelagem matemática:

[...] há uma tendência de que o ensino de Matemática seja predominantemente empirista. Assim, acredita-se que apenas o desenvolvimento da atividade embasada no fazer matemático e na própria prática do professor oferecerá as respostas para um bom desenvolvimento do ensino de Matemática, como se a aprendizagem fosse uma causa/consequência imediata do ensino.

Essa perspectiva caracteriza-se como problemática, uma vez que pode impedir avanços significativos no reconhecimento de aspectos como: o conteúdo, o sujeito da aprendizagem, o papel da construção do conhecimento e outros; que, em nosso entender, constituem-se como fundamentais para qualquer prática educativa. Tal visão não é condizente com uma base epistemológica que leva em consideração não apenas o fazer, mas o compreender a Matemática, aliada a uma concepção de sujeito que aprende e uma concepção de construção de conhecimentos.

Ocorre que, dos três tipos de problemas que envolvem a Matemática, problemas de modelagem, problemas de palavras e problemas interiores à Matemática, os problemas interiores à Matemática, geralmente, não têm conexão com situações reais (SCHUKAJLOW et al., 2012).

Blum e Ferri (2009) sinalizam que a Modelagem Matemática na Educação Matemática pode auxiliar os alunos na compreensão do mundo, dar suporte à aprendizagem matemática por meio de motivação, compreensão e formação de conceitos, bem como contribuir para desenvolver várias competências matemáticas e para a construção de uma imagem adequada da Matemática¹².

¹² A discussão sobre Matemática será tratada no capítulo 3, em uma perspectiva wittgensteiniana.

No desenvolvimento de modelagem matemática diferentes procedimentos são tomados, ora com vistas à situação-problema original, ora com vistas à situação-problema idealizada matematicamente. Para esboçar um entendimento sobre estes procedimentos, ações e fases contempladas pela atividade de modelagem matemática, abordamos a modelagem matemática na sala de aula.

MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Para falar sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática nos referimos, também, ao uso que dela fazemos em sala de aula. De modo geral, as pessoas – alunos, professores, matemáticos, entre outros – envolvidas com a modelagem matemática, se engajam em atividades em que precisam “formular uma situação-problema, decidir o que manter e o que ignorar na criação de um modelo idealizado, fazer uso de matemática na situação idealizada, e então decidir se os resultados fazem sentido face à situação original” (POLLAK, 2015, p. 267, tradução nossa).

Segundo Galbraith (2012), no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, algumas questões são importantes: É importante ser capaz de definir um problema a partir de uma situação associada ao *mundo real*? Formular e defender um modelo matemático apropriado para lidar com a situação? Resolver a Matemática envolvida no modelo? Interpretar os resultados matemáticos em termos de suas implicações e significados? Avaliar e relatar os resultados do modelo tanto em termos da validade Matemática, quanto em termos de sua relevância para a questão original? Revisitar e desafiar o material produzido em qualquer parte da modelagem matemática, no interesse do aprimoramento dos resultados? O autor aponta que caso a resposta para essas questões for *sim*, então estamos caracterizando uma atividade de modelagem matemática.

Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p. 79) indicam que:

[...] a Modelagem Matemática possui diversas perspectivas, tanto na Matemática Aplicada quanto na Educação Matemática. No contexto da Educação Matemática, pode ser compreendida como um caminho para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática ou para o “fazer” Matemática em sala de aula, referindo-se à observação da realidade (do aluno ou do mundo) e, partindo de questionamentos, discussões e

investigações, defronta-se com um problema que modifica ações na sala de aula, além da forma como se observa o mundo.

Neste contexto, tomando como ponto de partida as ações dos alunos, em uma atividade de modelagem matemática, na sala de aula, a dinâmica de uma atividade de modelagem matemática, de modo geral, se inicia com uma situação-problema que pode ser direcionada pelos professores, ou definida pelos alunos. Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15) uma atividade de modelagem matemática tem “em uma situação problemática a sua origem e tem como característica essencial à possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à Matemática”.

As fases de uma atividade de modelagem matemática, em que ocorre a ação do sujeito para com a situação-problema, são caracterizadas por estes autores como inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. Tais fases contêm ações dos alunos, os quais partem de uma situação inicial (problemática) em direção a uma situação final (solução para a situação inicial) (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Na inteiração o sujeito se inteira, se informa, torna-se ciente da situação inicial e das especificidades de tal situação. Este primeiro contato com a situação inicial permite que os alunos deem forma a uma situação-problema. O delineamento desta situação pode instigar os sujeitos na formulação de questões a investigar, caminhos a percorrer e suposições que permitam direcioná-los a respostas com relação ao problema inicial.

A matematização compreende a leitura e estruturação da situação-problema por meio de uma linguagem matemática. Almeida, Silva e Vertuan (2012) indicam que é nessa fase que ocorre uma transição de linguagens, da linguagem natural – na qual a situação-problema é apresentada, para a linguagem matemática.

A partir do momento em que os alunos matematizam a situação-problema, podemos dizer que estes estão com uma situação matemática idealizada (termo já citado neste texto, de acordo com Pollak (2015)).

É por meio dessa situação matemática idealizada que os alunos podem iniciar o tratamento matemático dos dados, utilizar de conceitos matemáticos, técnicas e procedimentos que auxiliem na busca por uma solução. Resolução é o nome da fase em que este movimento ocorre, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012). Torna-se possível aqui a

elaboração de um modelo matemático para a situação matemática idealizada e, conseqüentemente, para responder os questionamentos levantados na situação-problema.

O modelo matemático é, por nós, entendido como um conjunto de relações matemáticas, pode ser um gráfico, um registro tabular, uma expressão algébrica, ou ainda, um amálgama destes, e de outros instrumentos matemáticos, que auxiliem o sujeito a responder à situação matemática idealizada e à situação-problema inicial.

Muitas vezes, pode ser necessário que os sujeitos avaliem as respostas da situação matemática idealizada com possíveis respostas à situação-problema. Aqui ocorre o confronto dos resultados obtidos com a realidade. De acordo com Pollak (2015, p. 268, tradução nossa), é preciso validar estes resultados frente à situação inicial estudada e “se o resultado não faz sentido em termos da situação original no mundo real, não é uma solução aceitável”. Essa fase é denominada por Almeida, Silva e Vertuan (2012) de interpretação e validação dos resultados.

Nesse contexto, uma atividade de modelagem matemática pode ser caracterizada pela presença dos elementos: situação-problema, Matemática, processo investigativo e análise interpretativa (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). E implícita está a ação do sujeito.

E é no percurso, nas idas e vindas, por essas fases que é possível identificar o que Almeida e Ferruzzi (2009, p. 121) denominaram de procedimentos dos alunos nas atividades de modelagem matemática:

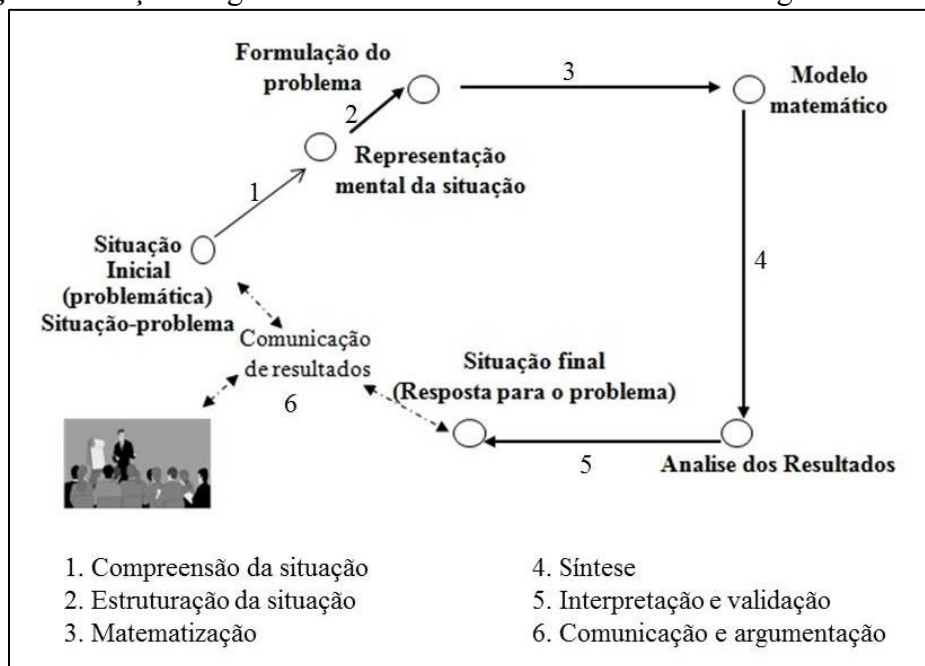
[...] a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático), a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009, p. 121).

Tais atividades, quando utilizadas como uma alternativa pedagógica para ensinar Matemática, podem se caracterizar como atividades investigativas. Principalmente, se direcionarmos nosso olhar para o trabalho desenvolvido pelos sujeitos, modeladores:

A caracterização da Modelagem Matemática em relação a outras atividades investigativas reside justamente na presença desse conjunto de

ações [Figura 2.1]. Ou seja, o “aluno modelador” se envolve com essas ações. Esse envolvimento pode ser mais ou menos intenso em algumas atividades, dependendo da familiarização do aluno com atividades de modelagem [...] (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 19).

Figura 2.1 Ações cognitivas dos alunos na atividade de modelagem matemática



Fonte: Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 19).

Almeida e Dias (2004) ponderam que atividades de modelagem matemática podem ser introduzidas nas aulas de Matemática de modo gradativo. Primeiramente o professor leva para a sala de aula uma situação-problema já estruturada, advinda da literatura ou elaborada por ele, contendo dados e informações necessárias para a solução da situação. Aos alunos cabe a tarefa de identificar a situação matemática idealizada pelo professor, bem como desenvolver um modelo matemático para solucionar a situação.

Dando continuidade ao processo de familiarização com atividades de modelagem matemática, o professor pode sugerir um problema para que a turma investigue. Nesse contexto, a coleta de dados, a idealização da situação matemática, e o desenvolvimento da atividade podem ficar a cargo dos alunos, em grupo, juntamente com o professor.

Por fim, os alunos, já familiarizados com os procedimentos necessários para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática podem atuar como modeladores, escolhendo um tema de seu interesse, coletando dados, idealizando uma ou

várias situações matemáticas, selecionando variáveis, elaborando suposições, hipóteses, desenvolvendo modelos matemáticos e solucionando as situações de seu interesse, naquele contexto.

Nesta pesquisa, optamos pela introdução gradativa de atividades de modelagem matemática, de acordo com Almeida e Dias (2004). O trabalho dos alunos, associado ao terceiro momento foi feito, também, de modo gradativo, sendo que os grupos se engajaram em dois trabalhos dessa natureza, os primeiros trabalhos deste tipo elaborados por eles foram entregues no primeiro semestre de 2015, e, em sua segunda experiência no terceiro momento, entregues no primeiro semestre de 2016.

Além de saber o quê envolve uma atividade de modelagem matemática, e como introduzir tais atividades na sala de aula, consideramos importante sinalizar os *motivos* do uso de tais atividades em sala de aula.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), diferentes aspectos podem ser citados na defesa deste tipo de atividade em sala de aula: aspectos motivacionais e relações com a vida fora das escolas, ou com as aplicações da Matemática; o uso do computador nas aulas de Matemática; a realização de trabalhos cooperativos; o desenvolvimento do conhecimento crítico e reflexivo; o uso de diferentes registros de representação; a ocorrência da aprendizagem significativa; entre outros. Para esses autores, o uso da modelagem matemática está associado a uma série de ganhos para todos os atores envolvidos no processo. “Ganhos que provavelmente se converterão em inclusão social, na medida em que os conhecimentos advindos das experiências de modelagem possibilitarem a participação dos alunos e professores em discussões em que a Matemática é utilizada” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 154).

A fim de elucidar aspectos do uso da linguagem e dos procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática, retomamos a discussão introdutória dessa tese e nos dedicamos na explicitação do que queremos dizer quando nos referimos à Matemática em atividades de modelagem matemática a partir de literatura da área.

Retomamos aqui a discussão iniciada na introdução deste texto e buscamos evidenciar, de acordo com aspectos da literatura da área de Modelagem Matemática na Educação Matemática, em que medida se dá os usos da linguagem, em particular da linguagem matemática – com a qual é possível o uso de procedimentos matemáticos, em atividades de modelagem matemática.

Entendemos a Modelagem Matemática na Educação Matemática como uma alternativa pedagógica para o ensino de Matemática que pode viabilizar a formação do sujeito para os usos da linguagem matemática, de seus conceitos, procedimentos e técnicas na sociedade. Concordamos com a assertiva de D'Ambrosio (2007, p. 177) de que “a Matemática fornece instrumentos importantes para diferentes análises na sociedade”.

Neste contexto, a modelagem matemática é um meio de usar Matemática na solução de problemas cuja origem não está na Matemática. Durante a atividade de modelagem matemática, diferentes temáticas podem ser discutidas e analisadas, como por exemplo, problemas de trânsito, a situação econômica do país, agências governamentais existentes, entre outros. A Matemática está ali como um meio de analisar tais situações e lê-las utilizando de recursos e técnicas específicos à linguagem matemática. Dito deste modo, a modelagem matemática está associada ao uso de aplicações da Matemática.

Já em 1979 Henry Pollak, um dos pioneiros no campo das aplicações e da Modelagem Matemática na Educação Matemática, discorria sobre interações entre Matemática e outros conteúdos escolares, enfatizando os papéis exercidos pelas aplicações de Matemática, em outras áreas da Ciência e do cotidiano. No âmbito da Educação Matemática, o autor sinaliza que “experiências com modelagem são muito valiosas para os alunos, pois, além de seu valor pedagógico, se constituem como uma antecipação precisa de aplicações matemáticas no mundo real” (POLLAK, 1979, p. 240, tradução nossa).

O autor sinaliza ainda a importância de que professores de Matemática ensinem diferentes usos da Matemática, o que pode ser feito por meio do uso de atividades de modelagem matemática:

A Educação Matemática é, no mínimo, responsável por ensinar como usar Matemática na vida cotidiana e na cidadania, e não podemos nos esquecer

disso. Atualmente, qualquer separação das Ciências da vida cotidiana é uma ilusão. A vida cotidiana e a cidadania frequentemente envolvem questões científicas. Então, o que realmente importa na Educação Matemática é aprender e praticar o processo de modelagem matemática. O campo particular de aplicação, seja na vida cotidiana, ou no uso para o bom exercício da cidadania, ou para o entendimento de alguma parte da Ciência, esses fatores são menos importantes do que a experiência com o processo de modelagem (POLLAK, 2012, p. ix, tradução nossa).

De modo geral, o uso da Matemática em atividades de modelagem matemática, é sinalizado na literatura por meio do uso do termo matematização e no processo de (re)construção de modelos matemáticos, avaliação e validação de modelos matemáticos.

Como visto na introdução, Almeida, Silva e Vertuan (2012) abordam o termo no sentido de uma transição entre a linguagem natural (associada à situação inicial) para a linguagem matemática. Já Kaiser e Sriraman (2006) e Almeida e Silva (2015) abordam o processo de matematização advindo da Educação Matemática Realística e definem o que seriam matematização vertical e matematização horizontal em atividades de modelagem matemática. Segundo Kaiser e Sriraman (2006), matematização horizontal em modelagem matemática indica o caminho da realidade para a matemática, e uma matematização vertical indica o trabalho dos modeladores dentro da própria matemática.

Vidigal e Bean (2016) abordam a *matematização*, em atividades de modelagem matemática, como a conceituação ou estruturação de uma situação por meio de Matemática. Os autores sinalizam três tipos de matematização em atividades de modelagem matemática: na definição do quê e de como considerar as informações para o desenvolvimento da atividade; no ajuste de funções a partir de um conjunto de dados conhecido; na relação de uma ou mais áreas da ciência, inter-relacionando conceitualmente diferentes comunidades para a construção de uma ideia Matemática.

Freitas (2013) defende uma matematização (horizontal) crítica em atividades de modelagem matemática, que:

[...] não se restringe à construção do modelo matemático para a representação da situação-problema explorada. Dentro dessa concepção educativa que abraço, a análise da situação simplificada e recortada, e que viabiliza a construção do modelo matemático, não deve desconsiderar o entendimento ampliado da situação global que estava na origem do projeto. Destaco ainda que uma matematização crítica em projetos de modelagem busca se constituir e se estabelecer como sendo socialmente relevante para os alunos envolvidos no processo (FREITAS, 2013, p. 28).

Assim, matematizar uma situação-problema não significa apenas obter para ela um modelo matemático, mas problematiza-la por meio da linguagem matemática, lê-la com *óculos matemáticos*, e fazer uso de Matemática para auxiliar os sujeitos nas diferentes situações-problema modeladas.

Na discussão da seção anterior, sobre a modelagem matemática na sala de aula, sinalizamos que uma atividade de modelagem matemática tem início em uma situação-problema não essencialmente da Matemática, e para resolvê-la o modelador faz simplificações, idealiza uma situação matemática, seleciona variáveis, formula hipóteses, elabora modelos matemáticos, responde a situação matemática e a interpreta, à luz da situação-problema inicial, para responder aos questionamentos iniciais.

Parece-nos difícil delimitar o momento em que o uso da Matemática tem início, entendemos que já quando os modeladores realizam simplificações em uma situação inicial o *olhar* lançado sobre os conceitos matemáticos que podemos utilizar pode direcionar a idealização de uma situação matemática, como explicitado por Pollak (2015).

Segundo Vidigal e Bean (2016):

[...] a matematização já começou quando aspectos da situação foram concebidos em termos numéricos, como no caso em que dados são representados como pontos de um gráfico de dispersão. Ao fazer um ajuste de uma curva conhecida aos dados, obtém-se um retrato algébrico global do comportamento destes (VIDIGAL; BEAN, 2016, p. 253).

Para o estudo da situação-problema inicial, os sujeitos partem para a identificação de variáveis e o delineamento de hipóteses. Daremos especial atenção à formulação de hipóteses em atividades de modelagem matemática, visto que a entendemos como guias para o uso de procedimentos e conceitos matemáticos nessas atividades (ALMEIDA, 2014).

No âmbito da modelagem matemática as discussões com relação ao uso de hipóteses em atividades de modelagem matemática não são ignoradas (BEAN, 2001; BEAN, 2012; BEAN, 2015; ALMEIDA, 2014; BASSANEZI, 2002; ALMEIDA, SOUSA, TORTOLA, 2015).

Questionamentos como: Qual é o significado da palavra hipótese? Em que consiste a formulação de hipóteses? Qual a finalidade da formulação de hipóteses no

desenvolvimento de atividades de modelagem matemática?, podem ser formulados visto que no processo investigativo que compõe a atividade de modelagem matemática, diferente de outras atividades, as hipóteses têm importante papel, pois é a partir das hipóteses que os alunos decidem os conceitos matemáticos possíveis para solucionar as situações, matemática e inicial.

Segundo Bean (2001, p. 53), o uso de hipóteses é uma especificidade das atividades de modelagem matemática “a exigência das hipóteses e das aproximações simplificadoras como requisitos na criação do modelo”. O mesmo autor estenderia suas ponderações sobre esta exigência e possíveis implicações para os modelos matemáticos produzidos em trabalhos posteriores publicados (BEAN, 2012; BEAN, 2015).

Para Bassanezi (2002, p. 28), “as hipóteses dirigem a investigação e são comumente formulações gerais que permitem ao pesquisador deduzir manifestações empíricas específicas”. Hipóteses podem surgir a partir da observação do fenômeno em estudo, da comparação com outros estudos, por dedução lógica, da experiência pessoal do sujeito, entre outros.

Almeida (2014) sugere que a natureza de uma hipótese em modelagem matemática tem características de uma suposição bem fundamentada. Tal suposição, advinda da situação inicial, direciona o olhar dos sujeitos para a Matemática que será utilizada na fase de resolução, descrita por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Neste contexto, Grigoraş (2012) discute que as hipóteses que emergem em atividades de modelagem matemática não têm a mesma natureza das hipóteses utilizadas em teorias científicas. É na discussão entre os sujeitos que desenvolvem as atividades que hipóteses são levantadas, muitas vezes, mais do que para uma mesma situação. E o trabalho não visa comprovar a hipótese por meio do modelo matemático, mas é o uso da hipótese que direciona qual modelo matemático melhor condiz com a situação em estudo. Podemos dizer, então, que hipóteses são assumidas na modelagem matemática para o desenvolvimento da atividade, em particular de modelos matemáticos.

É na elaboração de modelos matemáticos que diferentes instrumentos e artefatos matemáticos são colocados em evidência por parte dos modeladores. Para Stillman, Brown e Geiger (2015, p. 95-96, tradução nossa), é neste contexto que os alunos *jogam* com domínios específicos da Matemática:

O domínio da Matemática inclui a elaboração do modelo matemático para a situação, questões matemáticas e artefatos matemáticos (por exemplo, gráficos e tabelas) utilizados na solução do modelo matemático. Resultados matemáticos (isto é, as respostas) devem, então, ser interpretadas em termos da situação idealizada e da situação real que estimulou a Modelagem (isto é, de volta para o domínio extra-matemático).

Os autores sinalizam que o domínio da Matemática **inclui** a elaboração do modelo matemático, e aqui retomamos nosso posicionamento de que não é apenas na obtenção do modelo que o uso de Matemática ocorre em atividades de modelagem matemática. No entanto, a discussão a respeito de modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática indica que:

[...] a obtenção do modelo matemático, pressupõe, por assim dizer, a existência de um dicionário que interpreta, sem ambiguidades, os símbolos e operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado, e vice-versa (BASSANEZI, 2002, p. 25).

Barbosa (2009, p. 77-79) discute o papel dos modelos matemáticos na Educação Científica. Para o autor o modelo matemático pode servir “ao papel de oferecer argumentos para sustentar a introdução de um novo conceito” – modelo matemático como justificativa; pode se colocar no lugar do próprio conceito – modelo matemático como definição; “podem cumprir o papel de deslocar partes do discurso pedagógico da matemática para o ordenamento de fenômenos focalizados na educação científica” – modelo matemático como estruturante. Em todos os casos, ocorre o estudo de uma teoria matemática que visa dar suporte aos objetivos dos sujeitos nos usos que fazem dos modelos matemáticos.

Tais papéis são baseados em incursões no discurso pedagógico da matemática (já que estamos falando de práticas pedagógicas) em diferentes modos e graus de apropriação. Eles são baseados no fato de que os alunos também participam de aulas de matemática e, portanto, estão aptos a reconhecerem seus conceitos e procedimentos. Porém, muitas vezes, a “transferência” do campo da matemática para as aulas de ciências não é trivial (BARBOSA, 2009, p. 80).

Dependendo da concepção dos autores, a elaboração e avaliação do modelo matemático podem culminar em uma *teoria*:

O modelo matemático finalmente obtido é uma *teoria* que pode estar dada por uma coleção de equações de diversos tipos, por exemplo, algébricas ou diferenciais, dependendo da complexidade do recorte a ser modelado, ou por uma coleção de sentenças que, como as equações, podem ser consideradas conjecturas (axiomas) sobre a realidade em estudo. Essa teoria estará formulada numa determinada linguagem e terá uma lógica subjacente que, no caso da teoria estar dada, por exemplo, por equações, poderia estar constituída pelas regras e procedimentos que nos conduzem à resolução dessas equações. Nessa etapa, da confecção do modelo, revela-se o caráter conjectural do processo de Modelagem Matemática, cujas conclusões, então, não necessariamente são verdadeiras, senão plausíveis, sobre os fenômenos da realidade inicial em estudo (CIFUENTES; NEGRELLI, 2011, p. 131).

Ao serem questionados sobre o uso de Modelagem Matemática na Educação Matemática, modeladores profissionais, argumentam que a modelagem matemática poderia ser uma parte da Educação Matemática na Educação Básica (FREJD, 2015). Para os profissionais entrevistados por Frejd (2015) a modelagem matemática, neste nível de escolaridade, poderia ser enfatizada como parte da educação geral dos estudantes, colaborando para conscientização dos estudantes sobre como modelos matemáticos são utilizados na sociedade.

Assim, quando consideramos a elaboração de modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática, o domínio de técnicas matemáticas e o conhecimento de conceitos matemáticos podem se tornar um *estopim* para a atividade, bem como um obstáculo.

De acordo com Pollak (2012, p. xi, tradução nossa):

O coração da modelagem matemática [...] é a formulação de problemas antes da resolução destes. Tantas vezes em Matemática dizemos “provar o seguinte teorema” ou “resolver o seguinte problema”. Quando começamos neste ponto, estamos ignorando o fato de que encontrar o teorema ou o problema certo já é grande parte da batalha. Ao enfatizar o aspecto da formulação do problema, a modelagem matemática traz de volta à Educação Matemática a formulação de problemas e reforça, muito, a unidade da experiência em Matemática.

Podemos considerar, portanto, que o uso dos conceitos matemáticos é parte fundamental das atividades de modelagem matemática e a mobilização de tais conceitos ocorre por meio de diferentes usos da linguagem. Nessas atividades, o que os alunos sabem pode ser valorizado, bem como novos conhecimentos podem ser construídos a partir da demanda gerada pela atividade:

Ao fazer uso da matemática, considerando tanto o uso de algoritmos quanto conceitos matemáticos em si, os alunos podem aplicar conhecimentos já construídos durante as aulas ou construir novos conhecimentos. Em muitas situações, ao se envolver com atividades de modelagem, os alunos se deparam diante de um obstáculo para o qual não possuem, provisoriamente, conhecimentos suficientes para superá-lo, emergindo assim a necessidade de construir esse conhecimento por meio dessa atividade (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 17).

Nesse contexto, a partir da formulação de hipóteses e da elaboração de modelos matemáticos, diferentes situações matemáticas podem ser abordadas de modo a dar conta de responder à problemática da situação inicial. A interpretação dos resultados matemáticos, também deve ser uma interpretação com base Matemática e aliada aos diferentes contextos abordados nas atividades de modelagem matemática.

Desse modo, o uso de Matemática permeia as atividades dos modeladores, desde a inteiração sobre o tema da atividade, na busca de dados para elaborar uma situação-problema, o trabalho na idealização de uma situação matemática, na definição de variáveis e na formulação de hipóteses, na solução para as situações-problema, até a interpretação e validação dos resultados.

Nessa pesquisa, analisamos o uso da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática à luz da perspectiva filosófica wittgensteiniana. No próximo capítulo indicamos o *locus* dessa perspectiva na literatura, recorreremos às pesquisas já produzidas para inserir e justificar nossa opção filosófica e abordamos elementos da filosofia de Wittgenstein que darão o norte para o processo da análise dos dados coletados.

CAPÍTULO 3

MATEMÁTICA E LINGUAGEM NA PERSPECTIVA DE WITTGENSTEIN

É no *passeio* pela literatura sobre a Filosofia da Linguagem, as Filosofias da Matemática e sobre a Filosofia da Educação Matemática que este capítulo se configura. Neste capítulo explicitamos a posição filosófica assumida nessa pesquisa e abordamos elementos da filosofia wittgensteiniana que serão utilizados como *óculos* para a análise interpretativa dos dados coletados na pesquisa empírica.

Os estudos da linguagem ganharam ênfase a partir da *virada linguística*, ou *giro discursivo*, em meados do século XIX. Araújo (2007) pontua características da virada linguística e considerações sobre o tratamento da linguagem neste contexto:

Essa virada foi o solo epistemológico no qual surgiu a ciência da linguística (Saussure e Hjelmslev), a lógica matemática (Frege, Russell), a solução ao problema da denotação (Wittgenstein), a hermenêutica (Gadamer, Heidegger), a semiótica (Peirce), o estruturalismo (Jakobson, Barthes). O pressuposto comum a eles, é que a linguagem (em seus aspectos sintáticos, formais, lógicos, estruturais, semânticos) permite operações como pensar, conhecer, deduzir; ou seja, as operações supostamente “mentais” ou “cognoscitivas” não passam de uma cortina de fumaça platônica, cartesiana. A linguagem não se reduz a um simples instrumento para o pensamento representar as coisas, sua estrutura articulada, é independente de um sujeito ou de uma vontade individual e subjetiva. [...] A função da linguagem vai além da simples nomeação de objetos ou designação de algo da realidade; o signo significa e como que dá instruções ao pensamento, sua significação não decorre de uma suposta relação direta com a coisa nomeada. Sem linguagem, com suas estruturas, regras de formação, e uso de atos de fala, não há pensamento, não há designação, não há referência (ARAÚJO, 2007, p. 2).

A partir da virada linguística a função da linguagem extrapola o papel representacional e ostensivo, de denominação dos objetos. De acordo com Vilela e Mendes (2011, p. 16) este movimento marca o “deslocamento da tradição estruturalista

saussuriana¹³, para o estudo da linguagem em uso, com foco no texto, na conversação, nos atos discursivos, nas interações e na cognição”.

Pode-se dizer que a Filosofia da Linguagem visa, em parte, contrapor as Filosofias da Consciência e está para além de algo que se ocupa apenas em resolver problemas de linguagem, como um *acabamento*, ou uma análise *a posteriori* da atividade filosófica. A Filosofia da Linguagem é vista como uma disciplina ulterior a qualquer atividade filosófica: “é a partir da Filosofia da Linguagem, isto é, da análise crítica da estrutura, dos limites e das possibilidades da nossa linguagem cotidiana, que poderemos estabelecer corretamente questões de teoria do conhecimento, política, ontologia, etc” (CONDÉ, 1998, p. 17).

Neste contexto, o filósofo contemporâneo, Ludwig Wittgenstein apresenta uma visão pragmática para a linguagem. Wittgenstein trabalhou principalmente em Lógica e na Filosofia da Linguagem, no entanto diferentes autores pontuam suas contribuições no que tange à Filosofia da Matemática (IZMIRLI, 2013, DUMMET, 1959; GERRARD, 1991; 1996; MORENO, 2003; WRIGHT, 1980).

O autor tem duas principais obras associadas à Filosofia da Linguagem: *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921), em que trata da linguagem de forma lógica; e *Investigações Filosóficas* (1953) em que o autor aborda o *uso* de diferentes *jogos de linguagem* como constituindo *formas de vida*.

As obras em que mais temos acesso às discussões sobre Matemática e, em particular, sobre os Fundamentos da Matemática, não foram formatadas por Wittgenstein para publicação, nem idealizadas pelo autor. *Observações Sobre os Fundamentos da Matemática* (WITTGENSTEIN, 1996), *Observações Filosóficas* (WITTGENSTEIN, 1998), e *Gramática Filosófica* (WITTGENSTEIN, 2003), são obras publicadas por alunos e herdeiros dos estudos de Wittgenstein, os quais após sua morte reuniram o material produzido pelo autor e publicaram. Tais obras, segundo Izmirli (2013), caracterizam o período intermediário na Filosofia da Matemática de Wittgenstein.

Segundo Gerrard (1991), o pensamento de Wittgenstein com relação à Matemática na fase pós-*Tractatus* pode ser entendido por meio de duas concepções: *concepção*

¹³ Segundo Vilela e Mendes (2011, p. 16) “Saussure estabelece a divisão entre língua (*langue*), sistema formal capaz de ser capturado e investigado a partir de suas estruturas (gramatical, fonológica, morfológica, semântica, etc.), e a fala (*parole*), manifestação individual do falante, não passível de investigação”.

*cálculo*¹⁴ ao período que vai de 1929 até o início da década de 1930; *concepção jogo de linguagem*, a partir da metade da década de 1930. Por volta do início da década de 1940, os textos do autor assumem a visão da Matemática, e em particular da linguagem matemática, como estabelecendo um nexos com *jogos de linguagem*.

Tanto Gerrard (1991), quanto Izmirli (2013), sinalizam que mesmo no período de transição, Wittgenstein manteve o princípio de que a Matemática é uma invenção humana, fruto da atividade humana, e os objetos matemáticos não existem por si só, sendo que a totalidade da Matemática consiste dos símbolos, proposições, axiomas e regras de inferência e transformação.

As Investigações (e algumas seções ulteriores das “Observações sobre os Fundamentos da Matemática”) enfatizam e examinam a mudança e o amadurecimento nos jogos de linguagem da matemática. Não se negligencia a aplicação, mas concentra-se sobre ela. Em vez de ver a matemática como cálculos isolados, ele a concebe em nossa forma de vida. A matemática não está mais proibida de dizer qualquer coisa sobre cálculos para além do fornecimento de regras – cálculos desempenham papéis e podem desempenhá-los de forma mais ou menos exitosa. A concepção da linguagem em geral como um nexos de jogos de linguagem é a visão das Investigações [...] (GERRARD, 1991, p. 139, tradução nossa).

O que muda na *concepção jogo de linguagem* é que significado e verdade só podem ser considerados no contexto de uma prática, e o exame matemático ocorre por meio da consideração do papel que a Matemática desempenha em nossas vidas, bem como do seu relacionamento especial com outros *jogos de linguagem* (GERRARD, 1991).

A obra *Observações Sobre os Fundamentos da Matemática* (WITTGENSTEIN, 1996) compreende uma coletânea de textos do autor que datam de 1937 a 1944, e trazem para discussão reflexões e asserções sobre os Fundamentos da Matemática, em particular sobre *provas, proposições matemáticas, regras, Matemática Pura, Matemática Aplicada*, entre outros.

Nosso caminhar filosófico, considera a filosofia de Wittgenstein, especificamente no que tange à concepção pragmática das *Investigações Filosóficas* e à concepção sobre os Fundamentos da Matemática veiculada por suas *Observações sobre os Fundamentos da*

¹⁴ Nesse contexto, o uso do termo *cálculo* está próximo de uma linguagem lógica ou matemática não-interpretada (GERRARD, 1991).

Matemática. O recurso à Filosofia nos auxiliará na construção de nosso entendimento sobre *Matemática*, sobre a *Linguagem* em *Matemática*, bem como na produção de sentidos sobre o uso da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática.

Neste capítulo, apresentamos a estrutura da concepção jogos de linguagem de Wittgenstein, aspectos abordados pelo filósofo sobre a *Matemática* em sua filosofia e uma breve revisão de literatura a respeito da perspectiva wittgensteiniana na *Educação Matemática*, a fim de situar nossa pesquisa.

A FILOSOFIA DA LINGUAGEM DE WITTGENSTEIN: A ESTRUTURA DA CONCEPÇÃO JOGOS DE LINGUAGEM

Tópico central na filosofia de Wittgenstein, os *jogos de linguagem* se definem como parte de nossas *formas de vida* e consistem de linguagem e das atividades com as quais estão entrelaçadas.

Mas quantas espécies de frases existem? Porventura asserção, pergunta e ordem? – Há inúmeras de tais espécies diferentes de emprego do que denominamos “signos”, “palavras”, “frases”. E essa variedade não é algo fixo, dado de uma vez por todas; mas, podemos dizer, novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem surgem, outros envelhecem e são esquecidos. (As mutações da matemática nos podem dar uma imagem aproximativa disso).

A expressão “jogo de linguagem” deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida.

Tenha presente a variedade de jogos de linguagem nos seguintes exemplos, e em outros:

Ordenar, e agir segundo ordens –

Descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas –

Produzir um objeto de acordo com uma descrição (desenho) –

Relatar um acontecimento –

Fazer suposições sobre o acontecimento –

Levantar uma hipótese e examiná-la –

Apresentar os resultados de um experimento por meio de tabelas e diagramas –

Inventar uma história; e ler –

Representar teatro –

Cantar cantiga de roda –

Adivinhar enigmas –

Fazer uma anedota; contar –

Resolver uma tarefa de cálculo aplicado –
Traduzir de uma língua para outra –
Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar.
- É interessante comparar a variedade de instrumentos da linguagem e seus modos de aplicação, a variedade de espécies de palavras e de frases com o que os lógicos disseram sobre a estrutura da linguagem.
(WITTGENSTEIN, 2013, § 23).

A expressão *formas de vida*, pode ser entendida como “sistemas regrados de ações convencionais e imersos na prática efetiva de nossa vida com a linguagem; sistemas em que se entrecruzam hábitos, atitudes éticas, concepções a respeito do conhecimento e decisões de vontade” (MORENO, 2003, p. 129).

Vilela (2011), nos fala que os *jogos de linguagem* são como os diferentes usos da Matemática em práticas específicas. Já Gottschalk (2004, p. 321) refere-se aos *jogos de linguagem* como os meios para que os significados sejam entendidos e ampliados e, ainda, segundo a autora, “aprender o significado de uma palavra pode consistir na aquisição de uma regra, ou um conjunto de regras, que governa seu uso dentro de um ou mais jogos de linguagem”.

Para jogar um jogo é preciso saber as regras que o regem, o comportamento que se espera neste ou naquele contexto. Mas, como explicar para alguém o que é jogo? Essa pergunta, pode por nós ser atrelada às situações de ensino e de aprendizagem, em particular de Matemática, e é nesse contexto que recorreremos a Wittgenstein (2013, § 69) quando o filósofo se remete à explicação de um jogo “Como explicaríamos para alguém o que é um jogo? Creio que descrevendo jogos, e poderíamos acrescentar à descrição: “isto e coisas semelhantes são chamados ‘jogos’””. Por exemplo, a descrição de um jogo de linguagem em Matemática pode ser associada à aprendizagem das leis de formações em determinado conjunto numérico.

Na descrição de um jogo, faz-se importante a descrição das regras que o regem, juntamente com seu objetivo. Nesse sentido, as regras do jogo são colocadas no contexto da atividade humana.

O jogo é determinado pelas regras! Se, portanto, uma regra do jogo prescreve que os reis devem ser empregados para o sorteio antes da partida de xadrez, então isto pertence essencialmente ao jogo. O que poderíamos objetar contra isso? Que não se compreende o espírito desta prescrição. Mais ou menos como se também não se compreende o espírito

de uma regra segundo o qual dever-se-ia girar cada peça antes de movê-la. Se encontrássemos esta regra num tabuleiro de jogo, ficaríamos admirados e levantaríamos suspeitas sobre a finalidade da regra. (“Será que esta prescrição deve impedir que se jogue sem reflexão?”) Se entendo corretamente o caráter do jogo – diria – então isto não pertence essencialmente ao jogo. (WITTGENSTEIN, 2013, § 567-568).

De modo geral, as atividades do cotidiano compreendem uma série de regras, que devemos seguir para nos adequar às diferentes situações com que nos deparamos. Temos regras para dirigir, regras para uma alimentação saudável, regras para viver em sociedade, entre outras. No âmbito da Matemática, as regras estão associadas aos conceitos matemáticos, por exemplo, há regras para obter as raízes de uma equação, regras para solucionar equações diferenciais, regras para organizar uma demonstração. Em nossas atividades diárias, seguimos regras sem ao menos termos consciência de que estamos fazendo isso.

Mas, regras são advindas de acordos, convenções firmadas por determinada comunidade e que se cristalizam sob a forma de regras. “As palavras “acordo” e “regra” estão *relacionadas*, elas são primas. Os fenômenos relacionados a acordos e agir de acordo com uma regra ficam juntos” (WITTGENSTEIN, 1996, p. 344, tradução nossa).

Mas, o que chamamos de regras? Como sabemos se alguém está executando, ou não, uma regra adequadamente? “A hipótese que descreve, satisfatoriamente, o seu uso das palavras, o que nós observamos; ou a regra que ele consulta ao usar os signos; ou o que ele nos dá como resposta ao lhe perguntarmos pela sua regra?” (WITTGENSTEIN, 2013, § 82).

Em Matemática, o uso de signos, símbolos, definições e conceitos são permeados de regras, seja para calcular, seja para aplicar uma proposição, seja para elaborar uma hipótese. Segundo Wittgenstein (2013, § 85):

Uma regra está aí como uma placa de orientação. – Ela não deixa em aberto nenhuma dúvida sobre o caminho que devo seguir? Mostra ela em que direção devo ir quando passo por ela: se seguindo a estrada, ou o caminho do campo, ou pelo meio do pasto? Mas onde está dito em qual sentido eu devo segui-la, se na direção da mão ou (p. ex.) na direção oposta? – E se ao invés de uma placa de orientação estivesse ali uma cadeia fechada de placas ou corresse traços de giz sobre o solo, - há apenas uma interpretação para eles? – Posso dizer, portanto, que a placa de orientação não deixa nenhuma dúvida em aberto. Ou antes: algumas

vezes ela deixa uma dúvida em aberto, outras vezes não. E isto já não é mais uma proposição filosófica, mas uma proposição empírica.

Segundo Silveira (2008, p. 5), em Matemática, quando seguimos corretamente uma regra, “mostramos que compreendemos e intuímos seu sentido, pois o contexto em que está inserido o problema matemático define qual regra devemos aplicar”. Seguir uma regra pode, ainda, ser comparado a um procedimento gramatical, algo que se dá de acordo com as relações internas estabelecidas em determinado *jogo de linguagem*.

As regras gramaticais podem ser definidas como “o resultado de formas de vida, de instituições e hábitos que podem transformar-se ou mesmo desaparecer, sendo substituídas por outras” (MORENO, 2003, p. 123).

Segundo Gottschalk (2008, p.81, grifos da autora) discute-se que “as regras não têm, elas próprias, algum significado, são apenas *condições de significado*. Têm a função de *paradigmas*, modelos que seguimos para dar sentido à nossa experiência **empírica**”.

Nesse contexto, o conceito de seguir uma regra pode, ele próprio, ser entendido como um *jogo de linguagem* com suas próprias especificidades. De acordo com Wittgenstein (1996), sabemos que a descrição das regras foi compreendida quando o outro reage de tal-e-tal forma, assim é possível dizer que ele entendeu o jogo, seja por meio do relato de exemplos, seja por meio de gestos.

Em situações de ensino e de aprendizagem lidamos com o uso de diferentes regras, que muitas vezes podem ser comparadas a técnicas para o uso de expressões, para o cálculo com equações matemáticas, entre outros. É por meio da descrição das regras do jogo, ou por meio de exemplos, que os outros podem aprender a seguir regras, e indícios do entendimento do outro podem ser vistos em suas ações. Para Wittgenstein (2013, § 146) “[...] a compreensão mesma é um estado do qual emerge o correto emprego”.

Em situações de aprendizagem, no entanto, o emprego correto de um conceito pode ser questionado, principalmente o uso do termo *correto*. Nesse sentido, o autor indica que “[...] a gramática da palavra “saber” goza de estreito parentesco com a gramática das palavras “poder”, “ser capaz”. Mas também com a gramática da palavra “compreender”. (“Dominar” uma técnica.)” (WITTGENSTEIN, 2013, § 150).

Quando começamos a jogar um *jogo de linguagem* estamos, de certo modo, criando condições para a compreensão de *algo*. Para Silveira (2008, p. 11), a compreensão se dá no encontro de diferentes linguagens: a linguagem do professor, do aluno e a da Matemática.

Segundo Miguel (2014, p. 24), “conhecimentos fluem nos jogos de linguagem, isto é, são neles encenados, através de um mecanismo de iterações e composições de outras práticas”. Desse modo, os conhecimentos são contextualizados, nos diferentes *jogos de linguagem* jogados por diferentes *formas de vida*.

O uso da linguagem pode ser examinado por meio dos *jogos de linguagem*, que por sua vez, são examinados por meio das regras que os regem e os definem. Regras são, por fim, regidas por uma *gramática*.

Segundo Moreno (2003), o termo gramática pode ser entendido como o conjunto de usos que fazemos das palavras, os quais podem ser expressos sob a forma de um sistema de regras. *Cristalizados* em regras e, assim, sistematizados os usos das palavras esclarecem a significação de conceitos e enunciados. Este termo, por sua vez, abrange diferentes conjuntos de regras:

É no interior desse conjunto de regras conceituais, as diferentes gramáticas, que são construídos os diversos sentidos da experiência, ou melhor, é de acordo com essas regras que construímos raciocínios, juízos, hipóteses, descrições e inferências ao combinarmos os conceitos, e que adquirimos, também, certezas e dúvidas. [...] Os conteúdos da experiência em geral são, nesse sentido, o resultado de um longo e complexo processo de apropriação linguística (MORENO, 2003, p. 116).

Para Souza (2012, p. 97) as asserções de Wittgenstein, com relação ao termo gramática, se referem aos “usos, com sentido, de uma determinada palavra. Assim, gramática das cores, por exemplo, refere-se aos usos que empregamos com sentido às palavras relativas às cores, como a própria palavra cor ou ainda, palavras relativas à tonalidade”. Também para Gottschalk (2004), todo jogo de linguagem envolve uma gramática dos usos, as quais estão ancoradas em uma *práxis*, em uma *forma de vida*.

Segundo Moreno (2003, p. 119):

[...] as construções gramaticais não são objetivas e nem subjetivas; não pertencem ao mundo natural, exterior ou interior, como também não são conteúdos da consciência transcendental. Estão ligadas, todavia, ao mundo natural pelo uso, tornando-se independentes quando aplicadas

como normas *a priori* para sua organização: entre o transcendental e o empírico, encontramos formas de vida.

A gramática dos *usos* que fazemos das palavras está associada a dois aspectos importantes de nossas *formas de vida*: a criação de normas para o sentido e a construção de proposições gramaticais. Quanto ao primeiro aspecto têm-se as convenções que estabelecem limites e domínios para as operações linguísticas, o que é feito por meio de regras, instrumentos de linguagem. Já as proposições gramaticais tem caráter descritivo, cujo conteúdo é considerado sempre verdadeiro, ditas como afirmações gramaticais, combinam, em si, normas de sentido, enunciados (MORENO, 2003).

As proposições que resultam de convenções cristalizadas em expressões linguísticas, são definidas por Wittgenstein como proposições gramaticais. Segundo Moreno (2003, p. 120), “as proposições gramaticais – ou melhor, aquelas proposições cuja verdade está acima de qualquer dúvida, não podendo ser confirmada nem infirmada pelos fatos. Certeza e evidência são, está claro, *a priori*, mas, ao mesmo tempo, gramaticais”.

A definição de proposições gramaticais é importante para nossas *formas de vida*, e dependem de nossos próprios interesses em um contexto ou outro. Já as proposições podem se tornar empíricas de acordo com o uso que fazemos delas, e que faz seu sentido dependente dos fatos.

Os fatos participam no sentido das proposições empíricas porque é assim que *definimos* o uso que delas *devemos* fazer com a finalidade de levantar hipóteses e construir raciocínios – e não porque os fatos tivessem uma qualquer participação misteriosa, ou metafísica, diria Wittgenstein, independente de nossas definições. A própria função empírica exercida por determinadas proposições de nossa linguagem é definida no interior da própria linguagem e independentemente dos fatos; *a fortiori*, no caso das proposições *a priori* (MORENO, 2003, p. 121).

Uma proposição empírica está associada aos fatos, aos fenômenos, mas quem as torna empíricas somos nós, baseados nos usos que delas fazemos. Utilizamos essas proposições como descritivas, para falar como as coisas são. Por exemplo, a proposição citada por Wittgenstein (1996, p. 245, tradução nossa), “A palavra ‘Bismark’ tem letras” pode ser concebida como uma proposição empírica, visto que descrevemos o uso de tal palavra na linguagem, de acordo com a proposição. Wittgenstein também se refere a essa proposição como sintética *a priori*.

Wittgenstein (2013, § 664) aborda os termos *gramática superficial* e *gramática profunda*:

No uso de uma palavra, poder-se-ia fazer a distinção entre uma “gramática superficial” e uma “gramática profunda”. No uso de uma palavra, o que se fixa em nós, imediatamente, é o modo de sua aplicação na construção da frase, a parte de seu uso – poder-se-ia dizer – o que se pode aprender com o ouvido. – E compare agora a gramática profunda, por exemplo, da palavra “ter-em-mente” com aquilo que sua gramática superficial nos faria supor. Não é de admirar que se julgue difícil estar por dentro.

O filósofo não explica os termos, apenas os aborda por meio de exemplos, por meio de seu uso na linguagem. Nesse contexto, Gottschalk (2004) aponta que Wittgenstein não utiliza o termo *gramática* em seu sentido usual, mas sim para designar regras constitutivas da linguagem, bem como sua organização, ou seja, sua *gramática profunda*.

No que toca a Matemática, segundo Silveira (2015, p. 11), “[...] a matemática também é constituída por jogos de linguagem. [...] à diferença das proposições empíricas, que têm função descritiva, os enunciados matemáticos exercem o papel de regras”. No papel de regras as proposições matemáticas têm função normativa, por exemplo podemos utilizar relações internas à Matemática para mostrar padrões nos fenômenos físicos, por meio de gráficos ou de expressões algébricas, podemos evidenciar possíveis tendências de um conjunto de dados (de temperaturas, crescimento e decrescimento populacional, sobre a transmissão de um vírus, entre outros), no entanto, mesmo que os fenômenos, no decorrer do tempo, apresentem um comportamento fora da linha de tendência expressa pela relação matemática, a relação permanece inalterada, o que alteramos são os modos de utilização da Matemática para o estudo das situações.

Neste contexto, a linguagem é vista como constitutiva. A constituição do sentido das coisas se dá por meio de usos das palavras e de regras conceituais, regidas por uma gramática.

Citamos o uso dos termos *sentido* e *significado*, e sentimos a necessidade de abordar tais termos na perspectiva wittgensteiniana. Na língua materna de Wittgenstein, significado e sentido são denotados pelos termos *Bedeutung* e *Sinn*, respectivamente.

Para os comentadores das obras de Wittgenstein, Veiga-Neto e Lopes (2007, p. 9) “as palavras possuem significados (*Bedeutung*), mas por si só não fazem sentido (*Sinn*); por

outro lado, as proposições, os enunciados, não possuem significado, mas fazem sentido na medida que representam um estado de coisas ou uma situação possível”. É a proposição que mostra o sentido das coisas, e seu uso é condição para sua significação.

Na perspectiva wittgensteiniana o significado está associado ao uso das palavras. “Todo signo, *sozinho* parece morto. O *que* lhe confere vida? – Ele *está* vivo no uso. Ele tem em si o hálito da vida? – Ou é o *uso* o seu hálito?” (WITTGENSTEIN, 2013, § 432).

Vamos analisar a estrofe:

Solombra, e os lubriciosos touvos
Em vertigiros personavam as verdentes;
Trisciturnos calavam-se os gaiolouvos
E os porvedidos estrigulavam fientes.
(CARROL, 2009, p. 246).

A estrofe, retirada do poema *Pargarávio*, é parte de um dos poemas de Lewis Carroll (1838-1898), composto de palavras sem *significado* que, ao serem explicadas por Humpty Dumpty¹⁵ à Alice, ganham vida e significação para a menina que viaja mais uma vez pelo país das maravilhas.

Ora, mas porque Alice não recorreu ao dicionário para buscar o significado das palavras? E, porque na explicação de Humpty Dumpty, as palavras começam a significar algo?

Em Wittgenstein (1939, p. 2), temos que:

Um exemplo dessa tendência de assimilar coisas diferentes umas das outras foi observado quando os números imaginários foram introduzidos pela primeira vez na Matemática, para que alguns matemáticos dissessem claramente que não poderia haver coisas como números que são imaginários; e quando foi explicado a eles que “imaginário” não estava sendo usado num sentido vulgar, mas que a expressão “números imaginários” foi usada a fim de adicionar este novo cálculo com o velho cálculo de números, então o mal-entendido foi removido e a maioria dos matemáticos se contentou (WITTGENSTEIN, 1939, p. 2).

De acordo com Wittgenstein (2013, § 40) “[...] a palavra não tem significado algum quando nada lhe corresponde”. De modo geral, “para uma grande classe de casos – mesmo que não para todos – de utilização da palavra “significado”, pode-se explicar esta palavra

¹⁵ Personagem de Lewis Carroll em *Alice Através do Espelho*, um ovo antropomórfico, filólogo e especialista em questões linguísticas.

do seguinte modo: O significado de uma palavra é seu uso na linguagem” (WITTGENSTEIN, 2013, § 43).

Para Almeida (2014) é possível pensar a existência de novos significados como algo que enfrentamos como novos jogos de linguagem, a nós apresentados, de acordo com a forma de vida que exercemos.

Quando falamos de uma língua específica, por meio da explicação do que se quer falar, nos contextos específicos, é possível atribuir significado às palavras. Mas, e quando falamos de um domínio relacionado à Matemática?

Segundo Gottschalk (2008, p. 88):

[...] um símbolo matemático é vazio. [...] O que vai nos dar a essência de um conceito matemático é sua aplicação, pois é no momento do uso do conceito que nos conectamos com toda a sua gramática. Só adquire sentido para o aluno, portanto, ao aplicá-lo, o que envolve técnicas que são aprendidas e não de alguma forma intuídas ou descobertas. [...] as atividades e os procedimentos que acompanham o uso dos símbolos matemáticos são de natureza convencional.

Nas *Investigações Filosóficas* há indicações de que Wittgenstein faz objeção a uma concepção de realidade matemática independente de nossa prática e linguagem, a qual tem o poder de corrigi-las. Wittgenstein apresenta uma concepção de gramática dos usos das palavras, independente tanto do objeto espacial, externo, quanto do objeto psicológico e mental, interno, assim como do objeto ideal – as entidades matemáticas e lógicas (MORENO, 2003).

Para o filósofo, o que é colocado como fundamento deve ser reconhecido em sua natureza convencional. A criação de novos usos da linguagem, assim como de novos conceitos, se dá por meio das *formas de vida* e de *convenções*. Nesse contexto, abordamos parte da filosofia de Wittgenstein que trata dos Fundamentos da Matemática.

No que tange à Filosofia da Matemática, Wittgenstein rejeita as correntes filosóficas que buscam fundamentos para a Matemática, como o logicismo, intuicionismo e formalismo¹⁶. Segundo Kitcher e Aspray (1998, p. 6, tradução nossa):

Durante as três primeiras décadas do século XX, a filosofia da matemática foi dominada pelas reivindicações rivais de três programas fundamentais, sendo que cada um deles perseguiram a tarefa Fregeana de expor uma justificativa correta para a aritmética (e para a análise) [...].

Wittgenstein não busca fundamentos para a Matemática, visto que fundamentos são de natureza convencional dependentes de formas de vida e imersos em jogos de linguagem (WITTGENSTEIN, 1996). O filósofo afirma que a Matemática se fundamenta nos jogos de linguagem. E neste contexto, segundo Wittgenstein (1996, p. 99, tradução nossa): “um matemático está sempre inventando novas formas de descrição. Alguns, estimulados por necessidades práticas, outros, por necessidades estéticas, - e ainda outros numa variedade de maneiras. O matemático é um inventor, não um descobridor”.

A Matemática, assim, é uma invenção humana, cuja necessidade se dá dependendo dos propósitos dos matemáticos, bem como da necessidade da sociedade. Izmirli (2013, p. 9, tradução nossa) sinaliza que “a Matemática tem muitas convenções que são, em essência, acordos sociais sobre definições, pressupostos e regras, isto é, o conhecimento matemático é um fenômeno social que inclui linguagem, negociação, diálogo e aceitação em grupo”. Como exemplo, podemos citar os cinco axiomas de Giuseppe Peano (1858 – 1932) que possibilitaram a construção do conjunto dos números naturais, ou ainda os Postulados de Euclides, aceitos por séculos e fonte de debate na comunidade de matemáticos.

Nem sempre os propósitos dos matemáticos estão atrelados aos da sociedade, visto que no decorrer dos tempos a Matemática se transformou em uma teoria, cujos conceitos são aprimorados por diferentes matemáticos em diferentes épocas. Ao desenvolvimento teórico da Matemática, de acordo com Silveira (2014, p. 57), dá-se o nome de automovimento:

¹⁶ Informações sobre as correntes filosóficas associadas aos fundamentos da Matemática podem ser obtidas em ABBAGNANO (2007), BARKER (1969), EVES (2011), MENEGUETTI (2010), entre outros.

A matemática é uma construção humana, mas como sinalizado, ela segue seu auto-movimento de acordo com a necessidade de seu desenvolvimento teórico. A história da matemática aponta para a criação de regras matemáticas por diferentes pessoas e essas criações, através dos tempos, se tornam normas.

Em seu auto-movimento a Matemática acaba por ser vista como um emaranhado de regras, definições, conceitos, provas e demonstrações. No entanto:

Definições são formuladas de modo a tirar conclusões e resolver problemas. Definições têm funções cognitivas e comunicativas, em primeiro lugar. Conceitos, ao contrário, representam perspectivas sobre a realidade. Eles são como visões de possibilidades. Os conceitos que ocorrem em Matemática são relativamente simples, mas o raciocínio matemático é muito complicado como uma regra (OTTE; BARROS, 2015, p. 770, tradução nossa).

Quando entendemos o raciocínio em Matemática como uma regra, podemos fazer referência ao uso de enunciados matemáticos, também, como uma norma (GOTTSCHALK, 2004, 2008; SOUZA, 2012). Para Gottschalk (2004) o uso que fazemos dos enunciados matemáticos nos mostra sua função normativa, pois a partir deles é possível saber o que tem sentido e o que não tem sentido dizer.

Para Wittgenstein (1996, p. 425, tradução nossa), “[...] a Matemática é *normativa*. Mas “norma” não significa a mesma coisa que “ideal””. Para o filósofo o que a Matemática faz é formar conceitos, os quais nos ajudam na compreensão das coisas. Estes conceitos correspondem a maneiras particulares de lidar com as situações. E neste contexto é possível dizer que a Matemática forma uma rede de normas.

Nesse contexto, podemos retomar as palavras de Wittgenstein (1996, p. 381, tradução nossa) sobre Matemática:

A Matemática - quero dizer - lhe ensina, não apenas a resposta a uma pergunta, mas todo um jogo de linguagem com perguntas e respostas. [...] É possível dizer que a Matemática nos ensina métodos experimentais de investigação? Ou nos ajuda a descobrir esses métodos de investigação? ‘Para sermos práticos, a Matemática deve dizer-nos sobre os fatos.’ – Mas, esses fatos têm que ser fatos matemáticos? – Mas, por que a Matemática não poderia, em vez de ‘ensinar-nos sobre fatos’, criar as formas do que chamamos de fatos? “Sim, mas certamente continua a ser um fato empírico a maneira como os homens calculam!” - Sim, mas isso não faz com que as proposições

utilizadas no cálculo se tornem proposições empíricas (WITTGENSTEIN, 1996, p. 381, tradução nossa).

Assim como Wittgenstein faz uma análise das proposições utilizadas na linguagem natural, o filósofo dedica parte de seu trabalho às proposições utilizadas em Matemática, ou seja, as *proposições matemáticas*. De acordo com Wittgenstein (1996, p. 99, tradução nossa) “a proposição matemática tem a dignidade de uma regra”.

Não há dúvida de que em certos *jogos de linguagem* proposições matemáticas desempenham o papel de regras de descrição, ao contrário de proposições descritivas.

Mas isso não quer dizer que este contraste não coloca sombras em todas as direções. E *que*, por sua vez, tal contraste não seja de grande importância.

Nós sentimos que a Matemática está em pedestal – e este pedestal existe devido ao papel especial que suas proposições desempenham em nossos jogos de linguagem.

O que é provado por uma prova matemática é configurado como uma relação interna e retirado de dúvidas (WITTGENSTEIN, 1996, p. 362-363, tradução nossa).

Nesse contexto, faz-se a distinção entre proposição gramatical e proposição empírica, sendo uma proposição gramatical colocada, geralmente, como uma convenção, uma regra (WITTGENSTEIN, 1996; MORENO, 2003). Proposições gramaticais são proposições que dependem de relações internas para serem elucidadas. São proposições em que “não há relações hipotéticas, mas sim gramaticais, que nos dizem o que faz sentido dizer ou o que não faz sentido dizer”, tais proposições são vistas, ainda, como condições de sentido para outras proposições (GOTTSCHALK, 2004, p. 313).

Segundo a autora, uma proposição matemática pode ser vista como uma estipulação, ou o resultado de estipulações de acordo com um método definido. Nesse contexto, as proposições matemáticas são gramaticais e portanto normativas, e o uso de uma ou outra proposição difere-se no *jogo de linguagem* a que pertencem. Assim, concordamos com Gottschalk (2004, p. 325) quando a mesma sinaliza que “a matemática não é descritiva, não se refere a nenhum tipo de realidade, apenas nos dá as condições necessárias para a compreensão do sentido de certos enunciados em determinados contextos”.

Para Moreno (2003, p. 129) “sendo convencionais, as proposições gramaticais, ou de essência, estão sujeitas aos mesmos percalços empíricos do que as proposições

descritivas”. O autor sinaliza que tanto proposições gramaticais, quanto proposições empíricas, apresentam natureza pragmática, a diferença fundamental reside nas diferentes funções que lhes atribuímos no interior de nossas gramáticas, por meio das *formas de vida* (MORENO, 2003).

As proposições gramaticais dizem o que o objeto é, e desse modo estão ligadas à essência dos mesmos, e de acordo com Wittgenstein (2013, § 371) “a *essência* se expressa na gramática”. Ao assumir que a essência expressa pela gramática, assume-se também sua natureza linguística e convencional, e este fato “exclui qualquer projeto de retroação e supostas origens extra-linguísticas ancoradas na consciência” (MORENO, 2003, p. 125).

O acordo consensual sobre uma essência, ou sobre a necessidade de uma relação interna, não supõe, do ponto de vista da descrição gramatical, qualquer vivência intersubjetiva da essência, mas, pelo contrário, supõe apenas o acordo sobre a relevância, *para nossas formas de vida*, de que essências, ou ligações internas, sejam definidas como *normas de sentido*. A essência é apenas aquilo que é colocado como ponto de partida para delimitar o domínio do sentido e excluir o que é desprovido de sentido [...] (MORENO, 2003, p. 128).

Wittgenstein (1996) sinaliza que em Matemática estamos convencidos sobre as *proposições gramaticais*, e estar convencido dessas proposições é o mesmo que as aceitarlas como *regras*. “Está claro que, em que medida, o matemático realmente ‘joga um jogo’ não dá para inferir. Aqui ‘jogar’ deve significar: *agir* de acordo com certas regras” (WITTGENSTEIN, 1996, p. 257, tradução nossa).

E supostamente as regras nos guiam, mas e quando interpretamos a regra equivocadamente? Ou quando nossos alunos não entendem os procedimentos que devem seguir? Porque Wittgenstein usa como metáfora que a regra nos guia? Em sua obra sobre os fundamentos da Matemática, Wittgenstein assinala o ato de seguir regras como algo essencial nos jogos de linguagem, em particular no jogo de linguagem da Matemática:

Quando eu digo: “Se você seguir a regra, *deve* resultar isso”, não significa: é preciso, pois acontece sempre. Em vez disso, que resulta isso é um dos meus *fundamentos*.

O que *deve* resultar é um fundamento de julgamento, o qual eu não tocarei.

Em que ocasião será dito: “Se você seguir a regra, *deve* resultar isso”? Pode ser em uma definição matemática dada no treino de uma prova que se ramifica em determinada rota. Também pode ser que alguém queira

seguiu uma regra (ou uma placa de sinalização; jogou um jogo, proferiu uma sentença, ou a entendeu, e assim por diante).

Aqui não há nada mais difícil do que evitar pleonasmos e apenas dizer o que realmente descreve algo.

Por aqui há uma tentação irresistível de dizer mais alguma coisa, quando tudo já foi descrito.

(WITTGENSTEIN, 1996, p. 320-323, tradução nossa).

Na análise da perspectiva wittgensteiniana para Linguagem e para Matemática, Gottschalk (2008) discute que:

[...] esta nova perspectiva (vinda da filosofia de Wittgenstein) sugere uma concepção de ensino e aprendizagem em que o papel do professor passa a ser ensinar significados através do *uso* que se faz deles em seus respectivos contextos linguísticos. E aprender, por sua vez, *é ser capaz de ver de outra maneira*, sem que essa outra maneira seja uma “variação” de uma hipótese inicial do aluno. Em outras palavras, aprender é estar disposto a *comparar* seu modo usual de empregar certa imagem com *outro* (não importa que tipo de imagem seja) (GOTTSCHALK, 2008, p. 87).

Retomando a assertiva de Wittgenstein (1996) que considera o matemático como um inventor, o professor de Matemática é aquele que ensina os significados dos conceitos matemáticos, convencionados na forma de vida dos matemáticos, por meio dos diferentes usos destes conceitos em diferentes contextos. O papel do professor, nesse contexto, extrapola os limites da sala de aula, de modo que diferentes *usos* podem se dar em diferentes *jogos de linguagem*. Silveira (2014, p. 71) salienta que:

[...] o professor deve refletir atentamente sobre os problemas de ordem linguística quando ensina matemática, já que ele não estabelece um jogo de linguagem, mas introduz o aluno a um jogo já estabelecido [...]. Outra questão que se pode colocar é como o professor interpreta o texto matemático em sala de aula para o aluno, apoiando-se em figuras, gráficos, símbolos e expressões algébricas e, por outro lado, como o aluno traduz a interpretação do professor.

A própria Matemática se constitui como um *jogo de linguagem*, “uma atividade que entrelaça símbolos linguísticos e técnicas compartilhadas por uma comunidade” (GOTTSCHALK, 2004, p. 331), neste *jogo de linguagem* os significados dos objetos matemáticos se dão a partir de seus *usos*. A linguagem matemática, por sua vez, tem diferentes *usos* empíricos e normativos, dependendo do contexto em que ela será utilizada.

Segundo Silveira (2015, p. 181), “a Matemática é objetivada por meio de sua linguagem, que é regida por uma sintaxe que segue regras matemáticas”. A autora compreende a linguagem matemática como um conjunto de símbolos, figuras, expressões algébricas e gráficos, a qual codifica aquilo que a linguagem natural não consegue expressar:

Os símbolos matemáticos apresentam-se como códigos a serem traduzidos e depois reinterpretados. Eles representam, dessa forma, uma metáfora a ser compreendida. A metáfora transporta a nomeação de um termo para outra significação a esta significação é encontrada na analogia (SILVEIRA, 2015, p. 116).

Vimos que o matemático, para Wittgenstein é considerado um inventor, o professor de Matemática pode ser considerado aquele que ensina os usos dos conceitos matemáticos, o que remete à significação dos mesmos. E será possível inferir, então, que em contextos de ensino e de aprendizagem de Matemática, os alunos são aqueles que interpretam os conceitos matemáticos e as regras matemáticas, obedecendo às exigências e à lógica da matemática (SILVEIRA, 2015). Na interpretação dos conceitos matemáticos e no uso da linguagem matemática, pelos alunos, é possível observar a construção de conceitos matemáticos.

Para Silveira (2008, p. 5) “a formação de conceitos em matemática é um jogo de signos segundo regras determinadas, onde o sistema de símbolos é importante e não cada símbolo individualmente”. E na perspectiva do aluno “o conceito passa a ser reconstrutível a cada ato de interpretação. As condições de leitura e compreensão do objeto definem a construção do conceito matemático, o qual está em constante mudança na perspectiva do aluno” (SILVEIRA, 2008, p. 6).

Silveira (2015, p. 100) argumenta que:

No decorrer do processo de aprendizagem, o conceito matemático está sempre em estado de devir, na perspectiva do aluno, mesmo que esse conceito seja considerado imutável sob o ponto de vista da lógica e do rigor da Matemática. Ao conectar o conceito com outros conceitos, o sujeito passa a reinterpretá-lo e, a partir dessa outra compreensão, ele o reconstrói.

Mas, para Gottschalk (2008, p. 83), “se atividade matemática forma conceitos, isso significa que esta atividade não tem apenas um uso normativo, como também tem um uso empírico”. No que tange à formação de conceitos, Wittgenstein (2013, p. 295) sinaliza que:

Se é possível explicar a formação do conceito a partir de fatos naturais, então, ao invés da gramática, não nos deveria interessar aquilo que na natureza constitui a sua base? – Interessa-nos, sem dúvida, também a analogia de conceitos com fatos naturais muito genéricos. (Como aqueles que, por causa da sua generalidade, normalmente não se fazem notar). Mas nosso interesse não recai sobre as possíveis causas da formação do conceito; nós não fazemos ciência natural, nem tampouco história natural, - pois para nossos fins podemos inventar também coisas histórico-naturais.

Não digo: se tais e tais fatos naturais fossem diferentes, as pessoas teriam conceitos diferentes (no sentido de uma hipótese). Mas: quem acredita que certos conceitos são simplesmente conceitos corretos, alguém que tivesse outros conceitos não compreenderia justamente algo que nós compreendemos, - que estamos acostumados, e outras formações do conceito diferentes das habituais vão tornar-se compreensíveis para ele.

Compare um conceito com um estilo de pintura: será que somente nosso estilo de pintura é arbitrário? Podemos escolher um conforme o gosto? (p. ex.: o estilo dos egípcios). Ou trata-se aqui apenas de bonito e feio?

Quando abordarmos a formação de conceitos em Matemática, estamos, a bem da verdade, falando de aprendizagem em Matemática. Segundo Souza (2012), quando se trata do sistema matemático escolar, a aprendizagem em Matemática pode ser vista como “uma delimitação discursiva, ou seja, pela identificação por parte dos alunos em que circunstâncias (quando) as regras do tipo como são consideradas legítimas e assim poderem optar pelo uso do sistema que se adéque a determinadas finalidades e sejam legítimos em uma determinada forma de vida” (SOUZA, 2012, p. 65).

Ao citar a *Matemática do Sistema Escolar*, a autora sugere a existência de outras Matemáticas. Este sistema, em particular, pode ser entendido como “historicamente estabelecido e que possui *status* disciplinar, deve ser ensinado aos alunos pelos professores, como um dos sistemas possíveis, aquele que pode ser utilizado como sistema normativo para organização de algumas de suas experiências, mas que não é o único” (SOUZA, 2012, p. 42).

Garnica (2002, p. 6), aponta que “a linguagem matemática não pode prescindir da língua materna para sua comunicação, e esse processo de vinculação entre sintaxe e semântica, mesmo que de difícil apreensão, naturalmente impõe-se no dia-a-dia do

professor de matemática”. O autor ainda discute que a Matemática profissional, também chamada de Matemática acadêmica pode ser tida como uma dentre as várias Matemáticas existentes, sendo considerada, ainda, como uma das formas de apreensão do mundo.

A concepção de que a Matemática pode ser considerada como um conjunto de práticas (GARNICA, 2002) vai ao encontro da concepção de *usos* emitida por Wittgenstein (1996; 2013). Segundo Garnica (2002, p. 8):

[...] a Matemática da Educação Matemática, portanto, em seu regime de verdade, é uma outra Matemática, radicalmente distinta daquela vista sob a perspectiva da prática profissional dos matemáticos. Distintos em regimes de verdade falam de distintas Matemáticas, não de uma única Matemática, plena, onipresente, onipotente, onisciente, que pode ser atingida de diferentes formas.

No mesmo sentido, Silveira (2008, p. 6) sinaliza que “as diferentes formas de representar o objeto matemático fazem com que haja diferentes matemáticas”. Assim como Knijnik (2006; 2010) e Vilela (2007; 2013) consideram a Matemática Acadêmica como constituída por uma pluralidade de jogos de linguagem, os quais conduzem a diferentes Matemáticas.

Segundo Vilela (2007), diferentes adjetivações para Matemática podem indicar diferentes Matemáticas: Matemática Escolar, Matemática da Rua, Matemática Acadêmica, Matemática Científica, Matemática Popular, Matemática Clássica, Matemática do Cotidiano, entre outras. Vilela (2009, p. 192) apresenta uma compreensão dessas diferentes Matemáticas como práticas sociais, “em direção a uma elaboração teórica da concepção de práticas matemáticas”.

As adjetivações pesquisadas por Vilela (2007) indicam diferentes usos da Matemática, que por sua vez se configuram em diferentes práticas matemáticas, ou ainda, diferentes jogos de linguagem que contém entre si *semelhanças de família*. Segundo Vilela (2007, p. 12):

[...] em oposição a uma essência que garantiria a compreensão de uma matemática única, numa perspectiva wittgensteiniana, assumo o ponto de vista de que as matemáticas se constituem em diferentes práticas sociais com base na compreensão de que as regras – e a matemática como um conjunto de regras – se constituem e se transformam em seus usos em diferentes contextos e, nesse sentido podem variar conforme o jogo de linguagem de que participam.

Ocorre que, muitas vezes, em Matemática somos ofuscados pela ideia de um ideal, e tal fato nos deixa insatisfeitos, visto que a idealização de algo coloca, por si só, uma exigência inatingível.

Os comentadores das obras de Wittgenstein, no âmbito nacional, nos intrigam e nos fazem questionar: uma Matemática, várias Matemáticas? Ou apenas diferentes *jogos de linguagem* associados à Matemática?

Considerando o exposto até o momento, defendemos a perspectiva de que a Matemática enquanto corpo de conhecimento, criação humana da forma de vida dos matemáticos, pode ter diferentes usos na sociedade e, em particular, diferentes usos em seu automovimento. Nesse contexto, à Matemática estão associados diferentes jogos de linguagem, com suas próprias regras e com sua própria gramática. É no interior da gramática que rege os usos dos conceitos matemáticos que temos acesso à essência destes conceitos. Ao assumir a ideia de significação nos usos, estes regidos por uma gramática e convencionados em determinada forma de vida, abandonamos a ideia de uma Matemática para além de uma prática humana.

Na sequência situamos nossa pesquisa no que tange às pesquisas realizadas na Educação Matemática.

A FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

No ensino de Matemática, muitas vezes, a linguagem atua como uma das causas de estranhamento, seja por ser considerada abstrata, seja pelo estilo de comunicar em Matemática. É por meio da linguagem que descrevemos, registramos, explicamos, argumentamos, exemplificamos, pensamos, atuamos, enfim agimos na linguagem. Segundo Wittgenstein (1996, p. 335, tradução nossa) “A linguagem [...] se refere a uma *maneira* de viver. Para descrever o fenômeno da linguagem é preciso descrever uma prática, não é como descrever algo que acontece uma única vez, *não importa a que nos referimos*”.

Na Educação Matemática, diferentes pesquisadores utilizam como embasamento filosófico a perspectiva wittgensteiniana sobre Linguagem e Matemática. A Etnomatemática, em particular, é colocada como foco de discussões juntamente com a

perspectiva dos jogos de linguagem de Wittgenstein (KNIJNIK, 2012; PAIS, 2011; VILELA, 2010; KNIJNIK; WANDERER, 2007, 2013; ZANON, 2013; WANDERER, 2013).

Discussões e reflexões sobre o conhecimento matemático, sua natureza e especificidades também são foco de análise sob uma perspectiva wittgensteiniana (GOTTCHALSK, 2004; 2008). Quando consideramos as especificidades da linguagem matemática, características específicas emergem, por exemplo: o uso de regras e a aprendizagem das regras em Matemática (SILVEIRA, 2008; SILVA, 2011; SILVEIRA; SILVA, 2013); a abordagem de provas e demonstrações em Matemática (DURAND-GUERRIER, 2008; JOURDAN, 2009; GOTTSCHALK, 2014; OLIVEIRA, SILVEIRA, 2016); o uso dos símbolos em Matemática (SKOVSMOSE, 2012); entre outros.

No que tange à Matemática, Silveira (2015) traz contribuições para a Educação Matemática por meio da abordagem de temáticas como Matemática e discurso, construção de sentidos na aprendizagem em Matemática, linguagem natural e linguagem matemática, e Matemática e linguagem, trazendo como foco os estudos de Wittgenstein. Oliveira e Silveira (2016) abordam o uso da linguagem matemática ao falar e mostrar uma prova matemática, focando na preocupação com questões relativas à linguagem matemática em situações de ensino e de aprendizagem em Matemática.

A abordagem da aprendizagem em Matemática a partir de uma perspectiva wittgensteiniana é foco de estudos, por exemplo, de Souza (2012), Silva e Silveira (2014), e Lacerda e Silveira (2013). Também no âmbito do ensino de Matemática é possível elencar pesquisas como as de Silveira et al. (2014) e Duarte (2009). A autora Silveira (2014) analisa a importância da ênfase nos usos da linguagem no ensino e na aprendizagem em Matemática. Nesse contexto, a autora discute que a comunicação entre alunos e professores pode elucidar os significados de declarações matemáticas, quando usadas no âmbito da sala de aula.

Os usos da linguagem em diferentes práticas Matemáticas são abordados por Vilela (2007), Vilela (2009), Garnica e Pinto (2010), Almeida e Tortola (2014), entre outros. Para Vilela (2009) a prática matemática é uma realização humana, como práticas intencionais e condicionadas pela própria estrutura da linguagem, a qual limita e regula as possibilidades de desenvolvimento de Matemática nas práticas específicas.

A utilização da filosofia de Wittgenstein como possibilidade de análise de dados também pode ser citada por meio da realização do que o filósofo denomina de terapia gramatical, também entendida na literatura dos comentadores das obras de Wittgenstein como terapia filosófica (GOTTSCHALK, 2004, 2008; CARDOSO, 2009; MIGUEL, 2015, MIGUEL, 2014).

As pesquisas citadas foram realizadas em diferentes níveis de escolaridade. Tortola (2012) realizou sua pesquisa com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, Souza (2012) e Souza e Barbosa (2014) olharam para a aprendizagem por meio dos usos da linguagem de alunos da Educação Básica; Vilela (2014) sinaliza as contribuições da virada linguística tendo como foco o Ensino Superior, em particular, na prática do estágio curricular supervisionado em um curso de Licenciatura em Matemática. Almeida (2014) relata uma investigação realizada em diferentes contextos, em uma disciplina de um curso de Licenciatura em Matemática e em uma disciplina de um programa de pós-graduação. Os autores Jelinek e Bello (2014) tiveram por objetivo analisar os usos da linguagem de crianças ditas portadoras de altas habilidades.

Das pesquisas citadas em Educação Matemática que utilizam como base filosófica a perspectiva de Wittgenstein, alguns trabalhos têm como interesse a modelagem matemática. Tortola (2012), Merli (2012), Souza (2012), Almeida, Tortola e Merli (2012), Souza e Barbosa (2014) e Almeida (2014), são exemplos de investigações com esses interesses.

Tortola (2012) foca sua pesquisa na modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental; Merli (2012) investiga os usos da linguagem associados aos modelos clássicos e Fuzzy construídos em atividades de modelagem matemática; as pesquisas de Almeida (2014a; 2014b) tem o objetivo de analisar o *fazer* modelagem matemática em diferentes contextos, evidenciando significados diferentes em cada contexto investigado. Souza (2012) e Souza e Barbosa (2014) buscam identificar como a aprendizagem matemática se constitui em atividades de modelagem matemática. Ainda, no que tange a modelagem matemática Almeida, Tortola e Merli (2012) abordam o papel dos modelos e da linguagem em atividades de modelagem matemática.

Nossa pesquisa visa contribuir com as pesquisas já realizadas que associam a Modelagem Matemática na Educação Matemática e a Filosofia da Linguagem de Wittgenstein. A fim de oferecer contribuições teóricas para uma compreensão de questões

relativas aos usos da linguagem em atividades de modelagem matemática, em particular, os usos da linguagem e de procedimentos matemáticos utilizados pelos alunos nessas atividades, no âmbito da Licenciatura em Matemática. Recorremos à perspectiva wittgensteiniana, pois entendemos que a pluralidade de usos da linguagem matemática carece de atenção no que tange ao uso da modelagem matemática, em particular em situações de ensino e de aprendizagem.

Nesse sentido, concordamos com Vilela (2009, p. 197) quando a autora sinaliza que:

Ao abandonar a busca por essências, Wittgenstein inova a atividade filosófica, deixando de lado a pergunta sobre o que existe. A discussão filosófica passa a focar o modo como podemos falar, interpretar e entender as coisas, ou seja, a linguagem passa a ser investigada na prática, pois ela se constituiu dos elementos pelos quais expressamos nossos conhecimentos e as coisas que existem.

Segundo Vilela e Mendes (2011, p. 14), há dois modos de ver a linguagem: “por um lado, quando tomada como veículo e empregada em uma visão apenas estrutural ou comunicacional e, por outro, como constitutiva, a partir de uma concepção discursiva”. Quando a linguagem passa a ser investigada enquanto constituída dos elementos dos nossos conhecimentos é possível considerar, no âmbito da Educação Matemática, que:

Entender a linguagem como constitutiva desloca a concepção de um sujeito que aprende, que já é posto, isto é, epistemológico, para um sujeito discursivo, que se subjetiva, que se constitui, enquanto aprende em um determinado tempo sócio-histórico, segundo regras que são postas discursivamente (VILELA; MENDES, 2011, p. 23).

Atualmente, segundo Silveira (2008, p. 1), “os pesquisadores em Educação não se preocupam apenas com problemas cognitivos, imersos em uma filosofia da consciência, pois perceberam que é preciso analisar os problemas de significação das palavras e outros tipos de representação, amparados na filosofia da linguagem”.

Por meio de uma perspectiva wittgensteiniana, buscamos investigar os usos da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática, tendo como entendimento que essa discussão possa enfatizar o modo como podemos falar, interpretar e entender as coisas, investigando os usos da linguagem e de procedimentos matemáticos na prática.

Nesse contexto, olhamos para Matemática e Linguagem em uma região de inquérito nascida na Matemática Aplicada e trazida para a Educação Matemática para auxiliar os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática: a modelagem matemática. Entendendo que os alunos são vistos como sujeitos discursivos, que se constituem enquanto aprendem, por exemplo, no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, a significação dos conceitos matemáticos por meio da aprendizagem das regras atribuídas a estes conceitos em diferentes contextos. Nesse contexto, somos amparados pela filosofia da linguagem de Wittgenstein.

Essa investigação pode elucidar os enunciados que circulam nas práticas de modelagem matemática de alunos, bem como as condições que geram tais enunciados, se são ou não assumidos como verdade no contexto dessas atividades. Como os alunos utilizam proposições em atividades de modelagem matemática? Como são utilizadas as regras específicas da Matemática, neste contexto? Como são justificados os procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática? É possível falarmos de formação de conceitos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática? Diferentes *usos* dos conceitos matemáticos sinalizam o significado de tais conceitos?

Na sequência apresentamos as atividades de modelagem matemática desenvolvidas na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias e na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática, bem como apresentamos a análise de tais atividades, tendo como base a linguagem em *uso*, dos alunos, os instrumentos de coleta de dados e a metodologia de análise apresentada no capítulo 1 deste texto.

Sinalizamos que utilizamos as *Investigações e Observações* de Wittgenstein no sentido da atividade filosófica que o autor propõe:

A filosofia não deve, de forma alguma, tocar o uso real da linguagem; o que pode, enfim, é apenas descrevê-lo.

Pois ela também não pode fundamentá-lo.

Ela deixa tudo como é.

Ela deixa também a matemática como é, e nenhuma descoberta matemática pode fazê-la avançar. Um “problema preponderante da lógica matemática” é para nós um problema da matemática como qualquer outro. Não é tarefa da filosofia solucionar a contradição por meio de uma descoberta matemática, lógico-matemática. Mas tornar visível em seu conjunto a situação da matemática que nos inquieta, o estado antes da contradição.

O fato fundamental é aqui: fixamos regras, uma técnica, para um jogo, e então, ao seguirmos as regras, as coisas não funcionam tão bem como havíamos suposto; portanto, nós nos enleamos, por assim dizer, em nossas próprias regras.

Este enlear-se nas próprias regras é o que queremos entender, isto é, queremos abarca-lo com a vista.

Ele lança uma luz em nosso conceito de ter-em-mente. Pois ele é, naqueles casos, diferente do que tínhamos em mente e tínhamos previsto. Quando surge a contradição, dizemos, por exemplo, “Não foi assim que o tive em mente”.

(WITTGENSTEIN, 2013, § 124-125).

Visamos, assim, tornar visível em seu conjunto à situação que nos inquieta, em particular em atividades de modelagem matemática. No próximo capítulo apresentamos as atividades de modelagem matemática que foram constituídas na parte empírica dessa pesquisa, seguidas da análise dos dados coletados por meio da pesquisa empírica.

CAPÍTULO 4

AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Desenvolvidas em uma turma de Equações Diferenciais Ordinárias no ano de 2015 e em uma turma de Introdução à Modelagem Matemática no ano de 2016, as atividades aqui descritas são: uma cuja temática já está disponível na literatura; três com temáticas sugeridas pela professora da disciplina; sete com temáticas escolhidas pelos alunos. Para a análise dos dados foram considerados os alunos que se mantiveram da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, no terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática, para a disciplina de Introdução à Modelagem Matemática, do quarto ano do mesmo curso, totalizando treze alunos. Dados foram coletados por meio de: registros escritos dos alunos; gravação de áudio e vídeo durante o desenvolvimento das atividades; realização de entrevistas e questionários, conforme descrito no capítulo 1 deste texto.

Para facilitar a referência aos dados coletados, os registros dos alunos foram codificados conforme indica o Quadro 4.1.

Quadro 4.1 Codificação utilizada nas análises dos dados

Quando o código se referir a um dado coletado durante o desenvolvimento de atividade de modelagem matemática:

Instrumento de Coleta de Dados	-	Atividade de modelagem matemática	j	-	Código do Aluno ou do grupo de alunos
---------------------------------------	---	--	----------	---	--

Quando o código se referir a um instrumento de coleta de dados anterior ou posterior ao desenvolvimento de atividade de modelagem matemática:

Instrumento de Coleta de Dados	-	Código do Aluno	ou	Código do grupo de alunos
---------------------------------------	---	------------------------	-----------	----------------------------------

Essa codificação depende da origem dos dados coletados. Para facilitar a visualização desses dados, cada instrumento de coleta de dados, atividade de modelagem matemática, momento da atividade de modelagem matemática e cada aluno foi codificado, como segue:

▪ **Instrumentos de coleta de dados**

PE – questionário para traçar o perfil dos alunos, Anexo A;

Q1 – questionário final, disponível no Anexo C;

GR – transcrição das gravações em áudio e entrevista (Anexo A) no desenvolvimento das atividades;

Quadro 4.1 Continuação

RE – registros escritos dos alunos do desenvolvimento das atividades.

▪ **Atividade de modelagem matemática**

As atividades de modelagem matemática realizadas pelos alunos foram numeradas de acordo com o código ATj. Cada atividade foi identificada de acordo com a sequência do Quadro 4.2, tal que $1 \leq j \leq 10$ e $j \in \mathbb{N}$. Apenas a atividade 3 conta com duas temáticas, desse modo ela foi numerada de AT3.1 e AT3.2.

▪ **Momento da atividade de modelagem matemática**

O trabalho dos alunos com as atividades de modelagem matemática foi realizado a partir da sugestão de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e de Almeida e Dias (2004) para familiarização dos alunos com esse tipo de atividades. Os momentos de realização das atividades de modelagem matemática foram codificados por MM1, MM2 e MM3. O Quadro 4.2 indica as atividades de modelagem matemática e suas temáticas.

▪ **Código dos alunos**

A fim de facilitar a identificação, os alunos foram codificados no início de 2015, momento em que iniciamos o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e a imersão aos dados. Ao todo os treze alunos formaram oito grupos de acordo com o momento das disciplinas e a escolha dos mesmos:

- Grupo 1 (G1) – alunos A1, A2, A3, A4;
- Grupo 2 (G2) – alunos B1, B2, B3, B4;
- Grupo 3 (G3) – alunos C1, C2, C3, C4, C5;
- Grupo 4 (G4) – alunos A1, A2, A3;
- Grupo 5 (G5) – alunos B1, B2, B3, B4, A4;
- Grupo 6 (G6) – alunos A1, A4, B1, B2;
- Grupo 7 (G7) – alunos A2, A3, B3, C4;
- Grupo 8 (G8) – alunos C1, C2, C3, C5, B4.

Distribuídos nos oito grupos descritos no Quadro 4.1, os treze alunos desenvolveram as atividades de modelagem matemática identificadas no Quadro 4.2.

Quadro 4.2 Atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos

Código da Atividade	Momento da Modelagem Matemática	Definição da temática a ser investigada	Tema da atividade	Disciplina	
				EDO ¹⁷	MM ¹⁸
AT1	1º	Professora	O resfriamento da cerveja	✓	
AT2	1º	Professora	A temperatura do café e a garrafa térmica	✓	
AT3.1	3º	Alunos	Ônibus espacial	✓	

¹⁷ Disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias.

¹⁸ Disciplina de Introdução à Modelagem Matemática.

Quadro 4.2 Continuação

Código da Atividade	Momento da Modelagem Matemática	Definição da temática a ser investigada	Tema da atividade	Disciplina	
				EDO ¹⁹	MM ²⁰
AT3.2	3°	Alunos	Armazenamento de grãos de soja	✓	
AT4	3°	Alunos	Variação da temperatura na produção do sorvete	✓	
AT5	3°	Alunos	Preparo da gelatina: variação da temperatura da gelatina em relação ao tempo	✓	
AT6	2°	Professora	A prática do Bungee Jump	✓	✓
AT7	2°	Professora	Slackline: um show de manobras		✓
AT8	3°	Alunos	Pêndulo	✓	✓
AT9	3°	Alunos	Mola Maluca	✓	✓
AT10	3°	Alunos	Princípio básico do amortecedor automotivo	✓	✓

Neste capítulo abordamos características dos alunos participantes da pesquisa e apresentamos de forma abreviada as atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos.

OS ALUNOS MODELADORES E A FORMAÇÃO DOS GRUPOS DE TRABALHO

As atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas em quatro grupos no total de 13 alunos, contendo apenas alunos regulares das disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias, que no ano de 2016 se tornaram alunos da disciplina de Introdução à Modelagem Matemática, distribuídos em três grupos.

O questionário disponível no Anexo A foi respondido pelos alunos participantes da pesquisa e visa enriquecer as informações sobre os alunos, a faixa etária, as preferências

¹⁹ Disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias.

²⁰ Disciplina de Introdução à Modelagem Matemática.

quanto às disciplinas cursadas no curso de Licenciatura em Matemática, se os mesmos já haviam lecionado Matemática no Ensino Fundamental e/ou no Ensino Médio, como se consideravam durante o desenvolvimento das aulas de Matemática, se já tinham conhecimento a respeito de Modelagem Matemática na Educação Matemática.

Apenas um dos treze alunos estava cursando a disciplina de EDO pela segunda vez, e todos cursaram a disciplina de Introdução à Modelagem Matemática apenas uma vez. A faixa etária dos alunos envolvidos na pesquisa estava entre 19 e 31 anos de idade, sendo que cerca de 85% dos alunos estava entre 19 e 23 anos de idade e 15% entre 30 e 31 anos de idade. Destes o aluno C2 já havia realizado outro curso superior, o aluno A1 havia iniciado a graduação em Ciências Biológicas e desistido para realizar o curso de Licenciatura em Matemática e o aluno A4 cursou o Ensino Médio juntamente com o magistério. A experiência com o ensino de Matemática na Educação Básica, no momento da realização da pesquisa era pouca ou nenhuma. Dos treze alunos, apenas três já haviam lecionado no Ensino Fundamental (anos iniciais e anos finais) ou no Ensino Médio.

Sobre o conhecimento a respeito de Modelagem Matemática na Educação Matemática: três alunos declararam já conhecer algumas perspectivas teóricas sobre o assunto, devido à participação em grupos de pesquisa na universidade e devido à participação em projetos de iniciação científica; cinco sinalizaram o entendimento de que modelagem matemática se refere ao estudo, por meio de modelos matemáticos, de situações do cotidiano; e cinco informaram já ter *ouvido* falar, mas não conhecer profundamente sobre o assunto.

Ao responder a questão “Das diversas coisas que você aprendeu sobre Matemática na Escola, e em outros contextos, o que para você é importante em tudo isso? E o que espera aprender além?” a maioria dos alunos fez relações com o ensino de Matemática, o que é importante que os professores de Matemática façam para aprimorar os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática (Quadro 4.3).

Quadro 4.3 Preconcepções dos alunos sobre Matemática

<i>Ter uma visão aberta sobre a Matemática, compreender as diferentes formas (metodologias) de estar ensinando a Matemática. Valorizar a matemática perante desafios que envolvem a sociedade e a política [...].</i>	PE_A2
<i>A maioria das nossas ações envolvem o uso da Matemática, mas quando aprendi os conteúdos no ensino fundamental havia uma carência em ligar o que era estudado com situações reais do nosso cotidiano. Desta forma aprendíamos Matemática por gostar de fazer operações e calcular e não por vê-la em grande parte de nossos afazeres, era algo restrito especificamente a escola e assim para aqueles que não gostavam tornava-se frívola. Ao ingressar na licenciatura em Matemática utilizei muitos conhecimentos aprendidos anteriormente e então a junção do que foi aprendido tecnicamente com ideias de aplicação fez com que desenvolvesse um olhar para tudo o que fazemos, situações simples como um chá esfriando ou algumas mais incomuns para mim como esquadramento de uma construção civil. É importante fazermos e aprendermos Matemática, mas tão importante quanto isso é sabermos onde usarmos nossos conhecimentos [...].</i>	PE_A3
<i>Enquanto era aluno da Educação Básica, o que julgava mais importante eram aqueles conceitos matemáticos em que tinha aplicação no dia-a-dia, mas hoje, acredito que terei que ter domínio dos conteúdos da Educação Básica, pois serei professor. Espero aprender conceitos que vão além do escolar até mesmo para ter o conhecimento mínimo para seguir carreira acadêmica.</i>	PE_A4
<i>Todos esses contextos, cotidianos, escolares, são muito importantes na vida de qualquer pessoa, tudo isso nos dá a capacidade de vincular a matemática aprendida na escola com a matemática vivenciada, o uso da mesma em todos os momentos de nossa vida, o mais importante em tudo isso é o que aprendi para a vida, o que aprendi é que a matemática não pode ser ensinada de maneira descontextualizada, pois está presente a todo tempo em nosso cotidiano, ela nos faz seres pensantes e capazes de tomada de decisões [...].</i>	PE_B1
<i>[...] a matemática é muito além do ensino tradicional, pois cada aluno tem seu conhecimento assim também como o professor, cabe aos dois ir em busca em trocar informações sobre o cotidiano. Com isso o professor tem que sempre contextualizar, mostrando que a matemática não é pronta e acabada, como muitos pensam. Temos muito além de resolução de problemas ou até mesmo a prática, pois temos também, não menos importante, que a prática, a teoria.</i>	PE_B2
<i>Sempre gostei da disciplina de matemática, mas depois de ter o privilégio de cursar essa licenciatura pude confirmar o quanto ela é importante e como está ligada a toda nossa rotina diária.</i>	PE_C2
<i>Aprendi que a matemática está sempre em transformação, em desenvolvimento e que não é apenas uma coisa motora de resolução de fórmulas. Espero aprender a teoria e como se desenvolve cada pedaço [...].</i>	PE_C4

De acordo com as assertivas dos alunos sobre Matemática, disponíveis no Quadro 4.3, é possível considerar que a maioria deles associa seu entendimento de Matemática ao uso que dela fazemos, às aplicações de conceitos matemáticos no cotidiano, além de enfatizarem a importância de aprender relacionar teoria e prática.

As questões do Anexo A que dizem respeito às disciplinas com as quais os alunos se identificaram até aquele momento do curso de Licenciatura em Matemática serão retomadas na medida em que as atividades desenvolvidas pelos grupos de alunos forem apresentadas neste capítulo. Tais questões podem nos dar indícios dos motivos pelos quais os alunos se interessaram pelas temáticas das atividades de modelagem matemática, dos usos que fazem de conceitos matemáticos durante o desenvolvimento dessas atividades, entre outras informações consideradas relevantes para os propósitos desta tese. O Quadro 4.4 indica os grupos de trabalho e as temáticas abordadas nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas.

Quadro 4.4 Grupos de alunos e o desenvolvimento das atividades

Tema da atividade	Grupos							
	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8
O resfriamento da cerveja	✓	✓	✓					
A temperatura do café e a garrafa térmica	✓	✓	✓					
A prática do Bungee Jump			✓	✓	✓			
Slackline: um show de manobras						✓	✓	✓
Variação da temperatura na produção do sorvete		✓						
Preparo da gelatina: variação da temperatura da gelatina em relação ao tempo			✓					
Ônibus espacial	✓							
Armazenamento de grãos de soja	✓							
Pêndulo					✓			
Mola Maluca			✓					
Princípio básico do amortecedor automotivo				✓				

Nas análises apresentadas no capítulo cinco deste texto utilizamos dados coletados durante o desenvolvimento das onze atividades. No entanto, considerando a extensão das atividades descrevemos aqui sete das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos: AT2, a temperatura do café e a garrafa térmica; AT3.1, ônibus espacial; AT3.2, armazenamento de grãos de soja; AT6, a prática do Bungee Jump; AT7, slackline um show de manobras; AT8, pêndulo; AT10, princípio básico do amortecedor automotivo. Optamos pela descrição dessas sete atividades devido à diversidade de procedimentos

matemáticos utilizados, e excluímos da descrição quatro atividades cujos procedimentos matemáticos eram semelhantes aos realizados em outras atividades. Uma descrição abreviada das demais atividades de modelagem matemática desenvolvidas consta no Anexo F.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 2: A TEMPERATURA DO CAFÉ E A GARRAFA TÉRMICA

A atividade sobre *A temperatura do café e a garrafa térmica*, cuja temática foi sugerida pela professora, foi desenvolvida pelos 13 alunos dos grupos G1, G2 e G3, no período de duas horas-aula. Do segundo contato dos alunos com atividades de modelagem matemática, visamos investigar o modo como três grupos de alunos utilizam a Matemática durante a atividade de modelagem matemática. Para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática foram a professora elaborou um texto e o disponibilizou para a turma – Figura 4.1.

Figura 4.1 Texto entregue aos alunos para o desenvolvimento da atividade 2

A Temperatura do Café e a Garrafa Térmica

O calor é definido como sendo energia térmica transitando de um corpo de maior para um corpo de menor temperatura. Esta energia Térmica, é proveniente da agitação das moléculas que constituem o corpo. Como o calor é uma forma de energia, iremos utilizar duas unidades: Joule (J) e a caloria (cal). A relação entre estas duas unidades é: $1,0\text{cal} = 4,18\text{Joules}$.

Os processos de transmissão do calor se dão por: condução (principal processo de propagação do calor em sólidos – moléculas de temperatura maior vibram mais, e sua vibração é transmitida às moléculas vizinhas); convecção (nesse processo a energia se transfere junto com as massas fluídas que trocam de posições devido às suas diferentes densidades provocadas pelas diferenças de temperatura - não ocorre no vácuo nem nos meios sólidos); irradiação (processo que permite transportar energia no vácuo por meio de ondas eletromagnéticas).

Uma garrafa térmica é também conhecida como *Vaso de Dewar*²¹. A característica da garrafa térmica é conservar a temperatura dos líquidos de seu interior pelo maior tempo possível. Desse modo, a função da garrafa térmica é evitar a troca de calor entre o meio ambiente e um corpo qualquer. Na garrafa térmica as paredes duplas dificultam a troca de calor por radiação, enquanto o vácuo entre essas paredes tenta evitar a troca de calor por condução e convecção, já que estes dois processos não ocorrem no vácuo. A tampa da garrafa, por sua vez, impede o contato com o ar externo evitando o processo de convecção.

Segundo a ABIC (Associação Brasileira da Indústria de Café) o café deve ser preparado para ser consumido imediatamente ou, no máximo, durante a hora seguinte. E, ainda, para o preparo

²¹ James Dewar (1842-1923), físico e químico escocês, construiu o recipiente no século XIX, o qual inicialmente tinha o intuito de conservar soluções químicas em temperatura constante.

da bebida a água deve ser apenas aquecida (não pode ferver), visto que a perda de oxigênio altera a acidez do café. A temperatura ideal, da água, para o preparo é de 90°C.

A fim de estudar como se dá a variação da temperatura do café em uma garrafa térmica foi realizada a coleta dos dados (Tabela 1). O café foi preparado com 750 ml de água na temperatura de 90°C. O café foi depositado na garrafa térmica e a cada 10 min aproximadamente 50 ml de café foi retirado da garrafa e a temperatura medida utilizando um termômetro químico diferenciado escala -10+250°C que sobe de 1 em 1°C a 350 mm da marca *Incoterm* enchimento Hg em vidro de diâmetro 8 – 9 mm com erro de até 20°C/+ - 1°C e acima de 210°C/2+-2°C. No dia da coleta de dados a temperatura ambiente estava entre 20°C e 21°C.

Tabela 1: Variação da temperatura do café

Tempo (min)	Temperatura (°C)
0	69
10	69 – 70
20	66 – 65
30	65
40	62 – 63
50	62
60	56
70	56 – 57
80	53 – 54

Fonte: os autores.

Com base nas informações da Tabela 1, como obter a temperatura do café, em uma garrafa térmica, em um instante qualquer?

Explicitamos, neste texto, o desenvolvimento da atividade pelos alunos dos três grupos de trabalho. Após a leitura inicial do texto entregue pela professora, os alunos retiraram as condições iniciais associadas ao problema que envolve a variação temperatura do café em função do tempo (Figura 4.1).

De modo geral, todos os grupos de alunos definiram as variáveis, tempo e temperatura, para o desenvolvimento da atividade: t – tempo (min); T – temperatura (°C), seja explicitamente como no caso dos grupos G1 e G2, seja por meio de indicação na tabela disposta na Figura 4.1, como no caso do grupo G3. De modo geral, todos os grupos relacionaram como uma possível solução para a situação-problema o uso da Lei de Resfriamento de Newton. No entanto, no grupo G1 os alunos fizeram a distinção entre duas possíveis soluções para a atividade e justificaram suas ideias com base na situação-problema inicial e na situação matemática que vislumbraram.

No grupo G1, a formulação de hipóteses foi feita de modo dialógico, levando em consideração conhecimentos prévios dos alunos do grupo e conhecimentos recentemente

abordados na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. Durante a interação dos alunos do grupo G1 com a situação-problema, o aluno A1 sinaliza a vontade de se *aventurar* no uso de conceitos relacionados à física, em particular à termodinâmica, mas os alunos não conseguem recordar como fazer uso de regras associadas ao calor específico de determinado corpo. Ao mesmo tempo um dos alunos se recorda do uso da Lei do Resfriamento de Newton e começa a procurar em suas notas de aula, conforme indica o diálogo:

Aluno A4: *O primeiro passo é retirar os dados, sabe? Retirar o máximo de informações possível do problema. O do resfriamento de Newton acho que eu devo ter aqui no caderno. Deve ter um jeito diferente, mas eu acho que da assim.*

Aluno A1: *Na física, a gente tem uma equação chamada $Q=mct$...*

Aluno A3: *Na química né?*

Aluno A1: *é na química e na física. Que daí a quantidade de calor, é termodinâmica, o m é a massa, o c é o calor específico e o t que é o tempo. Da para fazer alguma coisa, não sei... Pelo que eu me lembro é assim. Mas, vamos tentar pegar isso daí também.*

Aluno A3: *Eu entendi isso daí também, será que da para fazer?*

Aluno A1: *Mas, então, eu acho que a gente vai chegar para fazer uma EDO temos que continuar nisso.*

Aluno A3: *é pode ser.*

Aluno A1: *Mas, eu acho que iremos chegar nisso daqui [se referindo à função que representa o calor]...*

Aluno A4: *Mas de onde que veio isso daqui A1?*

Aluno A1: *é da física, da termodinâmica, quando se estuda no ensino médio daí tem isso, só que eu não lembro se realmente é isso daqui.*

Aluno A3: *eu também não me lembro.*

Aluno A1: *mas, vamos fazer por EDO mesmo, achou A4?*

GR_AT2_MM1_G1.

Na análise da variação da temperatura no decorrer do tempo, os alunos procuram os conceitos associados à Lei de Resfriamento de Newton já vista em outras atividades, bem como indicações de como utilizar o procedimento com vistas à elaboração de uma equação diferencial ordinária que viabilize obter a resposta para problema proposto. Para tanto os alunos analisam os dados apresentados na tabela que compõe o texto entregue pela professora (Figura 4.1) e veem a necessidade de elaborar uma simplificação de modo a ter para cada tempo uma única temperatura.

Aluno A3: *parece que tem uma constante e temos a temperatura ambiente.*

Aluno A1: *da para obtermos um padrão.*
 Aluno A2: *uma média entre elas [...].*
 Aluno A3: *vamos pegar sempre o menor.*
 Aluno A4: *será gente?*
 Aluno A1: *sim, porque a temperatura está caindo, não tem como subir.*
 Aluno A3: *então eu tenho a temperatura. [...]*
 Aluno A1: *aí cuidado aqui olha, aqui é 56, mas olha aqui o 57, então coloca o 57 aqui e depois o 56 e depois o 54....*
 Aluno A3: *agora vamos fazer uma média aritmética?*

GR_AT2_MM1_G1.

A simplificação a que se referem os alunos A1, A2, A3 e A4 está associada aos dados empíricos coletados pela professora na elaboração da situação problema (Tabela 4.1).

Tabela 4.1 Simplificação dos dados da situação-problema feita pelos alunos de G1

Tempo (min)	Temperatura (°C)
0	70
10	69
20	66
30	65
40	63
50	62
60	57
70	56
80	54

Fonte: RE_AT2_MM1_G1.

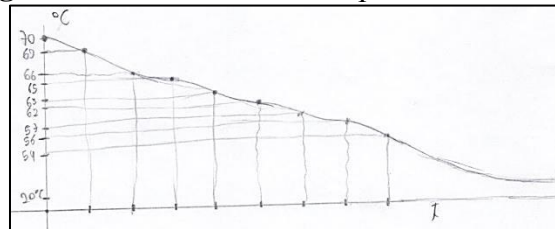
Após a decisão sobre que ponto tomar para a temperatura em cada intervalo de tempo, os alunos decidem pela elaboração de um gráfico a fim de representar os dados, da situação-problema, e interpretá-los com vistas à Lei do Resfriamento de Newton (Figura 4.2).

Aluno A1: *eu vou fazer um gráfico... [...]*
 Aluno A3: *então eu vou ter, $\frac{dT}{dt} = kt - 21k$*
 Aluno A2: *k é a constante.*
 Aluno A3: *então, mas é isso que eu queria saber, se essa constante a gente pode chamar sobre essa variação.*
 Aluno A2: *a constante é 50.*
 Aluno A3: *a constante é 50?*
 Aluno A2: *é;*
 Aluno A3: *mas isso aqui você não concorda que é algo proporcional que vai alterar essa temperatura? Eu acho que é uma constante normal mesmo, você não acha?*

Aluno A2: *seria o tempo?*
 Aluno A3: *isso aqui a gente teria que achar né, essa constante.*
 Aluno A2: *é verdade. [...]*
 Aluno A3: *a gente vai separar as variáveis e integrar, para daí tentar achar a constante [...]*
 Aluno A4: *porque esse 21 na EDO?*
 Aluno A3: *aqui na atividade ela fala que a temperatura ambiente estava entre 20 e 21 graus, mas podemos utilizar 20 amigo.*
 Aluno A4: *melhor né?*
 Aluno A3: *vamos utilizar 20 então.*

GR_AT2_MM1_G1.

Figura 4.2 Gráfico elaborado pelos alunos de G1



Fonte: RE_AT2_MM1_A1.

O diálogo dos alunos sinaliza a investigação de uma situação matemática associada à Lei do Resfriamento de Newton, no entanto, não há, por escrito, a explicitação dessa investigação como sendo uma hipótese formulada pelo grupo. O procedimento é utilizado como uma maneira de resolver a questão colocada na situação-problema (Figura 4.3).

Figura 4.3 Resolução da situação-problema utilizando a Lei do Resfriamento de Newton

$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - 20) \rightarrow \text{Temp. ambiente}$ $dT = k \cdot (T - 20) dt$ $\frac{dT}{(T-20)} = k \cdot dt$ $\ln T-20 = k \cdot t + c$ $e^{k \cdot t + c} = T - 20$ $e^{k \cdot t} \cdot e^c = T - 20$ $e^{k \cdot t} \cdot R = T - 20$ $e^{k \cdot t} = \frac{T - 20}{R}$	$t(0) = 69^\circ$ $e^{k \cdot 0} = \frac{69 - 20}{R}$ $e^0 = \frac{49}{R}$ $R \cdot 1 = \frac{49}{R} \cdot R$ $R = 49$	$\frac{t = 20}{e^{k \cdot 20} = \frac{65 - 20}{49}}$ $t(20) = 65^\circ \Rightarrow e^{20k} = \frac{45}{49}$ $e^{20k} = 0,918367246$ $20k e^{\frac{1}{20}} = \ln 0,918367246 $ $20k = -0,085157809$ $k = \frac{-0,085157809}{20}$ $k = -0,00425$
--	--	---

Fonte: RE_AT2_MM1_G1.

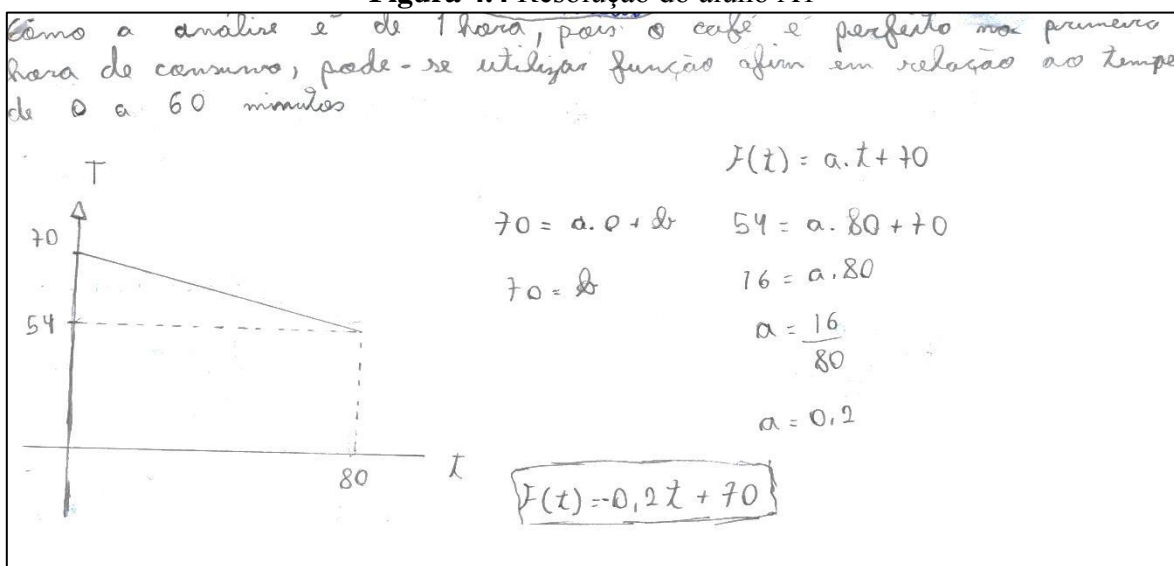
Na resolução da equação diferencial ordinária, os alunos utilizam o método de variáveis separáveis para resolução de EDO linear de primeira ordem. Ao elaborarem a

solução, o grupo explicita os passos utilizados, os procedimentos matemáticos, bem como as propriedades associadas às integrais de funções de uma variável real.

Solucionada a EDO e obtida uma representação do modelo exponencial para o decaimento da temperatura do café em relação ao tempo, um dos alunos do grupo não se dá por satisfeito e argumenta com o grupo pela obtenção de outro modelo. Por meio da argumentação do aluno A1 com os demais alunos do grupo, eles decidem por obter um modelo linear para a situação-problema.

Mas, é apenas o aluno A1 que justifica seu entendimento de que tal modelo é melhor para representar a temperatura do café em uma garrafa térmica no intervalo de uma hora (Figura 4.4). O aluno argumenta que faz sentido olhar para a temperatura do café na primeira hora, pois é nesse período que o café é tido como bom para o consumo.

Figura 4.4 Resolução do aluno A1



Fonte: RE_AT2_MM1_A1.

No momento de comunicar os resultados obtidos para o restante da turma, é o aluno A4 quem desenvolve o primeiro modelo, modelo exponencial – utilizando a Lei do Resfriamento de Newton, e A1 desenvolve o modelo linear, como uma alternativa para a solução da situação-problema. A justificativa para o desenvolvimento do modelo linear é dada por A1 durante a comunicação:

Aluno A1: *porque fizemos outro modelo? Como a temperatura do café está tendendo à temperatura ambiente, pensamos que seria uma exponencial, pois a temperatura não passaria da temperatura ambiente, só que como o exercício pedia outra coisa, observamos o seguinte*

[o alunos esboça um gráfico no quadro para exemplificar o raciocínio do grupo]

O que observamos, nesse pedaço aqui [ilustrando o espaço de tempo em que os dados foram coletados, ou seja, o domínio da função] poderíamos considerar apenas isso aqui, aí a gente fez o seguinte.

Sabemos que a função do primeiro grau é isso aqui: $f(t)=at+b$.

Aluno A4: *função linear gente.*

Aluno A1: *Aí como a gente tinha o tempo 0...*

Professora: *só para saber, quem é f?*

Aluno A3: *é o T, risos.*

Aluno A1: *a tá, agora que eu entendi, é T e o t.*

Aluno A1: *a gente sabe que quando o tempo é zero aqui, a função é 70 lá. [desenvolvimento matemático no quadro], então ficou $b=70$.*

Aluno A1: *Quando o temperatura é 54 lá e o tempo 80, temos o seguinte $54=a80+70$. Quanto que dá?*

Aluno B1: *-0,2.*

Aluno A1: *porque que deu negativo aqui?*

Aluno B1: *porque decresce.*

[o aluno resolve no quadro o problema e é solicitado pela turma que explique]

Aluno A1: *vocês podem observar que lá no meu tempo no tempo de 60, temos a temperatura de 57.*

Professora: *Agora A1, porque que as duas funções dão certo nesse desenvolvimento?*

Aluno A3: *eu tinha pensado que é porque a temperatura na tabela é baixa, aí da para considerar que é algo constante, e temos uma linearidade.*

[nesse momento A1 esboça no quadro um gráfico da função exponencial para a temperatura]

Aluno A1 apontando para o gráfico explica: *como a ideia da atividade não foi tudo isso e sim um pedaço disso aqui, então pode-se considerar como uma linear.*

Professora: *porque é um domínio menor né? E essa função serviria para fazer previsões?*

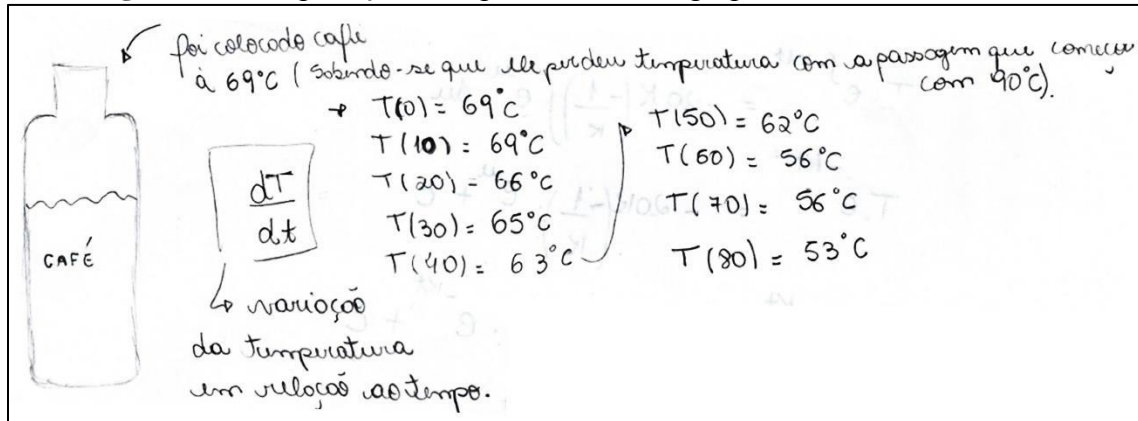
Todos os alunos: *não.*

GR_AT2_MM1_G1.

A investigação feita pelos alunos do grupo G1, explicitada pelo aluno A1, para o uso da função linear na situação idealizada se dá aliando as características da situação-problema inicial, em particular, quando o grupo considera o intervalo de uma hora em que é adequado o consumo do café, e compara com o domínio para o qual a função linear é válida. Nesse percurso duas funções matemáticas são obtidas pelos alunos do grupo G1 para representar a temperatura do café em uma garrafa térmica, em qualquer instante de tempo: $T_1(t) = 20 + 49.e^{-0,004261t}$ e $T_2(t) = -0,26.t + 70$.

Já no grupo de alunos G2, para o desenvolvimento da atividade sobre a temperatura do café em uma garrafa térmica, as alunas B1, B2, B3 e B4, iniciam o processo de interpretação dos dados, por meio da idealização do que ocorre com a temperatura no interior de uma garrafa térmica (Figura 4.5). É nesse contexto que as alunas buscam identificar como se dá a variação da temperatura em relação ao tempo.

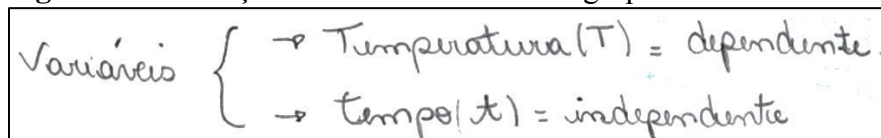
Figura 4.5 Interpretação feita pelos alunos do grupo G2 sobre a atividade 2



Fonte: RE_AT2_MM1_G2.

Foram então definidas as variáveis (Figura 4.6):

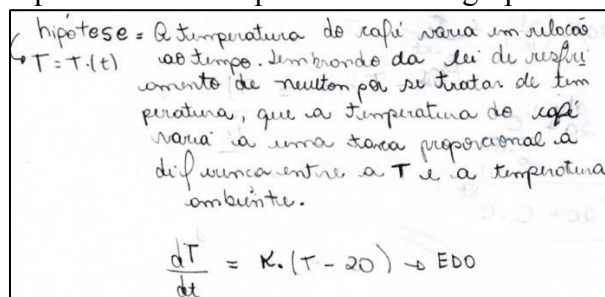
Figura 4.6 Definição de variáveis alunos do grupo G2 na atividade 2



Fonte: RE_AT2_MM1_G2.

E considerando as informações contidas na atividade e o desenvolvimento de outras atividades na disciplina de EDO, as alunas formulam a hipótese (Figura 4.7):

Figura 4.7 Hipótese declarada pelos alunos do grupo G2 na atividade 2



Fonte: RE_AT2_MM1_G2.

A partir da hipótese associada à Lei de Resfriamento de Newton, as alunas utilizam de procedimentos matemáticos associados à disciplina de EDO: elaboração de um problema de valor inicial, resolução deste problema utilizando o método do fator integrante, uso do método da substituição de variáveis para o cálculo de integrais, uso de propriedades sobre funções (Figura 4.8):

Figura 4.8 Obtenção do modelo matemático pelos alunos do grupo G2 na atividade 2

Resolvendo a EDO:

$$\frac{dT}{dt} = kT - 20K$$

$$\frac{dT}{dt} - kT = -20K$$

$$e^{\int -k dt} \left(\frac{dT}{dt} - kT \right) = (-20K) e^{\int -k dt}$$

$$\frac{dT}{dt} e^{-kT} - kT e^{-kT} = -20K e^{-kT}$$

Integrar $\rightarrow \int \frac{d}{dt} [T \cdot e^{\int -k dt}] = \int -20K \cdot e^{-k dt}$

$$T \cdot e^{-kT} + C = -20K \int e^{-k dt}$$

$$T \cdot e^{-kT} + C = -20K \int e^{-kt} dt$$

$$T \cdot e^{-kT} = -20K \left(\frac{-1}{k} \right) e^{-kt} + C$$

$$T \cdot e^{-kT} = -20K \left(\frac{-1}{k} \right) \cdot e^{-kt} + C$$

$$T = \frac{-20K \left(\frac{-1}{k} \right) \cdot e^{-kt} + C}{e^{-kt}}$$

$$T = -20K \left(\frac{-1}{k} \right) + \frac{C}{e^{-kt}}$$

$$T = 20 + \frac{C}{e^{-kt}}$$

$$T = 20 + C \cdot e^{kt}$$

Fonte: RE_AT2_MM1_G2.

Solucionada a EDO, as alunas resolveram o problema de valor inicial com os dados dispostos na situação-problema e a partir disso elaboram uma resposta para a situação-problema (Figura 4.9 e Figura 4.10).

Figura 4.9 Obtenção dos parâmetros da função feita pelos alunos do grupo G2

$56 = 20 + 49 \cdot e^{K \cdot 60}$ $56 - 20 = 49 \cdot e^{K \cdot 60}$ $36 = 49 \cdot e^{K \cdot 60}$ $\frac{36}{49} = e^{K \cdot 60}$ $0,73469388 = e^{K \cdot 60}$ $\ln(0,73469388) = \ln e^{K \cdot 60}$ $-0,308301356 = K \cdot 60 (\ln)$ $K = -0,00513835599$	$69 = 20 + C \cdot e^{0 \cdot K}$ $69 = 20 + C \cdot e^0$ $69 = 20 + C \cdot 1$ $69 - 20 = C \cdot 1$ $\boxed{49 = C}$
--	--

Fonte: RE_AT2_MM1_G2.

Figura 4.10 Resposta para a situação-problema dos alunos do grupo G2 na atividade 2

Assim o modelo que descreve a temperatura do café em qualquer instante de tempo é dado por

$$T = 20 + 49 \cdot e^{-0,005138355994 \cdot t}$$

Fonte: RE_AT2_MM1_G2.

O que muda, do desenvolvimento feito pelos alunos do grupo G1, é que os alunos explicitam seu curso de pensamento, bem como as regras matemáticas utilizadas, mostrando as relações matemáticas expressas por meio de proposições gramaticais.

No grupo de alunos G3, composto pelos alunos C1, C2, C3, C4 e C5, os alunos utilizaram apenas a Lei de Resfriamento de Newton para solucionar a questão solicitada na atividade (Figura 4.11). Este grupo, no entanto se atentou para a representação gráfica dos dados dispostos na situação contida na atividade e utilizou a passagem das variáveis discretas para as variáveis contínuas, de modo a utilizar a solução de EDOs considerando o método de variáveis separáveis para solucionar uma EDO linear de primeira ordem.

Figura 4.11 Desenvolvimento matemático dos alunos do grupo G3

The image shows handwritten mathematical work by students from group G3. The work is organized into several columns and rows, showing different approaches to solving a differential equation for temperature.

Left Column (Differential Equation and Integration):

- $\frac{\Delta F}{\Delta t} = k(F - t)$ (Temperatura)
- $dF = k \cdot (F - 20) dt$
- $\int \frac{dF}{(F-20)} = \int k \cdot dt$
- $\ln|F-20| = k \cdot t + C$
- $e^{\ln|F-20|} = e^{k \cdot t + C}$
- $F-20 = e^{k \cdot t} \cdot e^C \rightarrow \text{constante}$
- $F-20 = e^{k \cdot t} \cdot C$
- $F = e^{k \cdot t} \cdot C + 20$ (boxed)

Middle Column (Substitution and Simplification):

- $F = C \cdot e^{k \cdot t} + 20$
- $69 = C \cdot e^{k \cdot 0} + 20$
- $69 = C \cdot e^0 + 20$
- $69 = C \cdot 1 + 20$
- $C = 69 - 20$
- $C = 49$
- $69 = 49 \cdot e^{k \cdot 10} + 20$
- $69 = 49 \cdot e^{10k} + 20$
- $69 - 20 = 49 e^{10k}$
- $49 = 49 e^{10k}$
- $e^{10k} = \frac{49}{49}$
- $e^{10k} = 1$
- $k = 0$
- $F = a^n \cdot c$

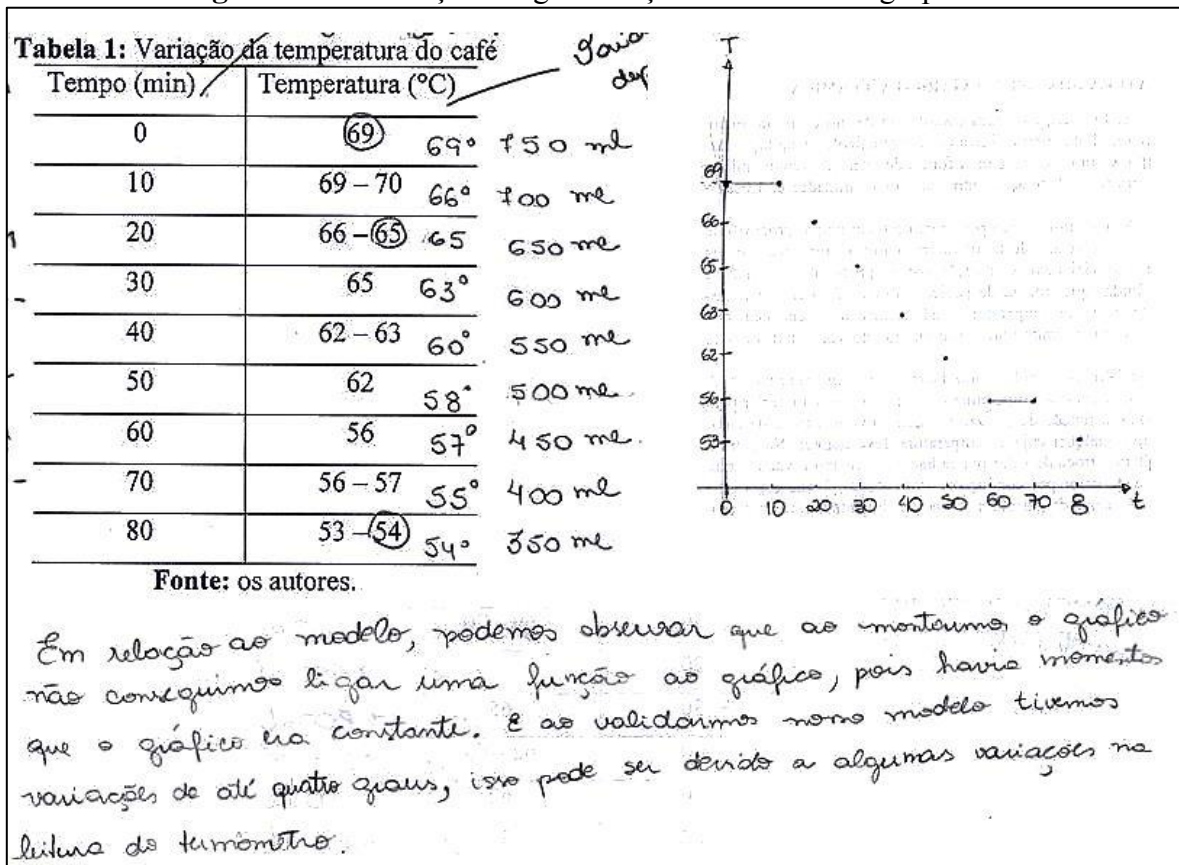
Right Column (Logarithmic Solution and Final Model):

- $54 = 49 e^{k \cdot 80} + 20$
- $\frac{34}{49} = e^{k \cdot 80}$
- $k \cdot 80 = \ln 0,6933$
- $k = \ln \frac{0,6933}{80}$
- $k = 0,004568247$ (boxed)
- $53 = 49 e^{k \cdot 80}$
- $\frac{53}{49} = e^{k \cdot 80}$
- $k \cdot 80 = 0,6735$
- $\ln 0,6735 = k \cdot 80$
- $k = 0,00494$
- $I = 49 e^{-9,004568247 \cdot t} + 20$ (boxed)

Fonte: RE_AT2_MM1_G3_C2.

Os alunos do grupo G3 consideraram como modelo matemático, a função $T(t) = 49e^{-9004568247t} + 20$, e para sua validação utilizaram os dados da Tabela 1 dispostos na atividade e uma representação gráfica destes dados. Neste processo não conseguiram associar a função matemática obtida que descreve a temperatura ao gráfico de dispersão dos dados da atividade (Figura 4.12).

Figura 4.12 Validação e argumentação dos alunos do grupo G3



Fonte: RE_AT2_MM1_G3_C2.

As atividades de modelagem matemática que descrevemos na sequência foram desenvolvidas no final do primeiro semestre de 2015 na disciplina de EDO sendo uma por cada grupo de alunos (AT3 de G1; AT4 de G2; AT5 de G3), desde a escolha do tema até a situação final, ou seja, até uma resposta para a situação-problema estudada. Na apresentação dessas atividades retomamos aspectos relacionados ao perfil dos alunos modeladores que podem ter contribuído para que o desenvolvimento da atividade tenha ocorrido da maneira que ocorreu.

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES 3.1 ÔNIBUS ESPACIAL E 3.2 ARMAZENAMENTO DE GRÃOS DE SOJA

As atividades *ônibus espacial* e *armazenamento de grãos de soja* foram desenvolvidas na primeira experiência dos alunos do grupo G1 com o desenvolvimento de

uma atividade de modelagem matemática do terceiro momento, desde a escolha de um tema para estudar até a resposta final. A atividade foi desenvolvida no decorrer do primeiro semestre letivo de 2015, durante a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, apresentada à turma em forma de seminário e entregue à professora contendo introdução, elementos teóricos sobre modelagem matemática, informações sobre as temáticas das atividades e uma possível solução para cada atividade de modelagem matemática.

Com a intenção de definir a temática para a atividade de modelagem matemática, os alunos do grupo G1 se reuniram para discutir ideias e coletar dados. Nas discussões do grupo, o aluno A1 expôs que gostaria de estudar algo associado à NASA (Agência de Administração Nacional Aeronáutica e Espacial) e o aluno A3 colocou para o grupo a intenção de estudar coisas associadas a uma cooperativa agroindustrial, pois seu pai trabalhava em uma e a coleta de dados seria de fácil acesso.

Os demais alunos do grupo, A2 e A4, não conseguiram decidir por uma ideia ou por outra, assim decidiram investir nas duas ideias para ver a viabilidade de desenvolver duas atividades envolvendo o conteúdo de equações diferenciais ordinárias.

Desse modo, os responsáveis pela coleta de informações, no grupo G1, foram A1 e A3, e os demais alunos do grupo participaram na simplificação das informações, nas pesquisas sobre o tema, no delineamento de uma situação-problema idealizada para investigar, no desenvolvimento do modelo, e na resposta para a situação-problema colocada.

Nesse contexto, a atividade 3 aqui descrita contempla duas atividades de modelagem matemática: AT3.1, ônibus espacial; e AT3.2, armazenamento de grãos de soja em um silo. As principais informações e elaboração das situações-problema constam na Figura 4.13 e Figura 4.14 e Figura 4.20. Na Figura 4.13, são apresentadas as informações comuns às duas atividades, na Figura 4.14 às informações sobre o ônibus espacial e na Figura 4.20 informações sobre o armazenamento de grãos de soja.

No desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, os alunos demonstraram interesse em pesquisar não só equações diferenciais ordinárias, mas também sobre modelagem matemática (Figura 4.13). Dos alunos deste grupo, A1 e A3 eram alunos de iniciação científica com orientadores que desenvolviam projetos de doutorado associados à Modelagem Matemática na Educação Matemática. No questionário do Anexo

A1 todos os quatro alunos informaram já ter algum conhecimento sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática. No grupo, três alunos mencionaram gostar e ter facilidade com disciplinas associadas à Matemática, como as disciplinas Funções de Uma Variável Real, Elementos de Matemática, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Estruturas Algébricas, Geometria Analítica entre outros; o aluno A4 mencionou disciplinas associadas especificamente à Educação Matemática, como Didática da Matemática e História da Matemática.

Figura 4.13 Informações gerais de G1 sobre a atividade de modelagem matemática

1. INTRODUÇÃO

O curso de Licenciatura de Matemática da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), campus Cornélio Procópio, abrange várias disciplinas sobretudo Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), que aborda equações que dependem apenas de uma variável. A importância dessa disciplina no contexto acadêmico é que a mesma propicia uma visão ampla sobre os fenômenos da natureza e física, já que quando relacionada algum fenômeno com o tempo, existem 2 variações, uma dependente e outra independente. Quando se precisa de mais de uma variável dependente ou independente, é denominada equações diferenciais parciais.

Este trabalho consiste em uma pesquisa em relação a atividades de EDO, cujo objetivo é buscar dados sobre algum tema e, por meio dos dados chegar em uma EDO que satisfaz o tema. A importância da disciplina de EDO nas aulas de matemática, acaba proporcionando aos discente uma possibilidade de se trabalhar o Cálculo Diferencial e Integral (CDI) com situações-problema. Deste modo, são propostas atividades para grupos do terceiro ano do curso de matemática, com uma dinâmica entre eles na coleta de dados, na análise e interpretação dos mesmos.

A escolha por temas justifica-se pelas diversas aplicações que as equações diferenciais ordinárias apresentam em diversas áreas do conhecimento, como a Física, a Química, a Biologia, a Engenharia, entre outras. Em relação ao tema escolhido, ônibus espacial e armazenagem de grãos de soja, o grupo desenvolveu duas atividades que utiliza EDO, sendo que as atividades ônibus espacial e armazenagem de grãos de soja têm como problema: ‘é possível estabelecer uma relação em qualquer período de tempo em relação a velocidade do ônibus espacial?’; ‘qual é volume de grãos existente dentro do silo em qualquer instante de tempo?’.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.17), a modelagem matemática é “uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente Matemática”. Nessa perspectiva, essa alternativa compreende uma forma de trabalhar com atividades em sala de aula, cuja problemática parte de uma situação real. De forma simples e generalizada, esta perspectiva nos diz que a modelagem matemática tem em seu desenvolvimento o trabalho com atividades em sala de aula, em que a problemática se principia de uma situação real e faz o uso de dados reais.

Segundo Bassanezi (2011, p.16), “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. O autor considera que a modelagem matemática compreende um processo dinâmico que alia teoria e prática procurando explicar a realidade por meio da obtenção e validação de modelos matemáticos.

Nesse contexto, modelo matemático é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (BASSANEZI, 2002, p. 20). Para este autor, um modelo matemático não precisa ser, necessariamente, uma expressão algébrica, ele pode ser considerado como um gráfico ou uma tabela e se caracteriza como peça fundamental na atividade de modelagem matemática.

A importância de atividades de modelagem matemática para o ensino de conteúdos matemáticos é indicada pelas Diretrizes Curriculares Estaduais para a Educação Básica (DCE) do Estado do Paraná. Segundo o documento a modelagem matemática é vista como uma das tendências metodológicas para o ensino e aprendizagem de matemática (PARANÁ, 2008). Nesse sentido, Almeida e Brito (2005) ressaltam que:

Uma das principais razões apontadas para se fazer modelagem na sala de aula é a necessidade de tornar visível aos estudantes o papel da matemática fora da sala de aula. Diversas decisões são tomadas na sociedade com base em modelos matemáticos. A presença da matemática, como forte aliada do desenvolvimento tecnológico, tem afetado direta e indiretamente a vida das pessoas [...] A Modelagem Matemática pode criar condições para discutir e questionar este poder de formatação da matemática, tornando visível a importância que a matemática tem para a sociedade (ALMEIDA; BRITO, 2005, p.488).

Desse modo, a modelagem matemática no desenvolvimento de atividades pode ser trabalhada na disciplina EDO, já que na mesma existem aplicações em fenômenos naturais e físicos, podendo obter dados reais e criações de hipóteses para chegar em um modelo matemático.

Fonte: RE_AT3_MM3_G1.

Após vincular a modelagem matemática à disciplina de equações diferenciais e trazer elementos sobre estes itens no texto, o grupo apresentou informações sobre o ônibus espacial e sobre a armazenagem de grãos de soja em um silo.

Atividade 3.1: Ônibus Espacial

Os dados utilizados para o desenvolvimento desta temática foram coletados no site da agência nacional de administração aeronáutica e do espaço (NASA) (Figura 4.14).

Figura 4.14 Informações sobre a atividade *ônibus espacial*

3. ÔNIBUS ESPACIAL

A National Aeronautics and Space Administration (NASA) começou o programa de ônibus espacial com investimento do Estado (EUA), cujo objetivo era minimizar custos por meio da construção da frota de ônibus espaciais. Entre os objetivos do programa, a possibilidade de recuperar e reutilizar os ônibus lançados em outras missões, era um dos principais desafios, ao atingir esta meta a NASA minimizou os custos, passando a ter um orçamento fixo em torno de 46 bilhões por ano. O primeiro lançamento ocorreu em 12 de abril de 1981 e o programa estendeu-se até dia 21 de julho de 2011 totalizando 30 anos de missões. A frota de ônibus espaciais teve início

com a Enterprise, realizado vários testes os quais serviram de base para a construção dos demais ônibus, tais como Columbia (primeiro ônibus espacial lançado ao espaço), Challenger, Discovery, Atlantis e Endeavour. Com os mesmos, foram desenvolvidas pesquisas, reparações de satélites além da construção da maior estrutura no espaço, a Estação Espacial Internacional (NASA, 2015).

Após os vários testes desenvolvidos durante programa de ônibus espacial, com aperfeiçoamento de ideias para conseguir atingir a órbita, foram criados 2 foguetes (boosters), que dão 85% da força de propulsão necessária, tendo seu combustível constituído a partir da reação entre a base de alumínio em pó, o oxidante perclorato de amônia e o catalisador óxido de ferro em pó. Quando o ônibus espacial atinge aproximadamente 45 km em 2 minutos os dois boosters são separados do tanque externo, em que nos boosters são ativados paraquedas e direcionam ao oceano Atlântico. Ao encontrar o oceano os boosters são recuperados por navios para serem reutilizados em outras missões posteriormente (NASA, 2006).

Os motores principais (três motores) estão na nave espacial e utilizam o combustível líquido contido no tanque externo. A versão original do tanque externo foi feita de liga de alumínio 2219, em que o laboratório Lockheed Martin comprometeu-se em desenvolver uma alta resistência para o tanque, o resultado foi uma série de ligas de alumínio-lítio, chamada de Weldalite®, a qual a liga 2195 foi selecionado para a nova geração de tanques leves (NASA, 2005).

A liga de alumínio 2195-lítio é 30% mais forte e 5% menos densa do que a liga 2219 original. Pode ser soldada e resiste a uma temperatura de -423 graus Fahrenheit a temperatura à qual o líquido propulsor hidrogênio é armazenado a bordo. Al-Li 2195 é composta de 1% de lítio, 4% de cobre, 0,4% de prata, e 0,4% de magnésio, com o alumínio restante (NASA, 2005, p. 2).

Sobre os tanques externos, estes são alimentados de oxigênio líquido e hidrogênio líquido. O peso do tanque externo é de aproximadamente 78.100 libras e bruto 1.667.677 libras. A quantidade de hidrogênio líquido no tanque é maior que de oxigênio líquido, sendo que o oxigênio líquido é mais pesado que o hidrogênio líquido, sendo os pesos 1.359.142 libras e 226.237 libras respectivamente. A cerca de 104 quilômetros acima da terra o tanque externo é desacoplado do ônibus espacial, estando quase vazio desce seguindo uma trajetória pré-planejada, desintegrando na atmosfera e caindo no oceano. A duração de voo aproximadamente até a desacoplagem do tanque externo é de 8 minutos e 30 segundos. Na decolagem, o tanque externo absorve o total de 7,8 milhões de libras de cargas axiais (carga somada com todos os tipos de força) dos três motores principais e dos dois foguetes laterais (boosters) (NASA², 2006).

Imagem 1: Ônibus espacial Columbia, foto do lançamento 39A em 12 de abril de 1981.



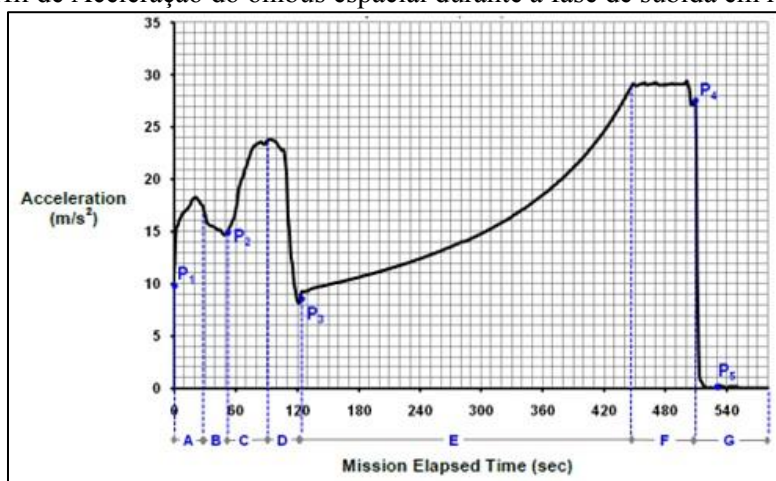
Fonte: NASA. Disponível em:

<http://www.nasa.gov/mission_pages/shuttle/flyout/shuttleachievements.html>. Acesso em 10 set. 2015.

Após a desacoplagem do tanque externo, o ônibus espacial segue a trajetória até o apoapsis (altitude máxima que foi proporcionado pelos foguetes e motores principais da nave). Enquanto o ônibus espacial é deslocado até o apoapsis, são ligados os rotores (motores que giram em torno do próprio eixo, possibilitando que a nave determine sua direção), deixando o mesmo com o bico em relação ao horizonte do planeta. Depois de aproximadamente 30 minutos, após a desacoplagem, o ônibus chega no apoapsis e então os três motores principais são ligados, até criar uma órbita em volta da terra, tendo o periapsis (menor distância até o planeta) e o apoapsis com uma distância de aproximadamente 320 km em relação ao solo, criando uma órbita e viajando a mais de 28.000 km/h.

Considere o gráfico da Figura 2, para observar o comportamento da aceleração em determinado tempo, e que a aceleração máxima atingida pelo ônibus espacial é de aproximadamente $29,4 \text{ m/s}^2$.

Imagem 2: Perfil de Aceleração do ônibus espacial durante a fase de subida em relação ao tempo.



Fonte: Math and Science Work. Disponível em:

https://www.nasa.gov/pdf/522589main_AP_ST_Phys_ShuttleLaunch.pdf. Acesso em 10 set. 2015.

Fonte: RE_AT3.1_MM3_G1.

As informações dispostas na Figura 4.14 serviram como ponto de partida para os alunos elaborarem uma situação-problema a estudar: *qual a velocidade, em qualquer período de tempo dentro do intervalo de 0 a 540 segundos, do ônibus espacial?*

Para tanto, foram definidas as variáveis:

Tempo (t) – independente;

Velocidade (v) - variável dependente;

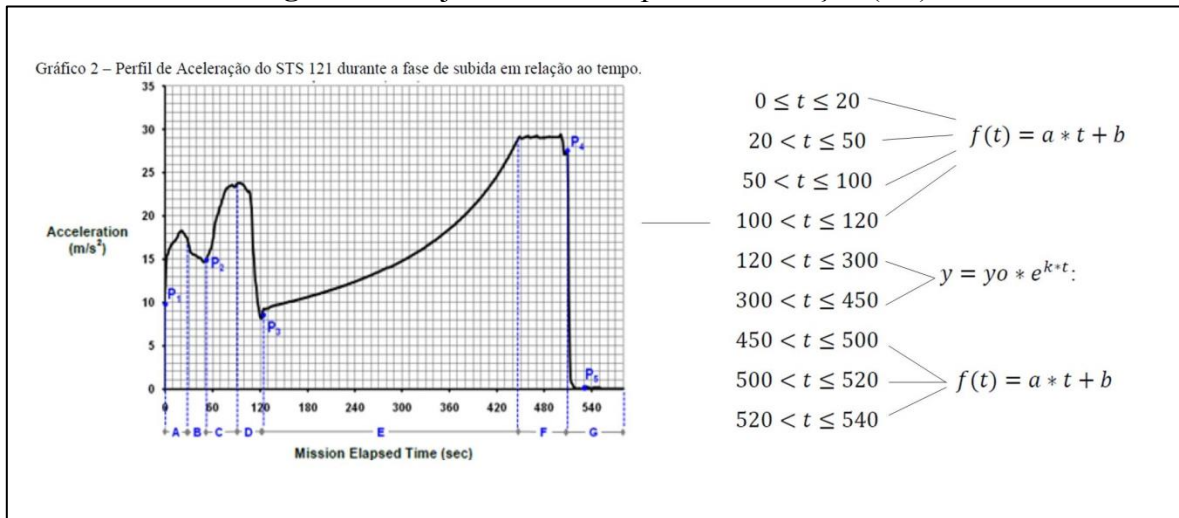
Aceleração (a) - variável auxiliar ($a = \frac{dv}{dt}$).

Na interpretação dos dados coletados, os alunos sentiram a necessidade de interpretar os dados do perfil de aceleração do ônibus espacial, durante a missão para a

Estação Espacial Internacional, durante a fase de subida em relação ao tempo por meio de uma expressão algébrica.

Por meio do registro gráfico, os alunos identificaram o domínio no qual as informações sobre a aceleração são válidas (Figura 4.15):

Figura 4.15 Ajuste de curvas para a aceleração (G1)



Fonte: RE_AT3.1_MM3_G1.

A partir de uma informação coletada pelo grupo, os alunos leram o registro gráfico (Imagem 2 da Figura 4.14) e interpretaram a aceleração a como uma função específica definida em cada intervalo de tempo t (Figura 4.15). Para a obtenção das expressões algébricas que formam as sentenças da função aceleração em cada intervalo de tempo, $a(t)$, os alunos utilizaram o ajuste de curvas de acordo com o comportamento do gráfico. Utilizando de dois pontos do gráfico em cada intervalo de tempo, os alunos utilizaram de sistemas matemáticos para obter a curva associada a cada intervalo (Figura 4.16).

Figura 4.16 Função que descreve a aceleração – alunos do grupo G1

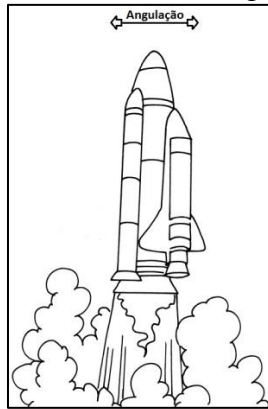
$$a(t) = \begin{cases} 0,15 * t + 15 & \text{se } 0 \leq t \leq 20 \\ -0,1 * t + 20 & \text{se } 20 < t \leq 50 \\ 0,18 * t + 6 & \text{se } 50 < t \leq 100 \\ -0,75 * t + 99 & \text{se } 100 < t \leq 120 \\ 9 * e^{0,0017*t} & \text{se } 120 < t \leq 300 \\ 15 * e^{0,0015*t} & \text{se } 300 < t \leq 450 \\ 29 & \text{se } 450 < t \leq 500 \\ -1,45 * t + 754 & \text{se } 500 < t \leq 520 \\ 0 & \text{se } 520 < t \leq 540 \end{cases}$$

Fonte: RE_AT3.1_MM3_G1.

Considerando as informações da Figura 4.15 e Figura 4.16 os alunos formularam a Hipótese 1: Se a variação do combustível dos boosters em relação ao tempo é linear, então a variação do combustível no tanque externo está relacionada à aceleração do ônibus espacial.

Ao considerar a variação do combustível, no tanque externo, associada à aceleração, os alunos realizaram simplificações, pois desconsideraram outras variáveis que atuam na perda de combustível pelo booster, como a temperatura, o coeficiente de dilatação, a dilatação dos três foguetes principais, a resistência do ar, a velocidade do ar, dentre outras. A análise da angulação do ônibus espacial (Figura 4.17) no momento de sua subida possibilitou aos alunos formularem as hipóteses 2 e 3.

Figura 4.17 Ônibus espacial



Fonte: RE_AT3.1_MM3_G. Adaptação de Papacaio. Disponível em: <www.1papacaio.com.br/modules/Imprima_pinte/gallery/transportes/foguete002.gif> Acesso em out. 2015.

Hipótese 2: Se a angulação está relacionada com os três foguetes principais, então existe uma variação da aceleração.

Hipótese 3: A aceleração está relacionada com a velocidade, então existe variação da velocidade.

Sobre a velocidade do ônibus em relação ao tempo, os alunos sinalizaram que quando há uma variação da aceleração em certo período de tempo, ocorre perda de combustível e alteração da velocidade. O combustível está associado com a aceleração, pois quanto mais pesado o ônibus, maior a quantidade de combustível necessária.

Foi considerado pelos alunos que a quantidade de hidrogênio líquido no tanque é maior que a de oxigênio líquido, pois o oxigênio líquido é mais pesado que o hidrogênio

líquido, com os pesos de 1.359.142 libras e de 226.237 libras, respectivamente. O peso do tanque externo é de aproximadamente 78.100 libras e bruto 1.667.677 libras. A partir da análise do gráfico da Figura 4.15, do levantamento de hipóteses e simplificações da situação em estudo, foi definido o problema: *Qual a velocidade, em qualquer período de tempo dentro do intervalo de 0 a 540 segundos, do ônibus espacial?*

Utilizando informações associadas ao cálculo diferencial e integral, os alunos utilizam o teorema fundamental do cálculo para obter a velocidade. Para tanto, na definição de variáveis os alunos assumem que a aceleração pode ser vista como variação contínua da velocidade em relação ao tempo e a partir dessa suposição os alunos obtêm as funções dispostas na Figura 4.18.

Figura 4.18 A resposta do grupo para a velocidade no interior de um ônibus espacial

<p>Função (1) na EDO</p> $0,15 * t + 15 = \frac{dv}{dt}$ $(0,15 * t + 15)dt = dv$ $0,15 \int t dt + 15 \int dt = \int dv$ $v = \frac{0,15 * t^2}{2} + 15 * t + c$	<p>Função (2) na EDO</p> $-0,1 * t + 20 = \frac{dv}{dt}$ $(-0,1 * t + 20)dt = dv$ $-0,1 \int t dt + 20 \int dt = \int dv$ $v = \frac{-0,1 * t^2}{2} + 20 * t + c$	<p>Função (3) na EDO</p> $0,18 * t + 6 = \frac{dv}{dt}$ $(0,18 * t + 6)dt = dv$ $0,18 \int t dt + 6 \int dt = \int dv$ $v = \frac{0,18 * t^2}{2} + 6 * t$	<p>Função (4) na EDO</p> $-0,75 * t + 99 = \frac{dv}{dt}$ $(-0,75 * t + 99)dt = dv$ $-0,75 \int t dt + 99 \int dt = \int dv$ $v = \frac{-0,75 * t^2}{2} + 99 * t + c$
<p>Função (5) na EDO</p> $9 * e^{0,001702752079 * t} = \frac{dv}{dt}$ $9 \int e^{0,001702752079 * t} dt = \int dv$ $v = 5,285,56746 * e^{t * 0,001702752079} + c$	<p>Função (6) na EDO</p> $15 * e^{0,001464990286 * t} = \frac{dv}{dt}$ $15 \int e^{0,001464990286 * t} dt = \int dv$ $v = 10,238,9777 * e^{t * 0,001464990286} + c$	<p>Função (7) na EDO</p> $0 * t + 29 = \frac{dv}{dt}$ $29 dt = dv$ $29 \int dt = \int dv$ $v = 29 * t + c$	<p>Função (8) na EDO</p> $-1,45 * t + 754 = \frac{dv}{dt}$ $(-1,45 * t + 754)dt = dv$ $-1,45 \int t dt + 754 \int dt = \int dv$ $v = \frac{-1,45 * t^2}{2} + 754 * t + c$

Fonte: RE_AT3.1_MM3_G1.

E por meio das oito sentenças dispostas na Figura 4.18 os alunos indicam a velocidade do ônibus espacial em qualquer instante de tempo no intervalo de 0 a 540 segundos, obtendo o modelo matemático da Figura 4.19 .

Figura 4.19 Resposta à situação-problema AT3.1

$$v(t) = \begin{cases} \frac{0,15 * t^2}{2} + 15 * t + c \text{ se } 0 \leq t \leq 20 & (1) \\ \frac{-0,1 * t^2}{2} + 20 * t + c \text{ se } 20 < t \leq 50 & (2) \\ \frac{0,18 * t^2}{2} + 6 * t + c \text{ se } 50 < t \leq 100 & (3) \\ \frac{-0,75 * t^2}{2} + 99 * t + c + c \text{ se } 100 < t \leq 120 & (4) \\ 5.285,56746 * e^{t*0,001702752079} + c \text{ se } 120 < t \leq 300 & (5) \\ 10.238,9777 * e^{t*0,001464990286} + c \text{ se } 300 < t \leq 450 & (6) \\ 29 * t + c \text{ se } 450 < t \leq 500 & (7) \\ \frac{-1,45 * t^2}{2} + 754 * t + c \text{ se } 500 < t \leq 520 & (8) \\ 0 \text{ se } 520 < t \leq 540 & (9) \end{cases}$$

Fonte: RE_AT3.1_MM3_G1.

Os alunos não explicitam a validade do modelo matemático obtido, mas deixam claro que esse modelo é válido apenas para o intervalo de 0 a 540 segundo, visto que depois desse tempo o ônibus desliga os três motores, demorando cerca de 30 minutos para chegar ao apoapsis e religar os motores novamente até formar uma órbita em torno da terra.

Atividade 3.2: O Armazenamento de Grãos de Soja em um Silo

Para o desenvolvimento dessa atividade o grupo contou com o conhecimento da aluna A3 sobre uma cooperativa agroindustrial. Dados foram coletados por meio de uma entrevista com um dos funcionários da fábrica e de pesquisas na literatura (Figura 4.20).

Figura 4.20 Informações sobre a atividade *armazenamento de grãos de soja*

4. ARMAZENAGEM DE GRÃOS DE SOJA NO SILO

O sistema de armazenagem de grãos tem como função principal inibir e proteger os grãos das impurezas do mundo externo com diz D'Arce (2004, p. 3), “os microrganismos estão normalmente em estado de dormência; os insetos, ácaros, ratos estão ou deveriam estar ausentes”.

“Há variações do mundo externo que podem causar a deterioração dos grãos, como a umidade relativa do ar, a temperatura, e a limpeza do lugar de armazenagem. Este lugar possui um nome determinado, silo”. Conforme dito por um funcionário da Integrada Cooperativa Agroindustrial.

Os períodos do ano também interferem diretamente na preservação dos grãos, conforme D'Arce (2004):

Durante os períodos frios a umidade é deslocada dos grãos quentes, localizados no centro do silo, para a superfície onde os grãos estão a temperaturas mais baixas. Durante os períodos quentes há uma inversão do processo e a região mais crítica passa a ser o fundo do silo (D'ARCE, 2004, p.7).

Nossa atividade trabalha especificamente com os grãos de soja e conforme informações D'Arce (2004) estes devem ser armazenados com 12 a 13% de umidade em silos. Há casos em que o armazenamento ocorre de maneira errônea, ou há algum defeito nos equipamentos utilizados na armazenagem havendo assim o acúmulo de vapor d'água e estes acúmulos localizados de umidade podem proporcionar o desenvolvimento de seres vivos responsáveis pela deterioração do grão.

A temperatura dos grãos serve como índice de conservação e este deve ter temperatura máxima de 20 °C. Dentro do silo há processos de aeração, homogeneizando a temperatura dos grãos, pois caso haja algumas alterações os grãos devem ser transportados de um silo para o outro, processo chamado de transilagem de acordo com D'Arce (2004). O funcionário da Cooperativa nos disse que:

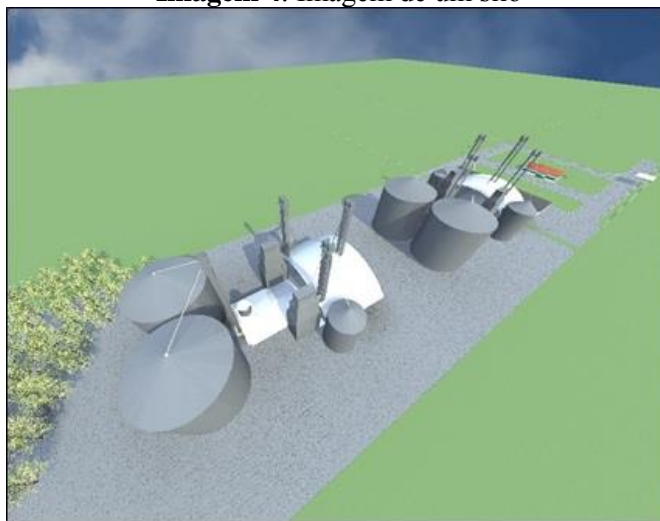
“É preciso um bom sistema de aeração para resfriar a massa de grãos, de preferência com motores auto reverse. Se faz necessário também um sistema de termometria com cabos para medir a temperatura da massa de grãos dentro do silo e um sistema integrado de controle de pragas. O sucesso da armazenagem dependerá dos processos anteriores, os quais incluem a padronização: segregação por qualidade, limpeza e secagem dos grãos”.

Além disso, o processo operacional de grãos em uma unidade de recebimento é um pouco complexo, pois envolve desde a recepção na balança, passando por classificação, secagem e padronização, armazenamento e escoamento dos grãos até o destino final.

CARACTERÍSTICAS DE UM SILO

“Os silos caracterizam-se como de média e pequena capacidade, geralmente, são metálicos, feitos de chapas lisas ou corrugadas, de ferro galvanizado ou alumínio” D'Arce (2004, p. 14). O silo usado para desenvolver essa atividade é um modelo de silo plano armazenador, de formato cilíndrico, como ilustrado na imagem 4:

Imagem 4: Imagem de um silo



Fonte: Imagem fornecida pela cooperativa agroindustrial

O silo utilizado para o desenvolvimento desta atividade, tem capacidade máxima de 6.000 toneladas, com orifícios de entradas chamados de fitas transportadoras, geralmente projetado pelo tamanho da estrutura. Os grãos entram e escoam a uma taxa de 200 t/h, e quando é descoberta o sistema de rosca varredoura dos silos dentro deles ficam armazenados ainda aproximadamente 1.300 toneladas, havendo a necessidade da entrada de funcionários dentro do silo para fazer o trabalho manual para auxílio no sistema do orifício de saída do mesmo. Esse tipo de trabalho é mais lento e leva em torno de 3 dias para que retire as 1.300 toneladas de grãos.

Quanto as medidas do raio dos orifícios de entrada e saída, geralmente os mais utilizados são 200 mm, 240 mm e 320 mm, sendo o último o mais utilizado nas unidades modernas, como é o caso do silo da unidade de recebimento da cooperativa. O silo possui altura máxima de 22 metros, porém a altura máxima do armazenamento para este modelo de silo é de 21 m, isso ocorre para que quando necessário tenha-se espaço para fazer alguma manutenção na copa do silos na parte interna ou até mesmo para colocação de lonas nos processos de controle de ataque de insetos.

LEVANTAMENTO DE HIPÓTESES E SIMPLIFICAÇÕES

Em discussões sobre o tema e os dados oferecidos para ao grupo as hipóteses geradas foram em relação ao volume de grãos no silo, o tempo necessário para que ocorra o esvaziamento total do mesmo, quais as influências das medidas do silo e o volume de cada grão entre outros. Com base nas informações que recebemos formulamos as seguintes questões:

Sendo o fluxo de entrada e saída os mesmos poderíamos considerar o fluxo como uma velocidade?

Tendo a altura do silo, a altura máxima de grãos armazenados, o volume de grãos e o fluxo de entrada e saída, poderíamos estimar o tempo de esvaziamento completo de um silo?

A jornada de trabalho influencia no tempo de esvaziamento?

Com base nas hipóteses surgiu um problema a se investigar.

PROBLEMA A INVESTIGAR

Temos que o fluxo de entrada de grãos de soja em um silo armazenador é de 200t/h, e que o silo de porte médio tem capacidade para 6000 toneladas. Ao esvaziar o silo o fluxo de evasão do orifício de saída é de 200t/h. Nesse contexto, qual o volume de grãos existente dentro do silo em qualquer instante de tempo? Qual o tempo necessário para esvaziar o silo?

Fonte: RE_AT3.2_MM3_G1.

A ideia inicial dos alunos era investigar o volume de grãos no silo em qualquer instante de tempo. No entanto, após pesquisas e entrevistas sobre o tema, os alunos identificaram que de tempos em tempos o silo precisa ser totalmente esvaziado para não prejudicar os grãos abrigados naquele espaço. Faz-se necessário esvaziar o silo, pois o acúmulo de grãos dentro dele reduz sua capacidade de armazenamento, o que aumenta os custos de armazenagem. As informações coletadas pelo grupo sinalizavam um problema frequente em cooperativas agroindustriais: o não esvaziamento total do silo, principalmente quando se armazena produtos perecíveis como a soja. Em discussões sobre o tema e os dados oferecidos, questionamentos foram levantados pelos alunos do grupo G1:

[...] com relação ao volume de grãos no silo, e o tempo necessário para que ocorra o esvaziamento total do mesmo, observando quais as influências do trabalho humano: sendo o fluxo de entrada e saída iguais, poderíamos considerar o fluxo como uma velocidade? Tendo a altura do silo, a altura máxima de grãos armazenados, o volume de grãos e o fluxo de entrada e saída, poderíamos estimar o tempo de esvaziamento completo de um silo? A jornada de trabalho influencia no tempo de esvaziamento? É possível obter um modelo capaz de expressar o tempo levado para esvaziar o silo, levando

em consideração todos os processos incluindo o trabalho manual? Discutidas essas questões foi possível a elaboração de um problema a investigar.

GR_AT3.2_MM3_G1.

Dessa problemática surge a questão de investigação definida pelos alunos: *Temos que o fluxo de entrada de grãos de soja em um silo armazenador é de $200t/h$, e que o silo de porte médio tem capacidade para 6000 toneladas. Ao esvaziar o silo o fluxo de evasão do orifício de saída é de $200t/h$. Nesse contexto, qual o volume de grãos existente dentro do silo em qualquer instante de tempo? Qual o tempo necessário para esvaziar o silo?*

Para a resolução da situação-problema foram definidas as variáveis:

V – volume total de grãos no silo;

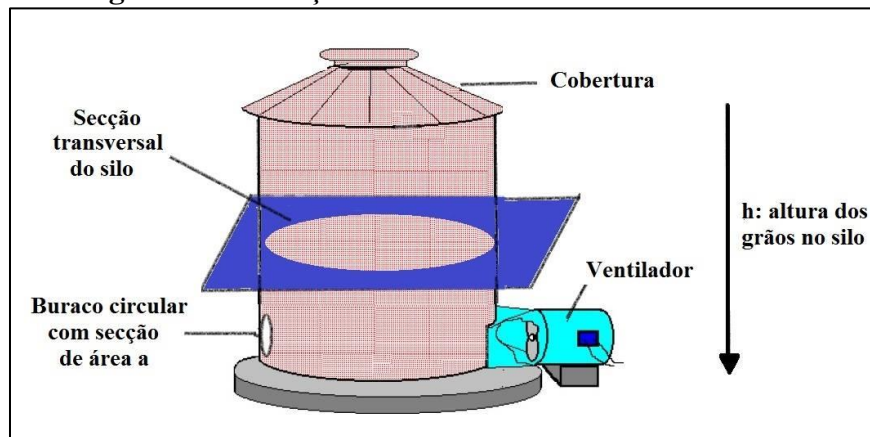
t – tempo;

v – velocidade de escoamento dos grãos no silo;

h – altura de grãos no silo no tempo t ;

Na Figura 4.21 os alunos representaram o silo estudado:

Figura 4.21 Esboço do silo estudado na atividade AT3.2



Fonte: RE_AT3.2_MM3_G1.

A formulação de hipóteses e o desenvolvimento de um modelo matemático são apresentados como uma construção de ideias para solucionar a questão colocada pelo grupo.

Hipótese 1: O volume total que é lançado para fora de um recipiente, no tempo t pode ser descrito pela variação da altura de grãos no silo $\left(\frac{dh}{dt}\right)$, que é proporcional à área circular da superfície dada pela seção transversal do silo $(s(h))$, ou seja,

$$V = S(h) \frac{dh}{dt},$$

em que $S(h)$ representa a superfície da área da secção transversal e $\frac{dh}{dt}$ é a variação da altura de grãos no silo no tempo t .

Hipótese 2: O volume total de grãos, $V(t)$, contido no silo está escoando pela superfície inferior, com velocidade v , através de um buraco com secção de área a .

Sabe-se que em queda livre, um corpo possui sua velocidade definida por $v = \sqrt{2gh}$, em que g = constante da força gravitacional e h é a distância do corpo ao solo, no caso do problema do silo, a altura de grãos no silo. Podemos considerar que quando os grãos de soja estão escoando do silo a velocidade de escoamento dos grãos, em queda livre, é proporcional à quantidade de grãos que saem pelo buraco com secção de área a .

Hipótese 3: Considerando uma constante de proporcionalidade (k) em razão da configuração do orifício do silo, e a área do orifício em que os grãos saem (a), é possível escrever a variação do volume de grãos que escoam do silo como:

$$S(h) \frac{dh}{dt} = -ka\sqrt{2gh}.$$

Essa equação diferencial ordinária é separável nas variáveis h e t . Para resolvê-la, podemos considerar $S(h)$ uma superfície igual à área da base do silo dada por $S(h) = \pi R^2$, em que R é o raio da base do silo, constante em qualquer altura do volume do silo. Assim, a solução da EDO na variável h é dada por:

$$h^{1/2} = \frac{-at\sqrt{2g}}{2\pi R^2} + c,$$

em que c é a constante de integração. Considerando as condições iniciais: no tempo $t = 0$,

temos $h = h_0$, obtemos $c = h_0^{1/2}$

$$h^{1/2} = \frac{-at\sqrt{2g}}{2\pi R^2} + h_0^{1/2}.$$

Para obter o tempo de esvaziamento do silo é preciso, então, isolar t :

$$t = \frac{2\pi R^2\sqrt{h}}{a\sqrt{2g}} - \frac{2\pi R^2 h_0^{1/2}}{a\sqrt{2g}},$$

Considerando que $d = -\frac{2\pi R^2 h_0^{1/2}}{a\sqrt{2g}}$ constante, temos que o tempo de esvaziamento do silo é dado por:

$$t = \frac{2\pi R^2 \sqrt{h}}{a\sqrt{2g}} + d.$$

Para obter o tempo de esvaziamento do silo os alunos analisaram as informações coletadas inicialmente: o silo cheio tem 6000 toneladas de grãos em 21 metros de altura, assim:

$$t = \frac{2\pi R^2 \sqrt{h}}{a\sqrt{2g}} + 14,38.$$

Outra informação considerada a partir da situação-problema inicial é que restarão no silo para serem esvaziados por meio de trabalho manual cerca de 1300 toneladas de grãos, o que corresponde a uma altura de 4,55 metros. Este trabalho manual é feito em oito horas diárias de trabalho durante aproximadamente 3 dias.

Utilizando da última expressão foi calculado o tempo de esvaziamento do silo até restar as 1300 toneladas de grãos no silo, considerando $h = 16,45$, a vazão de 200 t/h e $\pi R^2 = \pi 10^2$ obtendo $t = 27,11$ horas.

No entanto, é preciso considerar que o silo só será esvaziado quando a cooperativa contar com recursos humanos para acionar o esvaziamento, que poderá ocorrer diariamente durante no máximo oito horas diárias.

Desse modo, serão necessários 3 dias e meio para o esvaziamento automático, mais os três dias de trabalho manual, o que resulta em aproximadamente sete dias para esvaziamento total do silo.

Em entrevista com um funcionário da cooperativa os alunos haviam obtido a informação de que o tempo necessário para esvaziar o silo era de aproximadamente sete dias, o que condiz com as informações obtidas no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática dos alunos. Essa informação foi utilizada como uma validação dos procedimentos matemáticos utilizados pelos alunos do grupo G1.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 6: A PRÁTICA DO BUNGEE JUMP

A temática dessa atividade foi sugerida pela professora sem um direcionamento sobre a questão a investigar. Os treze alunos dispostos nos grupos G4 (Alunos A1, A2 e

A3), G5 (B1, B2, B3, B4 e A4) e G3 (C1, C2, C3, C4 e C5) desenvolveram a atividade, no período de aproximadamente oito horas-aula. Na proposição da atividade, foram entregues para os alunos as informações da Figura 4.22. Essa atividade não continha direcionamento algum para os alunos seguirem, a partir do conjunto de informações os alunos deveriam sugerir uma situação-problema para o estudo e respondê-la. O espaço para coleta de dados em momentos extraclasse foi sugerido, bem como o encontro por grupos com a professora para esclarecer dúvidas e discussão das especificidades do problema a investigar. Essa atividade foi iniciada no segundo semestre de 2015 e finalizada no primeiro semestre de 2016. A atividade foi direcionada para a turma no momento em que os alunos estavam estudando EDOs de segunda ordem e iniciavam o estudo de sistemas massa-mola.

Figura 4.22 Texto entre aos alunos para o desenvolvimento da atividade

A Prática do Bungee Jump

O Bungee Jump é um esporte de aventura e tem como característica a superação de distintas dificuldades em áreas naturais combinando atividade física intensa com a busca por emoções. A prática do bungee jump compreende uma queda livre, normalmente de 50 m. Conta-se que o esporte começou em uma ilha do Pacífico, em Pentecost. Há registros da prática desse esporte desde 1954. Os saltos são regulamentados no Brasil desde 2006 e devem ser administrados com material de boa qualidade e tecnologia. Basicamente, o jumper atira-se de uma gôndola presa a um guindaste, e o cabo preso a seu tornozelo desce ao máximo e volta – graças ao peso do corpo do jumper.

Quadro 1: Como funciona o Bungee Jump

Coração na boca *Para garantir segurança ao saltador, o elástico aguenta um tranco de 12 mil quilos*

TORNOZELEIRAS

O cabo elástico normalmente é preso nos tornozelos para evitar que bata no rosto da pessoa durante o salto. Além de tornozeleiras, a pessoa usa uma cadeirinha de alpinismo também ligada ao cabo. Tudo é preso com mosquetões independentes, capazes de segurar trancos de mais de 3 mil quilos

REAÇÃO DO CORPO

Duas sensações são inevitáveis: coração acelerado (causado pela liberação de hormônios como adrenalina e dopamina) e frio na barriga (reação à incapacidade dos órgãos de acompanhar o rápido movimento do corpo). Como reação ao “chacoalhão” e ao sangue acumulado na cabeça, também é comum sentir tontura ao final do salto

ANCORAGEM

A sustentação do cabo elástico é feita por duas cordas (uma principal e uma de segurança), capazes de sustentar 4 mil quilos cada uma. Uma ponta é amarrada em uma estrutura rígida com um nó de alpinismo...

...A outra ponta é ligada ao cabo elástico por um mosquetão de aço com capacidade de 5,4 mil quilos.

CABO ELÁSTICO

É formado por um feixe de fiozinhos elásticos o cabo para uma pessoa de até 75 quilos tem cerca de 6 mil fios. Por dentro do feixe passa uma fita de náilon capaz de garantir segurança ao saltador mesmo se o elástico arrebentar. Esta fita mais os fios elásticos fazem o cabo aguentar 12 mil quilos

PROTEÇÃO

Em saltos amadores a ponta do cabo é coberta com uma “banana” de espuma para proteger o saltador da estrutura de polipropileno, pela qual passa a alça do cabo. Não por acaso, esta estrutura é chamada de Mike Tyson

TRANCO

Todo mundo imagina que o tranco seja violento, mas, na verdade, a pessoa sente apenas uma pequena parte dele. Uma pessoa de 50 quilos produz um impacto de 1,4 mil quilos no final da queda, mas essa força é quase totalmente amortecida pelo cabo elástico, que tem 200% de elasticidade, ou seja, um cabo de 10 metros fica com 30

Fonte: LOPES, A. L. Como funciona o Bungee Jump? **Revista Mundo Estranho**. n. 45. Editora Abril, 2005.

Curiosidade: O recorde pelo salto mais alto de bungee foi feito por Curtis Rivers em 2002, na cidade de Puertollano, Espanha. Rivers realizou o salto de um balão de ar quente a 4632 m do chão usando um cabo de 10 m, com capacidade de extensão de até 30 m.

Origens: Remonta à história lendária dos aborígenes da tribo Bunlap, da ilha de Pentecost. Segundo a lenda uma mulher que fugia de seu marido escalou uma árvore alta da região, e vendo que ele estava atrás dela, amarrou cipós nos tornozelos e saltou tendo alcançado o solo em segurança. O marido que a seguia saltou sem o auxílio do cipó e morreu na queda. Desse momento em diante, os jovens homens da tribo escalavam torres de madeira e saltavam amarrados em cipós provando sua bravura. O salto era realizado para exibir a força masculina e mostrar que eles não seriam enganados por suas mulheres. Conhecidos como “mergulhadores da terra de Pentecost” realizavam os saltos também para a época de colheita. Foram descobertos pela embarcação de pesquisa da *National Geographics* quando desembarcaram na ilha.

No estado do Paraná os saltos podem ser executados em empresas, como a que disponibiliza as informações do Quadro 2.

Quadro 2: Como funciona o salto

Como Funciona

O esporte Bungee Jumping pode ser praticado por qualquer pessoa sem limites de idade,

os únicos limites são peso mínimo de 40kg e não ter algum problema sério de saúde. Existem 3 tipos de cordas a serem utilizadas, estas variam de acordo com o peso da pessoa que saltará, isto determinará apenas o conforto no salto, para que a corda estique de forma suave. Após decidida a corda que será utilizada, os engates e os cintos de segurança serão colocados e vistoriados para o salto. Um guindaste com capacidade para aproximadamente 40 toneladas, içará uma gaiola com a pessoa presa à mesma até o topo, onde após ser solta da presilha de segurança estará liberada para saltar no momento desejado.

Com a ajuda de um instrutor, esta realizará o salto de uma altura de aproximadamente 42 metros, (equivalente a altura de um prédio de 14 andares), presa a uma corda elástica em cima de um Air Bag (colchão de ar), a pessoa que realiza o salto não chega a encostar no Air Bag, mantendo-se a uma distância de 2 a 5 metros do mesmo.

Nas cordas de Bungee Jumping temos, além dos milhares de feixes de látex que formam a corda elástica uma fita tubular de nylon de alta resistência que acompanha toda corda elástica, capaz de suportar o peso de 2.7 mil kg. O praticante é ancorado no elástico em no mínimo dois pontos do corpo (geralmente na cintura e nos tornozelos;). Todos os mosquetões são protegidos de acolchoado para impossibilitar eventuais ferimentos no praticante. Como backup complementar utilizamos um Airbag (colchão de ar;) no solo contra o último caso de uma queda.

Fonte: Master Jump. Disponível em: <www.masterjump.com.br/ComoFunciona>. Acesso em 28/03/15.

Os alunos, juntamente com a professora, discutiram a situação associada ao Bungee Jump e as possíveis associações com o sistema massa-mola já estudado em sala de aula na disciplina de EDO. De modo geral, os grupos de alunos se dedicaram à análise de problemas parecidos, todos se preocuparam em determinar uma EDO para o deslocamento de uma pessoa que salta do Bungee Jump, no decorrer do tempo. Os alunos do grupo G4 se concentraram na obtenção de um modelo para descrever o deslocamento do sujeito que pula no decorrer do tempo; os alunos do grupo G5 identificaram o problema a ser estudado “*Qual o deslocamento da corda no fim do salto, levando em consideração a força de resistência atuante sobre o corpo?*” (RE_AT6_MM2_G5); já os alunos do grupo G3 declararam o problema “*Análise os valores iniciais da prática do Bungee Jump, encontre a EDO e resolva*” (RE_AT6_MM2_G3).

Para solucionar os problemas colocados e determinar uma função associada ao deslocamento do sujeito após o salto do Bungee Jump os alunos utilizaram resultados matemáticos associados ao estudo de um sistema massa-mola:

- Ao tratar o cabo, atado ao sujeito, como uma mola é possível utilizar a Lei de Hooke, em que a força da mola (F) é proporcional ao deslocamento da mola (x), ou seja

$F = k \cdot x$, sendo k uma constante de proporcionalidade. Como a força da mola é oposta à força da gravidade, usamos $F = -kx$;

- A constante de proporcionalidade k representa a tensão do cordão, para k mais elevado o cordão não se esticará tanto quanto outro cordão quando a mesma força é aplicada;
- A segunda Lei de Newton nos diz que a soma das forças que atuam sobre um corpo ($\sum F$) é proporcional à massa do corpo pela sua aceleração, ou seja, $\sum F = ma$. Quando associada à Lei de Hooke a segunda Lei de Newton possibilita a elaboração de equação diferencial ordinária de segunda ordem.

A segunda Lei de Newton nos diz que a soma das forças é proporcional à massa do corpo do sujeito por sua aceleração, ou seja,

$$\sum F = mg - \gamma v - kx = ma,$$

sendo as variáveis dessa equação:

x – espaço percorrido pelo sujeito;

t – tempo;

v – velocidade do corpo no decorrer do tempo, sendo que a derivada primeira do espaço em relação ao tempo é igual à velocidade v , ou seja, $\frac{dx}{dt} = v$;

a – aceleração do corpo no decorrer do tempo, sendo que a derivada segunda do espaço em relação ao tempo é igual à aceleração a , ou seja, $\frac{d^2x}{dt^2} = a$.

E, são constantes:

m – massa do sujeito (kg);

g – força da gravidade, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$;

γ – força de resistência do vento, proporcional à velocidade.

Desse modo a EDO correspondente ao fenômeno pode ser escrita como:

$$mx'' - \gamma x' - kx = mg.$$

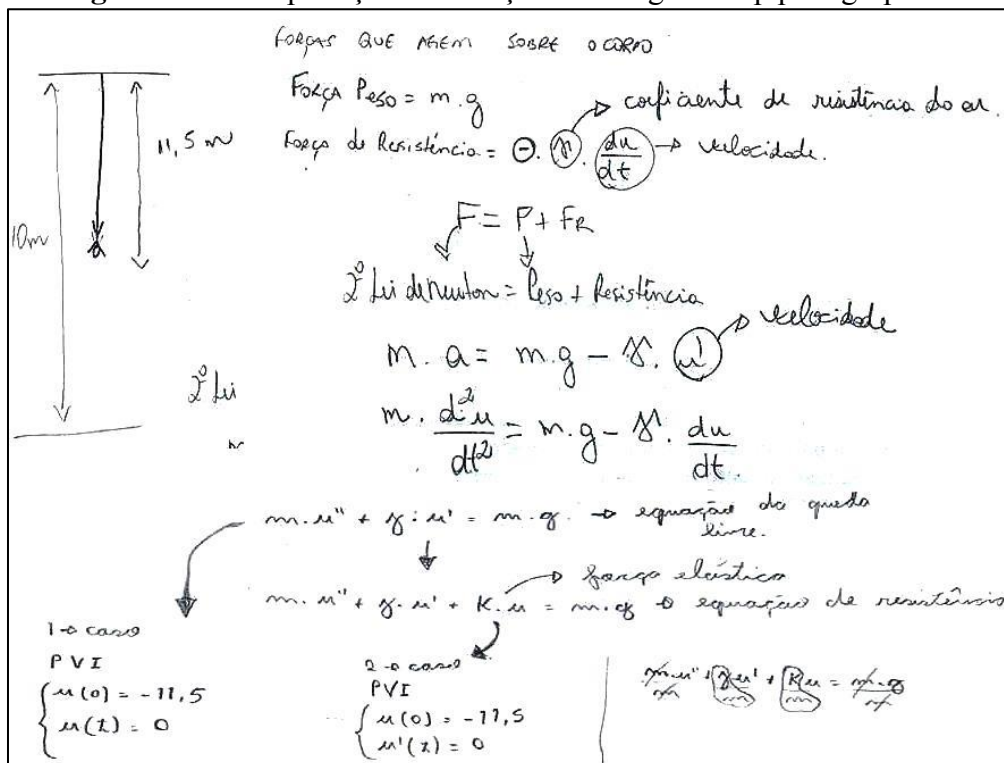
- Na análise da situação do Bungee Jump duas equações podem ser obtidas: para o movimento do sujeito em queda livre, e para o movimento do sujeito quando o mesmo está sob a influência do cabo.

Após a interpretação da situação-problema, das forças que atuam sobre o corpo e da EDO de segunda ordem correspondente, caberia aos alunos a obtenção dos parâmetros γ e k .

Nas primeiras aulas disponíveis para o desenvolvimento da atividade os alunos se dedicaram à leitura e interpretação dos dados da situação exposta pela professora. Naquele momento, foi informado aos alunos que eles poderiam utilizar de materiais complementares para o desenvolvimento da atividade, poderiam procurar livros, artigos e coletar outras informações que os considerassem úteis. Os alunos do grupo G4 sinalizaram que utilizaram artigos da internet que exemplificavam o sistema massa-mola, além dos livros de Equações Diferenciais que abordavam o assunto por meio de exemplos práticos. Já os alunos dos grupos G5 e G3 informaram apenas a utilização de livros de Equações Diferenciais disponíveis na biblioteca da Universidade e emprestados pela professora.

Os alunos A1, A2 e A3 do grupo G4 interpretaram a situação do Bungee Jump por meio de ilustrações e da análise das forças que atuam sobre um corpo em movimento (Figura 4.23).

Figura 4.23 Interpretação da situação do Bungee Jump pelo grupo G4



Fonte: RE_AT6_MM2_G4.

Os registros dispostos na Figura 4.43 foram feitos enquanto, em conjunto, os mesmos interpretavam a situação-problema em estudo:

Aluno A3: *Porque ele fala aqui olha [aponta para o papel] fases do Bungee Jump, uma queda livre com aceleração e gravidade do saltador quando a corda ainda está frouxa, que é o que estamos pensando no primeiro caso...*

Aluno A2: *Certo.*

Aluno A3: *Segundo a fase de extensão até a corda alcançar o seu comprimento máximo, certo? Que é a segunda fase que estamos tentando, e a terceira fase que a Professora acabou de falar, que consiste em um movimento oscilatório amortecido, que é o pinga pinga, certo? Então tem o desenvolvimento do modelo...*

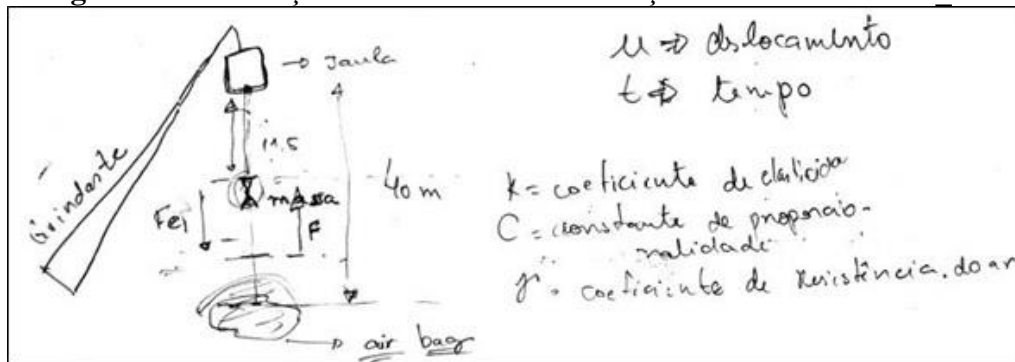
Aluno A3 : *Inicialmente o saltador está em queda livre, onde está presentes a força peso, a força de resistência do ar, e, fazendo o desenhinho, a gente pode utilizar a segunda lei de Newton para obter a equação do corpo em queda livre.*

Aluno A2: *É o que a gente já fez.*

GR_AT6_MM2_G4.

A partir da interpretação inicial, os alunos decidem por investigar a primeira situação matemática – obter o deslocamento da corda no fim do salto, levando em consideração a força de resistência atuante sobre o corpo –, utilizando a equação da queda livre, como disposto na Figura 4.43, vislumbram a possibilidade de resolver uma EDO considerando uma força de resistência, a força elástica. Os alunos identificaram então as variáveis que iriam utilizar na situação matemática (Figura 4.24).

Figura 4.24 Definição de variáveis e identificação de constantes AT6 G4



Fonte: RE_AT6_MM2_G4_A2.

Ainda identificando as forças que atuam sobre o corpo em movimento após o salto do Bungee Jump, os alunos de G4 sentem a necessidade de considerar algumas hipóteses e suposições para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática:

Aluno A3: *a gente teria que supor uma força*

Aluno A2: *é como o coeficiente do carrinho, a gente não sabe o coeficiente, então a gente tem que supor uma velocidade.*

[...]

Aluno A3: *então, daí ele fala assim, é que é o que a gente está procurando*

Aluno A2: *é o que a gente colocou...*

Aluno A3: *com a corda estendida há a inclusão da força elástica, dessa forma utiliza-se mais uma vez a segunda lei de Newton para descrever o movimento. Então a gente tem a massa vezes a aceleração*

Aluno A2: *que é a força resultante*

Aluno A3: *a gente tem o coeficiente vezes a velocidade mais o que aparece aqui, a força elástica vezes o deslocamento... ele impôs, a gente vai ter que impor também.*

GR_AT6_MM2_G4.

Para o desenvolvimento da atividade os alunos do grupo G4 formularam as hipóteses:

Hipótese 1: a massa do corpo do sujeito que salta de Bungee Jump influencia no quanto o cabo irá esticar/distender.

Hipótese 2: O coeficiente de elasticidade da corda é proporcional à massa do corpo do sujeito. Ou seja, se k é o coeficiente de elasticidade e m a massa do sujeito, então a força de elasticidade será dada por $k \cdot m = F$.

Hipótese 3: Quando a corda sofre seu estiramento máximo, o tranco, é possível suportar uma força que puxa a massa deslocando-a para cima. A este fenômeno podemos associar a Lei de Hooke $F = -c \cdot L$, sendo c uma constante e L o deslocamento do cabo.

O desenvolvimento da situação matemática delineada foi feito por meio da obtenção dos parâmetros da EDO de segunda ordem associada ao deslocamento do sujeito após sua queda (Figura 4.25).

Figura 4.25 Obtenção dos parâmetros da EDO AT6_G4

Utilização da Lei de Hooke para obtenção do parâmetro k.

Supondo que uma pessoa de massa 50kg faça um pulo de Bungee-jump, qual seria o alongamento máximo dessa corda.

usamos a equação da posição de equilíbrio

$$m \cdot g - k \cdot L = 0$$

$$50 \cdot 9,8 - k \cdot 11,5 = 0$$

encontramos $k = 42,6$ isso seria γ ? ou k ?

Obtenção da velocidade média

PVT =

$$\begin{cases} u(0) = -11,5 \\ u'(t) = v \end{cases}$$

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{11,5}{10} = 1,15 \text{ m/s}$$

Coefficiente de resistência

Para encontramos o coef. de resistência

$$F_R = -\gamma \cdot u'$$

$$m \cdot g = -\gamma \cdot 11,7$$

$$50 \cdot 9,8 = -\gamma \cdot 11,7$$

$$-33,33 = \gamma$$

Fonte: RE_AT6_MM2_G4. Inserção em negrito dos autores.

Algumas informações foram consideradas para dar viabilidade à obtenção dos parâmetros sinalizados na Figura 4.45: a massa do sujeito foi considerada de 50 kg, o comprimento 11,5 m foi considerado para a corda (cabo em que o sujeito está preso para o salto) e um suposto alongamento da corda de 0,5 m. A Figura 4.45 sintetiza o desenvolvimento matemático feito pelos alunos, no entanto não foi simples para os mesmos a obtenção de cada um dos parâmetros, visto que cada um deles foi interpretado matematicamente com base no seu significado no fenômeno. O primeiro empecilho foi considerar uma velocidade média para poder calcular o parâmetro γ da EDO, mas considerando que o sujeito que salta leva 10 segundos para percorrer os 11,5 m, os alunos obtêm 1,15 m/s como a velocidade média do sujeito. Já a obtenção do parâmetro k foi mais difícil de convencionar no grupo G4, conforme sinaliza o diálogo:

Aluno A3: *Aquele k lá era uma constante elástica, e aí o que a gente fez?*

Aluno A2: *Substituímos para obter esse valor de 42,6.*

Aluno A3: *Sim, substituímos na equação e usamos esse valor de 42,6 para o k, então mas eu acho que esse valor não é no k, eu acho que ele é naquela letra grega.*

Aluno A2: *Eu acho que não, acho que é esse aqui mesmo.*

Aluno A1: *Eu acho que nós definimos isso aqui na atividade... [...]*

Aluno A2: *Então, a gente até já trocou os valores, mas nós não sabemos. [...]*

Aluno A3: *Essa é a lei de Hooke?* [pergunta apontando para a folha]

Aluno A2: *Essa é.*

GR_AT6_MM2_G4.

A maior dificuldade para os alunos surgiu após discutirem e definirem o valor k como 42,6. Os alunos do grupo G4 se reuniram novamente para obter os parâmetros da EDO. Na obtenção dos parâmetros da EDO, os alunos a identificaram como uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Para resolver tal EDO, os alunos buscaram resolver a equação linear homogênea por meio da equação característica associada à equação homogênea com coeficientes constantes (Figura 4.26 e Figura 4.27).

Figura 4.26 Obtenção da EDO e identificação da equação característica AT6_G4

Obtenção da EDO

utilizando a massa 50 kg e considerando $F = -k \cdot \Delta \rightarrow (u + l)$
 supomos que $(u + l)$ seja $(11,5 + 0,5)$, substituimos na eq. da
 posição de equilíbrio.
 tamanho da corda \downarrow suposto alongamento
 $m \cdot g - k \cdot \Delta = 0$
 $50 \cdot 9,8 - k \cdot 12 = 0$
 $k = 41,6$

Substituindo os dados na EDO
 $m \cdot u'' + 11 \cdot u' + k \cdot u = 0$
 $50 \cdot u'' - 33,33 \cdot u' + 41,6 \cdot u$ dividindo por 50 temos $u'' - 0,67u' + 0,8332$

equação característica: $r^2 - 0,67r + 0,8332$

Fonte: RE_AT6_MM2_G4. Inserção em negrito dos autores.

A equação característica para uma EDO de segunda ordem corresponde à uma equação de segundo grau, neste caso $r^2 - 0,67r + 0,8332 = 0$, sendo que os coeficientes constantes associados à EDO são 1, -0,67 e 0,8332. Na resolução da equação característica os alunos obtiveram duas raízes complexas conjugadas (Figura 4.27).

Figura 4.27 Resolução da equação característica AT6 – G4

Resolução da equação característica

resolvendo:

$$\Delta = B^2 - 4 \cdot a \cdot C$$

$$A = (0,67)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,8832$$

$$\Delta = 0,4489 - 3,5328$$

$$\Delta = -2,8839$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda = \sqrt{-1}$$

$$\pi = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$\pi = \frac{0,67 \pm \sqrt{-2,8839}}{2}$$

$$\pi_1 = \frac{0,67 + i \sqrt{2,8839}}{2}$$

$$\pi_2 = \frac{0,67 - i \sqrt{2,8839}}{2}$$

$$\pi_1 = \frac{0,67 + i \cdot 1,7}{2} = 0,335 + 0,85i$$

$$\pi_2 = \frac{0,67 - i \cdot 1,7}{2} = 0,335 - 0,85i$$

Fonte: RE_AT6_MM2_G4. Inserção em negrito dos autores.

Em determinado momento da resolução, os alunos do grupo G4 confundiram as variáveis y e u , provavelmente devido à busca por uma solução para a EDO quando as raízes da equação característica fossem raízes complexas conjugadas. Uma função para o deslocamento do sujeito após a queda no Bungee Jump é declarada, no entanto os alunos não finalizam com a obtenção das duas constantes a partir das condições iniciais por eles declaradas (Figura 4.28).

Figura 4.28 Identificação da solução da EDO do grupo G4 AT6.

Solução da EDO

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

$$u = C_1 e^{0,335x} \cdot \cos(0,85x) + C_2 e^{0,335x} \cdot \sin(0,85x)$$

Termos PVJ
 $u(0) = 11,5$
 $u'(x) = 19,7$

$$11,5 = C_1 e^{0,335 \cdot 0} \cdot \cos(0,85 \cdot 0) + C_2 e^{0,335 \cdot 0} \cdot \sin(0,85 \cdot 0)$$

$$11,5 = C_1 \cdot \cos(0) + C_2 e^{0,335} \cdot \sin(0)$$

$$11,5 = C_1 \cdot 1 + 0$$

$$11,5 = C_1$$

Fonte: RE_AT6_MM2_G4. Inserção em negrito dos autores.

Os alunos B1, B2, B3, B4 e A4 do grupo G5 trabalharam de modo similar aos alunos do grupo G4. Primeiro fizeram uma leitura detalhada de todas as informações contidas no texto entregue pela professora e tentaram extrair dados que poderiam ser utilizados no desenvolvimento da atividade. Os alunos B1, B2 e A4 discutiram

especificamente o local em que o sujeito seria preso para o salto, o comprimento da corda e a massa do sujeito que irá executar o salto:

Aluno A4: *Me explica novamente, se tem um cabo de 30 m...*

Aluno B1: *Ele tem 10 m, fala no geral aqui, um cabo de 10m fica com 30m.*

Aluno B2: *Esse aí é o exemplo de um cabo, tem vários tipos de casos, depende da altura da pessoa e do peso.*

Aluno A4: *Vamos fazer uma suposição, de uma pessoa que pesa tanto, [...] escreve aí supondo que uma pessoa pesa 50 kg.*

Aluno B1: *é porque aqui fala de uma de 50...*

Aluno A4: *então vamos pegar uma de 25 kg?*

Aluno B1: *não, a gente pode usar uma de 50 kg mesmo, porque aqui fala que não tem limite de idade, mas tem limite de peso, o único limite é o peso mínimo de 40 kg.*

[...]

Aluno A4: *Eu acho que depende do problema que a gente vai formular.*

[...]

Aluno A4: *A gente poderia pensar no impacto de uma pessoa que pesa sei lá...*

Aluno B1: *É porque aqui na de 50 tem impacto de 1400 kg, [...] Mas, será que a gente conseguiria responder através da EDO?*

Aluno A4: *Em relação ao... não ao deslocamento, mas à quanto a corda estica...*

Aluno B2: *à elasticidade*

Aluno A4: *Porque pareceria mais com a EDO da mola. É porque a gente já tem pronto, aí poderíamos adequar...*

Aluno B1: *podemos tentar colocar os dados de acordo com a EDO, porque a EDO da mola você chega em uma EDO homogênea e ...*

Aluno A4: *e 'mata'.*

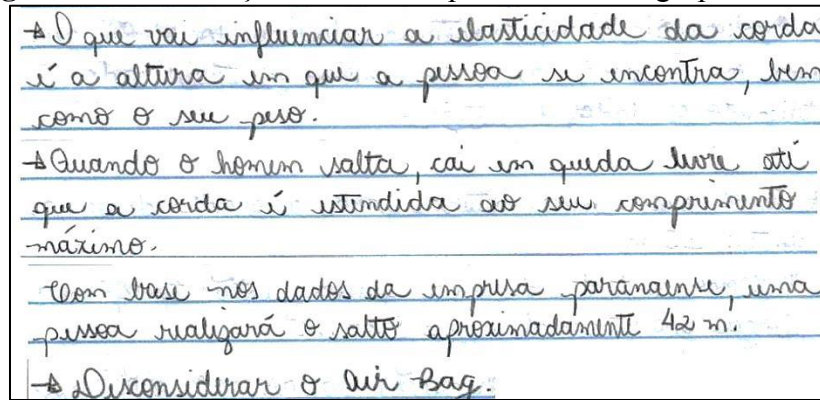
Aluno B1: *e resolve normal, encontra a equação característica, c_1 e c_2 e resolve.*

Aluno A4: *vamos tentar.*

GR_AT6_MM2_G5.

A partir dessas considerações, os alunos assumiram um cabo de comprimento padrão de 10 m e detalharam algumas informações que consideraram relevantes para o desenvolvimento da atividade (Figura 4.29).

Figura 4.29 Informações levantadas pelos alunos do grupo G5 – AT6



Fonte: RE_AT6_MM2_G5.

Essas informações foram definidas em conjunto pelos integrantes do grupo e a partir dessas considerações os alunos do grupo G5 se argumentaram por suposições associadas ao tamanho do cabo, de onde a pessoa iria pular:

Aluno A4: *Eu estou pensando em uma altura para a gente estipular, eu estava pensando em a gente pegar a altura equivalente a essa empresa do Paraná aqui olha, é ...*

Aluno B1: *Qual coisa que está?*

Aluno B2: *a última...*

[os alunos leem em voz baixa o material do texto]

Aluno A4: *Vamos tentar tirar o máximo de dados gente. Com a ajuda de um instrutor essa realizará o salto com uma altura de 42 m, que é aqui no Paraná, equivalente a uma altura de um prédio de 14 andares, presa a uma corda elástica em cima de um air bag...*

Aluno B1: *Quer dizer que essa corda de 10 m vai esticar mais de 200%, então essa pessoa não tem um peso muito pequeno. [...]*

[...]

Aluno B1: *Mas ali é um prédio de 42 m, e tem que considerar o air bag.*

Aluno A4: *Mas é nesse caso que tem o air bag, a gente pode trabalhar para facilitar a nossa vida.*

Aluno B1: *É porque no caso normal, em que a pessoa salta de uma ponte, não tem air bag nenhum, se ela se arrebentar, ela morre.*

Aluno A4: *É isso mesmo. Vamos colocar uma observação para desconsiderar o air bag...*

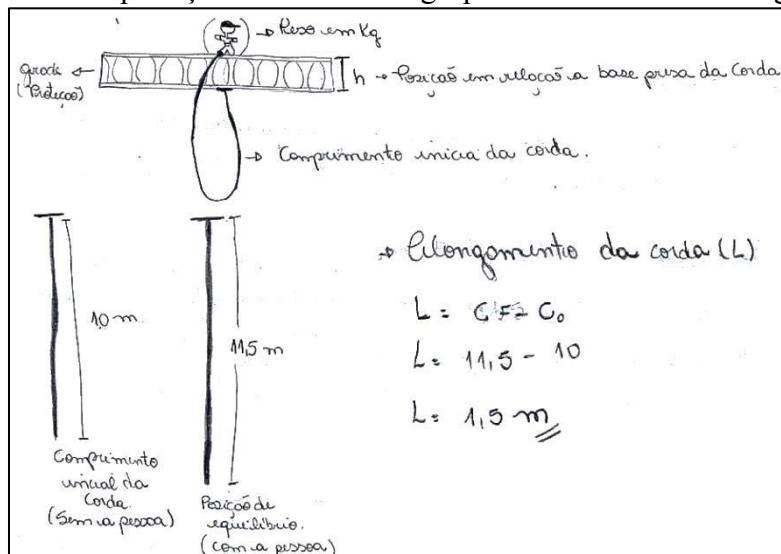
[...]

Aluno B1: *O quê que a gente pode pensar aqui, tem uma parte que fala desses onze virgula alguma coisa, aqui, a altura média do Bungee Jump é de 40 m [lê o material] pensando aqui olha o comprimento inicial da corda... [alunos interrompem] dá a entender que quando ela para após o salto, na posição de equilíbrio a pessoa está a 11,5 m após pular [aluna B1 desenha]*

GR_AT6_MM3_G5.

A partir desse diálogo a aluna B1 faz uma interpretação do sujeito que sala de Bungee Jump, Figura 4.30.

Figura 4.30 Interpretação dos alunos do grupo G5 sobre o salto Bungee Jump



Fonte: RE_AT6_MM2_G5.

Os alunos argumentam que após o primeiro impacto a corda está com 11,5 m, e para seus cálculos eles consideram apenas o primeiro impacto do sujeito após pular. Esse desenvolvimento se deu no primeiro encontro presencial dos alunos para resolução da atividade. No segundo encontro, os alunos retomaram as informações da situação-problema e tentaram relembrar as informações já declaradas por eles na aula passada. A partir dessas considerações os alunos do grupo G5 formularam a situação-problema “Qual o deslocamento da corda ao final do salto, levando em consideração a força de resistência atuante sobre o corpo?” Após a formulação deste problema os alunos buscaram fazer analogias com problemas acerca de sistemas massa-mola já resolvidos e/ou disponíveis em livros didáticos.

Aluna B1: *E aí, você quer pensar em problemas lá da mola? Pega o primeiro problema de mola, para a gente ver se a partir dele conseguimos fazer alguma coisa.*

Aluno A4: *então eu vou ler para ver se a gente consegue [o aluno lê em voz alta] vamos tentar pausar para tentarmos relacionar parte por parte. Aqui o peso é a pessoa.*

Aluna B1: *hamram, a gente supôs 50*

Aluno A4: *então o peso a gente já tem...*

[os alunos continuam fazendo a leitura do problema e relacionando com dados do texto sobre o Bungee Jump]

Aluno A4: *então a gente viu que todos os dados que tem no problema da mola a gente pode relacionar com algum dado que tem na folhinha, agora o que a gente vai formular, um problema a partir disso aqui. Então vamos elaborar nossa problemática?*

GR_AT6_MM3_G5.

A partir da analogia com um problema massa/mola estudado, os alunos do grupo G5 formularam uma situação idealizada para resolver a atividade de modelagem matemática (Figura 4.31). Para a formulação dessa situação os alunos discutiram, fizeram e corrigiram suposições sobre a situação-problema, até chegar a um consenso.

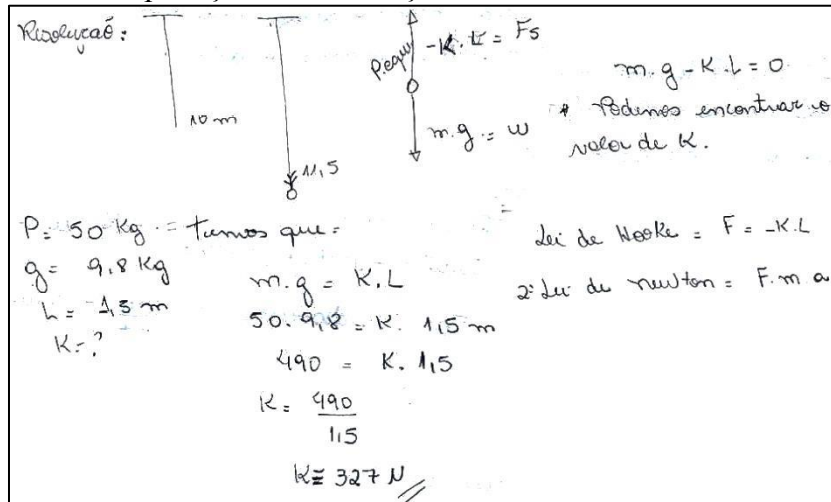
Figura 4.31 Situação-problema formulada pelo grupo G5

② Viviane está se preparando para saltar de Bungee Jump, sabendo que seu peso é de aproximadamente 50 kg. Antes do salto foi realizada uma vistoria nos equipamentos, seja a sobre a corda, as presilhas, os engates e os cintos.
De acordo com a empresa "Full Seguro" a corda tem o comprimento de aproximadamente 10 m.
Realizado o salto, antes de Viviane ver a bitola dos equipamentos, soltando a presilha, percebe-se que a corda passou a medir 11,5 m, chegando em sua posição de equilíbrio.
Com o objetivo de sentir novamente o prazer da adrenalina, Viviane resolve saltar pela segunda vez, porém agora de uma altura superior em 2 m à grade da ponte que mede 11,5 m.
Pergunta-se qual o deslocamento da corda ao final do salto levando em consideração a força de resistência atuante sobre o corp

Fonte: RE_AT6_MM2_G5_B1.

A partir da situação idealizada, os alunos do grupo G5 elaboraram uma resolução considerando ideias recém-vistas na disciplina de EDO sobre sistemas massa-mola (Figura 4.32, Figura 4.33, Figura 4.34, Figura 4.35 e Figura 4.36).

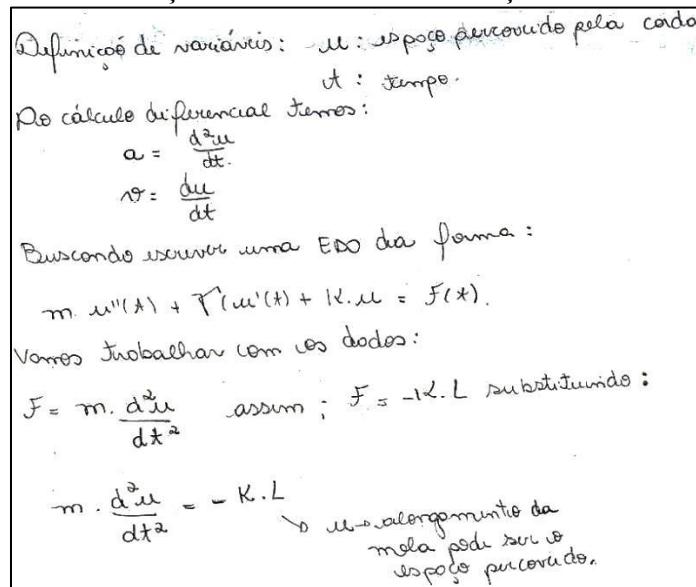
Figura 4.32 Interpretação e identificação de conceitos matemáticos – AT6 G5



Fonte: RE_AT6_MM2_G5.

Em cada parte da resolução do problema proposto os alunos discutiam a resolução e buscavam analogias com problemas resolvidos em sala de aula e problemas de livros de EDO disponíveis na biblioteca e na internet. O desenvolvimento matemático a partir da Figura 4.33 foi feito no terceiro encontro disponível para resolução da atividade de modelagem matemática.

Figura 4.33 Definição de variáveis e formulação de EDO – AT6 G5



Fonte: RE_AT6_MM2_G5.

Figura 4.34 Dedução de EDO e problema de valor inicial – AT6 G5

$m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} = -K \cdot u$ $m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dK}{dt} \cdot u - \frac{du}{dt}$ $m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + K u = 0$ $50 \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + 327 u = 0$ <p>* Próximo passo resolver a equação característica, encontrar a solução geral, e as constantes c_1 e c_2, resolvendo PVI, assim encontrando a resposta do problema</p>	<p>→ Resolvendo: "</p> $50u''(t) + u'(t) + 327u = 0$ <p>EDO que descreve o movimento</p> <p>Condições iniciais:</p> $u(0) = -3$ $u'(0) = 0$
--	---

Fonte: RE_AT6_MM2_G5.

O trabalho na resolução da EDO formulada acontece de maneira independente pelos alunos, eles não comunicam muito sobre a resolução, apenas conferem se os demais estão conseguindo resolver e se os resultados são parecidos.

Figura 4.35 Resolução de EDO de segunda ordem – AT6 G5

<p>Resolvendo a EDO:</p> $50u''(t) + u'(t) + 327u = 0$ <p>Equação Característica:</p> $50r^2 + r + 327 = 0$	$r = \frac{-1 \pm \sqrt{65.999} \cdot i}{100}$ $r_1 = \frac{-1 + \sqrt{65.999} \cdot i}{100}$ $r_2 = \frac{-1 - \sqrt{65.999} \cdot i}{100}$
$u(t) = c_1 \cdot e^{\frac{1}{100}t} \cos\left(\frac{\sqrt{65.999}}{100}\right) + c_2 \cdot e^{\frac{1}{100}t} \sin\left(\frac{\sqrt{65.999}}{100}\right)$ <p>↳ Solução geral //</p>	

Fonte: RE_AT6_MM2_G5.

A partir da obtenção da solução da EDO, dada pela função do deslocamento em relação ao tempo $u(t) = c_1 e^{-\frac{1}{100}t} \cos\left(\frac{\sqrt{65899}}{100}\right) + c_2 e^{-\frac{1}{100}t} \sin\left(\frac{\sqrt{65899}}{100}\right)$, os alunos argumentam sobre as condições de contorno da situação-problema por eles definida:

Aluna B1: Agora a gente tem que derivar.

Aluno A4: Então isso eu não estou lembrando, a gente não teria que ter pelo menos um dos valores?

Aluno A4: Professora, *nessa primeira condição aqui, não necessariamente aqui precisaria me dar o valor de pelo menos uma constante?*

Professora: *não, na primeira não, a primeira para a segunda forma um sistema né, então, por exemplo, a primeira fala que o tempo é zero, e u é -3?*

Aluno A4: *mas...*

Professora: *não vai dar para achar nenhuma delas, é isso que você está querendo dizer?*

Aluno A4: *isso.*

Professora: *então agora você usa as duas [a professora mostra para os alunos nos registros escritos], você precisa derivar a função $u(t)$ para montar o sisteminha e obter os valores de c_1 e c_2 . [...] Você terá um sistema de duas equações e duas incógnitas.*

Aluno A4: *mas não necessariamente eu teria que ter o valor de uma constante para poder substituir depois?*

Aluna B1: *é que depende do problema, teve um que não dava direto, que a gente precisou fazer um sistema. É que teve uns que a gente já encontrava direto.*

GR_AT6_MM2_G5.

A partir do diálogo os alunos partem para a resolução de um sistema, elaborado a partir das condições iniciais, por eles definidas, a fim de obter os valores das constantes associadas à função deslocamento (Figura 4.36).

Figura 4.36 Identificação da solução da EDO – AT6 G5

Resolvendo o RII.

$$c_1 \cdot e^{-\frac{t}{100}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{65399}}{100}\right) + c_2 \cdot e^{-\frac{t}{100}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{65399}}{100}\right) = -3$$

$$c_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{65399}}{100}\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{65399}}{100}\right) = -3$$

$$c_1 \cdot \cos 2,56 + c_2 \cdot \sin 2,56 = -3$$

$$\begin{cases} -0,8 \cdot c_1 + 0,5 \cdot c_2 = -3 \end{cases} \quad (I)$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} I & -0,8c_1 + 0,5c_2 = -3 \quad (\times 1,3) \\ II & 1,3c_1 + 79,5c_2 = 0 \quad (\times 0,8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1,04c_1 + 0,65c_2 = -3,9 \\ 1,04c_1 + 63,5c_2 = 0 \end{cases}$$

$$0 + 64,15c_2 = -3,9$$

$$c_2 \approx \frac{-3,9}{64,15}$$

$$\boxed{c_2 \approx -0,06}$$

Substituindo em II.

$$1,3c_1 + 79,5c_2 = 0$$

$$1,3c_1 + 79,5 \cdot (-0,06) = 0$$

$$1,3c_1 - 4,77 = 0$$

$$1,3c_1 = 4,77$$

$$c_1 = \frac{4,77}{1,3}$$

$$\boxed{c_1 \approx 3,66}$$

Solução:

$$u(t) = 3,66 \cdot e^{-\frac{t}{100}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{65399}}{100}\right) - 0,06 \cdot e^{-\frac{t}{100}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{65399}}{100}\right)$$

Fonte: RE_AT6_MM2_G5.

O grupo de alunos G3, constituído pelos alunos C1, C2, C3, C4 e C5 desenvolveram a atividade de modelagem matemática iniciando por uma leitura detalhada dos dados do problema e discutindo as informações.

Aluna C5: *tem alguns dados aqui que da para a gente utilizar, tem altura média que fala 50 metros e depois fala 40 metros. Aí ele desce a 11,5 m em queda livre, quer dizer que a hora que ele chega nisso a corda puxa né, porque ela é elástica.*

Aluno C1: *quantos metros?*

Aluna C5: *aqui fala 11,5 m.*

Aluno C1: *é negativo né? Porque sobe para cima...*

Aluna C4: *porque ele está descendo*

Aluna C1: *na verdade não, se você pensar no tamanho da corda ele vai descer.*

Aluna C4: *a corda é grande.*

[...]

Aluno C1: *então tem que colocar os 40 m mais os 11,5 que a corda aumenta?*

Aluna C5: *aqui fala que o tranco equivale a uma trombada de 265 kg a 53 km/h, então tem dados de velocidade no instante né. O que mais que eu coloquei aqui [olha nas anotações]. Eu achei interessante esse caso aqui do balão, que ele pulou usando um cabo com comprimento de 10 m e capacidade de distensão de 30 m, o que isso quer dizer: que o cabo tem 10 m, mas que a elasticidade dele chega a 30 m [...]. Se a gente pegar um cabo de 10 m e pensar que o rapaz em queda livre chegou a 11,5 m, nós teríamos mais ou menos o valor que o cabo distende, né?*

Aluno C1: *hamram.*

Aluna C5: *porque se ele tem 10 m em um ponto e no ponto de equilíbrio tem 11,5.*

Aluno C1: *então, ele tem 10, vai para 30 e quando volta ele tem 11,5?*

Aluna C5: *pelo que eu entendi, ele chega até 30, mas com o peso no caso iria só até 11,5, entendeu? [...] Porque é aquele negócio se a massa aumenta a corda estica mais.*

GR_AT6_MM2_G3.

Os alunos a partir da discussão dos dados disponíveis, argumentam que não sabem exatamente a massa do sujeito, mas conhecem a velocidade no instante do tranco, o peso mínimo para realização do salto, entre outros fatores. A partir dessas informações a aluna C5 quer fazer um desenho para vislumbrar o que ocorre a partir do salto do sujeito, já o aluno C1 gostaria de definir o que eles querem investigar a partir das informações disponíveis.

Aluno C1: *não é conforme quem vai saltar que vai variar?*

Aluna C5: *mas aqui não tem a massa da pessoa. Isso a gente tem que assumir, a massa, e que o cabo tem 10 m e que a capacidade de distensão é de 30 metros [...]*

Aluno C1: *nós achamos um negócio legal. Que quando a massa tem 50 kg ela produz um impacto de 1200 kg ao final da queda e que a força elástica do cabo é de 200%.*

Aluna C4: *o cabo tem 200% de elasticidade.*

Aluno C1: *a gente podia procurar assim “se tiver 60 kg de massa, quantos quilos vai dar no final da queda?” seria legal?*

Aluno C5: *só que a gente tem que pensar em um problema de valor inicial, então a gente tem que ter valores iniciais.*

[...]

Aluna C5: *se a gente vai usar a velocidade, então a gente tem que ter a velocidade... [alunos discutem sobre possíveis valores iniciais]*

Aluna C5: *só que se a gente vai estudar a mola, a gente precisa saber a velocidade inicial também. O u e o u', o u' é a velocidade. Então a gente não poderia usar o peso.*

Aluno C1: *entendi*

[...]

Aluna C5: *se a gente quer usar dados da mola, temos que parar de pensar nos dados e começa a pensar no problema para depois pensar os dados. Porque o que a gente tem, a mola sem ser distendida. Aqui fala 10m, sem ser distendido, que havíamos pensado em pegar. Aí tem a capacidade de distensão da mola que é de 30 m, mas a gente não vai usar o 30 porque iremos trabalhar com a informação de 11,5 m.*

Aluno C1: *então de 10 m ela só estica até 11,5 m com o peso.*

Aluno C5: *é precisamos saber o peso, mas não temos esse dado aqui.*

GR_AT6_MM2_G3.

Os alunos sentem dificuldade na suposição de informações para dar andamento ao desenvolvimento da atividade, mas em determinado momento a professora os auxilia informando que não há problemas em fazer as suposições necessárias para o desenvolvimento da atividade. Os alunos definem o problema a estudar, as variáveis para o estudo e os dados essenciais para obtenção de modelos matemáticos associados à problemática definida, Figura 4.37.

Figura 4.37 Formulação do problema, de hipóteses e definição de variáveis, AT6 grupo G3

Problema

Análise os valores iniciais da prática do Bungee Jump, encontre a EDO e resolva.

Hipóteses

- * A elasticidade do cabo depende do peso
- * O tempo depende do peso
- * Peso armadura 80kg

Variáveis

(u) → Espaço percorrido pelo corpo
 (t) → tempo

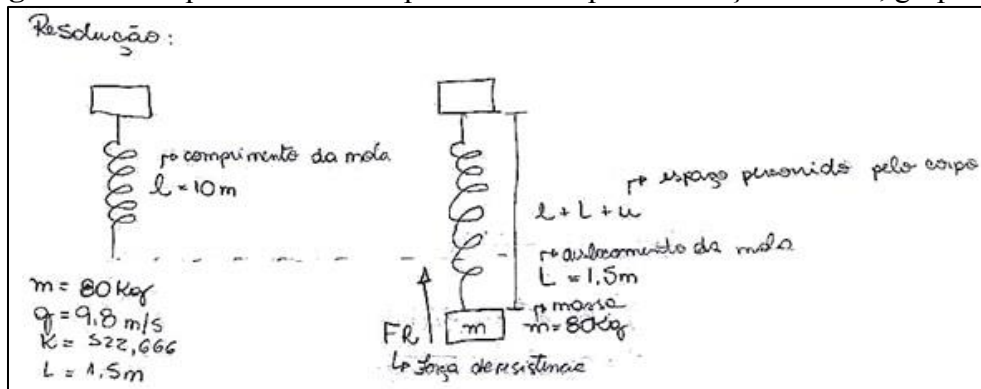
Dados para uso:

- Velocidade: $\frac{du}{dt} (u'(t))$
- Aceleração: $F = m \frac{d^2u}{dt^2} (u''(t))$

Fonte: RE_AT6_MM2_G3.

Definido o que estudar, os alunos passam, por indicação da aluna C5, a analisar as forças que agem sobre o corpo do sujeito que salta de Bungee Jump (Figura 4.38).

Figura 4.38 Esquema elaborado pela aluna C5 para resolução da AT6, grupo G3



Fonte: RE_AT6_MM2_G3.

A partir do entendimento do que ocorre com a mola, os alunos tecem conjecturas sobre o que eles precisam para deduzir um modelo matemático relacionado ao espaço percorrido pelo sujeito no decorrer do tempo, no salto de Bungee Jump.

Aluna C5: A gente falou que a força externa é igual a zero né, a massa que a gente tem é igual a 80 kg.

Aluna C4: Esse aí é a força resistência, ou o amortecimento

Aluna C5: *O nosso problema aqui falava que a resistência era numericamente igual à velocidade instantânea, a gente pode usar isso também, daí seria outra hipótese nossa. Se a resistência for numericamente igual a velocidade instantânea, a gente tem a velocidade instantânea aqui. Seria uma coisa boa.*

Aluna C4: *Da para ver.*

GR3_AT6_MM2_G3.

Os alunos recorreram à professora para verificar se seria viável assumir a resistência igual à velocidade instantânea, pois não conseguiam visualizar uma maneira de obter o coeficiente. A professora pediu, então, para que ponderem sobre o sentido daquele coeficiente na situação-problema e os alunos partiram para procedimentos matemáticos associados ao ponto de equilíbrio do sujeito (Figura 4.39).

Figura 4.39 Análise das forças em relação à posição de equilíbrio, AT6, grupo G3

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = -5 \\ u'(0) = 0 \text{ km/h} \end{array} \right.$$

$\left\{ \begin{array}{l} -c \cdot v \\ m \cdot g \end{array} \right. \rightarrow \text{Equilíbrio}$

$$mg - cv = 0$$

$$80,9,8 - c \cdot 53 = 0$$

$$c = 14,79$$

$L = \text{constante}$

Fonte: RE_AT6_MM2_G3.

De modo geral, a aluna C5 direcionou a dedução do modelo matemático associado ao salto de Bungee Jump. A partir da análise da posição de equilíbrio do corpo os alunos definiram as condições iniciais utilizando o deslocamento inicial, no tempo 0, como 0 e a velocidade após 10m, como a velocidade do tranco indicada no texto da situação-problema (Figura 4.40, Figura 4.41 e Figura 4.42).

Figura 4.40 Dedução da EDO de segunda ordem associada ao salto de Bungee Jump, G3

$$m \cdot g = K \cdot L$$

$$80 \cdot 9,8 = K \cdot 1,5$$

$$784 = 1,5 \cdot K$$

$$K = 522,666$$

* Peso $w = m \cdot g$

* Força da mola = $F = -K \cdot (L + u)$

$$m u''(t) = m \cdot g - c \cdot u'(t) - K(L + u)$$

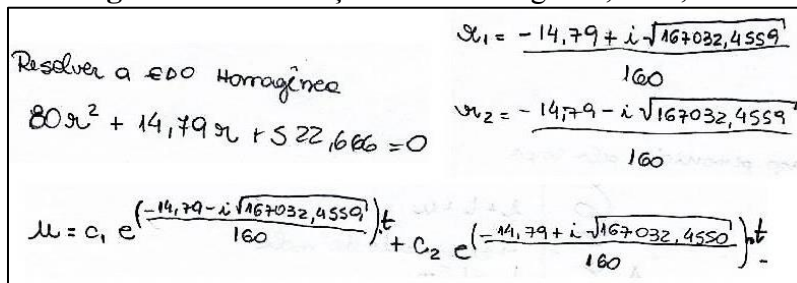
$$m u''(t) = \underbrace{m \cdot g - K \cdot L}_{0} - c u'(t) - K u$$

$80 u''(t) + 14,79 u'(t) + 522,666 u = 0$

\rightarrow EDO

Fonte: RE_AT6_MM2_G3.

Figura 4.41 Resolução EDO homogênea, AT6, G3

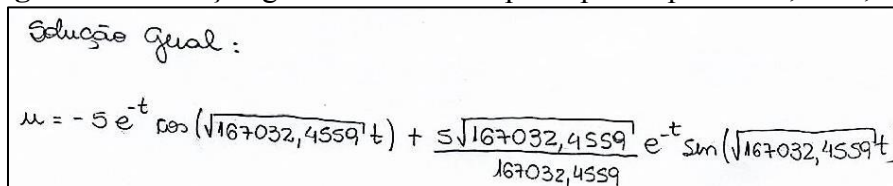


Resolver a EDO Homogênea

$$80r^2 + 14,79r + 522,666 = 0$$
$$r_1 = \frac{-14,79 + i\sqrt{167032,4559}}{160}$$
$$r_2 = \frac{-14,79 - i\sqrt{167032,4559}}{160}$$
$$u = c_1 e^{\left(\frac{-14,79 + i\sqrt{167032,4559}}{160}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{-14,79 - i\sqrt{167032,4559}}{160}\right)t}$$

Fonte: RE_AT6_MM2_G3.

Figura 4.42 Solução geral da EDO e resposta para o problema, AT6, G3



Solução Geral:

$$u = -5e^{-t} \cos(\sqrt{167032,4559}t) + \frac{5\sqrt{167032,4559}}{167032,4559} e^{-t} \sin(\sqrt{167032,4559}t)$$

Fonte: RE_AT6_MM2_G3.

A partir do momento que os alunos obtêm a solução da EDO dada pela função u , os mesmos entendem que a atividade foi desenvolvida, visto que conseguiram uma solução para o problema declarado inicialmente. A partir de uma EDO sobre a variação do deslocamento da corda do Bungee Jump, em relação ao tempo, os cálculos resultam em uma função u que descreve em linguagem matemática o deslocamento da corda após o salto de Bungee Jump.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 7: SLACKLINE UM SHOW DE MANOBRAS

A temática dessa atividade foi sugerida pela professora da disciplina no primeiro semestre de 2016. Quando da sugestão da atividade pela professora, uma das alunas da turma sugeriu que os alunos se reunissem em um sábado combinado para irem até um esportista que pratica slackline, assim os alunos poderiam entrevistá-lo, coletar dados e *tentar* praticar Slackline.

Por sugestão da turma, os alunos, junto com a professora da disciplina, organizaram uma coleta de dados que ocorreu na cidade de Santa Mariana, Paraná. Os dados utilizados na atividade foram coletados com a aluna B1 e com o instrutor de Slackline presente no dia da prática. A partir das informações coletadas com o esportista, das medidas da fita utilizada no dia, bem como das tentativas de alunos de todos os grupos de praticar Slackline

os alunos se reuniram em grupos, G6, G7 e G8 a fim de juntar as informações, decidir por um problema a investigar e continuar o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. A Figura 4.43 aborda algumas informações sobre a prática do Slackline, essas informações foram entregues pela professora aos alunos da disciplina para auxiliar os alunos na inteiração com o tema sugerido para a atividade de modelagem matemática.

O desenvolvimento dessa atividade contou com reuniões em sala de aula, contabilizando seis horas/aula, e reuniões extraclasse. No total foram quatro horas/aula para discussão de ideias, consultas à professora e delineamento de atividades, duas horas/aula para apresentação das ideias em desenvolvimento (neste momento professora e alunos discutiam o andamento da atividade, bem como apontavam sugestões para o aprimoramento da mesma).

Figura 4.43 Texto entregue aos alunos para o desenvolvimento da atividade

SLACKLINE: UM SHOW DE MANOBRAS

Em 2014 o Paraná recebeu o primeiro festival de Slackline do Brasil. O Fórum de Slackline realizado ocorreu em Foz do Iguaçu e teve como objetivo discutir novas práticas do esporte e a criação de uma federação nacional para a atividade. O desafio do slackline é andar, pular, girar, entre outras manobras, pelo maior tempo possível – claro sem ir ao chão – sobre uma fita de náilon presa pelas extremidades em bases fixas, como árvores, postes ou carros.

Por aqui o esporte é novidade, mas seu surgimento data da década de 80, nos Estados Unidos. De modo geral, foi inicialmente considerado como uma atividade para o tempo livre a fim de praticar o equilíbrio. Daí a ideia de amarrar as fitas de escalada entre duas árvores e andar sobre a fita.

Atualmente, manobras incríveis são executadas em cima da fita e adeptos de todas as idades tentam manter o equilíbrio, sem, é claro, cair no chão.

Como esporte quatro são as modalidades disponíveis: waterline, realizado sobre as águas; highline, praticado em grandes alturas, como montanhas, pontes e edifícios; o longline, em que o importante é percorrer uma distância superior a 40 metros; e o trickline, em que as manobras ousadas sob a fita são avaliadas.

Se você deseja iniciar a prática, seja como diversão ou como esporte, o material é vendido nas principais lojas de esporte. Um kit para iniciantes²² contém: uma fita (geralmente de poliéster) de 10 m ou de 15 m por 5 cm (as fitas podem suportar até 4 toneladas), o peso do equipamento varia entre 2,5 kg e 2,7 kg, uma catraca em aço inoxidável com trava de segurança.

²² Crianças a partir de 5 anos já podem iniciar a atividade.

Fonte: As informações para o texto foram obtidas a partir da matéria: **Show de manobras:** Paraná recebe primeiro festival de Slackline do Brasil. Por Globo Esporte. Disponível em: <<http://globoesporte.globo.com/programas/esportespetacular>>. Acesso em 29/03/15.

Para além das informações entregues pela professora este grupo coletou outras informações sobre a prática do Slackline (Figura 4.44).

Figura 4.44 Informações sobre o Slackline coletadas pelos alunos do grupo G6

Sobre o Esporte Slackline

O *Slackline*, que segundo tradução significa “linha folgada”, é uma modalidade esportiva praticada sobre uma fita, a qual deve ser esticada e prendida entre dois pontos fixos, que podem ser árvores, postes, etc. Inicialmente o praticante desse esporte deveria apenas completar a travessia. Com o tempo, este esporte recebeu diversas novas modalidades, tornando o fato de caminhar não ser o suficiente. A seguir relatamos algumas das outras modalidades do *slack*:

O *Waterline*, como o próprio prefixo denota “*Water*” (água), é o Slackline praticado sobre a água. O *Highline*, “*High*” (alto) é o Slackline praticado em grandes alturas, como montanhas e pontes. Também existem modalidades como o *Trickline*, que é o *Slackline* somente para fazer manobras radicais. Pode-se citar também o *Longline*, que consiste no Slackline praticado em longa distância, normalmente acima de 40 metros.

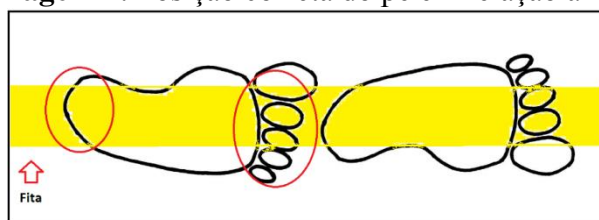
Segundo Orangotango (2011) o esporte *Slackline* é muito semelhante à prática milenar do equilíbrio e ainda com a popularização do *Slackline* essa prática vem ganhando cada vez mais adeptos no mundo todo. “Existem relatos que a primeira apresentação de equilíbrio em uma corda bamba foi a 108 a.C em uma festa em um luxuoso palácio chinês” (LUCK, 2015).

De acordo com Luck (2015) os anos 80 foi década que marcou a iniciação do equilíbrio como prática esportiva e amparados em Orangotango (2011) começou nos anos 80 em um parque chamado *Yosemite Valley*, na cidade da Califórnia. Neste local muitos praticavam a escalada. Assim entre escaladas os alpinistas se divertiam praticando manobras e novas técnicas de equilíbrio nas correntes do estacionamento do parque. Logo os praticantes passaram a amarrar fita em árvores e a treinar a travessia de uma árvore a outra assim ficou fundado o *Slackline*.

No Brasil a chegada do *Slackline* ocorreu no ano de 1995 com a visita de escaladores estrangeiros, atualmente não se tem estimativas da quantidade de praticantes do esporte no Brasil (MENDES; GOMES; BELLO, 2014).

De acordo com Stuppiello (2016) parafraseando o educador físico Dimitri Wuo Pereira indica que para o início da prática do esporte se comece com uma altura de “uns 30 ou 40 centímetros e tenha alguém te dando a mão. Coloque o pé inteiro em cima da fita, não o deixe de lado, mantenha os joelhos semi-flexionados e mantenha os braços abertos com a palma da mão virada para cima” [...].

Imagem 1: Posição correta do pé em relação à fita



Fonte: os autores

O Slackline tem como benefícios trabalhar com o equilíbrio, concentração, força muscular, estresse e até mesmo aspectos psicológicos. A prática do Slackline, além de desenvolver as habilidades motoras também estimula as capacidades cognitivas, como o desenvolvimento de raciocínio lógico, exercita a capacidade de planejamentos, além de aprimorar a atenção.

Fonte: RE_AT7_MM2_G6.

Quando os alunos, em conjunto com a professora, se reuniram para coletar dados relacionados à prática do Slackline, dados foram coletados por meio de uma entrevista com o instrutor de Slackline, um vídeo de uma das alunas da sala (aluna B1) praticando Slackline, um vídeo do instrutor praticando Slackline, e diferentes medidas enquanto a aluna B1 e o instrutor praticavam slackline. Os dados coletados neste dia foram sistematizados pelos alunos do grupo G6 (Figura 4.45).

Figura 4.45 Informações Coletadas pelos alunos e sistematizadas pelo grupo G6

Com a ajuda do instrutor que acompanhou a atividade, se obteve medidas e informações do esporte. A fita utilizada na realização da atividade tem como especificações:

Largura	4,4 cm
Comprimentos	15 cm
Componentes de Estrutura	Nylon

O local que foi escolhido foi uma praça. A fita foi presa a duas árvores, uma em cada extremidade da corda. A distância dessas árvores era de 10,5 m. A fita possui em suas extremidades catracas (objetos de tração) como mostra a Figura 5, feitos de metal que permitem esticar a corda até que a mesma esteja ideal para prática do esporte.

Imagem 5 - Catraca



Fonte: Os autores

A fita foi amarrada em uma das árvores a uma altura de 98 cm e outra 92 cm, esses valores não foram definidos propositalmente, buscou-se a mesma medida empiricamente, portanto não foi feita a medição antes de fixar a fita, somente depois por curiosidade dos participantes. Nas Imagens 6 e 7 é possível observar o poste e a árvore em que foi amarrado o *slackline*.

Imagem 6 - Poste



Fonte: Os autores

Imagem 7 - Árvore



Fonte: Os autores

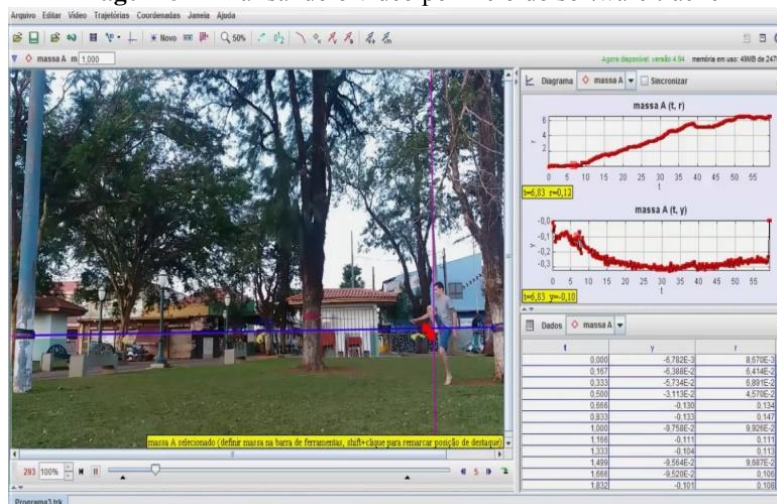
A análise foi realizada com um participante do sexo masculino de 23 anos de idade, 70 kg e 1,85 m de estatura, com um tempo de prática do esporte de quatro meses.

Os instrumentos que foram utilizados para a atividade foram equipamentos profissionais cedidos pelo participante da pesquisa. As fotos e filmagens foram tiradas com câmera de celular.

Para as filmagens posicionamos o celular em uma mesa de modo que o mesmo ficasse fixo, captando todo o movimento do participante enquanto caminhava sobre a fita. Após essa filmagem, utilizamos o *software tracker* para a análise dos dados, ou seja, foram plotados pontos sobre os pés, obtendo tabelas de pontos referente ao tempo (variável independente) e distância percorrida (variável dependente).

Com tal *software* é possível fazer uma análise gráfica, analisando o vídeo de modo a plotar marcações durante todo o trajeto percorrido pelo objeto, ou seja, o participante enquanto praticava o *slackline*. Na Imagem 8 é possível observar a tabela do lado inferior direito e os gráficos acima da tabela.

Imagem 8 – Analisando o vídeo por meio do software tracker



Fonte: Os autores

Fonte: RE_AT7_MM2_G6.

Os alunos A1, A4, B1 e B2, integrantes do grupo G6, intitularam a atividade de “Uma Experiência com Modelagem Matemática: o Estudo da Prática do Slackline”. O arquivo elaborado pelo grupo de alunos sobre a atividade de modelagem matemática foi estruturado de modo a contemplar: introdução, sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, sobre o esporte Slackline, aspectos metodológicos: uma atividade prática de modelagem matemática: o estudo do Slackline, a atividade de modelagem matemática desenvolvida, considerações finais e referências. Neste texto de tese, traremos registros dos alunos advindos deste trabalho e das reuniões em salas de aula de modo a detalhar o problema e a resolução por eles desenvolvidos. Com base nos dados coletados e nos instrumentos de coleta de dados, foi definido o problema para estudo na atividade de modelagem matemática: *Qual é a função que descreve o espaço percorrido pelo instrutor em um instante t ?*

A fim de obter uma solução para essa questão, os alunos analisaram os dados obtidos na coleta por meio de gráficos advindos do software Tracker. Após obter os gráficos, o grupo discutiu acerca dos dados criando conjecturas e formularam as hipóteses:

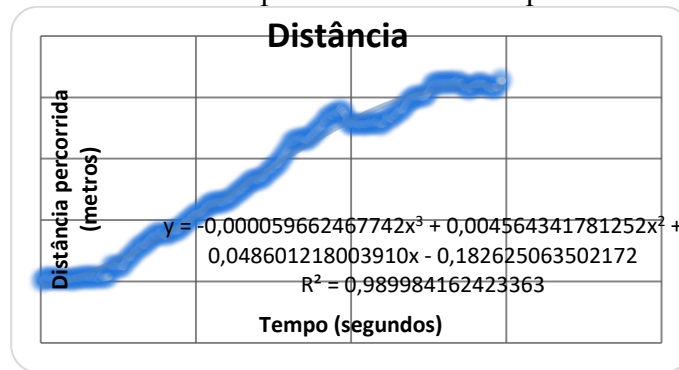
Hipótese 1: Considerar os pontos plotados durante toda a trajetória sobre os pés como contínuo dentre o intervalo de 0 a 60 segundos;

Hipótese 2: A função está entre um intervalo de 0 a 60 segundos;

Hipótese 3: A validação do modelo será por meio da função estabelecida pela linha de tendência no *Excel*.

Durante a formulação de hipóteses, os alunos do grupo G6 tiveram problemas com o ajuste de uma função que descrevesse um intervalo de tempo em que o sujeito da pesquisa percorreu o trajeto da fita. Para sanar tal problema, os alunos fizeram o ajuste de uma curva utilizando os 358 pontos, obtidos com o *Software Tracker*, por meio do *Software Excel*, obtendo um polinômio do terceiro grau (Figura 4.46).

Figura 4.46 Gráfico da distância percorrida durante a prática do Slackline



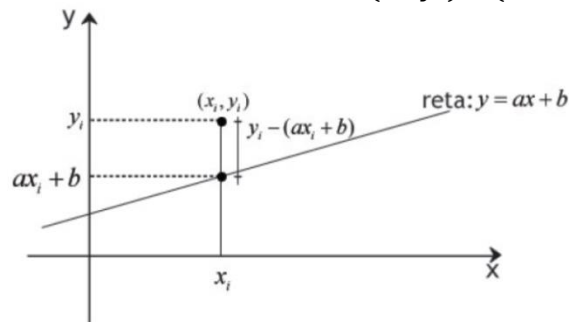
Fonte: RE_AT7_MM2_G6.

Os alunos, utilizando as informações advindas do gráfico, resolveram ajustar uma função polinomial de grau três por meio do uso do Método dos Mínimos Quadrados²³ (Figura 4.47). Os alunos deduziram o método para o ajuste de uma função de primeiro grau e a partir do sistema correspondente a este ajuste generalizaram o uso do método para uma função de terceiro grau.

Figura 4.47 Desenvolvimento do método dos mínimos quadrados e dedução do método para ajuste de funções polinomiais

Este método consiste em minimizar a soma das diferenças entre os valores de $f(x)$, ou seja, uma reta $y = ax + b$ tende a se aproximar o mínimo possível do conjunto de dados.

Figura 8 – Distância vertical entre (x_i, y_i) e $(x_i, ax_i + b)$



Fonte: Os autores

Percebe-se que estamos trabalhando com distância entre ponto e reta, portanto podemos escrever uma função do gráfico acima da seguinte forma:

$$D = y_i - (ax_i + b)$$

A diferença pode ser tanto negativa quanto positiva podendo se anular, por esse fato que se deve minimizar o quadrado da diferença. Dessa forma supomos que sejam n pontos tabelados, assim pode-se definir a função:

²³ A descrição completa do método para o ajuste de funções pode ser obtida em Bassanezi (2002).

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

De acordo com os critérios de mínimo:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial b} = 0$$

Calcular as derivadas parciais em relação aos parâmetros a e b. Primeiramente será feito a derivada em relação ao parâmetro a:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 = 0$$

Desenvolvendo o quadrado acima:

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2y_i ax_i - 2y_i b + a^2 x_i^2 + 2a x_i + b^2 = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a} \sum_{i=1}^n -2y_i x_i + 2ax_i^2 + 2x_i = 0 \quad [...]$$

$$\sum_{i=1}^n ax_i^2 + \sum_{i=1}^n b x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \rightarrow I$$

Agora derivando em relação ao parâmetro b:

$$\frac{\partial Q}{\partial b} \sum_{i=1}^n -2y_i + 2ax_i + 2b = 0$$

$$\sum_{i=1}^n ax_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \rightarrow II$$

Montar um sistema com as funções I e II.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n ax_i^2 + \sum_{i=1}^n b x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n ax_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Para generalizar um sistema para qualquer polinômio, é possível adaptar para a forma de $y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ aos pontos (x_i, y_i) . Deste modo, obtém:

$$r_i = y_i - (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)$$

Ou seja, se efetuar os mesmos cálculos para toda a dedução é possível encontrar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p x_i^0 a_0 + \sum_{i=1}^p x_i^1 a_1 + \dots + \sum_{i=1}^p x_i^n a_n = \sum_{i=1}^p x_i^0 y_i \\ \sum_{i=1}^p x_i^1 a_0 + \sum_{i=1}^p x_i^2 a_1 + \dots + \sum_{i=1}^p x_i^{n+1} a_n = \sum_{i=1}^p x_i^1 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p x_i^n a_0 + \sum_{i=1}^p x_i^{n+1} a_1 + \dots + \sum_{i=1}^p x_i^{2n} a_n = \sum_{i=1}^p x_i^n y_i \end{cases}$$

Fonte: RE_AT7_MM2_G6.

Utilizando o método exposto na Figura 4.67, os alunos fizeram o ajuste conforme indicava o método (Figura 4.48).

Figura 4.48 Ajuste de curvas feito pelos alunos do Grupo G6 – AT7

$$\begin{cases} 358d + \sum_{i=1}^{358} x_i^1 c + \sum_{i=1}^{358} x_i^2 b + \sum_{i=1}^{358} x_i^3 a = \sum_{i=1}^{358} y_i \\ \sum_{i=1}^{358} x_i^1 d + \sum_{i=1}^{358} x_i^2 c + \sum_{i=1}^{358} x_i^3 b + \sum_{i=1}^{358} x_i^4 a = \sum_{i=1}^{358} x_i^1 y_i \\ \sum_{i=1}^{358} x_i^2 d + \sum_{i=1}^{358} x_i^3 c + \sum_{i=1}^{358} x_i^4 b + \sum_{i=1}^{358} x_i^5 a = \sum_{i=1}^{358} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{358} x_i^3 d + \sum_{i=1}^{358} x_i^4 c + \sum_{i=1}^{358} x_i^5 b + \sum_{i=1}^{358} x_i^6 a = \sum_{i=1}^{358} x_i^3 y_i \end{cases}$$

Substituindo no Sistema

$$\begin{cases} 358d + 10645,454c + 422660,7b + 18878662,621a = 1254,823 \\ 10645,454d + 422660,7c + 18878662,621b + 899454146,009a = 51102,713 \\ 422660,7d + 18878662,621c + 899454146,009b + 44639087995,762a = 2282475,552 \\ 18878662,621d + 899454146,009c + 44639087995,762b + 2278692735722,26a = 108062472,653 \end{cases}$$

Resolvendo por meio do software VCN esse sistema, é possível encontrar os parâmetros a, b, c e d tal que a Figura 9 mostra o cálculo desenvolvido pelo *software*:

Substituindo os dados na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ obtemos a seguinte função dentro o intervalo 0 a 60 que é o tempo percorrido pelo sujeito da pesquisa enquanto andava pela fita.

$$F(x) = -0,183x^3 + 0,049x^2 + 0,005x - 0,00006$$

Percebemos que essa função não corresponde a função na qual o *Excel* mostrou pela linha de tendência, quando colocada no *software Geogebra*, a mesma tem um comportamento gráfico diferente, ou seja, a Figura 10 representa tal comportamento.

Figura 10 – Comportamento gráfico da Função F(x)

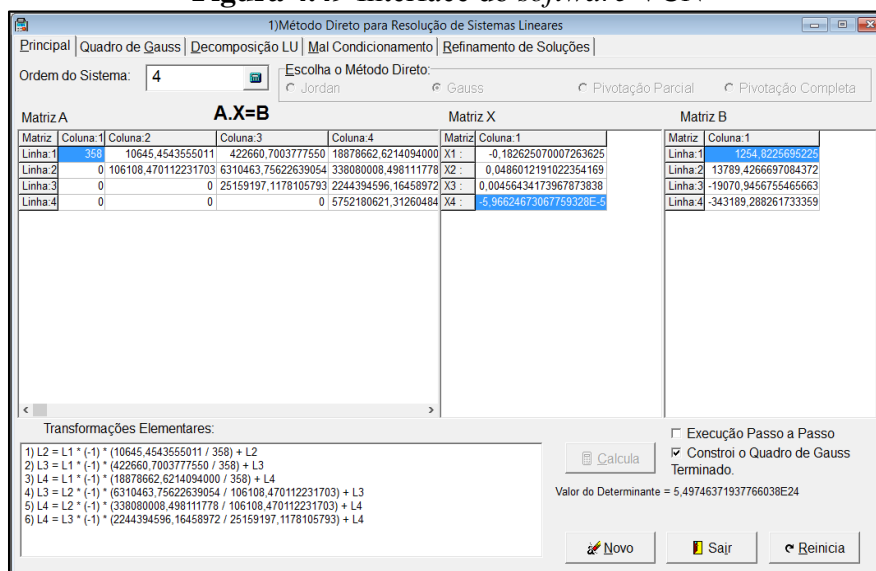
Fonte: Os autores

Fonte: RE_AT7_MM2_G6.

Para resolver o sistema de quatro incógnitas e quatro equações, os alunos do grupo G6 utilizaram o *software* Visual Cálculo Numérico²⁴. A interface do *software* (Figura 4.49) mostra o método direto para resolução de sistemas lineares, a matriz dos coeficientes, das incógnitas e dos resultados. Ao comparar a função obtida por meio do ajuste com o gráfico inicial, os alunos se “espantam” com a diferença no comportamento das duas funções e suas conclusões são baseadas nessa diferença, à qual atribuem o insucesso da atividade de modelagem matemática.

Dado o exposto, não foi possível encontrar um modelo que satisfaça o problema procurado, talvez o grupo esteja errando na interpretação dos dados visto que o modelo encontrado por meio do método dos mínimos quadrados não bate com a da linha de tendência explicitado no Excel.
RE_AT7_MM2_G6.

Figura 4.49 Interface do *software* VCN



Fonte: RE_AT7_MM2_G6.

Mesmo não considerando o ajuste da curva bom para representar a distância percorrida pelo praticante de Slackline, naquele caso específico, os alunos concluíram que: “a referida atividade foi pertinente em relação ao desenvolvimento do grupo, uma vez que, desde a coleta de dados, desenvolvimento e a busca do modelo, percebemos um aprendizado acerca de vários fatores, a saber, o esporte Slackline, trabalhar com *softwares* como recurso auxiliador nos cálculos matemáticos, método dos mínimos quadrados,

²⁴ O Visual Cálculo Numérico, também conhecido como VCN, é um software de Cálculo Numérico disponível em <<http://www.matematica.pucminas.br/lcn/vcn1.htm>>.

discussões sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, dentre outros” (RE_AT7_MM2_G6).

Os alunos A2, A3, B3 e C4 do grupo G7 denominaram a atividade desenvolvida por eles de “Slackline: esporte e modelagem matemática” entregaram em sua versão escrita informações sobre o esporte e sobre a coleta de dados, a situação-problema que definiram para a investigação, a formulação de hipóteses e resolução, três modelos matemáticos, a validação dos resultados e considerações finais. A aluna A3 teve a ideia de elaborar um tutorial para praticar Slackline a fim de auxiliar no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática (Figura 4.50).

Figura 4.50 Tutorial para praticar Slackline – grupo G7

1 Comece com uma fita mais curta.

- Quanto mais curta for a distância entre os dois pontos de âncora, mais estável será a fita.
- Quando ela ficar mais longa, algumas coisas acontecerão:
- A tensão na fita aumenta, deixando as quedas mais perigosas devido à força extra;
- A altura da fita em relação ao chão aumenta para permitir que ela vergue mais quando tem peso;
- É necessária mais força para apertá-la, o que pode ser difícil com alguns sistemas.

2 Coloque um pé no sentido do comprimento da fita no meio dela.

- Começar com os pés descalços é uma boa ideia. Isso permitirá que você sinta a fita melhor e encontre seu equilíbrio mais facilmente.
- Pise na fita de forma que ela fique entre seu dedão do pé e o segundo dedo e no meio do calcanhar. Quando você melhorar, pratique virar os pés e ficar de lado, com seus ombros paralelos à fita.
- Quando você melhorar (ou se o pouso não for seguro para os pés descalços), você deve começar a usar sapatos, pois eles oferecem maior proteção em alguns truques e ao pouso.

3 Você pode subir na fita em qualquer lugar, mas começar no meio é geralmente mais seguro, pois geralmente longe dos obstáculos em que você pode bater ao cair.

- Pratique do mesmo lugar toda vez, pois a slackline oscila diferentemente a diferentes distâncias da âncora.
- O balanço é mais rápido menor perto das âncoras sendo mais devagar e mais perto do meio.
- Seja de onde você começar, vai balançar bastante. Isso é natural; todo mundo balança na primeira vez.

4 Você pode subir na fita em qualquer lugar, mas começar no meio é geralmente mais seguro, pois geralmente longe dos obstáculos em que você pode bater ao cair.

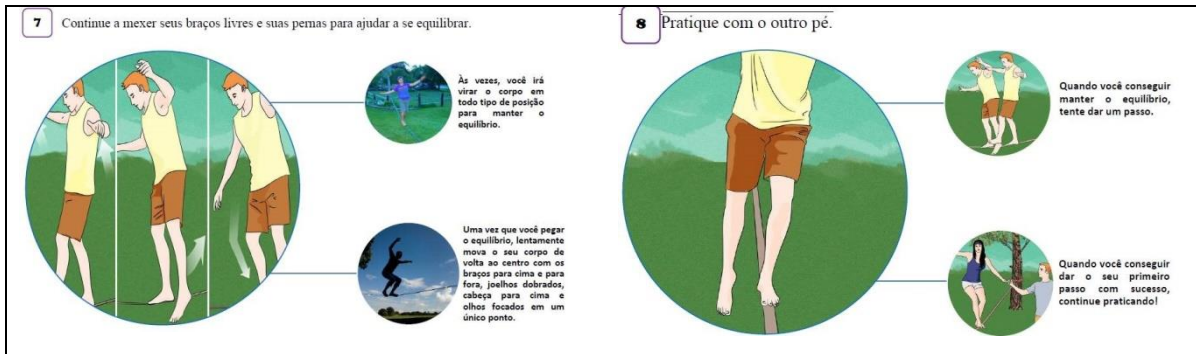
- No meio a fita é mais baixa e mais próxima do chão, além disso a fita estica mais reduzindo a altura da queda.
- Pratique do mesmo lugar toda vez, pois a slackline oscila diferentemente a diferentes distâncias da âncora.
- O balanço é mais rápido e menor perto das âncoras, sendo mais devagar e maior perto do meio.
- Seja de onde você começar, vai balançar bastante. Isso é natural; todo mundo balança na primeira vez.

5 Foque atentamente em um único ponto, como a âncora.

- Respire fundo duas vezes e se estabeleça. Se você estiver relaxado, seu pé trêmerá melhor na fita.
- forçar em um ponto, ajudará você a encontrar e manter seu equilíbrio.

6 Deixe os seus braços bem abertos, levemente dobrados e mantenha uma postura reta.

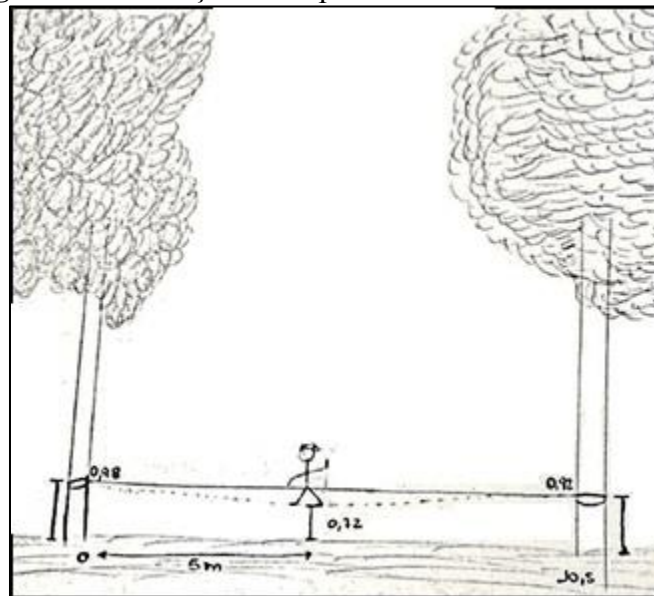
- Centre o seu peso diretamente no pé na fita.
- Equilibre-se com um pé, enquanto usa seus braços e a outra perna para ajudar a manter seu equilíbrio.
- Dobrar a perna abaixo o seu centro de gravidade levemente e permite que você encontre seu equilíbrio mais facilmente e absorva os movimentos da fita.



Fonte: RE_AT7_MM2_G7 – Os alunos informaram que estes passos foram modificados, porém retirados de um website, disponível em: <<http://pt.wikihow.com/FazerSlackline>>.

Os dados coletados e enfatizados pelos alunos do grupo G7 foram: a altura dos pontos de âncora; da fita em relação ao solo – no caso foram utilizadas duas árvores; a distância entre uma árvore e outra; a altura da fita quando em uma distância média entre as árvores; a entrevista feita com os praticantes e disponibilizada para a turma, fotos e vídeos. Estes alunos tiveram acesso aos dados utilizados pelo grupo G6, disponíveis por meio do vídeo inserido no *software tracker*, no entanto não conseguiram utilizar os dados devido a falta de entendimento do software. A fim de sistematizar os dados coletados, os alunos do grupo G7 elaboraram uma figura com as medidas da fita, e altura dela em relação ao solo quando fixada na árvore (Figura 4.51).

Figura 4.51 Esboço de um praticante com massa de 68 kg



Fonte: RE_AT7_MM2_G7

A partir das informações disponíveis os alunos formularam a situação-problema para estudo: *Qual curva demonstra a altura em que praticante se encontra do chão em qualquer distância que o mesmo estiver dos pontos de âncora? Podemos denotar a altura mesmo que as massas dos praticantes se alterem?*

Os questionamentos iniciais deste grupo de alunos diziam respeito à quantidade máxima de massa suportada pela fita de Slackline. Para o desenvolvimento da atividade os alunos tentaram relacionar conceitos da disciplina de EDO, especificamente sobre aplicações de EDOs de segunda ordem em fios de rede elétrica. Nesse sentido, os alunos relacionaram a curva denominada catenária com a curva formada pela fita do Slackline, veja a argumentação dos alunos do grupo G7 sobre o uso deste conceito matemático no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática:

Embora a ideia da catenária tenha sido a inicial, tivemos dúvidas quanto aos dados que devíamos utilizar e dificuldades para compreender a dedução.

Muitos estudiosos confundiram a curva catenária com uma parábola, mas mesmo sabendo disso tentamos ajustar a curva projetada pela fita do slackline por meio de uma função quadrática.

RE_AT7_MM2_G7

Segundo os alunos do grupo G7, a formulação de hipóteses ocorreu por meio de questões e reflexões relacionadas a observação no dia da coleta de dados e também de leituras realizadas para sanar dúvidas sobre a prática do Slackline:

Hipótese 1: Quanto maior a distância entre os pontos de âncora, mais tremula a fita ficará.

Hipótese 2: supondo que uma pessoa de massa igual a 68 quilogramas esteja a 5 metros da posição inicial a altura que ela se encontra do chão é de 0,72 m.

Hipótese 3: O modelo de ajuste quadrático implica em utilizar os dados fornecidos pela *Figura 4.71*, pois a massa utilizada não pode ter variação.

Hipótese 4: um fio flexível, fixos em dois pontos distintos pode ter o comportamento descrito por uma curva catenária.

Hipótese 5: Na literatura a curva catenária é diferenciada da curva quadrática, neste caso a melhor representação na opinião do grupo seria a catenária.

Hipótese 6: uma massa qualquer pode influenciar nos modelos.

A partir da formulação de hipóteses os alunos se dedicaram ao desenvolvimento de três modelos matemáticos que pudessem auxiliá-los na resposta à situação-problema levantada. O primeiro modelo matemático dizia respeito à possibilidade de usar a modelagem matemática para ao ensino de Matemática no Ensino Médio (Figura 4.52):

Pensamos em uma solução que fosse possível no Ensino Médio. O ajuste de uma Função Quadrática utilizando sistema de equações lineares.

RE_AT7_MM2_G7

Figura 4.52 Dedução Modelo 1 dos alunos do grupo G7 – AT7

Temos os dados descritos na Tabela 2:				Utilizando os dados da Tabela 2, consideraram a função polinomial
Tabela 2 – dados				
Distância entre as duas árvores (x)	0	5	10,5	$ax^2 + bx + c = y = P_2(x)$
Altura das duas árvores e um ponto em m (y)	0,98	0,72	0,92	
Fonte: os autores				
Resolução do sistema			Função Ajustada	
$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0,98 & (1) \\ a \cdot (5)^2 + b \cdot 5 + c = 0,72 & (2) \\ a \cdot (10,5)^2 + b \cdot 10,5 + c = 0,92 & (3) \end{cases}$			$P_2(x) = 0,008x^2 - 0,94x + 0,98$	

Fonte: RE_AT7_MM2_G7.

O segundo modelo matemático deduzido pelos alunos do grupo G7 foi obtido como uma forma alternativa de resolução da situação-problema colocada, por meio de uma analogia com questões já estudadas na disciplina de Cálculo Numérico (Figura 4.53).

Figura 4.53 Dedução Modelo 2 dos alunos do grupo G7 – AT7

<p>Método de Interpolação de Lagrange</p> <p><i>Conceito:</i> Publicado por Joseph Louis Lagrange em 1795, neste método o polinômio interpola uma função em um conjunto de pontos distintos (x_i, y_i), $i = 0, 1, \dots, n$ representada na seguinte forma:</p> $P_n(x) = b_0 P_0(x) + b_1 P_1(x) + \dots + b_i P_i(x) + \dots + b_n P_n(x)$	
<p>Utilizando a Tabela 2, temos:</p> <p>$y_0 = 0,98$ $x_0 = 0$ $y_1 = 0,72$ $x_1 = 5$ $y_2 = 0,92$ $x_2 = 10,5$</p>	<p><i>Identificação das Variáveis:</i></p> <p>y_0 e y_2: Altura da fita ancorada nas duas árvores em metros; y_1: Altura da fita em metros, de um ponto com pessoa de massa (68kg); x_0, x_1 e x_2: Distância no solo (equivalente a distância percorrida pelo praticante); $P_2(x)$: Polinômio interpolador de grau dois</p> $P_2(x) = \sum_{i=0}^2 y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ $= y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$ $= 0,98 \cdot \frac{(x - 5)(x - 10,5)}{(0 - 5)(0 - 10,5)} + 0,72 \cdot \frac{(x - 0)(x - 10,5)}{(5 - 0)(5 - 10,5)} + 0,92 \cdot \frac{(x - 0)(x - 5)}{(10,5 - 0)(10,5 - 5)}$ <p><i>Polinômio Interpolador:</i></p> $P_2(x) = 0,008x^2 - 0,94x + 0,98$

Fonte: RE_AT7_MM2_G7.

A fim de utilizar as informações obtidas por meio da os alunos idealizaram uma situação a ser respondida por meio da Matemática estudada:

Supondo que a mesma pessoa (ou de massa igual) esteja a 3 m do ponto inicial da corda, qual será a altura da corda em relação ao chão? Resp. 0,77m ou 77cm

Será possível calcular essa altura da corda em relação ao chão para qualquer pessoa (ou seja, de massas diferentes)?

RE_AT7_MM2_G7.

Neste contexto, abordaram uma possível resolução das questões idealizadas (Figura 4.54).

Figura 4.54 Uso do modelo 2 para interpretar a situação-problema – AT7

Uma possível maneira de calcular:

A massa da pessoa utilizada na equação modelo é de 68 *quilogramas* e lembrando que a corda ficou a 72cm do chão, podemos fazer a razão entre uma outra massa (qualquer pessoa), como por exemplo no dado coletado de uma mulher de massa 57 *quilogramas* e que a corda ficou a 75cm do chão. Assim:

$\frac{68}{57} = 1,2$ e faz a diferença entre as alturas: $|72 - 75| = 3\text{cm}$. Pode ser feita agora uma relação: $\frac{68}{m} = x$ em que $m = \text{massa}$ e $x = \text{razão das massas}$, assim se $x > 1,2$ faz se a soma de 3cm mais o valor de outra relação que será apresentada agora: usando regra de três simples, se

1,2 equivale a 3 cm, quanto valerá a razão da nova massa?

Numericamente:

Supondo uma pessoa de massa 65 quilogramas , faz a razão das massas: $\frac{68}{65} = 1,04$, agora usando a regra de três:

$$\begin{array}{r} 1,2 \text{-----} 3\text{cm} \\ 1,04 \text{-----} y\text{cm} \\ y = 2,6\text{cm} \end{array}$$

Como $1,04 < 1,2$, subtrai esse valor ($2,6\text{cm}$) de 75cm obtendo a altura da corda em relação ao solo de acordo com sua massa que será de ($75\text{cm} - 2,6\text{cm} = 72,4\text{cm}$). Então o modelo para esse cálculo será:

$$(1) \frac{\left[\left(\frac{68}{m}\right) \cdot 3\right]}{1,2} = \text{valor a ser somado ao subtraído de } 75\text{cm};$$

Como dito antes quando $x > 1,2$ faz a soma, quando $x < 1,2$ faz a subtração e $x = 1,2$ soma-se o valor encontrado (da expressão 1) a 72cm .

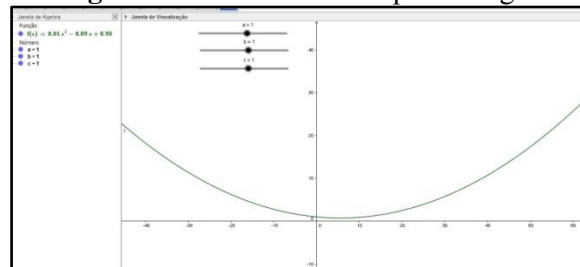
Quando $m > 68$, o cálculo deve ser feito da seguinte maneira: pega a expressão (1) faz a substituição da massa e o valor encontrado subtrai de 3cm e o resultado dessa subtração é ainda subtraída de 72cm .

Tabela 3 – dados em relação as massas

Massa (Kg)	Altura da corda até o chão (cm)
68	72
57	75
65	72,4

O gráfico que representa o polinômio interpolador de Lagrange, pode ser visto pela Imagem 4:

Imagem 4 – Gráfico ofertado pelo Geogebra



Fonte: os autores

Fonte: RE_AT7_MM2_G7.

O terceiro modelo matemático utilizado para possível solução da situação-problema foi utilizado devido à crença dos alunos do grupo G7 de que o modelo matemático associado à curva catenária seria o “mais” adequado para a situação-problema:

Mesmo encontrando outros tipos de curvas para solucionar a situação-problema, acreditamos que a catenária corresponde melhor ao que está sendo estudado “uma característica da catenária é que uma força aplicada em um ponto qualquer da curva é dividida igualmente por todo o material, isto é, é distribuída uniformemente ao longo da curva” (TEIXEIRA, 2012, p. 79).

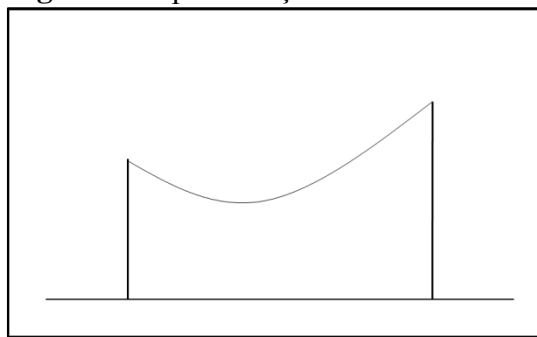
RE_AT7_MM2_G7.

Os alunos justificam sua argumentação por meio de recorrência à literatura com vistas à sustentar a representatividade do conceito matemático para responder a situação-problema (Figura 4.55).

Figura 4.55 Justificativa e argumentação para o uso do Modelo 3 – AT7

Catenária (do latim *catena*, corrente) como uma curva que descreve o aspecto de um cabo suspenso por suas extremidades submetido apenas à força da gravidade (FARIA, 2011), como mostra a Imagem 5:

Imagem 5: Representação da curva catenária.



Fonte: Os autores.

Neves (2013) contribui dizendo que:

[...] o nome catenária provém da palavra “cadeia”, porque a curva que descreve uma cadeia fixa pelas suas duas extremidades e que não se encontra submetida a outras forças diferentes do seu próprio peso forma esta curva. Trata-se da curvatura que adota qualquer objeto flexível preso pelas extremidades, submetido à força da gravidade (NEVES, 2013, p. 14).

Em estudos feitos nas literaturas, em uma delas, TALAVERA (2008) relata em sua

tese que Huygens, em 1646, com apenas dezessete anos de idade, provou que a corrente suspensa não poderia adquirir a forma de uma parábola sem chegar a definir qual seria essa nova curva. Com essa informação percebe-se que parábola e catenária diferem em vários pontos, a começar pela equação e depois pelo comportamento gráfico. Neves (2013), quanto a à diferença da parábola e a catenária, relata que a catenária e sua curva pode ser caracterizada pela seguinte propriedade: o comprimento do arco contado a partir do ponto mais baixo é proporcional à tangente trigonométrica do ângulo que a tangente à curva na outra extremidade do arco faz com a horizontal.

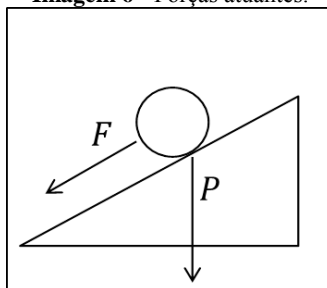
Fonte: RE_AT7_MM2_G7.

Com base nessas considerações os alunos do grupo G7 evidenciaram a dedução da equação que descreve a catenária. Os mesmos relataram dificuldades no entendimento das deduções apresentadas em livros texto e buscaram auxílio com a professora, em artigos e vídeos disponíveis *on line* (Figura 4.56).

Figura 4.56 Dedução do Modelo 3, grupo G7 – AT7

Lembrando-se das forças - Figura 6:

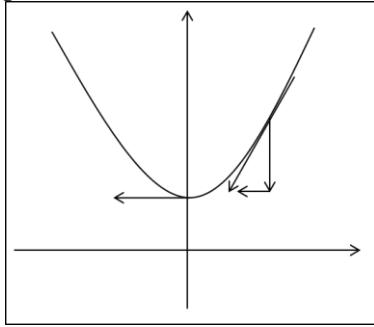
Imagem 6 - Forças atuantes.



Fonte: Os autores

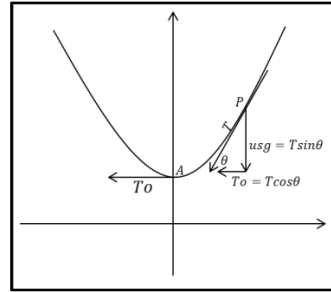
Logo as forças atuantes são: $F = m * a$ e $P = m * g$ em que $F = \text{força}$, $P = \text{força peso}$, $m = \text{massa}$, $a = \text{aceleração}$ e $g = \text{gravidade}$. Essas forças são necessárias para a compreensão da dedução da curva da catenária. Na Imagem 7 temos os vetores de força que atuam na curva da catenária. Na imagem 8 serão dados os nomes dos pontos, dos vetores, e a tração existente.

Imagem 7: Vetores atuantes na curva catenária.



Fonte: Os autores

Imagem 8: Vetores e forças com seus respectivos nomes.



Fonte: Os autores.

Da Figura 8 tem-se então:

- *Peso da secção AP = usg;*
- *u = massa por unidade de comprimento;*
- *s = comprimento do arco AP;*
- *g = gravidade;*
- *T = tração*
- *T₀ = T · cosθ*
- *usg = T sinθ*

Assim as duas equações que serão utilizadas para a dedução:

$$(1) usg = T \sin \theta \quad \text{e} \quad (2) T \cos \theta = \frac{usg}{\tan \theta}$$

Lembrando que T_0 sempre será a mesma em cada ponto da catenária devido ao fato das forças externas agirem na mesma massa gravitacional que é vertical, desta forma é introduzido a constante $a = \frac{T_0}{ug}$, assim a equação (1) e (2) ficam:

- Vetor T, $T = ug\sqrt{s^2 + a^2}$; e $s = a \cdot \tan \theta \rightarrow$ equação intrínseca da catenária;
Tem-se ainda que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{s}{a};$$

em que $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}$, $(x, y) \rightarrow$ expresso por coordenadas retangular, faz a derivada segunda de dy em relação a x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx} \quad (3);$$

e sabendo que a diferença de comprimento dos arcos " ds " pode ser expresso como uma relação pitagórica $ds = dx\sqrt{1 + (y')^2}$ faz-se a substituição em (3):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx\sqrt{1 + (y')^2}}{adx}$$

separando e simplificando as variáveis tem-se:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{dx}{ax}$$

integrando ambos os lados:

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \int \frac{dx}{ax};$$

$$\sinh^{-1}(y') = \frac{x}{a};$$

$$(y') = \frac{x}{a} \cdot \sinh;$$

Que torna:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \text{ e } dy = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx;$$

integrando novamente ambos os lados:

$$\int dy = \int \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx;$$

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c;$$

e para determinar o menor ponto da catenária "a" acima da origem, adota-se $c = 0$, logo a equação que descreve a curva da catenária é:

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Fonte: RE_AT7_MM2_G7.

Os alunos C1, C2, C3, C5 e B4 integrantes do grupo G8 tinham, inicialmente a ideia de estudar as forças atuantes durante a prática de Slackline. Para sustentar as informações apresentadas e a atividade de modelagem matemática desenvolvida, os integrantes deste grupo sistematizaram algumas informações sobre: Modelagem Matemática na Educação Matemática, sobre o Slackline, e detalharam a atividade desenvolvida. A situação-problema foi delineada pelo grupo G8 a partir de conversas sobre o dia em que os alunos praticaram o esporte:

Após a coleta de dados cada grupo se reuniu buscando possíveis temas para abordar acerca do esporte praticado, nesta fase a prática do Slackline pelos componentes do grupo fez muita diferença, já que as considerações que iam sendo feitas baseavam-se na experiência que haviam vivenciado. Uma das observações rendeu o problema aqui estudado, esta era que em determinados pontos da fita era mais fácil manter o equilíbrio, ou seja, quando iniciava a prática, normalmente por uma das extremidades, à medida que se seguia para o meio da fita manter o equilíbrio ficava mais difícil, e após passar o meio da fita voltava a tornava-se mais fácil equilibrar-se.

RE_AT7_MM2_G8.

A partir desta observação foi definida a situação-problema: *Supondo que uma pessoa está de pé estática em cima da fita do Slackline quais forças estão atuando na prática neste momento?*

Para resolver essa situação algumas hipóteses foram consideradas pelos alunos do grupo:

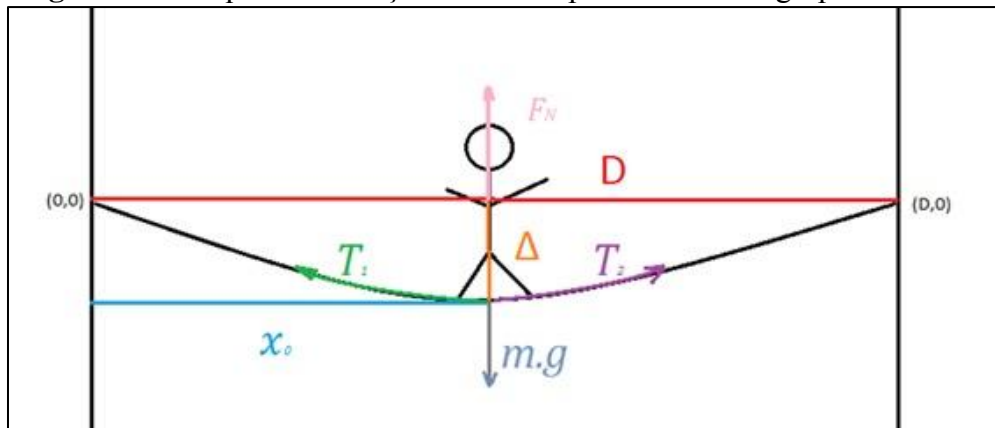
Hipótese 1: O praticante está estático em um certo ponto, é considerado como uma carga estática;

Hipótese 2: A massa do praticante é de 65kg;

Hipótese 3: A distância entre uma ancora e outra é de 15m.

Com base nas hipóteses, um esquema de forças foi construído para auxiliar no desenvolvimento da atividade (Figura 4.57).

Figura 4.57 Esquema de forças elaborado pelos alunos do grupo G8 – AT7



Fonte: RE_AT7_MM2_G8.

Para o estudo foram definidas:

F_N : força normal;

m : massa do sujeito;

g : aceleração da gravidade;

$m.g$: força peso;

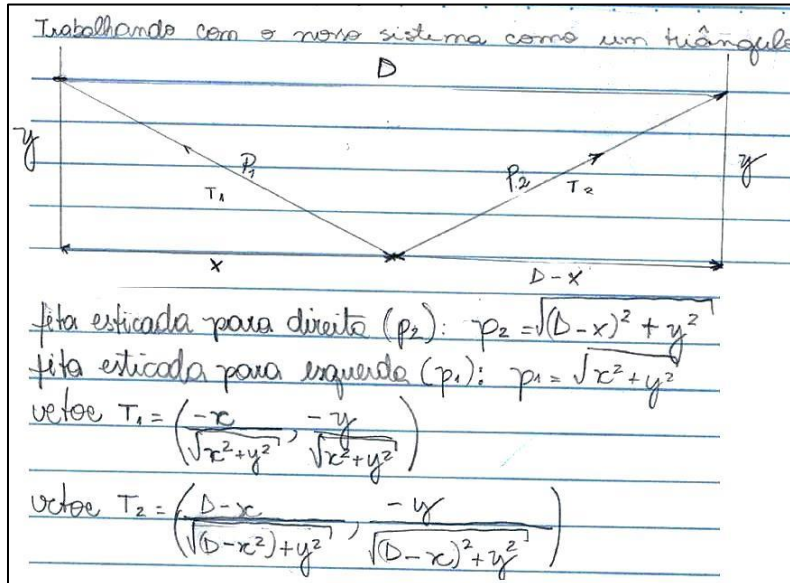
D : distância entre as duas âncoras;

T_1 e T_2 : tensões nas âncoras da direita e da esquerda;

x_0 : ponto em que o praticante está em relação a âncora da esquerda.

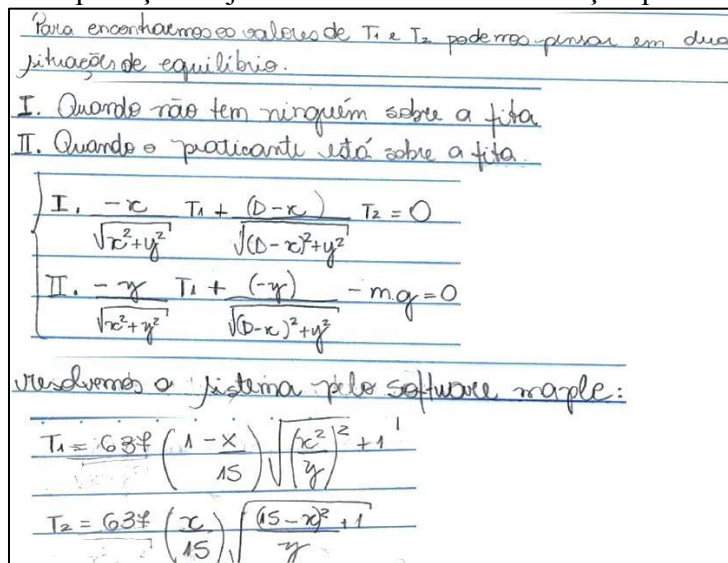
Foi com base no esquema da Figura 4.57 que os alunos interpretaram matematicamente as condições do sujeito que “se equilibra” sobre a fita de Slackline (Figura 4.58, Figura 4.59).

Figura 4.58 Dedução do modelo matemático, grupo G8



Fonte: RE_AT7_MM2_G8.

Figura 4.59 Interpretação e ajuste do modelo com a situação-problema, grupo G8



Fonte: RE_AT7_MM2_G8.

A dedução formal das forças foi feita por meio dos registros da Figura 4.60.

Figura 4.60 Dedução das forças atuantes sobre o corpo, grup G8 – AT7

Dados F_N é a força normal, $m \cdot g$ é a força peso T_1 e T_2 as tensões no determinado ponto D a distância entre as duas ancoras e x_0 o ponto em que o praticante esta em relação a âncora da esquerda. A partir do esquema foi definido que trabalharíamos com o conteúdo físico de equilíbrio estático em tração em cordas aplicados a vetores, desta forma encontramos o seguinte sistema, em que y é a distância do ponto em que o praticante se encontra da âncora da direita:

$$\begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} T_1 + \frac{D - x}{\sqrt{(D - x)^2 - y^2}} T_2 = 0 \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} T_1 - \frac{y}{\sqrt{(D - x)^2 - y^2}} T_2 - mg = 0 \end{cases}$$

Substituindo os valores encontrados temos que:

$$\begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} T_1 + \frac{15 - x}{\sqrt{(15 - x)^2 - y^2}} T_2 = 0 \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} T_1 - \frac{y}{\sqrt{(15 - x)^2 - y^2}} T_2 - 637 = 0 \end{cases}$$

Após a resolução do sistema encontramos os modelos para as forças de tração como:

$$T_1 = 637 \left(1 - \frac{x}{15}\right) \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$$
$$T_2 = 637 \left(\frac{x}{15}\right) \sqrt{\frac{(15 - x)^2}{y} + 1}$$

Após a obtenção dos modelos de força, buscamos nos dados coletados, vídeos e fotos que foram tirados no dia da coleta de dados. Buscamos o auxílio de softwares para encontrar valores que correspondessem a esta força, mas devido falta de domínio dos integrantes do grupo no manuseio das mídias tecnológicas não foi possível solucionar as dúvidas com esses recursos. Os integrantes deste trabalho estão buscando na literatura formas de validar o modelo, espera-se que encontre uma forma para que isto ocorra.

Fonte: RE_AT7_MM2_G8.

Esforços foram empreendidos pelos integrantes do grupo para compreender e deduzir tais forças, no entanto os alunos do grupo G7 não obtiveram êxito na validação das informações obtidas por meio dos procedimentos matemáticos.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 8: PÊNDULO

A atividade 8 foi desenvolvida pelo grupo G5, composto pelos alunos B1, B2, B3, B4 e A4, desde a escolha do tema até a resposta à situação-problema definida pelos alunos. Os alunos iniciaram a atividade no segundo semestre de 2015, na disciplina de EDO, mas não conseguiram concluí-la e adequá-la aos ajustes solicitados pela professora. Desse modo, a atividade foi finalizada no primeiro semestre de 2016 na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática. A atividade foi apresentada para a turma em forma de seminário e um trabalho escrito contendo o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática foi entregue pelos alunos. No primeiro semestre estes alunos já haviam se engajado no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Os alunos B1, B2, B3 e B4 desenvolveram a atividade 4 descrita neste texto e o aluno A4 participou do desenvolvimento da atividade 3, também descrita neste texto.

Os alunos desenvolveram a atividade de modelagem matemática sobre a oscilação de um pêndulo devido a acreditarem possuir os pré-requisitos para o trabalho com os conceitos matemáticos associados a essa situação. De acordo com os alunos a definição do assunto a ser tratado na atividade foi influenciada pelo conhecimento de EDO disponível até o início da atividade de modelagem matemática:

A princípio queríamos trabalhar com o movimento harmônico amortecido, no entanto por se chegar a uma EDO não linear, mudamos de ideia, uma vez que não tivemos contato com as técnicas de resolução de equações deste tipo. Estávamos procurando situações diferentes, mas que pudéssemos relacionar com o problema massa/mola que já foi bem apresentado em sala de aula ou que ele servisse pelo menos como um ponto de partida. A partir disso, resolvemos trabalhar com a EDO do movimento de oscilação de um pêndulo simples, acreditando que já temos pré-requisitos suficientes para fazê-lo.

RE_AT8_MM3_G5.

Para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática os alunos focaram no pêndulo do sino da igreja matriz da cidade de Santa Mariana, no norte pioneiro do estado do Paraná. A coleta de dados foi feita a partir de uma visita ao local e por meio de uma pesquisa sobre o pêndulo simples. Inicialmente os alunos se interessaram pela questão: *“Supondo que a massa do pêndulo que se localiza na cidade de Santa Mariana, seja*

aumentado para pequenas oscilações, o período do pêndulo aumentará, diminuirá ou permanecerá constante?”.

Na entrega da atividade de modelagem matemática, os alunos introduziram o assunto se baseando em conceitos associados às EDOs de segunda ordem, trouxeram informações sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, sobre o uso de modelagem matemática na disciplina de EDO, a história e a composição de um sino, informações sobre a cidade de Santa Mariana e a igreja matriz, algumas ideias de outros problemas que poderiam ser relacionados ao estudo de pêndulos, como relógios de pêndulo. A busca de informações, coleta de dados, definição de uma problemática para o estudo e o desenvolvimento da modelagem matemática constam na Figura 4.61.

Figura 4.61 Informações Iniciais AT8, grupo G5

BUSCA DE INFORMAÇÕES

O tema escolhido como se pode perceber no corpo do trabalho foi o movimento de um pêndulo simples, mas houve também as sondagens de outros temas, como o amortecimento da bicicleta, a corda girando, a mola do isqueiro, os circuitos elétricos entre outros. O movimento de um pêndulo simples foi escolhido, por ser algo que seria bem interessante e com facilidade de coleta de dados, pois tínhamos contato, com o sino e o relógio de uma igreja, que possuem os pêndulos.

O presente trabalho foi realizado em uma igreja da Cidade de Santa Mariana Paraná. Nesta cidade procuramos o responsável por cuidar do sino e do relógio, para que nos ajudasse e autorizasse a coleta de dados, o responsável por sua vez, nos aconselhou a procurar pelo padre para que o mesmo autorizasse nossa visita. Fomos muito bem recepcionados pelo padre, que nos autorizou a visita bem como solicitou ao sacristão que nos auxiliasse. Esse contato foi feito de maneira pessoal, com conversas e explicações do por que da procura.

Durante a visita, fomos acompanhados pelo sacristão a pedido do padre, que nos auxiliou bastante nas explicações, e nas informações concedidas por ele, informações essas que foram de grande valia na elaboração do trabalho.

Veja algumas fotos da visita:

Imagem 10: Igreja Matriz



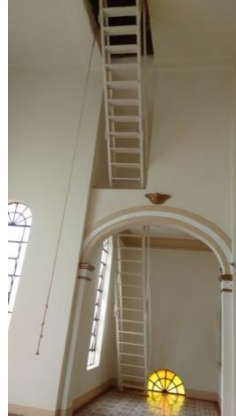
Fonte: Os autores

Imagem 11: Interior



Fonte: Os autores

Imagem 12: Escada de acesso



Fonte: os autores

Imagem 13: Sino



Fonte: os autores

Imagem 14: Engrenagens do relógio



Fonte: os autores

Imagem 15: Vista lateral do relógio



Fonte: os autores

COLETA DE DADOS

A fim de estudar como a massa do pêndulo que se localiza no sino da igreja de Santa Mariana, fomos na atual Igreja para tirarmos os dados do sino e do pêndulo. Durante a visita foi nos explicado que o sino da igreja juntamente com seu relógio, foi doado pela colônia japonesa no ano de 1949, mais precisamente datado no dia 30 de maio de 1949.

Na sequência com o auxílio de uma fita métrica e a ajuda do sacristão tiramos as medidas. O peso em si não conseguimos dados suficientes, as medidas do sino temos Diâmetro (bocal do sino): 56,5 cm, o Comprimento (altura) possuía 57 cm, medindo a circunferência do sino tínhamos Circunferência(bocal do sino): 1,81 cm e Circunferência (meio do sino) :106 cm e a medida da ponta é 97 cm. Por fim o pêndulo possui no total aproximadamente 55 cm.

O PROBLEMA A INVESTIGAR

Na tentativa de elaborar um problema que pudesse ser relacionado com modelos já conhecidos, os proponentes da atividade se questionaram a respeito das equações diferenciais na forma $ay'' + by' + cy = f(t)$ em que a , b e c são constantes, y é uma função

real e y'' e y' são suas diferenciais. Alguns problemas podem se resolvido por meio deste modelo, desde que se tenham condições iniciais que deem indícios para a formulação de um problema de valor inicial (PVI), com $y(0) = y_0$ e $y'(0) = [y']_0$.

Ao lembrar da importância do valor da massa no modelo que descreve o movimento de uma mola, levantamos a hipótese se tal variável seria tão importante quanto, no modelo que descreve o movimento de oscilação de um pêndulo simples.

Dito isso a primeira ideia consistiu em responder o seguinte questionamento: *Supondo que a massa do pêndulo que se localiza no sino da igreja de Santa Mariana seja aumentada para pequenas oscilações, o período do pêndulo aumentará, diminuirá ou permanecerá constante?*

Fonte: RE_AT8_MM3_G5.

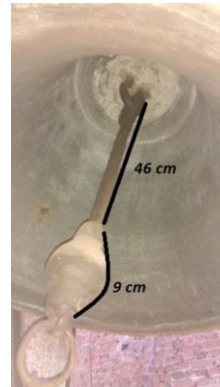
De posse destes dados e utilizando fotos tiradas no local, os alunos elaboraram os esquemas da Figura 4.62 e da Figura 4.63.

Figura 4.62 Informações do Sino



Fonte: RE_AT8_MM3_G5.

Figura 4.63 Dados coletados do pêndulo



Fonte: RE_AT8_MM3_G5.

Para o estudo foram definidos:

g = aceleração da gravidade (m/s^2)

L = comprimento (cm)

m = massa (kg)

Sendo as variáveis:

θ = ângulo formado entre a parede do sino e o pêndulo

x = deslocamento horizontal

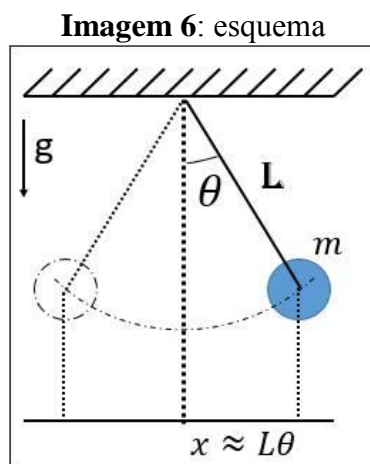
t = tempo (s)

Hipótese 1: o estudo será restrito a movimentos de pequenas amplitudes, assim, será admitido que o valor máximo para θ será de aproximadamente 20° .

A dedução do modelo matemático foi feita considerando indicações da literatura sobre equações diferenciais ordinárias no que diz respeito a problemas associados à oscilação de pêndulos simples (Figura 4.64).

Figura 4.64 Resolução da atividade 8 pelo grupo G5

A Imagem 6 contempla um esquema que apresenta o movimento de oscilação de um pêndulo simples:



Fonte: os autores.

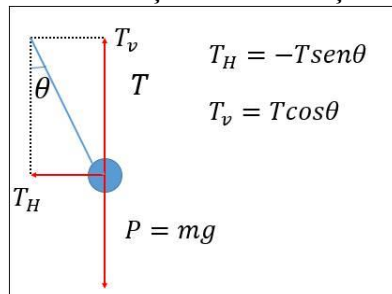
Neste contexto, serão considerados os valores aproximados para Seno 20° : 0,34202; Cosseno 20° : 0,93969; Tangente 20° : 0,36397.

Na dedução do modelo matemático é importante observar que o fenômeno está sujeito à ação do campo gravitacional. Quando o pêndulo se movimenta, este ocorre sobre um arco de circunferência, que pode ser aproximado por um movimento simplesmente na horizontal, sendo que o novo comprimento é igual ao comprimento do arco dado.

Na figura 6, é possível perceber que x representa o deslocamento em determinado instante de tempo t , podendo ser calculado como aproximadamente o comprimento L multiplicado pela angulação θ .

Por meio de regras matemáticas associadas à trigonometria é possível analisar e fazer um balanço das forças que atuam sobre a massa do pêndulo m (Imagem 7).

Imagem 7: Balanço entre as forças atuantes



Fonte: os autores

Na Imagem 7 T_v : representa a componente vertical e T_h : representa a componente horizontal. As linhas vermelhas do esquema representam as forças atuantes sobre a massa

m , sendo que a superior se trata da força de tração exercida pela corda e a inferior representa a força peso (P) que pode ser descrita pela equação $P = m \cdot g$.

Analisando os componentes é possível observar que a componente horizontal T tem o sinal negativo por apontar em sentido contrário ao eixo x .

Consideramos relevante que cosseno de θ é aproximadamente 1, assim, $T \cdot 1 = T$, ou seja, a própria tração. Como dito anteriormente, o movimento de oscilação na situação de pequenas amplitudes ocorre apenas na horizontal (aproximadamente), assim, pode-se dizer que o somatório das forças na componente vertical é igual a 0. Logo, em situação de equilíbrio vertical $T = m \cdot g$.

Por outro lado, na componente horizontal as forças não estão em equilíbrio, uma vez que o movimento ocorre de forma acelerada, visto que o pêndulo desloca-se neste sentido. Aqui faz-se o uso da segunda lei de Newton em que a força atuante pode ser dada pela massa multiplicada pelo valor da aceleração.

$$F_h = m \cdot a$$

Como observado na componente horizontal a única força que atua é a própria componente horizontal. Assim:

$$F_h = -T \cdot \theta$$

Quando θ máximo for menor que 20° , pode-se aproximar seno de θ pelo próprio θ em radianos. Valendo também do equilíbrio de forças na vertical, pode-se substituir T por $m \cdot g$:

$$F_h = -m \cdot g \cdot \theta$$

Por outro lado, esta força é igual à massa multiplicada pela aceleração a :

$$F_h = -m \cdot g \cdot \theta = m \cdot a$$

É sabido das aulas de Equações Diferenciais Ordinárias, que a aceleração pode ser representada pela derivada primeira da função velocidade (v) e pela derivada segunda da função posição (x): $a = v' = x''$. Como $x = L \cdot \theta$, pode-se dizer que $x'' = L \cdot \theta''$. Reescrevendo a equação tem-se:

$$-m \cdot g \cdot \theta = m \cdot L \cdot \theta''$$

$$-g \cdot \theta = L \cdot \theta''$$

$$L \cdot \theta'' + g \cdot \theta = 0$$

$$\theta'' + \frac{g}{L} \cdot \theta = 0$$

A última equação estabelece uma oscilação do pêndulo como sendo um movimento harmônico simples e, deste fato é possível determinar o período da oscilação (T).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Desse modo, mesmo que seja aumentado o valor da massa do pêndulo que se localiza no sino da igreja de Santa Mariana (para pequenas oscilações) o período de oscilação do pêndulo permanecerá constante. Utilizando os dados coletados na Igreja de Santa Mariana, com o pêndulo de aproximadamente 55 cm, ou seja, 0,55 metros e utilizando $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, obtemos o período de oscilação como aproximadamente 1,49 s.

A partir do desenvolvimento da resolução exposta na Figura 4.64 a professora sugeriu que os alunos do grupo G5 estudassem o comportamento de uma torre sineira e os diversos usos dos sinos, entre eles, a música. No entanto, os alunos sinalizaram que para trabalhar com essa temática seria necessária uma nova coleta de dados para captar a frequência que o sino emite o som e isso demandaria o uso de conceitos matemáticos para além dos utilizados na atividade já desenvolvida.

Os alunos apresentaram considerações sobre a atividade de modelagem matemática desenvolvida e os objetivos educacionais citados nos documentos oficiais que norteiam a educação. Por meio da referência a Brasil (1997) e Paraná (2008), os alunos do grupo G5 sinalizaram a importância de formar cidadãos críticos, capazes de lidar com situações práticas da realidade. A atividade de modelagem matemática foi vista pelos alunos como uma forma de trabalhar com situações práticas as quais sentem a necessidade de responder algum questionamento por meio da Matemática. Os alunos informaram que:

No decorrer da atividade, hipóteses foram levantadas, relacionadas à influência da massa do sino no estudo do pêndulo, sobre o ângulo formado e a amplitude a ser considerada para o desenvolvimento do modelo matemático, na análise das forças atuantes sobre o fenômeno. Essas hipóteses foram organizadas e aprimoradas no desenvolvimento da atividade a fim de responder da melhor forma a inquietação inicial do grupo. Um ponto importante a ser destacado é a utilização de situações reais neste tipo de atividade, gerando um interesse maior por parte dos educandos, o que tira a visão descontextualizada do ensino de matemática, e neste caso a reprodução mecânica de técnicas e procedimentos são descartados, pois os procedimentos de resolução são escolhidos pelos educandos e não ditados pelo professor.

RE_AT8_MM3_G5.

Ainda nas considerações finais da atividade 8, os alunos teceram considerações sobre a atividade de modelagem matemática e indicações da literatura sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática.

É válido ressaltar também a importância da introdução gradativa de atividades de modelagem matemática de acordo com Almeida e Dias (2004) e Almeida, Silva e Vertuan (2012). Tais momentos foram importantes para a formação inicial dos dois primeiros autores deste artigo, tanto no que refere aos conteúdos específicos da disciplina, quanto no modo de ensinar Matemática na futura ação docente, pois se entende que o modo como os professores são formados, reflete no modo como irão ensinar.

- A atividade desenvolvida e relatada no presente artigo se insere no terceiro momento, que permite autonomia dos alunos envolvidos em atividades de modelagem matemática, desde a escolha do tema, elaboração de um problema até a validação dos resultados.
- Após o desenvolvimento da atividade foi possível identificar a participação dos modeladores nas fases associadas à atividades de modelagem matemática de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012).
- Inicialmente o grupo escolheu um tema e buscou inteirar-se dele, o que foi seguido pela formulação de um problema a ser investigado, e pela fase de matematização, ou seja, a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática.
- Variáveis e hipóteses foram formuladas com vistas ao desenvolvimento da equação do pêndulo simples, bem como a uma expressão que denotasse o período de oscilação do pêndulo da Igreja de Santa Mariana. Neste contexto, ocorreu a fase de resolução.
- A interpretação dos resultados e a resposta para o problema conduziu os alunos do grupo a outro estudo associado ao sino da igreja, pensando na finalidade do sino e em como a atividade de Modelagem Matemática poderia ser enriquecida.
- A aprendizagem sobre Equações Diferenciais de Segunda Ordem foi para além da disciplina, visto que a visão sobre o conteúdo matemático e sobre a Modelagem Matemática continuou no ano de 2016 na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática.

RE_AT8_MM3_G5.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 10: PRINCÍPIO BÁSICO DO AMORTECEDOR AUTOMOTIVO

Essa atividade de modelagem matemática foi desenvolvida pelos alunos A1, A2 e A3 na formação do grupo G4 no segundo semestre de 2015 na disciplina de EDO. A atividade foi de responsabilidade dos alunos, desde a escolha do tema até a resposta à situação-problema por eles definida. A atividade foi apresentada para a turma em forma de seminário e um trabalho escrito contendo o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática foi entregue pelos alunos.

Inicialmente, os alunos tinham por objetivo estudar o movimento de uma mola, por meio da construção de um carrinho com molas desprezando o amortecedor. Os alunos construíram um carrinho com molas, de modo a coletar dados para encontrar um modelo matemático que descrevesse o movimento da mola. Inicialmente, o objetivo dos alunos era, por meio do protótipo, simular o movimento massa-mola de um automóvel. No entanto, após diversas reuniões, pesquisas e coleta de dados os alunos tiveram que alterar os planos, pois ao utilizar os dados do protótipo era necessário formular muitas suposições, chegando a modelos matemáticos inconclusivos, principalmente devido à falta de dados. Em um

segundo momento, os alunos a partir de indicações da professora decidiram buscar dados reais em uma oficina mecânica, cujos donos praticam o esporte *off-road*²⁵. No esporte em questão, os carros são denominados de *gaiolas cross*, e, muitas vezes, os próprios praticantes constroem seus carros.

A atividade de modelagem matemática, iniciada no segundo semestre de 2015 e finalizada no primeiro semestre de 2016, foi entregue com informações sobre sistemas massa-mola, princípios básicos de amortecedores automotivos, estudo de molas, informações sobre a construção do carrinho, coleta de dados da *gaiola cross*, formulação de hipóteses e simplificações, três modelos matemáticos, interpretação e validação dos dados e considerações finais (Figura 4.65). Na é possível fazer uma incursão na temática escolhida pelos alunos.

Figura 4.65 Informações sobre a temática da atividade 10, grupo G4

Estudo das molas

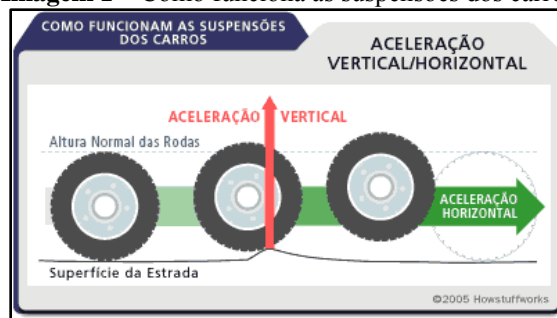
Se as estradas fossem perfeitamente planas, as suspensões não seriam imprescindíveis. Porém, as estradas possuem desníveis e, mesmo que estes sejam muito pequenos fez-se necessário criar um processo de amortecimento para fornecer estabilidade na direção e garantir um maior conforto aos passageiros.

As imperfeições nas estradas podem provocar interações entre as rodas e o solo, tornando-se responsáveis por transmitir forças às rodas. Se for analisar matematicamente, podemos usar as leis de deslocamento de Newton, já que

“[...] todas as forças possuem tanto magnitude como direção. Uma ondulação no solo faz com que a roda se mova para cima e para baixo, perpendicularmente à superfície. A magnitude depende de a roda atingir uma grande ondulação ou uma partícula minúscula. Em ambos, os casos ela sofre uma aceleração vertical quando passa sobre a imperfeição.” (HARRIS, 2014)

Em uma certa velocidade, quando a roda passa por uma ondulação na estrada, sua trajetória é modificada como pode ser vista na Imagem 1.

Imagem 1 – Como funciona as suspensões dos carros



Fonte: Harris (2014)

²⁵ *Off Road* é um termo utilizado para modalidades de esporte que são realizados em estradas não pavimentadas.

Se não houvesse uma estrutura que intervisse sobre esse tipo de movimentação, haveria uma transmissão de toda energia vertical das rodas para o chassi, o mesmo se movimentaria na mesma direção. Então é preciso um sistema que absorva toda essa energia transmitida do solo para as rodas verticalmente, para que o chassi e o corpo do carro permaneçam inalterados mesmo que a roda sofra ondulações do solo.

Um sistema de suspensão de um carro é parte do chassi, o mesmo é composto por outros sistemas localizados na parte inferior no carro. Três componentes são fundamentais em qualquer suspensão: molas, amortecedores e barras estabilizadoras.

[...]

A CONSTRUÇÃO DO CARRINHO

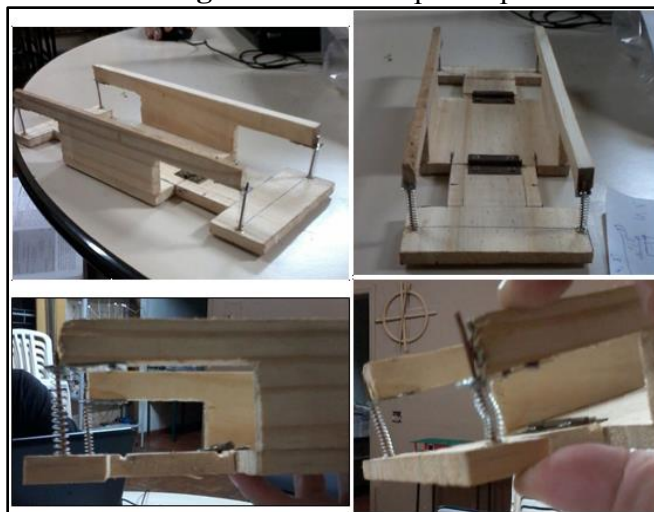
Para compor o trabalho, foi construído um protótipo (carrinho) de madeira, de modo que foi utilizado os seguintes materiais:

Tabela 2 – Materiais utilizados na construção do carrinho

Materiais	Medidas
Tábua de madeira	1,2 cm de espessura 38,8 cm de comprimento 18,8 cm de largura
Pregos	10x10
Dobradiças	Número 1
Parafusos	16 unidades
Cianoacrilato (Super Cola)	1 unidade
Araldite (cola)	1 unidade
Folha de zinco	4 pedaços pequenos
Mola (retirada de chaves teste)	4,2 cm de comprimento

Usando como exemplo plantas de carros retiradas da Internet, um primeiro modelo foi construído e este pode ser observado na Imagem 6:

Imagem 6: Primeiro protótipo



Fonte: Os autores.

No primeiro protótipo houve falha para movimentar a mola, então construímos o segundo protótipo, no qual o sistema de molas foi inspirado em carros de rally de pequeno porte Imagem 7.

Imagem 7: Segundo protótipo



Fonte: Os autores.

O carro que mais se aproxima deste protótipo são Gaiola *Cross* ou também os chamados *Buggys de rally*, como podemos observar nas Imagens 8 e 9.

Imagem 8 – Gaiola *Cross*



Fonte: os autores

Imagem 9 – *Buggys de rally*



Fonte: Queensland²⁶

Na construção de uma gaiola *Cross*, o chassi do Fusca é utilizado para montar o carro *off-road*, é cortado o chassi do fusca para diminuir o tamanho do veículo.

COLETA DE DADOS DA GAIOLA *CROSS*

A coleta de dados foi necessária pois com somente o protótipo os dados não foram suficientes para obter um modelo completo (pode ser visto na seção 5.1). Com isso fizemos uma nova coleta de dados em uma gaiola *cross*. A coleta de dados foi realizada no dia 10/09/16 em uma oficina na cidade de Bandeirantes, Paraná. No local haviam três gaiolas *cross*. As informações coletadas foram de um modelo com suspensões dianteiras em fita de

²⁶ Disponível em <<http://www.offroadrush.com.au/>>. Acesso 15 nov. 2015

aço, considerada mais antiga e original do modelo Fusca, carcaça utilizada para montar a gaiola. Na suspensão traseira a gaiola dispõe de molas utilizadas em um modelo do carro Gol da marca Volkswagen, nesta suspensão o sistema de amortecimento utilizado é chamado de independente. Após coletarmos os dados registramos por meio de fotos o carro e montamos as medidas nas próprias fotos como pode ser observado nas Figuras 10, 11 e 12.

Imagem 10: Coleta de dados da gaiola cross



Fonte: os autores



Imagem 11: Medidas da mola



Fonte: os autores



Imagem 12: medias da Gaiola cross



Fonte: os autores



Em nosso protótipo construímos o sistema de amortecimento utilizando a suspensão independente em ambos os lados (dianteiro e traseiro). Inicialmente havíamos achado que a construção tinha sido projetada de forma equivocada, porém o mecânico entrevistado Humberto, relatou que o sistema do protótipo é o melhor sistema de suspensão. Com os sistemas de suspensão independentes, o movimento torna-se mais “macio” suavizando o

contato em locais com mais imperfeições no solo. Este tipo de suspensão será feito na gaiola que coletamos os dados. Os mecânicos que, praticam o esporte, constroem suas gaiolas com chassis de Fuscas ou Brasília, sendo primeiro mais utilizados.

Quando começaram a praticar o esporte, cerca de quatro anos atrás, os mecânicos compraram um Fusca e começaram a cortar o chassi, até que decidiram deixar somente as ferragens, caracterizando uma gaiola. Em média é gasto de dois a três mil reais para modificar os carros transformando-os em gaiola *cross*. As gaiolas têm massa aproximadamente de 600 quilogramas, utilizam um motor AP ou motor de Fusca refrigerado a ar, sendo mais adotado a segunda opção, pois há menos manutenção. O tanque tem volume para armazenamento de 22 litros de combustível.

A mola original possui tamanho de 31 cm (10 voltas), sendo necessário cortá-la para encaixar na gaiola *cross*, obtendo um novo tamanho de 20 cm (7 voltas). A espessura da mola é de 1,02 cm e a distância entre uma volta e outra da mola é de 2,28 cm, com a massa do carro essa distância vai para 2,07 cm os dados foram utilizados nos modelos II e III, fazendo as devidas transformações de grandezas.

Fonte: RE_AT10_MM3_G4.

Antes de definir um problema para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática os alunos definiram variáveis e formularam diferentes hipóteses.

Foram definidas:

F : força total

L : deslocamento da mola

F_{ext} : força externa

u : espaço percorrido pela mola

F_m : força da mola

t : tempo

F_{res} : força de resistência ou amortecimento

m : massa da mola

p : força peso

v : velocidade

a : aceleração

k : constante de proporcionalidade

s : comprimento da mola

As hipóteses foram formuladas a partir da análise do protótipo de carrinho construído e dos dados da gaiola *cross* coletados durante entrevista com proprietário de um carrinho e praticante do esporte:

Hipótese 1 (H1): A massa do carro deve ser dividida nas quatro rodas (molas), ou seja, cada roda recebe 1/4 de massa;

Hipótese 2 (H2): As suspensões são iguais (dianteira e traseira);

Hipótese 3 (H3): Com a massa do carro sobre os amortecedores a mola se encontra em equilíbrio;

Hipótese 4 (H4): O encolhimento da mola é proporcional à massa que é colocada dentro do carro;

Hipótese 5 (H5): A Lei de Hooke ($F_m = k.L$) está presente e é negativa por estar contra o movimento;

Hipótese 6 (H6): Sabendo que a mola está em equilíbrio com a massa do carro, e conhecendo os valores da massa do carro, da gravidade, e do deslocamento da mola, é possível saber a constante k , que é o coeficiente de elasticidade da mola;

Hipótese 7 (H7): Colocando massa no carro é possível medir o quanto a mola encolheu;

Hipótese 8 (H8): No protótipo o amortecedor com cilindro de óleo não foi levado em consideração;

Hipótese 9 (H9): Nessa hipótese a posição de equilíbrio acontece quando o carrinho não está apoiado em uma superfície plana. Pode-se supor um tempo e assim encontrar uma velocidade;

Hipótese 10 (H10): Consideramos a força externa com valor nulo;

Hipótese 11 (H11): Observando um vídeo gravado por nós, vimos que a parte do amortecedor com cilindro de óleo estava amassado e perfurado, logo percebemos que o coeficiente de amortecimento seria igual a zero.

Hipótese 12 (H12): Na literatura Mucheroni (2012), quando o coeficiente de amortecimento é igual a zero, temos um caso particular do comportamento da mola classificado como subamortecido.

Hipótese 13 (H13): Duas pessoas de massa somadas são equivalentes a 146 kg e, as mesmas se movimentam em cima de uma das suspensões traseiras. A mola recebe uma força peso que a deforma.

Além das hipóteses o grupo de alunos levantou outras questões:

Será que toda rodas recebe a massa da mesma forma? Será que existe uma velocidade atuando sobre a mola? Se existe, é possível calculá-la? De que forma? É possível chegar a um modelo de equação com os dados oferecidos pelo carro protótipo [Imagem 7, Figura 4.65]? Durante estas questões ainda foi comentado qual é a importância dos amortecedores presentes nos carros, os objetivos e a evolução que sofreram.

RE_AT10_MM3_G4.

A partir da coleta de dados, da formulação de hipóteses e simplificações da situação em estudo, os alunos definiram o problema: *Apresente um modelo matemático que satisfaça a trajetória da mola em qualquer instante de tempo. Em qual tempo o praticante de off-road deve fazer a manutenção da suspensão da gaiola cross ou fazer a troca da mola?*

Durante a investigação da situação-problema, os alunos do grupo G4 deduziram três modelos matemáticos, sendo que apenas o último foi considerado válido para a situação em estudo. Para o desenvolvimento do Modelo 1 (Figura 4.66) foram considerados apenas dados coletados no protótipo desenvolvido.

Figura 4.66 Dedução Modelo 1, AT10, grupo G5

Para desenvolvermos o primeiro modelo, foi necessário passar pelas fases de levantamento de hipóteses e simplificações. Designamos modelo I, o primeiro modelo desenvolvido pelo grupo, no qual utilizamos somente dados do protótipo.

Para desenvolver este modelo utilizamos as hipóteses H1, H2, H3, H4, H5, H6, H7, H8 e H9. Os dados do protótipo utilizados para encontrar o modelo I, podem ser vistos na Tabela 3:

Tabela 3 – Dados do protótipo	
Materiais	Medidas
Massa do protótipo	0,525 kg
Tamanho da mola (estado natural)	0,042 m
Tamanho da mola com a massa do carro	0,037 m

Fonte: os autores.

Existem duas forças agindo nos pontos onde a massa está presa (4 molas). Uma é a força gravitacional, ou peso da massa, que puxa para baixo e tem módulo igual a $m * g$, da qual g é a aceleração da gravidade. A outra é a força F_m , que empurra a carcaça para cima, já que essa força é a da mola.

Utilizando a Lei de Hooke para obter a equação de equilíbrio:

$$F_m = K * L \rightarrow \text{Lei de Hooke}$$

Logo a equação de equilíbrio será:

$$\begin{aligned} p &= F_m \\ p - F_m &= 0 \\ m * g - k * L &= 0 \end{aligned}$$

Segundo Boyce (2001), existem quatro forças separadas que devem ser consideradas para determinar a soma das forças F :

Quadro 2 – Adaptado para a situação do carrinho.

1. O peso $p = m * g$ da massa sempre age para baixo.
2. A força da mola F_m é suposta de ser proporcional ao alongamento total $L + u$ da mola e sempre age para restaurar a mola à sua posição natural. Se $L + u < 0$, então a mola está comprimida e a força da mola empurra para baixo. Como $|L + u| = -(L + u)$, logo F_m é dada pela equação,

$$F_m = -K * |L + u|.$$
3. A força de amortecimento ou resistência F_{res} sempre age no sentido oposto ao sentido do movimento da massa. Essa força pode aparecer de diversas fontes: resistência do ar ou de outro meio onde a massa esteja se movendo, dissipação de energia interna devido à extensão ou compressão da mola, atrito entre a massa e qualquer guia (se existir) que limite seu movimento a uma dimensão, ou um dispositivo mecânico (amortecedor) que gere uma força de resistência ao movimento da massa. Em qualquer caso, supomos que essa força de resistência é proporcional ao módulo da velocidade $\left|\frac{du}{dt}\right|$ da massa; em geral, isso é chamado de amortecimento viscoso. Se $\frac{du}{dt} < 0$, então u está aumentando, de modo que a massa (carcaça) está se movendo para baixo, forçando a mola se comprimir, sendo dado por

$$F_{res}(t) = -\gamma * u'(t)$$
4. Pode ser aplicada uma força externa $F_{ext}(t)$ apontando para baixo ou para cima, dependendo se F é positiva ou negativa. Isso poderia ser uma força devida ao movimento da estrutura onde está presa a mola, ou poderia ser uma força aplicada diretamente na massa.

Fonte: (BOYCE, 2001, pág.100)

Em relação a Tabela 1 e, levando em consideração essas forças, podemos reescrever a lei de Newton como $F = m * a$, em que a é a aceleração e que $a = \frac{d^2y}{dt^2} = u''$; a velocidade de $v = \frac{dy}{dx} = u'$ e $u = \text{deslocamento}$, tem a seguinte equação de forças:

$$F = p + F_m + F_{res} + F_{ext}$$

$$m * u'' = m * g - k(L + u) - F_{res} + F_{ext}$$

$$m * u'' = m * g - kL - ku - F_{res} + F_{ext}$$

$$m * u'' = m * g - kL - ku - F_{res} + F_{ext}$$

Logo,

$$F_{ext} = m * u''(t) - \gamma * u'(t) + K * u(t)$$

Consideramos pela H7 que o coeficiente de amortecimento não deveria ser levado em consideração, mas mesmo assim, tentamos encontrá-lo:

$$F_{ext} = m * u''(t) - \gamma * u'(t) + K * u(t)$$

Para encontrarmos as soluções é necessária a formulação de um P.V.I. (problema de valor inicial). A posição inicial u_0 e a velocidade inicial v_0 da massa.

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0$$

Para o modelo I a equação de equilíbrio utilizada foi:

$$m * g - K * L = 0.$$

Utilizando os dados do protótipo, substituímos na equação de equilíbrio encontrando o coeficiente de elasticidade da mola:

$$\begin{aligned}m * g - K * L &= 0 \\0,525 * 9,8 - K * 0,005 &= 0 \\5,145 - K * 0,005 &= 0 \\K &= 1029 \text{ N/m}\end{aligned}$$

Para encontrarmos o coeficiente de amortecimento precisávamos da velocidade (u'), pois $F_{res}(t) = -\gamma * u'(t)$. Utilizamos a equação da velocidade média e supomos um tempo final de dois segundos, assim a velocidade encontrada foi:

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Substituindo os dados temos,

$$V = \frac{0,037 - 0,042}{2 - 0}$$

$$V = 0,0025 \text{ m/s}$$

Como não sabíamos o valor da força de resistência (F_{res}) não conseguimos dar continuidade ao modelo, substituindo os valores encontrados e considerando a força externa nula, obtemos o modelo incompleto:

$$0,525 * u''(t) - \gamma * u'(t) + 1029 * u(t) = 0$$

Impossível validação.

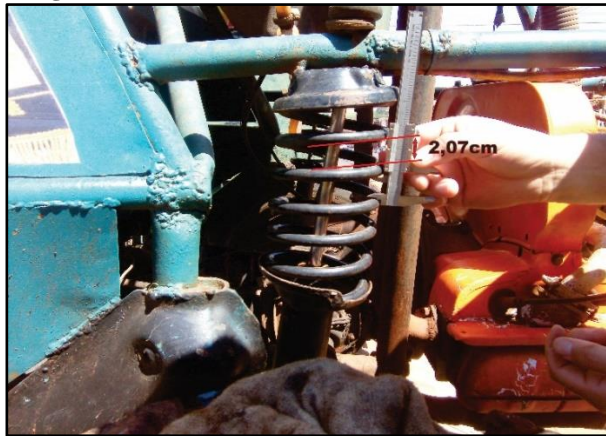
Fonte: RE_AT10_MM3_G4.

O segundo modelo foi deduzido considerando os dados coletados na entrevista com o praticante de *off road* e os dados coletados no carrinho, *gaiola*, do entrevistado (Figura 4.67).

Figura 4.67 Dedução do Modelo 2, AT10, grupo G5

Com massa do carro (600 kg) o espaço entre uma volta e a outra da mola passa a ser de 2,07 cm, podemos observar pela (Imagem 14).

Imagem 14: encolhimento da mola com a massa do carro



Fonte: os autores

A gaiola *cross* não utiliza a mola na suspensão dianteira, utiliza uma fita de aço. Portanto montamos uma hipótese que ambas as suspensões são iguais, ou seja, composta por molas (H2).

Informações: Segundo o entrevistado quanto mais leve o carro melhor para entrar na água, o que gerou discussão no grupo; O chassi é encurtado (cortado ao meio e soldado); Com uma pessoa em cima do carro de massa de 76kg a distância entre o espaço das voltas da mola passa a ser 2 cm.

Em busca de fazer um melhor modelo que se ajustasse ao comportamento da mola da gaiola *cross*, desprezamos a H1 e passamos a usar a massa dividida por dois, já que a suspensão traseira possui duas molas e a dianteira é somente uma fita de aço.

Analisando as fotos e vídeos coletados, nós percebemos que o pistão do amortecedor líquido (óleo), funciona apenas como um eixo para segurar as molas do sistema, uma outra imagem percebemos que o cilindro do óleo é amassado confirmando que não há presença do óleo no cilindro para o amortecimento do carro, assim podemos desprezar o amortecimento de resistência;

Da mesma forma que o modelo I, encontramos a equação de equilíbrio, de modo a encontrar o coeficiente de elasticidade da mola, dividimos a massa por dois, pois pensamos em considerar a somente as molas traseiras:

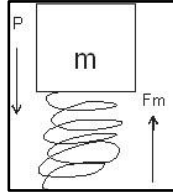
$$\begin{aligned} m * g - k * L &= 0 \\ \frac{600}{2} * 9,8 - k * 0,21 &= 0 \\ 300 * 9,8 - k * 0,21 &= 0 \\ 2940 - k * 0,21 &= 0 \\ k &= \frac{2940}{0,21} = 14000N/m \end{aligned}$$

Notação: $L = u - u_0$

$u =$ deslocamento final e $u_0 =$ deslocamento inicial

Após achar o coeficiente de elasticidade da mola (k), houve uma tentativa de chegar em um modelo utilizando o seguinte esquema da Imagem 15:

Imagem 15 – Esquema de forças



Fonte: os autores

Após encontrarmos o coeficiente de elasticidade da mola (k), fizemos a soma das forças que atuam no sistema. Lembrando que $F = m * a$, em que a é a aceleração e que $a = \frac{d^2y}{dt^2} = u''$; a velocidade de $v = \frac{dy}{dx} = u'$ e $u = \text{deslocamento}$, tem a seguinte equação de forças:

$$\begin{aligned}
 F &= F_{ext} + p + F_m + F_{res} \\
 F &= +p + F_m + F_{res} + F_{ext} \\
 m * u'' &= m * g - k(L + u) + 0 + F_{ext} \\
 m * u'' + m * g - k * L + ku &= F_{ext} \\
 m * u'' + ku &= F_{ext} \rightarrow \text{EDO de 2ª ordem}
 \end{aligned}$$

Utilizando a H10, a força externa possui valor nulo, logo:

$$m * u'' + ku = 0$$

Substituindo os dados:

$$300 u'' + 14000 = 0$$

Simplificamos a equação por 100, tivemos uma nova equação:

$$3 u'' + 140 u = 0$$

Para solucionar esta EDO de segunda ordem homogênea, utilizamos o método dos coeficientes constantes. Temos que a equação característica associada à EDO homogênea é dada por:

$$3r^2 + 140 = 0$$

Encontramos as raízes $r = \pm \sqrt{\frac{(-140)}{3}}$. A solução no conjunto dos números complexos é dada por : $r = \pm i . \alpha$; $r = \pm i . 6,831$ e a solução no conjunto dos números reais é dada por: $u(t) = C_1 . \cos(\alpha . t) + C_2 . \text{sen}(\alpha . t)$

Obs.: Não utilizamos a exponencial, pois a raiz real não existe. Substituindo o valor de α :

$$u(t) = C_1 . \cos(6,831 . t) + C_2 . \text{sen}(6,831 . t)$$

Usando o PVI encontrado na análise do *software Tracker*:

$$u'_{(0,144)} = 0,298 \text{ m/s}$$

$$u_{(0)} = 0,2 \text{ m}$$

Para encontrar C_1 utilizamos $u_{(0)} = 0,2 \text{ m}$, na equação e encontramos $C_1 = 0,2$

Para encontrar C_2 calculamos a derivada segunda, utilizando o PVI:

$$u'_{(0,144)} = 0,298 \text{ m/s}$$

O valor encontrado para $C_2 = 0,047$. Logo, encontramos o modelo:

$$u(t) = 0,2 * \cos(6,831 * t) + 0,047 * \text{sen}(6,831 * t)$$

Validando o modelo no ponto:

$$u(0,144) = 0,2 * \cos(6,831 * 0,144) + 0,047 * \text{sen}(6,831 * 0,144)$$

$$u(0,144) = 0,2$$

Logo não conseguimos validar. Acreditamos que este fato veio a ocorrer por falta de manejo com o *software Tracker*. Partimos assim para a construção de um novo modelo.

Fonte: RE_AT10_MM3_G4.

O terceiro modelo foi obtido por meio da análise das forças que agem sobre o carrinho, e fazendo as transformações necessárias das grandezas (Figura 4.68).

Figura 4.68 Dedução do Modelo 3, AT10, grupo G5

O terceiro modelo foi encontrado analisando todas as forças, e fazendo as transformações necessárias das grandezas. Foi utilizado o *software Tracker* para elaboração do P.V.I (problema de valor inicial). Podemos ver o gráfico com os pontos por meio da (Imagem 16).

Imagem 16: Deslocamento da mola em função do tempo



Fonte: os autores

Para determinarmos o modelo foi necessário utilizar os dados da Tabela 3:

Tabela 3 – Sistematização dos dados da Gaiola cross.

Materiais	Grandeza
Massa do carro	600 kg
Tamanho da mola no seu estado natural	20 cm
Tamanho da mola com a massa do carro	Não foi coletado
Distância entre os espaços das voltas da mola sem massa (estado natural)	2,28 cm
Distância entre os espaços das voltas da mola com a massa do carro	2,07 cm

Para encontrar o tamanho da mola encolhida segue-se o raciocínio: Na mola de 7 voltas o número de espaço que existente entre elas é de 6, sendo assim fazendo a diferença

entre 2,28 cm e 2,07 cm tem o resultando de 0,21 cm. Pegando esse resultado e multiplicando por 6, que é o espaço entre as voltas da mola, obtém-se 1,26 cm. Subtraindo 1,26 cm de 20 cm é possível encontrar o tamanho da mola encolhida - 18,74 cm. Fazendo as transformações de unidades para metro a medida inicial (s_0) da mola é de 0,2 m e que o tamanho da mola encolhida (s) é de 0,1874 m. Com isso é possível encontrar o coeficiente de elasticidade da mola do carro utilizando a equação de equilíbrio entre a força peso e a força da mola (Lei de Hooke) $F_m = k * L$.

Considerando que:

$$p = \frac{m * g}{4}, \text{ (divide por 4 por trabalhar a mola individual: H1); } g = 9,8 m/s^2$$

A equação de equilíbrio será:

$$\begin{aligned} p &= F_m \\ p - F_m &= 0 \\ m * g - k * L &= 0 \end{aligned}$$

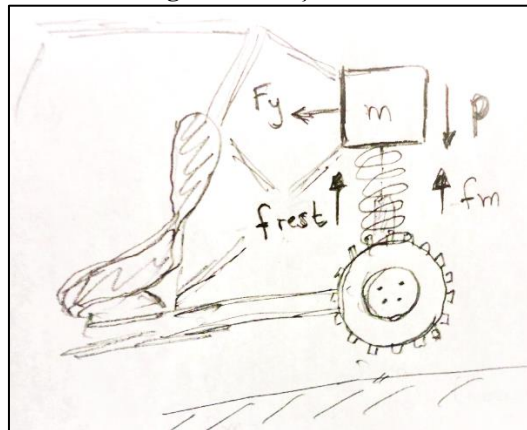
Substituindo os dados:

$$\begin{aligned} \frac{600}{4} * 9,8 - k(0,2 - 0,1874) &= 0 \\ 150 * 9,8 - k(0,0126) &= 0 \\ 1470 - k * 0,0126 &= 0 \\ k = \frac{1470}{0,0126} &= 116666,7 \text{ N/m ou } 116,667 \text{ KN/m} \end{aligned}$$

Tentativa de dedução do modelo III

Esta parte consiste em encontrar um modelo para que descreva o encolhimento da mola em qualquer instante:

Imagem 16: Forças atuantes



Fonte: os autores

Lembrando que $F = m * a$, em que a é a aceleração e que $a = \frac{d^2y}{dt^2} = u''$; a velocidade de $v = \frac{dy}{dx} = u'$ e $u = \text{deslocamento}$, tem a seguinte equação de forças:

$$\begin{aligned} F &= F_{ext} - p - F_m - F_{res} \\ F + p + F_m + F_{res} &= F_{ext} \\ m * u'' + m * g + k(L + u) + 0 &= F_{ext} \\ m * u'' + m * g - k * L + ku &= F_{ext} \end{aligned}$$

$$m * u'' + ku = F_{ext} \rightarrow EDO \text{ de } 2^{\text{a}} \text{ ordem}$$

Substituindo pelos dados coletados:

$$150 * u'' - 116666,7 * u = 0$$

$$u'' + \frac{116666,7}{150} * u = 0$$

$$u'' + 777,778 * u = 0$$

Fazendo a equação característica:

$$r^2 + 777,778 = 0$$

$$r^2 = -777,778$$

$$r = \pm \sqrt{-777,778}$$

$$r = \pm i * 27,9$$

$$r = \pm i * \alpha$$

A solução para uma EDO de 2ª ordem dos complexos para os reais é:

$$u(t) = C_1 * \cos(\alpha * t) + C_2 * \text{sen}(\alpha * t) \rightarrow (I)$$

$$u(t) = C_1 * \cos(27,9 * t) + C_2 * \text{sen}(27,9 * t)$$

Observação: Como não existe a parte real, por esse motivo e (Euler) fica elevado a 0, resultando em 1, em consequência disso e não aparece nesta solução de EDO de 2ª ordem que tem o comportamento de amortecimento subcrítico, ou seja, o delta (Δ) é menor que zero.

Usando o PVI encontrado na análise do *software Tracker*:

$$u'(0,144) = 0,298 \text{ m/s}$$

$$u(0) = 0,2 \text{ m}$$

Quando $u(0) = 0,2 \text{ m}$:

$$0,2 = C_1 * \cos(27,9 * 0) + C_2 * \text{sen}(27,9 * 0)$$

$$0,2 = C_1 * \cos(0) + C_2 * \text{sen}(0)$$

$$0,2 = C_1 * 1 + 0$$

$$0,2 = C_1$$

Derivando a equação (I):

$$u(t) = C_1 * \cos(i * t) + C_2 * \text{sen}(i * t) \rightarrow (I)$$

$$u' = 0 * \cos(i * t) + C_1 * \cos(i * t) + 0 * \text{sen}(i * t) + C_2 * \text{sen}(i * t)$$

$$0,298 = 0,2 * \cos(27,9 * 0,144) + C_2 * \text{sen}(27,9 * 0,144)$$

$$0,298 = 0,199 + C_2 * 0,07$$

$$\frac{0,298 - 0,199}{0,07} = C_2$$

$$1,41 = C_2$$

Modelo encontrado:

$$u(t) = 0,2 * \cos(27,9 * t) + 1,41 * \text{sen}(27,9 * t)$$

Validando para o ponto $u_{(0)} = ?$

$$u(t) = 0,2 * \cos(27,9 * t) + 1,41 * \text{sen}(27,9 * t)$$

$$u(0) = 0,2 * \cos(27,9 * 0) + 1,41 * \text{sen}(27,9 * 0)$$

$$u(0) = 0,2 * \cos(0) + 1,41 * \text{sen}(0)$$

$$u(t) = 0,2 * 1 + 1,41 * 0$$

$$u(0) = 0,2m \rightarrow \text{validado nesse ponto.}$$

Fonte: RE_AT10_MM3_G4.

Os alunos informaram não ter continuado a validação do terceiro modelo obtido devido às dificuldades no manuseio do *software Tracker*. Como considerações os alunos sinalizaram que:

Nas pesquisas feitas foi possível encontrar algumas informações que foram relevantes para a construção deste trabalho. De acordo com estudos feitos na disciplina de EDO a mola possui forças que atuam sobre ela, como por exemplo, a lei de Hooke, a força peso e força resultante de todas essas forças que recaem na segunda Lei de Newton ($F = m \cdot a$). Na lei de Hooke é possível encontrar a força da mola que é igual a uma constante que multiplica o deslocamento sofrido pela mola ($F_m = k \cdot L$).

Referente ao amortecedor, esta peça possui um amortecimento viscoso importante no carro, este faz com que a mola perca sua oscilação, fazendo com que a roda fique o maior tempo possível em contato com o solo. No cálculo para encontrar sua força temos que, força de amortecimento é igual à multiplicação de uma constante pela velocidade ($F_{res} = -\gamma \cdot v$). De acordo com a física, a velocidade é obtida pela razão do espaço pelo tempo ($v = \Delta s / \Delta t$), em que usamos somente no primeiro modelo, nos modelos II e III utilizamos o *Tracker* para coletar estas informações.

Na coleta de dados a procura foi para encontrar em sites específicos o coeficiente de amortecimento dos amortecedores em automóveis, mas a procura foi falha, como visto no modelo I. Encontramos em um site uma equação que poderia nos fornecer esses coeficientes: Coeficiente de elasticidade da mola - $K = G \cdot \frac{d^4}{8} \cdot D^3 \cdot N$, onde K é o coeficiente de elasticidade da mola, G é o cisalhamento, D é a média do diâmetro da espiral da mola medida internamente e externa e N é o número de espiral ativa na mola, e deve ser levado em consideração como termina a primeira e a última espiral. O Coeficiente de amortecimento (advinda do amortecedor) $c = 2 * (K * m)^{\frac{1}{2}}$, em nosso caso não utilizamos este coeficiente, pois classificamos o movimento da mola como um caso particular subamortecido, em que o coeficiente de amortecimento é igual a zero.

Além dessas equações encontramos algumas outras equações como:

Velocidade do impacto: ($v = \sqrt{19,6 * H}$), v: velocidade e H é altura;

Energia cinética ($E_k = 9,8 * m * H$), m: massa e H é altura;

Energia impulsora (N/m) - ($E_w = 9,8 * m * S$), S- curso do amortecedor (m);

Equação relacionada à lombada: ($y = \frac{h}{2} \cdot \cos\left(x \cdot \frac{\pi}{w}\right) + h/2$), h é a altura e w a largura da lombada;

Não foi encontrado um modelo que valide o problema levantado pelo grupo, uma justificativa para este acontecimento pode estar relacionada com a forma de como os dados foram coletados podendo ter havido equívocos e também a

falta de traquejo com o *software Tracker*, pois os problemas de valores iniciais utilizados nos modelos estavam ligados diretamente ao *software*.
RE_AT10_MM3_G4.

No próximo capítulo nos dedicamos à análise dos dados coletados por meio do desenvolvimento das dez atividades de modelagem matemática descritas neste capítulo.

CAPÍTULO 5

AS ANÁLISES ESPECÍFICAS E A EMERGÊNCIA DE CATEGORIAS

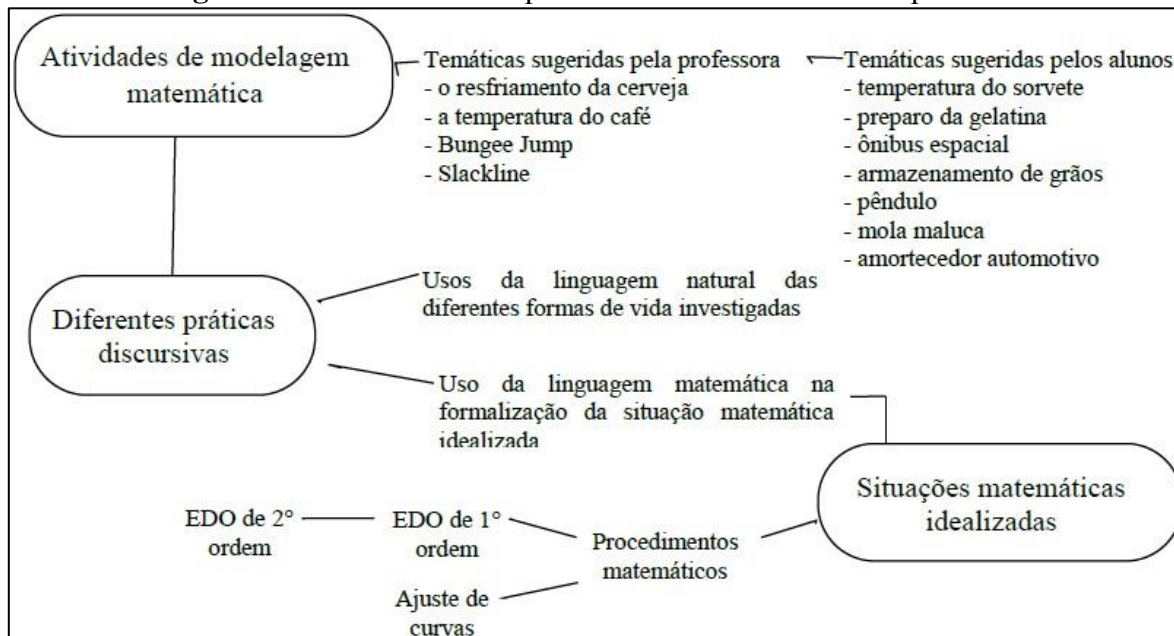
Neste capítulo estruturamos e analisamos os dados coletados na pesquisa empírica, por meio dos registros coletados no desenvolvimento das onze atividades de modelagem matemática e dos instrumentos utilizados para coleta de dados (Anexos A, B e C). A estrutura de análise que apresentamos visa enfatizar o uso da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática. Elaboramos uma análise interpretativa das práticas discursivas dos alunos a partir do referencial teórico da Filosofia da Linguagem de Wittgenstein e de aspectos da Modelagem Matemática na Educação Matemática.

A imersão nos dados coletados, com vistas ao objetivo da pesquisa, nos possibilitou desconstruir o agrupamento inicial de dados e reconstruí-los de modo que o processo analítico incida sobre os procedimentos matemáticos que emergiram no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática: equações diferenciais ordinárias de primeira ordem; equações diferenciais ordinárias de segunda ordem; ajuste de curvas mediado por tecnologias digitais; e ajuste de curvas sem utilização de tecnologias digitais. A interpretação dos dados sobre os usos da linguagem, bem como do uso de conceitos matemáticos, proposições, justificativas, entre outros, é detalhada com base nas árvores de associação de ideias e linhas narrativas, de acordo com os pressupostos da metodologia de análise de práticas discursivas, descrita no Capítulo 1 deste texto. As árvores são construídas tendo como raiz o eixo principal ao qual queremos dar visibilidade, estando as ideias centrais circuladas, ligadas às demais por meio de linhas ou setas. As setas são utilizadas apenas quando queremos enfatizar a unicidade do sentido. Não há uma organização predominante na disposição das raízes, visto que o fluxo de ideias foi elaborado de acordo com a análise interpretativa das pesquisadoras.

Para compor as análises específicas, a imersão nos dados coletados nos possibilitou vislumbrar as ideias compartilhadas pelos alunos no desenvolvimento das atividades de

modelagem matemática. Tais ideias estão sistematizadas na árvore de associação de ideias da Figura 5.1.

Figura 5.1 Fluxo de ideias que mobilizaram as análises específicas



Por meio da elaboração de árvores de associação de ideias, visamos mostrar a interpretação sobre o percurso dos alunos no desenvolvimento da atividade aliada às teorias de base consideradas na pesquisa, Filosofia da Linguagem e Modelagem Matemática na Educação Matemática. Assim, utilizando de um esquema que visa sintetizar as informações, vislumbramos mostrar o todo. Além das árvores de associação de ideias, utilizamos o recurso das linhas narrativas para explicitar os argumentos dos alunos, quando as ideias são demasiadamente longas para explicitarmos as transcrições. Nesse contexto, a interpretação das pesquisadoras surge com vistas à reflexão sobre a justificativa dos procedimentos matemáticos utilizados pelos alunos, sobre o uso de proposições, sejam elas matemáticas ou não, bem como sobre o uso de regras e procedimentos declarados na literatura. É deste processo analítico que traremos à tona às categorias, *a posteriori*, que nos possibilitarão detalhar a questão de pesquisa quanto ao uso da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática.

O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Os usos de conceitos matemáticos associados às equações diferenciais de primeira ordem emergiram em cinco das dez atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos:

- AT1, O resfriamento da cerveja – alunos dos grupos G1 e G2;
- AT2, A temperatura do café e a garrafa térmica – alunos dos grupos G1, G2 e G3;
- AT3.1, Ônibus Espacial – alunos do grupo G1;
- AT3.2, Armazenamento de grãos de soja – alunos do grupo G1;
- AT4, Variação da temperatura na produção do sorvete – alunos do grupo G2;
- AT5, Preparo da gelatina: variação da temperatura da gelatina em relação ao tempo – alunos do grupo G3.

Os alunos durante o ano de 2015 estavam imersos nos jogos de linguagem associados à disciplina de EDO e quase, em sua maioria, buscavam interpretar as atividades desenvolvidas em sala de aula por meio dos usos da linguagem matemática associada aos conceitos e regras matemáticas relacionadas às EDOs. No primeiro semestre de 2015, os alunos haviam tido acesso às definições iniciais sobre equações diferenciais ordinárias, como ordem de uma EDO, o que caracteriza uma EDO linear, equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, equações separáveis, equações exatas, o método do fator integrante para resolução de EDO e problemas de valor inicial. Quando da realização das atividades AT1 e AT2, os alunos estavam aprendendo as regras do jogo de linguagem das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, equações separáveis, equações exatas e no uso do método do fator integrante. Já as atividades AT3.1, AT3.2, AT4 e AT5 foram desenvolvidas e entregues no final do primeiro semestre de 2015.

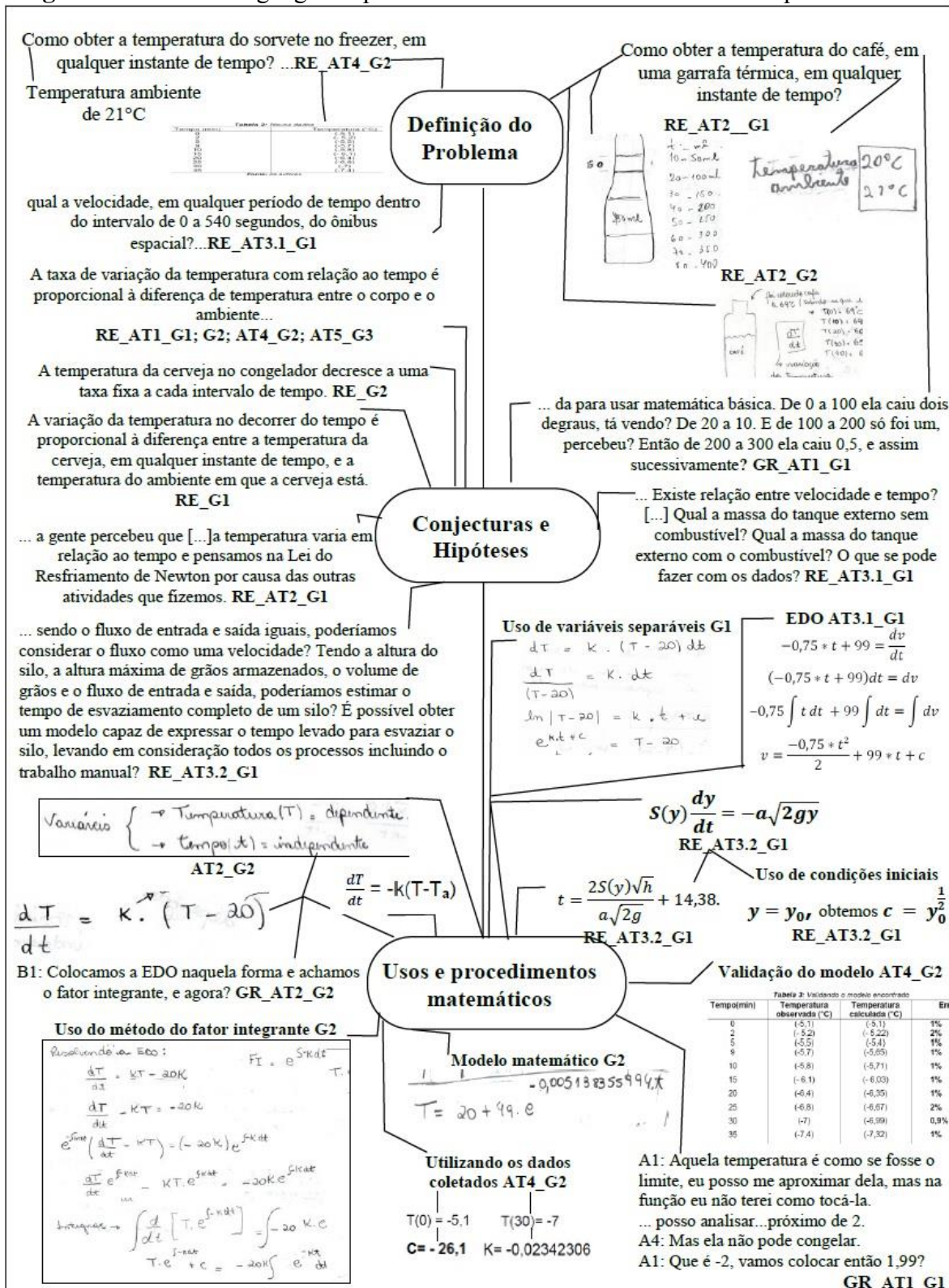
Apresentamos na Figura 5.2 o fluxo de ideias dos alunos distribuídos nos grupos G1, G2 e G3 por meio do recurso à árvore de associação de ideias de Spink (2013) e detalhamos, na sequência, a análise do fluxo de ideias com base na perspectiva wittgensteiniana sobre Linguagem e sobre Matemática, bem como na Modelagem Matemática na Educação Matemática. A árvore de associação de ideias foi construída considerando: os usos da linguagem, os conceitos matemáticos utilizados e as conjecturas

realizadas pelos alunos, durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

De modo geral, os usos da linguagem nas atividades de modelagem matemática se iniciam com a interpretação e/ou definição de uma situação-problema para o estudo. A partir de uma situação empírica, os usos da linguagem convergem para uma situação regida pelas regras matemáticas. Da tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, os alunos se engajam em conjecturas e formulação de hipóteses que os auxiliam e os guiam na elaboração e no desenvolvimento de modelos matemáticos, os quais são como “ferramentas” utilizadas para solucionar as situações-problema iniciais.

Inicialmente, elaboramos a Figura 5.2 considerando o fluxo percorrido pelos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. De certo modo, tal fluxo nos dá indícios do caminho percorrido pelos alunos e da mobilização das práticas discursivas no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática que foram resolvidas utilizando os conceitos matemáticos associados às equações diferenciais de primeira ordem.

Figura 5.2 Usos da linguagem e procedimentos dos alunos: as EDO's de primeira ordem



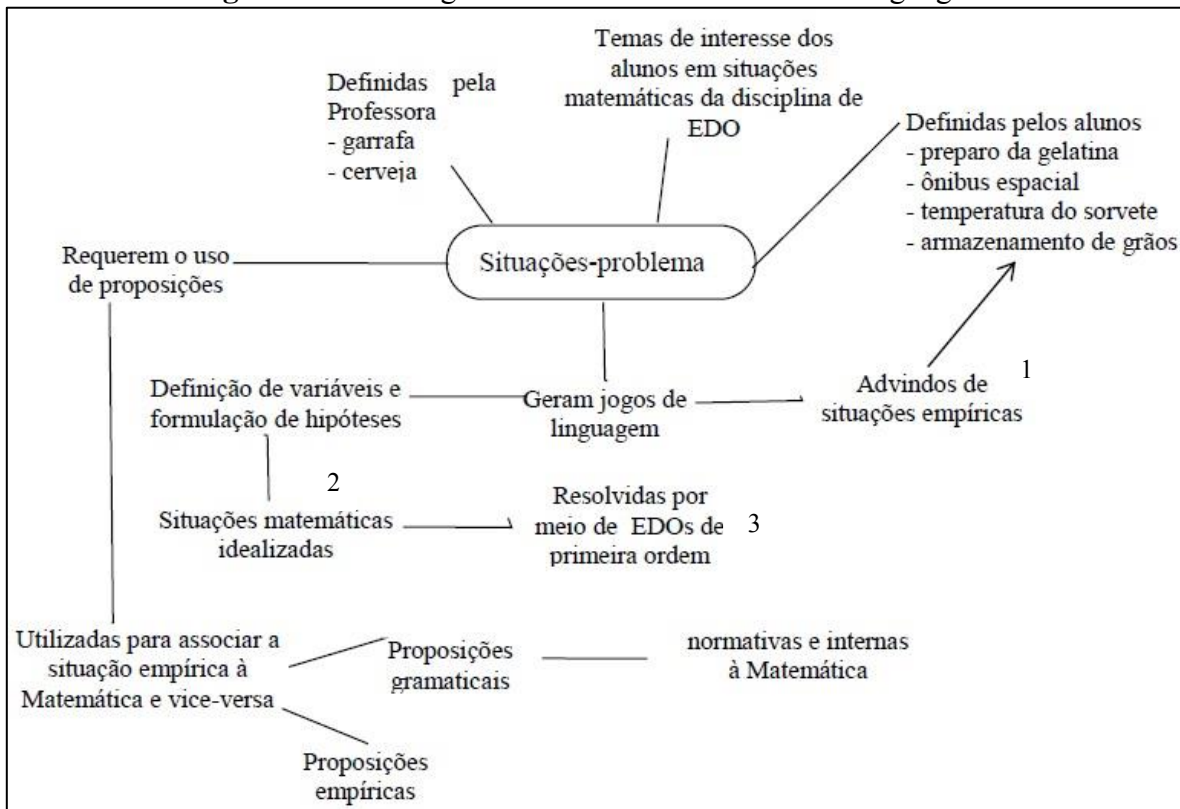
Os usos da linguagem nas atividades partem de situações-problema, definidas pela professora (AT1, AT2) ou definidas em conjunto pelos alunos (AT3.1, AT3.2, AT4, AT5). As situações-problema são advindas do cotidiano dos alunos, de seus interesses e de temáticas que os alunos conseguem relacionar com situações matemáticas que sentem facilidade em reproduzir. Nesse contexto, os jogos de linguagem *jogados* pelos alunos são advindos de situações empíricas e as proposições por eles utilizadas para interpretar tais situações são proposições empíricas, adaptados pelos alunos às situações por eles trabalhadas em sala de aula. Essas proposições dependem dos fatos a elas atrelados e de acordos dados nas formas de vida específicas. Neste contexto, investigamos os usos da linguagem e de procedimentos matemáticos nessas atividades de modelagem matemática.

Com relação às proposições utilizadas pelos alunos no início da atividade de modelagem matemática, podemos considerá-las ora como proposições gramaticais, ora como proposições empíricas. E é no uso feito das proposições que elas assumem estes *status*. Embora proposições gramaticais, para Wittgenstein (1996, p. 99, tradução nossa), tenham “a dignidade de uma regra”, em atividades de modelagem matemática, as proposições são utilizadas atreladas aos fatos, o que pode torná-las empíricas. Segundo Moreno (2003, p. 129):

[...] é o uso que fazemos de certas proposições que tornam seus sentidos dependentes dos fatos. Os fatos participam do sentido das proposições empíricas porque é assim que definimos o uso que delas devemos fazer com a finalidade de levantar hipóteses e construir raciocínios.

A partir da leitura dos dados advindos dos registros coletados durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, da transcrição das gravações em áudio dos alunos nas atividades de modelagem matemática, elaboramos a Figura 5.3 que consiste na árvore de associação de ideias na qual relacionamos a Modelagem Matemática e a Filosofia da Linguagem, as teorias de base da pesquisa e o que os dados coletados no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática revelam.

Figura 5.3 Modelagem Matemática e Filosofia da Linguagem



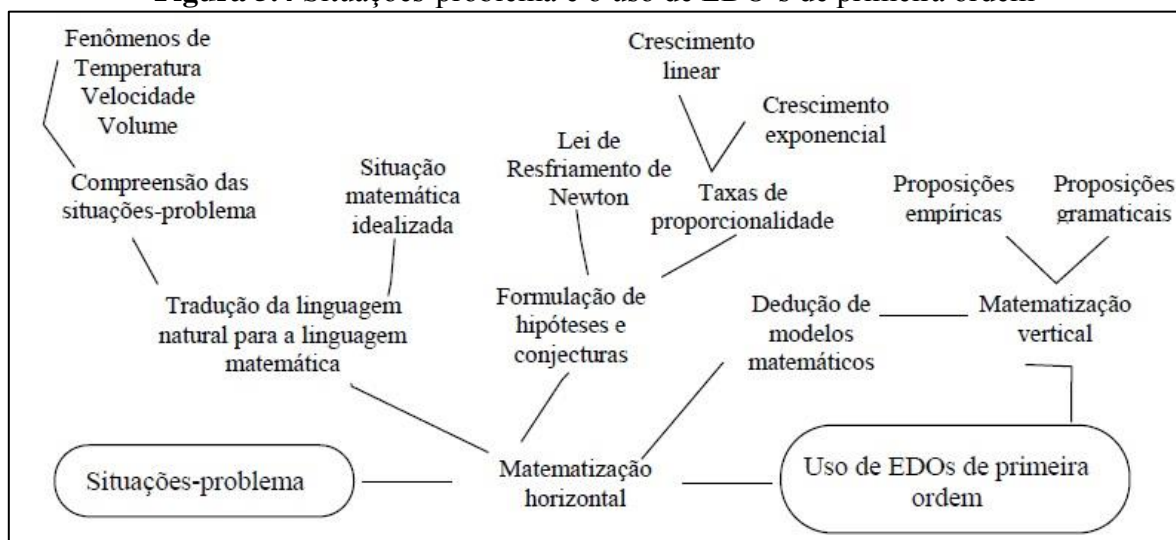
No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, a partir de situações empíricas (1) os alunos iniciam a elaboração/interpretação de situações matemáticas idealizadas (2), às quais são analisadas por meio dos conceitos das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (3). O movimento da situação empírica para a Matemática pode ser considerado, de acordo com Kaiser e Sriraman (2006) e com Almeida e Silva (2015), como matematização horizontal.

Os jogos de linguagem são regidos, então, pelas regras da Matemática desta forma de vida. Na busca pela interpretação das situações-problema por meio de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, os alunos usam a linguagem natural de modo a traduzi-la para a linguagem matemática, formulam conjecturas e hipóteses e deduzem modelos matemáticos a partir de sua interpretação dos dados advindos das situações. A passagem da linguagem natural para a linguagem matemática é colocada por Almeida, Silva e Vertuan (2012) como uma transição de linguagens, no entanto utilizamos o termo tradução recorrendo à Filosofia da Linguagem de Wittgenstein, em que traduzir corresponde a um jogo de linguagem.

Segundo Wittgenstein (2013), o ato de traduzir de um jogo de linguagem para outro é, em si, um jogo de linguagem regido por suas próprias regras. A tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, pode ser entendida como uma maneira de criar condições para a compreensão, da situação-problema em termos da linguagem matemática. A interpretação das situações-problema e o uso da tradução da linguagem natural para a linguagem matemática se configura na medida em que os alunos conjecturam e formulam hipóteses sobre os problemas em estudo.

Quando consideramos as atividades desenvolvidas pelos alunos por meio do uso de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, é evidente o uso de três fenômenos físicos interpretados por meio de conceitos matemáticos desta natureza: fenômenos envolvendo temperatura, velocidade e volume. Das atividades desenvolvidas, quatro delas estão associadas à *observação e análise* da variação da temperatura no decorrer do tempo (AT1, AT2, AT4, AT5), uma está associada à velocidade de um ônibus espacial (AT3.1) e outra à variação do volume de grãos em um silo (AT3.2). Por meio da árvore de associação de ideias da Figura 5.4 evidenciamos as ideias gerais utilizadas pelos alunos na interpretação das *situações-problema* por meio do *uso de EDOs de primeira ordem*. Nesse caminho visualizamos a *matematização horizontal* e a partir destes três pontos-chave são detalhados os elementos utilizados pelos alunos nas atividades de modelagem matemática e que, a nosso ver, corroboram com conceitos das teorias de base da pesquisa.

Figura 5.4 Situações-problema e o uso de EDO's de primeira ordem



As situações-problema envolvendo temperaturas são analisadas por meio da Lei de Resfriamento de Newton, e as conjecturas e hipóteses que conduzem os alunos a este uso da Matemática estão associadas tanto ao comportamento dos dados quanto ao jogo das aulas de Matemática. Por exemplo, os alunos do grupo G1 analisam a viabilidade de duas hipóteses para solucionar a situação-problema da atividade AT1, como é possível observar no diálogo:

Aluno A1: *gente olha aqui que interessante, da para usar matemática básica. De 0 a 100 ela caiu dois degraus, tá vendo? De 20 a 10. E de 100 a 200 só foi um, percebeu? Então de 200 a 300 ela caiu 0,5, e assim sucessivamente. Da para achar uma razão entre isso?*

Aluno A4: *mas está obedecendo uma razão e uma proporção?*

Aluno A1: *eu acredito que sim, o que vocês acham?*[pergunta se todos concordam]

Aluna A3: *eu não tinha percebido na verdade.*

[...]

Aluno A1: *eu acho que eu vou fazer desse jeito aqui, aí se vocês quiserem fazer por EDO, vocês que sabem.* [todos sinalizam que concordam com o aluno A1 e iniciam a busca em suas anotações para tentar interpretar a situação-problema utilizando o conceito de EDO de primeira ordem, enquanto o aluno A1 prossegue com a primeira ideia]

Aluna A3: *então eu tenho, a variação da temperatura pela variação do tempo, igual uma constante*

Aluno A1: *isso aí não é uma proporção? O que faz ela variar? A gente tem isso?*

Aluno A4: *eu acho que não.*

[...]

Aluno A4: *esse 2 aqui vai multiplicar a variação, sempre. Então nós temos a constante não é?*

Aluna A3: *não entendi não...*

Aluno A1: *faz do jeito que você está falando.*

Aluno A1: *vocês não estavam falando que isso aqui é a constante?*

Aluno A1: *para mim isso é o que faz ela variar, ter esse movimento.* [O aluno indica o movimento por meio de gestos]

Professora: *o que isso quer dizer?*

Aluno A2: *esse é um exercício que fizemos, semelhante.*

Aluno A3: *estamos tentando fazer uma analogia.*

GR_AT1_MM1_G1.

A analogia a que os alunos A2 e A3 se referem está associada à discussão das informações do texto e de um exercício realizado pelo grupo, a partir de uma lista de atividades da disciplina de EDO, o que culmina em outra hipótese, considerando a variação da temperatura da cerveja no congelador proporcional à diferença entre a temperatura da cerveja em qualquer instante de tempo e a temperatura do congelador. Essa mesma hipótese é considerada pelos alunos do grupo G2, tanto no desenvolvimento da AT1, quanto nas

outras atividades que se seguiram: a AT2, de temática indicada pela professora, e a AT4 com temática escolhida pelos alunos deste grupo – sobre a variação da temperatura na produção de sorvete.

Assim como ocorreu com os alunos do grupo G1, os alunos do grupo G2 também investigaram a hipótese associada ao decréscimo fixo da temperatura a cada intervalo de tempo, interpretada por meio de uma função matemática linear. Essa hipótese foi descartada a partir do momento que os alunos analisaram o gráfico contido na situação-problema e utilizaram proposições matemáticas associadas à *regra de três* para verificar se conseguem uma relação linear entre a temperatura e o tempo. A análise da variação linear dos dados é infundada, o que é verificado por meio dos cálculos e da comparação com os dados para temperatura em cada intervalo de tempo, declarada na atividade, conforme é sinalizado no diálogo das alunas B4 e B2:

Aluna B4: [...] *utilizando esse dado do meu gráfico que em 50 minutos ela estará a 15 graus, então se eu for pensar que tempo ela teria para esfriar em 2 graus?*

Professora: *Então você está pensando em uma proporcionalidade linear, mas esse comportamento é linear?*

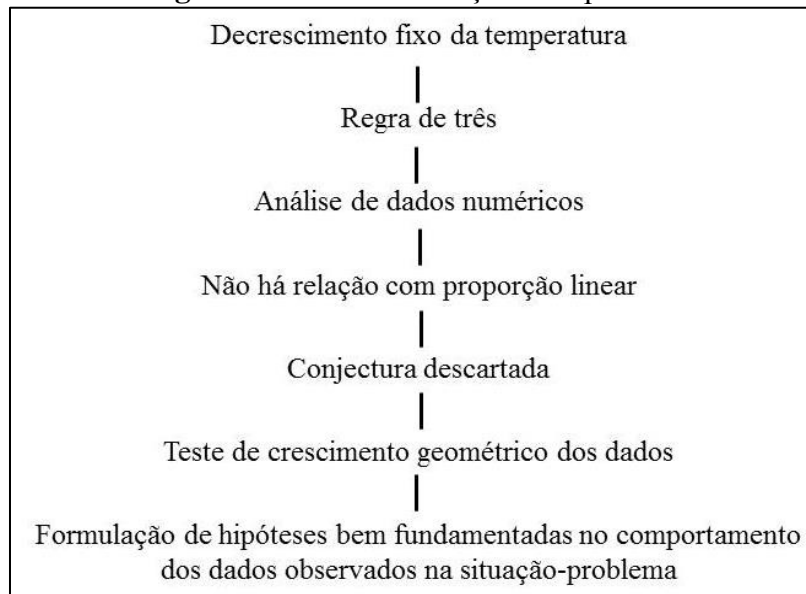
Aluna B4: *Não.*

Aluna B2: *não porque ele varia. Não aumenta um valor certo.*

GR_AT1_MM1_G2.

Levantar conjecturas e formular hipóteses é uma prática comum em atividades de modelagem matemática. Os testes e refutações de conjecturas podem se caracterizar, de acordo com Almeida (2014a), como suposições bem fundamentadas. As argumentações dos alunos podem ser vistas por meio da linha narrativa da Figura 5.5 que consiste de ideias mobilizadas no desenvolvimento das atividades AT1 e AT2.

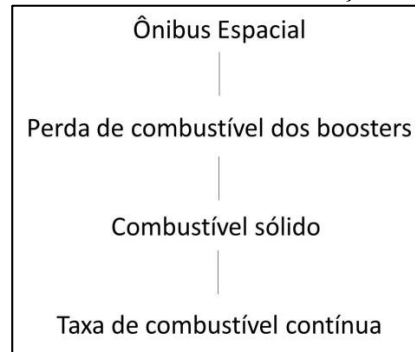
Figura 5.5 Teste e refutação de hipóteses



A discussão sobre o uso de hipóteses em atividades de modelagem matemática é importante na medida em que elas direcionam o trabalho dos alunos (BEAN, 2001; ALMEIDA, 2014). É por meio das hipóteses formuladas que os alunos conseguem se manifestar com relação aos dados empíricos das situações-problema. No caso da hipótese que os guia ao uso da Lei do Resfriamento de Newton, essa pode se caracterizar como uma suposição bem fundamentada, pois se origina da análise dos dados, da variação entre as temperaturas disponíveis na atividade de modelagem matemática e no fenômeno em estudo, a variação de temperaturas de um corpo com um ambiente.

Vimos que as hipóteses e conjecturas formuladas no desenvolvimento das atividades envolvendo a variação de temperaturas foram sustentadas com base no comportamento matemático que os alunos vislumbravam dos dados. Já na atividade AT3.1, sobre a velocidade do ônibus espacial, após o tratamento das informações obtidas pelos integrantes do grupo sobre a temática, eles se dedicaram à formulação de hipóteses e a realização de simplificações a partir de alguns elementos-chave originários da situação-problema: o combustível, a velocidade, a aceleração entre outros. A fim de sistematizar o diálogo travado pelos alunos do grupo G1 na elaboração da hipótese 1 utilizamos a linha narrativa da Figura 5.6.

Figura 5.6 Linha Narrativa – definição do problema



Desse diálogo surgiu a hipótese:

Hipótese 1: Se a variação do combustível, dos boosters, em relação ao tempo é linear, então a variação do combustível no tanque externo está relacionada à aceleração do ônibus espacial.

Quando se considera a variação do combustível no tanque externo associada à aceleração, os alunos realizam simplificações, pois desconsideram outras variáveis que atuam na perda de combustível pelo booster, como a temperatura, o coeficiente de dilatação, a dilatação dos três foguetes principais, a resistência do ar, a velocidade do ar, dentre outras. Essas simplificações são conscientes, visto que os alunos as explicitam em seus registros escritos e na comunicação para a turma. E faz-se importante no contexto da atividade de modelagem matemática estar ciente do que considerar e do que não considerar, como afirma Pollak (2015).

A análise da angulação do ônibus espacial, no momento de sua subida, faz com que os alunos formulem a segunda e a terceira hipótese.

Hipótese 2: Se a angulação está relacionada com os três foguetes principais, então existe uma variação da aceleração.

Hipótese 3: A aceleração está relacionada com a velocidade, então existe variação da velocidade.

As hipóteses são consideradas com vistas à situação-problema em estudo, o que denota sua natureza empírica, e o uso de proposições empíricas para declará-las. É a partir da formulação das hipóteses que diferentes significados podem ser associados aos procedimentos matemáticos que delas decorrem, como por exemplo a partir do gráfico sobre a aceleração os alunos utilizam o recurso ao ajuste de curvas e as hipóteses dois e três

para inferir sobre a velocidade do ônibus espacial no decorrer do tempo. Neste contexto, podemos considerar a formulação de hipóteses como indicativos dos usos da Matemática que os alunos farão no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, pois entendemos, no mesmo sentido de Wittgenstein (2013) que o significado de um termo é seu uso na linguagem.

No desenvolvimento da AT3.2, os alunos do grupo G1 utilizam a formulação de hipóteses para matematizar a situação-problema, para interpreta-la por meio de conceitos matemáticos. Na perspectiva de Almeida e Silva (2015) os alunos efetuam nesse momento uma matematização horizontal. Nesse contexto, o termo matematizar vem ao encontro do que afirma Vidigal e Bean (2016, p. 253) quando sinalizam que “a matematização já começou quando aspectos da situação foram concebidos em termos numéricos [...]”. Por exemplo, como hipótese 1 os alunos consideraram que o volume infinitesimal de uma superfície que é lançada para fora de um recipiente, no tempo t é dado por $V = S(h) \frac{dh}{dt}$, em que $S(h)$ é a área da superfície seccionada do silo e $\frac{dh}{dt}$ é a variação da altura de grãos no silo no decorrer do tempo t . Com fonte em dados empíricos, as hipóteses são formuladas com o uso de proposições matemáticas que lhes servem como regras que norteiam seu trabalho e se colocam como condições de significado para a Matemática associada ao volume do silo. Desse modo, a hipótese utilizada pelos alunos do grupo G1 está associada a uma proposição matemática, cujo uso gramatical é interpretado com vistas a uma situação empírica.

A utilização da hipótese 2 “O volume total de grãos, $V(h)$, contido no silo está escoando pela superfície inferior, com velocidade v , através de um buraco com secção de área a ” é feita no sentido de uma simplificação sobre a situação do esvaziamento do silo. Na resolução do problema, os alunos entendem ser necessário elaborar um modelo matemático cuja variável dependente é o tempo de esvaziamento do silo. Neste contexto, é preciso considerar que o fluxo de entrada e saída de grãos no silo ocorre a qualquer instante de tempo, ou seja, é contínuo. Utilizando de proposições já apreendidas os alunos elaboram um modelo matemático para a variação da quantidade de grãos no silo, no decorrer do tempo. Considerando a informação de que um corpo em queda livre possui sua velocidade definida por $v = \sqrt{2gh}$, sendo g a constante da força gravitacional e h a distância do grão

até o solo, no caso do problema, a altura de grãos no silo, os alunos inferem, por meio da formulação de uma hipótese que $S(h) \frac{dh}{dt} = -ka\sqrt{2gh}$, ou seja, os alunos consideram uma constante de proporcionalidade em razão da configuração do orifício do silo, e a área do orifício em que os grãos saem para inferir matematicamente sobre como se dá a variação da altura de grãos no silo em qualquer instante de tempo.

Observamos que há um encadeamento de informações, de uma proposição matemática para a outra. As hipóteses podem ser consideradas como proposições empíricas, cuja função é chamar à tona as proposições matemáticas, bem como atribuir a essas proposições significados relacionados à situação-problema em estudo.

Podemos dizer que as hipóteses direcionam o modo como os alunos veem a situação matemática idealizada a partir da situação-problema. Elas se caracterizam como proposições que guiam os alunos para o uso da Matemática. Wittgenstein (1996, p. 244, tradução nossa) discute que “a proposição pode descrever uma imagem e essa imagem pode estar ancorada na nossa maneira de ver as coisas, e assim, em nosso modo de viver e de agir”, o que no caso da atividade dos alunos diz respeito a seu modo de agir na resolução da situação-problema.

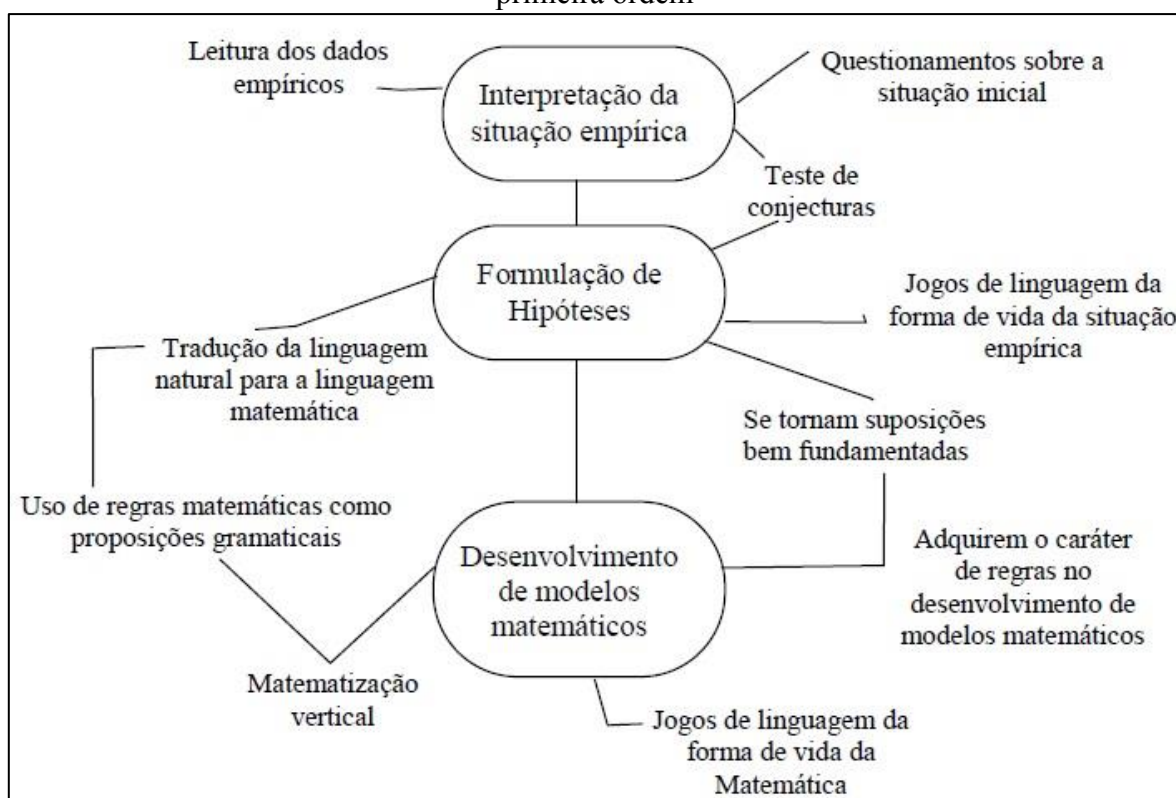
A partir das conjecturas e hipóteses formuladas diferentes recortes são feitos com vistas ao entendimento da situação que será matematizada. Por exemplo: no caso dos fenômenos de temperatura, os alunos estudam a viabilidade de considerar um decaimento linear ou exponencial assintótico; no caso da velocidade do ônibus espacial para falar sobre a velocidade do ônibus espacial os alunos discutem os objetos que são transportados para o espaço, a perda de combustível do ônibus em função da aceleração e que quanto mais pesado o ônibus, maior a quantidade de combustível necessária; já no caso do volume do silo, as hipóteses são uma maneira de traduzir as informações da linguagem natural para a linguagem matemática.

Quando vistas com base nos dados da situação-problema, com o foco no fenômeno estudado, essas ideias se constituem como hipóteses para o fenômeno em estudo. Quando tomadas como hipóteses, a viabilidade desses usos é analisada por meio de proposições matemáticas com vistas aos dados empíricos. A inferência de tais asserções como hipóteses corrobora com a sinalização de Almeida (2014) de que *suposições bem fundamentadas* direcionam o olhar dos alunos para a matemática que será utilizada na resolução.

A partir da formulação de hipóteses os alunos iniciam a resolução das situações-problema por meio de situações matemáticas idealizadas. Como sinaliza Barbosa (2009), ocorre o estudo de uma teoria matemática para dar suporte à elaboração e ao uso de modelos matemáticos, neste caso modelos associados às EDOs de primeira ordem, em particular, lineares.

A interpretação exposta na árvore da Figura 5.7 indica os sentidos produzidos com base nas teorias de base no que tange à formulação de hipóteses nessas atividades de modelagem matemática.

Figura 5.7 Formulação de hipóteses e filosofia da linguagem no uso de EDO de primeira ordem

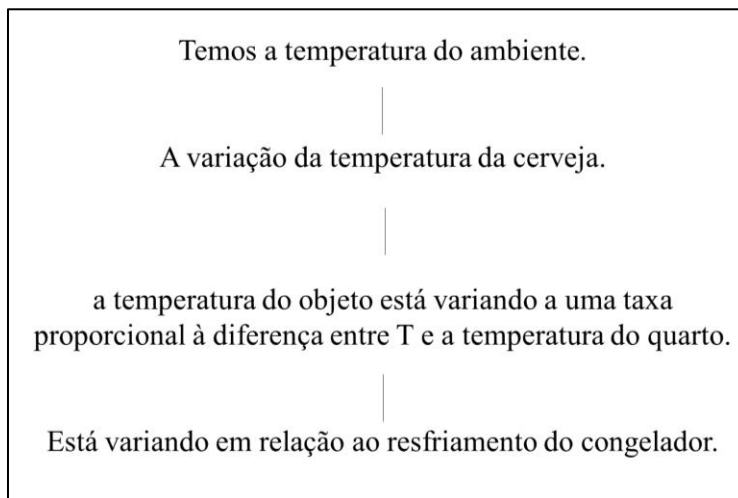


No uso da Lei de Resfriamento de Newton, os alunos *jogam* com as regras da Matemática associadas à resolução de EDOs de primeira ordem, como o método de variáveis separáveis e o método do fator integrante. Já na interpretação da aceleração do ônibus espacial no decorrer do tempo, os alunos utilizam conceitos de cálculo diferencial e integral, interpretam a aceleração como a derivada da velocidade e usam as regras

associadas às equações diferenciais separáveis. Essa mesma regra é utilizada após a obtenção da EDO associada à variação do volume de grãos no silo.

É possível dizer que a partir do desenvolvimento da atividade AT1, os alunos dos grupos G1, G2 e G3, em particular de G2 e G3 (os quais desenvolveram atividades com temática por eles definida contemplando o mesmo uso da Matemática das temáticas anteriores), usam os procedimentos matemáticos associados à Lei do Resfriamento de Newton como uma analogia às situações anteriores. A linha narrativa da Figura 5.8 expressa um diálogo dos alunos do grupo G2, em que explicitam a analogia realizada a partir de uma atividade já desenvolvida na disciplina de equações diferenciais ordinárias:

Figura 5.8 Linha narrativa sobre a argumentação dos alunos do grupo G2 na AT1 para considerar a Lei do Resfriamento de Newton



A Lei de Resfriamento de Newton é utilizada como um procedimento matemático para elaboração de uma equação diferencial ordinária. Para Wittgenstein, a utilização deste procedimento, remete a uma utilização empírica, segundo o autor:

Por que as leis de Newton não são axiomas da matemática? Porque nós bem poderíamos imaginar que as coisas são de outra maneira. Mas - eu quero dizer - isso só atribui certo papel a essas proposições, em contraste com outros. Isto é, dizer que uma proposição: “Poderia ser imaginada ao contrário” ou “Podemos imaginar o oposto”, dá à proposição o papel de uma proposição empírica (WITTGENSTEIN, 2013, p. 225).

O caráter empírico está associado à proposição, no entanto a equação que resulta da proposição empírica é vista nos termos de uma proposição matemática, ou seja, uma proposição gramatical. Com o passar do tempo a proposição empírica se transforma em

uma regra, passa a ser uma proposição normativa, assim como a regra que diz que a temperatura ideal para o consumo da cerveja é de dois graus, por exemplo. O comportamento dos alunos dos grupos G2 e G3, ao escolherem temáticas que podem ser interpretadas, matematicamente, por meio da Lei de Resfriamento de Newton, evidencia para nós o *modo de ver* a proposição empírica já como uma regra para fenômenos envolvendo temperaturas, no caso considerando a variação da temperatura na produção do sorvete e no preparo da gelatina, respectivamente.

Segundo Wittgenstein (2013, §570): “os conceitos nos conduzem às investigações. Eles são a expressão de nosso interesse e conduzem o nosso interesse”. Aqui o que conduz a investigação dos alunos, no jogo de linguagem da matemática, é a Lei de Resfriamento de Newton. A interpretação dessa *lei* como uma equação diferencial ordinária coloca os alunos em contato com as regras para solução de EDOs internas à matemática. Para utilização da Lei do Resfriamento de Newton, os alunos procuram estabelecer relações com o uso dos termos matemáticos e os dados da situação-problema. A proposição é utilizada como proposição empírica, pois estabelece uma relação externa à Matemática. A temperatura ambiente é levada em consideração no modelo do resfriamento de Newton e nas funções matemáticas obtidas por meio da solução das EDOs. E a escolha dessa proposição mostra a escolha do jogo de linguagem que os alunos adentram para solucionar a situação-problema, os colocando nos passos da solução de uma EDO.

O modo de ver a EDO $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$, em que T indica a temperatura, t o tempo, T_a a temperatura ambiente e k uma constante de proporcionalidade, os alunos, nos diferentes grupos, podem tê-la interpretado como uma fórmula associada ao fenômeno de temperatura observado. Para Wittgenstein (2013, §156) “[...] se algo tem que estar atrás da articulação da fórmula”, trata-se de certas circunstâncias que me justificam dizer que sou capaz de continuar – caso a fórmula me ocorra [...]”. É possível inferir, então, que os alunos utilizam proposições matemáticas como proposições gramaticais que indicam como as coisas devem ser e dão indicativos de direção.

Segundo Silveira (2015), os enunciados matemáticos exercem o papel de regras e têm função normativa. As soluções da EDO são obtidas com base na utilização regras matemáticas que podem ser denominadas gramaticais, pois determinam a significação da EDO no jogo de linguagem da Matemática e desempenham papel de instrumentos de

linguagem. Relembremos Wittgenstein (2013, §569) que aponta, também, para o caráter instrumental da linguagem:

A linguagem é um instrumento. Seus conceitos são instrumentos. Pensa-se que não pode fazer *grande* diferença *quais* conceitos empregamos. [...] Mas isto também não é verdadeiro quando, por exemplo, os cálculos num sistema de medidas exigem mais tempo e mais esforço do que podemos depender.

A linguagem matemática se faz o instrumento que *pode* resolver as situações-problema colocadas. Suas regras são como placas de orientação que guiam os alunos na solução de uma EDO que resulta em uma relação para: a temperatura da cerveja em qualquer instante de tempo, em um congelador; a variação da temperatura do café no interior de uma garrafa; a variação na temperatura do sorvete no interior de um freezer; ou a variação da temperatura da gelatina no interior da geladeira.

No âmbito da modelagem matemática, Bassanezi (2002) e Stillman, Brown e Geiger (2015), abordam as especificidades associadas ao trabalho dos alunos em domínios matemáticos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Tanto Bassanezi quanto Stillman, Brown e Geiger indicam que na elaboração do modelo matemático os alunos necessitam de artefatos matemáticos e nesse contexto, Bassanezi (2002, p. 25) aponta o uso de um “um dicionário que interpreta, sem ambiguidades, os símbolos e operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado”.

No que se refere ao uso da Lei do Resfriamento de Newton, que declara que “a quantidade de calor que flui de um corpo com temperatura mais alta para outro corpo com temperatura mais baixa varia conforme a diferença entre as temperaturas dos dois corpos”. De acordo com Parolin, Soares e Johansson (2006), tal modelo é adequado para situações de resfriamento de temperatura, pois ao analisar o modelo exponencial sem considerar a temperatura ambiente vemos que quando $t \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$ o que é incoerente com o equilíbrio térmico, por exemplo, do congelador, do freezer, da geladeira e da garrafa térmica.

De acordo com Cifuentes e Negrelli (2011, p. 131) modelos matemáticos podem ser elaborados por meio de uma coleção de equações de diversos tipos, por exemplo, algébricas

ou diferenciais, ou “por uma coleção de sentenças que, como as equações, podem ser consideradas conjecturas (axiomas) sobre a realidade em estudo”. É na elaboração e/ou dedução de modelos matemáticos, durante a fase denominada por Almeida, Silva e Vertuan (2012) de resolução, que as regras associadas ao jogo de linguagem da Matemática são seguidas e seu emprego correto é discutido. Muitas vezes, os alunos seguem as regras sem consciência de estarem fazendo isso, mas em determinados momentos como na AT1 os alunos não recordam como trabalhar com logaritmos e exponenciais e precisam de auxílio para decidir sobre o emprego correto dessas propriedades durante a resolução das EDOs.

Segundo Wittgenstein (2013) uma regra pode ser entendida como uma placa de orientação e é nas linguagens dos alunos, do professor e dos materiais de instrução que as regras fazem sentido para os alunos que as estão aprendendo. Seguir a regra é como seguir um procedimento gramatical, visto que a regra normatiza os procedimentos tomados no desenvolvimento matemático da resolução de EDOs.

O jogo de linguagem da Matemática *jogado* pelos alunos no desenvolvimento dessas atividades está associado às EDOs de primeira ordem e a resolução das mesmas por dois métodos distintos: método de separação de variáveis e método do fator integrante. De modo geral, os alunos utilizam as regras associadas ao método de separação de variáveis nas cinco atividades desenvolvidas. Silveira (2008) aborda que quando seguimos regras corretamente mostramos que compreendemos o sentido da regra e o próprio problema define a regra que devemos aplicar. Na disciplina de EDO, os alunos estavam em uma situação de aprendizagem, em particular do uso de regras matemáticas associadas à resolução de uma EDO de primeira ordem linear. O diálogo travado pela aluna B1, no grupo G2, durante o desenvolvimento da atividade AT2 sinaliza a ansiedade da aluna com relação ao uso correto das regras associadas ao método do fator integrante.

Aluna B1: *Colocamos a EDO naquela forma e achamos o fator integrante, e agora?*

Professora: *Como você vai usar o fator integrante? Você multiplica ele por toda a sua igualdade.*

[...]

Professora: *e agora? Da para simplificar essa parte usando a derivada do produto não da?*

Aluna B1: *como?*

Aluna B2: *não entendi.*

Professora: *Vamos tentar assim, eu vou derivar isso daqui em relação ao tempo. Quando você deriva esse produto aqui, será em relação ao tempo, que é a*

variável independente. Como eu não sei a derivada da temperatura em relação ao tempo, como eu escrevo?

[os alunos prestam atenção enquanto a professora explica a derivada do produto da temperatura pelo fator integrante e o uso do teorema fundamental do cálculo para obter a primitiva desta derivada]

GR_AT2_MM1_G2.

O procedimento matemático atua como uma regra que é colocada em prática após explicação da professora. Segundo Gottschalk (2008, p. 88):

[...] o que vai nos dar a essência de um conceito matemático é sua aplicação, pois é no momento do uso do conceito que nos conectamos com toda sua gramática. [...] as atividades e os procedimentos que acompanham o uso dos símbolos são de natureza convencional.

O uso convencional, citado por Gottschalk (2008) e feito pelos alunos no desenvolvimento da atividade está associado à cadeia de proposições matemáticas que os alunos precisam lidar para resolver a EDO decorrente da situação matemática idealizada por meio do método do fator integrante. A natureza dessas proposições é convencional no sentido de serem regidas por uma gramática e atuarem, na Matemática, como regras de como proceder, neste caso, quando queremos resolver uma EDO linear de primeira ordem.

A aprendizagem de regras é colocada por Wittgenstein (2013; 1996) como a aprendizagem de uma lei de formação, a aprendizagem de um jogo de linguagem. Nesse sentido, os alunos imersos na disciplina de EDO, estão em contato com regras do jogo de linguagem da Matemática e de jogos de linguagem internos às regras de conceitos matemáticos, como no uso correto de métodos de resolução de EDOs lineares de primeira ordem.

Nas atividades AT4 e AT5 os alunos dos grupos G2 e G3, respectivamente, utilizam o método de separação de variáveis e o método do fator integrante para resolução de EDOs lineares de primeira ordem que foram interpretadas a partir de situações-problema formuladas pelos próprios alunos. O emprego correto das regras associadas a esse jogo de linguagem pode denotar a compreensão sobre o uso destes métodos de resolução, nesse contexto corroboramos com Wittgenstein (2013, § 150) quando o autor afirma que “[...] a palavra “saber” goza de estreito parentesco com a gramática das palavras “poder”, “ser capaz”. Mas também com a gramática da palavra “compreender”. (“Dominar” uma técnica.)”.

Já os alunos do grupo G1 no desenvolvimento das AT3.1 e AT3.2 usam o método de separação de variáveis quase que de maneira automática (Figura 5.9). Nesse momento, os alunos não explicitam o método utilizado por meio de convenções definidas na forma de vida dos matemáticos, mas utilizando informações do cálculo diferencial e integral, os alunos utilizam o teorema fundamental do cálculo para obter a velocidade.

Figura 5.9 Cálculo para obter a velocidade de um ônibus espacial, alunos do grupo G1

<p>Função (1) na EDO</p> $0,15 * t + 15 = \frac{dv}{dt}$ $(0,15 * t + 15)dt = dv$ $0,15 \int t dt + 15 \int dt = \int dv$ $v = \frac{0,15 * t^2}{2} + 15 * t + c$	<p>Função (2) na EDO</p> $-0,1 * t + 20 = \frac{dv}{dt}$ $(-0,1 * t + 20)dt = dv$ $-0,1 \int t dt + 20 \int dt = \int dv$ $v = \frac{-0,1 * t^2}{2} + 20 * t + c$	<p>Função (3) na EDO</p> $0,18 * t + 6 = \frac{dv}{dt}$ $(0,18 * t + 6)dt = dv$ $0,18 \int t dt + 6 \int dt = \frac{dv}{dt}$ $v = \frac{0,18 * t^2}{2} + 6 * t$	<p>Função (4) na EDO</p> $-0,75 * t + 99 = \frac{dv}{dt}$ $(-0,75 * t + 99)dt = dv$ $-0,75 \int t dt + 99 \int dt = \int dv$ $v = \frac{-0,75 * t^2}{2} + 99 * t + c$
<p>Função (5) na EDO</p> $9 * e^{0,001702752079 * t} = \frac{dv}{dt}$ $9 \int e^{0,001702752079 * t} dt = \int dv$ $v = 5.285,56746 * e^{t * 0,001702752079} + c$	<p>Função (6) na EDO</p> $15 * e^{0,001464990286 * t} = \frac{dv}{dt}$ $15 \int e^{0,001464990286 * t} dt = \int dv$ $v = 10.238,9777 * e^{t * 0,001464990286} + c$	<p>Função (7) na EDO</p> $0 * t + 29 = \frac{dv}{dt}$ $29 dt = dv$ $29 \int dt = \int dv$ $v = 29 * t + c$	<p>Função (8) na EDO</p> $-1,45 * t + 754 = \frac{dv}{dt}$ $(-1,45 * t + 754)dt = dv$ $-1,45 \int t dt + 754 \int dt = \int dv$ $v = \frac{-1,45 * t^2}{2} + 754 * t + c$

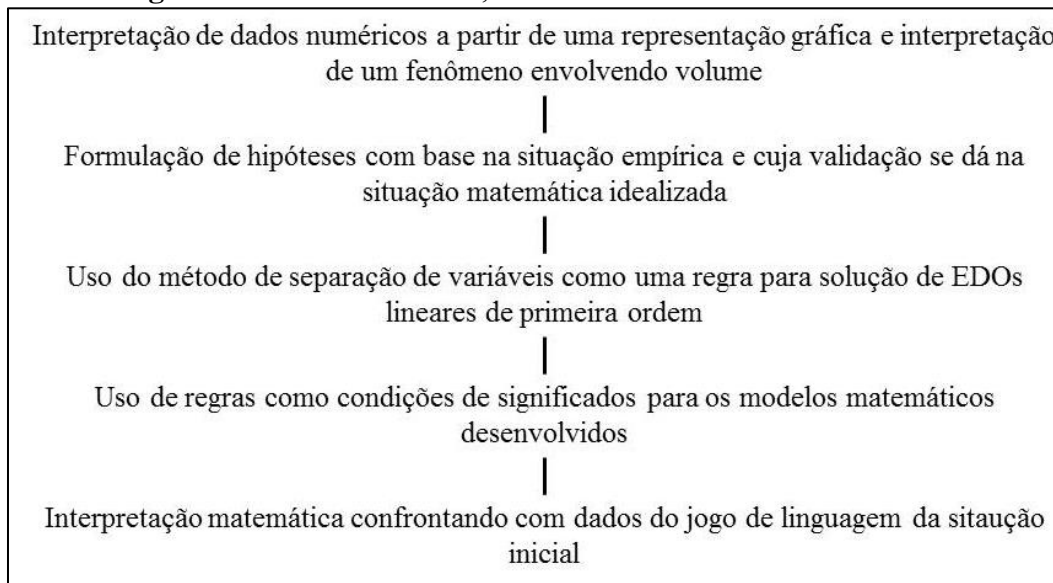
Fonte: RE_AT3.1_MM3_G1.

Já na AT3.2 considerando das variáveis em estudo (V – volume total de grãos no silo; t – tempo; v – velocidade; h – altura dos grãos no silo conforme o silo se esvazia) os alunos do grupo G1 declaram ter resolvido as EDOs $S(h) \frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$ por meio do método de separação de variáveis, obtendo $h^{1/2} = \frac{-at\sqrt{2g}}{2\pi R^2} + c$, em que c é a constante de integração, e resolvendo um problema de valor inicial com as condições no tempo $t = 0$, $h = h_0$, tendo como solução $h^{1/2} = \frac{-at\sqrt{2g}}{2\pi R^2} + h_0^{1/2}e$, nesse contexto, $t = \frac{2\pi R^2\sqrt{h}}{a\sqrt{2g}} + d$. Os dados para obtenção da constante d são interpretados com base nas condições iniciais declaradas na situação-problema, ou seja, que o silo cheio tem 6000 toneladas de grãos em 21 metros de altura, e assim $t = \frac{2\pi R^2\sqrt{h}}{a\sqrt{2g}} + 14,38$.

Nos dois casos, as regras associadas ao método de separação de variáveis atuam como condições de significado para os resultados obtidos na análise das situações-problema

tanto da velocidade do ônibus espacial, no momento de subida, quanto para o esvaziamento do silo (Figura 5.10).

Figura 5.10 Linha narrativa, desenvolvimento da AT3.1 e AT3.2



Na resolução das EDOs de primeira ordem, os alunos se deparam com conceitos matemáticos por eles já vistos e sentem a necessidade de discutir o uso dos conceitos matemáticos com vistas à situação-problema em estudo, por exemplo dúvidas sobre propriedades de conceitos matemáticos, como da função exponencial e da logarítmica.

Aluno A4: *eu tirei o Euler*

Aluno A1: *como assim?*

Aluno A4: *olha o que eu fiz aqui,*

Aluno A1: *aaa entendi, você usou o ln.*

Aluno A4: *quando eu aplico o ln aqui, ele cai o expoente e fica 1.*

Aluna A3: *entendi.*

Aluno A1: *como assim cai o expoente?*

Aluno A4: *então, é a propriedade de logaritmos.*

Aluno A1: *entendi, porque quando você aplica o ln dos dois lados, aqui some o e e fica ln né? Ai fica ln disso e 20k aqui.*

Aluno A4: *falta aplicar do outro lado.*

GR_AT2_MM1_G1.

Mesmo que os alunos já tenham tido experiências prévias com tais conceitos matemáticos, é no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática que os alunos

revivem o uso de tais conceitos. Almeida e Vertuan (2014, p. 17) já sinalizavam que “Ao fazer uso da matemática, [...] os alunos podem aplicar conhecimentos já construídos durante as aulas ou construir novos conhecimentos”. Nesse contexto, corroboramos com Wittgenstein (2013, § 432) que um signo só vive a partir de seu uso “Ele *está* vivo no uso”, como os signos associados aos conceitos matemáticos lembrados durante o uso requerido pela atividade de modelagem matemática.

Em entrevista sobre as realização das atividades AT1 e AT2, a aluna A3 sinaliza que uma das coisas que aprendeu durante a realização das atividades de modelagem matemática está associada ao conceito de exponenciais e logaritmos:

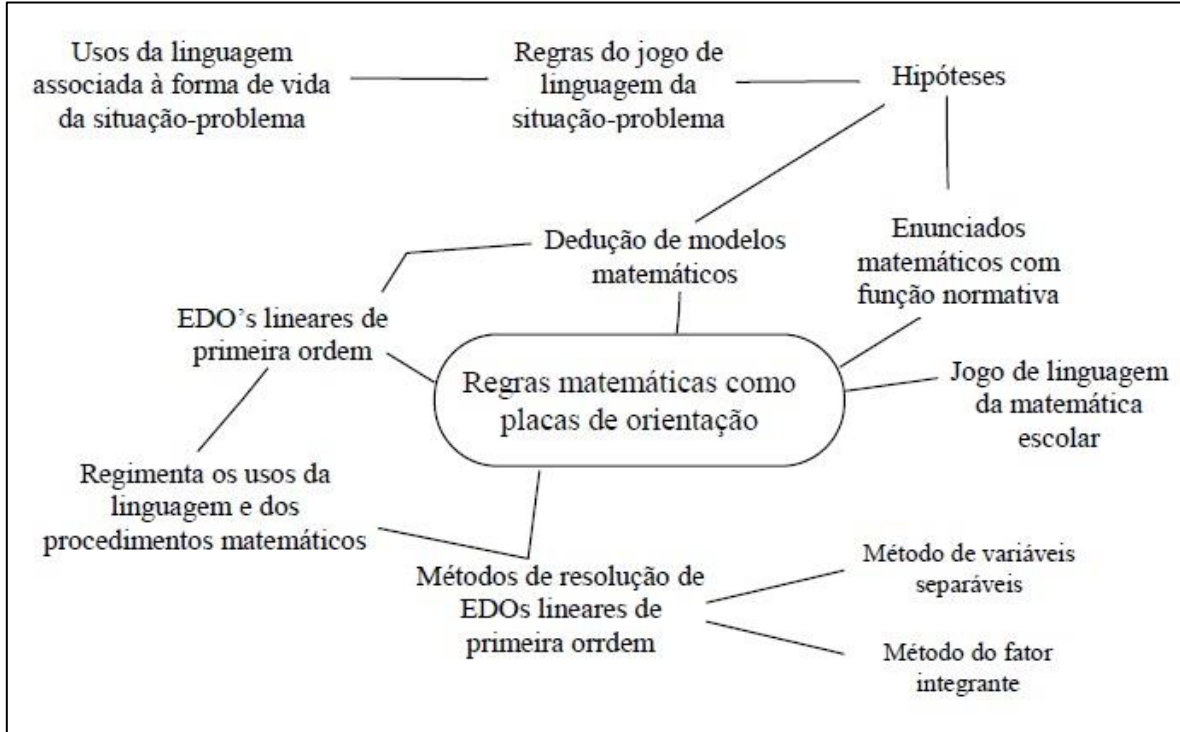
Aluna A3: *eu aprendi aquela parte de logaritmos, da inversão do ln, aquilo eu não sabia, eu aprendi na atividade [...] cálculo integral e diferencial, porque eu tenho muita dificuldade e é algo que eu estou aprendendo também ham... uma noção também de como fazer modelagem, porque eu não havia presenciado isso até então.*

GR_AT1_AT2_A3.

Podemos trazer à tona, também, as palavras de Gottschalk (2008, p. 88) quando a autora menciona que o que nos dá a essência de um conceito matemático é sua aplicação “[...] é no momento do uso do conceito que nos conectamos com toda sua gramática”. E nesse jogo de linguagem os alunos relembram o uso de conceitos matemáticos já conhecidos e aprendem as regras relacionadas ao uso de novo conceitos matemáticos. E assim, as construções gramaticais internas ao jogo de linguagem da Matemática ganham vida no jogo de linguagem da atividade de modelagem matemática. Podemos relacionar esse *ganhar vida* com a argumentação de Moreno (2003, p. 119): “as construções gramaticais não são objetivas e nem subjetivas [...] Estão ligadas, todavia, ao mundo natural pelo uso [...]”.

Sobre o uso de regras em atividades de modelagem matemática esboçamos a árvore de associação de ideias da Figura 5.11.

Figura 5.11 O uso de regras para modelos matemáticos associados às EDOs de primeira ordem e a Filosofia da Linguagem



Após a resolução das EDOs, os alunos buscam uma solução para a situação-problema declarada em cada uma das atividades de modelagem matemática, por meio da Matemática utilizada e dos modelos matemáticos desenvolvidos. Uma análise matemática é então elaborada considerando as situações-problema em estudo.

Nas atividades AT1, AT2, AT4 e AT5 os alunos utilizam a Lei de Resfriamento de Newton e obtêm modelos matemáticos assintóticos para analisar as situações-problema. Nessas atividades, após a obtenção da relação matemática de temperatura em função do tempo a situação-problema solicitava o tempo ideal para que determinada temperatura fosse atingida, por exemplo, a temperatura ideal para que a gelatina estivesse pronta era de quatro graus célsius, para o resfriamento da cerveja de dois graus célsius, etc.

Nas atividades AT2, AT4 e AT5 a partir dos modelos matemáticos obtidos os alunos conseguem responder às situações-problema e as questões colocadas pela professora ou por eles formuladas. No entanto, na AT1 quando os alunos decidiram utilizar a função para obter o tempo em que a temperatura ideal seria de dois graus célsius os alunos percebem a inviabilidade do uso do modelo matemático obtido, como, por exemplo, sinaliza o diálogo dos alunos do grupo G1:

Aluno A1: *Aquela temperatura é como se fosse o limite, eu posso me aproximar dela, mas na função eu não terei como tocá-la.*

Professora. *E agora para achar o tempo que tem que se aproximar desse dois, o que você pode fazer?*

Aluno A1: *Quando calcula para 2 da zero.*

Professora. *E o que eu posso analisar?*

Aluno A1: *Próximo de 2.*

Aluno A4: *Mas ela não pode congelar.*

Aluno A1: *Que é -2, vamos colocar então 1,99?*

GR_AT1_MM1_G1.

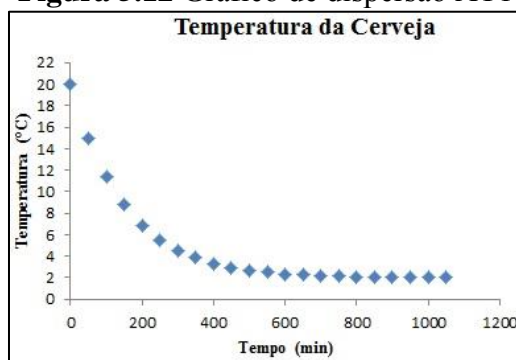
Ocorre que a função $T = 2 + 18 \cdot e^{-0,0065t}$, em que T é a temperatura em graus célsius e t o tempo, dado em minutos, é uma função exponencial assintótica, uma curva plana com inibição, cujo valor assintótico se dá no ponto em que a temperatura é igual a dois graus célsius, exatamente a temperatura dita como ideal para o consumo da cerveja. Quando os alunos tentam utilizar a temperatura ideal para obter o tempo que a cerveja deve ser deixada no congelador, os mesmos não conseguem, pois o jogo de linguagem da Matemática os impede, visto que a função não estará definida para uma temperatura de dois graus célsius. Mesmo a situação-problema enunciando um uso empírico da temperatura ideal para o consumo da cerveja, os alunos ao matematizar a situação adentram no jogo de linguagem da Matemática e a partir disso a Matemática normatiza o uso que os alunos farão do modelo matemático com vistas à responder a situação em estudo.

Os alunos decidem pela utilização de uma temperatura ideal próxima de dois graus célsius e percebem que quanto mais próximo de dois graus colocarem como temperatura ideal, maior será o tempo de refrigeração da cerveja. Utilizando a aproximação para a temperatura ideal da cerveja como 1,99 °C, como resposta, os alunos do grupo G1 declaram que a cerveja deve ficar por 19 horas no congelador, mas acham o resultado demasiadamente exagerado e buscam por erros nos cálculos. Utilizando de uma aproximação de 2,1°C os alunos do grupo G2 obtém o correspondente a 13 horas de resfriamento para que a cerveja esteja próxima da temperatura ideal de 2°C para o consumo.

Se considerarmos os valores obtidos por meio da função temperatura – com o modelo matemática dado pela Lei de Resfriamento de Newton, sendo T uma variável discreta cujos valores formam uma sequência de pontos, verificaremos que tais pontos

convergem para a temperatura de dois graus célsius, mas nunca de fato chegam a este valor, pois este é dito como o limite dessa sequência. Veja no gráfico disposto na Figura 5.12 que após determinado tempo todos os valores se aproximam da temperatura de dois graus célsius, no entanto o tempo está tendendo ao infinito.

Figura 5.12 Gráfico de dispersão AT1



Desse modo é preciso considerar um tempo coerente com as experiências empíricas associadas à temática da situação-problema, visto que a gramática da Matemática pode não ter respostas seguras com relação ao tempo de resfriamento da cerveja por meio do modelo matemático considerado. Aqui a proposição matemática é lida em função dos dados da situação-problema inicial, e pode-se dizer que se transforma em uma proposição empírica, visto que a função matemática obtida serve a um propósito e para um caso específico. Uma regra, que pode ser interpretada naquela situação específica e ali pode fazer sentido e ter um significado “as proposições, os enunciados, não possuem significados, mas fazem sentido na medida que representam um estado de coisas, ou uma situação possível” (VEIGA-NETO, 2007, p. 9).

Assim, no momento da interpretação e resposta para o problema, uma suposição se faz necessária, visto que a análise do modelo matemático, quando comparado aos dados da situação-problema original, não faz sentido. Como destaca Pollak (2015), em atividades de modelagem matemática os resultados matemáticos, por vezes, podem extrapolar a situação matemática idealizada – situação essa colocada a partir do uso da Lei de Resfriamento de Newton. Neste momento, o jogo de linguagem associado à situação-problema, e à temperatura ideal da cerveja predomina, não vinculando especificidades das regras matemáticas associadas ao jogo de linguagem da Matemática.

A relevância para o uso de tais modelos matemáticos nas atividades AT1, AT2, AT4 e AT5 está associada intrinsecamente ao uso de conceitos já vistos na disciplina de EDO e à possibilidade que os alunos dos grupos G2 e G3 encontraram de formular uma situação-problema com algo que eles já conheciam da disciplina, a saber o emprego correto da Lei de Resfriamento de Newton. As situações-problema, estudadas pelos alunos, estão associadas assim o analogias feitas por eles com as atividades AT1 e AT2 desenvolvidas em sala de aula. Na filosofia de Wittgenstein, o uso de analogias está associado, também, à formação de conceitos:

Se é possível explicar a formação do conceito a partir de fatos naturais, então, ao invés da gramática, não nos deveria interessar aquilo que na natureza constitui a sua base? – Interessa-nos, sem dúvida, também a analogia de conceitos com fatos naturais muito genéricos. (Como aqueles que, por causa da sua generalidade, normalmente não se fazem notar). [...] Não digo: se tais e tais fatos naturais fossem diferentes, as pessoas teriam conceitos diferentes (no sentido de uma hipótese). [...]

Compare um conceito com um estilo de pintura: será que somente nosso estilo de pintura é arbitrário? Podemos escolher um conforme o gosto? (p. ex.: o estilo dos egípcios). Ou trata-se aqui apenas de bonito e feio?

(WITTGENSTEIN, 2013, p. 295).

Assim, o conceito de equação diferencial ordinária de primeira ordem pode tomar forma na medida com que os alunos investigam usos diferentes para aplicação, em particular por meio da interpretação da Lei de Resfriamento de Newton. Poderíamos dizer, também, que o uso da linguagem matemática nesse caso se dá de maneira mecânica, apenas reproduzindo passos já percorridos em outros momentos. No entanto, saber seguir regras é algo essencial nos jogos de linguagem da Matemática, e para se conectar com a gramática associada às EDOs de primeira ordem é preciso se conectar com aplicações deste conceito matemático.

Os alunos do grupo G1 utilizam o conceito de EDO de primeira ordem, nas atividades aqui discutidas AT1, AT2, AT3.1 e AT3.2, por meio de fenômenos de temperatura, fenômenos de velocidade e de volume. No entanto, após obter a equação diferencial ordinária, os alunos utilizam sempre o método de separação de variáveis para resolução das EDOs, fomentando a prática com este recurso matemático. É na interpretação e resposta para as situações-problema que as ideias matemáticas dos alunos se articulam, mais uma vez, ao fenômeno em estudo. Mais uma vez, pois quando matematizam as

situações é possível observar uma análise matemática vinculada aos dados da situação-problema, bem como ao que faz sentido investigar com base na situação.

A resposta obtida para a função velocidade na atividade do ônibus espacial é dada pelos alunos por meio de uma função definida por nove sentenças. Quando questionados da viabilidade do modelo matemático obtido, os alunos sinalizam que a modelagem matemática foi feita considerando dados da NASA, agência responsável pelas pesquisas associadas ao ônibus espacial e que mesmo considerando a matemática associada à aceleração e à velocidade algo simples, analisar a velocidade da subida de um ônibus espacial ao espaço é considerado um fenômeno complexo, devido às especificidades envolvidas para dedução do modelo matemático. Por exemplo, na dedução do modelo é preciso considerar a variação do combustível, no tanque externo do ônibus, associada à aceleração e desconsiderar outras variáveis que atuam na perda de combustível pelo booster, como a temperatura, o coeficiente de dilatação, a dilatação dos três foguetes principais, a resistência do ar, a velocidade do ar, dentre outras.

Podemos associar o modelo matemático associado à velocidade de subida do ônibus espacial com o que Cifuentes e Negrelli (2011, p. 131) denominam de uma *teoria matemática* “O modelo matemático finalmente obtido é uma *teoria* que pode estar dada por uma coleção de equações de diversos tipos [...] dependendo da complexidade do recorte a ser modelado [...]”, os autores enfatizam, ainda, o caráter conjectural da atividade de modelagem matemática, devido às suas conclusões plausíveis, mas não necessariamente verdadeiras sobre o fenômeno em estudo.

Na AT3.2, os alunos fazem uso de textos associados à mecânica de fluidos e traduzem a situação do volume do silo, passo a passo para a linguagem matemática. Ao responder à situação-problema em estudo, sobre o volume de grãos existente dentro do silo em qualquer instante de tempo e o tempo necessário para esvaziar o silo, os alunos do grupo G1 levam em consideração não apenas os modelos matemáticos obtidos, mas também as condições de trabalho dos funcionários que operam o esvaziamento do silo. Tal fato coloca em evidência a relevância social da atividade de modelagem matemática desenvolvida.

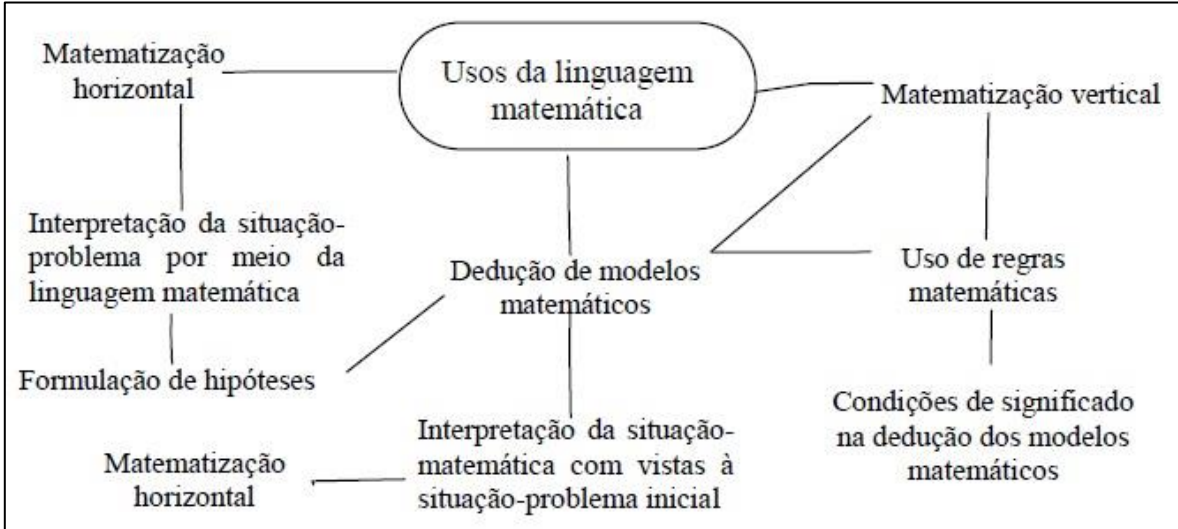
Na AT3.2, o tempo de esvaziamento do silo é dado por $t = \frac{2\pi R^2 \sqrt{h}}{a\sqrt{2g}} + 14,38$, e são informações coletadas pelos alunos na cooperativa agroindustrial: o silo cheio tem 6000

toneladas de grãos em 21 metros de altura; restarão no silo para serem esvaziados por meio de trabalho manual cerca de 1300 grãos, o correspondente a uma altura de 4,55 metros; o trabalho manual é feito em oito horas diárias de trabalho durante aproximadamente 3 dias. Utilizando as informações os alunos calcularam o tempo de esvaziamento do silo até restar as 1300 toneladas de grãos no silo, considerando $h = 16,45$, a vazão de $200 t/h$ e $\pi R^2 = \pi 10^2$ obtendo $t = 27,11$ horas para o esvaziamento automático e mais três dias de recursos humanos necessários para acionar o esvaziamento manual, o que resulta em aproximadamente sete dias para esvaziamento total do silo. Os alunos do grupo procuraram a cooperativa agroindustrial para validar as informações obtidas por meio da atividade de modelagem matemática e para informar os resultados obtidos por meio da matemática.

Segundo Freitas (2013), o processo de matematização não deve se restringir à construção do modelo matemático, mas considerar o entendimento ampliado da situação global associada à situação-problema. Os alunos sinalizam a problematização da situação-problema por meio da linguagem matemática.

O uso das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem faz com que os alunos atribuam significados aos conceitos matemáticos atrelados aos fenômenos de temperatura, velocidade e volume de escoamento de grãos, normatizando situações empíricas por meio da Matemática. O trabalho com a atividade de modelagem matemática chama para o palco o conceito matemático em questão, que nos mostra o *uso* na linguagem de tal conceito e, segundo Wittgenstein (2013) pode associar significados à estes usos, visto que o significado de algo é seu uso na linguagem. Para resolver a situação-problema os alunos *jogam* com o jogo de linguagem da Matemática e da situação-problema, mas sempre indo e vindo da situação-problema inicial para sua interpretação na Matemática, e vice-versa evidenciando a matematização horizontal e a matematização vertical, como denotado por Almeida e Silva (2015) (Figura 5.13).

Figura 5.13 Usos da linguagem matemática, matematização nas atividades de modelagem matemática



Na próxima seção evidenciamos o uso de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, bem como a interpretação com relação à Filosofia da Linguagem e a Modelagem Matemática na Educação Matemática.

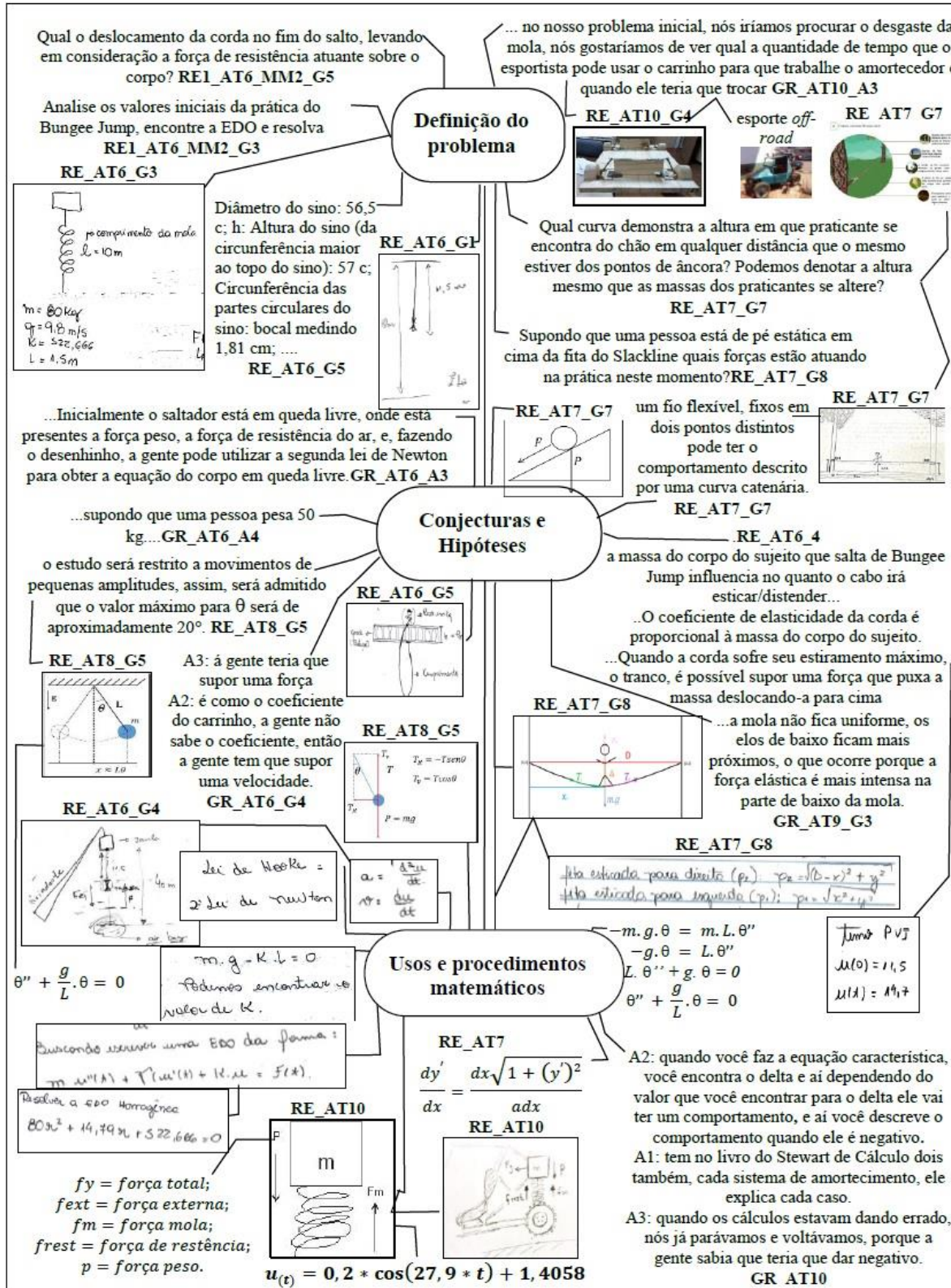
O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM

Os usos de conceitos matemáticos associados às equações diferenciais de segunda ordem emergiram em cinco das dez atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos:

- AT6, A prática do Bungee Jump – alunos dos grupos G4, G5 e G3;
- AT7, Slackline: um show de manobras – alunos dos grupos G7;
- AT8, Pêndulo – alunos do grupo G5;
- AT9, Mola Maluca – alunos do grupo G3;
- AT10, Princípio Básico do amortecedor automotivo – alunos do grupo G4.

A Figura 5.14 visa sintetizar as ramificações do fluxo de ideias dos alunos nas diferentes configurações de grupo que possibilitaram o desenvolvimento das atividades.

Figura 5.14 O uso da linguagem e de procedimentos dos alunos: as EDOs de segunda ordem



No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, os alunos buscaram utilizar equações diferenciais ordinárias de segunda ordem homogêneas e não-homogêneas. Solucionaram EDOs com coeficientes constantes, utilizando para tanto situações em que vislumbravam possíveis aplicações deste conceito matemático. Nessas atividades, os usos da linguagem foram norteados pela definição e interpretação das situações-problema em estudo, pelas hipóteses e conjecturas formuladas e pelos conceitos matemáticos que se fizeram necessários para análise da situação matemática idealizada e da situação inicial investigada.

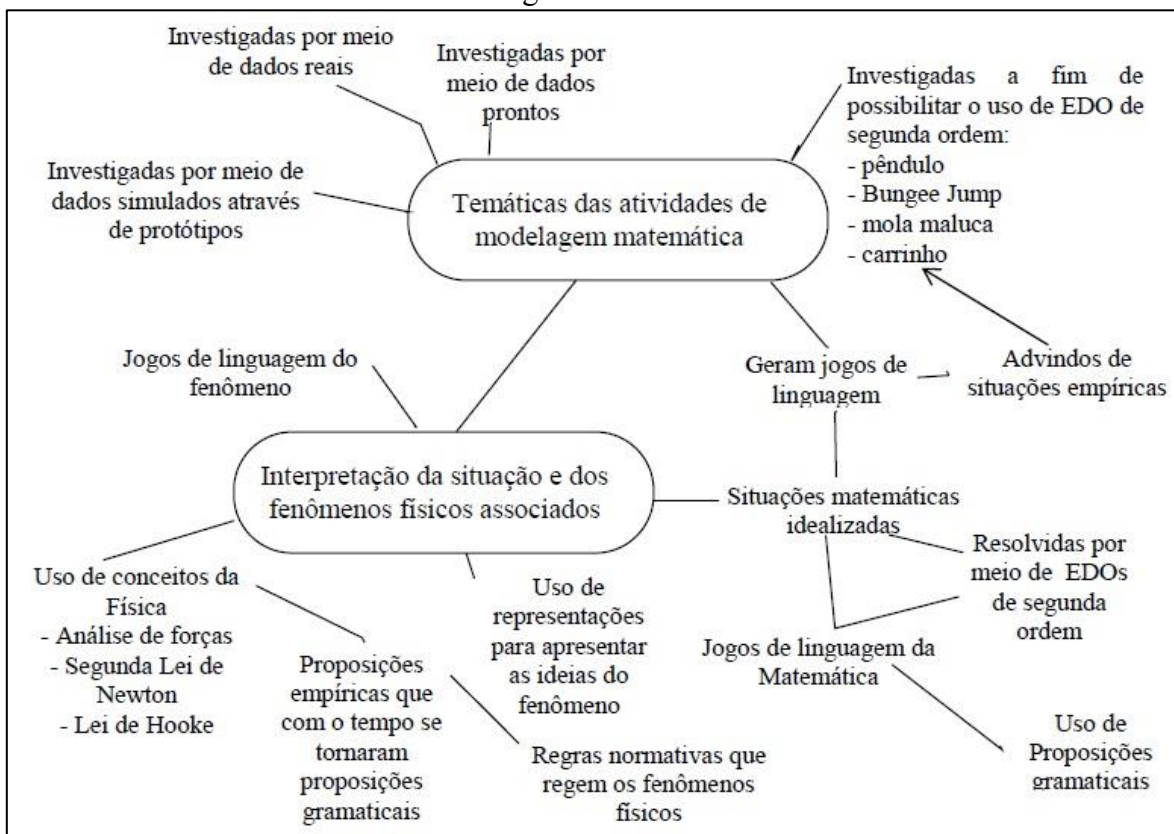
As atividades de modelagem matemática em que os alunos vislumbraram os usos de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem foram desenvolvidas após o segundo semestre da disciplina de EDO.

Na realização da atividade AT6, todos os alunos participantes da pesquisa buscaram interpretar a problemática enunciada na atividade por meio de uma EDO de segunda ordem. O jogo de linguagem que normatiza o salto do Bungee Jump, associado a essa prática em particular, é utilizado pelos alunos no momento de retirado dos dados para delineamento da situação-problema. Na suposição de quanto a corda irá se estender, a altura que o praticante irá saltar, a massa do sujeito que saltará entre outros dados necessários. A partir dessas suposições, os alunos adentram no jogo de linguagem da Matemática.

Na atividade AT8, os alunos buscam informações sobre a igreja de Santa Mariana e coletam dados do pêndulo como comprimento, largura, altura do sino, circunferência das partes circulares do sino, entre outros que vislumbrem como necessários para a obtenção de uma equação diferencial ordinária associada ao movimento oscilatório do sino da igreja. Já na AT7, sobre a prática de Slackline, os alunos em conjunto com a professora recorrem a um instrutor para obter informações sobre o Slackline. Os alunos do grupo G7 elaboram um tutorial para iniciantes que queiram praticar o esporte. Já na atividade AT10 os alunos necessitaram informações sobre esportes *off road* para formular uma situação-problema e resolvê-la com base nas regras da Matemática. As proposições iniciais utilizadas pelos alunos estão associadas à linguagem natural, mas a necessidade de traduzi-las para a linguagem matemática entra em cena a partir das conjecturas e da formulação de hipóteses dos alunos.

A árvore de associação de ideias da Figura 5.15 sintetiza nossa interpretação sobre o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e aspectos da Filosofia da Linguagem nesse contexto:

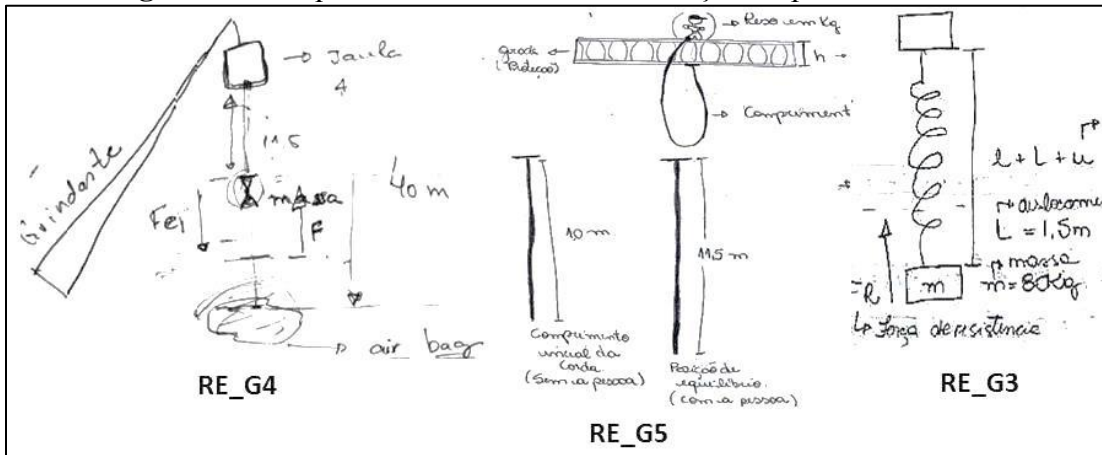
Figura 5.15 Atividades de modelagem matemática e Filosofia da Linguagem, EDO de segunda ordem



Após a tradução de linguagem, os jogos de linguagem estão associados às regras do jogo que regem os usos da Matemática, em particular, no âmbito escolar. Silveira (2015, p. 11) aborda que “os enunciados matemáticos exercem o papel de regras, ou seja, têm função normativa, possibilitando passar de uma proposição empírica para outra, ou produzindo novas conexões entre os conceitos”.

Os alunos, dispostos nos grupos G3, G4 e G5, interpretaram a situação do Bungee Jump por meio da dedução de uma EDO baseada em um sistema massa-mola. Para tanto inicialmente buscaram entender as regras associadas ao salto de Bungee Jump por meio de esquemas visuais que auxiliaram os alunos na formulação de conjecturas e de hipóteses.

Figura 5.16 Esquemas elaborados na formulação do problema – AT6



Os esquemas da Figura 5.7 representam a interpretação dos alunos do fenômeno em estudo, o *modo de ver* a situação já a associando aos conceitos matemáticos que serão necessários para resolvê-la, o que os alunos *ter em mente* sobre a situação do Bungee Jump. Podemos relacionar à elaboração de desenhos e esquemas à representação da situação-problema como os alunos a interpretam. Retomamos as palavras de Wittgenstein (2013, § 395-397) para evidenciar o entendimento de representação a partir da posição filosófica que assumimos neste texto:

395. Há falta de clareza sobre que papel desempenha a *representabilidade* na nossa investigação, e até que ponto, pois, ela consolida o sentido de uma proposição.

396. Para a compreensão de uma proposição, é tão pouco essencial que se represente alguma coisa com ela quanto esboçar um desenho a partir dela.

397. Ao invés de “representabilidade” pode-se dizer aqui também: apresentabilidade em um determinado meio da apresentação. E de uma tal apresentação, todavia, *pode* um caminho seguro conduzir para outro emprego. Por outro lado, uma representação pode nos importunar e não servir para nada.

Poderíamos entender, ainda, que os esquemas retratados pelos alunos são descrições do fenômeno que investigam. Sobre as descrições, Wittgenstein (2013, § 291) indica que:

O que chamamos de “*descrições*” são instrumentos para empregos especiais. Pense aqui num desenho de uma máquina, numa secção, num plano que o mecânico tem diante de si. Pensar numa descrição como uma representação verbal dos fatos tem algo de desorientador: Pensa-se talvez apenas em quadros, como os que estão pendurados nas nossas paredes;

quadros estes que parecem simplesmente reproduzir o aspecto e a constituição de uma coisa. (Estes são, por assim dizer, quadros inúteis).

Nesse contexto, a descrição tem que passar para o outro algo mais, algo para além de uma mera paisagem. Entendemos que os esquemas feitos pelos alunos fazem parte da tradução entre a linguagem natural e a linguagem matemática, podemos considera-los como a apresentação feita de seus *modos de ver* que os conduziu à busca pela compreensão das leis de movimento associadas ao jogo de linguagem da Matemática. Na atividade sobre a prática do Slackline, os alunos do grupo G7 também utilizaram o recurso a um esquema para apresentar suas ideias sobre a situação-problema em estudo.

A partir dos esquemas, na atividade AT6, os alunos dos grupos G3, G4 e G5, formularam hipóteses já com vistas ao uso de regras matemáticas, no uso da Lei de Hooke e da segunda Lei de Newton. Os alunos modeladores da atividade AT10, sobre o princípio do amortecedor automotivo também fazem uso desses mesmos conceitos matemáticos, no entanto com vistas a uma equação diferencial com que possam estudar o desgaste da mola de um carrinho *off road*.

Nessas atividades, as proposições utilizadas pelos alunos são de natureza empírica, mas com o caráter de regras, ou seja, tais proposições para os alunos se colocam como proposições gramaticais, na medida em que normatizam a experiência deles na dedução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. A prática dos alunos com o conceito é então condicionada pela estrutura da linguagem. Podemos retomar as palavras de Moreno (2003, p. 129) quando o autor aborda o caráter convencional das proposições gramaticais, sinalizando que as mesmas “estão sujeitas aos mesmos percalços empíricos do que as proposições descritivas”.

O uso dessas proposições como normativas conduzem os alunos a hipóteses que tratam do estudo do movimento, em particular do movimento de queda livre, mas que tem origem já na linguagem matemática, como sinaliza o diálogo do grupo G4:

Aluno A3: *á gente teria que supor uma força*

Aluno A2: *é como o coeficiente do carrinho, a gente não sabe o coeficiente, então a gente tem que supor uma velocidade.*

[...]

Aluno A3: *com a corda estendida há a inclusão da força elástica, dessa forma utiliza-se mais uma vez a segunda lei de Newton para descrever o movimento. Então a gente tem a massa vezes a aceleração*

Aluno A2: *que é a força resultante*

GR_AT6_MM2_G4.

O entendimento de que a força de elasticidade da corda é proporcional à massa do corpo do sujeito, leva os alunos do grupo G4 à força de elasticidade, dada por $k \cdot m = F$, em que k é uma constante de proporcionalidade e m a massa do sujeito. A passagem da proposição empírica, referente à massa do corpo do sujeito, para a proposição gramatical $k \cdot m = F$ se dá no interior da formulação de uma única hipótese. Nesse contexto, são as regras gramaticais da Matemática da disciplina de EDO que regem a formulação de hipóteses nas atividades em que os alunos buscam deduzir a EDO de segunda ordem, como, por exemplo as atividades AT6, AT8 e AT10.

Antes mesmo de propor um problema para a investigação, os alunos do grupo G5 sinalizam a imersão no jogo de linguagem da Matemática presente na disciplina de EDO:

Na tentativa de elaborar um problema que pudesse ser relacionado com modelos já conhecidos, os proponentes da atividade se questionaram a respeito das equações diferenciais na forma $ay'' + by' + cy = f(t)$ em que a , b e c são constantes, y é uma função real e y'' e y' são suas diferenciais. Alguns problemas podem ser resolvidos por meio deste modelo, desde que se tenham condições iniciais que deem indícios para a formulação de um problema de valor inicial (PVI), com $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y'_0$.

RE_AT8_MM3_G5.

De modo geral, os alunos que recorrem ao uso de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem esbarram no obstáculo de estruturar a situação-problema em estudo com as regras matemáticas que regem a dedução e resolução de EDOs de segunda ordem.

O primeiro obstáculo com que os alunos se deparam está associado à necessidade de fazer suposições para a continuidade da atividade de modelagem matemática. Tal fato, é sinalizado por Bean (2001) como característico de uma atividade de modelagem matemática. De acordo com Almeida (2014) são as hipóteses que se tornaram o guia para o desenvolvimento da atividade, para o detalhamento de uma situação matemática com a qual seja possível resolver a situação-problema inicial. Os diálogos dos grupos G5 e G3 durante o desenvolvimento da atividade sobre o salto de Bungee Jump sinaliza a dificuldade na obtenção de dados para dar continuidade à atividade:

Aluno A4: *Vamos fazer uma suposição, de uma pessoa que pesa tanto, [...] escreve aí supondo que uma pessoa pesa 50 kg.*

Aluno B1: *é porque aqui fala de uma de 50...*

Aluno A4: *então vamos pegar uma de 25 kg?*

Aluno B1: *não, a gente pode usar uma de 50 kg mesmo, porque aqui fala que não tem limite de idade, mas tem limite de peso, o único limite é o peso mínimo de 40 kg.*

GR_AT6_MM2_G5.

Aluno C1: *a gente podia procurar assim “se tiver 60 kg de massa, quantos quilos vai dar no final da queda?” seria legal?*

Aluno C5: *só que a gente tem que pensar em um problema de valor inicial, então a gente tem que ter valores iniciais.*

[...]

Aluna C5: *se a gente vai usar a velocidade, então a gente tem que ter a velocidade...*

[alunos discutem sobre possíveis valores iniciais]

Aluna C5: *só que se a gente vai estudar a mola, a gente precisa saber a velocidade inicial também. O u e o u', o u' é a velocidade. Então a gente não poderia usar o peso.*

GR_AT6_MM2_G3.

Após simplificar os dados da situação de modo que caibam em uma situação-problema para estudo, os alunos formalizam a formulação de hipóteses. No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, os alunos utilizam de hipóteses a partir de três fontes diferentes: a partir de dados prontos retirados de textos da internet, como na atividade AT6, sobre o Bungee Jump; a partir de dados fabricados, como na atividade AT10 em que os alunos fabricam o protótipo de um carrinho de *off road* para a investigação; a partir de dados reais, como nas atividades AT7, AT8, AT9 e AT10.

Podemos associar a atividade dos alunos a partir das hipóteses formuladas a partir dos dados prontos, assim como as hipóteses formuladas a partir de dados reais se colocaram, como um dos tipos de matematização colocada Vidigal e Bean (2016, p. 254), “um inter-relacionamento conceitual dos quadros conceituais de uma ou mais comunidades com aqueles da matemática em que a lógica da interdependência de ideias constrói uma compreensão da situação como é o caso do modelo galileano para a queda livre”. AS hipóteses formuladas a partir do protótipo de carrinho da atividade AT10 não se mostraram eficientes, pois os alunos não conseguiram deduzir a equação diferencial correspondente ao movimento da mola do carrinho devido a falta de dados reais e a instabilidade das molas utilizadas no protótipo, conforme sinaliza o diálogo dos alunos:

Aluno A1: *na nossa discussão a gente achou que daria para trabalhar com o sistema de amortecimento de mola, aí surgiu o carrinho e depois do carrinho surgiram outras ideias que nos levou ao off road, a ideia era só estudar isso aqui [aponta o protótipo]*

Aluno A2: *é a ideia era só simular, mas depois a gente percebeu que não dava, poderia até dar [...] é essa hipótese do peso dividindo nas quatro rodas surgiu desse, depois só confirmamos com o rapaz, porque ele está se formando em engenharia mecânica e ele confirmou que o peso é distribuído nas quatro rodas. Naquele lá não, porque são duas rodas para um sistema, então divide por dois. Mas se fosse que nem um off road então com certeza seria como esse.*

[como seria com o carrinho]

Aluno A1: *a mola era muito fraca.*

Aluno A2: *não estava na escala, o que dificultou.*

Aluna A3: *e tinha que estar bem no meio né.*

Aluno A2: *é daquele primeiro que deu errado, como a mola não possui escala, ela se tornou fraca para esse modelo.*

Professora: *e quando começou a dar certo, a EDO?*

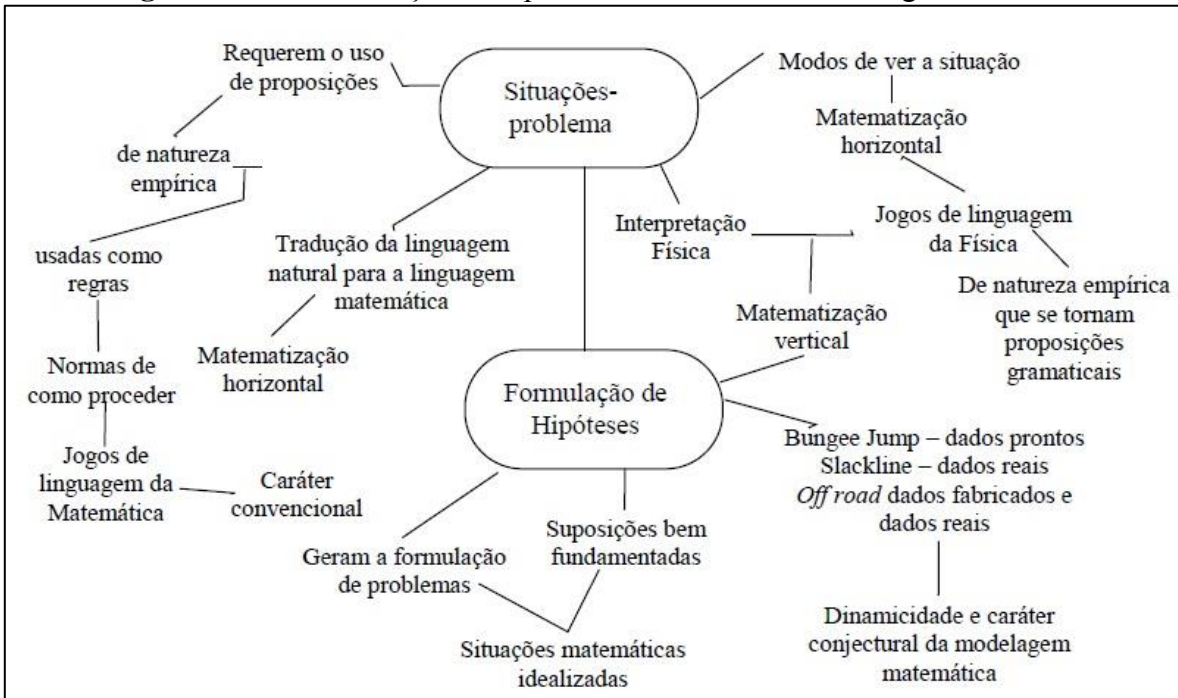
Aluno A2: *dados reais, quando fomos lá fazer a entrevista e aí começou a se encaixar melhor.*

GR_AT10_MM3_G4.

Nas atividades de modelagem matemática as hipóteses, de certo modo, delinearam a formulação dos problemas, principalmente, quando as temáticas foram sugeridas pelos alunos e não pela professora (AT8, AT9 e AT10). Pollak (2012) sinaliza que o cerne da modelagem matemática está na formulação de problemas, antes mesmo da resolução destes e que este fato pode reforçar a unidade da experiência em Matemática dos alunos. A partir da (re)formulação de hipóteses os alunos se engajam na dedução dos modelos matemáticos a partir das regras matemáticas das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

Sobre a formulação de hipóteses e o teste de conjecturas nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas elaboramos a árvore de associação de ideias da Figura 5.17 que associa aspectos das atividades desenvolvidas com a Modelagem Matemática na Educação Matemática e a Filosofia da Linguagem de Wittgenstein.

Figura 5.17 A formulação de hipóteses e o uso de EDO de segunda ordem



Já sinalizamos, na abordagem do uso de EDOs de primeira ordem, que as regras, na filosofia de Wittgenstein (2013) agem como uma placa de orientação aos alunos. No entanto, na dedução das EDOs lineares de segunda ordem os alunos precisam entender fenômenos que envolvem leis físicas a partir, em que cada modelo matemático atua como um *pedaço de conhecimento*, como sinalizado por Sriraman e Lesh (2006). Neste contexto, entendemos que as regras associadas a esses pedaços de conhecimento, como é o caso da Lei de Hooke e da segunda Lei de Newton, de certo modo, direcionam e normatizam o trabalho dos alunos na dedução das EDOs. De acordo com Wittgenstein (2013, § 198), as regras podem, também, nos ensinar meios de como proceder em algumas situações:

“Mas como pode uma regra me ensinar o que devo fazer *nessa* posição? O que quer que eu faça, deve ser compatível com a regra através de uma interpretação.” – Não, não se deve dizer desta maneira, mas assim: toda interpretação, juntamente com o que é interpretado, está suspensa no ar; não pode servir-lhe de suporte, as interpretações por si só não determinam o significado.

Neste caso, é possível dizer que os usos das regras matemáticas atuam para além de uma placa de orientação, poderíamos associa-las ao uso de uma definição ostensiva.

Entendemos que quando os alunos seguem uma definição ostensiva estão se preparando para o domínio de uma técnica, no sentido proposto por Wittgenstein (2013). A autora Silveira (2015, p. 116) sinaliza que “os símbolos matemáticos apresentam-se como códigos a serem traduzidos e depois reinterpretados”. A autora os compara como uma metáfora a ser compreendida.

Na dedução dos modelos matemáticos da AT6, os três grupos de alunos, a partir de uma EDO linear de segunda ordem chegaram na função deslocamento cujas situações-problema solicitavam (Figura 5.18).

Figura 5.18 Problema de valor inicial e soluções obtidas pelos alunos – AT6

RE_AT6_MM2_G5	RE_AT6_MM2_G4	RE_AT6_MM2_G3
$\begin{cases} 50u'' + u' + 327u = 0 \\ u(0) = -3 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 50u'' - 33,33u' + 41,6u = 0 \\ u(0) = 11,5 \\ u'(0) = 14,7 \end{cases}$	$\begin{cases} 80u'' + 14,79u' + 522,66u = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(10) = 53 \end{cases}$
$u(t) = 3,66e^{-\frac{t}{100}} \cos\left(\frac{\sqrt{65399}}{100}t\right) - 0,06e^{-\frac{t}{100}} \sin\left(\frac{\sqrt{65399}}{100}t\right)$	$u(t) = C_1 e^{0,335t} \cos(0,85t) - C_2 e^{0,335t} \sin(0,85t)$	$u(t) = -5e^{-t} \cos(\sqrt{167032,456}t) + \frac{5\sqrt{167032,456}}{167032,456} e^{-t} \sin(\sqrt{167032,456}t)$

Os alunos obtêm diferentes respostas devido a diferentes suposições assumidas no início da atividade. De modo geral, só foram feitas discussões com vistas à Matemática utilizada durante a dedução do problema de valor inicial. Os alunos utilizam a Lei de Hooke supondo que a força da mola é oposta à força da gravidade, $-kx$. Mas não percebem que quanto maior o valor k o cabo se esticará menos. A segunda Lei de Newton é utilizada e a soma das forças também, $\sum F = ma$, e $\sum F = mg - \gamma v - ku = ma$, no entanto os alunos ao resolverem as EDOs se esquecem da EDO não homogênea associada, quando $ma - \gamma v - ku = mg$. Discussões com relação à viabilidade das funções deslocamento obtidas para responder as situações-problema também não foram feitas. Como as situações estavam compostas por senóides os alunos assumiram que representavam curvas oscilatórias que poderiam se assemelhar ao deslocamento de uma mola no decorrer do tempo.

Na situação-problema estudada na atividade AT7, os alunos do grupo G7 formularam o problema: *Qual curva demonstra a altura em que praticante se encontra do chão em qualquer distância que o mesmo estiver dos pontos de âncora? Podemos denotar*

a altura mesmo que as massas dos praticantes se alterem? Para responder as questões, os alunos vislumbraram a possibilidade do estudo da curva denominada de catenária, denotando entre as hipóteses formuladas que essa seria a curva que melhor se ajustaria ao fenômeno investigado. No entanto, em seus registros escritos relatam a dificuldade quanto ao entendimento das regras matemáticas associadas à dedução da curva:

Embora a ideia da catenária tenha sido a inicial, tivemos dúvidas quanto aos dados que devíamos utilizar e dificuldades para compreender a dedução.

RE_AT7_MM2_G7

De acordo com Wittgenstein (2013, § 238): “Para que eu possa ter a impressão de que a regra produziu antecipadamente, todas as suas consequências, é preciso que elas me sejam *evidentes*”. No caso do entendimento da situação-problema os alunos não tinham em si a evidência quanto ao uso dos conceitos matemáticos associados a essa curva, provavelmente, pois em sua dedução utilizaram conceitos a eles não familiares, como o de seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

Já os alunos do grupo G3 quando resolveram a atividade AT9 buscando responder qual o deslocamento da mola-maluca no decorrer do tempo usam corretamente os conceitos até então conhecidos como a dedução de uma EDO de segunda ordem por meio da segunda lei de Newton, da soma das forças resultantes, da posição de equilíbrio da mola e da Lei de Hooke, a dedução dos conceitos com base na situação-problema em estudo é sinalizada pela aluna C5:

Aluna C5:[...] *a gente considerou as leis de Newton, encontramos os dados que coletamos a velocidade média da mola, a aceleração, mas nós ficamos perdidos com o que íamos fazer com os dados. Aí a gente buscou alguns artigos e eu achei esse artigo aqui de física que explicava ...quais as forças que agem na mola para ela ficar a parte de baixo parada no ar...ele mostrava que quando você está segurando o primeiro elo, você tem a força do sujeito anulando a força peso de todas as forças que estão para baixo e a força elástica, e quando você solta no instante em que você soltou a mola, você não tem a força do sujeito, mas você tem o peso dos elos e a força elástica. No caso seria essa segunda aqui, essa força peso ele desconsidera e só considera a força peso dos elos que estão para baixo.*

GR_AT9_MM3_G3.

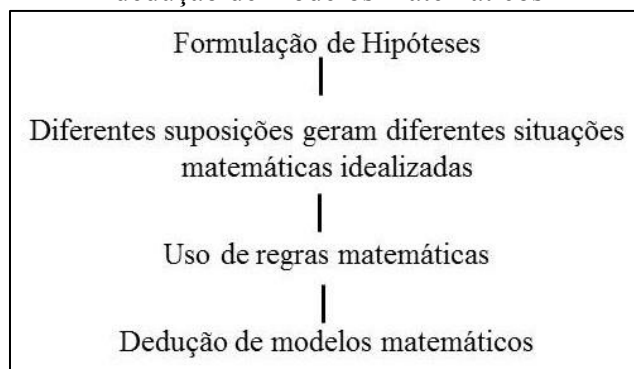
Os usos da Lei de Hooke e da segunda Lei de Newton na dedução de uma equação diferencial de segunda ordem se tornam para os alunos como regras quando se trata desse

conceito Matemático. Os alunos buscam o entendimento sobre das situações como se esses conceitos fossem uma regra, uma regularidade. Wittgenstein (2013, § 208) sinaliza que o conceito de regularidade está relacionado aos conceitos de ordem e de regra e que tal conceito é aprendido por meio de exemplos e exercícios:

Dessa maneira, é com o conceito “regularidade” que esclareço o que quer dizer “ordem” e “regra”? – Como explicar para alguém o significado de “regular”, “uniforme”, “igual”? – Para alguém, digamos, que só fala francês, vou explicar essas palavras mediante outras palavras francesas correspondentes. Mas, quem não possui ainda estes *conceitos* vou ensiná-lo a usar as palavras mediante *exemplos* e *exercícios*. – E vou lhe transmitir menos do que eu mesmo sei.

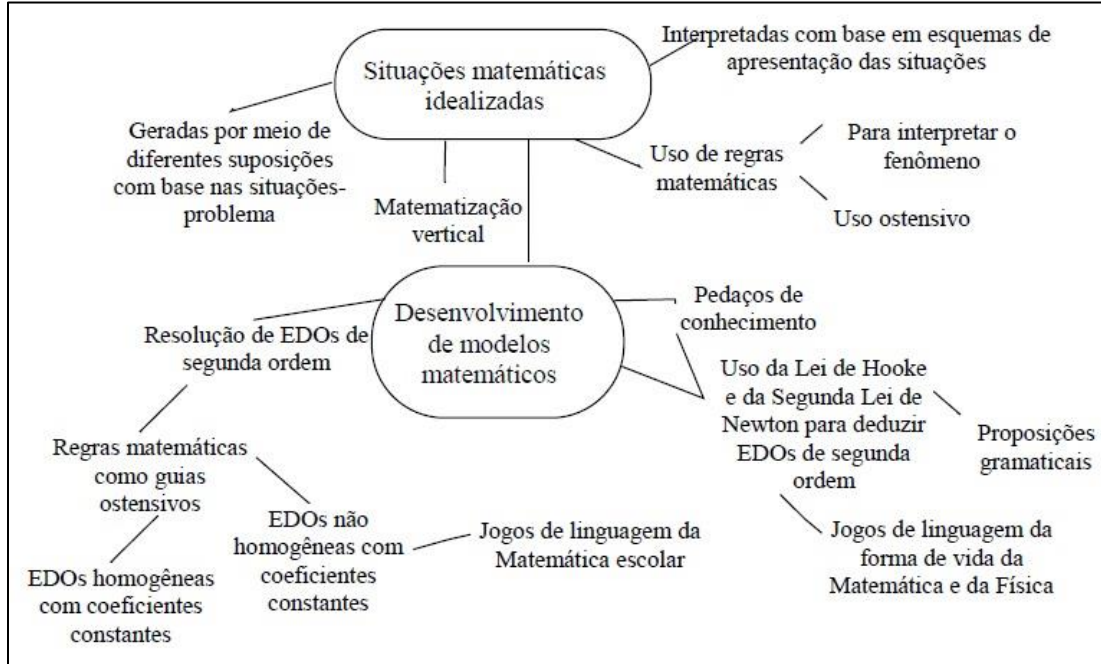
A linha narrativa da Figura 5.19 expressa o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, da formulação de hipóteses à dedução dos modelos matemáticos.

Figura 5.19 Linha narrativa para o desenvolvimento das da formulação de hipóteses à dedução de modelos matemáticos



Já a Figura 5.20 apresenta a árvore de associação de ideias que esboça nossa interpretação sobre o uso de regras e a dedução de modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática com o uso de equações diferenciais de segunda ordem.

Figura 5.20 Desenvolvimento de modelos matemáticos, regras e jogos de linguagem, EDO de segunda ordem



Neste contexto, é possível que as atividades de modelagem matemática se tornem aos poucos como exemplos de como visualizar os conceitos matemáticos a partir de fenômenos específicos. Aos poucos os alunos associam a modelagem matemática a um procedimento gramatical, juntamente com o *fazer matemática* a partir de fenômenos específicos. De acordo com Wittgenstein (2013, p. 292) “É evidente que a matemática, em certo sentido, é uma doutrina, - no entanto, é também um *fazer*”.

Este fazer matemática é expresso pelos alunos do grupo G5 e pelos alunos do grupo G4 quando da resolução da atividade AT8 e AT10, respectivamente. Na atividade sobre a oscilação do pêndulo do sino da igreja de Santa Mariana, os alunos deduzem a equação diferencial associada à oscilação do pêndulo e tecem conclusões associadas às hipóteses inicialmente delineadas (Figura 5.21).

Figura 5.21 Resposta à situação-problema da AT8

$$\theta'' + \frac{g}{L} \cdot \theta = 0$$

A última equação estabelece uma oscilação do pêndulo como sendo um movimento harmônico simples e, deste fato é possível determinar o período da oscilação (T).

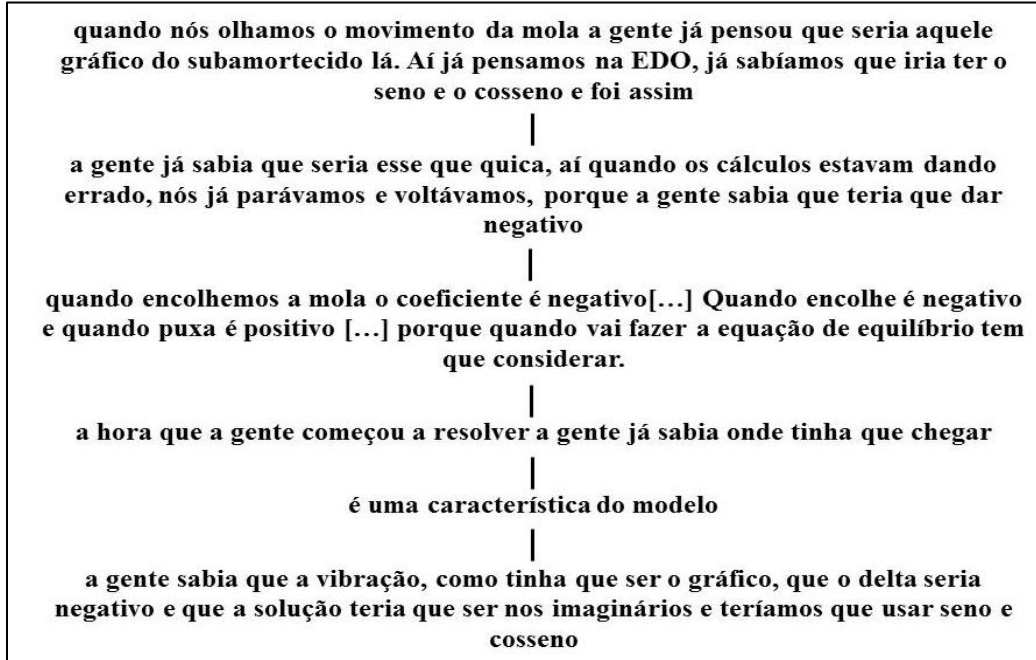
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Desse modo, mesmo que seja aumentado o valor da massa do pêndulo que se localiza no sino da igreja de Santa Mariana (para pequenas oscilações) o período de oscilação do pêndulo permanecerá constante. Utilizando os dados coletados na Igreja de Santa Mariana, com o pêndulo de aproximadamente 55 cm, ou seja, 0,55 metros e utilizando $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, obtemos o período de oscilação como aproximadamente 1,49 s.

Fonte: RE_AT8_MM3_G5.

Na atividade AT10, os alunos utilizam de dados reais, a partir de uma entrevista realizada com um praticante de *off road*, para deduzir um modelo matemático que mais se aproxime da situação em estudo, sobre o desgaste das molas de um carrinho de *ralli*, mais conhecido como *gaiola*. No final da realização da atividade de modelagem matemática, em comunicação para a turma os alunos informam que os conceitos matemáticos, no desenvolvimento da atividade, serviram como guias que os fazia formular e reformular hipóteses, (re) fazer cálculos até que chegassem a uma solução que lhes fosse conveniente para a investigação realizada. Tal fato é sinalizado na linha narrativa da Figura 5.22.

Figura 5.22 Linha narrativa sobre o desenvolvimento do modelo matemático no grupo G4 na AT10, o uso de EDO de segunda ordem



A vivência de seguir uma regra corretamente está associada, de acordo com Wittgenstein (2013) a vivência de uma técnica específica. Sobre o entendimento de um conceito, Wittgenstein (2013, § 321-322) aborda que:

321. “O que acontece quando um homem de repente entende?” A pergunta está mal colocada. Se ela pergunta pelo significado da expressão “entender de repente”, a resposta então não será o ato de apontar para um processo ao qual damos esse nome. – A pergunta poderia significar: Quais são os indícios de que alguém entende de repente; quais são os fenômenos concomitantes psíquicos característicos de entender de repente?

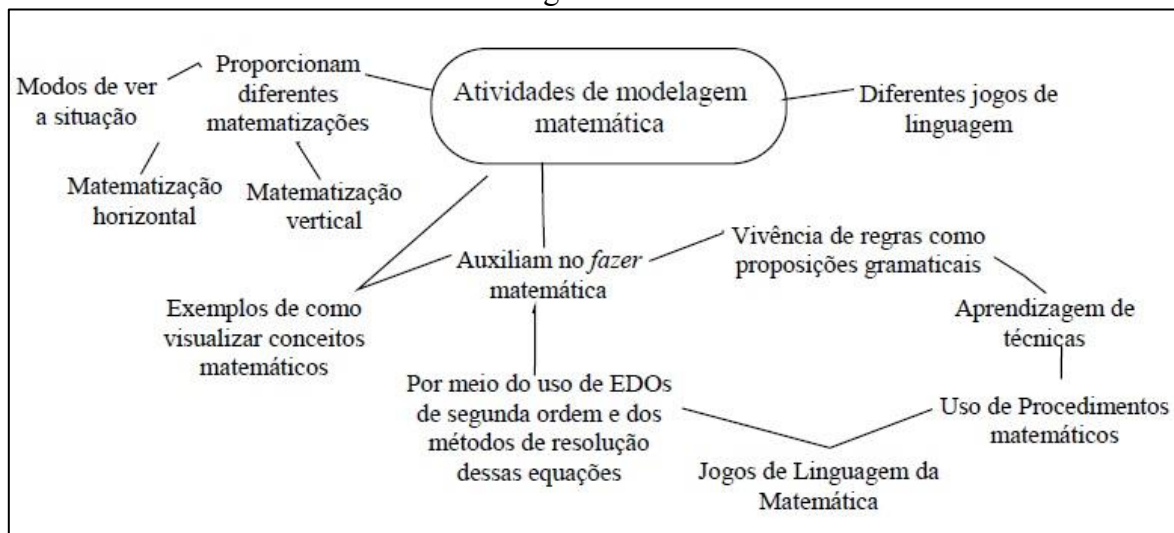
(Não há motivo para supor que uma pessoa sinta, por exemplo, os movimentos expressivos de seu rosto, ou sinta em sua respiração as mudanças que caracterizam uma emoção. Mesmo que ele as sinta tão logo volte sua atenção para elas.) ((Postura.))

322. O fato de a resposta à pergunta pelo significado da expressão não ser dada com a descrição, induz, por conseguinte, à conclusão de que entender é uma vivência específica, indefinível. Esquece-se, porém, que o que nos tem de interessar é a questão: como *comparamos* essas vivências; o que *fixamos* como critério de identidade do acontecimento.

Consideramos a possibilidade no relacionamento da compreensão com os usos que os sujeitos fazem do conceito matemático. Os indícios do entendimento dos sujeitos sobre os conceitos matemáticos estão nos usos que os alunos fazem destes conceitos, nas

respostas que esboçam, nos critérios com os quais validam suas atividades matemáticas e (re) constroem suas ações com as práticas matemáticas. O *fazer matemática* e a vivência das técnicas associadas ao uso de EDOs de segunda ordem foram sintetizados na árvore de associação de ideias da Figura 5.23.

Figura 5.23 Atividades de modelagem matemática e o *fazer matemática* no uso de EDOs de segunda ordem



Os usos de procedimentos matemáticos nas atividades de modelagem matemática estão associados à dedução de EDOs de segunda ordem, em particular ao significado dos parâmetros dessa EDO no que diz respeito às situações físicas a elas correspondentes. De modo geral, estes procedimentos são vistos como regras e técnicas, no entanto, quando se debruçam sobre a dedução das EDOs, por exemplo do deslocamento do sujeito no Bungee Jump ou no entendimento do sistema de amortecimento do carrinho de *ralli* as regras da matemática dão lugar à busca pelo entendimento do sistema massa-mola.

Os usos da linguagem matemática se dão no sentido de atribuir condições de sentido para os procedimentos matemáticos assumidos pelos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. De acordo com Silveira (2015) os símbolos matemáticos apresentam-se como metáforas a serem compreendidas. No contexto das atividades desenvolvidas por meio do uso de EDOs de segunda ordem é possível vislumbrar a vivência dos jogos de linguagem da Matemática e a possível significação deste conceito no jogo de linguagem da Matemática.

Entendemos que o conceito matemático está, como sinaliza Silveira (2015), sempre em estado de devir na perspectiva dos alunos. Mas estes em situações de ensino e aprendizagem na disciplina de EDO e na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática vivenciam as regras matemáticas associadas a estes conceitos e podem atribuir significados aos conceitos, bem como conectá-los com outros conceitos. Esse processo de interpretação e reinterpretação pode ser associado à formação de conceitos na perspectiva de Wittgenstein (2013).

Para além do uso de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, os alunos utilizaram procedimentos matemáticos associados à métodos de ajuste de curvas.

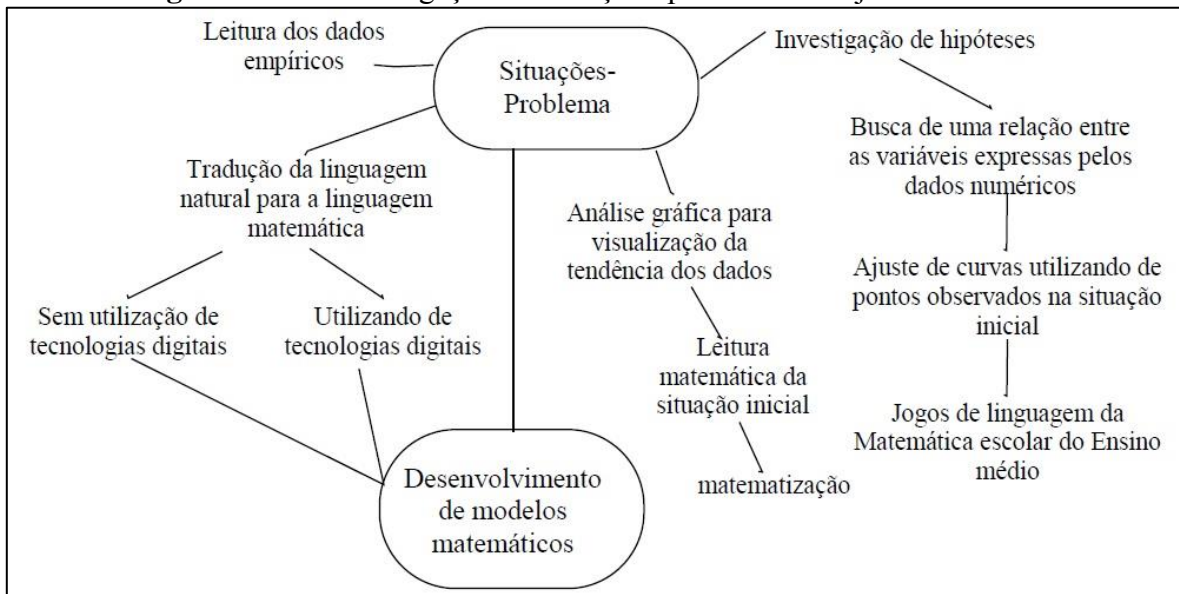
O RECURSO AO AJUSTE DE CURVAS

No desenvolvimento de algumas atividades de modelagem matemática, alunos de alguns grupos não recorreram ao uso de equações diferenciais ordinárias para o desenvolvimento da situação matemática idealizada, mas sim ao ajuste de curvas para interpretação dos dados coletados nas atividades. De acordo com Bassanezi (2002), uma regressão ou ajuste de curvas é:

[...] um recurso formal para expressar alguma tendência da variável dependente y quando relacionada com a variável x . Em outras palavras, regressão é um mecanismo ou artifício que fornece uma relação funcional quando se tem uma relação estatística (BASSANEZI, 2002, p. 54)

A análise de fenômenos por meio de dados numéricos pode, de acordo com o autor, ser útil para descrever tendências, fazer previsões e validar relações funcionais entre variáveis dependentes e independentes. Nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos, o recurso ao ajuste de curvas foi feito por meio de diferentes técnicas, ora os alunos utilizaram de *softwares* como Excel, Tracker, VCN e o Geogebra, ora utilizaram a dedução de métodos específicos para ajustar curvas. A Figura 5.24 apresenta uma árvore de associação de ideias sobre o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática em que os alunos utilizaram do recurso ao ajuste de curvas.

Figura 5.24 A investigação de situações-problema e o ajuste de curvas



Neste tópico detalhamos como se deu o uso a este recurso, quais foram os instrumentos e procedimentos utilizados pelos alunos, bem como a análise interpretativa dos dados coletados durante as atividades de modelagem matemática em que tais recursos foram utilizados. De modo geral, podemos sinalizar duas modalidades de ajuste de curvas realizadas, com e sem o uso de tecnologias digitais:

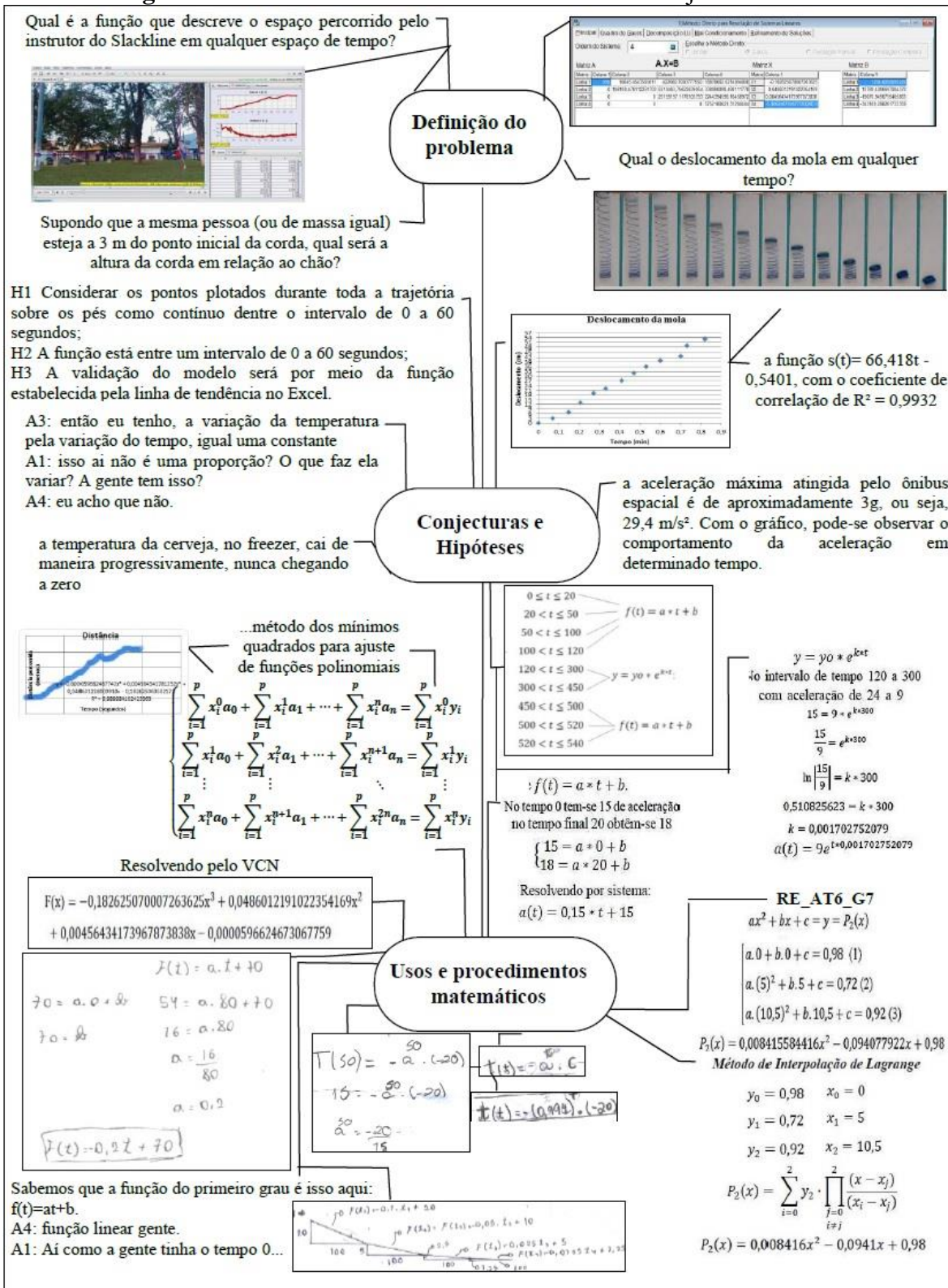
- Ajuste de curvas sem recorrer às tecnologias digitais

O recurso ao ajuste de curvas foi utilizado pelos alunos dos grupos: G3, na atividade AT1, o resfriamento da cerveja; G1, na atividade AT2, o resfriamento do café e a garrafa térmica; G7 na atividade AT7, slackline: um show de manobras.

- Ajuste de curvas mediado por tecnologias digitais

O recurso ao ajuste de curvas mediado pelo uso de tecnologias digitais foi utilizado pelos alunos dos grupos: G1, na atividade AT3.1, ônibus espacial; G6 e G7, na atividade AT7, slackline: um show de manobras. A Figura 5.25 detalha o uso de ideias associado ao uso deste recurso no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, considerando os usos da linguagem, as conjecturas e hipóteses formuladas e o uso de conceitos matemáticos.

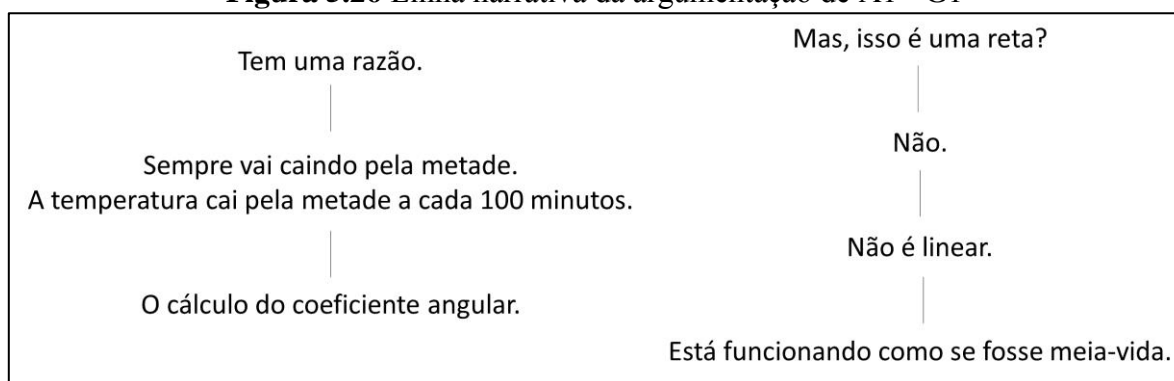
Figura 5.25 Procedimentos dos alunos no recurso ao ajuste de curvas



Os usos da linguagem que direcionaram o ajuste de curvas nas atividades de modelagem matemática estão associados, em particular, à obtenção de uma relação matemática entre um conjunto de dados contendo uma variável dependente e uma variável independente. Alguns grupos de alunos no desenvolvimento das primeiras atividades de modelagem matemática desenvolvidas recorreram ao ajuste de uma curva exponencial ou ao ajuste de uma curva linear durante o estudo dos fenômenos envolvendo resfriamento de temperaturas.

Os alunos do grupo G1 no desenvolvimento da atividade AT1 sobre o resfriamento da cerveja iniciaram uma discussão sobre a viabilidade de considerar um decaimento linear ou geométrico para os dados que relacionam temperatura e tempo disponíveis na situação-problema. A linha narrativa²⁷ (Figura 5.26) visa *mostrar* o fluxo de ideias de A1 junto com o grupo na discussão travada sobre essa hipótese.

Figura 5.26 Linha narrativa da argumentação de A1 - G1



Para a formulação da hipótese 1, o aluno A1 investiga a variação entre os dados relacionados à temperatura e ao tempo.

Aluno A1: *gente olha aqui que interessante, dá para usar matemática básica. De 0 a 100 ela caiu dois degraus, tá vendo? De 20 a 10. E de 100 a 200 só foi um, percebeu? Então de 200 a 300 ela caiu 0,5, e assim sucessivamente. Da para achar uma razão entre isso?*

Aluno A4: *mas está obedecendo uma razão e uma proporção?*

Aluno A1: *eu acredito que sim, o que vocês acham?*

[pergunta se todos concordam]

Aluna A3: *eu não tinha percebido na verdade.*

²⁷ Neste texto, para compor as linhas narrativas recorreremos aos áudios gravados durante o desenvolvimento da atividade em sala de aula, e/ou às entrevistas concedidas pelos alunos à pesquisadora.

[...]

Aluno A1: *eu acho que eu vou fazer desse jeito aqui, aí se vocês quiserem fazer por EDO, vocês que sabem.*

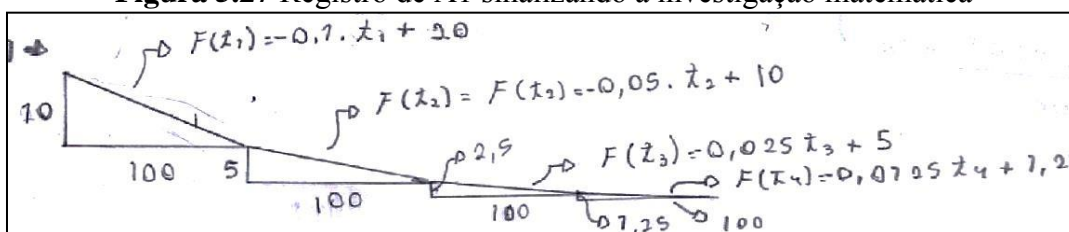
[todos concordam]

Aluna A3: *vai e aí a gente compara.*

GR_AT1_MM1_G1.

No momento que o aluno A1 discute com o grupo a ideia formulada sobre o ajuste linear, este acordo feito com os demais integrantes do grupo representa uma *forma de vida* nas palavras pronunciadas. Nos registros deste grupo de alunos, o ajuste a uma curva linear aparece como algo complementar, uma resolução alternativa da atividade quando considerado um domínio específico. No início do fluxo de ideias, o aluno A1 chega a esboçar o comportamento gráfico (Figura 5.27)

Figura 5.27 Registro de A1 sinalizando a investigação matemática



Fonte: GR_AT1_MM1_G1.

No entanto, a hipótese de que a temperatura da cerveja, no congelador, cai a uma taxa determinada é abandonada, visto que os alunos não conseguem fundamentá-la matematicamente olhando para os dados do fenômeno em estudo. E a partir disso, outra hipótese é formulada pelos alunos, já apresentada por meio do uso de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Nessa mesma atividade, os alunos do grupo G3, composto pelos alunos C1, C2, C3, C4, C5, a partir da leitura e interpretação dos dados da situação-problema entregue pela professora, os integrantes do grupo tentaram obter uma equação diferencial que representasse a situação em estudo, o resfriamento da cerveja. Não obtendo sucesso, os alunos partiram para uma análise do gráfico da função, tentando *visualizar* o comportamento que a função que passa pelos pontos (T, t) teria, sendo T a temperatura (em °C) e t o tempo (em minutos).

Os alunos analisam a variação da temperatura da cerveja em relação ao tempo de acordo com os dados do gráfico contido na situação-problema. Inicialmente a hipótese de variação linear é levantada, e logo descartada, visto que a variação da temperatura entre um instante de tempo e outro não é constante.

Com o auxílio da professora, os alunos decidem pelo ajuste de uma função exponencial decrescente, para se ajustar aos dados declarados no texto que direcionava a atividade.

Professora: *Que tipo de função decresce rapidamente no início de seu domínio e em seguida se estabiliza.*

[...]

Aluno C1: *Funções, tem função linear, função quadrática, função exponencial. Mas, eu não consigo me lembrar do comportamento gráfico das funções.*

Aluno C2: *Eu acho que é exponencial, não é?*

Aluno C4: *Função trigonométrica?*

Aluno C1: *Cosseno não é porque faz assim e assim ... é a tangente?*

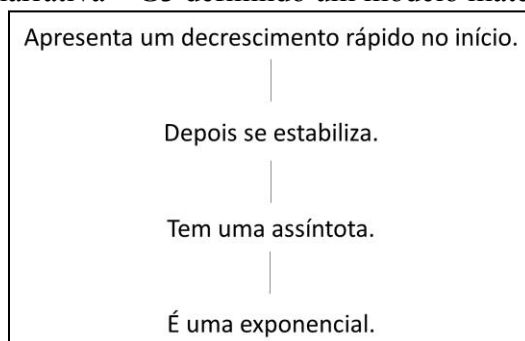
Aluno C2: *Professora, essa função seria o que?*

[A professora auxilia ao relembrar os alunos sobre o comportamento gráfico das diferentes funções matemáticas investigadas pelos alunos]

GR_AT1_MM1_G3.

As dificuldades com relação ao conhecimento sobre funções matemáticas são notadas, visto que os alunos iniciam um diálogo quanto ao comportamento gráfico das funções matemáticas. A fim de tornar possível o desenvolvimento de um modelo matemático, os alunos iniciam um estudo sobre a função exponencial, sua forma canônica, bem como o comportamento gráfico da mesma (Figura 5.28).

Figura 5.28 Linha narrativa – G3 definindo um modelo matemático para os dados



Os alunos iniciam então a elaboração de uma tabela, retirando os dados do gráfico para ajustar a função exponencial. Ao mesmo tempo, a aluna C4 aborda a discussão sobre o limite da função que está sendo obtida, associando-o à assíntota da função, *vista* pelos alunos do grupo para definir que seria uma função exponencial. Em dúvidas sobre a obtenção dos parâmetros da função solicitam auxílio da professora que auxilia na leitura dos pares ordenados do gráfico, bem como da elaboração da função exponencial para cada par ordenado. Aparentemente, ajustar os parâmetros de uma função exponencial não é do cotidiano dos alunos, os quais demonstram dificuldades na leitura matemática das informações.

Na comunicação para a turma, os alunos sinalizam que não conseguiram relacionar uma equação diferencial ordinária para a situação-problema. No entanto, analisando o comportamento gráfico dos dados, uma função exponencial decrescente poderia se ajustar aos dados. O ajuste da função exponencial, utilizando de dois pares ordenados – de acordo com o gráfico – foi feito juntamente com a turma, na lousa, explicando os procedimentos matemáticos a partir da forma canônica da função $T(t) = ac^t$, em que a e c são parâmetros, onde $c \neq 1$ e $c \neq t$.

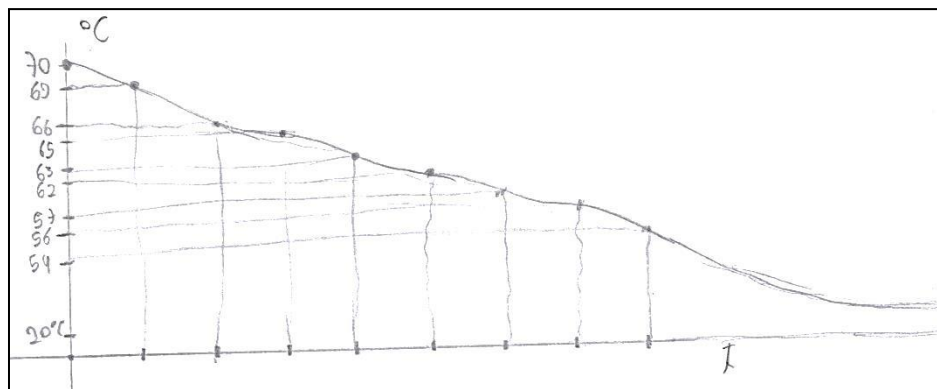
O uso das proposições matemáticas em função dos dados da situação-problema faz com que a mesma esteja, naquele momento, no papel de uma proposição empírica, visto que a função matemática obtida serve a um propósito e para um caso específico. Uma regra, que pode ser interpretada naquela situação específica e ali pode fazer sentido e ter um significado “as proposições, os enunciados, não possuem significados, mas fazem sentido na medida que representam um estado de coisas, ou uma situação possível” (VEIGA-NETO, 2007, p. 9).

O resultado para o tempo que a cerveja estaria pronta para o consumo foi obtido, inicialmente, por tentativa a partir do modelo matemático obtido. Com o auxílio da professora o grupo utiliza a temperatura ideal, declarada no problema, para obter o tempo que estava em investigação, obtendo assim aproximadamente 6,22 horas.

Na segunda atividade desenvolvia pelos alunos os alunos do grupo G1, por meio da intervenção do aluno A1 investigam o ajuste de uma função linear para a primeira hora em que o café está na garrafa térmica. A partir de uma análise gráfica (Figura 5.29) dos dados

o aluno aponta que naquela situação esse ajuste poderia ser útil para responder o problema colocado.

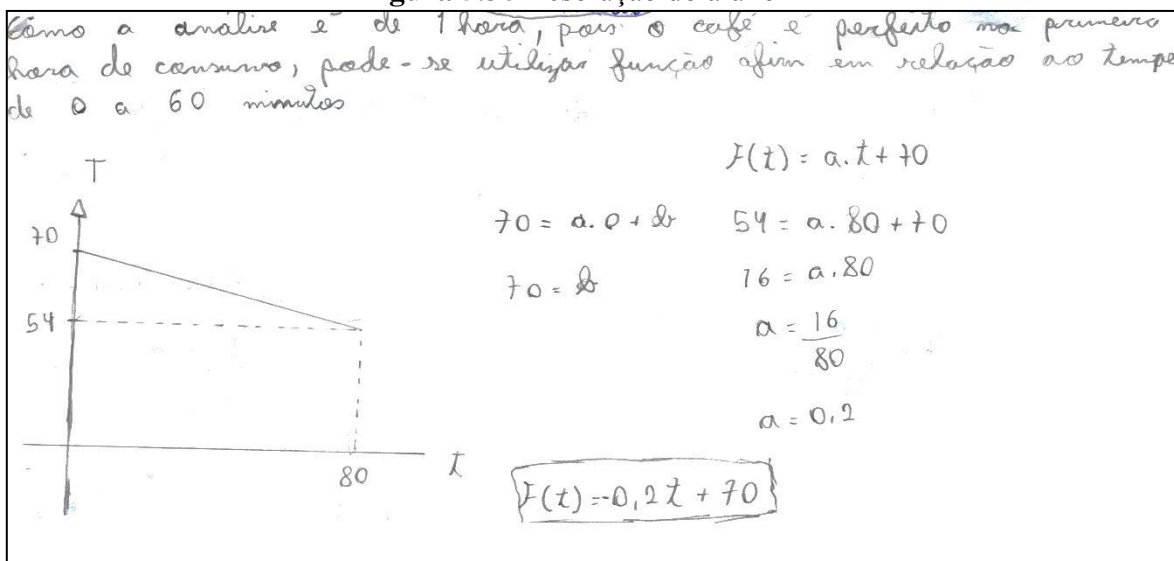
Figura 5.29 Gráfico elaborado pelos alunos de G1 para o resfriamento do café na garrafa térmica



Fonte: RE_AT2_MM1_A1.

Por meio da argumentação do aluno A1 com os demais alunos do grupo, eles decidem por obter um modelo linear para a situação-problema. Mas, é apenas o aluno A1 que justifica seu entendimento de que tal modelo é melhor para representar a temperatura do café em uma garrafa térmica no intervalo de uma hora (Figura 5.30). O aluno argumenta que faz sentido olhar para a temperatura do café na primeira hora, pois é nesse período que o café é tido como bom para o consumo.

Figura 5.30 Resolução do aluno A1



Fonte: RE_AT2_MM1_A1.

No momento de comunicar os resultados obtidos para o restante da turma, é o aluno A4 quem desenvolve o modelo referente a primeira possível resolução explorada pelos alunos do grupo, modelo exponencial – utilizando a Lei do Resfriamento de Newton, e o aluno A1 desenvolve o modelo linear, como uma alternativa para a solução da situação-problema. A justificativa para o desenvolvimento do modelo linear é dada por A1 durante a comunicação:

Aluno A1: *porque fizemos outro modelo? Como a temperatura do café está tendendo à temperatura ambiente, pensamos que seria uma exponencial, pois a temperatura não passaria da temperatura ambiente, só que como o exercício pedia outra coisa, observamos o seguinte*

[o alunos esboça um gráfico no quadro para exemplificar o raciocínio do grupo]

O que observamos, nesse pedaço aqui [ilustrando o espaço de tempo em que os dados foram coletados, ou seja, o domínio da função] poderíamos considerar apenas isso aqui, aí a gente fez o seguinte.

Sabemos que a função do primeiro grau é isso aqui: $f(t)=at+b$.

[...]

Aluno A1: *a gente sabe que quando o tempo é zero aqui, a função é 70 lá. [desenvolvimento matemático no quadro], então ficou $b=70$.*

Aluno A1: *Quando o temperatura é 54 lá e o tempo 80, temos o seguinte $54=a80+70$. [o aluno resolve no quadro o problema e é solicitado pela turma que explique].*

GR_AT1_MM1_G1.

A investigação feita pelos alunos do grupo G1, explicitada pelo aluno A1, para o uso da função linear na situação idealizada se dá aliando as características da situação-problema inicial, em particular, quando o grupo considera o intervalo de uma hora em que é adequado o consumo do café, e compara com o domínio para o qual a função linear é válida.

Outro momento em que o ajuste de curvas aparece é durante o desenvolvimento da atividade AT3.1, cuja temática foi definida a partir do interesse do aluno A1 pelo funcionamento dos ônibus espaciais. Para organização das informações coletadas, os alunos interpretaram a aceleração a em cada intervalo de tempo t como uma função definida por várias sentenças. Para a obtenção das expressões algébricas que formam as sentenças da função aceleração, $a(t)$, os alunos utilizaram o ajuste de curvas de acordo com o comportamento do gráfico. Utilizando de dois pontos do gráfico em cada intervalo de

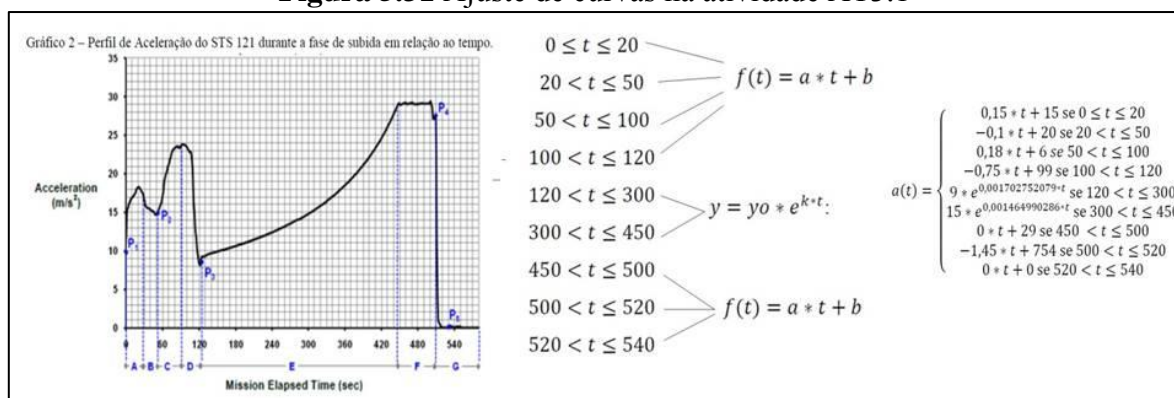
tempo os alunos utilizaram de sistemas matemáticos com duas equações e duas incógnitas para obter a curva associada a cada intervalo de tempo.

O procedimento de ajuste de curvas em atividades de modelagem matemática é abordado por Galbraith (2012) como uma das *faces* da Modelagem como veículo. Segundo o autor, a utilização deste procedimento requer cuidados no que tange ao uso da Matemática associado com a situação-problema, visto que a curva ajustada deve servir a um propósito na situação-problema estudada da atividade de modelagem matemática.

Na atividade dos alunos, a análise do gráfico disponível na situação-problema indica um recorte das informações coletadas e sinaliza o processo de simplificação de atividades de modelagem matemática.

Para os alunos este desenvolvimento matemático é como uma releitura das informações contidas em um gráfico com dados prontos. Eles estruturam a situação por meio de procedimentos matemáticos a partir da descrição do fenômeno traduzida para a linguagem matemática. Neste contexto, a matematização atua como um instrumento para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Podemos recorrer as palavras de Wittgenstein (1996, p. 362-363, tradução nossa) que sinaliza que “em certos *jogos de linguagem* proposições matemáticas desempenham o papel de regras de descrição, ao contrário de proposições descritivas”. Assim, no jogo de linguagem da atividade de modelagem matemática, quando da estruturação de uma situação matemática idealizada, o processo de matematização, por meio do uso de regras matemáticas, desempenha o papel de regras de descrição (Figura 5.31).

Figura 5.31 Ajuste de curvas na atividade AT3.1



Fonte: RE_AT3.1_MM3_G1.

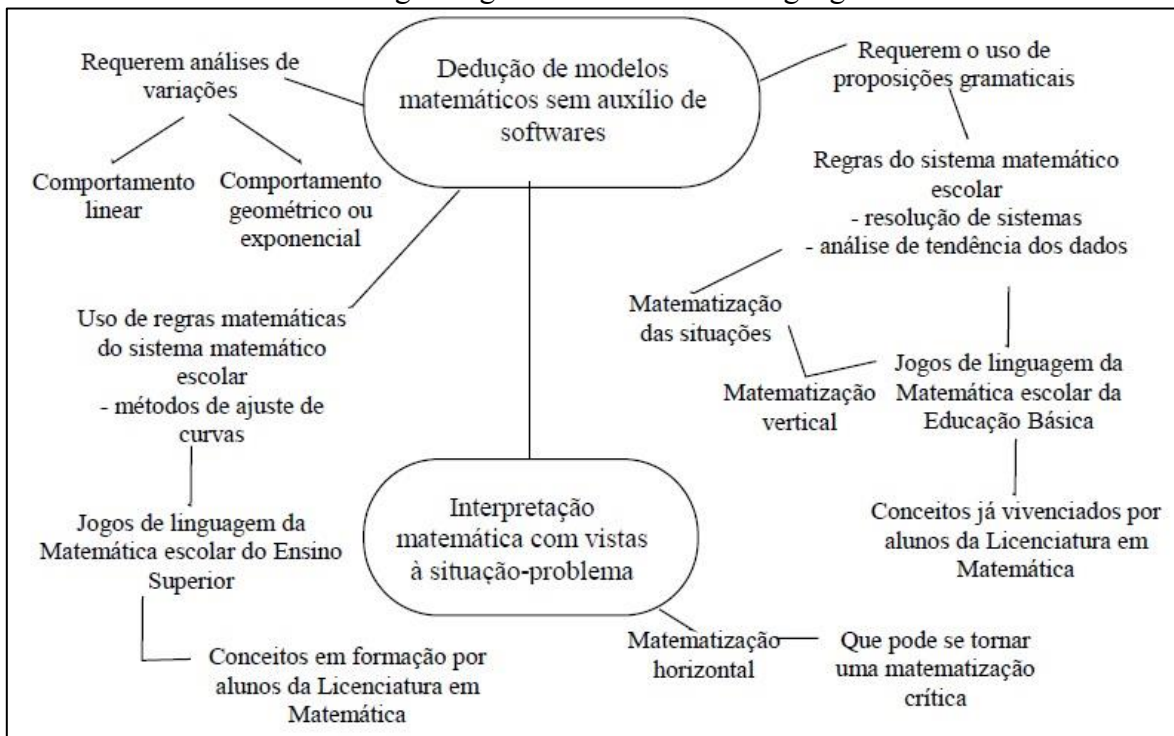
Após o tratamento da informação obtida os alunos se dedicaram ao levantamento de hipóteses e a realização de simplificações. A simplificação realizada por meio do ajuste da curva aceleração é utilizada como um dos passos necessários na estruturação da situação-problema para que os alunos consigam obter o modelo matemático que descreve a velocidade do ônibus espacial naquele intervalo de pontos do gráfico analisado.

Quando utilizado no desenvolvimento das atividades AT1, AT2 e AT3.1 os alunos efetuavam a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, estruturavam a situação-problema por meio da matemática e utilizando de procedimentos associados à matemática básica, do âmbito escolar, os alunos ajustavam uma curva correspondente. O rigor quanto ao uso de um domínio específico para consideração da validade do modelo matemático foi observado, sinalizando o cuidado que Galbraith (2012) indica quando do recurso ao ajuste de curvas em atividades de modelagem matemática. Este autor enfatiza que quando utilizado em atividades de modelagem matemática ajustes de curvas devem ser feitos com cuidado para não considerar uma curva que se ajuste aos pontos observados, mas não apresente de maneira adequada o fenômeno investigado.

No contexto investigado os alunos utilizaram o ajuste de curvas sem recorrer às tecnologias digitais, para ajustar as curvas que lhes serviriam como modelos matemáticos eles resolveram sistemas matemáticos associados aos jogos de linguagem da Matemática da Educação Básica que são utilizados por meio da linguagem de proposições gramaticais regidas pela gramática que rege as regras matemáticas da Matemática Escolar. Outro momento em que os alunos utilizaram do recurso ao ajuste de curvas foi no uso do método dos mínimos quadrados pelo grupo G6 para ajustar um polinômio que correspondesse à distância percorrida pelo praticante de Slackline na AT7.

Para sistematizar as informações apresentadas, sobre o uso de ajuste de curvas sem o auxílio de tecnologias digitais, elaboramos a árvore da Figura 5.32 Ajuste de curvas em atividades de modelagem matemática sem o auxílio de tecnologias digitais e Filosofia da Linguagem sobre ajuste de curvas em atividades de modelagem matemática e aspectos da Filosofia da Linguagem.

Figura 5.32 Ajuste de curvas em atividades de modelagem matemática sem o auxílio de tecnologias digitais e Filosofia da Linguagem



O recurso ao ajuste de curvas foi feito, também, no desenvolvimento da atividade AT7, sobre a prática do Slackline, pelos alunos dos grupos G6 e G7, e na atividade AT10 pelos alunos do grupo G4. Nessas atividades, no entanto, outro jogo de linguagem entrou em ação, o jogo de linguagem das tecnologias digitais.

Atualmente, o recurso às tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de Matemática é algo comum e que, de certo modo, faz parte da forma de vida partilhada pelos alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática. Nas duas atividades em questão, os alunos adquiriram certa autonomia no desenvolvimento das atividades o que os levou a utilizar procedimentos matemáticos e recursos que lhes auxiliavam em outras disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática e até mesmo na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática, cursada enquanto desenvolveram parte dessas atividades.

No desenvolvimento da AT7, a partir de um conjunto de dados coletados, os alunos do grupo G6 utilizaram de dois *softwares* para tratar os dados coletados, do *software Tracker* e do *software Excel*. O uso dos mesmos, no entanto, coloca os alunos em busca de um modelo polinomial que descreva a função do espaço percorrido pelo instrutor do

Slackline em qualquer espaço de tempo. O uso do *software Tracker* se dá para tratar as informações obtidas com um vídeo do instrutor praticando Slackline, e o uso do *software Excel* indica, a partir dos dados coletados no *Tracker*, a curva polinomial como sendo o melhor ajuste para o conjunto de dados. O uso do próprio *Excel* já sinaliza a linha de tendência da função polinomial indicada, no entanto os alunos do grupo G6 veem como importante apresentar deduzir os passos do procedimento matemático associado ao ajuste dos pontos coletados à linha de tendência polinomial de grau três.

Por meio da dedução do método dos mínimos quadrados obtêm um sistema contendo quatro equações e quatro incógnitas. Este sistema, de difícil solução manual, é resolvido utilizando o *software VCN*, cuja utilização estava sendo feita nas aulas da disciplina de cálculo numérico. O processo de validação é feito com base na comparação da função matemática identificada no *software excel*.

O uso do *software Tracker* também foi feito pelos alunos do grupo G4 no desenvolvimento da atividade AT10. Neste grupo, no entanto, os alunos não tinham o domínio quanto ao uso do *software* o que os impossibilitou de traduzir corretamente do jogo de linguagem do *software* para o jogo de linguagem da Matemática que estava em uso no desenvolvimento da atividade. A ideia dos alunos era utilizar o *software* para elaboração das condições de contorno do problema de valor inicial a ser resolvido na atividade, conforme sinaliza o diálogo:

Aluno A2: *em relação a esse encolhimento da mola, o que a gente fez, o A1 subiu no carro, colocamos o peso dele e fizemos a diferença dela parada, sem o peso, e com o Ariel em cima.*

Aluna A3: *a gente tinha dois dados, primeiro da mola solta, que ele [o praticante de rali] deu para nós, aí a gente viu a relação que tinha entre uma mola e a outra, depois a mola com o peso do carro, da própria carcaça, o carro pesa 600 kg, e aí a gente viu a variação que tinha da mola sem estar no carro e da mola já no carro, deu diferença, aí essa diferença a gente anotou, aí quando A1 subiu em cima deu mais diferença, aí a gente anotou essa diferença também. Dai depois os dois subiram e pularam, aí a gente gravou e colocamos o vídeo no Tracker para ver se a gente encontrava alguma coisa. Para ver se poderia utilizar o Tracker para ajudar de alguma maneira.*

Aluno A2: *para retirar dados, fazer uma possível validação.*

Aluno A1: *aí o que nós encontramos foi esse gráfico aqui, eu e o A2 pulando juntos, aí o que nós percebemos aqui [mostra à professora na tela do computador], nesse momento aqui, daqui aqui, foi quando pulamos forte e aqui da para perceber uma força que exerce para cima...*

Aluna A3: *uma constante*

Aluno A1: *e com isso a gente descobriu a velocidade que ela tem, que foi onde substituímos mais tarde na equação.*

Aluna A3: *que naquela primeira vez, o que nós havíamos feito, supomos uma velocidade e um determinado tempo, e aí utilizando o Tracker a gente já tem esse tempo e é só encontrar a velocidade, porque a gente tem o tanto que ela andou e o tempo...*

Aluno A1: *aí é só achar a velocidade [...] que a gente substituiu e usou como PVI.*

GR_AT10_MM3_G4.

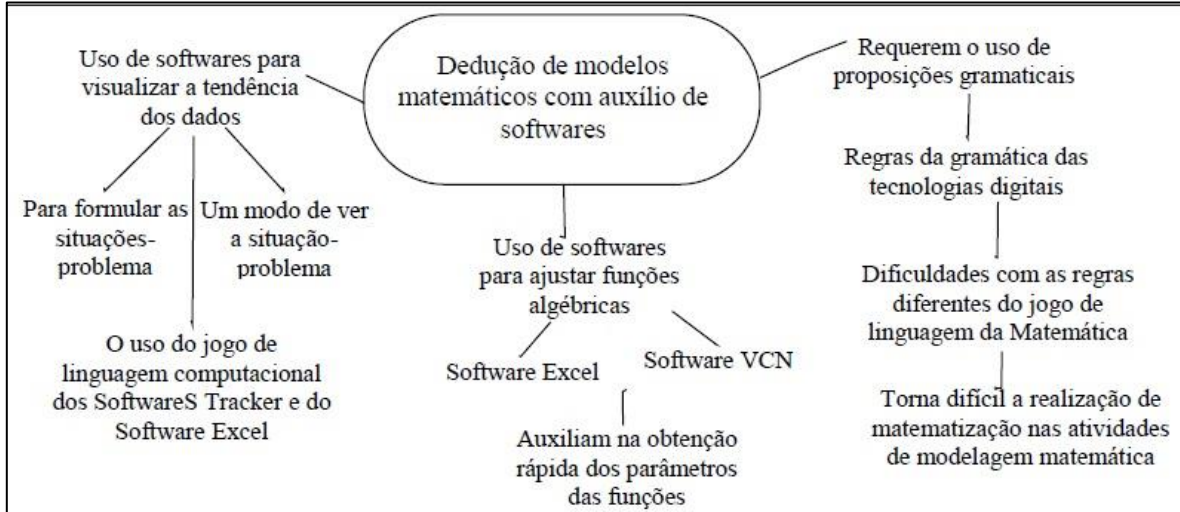
A filmagem advinda do *software* foi feita com base em uma simulação do carro em movimento e a partir dos dados coletados com a filmagem os alunos obtêm informações para dar prosseguimento à atividade de modelagem matemática. Nesse contexto, os alunos não fazem, necessariamente, o ajuste de uma curva por meio do uso do *software*, mas o utilizam no sentido de entender o comportamento da curva associada à velocidade da mola, e da curva associada ao deslocamento da mola, ambas no decorrer do tempo.

Os alunos do grupo G7 utilizam de duas regras matemáticas para ajustar a curva que representa (apresenta) a fita utilizada na prática do slackline, a qual fica presa em dois pontos fixos. Eles sinalizam que matematicamente a curva que mais se ajusta às características da fita seria a *catenária* e que muitos estudiosos confundiram essa curva com a “aparência” de uma parábola e, neste sentido, este poderia ser um possível modo de ver utilizando a Matemática.

Utilizando dados e suposições fundamentadas na situação-problema os alunos deduzem uma função quadrática utilizando de dois procedimentos matemáticos. Um para utilização em situações de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, por meio da utilização de três pontos observados na situação-problema é possível elaborar um sistema de três equações e três incógnitas e obter a função de segundo grau. E, um segundo modelo matemático obtido como uma forma alternativa de resolução da situação-problema colocada, por meio do uso do método de interpolação de Lagrange.

A árvore de associação de ideias da Figura 5.33 visa sistematizar o uso de ajustes de curvas feitas com o recurso de tecnologias digitais pelos alunos e aspectos da Modelagem Matemática na Educação Matemática e na Filosofia da Linguagem.

Figura 5.33 Ajuste de curvas e tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática e a Filosofia da Linguagem



No âmbito das atividades de modelagem matemática desenvolvidas por meio do recurso ao ajuste de curvas, os procedimentos matemáticos são vistos como regras matemáticas que poderiam ser utilizadas em uma ou outra *forma de vida*, ora no Ensino Médio, ora no Ensino Superior. Os ajustes realizados pelos alunos necessitam ser confrontados com a situação-problema inicial investigada a fim de validar os resultados matemáticos na situação em estudo. De acordo com Bassanezi (2002):

Em termos a modelagem matemática de fenômenos caracterizados por um processo dinâmico, a formulação do modelo pode muitas vezes preceder à análise dos dados experimentais. Nestes casos, o método de ajuste de curva é fundamental para a validação dos modelos estabelecidos a priori. A validação do modelo matemático consiste na verificação da aproximação do modelo com a realidade, ou seja, se os dados experimentais observados não estão “muito longe” daqueles fornecidos pelo modelo (BASSANEZI, 2002, p. 56)

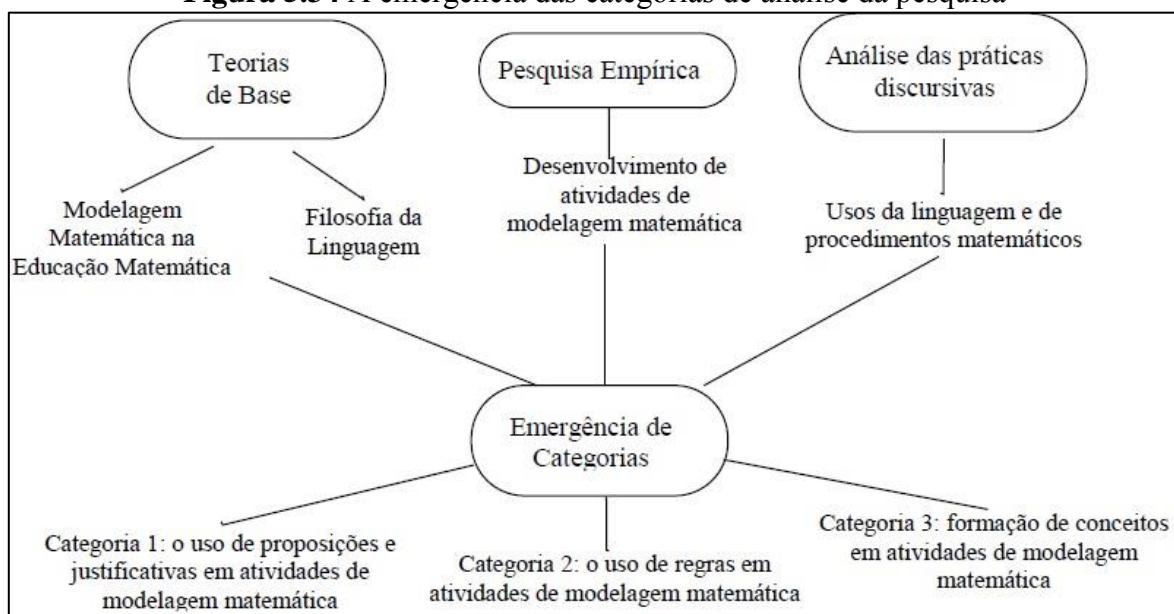
Desse modo, após a realização do ajuste de curvas, os alunos no encontro dos jogos de linguagem, da situação-problema, da Matemática e das tecnologias digitais, obtiveram relações, naqueles momentos funcionais, a fim de detalhar características inerentes aos fenômenos estudados.

Com base no uso dos procedimentos matemáticos realizado pelos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, três conteúdos matemáticos

emergiram com maior frequência nas atividades: o uso de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, o uso de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e o recurso ao ajuste de curvas. No caminhar do processo analítico, caracterizamos três categorias que visam detalhar *o uso da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática*: o uso de proposições e justificativas em atividades de modelagem matemática; o uso de regras em atividades de modelagem matemática; a formação de conceitos em atividades de modelagem matemática.

Tais categorias emergiram no decorrer da interpretação das práticas discursivas analisadas nos dados coletados durante as atividades de modelagem matemática e do cruzamento destas com as teorias de base da pesquisa. Em cada categoria optamos por identificar elementos teóricos que identificamos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática como os conceitos locais de *proposições e regras*, e o conceito mais geral sobre *formação de conceitos*. A árvore de associação de ideias da Figura 5.34 visa mostrar como se deu a emergência das categorias a partir do processo analítico interpretativo.

Figura 5.34 A emergência das categorias de análise da pesquisa



Na sequência deste capítulo, detalhamos cada uma dessas categorias, e, nelas, abordamos especificidades das proposições e justificativas, das regras, e dos conceitos utilizados no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

CATEGORIA 1: O USO DE PROPOSIÇÕES E JUSTIFICATIVAS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Considerando que o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática se deu seguindo o encaminhamento da introdução gradativa dessas atividades, conforme Almeida, Silva e Vertuan (2012), as proposições e justificativas dos alunos parecem ter naturezas distintas nos diferentes *momentos* no que se refere, particularmente, as justificativas das temáticas investigadas.

As temáticas, quando definidas pelos alunos, podem ser de acordo com seus interesses em pesquisar o tema, como no caso das atividades desenvolvidas pelos alunos do grupo G1 ou do grupo G4 com as temáticas *ônibus espacial e armazenamento de grãos de soja em um silo* e sobre o *princípio do amortecedor automotivo*. Foi o interesse de dois participantes do grupo, A1 e A3, que levou os alunos ao desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática no mesmo grupo²⁸, bem como o interesse do aluno A2 na definição do tema dos carrinhos de *rali*.

O aluno A1 se interessa pelo sistema solar, pelas galáxias, estrelas, universo. Segundo ele, vem estudando temas relacionados à NASA e, em certos momentos, já quis estudar temáticas associadas, por exemplo, à existência do buraco negro, mas por falta de dados passíveis de estudo, decidiu pelo estudo da variação do combustível na subida de um ônibus espacial ao espaço. Já a aluna A3, aproveitando o cotidiano de sua família, histórias de acidentes na empresa em que seu pai trabalha, se interessa pelo estudo do armazenamento de grãos em um silo. É na coleta de dados que a aluna A3, juntamente com os colegas do grupo, decide pelo estudo dos grãos de soja, visto que toma conhecimento de que o volume armazenado de grãos, entre outros dados, varia de acordo com a densidade do grão.

Mas, a escolha do tema para trabalhar com a situação-problema também pode ser justificada de acordo com o desenvolvimento das atividades desenvolvidas na disciplina. Como o primeiro contato dos alunos com atividades de modelagem matemática foi com a atividade sobre *o resfriamento da cerveja e sobre a temperatura do café na garrafa térmica*, os alunos do grupo G2 se interessaram por problemas nos quais pudessem coletar

²⁸ Alunos do grupo G1 que desenvolveram as atividades AT3.1 e AT3.2 descritas no Capítulo 4

dados e desenvolver atividades associadas às desenvolvidas em sala de aula. O mesmo ocorreu com a atividade associada à *mola maluca*, cujos alunos relataram o interesse no estudo do sistema massa mola, devido à possibilidade de trabalhar com equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

Durante as aulas, também foram desenvolvidas atividades envolvendo dinâmicas populacionais, absorção de drogas no organismo, entre outras. Os alunos do grupo G3 haviam se interessado pelo estudo de dinâmicas populacionais, no entanto, por encontrarem muitos trabalhos associados a essa temática decidiram pela variação da temperatura no preparo da gelatina.

As proposições utilizadas neste contexto são proposições empíricas, extra-matemáticas e surgem a partir de pesquisas na internet, de entrevistas durante a coleta de dados, de artigos científicos, de dados coletados com protótipos e de práticas de esportes com a finalidade da coleta de dados. Desse modo, a partir de uma *cadeia* de proposições empíricas que juntas formam uma problemática associada à situação-problema, os alunos formulam uma proposição que visa dar início aos estudos.

Uma hipótese formulada com base na situação-problema indica uma proposição empírica, e a partir dela os alunos justificam seus procedimentos por meio de proposições matemáticas. Por exemplo, no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática os alunos, a partir de proposições²⁹ empíricas, partem para a exploração matemática da situação-problema.

Os alunos do grupo G1 ao estudar a variação da temperatura do café em uma garrafa térmica afirmam que *há um decaimento linear da temperatura* (P1G1). Os alunos do grupo G2 associam também uma proposição empírica com uma hipótese para o desenvolvimento da atividade e a justificativa da matemática a utilizar naquele contexto *A temperatura da cerveja está variando ao tempo de resfriamento de um congelador de temperatura constante de 2°C* (P2G2). O mesmo ocorre no desenvolvimento da atividade sobre o *ônibus espacial*, os alunos do grupo G1 declaram como hipóteses que:

²⁹ A fim de trazer exemplos e referencia-los quanto aos registros dos alunos, numeramos as proposições por exemplo P1G2 é a proposição 1 do grupo 2, sendo que a numeração das proposições irá aparecer no decorrer do texto, de acordo com o uso de proposições nestas análises.

- Hipótese 1 Se a variação do combustível, dos boosters, em relação ao tempo é linear, então a variação do combustível no tanque externo está relacionada à aceleração do ônibus espacial.
- Hipótese 2: Se a angulação está relacionada com os três foguetes principais, então existe uma variação da aceleração.
- Hipótese 3: A aceleração está relacionada com a velocidade, então existe variação da velocidade.

RE_AT3.1_MM3_G1.

Cada uma das hipóteses pode ser considerada como uma assertiva, uma proposição empírica, baseada em fatos, que direciona os alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. As proposições empíricas deixam dúvidas em aberto, elas são fundamentadas na situação-problema, mas podem não se confirmar ou dar indicativos de outras proposições a utilizar. Por exemplo, a hipótese de usar uma função linear no desenvolvimento das atividades 1 e 2 não se confirma quando os alunos consideram o uso da matemática aliado aos dados da situação-problema. Ou ainda, as questões levantadas por G1 no uso da primeira hipótese abordada.

Wittgenstein associa o uso de regras com as proposições, e para regras, usa o termo de *placa de orientação*. No entanto, Wittgenstein (2013, § 85) nos diz que “[...] a placa de orientação não deixa nenhuma dúvida em aberto. Ou antes: algumas vezes ela deixa uma dúvida em aberto, outras vezes não. E isto já não é mais uma proposição filosófica, mas uma proposição empírica”.

Nesse contexto, o uso das proposições empíricas em modelagem matemática está associado aos fatos, aos fenômenos, a partir do uso que delas fazemos, como afirma Moreno (2003).

Nas proposições declaradas durante a atividade ocorre, por vezes, durante o desenvolvimento das atividades pelo grupo, o uso da Lei do Resfriamento de Newton, nas palavras dos alunos do grupo G2 *A temperatura da cerveja está variando com o tempo de resfriamento de um congelador de temperatura constante de 2°C*. A associação das leis de Newton é feita com base em fatos e a uma proposição empírica. No entanto, essa proposição empírica age como uma lei, uma norma de como proceder, o que nos sinaliza o caráter gramatical que a proposição assume dentro do jogo de linguagem da Matemática.

No contexto das atividades sobre *o resfriamento da cerveja e a temperatura do café em uma garrafa térmica*, é a partir do delineamento das hipóteses que os alunos iniciam o

desenvolvimento de uma situação matemática idealizada na tentativa de responder aos questionamentos levantados. Nesse contexto, o jogo de linguagem específico da matemática é *jogado* pelos alunos, que utilizam regras matemáticas associadas às equações diferenciais ordinárias para o desenvolvimento de um modelo matemático. As proposições matemáticas como $\frac{dT}{dt} = k(T - 2)$, em que T é a temperatura, t o tempo e k uma constante de proporcionalidade do conjunto dos números reais, ou, ainda, $T(t) = ce^{kt} + 2$ são específicas do jogo de linguagem da matemática e, nesse jogo de linguagem, desempenham o papel de proposições gramaticais. No entanto, quando os alunos às interpretam com vistas à resolução dos problemas declarados nas atividades de modelagem matemática, as proposições se alteram, de modo que $T(t) = 18e^{-0,00987t} + 2$ está associada ao comportamento dos dados de um fenômeno, neste caso, o resfriamento de uma cerveja em um congelador com dois graus de temperatura ambiente.

Essas proposições estão atreladas ao uso da lei de resfriamento de Newton, ao ajuste de curvas, em particular de funções lineares e exponenciais, a análise de variações a partir do uso de gráficos e tabelas, à leitura e interpretação de equações diferenciais ordinárias para a situação-matemática idealizada, e aos métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias – como o uso da separação de variáveis e o uso do fator integrante.

Segundo Wittgenstein (1996, p. 99, tradução nossa) “a proposição matemática tem a dignidade de uma regra”. Ainda Wittgenstein (1996, p. 355, tradução nossa) indica que “a proposição tem o típico (mas isso não significa simples) papel de uma regra”.

Por exemplo, a proposição $\frac{dT}{dt} = k(T - 2)$ está associada à uma regra, seu uso poderá ser feito quando o aluno identificar a função T . No entanto, quando os alunos dos grupos G1 e G2 obtêm um modelo matemático que descreve a temperatura da cerveja em qualquer instante de tempo, os alunos não conseguem realizar uma interpretação matemática adequada no contexto da situação-problema. A atividade requeria que os alunos informassem o tempo necessário para que a cerveja atingisse a temperatura ideal, neste caso de 2°C. Quando os alunos analisam o modelo matemático obtido eles percebem que quando $t \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 2$, e desse modo é incoerente matematicamente a utilização da temperatura 2°C para obter o tempo de resfriamento no modelo matemático $T(t) = 18e^{-0,00657t} + 2$. Os alunos do grupo G1 utilizam a temperatura da 1,99°C obtendo o tempo de 19 horas, já

os alunos do grupo G2 utilizam a temperatura de $2,1^{\circ}\text{C}$ obtendo o tempo de 13 horas. A discussão em termos do uso da Matemática que nos dá as diferenças no tempo de resfriamento não é algo que a atividade de modelagem matemática garante. Cabe aos alunos e ao professor discutir a viabilidade dos resultados matemáticos. Neste caso, como o limitante da função é 2°C , quando os alunos tomam valores muito próximos de 2 o tempo torna-se muito grande, muito superior ao tempo necessário para o resfriamento da cerveja até os dois graus. (De fato, depois de 13 horas a cerveja certamente, estaria congelada). Isso indica que os alunos não fizeram uma articulação entre a situação-problema e a Matemática quando da interpretação da resposta obtida.

O caráter gramatical de proposições empíricas advindas de fenômenos físicos também é inerente ao uso da segunda lei de Newton e da Lei de Hooke no desenvolvimento das atividades que os alunos utilizaram a dedução e resolução de equações diferenciais ordinárias. O uso de proposições gramaticais se dá concomitantemente com a matematização em modelagem matemática, seja ela vertical, horizontal ou crítica.

Quando olhamos para a Modelagem Matemática como um *jogo de linguagem* o papel das proposições matemáticas é de guias para responder uma situação-matemática idealizada pelos modeladores. Neste contexto, as proposições matemáticas podem desempenhar o papel de regras de descrição e a Matemática é vista como suporte, algo necessário para responder à situação-problema inicial.

As proposições matemáticas são declarações de natureza matemática que permeiam o desenvolvimento das atividades dos alunos. Estes procedimentos, de natureza gramatical, estão associados à interpretação da situação-problema. Segundo Silveira (2008, p. 5), em Matemática, quando seguimos corretamente uma regra, “mostramos que compreendemos e intuímos seu sentido, pois o contexto em que está inserido o problema matemático define qual regra devemos aplicar”.

O problema matemático está na situação matemática idealizada pelos alunos, com ou sem o auxílio do professor. O problema matemático, por sua vez, é analisado por meio de diferentes proposições. No caso da atividade sobre *o armazenamento de grãos de soja em um silo*, os alunos utilizam diferentes hipóteses que tomam características de proposições gramaticais:

Hipótese 1: O volume infinitesimal de uma superfície que é lançada para fora de um recipiente, no tempo Δt é dado por $V = S(y)\Delta y$

Hipótese 2: O volume total de grãos, $V(y)$, contido no silo está escoando pela superfície inferior, com velocidade v , através de um buraco com secção de área a .

Hipótese 3: Considerando uma constante de proporcionalidade em razão da configuração do orifício do silo, e a área do orifício em que os grãos saem, podemos escrever que o volume de grãos que saem é $\frac{dV}{dt} = -ka\sqrt{2gy}$

Hipótese 4. A variação da altura de grãos no silo se dá em função do tempo, e é igual a razão da velocidade que os grãos se esvaziam, que por sua vez é proporcional à área do orifício em que saem os grãos, em relação à área da seção transversal do silo

$$\frac{dh}{dt} = \frac{a\sqrt{2gh}}{S(y)}$$

RE_AT3.2_MM3_G1.

Originalmente as proposições declaradas por meio das hipóteses levantadas pelos alunos, têm natureza nas características da situação-problema inicial, ou seja, o armazenamento de grãos em um silo. No entanto, o uso que os alunos fazem dessas proposições no desenvolvimento da atividade coloca-as como normas a serem seguidas na busca de uma solução para o volume de grãos que o silo comporta, bem como o tempo de esvaziamento do mesmo, ou seja, a situação matemática idealizada pelos alunos.

As asserções sobre a Matemática a ser utilizada no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática estão associadas a um encadeamento lógico de assertivas que fundamentam a Matemática utilizada para resolver a situação-problema idealizada.

Para Wittgenstein (2013, § 135) “[...] se nos perguntarem o que é uma proposição – não importa se devemos dar uma resposta a outrem ou a nós mesmos – iremos indicar exemplos e, dentre eles, o que se pode chamar de séries indutivas de proposições, ora deste modo temos um conceito de proposição”.

Os alunos utilizam essas proposições para justificar sua interpretação da situação-problema. Tal justificativa está baseada em procedimentos matemáticos fundamentados no olhar dos alunos para a situação-problema, com vistas a responder uma situação matemática idealizada. Nas palavras de Wittgenstein (2013, § 363, ênfase do autor) “*Se me represento alguma coisa, então acontece certamente alguma coisa! Ora acontece alguma coisa – e para que faço barulho então? Por certo para comunicar o que acontece [...]*”.

Os aspectos aqui descritos corroboram com as reflexões de Souza e Babosa (2014, p. 131, tradução nossa) que em atividades de modelagem matemática há dois tipos de usos

para determinado conceito matemático: o uso gramatical e o uso procedimental. A utilização de um conceito matemático procedimentalmente diz respeito ao desempenho de um conjunto de passos que na matemática escolar podem ser denominados de estratégias normativas. Este uso procedimental descrito por Souza e Barbosa (2014) e por Souza (2012), é por nós interpretado por meio do uso que os alunos fazem de proposições empíricas e proposições gramaticais, em particular, das proposições matemáticas. Segundo os autores:

[...] quando nós matematizamos um problema empírico e adotamos o sistema matemático escolar como um modelo normativo, buscamos por similaridades entre gramáticas que envolvem o uso de palavras no sistema normativo e a gramática sugerida pela situação que queremos organizar usando tal sistema. [...] acreditamos que a modelagem na sala de aula pode ser entendida como uma abordagem pedagógica em que os estudantes podem aprender diferentes maneiras de abordar e normatizar situações autênticas derivadas de demandas sociais, mais do que situações não-autênticas que são desenvolvidas apenas com o propósito de servir como “tarefas escolares” (SOUZA; BARBOSA, 2014, p. 133-134).

As proposições matemáticas são utilizadas desde a formulação de hipóteses até a resposta para a situação-problema inicial, sendo que sua maior influência está na dedução do modelo matemático, quando esforços são empreendidos no sentido de responder uma situação matemática idealizada. É neste contexto que as justificativas para os usos da linguagem e dos procedimentos matemáticos aparecem.

Por exemplo, os alunos do grupo G1, G2 e G3 utilizam nas atividades desenvolvidas no primeiro semestre de 2015 conceitos associados às equações diferenciais lineares de primeira ordem. O uso da lei do resfriamento de Newton é justificado com base nas aulas da disciplina de EDO, bem como na analogia feita com outros conceitos. Já na atividade AT3.1 e AT3.2 os alunos justificam seus procedimentos também com vistas aos conceitos matemáticos advindos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e citam o uso do Teorema Fundamental do Cálculo para trabalhar com as diferenciais e integrais.

Na atividade AT3.2 os alunos coletam informações e buscam conceitos matemáticos utilizados, com maior frequência em cursos de engenharia a fim de estudar o esvaziamento de um silo de grãos em uma cooperativa agroindustrial. Quando os alunos se amparam em justificativas inerentes ao jogo de linguagem da Matemática, a formulação de hipóteses

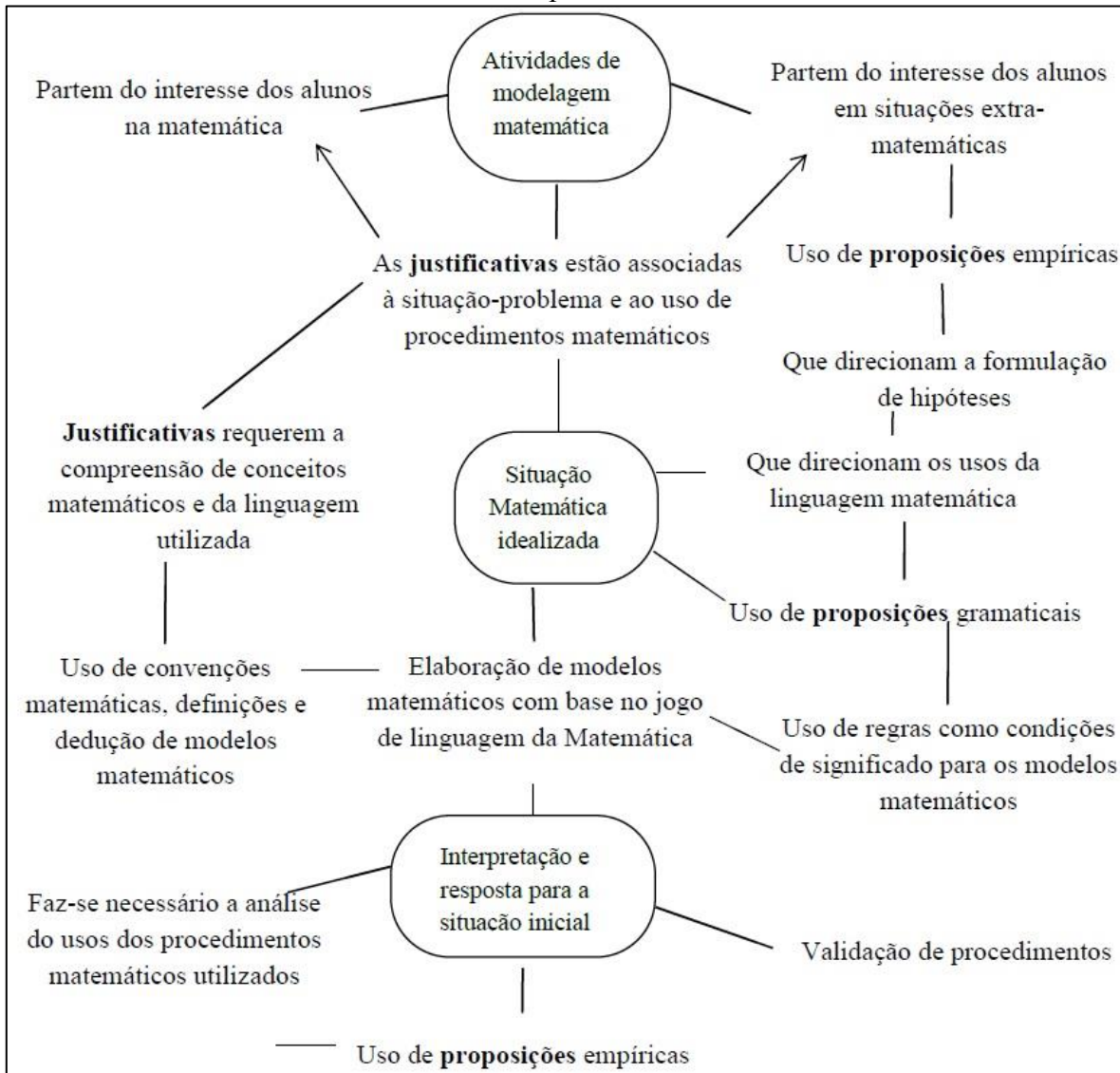
ocorre de modo a transparecer o tradução entre o jogo de linguagem da situação-problema estudada e o jogo de linguagem da Matemática.

No uso de equações diferenciais de segunda ordem, os alunos justificam seus procedimentos com base nas regras matemáticas válidas para dedução e resolução destas EDOs. Por exemplo, a análise das forças que regem um sistema massa-mola tem de estar descrita na situação-problema da AT10 em que os alunos deduzem uma EDO que descreve o sistema massa mola de um carrinho de *ralli*. No contexto dessa atividade os alunos jogam a todo momento um jogo de linguagem associado às equações diferenciais ordinárias e ao fenômeno estudado. Para justificar seus procedimentos matemáticos, eles fazem esquemas, medições na mola do carrinho original, trazem a tona conceitos matemáticos interpretados com vistas à situação em estudo, esboçam protótipos de carrinhos de *ralli* e denotam as forças atuantes: força total, força externa, força da mola, força de resistência ou de amortecimento e força peso. O uso dos conceitos matemáticos se dá, sempre, amparado no fenômeno investigado. Essa é uma das características da modelagem matemática identificadas por Pollak (2015) quando o autor tece reflexões sobre o uso da Modelagem Matemática na Educação Matemática e o uso da Matemática neste contexto.

Para justificar as respostas obtidas, ocorre a comparação com a situação-problema inicial, bem como a investigação por meio do uso de jogos de linguagem das tecnologias digitais, como a do software Tracker.

A árvore de associação de ideias da Figura 5.35 visa especificar o fluxo de associações realizadas durante a pesquisa com relação ao uso de proposições empíricas e gramaticais, bem como de justificativas no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

Figura 5.35 Árvore de associação de ideias com relação as justificativas e proposições utilizadas pelos alunos



É quando os alunos justificam seus procedimentos matemáticos que ficam imersos no uso de regras, em particular das regras matemáticas e daquelas que regem as situações-problema em estudo. Assim, o uso das proposições aparece como indicativo do uso de regras, em particular, regras matemáticas no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

CATEGORIA 2: O USO DE REGRAS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Essa categoria visa detalhar o uso de regras utilizadas pelos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, tanto com vistas à discussão sobre Linguagem e Matemática na filosofia de Wittgenstein, quanto com vistas à Modelagem Matemática na Educação Matemática.

Com o objetivo de tecer reflexões sobre o uso da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática adotamos a concepção filosófica sobre o uso de regras da Filosofia da Linguagem de Wittgenstein. Para Wittgenstein (1996) as proposições matemáticas muitas vezes desempenham o papel de regras de descrição, neste contexto, o processo analítico que emergiu nessa tese denota o uso de regras atrelado ao uso de proposições de ordem gramatical.

O filósofo vê ainda o ato de seguir regras como algo essencial nos jogos de linguagem, como um dos fundamentos dos jogos, em particular, do jogo de linguagem da Matemática. Para Wittgenstein (1996) se você segue uma regra, o que resulta disso é um dos fundamentos do jogo de linguagem no qual se está imerso. O filósofo aborda que “as palavras ‘linguagem’, ‘proposição’, ‘ordem’, ‘regra’, ‘calcular’, ‘experimento’, ‘seguir uma regra’ estão relacionadas a uma técnica” (WITTGENSTEIN, 1996, p. 346, tradução nossa).

O uso de regras com essas características foi feito nas atividades de modelagem matemática desde a interpretação das atividades por meio de esquemas e de leis da física, como o uso das Leis de Newton e da Lei de Hooke até o uso de procedimentos internos ao jogo de linguagem da Matemática, como o uso de métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias, de primeira e de segunda ordem.

O ato de traduzir de uma linguagem para outra é tido como um jogo de linguagem por Wittgenstein (2013). Nas atividades de modelagem matemáticas, em todos os usos da matemática vistos nas análises específicas é recorrente a necessidade da tradução da linguagem natural para a linguagem matemática. Neste momento, sinalizamos por vezes o uso da matematização nas atividades de modelagem matemática, e evidenciamos agora o uso de regras matemáticas para efetuar esse processo de tradução. Segundo Silveira (2008, p. 97):

A sintaxe da língua natural segue as regras gramaticais e a sintaxe da língua matemática segue as regras matemáticas. Como a linguagem

matemática está em simbiose com a linguagem natural, podemos dizer que a sintaxe da língua matemática também segue as regras gramaticais que constituem as significações das palavras e podem ser compreendidas com diferentes sentidos. As regras matemáticas precisam ser interpretadas para que o texto escrito em linguagem matemática seja compreendido.

A compreensão das regras matemáticas no processo de tradução entre as linguagens pode ser evidenciada por meio da elaboração das situações matemáticas idealizadas, bem como da formulação de hipóteses que direcionaram a investigação das situações matemáticas e, conjuntamente da situação-problema investigada. Silveira (2015, p. 183) sinaliza que:

A conversão da linguagem natural para a linguagem matemática exige a compreensão das regras matemáticas que estão implícitas no texto. Cada uma dessas regras, quando interpretada, define os conceitos contidos no enunciado, bem como a evidência das consequências de sua aplicação.

A análise das consequências de uma regra matemática pode ser vista durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, por exemplo seguir um método de resolução ou outro para as equações diferenciais ordinárias pode colocar os alunos em contato com técnicas de diferenciação e integração complicadas e que lhes tomem tempo ou que seja necessário o uso de softwares para a solução das EDOs.

Para além das regras matemáticas, utilizadas como proposições gramaticais, os alunos utilizaram regras que regimentam a gramática das situações-problema investigadas e a gramática dos jogos de linguagem das tecnologias digitais a que recorreram. Neste contexto, diferentes procedimentos foram necessários, bem como a aprendizagem das técnicas foi requerida.

Wittgenstein aborda que aprender a agir de acordo com uma regra é aprender a agir de acordo com uma técnica. Para resolver as EDOs de primeira ordem os alunos precisavam saber como agir com a regra associada ao método de separação de variáveis e ao método do fator integrante. Já nas EDOs de segunda ordem foi necessário saber identificar e deduzir uma EDO de segunda ordem homogênea e não homogênea, bem como saber utilizar o método dos coeficientes constantes para resolução de equações diferenciais ordinárias. Tais métodos de resolução são tidos como proposições gramaticais que agem como regras de como proceder para resolver as equações diferenciais.

É natural que após o uso repetitivo de tais regras elas tenham sido corriqueiras nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos. Vemos aqui o que Wittgenstein denominou de costume. De acordo com Wittgenstein (1996, p. 323, tradução nossa) “a aplicação do conceito de ‘seguir uma regra’ pressupõe um costume”.

O mesmo acontece quando os alunos optam por um método de ajuste de curvas para a dedução de um modelo matemático nas atividades de modelagem matemática. Um conjunto de regras associado ao método escolhido, seja o método dos mínimos quadrados, ou o método de interpolação de Lagrange, orienta a dedução dos modelos matemáticos e determina como se darão os usos da linguagem no contexto da atividade de modelagem matemática.

Quando se trata do uso do software, mesmo que o próprio software dite aos alunos quais procedimentos matemáticos são adequados para determinar uma curva que melhor se ajusta aos dados, corroboramos com Almeida (2014b, p. 250) quando a autora sinaliza que:

[...] ainda que o ajuste tenha sido [seja] realizado com o uso de software, os alunos precisaram de algumas decisões para realizar esse ajuste. O comportamento global do fenômeno indicado pela tendência dos dados foi associado pelos alunos às propriedades da função exponencial e neste caso foi essa tendência que definiu as regras que deveriam ser seguidas.

Durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos, as decisões por eles tomadas durante a modelagem matemática ocorrem em um jogo de linguagem específico, o jogo de linguagem da matemática escolar. Souza (2012) aborda que quando se trata do sistema matemático escolar temos que lidar com um sistema de regras socialmente estabelecidas, com um sistema normativo das experiências dos alunos. Neste contexto, são as regras do sistema matemático escolar que regem os usos da linguagem e os procedimentos matemáticos adotados pelos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

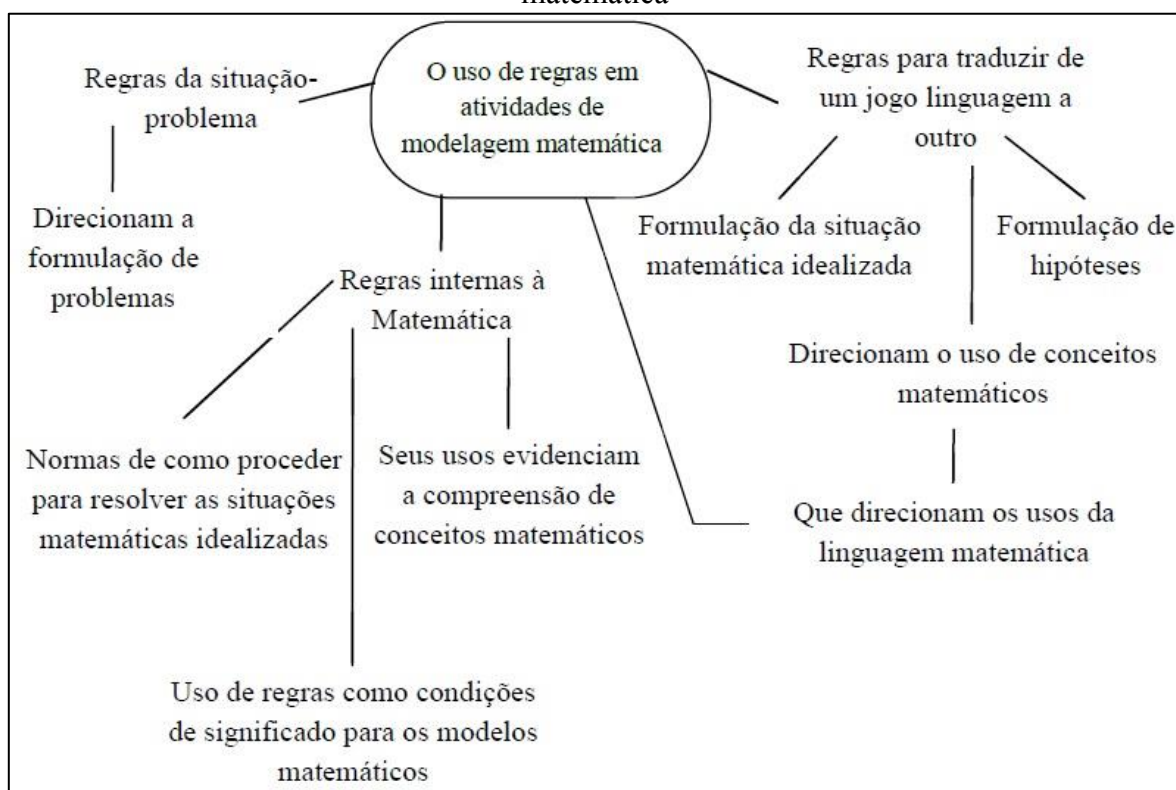
São esses usos da matemática que colocam os alunos em contato com um jogo de linguagem repleto de perguntas e respostas. Ao mesmo tempo em que proposições podem ser vistas como proposições empíricas, no jogo de linguagem da Matemática, as mesmas podem assumir um caráter gramatical e agir como uma regra.

A Matemática assume seu papel normativo (WITTGENSTEIN, 2013; SOUZA, 2012), mas os usos das regras matemáticas em atividades de modelagem matemática também dão lugar às características peculiares de cada atividade. De acordo com Almeida (2014b, p. 249 - 254)

Os alunos tomam decisões sobre a matemática, que é normativa, dita as regras do que nesta atividade pode ser adequado para obter resposta para o problema definido. [...] As regras de obtenção da função e seu uso na atividade são peculiares em cada atividade e refletem a forma de vida desses alunos.

O uso de regras em atividades de modelagem matemática foi por nós sistematizado na árvore de associação de ideias da Figura 5.36.

Figura 5.36 Árvore de associação de ideias, o uso de regras em atividades de modelagem matemática



De acordo com Silveira (2008, p. 94), é possível dizer que em Matemática “a regra matemática, quando interpretada, possibilita a compreensão do conceito que está subjacente à regra. Construir um conceito é, dessa forma, interpretar uma regra”. Podemos, então falar

de formação de conceitos no âmbito do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Inferimos que por meio das atividades desenvolvidas na pesquisa empírica é possível tecer considerações sobre a formação de conceitos de equações diferenciais ordinárias de primeira e de segunda ordem, visto que o recurso ao ajuste de curvas foi utilizado pelos alunos como um meio de explorar conceitos já vivenciados pelos alunos, em outros níveis de escolaridade e em outras disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática.

CATEGORIA 3: FORMAÇÃO DE CONCEITOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

A formação de conceitos em atividades de modelagem matemática já é sinalizada na literatura por Blum e Ferri (2009). Nessa pesquisa, abordamos a formação de conceitos a partir de uma perspectiva wittgensteiniana, na perspectiva do aluno. Para Silveira (2008, p. 5) “a formação de conceitos em matemática é um jogo de signos segundo regras determinadas, em que o sistema de símbolos é importante e não cada símbolo individualmente”, e a abordagem da formação de conceitos pode ser feita na perspectiva do aluno, em que o conceito passa a ser reconstrutível a cada ato de interpretação. As condições de leitura e compreensão do objeto definem a formação do conceito matemático, o qual está em constante mudança na perspectiva do aluno (SILVEIRA, 2008, p. 6).

Silveira (2005, p. 60) aborda que:

O conceito antes da interpretação do aluno pode estar no plano de aula do professor, num exercício proposto, em qualquer outra atividade da sala de aula, ou até mesmo em uma atividade extraclasse.

O conceito que o professor quer que o aluno construa será conectado com outros conceitos, de acordo com a imaginação e a memória do aluno, mas deve obedecer às necessidades e exigências da matemática. Assim, o conceito a ser construído é ‘escravo’ do objeto e não pode ser modificado. Porém, como o sujeito projeta sentidos seus ao objeto, ele acaba transformando o conceito. Neste movimento entre a subjetividade do aluno e a objetividade da matemática, nasce uma nova lógica e um novo conceito.

É nesse sentido que abordamos, nessa categoria a formação de conceitos por parte dos alunos. Em particular, abordamos resultados com relação às equações diferenciais de primeira ordem e de segunda ordem, visto que, de modo geral, os alunos no desenvolvimento das atividades buscaram interpretar fenômenos por meio do uso destes conteúdos matemáticos e iniciaram os usos destes conceitos no âmbito da pesquisa empírica desenvolvida.

Durante as duas primeiras atividades de modelagem matemática, cujas temáticas foram sugeridas pela professora da disciplina, os alunos interpretaram os fenômenos de resfriamento por meio de uma equação diferencial ordinária, no entanto, como eram inexperientes na interpretação de fenômenos nem todos conseguiram utilizar corretamente

o conceito de EDO de primeira ordem. Os alunos do grupo G3, por exemplo, não conseguiram fazer a interpretação e utilizaram uma função exponencial para representar os dados da situação-problema e obter uma função que associava a temperatura da cerveja ao tempo em que ela ficava no congelador.

Os demais grupos no desenvolvimento dessas duas atividades, fizeram analogias com atividades desenvolvidas nas aulas de EDO e utilizaram a Lei de Resfriamento de Newton para interpretar os fenômenos de resfriamento. Além destes usos, os alunos dos grupos G2 e G3 escolheram temáticas parecidas para o desenvolvimento da primeira atividade de modelagem matemática com temática sugerida por eles durante a disciplina. Tal fato pode ter ocorrido tanto com relação à facilidade no desenvolvimento da atividade, quanto com relação à vivência dos alunos com o procedimento matemático.

Os alunos podem ter usado o procedimento inicialmente como uma fórmula, mas “é o modo como se têm a fórmula em mente que vai determinar quais passagens devem ser feitas”. Qual é o critério para o modo como se tem a fórmula em mente? Talvez o modo como a usamos constantemente, o modo como nos foi ensinado a usá-la” (Wittgenstein, 2013, § 190).

O mesmo ocorreu no uso de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Os alunos entraram em contato com o conceito inicialmente por meio de uma atividade de modelagem matemática cuja temática foi sugerida pela professora da disciplina de EDO, a atividade AT6 sobre a prática do Bungee Jump. Por meio dessa atividade foi possível colocar os alunos em contato com os jogos de linguagem das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e permitir a interpretação de fenômenos físicos que podem ser descritos por meio dessas EDOs.

E nesse contexto os alunos utilizam métodos de resolução para equações diferenciais ordinárias, particularmente, para resolução de equações separáveis de primeira ordem, o método do fator integrante, o método dos coeficientes constantes para EDOs de segunda ordem entre outros. Nas equações diferenciais de primeira ordem, o uso dos métodos se dá dependendo do modo como os alunos veem a equação diferencial. Enquanto alguns alunos enxergam a EDO como separável, outros tentam resolvê-la por meio do método do fator integrante, aproveitando do auxílio da professora durante a aula para solucionar dúvidas sobre a aplicação do método. Tal fato é sinalizado na fala da aluna B2

desenvolvimento da atividade sobre o resfriamento do café na garrafa térmica. Wittgenstein (2013, p. 272) aborda que o substrato de uma vivência pode ser considerado como o domínio de uma técnica, que: “somente de uma pessoa que é *capaz* disto e daquilo, que aprendeu e domina isto e aquilo, tem sentido dizer que ela vivenciou *isto*”.

Já no que tange às EDOs de segunda ordem, os alunos estavam em contato com outros métodos de resolução para essas EDOs, como o método de variação dos parâmetros de Lagrange e o método dos coeficientes a determinar, no entanto, fazem a opção pelos primeiros métodos por eles vistos na disciplina de EDO, o método de coeficientes constantes, enfatizando as regras para solução de EDOs homogêneas. Este fato pode ser visto no desenvolvimento das atividades AT6 sobre a prática do Bungee Jump, na atividade AT8 em que os alunos trabalham a oscilação de um pêndulo, na AT9 da mola maluca e na AT10 sobre o princípio do amortecedor automotivo.

É no uso dessas regras, como aqui visto por meio de atividades de modelagem matemática, que os alunos as vivenciam, e (re)constroem, para si, os conceitos matemáticos a ela associados. Segundo Gottschalk (2004, p. 321) “aprender o significado de uma palavra pode consistir na aquisição de uma regra, ou um conjunto de regras, que governa seu uso dentro de um ou mais jogos de linguagem”.

Silveira (2005) sinaliza que o aluno não consegue jogar um jogo quando não compreende suas regras. Neste contexto, é importante aos alunos a vivência com as regras associadas ao cálculo de equações diferenciais ordinárias. Essas regras, por sua vez, são regidas pela gramática da matemática, associada ao cálculo de integrais, as propriedades de funções e as operações matemáticas. Segundo a autora “o aluno constrói seu conceito matemático ao estar inserido nos jogos de linguagem e quando trabalha com sentidos intersubjetivos dados ao objeto” (SILVEIRA, 2015, p. 90).

Wittgenstein (1996, p. 387, tradução nossa) aborda que:

Em um jogo de linguagem, no qual alguém calcula de acordo com uma regra e coloca os blocos de uma construção de acordo com os resultados do cálculo. Este alguém aprendeu a operar com sinais escritos de acordo com regras. – Após descrever este procedimento de ensino e aprendizagem, tudo se disse sobre agir corretamente de acordo com uma regra. [...]

Repetindo, o procedimento de seguir corretamente uma regra não pode ser descrito de forma *mais estreita* do que por meio da descrição da *aprendizagem* do “processo de acordo com a regra”.

As atividades desenvolvidas pelos alunos do grupo G1, denotam também o uso de EDOs de primeira ordem. No entanto, na análise das atividades desenvolvidas pelos alunos, sobre o resfriamento da cerveja, a variação da temperatura do café na garrafa térmica, ônibus espacial e armazenamento de grãos de soja em um silo, o uso de equações diferenciais ordinárias é feito por meio de recorrências a outras atividades, mas, também, usando de conhecimentos sobre o cálculo diferencial e integral para interpretar os fenômenos em estudo. Nas atividades desenvolvidas pelos alunos do grupo G1, os alunos utilizaram de diferentes hipóteses para o desenvolvimento da atividade. Seja com vistas ao funcionamento operacional de um ônibus espacial, seja com vistas às características de armazenamento e esvaziamento de um silo.

As hipóteses, como mencionado na categoria anterior, assumem por vezes o papel de proposições empíricas que condicionam, para sua investigação, proposições gramaticais, como no caso do desenvolvimento da AT3.2 e da AT10 sobre a curva que compreende o deslocamento de uma mola em um carrinho de *rali*.

A interpretação dos alunos das diferentes situações pode estar associada com características específicas dos jogos de linguagem no qual estão ancoradas as situações-problema das atividades de modelagem matemática. Para a compreensão da situação-problema usando de conceitos matemáticos, os alunos procuram *ver* a situação matematicamente. Não é em todos os jogos de linguagem que ocorre algo que se poderia chamar de um conceito.

Conceito é algo como uma imagem com a qual se compara objetos. Existem conceitos em jogos de linguagem? Seria fácil entender como “laje”, “bloco”, etc. tornaram-se conceitos. Por exemplos, por meio de uma técnica de descrição ou retratação desses objetos. Não há, naturalmente, uma linha divisória clara entre jogos de linguagem que trabalham com conceitos e outros. O que é importante é que o “conceito” palavra se refere a um tipo de expediente no mecanismo de jogos de linguagem (WITTGENSTEIN, 1996, p. 433, tradução nossa).

Os conceitos trabalhados, por exemplo, na investigação sobre o armazenamento de grãos em um silo, estão associados à capacidade do silo, seja de armazenamento seja à capacidade para esvaziar o silo. Ou seja, o *volume* investigado pelos alunos, por meio da modelagem matemática, faz parte do jogo de linguagem associado à situação-problema, de

natureza empírica. Assim, quando os alunos fazem uso da Matemática para interpretar a situação-problema, não estão fazendo uma transferência de conceitos de um campo ao outro, mas lidando com um dos modos de ver a situação sobre volume, seja por meio de uma proposição matemática, seja por meio de uma proposição empírica. A formação do conceito de volume é algo que extrapola os limites dessa reflexão, pois a vivência dos alunos com tal conceito vem da Educação Básica.

Mas, a reflexão pode se dar em torno da leitura das variações, que os alunos conseguem fazer, quando olham para a situação-problema.

A certeza de que posso continuar após ter tido essa vivência – por exemplo, depois que vi esta fórmula – fundamenta-se simplesmente em indução”. O que significa isso? “A certeza de que o fogo vai me queimar fundamenta-se em indução”. Significa que tiro a conclusão para mim mesmo “Eu sempre me queimei numa chama, portanto, isto vai acontecer agora também?” Ou, é a experiência anterior a causa da minha certeza e não a sua razão? E a experiência anterior a causa da certeza? – depende do sistema de hipóteses, de leis naturais, no qual consideramos o fenômeno da certeza.

Está justificada a confiança? – O que as pessoas admitem como justificação, - mostra como elas pensam e vivem (WITTGENSTEIN, 2013, p. 145).

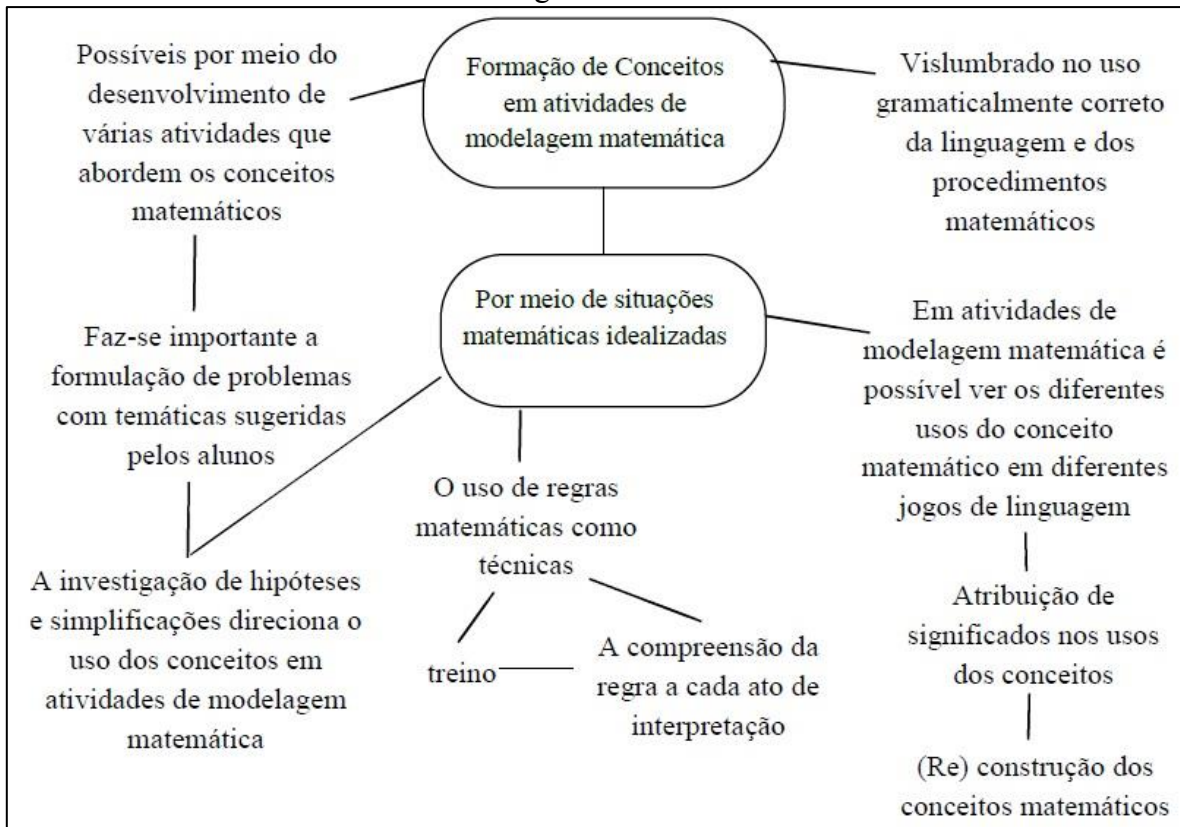
A formação de conceitos matemáticos, na perspectiva do aluno, em modelagem matemática pode ser vista, assim, como a vivência de atividades de modelagem matemática e o uso de proposições empíricas e gramaticais no desenvolvimento destas atividades. Uso este que está fundamentado em regras internas à gramática da Matemática e da situação-problema em estudo.

A formação de conceitos nessa perspectiva está atrelada à filosofia de Wittgenstein em que, segundo Gottschalk (2008, p. 87), o papel do professor “passa a ser ensinar significados através do *uso* que se faz deles em seus respectivos contextos linguísticos”. Neste contexto, entendemos que por meio do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática o professor coloca os alunos em contato com diferentes usos dos conceitos matemáticos e, no âmbito dessas atividades é possível a formação de conceitos em matemática. Considerando que o conceito matemático, por mais que seja parte de um jogo de linguagem historicamente construído e que obedece ao que Silveira (2015)

denomina de auto-movimento da Matemática, na perspectiva do aluno estes conceitos estão sempre em estado de devir.

Com vistas às discussões aqui apresentadas elaboramos a árvore de associação de ideias da Figura 5.37.

Figura 5.37 Árvore de associação de ideias sobre a formação de conceitos em atividades de modelagem matemática



A partir das análises apresentadas discutimos no próximo capítulo os usos da linguagem e os procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática a partir da perspectiva Wittgensteiniana apresentada neste capítulo cinco.

Na análise interpretativa das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos utilizamos o recurso árvores de associação de ideias e linhas narrativas de Spink (2013) para produzir sentidos com base nos dados coletados em relação ao objetivo da pesquisa *investigar os usos da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática*. Por meio das análises empreendidas evidenciamos três categorias que visam detalhar o objetivo de pesquisa a partir de uma perspectiva wittgensteiniana: o uso de proposições e justificativas em atividades de modelagem matemática; o uso de regras em atividades de modelagem matemática; a formação de conceitos em atividades de modelagem matemática.

A discussão de tais categorias nos dá indícios de que em atividades de modelagem matemática a linguagem e os procedimentos matemáticos são utilizados por meio de proposições empíricas e gramaticais, os alunos justificam o uso de proposições com base nas situações-problema estudadas, advindas de fenômenos empíricos, e justificam os procedimentos matemáticos utilizados por meio dos conteúdos matemáticos necessários para resolver as situações matemáticas idealizadas. Os usos de conceitos matemáticos são justificados com base na vivência dos alunos com a Matemática escolar do Ensino Superior e com os conceitos matemáticos que irão lecionar na Educação Básica.

Muitas vezes os usos da linguagem transitam seja fazendo a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, seja o caminho inverso. Neste contexto, os alunos usam as regras de diferentes jogos de linguagem: da situação-problema, da Matemática, do ato de traduzir de uma linguagem para outra e dos diferentes conceitos matemáticos necessários. Vale ressaltar que para além das regras e da gramática dos jogos de linguagem necessários no interior das atividades de modelagem matemática, aos poucos os alunos se familiarizam com o jogo de linguagem da modelagem matemática.

A segunda categoria que emergiu da pesquisa foi sobre o uso de regras em atividades de modelagem matemática. Nessas atividades, diferentes regras são requeridas,

seja para formular hipóteses da situação inicial, seja para idealizar uma situação matemática e para utilizar procedimentos matemáticos que visam atribuir sentidos e significados aos modelos matemáticos utilizados para resolução das atividades de modelagem matemática.

A linguagem matemática exerce um papel importante, visto que é regida pelas regras do jogo de linguagem da Matemática e possibilita aos alunos a apropriação e o treino no que diz respeito ao uso de regras associadas aos conceitos matemáticos. No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática a vivência com os conceitos matemáticos possibilita, no decorrer do tempo, a formação de conceitos a partir de atividades de modelagem matemática, no caso da pesquisa empírica empreendida foi possível analisar a formação de conceitos no que tange ao conceito de EDO de primeira ordem e de EDO de segunda ordem.

Neste capítulo, visamos discutir as análises empreendidas a fim de tecer reflexões a respeito do objetivo da pesquisa, bem como confrontar informações advindas das teorias de base, dispostas nos capítulos dois e três deste texto, com as informações advindas do processo analítico empreendido no capítulo cinco. O capítulo está estruturado em duas seções nas quais tecemos reflexões sobre os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática e os procedimentos matemáticos utilizados em atividades de modelagem matemática.

Com a intenção de fomentar o debate sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática abordamos os resultados, as possibilidades e os desafios que vislumbramos no desenvolvimento da pesquisa, em particular considerando a pesquisa empírica desenvolvida em um curso de Licenciatura em Matemática, nas disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias e de Introdução à Modelagem Matemática.

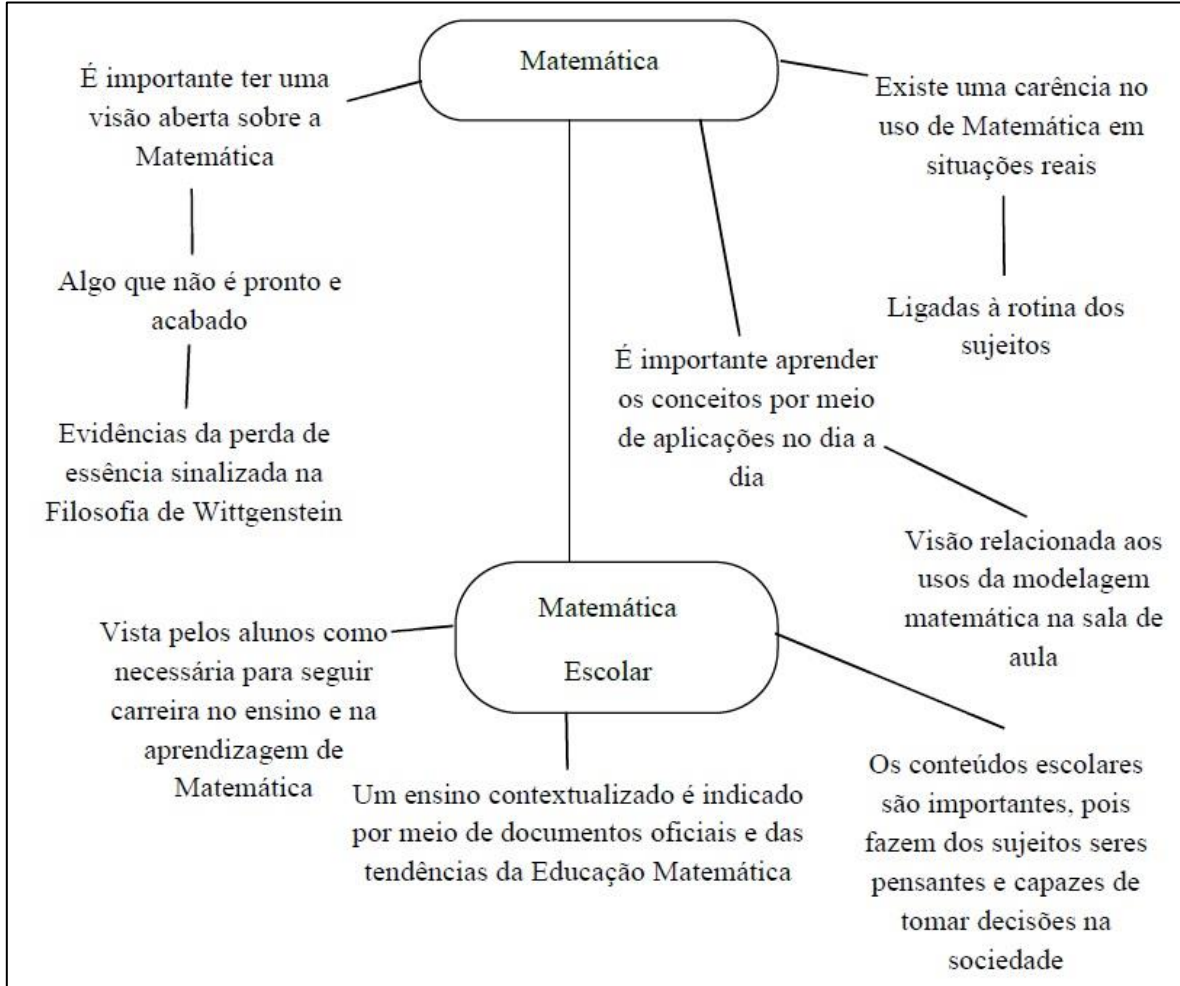
Os usos da modelagem matemática se deram como sinalizado por Sriraman e Lesh (2006, p. 247-248, tradução nossa, ênfase do autor) por meio da “descrição, explicação ou conceituação proposital (quantificação, dimensionalização, coordenação, ou em geral matematização) – mesmo que processos de computação e dedução também estejam envolvidos”. As situações-problema estudadas pelos alunos foram da mesma natureza que as sinalizadas por Niss (2015), as quais não podem ser respondidas apenas utilizando de conceitos matemáticos, nem podem ser analisados sem que se utilize de Matemática.

As atividades aqui analisadas foram desenvolvidas como um veículo para aprendizagem de Matemática, como sinaliza Galbraith (2012), tanto os alunos quanto a professora estavam com o propósito associado ao ensino e à aprendizagem de Matemática, em particular de equações diferenciais ordinárias. Os momentos de familiarização propostos por Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Almeida e Dias (2004) foram adotados pela pesquisadora, de modo que os alunos desenvolveram atividades com temática definidas pela professora, apenas com a temática indicada pela professora e com temática escolhida por eles próprios.

No curso da pesquisa empírica, diferentes instrumentos de coleta de dados permitiram obter informações tanto sobre os usos da linguagem e dos procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática quanto sobre o uso do jogo de linguagem da modelagem matemática (Anexo A, Anexo B e Anexo C). Tendo como ponto de partida os dados coletados, estruturamos a árvore que associa as informações obtidas dos alunos com o arcabouço teórico presente nessa tese e a interpretação das pesquisadoras (Figura 6.1), com relação às suas concepções sobre os usos da linguagem e dos procedimentos associados à Matemática e à Matemática escolar.

De modo geral, os alunos sinalizam um entendimento de Matemática estreitamente veiculado à Matemática necessária na Educação Básica e nos cursos de Licenciatura em Matemática. O curso de Licenciatura em Matemática, por trabalhar com documentos oficiais brasileiros para o ensino e a aprendizagem de Matemática, enfatiza um ensino contextualizado, no entanto tal contextualização nem sempre acontece em determinadas disciplinas. Os alunos enfatizam que a Matemática Escolar deve estar para além do ensino tradicional e que os conteúdos escolares associados à Matemática devem ser vistos pelos alunos com relações entre as práticas diárias e a tomada de decisões na sociedade.

Figura 6.1 Sobre as concepções prévias dos alunos sobre Matemática e Matemática Escolar



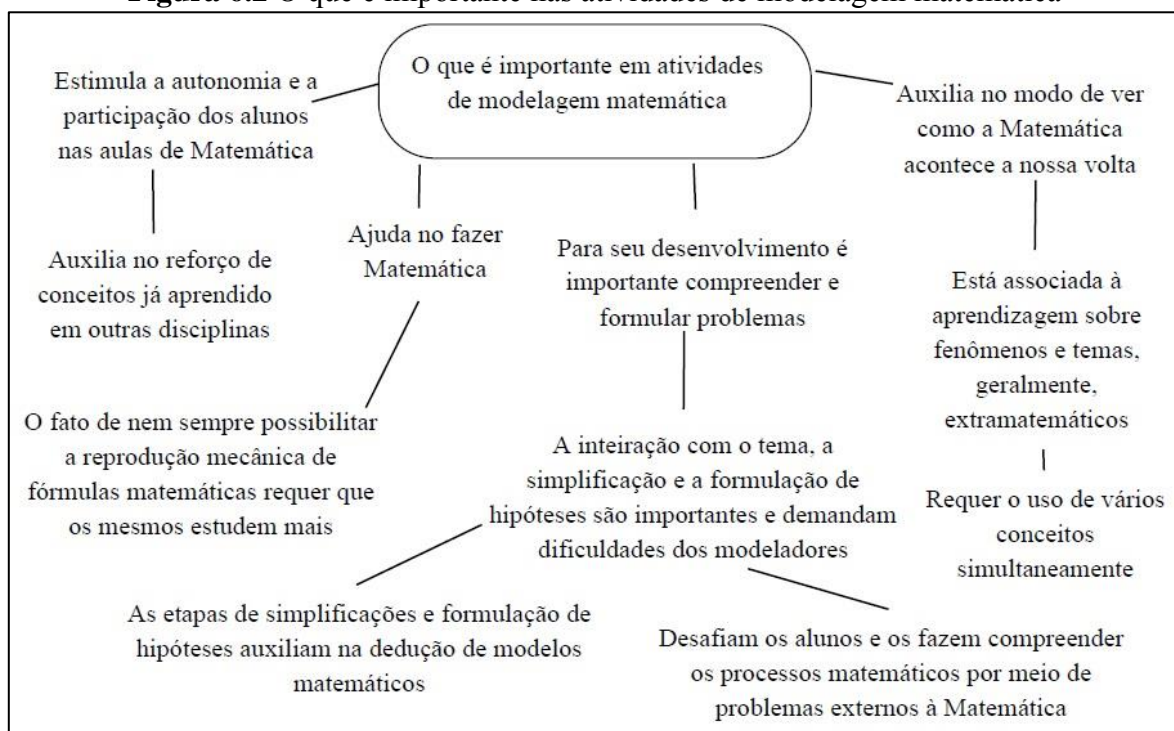
Entre a Matemática e a Matemática escolar é possível visualizar que a visão dos alunos sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática está atrelada aos usos da Modelagem Matemática na Educação Matemática, bem como ao entendimento de Matemática por meio da Filosofia da Linguagem, como uma invenção humana não necessariamente pronta ou acabada e com implicações nas diferentes formas de vida que partilhamos.

Após o desenvolvimento da pesquisa empírica, que consistiu no acompanhamento de treze alunos durante o ano letivo de 2015 e parte do ano letivo de 2016, nas disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias e de Introdução à Modelagem Matemática, alguns questionamentos foram feitos aos alunos (Anexo C), com relação aos conceitos matemáticos e aos procedimentos necessários para o desenvolvimento das atividades de

modelagem matemática desenvolvidas por eles (AT1 – AT10). As respostas dos alunos aos questionamentos foram interpretadas a fim de avaliar as ações tomadas durante o desenvolvimento da pesquisa empírica e de modo a detalhar mais informações que nos auxiliem na investigação do objetivo da pesquisa.

Nossas interpretações foram organizadas por meio de duas árvores de associação de ideias. A árvore da Figura 6.2 tem como raiz o que os alunos consideram importante nas atividades desenvolvidas.

Figura 6.2 O que é importante nas atividades de modelagem matemática



As asserções dos alunos em resposta ao questionário disponível no Anexo C estão associadas às características essenciais que os mesmos vislumbraram nas atividades de modelagem matemática. Uma das respostas da aluna A3 ao questionário Q1, sinaliza parte das informações disponíveis na árvore da Figura 6.2:

Aluna A3: Com modelagem, o estudo dos fenômenos, os trabalhos desenvolvidos com temas do nosso cotidiano, ou até temas que nos trazem interesse maior, como o espaço, a meia-vida de elementos químicos, o movimento de uma mola, entre outros, torna a matemática útil. São nestes desenvolvimentos que podemos ter a noção da utilidade dela.

RE_A3_Q1

Fatores como a utilidade da Matemática, a inteiração com o tema, e o auxílio na aprendizagem de conceitos matemáticos já vistos e utilizados, antes das atividades, mecanicamente *saltam* aos olhos dos alunos. No que tange ao último fator, os registros dos alunos A2, A4 e C2 sinalizam a impressão que tiveram, após a realização das atividades de modelagem matemática, no que diz respeito ao uso de técnicas de diferenciação e integração já vistas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral:

Aluno A2: deixei de usar tabelinhas de derivadas e integrais por conta de trabalhar de forma que não precisava decorar, mas sim entender porque as coisas acontecem...

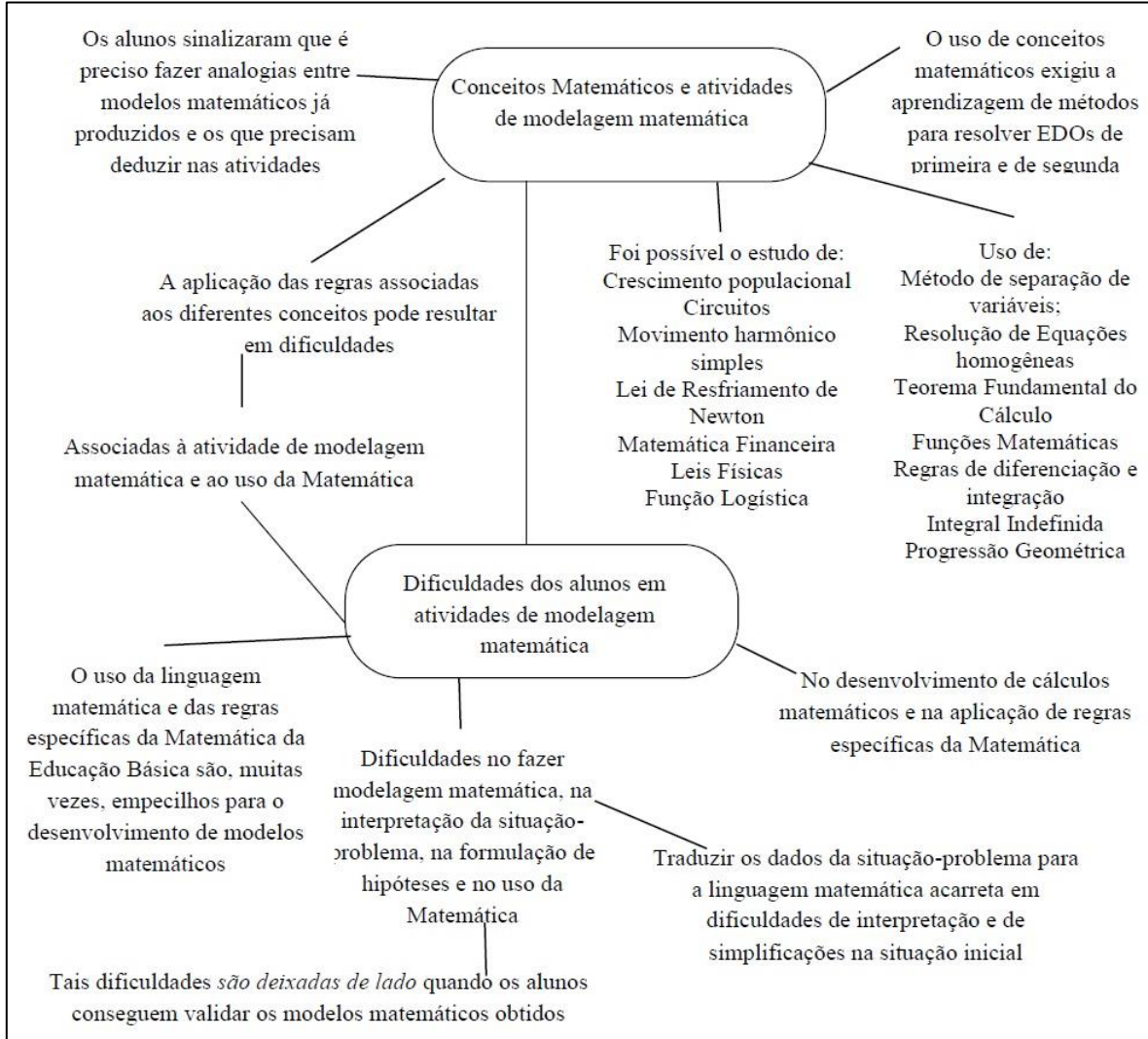
Aluno A4: Com as atividades pude aprender técnicas e conceitos de integração, sem necessariamente ter que retornar ao CDI I, isso foi o mais importante para mim...

Aluna C5: tinha muitas dificuldades em cálculo, mas pelo uso frequente nas atividades de modelagem matemática foi ficando mais simples.

RE_Q1

Os procedimentos matemáticos evidenciados pelos alunos, bem como as dificuldades por eles enfrentadas foram evidenciadas, desde características essenciais das atividades de modelagem matemática ao uso da Matemática nas atividades desenvolvidas. A árvore da Figura 6.3 relaciona os principais conceitos matemáticos aliados ao desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e as dificuldades.

Figura 6.3 O uso de conceitos matemáticos e as dificuldades dos alunos em atividades de modelagem matemática



Com base na análise das práticas discursivas dos alunos, no que tange aos usos da linguagem e de procedimentos matemáticos, abordamos especificidades quanto às atividades de modelagem matemática por meio do que os alunos consideram importante em atividades de modelagem matemática, os conceitos que para eles se fizeram mais evidentes e as principais dificuldades notadas. De modo geral tanto o *fazer modelagem matemática* foi enfatizado, quanto o uso de conceitos matemáticos feitos nas disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias e de Introdução à Modelagem Matemática, por nós sistematizados nas três categorias descritas no Capítulo cinco deste texto.

Neste contexto, a próxima seção deste capítulo visa sintetizar as informações coletadas e a análise interpretativa realizada sobre os usos da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática. Para tanto foram considerados: o arcabouço metodológico que guia as análises dessa tese, as teorias de base descritas nos capítulos dois e três e a análise interpretativa das práticas discursivas dos alunos em atividades de modelagem matemática. As asserções e reflexões são possíveis considerando os principais procedimentos matemáticos utilizados pelos alunos (equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, e o recurso ao ajuste de curvas) e as categorias que emergiram da análise das práticas discursivas dos alunos no uso destes procedimentos, ou seja o uso de proposições e justificativas em atividades de modelagem matemática, o uso de regras em atividades de modelagem matemática e a formação de conceitos em atividades de modelagem matemática.

LINGUAGEM E MATEMÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: REFLEXÕES COM RELAÇÃO AO OBJETIVO DA PESQUISA

As práticas linguísticas que ocorrem em sala de aula, durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, foram investigadas por meio da metodologia de análise das práticas discursivas de Spink (2013). De acordo com Oliveira e Silveira (2016) tais práticas interferem nos processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, e em particular as práticas associadas aos usos da linguagem matemática.

Uma das preocupações quando analisamos os usos da linguagem matemática em sala de aula por meio do uso de equações diferenciais ordinárias de primeira e de segunda ordem e do recurso ao ajuste de curvas, está na tradução entre linguagens que o aluno deve fazer a fim de interpretar e compreender os textos, as regras e os conceitos matemáticos. A tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, e vice-versa, foi sinalizada nas diferentes atividades desenvolvidas pelos alunos, e a formação de conceitos associados ao jogo de linguagem que explicita essa tradução pode ser evidenciada quando os alunos sinalizam dificuldades e características importantes da modelagem matemática, por exemplo, na interpretação da situação-problema, na realização de simplificações e na

formulação de hipóteses – momento em que os alunos precisam jogar esse jogo de linguagem a fim de *caminhar* para a elaboração de uma situação matemática idealizada.

A sinalização dos alunos com relação à importância da tradução entre linguagens no jogo de linguagem da modelagem matemática pode corroborar com o que Tortola (2012, p. 61) afirma, que a modelagem matemática pode colaborar com o “desenvolvimento da habilidade de transitar entre linguagem natural do fenômeno e linguagem matemática, estabelecendo conexões entre Matemática e suas aplicações na realidade”.

No que tange aos usos da linguagem no jogo de linguagem específico da modelagem matemática. Seja por meio das temáticas indicadas pela professora ou pelos alunos, os alunos se engajaram em uma atividade que, como indica Niss (2015, p. 67, tradução nossa), visa “capturar, representar, compreender, ou analisar a existência de fenômenos, situações ou domínios extra-matemáticos”. Durante as atividades de modelagem matemática foi possível observar a articulação do uso de ideias apoiadas na situação-problema em estudo e na Matemática, bem como na articulação destes dois jogos de linguagem. Tal fato corrobora com a assertiva de Pollak (2015, p. 268, tradução nossa) de que “em uma situação de Modelagem Matemática, a Matemática Pura perde parte de sua soberania”, e neste contexto a qualidade dos resultados é julgada “não só com base nos procedimentos matemáticos utilizados na situação matemática idealizada, mas também pelo sucesso do confronto desta com a realidade”.

Nas atividades desenvolvidas pelos alunos é possível identificar elementos principais da atividade de modelagem matemática, como a definição de variáveis, formulação de hipóteses, o uso, dedução e/ou elaboração de modelos matemáticos, uma interpretação matemática dos resultados matemáticos obtidos, e uma resposta para a situação-problema. Estes elementos se constituíram como ações dos alunos durante as atividades. Almeida e Ferruzzi (2009) os indicam como as ações empreendidas pelos alunos durante a atividade de modelagem matemática.

Além destas ações, é possível observar, também, os alunos percorrendo as fases da modelagem matemática identificadas por Almeida, Silva e Vertuan (2012) como a *inteiração* com a situação-problema, a *matematização* que consiste da transição de linguagens, da linguagem natural para a linguagem matemática, a fase de *resolução* em que ocorre o uso de procedimentos matemáticos com vistas à elaboração de um modelo

matemático e a fase de *interpretação e validação* em que o modelo matemático obtido é interpretado pelos alunos com vistas à situação-problema inicial, os dados obtidos são validados e uma resposta é emitida.

O uso da matematização nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas foi analisado por meio da matematização horizontal e da matematização vertical descrita por Almeida e Silva (2015) e por Kaiser e Sriraman (2006), bem como do entendimento de matematização descrito por Vidigal e Bean (2016) e por Freitas (2013). De modo geral, a matematização horizontal ocorre sempre que os alunos precisam entrar em contato com o jogo de linguagem da tradução entre a linguagem natural para a linguagem matemática e da linguagem matemática para a linguagem natural. Nas atividades de modelagem matemática tais fatos são observados quando os alunos a partir da situação-problema delineiam uma situação matemática idealizada, e quando a partir da resposta para a situação matemática idealizada buscam uma resposta para a situação-problema inicial. Já a matematização vertical é fortemente utilizada quando os alunos fazem uso de procedimentos matemáticos no desenvolvimento dos modelos matemáticos a partir da situação matemática idealizada.

Por vezes é possível identificar uma matematização crítica, como descrita por Freitas (2013) (embora este não seja o foco desta pesquisa) das atividades de modelagem matemática desenvolvidas, como no caso da atividade AT3.2 em que os alunos buscam dados da cooperativa agroindustrial e retornam tal modelo à cooperativa para validação e comunicação da atividade desenvolvida.

O ato de matematizar, ler as informações e traduzi-las por meio do uso de conceitos e procedimentos matemáticos sinaliza o que Wittgenstein (2013) chama de jogos de linguagem com os quais os sujeitos se familiarizam e vivenciam em suas formas de vida.

As dificuldades decorrentes dos usos da Matemática na resolução das situações matemáticas idealizadas podem estar associadas ao caráter simbólico da linguagem matemática, como já sinalizado por Almeida, Tortola e Merli (2012), Silveira e Silva (2016) e por Costa, Moraes e Silveira (2016).

Mas porque faz-se importante a investigação sobre os usos da linguagem matemática em atividades de modelagem matemática? De acordo com Wittgenstein (1996, p. 382, tradução nossa):

Não há conexões causais em um cálculo, apenas as conexões padrão. E isso não faz diferença, por isso nós trabalhamos com provas, a fim de aceitá-las. Por mais que estejamos tentados a dizer que elas surgem como resultados de uma experiência psicológica. O curso psíquico dos acontecimentos não é psicologicamente investigado quando calculamos.

É nos usos da linguagem matemática, no aprender a seguir regras, e na atribuição de significados com base em seus diferentes usos que os sujeitos podem formar conceitos do jogo de linguagem da Matemática e de seu automovimento, o que foi evidenciado nas categorias dois e três sobre o uso de regras e formação de conceitos em atividades de modelagem matemática. Nesse contexto, é possível fomentar as reflexões retomando as palavras de Wittgenstein quando o filósofo afirma que:

Jogos de linguagem são utilizados em algumas frases; relatórios, ordens e por aí em diante. E agora as pessoas também empregam proposições de cálculo. Eles as dizem para si, talvez, entre as ordens e os relatórios.

Um jogo de linguagem, no qual alguém calcula de acordo com uma regra e coloca os blocos de uma construção de acordo com os resultados de um cálculo. Ele aprendeu a operar com sinais escritos de acordo com as regras. - Depois de ter descrito este procedimento de ensino e aprendizagem, você disse tudo o que pode ser dito sobre agir corretamente de acordo com uma regra. Podemos ir mais longe. Não adianta, por exemplo, retornar ao conceito de acordo, porque não seria útil, por certo que um processo está em acordo com o outro, do que o que tem acontecido em conformidade com uma regra. É certo que ir ao encontro de uma regra também se baseia em um acordo.

Para repetir, no que consiste seguir uma regra corretamente não poderíamos descrever essa aprendizagem de forma mais próxima do que a aprendizagem de “proceder de acordo com a regra”. E esta descrição é um passo diário, como o de culinária e costura, por exemplo. Ela pressupõe tanto quanto estes. Distingue uma coisa da outra, e assim informa um ser humano que é ignorante de algo particular.

(WITTGENSTEIN, 1996, p. 392, tradução nossa)

Os usos da linguagem matemática em atividades de modelagem matemática estão associados, principalmente, aos usos da Matemática Escolar. Neste contexto, Souza (2012) e Souza e Barbosa (2014) já sinalizam o potencial de atividades de modelagem matemática para legitimar os usos da linguagem matemática associada ao sistema matemático escolar e como um meio para ensinar e aprender matemática nesta forma de vida. Nesse contexto, a maneira como os alunos usam a linguagem e os procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática estão associados à Matemática que consideram útil em sua

forma de vida, às situações que podem por eles ser *lidas e interpretadas* utilizando da linguagem matemática.

Já no capítulo dois desse texto sinalizamos o entendimento de que a formulação de hipóteses representa um gancho para a execução de uma atividade de modelagem matemática. Outros autores já chamaram a atenção para esse momento da atividade de modelagem matemática (BEAN, 2001; BEAN, 2012; BEAN, 2015; ALMEIDA, 2014; BASSANEZI, 2002; ALMEIDA, SOUSA, TORTOLA, 2015). Durante a pesquisa empírica, a maioria dos alunos sinalizou dificuldades na formulação de hipóteses, seja por conta da seleção de informações da situação-problema, seja por conta do direcionamento matemático que tais hipóteses poderiam conduzi-los. O grupo de alunos G4 em determinado momento fez o questionamento *Porque decidimos sempre estudar coisas tão difíceis?* Podemos dizer que é o caráter conjectural das atividades de modelagem matemática que proporciona múltiplos olhares às situações estudadas e direciona os alunos a diferentes modos de ver, por meio da linguagem matemática, por vezes a mesma situação-problema.

Ainda no que tange à matematização e ao uso de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática, as análises apresentadas indicam que o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática pelos alunos sinaliza a importância da consideração de hipóteses no desenvolvimento destas atividades, sejam mediadas pelo conhecimento das situações-problema, seja mediada pelos conhecimentos matemáticos dos alunos. Como indicam Bean (2001; 2012; 2015), Almeida (2014), Bassanezi (2002) e Almeida, Sousa e Tortola (2015) o uso das hipóteses nessas atividades *joga* um importante papel. É por meio das hipóteses que os alunos se engajam na elaboração de modelos matemáticos, sejam eles gráficos, tabulares ou algébricos.

As hipóteses nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos dirigem sua investigação e assumem por vezes características de proposições empíricas, baseadas nas situações investigadas, e por vezes características de proposições matemáticas, de origem gramatical, relacionadas à gramática da matemática. São suposições bem fundamentadas como argumenta Almeida (2014a).

A dificuldade na formulação de hipóteses está associada à aprendizagem de uma das regras do jogo de linguagem da modelagem matemática. Bean (2001, 2015), Bassanesi

(2012), Almeida (2014a) e Grigoraş (2012) são alguns dos autores que trabalharam na teorização sobre o papel das hipóteses em modelagem matemática. A partir da pesquisa desenvolvida, corroboramos com tais autores e acrescentamos nosso entendimento de que para aprender modelagem matemática faz-se importante aprender a formular hipóteses a partir de situações empíricas com vistas a uma situação matemática idealizada.

A formulação de hipóteses está, também, associada à formulação de problemas, que por sua vez não é importante apenas na modelagem matemática, mas em especial na Educação Matemática. Pollak (2012, p. xi, tradução nossa) aborda que “ao enfatizar o aspecto da formulação do problema, a modelagem matemática traz de volta à Educação Matemática a formulação de problemas e reforça, muito, a unidade da experiência em Matemática”. Nesse contexto, a formulação de problemas em atividades de modelagem matemática está ligada às vivências dos modeladores com atividades de modelagem matemática, o que por sua vez proporciona o aprimoramento nas regras do jogo e conseqüentemente na formulação de hipóteses, na estruturação de situações matemáticas idealizadas e no uso da linguagem matemática.

É por meio da formulação de hipóteses que entra em *cena* os domínios do jogo de linguagem da Matemática e a elaboração de modelos matemáticos em que o foco está no jogo de linguagem da Matemática. Segundo Stillman, Brown e Geiger (2015, p. 95-96, tradução nossa) “o domínio da Matemática inclui a elaboração do modelo matemático para a situação, questões matemáticas e artefatos matemáticos (por exemplo, gráficos e tabelas) utilizados na solução do modelo matemático”.

Quando problematizamos as hipóteses em modelagem matemática, autores como Bean (2001) apontam que uma das principais características das atividades de modelagem matemática está na formulação de hipóteses. Atrémos com base em nossas análises a formulação de hipóteses ao levantamento e descarte de conjecturas, seja por meio da situação empírica que rege as informações da atividade de modelagem matemática, seja por meio dos usos da Matemática que os alunos têm em mente para determinada situação.

Em diferentes momentos das análises, sobre o uso de equações diferenciais de primeira e de segunda ordem e quando os alunos fazem uso de ajuste de curvas, corroboramos com Almeida (2014a) que as hipóteses, nas atividades de modelagem matemática, serviram como guias aos alunos no que diz respeito aos usos da Matemática, da linguagem matemática e de seus procedimentos internos. Vemos que para além de servir

como guias, é a partir da formulação de hipóteses que os alunos sinalizam seu entendimento da situação-problema, as condições de verdade que podem ser assumidas e os conceitos matemáticos que lhes são possíveis em cada atividade de modelagem matemática. Por vezes, mesmos os alunos tendo consciência sobre os conceitos matemáticos que melhor se adequariam às hipóteses formuladas, os mesmos alteram o uso dos procedimentos matemáticos devido à falta de familiaridade com o conceito, como aconteceu no desenvolvimento da AT7 pelo grupo de alunos G6 que sinalizou o uso da curva catenária para descrever a curva da fita de Slackline, bem como a dificuldade do grupo de alunos no uso de tal conceito a partir dos dados coletados. Algumas vezes durante a formulação de hipóteses, os alunos se engajam na dedução de modelos matemáticos. Nesse contexto, a tradução da linguagem natural – advinda da situação empírica sob análise – dá lugar ao uso da linguagem matemática.

Os modelos matemáticos obtidos pelos alunos são gráficos, tabelas, funções matemáticas e é durante essa elaboração que regras matemáticas são utilizadas, sejam elas já conhecidas pelos alunos, sejam aquelas que estão aprendendo no contexto das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, como a disciplina de EDO, de Introdução à Modelagem Matemática, de Cálculo Numérico, Cálculo Diferencial e Integral, entre outras.

Para Barbosa (2009, p. 80) os papéis dos modelos matemáticos são “em diferentes modos e graus de apropriação. Eles são baseados no fato de que os alunos também participam das aulas de matemática e, portanto estão aptos a reconhecerem seus conceitos e procedimentos”.

Para Cifuentes e Negrelli (2011) é possível *ver* a elaboração de modelos matemáticos culminando em teorias por meio de equações de diversos tipos, algébricas ou diferenciais. Os alunos dos grupos G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7 e G8 quando na formulação de hipóteses e desenvolvimento dos modelos matemáticos nos mostram o que Cifuentes e Negrelli (2011, p. 131) denominam como caráter conjectural da atividade de modelagem matemática “cujas conclusões, então, não necessariamente são verdadeiras, senão plausíveis, sobre os fenômenos da realidade inicial em estudo”. É nesse contexto que se dá a interpretação matemática dos resultados obtidos, bem com a resposta para a situação-problema investigada.

No contexto da pesquisa empírica desenvolvida, os alunos utilizaram as regras do sistema da Matemática escolar em particular dos jogos de linguagem que regem as disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias e de Introdução à Modelagem Matemática. Foi nesse contexto, que a formação de conceitos referente equações diferenciais de primeira e de segunda ordem foi possível.

Em vários momentos, os usos da linguagem estão associados aos usos de justificativas e proposições gramaticais e empíricas, como analisado por meio da categoria de análise dois. O filósofo Wittgenstein enfatiza a importância das justificativas nos usos da linguagem.

O que estou fazendo, não é para mostrar que os cálculos estão errados, mas para submeter o interesse destes cálculos a testes. Eu testo, por exemplo, a justificação para o uso da palavra ... aqui. Ou realmente, posso continuar pedindo por tal investigação. Eu mostro que existe tal investigação e o que há para investigar lá. Assim, devo dizer, não: "Não podemos nos expressar assim", ou "Isso é um absurdo", ou "Isso é interessante", mas "Teste a justificação desta expressão dessa maneira". Você não pode examinar a justificação de uma expressão, a menos que você examine seu emprego; que você não pode fazer, olhando para alguma faceta do seu emprego, dizem que uma imagem anexar a ele (WITTGENSTEIN 1996, p. 142, tradução nossa).

Essas justificativas estão associadas por vezes aos usos dos procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática. De modo geral, os alunos sinalizam que os procedimentos matemáticos são, por eles, considerados válidos quando conseguem validar o modelo matemático obtido, seja por meio do uso de um software, seja por meio de informações físicas do fenômeno em estudo.

Com base no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e nas análises apresentadas no Capítulo 5 é possível responder positivamente as questões colocadas por Galbraith (2012), visto que foi importante ser capaz de definir um problema a partir de uma situação associada ao *mundo real*, formular e defender modelos matemáticos apropriados para lidar com as situações-problema, ocorreu a interpretação de resultados matemáticos, bem como a avaliação e emissão de respostas matemáticas com vistas a sua relevância na situação estudada.

No contexto das atividades de modelagem matemática diferentes procedimentos matemáticos foram utilizados pelos alunos, desde procedimento do jogo de linguagem da

Matemática escolar associada ao currículo da Educação Básica à procedimento do currículo de um curso de Licenciatura em Matemática.

Os procedimentos matemáticos utilizados pelos alunos, em particular nas atividades que consistem da pesquisa empírica dessa tese, foram sistematizados de acordo com seu uso em três conteúdos: equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e o recurso ao ajuste de curvas:

- ✓ Equações Diferenciais de Primeira Ordem
 - Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares
 - Equações diferenciais ordinárias e funções lineares
 - Interpretação da Lei do Resfriamento de Newton e equações diferenciais ordinárias e funções exponenciais assintóticas
 - Problemas de valor inicial
 - O uso do método de separação de variáveis
 - O uso do método do fator integrante
 - Técnicas de diferenciação e integração

- ✓ Equações Diferenciais de Segunda Ordem
 - Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem lineares
 - EDO de segunda ordem homogêneas
 - EDO de segunda ordem não homogêneas
 - Problemas de valor inicial
 - Problemas de valor de contorno
 - Segunda Lei de Newton
 - Lei de Hooke
 - Análise de forças: força peso, força de resistência, força elástica.
 - Método dos coeficientes constantes para resolução de EDO de segunda ordem
 - Interpretação das soluções de um EDO
 - Tipos de amortecimento e equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

- ✓ O Recurso ao Ajuste de Curvas

- Ajuste de funções polinomiais
- Ajuste de funções exponenciais
- Ajuste de funções definidas por várias sentenças

Para além dos conceitos matemáticos associados a estes três procedimentos matemáticos, os alunos se engajaram em procedimentos associados à Matemática escolar da Educação Básica, como as propriedades de funções exponenciais e logarítmicas, a solução de equações de segundo grau, o uso do princípio aditivo e do princípio multiplicativo, o tratamento da informação disposta em textos (em linguagem natural e em linguagem matemática), em gráficos e tabelas, o uso de conceitos associados à área e a volume, entre outros que se fizeram necessários na leitura e interpretação das situações-problema por meio da linguagem matemática e da dedução de modelos matemáticos.

O uso dos procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática se dá no sentido do que abordamos neste texto por matematização em atividades de modelagem matemática, já abordado no que se refere aos usos da linguagem em atividades de modelagem matemática. A matematização, indicada por Levy (2016) como o que proporciona explicar, entender e até agir sobre um determinado espaço do que se considera como mundo real ou como destacado por Vidigal e Bean (2016, p. 251) “a matematização, por sua vez, é uma conceituação ou estruturação matemática de uma situação considerada”.

Os três conteúdos principais citados emergiram nas atividades de modelagem matemática associadas às situações ora com temática escolhida pela professora, ora com temática escolhida pelos alunos. De modo geral, nessas situações-problema os alunos buscaram estudar procedimentos matemáticos decorrentes das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, mas sempre vislumbrando a aplicabilidade de tais procedimentos com vistas às situações-problema. Segundo Fleg et al. (2013, p. 28, tradução nossa) “os estudantes apreciam modelos matemáticos que tem aplicações no mundo real e que podem ser utilizados para engaja-los com abordagens que favoreçam situações de aprendizagem”. Os mesmos autores sinalizam que quando os estudantes tentam entender um modelo matemático eles utilizam:

- (1) A seleção de informações complementares.
- (2) O uso e a prática com o modelo matemático.

- (3) A procura por inter-relações entre elementos do modelo.
Há duas intenções primárias no emprego de estratégias. Os alunos procuraram:
- (1) Compreensão dos elementos do modelo ou
 - (2) Compreender as inter-relações entre os elementos/contexto e aplicação do modelo (FLEG et al., 2013, página 31).

Carrejo e Marshal (2007) investigam a construção, desenvolvimento e o uso de modelos matemáticos na sala de aula. No que tange à importância que a Matemática formal, associada à forma de vida dos matemáticos, desempenha na aprendizagem por meio do uso de modelos matemáticos, os autores sinalizam que “uma questão-chave diz respeito à forma como os alunos fazem conexões entre um modelo matemático formal e o fenômeno que estão estudando” (CARREJO, MARSHAL, 2007, p. 46, tradução nossa).

No uso de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática, seja para traduzir uma situação da linguagem natural para a linguagem matemática, seja na dedução de modelos matemáticos para uma situação matemática idealizada, os procedimentos matemáticos são vistos como regras de como proceder a fim de usar a linguagem matemática. Os símbolos da linguagem matemática são utilizados com vistas à atribuição de significados para as situações matemáticas idealizadas e para o uso de determinados conceitos como o de equações diferenciais ordinárias, seus métodos de resolução, o recurso ao ajuste de curvas entre outros. É o uso desses símbolos e das palavras a eles associadas na linguagem matemática que dá vida aos significados dos procedimentos matemáticos utilizados pelos alunos.

A ideia de significação de palavras e de símbolos associados aos seus usos na linguagem é a base da filosofia de Wittgenstein e aspecto explorado por Silveira (2015), Almeida (2014a, 2014b) e Gottschalk (2008) entre outros pesquisadores. É na gramática que rege os usos dessas palavras e desses símbolos que os alunos se deparam com novos jogos de linguagem e com novas possibilidades de significação nas formas de vida que partilham.

A formação de conceitos, abordada na categoria de análise três, no que tange às equações diferenciais ordinárias, bem como ao aprofundamento dos conceitos de cálculo diferencial e integral está associada a saber utilizar a linguagem matemática e as regras que regem essa linguagem na aplicação de tais conceitos em diferentes situações, propiciadas pelas atividades de modelagem matemática. De acordo com Wittgenstein (1996) a função

de uma palavra em uma frase deve revelar-se quando os sujeitos entram em contato com ela, no curso de suas ações:

Alguns gostariam de falar da função de uma palavra, do que ele faz, nesta frase. Como da função de uma alavanca em uma máquina. Mas no que essa função consiste? Como isso veio à luz? Pois não há nada escondido, não é? Nós vemos a frase inteira. A função deve revelar-se no curso do cálculo (WITTGENSTEIN, 1996, p. 99, tradução nossa).

Os usos dos procedimentos matemáticos não são fáceis, nem ao menos acidentais. No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, os alunos querem utilizar procedimentos específicos que são exigidos nas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática. Durante o desenvolvimento das cinco primeiras atividades de modelagem matemática é possível notar a busca pelo uso e pelo entendimento de equações diferenciais ordinárias de primeira e de segunda ordem, seus métodos resolução e a compreensão de procedimentos de diferenciação e integração, requeridos no cálculo diferencial e integral e que são retomados na resolução de equações diferenciais. Em algumas atividades, àquelas finalizadas na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática, já é possível notar o uso de métodos de ajuste de curvas e o uso de softwares associados às disciplinas do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática, isso porque os alunos iniciavam sua vivência com outros conceitos e com uma disciplina em que há mais maleabilidade quanto aos usos de conceitos matemáticos, a disciplina de modelagem matemática.

O ato de querer saber jogar com as regras do jogo que imperam nas disciplinas em curso está associado à intencionalidade nos usos da linguagem, em particular da linguagem matemática, Wittgenstein (1996, p. 109, tradução nossa) sinaliza que:

Para que serve a palavra mesmo? Pois no cálculo não fazemos uso desta identidade! Porque ambos os jogadores têm as mesmas peças? Mas o que significa “fazer uso da identidade” aqui? Mas se caracteriza como uso, se estamos usando a mesma palavra?

Aqui parece agora como se o uso da mesma palavra, a peça, tinha um propósito - se a identidade não foi acidental, não foi essencial. É como se o objetivo fosse que se deve reconhecer a peça e ser capaz de dizer como jogar. É uma possibilidade física ou lógica que está em questão aqui? Neste último caso, em seguida, a identidade das partes é que de fato pertence ao jogo.

As justificativas para os procedimentos matemáticos estão atreladas aos usos das proposições gramaticais no jogo de linguagem da modelagem matemática. Neste contexto, os alunos tomam decisões quanto aos usos da linguagem matemática. Wittgenstein (1996, p. 279, tradução nossa) sinaliza que “Só dentro de uma estrutura matemática que ainda tem de ser erguido faz a pergunta permitir de uma decisão matemática, e ao mesmo tempo tornar-se uma demanda para tal decisão”. Este processo descrito por Wittgenstein está associado à criação de uma estrutura matemática, no entanto quando os alunos estão em situações de aprendizagem em cursos de Licenciatura em Matemática, os conceitos matemáticos não são, para eles, prontos e acabados, ou seja, eles estão, como afirma Silveira (2016) em estado de devir para os alunos. Assim, é possível dizer que as decisões tomadas pelos alunos no que tange aos usos dos conceitos matemáticos fazem sentido quando consideramos as especificidades da forma de vida em que se encontram, por exemplo, quando os mesmos realizam diferentes coletas de dados e conjecturas para deduzir uma equação diferencial de segunda ordem que representa o deslocamento da mola de um carrinho de rali na atividade AT10.

O teste de conjecturas, a formulação de hipóteses e a decisão sobre os modelos matemáticos possíveis em determinadas situações de modelagem matemática estão associadas às decisões que incidem sobre o uso de um procedimento matemático ou outro. No caso do ajuste de curvas, sobre que curva melhor se ajusta aos dados e ao fenômeno estudado, ou ainda no caso do uso da interpretação do fenômeno por meio de um ajuste de curvas ou por meio de uma equação diferencial ordinária, como aconteceu na atividade AT7 quando os alunos comparam o ajuste a uma função polinomial de segundo grau com a dedução da curva catenária. As palavras de Wittgenstein (1996) nos fazem comparar tais ações com a decisão pelo uso de uma técnica ou outra, pelo agir em um jogo de linguagem ou em outro, a partir da tradução de proposições empíricas em proposições gramaticais: “Quando aprendemos uma técnica é possível alterá-la de tal e tal modo. ‘Nós Decidimos sobre um novo jogo de linguagem’. ‘Nós decidimos espontaneamente’ (eu gostaria de dizer) ‘em um novo jogo de linguagem’” (WITTGENSTEIN, 1996, p. 236, tradução nossa).

Por meio da pesquisa empírica, quando no uso de procedimentos matemáticos vislumbramos que os receios apontados por Otte e Barros (2015) e por Pollak (1979) com

relação ao perigo do reducionismo e do empirismo para a formação dos alunos em Matemática e à redução de um ensino predominantemente empirista não se fizeram presentes nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas. De modo geral, quando no uso dos procedimentos matemáticos os alunos procuraram buscar informações associadas ao jogo de linguagem da Matemática em livros didáticos, artigos e por meio da entrevista com professores de Matemática e de Física. Os resultados matemáticos foram validados por meio das relações estabelecidas com as situações-problema, como no caso das atividades AT3.1, AT3.2, AT8 e AT10 em que os alunos validaram as informações matemáticas e as interpretaram com base nas informações coletadas na situação empírica. Sendo que, muitas vezes foi necessário o retorno aos dados e novas coletas a fim de utilizar os resultados matemáticos, os quais foram direcionados pelas situações matemáticas idealizadas.

Nesse contexto, a linguagem matemática foi utilizada não apenas com uma função comunicacional, mas como constitutiva dos conceitos matemáticos que ‘cabiam’ para resolver as situações idealizadas. Tal concepção de linguagem vai ao encontro do que esboça Vilela e Mendes (2011), como uma concepção de linguagem discursiva.

Por meio do uso de diferentes procedimentos matemáticos é possível que os alunos aprendam as regras dos jogos de linguagem que constituem o jogo de linguagem da Matemática. Podemos relacionar estes usos dos conceitos matemáticos com a aprendizagem do jogo de linguagem da Matemática, principalmente no que diz respeito às equações diferenciais ordinárias e aos métodos de ajuste de curvas. Retomamos aqui as palavras de Gottschalk (2004, p. 321) quando a autora sinaliza que “aprender o significado de uma palavra pode consistir na aquisição de uma regra, ou um conjunto de regras, que governa seu uso dentro de um ou mais jogos de linguagem”.

Neste contexto, surge a formação de conceitos em Matemática. gostaríamos aqui de atrelar a formação de conceitos à compreensão em Matemática. De acordo com Wittgenstein (2013, § 146) “[...] a compreensão mesma é um estado do qual emerge o correto emprego”. Assim quando falamos na formação de conceitos matemáticos em atividades de modelagem matemática, falamos também da compreensão destes conceitos, a qual se dá por meio do emprego correto dos conceitos matemáticos e das regras a eles associadas.

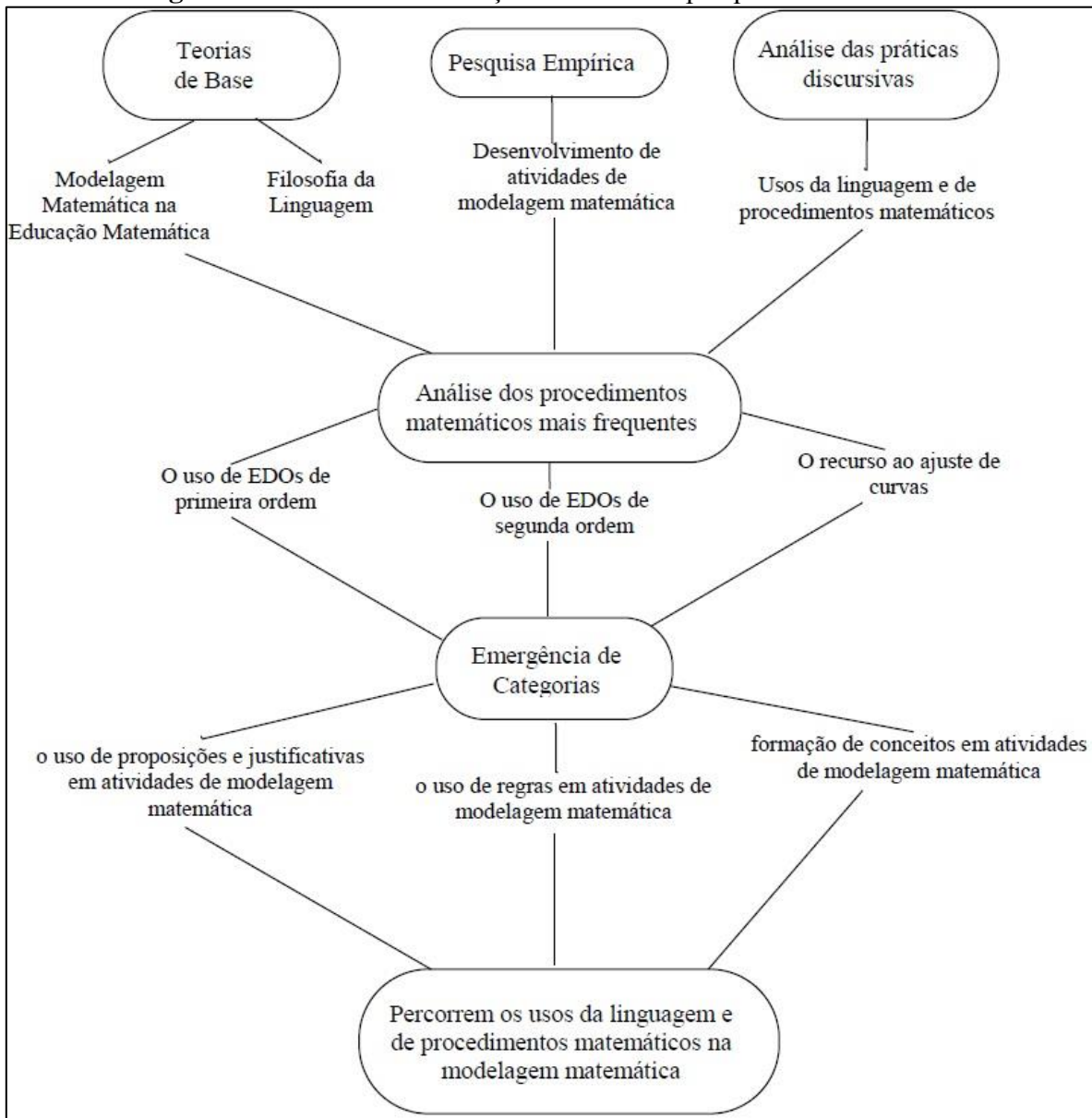
No uso de procedimentos matemáticos pelos alunos é possível notar o uso da linguagem matemática para diferentes regras conceituais, por exemplo àquelas associadas às funções exponenciais e logarítmicas nas atividades AT1 e AT2, ou ainda as regras para obtenção dos parâmetros de uma EDO de segunda ordem, como no caso das atividades AT6, AT8 e AT10, associadas principalmente ao uso da segunda lei de Newton, da Lei de Hooke e da análise das forças presente nos fenômenos. Neste contexto, corroboramos com Moreno (2003) de que é no interior do uso das regras conceituais de diferentes gramáticas que são construídos os sentidos da experiência. Por meio do manejo com essas regras e da apropriação linguística da linguagem a elas associadas os alunos construíram juízos e hipóteses, fizeram descrições e inferências nas relações entre os jogos de linguagem da situação-problema e da Matemática.

A vivência com as regras do jogo de linguagem da Matemática e da modelagem matemática está associada à uma práxis específica da forma de vida de um curso de Licenciatura em Matemática no contexto das disciplinas de EDO e de Introdução à Modelagem Matemática.

É possível dizer, ainda, que os procedimentos matemáticos utilizados pelos alunos são vistos como proposições gramaticais. Essas proposições, de acordo com Moreno (2003) não são objetivas nem subjetivas, e estão ligadas ao mundo natural por meio do uso que dela fazemos. Nas atividades de modelagem matemática, as proposições gramaticais servem como normas para organização das experiências nas diferentes formas de vida com as quais os alunos entram em contato.

Considerando o processo analítico apresentado no capítulo cinco e as discussões apresentadas neste capítulo, evidenciamos com base na perspectiva wittgensteiniana os usos da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática. E com base nas discussões apresentadas elaboramos a árvore de associação de ideias da Figura 6.4 que visa mostrar o percurso analítico da pesquisa e os usos da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática.

Figura 6.4 Árvore de associação de ideias da pesquisa desenvolvida



Para encerrar nos dirigimos às considerações finais da pesquisa, retomamos o objetivo e trazemos limitações da pesquisa, indicações de pesquisas futuras, bem como sintetizamos as contribuições até aqui elencadas.

PALAVRAS FINAIS...

Nessa pesquisa buscamos *investigar os usos da linguagem e os procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática*. A partir da imersão no conjunto de informações coletadas, confrontos foram feitos com as informações advindas das teorias de base, sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática e sobre Matemática e Linguagem na Filosofia de Wittgenstein. Deste confronto inicial, emergiram as categorias que visam detalhar o objetivo da pesquisa. Os procedimentos matemáticos utilizados pelos alunos, as justificativas sejam elas com base na situação-problema ou na Matemática, as proposições utilizadas por eles, às regras e a formação de conceitos em atividades de modelagem matemática foram detalhadas no capítulo cinco deste texto.

As discussões aqui apresentadas visam apontar contribuições e reflexões sobre os usos da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática. A posição epistemológica que defendemos está baseada na Modelagem Matemática na Educação Matemática, enquanto uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem de Matemática, e na Filosofia de Wittgenstein. Consideramos que por meio da discussão filosófica os usos da linguagem são investigados na prática, visto que, como afirma Vilela (2009, p. 197) “ela se constituiu dos elementos pelos quais expressamos nossos conhecimentos e as coisas que existem”.

No início de nosso texto, abordamos os pesquisadores Klüber e Burak (2009) e Otte e Barros (2015) os quais indicaram que quando se trata dos processos de ensino e de aprendizagem na Educação Matemática, um dos principais perigos está associado ao reducionismo de práticas empíricas e a pensamentos do dia a dia. Consideramos, assim como Klüber e Burak (2009), que é preciso uma base epistemológica que leve em consideração o compreender a Matemática, ou de acordo com a posição filosófica assumida, compreender os usos da Matemática e do nexos de jogos de linguagem que a constituem. Nesse contexto, é possível evitar o reducionismo quanto aos usos da Matemática, bem como um ensino empírico que não se atente ao rigor nos usos da linguagem matemática e na formação de conceitos, em particular em Matemática.

A pesquisa sinalizou que no contexto das atividades de modelagem matemática, os usos da linguagem estão associados a um nexos de jogos de linguagem que são possíveis

pelo caráter aberto e dinâmico de tais atividades, pela possibilidade de estudar diferentes situações-problema, formular diferentes situações matemáticas idealizadas e jogar com as regras de diferentes jogos de linguagem, entre eles o jogo de linguagem da Matemática. A concepção de linguagem, que aqui assumimos, é a dos jogos de linguagem das *Investigações Filosóficas* de Wittgenstein (Gerrard 1991; Wittgenstein 2013). Para além das investigações filosóficas de Wittgenstein, nos amparamos em suas *Observações sobre os fundamentos da Matemática* (WITTGENSTEIN, 1996) e no exame minucioso que o filósofo faz dos usos da linguagem matemática, de suas proposições, regras e assertivas com relação aos conceitos matemáticos e suas relações com nossas formas de vida.

Neste contexto, por meio dos usos da linguagem e de procedimentos matemáticos dos alunos no que diz respeito às equações diferenciais de primeira ordem, às equações diferenciais de segunda ordem e ao uso de ajuste de curvas, a análise das práticas discursivas dos alunos fez emergir três categorias de análises. A partir das categorias analisadas podemos inferir que a Modelagem Matemática na Educação Matemática viabiliza diferentes usos de proposições, justificativas e regras, ora de natureza empírica, ora de natureza gramatical.

As proposições, justificativas e regras utilizadas em atividades de modelagem matemática são advindas de variadas situações, por vezes das situações-problema investigadas pelos alunos, as quais não necessariamente têm origem na Matemática, e por vezes internas ao jogo de linguagem da Matemática. Quando no interior da gramática que rege o jogo de linguagem da Matemática, os alunos usam proposições como proposições gramaticais que normatizam seus procedimentos na atividade de modelagem matemática. Nesse contexto, as justificativas para o uso de procedimentos matemáticos utilizados são pautadas nas regras da Matemática escolar vivenciada pelo sujeito e têm como base sua aplicação nas situações estudadas. As regras, por sua vez regem o uso de procedimentos matemáticos, seja por meio de definições, seja por meio de resultados matemáticos que regem a resolução de diferentes artefatos matemáticos que na linguagem matemática se tornam ferramentas para o entendimento das situações-problema, ou seja, para que os alunos consigam matematizar as situações em estudo.

Sinalizamos, ainda, que atividades de modelagem matemática viabilizam a formação de conceitos. Por meio dos usos da linguagem e de procedimentos matemáticos, o

uso de proposições, justificativas e regras em atividades de modelagem matemática, colabora para que os sujeitos aprendam a seguir regras, mobilizem diferentes modos de ver os conceitos matemáticos e mobilizem-nos em diferentes situações, matemáticas ou não.

A formação de conceitos em atividades de modelagem matemática é possível por meio do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em que a formulação de problemas e de situações matemáticas idealizadas colabore para que os alunos investiguem hipóteses, treinem o uso de regras matemáticas e mobilizem usos gramaticalmente corretos da linguagem e dos procedimentos matemáticos. A partir dos usos corretos das regras é possível inferir sobre a compreensão das regras. A compreensão, por sua vez, está associada à atribuição de significados associados aos usos dos conceitos matemáticos em diferentes situações-problema, o que possibilita ao aluno a (re)construção dos conceitos matemáticos, já convencionados no jogo de linguagem da Matemática.

Entendemos que os resultados da pesquisa realizada vão ao encontro de pesquisas que auxiliam na formação de conceitos associados ao jogo de linguagem da Matemática e da modelagem matemática. Em modelagem matemática, as relações esboçadas pelos alunos entre as situações-problema, advindas de situações empíricas, e os conceitos matemáticos do jogo de linguagem da Matemática escolar podem auxiliar na formação de conceitos em matemática e atribuição de significados aos conceitos por meio da vivência com diferentes usos destes conceitos.

Nesse contexto, ampliamos o entendimento já apresentado neste texto sobre modelagem matemática. A vivência com essa pesquisa, a aprendizagem das regras do jogo no uso das teorias de base e das considerações metodológicas que nos possibilitaram jogar esse jogo de linguagem nos conduzem ao entendimento de que a modelagem matemática como uma alternativa pedagógica pode ser considerada um jogo de linguagem. No jogo de linguagem da modelagem matemática, no ambiente escolar, os alunos precisam aprender a seguir regras, das situações-problema estudadas e do jogo de linguagem da Matemática. Ao agir de acordo com as regras do jogo faz-se possível a formulação de problemas, o delineamento e a resposta para situações matemáticas idealizadas. É nesse contexto, que por meio do teste de conjecturas, da formulação de hipóteses e da dedução e do estudo de modelos matemáticos que vislumbramos a formação de conceitos em matemática. Assim, a

partir do jogo de linguagem da modelagem matemática significados podem ser entendidos e ampliados.

A pesquisa aqui desenvolvida evidencia o que Wittgenstein (1996), aborda sobre a Matemática como uma atividade normativa no sentido de normatizar as experiências dos sujeitos e auxiliar na formação de conceitos, na compreensão das coisas. Por meio da formação de conceitos em atividades de modelagem matemática é possível utilizar a Matemática como uma maneira particular de lidar com as situações-problema advindas de situações empíricas e neste contexto, corroboramos com Wittgenstein (1996, p. 425, tradução nossa) de que “é possível dizer que a Matemática forma uma rede de normas”.

Por meio da investigação dos usos da linguagem e de procedimentos matemáticos em modelagem matemática, nos possibilitou inferir sobre as justificativas e proposições utilizadas pelos alunos, sobre as regras utilizadas e sobre a formação de conceitos em atividades de modelagem matemática. Tal investigação sinaliza que os usos da linguagem se dão de modo constitutivo e não apenas comunicacional e, ainda, possibilita inferir que quando se trata de atividades de modelagem matemática a Matemática é utilizada não apenas como um veículo ou uma ferramenta que normatiza as experiências dos sujeitos com o mundo, mas também tem seu uso empírico, visto que o conceito será formado por cada indivíduo em particular. O filósofo Wittgenstein questiona as condições de verdade no que diz respeito à formação de conceitos. Segundo Wittgenstein (2013, p. 295):

Não digo: se tais e tais fatos naturais fossem diferentes, as pessoas teriam conceitos diferentes (no sentido de uma hipótese). Mas: quem acredita que certos conceitos são simplesmente conceitos corretos, alguém que tivesse outros conceitos não compreenderia justamente algo que nós compreendemos, - que estamos acostumados, e outras formações do conceito diferentes das habituais vão tornar-se compreensíveis para ele.

O autor chega a comparar um conceito a um estilo de pintura. No que tange ao jogo de linguagem específico este é regido por regras e por convenções, no caso do jogo de linguagem da Matemática, de acordo com Souza (2012) a Matemática por si só é normativa, no sentido de que ela é regida por regras que não podem ser invalidadas por meio da experiência. Nesse contexto, se o sujeito A formou um conceito sobre equação diferencial ordinária que é diferente do sujeito B, este equívoco será sanado quando compararmos as maneiras que os sujeitos utilizaram as regras e a linguagem matemática.

Para Wittgenstein (1996) a Matemática é uma invenção dos matemáticos, no entanto que obedece a um auto-movimento, que pode ser observado no âmbito da atividade humano em um contexto histórico-cultural.

A partir da análise dos dados, é possível concluir que em modelagem matemática, os usos da linguagem e, em particular, os procedimentos matemáticos associados à Matemática Escolar, auxiliam os alunos na compreensão de todo um jogo de linguagem, em que por meio de métodos de investigação envolvendo conjecturas, formulação de hipóteses e simplificações a Matemática nos diz sobre os fatos. Ela normatiza e auxilia na criação de problemas que muitas vezes são *modos de ver* as situações passíveis de estudo em atividades de modelagem matemática.

A discussão das atividades proporcionada pela pesquisa empírica associada a essa tese, traz, também, contribuições no que diz respeito aos usos da modelagem matemática em sala de aula, em particular em cursos de Licenciatura em Matemática. Especificamente na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias é possível que alunos e professores encontrem um material para iniciar o trabalho com atividades de modelagem matemática. Já dizia Pollak (2012, p. ix tradução nossa) “o campo particular de aplicação, seja na vida cotidiana, ou no uso para o bom exercício da cidadania, ou para o entendimento de alguma parte da Ciência, esses fatores são menos importantes do que a experiência com o processo de modelagem”. Por meio do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, para além das discussões em torno das situações-problema, para além dos usos da linguagem e dos procedimentos matemáticos está a aprendizagem do jogo de linguagem da modelagem matemática, o qual pode proporcionar diferentes modos de ver as situações e a Matemática.

Quando nos aproximamos do final de uma pesquisa faz-se necessário um processo avaliativo sobre os resultados da pesquisa, o que poderia ter sido diferente no sentido de aprimorar o trabalho desenvolvido e o que ficará para estudos futuros. Sentimos que uma das limitações da pesquisa está no elevado número de dados coletados na pesquisa empírica, os quais nem todos foram utilizados para compor este relatório de pesquisa. Por meio da pesquisa realizada vislumbramos possibilidades futuras de pesquisas que consideram a posição filosófica associada à concepção jogos de linguagem da Filosofia de Wittgenstein:

- ✓ A pesquisa sobre a formação de professores em modelagem matemática, sinalizando uma concepção de ensino, como a já indicada por Gottschalk (2008) em que o papel do professor esteja associado ao ensino dos usos que se faz dos conceitos matemáticos em contextos linguísticos, como o da modelagem matemática.
- ✓ O papel da Matemática na sociedade a partir da modelagem matemática e com base na perspectiva wittgensteiniana. Por meio de pesquisas com essa natureza pode ser possível fomentar o debate em torno da Matemática e dos instrumentos que a mesma fornece a fim de possibilitar diferentes análises na sociedade.
- ✓ A investigação de usos da linguagem e procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por formas de vida que não a da Matemática escolar.

Esta pesquisa, pode contribuir com a literatura sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, em particular, no Ensino Superior, em cursos de Licenciatura em Matemática, bem como sobre a investigação em modelagem matemática a partir de uma perspectiva filosófica. A problematização dos usos da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática é evidenciada, bem como os diversos jogos de linguagem que atividades de modelagem matemática possibilitam.

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.
- ALABAMA. J. W. NASA (Ed.). **Solid Rocket Boosters**. 2006a. Disponível em: <http://www.nasa.gov/returntoflight/system/system_SRB.html>. Acesso em: 23 set. 2015.
- ALABAMA. J. W. NASA (Ed.). **The External Tank**. 2006b. Disponível em: <http://www.nasa.gov/returntoflight/system/system_ET.html>. Acesso em: 23 set. 2015.
- ALABAMA. S. L. NASA (Ed.). **Space Shuttle Era**. 2015. Disponível em: <http://www.nasa.gov/mission_pages/shuttle/flyout/index.html>. Acesso em: 10 set. 2015.
- ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**. v. 18, p. 387-414, 2010.
- ALMEIDA, L. M. W. The ‘Practice’ of Mathematical Modeling Under a Wittgensteinian Perspective. **International Journal for Research in Mathematics Education**, v. 2, p. 98-113, 2014a.
- ALMEIDA, L. M. W. Jogos de linguagem em atividades de modelagem matemática. **VIDYA**, v. 34, n. 1, p. 241-256, jan./jun., 2014b.
- ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. O conceito de função em situações de Modelagem. **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 23, p. 63-83, 2005.
- ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**. Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.
- ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. Uma aproximação socioepistemologica para a Modelagem matemática. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n. 2, p. 117-134, jul 2009.
- ALMEIDA, L. M. W.; FONTANINI, M. L. Aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática: uma investigação usando mapas conceituais. **Investigações em Ensino de Ciências**. Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul Porto Alegre, Brasil, v. 15, n. 2, p. 403-425, 2010.
- ALMEIDA, L. M. W.; PALHARINI, B. N. Os “Mundos da Matemática” em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 907-934, ago. 2012.
- ALMEIDA; L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência e Educação**, vol. 18, n. 3, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, H. C. A Matematização em Atividades de Modelagem Matemática. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.8, n.3, p. 207-227, 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **A modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W. ; SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Desdobramentos para a Modelagem Matemática decorrentes da Formulação de Hipóteses. In: VI SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, **Anais VI SIPEM** Pirinópolis, 2015. v. 1. p. 1-13.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E. Modelagem Matemática no Ensino Fundamental: a linguagem de alunos como foco de análise. **JIEEM** – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, v. 7 (1), p. 1-32, 2014.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes? **Acta Scientiae**: Revista de Ensino de Ciências e Matemática, vol. 14, p. 215-239 – maio/ago – 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In. (Org.) ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A .P. **Modelagem matemática em foco**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014.

ARAÚJO, I. L. Por uma concepção semântico-pragmática da linguagem. **Revista Virtual de Estudos da Linguagem** – ReVEL. v. 5, n. 8, pp. 1-26, mar. 2007.

ARAÚJO, J. L. Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.55-68, jul. 2009.

ARAÚJO, J. L. Brazilian research on modelling in mathematics education. **ZDM**. 42, PP. 337–348, 2010.

ARAÚJO, J. L. Ser Crítico em Projetos de Modelagem em uma Perspectiva Crítica de Educação Matemática. **Bolema**. UNESP, Rio Claro, impresso, vol. 26, n. 43, 2012.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: Reunião anual da Anped, 24, 2001, Caxambu. **Anais...** Rio de Janeiro: ANPED, 2001. CD-ROM.

BARBOSA, J. C. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.69-85, jul. 2009.

BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.

- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BEAN, D. O que é modelagem matemática? **Educação Matemática em Revista** (São Paulo), São Paulo, v. 8, n. 9/10, p. 49-57, 2001.
- BEAN, D. As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, Petrópolis _ RJ. **V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Brasília: SBEM, 2012. p. 1-22.
- BEAN, D. A modelagem de Monteiro Lobato: o caso da fábula a cigarra e a formiga. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, IX, 2015, São Carlos - SP. **Anais...** São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2015. v. 1. p. 1-16.
- BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Percepções de Professores sobre o Uso da Modelagem Matemática em Sala de Aula. **Bolema**. UNESP, Rio Claro, impresso, vol. 26, n. 43, 2012.
- BLUM et. al. ICMI Study 14: Applications And Modelling In Mathematics Education – Discussion Document. **Educational Studies in Mathematics**. 51: 149-171, (2002).
- BLUM, W.; FERRI, R. B. Mathematical Modelling: can it be taught and learned?. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, vol. 1, n. 1, 45-58, 2009.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. - Características da investigação qualitativa. In: **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto, Porto Editora, 1994. p. 47-51.
- BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In: 27ª reunião anual da Anped, **Anais...** Caxambu, MG, 21-24 nov. 2004, p. 1-18.
- BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 9a Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Modelagem na Educação Matemática**. v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010.
- BURAK, D.; BRANDT, C. F. Modelagem Matemática e Representações Semióticas: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Zetetiké** (UNICAMP), v. 18, p. 63-102, 2010.

CARDOSO, V. C. **A cigarra e a formiga**: uma reflexão sobre educação matemática brasileira na primeira década do século XXI. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

CARREJO, D. J.; MARSHALL, J. What is Mathematical Modelling? Exploring Prospective Teachers's Use of Experiments to Connect Mathematics to the Study of Motion. **Mathematics Education Research Journal**. v. 19, n. 1, p. 45-76, 2007.

CARROLL, L. **Aventuras de Alice no País das Maravilhas; Através do Espelho e o que Alice encontrou por lá**. Trad. Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. O processo de modelagem matemática e a discretização de modelos contínuos como recurso de criação didática. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAUJO, J. L.; BISOGNIN, E. **Práticas de modelagem matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. Uma Interpretação Epistemológica do Processo de Modelagem Matemática: implicações para a matemática. **Bolema**. UNESP, Rio Claro, Impresso, vol. 26, n. 43, 2012.

CONDÉ, M. L. L. **Wittgenstein**: linguagem e mundo. São Paulo: Annablume, 1998.

COSTA, D. E.; MORAES, M. S. F.; SILVEIRA, M. R. A. Um estudo sobre problemas de tradução relativos às propriedades de limites de função real de uma variável real. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 18, n. 1, pp. 203-216, 2016.

D'AMBROSIO, U. The role of mathematics in educational systems. **ZDM**. 39: 173-181, 2007.

DALLA VECHIA, R. MALTEMPI, M. V. Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: a realidade do mundo cibernético como um vetor de virtualização. **Bolema**. UNESP, Rio Claro, Impresso, vol. 26, n. 43, 2012.

D'ARCE, M. A. B. R. **Pós colheita e armazenamento de grãos**. ESALQ/USP. Piracicaba, SP, 2004.

DUARTE, C. G. **A "realidade" nas tramas discursivas da educação matemática escolar**. Tese (doutorado) – Universidade Vale do Rio dos Sinos, Programa de Pós-Graduação em Educação, São Leopoldo (RS), 2009.

DUMMET, M. Wittgenstein's philosophy of mathematics, **Philosophical Review**, 68 3: pp. 324-348, 1959.

DURAND-GUERRIER, V. D. Truth versus validity in mathematical proof. **ZDM**, v. 40, p. 373-384, 2008.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Editora da Universidade Estadual de Campinas — Unicamp, 2011.

FARIA, S. R. **A catenária**. 2011. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/BUOS-94QMAZ/a_catenaria.pdf?sequence=1>. Acesso em: 29 out. 2016.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 27, n. 47, p. 917-938, dez. 2013.

FREITAS, W. S. **A matematização crítica em projetos de modelagem**. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação, Conhecimento e Inclusão Social) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

FREJD, P. Mathematical Modellers' Opinions on Mathematical Modelling in Upper Secondary Education. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences**. New York: Springer, p. 327-338, 2015.

FLEGG, J. A.; MALLET, D. G.; LUPTON, M. Students' approaches to learning a new mathematical model. **Teaching Mathematics and Its Applications**. 32: 28-37, 2013.

FREUDENTHAL, H. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics**. v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

GALBRAITH, P. Modelling in Tertiary Education – Overview. In: KAISER, G. et. al (Eds.) **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14**. New York: Springer, p. 441-444. 2011.

GALBRAITH, P. Models of Modelling: genres, purposes or perspectives. In: **Journal of Mathematical Modelling and Applications**. v, 1, n. 5, 3-16, 2012.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. **Bolema**. Rio Claro, SP, v. 15, n. 18, set. 2002.

GARNICA, A. V. M.; PINTO, T. P. Considerações sobre a linguagem e seus usos na sala de aula de Matemática. **ZETETIKÉ: Revista de Educação Matemática – Unicamp** – v.18, p. 207-244, 2010.

GERRARD, S. A philosophy of mathematics between two camps. In: **The Cambridge Companion to Wittgenstein**. SLUGA, Hans; STERN, David G. (ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 1996, pp 171-197.

GERRARD, S. Wittgenstein's philosophies of mathematics. **Synthese**, Londres, v.87, 125-142, Kluwer Academic Publishers, 1991.

GOTTSCHALK, C. M. C. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Caderno de História e Filosofia da Ciência**. Campinas, SP, Série 3, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul.-dez. 2004.

GOTTSCHALK, C. M. A transmissão e produção do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cadernos Cedes**, Campinas, v.28, n.74, pp.75-96, jan./abr. 2008.

GOTTSCHALK, C. M. C. Educational implications of some of Wittgenstein's remarks on mathematics propositions, inference and proof. **Ripem**. V. 4, N.2, p. 36-51, 2014.

GRIGORAŞ, R. Mathematising through hypotheses and assumptions: a case study. **12th International Congress on Mathematical Education**, 08 July – 15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea. 10 p. Disponível em: <<http://icme12.org/upload/UpFile2/TSG/0658.pdf>>. Acesso em: 02 mai 2016.

HARRIS, W. **Como tudo funciona?** Amortecedores. 2014. Disponível em: <<http://carros.hsw.uol.com.br/suspensoes-dos-carros1.htm>>. Acesso em: 27 nov. 2015.

IZMIRLI, I. M. Wittgenstein as a social constructivist. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, n. 27, april 2013, p. 1-12

JELINEK, K. R.; BELLO, S. E. L. Highly able mathematics learners from a pragmatic perspective of language. **Ripem**. v. 4, n. 2, 2014, pp. 139-154.

JOURDAN, C. Provas Matemáticas em Wittgenstein. **Revista de Filosofia Aurora**, Curitiba, v. 21, n. 29, p. 297-312 – jul/ dez – 2009.

KAISER, G.; B. SRIRAMAN. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, 38, 3, 302-310, 2006.

KITCHER, P. **The nature of mathematical knowledge**. New York: Oxford University Press, 1984.

KITCHER, P.; ASPRAY, W. **History and philosophy of modern mathematics**. Minesota Studies in the Philosophy of Science. Vol. XI. Herbert Feigl, Founding Editor, 1988.

KLÜBER; T. E; BURAK, D. Bases epistemológicas e implicações para práticas de modelagem matemática em sala de aula. In: IV Seminário internacional de pesquisa em educação matemática. **Anais...** Brasília, DF, pp. 1-16, out. 2009.

KLÜBER, T.; BURAK, D. Sobre a pesquisa em modelagem na educação matemática brasileira. **Revista Diálogo Educacional**, v.14, n.41, p. 143-164, 2014.

KNIJNIK, G. Regimes de verdade sobre a educação matemática de jovens e adultos do campo: um estudo introdutório. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação

Matemática, 3., 2006, Águas de Lindóia – SP. **Anais...** Curitiba: Universidade do Paraná, 2006.

KNIJNIK, G.; WANDERER, F. Da importância do uso de materiais concretos nas aulas de matemática: um estudo sobre os regimes de verdade sobre a educação matemática camponesa. In: **IX ENEM- Encontro Nacional de Educação Matemática**. Belo horizonte, Minas Gerais, 2007.

KNIJNIK, G.; DUARTE, C. G. Entrelaçamentos e dispersões de enunciados no discurso da educação matemática escolar: um estudo sobre a importância de trazer a “realidade” do aluno para as aulas de matemática. **Bolema**. Rio Claro, SP. v. 23, n. 37, p. 863-886, dez. 2010.

KNIJNIK, G. Differentially positioned language games: ethnomathematics from a philosophical perspective. **Education studies in mathematics**, vol. 80, p. 87-100, 2012.

KNIJNIK, G.; WANDERER, F. Programa Escola Ativa, escolas multisseriadas do campo e educação matemática. **Educação e pesquisa**: Revista da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, vol. 39, p. 211-225, 2013.

LACERDA, A. G.; SILVEIRA, M. R. A. Linguagem, escrita e comunicação: uma análise através de jogos de linguagem da interação entre pares pela busca da leitura/tradução do texto em processos de ensino e aprendizagem da matemática. **RPEM**, Campo Mourão (PR), v.2, n.3, p. 77-88 – jul/dez – 2013.

LEVY, L. F. Pode-se Aprender Matemática Através da Investigação de Casos Particulares? **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. v. 9, n. 2, p. 287-301, 2016.

LUCK. **A Arte do Equilibrismo através dos séculos**. 2015. Disponível em: <<http://familiabsurda.blogspot.com.br/2015/02/a-arte-do-equilibrismo-atraves-dos.html>>. Acesso em: 31 out. 2016.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. - Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo, E.P.U., 1986.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E. G.; SANTIAGO, A. R. C. M. A Modelagem Matemática nas Séries Iniciais: o germém da criticidade. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.135-157, jul. 2009.

MARCONDES, D. **Iniciação a história da filosofia**: dos pré-socráticos a Wittgenstein. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

MENDES, A. M.; GOMES, D. A.; BELLO, M. Slackline: análise biomecânica das posições estáticas drop knee / foot plant / buddha lateral. **Revista Corpoconsciência**, Santo André, v. 18, n. 1, p.7-22, 2014. Bimestral. Disponível em:

<<http://fefisa.com/revista/index.php/revcorp/article/view/141/166>>. Acesso em 31 out. 2016.

MENEGHETTI, R. C. G. **Constituição do saber matemático**: reflexões filosóficas e históricas. Londrina: EDUEL, 2010.

MERLI, R. F. **Modelos clássico e fuzzy na educação matemática**: um olhar sobre o uso da linguagem. 2012. 154 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MIGUEL, A. Is the mathematics education a problem for the school or is the school a problem for the mathematics education? **RIPEM**, v. 4 n. 2, pp. 5-35, 2014.

MIGUEL, A. A Terapia Gramatical-Desconstrucionista como Atitude de Pesquisa (Historiográfica) em Educação (Matemática). **Perspectivas da Educação Matemática**. UFMS, vol. 8, n.18, p. 607-647, 2015. Disponível em <<http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1466/973>>

MORENO, A. R. Descrição fenomenológica e descrição gramatical – ideias para uma pragmática filosófica. **Revista olhar**. Ano 4, n. 7, p. 93-139, jul-dez, 2003.

NEVES, H. M. F. **Modelação de imagens**. 2013. Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/~mat1259/Trabalhos%20Obrigatorios/3.%C2%BA%20Trabalho.pdf>>. Acesso em: 30 out 2016.

NISS, M. Prescriptive Modelling – Challenges and Opportunities. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 67-80, 2015.

OLIVEIRA, M. S. **Interpretação e comunicação em ambientes de aprendizagem gerados pelo processo de modelagem matemática**. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará. Belém, 2010.

OLIVEIRA, M. de S.; SILVEIRA, M. R. A. Falar e Mostrar para Provar: Uma contribuição Teórica sobre a Utilização dos Gestos Ostensivos Wittgensteinianos como Auxiliares na Prova Matemática. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. v. 9, n. 2, p. 271-285, 2016.

ORANGOTANGO. **A História do Slackline**. 2011. Disponível em: <<http://orangotangoslackline.blogspot.com.br/2011/03/historia-do-slackline.html>>. Acesso em: 24 out. 2016.

OTTE, M. F.; BARROS, L. G. X. What is mathematics, really? Who wants to know? **Bolema**. Rio Claro, SP. vol. 29, n. 52, ago. 2015, p. 756-772.

PAIS, A. Criticisms and contradictions of ethnomathematics. **Education studies in mathematics**, vol. 76, p. 209-230, 2011.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Superintendência da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba: SEED, 2008, p. 1-81.

PAROLIN, R. S.; SOARES, C. G. T.; JOHANSSON, N. M. S. **Resfriamento da cerveja**. Disponível em: <www.projetos.unijui.edu.br/matematica/modelagem/cerveja.html>. Acesso em 28 mar. 2015.

PAVANELLO, M. R. Da linguagem, matemática e construção do conhecimento: algumas reflexões para a prática educativa. **Acta Sci. Human Soc. Sci.** Maringá, v. 29, n. 1, p. 77-82, 2007.

PERRENET, J.; ZWANEVELD, B. The many faces of mathematical modeling cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**. Vol. 1, N. 6, pp. 3-21, 2012.

PIRES, C. M. C.; SILVA, M. A. Desenvolvimento curricular em matemática no Brasil: trajetórias e desafios. **Quadrante**. v. XX, n. 2, p. 57- 80, 2011.

POLLAK, H. O. The interaction between Mathematics and other school subjects, **New Trends in Mathematics Teaching**, Volume IV, Paris: UNESCO, 1979.

POLLAK, H. O. What is mathematical modeling? In: **Mathematical Modelin Handbook**. Bedford: COMAP, 2012. Disponível em <www.comap.com>.

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences**. New York: Springer, p. 265-276, 2015.

ROSA, M.; OREY, D. C. O campo de pesquisa em etnomodelagem: as abordagens êmica, ética e dialética. **Educação e Pesquisa**. v. 38, n. 4, p. 865-879, 2012.

SCHUKAJLOW, S. et. al. Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. **Educational Studies in Mathematics**. 79: 215-237, 2012.

SILVA, J. J. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SILVA, J. N. D.; BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: as discussões técnicas e as experiências prévias de um grupo de alunos. **Bolema**. UNESP, Rio Claro, impresso, vol. 24, n. 38, 2011.

SILVA, V. S.; KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática Nos Anos Iniciais Do Ensino Fundamental: Uma Investigação Imperativa. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 2, nov. 2012.

SILVA, P. V. **O aprendizado de regras matemáticas**: uma pesquisa de inspiração wittgensteiniana com crianças da 4ª série no estudo da divisão. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, IEMCI, UFPA, Belém (PA), 2011. Disponível em: <http://www.ppgecm.ufpa.br/media/disserta/2009/Paulo_Vilhena_da_Silva.pdf>. Acesso em ago. 2015.

SILVA, P. V.; SILVEIRA, M. R. A. O ver-come wittgensteiniano e suas implicações para a aprendizagem a Matemática: um ensaio. **BoEM** (Boletim online de Educação Matemática), Joinville, v.2, n.3, p.17-34 – ago/dez – 2014.

SILVEIRA, M. R. A. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática**. Tese (Doutorado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós Graduação em Educação). Porto Alegre: UFRGS, 2005.

SILVEIRA, M. R. A. Aplicação e interpretação de regras matemáticas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.10, n.1, p. 93-113, 2008.

SILVEIRA, M. R. A. Wittgenstein e a Matemática. In: III Congresso Brasileiro de Etnomatemática. **Anais...** CBE, m3, 2008. Niterói. Etnomatemática: novos desafios, teorias e pedagogias, 2008, p. 1-13.

SILVEIRA, M. R. A.; SILVA, P. V. A compreensão de Regras Matemáticas na Formação Docente: uma pesquisa sob o ponto de vista da linguagem. **Arquivos Analíticos de Políticas Educativas**, v. 21, n. 27, p. 1-24 – mar – 2013.

SILVEIRA, M. R. A. Mathematics and language: perspectives of Wittgenstein's philosophy for math education. **RIPEM**, v. 4, n. 2, pp. 52-65, 2014.

SILVEIRA, M. R. A.; MEIRA, J. L.; FEIO, E. S. P.; JUNIOR, V. P. T. Reflexões acerca da contextualização dos conteúdos no ensino da matemática. **Currículo sem Fronteiras**, v. 14, n. 1, p. 151-172 – jan/abr – 2014.

SILVEIRA, M. R. A. Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.16, n.1, p. 47-73, 2014.

SILVEIRA, M. R. A. **Matemática, discurso e linguagens**: Contribuições para a Educação Matemática. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015. v. 1. 310p.

SILVEIRA, M. R. A.; SILVA, P. V. O cálculo e a escrita matemática na perspectiva da filosofia da linguagem: domínio de técnicas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, pp. 469-483, 2016.

SKOVSMOSE, O. Symbolic power, robotting and surveilling. **Education Studies in Mathematics**, v. 80, p. 119-132, 2012.

SOUZA, E. G. **A aprendizagem matemática na modelagem matemática**. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física. Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2012.

SOUZA, E. G.; BARBOSA, J. C. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetiké**. v. 22, n. 41, p. 31-58, jan/jul, 2014.

SPINK, M. J. **Práticas discursivas e produção de sentidos no cotidiano**. Ed. Virtual. Rio de Janeiro: Centro Edelstein de Pesquisas Sociais, 2013, p. 22-41.

SPINK, M. J. **Linguagem e produção de sentidos no cotidiano**. Rio de Janeiro: Centro Edelstein de Pesquisas Sociais, 2010. 72 p. Disponível em: SciELO Books <<http://books.scielo.org>>.

SRIRAMAN, B.; KAISER, G.; BLOMHOJ, M. A brief survey of the state of mathematical modeling around the world. **ZDM**. 38(3), pp. 212-213, 2006.

SRIRAMAN, B.; LESH, R. Modeling conceptions revisited. **ZDM**. Vol 38(3), 2006.

STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P.; GEIGER, V. Facilitating Mathematisation in Modelling by Beginning Modellers in Secondary School In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 93-104, 2015.

STUPPIELLO, B. **Conheça os benefícios e cuidados ao praticar o slackline**. 2016. Disponível em: <<http://www.minhavidade.com.br/fitness/galerias/17336-conheca-os-beneficios-e-cuidados-ao-praticar-o-slackline>>. Acesso em: 30 out. 2016.

TALAVERA, L.M. B. **Parábola e catenária**: história e aplicações. São Paulo: s.n. 2008. Disponível em: <www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/.../DissertacaoLedaMariaTalavera.pdf>. Acesso em: 30 out 2016.

TAMBARUSS, C. M.; KLÜBER, T. E. A pesquisa em Modelagem Matemática na Educação Matemática: sobre as atividades de formação continuada em teses e dissertações. **Revemat**, Florianópolis, SC, v. 9, p. 38-56, 2014.

TEIXEIRA, F. L. **Modelos Descrito por Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio Claro: [s.n.], 2012.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 168f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

VEIGA-NETO, A.; LOPES, M.C. Identidade, cultura e semelhanças de família: as contribuições da virada lingüística. In: BIZARRO, R. (Org.). **Eu e o outro**: estudos multidisciplinares sobre identidade(s), diversidade(s) e práticas interculturais. Porto: Areal, 2007, pp.175-190.

VELEDA, G. G; ALMEIDA, L.M. W de. A caracterização da realidade em trabalhos de modelagem matemática. In.: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.**, 10., 2010, Salvador. Anais... Salvador: Sociedade Brasileira de Educação matemática, 2010, 1. CD-ROM.

VIDIGAL, C.; BEAN, D. Levantando Aspectos, Formulando Pressupostos e Matematizando em Modelagem Matemática. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. v. 9, n. 2, p. 249-269, 2016.

VILELA, D. S. **Matemáticas nos Usos e Jogos de Linguagem**: ampliando concepções na Educação Matemática. 2007. 247 p. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) – Faculdade da Educação, Unicamp, Campinas, 2007.

VILELA, D. S. Práticas matemáticas: contribuições sócio-filosóficas para a Educação Matemática. **Zetetiké** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, n. 31, pp. 191-211, jan/jun – 2009.

VILELA, D.S. Discussing a philosophical background for the ethnomathematical program. **Education studies in mathematics**, vol. 75, p. 345-358, 2010.

VILELA, D. S. Uma concepção das matemáticas como práticas sociais. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13º, **Anais...** Recife, 2011.

Disponível em:

<http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/memorias/xii_ciaem/150_compreensao_matematicas.pdf> Acesso em: 23 abr. 2016.

VILELA, D. S.; MENDES, J. R. A linguagem como eixo da pesquisa em educação matemática: contribuições da filosofia e dos estudos do discurso. **Zetetiké** – FE/Unicamp – v. 19, n. 36, pp. 7-25, – jul/dez 2011.

VILELA, D. Contributions of the Linguistic Turn to mathematics undergraduate courses: A proposal for supervised training. **International Journal for Research in Mathematics Education**, v. 4, p. 66-83, 2014.

WANDERER, F. Etnomatemática e o pensamento de Ludwig Wittgenstein. **Acta Scientiae**: Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v.15, p. 257-270 – maio/ago – 2013.

WITTGENSTEIN, L. **Foundations of Mathematics**, Box 11, Folder 14, Rose Rand Papers, 1903-1981, ASP.1990.01, Archives of Scientific Philosophy, Special Collections Department, University of Pittsburgh, 1939.

WITTGENSTEIN, L. **Remarks on the foundations of mathematics**. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts; London, England, 1996.

WITTGENSTEIN, L. **Observações Filosóficas**. Edições Loyola, São Paulo, SP, 1998.

WITTGENSTEIN, L. **Gramática Filosófica**. Edições Loyola, São Paulo, SP, 2003.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 8. ed. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2013.

WRIGHT, C. **Wittgenstein on the Foundations of Mathematics**, Duckworth: London, 1980.

ZANON, R. **Educação Matemática, formas de vida e alunos investigadores**: um estudo na perspectiva da Etnomatemática. Dissertação (Mestrado) – Curso de Ensino de Ciências Exatas, Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 26 mar. 2013. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10737/307>>.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R.; **Equações diferenciais**. Vol. 1, 3a Edição. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

ANEXO A QUESTIONÁRIO DE PERFIL DO ACADÊMICO

PERFIL DO ACADÊMICO

1. Nome: _____ 2- Idade: _____

3. Ano em que iniciou o curso: _____

4. Você já cursou outro curso de graduação? Se sim, qual?

5. Você já tem experiência como professor de Matemática? Quanto tempo? Em que nível de escolaridade?

6. Está cursando esta disciplina pela:

() Primeira vez () Segunda vez () Terceira vez () Outro:

Caso não seja a primeira vez, quais foram as dificuldades encontradas quando cursou?

7. Quais as disciplinas com que mais se identificou, até agora, no curso?

8. Como você considera o seu envolvimento nas aulas?

9. O que você considera importante no desenvolvimento de atividades, nas aulas de matemática e nas aulas que envolvam o ensino da matemática?

10. Para você o termo “modelagem matemática” é familiar? Qual é o seu entendimento sobre o mesmo?

11. Das diversas coisas que você aprendeu sobre Matemática na Escola, e em outros contextos, o que para você é importante em tudo isso? E o que espera aprender além?

Espaço destinado a comentários ou questionamentos oportunos, que você queira fazer.

ANEXO B QUESTÕES DA ENTREVISTA

Questões para entrevista sobre as atividades de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula

- 1) O que você aprendeu na realização dessas atividades? O que você achou mais importante.
- 2) Quantas hipóteses foram utilizadas no desenvolvimento da atividade? (Se uma hipótese foi levantada pelo grupo e abandonada não deixe de citá-la e explicar os motivos que os levaram a abandoná-la).
 - (1) Para você qual foi o papel das hipóteses utilizadas na atividade?
 - (2) Explique com suas palavras o que é uma equação diferencial ordinária, este conceito foi utilizado na atividade, em caso afirmativo ou negativo explique os motivos.
 - (3) Descreva com suas palavras as características principais do modelo obtido no desenvolvimento desta atividade.
 - (4) Esse modelo é considerado adequado para a solução da situação-problema?
 - (5) Quais foram as suas principais dificuldades na realização da atividade? Por quê?

OBS. Outras questões foram utilizadas durante a entrevista, as quais diferem de aluno para aluno, pois se referem às dúvidas da pesquisadora sobre os registros das atividades feitos pelos alunos.

ANEXO C QUESTIONÁRIO FINAL

QUESTIONÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

ALUNO(a) _____ DATA ___ / ___ / ___

Na realização das atividades de modelagem, aprendi coisas de Matemática e outras coisas relativas aos temas das atividades. O que para mim é importante em tudo isso?

- (01) Vocês conseguiram identificar a possibilidade de trabalhar vários conteúdos da matemática durante as atividades de modelagem matemática? Se sim quais?
- (02) Quais as dificuldades sentidas por você durante o desenvolvimento da atividade?
- (03) Os conhecimentos matemáticos necessários para esta atividade eram coisas já apreendidas ou foi necessário buscar algum tipo de suporte? Comente.
- (04) Em sua opinião, a modelagem matemática pode contribuir para fomentar e auxiliar na construção dos conceitos matemáticos? Por quê?
- (05) Durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática como você considera o seu desenvolvimento com a Matemática?

ANEXO D TERMO DE COMPROMISSO DISCIPLINA EDO

CORNÉLIO PROCÓPIO, MARÇO DE 2015.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Tendo em vista o desenvolvimento de parte da pesquisa de doutorado, sob responsabilidade de Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa Robim, aluna do curso de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina e professora do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Norte do Paraná, Campus de Cornélio Procópio, declaro que consinto que a mesma utilize meus registros escritos e os registros de minhas discussões na realização das atividades desenvolvidas durante as aulas de Equações Diferenciais Ordinárias, podendo utilizá-los parcial ou integralmente, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data, podendo divulga-las em publicações, congressos e eventos da área, com a condição de que meu nome não seja citado em hipótese alguma, garantindo o anonimato. Igualmente abdicó dos direitos meus e de meus descendentes. Declaro, ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Nome	CPF	Assinatura

ANEXO E TERMO DE COMPROMISSO DISCIPLINA MM

CORNÉLIO PROCÓPIO, MARÇO DE 2016.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Tendo em vista o desenvolvimento de parte da pesquisa de doutorado, sob responsabilidade de Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa Robim, aluna do curso de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina e professora do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Norte do Paraná, Campus de Cornélio Procópio, declaro que consinto que a mesma utilize meus registros escritos e os registros de minhas discussões na realização das atividades desenvolvidas durante as aulas de Introdução à Modelagem Matemática, podendo utilizá-los parcial ou integralmente, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área, com a condição de que meu nome não seja citado em hipótese alguma, garantindo o anonimato. Igualmente abduco dos direitos meus e de meus descendentes. Declaro, ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Nome	CPF	Assinatura

ANEXO F INFORMAÇÕES DA AT1 “O RESFRIAMENTO DA CERVEJA”

Texto entregue aos alunos:

A cerveja é uma bebida muito consumida pelos brasileiros, apreciada em comemorações, domingos de churrasco, bares com amigos, etc. Motivos não faltam para o consumo desta bebida. No entanto, esta deve estar em uma temperatura considerada ideal.

Muitas vezes tomamos cerveja acima da temperatura esperada, por ficar pouco tempo em resfriamento, ou sofrendo a cristalização após a retirada da mesma do congelador, por ficar muito tempo resfriando. Mas então, como saber qual é a temperatura ideal para beber a cerveja? Quanto tempo a cerveja deve ficar em resfriamento para alcançar esta temperatura ideal?

A partir de análises bibliográficas constata-se que a cerveja congela à temperatura de $-2,5^{\circ}\text{C}$. Quando consumida à 0°C de temperatura tira a sensibilidade das papilas gustativas, diminuindo a sensação de aroma e sabor.

Portanto, considera-se que a temperatura ideal para o consumo da cerveja é de 2°C .

A temperatura do interior do congelador foi obtida por meio de um termômetro calibrado, concluindo que a mesma é de 2°C . Esta é considerada a temperatura constante do ambiente de resfriamento da cerveja.

Para a obtenção das temperaturas no processo de resfriamento da cerveja foi utilizado um termopar, devidamente conectado a um sistema digital de coleta de dados. Os dados coletados estão dispostos no Gráfico 1.

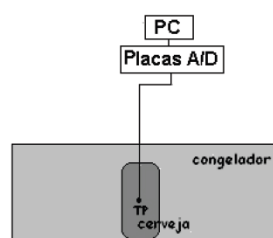
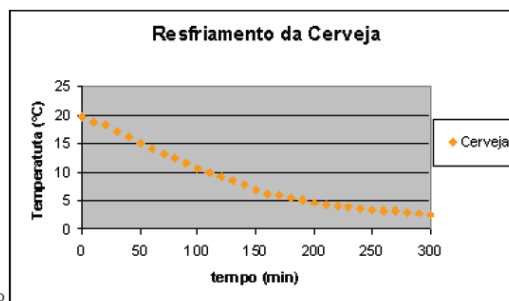


Figura 1 – Esquema geral do equipamento



Fonte: Adaptado de Parolin, Soares e Johansson (2006). Disponível em: <www.projetos.unijui.edu.br/matematica/modelagem/cerveja.html>. Acesso em: 28/03/15.

Situação-Problema estudada:

Quanto tempo a cerveja deve ficar em resfriamento para alcançar a temperatura ideal?

ANEXO G INFORMAÇÕES DA AT4

“VARIAÇÃO DA TEMPERATURA NA PRODUÇÃO DO SORVETE”

A Temperatura do Sorvete e a sua Produção

A temperatura, uma palavra derivada do Latim “temperare”, reconhecida como o nível de calor que existe no ambiente, resultante, por exemplo, da ação dos raios solares ou nível de calor existente num corpo. A temperatura é explicada pela Física como a grandeza que caracteriza o estado térmico de um corpo ou sistema.

Fisicamente o conceito dado a quente e frio é um pouco diferenciado do conceito que utilizamos no nosso dia a dia. Podemos definir como quente um corpo que tem suas moléculas agitando-se muito, ou seja, com alta energia cinética. Já um corpo frio tem baixa agitação das suas moléculas, ou seja, com baixa energia cinética.

Existe um aparelho que foi desenvolvido especialmente para medir a temperatura de um corpo: o termômetro. Os termômetros registram a temperatura através de uma escala que pode ser calibrada tanto Celsius, Fahrenheit, Kelvin, etc. Como estamos no Brasil a escala usada é a escala Celsius oficializada em 1742 pelo astrônomo e físico sueco Anders Celsius (1701-1744). Esta escala tem como pontos de referência a temperatura de congelamento da água sob pressão normal (0 °C) e a temperatura de ebulição da água sob pressão normal (100 °C).

O sorvete é um alimento muito popular no Brasil e no mundo e sua produção depende das temperaturas utilizadas e do tempo de resfriamento de seus componentes. Seu nome deriva do persa “sharbat” que significa “bebida com suco de fruta, açúcar e gelo”. As primeiras informações relevantes tem origem no Oriente, mais precisamente na China e a mais de 3 mil anos, quando era de costume fazer uma pasta de arroz misturado à neve, muito próximo do que conhecemos atualmente como “raspadinha”. A cerca de mil e novecentos anos atrás o imperador Nero mandava seus escravos buscarem neve nas montanhas para, então, congelar mel, polpa de frutas ou sucos. Marco Polo, já no século 14, implementou a receita de sorvete a base de água, muito parecida com a que conhecemos atualmente.

No Brasil, o sorvete ficou conhecido em 1834, quando dois comerciantes cariocas compraram 217 toneladas de gelo, vindas em um navio norte-americano, e começaram a fabricar sorvetes com frutas brasileiras. Na época, não havia como conservar o sorvete gelado e, por isso, tinha que ser tomado logo após o seu preparo. Um anúncio avisava a hora exata da fabricação. O primeiro anúncio apareceu em São Paulo, no dia 4 de janeiro de 1878, contendo a seguinte mensagem: “SORVETES – Todos os dias às 15 horas, na Rua Direita, n.º. 44”.

O Brasil segundo dados estatísticos o consumo de sorvetes ainda é pequeno se comparado aos dois principais países consumidores: 1º Nova Zelândia (consumo de 26,30 L por pessoa ao ano) e 2º Estados Unidos (consumo de 22,50 L por pessoa ao ano), o Brasil está em 11º lugar no ranking mundial com o consumo de 4,74 L por pessoa ao ano.

Sua produção pode ser manual ou industrial. O sorvete de ser mantido a uma temperatura para estocagem inferior a -25°C na câmara fria. No freezer deve ser armazenados a temperatura de -18°C a -15°C. Quando o produto é exposto à venda, é tolerada a temperatura ideal de consumo de -14°C a -12°C no produto, onde o sorvete fica uma textura mais macia.

Coleta de dados

A coleta de dados foi realizada em uma sorveteria da cidade de Santa Mariana, Paraná. Veja algumas fotos da sorveteria estudada:

Figura 1: O interior da sorveteria



Fonte: os autores

Figura 2: O interior da sorveteria



Fonte: os autores

Figura 3: Máquinas de produção



Fonte: os autores

Figura 4: Máquinas de produção



Fonte: os autores

A fim de estudar como se dá a variação da temperatura do sorvete, da sua fabricação ao armazenamento, foi realizada uma busca de informações sobre o tema a coleta de dados (Tabela 1). O sorvete foi preparado a base de 5 litros de leite e 2 de água, que estavam à temperatura respectivamente de $7,1^{\circ}\text{C}$ e $20,6^{\circ}\text{C}$ e depois de misturados em um recipiente plástico adquiriram temperatura de $15,8^{\circ}\text{C}$, temperaturas essas que foram medidas com termômetro digital, que mede em escala fahrenheit e Celsius com precisão de + ou -1°C da marca Equitherm. A mistura foi batida em liquidificador industrial com seus condimentos e sabores por 15 minutos, quando retirado do aparelho estava com temperatura de $16,2^{\circ}\text{C}$. Após foi depositado em uma máquina de fazer sorvete com temperatura inicial de 0°C e que ao final de 7 minutos estava com $-7,6^{\circ}\text{C}$, que é o momento em que a massa do sorvete está pronta para ser retirada da máquina. A máquina possui a entrada de ingredientes e saída do sorvete pronto na parte frontal.

Quando o sorvete sai da máquina, está com temperatura de $-6,4^{\circ}\text{C}$, e é colocado em um recipiente que segue para o freezer a uma temperatura constante de $-14,5^{\circ}\text{C}$, nesse processo o sorvete derrete um pouco e fica com $-5,1^{\circ}\text{C}$. No dia da coleta de dados a temperatura ambiente estava entre 20°C e $22,7^{\circ}\text{C}$. Os dados coletados estão disponíveis na Tabela.

Varição da temperatura do sorvete no freezer

Tempo (min)	Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
0	-5,1
5	-5,9 e -6
9	-6,3 e -6,4
10	-6,4
15	-6,7
20	-7
25	-7,2
30	-7,4

Com base nos dados da tabela, como obter a temperatura do sorvete no freezer, em qualquer instante de tempo? Em quanto tempo o sorvete estará com a temperatura ideal para o consumo?

Fonte: RE_AT4_MM3_G2.

ANEXO H INFORMAÇÕES DA AT5 “PREPARO DA GELATINA”

Preparo de gelatina Variação da temperatura em relação ao tempo

A palavra gelatina vem do latim *gelatas*, que significa firme. Há indícios de que no Egito já se usava uma substância muito parecida com a gelatina em alguns alimentos, porém a primeira fábrica de gelatina foi registrada em 1754, na Inglaterra.

A gelatina é uma proteína alimentícia de origem animal ou vegetal de fácil digestão, ela é resultante da hidrólise parcial do colágeno, atualmente a gelatina é extraída quase sempre do couro de boi. É mais conhecida na forma de pó, depois de filtrar, secar e retirar os micróbios, essa proteína vira um pó incolor. Para fabricar a gelatina consumida como sobremesa, esse pó é acrescido de aromatizantes, corantes e açúcar ou adoçante.

O comportamento físico e químico da gelatina é determinado, por um lado, pela sequência de aminoácidos das moléculas e pela estrutura espacial resultante e, por outro lado, pelas condições do ambiente, como pH, força iônica e reações com outras moléculas, a transformação do pó em alimento, já em casa, se dá através da hidratação das cadeias de moléculas de proteína e da retenção da água pela formação de ligações entre essas cadeias. A hidratação da gelatina ocorre quando ela é dissolvida em água quente, pois uma das principais características da gelatina é a sua natureza hidrofílica, ou seja, a gelatina é relativamente insolúvel em água fria, porém hidrata-se prontamente em água quente. Assim, as moléculas de água conseguem penetrar no interior da cadeia de moléculas de proteína. Com o resfriamento, as moléculas de água são aprisionadas e o líquido solidifica, formando a gelatina.

Desenvolvimento

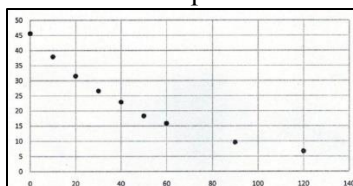
O presente trabalho foi desenvolvido com o pó de gelatina de sabor *kiwi* da marca *Apti*, ela leva em sua composição: açúcar, gelatina, sal, acidulante, ácido adípico ou ácido fumárico, citrato de sódio, aromatizantes e corantes artificiais. Para medir a temperatura foi usado um termômetro digital interno/externo da marca *Incoterm*. No preparo da gelatina foram seguidas as seguintes instruções:

1. Despeje o conteúdo do pacote num recipiente.
2. Adicione 250 ml (1/4 de litro) de água fervente (Nesse momento a temperatura da água foi aferida e estava a 58°C.). Mexa até dissolver totalmente.
3. Adicione mais 250 ml de água fria ou gelada (A água estava com 14 °C).
4. Coloque em recipiente de sua preferência e leva à geladeira até adquirir consistência.

Dados: Variação da temperatura da gelatina

Tempo (min)	Temperatura (°C)
0	45,6
10	37,9 – 37,5
20	31,5 – 31,3
30	26,6
40	22,9 – 22,6
50	18,3 – 18,1
60	15,8
90	9,6 – 9,4
120	6,7

Gráfico sobre a variação da temperatura em relação ao tempo



Situação-problema

Considerando que a gelatina está completamente pronta quando atinge 4°C, os alunos decidem por investigar: *Em quanto tempo a gelatina estará pronta para consumo?*

ANEXO I INFORMAÇÕES DA AT9 “MOLA MALUCA”

Mola Maluca em Queda Livre

A mola maluca, como comumente conhecemos, foi criada por um engenheiro mecânico chamado Richard James, que trabalhava em um estaleiro da Filadélfia testando potência de navios de guerra, na época da Segunda Guerra Mundial, para realizar o trabalho ele utilizava um aparelho conhecido como medidor de torção. Até que certo dia, enquanto realizava sua medição, o navio deu um solavanco e fez a mola de torção saltar e cair no chão, Richard naquele momento pensou que aquele objeto daria um belo brinquedo de criança.

Nos anos seguintes ele trabalhou com vários materiais, em busca de um que se encaixaria perfeitamente em seus propósitos, que era fazer a mola “andar”. Batizado de *Slink*, por sua esposa Betty, por achar que a descrição da palavra que em inglês, “macio e sinuoso ao se movimentar”, descrevia bem o brinquedo criado. No Brasil, no entanto é popularmente conhecida como *Mola-Maluca*.

Richard patenteou o brinquedo em 1935, no mesmo ano iniciou a produção de 400 unidades. A princípio tiveram dificuldades em vender, já que o produto era muito pouco atrativo quando imóvel em prateleiras, desta forma quase à beira da falência, os James conseguiram uma oportunidade em uma loja de departamentos, que ofereceu-lhe um balcão no final da seção de brinquedos. Desta forma o casal combinou um plano de ação para que pudessem atrair clientes, assim Richard foi sozinho para loja, e Betty e uma amiga, chegariam depois simulando uma cena de entusiasmo com a ideia de adquirir uma *Slink*, porém quando elas chegaram, já havia uma multidão exasperada querendo comprar o brinquedo, naquela noite foram vendidos 400 exemplares do brinquedo, desde então o brinquedo tem sido um sucesso em todas as gerações.

Quando filmamos uma mola em queda-livre é possível captar as molas esticadas sem tocar o chão, e por alguns segundos, assim que são soltos os elos de baixo parecem flutuar enquanto os de cima “descem ao seu encontro”.

Situação-problema

Qual o tempo para que uma mola-maluca qualquer desloque todos os seus elos?

Coleta de dados

A partir de experimentos empíricos, utilizando filmagem em vídeo e a reprodução dos mesmos em câmera lenta para captação da movimentação da mola de 20 elos é possível identificar o deslocamento da mola em função do tempo, conforme a tabela.

Deslocamento da mola em função do tempo

t (min)	0	0,07	0,15	0,205	0,27	0,33	0,41	0,47	0,53	0,6	0,7	0,73	0,82
s (cm)	0	3	7	13	19	22	27	32	36	40	43	49	53