UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

KARINA ALESSANDRA PESSÔA DA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA E SEMIÓTICA: ALGUMAS RELAÇÕES

Londrina
2008

KARINA ALESSANDRA PESSÔA DA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA E SEMIÓTICA: ALGUMAS RELAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profª. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2008

Catalogação na Publicação Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S586m Silva, Karina Alessandra Pessôa da.
Modelagem matemática e semiótica : algumas relações / Karina Alessandra Pessôa da Silva. - Londrina, 2008. 225 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) -Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2008.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática - Estudo e ensino - Teses. 2. Matemática -Semiótica - Teses. 3. Modelos matemáticos - Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

KARINA ALESSANDRA PESSÔA DA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA E SEMIÓTICA: ALGUMAS RELAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina –PR

Profª. Dra. Vanilde Bisognin
UNIFRA – Rio Grande do Sul – RS

Profª. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
UEL – Londrina –PR

Londrina, 16 de desembro de 2008.

À minha amada filha Nathalia, que soube entender e lidar com a minha ausência. Ao meu esposo Alexander que preencheu essa ausência com dedicação e carinho.

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor Deus, fonte de inspiração, esperança e perseverança.

À minha família, sobretudo à minha filha e ao meu esposo, que tiveram paciência e compreensão nesta caminhada.

À minha querida orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida pela amizade, confiança, apoio, disposição e dedicação em me orientar neste trabalho. Os momentos que passamos juntas serão lembrados com carinho.

Aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), com quem tive o privilégio de conviver e trabalhar desde 2005, estudando, discutindo, concordando e, às vezes, discordando em estudos envolvendo não somente minha pesquisa, mas os mais variados temas abordados; em especial, aos amigos Elaine, Rodolfo e Fabio.

À professora Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco que, além de ler, sugerir e criticar este trabalho, tem sido exemplo de profissional e despertado minha admiração e meu respeito desde 2005, quando fiz o curso de Especialização em Educação Matemática nesta instituição.

À professora Vanilde Bisognin pelas sugestões e críticas que tanto contribuíram para o aprimoramento deste trabalho e para futuras pesquisas.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática que compartilharam momentos de alegrias e tristezas enquanto estivemos juntos, principalmente aos amigos que fiz durante os anos de participação no programa como aluna regular e como aluna especial, principalmente Rodolfo, Fabio, João, Pamela, Bruno e Thiago.

Aos meus companheiros da Scriba que compreenderam o meu envolvimento neste trabalho — Luiz, Ângelo, Leonel, Erika, Caroline e Marcela.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho fosse realizado.

"O futuro dependerá daquilo
que fazemos no
presente."

Mahatma Gandhi (1869 - 1948)

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da. **Modelagem matemática e semiótica:** algumas relações. 2008. 225 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina,

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma pesquisa fundamentada nos pressupostos teóricos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e procuramos estabelecer relações entre esta perspectiva e a Semiótica de Peirce e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Para tanto, analisamos três atividades de Modelagem Matemática existentes na literatura: uma no âmbito do grupo de estudos no qual a pesquisa se insere, uma de âmbito nacional retirada dos anais da V Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática e uma de âmbito internacional retirada dos anais da XIII *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications.* A pesquisa consiste em uma análise documental dos registros apresentados pelo(s) autor(es)/modelador(es) de cada atividade de Modelagem selecionada. A partir da análise que realizamos, estabelecemos algumas relações entre Modelagem Matemática e Semiótica, no que diz respeito à categorização dos signos estabelecida por Peirce, aos modos de inferência dos signos classificados por Kehle & Cunningham (2000), aos registros de representação semiótica abordados por Duval com relação ao fenômeno de congruência e não-congruência das conversões entre os registros e às tarefas de produção e compreensão.

Palavras-chaves: Educação matemática. Modelagem matemática. Semiótica.

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da. **Mathematical modeling and semiotics:** some relations. 2008. 225 f. Dissertation (Masters in Science and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina,

ABSTRACT

In this work, we presented a research based in the theoretical presuppositions of the Mathematical Modeling in the perspective of the Mathematics Education and trying to establish relations between this perspective and the Semiotics from Peirce and the Theory of Semiotics Representation Registers from Raymond Duval. For this purpose, we analyzed three activities of Mathematical Modeling in the literature: one within the group of studies in which the research is inserting, one within national withdrawal of the annals of the V National Conference on the Modeling in Mathematics Education and one within international withdrawal of the annals of the International Conference on the Teaching of Mathematical Modeling and Applications. The research consists in a documentary analysis of the registers presented by the author/model of each activity of Modeling selected. From the analysis we do, we established some relations between Mathematical Modeling and Semiotics, with respect to the categorization of signs established by Peirce, the modes of inference of signs classified by Kehle & Cunningham (2000), the semiotics representation registers approached by Duval with respect to the phenomenon of congruence and non-congruence of conversions between the registers and the tasks of production and understanding.

Key-words: Mathematics education. Mathematical modeling. Semiotics.

LISTRA DE FIGURA

LISTRA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Apresentação do tema e justificativa.

A Matemática, em muitas situações, pode ser considerada uma ferramenta que auxilia na tomada de decisões para o estudo de problemas oriundos da realidade. Neste contexto, podemos destacar a relevância da Matemática no desenvolvimento de atividades humanas e considerar que ela ocupa um lugar importante na sociedade.

Segundo Davis e Hersh (1998, p. 293) "[...] *a Matemática provém da conexão da mente com o mundo externo..."* e, neste sentido, a presença da Matemática na realidade não pode ser ignorada no âmbito da Educação Matemática e, especialmente, quando se trata de aspectos relativos ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Neste cenário, para evidenciar a conexão entre Matemática, mente e mundo externo é necessário o uso de representações.

A abordagem dessas representações, num sentido amplo, remete à Semiótica — ciência de toda e qualquer linguagem e que usa de signos para realizar estas representações. Devem-se ao norte-americano Charles Sanders Peirce[1](1839-1914), as argumentações mais contemporâneas sobre Semiótica.

No que diz respeito ao uso de diferentes representações para o estudo de objetos matemáticos[2], uma abordagem ampla deve-se ao francês Raymond Duval[3], que desenvolveu a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Para Duval (2003), o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. As representações semióticas são externas e conscientes da pessoa. Elas realizam uma função de tratamento

---

[1] Peirce graduou-se com louvor pela Universidade de Harvard em química, fez contribuições importantes no campo da Geodésia, Biologia, Psicologia, Matemática, Filosofia. Ele é considerado o fundador da moderna Semiótica. Uma das marcas do pensamento peirceano é a ampliação da noção de signo e, conseqüentemente, da noção de linguagem.

[2] O objeto matemático é "qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de alguma maneira na atividade matemática" (GODINO, BATANERO & FONT, 2006, p. 5).

[3] Duval é filósofo e psicólogo francês que desenvolve estudos em Educação Matemática. Ele trabalhou no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Irem) de Estrasburgo, na França, de 1970 a 1995, onde desenvolveu estudos fundamentais referentes à Psicologia Cognitiva. Atualmente trabalha na Universidade du Littoral Cote d'Opale da França, na qual é professor emérito. Em seus trabalhos, Duval, trata principalmente do funcionamento cognitivo, implicado, sobretudo na atividade matemática e nos problemas da aprendizagem.

intencional, fundamental para a aprendizagem humana. As representações semióticas desempenham o papel de comunicar, exteriorizar as representações mentais, a fim de torná-las acessíveis às outras pessoas, bem como possibilitar o acesso e a comunicação do objeto matemático.

No entanto, de modo geral, um registro de representação semiótica pode não ser suficiente para abordar diferentes características e propriedades de um objeto matemático. Dessa forma, se faz necessário o uso de diferentes registros[4]para um mesmo objeto matemático. É importante transitar entre os diferentes tipos de registros de representação, fazendo transformações de um sistema de registros para outros sistemas de registros. Esse tipo de transformação é chamado conversão [5]e é uma das atividades cognitivas fundamentais para a compreensão dos objetos matemáticos. Para Duval (2003), do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

No entanto, essa atividade cognitiva geralmente não ocorre naturalmente, ou seja, a passagem de um sistema de registros de representação para outro pode ser considerada complexa do ponto de vista cognitivo. Para evidenciar se a atividade de conversão é mais complexa ou menos complexa em uma atividade matemática, é preciso comparar a representação no registro de saída com a representação no registro de chegada. Isso envolve o fenômeno de congruência nas conversões entre os registros de representação. A esse fenômeno podemos associar um nível de
congruência ou de não-congruência[6] a partir da análise da conversão e observar aspectos relacionados à compreensão e à aprendizagem em Matemática.

Além da atividade de conversão, para que ocorra a conceitualização do objeto matemático em estudo, segundo Duval (2003), é necessário que exista uma coordenação entre os registros, ou seja, é preciso compreender que os diferentes registros se referem ao mesmo objeto matemático e podem se

---

[4] Quando utilizarmos os termos registro e registro de representação estaremos nos referindo aos registros de representação semiótica.

[5] A conversão é uma das atividades cognitivas fundamentais para que uma representação seja considerada um registro de representação semiótica. Essa abordagem é feita com mais detalhes no Capítulo 1.

[6] Os níveis de congruência e de não-congruência das conversões entre os registros de representação estão elencados e definidos no Capítulo 3 deste trabalho.

complementar no sentido de que um registro pode expressar características ou propriedades do objeto matemático que não são expressas com clareza em outro registro.

O acesso aos diferentes registros de representação semiótica em uma atividade matemática geralmente não ocorre naturalmente e o professor pode incentivar esse acesso. Nessa perspectiva, consideramos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica adequada a esse fim. A Modelagem7, possibilita a oportunidade de, a partir de um tema escolhido, desenvolver um trabalho de investigação e possibilita o uso de diferentes registros de representação. Esse fato é evidenciado em pesquisa desenvolvida por Vertuan (2007) em um curso proposto a alunos do 1° ano do curso de Licenciatura em Matemática da UEL. Em sua pesquisa desenvolvida, Vertuan (2007) aponta que diferentes registros associados a um objeto matemático se tornam presentes em atividades de Modelagem, além de possibilitar o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros.

Neste encaminhamento somos favoráveis à idéia na qual a Modelagem Matemática é assumida como alternativa pedagógica que possibilita estudar Matemática por meio da abordagem de um problema ou de uma situação advinda da realidade. Nessa visão, essa alternativa é reconhecida como uma forma de auxiliar os alunos a desenvolverem a capacidade de construir o seu conhecimento matemático por meio da abordagem de problemas ou situações que se fazem presentes em seu ambiente.

Com o objetivo de investigar as relações entre as etapas da atividade de Modelagem Matemática e a Semiótica no que diz respeito à categorização abordada por Peirce e os modos de inferência estabelecidos por Kehle & Cunningham (2000), além da relação ao uso de Registros de Representação Semiótica nessas etapas e no desenvolvimento das atividades, com foco no fenômeno de congruência e de não-congruência nas conversões entre os registros de representação, destacamos a necessidade de um acompanhamento criterioso de tais pontos em atividades de Modelagem Matemática.

A estruturação da nossa pesquisa está fundamentada nos pressupostos teóricos da Semiótica e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, abordados no contexto relativo às atividades de Modelagem Matemática.

[7] Em alguns momentos utilizamos o termo Modelagem e a abreviação MM para nos referirmos à Modelagem Matemática.

Problemática

Levando em consideração a importância das representações na Matemática em geral e na Modelagem Matemática em particular, a problemática que a pesquisa se dispõe a investigar diz respeito à busca de relações entre Modelagem Matemática e Semiótica.

Esta busca é norteada por algumas questões:

1. De que maneira a categorização dos signos estabelecida por Peirce está associada às etapas de uma atividade de Modelagem Matemática?
2. Os modos de inferência dos signos classificados por Kehle & Cunningham (2000) estão associados às ações cognitivas dos alunos nas diferentes etapas da Modelagem Matemática?
3. O fenômeno de congruência e não-congruência (estabelecido por Duval) de conversões realizadas entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática influencia a caracterização do objeto matemático?
4. As tarefas de produção e de compreensão (caracterizadas por Duval) interferem na coordenação entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática?

Para buscar respostas a estas questões, analisamos atividades de Modelagem Matemática cuja descrição retiramos de literatura relativa à Modelagem Matemática.

Estrutura do trabalho

A estrutura do trabalho compreende quatro capítulos, além da introdução, das considerações finais e das referências bibliográficas.

Na *Introdução,* apresentamos o tema, a justificativa, a problemática em estudo e a estrutura do texto.

No primeiro capítulo, que se encontra intitulado *Registros de Representação Semiótica,* apresentamos a fundamentação teórica que rege nossa pesquisa — a Semiótica e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Inicialmente, abordamos os fundamentos que regem a Semiótica como é entendida na linha de pesquisa desenvolvida por Charles Sanders Peirce. Em seguida, apresentamos os fundamentos de Raymond Duval em relação ao papel e à importância dos registros de representação semiótica: tipos de registros de representação semiótica, transformações de registros relacionadas ao tratamento e à conversão, o fenômeno de congruência e não-congruência em conversões entre registros de representação e a coordenação entre os registros.

No capítulo 2, *Modelagem Matemática na Educação Matemática,* abordamos o papel da Modelagem no âmbito da Educação Matemática.

Nossa opção metodológica e seus procedimentos são descritos no capítulo 3 — *Aspectos metodológicos da pesquisa.* Nesse capítulo descrevemos o quadro teórico que rege nossa pesquisa, como o trabalho foi desenvolvido e de que forma fizemos a escolha e as análises das atividades de Modelagem Matemática escolhidas.

No capítulo 4 — *Descrição das atividades de Modelagem e análise dos dados à luz dos pressupostos teóricos estabelecidos* — apresentamos as atividades escolhidas para o desenvolvimento dessa pesquisa e analisamos as informações à luz dos pressupostos teóricos estabelecidos.

Em seguida, na parte do texto intitulada *Para concluir: algumas considerações,* apresentamos algumas considerações levantadas com o desenvolvimento da pesquisa.

Para finalizar, apresentamos as Referências Bibliográficas utilizadas para a fundamentação de nossa pesquisa.

CAPÍTULO 1
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

1.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos, inicialmente, o significado da palavra semiótica, as vertentes que deram origem a diferentes linhas de estudo da Semiótica e como essa ciência é entendida na linha de estudos desenvolvida por Charles Sanders Peirce, ou seja, a semiótica peirceana. Na seqüência, abordarmos como a semiótica peirceana pode ser inserida em contexto matemático visando a constituição do conhecimento.

Em seguida, apresentamos alguns estudos que abordam a Semiótica na Educação Matemática. Dentre os estudos nessa linha de pesquisa, destacamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval que faz parte dos pressupostos teóricos que regem nosso trabalho. Com isso, abordamos o papel e a importância das representações e das representações semióticas no desenvolvimento das atividades matemáticas. Além disso, abordamos os tipos de registros de representação semiótica. Para isso, são descritas e exemplificadas as atividades fundamentais necessárias para que uma representação seja considerada um registro de representação semiótica. Ao abordarmos a atividade cognitiva referente à conversão, aprofundamos nosso estudo com relação ao fenômeno de congruência e não-congruência em conversões entre registros, estabelecendo condições de congruência. Finalizamos este capítulo, apontando a importância de se estabelecer a coordenação entre os diferentes registros de representação para a conceitualização dos objetos matemáticos em estudo.

1.2 SEMIÓTICA

A palavra semiótica provém do grego *semeion,* que significa *signo.* Dessa forma, semiótica é a ciência dos signos, os signos da linguagem.

Para Santaella (2008b, p. 13),

> As linguagens estão no mundo e nós estamos na linguagem. A Semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as

> linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido.

Santaella (2008b) refere-se à linguagem como uma forma de comunicação e de significação. Neste contexto, existe linguagem verbal e linguagem não-verbal. A língua é uma forma de linguagem, a mais evidente e natural corresponde à língua nativa, língua materna ou língua pátria. No entanto, a língua não é a única forma de nos comunicarmos com o mundo e com quem está ao nosso redor. As formas de nos comunicar vão além da emissão de sons fonéticos.

A nossa condição de relacionamento com o mundo é mediada por uma rede múltipla de linguagens, ou seja, nos comunicamos por meio de leituras e produções de textos, nos comunicamos e nos orientamos por meio de imagens, gráficos, sinais, números, luminosidade, objetos, sons musicais, gestos, expressões, sensações etc. Segundo Santaella (2008b, p. 10), *"somos uma espécie animal tão complexa quanto são complexas e plurais as linguagens que nos constituem como seres simbólicos, isto é, seres de linguagem'*. É bom lembrar que a Linguagem Brasileira de Sinais (Libras), por exemplo, é um tipo de linguagem de comunicação dos portadores de necessidades especiais auditivas que não se utiliza de sons para ter sentido.

Portanto, de forma mais geral, podemos considerar a Semiótica como uma ciência de toda e qualquer linguagem.

Cabe estudar qual a origem (ou as origens) de uma ciência que está em pleno desenvolvimento nas mais variadas áreas de pesquisa.

1.2.1 Origens da Semiótica

A Semiótica é um campo de estudo considerado novo por muitos pesquisadores, no entanto, tem ocupado lugar de destaque crescente, principalmente, nas ciências sociais e humanas. Santaella (2008b) relata o caráter embrionário dessa ciência que se encontra em estágio de desenvolvimento. Dessa forma, trata-se de um campo de pesquisa em fase de sedimentação, no qual ainda existem muitas indagações e investigações em processo.

Argumentando sobre "o que é Semiótica", Santaella (2008b) relata o estado nascente de tal ciência e, ainda, a fragilidade em conceituá-la.

> Um processo como tal não pode ser traduzido em uma única definição cabal, sob pena de se perder justo aquilo que nele vale a pena, isto é, o engajamento vivo, concreto e real no caminho da instigação e do conhecimento. Toda definição acabada é uma espécie de morte, porque, sendo fechada, mata justo a inquietação e curiosidade que nos impulsionam para as coisas que, vivas, palpitam e pulsam (SANTAELLA, 2008b, p. 8-9).

Historicamente, essa jovem ciência, teve três origens lançadas quase simultaneamente no tempo, mas distintas no espaço e na "paternidade": uma nos Estados Unidos, outra na antiga União Soviética e a terceira na Europa Ocidental. Segundo Radford (2006), há pelo menos três tradições semióticas claramente diferenciadas: a tradição *Saussureana,* iniciada pelo suíço Ferdinand de Saussure (1857-1913)[8]; a tradição *Peirceana,* iniciada pelo cientista, matemático, historiador, filósofo e lógico norte-americano Charles Sanders Peirce (1839-1914); a tradição *Vygotskiana,* iniciada pelo psicólogo russo Lev S. Vygotski (1896-1934). Cada uma dessas tradições surgiu e se desenvolveu dentro de problemáticas específicas e diferentes.

A tradição Saussureana surgiu da necessidade de resolver o problema referente à compreensão da língua, distinta da linguagem e da palavra, que se constitui na oposição entre o social e o subjetivo. Para Saussure, considerado o pai do estruturalismo lingüístico, a palavra é de ordem subjetiva, enquanto que a língua é de ordem social. A língua é um sistema de signos que expressa idéias. Para Saussure, a língua não somente se assemelha aos sistemas de signos, como é mais importante do que eles.

Na tradição Vygotskiana, a semiótica foi elaborada para resolver o problema referente ao estudo do pensamento e de seu desenvolvimento. Para Vygotski, o signo desempenha uma função mediadora entre a pessoa e seu contexto e permite seu desenvolvimento cultural. O signo é considerado por Vygotski uma ferramenta para o estudo do pensamento e de seu desenvolvimento e está relacionado com a transformação das funções psíquicas da pessoa.

A tradição Peirceana concebeu a Semiótica como a "doutrina formal dos signos". Peirce (2005) definiu o signo como algo, que para uma pessoa, toma

---

[8] No final da primeira década do século XX, Saussure ministra o curso de Lingüística Geral, na Universidade de Genebra. Saussure define a língua como uma estrutura direcionada por leis e regras específicas e autônomas. Esse fato teve grande repercussão por toda a Europa e, posteriormente, por todo o mundo.

lugar de outra coisa (objeto[9]), não em todos os aspectos desta coisa, mas somente de acordo com certa forma ou capacidade.

> Um signo, ou representámen, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu objeto. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de idéia que eu, por vezes, denominei fundamento do representámen (PEIRCE, 2005, p. 46).

Com isso, entendemos que o signo é uma coisa que representa outra coisa — seu objeto. Ele existe somente se puder representar, substituir algo diferente dele, pois o signo não é o objeto. Ele está apenas no lugar do objeto. O signo somente pode representar um objeto de certa forma e numa certa capacidade. Por exemplo: a palavra escola, a pintura de uma escola, o desenho de uma escola, a fotografia de uma escola, o filme de uma escola, a planta baixa de uma escola, a maquete de uma escola, ou até mesmo o olhar do observador para uma escola, são signos do objeto escola. Eles não são a própria escola, substituem-na de certa forma que depende da natureza do próprio signo. A natureza de um desenho não é a mesma natureza de uma fotografia, por exemplo.

Em nosso trabalho, abordamos com mais detalhes a semiótica desenvolvida por Peirce, pois essa teoria aborda as representações sígnicas que podem ser relacionadas aos conceitos e aos objetos matemáticos que representam.

1.3 SEMIÓTICA PEIRCEANA

Peirce foi um dos principais teóricos da Semiótica, deixando uma elaboração filosófica que atinge hoje as mais variadas áreas. A Semiótica é para Peirce apenas um outro nome da Lógica como ele a entendia em sua época. Ao se referir à Semiótica Peirceana e relacioná-la à Lógica, Radford (2006, p.9) afirma que *"la semiótica Peirceana se mueve delas esferas de la lógica, sin reducirse solamente a ésta"*.

---

[9] Para Peirce (2005), um objeto "é uma coisa singular existente e conhecida ou que se acredita tenha anteriormente existido ou que se espera venha a existir' (p. 48).

Segundo Santaella (2007), a Semiótica também chamada Lógica, devido à variedade de tarefas que desempenha, subdivide-se em três ramos: gramática especulativa, lógica crítica, metodêutica (retórica especulativa).

Na gramática especulativa estudam-se os diversos tipos de signos e as formas de pensamento que esses signos possibilitam realizar. A gramática especulativa é a ciência geral dos signos.

O segundo ramo da Semiótica, chamado lógica crítica, tem por estudo os tipos de inferências, raciocínios ou argumentos que se estruturam por meio dos signos. Esses argumentos são a abdução, a indução e a dedução que conduzem ao pensamento lógico.

Por fim, o terceiro ramo designado metodêutica ou retórica especulativa, tem por função analisar os métodos a que cada um dos tipos de raciocínio dá origem. Esse ramo estuda os princípios do método científico.

Os três ramos da Semiótica estabelecem entre si uma relação de dependência: a lógica crítica está baseada na gramática especulativa e a metodêutica está baseada na lógica crítica. A gramática especulativa é considerada a base dos outros dois ramos. Sobre a gramática especulativa, Santaella (2007, p. 4) afirma que *"é uma teoria geral de todas as espécies possíveis de signos, das suas propriedades e seus comportamentos, dos seus modos de significação, de denotação de informação e de interpretação"*. Esse ramo da Semiótica trabalha com conceitos abstratos capazes de determinar as condições gerais que fazem com que certos processos sejam considerados signos.

A gramática especulativa, ou teoria geral dos signos, é por vezes considerada como o único ramo da Semiótica Peirceana. De fato, como afirma Garcia (2007, p. 24), a gramática especulativa é "uma *introdução para o estudo da legitimidade dos argumentos e das condições de verdade de uma ciência"*. Esse ramo da Semiótica fornece os conceitos e as classificações para a análise dos diversos tipos de signos e o que eles se constituem — a representação; além dos três aspectos que a representação engloba: significação, objetivação e interpretação. Isso ocorre, pois, na tradição peirceana, o signo tem natureza triádica[10], ou seja, estabelece três níveis de relações fundamentais:

---

[10] Segundo Santaella (2008b), existem 10 divisões triádicas do signo e dentre essas tricotomías existem três mais gerais, as quais Peirce dedicou estudos mais detalhados. Essa tricotomia é abordada neste trabalho. Como estudioso, Peirce sempre deu preferência à relação com três,

- consigo mesmo, nas suas propriedades internas, no seu poder para significar, estabelecendo uma teoria da significação;
- com o objeto, em sua referência àquilo que representa, se refere ou indica, estabelecendo uma teoria da objetivação;
- com os receptores, isto é, nos tipos de interpretação que despertam nas pessoas que os utilizam, estabelecendo uma teoria da interpretação.

No entanto, a noção de signo para Peirce (2005) foi considerada tão ampla, que o signo não precisa ter uma natureza plena de linguagem, podendo ser uma mera ação ou reação, que verbaliza uma emoção ou sentimento.

Neste contexto, Santaella (2007, p. 10) argumenta que

> Qualquer coisa que esteja presente à mente tem a natureza de um signo. Signo é aquilo que dá corpo ao pensamento, às emoções, reações etc. Por isso mesmo, pensamentos, emoções e reações podem ser externalizados. Essas externalizações são traduções mais ou menos fiéis de signos internos para signos externos.

A partir dos fenômenos observados por meio da experiência, Peirce categorizou os signos, levando em conta a qualidade, a reação (ou relação) e a representação (ou mediação). Na próxima seção fazemos uma apresentação destas categorias.

1.3.1 Categorias Fenomenológicas

Nos estudos que realizou ao longo dos anos, Peirce tomou como ponto de partida a experiência que temos do mundo, partindo da observação detalhada dos próprios fenômenos[11]. Com isso, considerou a análise e o exame do

---

estabelecendo relações entre palavras em forma de tricotomia, estabelecendo categorias entre fenômenos em número de três (primeiridade, secundidade e terceiridade) e considerando a relação triádica que o signo pode estabelecer (consigo mesmo, com o objeto e com o interpretante). Considerações aprofundadas sobre as 10 divisões triádicas estão em Peirce (2005).

[11] A base filosófica da concepção sígnica para Peirce é a fenomenologia. Segundo Garcia (2007, p. 24), "a Lógica tem por objetivo analisar e discutir as ações morais e sociais que são estudados pela Fenomenologia. A partir dessas análises, a Fenomenologia apropria-se da tarefa de levantar elementos ou características dos fenômenos" . Assim, a base filosófica de Peirce é fruto da experiência, do que nos aparece à mente, de nossas vivências. O trabalho de Peirce abrange as vertentes da fenomenologia pragmatista que permeia a Semiótica. Segundo Santaella (2007), a palavra fenômeno provém do grego Phaneron que se refere a tudo aquilo, qualquer coisa, que aparece à percepção e à mente. Dessa forma, a fenomenologia tem por função apresentar as categorias formais e universais dos modos como os fenômenos são apreendidos pela mente.

modo como as coisas aparecem à mente para determinar suas categorias fenomenológicas.

Peirce chegou à conclusão de que há três elementos formais e universais em todos os fenômenos que se apresentam à percepção e à mente e dividiu os fenômenos cognitivos em três categorias fenomenológicas. Em 1867, as categorias fenomenológicas foram denotadas por: qualidade, relação e representação. Depois de algum tempo a categoria denominada Relação foi substituída pelo termo Reação e a categoria Representação foi substituída por um termo mais amplo denominado Mediação. Ficaram definidas então as categorias fenomenológicas: qualidade, reação e mediação. No entanto, para fins científicos, Peirce preferiu utilizar e fixar essas categorias com a terminologia: Primeiridade (qualidade), Secundidade (reação) e Terceiridade (mediação), pois se tratavam de termos inteiramente novos, que não estavam associados a termos já existentes.

A primeiridade refere-se ao que está relacionado ao acaso, ao que não é analisado, não visto como um fato concreto, mas como uma qualidade, um sentimento. O sentimento da primeiridade é um sentimento imediato, imperceptível e original; é algo que ocorre primeiro, de modo a não ser segundo para uma representação. Neste contexto, Santaella (2008b, p. 45) afirma que o sentimento da primeiridade é algo "[...] *fresco e novo, porque, se velho, já é um segundo em relação ao estado anterior"*. Um exemplo clássico referente à primeiridade é o mundo para uma criança em seus primeiros anos de vida, pois ela não estabelece relações entre as coisas. Esse mundo implica, para a criança, em algo que é o primeiro, o novo, o presente, o livre de relações.

Assim, a idéia de primeiridade corresponde a uma vaga impressão de algo, no qual nenhum pensamento pode ser colocado e do qual nada pode ser isolado.

Segundo Farias (2007), pode-se considerar primeiridade em um contexto matemático quando o estudante visualiza pela primeira vez na lousa, o registro gráfico de uma função sem fazer referência a nada, somente ao traçado registrado, há, nesse caso, uma primeira impressão. Com isso, o estudante tem um primeiro contato com o objeto matemático, mesmo não fazendo nenhuma relação deste com qualquer outra representação do objeto matemático.

A secundidade refere-se à experiência, às idéias de dependência, determinação, dualidade, ação e reação, aqui e agora, conflito, surpresa, dúvida.

Quando há um fenômeno, existe uma qualidade, ou seja, uma primeiridade. No entanto, a qualidade refere-se a uma parte do fenômeno, pois para existir a qualidade precisa estar presente em matéria. Qualquer sensação já é secundidade, pois corresponde à ação de um sentimento sobre nós e nossa reação específica. Qualquer relação de dependência entre dois termos (qualidade e existência) é uma *relação diádica,* ou seja, uma secundidade.

Farias (2007), relaciona a secundidade no contexto matemático quando o estudante vê o registro gráfico na lousa e, imediatamente, relaciona-o a um objeto matemático. Como exemplo, a autora destaca o registro gráfico de uma parábola que o estudante relaciona com o objeto matemático 'função do segundo grau'.

Neste sentido, Farias (2007, p. 34) afirma que

> [...] é o estado de secundidade que se manifesta nessa condição de confronto, na busca de compreensão associada ao caráter de observação em relação aos acontecimentos que estão lhe sendo impostos. E também, é o momento de adentrar em um estado diferenciado de percepção, no qual outras potencialidades de informação e aprendizagem poderão manifestar-se. Mas, renovar hábitos, sair de um estado perceptivo, ou que seja, de um estado qualitativo, exige aplicação física e/ou mental.

A terceiridade refere-se à generalidade, continuidade, crescimento, inteligência. Segundo Santaella (2007, p.7), *"o signo é um primeiro (algo que se apresenta à mente), ligando um segundo (aquilo que o signo indica, se refere ou representa) a um terceiro (o efeito que o signo irá provocar em um possível intérprete)"*. Sobre a terceiridade, Santaella (2008ª, p. 8) afirma que

> E justamente a terceira categoria fenomenológica (terceiridade) que irá corresponder à definição de signo genuíno como processo relacional a três termos ou mediação, o que conduz à noção de semiose infinita ou ação dialética do signo. Em outras palavras: considerando a relação triádica do signo com a forma básica ou princípio lógico-estrutural dos processos dialéticos de continuidade e crescimento, Peirce definiu essa relação como sendo aquela própria da ação do signo ou semiose, ou seja, a de gerar ou produzir e se desenvolver num outro signo, este chamado de "interpretante do primeiro", e assim ad infinitum [...] .

Portanto, a terceiridade estabelece uma *relação triádica* existente entre o signo, o objeto e o interpretante[12]. Como abordado por Santaella (2008b), é a terceiridade que aproxima um primeiro (qualidade ou primeiridade) e um segundo (reação ou secundidade) numa síntese intelectual e corresponde à camada de pensamento em signos, por meio da qual representamos e interpretamos o mundo.

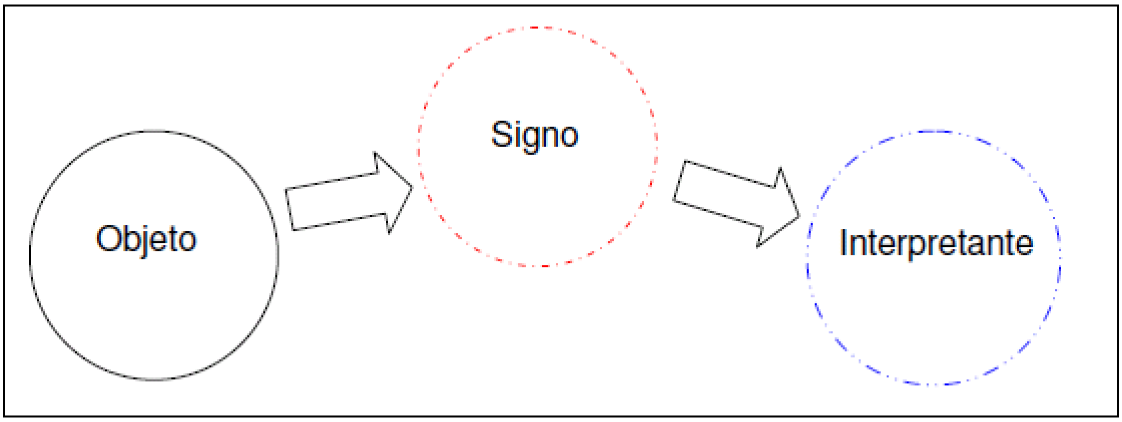
Farias (2007), referindo-se ao registro gráfico apresentado na lousa (exemplo dado na página 32), sugere que o estudante está no caminho da terceiridade quando seu olhar para o traçado está carregado de interpretação, de busca de explicação, de análise e generalização, na qual ele poderá interpretar o dado traçado que corresponde ao objeto matemático 'função do segundo grau' de acordo com uma suposta lei ou conceito matemático.

1.3.2 Relação Triádica

Da relação entre signo e objeto resulta o interpretante, o qual corresponde a um processo racional que se cria na mente do intérprete.

O signo desempenha um papel de mediação entre o objeto e o interpretante. Segundo Ferreira (2006), a relação triádica do signo pode ser apresentada como um esquema conforme a Figura 1.1.

Figura 1.1 – Esquema semiótico peirceano (FERREIRA, 2006, p. 58).



[12] Para Peirce, o ser humano somente reconhece o mundo pelo fato de representá-lo de alguma forma. O ser humano somente interpreta essa representação de mundo por meio de uma outra representação. A essa "nova" representação, Peirce chama interpretante da primeira. O interpretante é algo que se cria na mente do ser humano (intérprete).

O interpretante substitui o objeto real na mente do intérprete (ser humano), considerando que o "objeto real" é inatingível pela percepção. A interpretação de um signo é um processo dinâmico na mente do receptor (o intérprete).

Neste sentido Santaella (2008b, p. 58-59), argumenta que

> A partir da relação de representação que o signo mantém com seu objeto, produz-se na mente interpretadora um outro signo que traduz o significado do primeiro (é o interpretante do primeiro). Portanto, o significado de um signo é outro signo — seja este uma imagem mental ou palpável, uma ação ou mera reação gestual, uma palavra ou mero sentimento de alegria, raiva... uma idéia, ou seja lá o que for — porque esse seja lá o que for, que é criado na mente pelo signo, é um outro signo (tradução do primeiro).

O signo não é o objeto, ele está no lugar do objeto, fazendo referência ao objeto e somente pode representar esse objeto de certo modo e em certa capacidade. No contexto matemático, por exemplo, a palavra função, a tabela da função, o gráfico da função, a expressão algébrica associada à função, são signos do objeto matemático 'função'. Eles não são o objeto matemático 'função', somente o representam para um intérprete, num processo relacional que se cria na mente desse intérprete.

Baseadas no fato de que a terceiridade é a categoria que corresponde à definição de signo genuíno[13], entendemos que o signo somente pode representar seu objeto para um intérprete. Como representa seu objeto, produz algo na mente desse intérprete. Esse algo produzido está relacionado ao objeto, não de maneira direta, mas por meio da mediação do signo.

Na tradição peirceana, o signo estabelece três níveis de relações fundamentais: consigo mesmo (significação), com o objeto (objetivação) e com o interpretante (interpretação). Esses níveis de relações associados às categorias fenomenológicas (Primeiridade, Secundidade e Terceiridade) definem uma classificação estabelecida por Peirce para os signos.

[13] Para Santaella (2008b, p. 68), os signos são considerados genuínos, pois "produzirão como interpretante um outro tipo geral ou interpretante em si que, para ser interpretado, exigirá um outro signo, e assim ad infinitum'.

Na **significação,** ou seja, na relação do signo com ele mesmo, é preciso levar em conta as propriedades que são consideradas: qualidade, existência e lei.

Quando a pura qualidade funciona como signo, temos um quali-signo que se refere apenas à qualidade e está associado à Primeiridade. Santaella (2008b, p.63) afirma que é "[...] a *qualidade apenas que funciona como signo, e assim o faz porque se dirige para alguém e produzirá na mente desse alguém alguma coisa com um sentimento vago e indivisível'* .

A existência é uma propriedade que garante que algo ocupe lugar no espaço e no tempo e que esse algo tenha uma reação com outro existente. Peirce define essa reação por Secundidade. Segundo Santaella (2008b, p.66), *"[..] uma coisa singular funciona como signo porque indica o universo do qual faz parte"*. Quando essa existência funciona como signo, temos um sin-signo.

A lei é uma propriedade que determina como devemos agir em certa situação. Quando a lei funciona como signo, na semiótica, temos um legi-signo que está associado à Terceiridade.

Na **objetivação,** no momento em que o signo se relaciona com o objeto, estabelece-se três tipos de relação: ícone, índice e símbolo. Essa classificação depende da propriedade do signo que está sendo considerada para representar seu objeto. As propriedades são qualidade, existência e lei. Se temos uma qualidade (quali-signo), na sua relação com o objeto sob a categoria Primeiridade, ele será um ícone; se for uma existência (sin-signo), na sua relação com o objeto sob a Secundidade, será um índice; se for uma lei (legi-signo), na sua relação com o objeto sob a Terceiridade, será um símbolo.

Um ícone *sugere* ou *evoca* seu objeto, a qualidade que ele exibe se assemelha a uma outra qualidade. Um índice *indica* seu objeto pela existência concreta. Santaella (2007, p.19), afirma que "[...] os *índices envolvem ícones. Mas não são os ícones que os fazem funcionar como signos"*. Por exemplo, a imagem da montanha apresentada em uma fotografia, tem alguma semelhança com a aparência da montanha, daí temos um ícone. No entanto, a imagem é um índice, pois é o resultado de uma conexão de existência entre a fotografia e a montanha. Um símbolo *representa* seu objeto, representa aquilo que a lei determina para que ele represente. Abordando o conceito de símbolo, Peirce (apud OTTE, 2001, p.14 [tradução livre]) argumenta que "l/m *símbolo é um signo convencional que associado* *a um objeto tem certos caracteres. Mas um símbolo, por si mesmo, é um mero sonho; não mostra sobre o que está falando. Precisa estar conectado a seu objeto"*[14]. Assim, para que um símbolo represente algo, ele deve estar em conexão com um objeto. No contexto matemático, de nada adianta termos um símbolo gráfico, um registro gráfico traçado no papel se este não for associado a um objeto matemático.

Otte (2001) exemplifica a relação do signo com seu objeto (ícone, índice e símbolo), por meio dos termos palavra, proposição e argumento:

> Se considerarmos os serviços que os diferentes elementos da argumentação nos apresentam nós poderíamos dizer que um termo ou uma palavra geralmente serve para evocar uma idéia, e assim está sendo considerado um Ícone, enquanto que proposições são usadas para declarar fatos e assim são Índices. Agora um argumento funcionalmente considerado serve para estabelecer uma certa linha de pensamento ou um hábito de lidar intelectualmente com certos assuntos e assim deve ser chamado Símbolo[15] (OTTE, 2001, p. 12 [tradução livre]).

Na **interpretação,** na relação do signo com o interpretante, o interpretante corresponde ao efeito interpretativo que o signo produz na mente do intérprete. Conforme afirmado por Santaella (2007, p.24), é preciso entender que *"interpretante não quer dizer intérprete. É algo mais amplo, mais geral. O intérprete tem um lugar no processo interpretativo, mas este processo está aquém e vai além do intérprete'*.

Quando o signo em relação ao seu interpretante for um signo que designa qualidade (Primeiridade), temos uma rema, ou seja, uma conjectura ou hipótese. Os quali-signos icônicos geram interpretantes remáticos. Por exemplo, quando dizemos que uma figura desenhada no papel é um retângulo, essa afirmação não passa de conjectura, uma vez que o retângulo não apresenta dimensão nem espessura.

---

[14] Tradução de "A symbol is a conventional sign which being attached to an object signifies that object has certain characters. But a symbol, in itself, is a mere dream; it does not show what it is talking about. It needs to be connected with its object" (PEIRCE, apud OTTE, 2001, p. 14).

[15] Tradução de "If we consider the services that the different elements of argumentation render us we could say that a term or a word usually serves to evoke an idea, and thes is to be considered an Icon, whereas propositions are used to state facts and thus are Indices. Now an argument considered functionally serves to establish a certain train of thought or a habit of dealing with certain matters intellectually and thus it must be called a Symbol" (OTTE, 2001, p. 12).

Quando o signo em relação ao seu interpretante se referir à existência (Secundidade), ao real, àquilo que pode ser verificado, temos um dicente. Os sin-signos indiciais geram interpretantes dicentes. Por exemplo, quando dizemos que o livro está na prateleira, este é um signo de existência real, pois pode ser observado no local em que o livro deveria estar.

Quando o signo em relação ao seu interpretante se referir a uma lei (Terceiridade), temos um argumento. Os legi-signos simbólicos geram argumentos. Ele somente representa seu objeto quando realiza uma conexão com leis pré-estabelecidas coletivamente que determinam que o objeto deva ser representado por aquele signo. Por exemplo, a representação gráfica de uma função linear.

A classificação estabelecida por Peirce para os signos foi esquematizada por Santaella (2008b) conforme Quadro 1.1.

Quadro 1.1 – Classificação dos signos semióticos.

	Significação Signo em si mesmo	Objetivação Signo com seu objeto	Interpretação Signo com seu interpretante
Primeiridade	Quali-signo	Ícone	Rema
Secundidade	Sin-signo	Índice	Dicente
Terceiridade	Legi-signo	Símbolo	Argumento

A tricotomia estabelecida por Peirce para o estudo dos fenômenos pode ser considerada uma base para a análise e leitura Semiótica dos registros que analisamos em nosso trabalho. No entanto, neste trabalho temos como objetivo observar as relações do signo consigo mesmo (significação) e do signo com o objeto (objetivação), uma vez que nossa pesquisa é de caráter teórico, na qual estudamos os registros de representação semiótica associados aos objetos matemáticos que emergem em atividades de Modelagem Matemática. A relação do signo com o interpretante (interpretação) não é feita neste trabalho, uma vez que não foram feitas observações nem entrevistas com o(s) modelador(es) de cada atividade.

1.4 Semiótica e Educação Matemática

A Semiótica é uma ciência que se apresenta como um amplo campo de aplicações em diferentes áreas do conhecimento. Entre essas áreas, a Semiótica é tomada como base, em diferentes perspectivas, em pesquisas no âmbito da Educação Matemática. Nos últimos anos essas pesquisas têm crescido, principalmente, no que diz respeito à importância dos signos para a compreensão dos objetos matemáticos.

Existem pesquisas que tratam a Semiótica como base para o estudo dos objetos matemáticos. Dentre essas pesquisas, podemos destacar as desenvolvidas por Raymond Duval. Esse autor trabalha com o uso de diferentes registros de representação semiótica em atividades matemáticas (DUVAL, 1988, 1993, 1998a, 1998b, 1998c, 2003, 2004, 2006). Duval foi um dos precursores do uso da Semiótica na Educação Matemática. Ele desenvolveu a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Duval (2006) considera que a Matemática é o domínio em que diferentes formas de representação semiótica podem ser utilizadas. Com isso, busca esclarecer que os maiores problemas na aprendizagem da Matemática consiste na heterogeneidade semiótica dos diferentes sistemas utilizados, ou seja, a dificuldade está em passar de um tipo de representação a outro. Duval argumenta que as análises das produções matemáticas exigem ferramentas de análises semióticas complexas e adaptadas aos processos cognitivos mobilizados em toda atividade matemática.

Existem outras referências que tratam de pesquisas referentes à Semiótica e à Educação Matemática. Otte (2001, 2006), D'Amore (2006) e Steinbring (2008) são algumas delas.

Otte (2001) aborda as categorias fenomenológicas sugeridas por Peirce e as classificações dos signos. Esse autor defende que a generalização possui papel fundamental nos processos do pensamento matemático e que o significado surge da relação dialética do pensamento entre o particular e o geral, entre a lei e a aplicação, entre o hábito e a regra, entre a crença e a transformação.

Em relação à classificação dos signos sugerida por Peirce, Otte (2001) entende que a cognição e o efeito transformador dos signos sobre o ensino conduzem todos os envolvidos a um processo de pensamento mais generalizado sobre a atividade matemática, o que implica na importância dos signos e/ou símbolos sob o ponto de vista epistemológico da Matemática. De acordo com esse ponto de vista, Otte (2001), chama a atenção para a prática da Matemática em sala de aula, na qual, usualmente se utiliza signos e significados por meio de atividades, de maneira que o algoritmo é expresso em fórmulas para realizar cálculos, fazendo-se distinção entre conceito, signos e objetos, ao invés de uma abordagem em que ocorra uma integração entre esses. Com isso, o autor esclarece que os conceitos matemáticos não se encontram independentes de representações, no entanto, tais conceitos não devem ser confundidos com representações particulares.

D'Amore (2006) discute o problema da ontologia e do conhecimento do objeto matemático. Com isso, chama a atenção para o problema da representação do objeto e seu sentido. Segundo D'Amore (2006), a passagem da representação de um objeto matemático para outra, por meio de transformações no sistema de representação, conserva o significado do objeto mesmo, mas em certas ocasiões pode mudar seu sentido. Para exemplificar esse fato é apresentada uma situação na qual um professor lança um dado normal e pede aos alunos que calculem a probabilidade do evento — lançamento do dado e obtenção de um número par.

Como têm conhecimento de fração, os alunos respondem $\frac{3}{6}$, pois os resultados possíveis de um lançamento de dado são 6 (número de faces) e os resultados solicitados pelo evento são 3 O professor, então, trabalha com a noção de fração equivalente e diz que $\frac{3}{6}$ é equivalente a $\frac{50}{100}$, o que pode ser escrito como 50%. A partir daí, o professor trabalhou com frações e porcentagem. No entanto, quando o pesquisador pergunta ao professor e aos alunos se a fração $\frac{4}{8}$ representa o evento, pois é uma fração equivalente a $\frac{3}{6}$, a resposta unânime é *não*. O professor justifica a resposta dizendo que existem dados com 8 faces e essa fração corresponde a essa situação. Dessa forma, houve uma mudança de sentido do objeto matemático em estudo.

Steinbring (2008) ressalta que o conhecimento matemático não pode ser traduzido e interpretado por uma mera leitura de signos, símbolos ou princípios. É preciso que a leitura seja carregada de experiência e conhecimento implícito, isto é, não podemos entender os signos sem algumas pressuposições de tal conhecimento e de atitudes e maneiras de utilizá-lo.

Como a Semiótica é uma ciência que investiga as linguagens existentes, examinando os fenômenos em seu significado e sentido, pode se infiltrar nos estudos e nas pesquisas relacionados às diversas ciências. No entanto, segundo Santaella (2008b), a Semiótica não tem o objetivo de se apoderar do saber e da investigação específica de outras ciências, mas de desvendar sua existência enquanto linguagem, sua ação em termos de signo, seu ser de linguagem.

Uma das justificativas de se escolher Semiótica como fundamentação teórica neste trabalho é o fato de a Matemática utilizar diversas representações, tais como: representação algébrica, representação geométrica e representação gráfica para descrever e analisar certos fenômenos no processo de constituição do conhecimento matemático.

Dessa forma, para compreender essa relação de uma ciência e sua linguagem, o referencial teórico escolhido para a realização deste trabalho diz respeito à abordagem teórica de Raymond Duval sobre os registros de representação semiótica que aborda a importância da linguagem no desenvolvimento das aprendizagens intelectuais, mais especificamente, no domínio da língua francesa e da Matemática.

Na próxima seção aprofundamos a idéia do uso de representações no desenvolvimento de objetos matemáticos, abordando a teoria de Raymond Duval, que está sendo cada vez mais utilizada quando as pesquisas se relacionam à constituição do conhecimento matemático e à organização de situações que envolvem aprendizagem.

1.5 Representações e Representações Semióticas

Representar surge da necessidade de tornar algo presente; algo que existe e que necessite da representação para ser acessado.

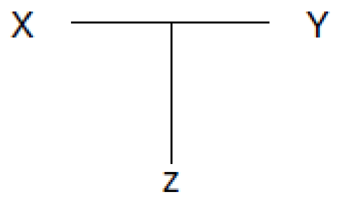
Na concepção de Astolfi & Develay (2007), a representação

> [...] corresponde a uma organização dos dados da percepção e da ação graças ao uso de critérios organizadores sistemáticos (em vez de simples comparações aleatórias ou analógicas), mas que se restringe ao plano do referente empírico (p. 46).

Para Peirce (2005, p.61), representar é *"[...] estar em lugar de, isto é, estar numa relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por* *alguma mente como se fosse esse outro"*. Esse autor faz uma relação entre signo e representação: *"Quando se deseja distinguir entre aquilo que representa e o ato ou relação de representação, pode-se denominar o primeiro de 'representâmen' e o último de 'representação"*. Peirce (2005) considera que a representação é uma função do signo.

Defendendo que o conceito de representação não é simples nem consensual e, apoiado na idéia de que representação é a função principal do signo, Pino (2006), faz uma relação entre representação e a abordagem de signo estabelecida por Peirce na Semiótica, conforme mostra a Figura 1.2.

Figura 1.2 – Estrutura relacional de representação e o esquema semiótico peirceano (PINO, 2006, p. 22).



Nessa estrutura relacional, X (signo) é posto em relação com Y (objeto) em função de um terceiro elemento z (interpretante). Como o interpretante é algo que surge na mente do intérprete, então o elemento z não está nem em X nem em Y. Esse elemento surge apenas quando o intérprete consegue estabelecer algum tipo de relação entre X e Y. Por exemplo, o número "3" (signo simbólico) pode ser relacionado com um determinado agrupamento (objeto) em razão da idéia de "numeral" (interpretante), que nos permite chamar o agrupamento de "três" (signo verbal). Peirce (2005) defende que é necessário que o intérprete tenha alguma idéia ou noção prévia do que é o símbolo 3, pois, do contrário, esse símbolo não terá nenhum sentido para ele, não conseguindo estabelecer a relação X < > Y.

Contudo entendemos que um objeto é inacessível à percepção humana, necessitando de um signo para torná-lo presente. Dessa forma, como salienta Vertuan (2007, p. 19), *"Uma representação é de fato uma 'representação' se exprimir idéias e se provocar na mente daqueles que a percebem uma atitude interpretativa'*.

Godino (2003) considera que uma representação é um signo que se pode colocar no lugar de algo distinto dele mesmo. Dessa forma, a representação pode ser considerada como uma ação de simbolizar, codificar, dar uma imagem ou representar algo.

A complexidade dos fatores relacionados às formas de representação no processo de ensino e aprendizagem tem sido o foco de diversas pesquisas em Educação Matemática. Font, Godino e D'Amore (2005), afirmam que a principal razão seria o fato de que falar de representação equivale a falar de conhecimento, significado, compreensão etc. Esses autores afirmam que

> [...] estas noções constituem o núcleo central, não somente de nossa disciplina, mas também da epistemologia, psicologia e demais ciências e tecnologias que se ocupam da cognição humana, sua natureza e desenvolvimento. Esta diversidade de disciplinas interessadas pela representação é a razão da diversidade de enfoques e maneiras de concebê-la[16] (GODINO; D'AMORE, 2005p. 1 [tradução livre]).

Toda comunicação em Matemática é feita basicamente por meio de representações. Para ensinar conceitos, propriedades, estruturas e relações advindas dos objetos matemáticos, é preciso levar em consideração as diferentes formas de representação desses objetos. O que se estuda e se ensina são as representações dos objetos matemáticos e não os próprios objetos matemáticos.

Damm (1999, p. 137) considera que a Matemática

> [...] trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão o uso de uma representação. Neste caso as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. Por exemplo, a função pode ser representada através da expressão algébrica, tabelas e/ou gráficos que são diferentes registros de representação.

---

[16] Tradução de "[...] estas nociones constituye el núcleo central, no sólo de nuestra disciplina, sino también de la epistemología, psocología y demás ciencias y tecnologías que se ocupan de la cognición humana, su naturaleza, origen y desarrollo. Esta diversidad de disciplinas interesadas por la representación es la razón de la diversidad de enfoques y maneras de concebirla" (FONt, GODINO; D'AMORE, 2005, p. 1).

Uma característica que se destaca em atividades matemáticas é o uso de diversos sistemas de representação além da língua natural. Na Matemática existem variados sistemas de escrita para os números, escritas algébricas para representar operações e relações, figuras geométricas, gráficos cartesianos, diagramas, esquemas etc.

Duval (2004) considera que a noção de representação pode ser apresentada em três ocasiões distintas — mentais, internas (ou computacionais) e semióticas, cada uma com suas especificidades e características diferentes do fenômeno designado. Essas representações foram estabelecidas pela intersecção entre duas oposições clássicas de representações: a oposição consciente/não-consciente e a oposição interna/externa.

A oposição consciente/não-consciente relaciona-se à representação que aparece para o sujeito e ele observa e à representação que aparece para o sujeito e ele não observa. As representações conscientes apresentam caráter intencional e cumprem uma função de objetivação, de significação, ocorrendo apreensão perceptiva ou conceitual de um objeto. Segundo Duval (2004, p. 33 [tradução livre]).), *"A significação é a condição necessária da objetivação para o sujeito, ou seja, da possibilidade de tomar consciência"*[17] .

A oposição externa/interna relaciona-se com o que de uma pessoa ou de um sistema é diretamente visível e observável e o que, ao contrário, não é.

As representações externas são aquelas produzidas por um sujeito ou por um sistema. Godino (2003) afirma que os sistemas de representação externa têm como objetivo apresentar notações e formas, como é o caso dos sistemas de numeração, as escritas de expressões algébricas, derivadas, integrais, linguagem de programação. Além disso, outros sistemas têm como objetivo mostrar relações de forma visual ou gráfica, como as retas numéricas, gráficos baseados em sistemas cartesianos ou polares, diagramas geométricos. Dessa forma, as representações externas somente evidenciam-se por meio de um sistema semiótico. Elas são, por natureza, representações semióticas e cumprem funções de comunicação, objetivação e tratamento.

As representações internas são aquelas que pertencem ao sujeito e não são comunicadas por meio de representações externas. Entre as

[17] Tradução de "La significación es la condición necesaria de la objetivación para el sujeto, es decir, de la possibilidad de tomar consciencia" (DUVAL, 2004, p. 33).

representações internas, Goldin (1998, apud GODINO, 2003) destaca a língua natural do estudante, sua imaginação visual e representação espacial, suas estratégias e heurísticas de resolução de problemas e, também, seus afetos em relação à Matemática.

As representações mentais cumprem a função de objetivação, ou seja, a relação do signo com o objeto. Elas consistem, segundo Duval (2004), ao conjunto de imagens e concepções que uma pessoa pode ter sobre um objeto, sobre uma situação ou sobre aquilo que está associado ao objeto e à situação. São representações internas e conscientes. Essas representações são ferramentas teóricas das quais o estudante pode lançar mão quando constrói suas representações externas. As representações mentais são as concepções prévias que o sujeito tem sobre algo que está sendo abordado, elas podem alterar-se conforme o sujeito constitui seus conhecimentos[18].

As representações internas ou computacionais cumprem a função de codificação da informação. Segundo Duval (2004), essas representações privilegiam o tratamento de um sistema de informações, que tem como característica a execução automatizada de uma determinada tarefa, com o objetivo de produzir uma resposta adaptada à situação. São representações internas e não-conscientes da pessoa. Para Damm (1999, p. 139), nas representações internas ou computacionais, "o *sujeito acaba executando certas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para a sua realização (por exemplo, os algoritmos computacionais, ou mesmo os algoritmos das operações)"*. Dessa forma, o algoritmo da multiplicação é um exemplo desse tipo de representação. Ao realizar o algoritmo, a pessoa faz representações mecânicas sem pensar em todos os passos executáveis para a sua resolução[19].

As representações semióticas, por sua vez, cumprem as funções de objetivação e de expressão[20], realizando de alguma forma uma função de

[18] Os primeiros estudos referentes à representação mental foram apresentados por Piaget nos anos 1924 a 1926 na obra A representação do mundo na infância, relativa às crenças e às explicações das crianças sobre os fenômenos naturais e físicos.

[19] Os primeiros estudos referentes às representações internas ou computacionais foram realizados a partir de 1955-1960, junto às teorias que privilegiam o tratamento.

[20] A função de expressão pode ser relacionada à significação, que é a relação do signo consigo mesmo.

tratamento, no entanto, esse tratamento é intencional[21]. Elas são externas e conscientes da pessoa.

Segundo Duval (2004), as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. A escrita em língua natural, a escrita algébrica e os gráficos cartesianos são exemplos de representações semióticas. Essas representações podem ser convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podem tomar significações diferentes para a pessoa que as utiliza[22].

Para esquematizar a intersecção entre as duas oposições de representações (consciente/não-consciente e externa/interna) e as representações mentais, computacionais e semióticas, bem como suas funções, Duval (2004) propôs relações conforme apresentado no Quadro 1.2.

Quadro 1.2 – Tipos e funções de representações (DUVAL, 2004, p. 35).

	REPRESENTAÇÃO INTERNA	REPRESENTAÇÃO EXTERNA
REPRESENTAÇÃO CONSCIENTE	**Mental** Função de objetivação	**Semiótica** Função de objetivação Função de expressão Função de tratamento intencional
REPRESENTAÇÃO NÃO-CONSCIENTE	**Computacional** Função de tratamento automático ou quase instantâneo[23]	

Damm (1999, p.141), afirma que as *"[...] representações semióticas, as representações computacionais e as representações mentais não são espécies diferentes de representação, mas sim representações que realizam funções diferentes"*.

[21] Segundo Duval (2004), uma das características do tratamento intencional é que para ser efetuado precisa ao mesmo tempo do controle consciente e que se dirige exclusivamente aos dados previamente observados em uma visão disfarçada do objeto. A capacidade de tratamento intencional é, às vezes, restrita e não-extensiva em todos os sujeitos quaisquer que sejam seus níveis de conhecimento.

[22] Os primeiros trabalhos referentes às representações semióticas apareceram por volta de 1985 como marco dos estudos sobre a constituição dos conhecimentos matemáticos e sobre os problemas referentes à aprendizagem.

[23] Duval (2004) apresenta uma designação diferenciada entre tratamento quase instantâneo e tratamento intencional. No entanto, não entraremos em detalhes sobre essa diferenciação neste trabalho.

Guzmán (1998), referindo-se a Duval, afirma que a produção das representações semióticas deve tomar em correspondência três aspectos:

1. o aspecto estrutura, relativo à determinação da significação dos signos e as possibilidades de representações que oferecem;
2. o aspecto fenomenológico, relativo às exigência psicológica de produção ou de apreensão dos signos;
3. o aspecto funcional, relativo ao tipo de atividade que os signos permitem realizar.

Para Duval (2003), o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas.

As representações semióticas apresentam dois aspectos, sua forma (ou representante) e seu conteúdo (ou representado). A forma é alterada conforme o sistema semiótico utilizado, pois existem diferentes registros de representação para o mesmo objeto matemático. Esses diferentes registros de representação utilizam-se de um tipo diferente de tratamento.

De acordo com Duval (2004), a utilização de diferentes representações semióticas, ou seja, a pluralidade de sistemas semióticos permite uma diversificação das representações de um mesmo objeto. Esse fato contribui para uma reorganização do pensamento da pessoa e influencia em sua atividade cognitiva. Nesse sentido, as representações semióticas são essenciais para a compreensão dos conceitos matemáticos. De acordo com esse contexto, Duval apresenta e faz distinção entre dois termos "semiosis" e "noesis".

Para Duval (2004, p. 14), *semiosis* compreende a "[...] *apreensão ou a produção de uma representação semiótica"*[24] [tradução livre]) e *noesis* compreende os "[...] *atos cognitivos, como a apreensão conceituai de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência* [...]"[25] [tradução livre]). Para o autor, "não *existe noesis sem semiosis; é a semiosis que determina as condições de possibilidade e de exercício da noesis"*[26] (DUVAL, 2004, p. 16 [tradução livre]).

[24] Tradução de "[...] la aprehensión o la produción de una representación semiótica" (DUVAL, 2004, p. 14).
[25] Tradução de "[...] los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia [...]" (DUVAL, 2004, p. 14).
[26] Tradução de "[...] no hay noesis sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis" (DUVAL, 2004, p. 16).

Assim, para que ocorra a conceitualização dos objetos matemáticos há necessidade de representações. Como uma representação é parcial ao seu objeto, para a compreensão em Matemática, é importante que o sujeito que aprende faça a coordenação de diferentes representações associadas a um mesmo objeto matemático. Para isso, como salienta Damm (1999, p.143), *"para que ocorra a apreensão de um objeto matemático é necessário que a noesis (conceitualização) ocorra através de significativas semiosis (representações)"* .

No entanto, como afirma Otte (2001), apesar de um objeto matemático não existir independentemente da totalidade de suas possíveis representações, esse objeto não deve ser confundido com nenhuma representação particular. Duval (2004, p. 14 [tradução livre]).) também trabalha com essa consideração, afirmando que "[...] *não há compreensão em Matemática se não se distingue um objeto de sua representação"*[27] .

Font, Godino & D'Amore (2005, p. 16 [tradução livre]) consideram que:

> [...] 'compreender' ou 'saber' um objeto matemático consiste em ser capaz de reconhecer suas propriedades e representações características, relacioná-lo com os restantes objetos matemáticos e usar este objeto em toda a variedade de situações problemáticas prototípicas que lhe são propostas na aula. Deste ponto de vista a compreensão alcançada por um sujeito em um momento dado dificilmente será total ou nula, mas será parcial e progressiva[28] .

Para que haja compreensão do objeto matemático, não se pode confundir o objeto com sua representação, pois um mesmo objeto matemático pode ser apresentado por meio de diferentes representações. Por exemplo, o objeto matemático 'função exponencial' pode ser representado por meio de representação algébrica, gráfica e tabular.

Além disso, de acordo com Guzmán (1998), o objeto representado não deve ser confundido com o conteúdo da representação, pois o conteúdo da

---

[27] Tradução de "[...] no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación" (DUVAL, 2004, p. 14).

[28] Tradução de "[...] 'compreender' o 'saber' un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas que le son propuestas en el aula. Desde este punto de vista la comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente será total o nula, sino que será parcial y progresiva" (FONT, GODINO & D'AMORE, 2005, p. 16).

representação depende em parte da forma, na medida em que o "conteúdo" é o que o registro utilizado permite apresentar explicitamente do objeto representado. Por exemplo, a equação de uma parábola e o gráfico da parábola referem-se ao mesmo objeto, mas não têm exatamente o mesmo conteúdo posto que não dão conta das mesmas propriedades do objeto.

Nesta pesquisa o nosso intuito é trabalhar com as representações semióticas, enfocando a idéia de registros de representação semiótica. Isso ocorre, pois entendemos que a aprendizagem em Matemática está vinculada com a compreensão e a articulação de diferentes registros. No entanto, é fundamental ressaltarmos que o que importa não são os diferentes registros de representação que foram utilizados, mas a maneira como esses diferentes registros foram utilizados no desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática que analisamos.

1.6 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizados em Matemática, Duval (2003), utiliza a expressão 'registros de representação semiótica'. Entre os exemplos de registros de representação semiótica temos: escrita em língua natural, algébrica, gráfica e tabular. Cada uma dessas representações faz parte de um registro de representação ou sistema de representação diferente.

Existe uma variedade de registros semióticos utilizados em atividades de Matemática. Neste contexto, Godino (2003, p. 31 [tradução livre]) afirma que a '[...] *complexidade do problema semântico da linguagem matemática se incrementa pela variedade de registros semióticos utilizados na atividade matemática* [...]"[29] .

Além disso, esse autor salienta que "[...] *não nos interessa só analisar o 'significado' dos objetos lingüísticos matemáticos, mas também os*

[29] Tradução de "[...] complejidad del problema semántico del lenguaje matemático se incrementa por la variedad de registros semióticos utilizados en la actividad matemática [...]" (GODINO, 2003, p. 31).

diversos 'objetos matemáticos' (situações-problemas, técnicas, conceitos, proposições, argumentações, teorias, etc.)"[30] (GODINO, 2003p. 31 [tradução livre]).

Duval (2003) afirma que os registros de representação podem apresentar naturezas distintas. Segundo o autor, existem registros multifuncionais e registros monofuncionais, ambos podem apresentar representação discursiva (linguagem natural e linguagem formal) e representação não-discursiva (figuras, gráficos, esquemas). Esses tipos de representações (discursiva e não-discursiva) não correspondem somente a uma função de comunicação. Elas também podem estar relacionadas a uma função de objetivação ou a uma função de tratamento.

Os registros multifuncionais apresentam tratamentos não algoritmizáveis, abordados como uma representação discursiva ou como uma representação não-discursiva e os registros monofuncionais apresentam tratamentos algoritmizáveis e abordados com representações discursivas ou não-discursivas.

Segundo Brandt (2005), a característica que denomina os registros multifuncionais é que são utilizados em todos os domínios culturais e sociais, enquanto os registros monofuncionais são derivados e especializados em algum tipo de tratamento e apresentam um domínio considerado formal.

Neste sentido, apresentamos o Quadro 1.3 proposto por Duval (2003) que apresenta as relações entre os registros monofuncionais e multifuncionais e as representações discursivas e não-discursivas.

[30] Tradução de "[...] no sólo nos interesa analizar el 'significado' de los objetos lingüísticos matemáticos, sino también los diversos 'objetos matemáticos' (situaciones-problemas, técnicas, conceptos, proposiciones, argumentaciones, teorias, etc.)" (GODINO, 2003, p. 31).

Quadro 1.3 – Classificação dos diferentes registros segundo a natureza (DUVAL, 2003, p. 14).

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NAO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação

Duval (2003, p. 14), afirma que "[...] a *originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação"* . No entanto, essa mudança é menos complexa ou mais complexa em se tratando de registros de mesma natureza (ambos multifuncionais ou monofuncionais) ou de naturezas distintas (um multifuncional e outro monofuncional), respectivamente.

Para que um sistema semiótico seja considerado um registro de representação é necessário que atenda a três atividades cognitivas fundamentais relacionadas à *semiósis.* Essas atividades são: a formação de uma representação identificável, o tratamento de uma representação e a conversão de uma representação.

1.6.1 Formação de uma Representação Identificável

Uma representação é considerada identificável quando é possível reconhecer nela o objeto que representa. Em Matemática, para que uma representação seja identificável é necessário, a partir de um registro de representação, saber qual é o objeto matemático que está sendo representado.

Damm (1999, p. 144-145) salienta que

> [...] para ocorrer uma representação identificável, é necessário uma seleção de características e de dados do conteúdo a ser representado, e isso depende de regras, que asseguram o reconhecimento das representações e a possibilidade de sua utilização para tratamento.

Essas regras correspondem às regras de conformidade que definem um sistema de representação. Elas já estão estabelecidas na sociedade, não cabendo ao sujeito criá-las, mas utilizá-las para reconhecer as representações. Segundo Duval (2004), as regras de conformidade são essencialmente:

- a determinação de unidades elementares: símbolos, vocabulário...
- as combinações admissíveis de unidades elementares para formar unidades de nível superior: regras de formação de um sistema formal, gramática da língua...
- as condições para que uma representação de ordem superior seja uma produção pertinente e completa: regras canónicas próprias a um gênero literário ou a um tipo de produção em um registro.

As regras permitem o reconhecimento das representações como representações em um registro determinado. Por exemplo, olhar uma representação de algo em um sistema semiótico e identificar a que se refere: é uma fórmula de física, é uma função do segundo grau, é uma figura de geometria, é um triângulo retângulo. No entanto, o conhecimento das regras de conformidade não implica na compreensão ou exploração das representações dadas.

1.6.2 Tratamento

O tratamento da representação é a transformação de uma representação (inicial) em outra representação (terminal) dentro de um mesmo registro. Dessa forma, o tratamento é uma transformação interna a um registro de representação. Segundo

Duval (2003, p. 16)

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.

As placas de trânsito, como por exemplo, a placa de "proibido buzinar" apresentada na Figura 1.3 e que geralmente é instalada próxima a um hospital, obedece às regras de conformidade, pois é estabelecido socialmente que o símbolo de uma buzina sobreposto por uma circunferência com um traço na diagonal indica que naquele local e próximo a ele é proibido buzinar.

Figura 1.3 – Placa de proibido buzinar.

No entanto, a placa de "proibido buzinar" não é considerada um registro de representação semiótica, pois não permite o tratamento. Neste sentido, Silva (2003, p. 110) afirma que

> Nem todo sistema de signos constitui um registro. Por exemplo, as placas de trânsito das estradas são significantes (triângulo —perigo, vermelho —proibição...) e não podem se caracterizar como um registro no sentido de Duval, uma vez que não há a possibilidade de transformar um elemento em outro, diferentemente do que ocorre com todo elemento de um registro, que pode se transformar em outra representação do mesmo registro (tratamento) ou em uma representação de outro registro (conversão).

Em Matemática, muitas vezes, o tratamento é a transformação que mais se evidencia nas atividades, pois o tratamento corresponde a procedimentos de justificação. Segundo Duval (2003), em atividades pedagógicas, professores tentam utilizar o "melhor" registro de representação para que os alunos possam "compreender" o que está sendo estudado, pois assim conseguem justificar uma idéia referente ao conteúdo.

Vertuan (2007, p. 23) exemplifica o tratamento geralmente realizado por professores ao abordarem o conceito de derivada.

> [...] pode ser que o professor utilize somente as regras de derivação e de forma estritamente algébrica. Na medida em que realizam os cálculos (tratamentos matemáticos), os alunos acabam 'compreendendo' como devem fazer para calcular derivadas. Mas realizar tratamentos em um só registro não significa que o aluno compreendeu o conceito de derivada. Significa sim, que o aluno sabe manipular (calcular) uma das representações de derivada (neste tipo de registro). Este modo de trabalhar o conteúdo derivada, pode ocasionar a confusão, por parte dos alunos, entre o conceito derivada e a representação que o tornou acessível.

No entanto, segundo Damm (1999), existem regras de tratamento que são próprias do registro que se está utilizando. Por exemplo, ao se realizar o algoritmo da multiplicação de números naturais, o tratamento exige que se compreendam as regras do sistema posicional e da base dez. Se não existir a compreensão destas regras, a representação do algoritmo não tem sentido e não existe tratamento significativo.

Segundo Brandt (2005), o tratamento efetuado para certo conceito depende da forma utilizada para representá-lo e não do conteúdo do objeto matemático ao qual esse conceito está vinculado.

> No que diz respeito à forma, as representações semióticas são importantes por evidenciar: resposta ao conteúdo representado, possibilidade de uma diversidade das formas de representação para um mesmo conteúdo representado ou possibilidade por uma mudança das formas de representação por razões de economia de tratamento (BRANDT, 2005, p. 70).

Em Silva & Almeida (2006), encontramos uma atividade de Modelagem Matemática na qual existem tratamentos diferentes para o mesmo objeto matemático. Essa atividade corresponde ao decaimento radioativo do césio-137 em um acidente ocorrido em Goiânia. Nesse acidente, o ambiente foi contaminado com 19,26 g de césio-137. Para representar a quantidade de césio-137 em diferentes anos foram feitos dois tratamentos, conforme mostra Quadro 1.4.

Quadro 1.4 – Tratamentos de representações semióticas da atividade de MM sobre decaimento radioativo do césio-137 (SILVA; ALMEIDA, 2006).

1º	$Q_0 = 19{,}26$	$Q_1 = \frac{19{,}26}{2} = 9{,}63$	$Q_2 = \frac{9{,}63}{2} = 4{,}815$	$Q_3 = \frac{4{,}815}{2} = 2{,}4075$
2º	$Q_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 .19{,}26$	$Q_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 .19{,}26$	$Q_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 .19{,}26$	$Q_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 .19{,}26$

em que Q_0 corresponde à quantidade de césio-137 no ano de 1987 (ano do acidente); Q_1 é a quantidade de césio-137 no ano de 2017 (30 anos após o acidente, 30 anos corresponde à meia-vida[31] desse elemento radioativo); Q_2 é a quantidade de césio-137 no ano 2047; Q_3 é a quantidade de césio-137 no ano 2077.

Neste caso, há duas representações diferentes que envolvem tratamentos diferentes para o mesmo objeto matemático 'função exponencial'. É evidente que esses dois registros possuem nível de complexidade distinto para quem os utiliza. Entretanto, cabe ao professor relacionar diferentes registros de um mesmo objeto matemático, entendendo que eles apresentam tratamentos diferentes que precisam ser observados.

Um único registro de representação pode não contemplar todas as características dos objetos matemáticos em estudo, promovendo uma compreensão parcial do conceito matemático. A representação algébrica, por exemplo, não deixa transparecer bem como se comporta o crescimento e o decrescimento da função. No caso do objeto matemático 'função exponencial' apresentado no exemplo do decaimento radioativo do césio-137, pode não ficar evidente, observando somente a representação algébrica, que a quantidade de césio-137 no decorrer dos anos diminui. Assim, é fundamental uma abordagem que estabeleça relações entre os diferentes registros. Nesse sentido, Duval sugere a atividade de conversão entre os registros de representação semiótica.

[31] Meia-vida é o tempo necessário para que a atividade radioativa de um elemento químico seja reduzida à metade da atividade inicial.

1.6.3 Conversão

A conversão é a transformação da representação de um objeto dada em um sistema de registros em uma outra representação deste mesmo objeto em outro sistema de registros. Na conversão conserva-se a totalidade ou parte do objeto em questão.

A conversão não pode ser confundida com o tratamento, pois o tratamento ocorre no interior do sistema de registros e a conversão ocorre entre sistemas de registros diferentes. Dessa forma, a conversão é uma transformação externa ao registro da representação de saída. Segundo Duval (2003, p. 16),

> As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica.

É importante transitar entre os diferentes tipos de representação, fazendo a conversão de um registro para outro. Para Duval (2003, p.16), "[...] *do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão"* .

Segundo Almouloud (2007), para compreender em que consiste uma conversão, dois aspectos devem ser observados:

1. Toda conversão tem um sentido a ser considerado. Efetuar a conversão em um sentido não significa que seja possível efetuá-la no sentido inverso. Por essa razão, é necessário sempre indicar qual o registro de partida e o de chegada; caso contrário, haverá risco de abuso de linguagem ou desvio conceitual.
2. Não se deve confundir o conteúdo da representação com o objeto representado, embora o registro permita explicitar ou revelar propriedades do objeto. Converter uma representação é, então, mudar o conteúdo e não somente a forma.

Conforme mencionado no aspecto 2 destacado por Almouloud (2007), ao realizar a atividade de conversão é preciso que se perceba a diferença entre o conteúdo da representação e o que esta representa, ou seja, o representante e o representado. Dessa forma, na conversão, é preciso que o sujeito diferencie a representação do conteúdo matemático que está sendo representado. Duval (2004, p.46) afirma que "Sem *a percepção desta diferença, a atividade de conversão resulta impossível ou incompreensível'* .

Na dedução do modelo da atividade de Modelagem Matemática que descreve o decaimento radioativo do césio-137, apresentada em Silva & Almeida (2006), por exemplo, podem ser evidenciadas 2 conversões (Figura 1.4)

Figura 1.4 – Conversões entre registros de representação da atividade de MM sobre decaimento radioativo do césio-137 (SILVA; ALMEIDA, 2006).

Tempo (ano)	**Quantidade de césio-137** (gramas)
1987	19,26
2017	9,63
2047	4,815
2077	2,4075

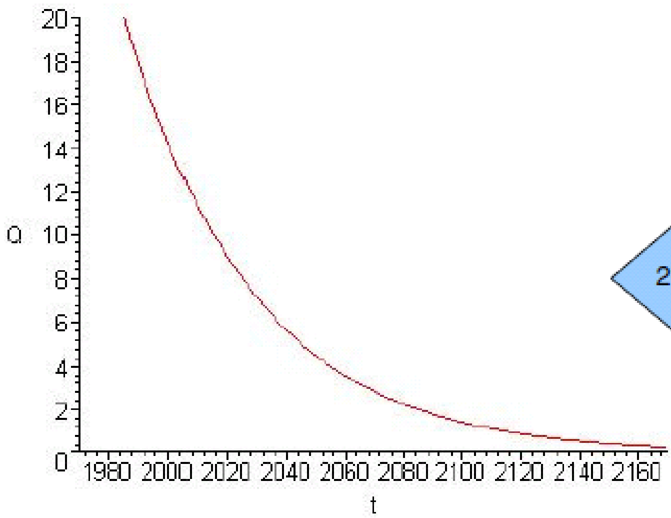
1ª conversão

$$Q_n = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Tratamento

$$Q(t) = 19{,}26 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-1987}{30}}$$

2ª conversão



Nessas conversões houve transformações externas do registro de representação tabular para o registro algébrico e, em seguida, do registro algébrico para o registro gráfico. Nessa atividade, além das transformações externas às representações existem transformações internas (tratamento) no registro algébrico.

Para Duval (2003), a atividade de conversão não pode ser considerada como uma simples atividade de codificação. Na conversão é preciso que se tenha uma apreensão global e qualitativa que a codificação não possibilita.

Na regra de codificação é permitido somente uma leitura pontual das representações. Por exemplo, passar de uma equação para sua representação gráfica na qual o sujeito somente aplica a regra segundo a qual um ponto está associado a um par ordenado sobre um plano quadriculado por dois eixos graduados é uma atividade de codificação. Para que haja uma apreensão global da conversão da representação algébrica para a representação gráfica, é preciso que o sujeito saiba diferenciar, por exemplo, a representação algébrica que corresponde a uma reta que passa pela origem e a de uma reta que não passa pela origem, ou ainda, saiba diferenciar a representação algébrica de uma reta com coeficiente positivo de uma reta com coeficiente negativo. Assim, o sujeito consegue levar em consideração as variáveis visuais do gráfico (inclinação, intersecção com os eixos) e os valores escalares das equações (coeficientes negativos ou positivos, concavidade da parábola).

Além da atividade de codificação, Damm (1999) destaca que uma atividade de conversão não deve ser confundida com uma atividade de interpretação. Para Damm (1999, p. 147.), a *"interpretação requer uma mudança de quadro teórico, ou modificação de contexto, não implicando mudança de registro"* . Por exemplo, ao observar um gráfico da função linear $y = a.x + b$ o sujeito pode mudar do contexto matemático para o contexto físico, ou seja, ele pode relacionar esse gráfico à representação gráfica da velocidade do movimento uniformemente variado, na qual $V = V_o + a.t$. Nesse caso, houve mudança de contexto sem necessariamente mudar de registro de representação.

Dessa forma, a atividade de conversão não é trivial nem cognitivamente neutra. Ela precisa ser privilegiada pelo professor na sala de aula e deve ser distinguida do tratamento. No entanto, os estudantes devem ter em mente que os diferentes registros envolvidos na atividade de conversão se referem simultaneamente ao mesmo objeto matemático.

A atividade de conversão pode ser considerada mais complexa ou menos complexa de acordo com o fenômeno de congruência e não-congruência.

1.6.3.1 O fenômeno de congruência nas conversões

A atividade de conversão coloca em evidência o fenômeno de congruência e não-congruência. É a congruência ou a não-congruência da conversão entre dois registros de representação que pode tornar esta ação mais complexa ou menos complexa.

Duval (2004) estabelece três condições para caracterizar uma conversão congruente:

1. Correspondência semântica entre as unidades significantes das representações, ou seja, correspondência uma a uma. Neste caso, para cada elemento simples no registro de saída, existe um elemento simples correspondente no registro de chegada.
2. Unicidade semântica terminal: cada unidade significante no registro de saída tem uma única unidade significante no registro de chegada.
3. Conservação da ordem das unidades significantes, ou seja, mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações.

Quando uma destas condições não está satisfeita, a conversão é dita não-congruente.

Para relacionar as condições de congruência da conversão de cada uma das representações, ou seja, fazer a análise da congruência da conversão entre as representações, Duval (2004) sugere:

- segmentar as representações em suas respectivas unidades significantes, de maneira que possam ser postas em correspondência;
- verificar se as unidades significantes são, em cada um dos dois registros (o de saída e o de chegada), unidades significantes simples ou combinações de unidades simples.

Duval (2003) apresenta três exemplos de conversões da língua natural para a escrita algébrica (Quadro 1.5) em que se pode observar a congruência e a não-congruência, segundo as condições por ele estabelecidas.

Quadro 1.5 – Exemplos de variação de congruência e não-congruência (DUVAL, 2003, p. 19).

Exemplos		Correspondência semântica das unidades de significado	Unicidade semântica terminal	Conservação da ordem das unidades	Fenômeno de congruência nas conversões
A	O conjunto dos pontos cuja ordenada *é superior* à abscissa $y > x$	Sim	Sim	Sim	Congruente
B	O conjunto dos pontos que tem uma abscissa *positiva* $x > 0$	Não “Maior que zero” é uma perífrase (um só significado para várias palavras)	Sim	Sim	Não-congruente
C	O conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada têm o *mesmo sinal* $x.y > 0$ O produto da abscissa e da ordenada é maior que zero	Não	Não	Não Globalização descritiva (dois casos)	Não-congruente

Para a análise dos registros, do exemplo A do Quadro 1.5, é possível segmentar as representações em suas respectivas unidades significantes e estas podem ser postas em correspondência, conforme apresentado no Quadro 1.6.

Quadro 1.6 – Segmentação das representações em unidades significantes.

Unidades significantes		
conjunto de pontos da ordenada	superior	pontos da abscissa
x	$>$	y

Neste exemplo, para efetuar a conversão, é suficiente uma correspondência 'termo a termo' entre as unidades significantes respectivas, existe uma única maneira de se representar o registro e há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações. Além disso, a conversão inversa permite voltar a encontrar a expressão inicial do registro de saída. Nesse caso, temos uma conversão congruente.

No exemplo B do Quadro 1.5, na escrita algébrica, não há uma unidade significante que corresponde a "positivo". Para suprir isso, é necessário recorrer à paráfrase ">0" que é a combinação de duas unidades significantes (maior do que, 0). Assim, temos uma conversão não-congruente que não satisfaz a condição de congruência 1.

No exemplo C, por sua vez, temos que:

- não há correspondência termo a termo entre as unidades significantes das duas expressões; é necessária uma reorganização da expressão dada no registro de saída para obter a expressão correspondente no registro de chegada; e a paráfrase ">0" expressa tanto "do mesmo sinal" como "positivo";
- não há unicidade semântica terminal, pois uma unidade significativa do registro de saída "o conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada" apresenta três unidades significativas " x.*y*" no registro de chegada.
- não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações, a conversão inversa não permite encontrar a expressão inicial, nas duas representações: "o conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada" e "o produto da abscissa e da ordenada é maior que zero".

Assim, temos uma conversão não-congruente que não satisfaz às condições de congruência 1, 2 e 3.

Outros autores, fundamentados em Duval, também abordam o fenômeno de congruência nas conversões.

Flores & Moretti (2008, p. 27), afirmam que "Se *há congruência entre duas representações, a passagem de uma à outra será mais evidente. Se for o contrário, o processo será extremamente difícil e delicado"*. Nesse caso, a análise da atividade de conversão envolve a comparação da representação no registro de saída com a representação no registro de chegada, sem necessariamente se remeter às condições de congruência estabelecidas por Duval.

Quando a passagem de uma representação a outra se faz de maneira espontânea ela é dita congruente, ou seja, a conversão é quase imediata. Quando isso não ocorre, ou seja, quando a passagem de uma representação para outra não é espontânea, a representação é dita não-congruente.

Silva & Barolli (2006), consideram que existe congruência na conversão quando a representação terminal (no registro de chegada) deixa transparecer a representação de saída (enunciado) e assemelha-se a uma situação de simples codificação. As autoras assumem que se a representação terminal não transparece absolutamente a representação de saída, então há uma não-congruência na conversão.

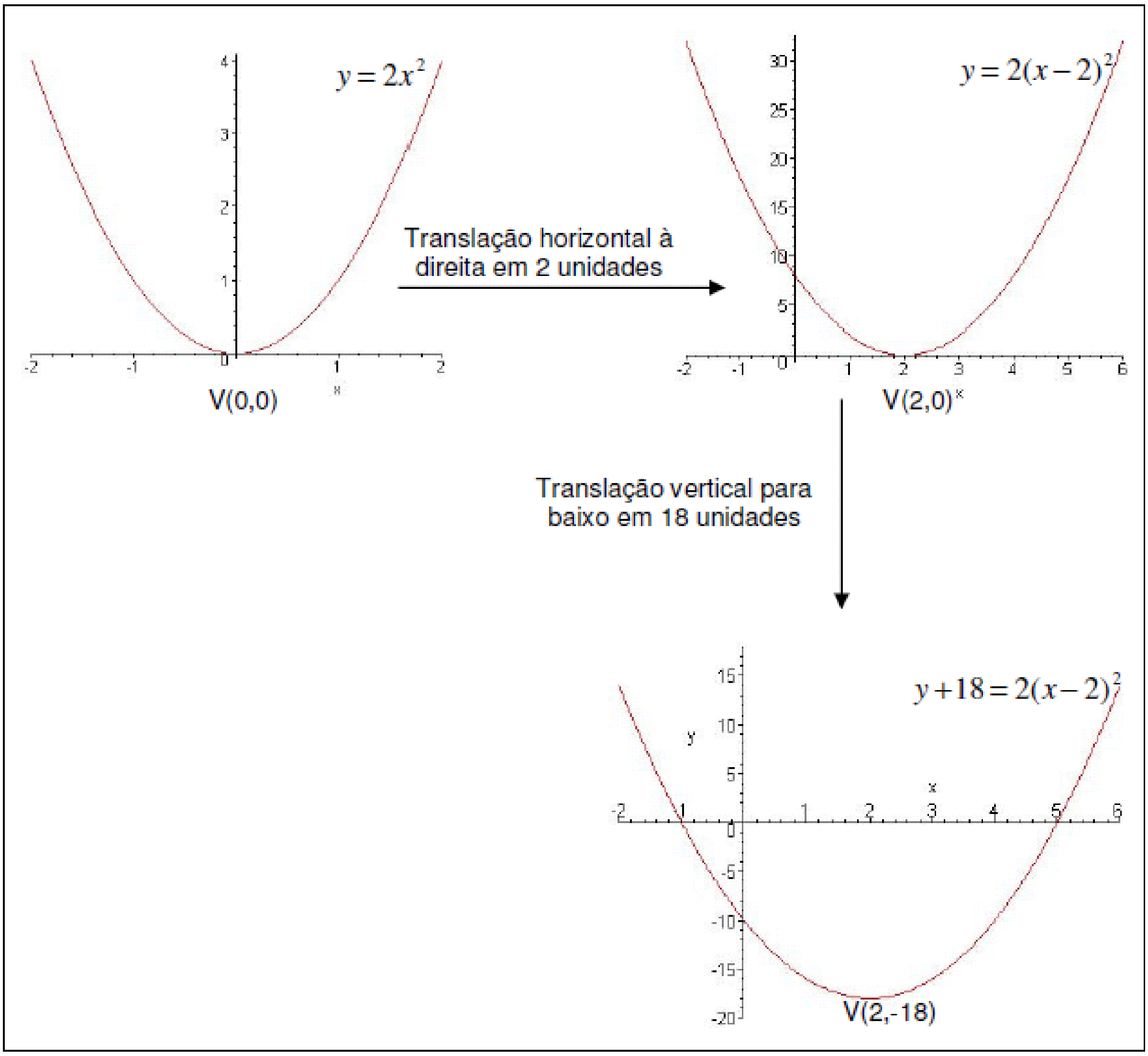
Em nossa pesquisa, para analisar as conversões não-congruentes, levamos em consideração seu nível de não-congruência. Para isso, temos que nos remeter às condições de congruência apresentadas por Duval (2003). E, para analisar as conversões congruentes, levamos em consideração seu nível de congruência. Para isso, além de nos remetermos às condições de congruência, os conhecimentos matemáticos do sujeito e a comparação do registro de chegada com o registro de saída são levados em consideração. No Capítulo 3 — *Aspectos metodológicos da pesquisa* — estabelecemos os níveis de congruência e os níveis de não-congruência que adotamos para realizar nosso trabalho.

É possível modificar o nível de não-congruência de forma que a atividade de conversão fique menos complexa. Para isso, segundo Brandt (2005), podem-se tomar dois registros de representação que estão associados entre si e submeter um desses registros a variações em suas unidades cognitivas, provocando variações no outro registro. No entanto, nem sempre as variações num registro provocam variações no registro associado e, dessa forma, essas variações são neutras e não cognitivas. Essas variações neutras também podem modificar o nível de não-congruência das conversões entre registros de representação.

Neste sentido, Moretti (2003, p. 156), abordando a não-congruência na conversão entre equação e curva, afirma que os problemas de *"não-congruência podem ficar bastante reduzidos"* quando a conversão se faz utilizando transformação por translação. Por exemplo, para traçar a parábola resultante da expressão $y = 2x^2 - 8x - 10$, podem-se fazer deslocamentos a partir de $y = 2x^2$, obtendo-se que as equações $y = 2x^2 - 8x - 10$ e $y + 18 = 2(x-2)^2$ representam a mesma parábola. Para traçar a parábola que representa $y + 18 = 2(x-2)^2$ é preciso fazer dois movimentos de translação da parábola de equação $y = 2x^2$: horizontal à direita em 2 unidades e vertical para baixo em 18 unidades. O foco que na parábola $y = 2x^2$ tem coordenadas (0,0), passa para (2,0) e, em seguida, para (2,-18). A

Figura 1.5 apresenta o esboço da parábola de $y = 2x^2 - 8x - 10$ por meio de duas translações.

Figura 1.5 – Esboço de $y = 2x^2 - 8x - 10 \Leftrightarrow y + 18 = 2(x-2)^2$ por meio de duas translações da parábola de equação $y = 2x^2$ (MORETTI, 2003, p. 154).



Flores & Moretti (2008, p. 30) abordam que para recuperar as ausências de congruência, é preciso *"analisar os elementos semióticos em termos de unidades significativas bem como as eventuais falhas de correspondências entre estas unidades".*

Duval (2004) faz uma comparação entre o fenômeno de congruência e não-congruência nas conversões e os sucessos dos alunos na realização de uma atividade matemática. Nessa comparação, o autor destacou que fica mais evidente a dificuldade da conversão de um registro de representação para outro quando a conversão entre o registro de saída e o registro de chegada é não-congruente. Para esse autor, esse argumento é evidenciado em algumas situações:

- quando a conversão entre os registros é congruente, os problemas são rapidamente resolvidos pelos alunos;
- quando a conversão entre os registros é não-congruente, a taxa de êxito dos alunos é baixa e está relacionada com os balanços respectivos de cada uma das três condições de congruência.

Além disso, as dificuldades que se têm pela não-congruência da conversão podem se agravar com o desconhecimento dos registros de representação.

Flores & Moretti (2008, p. 36) afirmam que *"[...] a possibilidade da congruência entre os registros semióticos contribui tanto para uma aprendizagem com menos custo cognitivo, assim como para a criação de novos conhecimentos"*.

Ao desenvolver atividades de Matemática em sala de aula, muitas vezes, somente um sentido da conversão é privilegiado, por se acreditar que ao trabalhar apenas um sentido, automaticamente estaria trabalhando a conversão no outro sentido. E isso é um equívoco, visto que a conversão pode ser congruente em um sentido e não-congruente no sentido inverso. Em muitos casos, é impossível, dependendo dos conhecimentos matemáticos que se tem, realizar a conversão no sentido inverso. Nessa pesquisa, seguiremos o sentido de conversão apresentado em cada atividade de Modelagem Matemática, para analisarmos os conhecimentos desprendidos para a obtenção do modelo matemático.

Segundo Duval (2004), as diferentes atividades cognitivas que estão relacionadas aos registros de representação podem ser reagrupadas em tarefas de produção e tarefas de compreensão.

Na realização de uma atividade matemática, se forem mobilizadas simultaneamente a formação de uma representação semiótica e seu tratamento, há uma tarefa de produção. No entanto, se no desenvolvimento da atividade forem mobilizadas a formação e a conversão ou, ainda, a formação, o tratamento e conversão, há uma tarefa de compreensão.

Segundo Duval (2004), muitos trabalhos de Matemática desenvolvidos em sala de aula apontam que a atividade de conversão das representações semióticas é a menos espontânea e a mais difícil de ser desenvolvida para a maioria dos alunos, pois geralmente somente se leva em consideração a formação de representações e os tratamentos necessários, ou seja, somente se leva em consideração tarefas de produção.

No entanto, o obstáculo gerado na aprendizagem conceitual não se deve somente à dificuldade gerada pela troca de registros, nem pelo nível de não-congruência entre as conversões, mas também pela ausência de coordenação entre os diferentes registros de representação. O que se observa é que uma aprendizagem mais centrada na conversão e na coordenação de diferentes registros de representação apresenta resultados mais significativos sobre as tarefas de produção e de compreensão. É a atividade de conversão que possibilita a coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica.

Com isso, para que ocorra a *noesis* é importante que haja a coordenação entre os diferentes registros de representação, ou seja, entre as diferentes *semiosis.*

1.7 Coordenação entre Registros de Representação Semiótica

Duval (2006) afirma que a Matemática possibilita uma grande variedade de representações semióticas. Segundo o autor, tanto no ensino como nas práticas mais avançadas, a Matemática é o domínio no qual diferentes formas de representação semiótica podem ser utilizadas.

Segundo Buehring, Flores & Moretti (2005, p.25-26)

> Para que ocorra tal coordenação entre os signos e seus conceitos, o sujeito que aprende precisa contar com diferentes tipos de registros de representações semióticas e ser capaz de passar de um a outro, naturalmente, pois dependendo da situação problema, um determinado registro pode tornar-se mais eficiente do que outro. Na diversidade de representações e sua coordenação, o aluno tem em suas mãos mais elementos para elaborar e fazer relações mentais. Quando o aluno realiza a passagem entre diferentes registros, ele tem consciência do objeto matemático em questão. Esta passagem torna-se essencial para haver clareza de que o registro não é "o" objeto de estudo e o mesmo não pode dar conta de todas as suas particularidades. Neste caso, a multiplicidade de registros de

> representações semióticas tem caráter complementar, sendo que, muitas vezes, as representações diferenciadas de um mesmo objeto podem apresentar conteúdos diferentes, por isso há a necessidade de duas ou mais representações, e a transição e coordenação entre as mesmas .

Segundo Duval (2006), o funcionamento do pensamento humano está relacionado com uma variedade de registros de representação. Essa variedade de registros possibilita ao aluno três condições:

1. Custos de tratamento e funcionamento de cada registro: a variedade permite trocas de registros e essas trocas possibilitam realizar tratamentos mais econômicos. Por exemplo, alguns alunos "preferem" operar com números decimais ao invés de números escritos na forma fracionária.
2. Limitações representativas específicas a cada registro, necessitando da complementaridade de registros: um registro de representação apresenta especificidades e características próprias e, assim, o registro é parcial ao objeto. Como salienta Dominoni (2005), sendo parcial, um registro pode complementar o outro. No entanto, é preciso relacionar os diferentes registros de representação, com suas próprias especificidades para que se possa conceitualizar o objeto matemático.
3. Conceitualização do objeto matemático: implica uma coordenação de registros de representação, o que, segundo Duval (2003), constitui condição fundamental para a compreensão.

Para Duval, a *noesis* somente será alcançada se o sujeito conseguir coordenar as diferentes *semiosis* (representações) como sendo do mesmo objeto matemático. Enquanto a *semiosis* apresenta os vários registros de representação em relação a um conceito, a *noesis* busca a coordenação entre estes registros.

Assim, a coordenação não se refere apenas às conversões como as apresentadas na Figura 1.4, que se referem à atividade de Modelagem do decaimento radioativo do césio-137, ou seja, converter o registro tabular em algébrico e, em seguida, realizar a conversão do registro algébrico para o gráfico, mas compreender que todos esses registros correspondem ao mesmo objeto matemático, que na referida atividade de Modelagem Matemática, é 'função exponencial'. Além disso, é importante que se perceba que esses registros de representação se complementam, pois um registro expressa características e propriedades do objeto matemático que não são expressas claramente no outro registro.

A coordenação é algo que não se realiza espontaneamente. Em muitos casos, os alunos podem realizar conversões de um registro para outro e não estar consciente de que esses diferentes registros representam diferentes características do mesmo objeto matemático. Para que isso seja evidenciado, durante a realização de uma atividade matemática é importante deixar claro para os alunos que os diferentes registros mobilizados correspondem ao mesmo objeto matemático e complementam sua caracterização. Segundo Duval (2003, p.29), existem casos em que os alunos somente atingem sucessos referentes a acertos em atividades matemáticas quando estas exigem apenas registros monofuncionais que são *"[...] muitas vezes privados de 'significado' e inutilizáveis fora do contexto de suas aprendizagens"* .

Segundo Duval (2006), para a condução de uma atividade matemática e para a resolução de problemas duas ações interpretativas se manifestam na produção cognitiva.

1.reconhecer um mesmo objeto representado por meio de dois registros de representação nos quais os conteúdos abordados são referentes a cada um deles, porque eles dependem de sistemas diferentes;

2.reconhecer dois objetos diferentes, por meio de duas representações, nos quais os conteúdos aparentemente são semelhantes, porém eles se referem ao mesmo sistema de representação e que, de uma representação a outra, há variação de conteúdo.

Se o sujeito é capaz de realizar essas duas ações, significa que está ocorrendo o desenvolvimento das coordenações entre diferentes sistemas de representações.

1.8 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Existem pesquisas que abordam a Teoria dos Registros de Representação Semiótica na perspectiva de Raymond Duval nas diversas áreas de conhecimento e, em particular, na Educação Matemática. Brandt (2005), Grando & Girardello (2005), Vizolli (2006), Dominoni & Almeida (2005), Silva & Barolli (2006), Rechimont & Ascheri (2005), Vertuan & Almeida (2007), Fuente, Cañada & Cañada

(2004), Vizolli & Soares (2005), García & Palacios (2006), são algumas dessas referências.

Brandt (2005) realizou um estudo sobre a compreensão do sistema de numeração decimal de alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental. Para isso, a autora aplicou tarefas e atividades para analisar os registros feitos pelos alunos. Fundamentada em Duval, a autora analisou a problemática da incompreensão do sistema de numeração decimal. As tarefas aplicadas compreenderam registros de natureza multifuncional e monofuncional, possibilitaram as atividades cognitivas de tratamento e conversão, bem como o enfrentamento do fenômeno de não-congruência. Para fazer a análise das conversões não-congruentes, a autora utilizou-se das condições de congruência estabelecidas por Duval.

Grando & Girardello (2005) trabalharam a noção de perspectiva com alunos da 5ª, 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e com alunos do 1° ano do Ensino Médio. Para isso, as autoras propuseram aos alunos que representassem graficamente objetos do cotidiano escolar e de outros contextos. Com isso, essas autoras, fundamentadas nos diferentes tipos de representações citadas por Raymond Duval, evidenciaram que a passagem da representação discursiva para a gráfica, que corresponde a uma representação não-discursiva, tem relação com o nível de desenvolvimento que o aluno atingiu em suas representações mentais.

Dominoni & Almeida (2005) investigaram, por meio de uma seqüência didática, como alunos do 1° ano do Ensino Médio concebem o objeto matemático 'função exponencial'. A seqüência didática foi elaborada seguindo critérios da Engenharia Didática. Essas autoras, fundamentadas em Duval, concluíram que a coordenação entre registros precisa ser estimulada nos alunos para contribuir com a compreensão do objeto matemático.

Para investigar o desempenho na resolução de problemas de alunos do 2° e 3° anos do Ensino Médio, Silva & Barolli (2006), analisaram respostas de 49 alunos a um problema de Matemática. Com isso, as autoras observaram que os alunos que usaram uma diversidade de registros tiveram melhor desempenho na resolução do problema. No entanto, alunos que tiveram ótimo desempenho não fizeram, em sua totalidade, uso de diferentes registros de representação. As autoras concluíram que é importante explorar os objetos matemáticos por meio de diferentes registros de representação.

Uma abordagem que leva em consideração o fenômeno de não-congruência em atividades de conversão é apresentada em Fuente, Cañada & Cañada (2004). Nesse trabalho, os autores abordam com alunos o conceito de máximo, mais especificamente o estudo dos máximos de perímetros e de áreas de superfícies planas. Para tanto, baseiam-se na troca de contextos de Douady (1991, apud Fuente, Cañada & Cañada, 2004) e nos registros de representação de Duval. Os autores evidenciaram que "[...] *a coordenação entre os registros de representação não parece ocorrer de modo claro na aula real, onde os sujeitos tendem a priorizar em seu uso um registro, utilizando algum outro de modo mais esporádico"*[32]*.* (p. 84 [tradução livre]). Dessa forma, efetuaram um estudo crítico sobre os registros centrado, principalmente, nos tratamentos e nas não-congruências das conversões entre os mesmos. Para tanto, concluíram que é necessário organizar uma dinâmica para que ocorra a coordenação entre os registros, afim de que os alunos compreendam o conceito estudado.

Além de trabalhos de investigação referentes aos registros de representação feitos por alunos, existem trabalhos que abordam o uso que professores fazem ou deixam de fazer de diferentes registros de representação. É o caso dos trabalhos desenvolvidos por Vizolli & Soares (2005) que investigaram a solução de problemas de proporção-porcentagem em um trabalho com professores de um curso de jovens e adultos. Nesse trabalho, os autores utilizaram a teoria de registros de Duval para analisar as soluções dos professores. Garcia & Palacios (2006) também realizaram pesquisa com professores. Nesse caso, os autores investigaram as representações semióticas utilizadas por um grupo de professores de Química e constataram que, conforme se aumenta o nivel acadêmico, cresce a preferência pela utilização não gráfica. Além disso, o estudo também mostra que as conversões entre os registros são mais freqüentes quando essas são as congruentes.

O estudo de representações semióticas no âmbito da Educação e, principalmente, da Educação Matemática, não se restringe somente à análise de registros de representação de alunos e professores. Existem estudos nos quais é investigada a utilização de registros de representação semiótica em livros didáticos.

---

[32] Tradução de "[...] la coordinación entre los registros de representación no parece darse de modo claro en el aula real, donde los sujetos tienden a priorizar en su uso un registro, utilizando algún otro de modo más esporádico" (Fuente, Cañada & Cañada, 2004, p. 84).

Geralmente nesses estudos busca-se identificar os tratamentos, as conversões e as coordenações dos diferentes registros. Jacomelli (2006) e Silva (2004) são duas dessas referências.

Neste trabalho, levando em consideração o resultado apresentado em Vertuan (2007) de que atividades de Modelagem Matemática oportunizam o acesso a diferentes registros de representação semiótica, investigamos relações entre a Modelagem Matemática e a Semiótica e sua influência sobre a caracterização dos objetos matemáticos.

CAPÍTULO 2
MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo abordamos a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática. Primeiramente, apresentamos algumas considerações sobre Modelagem Matemática e modelo matemático com o objetivo de esclarecer o conceito desses termos neste trabalho. Além disso, apresentamos um esquema que mostra as possíveis etapas de desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática. Em seguida, apresentamos considerações sobre a Modelagem Matemática e a aprendizagem da Matemática.

2.2 CONCEITOS INICIAIS

D'Ambrosio (1986) aborda que a Modelagem consiste no desenvolvimento de uma atividade na qual se definem estratégias de ação. Para esse autor, quando se está diante de uma situação é necessário apoderar-se dela, para traduzi-la num problema formulado em linguagem convencionada, no caso, a linguagem Matemática. Para isso, é necessário simplificar a situação, uma vez que a linguagem convencionada permite uma simulação da realidade que se pretende modelar, trabalhar tal situação por meio da Matemática que se conhece e buscar novas informações quando se fizer necessário, para, finalmente, obter uma representação matemática dessa situação. A essa representação chama-se modelo matemático e as etapas de obtenção, validação e aplicação desse modelo é o que se considera como Modelagem Matemática.

Neste sentido, Bassanezi (2002, p. 24), afirma que a Modelagem Matemática

> [...] é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual .

Para esse autor, um modelo matemático é "[...] um *conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado"* (BASSANEZI, 2002, p. 20). O que importa é que o modelo matemático represente de forma concisa e clara as idéias do modelador, sem ambigüidades para que outras pessoas entendam e analisem o que foi modelado.

Biembengut (2004) aborda que a noção de modelo matemático pode ser encontrada em diferentes áreas e, seguindo a linha de Bassanezi, compreende também que um modelo

> [...] é um conjunto de símbolos os quais interagem entre si representando alguma coisa. Essa representação pode se dar por meio de desenho ou imagem, projeto, esquema, gráfico, lei matemática, dentre outras formas. Na matemática, por exemplo, um modelo é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduzem, de alguma forma, um fenômeno em questão (BIEMBENGUT, 2004, p. 16).

Essa autora cita que um modelo matemático pode ser representado de diferentes formas para que um objeto seja estudado. Não são apenas expressões algébricas que representam um modelo matemático, mas sim um conjunto de símbolos e relações matemáticas.

D'Ambrosio (1986) considera que o modelo é um ponto de ligação entre as informações obtidas pelo sujeito que modela e sua ação sobre a realidade e pode ser considerado um recurso que dá às pessoas condições de exercer seu poder de análise da realidade. Tal afirmação aponta tanto para o caráter dinâmico da Modelagem Matemática quanto para a subjetividade relacionada ao modelo matemático.

Na elaboração de um modelo matemático, Chevallard et al. (2001, p. 50) consideram que um aspecto essencial da atividade matemática

> [...] consiste em construir um modelo (matemático) da realidade que queremos estudar, trabalhar com tal modelo e interpretar os resultados obtidos nesse trabalho, para responder às questões inicialmente apresentadas. Grande parte da atividade matemática pode ser identificada, portanto, com uma atividade de modelagem matemática .

Embora a construção de um modelo matemático seja importante na atividade de Modelagem Matemática, não a consideramos como o fim deste tipo de atividade, mas como uma alternativa que pode permitir uma compreensão mais global sobre a situação investigada e a Matemática utilizada. Na obtenção de um modelo, levamos em consideração os objetos matemáticos envolvidos e o estudo de suas características e propriedades. É importante termos em mente que ao trabalharmos com a obtenção de modelos matemáticos, estamos interessados também na compreensão da Matemática envolvida na obtenção de tal modelo.

Entendemos modelo matemático como uma representação apresentada em linguagem Matemática que faz referência à situação real que o originou. Para a obtenção do modelo, esperamos que diferentes formas de representação sejam mobilizadas e as diferentes atividades cognitivas (tratamento e conversão) estabelecidas para que ocorra a conceitualização do objeto matemático que está sendo desenvolvido.

2.2.1 Etapas de uma Atividade de Modelagem Matemática

Para Kehle & Cunningham (2000), o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática requer uma transição do problema original para uma representação matemática formal, o modelo matemático.

Essa transição segue, em geral, uma seqüência de procedimentos: a identificação do problema real, a identificação e a seleção das variáveis, a formulação de hipóteses, a dedução do modelo e a validação do modelo. Durante o desenvolvimento dessa seqüência de procedimentos, as atividades cognitivas (tratamento e conversão) são necessárias.

Inicialmente, a partir da situação real, é preciso identificar o problema que se pretende estudar, obtendo um modelo da situação, ou seja, o que realmente pode ser estudado a partir da situação escolhida. Com o modelo da situação estabelecido, é preciso simplificá-lo, estruturá-lo — há a seleção de variáveis[33] e a formulação de hipóteses. O passo seguinte é o levantamento de hipóteses que leva ao modelo real da situação original.

Argumentando sobre o levantamento de hipóteses, Skovsmose (2001, p. 42) considera que

[33] Variável é aqui entendida como algo que "assume valores num conjunto específico e estabelece uma relação entre dois conjuntos. Nesse caso, o cálculo não tem mais um íim em si - ele está a serviço de uma íunção" (FREITAS, 2003, p. 115).

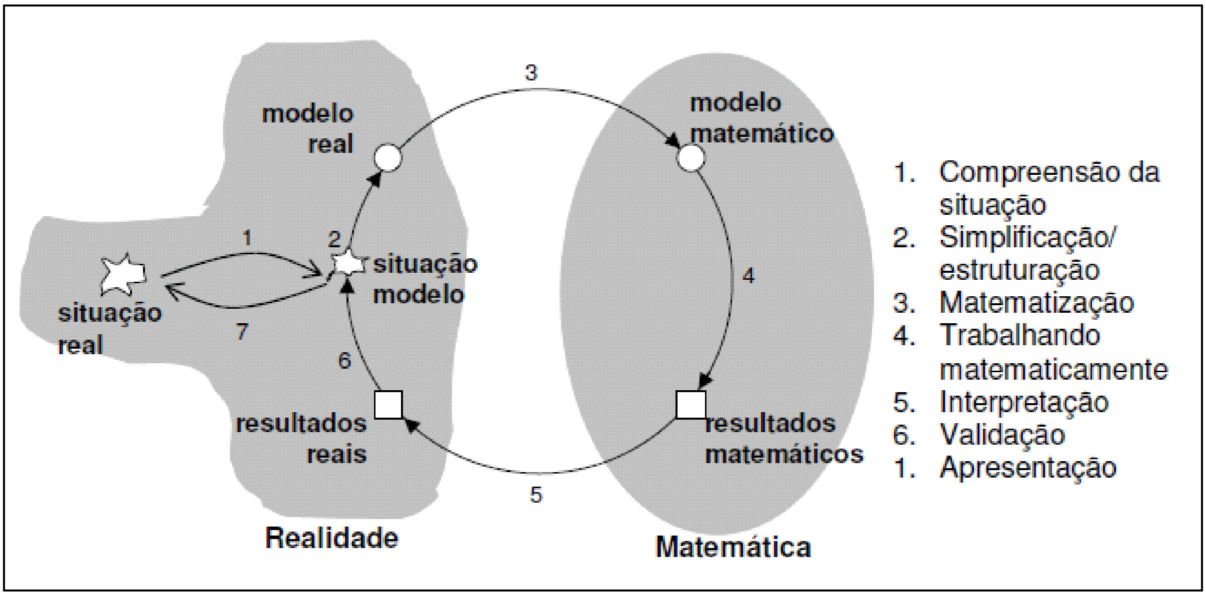
> E impossível iniciar a construção de um modelo sem hipóteses. Uma escolha especial deve ser feita acerca de como conceber a realidade econômica. Nossa concepção de realidade tem de ser estruturada de forma que padrões específicos possam ser identificados: temos de selecionar elementos da realidade que serão concebidos como importantes, e temos de decidir quais relações entre esses elementos são importantes. Essas duas seleções fundamentais constituem uma interpretação da "realidade". Um modelo não é um modelo da "realidade" em si, é um modelo de um sistema conceitual, criado por uma interpretação específica, baseado em um quadro teórico mais ou menos elaborado, e baseado em alguns interesses específicos.

O modelo real pode passar por um processo de abstração durante o qual conhecimentos extra-matemáticos são utilizados. Tal modelo real é então matematizado, ou seja, passa pela etapa de matematização[34], resultando em um modelo matemático. Para a obtenção desse modelo e para a realização dos tratamentos e das conversões necessários neste modelo são usados procedimentos matemáticos. O resultado matemático precisa ser interpretado, respeitando o problema real que o originou. Por fim, o procedimento e o resultado matemático precisam ser validados, obtendo-se um resultado real. Se o modelo for válido é possível utilizá-lo para explicar, prever e decidir sobre o fenômeno em estudo. Se o modelo não for válido é preciso retornar ao desenvolvimento da atividade e analisar se houve falhas no processo de abstração.

Os procedimentos que fazem parte de uma atividade de Modelagem Matemática podem ser caracterizados em etapas e fazem parte de um ciclo que pode ser representado por meio de um esquema, como o apresentado na Figura 2.1.

[34] Entendemos matematização como estabelecido por Ferri (2006), que consiste na transição do modelo real não essencialmente matemático, para o modelo matemático que se utiliza de linguagem matemática.

Figura 2.1 – Ciclo da Modelagem Matemática (FERRI, 2006, p. 87).



No esquema que apresentamos, as setas orientam o ciclo de desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática.

Dependendo do enfoque a que se pretende dar ênfase durante o desenvolvimento na atividade, as etapas apresentadas no esquema podem ser menos enfatizadas ou mais enfatizadas.

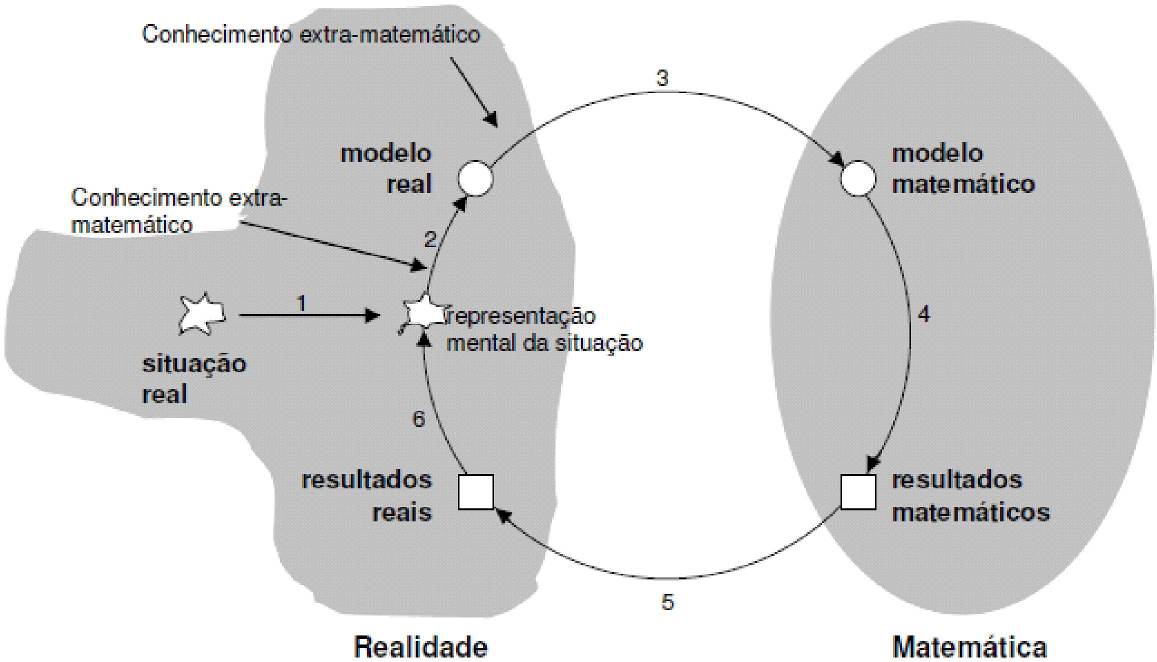
Embora possa ser percebida como método de pesquisa, a Modelagem Matemática vem sendo percebida por muitos educadores como uma alternativa que pode ser introduzida nas aulas de Matemática.

2.3 Modelagem Matemática e a Aprendizagem da Matemática

Neste trabalho, voltadas para o âmbito da Educação Matemática, usamos a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica na qual fazemos "uma *abordagem, por meio da Matemática, de um problema não essencialmente matemático"* (ALMEIDA; BRITO, 2005a, p. 487). A escolha do problema a ser estudado tem a participação direta dos sujeitos envolvidos na atividade.

Neste contexto, ganha destaque a análise das ações cognitivas dos estudantes durante as diferentes etapas de desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, conforme estabelecido por Ferri (2006) e apresentado na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Ciclo da Modelagem Matemática sobre uma perspectiva cognitiva (FERRI, 2006, p. 92).



2. Compreensão da ação
3. Simplificação/estruturação da ação; a utilização do conhecimento extra-matemático depende da ação
4. Matematização; o conhecimento extra-matemático se faz necessário fortemente nesse momento
5. Trabalhando matematicamente, utilizando as competências matemáticas individuais
6. Interpretação
7. Validação

Quando o aluno escolhe a situação real que pretende modelar, geralmente precisa compreender o que pode ser estudado a partir dela, fazendo uma representação mental da situação. Na representação mental da situação, o aluno toma decisões que influenciam na simplificação das informações contidas no problema. Na etapa de transição da representação mental da situação para o modelo real, ocorre uma ação de idealizar e simplificar o problema, o aluno utiliza-se de conhecimentos extra-matemáticos que possui. Na etapa de transição do modelo real para o modelo matemático, o aluno tem um progresso no que se refere à matematização, utilizando os conhecimentos extra-matemáticos que possui para a construção do modelo matemático. Do modelo matemático para os resultados matemáticos, o aluno usa suas competências matemáticas. A ação de interpretação dos resultados obtidos na atividade de Modelagem Matemática ocorre na transição dos resultados matemáticos para os resultados reais. Finalmente, na etapa de validação, o aluno faz correspondência dos resultados reais e as representações mentais.

Existem muitos argumentos que justificam a utilização da Modelagem Matemática na Educação Matemática. Por meio desses argumentos é possível evidenciar que a Modelagem Matemática apresenta condições favoráveis ao desenvolvimento de conteúdos e habilidades matemáticas, além de proporcionar uma interação entre os alunos e entre as diferentes áreas de conhecimento.

Segundo Dias (2005, p. 39)

> [...] a Modelagem Matemática concebida como um processo matemático que envolve a formulação de hipóteses e simplificações adequadas na criação de modelos matemáticos para estudar fenômenos reais pode ser vista como uma alternativa para inserir aplicações da matemática no currículo escolar sem, no entanto, alterar as responsabilidades concedidas ao ensino.

Neste sentido, como encontramos em Santos & Almeida (2006), com a Modelagem Matemática, os alunos, por meio da abordagem de situações reais, têm a oportunidade de verificar a aplicabilidade da Matemática em contextos diversos, bem como ter uma compreensão melhor de sua realidade, podendo interagir com ela.

Além de estudar a Matemática envolvida, no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem tem-se contato com diferentes áreas do conhecimento e, com isso, pode-se realizar um trabalho interdisciplinar ou multidisciplinar da situação em estudo, além de proporcionar o reconhecimento da aplicabilidade da Matemática em diferentes situações.

Nesse contexto, Blum (1991) defende que os conteúdos matemáticos podem tomar consistência por meio de exemplos apropriados de aplicação e enfatiza que a Matemática pode auxiliar o estudante na resolução de problemas e situações reais. Para isso, é necessário que o ensino de Matemática desenvolva o contato com tais situações, uma vez que o domínio do conhecimento matemático não implica, automaticamente, na capacidade do aluno em lidar com situações extra-matemáticas. É preciso que o ensino proporcione efetivamente o contato com tais situações.

Neste sentido, Bassanezi (2002) salienta que, mesmo que o modelo matemático da situação estudada possa ser construído dentro de uma teoria matemática conhecida, ainda assim pode acontecer que as técnicas e métodos matemáticos existentes nesta teoria sejam insuficientes para a obtenção dos resultados desejados. Dessa forma, a situação exige habilidade e criatividade essencialmente matemáticas para desenvolver os métodos necessários. Estas situações se constituem nas grandes motivações para o desenvolvimento de teorias matemáticas já estabelecidas.

Para Ponte (1992) a apresentação de novos conceitos a partir de situações reais, pode ser uma base concreta para desenvolver os conceitos, como também ter um importante papel motivador. Geralmente quando o aluno trabalha com a Modelagem Matemática se envolve com a situação real estudada, procurando em primeiro lugar entendê-la, agindo como um investigador. Trabalhando situações reais, o aluno pode compreender a importância da Matemática no seu dia-a-dia e sentir-se motivado a conhecê-la melhor.

Com relação à motivação, a Modelagem pode ser considerada uma boa aliada para esse fim. Bassanezi (2002, p. 17), afirma que utilizar Modelagem Matemática

> [...] motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão [...].

Esse autor ainda enfatiza a importância da Modelagem Matemática no sentido de oportunizar a interação da Matemática escolar com a realidade do estudante, tornando esta disciplina mais interessante para os alunos. Essa perspectiva coloca a Modelagem Matemática também como fonte de motivação para os estudantes.

Malheiros (2004), além de destacar o caráter motivador, afirma que no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, o professor possibilita uma determinada autonomia para os estudantes buscarem e compreenderem temas de seus interesses e, com isso, conseguir, muitas vezes, atribuir significados para determinados conteúdos, que talvez não atribuíssem se os mesmos fossem estudados em outro ambiente. Nesse sentido, podemos referir-nos ao trabalho desenvolvido por Almeida & Brito (2005b), os quais afirmam que a Modelagem proporciona aos alunos a atribuição de sentido e a construção de significados para os conceitos matemáticos com que se defrontam nas aulas de Matemática, contribuindo com isso para sua aprendizagem.

Outro benefício do trabalho com a Modelagem Matemática consiste na possibilidade de o aluno, por meio de cálculos e observações, validar o modelo, fazer previsões ou manipular a realidade em estudo. Dessa forma, o aluno pode trabalhar com uma situação de diversas formas, não só buscando uma solução atual, mas podendo controlar acontecimentos futuros, tendo a criatividade e a curiosidade instigadas o tempo todo.

Segundo Niss (1989), uma atividade de Modelagem pode não só apoiar os alunos na aquisição e compreensão dos conteúdos matemáticos como também promover atividades e habilidades que estimulem a criatividade e a solução de problemas.

Neste sentido, Borssoi & Almeida (2004) argumentam que o envolvimento do aluno com situações-problema em sala de aula representa uma oportunidade de externar o processo construtivo de aprender, de converter conceitos e exemplos construídos por meio da interação com o professor. Além da interação com o professor, o trabalho com Modelagem Matemática possibilita a interação entre os alunos. Essa interação é defendida em documentos oficiais do governo como nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN_+, BRASIL, 2002, p.129). Segundo esse documento,

> Um importante recurso para o desenvolvimento das competências é o trabalho em grupo. Apesar de rejeitado por muitos, sob alegação de que os alunos fazem muito barulho e não sabem trabalhar coletivamente, essa modalidade de trabalho é valiosa para várias das competências que se deseja desenvolver.

O trabalho em grupo é muito importante para estimular nos alunos a coletividade, além de auxiliar na formação de cidadãos críticos e participativos que irão atuar na sociedade. O trabalho em grupo também é um dos argumentos defendidos por Almeida & Dias (2004, p. 23) no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Para essas autoras,

> A Modelagem Matemática em sala de aula pode ser vista como uma atividade essencialmente cooperativa, onde a cooperação e a interação entre os alunos e entre professor e aluno têm um papel importante na construção do conhecimento. Por outro lado, a relação com a sociedade também pode ser fortemente estimulada, uma vez que o problema investigado pelo aluno tem nela sua origem.

Para Fernandes (2000), quando os alunos trabalham em conjunto com o mesmo objetivo a ser atingido e chegam a um produto ou solução final em comum, têm a possibilidade de discutir as diferentes estratégias para resolver um mesmo problema, e isso pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos conceitos envolvidos. Com a interação com outras pessoas, o sujeito passa a dominar novos conhecimentos. Quando há conflito na interação dos sujeitos envolvidos, há benefícios mútuos, pois mantém contato com pessoas que se encontram no mesmo nível de desenvolvimento cognitivo.

Para Ferruzzi (2003), o trabalho coletivo oferece oportunidade para os alunos desenvolverem capacidades de aprendizagem, tais como falar, ouvir, expor e pensar com os outros, uma vez que os alunos aprendem falando, ouvindo, expondo e pensando de forma coletiva.

Dias (2005) afirma que, durante o desenvolvimento da etapa de construção do modelo,

> [...] o aluno pode, de certa forma, reconstruir o conhecimento matemático na medida em que sentir a Matemática presente na situação em estudo (na fase de experimentação), ter dela uma compreensão prévia (na abstração), interpretar e buscar significados (na sistematização dos conteúdos teóricos durante a elaboração do modelo e procura por soluções), compreender efetivamente a Matemática percebida (na resolução) e finalmente manifestar a compreensão (nas etapas de validação e aplicação) (DIAS, 2005, p. 38).

Para Almeida & Dias (2004, p. 22), o uso da Modelagem Matemática no contexto de ensino e aprendizagem

> [...] vai além da idéia utilitarista de aplicar a Matemática para resolver problemas. O desenvolvimento do conhecimento reflexivo, visando à formação de um cidadão crítico, também se insere entre os objetivos a serem atingidos quando se faz uso da Modelagem Matemática em ambientes de ensino e aprendizagem de cursos regulares.

Alguns pesquisadores como Almeida & Silva (2004, p. 2) destacam a importância da reflexão sobre temas sociais relevantes, no ensino de Matemática. Esses autores afirmam que

> [...] ao partir de uma reflexão sobre um problema social, que aparentemente não envolve a matemática, o aluno pode se surpreender com a obtenção de um modelo matemático que corrobora para a verificação da informação científica em questão, viabilizando o ensino do conteúdo matemático.

Barbosa (2003, p.6) afirma que *"[...] a capacidade de compreender e criticar argumentos matemáticos postos nos debates locais ou gerais pode potencializar a intervenção das pessoas nas tomadas de decisões coletivas'* .

Diante dessas diferentes abordagens e argumentos favoráveis ao uso da Modelagem Matemática na aprendizagem da Matemática, muitos pesquisadores têm recomendado o uso dessa tendência na área. Skovsmose (2001), Almeida (2003), Borssoi (2004), Ferruzzi (2003), Brito (2003), Almeida & Dias (2004), Lesh & Doerr (2003), Mass (2004), Almeida & Brito (2005b), Kehle & Cunningham (2000); Kehle & Lester (2003), Doerr (2006), Kaiser & Sriraman (2006), Ferri (2006), Lingefjàrd (2006), Vertuan (2007) e Santos (2008) são algumas dessas referências.

Ferruzzi (2003), com o objetivo de ensinar Cálculo Diferencial e Integral, desenvolveu com alunos de uma disciplina do curso superior de tecnologia atividades envolvendo conteúdos do programa de uma disciplina. Em seguida, os alunos fizeram trabalhos com temas escolhidos por eles. Para a realização desses trabalhos, os alunos utilizaram Modelagem Matemática e trabalharam de forma independente.

Borssoi (2004), para desenvolver o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias com alunos do curso de Química, desenvolveu uma série de atividades de Modelagem Matemática. Após o desenvolvimento das atividades inicialmente propostas, os alunos realizaram trabalhos de Modelagem com temas propostos por eles mesmos. E também trabalharam de forma independente.

Brito (2004) desenvolveu diferentes atividades de Modelagem Matemática com alunos de duas turmas do segundo ano do Ensino Médio. Com as atividades desenvolvidas, pode-se, entre diferentes conteúdos, desenvolver o conceito de função, a noção de função afim, linear e identidade. Após o desenvolvimento das atividades inicialmente propostas, os alunos reunidos em grupos realizaram trabalhos com diferentes temas escolhidos por eles, tendo o professor como orientador.

Vertuan (2007) desenvolveu atividades com alunos do 1° ano do curso de Licenciatura em Matemática e verificou em sua pesquisa que as atividades de Modelagem viabilizam a utilização e exploração de diferentes registros de representação semiótica bem como o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros.

Santos (2008) desenvolveu atividades de Modelagem com alunos do 2° ano do curso de Licenciatura em Matemática e verificou o uso que esses alunos fazem do computador na exploração ou construção de um modelo matemático. O autor concluiu que a associação da Modelagem com as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), mais especificamente com o computador, favorece a compreensão e estimula atividades que contribuem para o desenvolvimento da criatividade no que diz respeito à busca por soluções para problemas que a sociedade atual pode colocar.

Mass (2004) afirma que trabalhar Modelagem Matemática na sala de aula pode desenvolver cinco competências principais:

1. competências para compreender o problema real e estabelecer um modelo baseado na realidade.
2. competências para estabelecer um modelo matemático para o modelo real.
3. competências para resolver questões matemáticas dentro deste modelo matemático.
4. competências para interpretar resultados matemáticos numa situação real.
5. competências para validar a solução.

Como estudado por Vertuan (2007), atividades de Modelagem Matemática possibilitam o uso de diferentes registros de representação, possibilitam as diferentes atividades cognitivas para que o sistema seja considerado um sistema de representação semiótica. No entanto, além da abordagem das atividades cognitivas, é necessário que, durante o desenvolvimento da atividade, se reconheça que as representações correspondem ao mesmo objeto matemático, ou seja, é preciso que exista a coordenação entre os diferentes registros de representação para que, segundo Duval (2004), ocorra a conceitualização e a compreensão do objeto matemático em estudo.

Em nossa pesquisa escolhemos três atividades de Modelagem Matemática que oportunizam o acesso a diferentes registros de representação semiótica de um mesmo objeto com a finalidade de investigar relações entre a Modelagem Matemática e a Semiótica e suas influências sobre a caracterização do objeto matemático.

CAPÍTULO 3
ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, estruturamos os aspectos metodológicos utilizados para o desenvolvimento de nossa pesquisa. Apresentamos como a Semiótica pode ser evidenciada em uma abordagem via Modelagem Matemática e, em seguida, apresentamos os procedimentos para o desenvolvimento da pesquisa.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E SEMIÓTICA: A BUSCA POR RELAÇÕES

Levando em consideração que a Semiótica é a ciência de toda e qualquer linguagem e que os objetos não são acessíveis à percepção, reconhecemos que para ocorrer a comunicação em Matemática se faz necessário o uso de representações. Neste contexto, Kehle & Cunningham (2000), tomam como ponto de partida a proposição de que a Modelagem Matemática faz uso de diferentes representações semióticas.

Ao tratar da relação triádica dos signos, Peirce caracteriza a relação do signo consigo mesmo, a relação do signo com o objeto que representa e a relação do signo com o interpretante (aquilo que substitui o objeto na mente do intérprete) e, associando-as às categorias fenomenológicas (Primeiridade, Secundidade e Terceiridade) que se relacionam com a qualidade, a existência e a lei, define uma classificação para os signos conforme já apresentamos na seção 1.3.2. Por questão de conveniência, reapresentamos aqui este quadro (Quadro 3.1).

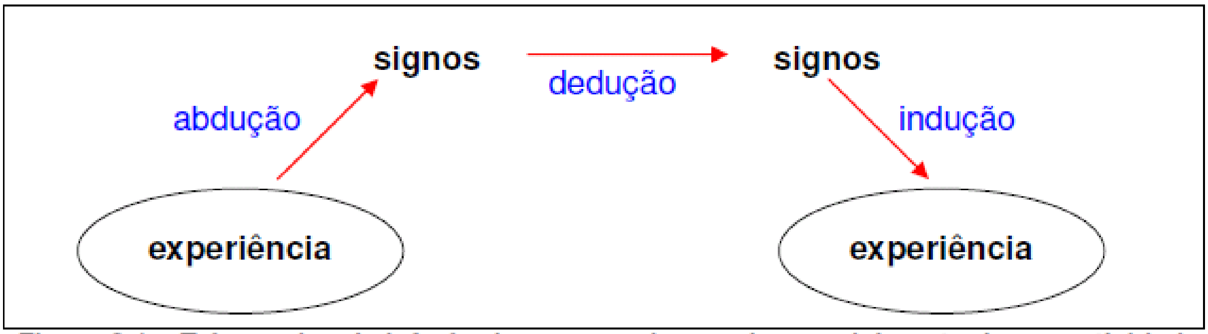
Quadro 3.1 – Quadro com a apresentação da classificação dos signos estabelecida por Peirce.

	Significação Signo em si mesmo	Objetivação Signo com seu objeto	Interpretação Signo com seu interpretante
Primeiridade	Quali-signo	Ícone	Rema
Secundidade	Sin-signo	Índice	Dicente
Terceiridade	Legi-signo	Símbolo	Argumento

Quadro 1.1 – Classificação dos signos semióticos.

Ao abordar estas classes de signos, Kehle & Lester (2003) as associam com os modos de inferência — *abdução, indução* e *dedução* — (estabelecidos por Peirce), no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, conforme apresenta a Figura 3.1.

Figura 3.1 – Três modos de inferência empregados no desenvolvimento de uma atividade (KEHLE; LESTER, 2003, p. 106).



A abdução corresponde à inferência que fazemos quando nos deparamos com uma situação nova, sobre a qual não apresentamos conhecimentos iniciais. Nesse modo de inferência, em cada situação, apresentamos hipóteses, palpites, procuramos pistas, fazemos diagnósticos, sendo necessária a criação de signos para representar a experiência.

As regras de dedução estão relacionadas com a Lógica Clássica e constituem uma sintaxe para fazer inferência a dois signos. A partir de um dos signos, fazem-se deduções lógicas e obtém-se o outro signo.

A indução é utilizada na Semiótica como um processo de análise que confirma hipóteses estabelecidas inicialmente sobre um fenômeno, retornando à situação original. Neste sentido, a indução se faz necessária durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática.

Kehle & Cunningham (2000), relacionando os modos de inferência com as diferentes etapas de uma atividade de Modelagem Matemática, classificaram estas inferências como: palpite (hunch), sintoma (symptom), metáfora/analogia (metaphor/analogy), pista (clue), diagnóstico/cenário (diagnosis/scenario), explicação (explanation), identificação (identification), predição (prediction), construção do modelo (model building) e raciocínio formal (formal reasoning).

1 Palpite: é um tipo de modo de inferência de abdução no qual os alunos diante de uma situação buscam resolver a atividade, utilizando um palpite. Iniciam a resolução utilizando ferramentas matemáticas geralmente utilizadas neste contexto, por exemplo, régua e compasso. Em nossa pesquisa, consideramos que esse modo se refere à Primeiridade, em que se tem o primeiro contato com a atividade e, na Modelagem, corresponde à busca da situação a ser estudada.
2 Sintoma: é um tipo de modo de inferência de abdução no qual os alunos precisam resolver a situação em questão com informações que, embora pareçam não serem importantes, auxiliam a verificar se a situação fornece as informações necessárias para resolver o problema. Em nossa pesquisa, consideramos que esse modo se refere à Secundidade, que se relaciona à existência, ou seja, o acesso a informações que dizem respeito à situação e, na Modelagem, corresponde à busca de informações e simplificação da situação.
3 Analogia: é um tipo de modo de inferência de abdução no qual os alunos manipulam comparações para criar ou descobrir uma possível regra. Em nossa pesquisa, consideramos que esse modo se refere à Secundidade, no qual se evidencia a existência de uma regra e, na Modelagem, esse modo refere-se ao levantamento de hipóteses da situação em estudo. Nesse levantamento de hipóteses, os alunos evidenciam algumas regularidades nos dados obtidos e apresentam-nos como hipóteses da situação.
4 Pista: é um tipo de modo de inferência de abdução no qual é possível evidenciar, determinar se algumas observações dão pistas de algum fenômeno mais geral. Em nossa pesquisa, consideramos que esse modo se refere à Secundidade, que

se relaciona à existência do problema e, na Modelagem, refere-se à definição do problema.

5 Diagnóstico: é um tipo de modo de inferência de abdução no qual é possível a formação de uma eventual regra baseada em evidências disponíveis, propondo hipóteses plausíveis a partir do conjunto de pistas levantadas. Em nossa pesquisa, consideramos que esse modo se refere à Terceiridade, que se relaciona à definição de uma lei que rege o problema e, na Modelagem, refere-se ao momento em que os alunos estão realizando a dedução do modelo matemático da situação.

6 Explicação: é um tipo de modo de inferência de abdução que consiste em confirmar uma eventual regra, raciocínio e, de modo geral, formar uma explicação plausível. Se as nossas inferências levaram-nos a uma hipótese que pode ser declarada formalmente como regra geral, então ela está pronta para ser relacionada a outras regras de dedução e testada por meio de indução. Em nossa pesquisa, consideramos que esse modo se refere à Terceiridade, pois apresenta uma lei matemática que rege a situação e, na Modelagem, refere-se à obtenção do modelo.

7 Identificação: é um tipo de modo de inferência de indução que se refere à verificação de uma possível regra estabelecida, determinada. Em nossa pesquisa, consideramos que esse modo se refere à Terceiridade, no qual são utilizados cálculos baseados em uma equação ou função matemática e, na Modelagem, refere-se à validação do modelo.

8 Predição: é um tipo de modo de inferência de indução que apresenta reais motivos que afirmam a existência de uma provável regra, podem ser usados para testar a veracidade do acontecimento. Em nossa pesquisa, consideramos que esse modo se refere à Terceiridade e, na Modelagem, refere-se à volta ao problema original.

9 Construção do modelo: consiste em afirmar que se os testes indutivos conduzir a uma provável conclusão com base em uma regra ou um conjunto de regras, estamos a construir modelos. Quando as regras formam um todo coerente e cria uma estrutura que se refere à situação real e é capaz de validar um conjunto coerente de resultados a partir da qual eles podem prever e testar inúmeras variações do problema alterando os parâmetros. Em nossa pesquisa,

consideramos que esse modo se refere à Terceiridade e, na Modelagem, refere-se ao modelo da situação original.

10 Raciocínio formal: refere-se ao raciocínio dedutivo em que é necessária uma conclusão obtida com base em regras formais. Depois que os estudantes esgotaram o modelo, é necessário testar novas hipóteses. Em nossa pesquisa, consideramos que esse modo se refere à Terceiridade e, na Modelagem, refere-se a inserção de novas hipóteses para o modelo matemático obtido.

Cada um dos seis modos de inferência de abdução — palpite, sintoma, analogia, pista, diagnóstico e explicação — refere-se à potencialidade ou possibilidade de estudo de determinado fenômeno ou situação; cada um dos três modos de inferência de indução — identificação, predição e construção do modelo — refere-se à atualidade para o estudo de tal situação; o modo de inferência de dedução — raciocínio formal — enfoca regras e regularidades necessárias para retornar à situação original.

Levando em consideração o referencial teórico que sustenta nossa pesquisa, em se tratando de atividades de Modelagem Matemática, é possível classificar os signos que emergem nestas atividades de acordo com a significação (relação do signo consigo mesmo) e a objetivação (relação do signo com o objeto). No que diz respeito à interpretação (relação do signo com o interpretante), como nossa pesquisa é de cunho teórico, sem o envolvimento das pessoas que trabalharam no desenvolvimento da atividade (os intérpretes), não há possibilidade de estabelecer tal relação.

O desenvolvimento de uma atividade matemática, principalmente, pelo fato dos objetos matemáticos não serem acessíveis à percepção humana sem o uso de uma representação, requer o uso de representações. No entanto, há uma variedade de representações semióticas possíveis em Matemática: língua natural, representação algébrica, gráficos, tabelas, figuras geométricas, entre outras. A atividade de conversão corresponde à transformação da representação de um objeto dada em um sistema de registros em uma outra representação deste mesmo objeto em outro sistema de registros.

Para o desenvolvimento de uma atividade matemática, Duval (2003) propõe que é importante analisar a natureza dos diferentes registros de representação que abordamos no Capítulo 1, na seção 1.6. Essa natureza dos registros encontra-se no centro do processo de conversão de registros de representação. Para o autor, existem os registros monofuncionais cujos tratamentos são algoritmizáveis e são de natureza discursiva (sistemas de escritas e cálculos) ou não-discursiva (gráficos cartesianos) e os registros multifuncionais (ou plurifuncionais) cujos tratamentos não são algoritmizáveis e podem ser de natureza discursiva (língua natural) ou não-discursiva (figuras geométricas planas).

Duval (2003) considera que a atividade de conversão pode ser mais complexa ou menos complexa dependendo da natureza dos registros. Neste sentido, o autor coloca que, de modo geral, conversões entre registros monofuncionais têm complexidade menor do que aquela realizada entre registros multifuncionais.

O desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática tem como ponto de partida uma situação, em geral, não-matemática e como ponto de chegada uma solução matemática adequada ao problema. No percurso da situação para o modelo matemático, muitos conceitos matemáticos são envolvidos na análise da situação, bem como questões de cunho social podem ser discutidas. Além disso, as diferentes representações devem ser associadas para que se possa resolver o problema em estudo.

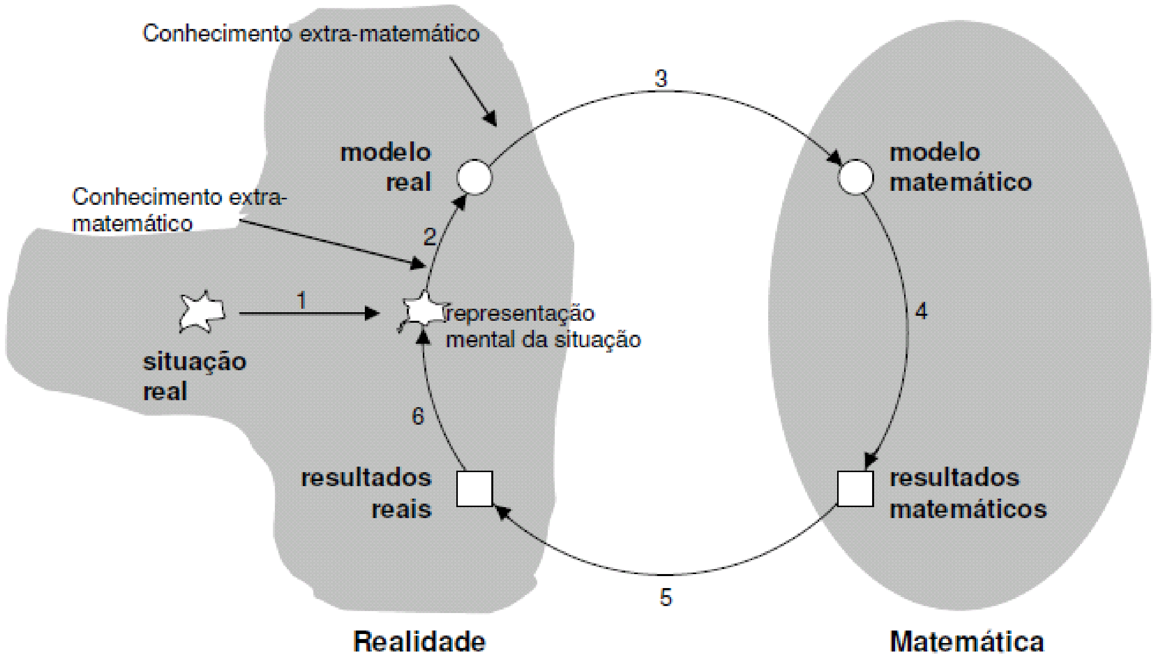
Neste sentido, as atividades de Modelagem permitem que os alunos utilizem determinados objetos matemáticos constantemente, o que pode contribuir para a compreensão desses objetos matemáticos, considerando o que Font, Godino & D'Amore (2005, p. 16) afirmam que "'compreender' ou 'saber' um objeto matemático consiste em ser capaz de reconhecer suas propriedades e representações características".

Para Duval (2003), quando o trabalho com atividades matemáticas tende a diversificar os registros de representação, este uso diversificado tende a desenvolver capacidades cognitivas do aluno e contribui fortemente para a aprendizagem. Neste sentido, Almeida (2007, p.8) afirma que

> Buscar esse desenvolvimento sem se fixar de forma míope sobre noções particulares e específicas, mas buscar a compreensão mais completa é, provavelmente, o aporte maior que se pode esperar da aprendizagem matemática para a formação do aluno. Todavia, o acesso, a conversão e a coordenação entre os diferentes registros não é automático, mas precisa ser "provocado" nos alunos e é neste sentido que o papel da Modelagem Matemática é fundamental .

O desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática requer uma transição de um problema real para uma representação matemática formal. Tal transição geralmente segue uma seqüência de etapas, nas quais ações cognitivas dos estudantes podem ser analisadas, conforme descrevemos no Capítulo 2, e aqui reapresentamos na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Ciclo da Modelagem Matemática sobre uma perspectiva cognitiva (FERRI, 2006, p. 92).



1. Compreensão da ação
2. Simplificação/estruturação da ação; a utilização do conhecimento extra-matemático depende da ação
3. Matematização; o conhecimento extra-matemático se faz necessário fortemente nesse momento
4. Trabalhando matematicamente, utilizando as competências matemáticas individuais
5. Interpretação
6. Validação

E possível transformar o estudo de um problema não-matemático no estudo de um problema matemático por meio da Modelagem Matemática, abordando diferentes atividades cognitivas dos alunos — tratamento e conversão. Existem etapas do desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática em que o tratamento é mais evidenciado, possibilitando, com isso, a execução de tarefas de produção. Para que tarefas de compreensão sejam desenvolvidas é preciso que existam atividades de conversão entre os registros de representação. A coordenação entre os registros é evidenciada quando o aluno reconhece um mesmo objeto matemático representado por meio de dois ou mais registros de representação que pertencem a sistemas de representação distintos (por exemplo, o objeto matemático 'função quadrática' representado pelo registro algébrico e pelo registro gráfico) e, ainda, quando reconhece dois objetos matemáticos distintos representados por meio de duas representações que pertencem ao mesmo sistema (por exemplo, uma parábola no plano cartesiano representa o objeto matemático 'função quadrática' e uma reta inclinada no plano cartesiano representa o objeto matemático 'função linear').

A atividade de conversão entre os registros de representação coloca em evidência o fenômeno de congruência e não-congruência.

Neste trabalho, definimos níveis de congruência e níveis de não-congruência para as conversões realizadas durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.

3.2.1 Como Caracterizamos os Níveis de Congruência e não-Congruência nessa Pesquisa

A partir da fundamentação teórica que apresentamos, consideramos que para estabelecer os níveis de congruência e não-congruência referentes às conversões dos registros de representação que emergem em atividades de Modelagem Matemática, três aspectos são importantes:

A) As três condições estabelecidas por Duval (2004) e descritas na seção 1.6.3.1 deste trabalho — correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; unicidade semântica terminal; conservação da ordem das unidades significantes;
B) O conhecimento matemático que o sujeito que realiza a conversão já tem. Leva-se em consideração o nível de escolaridade no qual o sujeito se encontra e o objeto matemático envolvido na atividade de Modelagem Matemática. Se o objeto matemático não corresponde ao nível de escolaridade do sujeito, tarefas de compreensão, ou seja, tarefas que envolvem conversões entre registros de representação podem ser complexas para os estudantes.

C) Se o registro de chegada deixa transparecer o registro de saída. Nesse caso, é importante uma análise da natureza dos registros de representação. A conversão pode se tornar menos complexa ou mais complexa se ambos os registros forem de mesma natureza (ambos monofuncionais ou multifuncionais) ou se forem de naturezas distintas (um monofuncional e outro multifuncional), respectivamente.

A partir destes três aspectos, caracterizamos os níveis de congruência como: nível de congruência alto, nível de congruência intermediário e nível de congruência baixo.

1. Nível de congruência alto: Para que uma conversão seja incluída nesse nível é preciso observar se:

i as três condições estabelecidas por Duval estão satisfeitas;

ii para o sujeito que realiza a conversão, o objeto matemático em estudo é algo que, de algum modo, pode ser "compreendido" por ele (exemplo: não é viável usar equações diferenciais quando a atividade de Modelagem Matemática é desenvolvida no âmbito da Educação Básica);

iii. o registro de chegada, de alguma forma, transparece o registro de saída (exemplo: a conversão do registro algébrico para o registro tabular da Figura 3.3).

Figura 3.3 – Conversão congruente com nível de congruência alto da atividade de Modelagem Matemática que descreve o decaimento radioativo do césio-137 (SILVA; ALMEIDA, 2006).

$$Q(t) = 19{,}26.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-1987}{30}} \xrightarrow{\text{conversão}}$$

Conversão congruente com nível de congruência alto

Tempo (ano)	**Quantidade de césio-137** (gramas)
1987	19,26
2017	9,63
2047	4,815
2077	2,4075

De modo geral, podemos considerar que uma conversão com nível de congruência alto, corresponde a uma simples atividade de codificação, para quem a executa.

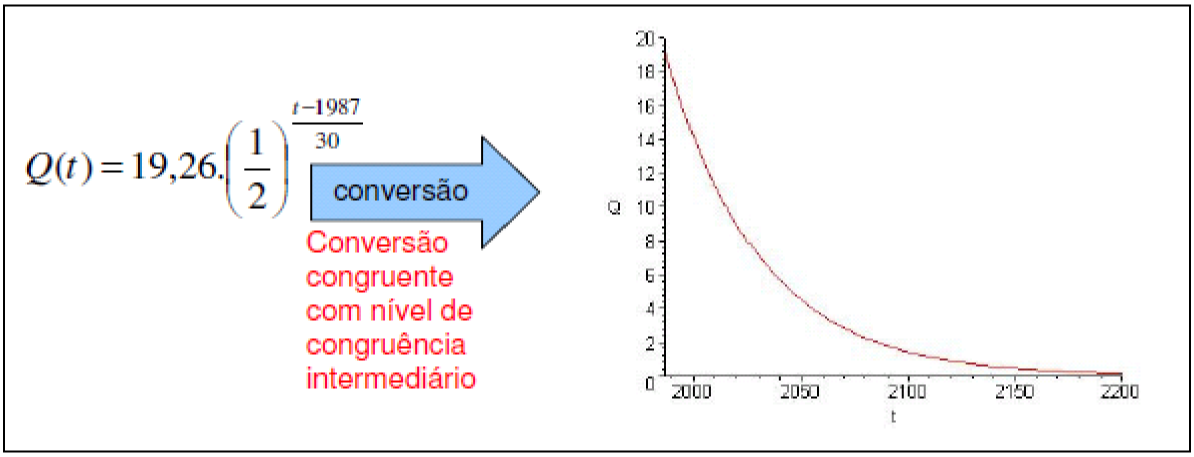
2. Nível de congruência intermediário: Para que uma conversão seja incluída nesse nível é preciso observar se:

i as três condições estabelecidas por Duval estão satisfeitas;

ii o sujeito que realiza a conversão precisa utilizar conhecimentos matemáticos mais avançados e não somente realizar uma atividade de codificação (exemplo: a conversão do registro algébrico para o registro gráfico);

iii o registro de chegada apresenta características e propriedades, que transparecem o registro de saída (exemplo: a conversão do registro algébrico para o registro gráfico da Figura 3.4).

Figura 3.4 – Conversão congruente com nível de congruência intermediário da atividade de Modelagem Matemática que descreve o decaimento radioativo do césio - 137 (SILVA; ALMEIDA, 2006).



A conversão apresentada na Figura 3.4 pode ser considerada congruente com nível de congruência intermediário, pois foi realizada a conversão do registro algébrico para o registro gráfico sem a utilização de um registro tabular. O registro gráfico deixa transparecer o registro algébrico para um estudante familiarizado com gráfico de função exponencial.

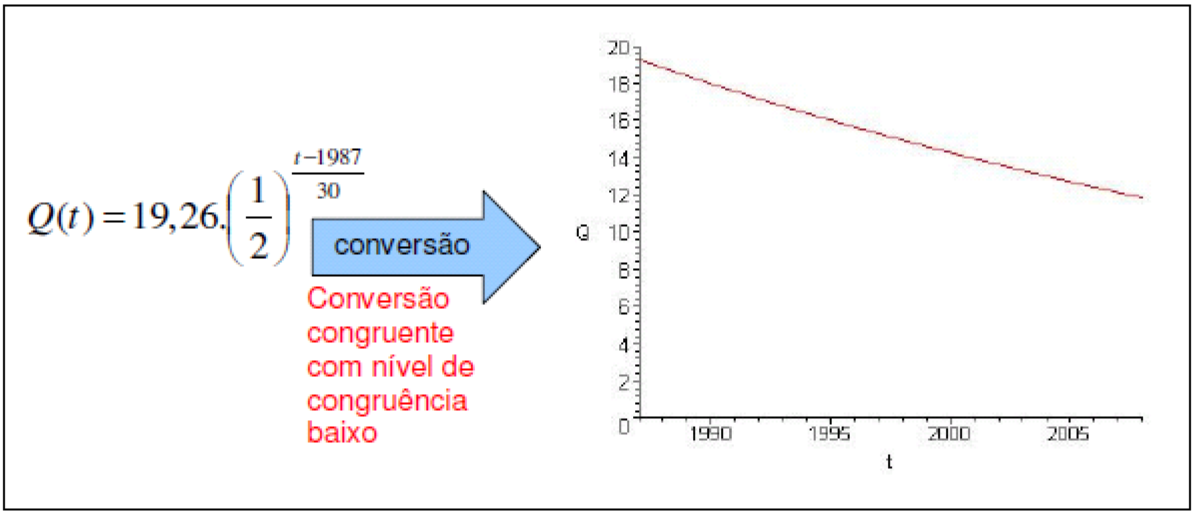
3. Nível de congruência baixo: Para que uma conversão seja incluída nesse nível é preciso observar se:

i as três condições estabelecidas por Duval estão satisfeitas;

ii a natureza dos registros de representação é diferente o que pode tornar a conversão mais complexa (exemplo: quando o registro de saída é um texto e o registro de chegada é algébrico);

iii a necessidade de realizar algumas alterações em um dos registros de representação para que o registro de chegada deixe transparecer o registro de saída (exemplo: realizar mudança na escala do registro gráfico para que transpareça o registro algébrico da Figura 3.5);

Figura 3.5 – Conversão congruente com nível de congruência baixo da atividade de Modelagem Matemática que descreve o decaimento radioativo do césio-137 (SILVA; ALMEIDA, 2006).



A conversão apresentada na Figura 3.5 pode ser considerada congruente com nível de congruência baixo, pois a atividade proposta visa estudar o objeto matemático 'função exponencial' com alunos do 1° ano do Ensino Médio. Se o modelador apresentar esse registro gráfico, há uma sinalização de que a conceitualização do objeto matemático 'função exponencial' pode não ter sido atingida, mesmo que a conversão do registro algébrico para o gráfico corresponda a uma conversão congruente. Isso pode ser apontado, pois no grau de escolaridade no qual o aluno se encontra (Ensino Médio) já possui noção da escala na construção de um gráfico.

Se uma das condições de congruência não for satisfeita, temos que a conversão é não-congruente. Seguindo essas condições, estabelecemos três níveis de não-congruência nas conversões entre os registros:

1. quando a conversão entre os registros não satisfaz uma das três condições de congruência, temos uma conversão não-congruente com nível de não-congruência baixo;
2. quando a conversão entre os registros não satisfaz duas das condições de congruência, temos uma conversão não-congruente com nível de não-congruência intermediário;
3. quando a conversão entre os registros de representação não satisfaz todas as condições de congruência, temos uma conversão não-congruente com nível de não-congruência alto.

Com base nos pressupostos teóricos estabelecidos e levando em consideração a problemática já enunciada no início deste texto — a busca de relações entre Modelagem Matemática e Semiótica —, pretendemos investigar as seguintes questões:

1 De que maneira a categorização dos signos estabelecida por Peirce está associada às etapas de uma atividade de Modelagem Matemática?

2 Os modos de inferência dos signos classificados por Kehle & Cunningham (2000) estão associados às ações cognitivas dos alunos nas diferentes etapas da Modelagem Matemática?

3 O fenômeno de congruência e não-congruência (estabelecido por Duval) de conversões realizadas entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática influencia a caracterização do objeto matemático?

4 As tarefas de produção e de compreensão (caracterizadas por Duval) interferem na coordenação entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática?

Para orientar nossa busca por respostas a essas questões, levando em conta as considerações enunciadas em 3.2, nos baseamos nos pressupostos teóricos sobre a Semiótica e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, apresentados no Capítulo 1, e sobre a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica, que abordamos no Capítulo 2.

3.3 PROCEDIMENTOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Com o objetivo de buscar relações entre Modelagem Matemática e Semiótica, estabelecendo reflexões sobre as questões enunciadas, analisamos três atividades de Modelagem Matemática. Assim, a pesquisa consiste em uma análise documental destas atividades e a enunciação de resultados se dará à luz do referencial teórico estabelecido.

Levando em consideração a maneira como pretendemos estabelecer e observar a articulação da Modelagem Matemática com a Semiótica e com os diferentes registros de representação, definimos uma abordagem de caráter qualitativo. Na concepção de Garnica (2004, p. 86),

> [...] o adjetivo "qualitativa" estará adequado às pesquisas que reconhecem: (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, se vale de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

3.3.1 A Escolha das Atividades de Modelagem Matemática

A escolha das atividades de Modelagem Matemática foi realizada observando a variedade de registros de representação semiótica proporcionada por cada uma delas. Além disso, levamos em conta a possibilidade de coordenação que cada atividade pode proporcionar em relação aos objetos matemáticos nela envolvidos.

As atividades foram selecionadas em trabalhos já publicados, sendo a escolha definida pelo critério de que uma atividade foi desenvolvida no âmbito do grupo no qual a nossa pesquisa se insere, uma atividade foi retirada de referência bibliográfica de âmbito nacional e uma terceira atividade foi retirada de referência de âmbito internacional de Modelagem Matemática.

Neste contexto, as atividades analisadas são:

1. Uma atividade desenvolvida por um dos membros do grupo de estudos (GRUPEMMAT[35]) com alunos do 1° ano do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). A descrição da atividade apresenta uma variedade de registros de representação semiótica do objeto matemático 'função definida por partes' e sinaliza ações cognitivas dos alunos com relação à compreensão do objeto matemático 'função contínua';
2. Uma atividade retirada dos anais da V Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM[36]) que corresponde a uma atividade de Modelagem Matemática de âmbito nacional, desenvolvida pelos autores com alunos na disciplina de Modelagem Matemática no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Regional de Ijuí (UNIJUÍ), no Rio Grande do Sul, em que há uma variedade de registros de representação semiótica e duas abordagens envolvendo conteúdos de diferentes níveis de escolaridade para o objeto matemático 'volume do cilindro';
3 Uma atividade selecionada dos anais da XIII International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA[37]) que corresponde a uma atividade de Modelagem Matemática de âmbito internacional, desenvolvida pelos autores com alunos do Ensino Superior que não estão no Curso de Matemática em um curso desenvolvido na Universidade Tsinghua, na China, em que há uma variedade de registros de representação semiótica envolvendo o objeto matemático 'Equações Diferenciais Ordinárias'.

---

[35] O grupo ao qual nos referimos é o Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT) constituído dentro do Departamento de Matemática da UEL como espaço para estudo sobre diferentes linhas de pesquisa em Educação Matemática, entre elas a Modelagem Matemática e suas perspectivas na Educação Matemática, Semiótica e diferentes representações em Matemática. As reuniões do grupo ocorrem uma vez na semana no período vespertino.

[36] A Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM) é um evento nacional que tem como principal objetivo discutir pesquisas sobre Modelagem e Educação Matemática realizadas no Brasil. Sua periodicidade é de 2 anos e a cada evento defini-se o local da próxima edição. O último evento ocorreu em 2007 na cidade de Ouro Preto, no estado de Minas Gerais. A plenária decidiu que o próximo local a sediar o evento é a UEL (Londrina), no ano de 2009.

[37] A International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications é um evento internacional que tem como principal objetivo discutir pesquisas sobre Modelagem Matemática realizadas no mundo. Sua periodicidade é de 2 anos. O último evento ocorreu em 2007 nos Estados Unidos e o próximo país a sediar o evento é a Alemanha, no ano de 2009.

3.3.2 A Condução da Análise

A análise dos dados apresentados nas atividades selecionadas é realizada conforme o objetivo que nos propusemos a atingir, que consiste em buscar relações entre Modelagem Matemática e Semiótica, levando em consideração as etapas de uma atividade de Modelagem Matemática e os diferentes registros envolvidos no desenvolvimento de cada atividade. Fazemos uma análise predominantemente qualitativa que é realizada em duas etapas: uma análise específica para cada atividade e uma análise geral, relativa às três atividades.

A análise específica consiste em identificar, nas atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas, as relações que existem entre as etapas de uma atividade de Modelagem e a categorização dos signos estabelecida por Peirce, os modos de inferência dos signos classificados por Kehle & Cunningham (2000) e as ações cognitivas dos alunos estabelecidas por Ferri (2006), o fenômeno de congruência e não-congruência das conversões realizadas entre os diferentes registros de representação e as tarefas de produção e de compreensão na conceitualização do objeto matemático em estudo.

Assim, o foco da análise específica de nossa pesquisa são as estratégias utilizadas pelo(s) modelador(es) durante o desenvolvimento e a resolução do problema proposto pela atividade de Modelagem Matemática, analisando a relação triádica, os modos de inferências, as tarefas de produção e de compreensão e o fenômeno de congruência e não-congruência nas conversões entre os registros utilizados nesta atividade.

A análise geral leva em consideração as três atividades analisadas, buscando respostas para as questões enunciadas pela pesquisa, a partir das análises específicas.

A descrição das atividades e as análises são apresentadas no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 4

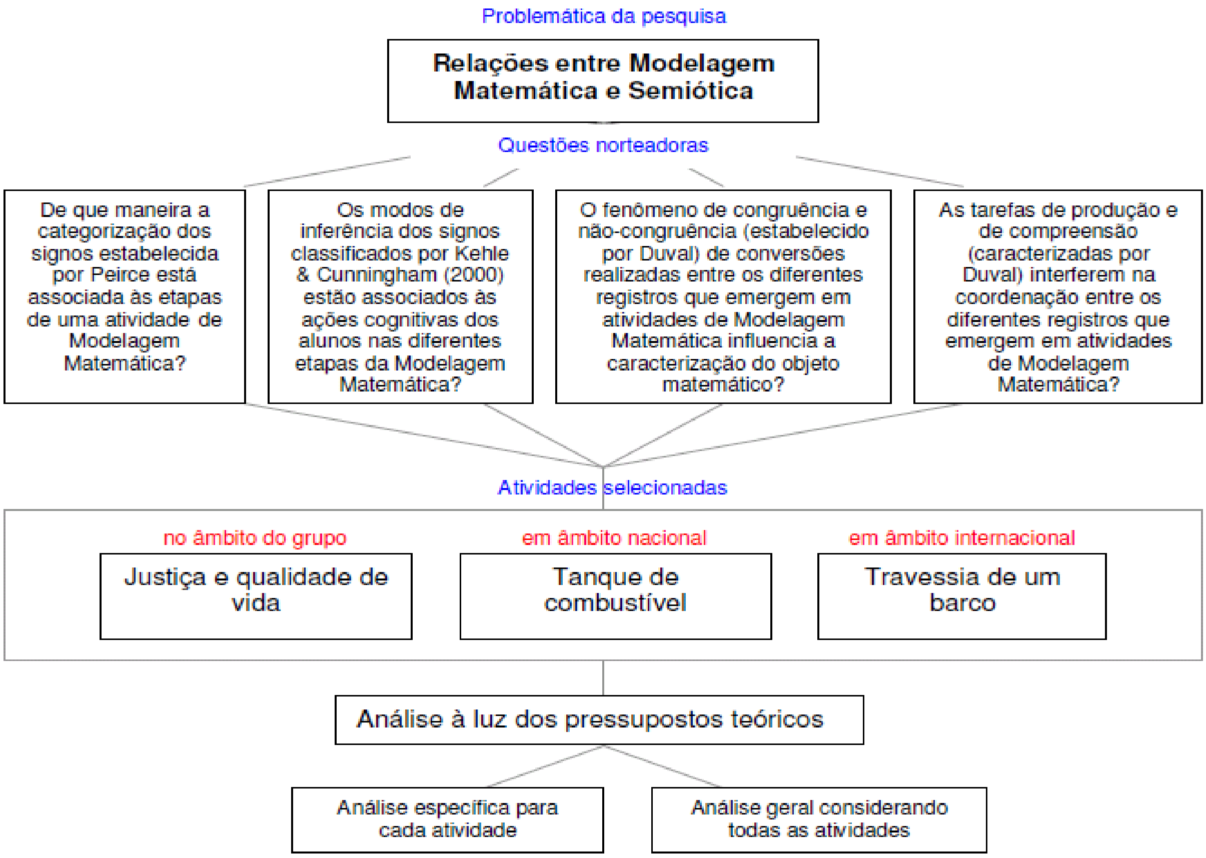
DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM E ANÁLISE DOS DADOS À LUZ DOS PRESSUPOSTOS TEÓRICOS ESTABELECIDOS

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos as três atividades de Modelagem Matemática selecionadas, seguidas da análise específica de cada atividade conforme caracterizado em 3.3.3. A seguir fazemos uma análise geral à luz dos pressupostos teóricos, buscando respostas para as questões de pesquisa enunciadas.

A Figura 4.1 mostra como as informações contidas neste capítulo estão organizadas.

Figura 4.1 – Esquema da organização do Capítulo 4.



4.2 CONDUÇÃO DAS ANÁLISES

A análise documental que realizamos visa estabelecer reflexões sobre a problemática que nos propusemos a estudar, a qual consiste em buscar relações entre Modelagem Matemática e Semiótica.

A busca destas relações é efetivada a partir de respostas para as questões norteadoras estabelecidas:

1. De que maneira a categorização dos signos estabelecida por Peirce está associada às etapas de uma atividade de Modelagem Matemática?
2. Os modos de inferência dos signos classificados por Kehle & Cunningham (2000) estão associados às ações cognitivas dos alunos nas diferentes etapas da Modelagem Matemática?
3. O fenômeno de congruência e não-congruência (estabelecido por Duval) de conversões realizadas entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática influencia a caracterização do objeto matemático?
4. As tarefas de produção e de compreensão (caracterizadas por Duval) interferem na coordenação entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática?

Conforme apresentado no Capítulo 3, selecionamos três atividades de Modelagem Matemática, levando em consideração os diferentes registros de representação abordados em cada uma delas e sendo uma delas do âmbito do grupo de estudo no qual a pesquisadora está inserida (GRUPEMMAT), uma atividade de âmbito nacional (CNMEM) e uma atividade de âmbito internacional (ICTMA).

Os documentos que analisamos correspondem ao material publicado pelo(s) pesquisador(es) de cada atividade de MM, bem como complementos de registros que se fizeram necessários para a compreensão do desenvolvimento da atividade. O conteúdo desse material é apresentado por meio de descrição. Assim, as atividades são apresentadas na íntegra e os registros de representação abordados em cada atividade são recortados e analisados seguindo os pressupostos teóricos estabelecidos.

A apresentação da análise se faz por meio de uma descrição sobre os dados e sobre narrativas presentes na descrição das atividades de Modelagem

Matemática e o trabalho envolve três grupos de participantes: a autora desta pesquisa, o(s) autor(es) dos trabalhos dos quais cada atividade foi retirada e os modeladores de cada atividade, que correspondem a alunos do Ensino Superior.

Nossa análise é de caráter qualitativo e foi realizada em duas etapas: uma análise específica para cada atividade e uma análise geral à luz dos pressupostos teóricos, levando em consideração as análises específicas de todas as atividades.

4.3 Apresentação das Atividades e as Análises Específicas

Ao descrever as atividades de Modelagem selecionadas, focalizamos aspectos gerais da resolução dos problemas. Nas atividades, abordamos o fenômeno de congruência e não-congruência em conversões entre os registros de representação, além de estudarmos as naturezas dos registros de representação semiótica abordadas por Duval (2003) e a relação triádica estabelecida por Peirce (2005), na qual o signo se relaciona consigo mesmo e com o objeto. Ao apresentar tais situações e os signos apresentados pelo(s) autor(es) da atividade no decorrer das mesmas, realizamos o que denominamos em 3.3 de análise específica.

Fazemos a análise específica de três atividades de Modelagem Matemática intituladas "Justiça e qualidade de vida", "Tanque de combustível" e "Travessia de um barco".

Descrevemos cada atividade de Modelagem Matemática como foi desenvolvida pelo(s) autor(es) e, em seguida, fazemos a análise específica da atividade.

4.3.1 Atividade 1: Justiça e Qualidade de Vida

Esta atividade foi extraída do trabalho de dissertação de Vertuan (2007) e corresponde à atividade desenvolvida no âmbito do grupo de estudos no qual a pesquisadora está inserida (GRUPEMMAT). Conforme o autor descreve, essa atividade foi desenvolvida por um grupo de três alunas do 1° ano do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) em um "curso de Modelagem Matemática" ministrado pelo autor. Nessa atividade, foi obtido um modelo que descreve como o número de dias para resolver uma disputa comercial na justiça pode influenciar na qualidade de vida de um país e qual a redução no número de dias necessária, no caso do Brasil, para que o país atinja um índice de desenvolvimento humano (IDH)[38] mais elevado.

Segundo Vertuan (2007), para desenvolver a atividade, o grupo de alunas usou informações de uma matéria com o título "Justiça e Qualidade de Vida" da revista Veja de 30 de junho de 2004.

Descrevemos a atividade como foi apresentada em Vertuan (2007).

O IDH mede o nível de desenvolvimento humano a partir de indicadores de educação, longevidade e renda. Essa medida indica o que, popularmente, denomina-se qualidade de vida.

Os valores do IDH variam de 0 (nenhum desenvolvimento humano) a 1 (desenvolvimento humano total). Países com IDH até 0,499 são considerados de desenvolvimento humano baixo; com índices entre 0,500 e 0,799 são considerados de desenvolvimento humano médio; e com índices maiores que 0,800 são considerados de desenvolvimento humano alto.

O IDH é utilizado, por muitos, para classificar os países em pobres e ricos e essa diferença entre pobres e ricos é o que muitos estudiosos tentam explicar. Uma teoria que se enquadra nos dias atuais, segundo pesquisa das alunas, é a de Douglas North. Esse americano, ganhador do Prêmio Nobel de Economia em 1993, sustenta que, prosperam mais rapidamente os países que têm regras claras de funcionamento da economia, justiça rápida e eficiente e instituições políticas sólidas.

Fonte: Vertuan (2007)

[38] Essa medida indica o que, popularmente, denomina-se qualidade de vida. Os valores do IDH variam de 0 (nenhum desenvolvimento humano) a 1 (desenvolvimento humano total). Países com IDH até 0,499 são considerados de desenvolvimento humano baixo; com índices entre 0,500 e 0,799 são considerados de desenvolvimento humano médio; e com índices maiores que 0,800 são considerados de desenvolvimento humano alto.

Justiça rápida e eficiente favorece o crescimento econômico que, conseqüentemente, possibilita melhor qualidade de vida. Esta idéia pode ser comprovada por meio dos dados do gráfico abaixo, retirado da matéria da revista Veja. Trata-se de um gráfico de barras destacando uma possível relação entre justiça[39] e qualidade de vida. Esse gráfico é apresentado na Figura 4.2.

Figura 4.2 – Gráfico sobre Justiça e Qualidade de vida.

Reconhecimento do tema

Justiça X Qualidade de vida

Reconhecimento do problema

Encontrar um modelo que descreva como o número de dias para resolver uma disputa comercial na justiça pode influenciar na qualidade de vida de um país. Qual a redução no número de dias necessária, no caso do Brasil, para que o país atinja um IDH alto, ou seja, IDH=0,8?

Seleção das variáveis

j: número de dias para resolver uma disputa comercial na justiça
Q: qualidade de vida

Levantamento de hipóteses

Hipótese 1: As alunas consideraram que todo país que leva uma quantidade j de dias para resolver uma disputa comercial na justiça teria uma mesma qualidade de vida Q;

Fonte: Vertuan (2007)

[39] Justiça é a virtude de dar a cada um aquilo que é seu; qualidade do que está em conformidade com o que é direito, com o que é justo; princípio moral em nome do qual o direito deve ser respeitado (HOUAISS, 2001, p. 1696).

Hipótese 2: Depois de desenhar os pontos da tabela no plano cartesiano, as alunas resolveram utilizar uma função definida por partes, sendo uma quadrática no primeiro intervalo e uma exponencial no segundo intervalo. Pensaram primeiro em utilizar duas quadráticas, mas como a qualidade de vida tende a zero para valores grandes de j optaram pela exponencial no segundo intervalo.

Hipótese 3: Embora não exista país que demore "zero dias" para resolver uma disputa comercial na justiça, as alunas consideraram que se isso acontecesse o país teria IDH igual a 1. A partir disso, encontraram um valor médio entre os pontos (0,1) e (39, 0.938) e entre os pontos (730, 0.463) e (865, 0.377), com a finalidade de ajustar funções com um menor erro. Ficaram com os valores apresentados na Tabela 4.1 e que foram inseridos em um gráfico (Figura 4.3):

Tabela 4.1 – Pontos $(j, Q(j))$

j	Q
19,5	0,969
39	0,938
101	0,930
147	0,918
380	0,777
548	0,499
730	0,463
797,5	0,420
865	0,377

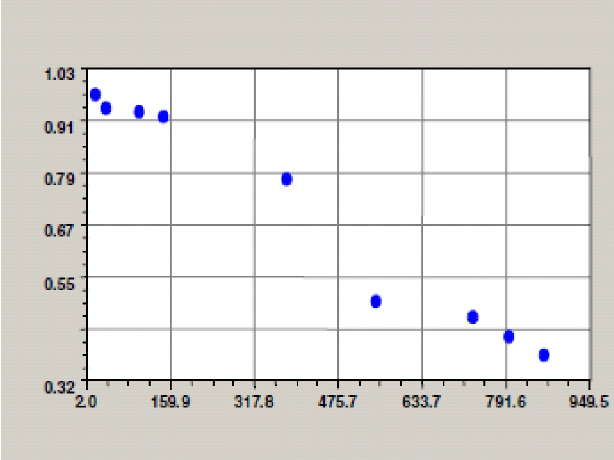


Figura 4.3 – Gráfico dos pontos $(j, Q(j))$.

Dedução do modelo

As alunas ajustaram uma função quadrática aos dados no intervalo (0,380], usando os pontos: (19.5, 0.969); (147, 0.918) e (380, 0.777). O modelo encontrado é:

$$Q(j) = -0{,}000000617.j^2 - 0{,}000297.j + 0{,}979, \quad se \quad 0 < j \leq 380$$

Para o intervalo (380, ∞) as alunas ajustaram uma função do tipo $Q(j) = a.b^j$, usando os pontos: (380, 0.777) e (797.5, 0.420). O modelo encontrado é:

$$Q(j) = 1{,}136.0{,}999^j, \quad se \quad j > 380$$

Logo, a função que descreve a qualidade de vida em função do número de dias para resolver um problema na justiça é dada por:

$$Q(j) = \begin{cases} -0{,}000000617.j^2 - 0{,}000297.j + 0{,}979, & se \quad 0 < j \leq 380 \\ 1{,}136.0{,}999^j, & se \quad j > 380 \end{cases}$$

cuja representação gráfica é apresentada na Figura 4.4:

Fonte: Vertuan (2007)

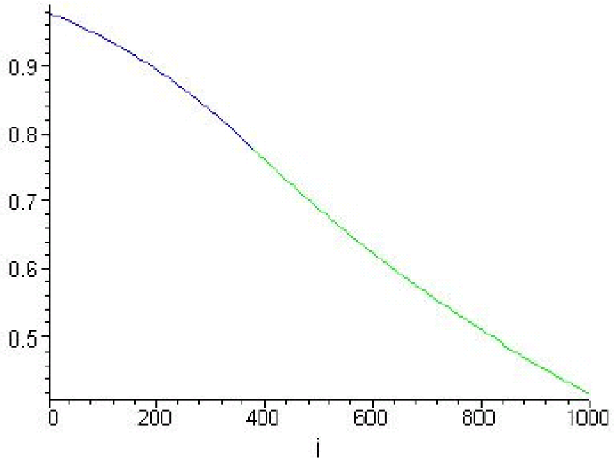


Figura 4.4 – Gráfico de $Q(j)$.

Como o ponto crítico da função ocorre para $j = 380$, as alunas resolveram verificar se, no ponto $(380, Q(380))$, a função obtida é contínua e derivável. Utilizando os registros algébrico e aritmético para isso, concluíram que a função, embora contínua, não é derivável em $j = 380$.

As alunas tiveram de restringir o domínio da função e definiram $DomQ' = \{j \in \Re_+ / j \neq 380\}$. A representação da função derivada em seu registro algébrico é:

$$Q'(j) = \begin{cases} -0{,}000001234.j - 0{,}000297, & se \quad 0 < j < 380 \\ -0{,}00114.0{,}999^{j}, & se \quad j > 380 \end{cases}$$

cuja representação no registro gráfico é apresentada na Figura 4.5.

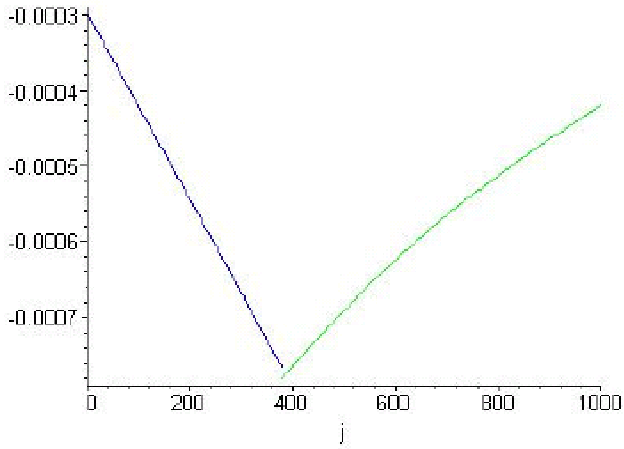


Figura 4.5 – Gráfico de $Q'(j)$.

A partir do modelo construído e do estudo da derivada da função, as alunas responderam à pergunta inicial: Em qual intervalo temos uma pequena variação na quantidade de dias para resolver uma disputa comercial na justiça e, em conseqüência, uma melhora significativa na qualidade de vida?

Fonte: Vertuan (2007)

Apresentamos, a seguir, as respostas dadas pelas alunas para o problema.

"*Observando a função derivada, notamos que próximo de j = 380, uma pequena variação na quantidade de dias para resolver uma disputa comercial na justiça implica numa melhora significativa na qualidade de vida.*

Além disso, podemos responder à pergunta inicial: Qual a redução no número de dias necessária, no caso do Brasil, para que o país atinja um IDH alto, ou seja, IDH=0,8?

Segundo o modelo construído e, realizando os cálculos pertinentes, verificamos que para apresentar IDH=0,8 é preciso que o Brasil reduza de 380 para 349 dias a quantidade de dias necessária para resolver uma disputa comercial na justiça. Assim, se só dependesse de justiça rápida e eficiente, uma melhora de 31 dias significaria a classificação do Brasil como um país com ótima qualidade de vida e um alto IDH."

Fonte: Vertuan (2007)

4.3.1.1 Análise específica da atividade

A motivação para o estudo da situação originou-se do registro figural (gráfico de barras) encontrado na revista. Para a escolha do tema — Justiça e qualidade de vida —, as alunas tiveram que passar pelo modo de inferência de abdução Palpite. Ao observar o registro figural (gráfico de barras), as alunas possivelmente tiveram um primeiro palpite para a definição do que, de fato, representa um problema nesta situação. Na escolha da situação a ser estudada, elas tiveram uma primeira impressão (primeiridade) do que esta representação inicial significa, enquanto um problema a estudar. Referindo-se à tomada de consciência na primeiridade, Santaella (2008b, p.46) afirma que "[...] é qualidade de sentimento e, por isso, mesmo, é primeira, ou seja, a primeira apreensão das coisas, que para nós aparecem, já é tradução, finíssima película de mediação entre nós e os fenômenos" .

Figura 4.2 – Gráfico sobre justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007)

Considerando a classificação dos signos definida por Peirce e apresentada na seção 1.3.2 deste texto e aqui reapresentada por questão de conveniência (Quadro 4.1), como a representação informa uma qualidade da situação em estudo, na relação do signo em si mesmo (significação) é um quali-signo e na relação do signo com o objeto (objetivação) o registro figural (gráfico de barras) apresentado na revista é um ícone, uma "figura" que representa um objeto que ainda será caracterizado.

Quadro 4.1 – Reapresentação do quadro com a classificação dos signos semióticos, segundo Peirce.

	Significação Signo em si mesmo	Objetivação Signo com seu objeto	Interpretação Signo com seu interpretante
Primeiridade	Quali-signo	Ícone	Rema
Secundidade	Sin-signo	Índice	Dicente
Terceiridade	Legi-signo	Símbolo	Argumento

Quadro 1.1 – Classificação dos signos semióticos.

Segundo a natureza dos registros de representação estabelecida por Duval (2003), esse registro inicial é de natureza monofuncional apresentado de maneira formal e de representação não-discursiva, pois não se associa a uma argumentação.

Nesse caso, as relações de significação (relação do signo consigo mesmo) e de objetivação (relação do signo com o objeto) foram estabelecidas pelo signo e evidenciadas pelas alunas no desenvolvimento da atividade, pois elas se propuseram a realizar um estudo a partir do registro inicial, ou seja, a partir de uma qualidade e de um ícone apresentaram um problema a ser estudado e que, na classificação de Kehle & Cunningham (2000), corresponde a um Palpite, como um tipo de modo de inferência de abdução. Estes autores afirmam que os signos icônicos (como é o caso da Figura 4.2) envolvem modos de inferência de abdução, pois partem da experiência, da realidade. Isto pode ser associado com o fato de que, quando as alunas observaram o registro figural (gráfico de barras), elas observaram um signo, que representa algo em lugar de outra coisa e, a partir desse signo, se propuseram a estudar um problema. Segundo Santaella (2007, p. 15) "os signos só podem se reportar a algo, porque, de alguma maneira, esse algo que eles denotam está representado dentro do próprio signo", e nessa atividade as alunas evidenciaram este "algo" representado.

A partir do Palpite estabelecido, as alunas partiram para o reconhecimento do problema a ser estudado. Essa etapa corresponde ao modo de inferência de abdução Pista, pois as alunas evidenciaram a existência de algum fenômeno a ser estudado e, na categorização de Peirce, encontram-se na Secundidade, indo ao encontro do que afirma Santaella (2008b, p. 47-48)

> Certamente, onde quer que haja um fenômeno, há uma qualidade, isto é, sua primeiridade. Mas a qualidade é apenas uma parte do fenômeno, visto que, para existir, a qualidade tem de estar encarnada numa matéria. A factualidade do existir (fecundidade) está nessa corporificação material. [...] Qualquer relação de dependência entre dois termos é uma relação diádica, isto é, secundidade.

As alunas realizaram uma conversão do registro figural (gráfico de barras) para o registro em língua natural para definir o problema, apresentado na Figura 4.6, estabelecendo uma relação diádica entre esses dois registros.

Figura 4.6 – Reconhecimento do problema da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

Reconhecimento do problema
Encontrar um modelo que descreva como o número de dias para resolver uma disputa comercial na justiça pode influenciar na qualidade de vida de um país. Qual a redução no número de dias necessária, no caso do Brasil, para que o país atinja um IDH alto, ou seja, IDH=0,8?

Considerando novamente a classificação dos signos do Quadro 4.1, como a representação do Reconhecimento do problema corresponde à existência de algo para ser estudado, na relação do signo em si mesmo, é um sin-signo e na relação do signo com o objeto é um índice, a representação de algo específico para ser estudado. Esse registro foi expresso em língua natural, que é um registro de representação de natureza multifuncional, pois se trata de uma forma de representação não-algoritmizável e de representação discursiva, associada a uma argumentação.

Esta conversão do registro figural (gráfico de barras) para o registro em língua natural (Figura 4.6) é não-congruente com nível de não-congruência alto, pois não satisfaz às três condições de congruência definidas por Duval, ou seja, não há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; não há unicidade semântica terminal; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações.

A natureza dos registros de representação associados à conversão do registro figural (Figura 4.2, gráfico de barras) para o registro em língua natural (Figura 4.6) é distinta; o registro inicial (gráfico de barras) é de natureza monofuncional, enquanto o outro (reconhecimento do problema) é de natureza multifuncional, o que torna a atividade de conversão mais complexa. Segundo Duval (2003, p. 25), a atividade de conversão "pode ser mais complexa se houver a necessidade de passagens entre registro monofuncional e registro plurifuncional (ou multifuncional)".

O Quadro 4.2 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão do registro figural para o registro em língua natural.

Quadro 4.2 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro figural para o registro em língua natural da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Figural	Língua natural
Natureza do registro	Monofuncional/ representação não-discursiva	Multifuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Quali-signo	Sin-signo
Relação do signo com o objeto	Ícone	Índice
Conversão não-congruente com nível de não-congruência alto		

Na atividade de Modelagem Matemática, a etapa de definição do problema requer do modelador uma noção do que pode ser estudado a partir dos dados obtidos. Da situação real (Palpite) para a definição do problema (Pista) houve uma conversão não-congruente.

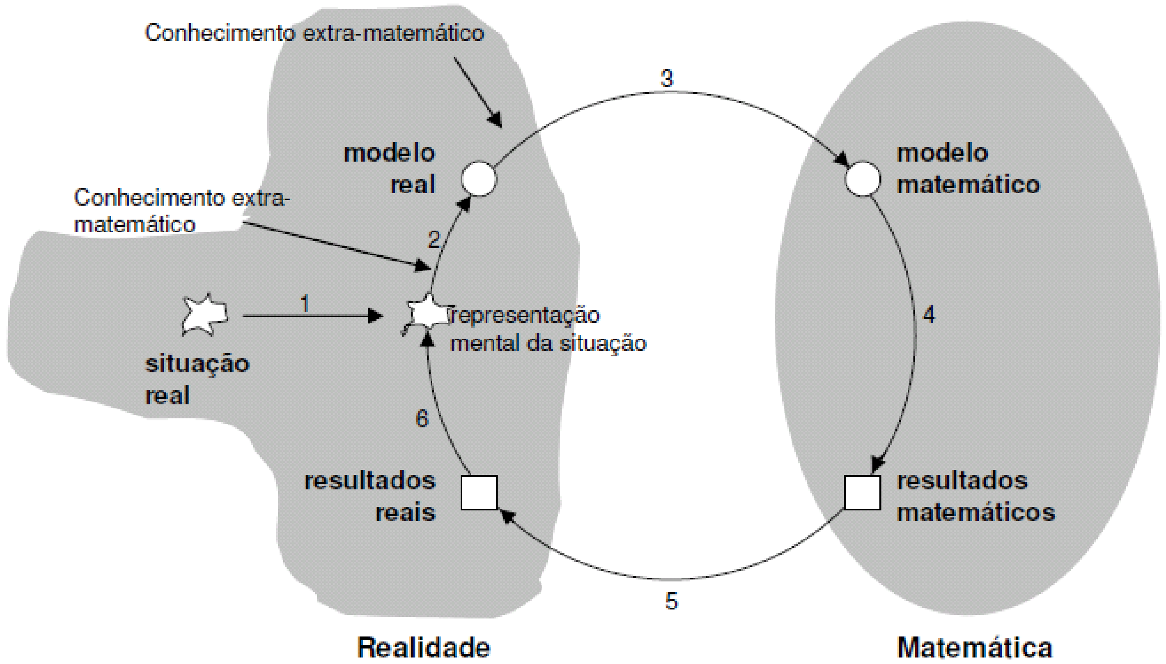
Até este momento da atividade, os registros de representação ainda não deixam transparecer uma caracterização do objeto matemático. Para Vertuan (2007, p. 101), "Isto denota que, de fato, semiosis antecedem noesis, ou seja, as representações são necessárias à compreensão do objeto". Todavia podemos considerar que as alunas compreendem a ação de associar a uma situação real um modelo real (um problema a ser estudado), passando pela representação mental da situação.

Segundo Ferri (2006, p. 92 [tradução livre]), "no processo de transição da representação mental da situação para o modelo real ocorre uma idealização e uma simplificação do problema [...]"[40] . A simplificação do problema é uma das ações cognitivas estabelecidas por Ferri (2006) no desenvolvimento de uma atividade de MM. As ações cognitivas foram apresentadas no Capítulo 3 sob a forma de um esquema das etapas da MM e aqui reapresentadas na Figura 4.7. Considerando as etapas da Modelagem Matemática caracterizadas e as ações cognitivas (compreensão da ação e simplificação/estruturação da ação) das alunas realizadas ao percorrer estas etapas, podemos concluir que elas realizaram de

[40] Tradução de "Within the transition process from MRS to real model na idealisation and simplication of the probem takes place[...] "(FERRI, 2006, P.92)

forma satisfatória uma conversão não-congruente com nível de não-congruência alto.

Figura 4.7 – Ciclo da Modelagem Matemática sobre uma perspectiva cognitiva (FERRI, 2006, p.92)



1. Compreensão da ação
2. Simplificação/estruturação da ação; a utilização do conhecimento extra-matemático depende da ação
3. Matematização; o conhecimento extra-matemático se faz necessário fortemente nesse momento
4. Trabalhando matematicamente, utilizando as competências matemáticas individuais
5. Interpretação
6. Validação

Nas etapas de MM que correspondem, respectivamente, à escolha da situação a ser estudada e à definição do problema a ser estudado, foram abordados os modos de inferência de abdução Palpite (na escolha da situação que poderia ser estudada, apresentando um palpite que poderia levar ao estudo) e Pista (na definição do problema, quando indicam algo para ser estudado) e as categorias fenomenológicas Primeiridade e Secundidade que levaram à definição de um problema que corresponde à situação inicial. Neste caso, podemos inferir que os modos de inferência classificados por Kehle & Cunningham (2000) estão associados às ações cognitivas envolvidas na escolha da situação (compreensão da ação) e na definição do problema (estruturação da ação).

Para resolver o problema definido, inicialmente, é preciso selecionar variáveis e definir hipóteses para subsidiar a construção do modelo.

Na Figura 4.8 apresentamos as variáveis selecionadas pelas alunas para o estudo do problema.

Figura 4.8 – Seleção das variáveis para o desenvolvimento da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

Seleção das variáveis
j: número de dias para resolver uma disputa comercial na justiça
Q: qualidade de vida

A seleção das variáveis estabelece uma matematização da situação e corresponde à idéia de escrever em linguagem matemática a informação dos dados da figura. Segundo o Quadro 4.1, como este registro de representação corresponde à existência de variáveis, na relação do signo em si mesmo, é um sin-signo e na relação do signo com o objeto é um índice, que representa algo que há possibilidade de ser investigado e caracterizado. Além disso, os registros de representação são expressos em língua natural e linguagem matemática que são registros de natureza multifuncional e de representação discursiva.

Para Duval (2003, p. 25),

> O grau de profundidade das dificuldades levantadas para a aprendizagem da matemática não é o mesmo segundo a natureza dos registros em presença dos quais uma pessoa se encontra. No que se refere aos tratamentos, as dificuldades mais sérias concernem aos registros plurifuncionais (multifuncionais) [...].

Do reconhecimento do problema para a seleção das variáveis houve um tratamento de registro em língua natural, pois ao selecionar as variáveis é preciso realizar uma interpretação do problema. Nessas etapas, como as alunas evidenciaram a existência de algo para ser estudado, encontram-se na Secundidade. O Quadro 4.3 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e o tratamento abordado nesses registros.

Quadro 4.3 – Estudo dos registros de representação semiótica e tratamento do registro em língua natural da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Língua natural	Língua natural
Natureza do registro	Multifuncional/ representação discursiva	Multifuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Sin-signo	Sin-signo
Relação do signo com o objeto	Índice	Índice
Tratamento		

Os registros apresentados pelas alunas dão indícios de que elas compreenderam o objetivo do problema a estudar e as variáveis selecionadas condizem com este problema. Dessa forma, as relações de significação (relação do signo consigo mesmo) e de objetivação (relação do signo com o objeto) foram estabelecidas pelos signos e compreendidas pelas alunas. Nas etapas da definição do problema e da seleção de variáveis foram realizadas tarefa de produção (na seleção das variáveis), pois realizou-se um tratamento, e tarefa de compreensão (na definição do problema), pois realizou-se uma conversão. Duval (2003, p. 16) afirma que é a atividade de conversão que conduz aos "mecanismos subjacentes à compreensão" e, é neste sentido, que argumentamos pela presença dos indícios de compreensão.

No levantamento de hipóteses, apresentado na Figura 4.9, foram interpretadas algumas informações contidas na reportagem e em pesquisas realizadas para o entendimento da situação. As hipóteses são apresentadas em registro de língua natural, que é de natureza multifuncional (não-algoritmizável) e de representação discursiva (relacionada a um argumento).

Figura 4.9 – Levantamento de hipóteses para o desenvolvimento da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

Levantamento de hipóteses
Hipótese 1: As alunas consideraram que todo país que leva uma quantidade j de dias para resolver uma disputa comercial na justiça teria uma mesma qualidade de vida Q;
Hipótese 2: Depois de desenhar os pontos da tabela no plano cartesiano, as alunas resolveram utilizar uma função definida por partes, sendo uma quadrática no primeiro intervalo e uma exponencial no segundo intervalo. Pensaram primeiro em utilizar duas quadráticas, mas como a qualidade de vida tende a zero para valores grandes de j optaram pela exponencial no segundo intervalo.
Hipótese 3: Embora não exista país que demore "zero dias" para resolver uma disputa comercial na justiça, as alunas consideraram que se isso acontecesse o país teria IDH igual a 1. A partir disso, encontraram um valor médio entre os pontos (0, 1) e (39, 0.938) e entre os pontos (730, 0.463) e (865, 0.377), com a finalidade de ajustar funções com um menor erro.

Nesta etapa (levantamento de hipóteses) da Modelagem Matemática, as alunas fizeram conjecturas (hipótese 1), evidenciaram algumas regularidades nos dados obtidos (hipótese 2) e raciocinaram logicamente para minimizar o erro entre os dados (hipótese 3). Com isso, elas passaram pelos modos de inferência de abdução:

1. Diagnótico: ao apresentarem uma eventual regra baseada em evidências disponíveis, propondo uma hipótese plausível a partir do conjunto de pistas levantadas (hipótese 1);
2. Analogia: manipularam comparações para criar ou descobrir uma possível regra (hipótese 2);
3. Sintoma: resolveram a situação com informações que, embora possam parecer pouco importantes, são necessárias para resolver o problema (hipótese 3).

Na etapa de levantamento de hipóteses, os modos de inferências envolvidos foram Diagnóstico, Analogia e Sintoma, o que caracterizam as categorias Secundidade e Terceiridade, definidas por Peirce. Para Santaella (2008b, p. 51), a terceiridade corresponde "à camada de inteligibilidade, ou pensamento em signos, através da qual representamos e interpretamos o mundo". E a terceiridade que aproxima a primeiridade e a secundidade. Esta aproximação é sinalizada quando as alunas começam a estabelecer regularidades, iniciando a dedução e obtenção do modelo matemático. No levantamento de hipóteses, foram levadas em consideração as características relacionadas à existência e à regularidade.

Na definição da hipótese 1, as alunas tiveram que fazer algumas simplificações, desconsiderando os países e levando em consideração apenas os dados matemáticos apresentados e os estudos que realizaram com relação ao tema escolhido. A ação cognitiva das alunas no levantamento dessa hipótese é a de simplificação da ação, segundo o esquema (Figura 4.7) apresentado por Ferri (2006), e o modo de inferência de abdução Diagnóstico associa-se a essa ação.

Na Figura 4.10 apresentamos os registros de representação utilizados pelas alunas durante o levantamento das hipóteses 2 e 3. Além desses registros, o registro figural (gráfico de barras) também foi utilizado para o levantamento das hipóteses.

Figura 4.10 – Registros utilizados pelas alunas para o levantamento das hipóteses 2 e 3 para o desenvolvimento da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

Tabela 4.1 – Pontos $(j, Q(j))$.

j	Q
19,5	0,969
39	0,938
101	0,930
147	0,918
380	0,777
548	0,499
730	0,463
797,5	0,420
865	0,377

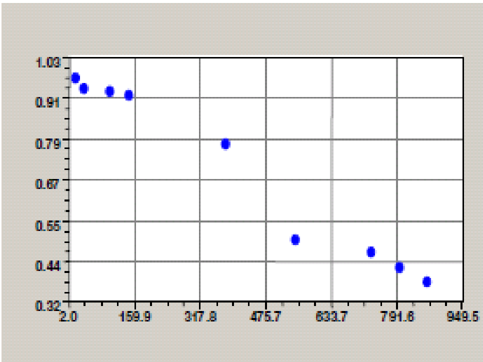


Figura 4.3 – Gráfico dos pontos $(j, Q(j))$.

Na definição da hipótese 2, foram feitas duas conversões:

a) Registro figural (Figura 4.2) para o registro tabular (Tabela 4.1), apresentados na Figura 4.11.

Figura 4.11 – Registros utilizados pelas alunas para o levantamento da hipótese 2 para o desenvolvimento da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

Figura 4.2 – Gráfico sobre Justiça e Qualidade de vida.

Tabela 4.1 – Pontos $(j, Q(j))$.

j	Q
19,5	0,969
39	0,938
101	0,930
147	0,918
380	0,777
548	0,499
730	0,463
797,5	0,420
865	0,377

Nesta conversão, as alunas selecionaram os pontos apresentados na Figura 4.2 (gráfico de barras) e dispuseram tais pontos em uma tabela (Tabela 4.1). Essa conversão é congruente, pois há conservação semântica das unidades significantes, unicidade semântica terminal e mesma ordem de apreensão das unidades significantes. Além disso, ambos os registros são de natureza monofuncional (algoritmizável), diferenciando apenas no fato de que o registro figural é de representação não-discursiva e o registro tabular é de representação discursiva. O nível de congruência da conversão é alto, pois as alunas que realizaram a atividade de MM encontram-se no 1° ano do Curso de Matemática e acredita-se que em tal nível de escolaridade a conversão de um registro gráfico para um registro tabular constitui uma atividade de codificação, considerando o que Duval (2003, p. 17) salienta que por trás de uma regra de codificação há "a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do pensamento do funcionamento de cada um dos dois registros".

As relações dos signos em si mesmos são distintas e também o são as relações do signo com o objeto, saindo de um quali-signo icônico, que apresenta uma qualidade e uma figura para ser estudado e obtendo um sin-signo indicial, que representa algo para ser estudado. Embora as alunas se encontrem no modo de inferência de abdução Analogia, que corresponde à Secundidade, utilizaram o registro da Primeiridade para fazer a conversão. Isso ocorre, pois segundo Santaella

(2008b, p. 51), a Secundidade necessita da Primeiridade para fazer sentido, pois a Secundidade "dá à experiência seu caráter factual". Como a ação cognitiva das alunas no levantamento dessa hipótese é a de estruturação da ação, o modo de inferência de abdução Analogia associa-se a essa ação.

O Quadro 4.4 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão abordada nesses registros.

Quadro 4.4 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro figural para o tabular da etapa de levantamento de hipóteses da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Figural	Tabular
Natureza do registro	Monofuncional/ representação não-discursiva	Monofuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Quali-signo	Sin-signo
Relação do signo com o objeto	Ícone	Índice
Conversão congruente com nível de congruência alto		

Esses registros dão evidências de que as alunas compreendem que, para a visualização dos pontos correspondentes ao número de dias para se resolver uma disputa comercial na justiça e à qualidade de vida, se faz necessária uma disposição espacial em forma de tabela, assim a significação (relação do signo em si mesmo) e a objetivação (relação do signo com o objeto) são efetivadas pelos signos e atingidas pelas alunas, no levantamento da hipótese 2.

b) Registro tabular (Tabela 4.1) para o registro gráfico (Figura 4.3), apresentados na Figura 4.10. Nesse caso, temos uma conversão congruente com nível de congruência alto, uma vez que as três condições de congruência são atendidas e localizar pares ordenados no plano cartesiano é, para este nível de escolaridade, uma atividade de codificação; ambos os registros são de natureza monofuncional, diferenciando apenas no fato de que o registro tabular é de representação discursiva e o registro gráfico é de representação não-discursiva.

As relações dos signos em si mesmos são distintas e também o são as relações do signo com o objeto, saindo de um sin-signo indiciai, que representa a existência de algo para ser estudado e obtendo um legi-signo simbólico, que foi definido a partir de uma lei que estabelece sua representação. Neste caso, o modo de inferência de abdução Analogia, corresponde à Terceiridade e está associado ao início da ação cognitiva de matematização da ação, na qual, segundo Ferri (2006), o sujeito utiliza-se de conhecimentos extra-matemáticos para deduzir o modelo matemático.

O Quadro 4.5 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão abordada nesses registros.

Quadro 4.5 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro tabular para o gráfico da etapa de levantamento de hipóteses da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Tabular	Gráfico
Natureza do registro	Monofuncional/ representação discursiva	Monofuncional/ representação não-discursiva
Relação do signo em si mesmo	Sin-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Índice	Símbolo
Conversão congruente com nível de congruência alto		

Esses registros dão evidências de que as alunas compreendem que para poderem definir a função que descreve a situação em estudo se faz necessário o uso do registro gráfico, assim a significação (relação do signo em si mesmo) e a objetivação (relação do signo com o objeto) são efetivadas pelos signos e atingidas pelas alunas, no levantamento da hipótese 2.

O que se pode observar da descrição da definição da hipótese 2 é que as duas conversões envolvidas são congruentes com nível de congruência alto e não oferecem dificuldades para as alunas, corroborando a afirmação de Duval

(2004, p. 17 [tradução livre]), que "Toda tarefa na qual a conversão das representações é congruente, dá lugar a uma taxa alta de acertos”[41] .

No que diz respeito à definição da hipótese 3, as alunas teceram algumas considerações sobre a questão de que se uma disputa comercial levasse zero dias para ser resolvida, o país apresentaria IDH = 1, que é o índice máximo considerado. Além disso, foram feitos tratamentos dentro do registro tabular (Tabela 4.1) ou mesmo do registro gráfico (Figura 4.3), nos quais as alunas calcularam o valor médio entre os valores mínimos considerados para a quantidade de dias para se resolver uma disputa comercial e a qualidade de vida correspondente e calcularam o valor médio entre o valor mínimo e o valor máximo da qualidade de vida. A média dos valores foi inserida na Tabela 4.1 e considerada no desenvolvimento da atividade de MM. Como as alunas estavam em um curso de Modelagem Matemática e, segundo Vertuan (2007), a atividade realizada por elas faz parte do Terceiro Momento[42], já tinham a noção de que se considerassem o ponto (0, 1) a porcentagem de erro no modelo matemático que poderiam obter seria muito alto e, provavelmente, não iria ser uma boa representação da situação em estudo. Para a definição desta hipótese, a ação cognitiva estabelecida por Ferri (2006) e utilizada pelas alunas corresponde a uma estruturação da ação. Assim, o modo de inferência de dedução Sintoma, que corresponde à Secundidade, associa-se a essa ação cognitiva.

Da definição do problema (Figura 4.6) para a seleção de variáveis (Figura 4.8) e levantamento de hipóteses (Figura 4.9), foram realizados tratamentos nos registros em língua natural (Figura 4.6 e Figura 4.8), no registro tabular (Tabela 4.1) e no registro figural (Figura 4.3), além de conversões congruentes do registro figural (gráfico de barras, Figura 4.2) para o registro tabular (Tabela 4.1); e do registro tabular (Tabela 4.1) para o registro gráfico (Figura 4.3), o que sinaliza que as alunas compreendem essas etapas de desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, pois até o momento abordaram as ações cognitivas estabelecidas por Ferri (2006) — compreensão da ação, simplificação/estruturação

[41] Tradução de "Toda tarea en la qual la conversión de lãs representaciones es congruente, da lugar a una taza alta de aciertos" (DUVAL, 2003, p. 17).

[42] As atividades de ensino por meio da MM podem ser desenvolvidas por meio de três momentos: no Primeiro Momento, o professor desenvolve com os alunos um trabalho de Modelagem já estruturado; no segundo momento, o professor traz para a sala de aula uma situação-problema já estruturada no contexto não matemático e os alunos resolvem a atividade de MM; no Terceiro Momento, os alunos desenvolvem uma atividade de MM na qual eles escolhem a situação-problema (ALMEIDA; DIAS, 2004).

da ação e início da matematização. Além disso, as conversões entre os registros de representação envolvidas são menos complexas, o que sinaliza que o fenômeno de congruência influenciou de forma positiva a caracterização do objeto matemático.

A partir do levantamento de hipóteses, o grupo iniciou a dedução e obtenção do modelo matemático. Para isso, a partir dos dados que tinham no levantamento de hipóteses, as alunas estabeleceram regras eventuais baseadas nas evidências que dispunham, passando pelo modo de inferência de abdução Diagnóstico, que se refere à Terceiridade. Além de estabelecer as regras, as alunas confirmaram tais regras, obtendo uma função definida por partes, passando pelo modo de inferência de abdução Explicação que se refere à Terceiridade. Estes procedimentos das alunas refletem a argumentação de Ferri (2006), de que, na dedução do modelo, o aluno avança com relação à ação cognitiva de matematização, além de utilizar fortemente conhecimentos extra-matemáticos para construir o modelo matemático.

Para determinar a curva que melhor se ajusta aos pontos do gráfico apresentado na Figura 4.3, as alunas consideraram dois intervalos e alguns dos pares de pontos. Como realizaram o traçado do gráfico a partir dos pontos que dispunham, as alunas encontram-se no modo de inferência de indução Identificação que se refere à Terceiridade. No primeiro intervalo considerado, foram utilizados três pares de pontos ((19.5, 0.969); (147, 0.918) e (380, 0.777)) e, no segundo intervalo, foram utilizados dois pares de pontos ((380, 0.777) e (797.5, 0.420)). Como as alunas encontram-se no 1° ano do Curso de Licenciatura em Matemática, não consideraram os pontos extremos apresentados no gráfico que gerou a atividade de MM. Esse fato evidencia que as alunas apresentam reais motivos que afirmam a existência de uma provável regra, passando pelo modo de inferência de indução Predição, que corresponde à Terceiridade. Até esse momento da dedução do modelo da atividade de MM, os modos de inferência Diagnóstico, Explicação, Identificação e Predição associam-se a ação cognitiva referente à matematização.

Utilizando o programa computacional Curve Expert, para os dados do primeiro intervalo ajustaram uma função quadrática e para os dados do segundo intervalo, ajustaram uma função exponencial, obtendo um modelo matemático que é dado por uma função definida por partes, como apresentado na Figura 4.12.

Figura 4.12 – Registros de representação semiótica utilizados na dedução do modelo matemático da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

As alunas ajustaram uma função quadrática aos dados no intervalo (0,380], usando os pontos: (19.5, 0.969); (147, 0.918) e (380, 0.777). O modelo encontrado é:

$$Q(j) = -0{,}000000617.j^2 - 0{,}000297.j + 0{,}979, \quad se \quad 0 < j \leq 380$$

Para o intervalo (380, ∞) as alunas ajustaram uma função do tipo $Q(j) = a.b^i$, usando os pontos: (380, 0.777) e (797.5, 0.420). O modelo encontrado é:

$$Q(j) = 1{,}136.0{,}999^j, \quad se \quad j > 380$$

Logo, a função que descreve a qualidade de vida em função do número de dias para resolver um problema na justiça é dada por:

$$Q(j) = \begin{cases} -0{,}000000617.j^2 - 0{,}000297.j + 0{,}979, & se \quad 0 < j \leq 380 \\ 1{,}136.0{,}999^j, & se \quad j > 380 \end{cases}$$

Apesar da existência de representação em língua natural, nos registros de representação apresentados na Figura 4.12, a língua natural não é o principal registro a ser considerado, mesmo que dê suporte aos tratamentos realizados no desenvolvimento do registro algébrico. Isso porque, segundo Duval (2003, p. 24), para a análise em toda tarefa "é necessário distinguir cuidadosamente o que se sobressalta no tratamento em um registro e aquilo que sobressalta em uma conversão".

Para o registro algébrico apresentado na Figura 4.12, segundo o Quadro 4.1, na relação do signo em si mesmo, como o signo foi definido a partir de uma lei, temos um legi-signo e na relação do signo com o objeto, temos um símbolo. O registro algébrico é de natureza monofuncional e de representação discursiva. Neste caso, houve uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico, apresentados na Figura 4.13.

Figura 4.13 – Conversão do registro gráfico para o registro algébrico da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

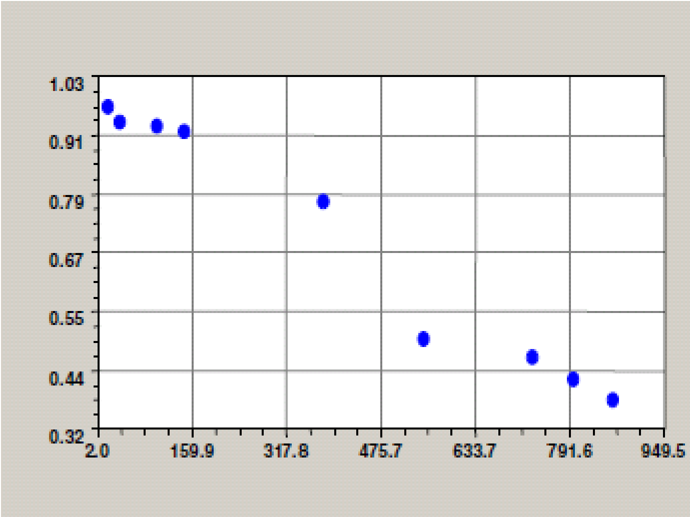


Figura 4.3 – Gráfico dos pontos $(j, Q(j))$.

$$Q(j) = \begin{cases} -0{,}000000617.j^2 - 0{,}000297.j + 0{,}979, & se \quad 0 < j \leq 380 \\ 1{,}136.0{,}999^j, \quad se \quad j > 380 \end{cases}$$

Tem-se uma conversão não-congruente com nível de não-congruência alto, pois as três condições de congruência não são satisfeitas, ou seja, não há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações, pois existem pares ordenados no plano cartesiano que não foram considerados para determinar a expressão algébrica; não há unicidade semântica terminal, pois a função que define o modelo poderia ser expressa por outra qualquer que correspondesse aos pares ordenados do plano cartesiano; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações. Além disso, a natureza dos registros são monofuncionais, no entanto, o registro gráfico é de representação não-discursiva e o registro algébrico é de representação discursiva. A conversão, nesse caso, é mais complexa visto que o registro de partida corresponde a uma lei (legi-signo) e o registro de chegada também é uma lei (legi-signo). Tais registros, na relação com o objeto matemático 'função definida por partes' referem-se a símbolos.

No entanto, a conversão foi realizada com sucesso pelas alunas, contrapondo-se à afirmação de Duval (2004, p. 56), referente à não-congruência das conversões em sala de aula, "[...] com muita freqüência conduz a fracassos na atividade cognitiva de conversão"[43] . Nesse caso, as relações de significação (relação do signo consigo mesmo) e de objetivação (relação do signo com o objeto) estabelecidas pelos signos ocorreram na etapa da dedução do modelo matemático.

O Quadro 4.6 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

Quadro 4.6 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro gráfico para o algébrico da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Gráfico	Algébrico
Natureza do registro	Monofuncional/ representação não-discursiva	Monofuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência alto		

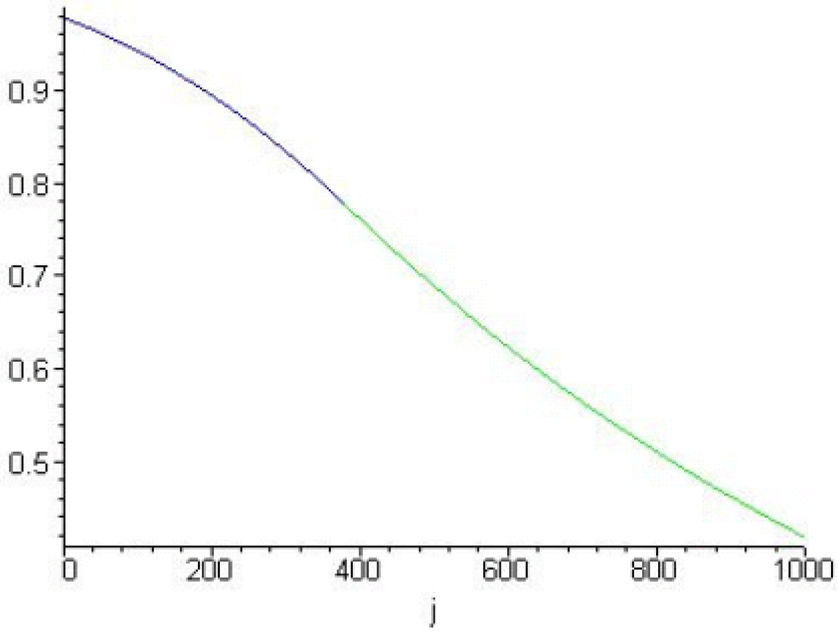
Durante o desenvolvimento da atividade, da situação real à dedução do modelo, foram evidenciados os seis modos de inferência de abdução — Palpite, na escolha da situação para ser estudada; Pista, no reconhecimento, na definição do problema; Analogia, no levantamento de hipóteses; Sintoma, no levantamento de hipóteses; Diagnóstico, no levantamento de hipóteses e na dedução e obtenção do modelo; Explicação, na dedução e obtenção do modelo —, que foram associados às ações cognitivas — Compreensão da ação, simplificação/estruturação da ação e matematização — estabelecidas por Ferri (2006), além das três categorias fenomenológicas (Primeiridade, Secundidade e Terceiridade). Os modos de inferência de indução Identificação e Predição ocorreram durante a obtenção e dedução do modelo e associaram-se à ação cognitiva de matematização.

[43] Tradução de "[...] con mucha frecuencia conduce a fracasos en la actividad cognitiva de conversión" (DUVAL, 2004, p. 56).

A coordenação do objeto matemático 'função definida por partes' pôde ser evidenciada desde o levantamento de hipóteses até a dedução do modelo matemático. Nessas etapas foram realizadas com mais evidência tarefas de compreensão, pois as alunas realizaram várias conversões entre os registros. Tarefas de produção foram evidenciadas em alguns momentos em que tratamentos foram essenciais para o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática, interferindo de forma satisfatória para a coordenação entre os diferentes registros. Como salienta Duval (2003, p. 29), "Essa coordenação não é espontânea, mas deve ser levada em conta na apropriação de cada um dos sistemas semióticos", daí a importância da Modelagem Matemática neste contexto.

A ação seguinte do grupo foi realizar a conversão do registro algébrico (Figura 4.12) para o registro gráfico (Figura 4.4). Para realizar essa conversão utilizaram o programa computacional Maple.

Figura 4.4 – Gráfico de $Q(j)$ (VERTUAN, 2007).



Nesse caso, temos um registro gráfico que é de natureza monofuncional e de representação não-discursiva. Para a construção desse gráfico, foi seguida uma lei que rege sua construção, com isso, segundo o Quadro 4.1, na relação do signo em si mesmo, temos um legi - signo e na relação do signo com o objeto, temos um símbolo, que representa a função definida por partes.

Em Matemática, a representação gráfica da função é um registro que pode complementar um registro algébrico e apresenta características e propriedades do objeto que podem não ser claramente perceptíveis somente observando o registro algébrico. Neste sentido, Damm (1999, p. 150) afirma que

> A complementaridade entre registros é fundamental no sentido da sua parcialidade em relação ao objeto que pretendemos representar, sendo que a possibilidade de conversão entre os registros possibilita ao sujeito perceber outros aspectos da situação representada.

A conversão do registro algébrico para o registro gráfico, nesse caso, é não-congruente com nível de não-congruência baixo, pois há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; há unicidade semântica terminal; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações, pois no registro gráfico não fica evidente que a função é definida por partes.

A natureza dos registros é monofuncional, no entanto, o registro algébrico é de representação discursiva e o registro gráfico é de representação não-discursiva. As relações dos signos em si mesmos são legi-signos e, as relações do signo com o objeto correspondem a símbolos. Dessa forma, o registro de saída é um legi-signo simbólico e o registro de chegada é um legi-signo simbólico. Trabalhando na dedução do modelo com a categoria fenomenológica referente à Terceiridade.

O Quadro 4.7 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

Quadro 4.7 – Estudos dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro algébrico para o gráfico da atividade de MM sobre justiça e qualidade de vida.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Algébrico	Gráfico
Natureza do registro	Monofuncional/ representação discursiva	Monofuncional/ representação não-discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência baixo		

Nessa etapa, as alunas utilizaram o gráfico para visualizar como o modelo matemático se comporta, realizando uma verificação entre os registros a partir de algo já determinado, passando pelo modo de inferência de indução Identificação. Esse modo de inferência refere-se à Terceiridade e está associado à ação cognitiva, definida por Ferri (2006), referente à matematização.

Ao apresentar o registro em língua natural (Figura 4.14), as alunas mostram que evidenciaram que para j = 380 o ponto (*j, Q(j)*), é um ponto crítico da função definida por partes que elas obtiveram. Com isso, decidiram verificar se nesse ponto a função é contínua. A partir desse momento, as alunas se propuseram a trabalhar com o objeto matemático 'função contínua'.

Como o ponto crítico da função ocorre para *j* = 380, as alunas resolveram verificar se, no ponto (380,Q(380)), a função obtida é contínua e derivável. Utilizando os registros algébrico e aritmético para isso, concluíram que a função, embora contínua, não é derivável em j = 380.

Figura 4.14 – Conclusões referentes ao ponto crítico (380, Q(380)) do modelo matemático obtido na atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

Como o ponto crítico da função ocorre para $j = 380$, as alunas resolveram verificar se, no ponto $(380, Q(380))$, a função obtida é contínua e derivável. Utilizando os registros algébrico e aritmético para isso, concluíram que a função, embora contínua, não é derivável em $j = 380$.

Para verificar a continuidade da função definida por partes, de acordo com a Figura 4.14, foram feitos tratamentos no registro algébrico dessa função. Embora tais tratamentos não estejam descritos no trabalho de Vertuan (2007), há menção à sua realização. Este estudo da continuidade sinaliza que as alunas passaram pelo modo de inferência de indução Predição, no qual elas apresentam reais motivos que afirmam a existência de uma provável regra. Esse modo de inferência refere-se à Terceiridade e está associado, nesta atividade, à ação cognitiva, definida por Ferri (2006), referente ao trabalhar matematicamente o modelo matemático para obter resultados matemáticos.

O que se pode observar é que a Figura 4.4 e as conclusões apresentadas na Figura 4.14, mostram que o objeto matemático 'função contínua' pode não ter sido compreendido pelas alunas. De fato, considerando a definição de continuidade em um ponto,

> Uma função $f(x)$ será contínua em $x = c$ se e somente se ela obedecer às três condições seguintes: **1.** $f(c)$ existe (c está no domínio de f); **2.** $\lim_{x \to c} f(x)$ existe (f tem um limite quando $x \to c$); **3.** $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (o limite é igual ao valor da função) (FINNEY et al., 2006, p. 122).

e, considerando o modelo obtido

$$Q(j) = \begin{cases} -0{,}000000617.j^2 - 0{,}000297.j + 0{,}979, & se \quad 0 < j \leq 380 \\ 1{,}136.0{,}999^j, \quad se \quad j > 380 \end{cases}$$

temos que:

1. $Q(380) = 0{,}7770452$
2. $\lim_{j \to 380} (-0{,}000000617.j^2 - 0{,}000297.j + 0{,}979) = 0{,}7770452000$

   $\lim_{j \to 380} (1{,}136.0{,}999^j) = 0{,}7767188718$
3. $\lim_{j \to 380} Q(j) \neq Q(380)$

Logo, a função $Q(j)$ não é contínua para $j = 380$.

A construção do gráfico (Figura 4.4) foi realizada pelas alunas usando o programa computacional Maple. A descontinuidade no ponto $(380, Q(380))$ não foi considerada neste gráfico. Ou seja, as alunas fizeram uma caracterização equivocada do modelo obtido.

Podemos conjecturar que tal equívoco está associado a vários aspectos:

1. Desconhecimento da ferramenta do programa computacional Maple que requer uma informação adicional para apresentar a característica da continuidade no gráfico. Neste contexto, Giraldo & Carvalho (2002, p. 116) afirmam que

> Tanto por humanos quanto por computadores, as propriedades qualitativas[44] de uma função - como o caso da continuidade - não podem ser verificadas de forma direta, ou seja, por meio, da determinação efetiva de infinitos valores. Há, pelo menos, duas estratégias possíveis para se tratar esses casos. A primeira, algébrica, analisa a função por meio de sua fórmula. A outra, lógico-formal, utiliza diretamente as definições matemáticas.

2. Não realizaram os tratamentos necessários no registro algébrico, levando em consideração o teorema que rege a continuidade de uma função para subsidiar a conclusão de que a função não é contínua. Neste sentido, consideramos que uma tarefa de compreensão foi realizada sem as tarefas de produção necessárias para subsidiá-las. Segundo Duval (2003, p. 16), "a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo". Neste caso, a tarefa de produção, não realizada pelas alunas, interferiu na coordenação entre os registros de representação.
3. Embora tenham realizado tarefas de compreensão, a coordenação entre os registros de representação não foi efetivada pelas alunas, pois não relacionaram o registro algébrico correspondente ao objeto matemático 'função contínua' com os demais registros utilizados no desenvolvimento da atividade. Neste sentido, Duval (2003, p. 31) afirma que "Há uma pluralidade de registros de

[44] Segundo Giraldo & Carvalho (2002), propriedades qualitativas "envolvem os valores de uma função no domínio globalmente, num intervalo, ou, de forma geral, num subconjunto infinito do domínio" (p. 115).

representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão em matemática [...]". Nesta atividade, de fato, a falta de articulação entre os registros, denota que não houve compreensão.

Considerando que a função $Q(j)$ é contínua, as alunas apresentaram uma conclusão com relação à derivada da função. Essa conclusão é expressa na Figura 4.15.

Figura 4.15 – Conclusão apresentada na atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida com relação à derivada da função Q(j) (VERTUAN, 2007).

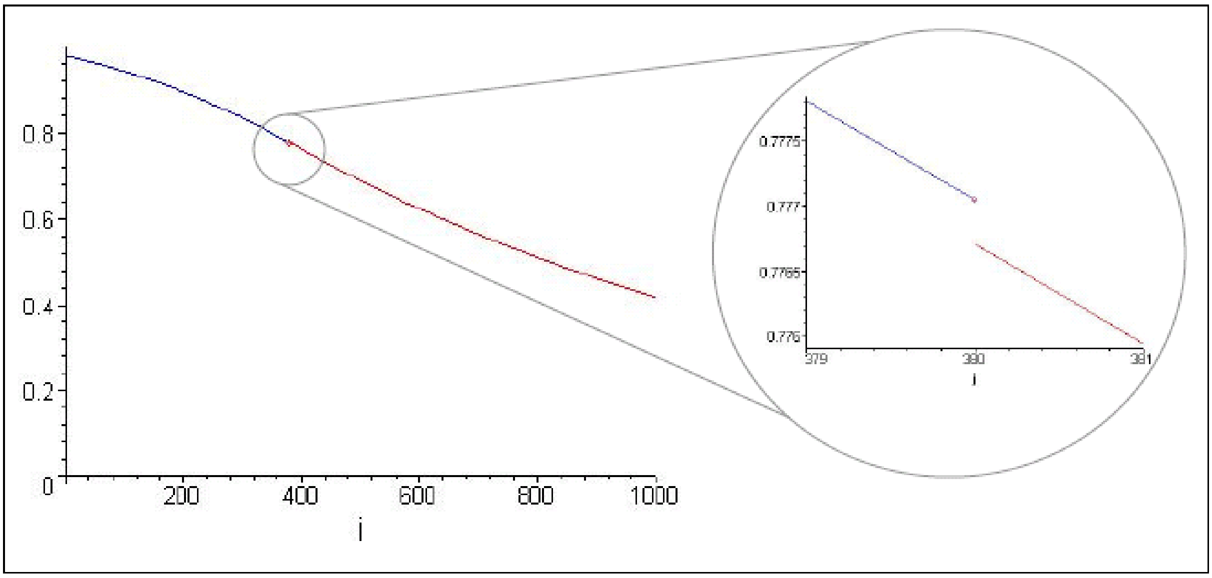
As alunas restringiram o domínio da função e definiram $DomQ' = \{j \in \Re_+ \,/\, j \neq 380\}$. A representação da função derivada em seu registro algébrico é:

$$Q'(j) = \begin{cases} -0{,}000001234.j - 0{,}000297, & se \quad 0 < j < 380 \\ -0{,}00114.0{,}999^{j}, & se \quad j > 380 \end{cases}$$

Levando em conta que "Se f tem uma derivada em $x = c$, então f é contínua em $x = c$" (FINNEY et. al., 2006, p. 148), então, a contra-positiva desse teorema afirma que "se f não é contínua em $x = c$, então f não tem derivada em $x = c$".

O registro gráfico que representa a função do modelo matemático da atividade de MM é dado pela Figura 4.16, no qual fizemos uma ampliação do intervalo ao redor do ponto j = 380, considerando o intervalo [379,381].

Figura 4.16 – Dias para se resolver uma disputa comercial e IDH.



Esse gráfico foi construído, utilizando-se o mesmo programa computacional (Maple) que foi utilizado pelas alunas (Figura 4.4). No entanto, levou-se em consideração o uso de uma ferramenta que possibilita ao programa reconhecer a descontinuidade de funções. Para que essa limitação do programa seja vencida, segundo Giraldo & Carvalho (2002), é preciso que o modelador analise a representação algébrica antes de informar ao programa que esse deve verificar a existência da descontinuidade, ou seja, é preciso de conhecimentos matemáticos para verificar tal situação.

O fato de não realizar os tratamentos no registro algébrico para determinar a continuidade da função, dá indícios que as alunas aceitaram o gráfico apresentado pelo programa sem constatar que tal representação poderia apresentar algumas incoerências com relação ao objeto matemático em estudo. Apesar das limitações que o programa computacional apresenta, as alunas poderiam utilizar dos conhecimentos matemáticos que possuíam (ou deveriam possuir) com relação ao conceito de função contínua. Diante do fato de aceitarem um gráfico que não representa a função definida por partes e de afirmarem que a função é contínua mediante falta do uso do teorema da continuidade, podemos conjecturar que não houve coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica. Para Duval (2003, p. 29), "A compreensão requer a coordenação dos diferentes registros". Diante de tal afirmação, podemos conjecturar também que, esta atividade de MM, sinaliza que não ocorreu a compreensão do objeto matemático 'função contínua' por parte das alunas.

Com relação à categorização dos signos estabelecida por Peirce (Quadro 4.1) e as etapas da Modelagem, essa atividade se inicia com um quali-signo icônico, abordam na seqüência sin-signo indicial, para na dedução do modelo matemático trabalhar apenas com legi-signos simbólicos. A partir de uma qualidade, estabeleceu-se uma existência para, finalmente, chegar a uma lei que rege a situação, estabelecendo relações entre as etapas de desenvolvimento desta atividade de MM com as categorias fenomenológicas Primeiridade, Secundidade e Terceiridade. Isso evidencia que, como foi seguida a seqüência da categorização fenomenológica, as relações de significação e de objetivação foram estabelecidas pelos signos.

No decorrer das etapas, os modos de inferência foram abordados e algumas ações cognitivas foram estabelecidas. Levando em consideração o esquema (Figura 4.7) apresentado por Ferri (2006), na escolha da situação, ocorreu Compreensão da realidade e o modo de inferência Palpite. A partir da situação-real (Palpite), fizeram uma representação mental do que poderiam estudar. Em seguida, estabeleceram a

Estruturação da ação, quando da representação real obtiveram um modelo real, definindo o problema que poderia ser estudado, nesta etapa o modo de inferência abordado foi Pista. Do modelo real para o modelo matemático, foram realizados alguns procedimentos (definição de variáveis, levantamento de hipóteses e obtenção e dedução do modelo matemático). Nesta etapa, as ações cognitivas foram Simplificação da ação, Estruturação da ação e Matematização, os modos de inferência envolvidos nesta etapa foram Diagnóstico, Analogia, Sintoma, Explicação, Identificação e Predição. Nesta atividade, não destacamos os modos de inferência Construção do modelo que é um modo de inferência de indução nem o modo de inferência Raciocínio formal que é um modo de inferência de dedução. No entanto, reconhecemos que fazem parte da etapa de dedução e obtenção do modelo e da volta à situação original, respectivamente. No entanto, como salientam Kehle & Cunningham (2000), os modos de inferência não correspondem a categorias distintas nas quais todas as formas de ocorrências de semiosis podem ser classificadas como um ou outro modo, mas como uma forma de identificar os modos de inferência (abdução, dedução e indução) no desenvolvimento de uma atividade e, em nosso caso, no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática.

Para as alunas, nesse nível de escolaridade, o fenômeno de congruência e de não-congruência não influenciou na caracterização do objeto matemático 'função definida por partes'. Associamos o equívoco observado à falta de coordenação entre os registros de representação referentes ao objeto matemático 'função contínua'. Para Duval (2004) isso ocorre, pois tarefas de produção e de compreensão são importantes no desenvolvimento de uma atividade matemática e na coordenação entre os registros de representação semiótica.

De forma geral, nessa atividade de MM muitas foram as representações apresentadas pelas alunas. Diante das significativas semiosis presentes neste contexto, podemos concluir, considerando Duval (2004, p. 16), que a compreensão do objeto matemático (noésis) 'função definida por partes' aconteceu. Conforme afirma o autor "[...] no hay noesis sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercício de la noesis".

4.3.2 Atividade 2: Tanque de Combustível

Esta atividade foi extraída do trabalho de Borges & Silva (2007). O trabalho desses autores faz parte dos anais da V Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), que ocorreu na cidade de Ouro Preto, em Minas Gerais, em 2007. Conforme os autores descrevem, a atividade foi desenvolvida por uma dupla de alunos na disciplina de Modelagem Matemática no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Regional de Ijuí (UNIJUI), no ano de 2007. Nessa atividade, foi obtido um modelo que determina o volume de combustível existente dentro de um tanque utilizado para armazenar combustível para máquinas agrícolas a partir da informação da altura e das dimensões internas do tanque.

Segundo Borges & Silva (2007), para desenvolver a atividade, a dupla de alunos considerou os dados utilizados pelos agricultores rurais e as dimensões de certo tanque de combustível.

Descrevemos a atividade como foi apresentada em Borges & Silva (2007).

Um problema já bem estudado foi proposto pelos alunos Cláudio Anschau e Elizandra Jung Solano. Nas propriedades rurais de médio porte do noroeste do RS, o combustível usado em máquinas agrícolas é comprado em grandes quantidades (em torno de 5 000 litros) e armazenado em tanques cilíndricos colocados na posição horizontal, para ser usado de acordo com a necessidade de consumo. Os tanques não dispõem de um sistema automático de controle de volume. O método mais utilizado pelos agricultores é o "Método da Régua". Uma régua (ou uma vareta) é introduzida em um orifício situado na parte superior do tanque, até atingir o fundo. A parte umedecida da régua indica a maior altura (h) de combustível (se a régua foi colocada na posição vertical), mas não indica o volume de combustível. O problema proposto é determinar o volume de combustível remanescente a partir da informação da altura h e das dimensões internas do tanque (raio R e comprimento L).

Foram implementadas duas soluções: A primeira é uma abordagem geométrica, envolvendo conteúdos do Ensino Médio e a segunda é uma abordagem usando o cálculo integral, que usa conteúdos do Ensino Superior.

A Figura 4.17 apresenta a seção transversal do tanque cilíndrico, com uma certa quantidade de combustível.

Fonte: Borges & Silva (2007).

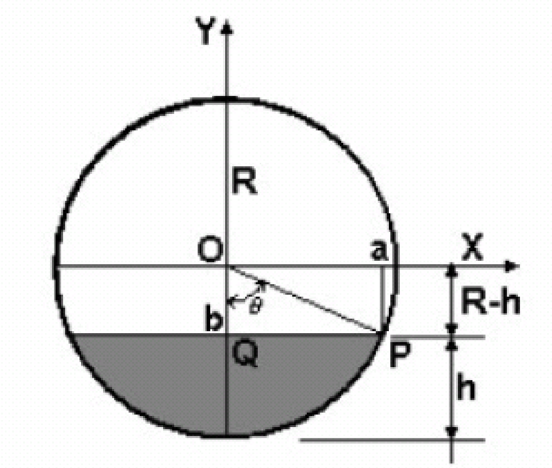


Figura 4.17 – Seção transversal do tanque cilíndrico de combustível.

O volume foi calculado usando a fórmula do volume de cilindros: função da área multiplicada pelo comprimento do tanque (L).

$$V = A_C . L \qquad (1)$$

onde A é a área da seção transversal inundada (m^2) e h é altura de combustível (m).

O cálculo da área inundada foi feito considerando duas etapas: área da parte inferior e área da parte superior.

Abordagem Geométrica

A simetria do problema em relação ao eixo Y, permite que o volume de uma das metades seja calculado e posteriormente multiplicado por 2. Para a metade direita, foi considerado um setor circular com vértice em O e ângulo θ, conforme a Figura 4.17. A área com combustível é a diferença da área do setor circular e o triângulo OPQ.

$$A_C = A_{SC} - A_{OPQ} \qquad (2)$$

onde A_C é a área com combustível (m^2),

A_{SC} é a área do setor circular (m^2) e

A_{OPQ} é a área do triângulo OPQ (m^2).

A área do setor circular é obtida pela conhecida fórmula

$$A_{SC} = \frac{1}{2} R^2 \Delta\theta \qquad (3)$$

onde R é o raio do cilindro (m) e $\Delta\theta$ é o arco do ângulo θ (rad).

O arco do ângulo θ pode ser obtido do triângulo OPQ, aplicando a definição da razão seno e a correspondente função inversa.

$$\theta = arcsen\left(\frac{a}{R}\right) \qquad (4)$$

onde o valor de a é obtido aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OPQ.

$$a = \sqrt{2Rh - h^2} \qquad (5)$$

Fonte: Borges & Silva (2007).

A área do triângulo OPQ é obtida multiplicando os catetos $(R-h)$ e a, da equação (5) e dividindo por 2.

$$A_{OPQ} = \frac{(R-h)\sqrt{2Rh-h^2}}{2} \qquad (6)$$

Levando as equações (3) e (6) em (2), multiplicando por 2 e levando, finalmente, em (1), obtém-se o volume de combustível da parte inferior do tanque:

$$V_{\inf} = L\left(R^2\theta - (R-h)\left(\sqrt{2Rh-h^2}\right)\right) \qquad (7)$$

O volume da parte superior pode ser obtido considerando que a parte cheia de combustível corresponde à área em branco na Figura 4.17. Ou seja, o volume de combustível é a diferença entre o volume do tanque cheio e o volume dado pela equação (7).

$$V_{\sup} = L\left[R^2(\pi-\theta) + (R-h^*)\sqrt{2Rh^* - h^{*2}}\right] \qquad (8)$$

onde $h^* = 2R - h$, lembrando que h é a altura do combustível, medida com a régua, e que neste caso $h > R$.

A Figura 4.18 apresenta o gráfico das soluções obtidas com as equações (7 e 8), onde observa-se que a maior taxa de variação do volume ocorre em $h = H/2$. Os resultados foram disponibilizados para o agricultor na forma de uma tabela impressa com valores do volume de combustível para alturas de combustível variando de centímetro em centímetro.

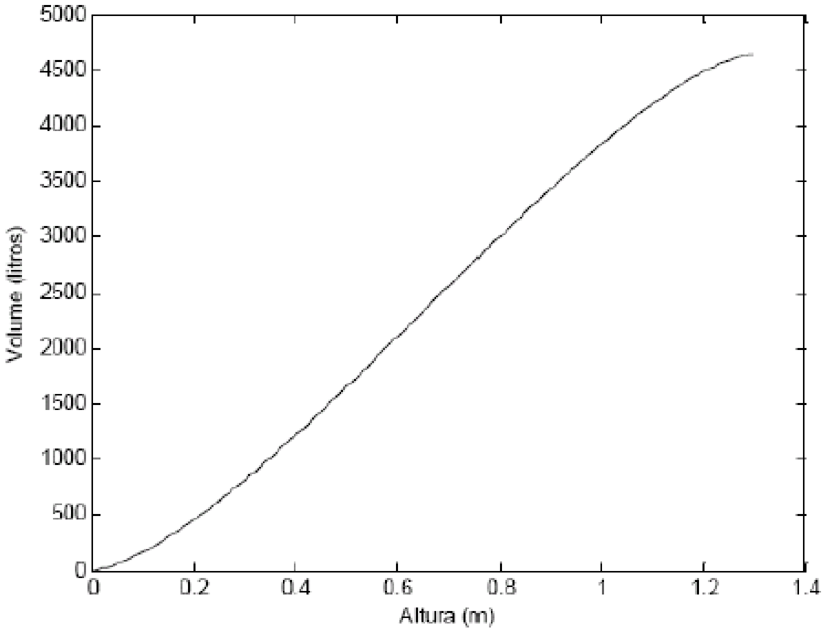


Figura 4.18 – Volume em função da altura do tanque cilíndrico, para *R=0,65m* e *L=3,5m*.

Fonte: Borges & Silva (2007).

Abordagem Integral

A área (A) inundada com combustível, como mostra a Figura 4.17, pode ser calculada fazendo a diferença entre a área da região definida entre $x = a$, $x = 0$, $y = 0$ e a função $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ e a área do retângulo de lados a e b.

A equação (9) expressa essa diferença.

$$A = 2\left[\int_0^a \sqrt{R^2 - x^2}\,dx - (xy)\right] \qquad (9)$$

onde $y = R - h$ e $a = \sqrt{R^2 - y^2}$.

A solução da integral em (9) pode ser obtida usando substituição trigonométrica. Levando a solução de (9) na equação (1) obtém-se o volume de combustível da parte inferior, cuja expressão é idêntica à equação (7). O cálculo da parte superior é análogo à abordagem geométrica.

Fonte: Borges & Silva (2007).

4.3.2.1 Análise específica da atividade

A motivação para o estudo da situação originou-se do interesse dos alunos em determinar uma expressão na qual se possa saber o volume de combustível que se encontra dentro de um tanque cilíndrico. Para a escolha do tema — Tanque de combustível, os alunos tiveram que passar pelo modo de inferência de abdução Palpite. Ao se depararem com a situação-problema apresentada na Figura 4.19, os alunos possivelmente tiveram um primeiro palpite para a definição do que, de fato, representa um problema nesta situação. Eles tiveram uma primeira impressão (primeiridade) do que esta situação inicial significa, enquanto um problema a estudar.

Figura 4.19 – Situação-problema que originou a atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

Nas propriedades rurais de médio porte do noroeste do RS, o combustível usado em máquinas agrícolas é comprado em grandes quantidades (em torno de 5 000 litros) e armazenado em tanques cilíndricos colocados na posição horizontal, para ser usado de acordo com a necessidade de consumo. Os tanques não dispõem de um sistema automático de controle de volume. O método mais utilizado pelos agricultores é o “Método da Régua”. Uma régua (ou uma vareta) é introduzida em um orifício situado na parte superior do tanque, até atingir o fundo. A parte umedecida da régua indica a maior altura (h) de combustível (se a régua foi colocada na posição vertical), mas não indica o volume de combustível.

Segundo Santaella (2008b, p 51),

> Diante de qualquer fenômeno, isto é, para conhecer e compreender qualquer coisa, a consciência produz um signo, ou seja, um pensamento com mediação irrecusável entre nós e os fenômenos. E isto, já ao nível do que chamamos de percepção. Perceber é senão traduzir um objeto de percepção em um julgamento de percepção, ou melhor, é interpor uma camada interpretativa entre a consciência e o que é percebido.

No caso do problema em análise, os alunos diante de uma situação e, posteriormente, um problema que precisava ser resolvido para auxiliar o trabalho de algumas pessoas da região em que moravam, decidiram estudar o fenômeno.

Considerando a classificação dos signos definidas por Peirce e apresentada no Quadro 4.1, como a representação informa uma existência da situação em estudo, na relação do signo em si mesmo (significação) é um sin-signo e na relação do signo com o objeto (objetivação) o registro em língua natural é um índice, pois representa a existência de algo para ser estudado. Segundo a natureza dos registros de representação estabelecida por Duval (2003), esse registro inicial é de natureza multifuncional apresentado de maneira informal e de representação discursiva, pois se associa a uma argumentação.

Nesse caso, as relações de significação (relação do signo consigo mesmo) e de objetivação (relação do signo com o objeto) foram estabelecidas pelo signo e evidenciadas pelos alunos, pois eles se propuseram a realizar um estudo a partir da situação inicial, ou seja, a partir de uma existência e de um índice apresentaram um problema a ser estudado. A situação-real constitui-se em um Palpite que os alunos tiveram para desenvolver a atividade, para tanto, segundo Ferri (2006), passaram pela ação cognitiva de compreender a situação que pretendiam investigar e estabeleceram uma representação mental da situação antes de determinar qual o problema a solucionar.

A partir do Palpite estabelecido partiu-se para o reconhecimento do problema a ser estudado. Essa etapa corresponde ao modo de inferência de abdução Pista, pois os alunos evidenciaram a existência de algum fenômeno a ser estudado e, na categorização de Peirce, encontram-se na Secundidade. Nesse caso, os alunos se encontram na Secundidade, porque na definição de um problema algumas reações estão associadas. Conforme salienta Santaella (2007, p 7), a "secundidade está ligada às idéias de dependência, determinação, dualidade, ação e reação, aqui e agora, conflito, surpresa, dúvida".

Para definir o problema, foi feito um tratamento no interior do registro em língua natural da Figura 4.19, determinando o registro em língua natural apresentado na Figura 4.20.

Figura 4.20 – Definição do problema da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

O problema proposto é determinar o volume de combustível remanescente a partir da informação da altura h e das dimensões internas do tanque (raio R e comprimento L).

Considerando a classificação dos signos do Quadro 4.1, como a representação da Definição do problema corresponde à existência de algo para ser estudado, na relação do signo em si mesmo, é um sin-signo e na relação do signo com o objeto é um índice, a representação de algo específico para ser estudado. Esse registro foi expresso em língua natural, que é um registro de representação de natureza multifuncional, pois se trata de uma forma de representação não-algoritmizável e de representação discursiva, associada a uma argumentação.

Da situação-problema para a definição do problema houve um tratamento de registro em língua natural. O Quadro 4.8 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e o tratamento abordado nesses registros.

Quadro 4.8 – Estudo dos registros de representação semiótica e tratamento do registro em língua natural da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Língua natural	Língua natural
Natureza do registro	Multifuncional/ representação discursiva	Multifuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Sin-signo	Sin-signo
Relação do signo com o objeto	Índice	Índice
Tratamento		

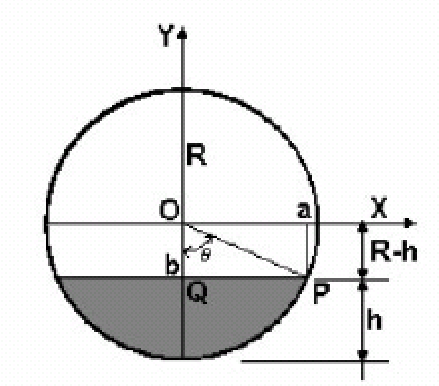
Para Duval (2003), em uma atividade de tratamento, o trabalho com registros multifuncionais resulta em maiores dificuldades para os alunos. No entanto, nesta atividade, os alunos realizaram de forma satisfatória tal tratamento. Na etapa da definição do problema, foi evidenciada uma tarefa de produção, pois envolveu um tratamento no registro em língua natural.

Até este momento da atividade, os registros de representação ainda não deixam transparecer uma caracterização do objeto matemático. Todavia, para a definição do problema, para a definição do modelo real, considerando Ferri (2006), podemos ponderar que os alunos realizaram ações cognitivas referentes às simplificações e estruturações da ação (Figura 4.7). Isso evidencia que essa ação cognitiva foi positiva no desenvolvimento desta atividade de MM, uma vez que os alunos realizaram de forma satisfatória o tratamento no registro em língua natural, no modo de inferência de abdução Pista.

Segundo Borges & Silva (2007), para a resolução do problema, a dupla de alunos levou em consideração duas abordagens distintas, uma geométrica, envolvendo conteúdos do Ensino Médio e outra por meio do Cálculo, envolvendo conteúdos do Ensino Superior (integral). Isso deixa evidente que a dupla de alunos tem consciência de que a atividade pode ser resolvida por meio de conteúdos de um nível de escolaridade inferior a que eles se encontram, no entanto, apresentam uma outra solução para apresentar os conhecimentos que possuem e que correspondem ao nível de escolaridade no qual se encontram. Com isso, eles demonstram entender que um mesmo objeto matemático pode ser estudado, envolvendo conteúdos diferentes. Isso nos remete ao que Duval (2003, p. 22) aponta que "[...] o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado".

Para a dedução e obtenção do modelo matemático, a dupla de alunos fez uma conversão do registro em língua natural da situação-problema (Figura 4.19) para o registro gráfico apresentado na Figura 4.17.

Figura 4.17 – Seleção transversal do tanque cilíndrico de combustível (BORGES; SILVA, 2007)



Considerando novamente a classificação dos signos do Quadro 4.1, como o registro gráfico foi construído seguindo uma lei, na relação do signo em si mesmo, é um legi-signo e na relação do signo com o objeto é um símbolo, que representa a situação em estudo. Considerando a idéia de Santaella (2007, p. 7) que a "[...] terceiridade diz respeito à generalidade", para a definição desse registro, os alunos encontram-se na categoria fenomenológica da Terceiridade.

O registro gráfico (Figura 4.17) é de natureza monofuncional, pois se trata de uma forma de representação algoritmizável e formal e de representação não-discursiva, pois não está associada a uma argumentação.

Esta conversão do registro em língua natural (situação-problema) para o registro gráfico (Figura 4.17) é não-congruente com nível de não-congruência alto, pois não satisfaz às três condições de congruência definidas por Duval, ou seja, não há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; não há unicidade semântica terminal; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações. A natureza dos registros de representação associados à conversão do registro em língua natural (Figura 4.19, situação-problema) para o registro gráfico (Figura 4.17) é distinta; o registro inicial (situação-problema) é de natureza multifuncional e de representação discursiva, enquanto o outro (registro gráfico) é de natureza monofuncional e de representação não-discursiva, o que para Duval (2003) é uma condição que torna a atividade de conversão mais complexa. No entanto, os alunos realizaram tal atividade com êxito, o que demonstra uma compreensão do que estavam estudando. O Quadro 4.9 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da convenção do regime em língua natural para o registro gráfico.

Quadro 4.9 – Estudos dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro em língua natural para o registro gráfico da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Língua natural	Gráfico
Natureza do registro	Multifuncional/ representação discursiva	Monofuncional/ representação não-discursiva
Relação do signo em si mesmo	Sin-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Índice	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência alto		

No início da etapa dessa atividade de Modelagem Matemática, referente à obtenção e dedução do modelo matemático, os alunos precisam resolver a situação com informações que, embora possam parecer pouco importantes, são necessárias para resolver o problema, passando pelo modo de inferência de abdução Sintoma, que se refere à categoria fenomenológica da Secundidade. A conversão do registro em língua natural para o registro gráfico estabelece, segundo Ferri (2006), uma matematização da situação-problema. Com isso, o modo de inferência de abdução Sintoma associa-se à ação cognitiva de matematização da situação.

Para determinar o volume de combustível no tanque, os alunos consideraram a fórmula do volume do cilindro. A fórmula é representada por um registro algébrico como apresentado na Figura 4.21. Como os alunos buscaram em seus conhecimentos a fórmula do volume do cilindro, eles afirmaram a existência dessa regra para a obtenção do modelo, passando pelo modo de inferência de indução Predição que se refere à Terceiridade. Neste caso, a Predição associa-se com a ação cognitiva matematização, estabelecida por Ferri (2006).

Figura 4.21 – Registro de representação semiótica utilizado para iniciar a dedução do modelo matemático da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

O volume foi calculado usando a fórmula do volume de cilindros: função da área multiplicada pelo comprimento do tanque (L).

$$V = A_C.L \qquad (1)$$

onde A é a área da seção transversal inundada (m^2) e h é altura de combustível (m).

O registro algébrico apresentado na Figura 4.21, segundo o Quadro 4.1, na relação do signo em si mesmo, como o signo foi definido a partir de uma lei, temos um legi-signo e na relação com o objeto, temos um símbolo. O registro algébrico é de natureza monofuncional e de representação discursiva. Não consideramos que houve uma transformação de registros de representação do registro gráfico (Figura 4.17) para o registro algébrico (Figura 4.21), pois não foram utilizadas informações do registro gráfico para obter o registro algébrico.

A partir das diferentes abordagens estabelecidas pelos alunos para resolver o problema do volume do tanque, ocorrem transformações sobre os registros de representação.

Na abordagem geométrica, os alunos iniciaram o desenvolvimento da resolução por meio de um registro algébrico, como apresentado na Figura 4.22.

Figura 4.22 – Registro de representação semiótica utilizado para a dedução do modelo matemático na abordagem geométrica da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

A simetria do problema em relação ao eixo Y, permite que o volume de uma das metades seja calculado e posteriormente multiplicado por 2. Para a metade direita, foi considerado um setor circular com vértice em O e ângulo θ, conforme a Figura 4.17. A área com combustível é a diferença da área do setor circular e o triângulo OPQ.

$$A_C = A_{SC} - A_{OPQ} \qquad (2)$$

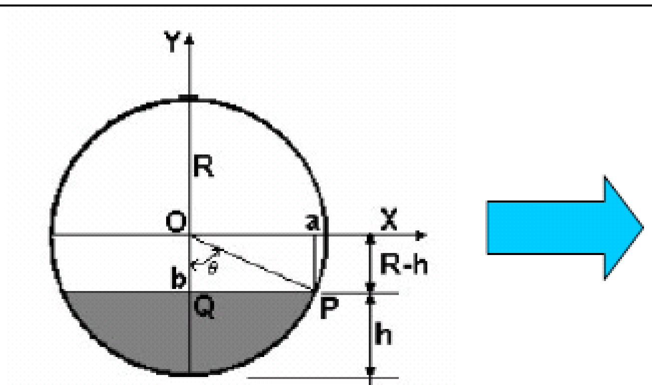
onde A_C é a área com combustível (m^2),

A_{SC} é a área do setor circular (m^2) e

A_{OPQ} é a área do triângulo OPQ (m^2).

Esse registro de representação, segundo o Quadro 4.1, na relação do signo em si mesmo, como o signo foi definido a partir de uma lei que o rege, temos um legi-signo e na relação do signo com o objeto, temos um símbolo. O registro algébrico é de natureza monofuncional e de representação discursiva. Neste caso, houve uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico, apresentada na Figura 4.23.

Figura 4.23 – Conversão do registro gráfico para o registro algébrico na abordagem geométrica da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).



$$\boxed{A_C = A_{SC} - A_{OPQ}}$$

Figura 4.17 – Seção transversal do tanque cilíndrico de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

Tem-se uma conversão não-congruente com nível de não-congruência intermediário, pois atende uma das condições estabelecidas por Duval (2004), ou seja, há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; não há unicidade semântica terminal, pois para a determinação da área do cilindro poderiam ser utilizadas outras relações correspondentes na figura; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações.

Além disso, a natureza dos registros são monofuncionais, no entanto, o registro gráfico é de representação não-discursiva e o registro algébrico é de representação discursiva, o que para Duval (2003), torna a atividade de conversão mais complexa. Além disso, a conversão, nesse caso, é mais complexa visto que o registro de partida corresponde a uma lei (legi-signo) e o registro de chegada também é uma lei (legi-signo). Tais registros, na relação com o objeto matemático 'área do cilindro' referem-se a símbolos. Apesar de os alunos trabalharem com monorregistros (registros de natureza monofuncional), que para Duval (2003), conduzem ao sucesso para grande parte dos alunos em Matemática, a conversão é não-congruente. Como os alunos realizaram de forma satisfatória essa conversão, as relações de significação (relação do signo consigo mesmo) e de objetivação (relação do signo com o objeto), considerando Santaella (2007), foram estabelecidas pelo signo na etapa da dedução do modelo matemático. O Quadro 4.10 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

Quadro 4.10 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro gráfico para o algébrico da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Gráfico	Algébrico
Natureza do registro	Monofuncional/ representação não-discursiva	Monofuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência intermediário		

Nesse momento da dedução do modelo matemático, os alunos fizeram considerações para chegar ao registro algébrico (Figura 4.22), eles fizeram comparações para destacar possíveis regras, passando pelo modo de inferência de abdução Analogia. Como se encontram na etapa de dedução do modelo matemático, a Analogia, neste caso, refere-se à terceiridade e associa-se à ação cognitiva matematização, definida por Ferri (2006) e apresentada na Figura 4.7.

A partir do registro algébrico apresentado na Figura 4.22, para obter o modelo matemático que descreve o volume do tanque de combustível, os alunos fizeram tratamentos, além de conversões. Isso fica evidenciado na Figura 4.24.

Figura 4.24 – Registros de representação utilizados para a obtenção do modelo matemático da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

A área do setor circular é obtida pela conhecida fórmula $A_{SC} = \frac{1}{2} R^2 \Delta\theta$ (3)

onde R é o raio do cilindro (m) e $\Delta\theta$ é o arco do ângulo θ (rad).

O arco do ângulo θ pode ser obtido do triângulo OPQ, aplicando a definição da razão seno e a correspondente função inversa. $\theta = arcsen\left(\frac{a}{R}\right)$ (4)

onde o valor de a é obtido aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OPQ.

$$a = \sqrt{2Rh - h^2} \qquad (5)$$

A área do triângulo OPQ é obtida multiplicando os catetos $(R-h)$ e a, da equação (5) e dividindo por 2.

$$A_{OPQ} = \frac{(R-h)\sqrt{2Rh-h^2}}{2} \qquad (6)$$

Levando as equações (3) e (6) em (2), multiplicando por 2 e levando, finalmente, em (1), obtém-se o volume de combustível da parte inferior do tanque:

$$V_{\inf} = L\left(R^2\theta - (R-h)\sqrt{2Rh-h^2}\right) \qquad (7)$$

Para analisar as transformações de registros apresentadas na Figura 4.24, vamos fazer recortes e estudar em separado os registros de representação.

A Figura 4.25 apresenta um tratamento dentro do registro algébrico da Figura 4.22, pois os alunos utilizaram a função que descreve a área do setor circular, que é um dos parâmetros que precisam ser determinados para se resolver o modelo matemático.

Figura 4.25 – Registro de representação utilizado para determinar a área do setor circular na obtenção do modelo matemático da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

A área do setor circular é obtida pela conhecida fórmula

$$A_{SC} = \frac{1}{2} R^2 \Delta\theta \qquad (3)$$

onde R é o raio do cilindro (m) e $\Delta\theta$ é o arco do ângulo θ (rad).

Nesse caso, temos um registro de natureza monofuncional, pois se trata de um registro algoritmizável e de representação discursiva, pois utiliza-se de um argumento. De acordo com o Quadro 4.1, esse registro, na relação do signo consigo mesmo, como representa uma lei, é um legi-signo e, na relação do signo com o objeto, é um símbolo, que representa o objeto matemático 'área do setor circular'. Para Duval (2003), a atividade cognitiva tratamento entre registros de natureza monofuncional é menos complexa. Dessa forma, o sucesso dos alunos no desenvolvimento desse tipo de tratamento é mais garantido. O Quadro 4.11 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e o tratamento abordado nesses registros.

Quadro 4.11 – Estudo dos registros de representação semiótica e tratamento do registro algébrico da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Algébrico	Algébrico
Natureza do registro	Monofuncional/ representação discursiva	Monofuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Tratamento		

Nessa parte da dedução do modelo matemático, os alunos apresentam reais motivos que afirmam a existência de uma regra, passando pelo modo de inferência de indução Predição, que se insere na Terceiridade, uma vez que os alunos trabalham somente com regularidades, e se associa à ação cognitiva matematização, definida por Ferri (2006) para a etapa correspondente à passagem do modelo real para o modelo matemático.

Outro recorte que fizemos dos registros de representação da Figura 4.24 apresenta dois registros algébricos apresentados na Figura 4.26 que foram obtidos por meio do registro gráfico (Figura 4.17).

Figura 4.26 – Registro de representação utilizado para determinar a área do setor circular utilizado para a obtenção do modelo matemático da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

O arco do ângulo θ pode ser obtido do triângulo OPQ, aplicando a definição da razão seno e a correspondente função inversa.

$$\theta = arcsen\left(\frac{a}{R}\right) \qquad (4)$$

onde o valor de a é obtido aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OPQ.

$$a = \sqrt{2Rh - h^2} \qquad (5)$$

Nesse caso, temos dois registros de natureza monofuncional, pois se trata de registros algoritmizáveis e de representação discursiva, pois utilizam-se de argumentos. De acordo com o Quadro 4.1, esses registros, na relação do signo consigo mesmo, como representam leis, são legi-signos e, na relação do signo com o objeto, são símbolos, pois representam algo. Neste caso, houve uma conversão do registro gráfico (Figura 4.17) para o registro algébrico, apresentada na Figura 4.27.

Figura 4.27 – Conversão do registro gráfico para o registro algébrico para a obtenção da área do setor circular na abordagem geométrica da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

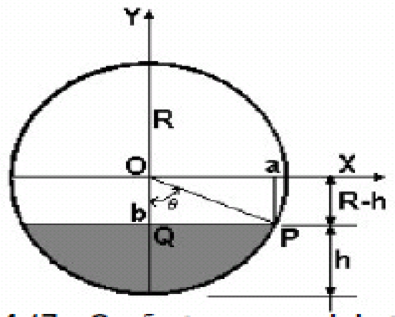


Figura 4.17 – Seção transversal do tanque cilíndrico de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

$$\theta = arcsen\left(\frac{a}{R}\right)$$

$$a = \sqrt{2Rh - h^2}$$

A Figura 4.27 apresenta uma conversão não-congruente com nível de não-congruência baixo, pois há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; há unicidade semântica terminal; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações. Além disso, a natureza dos registros é monofuncional e o registro gráfico é de representação não-discursiva enquanto o registro algébrico é de representação discursiva. Embora, Duval (2003) considere que a conversão entre registros monofuncionais seja menos complexa, a complexidade nesta conversão reside no fato de que o registro de partida corresponde a uma lei (legi-signo) e o registro de chegada também é uma lei (legi-signo). Tais registros, na relação com o objeto matemático 'área do setor circular' referem-se a símbolos. Como os alunos realizaram de forma satisfatória essa conversão, as relações de significação (relação do signo consigo mesmo) e de objetivação (relação do signo com o objeto) foram estabelecidas pelos signos na etapa da dedução do modelo matemático.

O Quadro 4.12 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

Quadro 4.12 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro gráfico para o algébrico da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Gráfico	Algébrico
Natureza do registro	Monofuncional/ representação não-discursiva	Monofuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência baixo		

Nesse momento, na etapa de dedução do modelo, os alunos ainda se encontram no modo de inferência de indução Predição. No entanto, passaram pelo modo de inferência de abdução Sintoma, e para resolver a situação em questão utilizaram informações que, embora pareçam não ser tão importantes, são necessárias para resolver o problema e pelo modo de inferência de abdução Analogia, pois fizeram algumas comparações para estabelecer as regras no triângulo retângulo. Os modos de inferência (Sintoma e Analogia) são de abdução, como definido por Kehle &

Cunningham (2000), e partem da experiência, da realidade para a definição do signo. Isso se deve ao fato de que para se deduzir o modelo em estudo foi preciso buscar outros conhecimentos matemáticos que não eram evidentes no desenvolvimento da atividade. Os três modos de inferência envolvidos, neste caso, correspondem à Terceiridade, uma vez que tratam de regularidades, e a ação cognitiva, estabelecida por Ferri (2006) e apresentada na Figura 4.7, é matematização.

A Figura 4.28 apresenta dois registros de representação, um registro em língua natural e um registro algébrico que foram obtidos por meio do registro gráfico (Figura 4.17). Essas transformações de registro foram necessárias para determinar a área do triângulo OPQ que é outro parâmetro que precisa ser determinado para a realização de tratamentos no registro algébrico apresentado na Figura 4.22 para definir o modelo matemático da situação em estudo.

Figura 4.28 – Registro de representação utilizado para determinar a área do triângulo utilizado para a obtenção do modelo matemático da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

A área do triângulo OPQ é obtida multiplicando os catetos $(R-h)$ e a, da equação (5) e dividindo por 2.

$$A_{OPQ} = \frac{(R-h)\sqrt{2Rh-h^2}}{2} \qquad (6)$$

Nesse caso, temos dois registros de naturezas distintas: o registro em língua natural é de natureza multifuncional e o registro algébrico é de natureza monofuncional, ambos de representação discursiva, pois utilizam-se de argumentos. De acordo com o Quadro 4.1, esses registros, na relação do signo consigo mesmo, como representam leis, são legi-signos e, na relação do signo com o objeto, são símbolos, pois representam algo. Neste caso, houve duas conversões do registro gráfico (Figura 4.17) para o registro em língua natural e do registro em língua natural para o registro algébrico, apresentadas na Figura 4.29.

Figura 4.29 – Conversões do registro gráfico para o registro em língua natural e do registro em língua natural para o registro algébrico para a obtenção da área do triângulo na abordagem geométrica da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

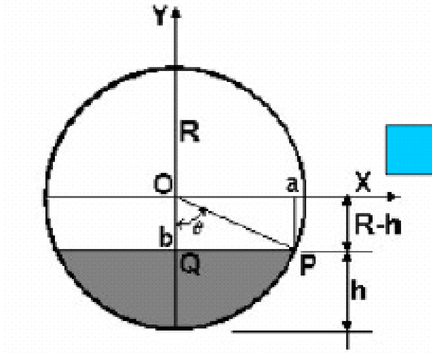


Figura 4.17 – Seção transversal do tanque cilíndrico de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

A área do triângulo OPQ é obtida multiplicando os catetos $(R-h)$ e a, da equação (5) e dividindo por 2.

$$A_{OPQ} = \frac{(R-h)\sqrt{2Rh-h^2}}{2}$$

Como nesse caso, tem-se duas conversões, fazemos a análise de cada uma de forma separada.

1. Na conversão do registro gráfico para o registro em língua natural, tem-se uma conversão não-congruente com nível de não-congruência intermediário, pois, segundo as condições estabelecidas por Duval (2004), há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; não há unicidade semântica terminal, pois para descrever o registro em língua natural poderia ser utilizada outra sentença, como "a área do triângulo OPQ é obtida multiplicando a base do triângulo pela sua altura e dividindo por 2"; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações.

Além disso, a natureza e a representação dos registros são diferentes, o registro gráfico é de natureza monofuncional e de representação não-discursiva e o registro em língua natural é de natureza multifuncional e de representação discursiva. Segundo Duval (2003), a conversão de registros de naturezas distintas pode ser considerada mais complexa. Além disso, a conversão, nesse caso, é complexa visto que o registro de partida corresponde a uma lei (legi-signo) e o registro de chegada também é uma lei (legi-signo). Tais registros, na relação com o objeto matemático 'área do triângulo' referem-se a símbolos. Como os alunos realizaram de forma satisfatória essa conversão, as relações de significação (relação do signo consigo mesmo) e de objetivação (relação do signo com o objeto) foram efetivadas pelos signos na etapa da dedução do modelo matemático. Para Santaella (2008b), essas relações são fundamentais para uma análise semiótica do signo. O Quadro 4.13 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão abordada nesses registros.

Quadro 4.13 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro gráfico para o registro em língua natural da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Gráfico	Língua natural
Natureza do registro	Monofuncional/ representação não-discursiva	Multifuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência intermediário		

Nesse momento na atividade de dedução do modelo, os alunos ainda se encontram no modo de inferência Predição, associado à ação cognitiva matematização e à categoria fenomenológica Terceiridade, pois trabalharam com regularidades.

2. Na conversão do registro em língua natural para o registro algébrico, tem-se uma conversão não-congruente com nível de não-congruência baixo, pois, segundo as condições estabelecidas por Duval (2004), há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; há unicidade semântica terminal; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações. A natureza dos registros é diferente, sendo que o registro em língua natural é de natureza multifuncional e o registro algébrico é de natureza monofuncional e ambos os registros são de representação discursiva. A conversão, nesse caso, é mais complexa devido às naturezas dos registros serem

distintas e, também, o registro de partida corresponde a uma lei (legi-signo) e o registro de chegada também é uma lei (legi-signo). Tais registros, na relação com o objeto matemático 'área do triângulo' referem-se a símbolos. Como os alunos realizaram de forma satisfatória essa conversão, as relações de significação (relação do signo consigo mesmo) e de objetivação (relação do signo com o objeto) foram efetivadas pelos signos nessa etapa da dedução do modelo matemático. O Quadro 4.14 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão abordada nesses registros.

Quadro 4.14 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro em língua natural para o algébrico da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Língua natural	Algébrico
Natureza do registro	Multifuncional/ representação discursiva	Monofuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência baixo		

No desenvolvimento da atividade, para descrever o volume superior do tanque de combustível, tarefas de compreensão foram mais evidenciadas, possibilitando conversões entre diferentes registros de representação. Como houve coordenação entre os diferentes registros de representação do objeto matemático 'volume', segundo Duval (2003), houve compreensão de tal objeto matemático.

Para determinar o modelo que descreve o volume inferior do tanque de combustível, foram feitos tratamentos no registro algébrico apresentado na Figura 4.21, obtendo o registro algébrico apresentado na Figura 4.30.

Figura 4.30 – Registro de representação utilizado para determinar o modelo matemático que descreve a função do volume inferior da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

Levando as equações (3) e (6) em (2), multiplicando por 2 e levando, finalmente, em (1), obtém-se o volume de combustível da parte inferior do tanque:

$$V_{\inf} = L\left(R^2\theta - (R-h)\sqrt{2Rh-h^2}\right) \qquad (7)$$

Esse registro é de natureza monofuncional, pois trata-se de um registro algoritmizável e de representação discursiva, pois utiliza-se de um argumento.

Nesse caso, a tarefa de produção ocorreu para determinar o modelo matemático que descreve o volume inferior do tanque de combustível. De acordo com o Quadro 4.1, esse registro, na relação do signo consigo mesmo, como representa uma lei, temos um legi-signo e, na relação do signo com o objeto, temos um símbolo. O Quadro 4.15 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e o tratamento abordado nesses registros.

Quadro 4.15 – Estudo dos registros de representação semiótica e tratamento do registro algébrico da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Algébrico	Algébrico
Natureza do registro	Monofuncional/ representação discursiva	Monofuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Tratamento		

Para determinar o modelo que descreve a situação em estudo, ou seja, a função que descreve o volume no interior do tanque de combustível, os alunos apresentaram (Figura 4.31) dois registros de representação, um registro em língua natural e um registro algébrico que foram obtidos por meio do registro gráfico (Figura 4.17).

Figura 4.31 – Registros de representação utilizados para determinar o volume inferior do tanque da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

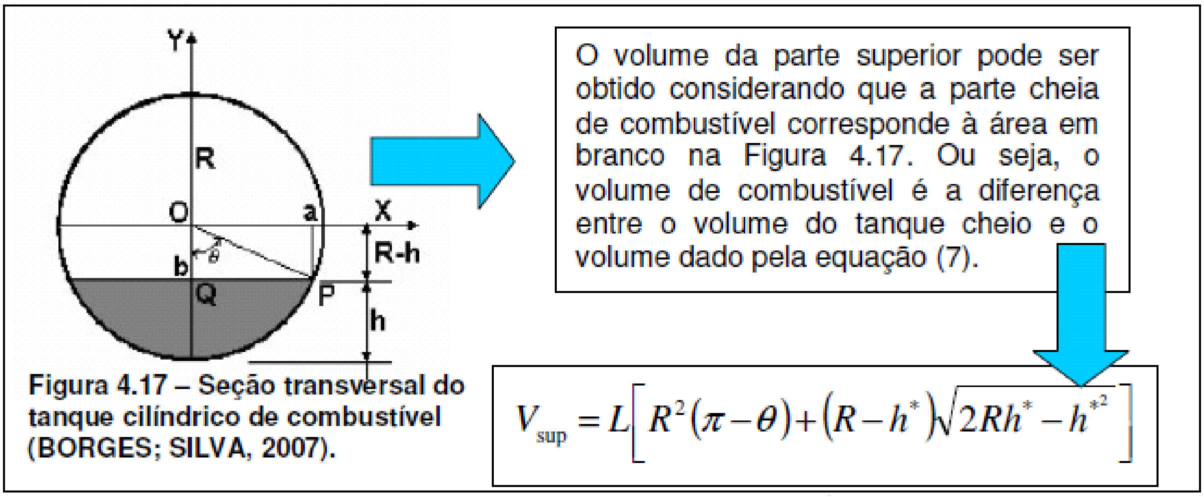
O volume da parte superior pode ser obtido considerando que a parte cheia de combustível corresponde à área em branco na Figura 4.17. Ou seja, o volume de combustível é a diferença entre o volume do tanque cheio e o volume dado pela equação (7).

$$V_{sup} = L\left[R^2(\pi-\theta)+(R-h^*)\sqrt{2Rh^*-h^{*2}}\right] \qquad (8)$$

onde $h^* = 2R-h$, lembrando que h é a altura do combustível, medida com a régua, e que neste caso $h > R$.

Nesse caso, temos dois registros de naturezas distintas: o registro em língua natural é de natureza multifuncional e o registro algébrico é de natureza monofuncional, ambos de representação discursiva, pois utilizam-se de argumentos. De acordo com o Quadro 4.1, esses registros, na relação do signo consigo mesmo, como representam leis, são legi-signos e, na relação do signo com o objeto, são símbolos, pois representam o objeto matemático 'volume superior do cilindro'. Neste caso, houve duas conversões do registro gráfico (Figura 4.17) para o registro em língua natural e do registro em língua natural para o registro algébrico, apresentadas na Figura 4.32.

Figura 4.32 – Conversões do registro gráfico para o registro em língua natural e do registro em língua natural para o registro algébrico para a obtenção do volume do tanque na abordagem geométrica da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).



Na Figura 4.32 há duas conversões, daí fazemos a análise de cada uma de forma separada.

1. Na conversão do registro gráfico para o registro em língua natural, tem-se uma conversão não-congruente com nível de não-congruência intermediário, pois, há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; não há unicidade semântica terminal; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações. A natureza e a representação dos registros são diferentes. O registro gráfico é de natureza monofuncional e de representação não-discursiva e o registro em língua natural é de natureza multifuncional e de representação discursiva. Neste caso, a conversão, segundo Duval (2003), é mais complexa visto que os registros são de naturezas distintas, além disso, o registro de partida corresponde a uma lei (legi-signo) e o registro de chegada também é uma lei (legi-signo). Tais registros, na relação com o objeto matemático 'volume do cilindro' referem-se a símbolos. Como os alunos realizaram de forma satisfatória essa conversão, as relações de significação (relação do signo consigo mesmo) e de objetivação (relação do signo com o objeto) foram efetivadas pelos signos na etapa da dedução do modelo matemático. O Quadro 4.16 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão abordada nesses registros.

Quadro 4.16 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro gráfico para o registro em língua natural da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Gráfico	Língua natural
Natureza do registro	Monofuncional/ representação não-discursiva	Multifuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência intermediário		

Nesse momento da dedução do modelo, os alunos fizeram comparações para estabelecer uma possível solução, passando pelo modo de inferência de abdução Analogia. Segundo Kehle & Cunningham (2000), os modos de inferência não são considerados categorias que devem ser seguidas, mas considerações que podem ser evidenciadas no desenvolvimento de uma atividade de MM. Dessa forma, "voltar" para um modo de inferência de abdução não está relacionado com regredir no desenvolvimento da atividade. Neste caso, a Analogia relaciona-se com a categoria fenomenológica Terceiridade e com a ação cognitiva, estabelecida por Ferri (2006) e apresentada na Figura 4.7, matematização.

2. Na conversão do registro em língua natural para o registro algébrico, tem-se uma conversão não-congruente com nível de não-congruência baixo, pois há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; há unicidade semântica terminal; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações. A natureza dos registros é diferente. O registro em língua natural é de natureza multifuncional e o registro algébrico é de natureza monofuncional, sendo que ambos os registros são de representação discursiva. A conversão, nesse caso, é mais complexa devido às naturezas dos registros serem distintas e, também, o registro de partida corresponde a uma lei (legi-signo) e o registro de chegada também é uma lei (legi-signo). Tais registros, na relação com o objeto matemático 'volume do cilindro' referem-se a símbolos. Como os alunos realizaram de forma satisfatória essa conversão, as relações de significação (relação do signo consigo mesmo) e de objetivação (relação do signo com o objeto) ocorreram nessa etapa da dedução do modelo matemático. O Quadro 4.17 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão abordada nesses registros.

Quadro 4.17 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro em língua natural para o algébrico da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

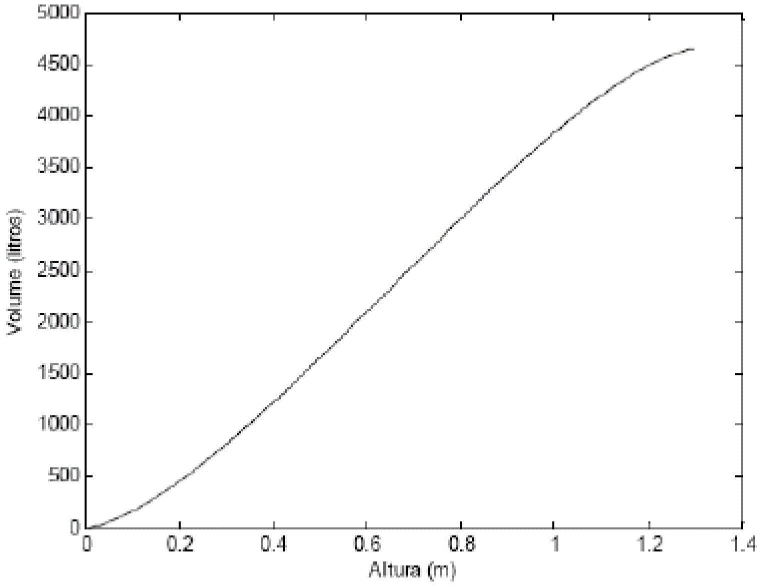
	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Língua natural	Algébrico
Natureza do registro	Multifuncional/ representação discursiva	Monofuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência baixo		

Para a obtenção do registro algébrico, embora o trabalho não apresente, foram realizados tratamentos no interior de tal registro.

Apesar das conversões serem não-congruentes, os alunos conseguiram converter os dados que tinham no registro gráfico para os registros em língua natural e algébrico (Figura 4.32), obtendo o modelo matemático que descreve a situação em estudo. Na transição do modelo real para o modelo matemático, os alunos utilizaram uma matemática adequada ao nível de escolaridade em que se encontram, fazendo considerações geométricas para representar a situação em estudo.

A ação seguinte da dupla de alunos foi realizar a conversão das equações (registros algébricos) 7 e 8 apresentadas nas Fig. 4.30 e Fig. 4.31, respectivamente para o registro gráfico (Figura 4.18).

Figura 4.18 – Volume em função da altura do tanque cilíndrico, para ***R=0,65m* e *L=3,5m*** (BORGES; SILVA, 2007).



Nesse caso, temos um registro gráfico que é de natureza monofuncional e de representação não-discursiva. Para a construção desse gráfico, foi seguida uma lei que rege sua construção, com isso, segundo o Quadro 4.1, na relação do signo em si mesmo, temos um legi-signo e na relação do signo com o objeto temos um símbolo, que representa o volume no cilindro de acordo com a altura obtida pela "régua".

Em Matemática a representação gráfica da função é um registro que pode complementar um registro algébrico e, segundo Damm (1999), a complementaridade se faz necessária, pois o registro gráfico apresenta características e propriedades do objeto que podem não ser claramente perceptíveis somente observando o registro algébrico. Até aqui, diante dos registros apresentados, temos indícios de que os alunos realizaram a coordenação do objeto matemático 'volume do cilindro'.

A conversão dos registros algébricos para o registro gráfico, nesse caso, é não-congruente com nível de não-congruência baixo, pois há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; há unicidade semântica terminal; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações.

A natureza dos registros é monofuncional, no entanto, os registros algébricos são de representação discursiva e o registro gráfico é de representação não-discursiva. As relações dos signos em si mesmos são legi-signos e as relações dos signos com o objeto correspondem a símbolos. O registro de saída é um legi-signo simbólico e o registro de chegada é um legi-signo simbólico. Apesar de Duval (2003) considerar que, em alguns casos, a conversão do registro algébrico para o registro gráfico constituir uma atividade de codificação, nesta atividade de MM isso não ocorreu, uma vez que para obter esse registro, os alunos analisaram a relação entre a altura do tanque do combustível e o volume contido no tanque. Neste contexto, Duval (2003, p. 17) afirma que

> [...] passar de uma equação à sua representação gráfica constituiria uma codificação em que seria suficiente aplicar a regra segundo a qual um ponto está associado a um par de números sobre um plano quadriculado por dois eixos graduados. [...] a regra de codificação permite somente uma leitura pontual das representações gráficas.

O Quadro 4.18 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

Quadro 4.18 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro algébrico para o registro gráfico da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Algébrico	Gráfico
Natureza do registro	Monofuncional/ representação discursiva	Monofuncional/ representação não-discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência baixo		

Nessa etapa que corresponde à obtenção dos resultados matemáticos, os alunos utilizaram o gráfico para visualizar como o modelo matemático se comporta, passando pelo modo de inferência de indução

Identificação. Esse modo de inferência refere-se à Terceiridade e associa-se à ação cognitiva trabalhar matematicamente o modelo matemático obtido, caracterizada por Ferri (2006), conforme apresentamos na Figura 4.7.

Além da conversão do registro algébrico para o gráfico, embora não apresentado no trabalho, mas evidenciado em registro em língua natural (Figura 4.33) apresentado pelos autores, os alunos realizaram uma conversão do registro gráfico para o registro tabular.

Figura 4.33 – Registro de representação semiótica utilizado para evidenciar que os alunos realizaram uma conversão do registro gráfico para o registro tabular com os resultados matemáticos obtidos com o modelo da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

Os resultados foram disponibilizados para o agricultor na forma de uma tabela impressa com valores do volume de combustível para alturas de combustível variando de centímetro em centímetro.

O registro tabular é de natureza monofuncional e de representação discursiva. Para a obtenção da tabela, foi seguida uma lei que rege sua construção. Com isso, segundo o Quadro 4.1, na relação do signo em si, temos um legi-signo e na relação do signo com o objeto temos um símbolo que representa o volume no cilindro de acordo com a altura obtida pela "régua".

A conversão do registro gráfico para o registro tabular, nesse caso, é congruente com nível de congruência alto, pois há conservação semântica das unidades significantes, unicidade semântica terminal e mesma ordem de apreensão das unidades significantes. Além disso, ambos os registros são de natureza monofuncional (algoritmizável), diferenciando apenas no fato de que o registro gráfico é de representação não-discursiva e o registro tabular é de representação discursiva. As relações dos signos em si mesmos são as mesmas e, também o são as relações do signo com o objeto, saindo de um legi-signo simbólico, que apresenta uma lei e representa o objeto para ser estudado e obtendo um outro legi-signo simbólico. O nível de congruência da conversão é alto, pois os alunos que realizaram a atividade de MM encontram-se no Ensino Superior e acredita-se que em tal nível de escolaridade a conversão de um registro gráfico para um registro tabular corresponde a uma atividade de codificação, na qual os pares ordenados apresentados no gráfico podem ser dispostos em uma tabela para auxiliar os agricultores na determinação do volume de combustível existente no tanque a partir da altura de combustível medida pela "régua", além do registro tabular deixar transparecer o registro gráfico. Isto confirma a argumentação de Duval (2003), de que as conversões congruentes são facilmente realizadas pelos alunos. Neste contexto, podemos observar que a conjectura de Flores & Moretti (2008p. 36)

> [...] o importante é notarmos que a possibilidade da congruência entre os registros semióticos contribui tanto para uma aprendizagem com menos custo cognitivo, assim como para a criação de novos conhecimentos.

também se estabeleceu.

O Quadro 4.19 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão do registro gráfico para o registro tabular.

Quadro 4.19 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro gráfico para o registro tabular da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Gráfico	Tabular
Natureza do registro	Monofuncional/ representação não-discursiva	Monofuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão congruente com nível de congruência alto		

Nessa etapa que corresponde, segundo esquema proposto por Ferri (2006) e apresentado na Figura 4.7, à transição dos resultados matemáticos para os resultados reais, os alunos utilizaram o registro de forma espacial em tabela para apresentar os resultados reais do modelo matemático, afirmando que o modelo matemático conduz à situação em estudo, passando pelo modo de inferência de indução Construção do modelo, que se refere à Terceiridade e se associa à ação cognitiva referente à interpretação dos resultados matemáticos.

Com relação à categorização dos signos estabelecida por Peirce (Quadro 4.1) e as etapas da Modelagem, essa atividade se inicia com um sin-signo indicial, abordando na seqüência somente legi-signos simbólicos até à etapa de desenvolvimento de uma atividade de MM que corresponde aos resultados reais. A partir de uma existência estabeleceram-se leis que regem a situação, estabelecendo relações entre as etapas de desenvolvimento desta atividade de MM com as categorias fenomenológicas Primeiridade, Secundidade e Terceiridade. Isso evidencia que, como foi seguida a seqüência da categorização fenomenológica, as relações de significação e de objetivação foram estabelecidas pelos signos.

No decorrer das etapas, os modos de inferência foram abordados e algumas ações cognitivas foram estabelecidas, considerando o esquema de Ferri (2006) apresentado na Figura 4.7, na escolha da situação, ocorreu Compreensão da realidade e o modo de inferência Palpite. A partir da situação-real (Palpite), fizeram uma representação mental do que poderiam estudar. Em seguida, estabeleceram a Estruturação da ação, quando da representação mental obtiveram um modelo real, definindo o problema que poderia ser estudado, nesta etapa o modo de inferência abordado foi Pista. Do modelo real para o modelo matemático, as ações cognitivas foram Simplificação da ação, Estruturação da ação e Matematização, os modos de inferências envolvidos nesta etapa foram Sintoma, Analogia, Predição, Identificação e Construção do modelo. No entanto, como salientam Kehle & Cunningham (2000), os modos de inferência não correspondem a categorias distintas nas quais todas as formas de ocorrências de semiosis podem ser classificadas como um ou outro modo, mas como uma forma de identificar os modos de inferência (abdução, dedução e indução) no desenvolvimento de uma atividade e, em nosso caso, no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática.

Para os alunos, nesse nível de escolaridade, o fenômeno de congruência e de não-congruência não influenciou na caracterização do objeto matemático 'volume do cilindro', abordando conhecimentos matemáticos correspondentes a outros objetos, como área do cilindro, área do setor circular e área de triângulo retângulo. Nesta atividade de MM foram mais evidenciadas tarefas de compreensão, no entanto, tarefas de produção também estiveram presentes e foram essenciais no desenvolvimento dos registros de representação envolvidos, corroborando com a idéia de Duval (2004) de que as tarefas de produção e de compreensão são importantes no desenvolvimento de uma atividade matemática e na coordenação entre os registros de representação semiótica.

De forma geral, nessa atividade de MM muitas foram as representações apresentadas pelos alunos. Diante das significativas semiosis presentes neste contexto, podemos concluir, segundo Duval (2004), que a compreensão do objeto matemático (noésis) 'volume do cilindro' ocorreu.

Além da resolução do problema por meio de uma abordagem geométrica, os alunos, segundo Borges & Silva (2007), apresentaram outra abordagem para o desenvolvimento da atividade de MM. Essa iniciativa dos alunos sinaliza que eles sabem manipular diferentes registros de representação semiótica em distintos sistemas semióticos, confirmando também a argumentação de Brandt (2005),

> O intercâmbio entre os diversos materiais e entre os diversos tipos de registros é fundamental para a noésis, pois essa evidencia o papel da criação e do desenvolvimento de sistemas novos e específicos para o progresso do conhecimento. Ao mesmo tempo, estar-se-á ressaltando a importância da diversidade de tipos de representação em relação tanto à economia que permite a superação dos limites e da rapidez na representação das relações entre objetos como à complementaridade que destaca os aspectos informativos comunicacionais de cada tipo de representação.

A outra abordagem apresentada pelos alunos corresponde ao conteúdo do Ensino Superior, referente à integral. Isto sinaliza que os alunos compreendem que, segundo Duval (2003, p. 22), "duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo".

Na abordagem integral, os alunos iniciaram o desenvolvimento da resolução por meio de um registro algébrico, como apresentado na Figura 4.34.

Figura 4.34 – Registro de representação semiótica utilizado para a dedução do modelo matemático na abordagem integral da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

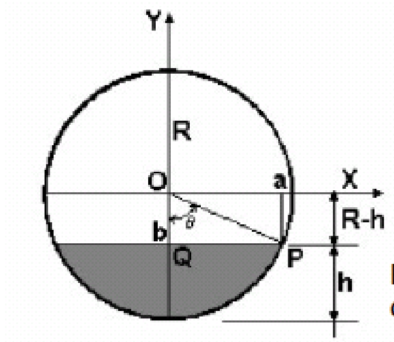
A área (A) inundada com combustível, como mostra a Figura 4.17, pode ser calculada fazendo a diferença entre a área da região definida entre $x = a$, $x = 0$, $y = 0$ e a função $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ e a área do retângulo de lados a e b. A equação (9) expressa essa diferença.

$$A = 2\left[\int_0^a \sqrt{R^2 - x^2}\,dx - (xy)\right] \qquad (9)$$

onde $y = R - h$ e $a = \sqrt{R^2 - y^2}$.

Esse registro de representação, segundo o Quadro 4.1, na relação do signo em si mesmo, como o signo foi definido a partir de uma lei que o rege, tem-se um legisigno e na relação do signo com o objeto, tem-se um símbolo. O registro algébrico é de natureza monofuncional e de representação discursiva. Neste caso, houve uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico, apresentada na Figura 4.35.

Figura 4.35 – Conversão do registro gráfico para o registro algébrico na abordagem integral da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).



$$A = 2\left[\int_0^a \sqrt{R^2 - x^2}\,dx - (xy)\right]$$

Figura 4.17 – Seção transversal do tanque cilíndrico de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

A Figura 4.35 apresenta uma conversão congruente com nível de congruência alto, pois há conservação semântica das unidades significantes, unicidade semântica terminal e mesma ordem de apreensão das unidades significantes. Além disso, ambos os registros são de natureza monofuncional (algoritmizável), diferenciando apenas no fato de que o registro gráfico é de representação não-discursiva e o registro algébrico é de representação discursiva. Segundo Duval (2003), o trabalho com registros monofuncionais é garantia de sucessos para os alunos. No entanto, acreditamos que, além dessa garantia de sucesso pelo fato de trabalhar com registros monofuncionais, os alunos entendem que a área do gráfico abaixo da curva representa uma integral. Para Duval (2003, p. 21), "reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes", é uma sinalização de compreensão.

As relações dos signos em si mesmos são as mesmas e, também o são as relações do signo com o objeto, saindo de um legi-signo simbólico, que apresenta uma lei e representa o objeto a ser estudado, obtendo um outro legi-signo simbólico. Na etapa da dedução do modelo, como os alunos trabalham com regularidades, encontram-se na categoria da Terceiridade. Nesta abordagem, os alunos passaram pelas categorias Primeiridade e Secundidade, pois já haviam realizado esse trabalho na abordagem geométrica. No entanto, segundo Santaella (2008b, p. 51) a Terceiridade aproxima "um primeiro e um segundo numa síntese intelectual".

O nível de congruência da conversão é alto, pois os alunos que realizaram a atividade de MM encontram-se no Ensino Superior na disciplina de Modelagem Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática e, acredita-se que em tal nível de escolaridade, a conversão de um registro gráfico para um registro algébrico que corresponde à integral constitui uma atividade de simples codificação. Além disso, o registro algébrico deixa transparecer o registro gráfico.

O Quadro 4.20 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

Quadro 4.20 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro gráfico para o algébrico na abordagem integral da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Gráfico	Algébrico
Natureza do registro	Monofuncional/ representação não-discursiva	Monofuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão congruente com nível de congruência alto		

Esses registros dão evidências de que os alunos compreendem que a área abaixo da curva corresponde ao objeto matemático "Integral", assim a significação (relação do signo em si mesmo) e a objetivação (relação do signo com o objeto) são efetuadas pelos signos e atingidas pelos alunos, na dedução do modelo matemático por meio da abordagem integral. Estabelecer essas relações é importante, segundo Santaella (2008b), quando se faz uma análise semiótica de uma situação.

Na obtenção do registro algébrico (Figura 4.34), foi realizada tarefa de compreensão, visto que somente uma atividade de conversão se fez necessária.

Para determinar o registro algébrico por meio da integral, os alunos utilizaram uma regra, baseada em conhecimentos que tinham sobre o assunto, propondo hipóteses plausíveis a partir dos dados que possuem, passando pelo modo de inferência de abdução Diagnóstico, que se refere à Terceiridade e, para Ferri (2006), associa-se à ação cognitiva matematização.

Para deduzir o modelo que descreve o volume de combustível dentro do tanque em uma abordagem integral, os autores não deixaram explícitos as tarefas de produção realizada pelos alunos, ou seja, os tratamentos que eles realizaram. A Figura 4.36 apresenta, por meio de registro em língua natural, vestígios dos possíveis tratamentos realizados no desenvolvimento dessa atividade de MM.

Figura 4.36 – Registro que apresenta vestígios dos tratamentos realizados no registro algébrico apresentado na Figura 4.34 na abordagem integral da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

A solução da integral em (9) pode ser obtida usando substituição trigonométrica. Levando a solução de (9) na equação (1) obtém-se o volume de combustível da parte inferior, cuja expressão é idêntica à equação (7). O cálculo da parte superior é análogo à abordagem geométrica.

Como os registros algébricos correspondentes à tarefa de produção, ou seja, aos tratamentos no registro algébrico apresentado na Figura 4.34 não foram apresentados no trabalho de Borges & Silva (2007), nós realizamos possíveis tratamentos e os apresentamos na Figura 4.37.

Figura 4.37 – Registros dos possíveis tratamentos no registro algébrico realizados para a dedução do modelo na abordagem integral da atividade de MM sobre Tanque de combustível.

$$A = 2\left[\int_0^a \sqrt{R^2-x^2}\,dx-(xy)\right] \Rightarrow A = 2.\left[\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2}{2}.sen^{-1}\frac{x}{R}\right]_0^a - x.y\right] \Rightarrow$$

$$A = 2.\left[\frac{a}{2}\sqrt{R^2-a^2}+\frac{R^2}{2}.sen^{-1}\frac{a}{R}-0-x.y\right] \Rightarrow A = a.\sqrt{R^2-a^2}+R^2.sen^{-1}\frac{a}{R}-2.x.y$$

Temos que $\theta = arcsen\dfrac{a}{R}$, $y = R-h$ e $a=\sqrt{R^2-y^2}$, assim

$$a=\sqrt{R^2-(R-h)^2} \Rightarrow a=\sqrt{R^2-(R^2-2Rh+h^2)} \Rightarrow a=\sqrt{2Rh-h^2}$$

Daí temos que

$$A=\left(\sqrt{2Rh-h^2}\right)\sqrt{R^2-\left(\sqrt{2Rh-h^2}\right)^2}+R^2\theta-2.\left(\sqrt{2Rh-h^2}\right)(R-h) \Rightarrow$$

$$A=\left(\sqrt{2Rh-h^2}\right)\sqrt{R^2-2Rh-h^2}+R^2\theta-2.\left(\sqrt{2Rh-h^2}\right)(R-h) \Rightarrow$$

$$A=\left(\sqrt{2Rh-h^2}\right)\sqrt{(R-h)^2}+R^2\theta-2.\left(\sqrt{2Rh-h^2}\right)(R-h) \Rightarrow$$

$$A=\left(\sqrt{2Rh-h^2}\right)(R-h)+R^2\theta-2.\left(\sqrt{2Rh-h^2}\right)(R-h) \Rightarrow A=R^2\theta-\left(\sqrt{2Rh-h^2}\right)(R-h)$$

Assim, substituindo o valor de A encontrado na equação (1), obtém-se

$$V=\left[R^2\theta-\left(\sqrt{2Rh-h^2}\right)(R-h)\right]L$$

Que é uma expressão idêntica à apresentada na equação (7).

Ao realizarmos os tratamentos nos registros algébricos, conjecturamos que os alunos, mesmo sabendo que utilizando conteúdos do Ensino Médio obteriam a resposta ao problema, utilizaram conhecimentos do Ensino Superior por meio de uma regra que tem como objetivo apresentar uma explicação plausível para o nível de escolaridade no qual se encontram. Isto caracteriza o modo de inferência de abdução Explicação, relacionado à Terceiridade e pode ser associado à ação cognitiva matematização, definida por Ferri (2006) e apresentada na Figura 4.7.

Neste caso, evidenciamos o que Damm (1999, p. 152) afirma

> É tomando simultaneamente em conta dois registros de representação, e não cada um isoladamente, que podemos constatar a importância das representações semióticas nas atividades cognitivas matemáticas. Melhor dizendo, é durante a passagem de um registro de representação a outro que podemos observar a importância da forma das representações.

Os registros de representação apresentados na atividade de MM sobre Tanque de combustível dão indícios de que a dupla de alunos conceitualizou o objeto matemático "volume do cilindro" e outros objetos matemáticos envolvidos no desenvolvimento da atividade, pois realizaram a coordenação entre os registros de representação, tanto utilizando conteúdos do Ensino Médio como conteúdos do Ensino Superior.

É importante que analisemos o modelo matemático obtido com a atividade de MM em relação ao problema estabelecido. No caso da definição do problema, é preciso verificar se as respostas foram atingidas usando o modelo matemático obtido. Nessa atividade, o modelo matemático reflete a situação em estudo e apresenta uma resposta para o problema levantado, tanto que a dupla elaborou um registro tabular para ser utilizado pelas pessoas que estão envolvidas na situação, ou seja, os agricultores que fazem uso de tanques para armazenar combustível.

As duas abordagens de desenvolvimento do objeto matemático 'volume do cilindro', são importantes para os alunos, pois eles demonstram, o que Duval (2003, p. 21) sugere para a conceitualização de um objeto matemático, "reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes".

4.3.3 Atividade 3: Travessia de um Barco

Em Jiang & Xie (2007) encontramos uma atividade de MM que foi desenvolvida como "Experimento Matemático" em um curso semestral com duração de três horas semanais ministrado a estudantes do Ensino Superior da Universidade Tsinghua, na China. Os estudantes do curso não são especialistas em Matemática. O objetivo do curso foi que os alunos aprendessem Matemática fazendo Matemática, evidenciando sua aplicação em atividades práticas. Nesse curso, integram-se Modelagem Matemática e softwares matemáticos, além de outros recursos como computação numérica, otimização e estatística.

A atividade que apresentamos faz parte dos anais do XIII International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA), que ocorreu nos Estados Unidos, em 2007.

Nessa atividade, os autores junto aos alunos do curso obtiveram um modelo que apresenta o caminho percorrido pelo barco e o tempo que este leva para atravessar um rio. Essa atividade faz parte do experimento matemático intitulado "solução numérica para a EDO", que foi proposta após serem desenvolvidas idéias básicas do algoritmo de Runge-Kutta e de resoluções de alguns exemplos práticos utilizando o programa computacional MATLAB (por exemplo, usando o comando "ode 45").

Descrevemos a atividade como foi apresentada em Jiang & Xie (2007).

Há um rio com largura de 100 m (metros), e há um barco que tenta atravessar o rio de um lado para o outro. A velocidade da água é de 1 m/s e a velocidade do barco é de 2 m/s. Suponha que durante o curso a proa do barco sempre aponta para o destino que está à direita do lado oposto ao ponto de partida do barco. Responda às seguintes perguntas:

(i) Qual é o caminho do barco sobre a água?
(ii) Quanto tempo o barco leva para atravessar o rio?
(iii) Alterar os valores da largura do rio, as velocidades da água e do barco e, em seguida, responder às mesmas perguntas como anteriormente. Você pode encontrar alguma coisa interessante a partir de suas observações?

Modelo: A maioria dos alunos modelou o problema como uma equação diferencial ordinária como a seguir (ver Figura 4.38, o barco em posição P (x, y) pretende cruzar o rio de A para B):

Fonte: Jiang & Xie (2007).

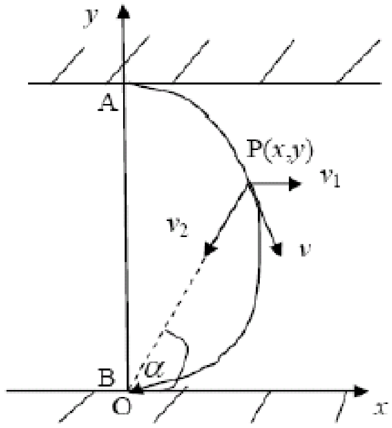


Figura 4.38 – Barco atravessando o rio.

$$\frac{dx}{dt} = v_1 - v_2 \cos\alpha \qquad \frac{dy}{dt} = -v_2 sen\alpha \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_1 - v_2 x / \sqrt{x^2 + y^2} \\ \dfrac{dy}{dt} = -v_2 y / \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = d \end{cases} \qquad (1)$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades da água e do barco, respectivamente; d é a largura do rio, e (x, y) é a posição do barco no instante t.

Questão (i): Para responder à questão (i), pode-se resolver (1) numericamente e, então, plotar (x, y) no plano. Pode-se obter também a relação analítica entre x e y. De fato, é mais fácil eliminar o parâmetro tempo "t" a partir de (1):

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{v_1}{v_2}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{x}{y}, \qquad (2)$$

na qual $x = 0$ quando $y = d$

Se $x / y = u$ em (2), então

$$y\frac{du}{dy} = -k\sqrt{1+u^2}, \left(k = \frac{v_1}{v_2}\right), \qquad (3)$$

em que $u = 0$ quando $y = d$.

A solução de (3) é $\sqrt{1+u^2} = d^k y^{-k} - u$, o que significa que a solução de (2) é

$$x = \frac{d}{2}\left[\left(\frac{y}{d}\right)^{1-k} - \left(\frac{y}{d}\right)^{1+k}\right], \left(k = \frac{v_1}{v_2}\right). \qquad (4)$$

Esta é a equação que representa o caminho percorrido pelo barco sobre a água.

Fonte: Jiang & Xie (2007).

Questão (ii): Para responder à questão (ii), os alunos tentam resolver (1) numericamente, seguindo o processo de forma similar ao que aprendeu na palestra, isto é, usando o comando "ode45" do MATLAB. No entanto, no comando "ode45" os alunos necessitam inserir o parâmetro t, isto é, o tempo inicial (que se assume ser zero), e o tempo final do movimento do barco. Muitos estudantes enfrentam a dificuldade para definir o intervalo para este parâmetro, pois eles não sabem quanto tempo o barco levaria para atravessar o rio.

Geralmente, os estudantes definem um intervalo suficientemente grande para o parâmetro t, por exemplo, $[0,100]$. No entanto, quando eles se deparam com o comando "ode45" neste conjunto de parâmetros, o MATLAB se mantém executando, e o programa parece não chegar a uma solução. Alguns estudantes, então, usam uma técnica de tentativa-e-erro para encontrar um tempo final razoável para o barco. Por exemplo, eles podem utilizar o método da bissecção para tentar outros intervalos de tempo como [0, 50] seguido por [0, 75], [0, 62.5],…. Por fim, eles encontraram o tempo final que deve ser 66,7 (segundos). Isto quer dizer, que quando o aluno definir o intervalo de tempo [0,66.7] no comando "ode45", o programa executa e pára normalmente.

Por que isso acontece? Alguns estudantes pensam do mesmo modo. O exame do modelo em (1) revela que a fórmula é matematicamente problemática, porque $x = y = 0$ quando o barco chega ao destino no ponto $B(0,0)$. Esta poderá ser a razão pela qual o MATLAB não pode executar com êxito quando um intervalo suficientemente grande para o parâmetro tempo é ajustado.

Existem algumas abordagens melhores para lidar com o problema? Alguns estudantes propõem uma abordagem muito simples para evitar os procedimentos de tentativa-e-erro que foram anteriormente mencionados. Eles resolvem o problema por "ode45" passo a passo, ou seja, em cada passo o barco avança da posição atual no tempo t para a próxima posição em um futuro muito próximo de tempo, por exemplo, $t+0{,}1$. Sempre que o barco chega a uma nova posição, verificam se o destino foi atingido. Se sim, o processo pára; caso contrário vai para a próxima posição.

Abordagens mais elegantes podem ser encontradas nos relatórios dos estudantes para esse experimento. Notando que, no modelo original (1), a direção do barco muda depois que atravessa o ponto de destino, alguns alunos pensam que essa é razoável. Assim, eles apenas mudam a segunda equação em (1) de $dy/dt = -v_2 y/\sqrt{x^2+y^2}$ para $dy/dt = -v_2|y|/\sqrt{x^2+y^2}$ e, então, trabalham normalmente com o MATLAB. É claro que nós somente estamos interessados na solução do intervalo de tempo [0, 66.7], assim nós devemos descartar a solução que esteja fora desse intervalo.

Outra abordagem é mudar o modelo (1) por um dos seguintes equivalentes:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v_1 - v_2 x/\sqrt{x^2+y^2}}{-v_2 y/\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{-v_2 y/\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ com } \begin{cases} x(d) = 0 \\ t(d) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Integrando (2) em y sobre [d, 0] usando o "ode45", a solução pode ser encontrada. (Quando usamos o intervalo de integração [d, 0], o MATLAB ainda tem algumas dificuldades. Contudo, podemos utilizar o intervalo de integração [d, e], onde e é relativamente pequeno e um valor positivo próximo a 0).

Fonte: Jiang & Xie (2007).

Questão (iii): Esta tarefa pode ser facilmente feita após as tarefas (i) e (ii) estarem bem feitas.

Outro Modelo: Para nossa surpresa, mais uma abordagem muito inteligente também é sugerida pelos alunos. Eles utilizam a água como o ponto de referência (ver Figura 4.39) e, então, no tempo t o barco está na posição $Q(d, v_1 t)$ e o barco está na posição P (x, y).

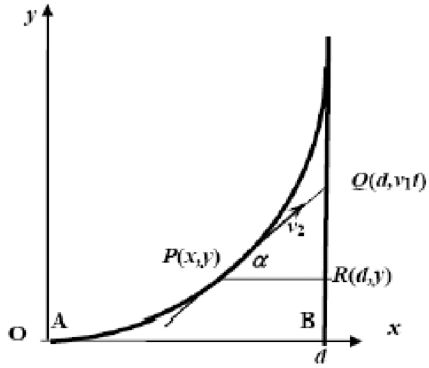


Figura 4.39 – Outra abordagem de Modelagem.

Eles modelam o problema como

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_2 \cos\alpha, \\ \dfrac{dy}{dt} = v_2 sen\alpha, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{v_2(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + (v_1 t - y)^2}}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{v_2(v_1 t - y)}{\sqrt{(d-x)^2 + (v_1 t - y)^2}}, \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

A Equação (6) pode ser resolvida pelo MATLAB (por exemplo, pelo comando "ode45") diretamente.

De maneira semelhante ao modelo (1), pode-se também obter uma relação analítica entre x e y a partir do modelo (6). De fato, a partir de (6) temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_1 t - y}{d - x}. \qquad (7)$$

Portanto

$$(d-x)\frac{d^2 y}{dx^2} = v_1 \frac{dt}{dx}. \qquad (8)$$

Percebendo que $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ e $ds/dt = v_2$, a equação. (8) pode ser reescrita como

$$(d-x)\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{v_1}{v_2}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (9)$$

Se $dy/dx = u$ e $k = v_1/v_2$, a eqn. (9) passa a

$$(d-x)\frac{dp}{dx} = k\sqrt{1+p^2}, \text{ com } p(0) = 0. \qquad (10)$$

Fonte: Jiang & Xie (2007).

A solução de (10) é $\sqrt{1+p^2}+p=(1-x/d)^{-k}$, o que significa que $dy/dx=p=\left|(1-x/d)^{-k}-(1-x/d)^{k}\right|/2$. Por isso, a solução de (9) é

$$y=\frac{d}{2}\left[\frac{1}{1+k}\left(\frac{d-x}{d}\right)^{1+k}-\frac{1}{1-k}\left(\frac{d-x}{d}\right)^{1-k}\right]+\frac{kd}{1-k^2}. \qquad (11)$$

Esta é a equação que representa o caminho percorrido pelo barco sobre a água.

É interessante que se pode também determinar o tempo que o barco leva para atravessar o rio a partir de (11).

Quando o barco chega na posição final, $x=d$ e de (11) temos $y=\frac{kd}{1-k^2}$. Assim, o tempo necessário para o barco atravessar o rio deveria ser $\frac{kd}{1-k^2}\Big/ v_1 = \frac{v_1 v_2 d}{v_2^2-v_1^2}$.

Para $v_1=1$, $v_2=2$ e $d=100$, este tempo é de $200/3$, ou cerca de 66,7 (segundos).

Fonte: Jiang & Xie (2007).

4.3.3.1 Análise específica da atividade

Essa atividade de Modelagem Matemática difere das duas atividades anteriores, pois os alunos recebem dos ministrantes do curso o problema que devem resolver, cujo tema é a travessia de um barco. Nessa atividade de MM não se partiu de uma situação real escolhida pelos alunos, mas de um problema com aplicação prática apresentado pelos professores do curso.

As etapas da atividade de MM referentes à escolha da situação e à definição do problema a ser estudado não fazem parte dessa atividade. Para os alunos, que desenvolveram a atividade, a categoria fenomenológica Primeiridade ocorre quando entram em contato com o problema que foi proposto. Como salienta Santaella (2008b, p. 45), "o primeiro (primeiridade) é presente e imediato, de modo a não ser segundo para uma representação", ou seja, quando os alunos entraram em contato com o problema proposto não fizeram representação imediata referente a tal problema. A Figura 4.40 apresenta o problema.

Figura 4.40 – Apresentação do problema para ser resolvido na atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007).

Há um rio com largura de 100 m (metros), e há um barco que tenta atravessar o rio de um lado para o outro. A velocidade da água é de 1 m/s e a velocidade do barco é de 2 m/s. Suponha que durante o curso a proa do barco sempre aponta para o destino que está à direita do lado oposto ao ponto de partida do barco. Responda às seguintes perguntas:

(i) Qual é o caminho do barco sobre a água?

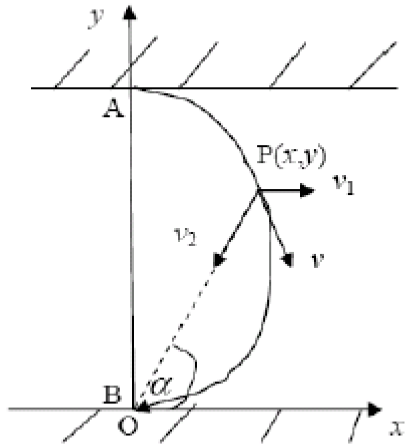
(ii) Quanto tempo o barco leva para atravessar o rio?

(iii) Alterar os valores da largura do rio, as velocidades da água e do barco e, em seguida, responder às mesmas perguntas como anteriormente. Você pode encontrar alguma coisa interessante a partir de suas observações?

O problema foi apresentado aos alunos por meio de registro em língua natural. Esse registro de representação é de natureza multifuncional, não-algoritmizável, e de representação discursiva, pois faz uso de um argumento. Além disso, nesse caso, como a representação informa a existência do problema que deve ser estudado, segundo o Quadro 4.1, na relação do signo em si mesmo (significação), temos um sin-signo e na relação do signo com o objeto (objetivação), temos um índice, a representação de algo que pode ser estudado.

Para Duval (2003), fazer uma conversão partindo de um registro multifuncional é uma tarefa mais complexa, necessitando realizar uma interpretação de tal registro. Em atividades de matemática, segundo Duval (2003), em geral, os alunos estão mais acostumados a trabalhar com registros monofuncionais. Quando os alunos realizam a interpretação do problema a ser estudado e realizam o estudo de tal problema, encontram-se na categoria fenomenológica da Secundidade. Podemos inferir isso com a conversão do registro em língua natural para o registro gráfico (Figura 4.38).

Figura 4.38 – Barco atravessando o rio



Ao analisar o registro gráfico, fica evidente que os alunos levaram em consideração todas as condições estabelecidas pelo problema, não buscaram outras informações além das apresentadas. Isso sinaliza que, nessa situação, como os alunos realizaram a conversão entre os registros, as relações de significação (relação do signo em si mesmo) e de objetivação (relação do signo com o objeto) foram efetivadas pelos signos e evidenciadas pelos alunos, possibilitando, segundo Santaella (2008b), uma análise semiótica da situação. O registro gráfico é de natureza monofuncional e de representação não-discursiva. Como os alunos seguiram as informações do problema para traçar tal registro, segundo o Quadro 4.1, na relação do signo em si mesmo tem-se um legi-signo e na relação do signo com o objeto tem-se um símbolo, que representa o problema em estudo.

A conversão do registro em língua natural (Figura 4.40) para o registro gráfico (Figura 4.38) é não-congruente com nível de não-congruência intermediário, pois há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; não há unicidade semântica terminal, pois para construir o registro gráfico poderiam ter sido apresentados registros diferentes; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações. Além de não satisfazer a duas condições de congruência, a natureza dos registros de representação associados à conversão do registro em língua natural (Figura 4.40) para o registro gráfico (Figura 4.38) é distinta, o que torna a atividade de conversão mais complexa. O Quadro 4.21 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão do registro em língua natural para o registro gráfico.

Quadro 4.21 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da convensão do registro em linguagem natural para o registro gráfico da atividade de MM sobre Travessia de um barco.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Língua natural	Gráfico
Natureza do registro	Multifuncional/ representação discursiva	Monofuncional/ representação não-discursiva
Relação do signo em si mesmo	Sin-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Índice	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência intermediário		

Os alunos compreenderam o que foi proposto no problema, de maneira satisfatória, pois apresentaram por meio de um registro gráfico (Figura 4.8) tal problema, por meio de uma conversão não-congruente com nível de não-congruência intermediário, a partir de registros de naturezas distintas, saindo de um sin-signo indicial e obtendo um legi-signo simbólico.

Para realizar a conversão, os alunos procuraram iniciar a resolução do problema, utilizando ferramentas essenciais em Matemática, como a régua para realizar o traçado do plano cartesiano (mesmo que possam ter utilizado o computador para realizar essa tarefa, o princípio básico é o mesmo). Com isso, segundo Kehle & Cunningham (2000) passaram pelo modo de inferência de abdução Palpite que, nesse caso, se refere à Terceiridade e está associado às ações cognitivas, estabelecidas por Ferri (2006) e apresentadas na Figura 4.7, compreensão da ação e matematização. Os alunos também realizaram a formação de uma eventual regra baseada nas informações disponíveis, propondo hipóteses plausíveis, passando pelo modo de inferência de abdução Diagnóstico que também se refere à Terceiridade e se associa à ação cognitiva matematização.

A partir do registro gráfico (Figura 4.38) foi feito um estudo matemático para responder ao problema em questão. Nesse caso, os alunos trabalharam matematicamente a situação, permanecendo no modo de inferência de abdução Diagnóstico, e na categoria fenomenológica Terceiridade.

Para trabalhar matematicamente os dados, foi realizada uma conversão do registro gráfico (Figura 4.38) para o registro algébrico, como apresentado na Figura 4.41.

Figura 4.41 – Registro de representação semiótica utilizado na dedução do modelo matemático da atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007).

$$\frac{dx}{dt} = v_1 - v_2 \cos\alpha \qquad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_1 - v_2 x / \sqrt{x^2 + y^2} \\ \dfrac{dy}{dt} = -v_2 y / \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = d \end{cases} \qquad (1)$$
$$\frac{dy}{dt} = -v_2 sen\alpha$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades da água e do barco, respectivamente; d é a largura do rio, e (x, y) é a posição do barco no instante t.

O registro algébrico é de natureza monofuncional, pois é algoritmizável, e de representação discursiva. Segundo o Quadro 4.1, na relação do signo em si mesmo (significação), como existe uma lei que rege tal registro, temos um legi-signo e na relação do signo com o objeto (objetivação), temos um símbolo. A partir deste momento da atividade de MM, os alunos passaram a trabalhar com legi-signos, pois na dedução do modelo matemático, em geral, trabalham com regularidades, seguindo leis matemáticas, na qual a ação cognitiva mais evidenciada é a matematização.

A conversão do registro gráfico para o registro algébrico é não-congruente com nível de não-congruência alto, pois não satisfaz às três condições de congruência estabelecidas por Duval (2004), ou seja, não há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações; não há unicidade semântica terminal, pois há outras alternativas para se desenvolver o estudo do que foi apresentado no registro gráfico; não há mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações. Embora os registros sejam de mesma natureza (monofuncional), diferenciam na representação, pois o registro gráfico é de representação não-discursiva e o registro algébrico é de representação discursiva. Mesmo que os alunos que desenvolveram a atividade estão no Ensino Superior, não são especialistas em Matemática o que pode tornar a atividade mais complexa, dependendo dos conhecimentos matemáticos desenvolvidos. O Quadro 4.22 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

Quadro 4.22 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro gráfico para o registro algébrico da atividade de MM sobre Travessia de um barco.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Gráfico	Algébrico
Natureza do registro	Monofuncional/ representação não-discursiva	Monofuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência alto		

O registro algébrico apresentado na Figura 4.41, sinaliza que os alunos têm conhecimentos do objeto matemático 'Equações Diferenciais Ordinárias', pois com esses conhecimentos estabeleceram relações matemáticas a partir do registro gráfico (figura da travessia do barco), apresentando uma explicação plausível ao nível de escolaridade no qual se encontram. Assim, os alunos passaram pelo modo de inferência de abdução Explicação que, na categoria fenomenológica, corresponde à Terceiridade e, nesta atividade, está associado à ação cognitiva de matematização da situação, estabelecida por Ferri (2006).

Para resolver à Questão (i) "Qual é o caminho do barco sobre a água?', os alunos fizeram tratamentos no registro algébrico, como apresentado na Figura 4.42.

Figura 4.42 – Tratamentos realizados na dedução do modelo matemático da atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007).

De fato, é mais fácil eliminar o parâmetro tempo "t" a partir de (1):

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{v_1}{v_2}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}+\frac{x}{y}, \qquad (2)$$

na qual $x=0$ quando $y=d$

Se $x/y=u$ em (2), então

$$y\frac{du}{dy}=-k\sqrt{1+u^2},\left(k=\frac{v_1}{v_2}\right), \qquad (3)$$

em que $u=0$ quando $y=d$.

A solução de (3) é $\sqrt{1+u^2}=d^k y^{-k}-u$, o que significa que a solução de (2) é

$$x=\frac{d}{2}\left[\left(\frac{y}{d}\right)^{1-k}-\left(\frac{y}{d}\right)^{1+k}\right],\ \left(k=\frac{v_1}{v_2}\right). \qquad (4)$$

Esta é a equação que representa o caminho percorrido pelo barco sobre a água.

Na realização dos tratamentos, os alunos apresentam os conhecimentos matemáticos que possuem para o desenvolvimento da EDO apresentada na Figura 4.41. Neste momento, tarefas de produção são mais evidenciadas no desenvolvimento da atividade de MM.

Para obter a equação diferencial ordinária apresentada em (2) da Figura 4.42, embora Jiang & Xie (2007) não apresentam os tratamentos, ou seja, não apresentam as tarefas de produção vinculadas a tal momento, realizamos os cálculos e apresentamos os possíveis tratamentos na Figura 4.43.

Figura 4.43 – Registros que representam os possíveis tratamentos no registro algébrico realizados para a dedução do modelo

$$\frac{dx}{dt}.\frac{dt}{dy}=\left(v_1-\frac{v_2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{-v_2y}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-\frac{v_1\sqrt{x^2+y^2}}{v_2y}+\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-\frac{v_1}{v_2}.\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}+\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-\frac{v_1}{v_2}.\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{y^2}}+\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-\frac{v_1}{v_2}.\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}+\frac{x}{y}.$$

Além disso, ao considerarem $\frac{x}{y}=u \Rightarrow x=y.u \Rightarrow dx=ydu$, verificamos que $\frac{dx}{dy}=-\frac{v_1}{v_2}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}+\frac{x}{y}$ deveria ser expressa por $y\frac{du}{dy}=-\frac{v_1}{v_2}\sqrt{u^2+1}+u$. Nesse registro foi desprezada a sentença $\left(+\frac{x}{y}\right)$ em (3). Realizando possíveis tratamentos nos outros registros algébricos apresentados na Figura 4.42, apresentamos a Figura 4.44.

Figura 4.44 – Registros que representam os possíveis tratamentos realizados para a dedução do modelo referente à atividade de MM sobre Travessia de um barco.

Da equação (3), temos que $y\frac{du}{dy}=-k\sqrt{1+u^2}, \left(k=\frac{v_1}{v_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du=-k.\frac{1}{y}dy$

Sabendo que $\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du=\ln(u+\sqrt{1+u^2})$, então

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du=-k\int\frac{1}{y}dy \Rightarrow \ln(u+\sqrt{1+u^2})=-k.\ln y+c_2 \Rightarrow \ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln y^{-k}+c_2$$

$$u+\sqrt{1+u^2}=e^{\ln y^{-k}+c_2}=e^{\ln y^{-k}}.e^{c_2} \Rightarrow u+\sqrt{1+u^2}=y^{-k}.C$$

Se $u=0$ quando $y=d$, temos $0+\sqrt{1+0}=d^{-k}.C \Rightarrow C=\frac{1}{d^{-k}} \Rightarrow C=d^k$.

Daí, temos que $\sqrt{1+u^2}=d^k.y^{-k}-u$.

Assim, $\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=d^k.y^{-k}-\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow 1+\left(\frac{x}{y}\right)^2=\left(d^k.y^{-k}-\left(\frac{x}{y}\right)\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1+\left(\frac{x}{y}\right)^2=(d^k.y^{-k})^2-2.d^k.y^{-k}.\frac{x}{y}+\left(\frac{x}{y}\right)^2 \Rightarrow 2.d^k.y^{-k}.\frac{x}{y}=(d^k.y^{-k})^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{(d^k.y^{-k})^2-1}{2.d^k.y^{-k}} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{(d^k.y^{-k})^2}{2.d^k.y^{-k}}-\frac{1}{2.d^k.y^{-k}} \Rightarrow x=\left(\frac{d^k.y^{-k}}{2}-\frac{1}{2.d^k.y^{-k}}\right).y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{y.d^k.y^{-k}}{2}-\frac{y}{2.d^k.y^{-k}} \Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(y^{1-k}.d^k-\frac{y}{d^k.y^{-k}}\right) \Rightarrow x=\frac{d}{2}\left[\left(\frac{y}{d}\right)^{1-k}-\left(\frac{y}{d}\right)^{1+k}\right]$$

Para realizar esses cálculos, seguimos as equações apresentadas em Jiang & Xie (2007), mesmo que os autores tenham desconsiderado uma sentença. Isso foi realizado, para verificar se o que apresentaram permanecia coerente até o final dos tratamentos. A tarefa de produção, nesse caso, é segundo Duval (2004), importante para a generalização da atividade matemática.

Com esses tratamentos, fica evidente que os alunos compreendem como se resolve uma EDO com valor inicial. A matematização utilizada para a dedução e obtenção do modelo faz com que os alunos permaneçam no modo de inferência de abdução Diagnóstico, em que seguem uma eventual regra, que corresponde à categoria fenomenológica da Terceiridade.

Os registros desenvolvidos pelos alunos até o momento foram utilizados para responder à questão (i) "Qual é o caminho do barco sobre a água?', apresentada na Figura 4.40. Ao realizarem tratamentos e conversões não-congruentes com diferentes níveis de não-congruência, os alunos obtiveram a resposta para tal questão. Isso mostra que os alunos têm compreensão do objeto matemático 'equações diferenciais ordinárias' abordado no desenvolvimento da atividade, pois realizaram de forma satisfatória tais conversões.

Para resolver à Questão (ii) "Quanto tempo o barco leva para atravessar o rio?', os autores mencionaram que os alunos tentaram resolver numericamente o problema utilizando o programa computacional MatLAB. No entanto, não tiveram sucesso, como apresentado na Figura 4.45.

Figura 4.45 – Justificativa pela falta de sucesso dos alunos ao tentarem utilizar o programa MatLAB para realizar tratamentos para responder à questão (ii) da atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007).

Questão (ii): Para responder à questão (ii), os alunos tentam resolver (1) numericamente, seguindo o processo de forma similar ao que aprendeu na palestra, isto é, usando o comando "ode45" do MATLAB. No entanto, no comando "ode45" os alunos necessitam inserir o parâmetro t, isto é, o tempo inicial (que se assume ser zero), e o tempo final do movimento do barco. Muitos estudantes enfrentam a dificuldade para definir o intervalo para este parâmetro, pois eles não sabem quanto tempo o barco levaria para atravessar o rio.

Geralmente, os estudantes definem um intervalo suficientemente grande para o parâmetro t, por exemplo, $[0,100]$. No entanto, quando eles se deparam com o comando "ode45" neste conjunto de parâmetros, o MATLAB se mantém executando, e o programa parece não chegar a uma solução. Alguns estudantes, então, usam uma técnica de tentativa-e-erro para encontrar um tempo final razoável para o barco. Por exemplo, eles podem utilizar o método da bissecção para tentar outros intervalos de tempo como [0, 50] seguido por [0, 75], [0, 62.5],.... Por fim, eles encontraram o tempo final que deve ser 66,7 (segundos). Isto quer dizer, que quando o aluno definir o intervalo de tempo [0,66.7] no comando "ode45", o programa executa e pára normalmente.

Por que isso acontece? Alguns estudantes pensam do mesmo modo. O exame do modelo em (1) revela que a fórmula é matematicamente problemática, porque $x = y = 0$ quando o barco chega ao destino no ponto $B(0,0)$. Esta poderá ser a razão pela qual o MATLAB não pode executar com êxito quando um intervalo suficientemente grande para o parâmetro tempo é ajustado.

Ao trabalhar numericamente a situação, seguindo estudo que havia sido desenvolvido antes da aplicação da atividade de MM, os alunos passam pelo modo de inferência de abdução Palpite, pois apresentam um palpite para realizar o estudo, no entanto, tal palpite é refutado quando este não apresenta resultados satisfatórios. Assim, mesmo que o modelador tenha em mãos uma ferramenta computacional para auxiliá-lo nos cálculos, é preciso ter conceitualizado o objeto matemático para que a situação seja resolvida, corroborando com o que Giraldo & Carvalho (2002, p. 118-119) estabelecem com relação ao uso de computador no desenvolvimento de objetos matemáticos "[...] algoritmos computacionais quantitativos podem gerar resultados conflitantes com a teoria matemática associada e, portanto, como estes devem ser analisados criticamente", é preciso utilizar os conhecimentos matemáticos que se têm para atender a essa limitação.

Além disso, conforme relatado por Jiang & Xie (2007), os alunos utilizaram a técnica de tentativa e erro, na qual atribuíram valores para o parâmetro t (tempo) e solicitaram que o programa executasse os cálculos. O uso dessa técnica é importante. No entanto, para usar tal técnica não se tem conceitualizada uma Matemática mais sofisticada para o nível de ensino (Ensino Superior) no qual se encontram os estudantes para os quais a atividade de MM foi proposta. Para desenvolver essa técnica, fica "embutida' a idéia de que o programa realizou tratamentos com o registro algébrico obtido no desenvolvimento do modelo matemático. Isso é evidente no registro em língua natural apresentado no trabalho de Jiang & Xie (2007), e aqui descrito na Figura 4.46.

Figura 4.46 – Tratamento utilizando o comando "ode45" passo a passo para responder à questão (ii) da atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007).

> Existem algumas abordagens melhores para lidar com o problema? Alguns estudantes propõem uma abordagem muito simples para evitar os procedimentos de tentativa-e-erro que foram anteriormente mencionados. Eles resolvem o problema por "ode45" passo a passo, ou seja, em cada passo o barco avança da posição atual no tempo t para a próxima posição em um futuro muito próximo de tempo, por exemplo, $t+0{,}1$. Sempre que o barco chega a uma nova posição, verificam se o destino foi atingido. Se sim, o processo pára; caso contrário vai para a próxima posição.

Os alunos que desenvolveram essa abordagem estão no modo de inferência de abdução Pista, pois procuram raciocinar em ordem para determinar se algumas observações dão pistas de algum fenômeno mais geral. Esse modo de inferência corresponde à categoria fenomenológica Secundidade e associa-se à ação cognitiva matematização, caracterizada por Ferri (2006) e apresentada na Figura 4.7.

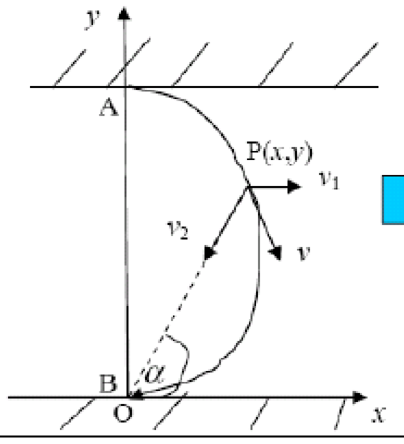
Existem estudantes que apresentaram resoluções mais sofisticadas para responder à questão (ii), como apresentado nas Figuras 4.47 e 4.49.

Figura 4.47 – Abordagem utilizada pelos estudantes, nos relatórios do curso, para responder à questão (ii) da atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007).

> Abordagens mais elegantes podem ser encontradas nos relatórios dos estudantes para esse experimento. Notando que, no modelo original (1), a direção do barco muda depois que atravessa o ponto de destino, alguns alunos pensam que essa é razoável. Assim, eles apenas mudam a segunda equação em (1) de $dy/dt = -v_2 y/\sqrt{x^2+y^2}$ para $dy/dt = -v_2 |y| / \sqrt{x^2+y^2}$ e, então, trabalham normalmente com o MATLAB. É claro que nós somente estamos interessados na solução do intervalo de tempo [0, 66.7], assim nós devemos descartar a solução que esteja fora desse intervalo.

Nessa abordagem, os registros de representação dão indícios de que os estudantes consideram a noção de módulo, pois eles consideram que ao atingir tal ponto do destino que corresponde ao ponto 5(0,0), o barco muda a direção e, dessa forma, permanece em y >0. Assim, os alunos fizeram a conversão do registro gráfico (Figura 4.38) para o registro algébrico (Figura 4.47), como apresentado na Figura 4.48.

Figura 4.48 – Conversão do registro gráfico para o registro algébrico da atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007).



$$dy/dt = -v_2 |y| / \sqrt{x^2+y^2}$$

Figura 4.38 – Barco atravessando o rio (JIANG; XIE, 2007).

A conversão apresentada na Figura 4.48 é não-congruente com nível de não-congruência alto, pois não atende às três condições de congruência. As naturezas dos registros de representação são as mesmas, o registro gráfico é de natureza monofuncional e o registro algébrico é de natureza monofuncional, no entanto, o registro gráfico é de representação não-discursiva e o registro algébrico é de representação discursiva, o que para Duval (2003), pode tornar a atividade mais complexa. O Quadro 4.23 resume o estudo que fizemos dos registros de representação e a classificação da conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

Quadro 4.23 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro gráfico para o registro algébrico da atividade de MM sobre Travessia de um barco.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Gráfico	Algébrico
Natureza do registro	Monofuncional/ representação não-discursiva	Multifuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência alto		

Outra abordagem apresentada pelos autores diz respeito a uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico, que consiste em uma variação do registro algébrico apresentado na Figura 4.41. Esse registro é de natureza monofuncional e de representação discursiva. Na relação triádica, como corresponde a uma lei, segundo o Quadro 4.1, na relação do signo consigo mesmo (significação) é um legi-signo e na relação do signo com o objeto (objetivação), é um símbolo. A Figura 4.49 apresenta essa diferente abordagem.

Figura 4.49 – Outra abordagem utilizada pelos estudantes, nos relatórios do curso, para responder à questão (ii) da atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007).

Outra abordagem é mudar o modelo (1) por um dos seguintes equivalentes:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{v_1-v_2x/\sqrt{x^2+y^2}}{-v_2y/\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{dt}{dy}=\frac{1}{-v_2y/\sqrt{x^2+y^2}},\ \text{com}\ \begin{cases}x(d)=0\\ t(d)=0\end{cases} \tag{5}$$

Integrando (2) em y sobre [d, 0] usando o "ode45", a solução pode ser encontrada. (Quando usamos o intervalo de integração [d, 0], o MATLAB ainda tem algumas dificuldades. Contudo, podemos utilizar o intervalo de integração [d, e], onde e é relativamente pequeno e um valor positivo próximo a 0).

Para obter a equação diferencial ordinária apresentada em (5) foram realizados alguns tratamentos que não foram explicitados no trabalho de Jiang & Xie (2007). A Figura 4.50 apresenta os possíveis tratamentos que os alunos podem ter realizado.

Figura 4.50 – Possíveis tratamentos realizados pelos alunos para a resolução da questão (ii) da atividade de MM sobre Travessia de um barco.

Sendo a EDO definida em (1), ou seja, $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=v_1-\dfrac{v_2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{v_2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$, então

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{\frac{v_1-v_2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-\frac{v_2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{v_1-v_2x\big/\sqrt{x^2+y^2}}{-v_2y\big/\sqrt{x^2+y^2}}\ \text{e}$$

$$\frac{dt}{dy}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{-v_2y}\Rightarrow\frac{dt}{dy}=\frac{1}{-v_2y\big/\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Para obterem o registro algébrico apresentado na Figura 4.49, os alunos fizeram a conversão do registro gráfico (Figura 4.38) para o registro algébrico (Figura 4.49), como apresentado na Figura 4.51.

Figura 4.51 – Conversão do registro gráfico para o registro algébrico da atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007).

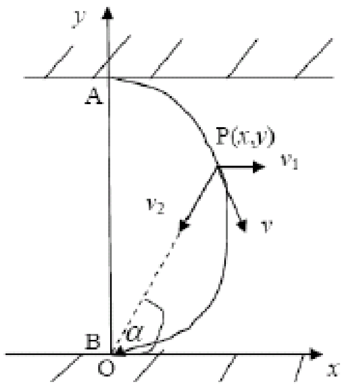


Figura 4.38 – Barco atravessando o rio (JIANG; XIE, 2007).

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v_1 - v_2 x / \sqrt{x^2 + y^2}}{-v_2 y / \sqrt{x^2 + y^2}}$$

ou

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{-v_2 y / \sqrt{x^2 + y^2}}$$

A conversão apresentada na Figura 4.51 é não-congruente com nível de não-congruência alto, pois não atende às três condições de congruência. Além disso, a natureza dos registros de representação é a mesma, o registro gráfico é de natureza monofuncional e o registro algébrico é de natureza monofuncional, no entanto, o registro gráfico é de representação não-discursiva e o registro algébrico é de representação discursiva, o que torna a atividade mais complexa. O Quadro 4.24 resume o estudo que fizemos dos registros de representação semiótica e a classificação da conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

Quadro 4.24 – Estudo dos registros de representação semiótica e classificação da conversão do registro gráfico para o registro algébrico da atividade de MM sobre Travessia de um barco.

	Registro de saída	**Registro de chegada**
	Gráfico	Algébrico
Natureza do registro	Monofuncional/ representação não-discursiva	Multifuncional/ representação discursiva
Relação do signo em si mesmo	Legi-signo	Legi-signo
Relação do signo com o objeto	Símbolo	Símbolo
Conversão não-congruente com nível de não-congruência alto		

Para realizar os tratamentos no registro algébrico apresentado na Figura 4.49, ou seja, para resolver a EDO com valores iniciais foi utilizado o programa computacional MatLAB devido à grande quantidade de cálculos necessários para resolver a equação diferencial. Nesse caso, os estudantes fizeram um tratamento no registro algébrico, que é de natureza monofuncional e de representação discursiva. Na relação do signo em si mesmo (significação) é um legi-signo e na relação do signo com o objeto (objetivação) é um símbolo. Nesse caso, a ferramenta computacional auxiliou no desenvolvimento da atividade de MM, evidenciando o que Almeida & Brito (2005b) colocam de que o uso do computador auxilia em trabalhos muito árduos, e os alunos têm assim a oportunidade de concentrar os esforços na interpretação e na análise das situações de Modelagem, bem como simular diferentes situações para enriquecer a análise.

Com a realização dessa atividade de MM, os registros de representação dão indícios de que os alunos apresentam diferentes abordagens utilizando EDOs. Diante do estudo que fizemos, podemos considerar que os alunos fizeram a coordenação dos registros de representação do objeto matemático 'EDO', o que é fundamental, pois para Duval (2003) é a mobilização simultânea de diferentes registros de representação que possibilita a conceitualização do objeto matemático em estudo.

Com relação à categorização dos signos estabelecida por Peirce (Quadro 4.1) e as etapas da Modelagem, essa atividade se inicia com um sin-signo indicial, abordando na seqüência somente legi-signos simbólicos até à etapa de desenvolvimento da atividade de MM. A partir do problema proposto estabeleceram leis que regem a situação, relacionando as etapas de desenvolvimento desta atividade de MM com as categorias fenomenológicas Primeiridade, Secundidade e Terceiridade. Isso evidencia que, como foi seguida a seqüência da categorização fenomenológica, as relações de significação e de objetivação foram estabelecidas pelos signos.

No decorrer das etapas, alguns modos de inferência foram abordados e uma ação cognitiva foi mais evidenciada "Matematização". Conforme abordado por Ferri (2006), quando há a escolha de uma situação a ser estudada, há uma compreensão da realidade, no entanto, essa ação cognitiva não pôde ser observada, uma vez que os alunos receberam o problema já definido para ser resolvido. Com isso, não fizeram a representação mental da situação que pretendiam estudar para, então, definir o problema, o modelo real. Assim, não houve necessidade de realizar a estruturação da ação. Os alunos partiram do modelo real para o modelo matemático, envolvendo a ação cognitiva Matematização. Os modos de inferências envolvidos nesta etapa foram Palpite, Diagnóstico e Pista.

Para os alunos, nesse nível de escolaridade, o fenômeno de congruência e de não-congruência não influenciou na caracterização do objeto matemático 'Equações Diferenciais Ordinárias'. Nesta atividade de MM foram evidenciadas tanto tarefas de produção quanto tarefas de compreensão que foram essenciais no desenvolvimento dos registros de representação envolvidos. Tais tarefas, segundo Duval (2004), auxiliam na coordenação entre os registros de representação semiótica.

4.4 ANÁLISE GERAL

Levando em consideração a busca de relações entre Modelagem Matemática e Semiótica que constitui a problemática dessa investigação, procuramos na análise geral, apresentar reflexões sobre as questões norteadoras a partir das análises específicas realizadas.

Neste sentido, apresentamos considerações que são percebidas como possíveis respostas para as questões:

1. De que maneira a categorização dos signos estabelecida por Peirce está associada às etapas de uma atividade de Modelagem Matemática?
2. Os modos de inferência dos signos classificados por Kehle & Cunningham (2000) estão associados às ações cognitivas dos alunos nas diferentes etapas da Modelagem Matemática?
3. O fenômeno de congruência e não-congruência (estabelecido por Duval) de conversões realizadas entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática influencia a caracterização do objeto matemático?
4 As tarefas de produção e de compreensão (caracterizadas por Duval) interferem na coordenação entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática?

4.4.1 A Categorização dos Signos Estabelecida por Peirce e as Etapas da Atividade de Modelagem Matemática

Para responder à primeira questão que nos propusemos a investigar "De que maneira a categorização dos signos estabelecida por Peirce está associada às etapas de uma atividade de Modelagem Matemática?', levamos em consideração que as três atividades de MM, embora apresentem diferentes estratégias para serem desenvolvidas, partem da Primeiridade para, em seguida, passar pela Secundidade e, finalmente, trabalhar aspectos referentes à Terceiridade.

A Primeiridade aparece no momento em que os alunos têm o primeiro contato com a atividade, no momento em que encontram a situação-problema que será investigada. Na atividade 1, "Justiça e qualidade de vida', o contato com a figura da reportagem apresentada na revista, na atividade 2 "Tanque de combustível' o contato dos alunos com a situação da região em que vivem e, no caso da atividade 3, "Travessia de um barco", esse primeiro contato ocorreu quando o problema foi apresentado aos alunos. A Figura 4.52 apresenta os registros de representação que indicam a ocorrência da categoria Primeiridade nas atividades analisadas.

Figura 4.52 – Registros de representação que indicam a ocorrência da Primeiridade em cada atividade analisada.

Atividade 1: Justiça e qualidade de vida

Figura 4.2 – Gráfico sobre Justiça e Qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

Atividade 2: Tanque de combustível

Nas propriedades rurais de médio porte do noroeste do RS, o combustível usado em máquinas agrícolas é comprado em grandes quantidades (em torno de 5 000 litros) e armazenado em tanques cilíndricos colocados na posição horizontal, para ser usado de acordo com a necessidade de consumo. Os tanques não dispõem de um sistema automático de controle de volume. O método mais utilizado pelos agricultores é o "Método da Régua". Uma régua (ou uma vareta) é introduzida em um orifício situado na parte superior do tanque, até atingir o fundo. A parte umedecida da régua indica a maior altura (h) de combustível (se a régua foi colocada na posição vertical), mas não indica o volume de combustível.

Figura 4.19 – Situação-problema que originou a atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).

Atividade 3: Travessia de um barco

Há um rio com largura de 100 m (metros), e há um barco que tenta atravessar o rio de um lado para o outro. A velocidade da água é de 1 m/s e a velocidade do barco é de 2 m/s. Suponha que durante o curso a proa do barco sempre aponta para o destino que está à direita do lado oposto ao ponto de partida do barco. Responda às seguintes perguntas:

(iv) Qual é o caminho do barco sobre a água?

(v) Quanto tempo o barco leva para atravessar o rio?

(vi) Alterar os valores da largura do rio, as velocidades da água e do barco e, em seguida, responder às mesmas perguntas como anteriormente. Você pode encontrar alguma coisa interessante a partir de suas observações?

Figura 4.40 – Apresentação do problema para ser resolvido na atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007).

Nesse primeiro contato com a situação-problema (ou com o problema já apresentado), analisando as informações registradas nos documentos investigados, podemos confirmar o argumento de Farias (2007), de que o estudante tem um primeiro contato com o objeto matemático, mesmo não fazendo nenhuma relação deste com qualquer outra representação do objeto matemático a ser estudado, ou mesmo não conhecendo qual será o objeto que será estudado.

No desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, a Secundidade está relacionada com a busca de informações que o sujeito faz para iniciar o estudo da situação, está relacionada com a apresentação do modelo real, com a existência de algo para ser estudado. Para Santaella (2008b, p. 47), "Existir é sentir a ação de fatos externos resistindo à nossa vontade" o que na atividade de Modelagem corresponde a evidenciar o que das informações pode ser utilizado para o estabelecimento de um problema. No caso da atividade 3, a Secundidade se faz presente pela estruturação da ação que os sujeitos desenvolvem para iniciar a estratégia de resolução do problema proposto. Segundo Farias (2007, p. 34),

> [...] é o estado de secundidade que se manifesta nessa condição de confronto, na busca de compreensão associada ao caráter de observação em relação aos acontecimentos que estão lhe sendo impostos. E também, é o momento de adentrar em um estado diferenciado de percepção, no qual outras potencialidades de informação e aprendizagem poderão manifestar-se. Mas, renovar hábitos, sair de um estado perceptivo, ou que seja, de um estado qualitativo, exige aplicação física e/ou mental.

Daí também, está a representação mental da situação, antes mesmo da definição do modelo matemático como no esquema proposto por Ferri (2006) e apresentado na Figura 4.7.

A Terceiridade está relacionada com as etapas de obtenção e dedução do modelo matemático, na obtenção dos resultados matemáticos e sua validação em confronto com a situação real. Durante essas etapas da Modelagem, trabalha-se matematicamente, por meio de leis e regularidades que regem a situação em estudo. Para Farias (2007), o estudante está no caminho da terceiridade quando seu olhar sobre uma representação do objeto matemático está carregado de interpretação, de busca de explicação, de análise e generalização, na qual ele poderá interpretar cada representação do objeto matemático de acordo com uma suposta lei ou conceito matemático. Isso corrobora com o que afirma Santaella (2008ª, p. 8)

> E justamente a terceira categoria fenomenológica (crescimento contínuo) que irá corresponder à definição de signo genuíno como processo relacional a três termos ou mediação, o que conduz à noção de semiose infinita ou ação dialética do signo. [...] Peirce definiu essa relação como sendo aquela própria da ação do signo ou semiose, ou seja, a de gerar ou produzir e se desenvolver num outro signo, este chamado de "interpretante do primeiro", e assim ad infinitum.

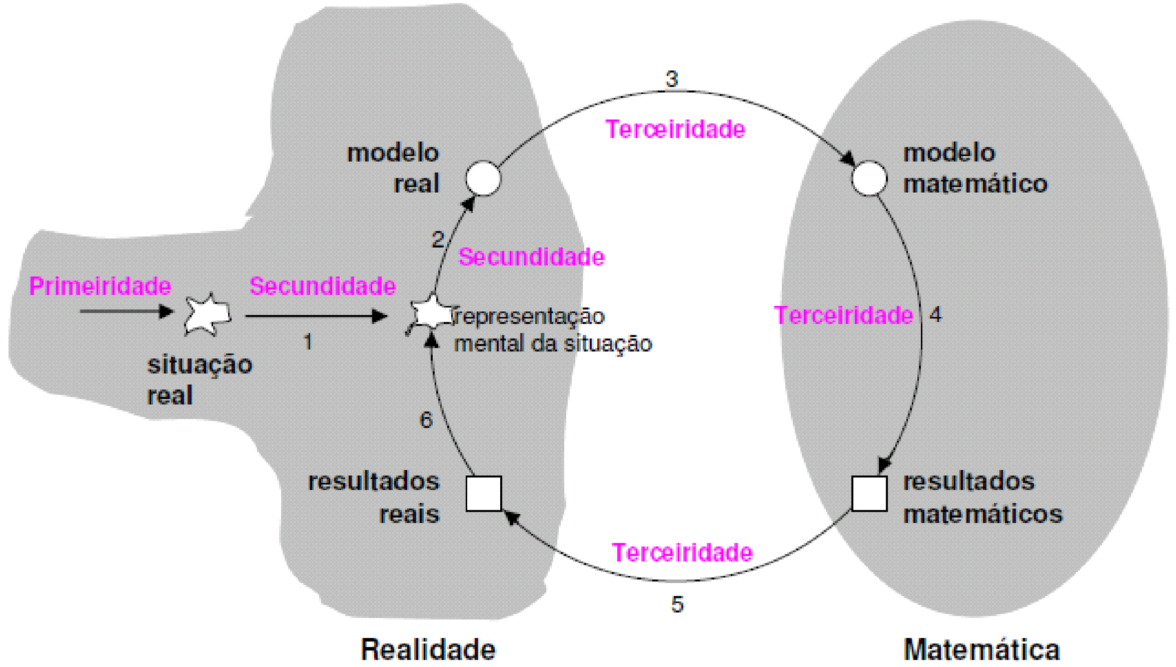
A terceiridade relaciona-se com as outras categorias fenomenológicas e pode ser relacionada também com as etapas do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, pois conforme afirma Santaella (2007, p. 7),

> [...] A terceiridade diz respeito à generalidade, continuidade, crescimento, inteligência. A forma mais simples da terceiridade, segundo Peirce, manifesta-se no signo, visto que o signo é um primeiro (algo que se apresenta à mente), ligando um segundo (aquilo que o signo indica, se refere ou representa) a um terceiro (o efeito que o signo irá provocar em um possível intérprete).

Assim, de modo geral, podemos relacionar a categorização dos signos estabelecida por Peirce às etapas de uma atividade de Modelagem Matemática, pois por meio de uma situação (algo que se apresenta à mente), um primeiro, é possível estabelecer a existência de um problema a ser estudado (aquilo que a situação indica, se refere ou representa), um segundo, para, então, deduzir o modelo matemático e interpretá-lo na linguagem matemática (o efeito que poderá provocar em um possível intérprete, o modelador), um terceiro.

De modo geral, podemos estruturar a categorização dos signos estabelecida por Peirce e as etapas de uma atividade de Modelagem Matemática, por meio de um esquema, como o apresentado na Figura 4.53.

Figura 4.53 – Categorização dos signos estabelecida por Peirce no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática.



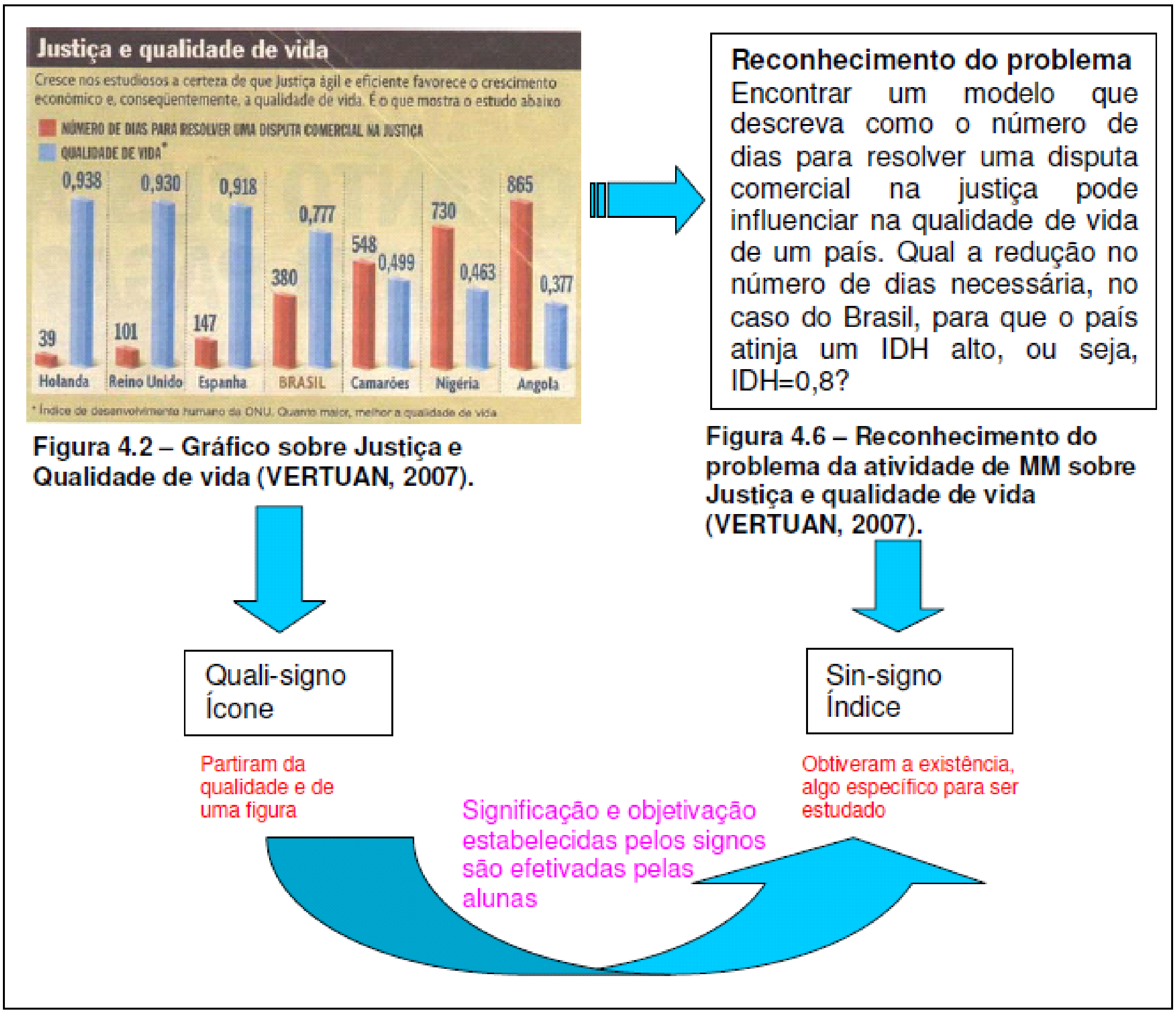
1. Compreensão da ação
2. Simplificação/estruturação da ação; a utilização do conhecimento extra-matemático depende da ação
3. Matematização; o conhecimento extra-matemático se faz necessário fortemente nesse momento
4. Trabalhando matematicamente, utilizando as competências matemáticas individuais
5. Interpretação
6. Validação

Ao observarmos o esquema apresentado na Figura 4.53, conjecturamos, diante das atividades analisadas, que, no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, as etapas que ocorrem "dentro da Matemática" abordam relações estabelecidas pela Terceiridade, pois é nessa etapa que as regularidades e generalidades são mais evidenciadas.

Além do estabelecimento das categorias fenomenológicas, conforme apresentamos na análise específica de cada atividade, as relações de significação (relação do signo consigo mesmo) e de objetivação (relação do signo com o objeto) foram estabelecidas pelos signos e evidenciadas pelos alunos no desenvolvimento das etapas das três atividades de MM. Um exemplo de ocorrência de significação e objetivação se faz na atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (Figura

4.54), quando as alunas a partir de um registro inicial (gráfico de barras) que representa um quali-signo (relação do signo consigo mesmo) e um ícone (relação do signo com o objeto), apresentaram um problema a ser estudado.

Figura 4.54 – Relações de significação e objetivação estabelecidas pelos signos e evidenciadas pelas alunas na atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida.



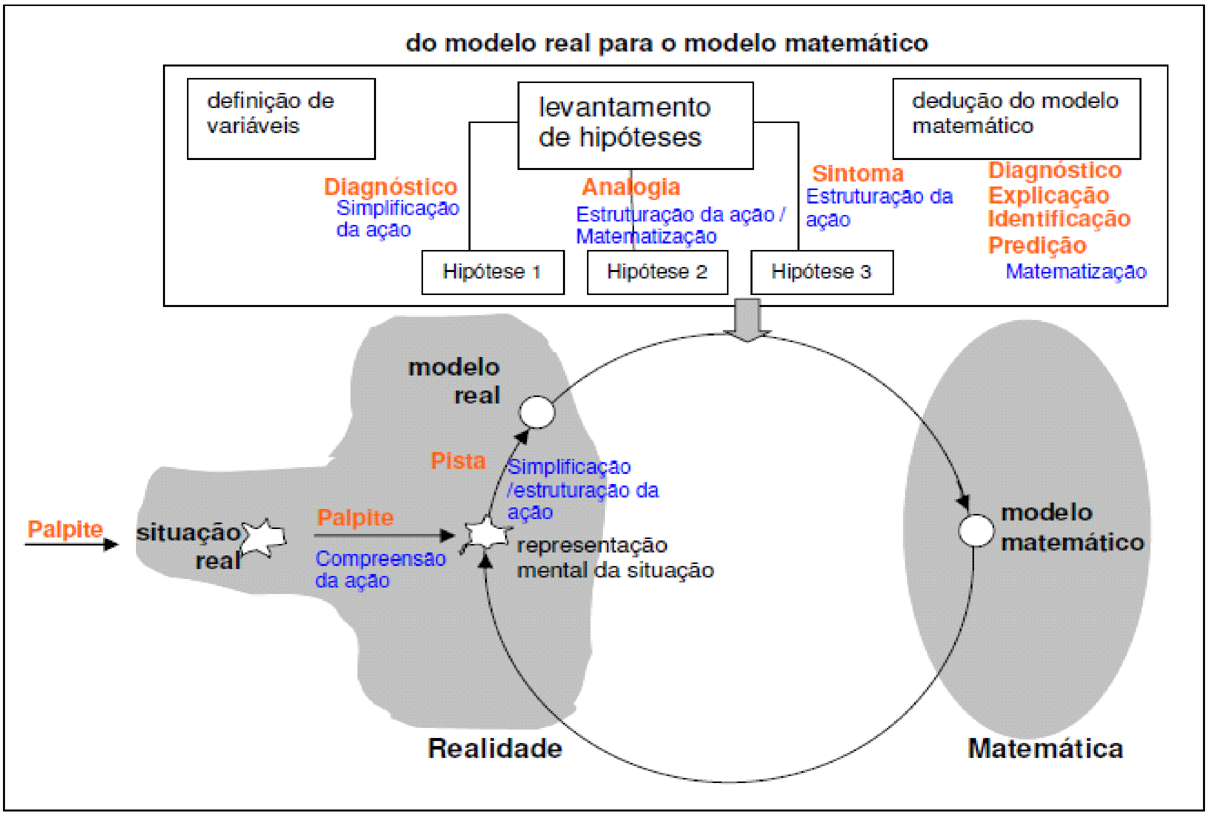
Para que se possa realizar uma análise semiótica dos signos, segundo Santaella (2008b), as relações de significação e de objetivação precisam ser estabelecidas.

4.4.2 Os Modos de Inferência dos Signos Classificados por Kehle & Cunningham (2000) e as Ações Cognitivas nas Etapas da Modelagem Matemática

Na busca por respostas para a segunda questão da pesquisa, "Os modos de inferência dos signos classificados por Kehle & Cunningham (2000) estão associados às ações cognitivas dos alunos nas diferentes etapas da Modelagem Matemática?', apresentamos esquemas que abordam os diferentes modos de inferência pelos quais os modeladores de cada atividade de Modelagem Matemática analisada passaram no desenvolvimento da referida atividade, bem como as ações cognitivas estabelecidas.

Conforme apresentamos na análise específica da atividade de MM "Justiça e qualidade de vida', os modos de inferência abordados foram Palpite, Pista, Diagnóstico, Analogia, Sintoma, Explicação, Identificação e Predição. Esses modos de inferência podem ser inseridos no esquema (Figura 4.7) de Modelagem proposto por Ferri (2006). A Figura 4.55 apresenta esses modos de inferência e as respectivas ações cognitivas associadas.

Figura 4.55 – Modos de inferência e ações cognitivas da atividae de Modelagem Matemática sobre justiça e qualidade de vida.



Os modos de inferência Construção do modelo e Raciocínio formal não foram destacados no esquema apresentado na Figura 4.55. No entanto, os mesmos se fizeram presentes na atividade em diferentes momentos e com ênfase na etapa de obtenção e dedução do modelo, quando as alunas apresentaram um modelo matemático que descreve a situação em estudo representado em registro algébrico na Figura 4.12 (Construção do modelo) e quando estabelecem uma conclusão para responder ao problema em estudo na Figura 4.56 (Raciocínio formal). Apresentamos na Figura 4.57 os registros que apresentam esses modos de inferência.

Figura 4.57 – Registros de representação semiótica que apresentam os modos de inferência Construção do modelo e Raciocínio formal na atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida.

Construção do modelo

As alunas ajustaram uma função quadrática aos dados no intervalo (0,380], usando os pontos: (19.5, 0.969); (147, 0.918) e (380, 0.777). O modelo encontrado é:

$$Q(j) = -0{,}000000617.j^2 - 0{,}000297.j + 0{,}979, \quad se \quad 0 < j \leq 380$$

Para o intervalo (380, ∞) as alunas ajustaram uma função do tipo $Q(j) = a.b^i$, usando os pontos: (380, 0.777) e (797.5, 0.420). O modelo encontrado é:

$$Q(j) = 1{,}136.0{,}999^j, \quad se \quad j > 380$$

Logo, a função que descreve a qualidade de vida em função do número de dias para resolver um problema na justiça é dada por:

$$Q(j) = \begin{cases} -0{,}000000617.j^2 - 0{,}000297.j + 0{,}979, & se \quad 0 < j \leq 380 \\ 1{,}136.0{,}999^j, & se \quad j > 380 \end{cases}$$

Figura 4.12 – Registros de representação semiótica utilizados na dedução do modelo matemático da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

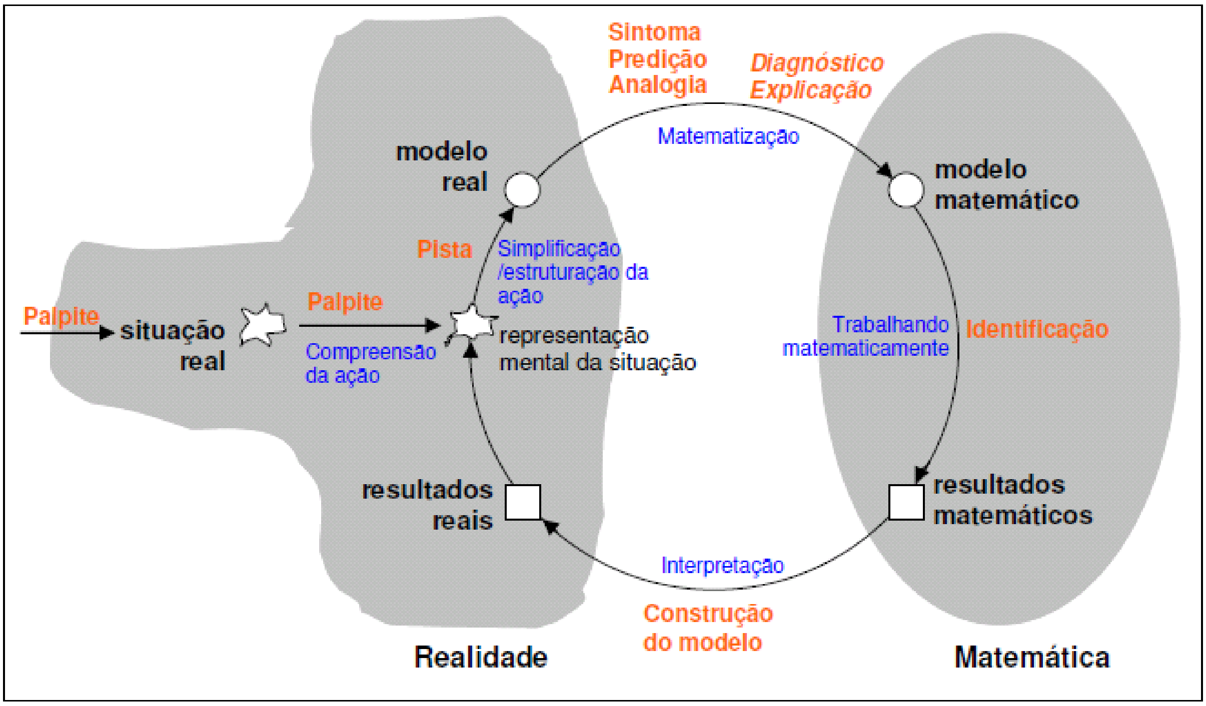
Raciocínio formal

Segundo o modelo construído e, realizando os cálculos pertinentes, verificamos que para apresentar IDH=0,8 é preciso que o Brasil reduza de 380 para 349 dias a quantidade de dias necessária para resolver uma disputa comercial na justiça. Assim, se só dependesse de justiça rápida e eficiente, uma melhora de 31 dias significaria a classificação do Brasil como um país com ótima qualidade de vida e um alto IDH".

Figura 4.56 – Resposta ao problema referente à atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

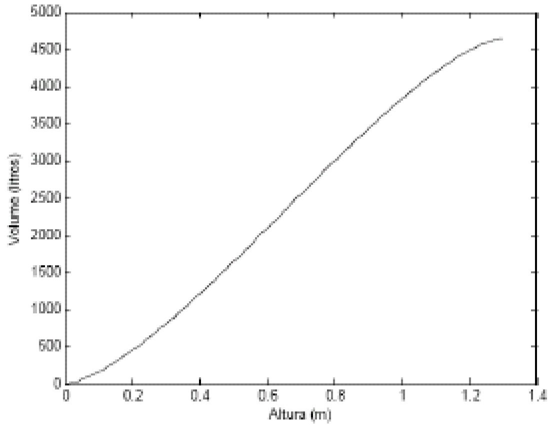
Na atividade 2, "Tanque de combustível', conforme descrevemos na análise específica em 4.3.2.1, os modos de inferência abordados foram Palpite, Pista, Sintoma, Analogia, Predição, Identificação e Construção do modelo. Levando em consideração o esquema proposto por Ferri (2006) (Figura 4.7), na Figura 4.58 relacionamos esses modos de inferência com as ações cognitivas caracterizadas naquele esquema.

Figura 4.58 – Modos de inferência e ações cognitivas da atividade de Modelagem Matemática Tanque de combustível.



Na Figura 4.58 dois modos de inferência foram destacados em itálico (Diagnóstico e Explicação) por se tratarem dos modos de inferência envolvidos na Abordagem Integral da atividade na etapa correspondente à obtenção e dedução do modelo (do modelo real para o modelo matemático). O modo de inferência Construção do modelo foi destacado nesta atividade, pois os alunos apresentaram um registro gráfico para representar os resultados matemáticos obtidos. A Figura 4.18 apresenta esse registro.

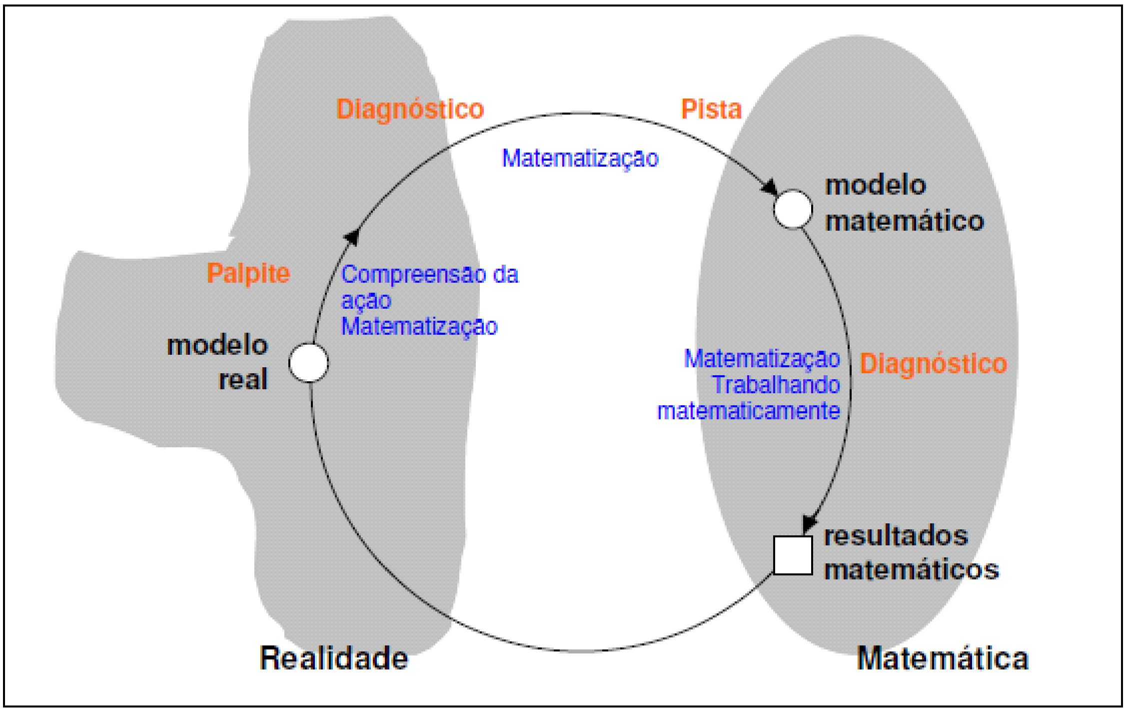
Figura 4.18 – Volume em função da altura do tanque cilíndrico, para *R=0,65m* e *L=3,5m* (BORGES; SILVA, 2007)



Da mesma maneira que na atividade 1, nesta atividade não foi destacado o modo de inferência Raciocínio formal, pois corresponde a um modo de inferência de dedução presente no desenvolvimento da atividade de MM. Esse modo de inferência fica evidente, principalmente, quando Borges & Silva (2007) destacam que os alunos apresentaram uma tabela para os agricultores com os valores referentes à altura de combustível e o volume existente no interior do tanque. No entanto, tal registro de representação não foi apresentado por esses autores.

Na atividade 3, "Travessia de um barco", os modos de inferência abordados foram Palpite, Diagnóstico e Pista, utilizados na obtenção do modelo matemático da situação. Isso se deve ao fato de que nesta atividade foram desenvolvidas as transições do modelo real para o modelo matemático e do modelo matemático para resultados matemáticos, pois para o desenvolvimento desta atividade, o problema foi proposto aos alunos, não havendo a necessidade da escolha da situação e a definição do problema. Esses modos de inferência podem ser inseridos no esquema (Figura 4.7) de Modelagem proposto por Ferri (2006). A Figura 4.59 apresenta esses modos de inferência e as respectivas ações cognitivas.

Figura 4.59 – Modos de inferência e ações cognitivas da atividade de Modelagem Matemática Travessia de um barco.



As informações resumidas nas figuras, sinalizam que os modos de inferência estabelecidos por Kehle & Cunningham (2000) e envolvidos nas atividades de MM analisadas nesta pesquisa, estão associados às ações cognitivas dos alunos estabelecidas por Ferri (2006) e apresentadas na Figura 4.7.

Os esquemas que apresentamos nas Figuras 4.55, 4.58 e 4.59 denotam que os diferentes modos de inferência podem ser associados às diferentes ações cognitivas, corroborando com o que Kehle & Cunningham (2000) afirmam de que os modos de inferência não correspondem a categorias distintas nas quais todas as formas de ocorrências de semiosis podem ser classificadas como um ou outro modo, mas como uma forma de identificar os modos de inferência (abdução, dedução e indução) no desenvolvimento de uma atividade e, em nosso caso, no desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática. Dependendo da atividade desenvolvida, uma quantidade maior de modos de inferência pode ser evidenciada, no entanto, isso não significa que o modelo obtido é melhor ou pior para representar uma situação. No entanto, conforme as atividades desenvolvidas, quanto mais modos de inferência são abordados, mais ações cognitivas são evidenciadas.

4.4.3 O Fenômeno de Congruência e não-Congruência (Estabelecido por Duval) de Conversões Realizadas entre os Registros que Emergem em Atividades de Modelagem Matemática

Analisando os diferentes registros de representação semiótica e as conversões entre esses registros que foram apresentados nas atividades de MM selecionadas para o desenvolvimento desta pesquisa, buscamos respostas para a terceira questão de nossa pesquisa: "O fenômeno de congruência e não-congruência (estabelecido por Duval) de conversões realizadas entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática influencia a caracterização do objeto matemático?' Para isso, levamos em consideração os níveis de congruência e os níveis de não-congruência estabelecidos no Capítulo 3.

Embora Duval (2003) aborde a importância do tratamento em atividades matemáticas, o autor enfatiza que é a conversão entre registros que constitui uma condição essencial para a compreensão do objeto matemático. Segundo Duval (2003, p. 16), "[...] do ponto de vista cognitivo, é a conversão que [...] aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão", devido às relações que os alunos estabelecem entre as características de cada registro envolvido nas conversões. Isso se enfatiza pelo fato de que sistemas semióticos diferentes apresentam diferentes conteúdos, mesmo correspondendo ao mesmo objeto matemático.

Para Brandt (2005, p. 97-98),

> Uma das operações importantes em situações de aprendizagem deve compreender a conversão que significa passar de uma forma de representação à outra. Dependendo da relação de congruência existente essa operação tem um custo cognitivamente neutro. As duas formas de representação podem ter significado diferente, mesmo se referindo ao mesmo objeto [...].

A questão referente ao custo cognitivamente neutro de uma operação pode ser evidenciada quando a conversão de um registro para outro é congruente e seu nível de congruência é alto. Na atividade sobre Justiça e qualidade de vida, por exemplo, a conversão do registro tabular para o registro gráfico, apresentada na Figura 4.60, representa custos cognitivamente neutros para alunas que se encontram no 1° ano do Curso de Licenciatura em Matemática.

Figura 4.60 – Conversão que apresenta custos cognitivamente neutros para as alunas na atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

Tabela – 4.1: Pontos $(j, Q(j))$.

j	Q
19,5	0,969
39	0,938
101	0,930
147	0,918
380	0,777
548	0,499
730	0,463
797,5	0,420
865	0,377

Conversão congruente com nível de congruência alto

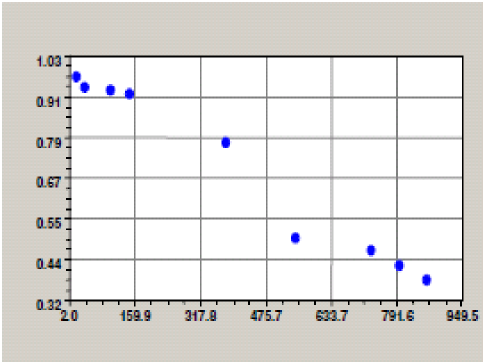
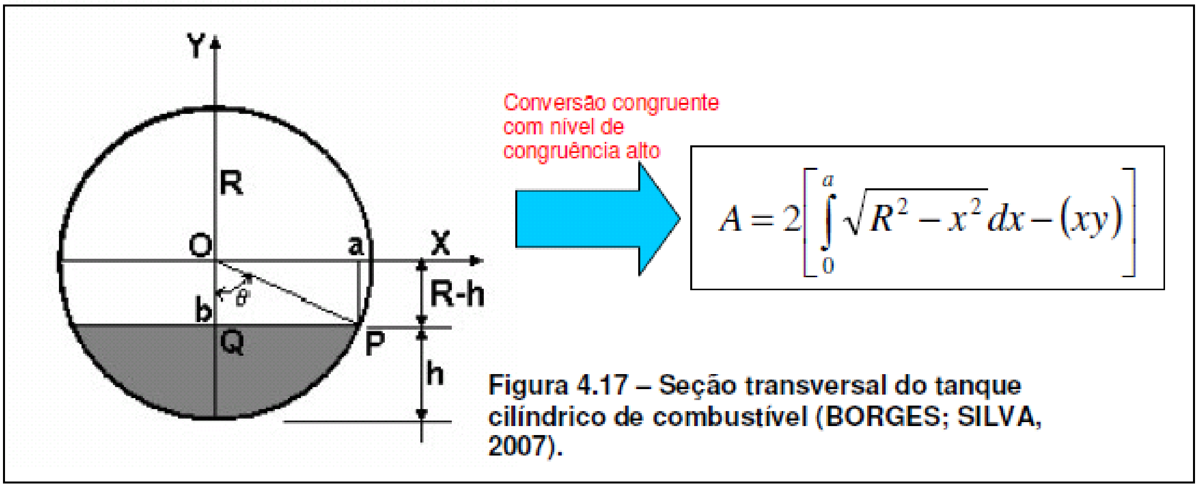


Figura 4.3 – Gráfico dos pontos $(j, Q(j))$.

No entanto, em algumas conversões congruentes com nível de congruência alto, existem custos cognitivos relativamente altos, quando relacionados ao objeto matemático em estudo, ou seja, requer do sujeito a coordenação entre os registros de representação. Nesse caso, é evidenciada a afirmação de Duval (2003, p. 22) que "[...] passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto". Na abordagem usando integral da atividade sobre Tanque de combustível, a conversão do registro gráfico para o registro algébrico (Figura 4.61), embora seja congruente com nível de congruência alto, requer dos alunos o conhecimento de que a área do gráfico abaixo da curva corresponde a uma integral definida.

Figura 4.61 – Conversão congruente com nível de congruência alto do registro gráfico para o registro algébrico na abordagem integral da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).



Nesse caso, fica evidente o que Duval (2003, p.21), afirma que "reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes" , é uma sinalização de compreensão.

Segundo Duval (2003, p.18) "[...] a passagem de um enunciado em língua natural a uma representação em um outro registro toca um conjunto complexo de operações para designar os objetos'. Isso ocorre, pois a conversão de um registro de natureza multifuncional para um registro de natureza monofuncional pode ser mais complexa no desenvolvimento de uma atividade. Neste sentido, os alunos precisam saber como lidar com as informações apresentadas em língua natural, o que implica no conhecimento de algumas características dos objetos matemáticos de que farão uso. Na atividade de MM sobre Travessia de um barco, a conversão do problema em língua natural para o registro gráfico (Figura 4.62), corresponde a uma conversão não-congruente com nível de não-congruência intermediário.

Figura 4.62 – Conversão não-congruente com nível de não-congruência intermediário do registro em língua natural para o registro gráfico da atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007).

Há um rio com largura de 100 m (metros), e há um barco que tenta atravessar o rio de um lado para o outro. A velocidade da água é de 1 m/s e a velocidade do barco é de 2 m/s. Suponha que durante o curso a proa do barco sempre aponta para o destino que está à direita do lado oposto ao ponto de partida do barco. Responda às seguintes perguntas:

(i) Qual é o caminho do barco sobre a água?

(ii) Quanto tempo o barco leva para atravessar o rio?

(iii) Alterar os valores da largura do rio, as velocidades da água e do barco e, em seguida, responder às mesmas perguntas como anteriormente. Você pode encontrar alguma coisa interessante a partir de suas observações?

Figura 4.40 – Apresentação do problema para ser resolvido na atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007).

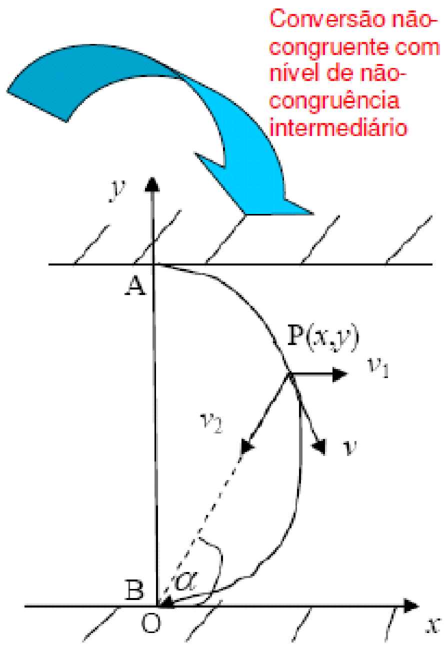


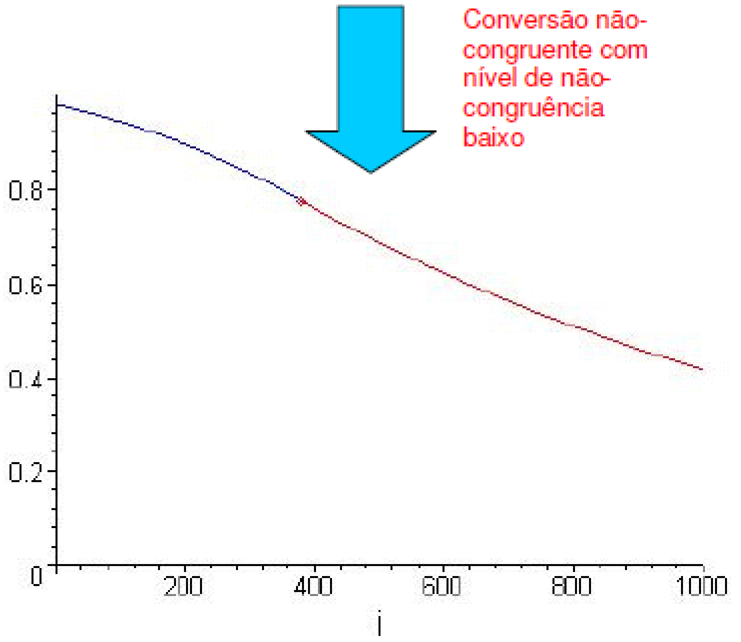
Figura 4.38 – Barco atravessando o rio (JIANG; XIE, 2007).

Duval (2003) também denota que quando o nível de não-congruência de uma conversão é alto, o sucesso dos alunos no desenvolvimento de uma atividade matemática é baixo. No entanto, nas três atividades de MM analisadas nesta pesquisa, embora as conversões fossem não-congruentes, os alunos tiveram sucesso no desenvolvimento da atividade. As Figuras 4.63, 4.64, 4.65 apresentam três conversões não-congruentes com diferentes níveis de não-congruência que foram realizadas pelos alunos nas diferentes atividades analisadas.

A conversão do registro algébrico para o registro gráfico da atividade de Modelagem Matemática sobre Justiça e qualidade de vida (Figura 4.63), é não-congruente com nível de não-congruência baixo. Essa conversão do registro algébrico para o registro gráfico realizada pelas alunas, embora não-congruente não influenciou na caracterização do objeto matemático 'função definida por partes', pois elas estabeleceram relações coerentes entre os registros. Com isso, sinalizaram que realizaram a coordenação entre os registros, ou seja, evidenciaram que ambos correspondem ao mesmo objeto matemático e que um complementa o outro, reafirmando o que Damm (1999, p.150) salienta de que a "complementaridade entre os registros é fundamental no sentido da sua parcialidade em relação ao objeto que pretendemos representar [...]".

Figura 4.63 – Conversão não-congruente com nível de não-congruência baixo do registro algébrico para o registro gráfico da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida (VERTUAN, 2007).

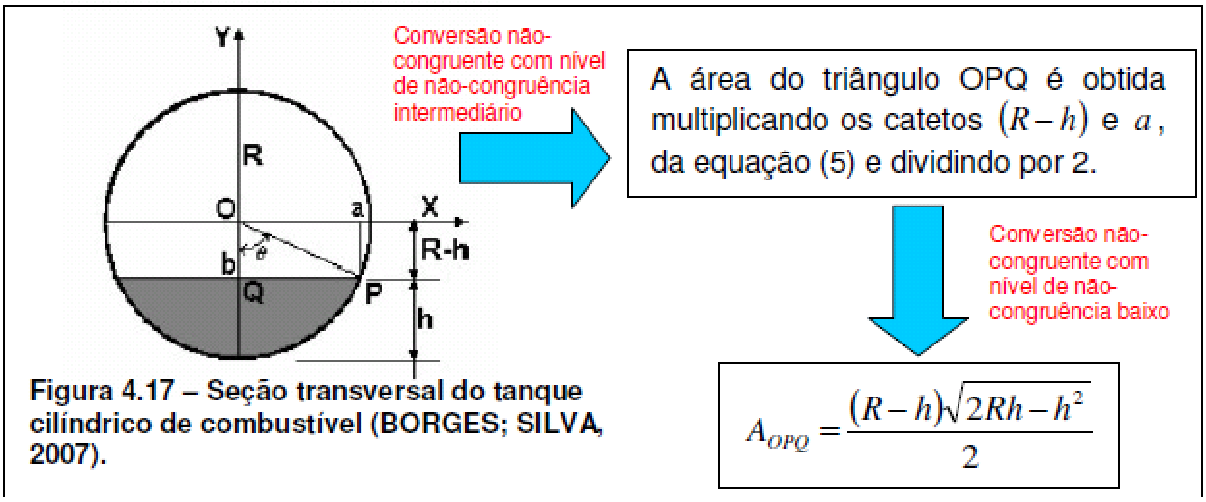
$$Q(j)=\begin{cases}-0{,}000000617.j^2-0{,}000297.j+0{,}979, & se \quad 0<j\leq 380\\ 1{,}136.0{,}999^j, \quad se \quad j>380\end{cases}$$



A conversão do registro algébrico para o registro em língua natural da atividade de Modelagem Matemática sobre Tanque de combustível, é não-congruente com nível de não-congruência intermediário. A conversão do registro em língua natural para o registro algébrico (Figura 4.64) da referida atividade é não-congruente com nível de não-congruência baixo. Essas conversões dos registros, embora não-congruentes, foram realizadas de forma satisfatória pelos alunos quando eles trabalharam com o objeto matemático 'área do triângulo' para realizar o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática. Com isso, como descrevemos na análise específica em 4.3.2.1, as relações de significação e de objetivação foram estabelecidas pelos signos e evidenciadas pelos alunos, não comprometendo a caracterização do objeto matemático 'área do triângulo'. Isso também corrobora com a afirmação de Duval (2003, p. 14) de que

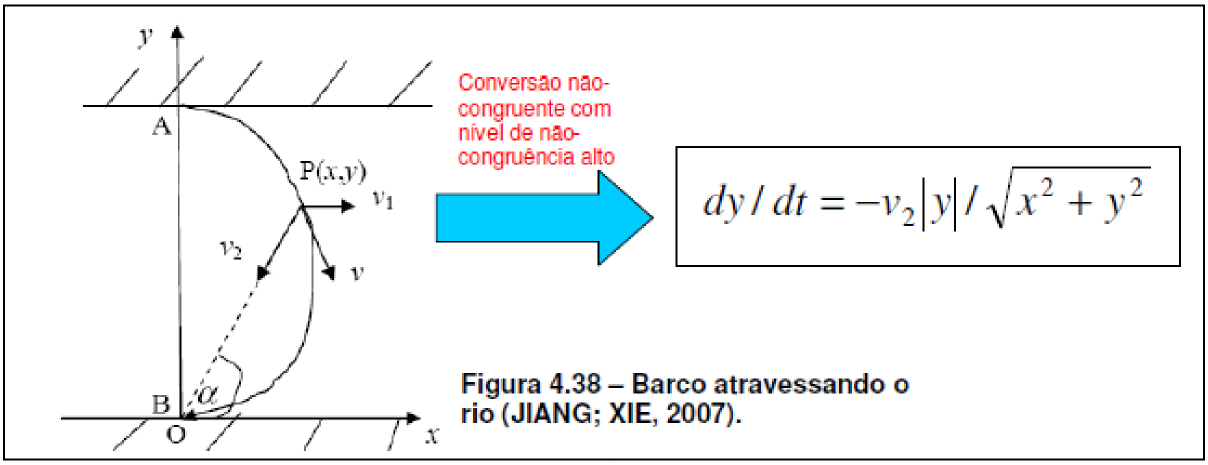
> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação.

Figura 4.64 – Conversão não-congruente com nível de não-congruência intermediário do registro gráfico para o registro em língua natural e conversão não-congruente com nível de não-congruência baixo do registro em língua natural para o registro algébrico da atividade de MM sobre Tanque de combustível (BORGES; SILVA, 2007).



A conversão do registro gráfico para o registro algébrico da atividade de Modelagem Matemática sobre Travessia de um barco (Figura 4.65), é não-congruente com nível de não-congruência alto. No entanto, essa conversão não influenciou na caracterização do objeto matemático 'Equações Diferenciais Ordinárias' que estava sendo estudado pelos alunos, conforme descrevemos na análise específica dessa atividade.

Figura 4.65 – Conversão não- congruente com o nível de não- congruência alto registro gráfica para o registro algebrico da atividade de MM sobre Travessia de um barco (JIANG; XIE, 2007)



Essas conversões e outras analisadas no desenvolvimento desta pesquisa, dão indícios de que alunos no Ensino Superior, de modo geral, não apresentam dificuldades na caracterização dos objetos matemáticos quando as conversões são não-congruentes. Todavia, em uma conversão não-congruente com nível de não-congruência baixo do registro algébrico para o registro gráfico da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida, o objeto matemático 'função contínua' não foi caracterizado pelas alunas, conforme apresentamos na análise específica dessa atividade. Diante da análise da atividade, a realização de tratamento adequado no registro algébrico poderia ter evitado essa não caracterização do objeto matemático, resultando em um registro gráfico correspondente à situação em estudo. Quando a conversão é congruente com nível de congruência alto, a conversão é facilmente realizada pelos alunos. Isso corrobora com Fonte, Godino & D'Amore (2005, p. 16) que salientam que "'compreender'ou 'saber'um objeto matemático consiste em ser capaz de reconhecer suas propriedades e representações características".

4.4.4 As Tarefas de Produção e de Compreensão (Caracterizadas por Duval) e a Coordenação entre os Registros de Representação que Emergem em Atividades de Modelagem Matemática

Segundo Duval (2003), para que ocorra a compreensão do objeto matemático em estudo se faz necessária a mobilização simultânea de dois registros de representação em sistemas semióticos distintos. Isso requer do aluno a realização da atividade de conversão. Segundo Duval (2003, p. 22), é "a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso [...]".

Quando ocorrem conversões em uma atividade matemática, segundo Duval (2004), tarefas de compreensão são evidenciadas. No entanto, além das tarefas de compreensão, para a conceitualização de um objeto matemático, se faz necessária a realização de tarefas de produção, ou seja, a realização de tratamentos no interior de um sistema semiótico. Daí surge a quarta questão de nossa pesquisa: "/Is tarefas de produção e de compreensão (caracterizadas por Duval) interferem na coordenação entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática?'

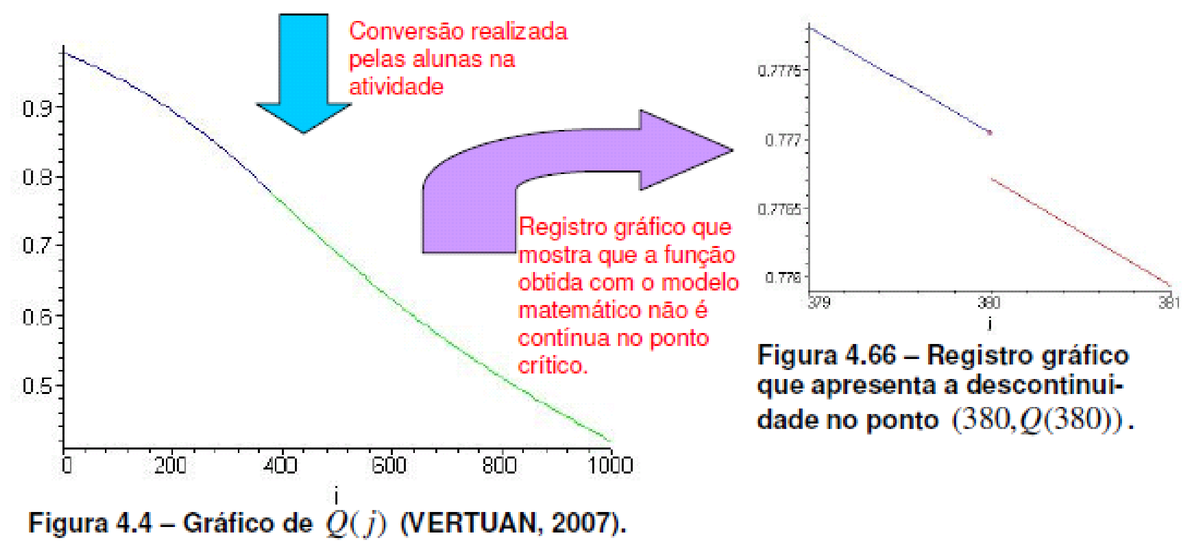
Para Duval (2003, p. 29), a "compreensão requer a coordenação dos diferentes registros", ou seja, reconhecer em diferentes registros de sistemas semióticos diferentes o mesmo objeto matemático.

Na análise específica das atividades selecionadas para o desenvolvimento de nossa pesquisa, tarefas de compreensão foram evidenciadas em todas. No entanto, a coordenação entre os diferentes registros de representação do objeto matemático 'função contínua' abordado na atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida não foi realizada, uma vez que as alunas apresentaram conclusões equivocadas no estudo da continuidade da função obtida no modelo matemático. Os registros e a análise específica que realizamos nesta atividade, sinalizam que tal coordenação não ocorreu, pois tarefas de produção não foram realizadas, para o esclarecimento da tarefa de compreensão relacionada à afirmação da continuidade de uma função. Isso fica evidente na conversão do registro algébrico para o registro gráfico apresentado pelas alunas no trabalho de Vertuan (2007) e reapresentado na Figura 4.67, que sinaliza que tarefas de produção e tarefas de compreensão interferem na coordenação entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática.

Ao realizar a conversão do registro algébrico para o registro gráfico referente ao objeto matemático 'função contínua', as alunas não levaram em consideração o teorema da continuidade, além disso, ao construírem o gráfico de tal função, não utilizaram uma ferramenta computacional do programa Maple que identifica a descontinuidade de uma função. Ao construirmos o gráfico da função, levando em consideração a ferramenta computacional do Maple e, ao analisarmos um intervalo ao redor do ponto crítico (380,Q(380)) , constatamos que a função não é contínua em tal ponto (Figura 4.66). O registro gráfico referente ao intervalo também foi apresentado na Figura 4.67.

Figura 4.67 – Conversão do registro algébrico para o registro gráfico da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida.

$$Q(j)=\begin{cases}-0{,}000000617.j^2-0{,}000297.j+0{,}979, & se \quad 0<j\leq 380\\ 1{,}136.0{,}999^j, & se \quad j>380\end{cases}$$



Apesar de termos consciência da complexidade que envolve o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, relações com a Semiótica podem ser evidenciadas de modo a entendermos a utilização dos signos pelos alunos. Por meio de algumas dessas relações, como a categorização dos signos estabelecida por Peirce, os modos de inferência classificados por Kehle & Cunningham (2000), os registros de representação semiótica abordados por Duval no que se refere ao fenômeno de congruência e não-congruência das conversões entre os registros e as tarefas de produção e compreensão, é possível evidenciar indícios de caracterização e compreensão dos objetos matemáticos envolvidos em atividades matemáticas, em particular, em atividades de Modelagem Matemática.

PARA CONCLUIR: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Desde o início de nossa pesquisa, durante a seleção, escolha e análise das atividades de Modelagem Matemática, nossa preocupação era a de encontrar elementos que pudessem auxiliar na obtenção de respostas para as questões norteadoras que colocamos relativas à problemática: *busca de relações entre Modelagem Matemática e Semiótica.*

A partir das reflexões que fizemos, tendo em vista esta problemática e as questões norteadoras, retomamos aqui, de modo geral, as compreensões construídas ao longo da pesquisa, que são oriundas de reflexões realizadas com base nas atividades analisadas. A partir dessas reflexões surgiram contextos de pesquisas futuras que aqui enunciamos.

Para o desenvolvimento da pesquisa, selecionamos atividades de Modelagem Matemática em trabalhos já publicados, sendo a escolha definida pelo critério de que uma atividade foi desenvolvida no âmbito do grupo no qual a nossa pesquisa se insere, uma de referência bibliográfica de âmbito nacional e uma de referência bibliográfica de âmbito internacional. Para realizar a escolha das atividades aqui analisadas, levamos em consideração a variedade de registros de representação e a possibilidade de coordenação entre os registros que cada atividade pode proporcionar para a compreensão dos objetos matemáticos nela envolvidos.

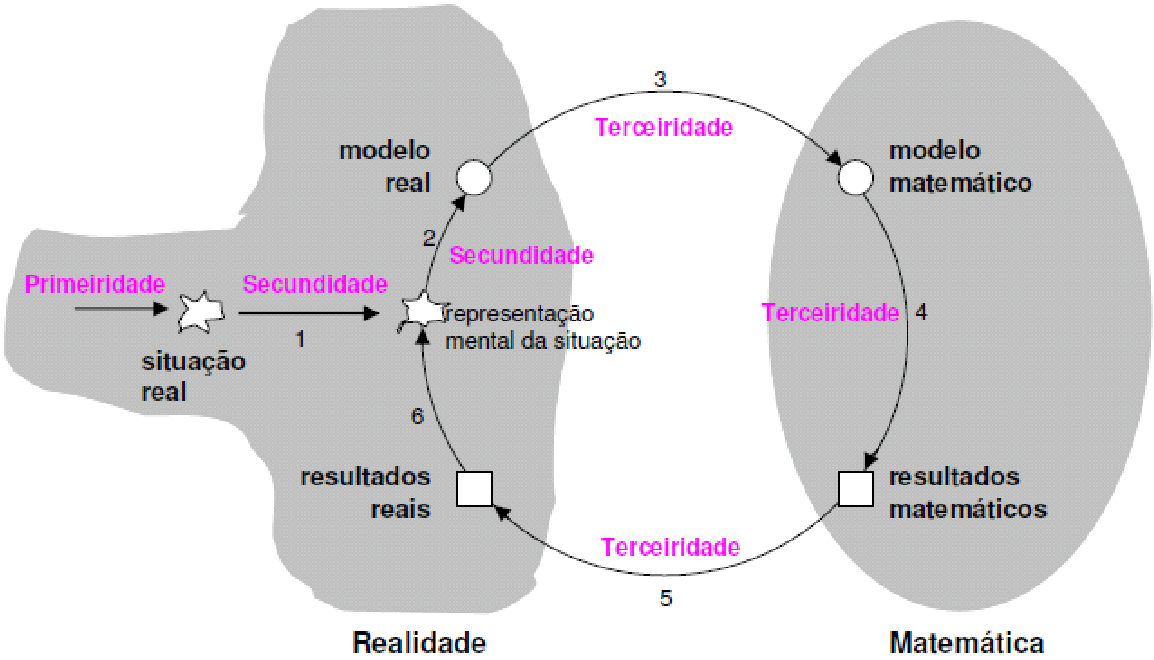
Para Duval (2003), a compreensão em uma atividade requer a mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação expressos em sistemas semióticos diferentes. Para tanto, se faz necessária a realização de conversões. Como a atividade de conversão não é espontânea, precisa ser elucidada pelo professor. Dessa forma, a partir das atividades que analisamos, consideramos a Modelagem Matemática adequada a esse fim.

Para uma análise semiótica dos signos, Santaella (2008b) salienta que é preciso que as relações de significação e de objetivação sejam evidenciadas pelos signos e estabelecidas pelos alunos, destacando as categorias fenomenológicas

Primeiridade, Secundidade e Terceiridade, estabelecidas por Peirce (2005). Em atividades de Modelagem Matemática, essas categorias se fazem presentes nas diferentes etapas de desenvolvimento. A Primeiridade surge quando os alunos entram em contato com a situação-problema que irão estudar ou com o problema que precisam resolver, a Secundidade ocorre quando os alunos buscam informações para o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática e a Terceiridade ocorre na obtenção e dedução do modelo matemático, quando os alunos estabelecem regularidades entre os dados obtidos.

Essa categorização de Peirce e as etapas do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática podem ser apresentadas em forma de esquema (Figura 5.1).

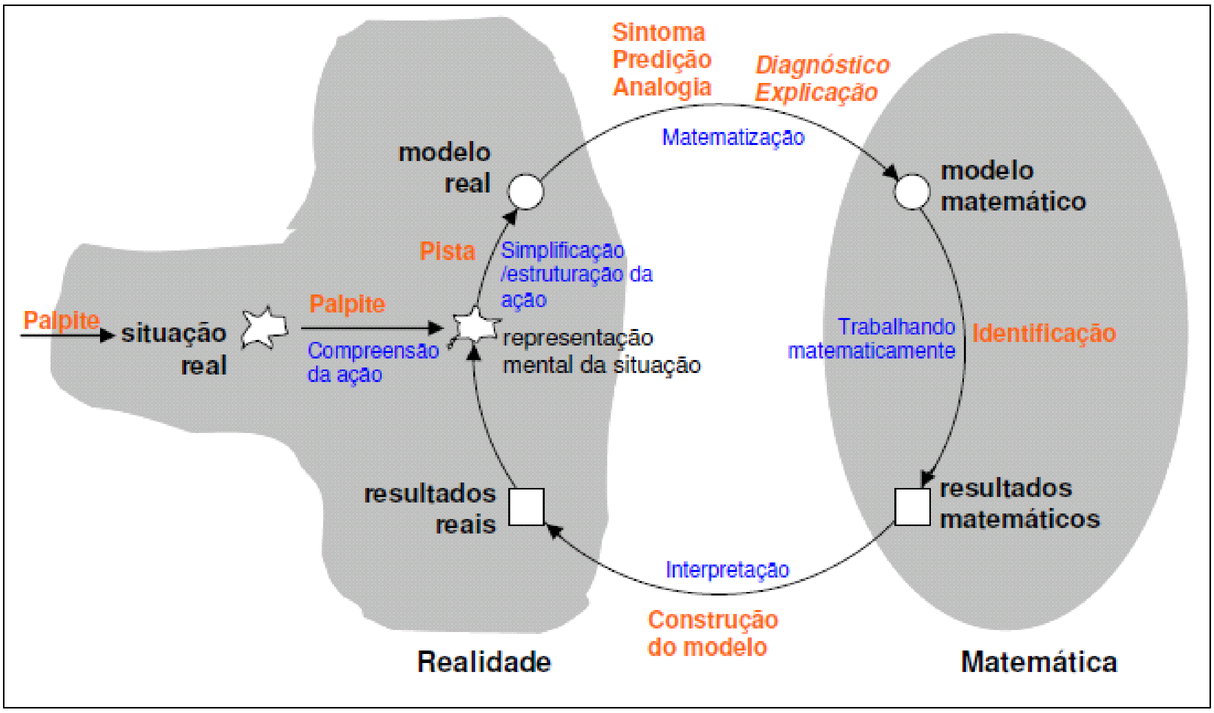
Figura 5.1 – Categorização dos signos estabelecida por Peirce no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática.



1. Compreensão da ação
2. Simplificação/estruturação da ação; a utilização do conhecimento extra-matemático depende da ação
3. Matematização; o conhecimento extra-matemático se faz necessário fortemente nesse momento
4. Trabalhando matematicamente, utilizando as competências matemáticas individuais
5. Interpretação
6. Validação

A categorização dos signos estabelecida por Peirce (2005), além de estar associada às etapas da Modelagem Matemática, pode ser relacionada com os modos de inferência abdução, dedução e indução. Kehle & Cunningham (2000) relacionam esses modos de inferência às etapas da Modelagem Matemática e estabelecem os modos de inferência de abdução (Palpite, Sintoma, Metáfora/Analogia, Pista, Diagnóstico/Cenário, Explicação), os modos de inferência de indução (Identificação, Predição, Construção do modelo) e o modo de inferência de dedução (Raciocínio formal). Ao analisarmos as atividades de Modelagem Matemática, evidenciamos que tais modos de inferência estabelecidos por Kehle & Cunningham (2000) podem ser associados às ações cognitivas estabelecidas por Ferri (2006) durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática. Na atividade de Modelagem Matemática *Tanque de combustível* evidenciamos a presença dos diferentes modos de inferência associados às ações cognitivas estabelecidas por Ferri (2006), conforme apresentado na Figura 5.2.

Figura 5.2 – Modos de inferência e ações cognitivas da atividade de Modelagem Matemática Tanque de combustível.

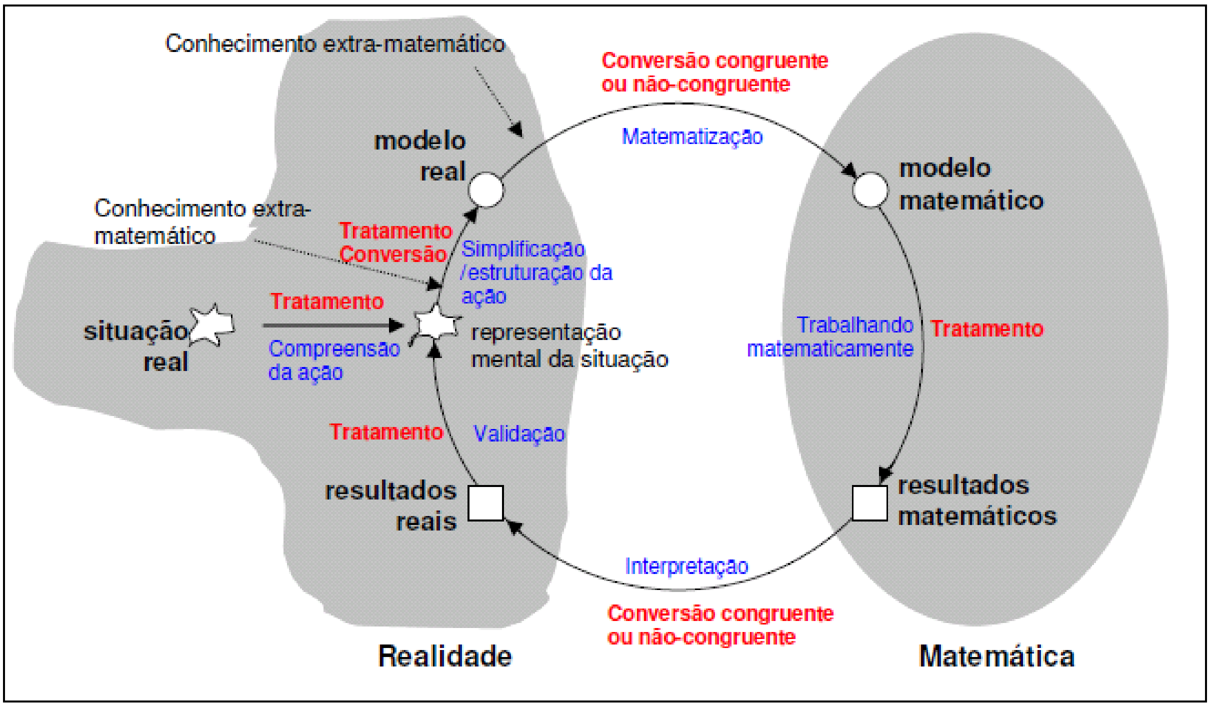


Segundo Vertuan (2007), atividades de Modelagem Matemática possibilitam a realização de tratamentos, conversões e coordenação entre os registros de representação. Para Duval (2003) atividades de conversão põem em evidência o fenômeno de congruência e não-congruência. Segundo Duval (2003), uma conversão pode ser mais complexa ou menos complexa de acordo com o seu nível de congruência ou de não-congruência. Em nossa pesquisa, estabelecemos os níveis de congruência e os níveis de não-congruência para análise das conversões apresentadas nas atividades escolhidas.

Durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, quando o modelador estabelece de forma adequada hipóteses para o problema significa que ele pode ter evidenciado tanto nas conversões congruentes quanto nas conversões não-congruentes o objeto matemático em questão. Ao realizar a validação da hipótese no modelo obtido implica que "o modelo deixa transparecer" estas hipóteses. Para evidenciar se o registro de chegada deixa transparecer o registro de saída o modelador precisa conhecer o "objeto matemático".

Baseadas nos esquemas que abordam as etapas de uma atividade de Modelagem Matemática e as ações cognitivas estabelecidas por Ferri (2006), e apresentadas na Figura 4.7, apresentamos na Figura 5.3 as possíveis atividades cognitivas dos alunos, estabelecidas por Duval, que podem ocorrer em cada uma dessas etapas, bem como as ações cognitivas nelas presentes.

Figura 5.3 – Atividade cognitivas estabelecidas por Duval e ações cognitivas estabelecidas por Ferri (2006), que podem ocorrer nas etapas de desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática.



No esquema que apresentamos, as setas orientam a seqüência em que, de modo geral, ocorre o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, as ações cognitivas dos alunos e as possíveis atividades cognitivas (tratamento e conversão) são estabelecidas pelos alunos no decorrer de cada uma das etapas.

A partir da situação real, os alunos fazem estudos para compreenderem qual problema poderão estudar, fazendo tratamentos dentro da situação, que de modo geral, se encontra em língua natural. Com a representação mental da situação, ou seja, com a esquematização do que se pretende estudar, são feitas simplificações por meio de tratamentos e conversões, obtendo-se o modelo real. Utilizando-se a Matemática, são feitas conversões que podem ser congruentes ou não-congruentes, definindo o modelo matemático. Realizando cálculos, tratamentos no modelo matemático obtido, chegam-se aos resultados matemáticos que podem ser interpretados, por meio de uma conversão congruente ou não-congruente, obtendo-se resultados reais. A partir dos resultados reais é preciso validar o modelo por meio de cálculos, realizando tratamentos. No decorrer da etapa é preciso realizar a coordenação dos objetos matemáticos envolvidos nos registros de representação semiótica.

As atividades que analisamos foram desenvolvidas por alunos do Ensino Superior — alunas do 1° ano do curso de Licenciatura em Matemática da UEL (Justiça e qualidade de vida), dupla de alunos da disciplina de Modelagem Matemática no curso de Matemática da Universidade Regional de Ijuí (RS) (Tanque de combustível) e alunos do Ensino Superior não especialistas em Matemática da Universidade Tsinghua, na China (Travessia de um barco) — e os registros sinalizam que o fenômeno de congruência e não-congruência nas conversões não influenciou na caracterização dos objetos matemáticos em estudo: 'função definida por partes', 'volume do cilindro' e 'Equações Diferenciais Ordinárias', respectivamente. Todavia, ao trabalharem com o objeto matemático 'função contínua', as alunas que desenvolveram a atividade de MM Justiça e qualidade de vida, apresentam indícios de que não houve caracterização de tal objeto matemático. No entanto, não podemos afirmar que tal fato ocorreu devido ao fenômeno de não-congruência da conversão do registro algébrico para o registro gráfico (Figura 5.4), pois, de acordo com a análise específica que realizamos, se as alunas tivessem realizado tratamentos no registro algébrico possivelmente a conversão para o registro gráfico seria realizada sem maiores problemas.

Figura 5.4 – Conversão do registro algébrico para o registro gráfico da atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida.

$$Q(j)=\begin{cases} -0{,}000000617.j^2-0{,}000297.j+0{,}979, & se \quad 0<j\leq 380 \\ 1{,}136.0{,}999^j, & se \quad j>380 \end{cases}$$

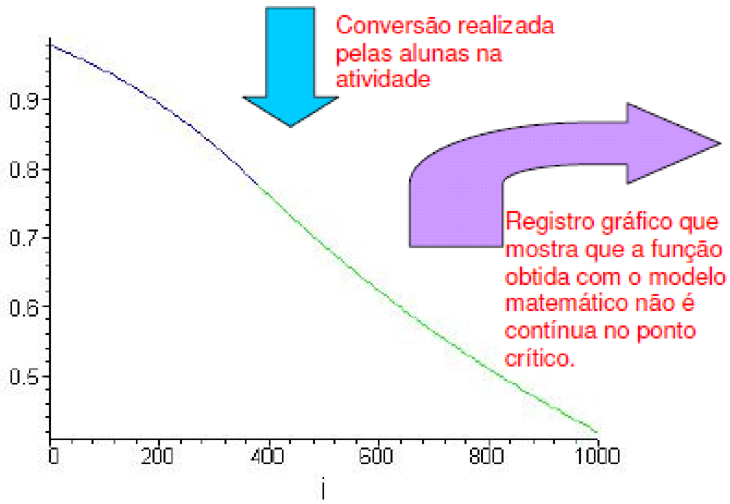


Figura 4.4 – Gráfico de $Q(j)$ (VERTUAN, 2007).

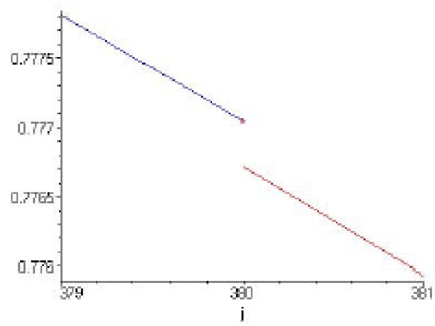


Figura 4.66 – Registro gráfico que apresenta a descontinuidade no ponto $(380, Q(380))$.

Com a realização de conversões entre os registros, tarefas de compreensão são evidenciadas, além de tarefas de produção quando os alunos realizam tratamentos entre os registros de representação. No entanto, essas tarefas de produção e de compreensão devem ser estimuladas, pois elas interferem na coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica e, conseqüentemente, na compreensão do objeto matemático envolvido. A não realização de tarefa de produção na atividade de MM sobre Justiça e qualidade de vida que mencionamos anteriormente, interferiu na coordenação entre os registros de representação do objeto matemático 'função contínua'.

Embora esta pesquisa seja de cunho teórico, não desenvolvida no âmbito da sala de aula, ela pode ser utilizada para investigar as relações entre Modelagem Matemática e Semiótica, no que diz respeito à utilização da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para estabelecer a relação do signo com o interpretante, por exemplo. Consideramos a análise da relação do signo com o interpretante (interpretação) de fundamental importância em uma análise semiótica, mas que não foi possível realizar em nossa pesquisa por não termos contato com os modeladores das atividades. Além disso, pode ser realizada uma pesquisa teórica com trabalhos de alunos de Educação Básica para evidenciar se o fenômeno de congruência e não-congruência interfere na coordenação entre os registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática.

Esperamos que a reflexão desencadeada na pesquisa sobre algumas das relações entre Modelagem Matemática e Semiótica possa atingir também outros pesquisadores que, como nós, buscam compreender os registros produzidos pelos modeladores em suas atividades e sua influência para a caracterização do objeto matemático.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes M. W. *Modelagem Matemática em sala de aula: em direção à educação matemática crítica.* In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 3., Piracicaba - SP. **Anais...** Piracicaba, 2003.

ALMEIDA, Lourdes M. W. *Pesquisa sobre Modelagem Matemática: algumas considerações.* Texto base de participação no Debate Temático sobre A Pesquisa em Modelagem Matemática. In: Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática — CNMEM, 5, Universidade Federal de Ouro Preto/Universidade Federal de Minas Gerais, Ouro Preto. Ouro Preto, 2007.

ALMEIDA, Lourdes M. W.; BRITO, Dirceu S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. *Ciência e Educação,* v.11, n. 3, p. 483-498, 2005a.

ALMEIDA, Lourdes M. W.; BRITO, Dirceu S. O conceito de função em situações de Modelagem Matemática. *Zetetikê,* v.13, n. 23, p. 63-86, jan/jun, 2005b.

ALMEIDA, Lourdes M. W.; DIAS, Michele R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema,* ano 17, n. 22, p. 19 - 35, 2004.

ALMEIDA, Lourdes M. W.; SILVA, André G. O. *Modelagem Matemática no contexto da Matemática e cidadania.* In: Encontro Paulista de Educação Matemática — EPEM, 7, Faculdade de Educação, São Paulo. **Anais...** São Paulo, 2004.

ALMOULOUD, Saddo A. *Fundamentos da didática da Matemática.* Curitiba: UFPR, 2007.

ASTOLFI, Jean-Pierre; DEVELAY, Michel. *A didática das Ciências.* 11. ed. Campinas: Papirus, 2007.

BARBOSA, Jonei C. *Modelagem Matemática e Perspectiva Sócio-crítica.* In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática — SIPEM, 2, Santos. **Anais...** Santos, 2003.

BASSANEZI, Rodney C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, Maria S. *Modelagem matemática & implicações no ensino e na aprendizagem de matemática.* 2. ed. Blumenau: Edfurb, 2004.

BLUM, Werner. Applications and modelling in Mathematics teaching: A review of arguments and instructional aspects. In: NISS, Mogens et al (eds). *Teaching of mathematical modelling and applications.* Chichester: Ellis Horwood Limited, 1991.

BORGES, Pedro A. P.; SILVA, Denise K. da. *Modelagem Matemática, escola e transformação da realidade.* In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática — CNMEM, 5, Universidade Federal de Ouro Preto/Universidade Federal de Minas Gerais, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto, 2007.

BORSSOI, Adriana H. *A aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática como estratégia de ensino.* 2004. Dissertação (Mestrado) — Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

BORSSOI, Adriana H.; ALMEIDA, Lourdes M. W. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. *Educação Matemática Pesquisa,* v. 6, n. 2, p. 91 - 121, 2004.

BRANDT, Célia F. *Contribuições dos Registros de Representação Semiótica na Conceituação do Sistema de Numeração.* 2005. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2005.

BRASIL; Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais Mais Ensino Médio:* Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais — PCN+. Brasília: MEC, 2002.

BRITO, Dirceu S. *Atribuição de sentido e construção de significados em situações de Modelagem Matemática.* 2003. Dissertação (Mestrado) — Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2003.

BUEHRING, Roberta S.; FLORES, Cláudia R.; MORETTI, Méricles T. O tratamento da informação nos livros didáticos e a teoria dos registros de representação semiótica. *REREMAT- Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática.* UFSC, p. 24-32, 2005.

CHEVALLARD, Yves et al. *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação: reflexões sobre Educação e Matemática.* Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

DAMM, Regina F. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia D. A. et al. *Educação Matemática: uma introdução.* São Paulo: Educ, p. 135-153, 1999.

D'AMORE, Bruno. Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME - Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa,* Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México, número especial, p. 177-195, 2006.

DAVIS, Philip. J.; HERSH, Reuben. *O sonho de Descartes.* Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1998.

DIAS, Michele R. *Uma experiência com Modelagem Matemática na formação continuada de professores.* 2005. Dissertação (Mestrado) — Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

DOERR, Helen M. Teachers' Ways of Listening and Responding to Students' Emerging Mathematical Models. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - ZDM -The International Journal on Mathematics Education,* v. 38, n. 3, p. 255-268, 2006.

DOMINONI, Nilcéia R. F. *Utilização de diferentes registros de representação: um estudo envolvendo Funções Exponenciais.* 2005. Dissertação (Mestrado) — Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

DOMINONI, Nilcéia R. F.; ALMEIDA, Lourdes M. W. *Diferentes Registros de Representação da função exponencial: um estudo.* In: Congresso Internacional de Ensino de Matemática — CIEM, 3, Ulbra, Canoas. **Anais...** Canoas, 2005.

DUVAL, Raymond. Graphiques et equations: L'Articullation de deux registres. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives.* IREM de Strasbourg, 1988. p. 235-253.

DUVAL, Raymond. Quelle Sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?. *RELIME - Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa,* Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México, número especial, p. 45-81, 2006.

DUVAL, Raymond. Registre de représentation sémiotique et fonctionnements cognitif de la penseé. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* v. 5, Strasbourg: IREM, ULP, 1993.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica.* Campinas, SP: Papirus, p. 11-34, 2003.

DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Tradução de Myriam Vega Restrepo. Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

DUVAL, Raymond. Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* n. 6, Strasbourg: IREM, ULP, p. 139-163, 1998a.

DUVAL, Raymond. Signe et objet (II): Questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* n. 6, Strasbourg: IREM, ULP, p. 165-196, 1998b.

DUVAL, Raymond. Un processus central dans le développement des apprentissages intellectuals: La coordination des registres de représentation sémiotique. *Entretiens de bichat, entretiens d'orthophonie.* Paris: Expansion Scientifique Française, p. 8191, 1998c.

FARIAS, Maria M. do R. *As representações matemáticas mediadas por softwares educativos em uma perspectiva semiótica: uma contribuição para o conhecimento do futuro professor de Matemática.* 2007. Dissertação (Pós-graduação em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

FERNANDES, E. Fazer Matemática compreendendo e compreender Matemática fazendo: a apropriação de artefactos da Matemática escolar. *Quadrante,* Lisboa, v. 6, n. 1, p. 49 - 86, 2000.

FERREIRA, Emerson P. *Semiótica Visual na Educação Tecnológica: Significações da Imagem e Discurso Visual.* 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2006.

FERRI, Rita B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - ZDM - The International Journal on Mathematics Education,* v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

FERRUZZI, Elaine C. *A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia.* 2003. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

FINNEY, Ross L. et al. *Cálculo de George B. Thomas Jr., volume 1.* Tradução de Paulo Boschcov. 10 ed., 4. reimpressão. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2006. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

FLORES, Cláudia R.; MORETTI, Méricles T. A articulação de registros semióticos para a aprendizagem: analisando a noção de congruência semântica na Matemática e na Física. *Perspectivas da Educação Matemática,* v.1, n. 1, p. 25-40 jan/jun, 2008.

FONT, Vicenç; GODINO, Juan D.; D'AMORE, Bruno. *Enfoque ontosemiótico de las representaciones em educación matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada. 2005. Disponível em www.ugr.es~jgodinoindice_eos.htm capturado em 5/6/2006.

FREITAS, José L. M. de. Registros de Representações na produção de provas na passagem da aritmética para a álgebra. In: MACHADO, Silvia D. A. *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica.* Campinas, SP: Papirus, p.

113-124, 2003.

FUENTE, Angel C. de la; CAÑADA, Lorenzo L.; CAÑADA, Lourdes O. Una perspectiva didáctica em torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo. In: *Educación Matemática,* Santillana, Distrito Federal, México, ano 16, n. 1, p. 59-87, 2004.

GARCÍA, José J. G.; PALACIOS, Francisco J. P. ¿Cómo usan los profesores de Química las representaciones semióticas?. In: *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciências,* v. 5, n. 2, 2006. Disponível em

http://www.saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen5/ART3_Vol5_N2.pdf capturado em 10/10/2006.

GARCIA, Luciane M. I. *Os processos de visualização e de representação dos signos matemáticos no contexto didático pedagógico.* 2007. Dissertação (Pós-Graduação em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

GARNICA, Antonio V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, Marcelo C.; ARAUJO, Jussara L. (org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, p. 77-98, 2004. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

GIRALDO, Victor; CARVALHO, Luiz M. Funções e Novas Tecnologias. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional,* ano 3, n. 1, p. 111 - 119, 2002.

GODINO, Juan D. *Teoría de las Funciones Semioticas: un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2003.

GODINO, Juan D.; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. *Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução Matemática.* Disponível em http://www.ugr.es/local/jgodino capturado em 1/5/2006.

GRANDO, Neiva I.; GIRARDELLO, Lisandra Z. Representações gráficas: da percepção do objeto ao registro gráfico. *Educação Matemática em Revista,* Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano 12, n. 18-19, p. 90-97, 2005.

GUZMÁN, Ismenia R. Registros de representación, el aprendizaje de nociones relatives a funciones: voces de estudiantes. *RELIME - Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa,* Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México, v. 1, n. 1, p. 5-21, 1998 (versão preliminar).

JACOMELLI, Karina Z. *A linguagem natural e a linguagem algébrica: nos livros didáticos e em uma classe de* 7^{E} *série do Ensino Fundamental.* 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2006.

JIANG Qiyuan; XIE, Jinxing. Designing and Teaching Mathematical Experiments Course in China Universities for Non-Mathematical Specialties. *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications - ICTMA,* 13. Universidade da Indiana, Bloomington, EUA, 2007.

KAISER, Gabriele; SRIRAMAN, Bharath. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - ZDM - The International Journal on Mathematics Education,* v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KEHLE, Paul E.; CUNNINGHAM, Donald J. Semiotics and Mathematical Modeling. In: *International Journal of Applied Semiotics,* v. 3, n. 1, p. 113-129, 2000.

KEHLE, Paul; LESTER, Frank K. Jr. A semiotic look at modeling behavior. In: Lesh, Richard; Doerr, Helen M. *Beyond constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching.* Hillsdale, N.J.: Erlbaum, p.97-122, 2003.

LESH, Richard; DOERR, Helen M. Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In: LESH, Richard; DOERR, Helen M. *Beyond Constructivism: Models and Modeling*

Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, p. 3-33, 2003.

LINGEFJÀRD, Thomas. Faces of mathematical modeling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - ZDM - The International Journal on Mathematics Education,* v. 38, n. 2, p. 96-112, 2006.

MALHEIROS, Ana P. S. *A produção matemática dos alunos em um ambiente de Modelagem.* 2004. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

MASS, Katja. *Barriers and Opportunities for the Integration of Modelling in Mathematic Classes: Results of an Empirical Study.* In: International Congress in Mathematical Education — ICME, 10, Copenhagem, Dinamarca, 2004. Disponível em http://www.icme-organisers.dk/tsg20/Maass.pdf capturado em 9/7/2006.

MORETTI, Méricles T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, Silvia D. A. *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica.* Campinas, SP: Papirus, p. 149-160, 2003.

NISS, Mogens. Aims and scope of aplications and modelling in Mathematics curricula. In: BLUM, Werner et al (eds). *Applications and modeling in learning and teaching Mathematics.* Chichester: Ellis Horwoos Limited, 1989.

OTTE, Michael. Mathematical epistemology from a semiotic point of view. In: *PME International Conference,* 25, University of Utrecht, The Netherlands, 2001.

OTTE, Michael. Proof and Explanation from a Semiotical Point of View. *RELIME - Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa,* Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México, número especial, p. 23-43, 2006.

PEIRCE, Charles S. *Semiótica.* Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 2. reimpr. da 3. ed. de 2000. v. 46. São Paulo: Perspectiva, 2005. (Estudos).

PINO, Angel. O acesso ao conhecimento em contexto escolar perspectiva histórico-cultural. *REREMAT- Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática.* UFSC, p. 17-25, 2006.

PONTE, João P. Concepções dos professores de Matemática e Processos de Formação. In: BROWN, M. et al. (org.) *Educação Matemática: Temas de investigação.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992.

RADFORD, Luis. Introducción: Semiótica y Educación Matemática. *RELIME -Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa,* Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México, número especial, p. 7-21, 2006.

RECHIMONT, Estela E.; ASCHERI, María E. *Análisis de los registros de representación semiótica puestos en juego por alumnos en la resolución numérica de ecuaciones polinómicas.* In: Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora — CIEMAC, 3, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. Disponível em www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/ capturado em 19/7/2008. Costa Rica, 2005.

SANTAELLA, Lucia. *A teoria geral dos signos: como as linguagens significam as coisas.* 2. reimpr. da 1. ed. de 2000. São Paulo: Cengage Learning, 2008a.

SANTAELLA, Lucia. *O que é semiótica.* 27. reimpr. da 1. ed. de 1983. v. 103. São Paulo: Brasiliense, 2008b. (Coleção Primeiros Passos).

SANTAELLA, Lucia. *Semiótica aplicada.* São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SANTOS, Fabio V. *Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: o uso que os alunos fazem do computador nas atividades de Modelagem.* 2008. Dissertação (Mestrado) — Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SANTOS Fabio V.; ALMEIDA, Lourdes M. W. *O software Modellus em situações de Modelagem Matemática: uma reflexão sobre as possibilidades de um software educativo.* In: Encontro Paranaense de Informática Educacional, 2, Anais eletrônicos do II ENINED, Foz do Iguaçu - PR, 2006.

SILVA, Benedito A. da. O conceito de probabilidade condicional: registros de representação. In: MACHADO, Silvia D. A. *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótic*a. Campinas, SP: Papirus, p. 95-111, 2003.

SILVA, Carlos A. da. *A noção de Integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica.* 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica - PUC, São Paulo, 2004.

SILVA, Karina A. P. da; ALMEIDA, Lourdes M. W. *O uso da Modelagem Matemática como proposta para contemplar o estudo de função exponencial.* In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática — EPMEM, 2., Faculdade de Apucarana, Apucarana - PR. **Anais...** Apucarana, 2006.

SILVA, Lenir M.; BAROLLI, Elisabeth. *Registros de Representação Semiótica na Resolução de Problemas.* In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3., Águas de Lindóia - SP. **Anais...** Águas de Lindóia, 2006.

SKOVSMOSE, Ole. *Educação matemática crítica: a questão da democracia.* São Paulo: Papirus, 2001. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

STEINBRING, Heinz. *What makes a sign a Mathematical Sign?: an epistemological perspective on mathematical interaction.* Disponível em http://www.math.uncc.edu/~sae/steinbring.pdf capturado em 14/7/2008.

VERTUAN, Rodolfo E. *Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.* 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

VERTUAN, Rodolfo E.; ALMEIDA, Lourdes M. W. *O uso de diferentes registros em atividades de Modelagem Matemática.* In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática — CNMEM, 5, Universidade Federal de Ouro Preto/Universidade Federal de Minas Gerais, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto, 2007.

VIZOLLI, Idemar. *Registro de representação semiótica no estudo de porcentagem.* In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática — SIPEM, 3, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia, 2006.

VIZOLLI, Idemar; SOARES, Maria T. C. Registros de representação de professores de jovens e adultos ao solucionarem problemas de proporção-porcentagem. *Educação Matemática em Revista,* Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano 12, n. 18-19, p. 67-75, 2005.