Universidade
Estadual de Londrina

KARINA ALESSANDRA PESSÔA DA SILVA

UMA INTERPRETAÇÃO SEMIÓTICA DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

IMPLICAÇÕES PARA A ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADO

Londrina
2013

KARINA ALESSANDRA PESSÔA DA SILVA

UMA INTERPRETAÇÃO SEMIÓTICA DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

IMPLICAÇÕES PARA A ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de doutora.

Orientadora: Profª. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S586i Silva, Karina Alessandra Pessôa da.

Uma interpretação semiótica de atividades de modelagem matemática : implicações para a atribuição de significado / Karina Alessandra Pessôa da Silva. – Londrina, 2013.

290 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2013.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Educação matemática – Teses. 3. Modelos matemáticos – Teses. 4. Matemática – Semiótica – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

KARINA ALESSANDRA PESSÔA DA SILVA

UMA INTERPRETAÇÃO SEMIÓTICA DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

IMPLICAÇÕES PARA A ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADO

COMISSÃO EXAMINADORA

Lourdes Maria Werle

Profª. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida – Orientadora
Universidade Estadual de Londrina – Londrina

Profª. Dra. Jussara de Loiola Araújo
Universidade Federal de Minas Gerais – Belo Horizonte

Eleni Bisognin

Profª. Dra. Eleni Bisognin
Centro Universitário Franciscano – Santa Maria

Profª. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Universidade Estadual de Londrina – Londrina

Profª. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina – Londrina

Londrina, 19 de março de 2013.

Nathalia e Pedro, inspiração para o meu

respirar, minha felicidade.

AGRADECIMENTOS

Ao findar a etapa de um trabalho, olhamos para trás e vemos quantas pessoas ‘ficaram’. Ficaram no sentido de deixar um pouco de si em nós e ficaram no sentido da torcida por mais uma conquista. Sendo assim, iniciemos:

Àquele responsável pelo amanhecer de cada dia, pela vida, pela inspiração proporcionada, pelo auxílio na esperança e na perseverança: *Deus*;

Àqueles que mais próximos estão no dia a dia, que dormem nos momentos certos, que são abdicados de nossa presença nos momentos de festividade e que entendem cada ausência com a esperança de que dias mais presentes estão por vir: *minha família*;

Àquela que nos acarinha quando tem que acarinhar, que bronqueia quando tem que bronquear, que reclama quando tem que reclamar, àquela que orienta o trilhar de uma pesquisa, sem perder a paciência, a confiança, a dedicação, a disposição; que posso chamar de *minha orientadora*. Amiga com certeza, mas que sabe separar amizade de profissionalismo e, que nesses oito anos, foi responsável pelo meu crescimento profissional e, sobretudo, pessoal. Os momentos que vivemos serão guardados com muito respeito e carinho. Exemplo de profissional;

Àquelas pessoas que aceitaram ao convite, que dispensaram tempo para analisar, criticar, contribuir com o deslanchar da pesquisa: *membros das bancas* — banca do Exame de Qualificação e/ou banca da Defesa — Profª Dra. Jussara de Loiola Araújo, Profª Dra. Eleni Bisognin, Profª Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, Profª Dra. Regina Célia Guapo Pasquini, Prof Dr. Carlos Eduardo Laburú;

Àqueles que se empenharam no desenvolvimento das atividades, que participaram assiduamente, que dispensaram tempo e que construíram uma amizade no desenvolvimento da pesquisa: *alunos do 4.º ano de Licenciatura em Matemática do ano de 2011*;

Àqueles que não escolhemos diretamente, mas que acolhemos como irmãos, que entendem o ‘sofrer’ do envolvimento com uma pesquisa, os *irmãos de orientação*. Durante esse trajeto, foram muitos os que estavam lá no Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), e que participaram de discussões e estudos envolvendo não somente minha pesquisa, mas os mais variados temas abordados. Cada um de vocês tem um lugarzinho especial em meu coração e apresenta uma característica que não será esquecida. São eles: Rodolfo (o irmãozão); Adriana (a protetora); Michele (a mais antiga, desde a graduação); Elaine (a desnaturada, mas sempre presente); Emerson (o caçulinha, o meu protegido); Renato (o sensível); Heloísa (a meiga); Bárbara (a enfática); Camila (a amorosa); Ângela (a preocupada);

Àqueles que escolhemos para fazerem parte de nossas vidas: *os amigos*. Em especial, às amizades que conquistei nesses oitos anos como estudante de pós-graduação na UEL e as que consolidei nesse período dentro e fora desta instituição;

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pela concessão de auxílio financeiro.

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes.”

Martin Luther King (1929 – 1968)

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática:** implicações para a atribuição de significado. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar “Como emergem os signos interpretantes nas diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática?”. Para tanto, nos pautamos em pressupostos teóricos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e da Semiótica Peirceana no que se refere à atribuição de significado para o objeto em estudo. Por meio da tríade peirceana signo-objeto-interpretante fazemos uma interpretação semiótica de atividades de modelagem com vistas a identificar atribuição de significado para o objeto. Neste sentido, propomos uma articulação entre a tríade peirceana e ações que o aluno pode ter frente a atividades de modelagem e destacamos as tríades símbolo/significado para o objeto/interpretante e Perceber/Agir/Significar. Com este intuito desenvolvemos atividades de Modelagem Matemática com alunos do 4.º ano do curso de Licenciatura em Matemática da UEL durante a disciplina de Modelagem na perspectiva da Educação Matemática. As atividades foram desenvolvidas seguindo os momentos de familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática propostos por Almeida & Dias (2004). Neste sentido, a pesquisa consiste na observação, descrição e análise dos signos produzidos pelos alunos em atividades de modelagem. A opção metodológica baseia-se nas considerações da pesquisa qualitativa. A análise dos dados é inspirada na proposta metodológica da Teoria Fundamentada baseada, principalmente, nas indicações de Kathy Charmaz (2006, 2009). A análise revela que os signos interpretantes emergem com o envolvimento do aluno (intérprete) durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem e se modificam com a familiarização com atividades desta natureza. Como a atribuição de significado está atrelada aos interpretantes produzidos pelo intérprete, inferimos que o significado para o problema e o objeto matemático se intensifica com a familiarização com atividades de modelagem.

Palavras-chave: Educação matemática. Modelagem matemática. Semiótica Peirceana. Atribuição de significado.

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da. **A semiotic interpretation of activities of Mathematical Modeling:** implications for the assignment of significance. 2013. Doctorate Thesis (Post-Graduation in Teaching of Science and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

This research aimed to investigate "As interpretants signs emerge at different phases of development of a Mathematical Modeling activity?". Therefore we base in the theoretical presuppositions of the Mathematical Modeling in the perspective of the Mathematics Education and of the Peircean Semiotic in respect to the assignment of significance to the object under study. Through the peircean triad sign-object-interpretant we produce a semiotic interpretation of modeling activies with a view to identify assignment of significance to the object. In this sense, we propose an articulation between the peircean triad and actions that the student may have against modeling activities and highlight the triads symbol/significance to the object/interpretant and Perceiving/Acting/Signifying. For this purpose we have developed Mathematical Modeling activities with students of the fourth year of the Course of Licentiate in Mathematics from UEL during the subject of Modeling in the perspective of the Mathematics Education, got involved. The activities where developed following moments of familiarizing students with Mathematical Modeling activities proposed by Almeida & Dias (2004). In this sense, the research consists in the observing, describing and analyzing of the signs produced for students in modeling activities. The methodology is based on considerations of qualitative research. The data analysis is inspired by Grounded Theory methodological proposal based, primarily, on indications of Kathy Charmaz (2006, 2009). The analysis reveals that the interpretants signs emerge with students (interpreter) involvement during the development of a modeling activity and change with familiarizing with activities of this nature. As the assignment of significance is tied to interpretants produced by the interpreter, we infer that the significance of the problem and the mathematical object intensifies with the familiarizing with modeling activies.

Keywords: Mathematics education. Mathematical modeling. Peircean semiotic. Assignment of significance.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na Educação Matemática, diferentes tendências têm sido utilizadas para auxiliar no ensino e na aprendizagem de conceitos matemáticos. Tendo em vista que a Modelagem Matemática é uma dessas tendências, o Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT)[1] vem, desde 2004, desenvolvendo estudos e pesquisas no intuito de investigar o ensino e a aprendizagem por meio do envolvimento de alunos e professores com atividades de modelagem[2]. Os temas de interesse que regem esse grupo de estudos promovem uma articulação entre modelagem e outros pressupostos teóricos relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem. O tema de interesse intitulado “Um olhar semiótico sobre a Modelagem Matemática” está pautado na análise semiótica de atividades de modelagem desenvolvidas em diferentes contextos e é o foco de nosso trabalho.

Para que sejam feitas análises semióticas de atividades de Modelagem Matemática, diferentes abordagens já foram elucidadas no que tange ao GRUPEMMAT. Isso se deve ao fato de que ao se envolver com os procedimentos que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática, os alunos entram em contato com diferentes representações — escritas, faladas e gesticuladas — que se remetem ao objeto ao qual estão se referenciando. Representações que de alguma forma caracterizam algo (o objeto) são consideradas signos deste objeto. O signo, segundo caracterização abordada por Peirce (2005), é algo que para uma pessoa toma lugar de outra coisa (objeto), não em todos os aspectos desta coisa, mas de acordo com certa forma e capacidade.

É na semiótica peirceana caracterizada pelo norte-americano Charles Sanders Peirce (1839-1914) que pautamos a abordagem semiótica em nosso trabalho. Nos estudos realizados sobre

[1] Grupo de estudos constituído dentro do Departamento de Matemática da UEL como espaço para estudo sobre diferentes linhas de pesquisa em Educação Matemática, entre elas a Modelagem Matemática e suas perspectivas na Educação Matemática, Semiótica e diferentes representações em Matemática. As reuniões do grupo ocorrem uma vez na semana. Algumas das publicações realizadas pelos membros do Grupemmat podem ser encontradas na página do grupo http://www.uel.br/grupo-pesquisa/grupemat/.

[2] Em alguns momentos, para evitar repetições, utilizamos o termo modelagem para nos referirmos à Modelagem Matemática.

a semiótica, Peirce (1972) trata o signo como uma relação entre três elementos — objeto, signo (ou representámen) e interpretante — em que o signo estabelece uma mediação entre objeto e interpretante. Um signo não pode funcionar como tal sem o objeto e o interpretante. Esses elementos indicam posições lógicas ocupadas na semiose: o fundamento do signo (representámen) é um primeiro, o objeto é um segundo e o interpretante um terceiro. A ação própria do signo (semiose) é determinar um interpretante, ou seja, a ação do signo é a ação de ser interpretado em outro signo, pois o interpretante, segundo Peirce, tem a natureza de um signo criado em uma mente interpretadora. "É só na relação com o interpretante que o signo completa sua ação como signo" (SANTAELLA, 2007, p. 37). É de se considerar que o interpretante[3] não é sinônimo de intérprete, nem de interpretação. Intérprete é a mente interpretadora que produz o interpretante; interpretação corresponde a todo o processo de geração de interpretantes.

Segundo Santaella (2008b),

> [...] A partir da relação de representação que o signo mantém com seu objeto, produz-se na mente interpretadora um outro signo que traduz o significado do primeiro (é o interpretante do primeiro). Portanto, o significado de um signo é outro signo — seja este uma imagem mental ou palpável, uma ação ou mera reação gestual, uma palavra ou mero sentimento de alegria, raiva... uma ideia, ou seja lá o que for — porque esse seja lá o que for, que é criado na mente pelo signo, é um outro signo (tradução do primeiro) (SANTAELLA, 2008b, p. 58-59).

Em nossa pesquisa de dissertação intitulada "Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações" (SILVA, 2008) defendida em dezembro de 2008, fazemos uma análise documental dos registros apresentados pelo(s) autor(es)/modelador(es) de atividades de modelagem existentes na literatura. Naquele trabalho, no entanto, os signos aos quais tivemos acesso correspondiam aos registros escritos, sendo possível uma análise de dois dos elementos destacados na semiótica peirceana — o signo e o objeto. Evidências do que se refere ao interpretante não se fizeram presentes pela impossibilidade do contato com os intérpretes que realizaram cada uma das atividades. Naquela pesquisa, a semiótica peirceana possibilitou uma classificação dos signos existentes em atividades de modelagem segundo as categorias fenomenológicas — Primeiridade, Secundidade e Terceiridade —, quando os signos estão relacionados consigo mesmo e com o objeto, estabelecendo uma relação de significação e

[3] Em alguns momentos utilizamos o termo signo interpretante com a mesma conotação de interpretante.

objetivação dos signos efetivada pelos envolvidos na atividade. Os modos de inferência abdução, indução e dedução, classificados por Kehle & Cunningham (2000) em atividades de modelagem, também foram abordados na pesquisa de mestrado segundo a semiótica peirceana envolvida no trabalho.

Embora registros escritos possibilitem observar relações ou generalizações conceituais emitidas pelos envolvidos em uma atividade matemática, entendemos que elementos indicativos do pensar refletido nas representações apresentadas para o fenômeno em estudo se fazem presentes também em outros signos — falas e gestos. Esses signos somente podem ser analisados em contato direto com os intérpretes.

Inquietações sobre a influência dos interpretantes produzidos pelos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática se fizeram presentes após defesa de mestrado. Essas inquietações, em certa medida, nos estimularam a investigar as ações do intérprete para estudar os signos interpretantes produzidos em atividades de Modelagem Matemática nesta pesquisa de doutorado. Neste contexto nos interessamos pela análise de signos interpretantes produzidos por alunos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática para evidenciar atribuição de significado para o objeto a que eles se referenciam, ou seja, “àquilo que o signo efetivamente produz ao encontrar uma mente interpretadora” (SANTAELLA, 2004, p. 80-81).

Aos nos remetermos à atribuição de significado para o objeto nos deparamos com a questão: “Quais objetos analisar em atividades de Modelagem Matemática?”. Em se tratando de ensinar Matemática por meio da modelagem, é evidente que o objeto matemático[4] que emerge no estudo da situação seja analisado. Além disso, sabendo que em uma atividade de modelagem parte-se de uma situação inicial (problemática) e obtém-se uma solução para a situação inicial, uma resposta ao problema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) podemos considerar que para além de ensinar Matemática estamos em busca da solução para o problema. Neste sentido, consideramos o problema como um objeto de estudo em uma atividade de modelagem e evidenciar a atribuição de significado para este objeto pode

[4] Entendemos que o objeto matemático é “qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de alguma maneira na atividade matemática” (GODINO; BATANERO; FONT, 2006, p. 5).

constituir um importante estudo na linha de pesquisa de Modelagem Matemática.

Os signos interpretantes caracterizados nos registros escritos, nas falas e nos gestos que emergem em atividades de Modelagem Matemática constituem um grande acervo de dados que indicam aspectos relacionados à atribuição de significado para o objeto pelo aluno (intérprete). Para uma análise sistemática desses dados vamos nos apoiar numa assertiva de Charmaz (2009) que defende que análises desse tipo requerem uma "parada para que possamos questionar de modo analítico os dados que coletamos" (CHARMAZ, 2009, p. 67). Neste sentido, os dados podem ser organizados de forma a fundamentar uma teoria. A teoria fundamentada em dados proposta por Kathy Charmaz possibilita que os dados sejam codificados de maneira que ao término da pesquisa esses constituam um fundamento para o trabalho desenvolvido.

Levando em consideração o papel do intérprete no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e que estas proporcionam a produção de signos interpretantes, parece adequado uma interpretação Semiótica de tais atividades no que diz respeito à atribuição de significado para o objeto (problema e objeto matemático). Neste contexto, nosso problema de pesquisa consiste em: **Como emergem os signos interpretantes nas diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática?**

Com vistas a apresentar reflexões sobre esta questão, orientamos nossas análises por questões específicas:

1. Em atividades de Modelagem Matemática, que signos são produzidos pelos alunos em relação ao problema que emerge dessa atividade?
2. Que relações existem entre os signos interpretantes produzidos pelos alunos para o objeto matemático e para o problema em estudo em atividades de Modelagem Matemática?
3. A produção de signos interpretantes para o problema se modifica com a familiarização do aluno com atividades de Modelagem Matemática? De que forma?

Segundo Santaella (2007, p. 37), "a análise dos interpretantes deve estar alicerçada na leitura cuidadosa tanto dos aspectos envolvidos no fundamento do signo como nos aspectos envolvidos nas relações do signo com seu objeto".

Para tanto, analisamos atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por alunos em uma disciplina de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática em diferentes momentos de familiarização com esse tipo de atividade.

Além desta *Introdução*, na qual apresentamos o problema e a motivação para o estudo, esta tese está organizada em cinco capítulos:

No primeiro capítulo, intitulado *Modelagem Matemática*, tratamos da modelagem no âmbito da Educação Matemática.

No capítulo 2 apresentamos os pressupostos teóricos referentes à *Semiótica peirceana e à atribuição de significado* na perspectiva desenvolvida por Charles Sanders Peirce.

Nossa opção metodológica e os procedimentos da pesquisa são descritos no capítulo 3 — *Nossa pesquisa*. Nesse capítulo descrevemos o quadro teórico que rege a pesquisa, como o trabalho foi desenvolvido e de que forma fizemos as análises das atividades de Modelagem Matemática pautadas na codificação dos dados proposta na Teoria Fundamentada sugerida por Kathy Charmaz.

Para uma 'ambientalização' do leitor com relação ao desenvolvimento das atividades desenvolvidas pelos alunos apresentamos uma descrição detalhada de cinco das atividades de modelagem no capítulo 4 intitulado *O contexto*.

No capítulo 5 — *Análise das atividades de Modelagem Matemática sob uma perspectiva semiótica peirceana* — analisamos as atividades descritas no capítulo 4 apoiadas na Teoria Fundamentada.

O capítulo 6 é dedicado às *Considerações finais* que apontamos com o desenvolvimento de nosso trabalho.

Em seguida, apresentamos as *Referências* utilizadas para a fundamentação desse texto. E, finalmente, nos *Apêndices* e nos *Anexos* organizamos os documentos que auxiliaram no desenvolvimento do trabalho.

CAPÍTULO 1 – MODELAGEM MATEMÁTICA

"E é assim que, juntos, compartilhando experiências e construindo outras tantas, vamos 'construindo' entendimentos de Modelagem Matemática e dos modos de fazer modelagem [...]"
(ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 154).

O propósito deste capítulo é apresentar considerações sobre a Modelagem Matemática. Fazemos uma abordagem sobre o que consideramos problema e modelo matemático, dois dos elementos presentes em uma atividade de Modelagem Matemática.

Sob uma perspectiva cognitiva[5], apresentamos um esquema que representa possíveis fases de desenvolvimento de atividades de modelagem levando em consideração as ações cognitivas dos alunos em cada uma delas. Baseando-nos em trabalhos já desenvolvidos, abordamos o *como* a modelagem pode ser gradativamente inserida nas aulas de Matemática com vistas à atribuição de significado para o problema e o objeto matemático em estudo.

1.1 CONCEITOS INICIAIS

Na literatura, muitas são as caracterizações utilizadas para designar Modelagem Matemática. Podemos dizer que, de modo geral, o termo 'Modelagem Matemática' refere-se à busca de uma representação matemática para um objeto ou fenômeno não-matemático (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009). Considerando que esta busca pode ser realizada no âmbito de aulas de matemática, a Modelagem Matemática pode ser entendida como uma atividade na qual fazemos a abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática (ALMEIDA; BRITO, 2005).

Desse modo, ao nos remetermos à Modelagem Matemática, estamos nos referindo a atividades que têm como ponto de partida uma situação inicial (problemática) e como ponto

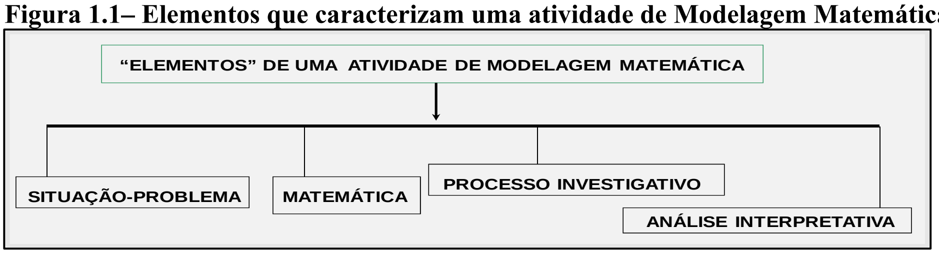
[5] Em uma perspectiva cognitiva, os objetivos são, segundo Kaiser & Sriraman (2006), descrever e compreender os processos cognitivos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática.

de chegada uma situação final (solução para a situação inicial); para tanto, são utilizados procedimentos que definem estratégias de ação do sujeito envolvido com a atividade em relação à situação problemática. Almeida, Silva & Vertuan (2012) identificam elementos que, de modo geral, se fazem presentes em atividades de modelagem. Segundo os autores,

> [...] o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 17).

Esses autores ilustram os elementos que caracterizam uma atividade de modelagem por meio de um esquema (Figura 1.1).

Figura 1.1– Elementos que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática



Fonte: ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 17.

Em aulas de Matemática, esses 'elementos' que caracterizam uma atividade de modelagem aproximam o aluno de uma atividade investigativa. Segundo Almeida & Ferruzzi (2009), uma atividade de modelagem requer do aluno a formulação de um problema e a definição de metas para sua resolução, a definição de hipóteses, a formulação de previsões e a apresentação de explicações e respostas para a situação em estudo bem como a comunicação destas respostas e/ou explicações para outros.

A atividade investigativa, neste contexto, segue a caracterização denotada por Borges (2002), que considera atividades prático-experimentais propostas aos alunos e que envolvem a resolução de problemas mal definidos e pouco estruturados. A resolução desse tipo de problema não ocorre por meio da aplicação de procedimentos pré-definidos; suas respostas não são conhecidas pelos alunos, e às vezes, nem por seus professores. Os alunos são desafiados a encontrar formas para coletar dados e informações que os ajudem a propor soluções razoáveis.

Considerando esta característica investigativa, um aspecto importante numa atividade de

Modelagem Matemática é a necessidade dos próprios alunos, a partir de uma situação-problema não-matemática, fazerem a associação com conceitos e/ou procedimentos matemáticos capazes de conduzir a uma solução para o problema e possibilitar a sua análise.

Com vistas a ilustrar o desenvolvimento de uma atividade de modelagem, abarcando procedimentos como os destacados por Almeida & Ferruzzi (2009), diferentes ciclos já foram propostos na literatura e apresentados em forma de esquemas explicativos. Borromeo Ferri (2006) afirma que esses ciclos são diferentes porque estão relacionados com as aproximações e direções de como a modelagem é entendida nas diferentes aplicações. Patrocínio Júnior (2007), ao analisar diferentes publicações, concluiu que os esquemas explicativos são mais particulares do que gerais o que possibilita várias práticas de Modelagem Matemática.

De forma geral, nas diferentes práticas de modelagem realizadas em pesquisas na área de Educação Matemática, a gênese da atividade concerne na formulação de um problema. Os procedimentos seguintes se enquadram na prática realizada pelo modelador.

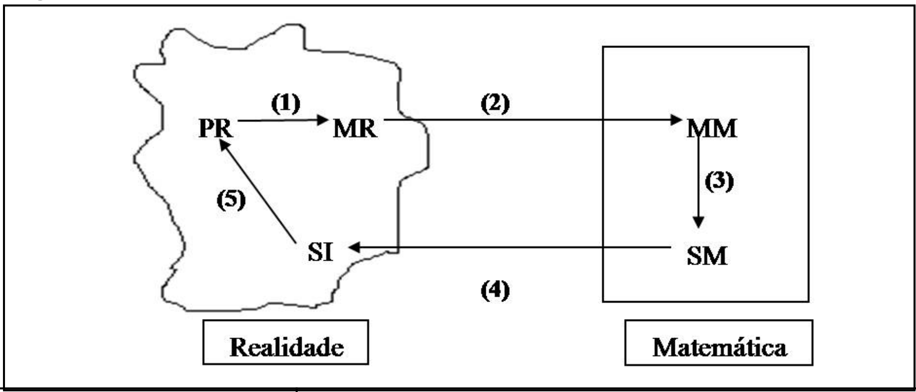
Nos diferentes ciclos analisados, evidenciamos que a localização da formulação do problema encontra-se em um ambiente não essencialmente matemático, relacionando-se com situações do ‘mundo real’, que são caracterizadas como situações não-matemáticas. Em nosso trabalho, elucidamos alguns dos ciclos que são recorrentes na literatura. Concorremos ao risco de realizar a tradução dos elementos constituintes dos ciclos, levando em consideração os contextos em que foram apresentados. As imagens originais são apresentadas nos *Anexos*.

Para identificar barreiras e oportunidades para a integração de modelagem em sala de aula, Maaβ (2006) propõe que um problema do mundo real seja simplificado, estruturado e idealizado com fins a obter um modelo real. O modelo real é então matematizado[6] gerando um modelo matemático, que ao ser trabalhado no âmbito da Matemática possibilita a obtenção de uma solução matemática. A solução matemática deve ser interpretada e validada com o problema do mundo real. No ciclo de modelagem de Maaβ (2006), o problema do mundo real consiste no início e no fim de uma atividade de modelagem (Figura 1.2), no

[6] Matematização como caracterizado por Freudenthal (1973, p. 43) corresponde a “dar significado matemático para a organização da realidade”.

entanto, com ‘olhares’ diferenciados, pois intenções diferentes estão relacionadas.

Figura 1.2– Esquema do processo de modelagem proposto por Maaβ (2006)



Legenda PR: Problema do mundo real MR: Modelo real MM: Modelo matemático SM: Solução Matemática SI: Solução interpretada	(1) Simplificação, estruturação e idealização (2) Matematização (3) Trabalho dentro da Matemática (4) Interpretação (5) Validação

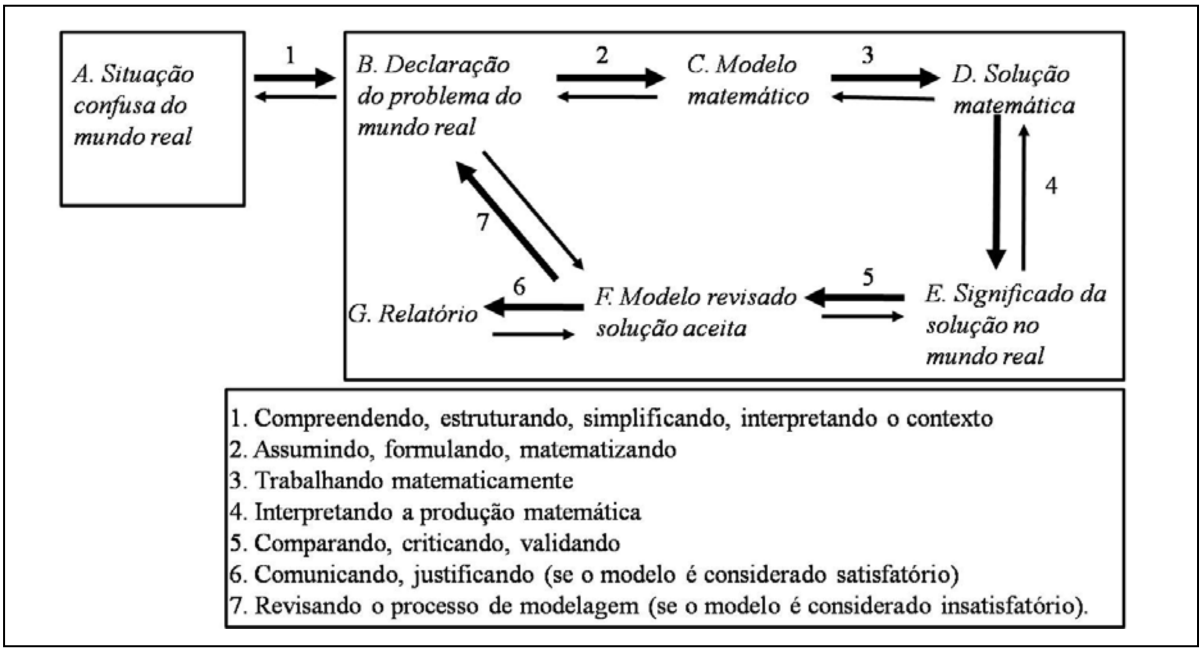
Fonte: MAAβ, 2006, p. 2. Tradução nossa.

Com o intuito de abordar as atividades mentais do sujeito enquanto trabalha com uma atividade de modelagem, Stillman et al (2007), se debruçam na construção de um esquema com esse foco (Figura 1.3).

No esquema as letras A-G representam fases no processo de modelagem e os números 1-7 representam os tipos de atividades mentais. As setas grossas, em sentido horário na parte superior do ciclo representam *transições* entre as fases, finalizando com um relatório de um resultado positivo de modelagem, ou com um outro ciclo de modelagem se a validação indica que a solução não é satisfatória. As setas mais finas que estão em sentido inverso ao ciclo de modelagem são incluídas para enfatizar que o processo de modelagem não é linear ou unidirecional.

A atividade de modelagem se inicia com a declaração do problema do mundo real oriundo de uma situação do mundo real. Com a matematização obtém-se o modelo matemático que, quando trabalhado matematicamente resulta em uma solução matemática. A solução matemática tem que ser interpretada de forma a atribuir um significado no mundo real. Com isso, o modelo é validado, revisto e a solução é aceita para ser comunicada e justificada por meio de um relatório. Se a solução não for aceita o processo de modelagem é revista retomando o problema do mundo real. No ciclo de modelagem de Stillman et al (2007), o problema do mundo real inicia a atividade de modelagem e é retomado caso a solução do modelo matemático não seja aceita.

Figura 1.3– Esquema do processo de modelagem proposto por Stillman et al (2007)

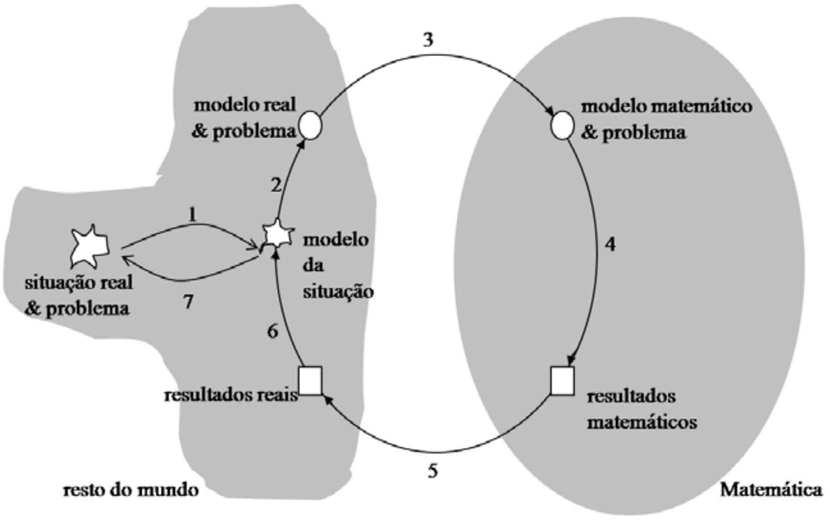


Fonte: STILLMAN et al, 2007, p. 690. Tradução nossa.

No esquema explicativo proposto por Blum (2011) e apresentado na Figura 1.4, situação real e problema são os estágios iniciais de uma atividade de modelagem. A partir dessas ações constrói-se um modelo da situação, ou seja, o que realmente pode ser estudado. Com o modelo da situação estabelecido, é preciso simplificá-lo, estruturá-lo levando ao modelo real articulado com o problema a ser estudado. O modelo real em conjunto com o problema é então matematizado, ou seja, passa pela etapa de matematização, resultando em um modelo matemático em consonância com o problema. Procedimentos matemáticos são utilizados com o objetivo de obter resultados matemáticos que devem ser interpretados como resultados reais. As ações finais são validação e exposição. Se o modelo for válido é possível utilizá-lo para expor explicação, previsão e decisão sobre o fenômeno em estudo. Se o modelo não for válido, é preciso retornar ao modelo da situação e reiniciar o desenvolvimento da atividade.

No ciclo de modelagem de Blum (2011), o problema faz parte do início, encontra-se em consonância com o modelo real e o modelo matemático e é retomado no final quando se retorna à exposição da atividade.

Figura 1.4– Esquema explicativo de uma atividade de modelagem proposto por Blum (2011)



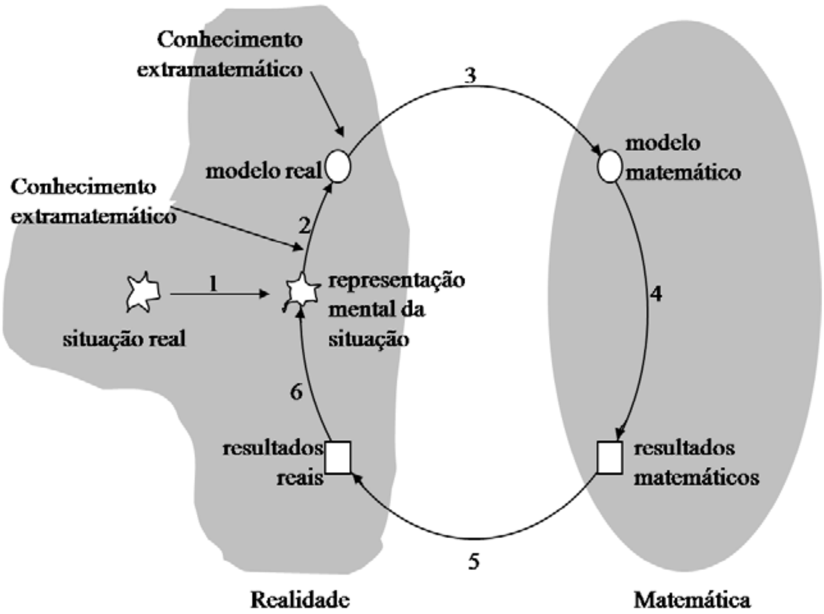
1. Construção
2. Simplificação/ estruturação
3. Matematização
4. Trabalhando matematicamente
5. Interpretação
6. Validação
7. Exposição

Fonte: BLUM, 2011, p. 18. Tradução nossa.

Levando em consideração os diferentes ciclos de modelagem existentes na literatura, Borromeo Ferri (2006), pautada numa perspectiva cognitiva elabora um ciclo de modelagem (Figura 1.5). Para a autora, quando o aluno escolhe a situação real que pretende modelar, geralmente precisa compreender o que pode ser estudado a partir dela, fazendo uma representação mental da situação. Na representação mental da situação, o aluno toma decisões que influenciam na simplificação das informações obtidas. Na etapa de transição da representação mental da situação para o modelo real, ocorre uma ação de idealizar e simplificar o problema, o aluno utiliza-se de conhecimentos extramatemáticos que possui. Na etapa de transição do modelo real para o modelo matemático, o aluno tem um progresso no que se refere à matematização, utilizando os conhecimentos extramatemáticos que possui para a construção do modelo matemático. Do modelo matemático para os resultados matemáticos, o aluno usa suas competências matemáticas. A ação de interpretação dos resultados obtidos na atividade de Modelagem Matemática ocorre na transição dos resultados matemáticos para os resultados reais. Finalmente, na etapa de validação, o aluno faz correspondência dos resultados reais e as representações mentais.

No ciclo de modelagem de Borromeo Ferri (2006), não há menção explícita à palavra problema. No entanto, ao compreender o que pode ser estudado a partir da situação inicial, entende-se que um problema passa a ser o foco da atividade. À resolução desse problema, Almeida & Silva (2012), em concordância com Borromeo Ferri (2006), entendem que os alunos recorrem a um conjunto de ações cognitivas[7].

Figura 1.5– Ciclo de modelagem sob uma perspectiva cognitiva proposto por Borromeo Ferri (2006)



1. Compreensão da ação
2. Simplificação/estruturação da ação; a utilização do conhecimento extramatemático depende da ação
3. Matematização; o conhecimento extramatemático se faz necessário fortemente nesse momento
4. Trabalhando matematicamente, utilizando as competências matemáticas individuais
5. Interpretação
6. Validação

Fonte: BORROMEO FERRI, 2006, p. 92. Tradução nossa.

No encaminhamento da identificação das ações cognitivas do aluno, Almeida & Silva (2012) apontam que é preciso considerar que este, ao se deparar com a situação inicial, identifica suas intenções e suas limitações para o desenvolvimento da atividade e a busca da situação final (uma resposta para o problema). Diante da atividade intencional o aluno realiza ações cognitivas tanto implicitamente (por meio de procedimentos) como explicitamente (por meio de representações, de modo geral simbólicas). A interação entre conhecimentos matemáticos e extramatemáticos, em certa medida, serve de 'pano de fundo' para as ações cognitivas destinadas a apresentar e explicar a situação em estudo.

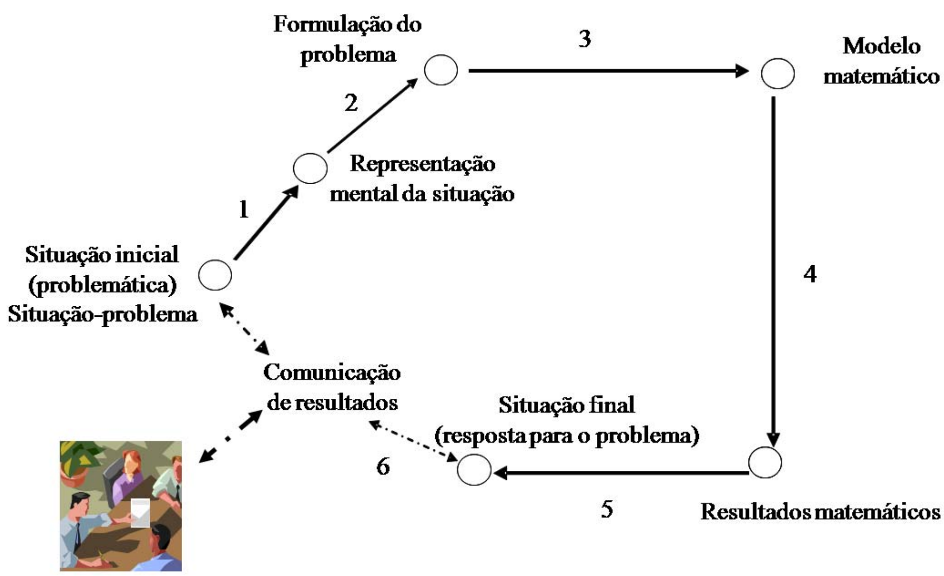
---

[7] Segundo Martins (2013), a ação cognitiva de um sujeito corresponde à transição de "sua intenção para a ação e vice-versa" (p. 1).

Com base em estudos sobre a Modelagem Matemática na perspectiva cognitiva (BORROMEO FERRI, 2006), Almeida & Silva (2012) destacam que as ações cognitivas do aluno em uma atividade de modelagem são: compreensão da situação, estruturação da situação, matematização, síntese, interpretação e validação, comunicação e argumentação. A Figura 1.6, proposta pelas autoras ilustra as ações cognitivas no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática.

O problema, no ciclo de modelagem de Almeida & Silva (2012), é explicitado após o aluno realizar as ações cognitivas referentes à compreensão e estruturação da situação-problema. O modelo matemático é deduzido por meio da matematização do problema. Os resultados matemáticos são obtidos por meio de uma síntese do modelo matemático, tais resultados são interpretados e validados com a resposta para o problema. O findar da atividade consiste na comunicação e argumentação retornando à situação-problema. Com este ciclo, o problema perfaz toda a atividade e o objetivo é chegar a uma resposta a esse problema que deve ser arguida por meio de uma comunicação.

Figura 1.6– Ciclo destacando as ações cognitivas do aluno no desenvolvimento de uma atividade de modelagem proposto por Almeida & Silva (2012)



As ações cognitivas e as etapas da Modelagem Matemática
1- Compreensão da situação
2- Estruturação da situação
3- Matematização
4- Síntese
5- Interpretação e validação
6- Comunicação e argumentação

Fonte: ALMEIDA; SILVA, 2012, p. 630.

O objetivo do estudo e da apresentação dos ciclos/esquemas de modelagem é localizar o problema como elemento presente e inicial em atividades de modelagem. Neste sentido, entendemos que o problema é um componente essencial em uma atividade de modelagem e que esse pode ser respondido por intermédio de um modelo matemático válido. Para a obtenção desse modelo matemático válido é necessário o envolvimento de objetos matemáticos. Questões referentes à atribuição de significado para o problema e para os procedimentos matemáticos envolvidos na obtenção do modelo permeiam nosso estudo.

Problema e *modelo* são verbetes que apresentam ampla designação. Aproximações do que entendemos por problema e por modelo, em especial modelo matemático, bem como as fundamentações teóricas nas quais nos pautamos são apresentadas nos tópicos que se seguem.

1.1.1 'PROBLEMA' EM FOCO

A palavra 'problema' é formada do prefixo *pró* que significa diante, à frente, mais *bállein* que significa colocar, lançar. Dessa forma, etimologicamente, problema refere-se a 'lançar-se à frente'. Ao abordar a noção de problema em seus estudos sobre Resolução de Problemas, o matemático húngaro George Pólya (1887-1985), autor do livro *How to Solve It*[8], afirma que só existe um problema quando há uma dificuldade que se deseja vencer ou abarcar. Há a necessidade de se *lançar à frente* para transpor algo com o qual se tem dificuldade.

Esse desejo de resolver algo com o qual se tem dificuldade e que caracteriza um problema é abordado em diferentes concepções. Saviani (1999) entende que um problema corresponde a uma questão cuja resposta não é conhecida, mas que se deseja conhecer. Onuchic & Allevato (2004, p. 221), ao tratar do ensino de Matemática por meio da Resolução de Problemas, consideram que "tudo aquilo que não sabemos fazer mas que estamos interessados em fazer" corresponde a um problema.

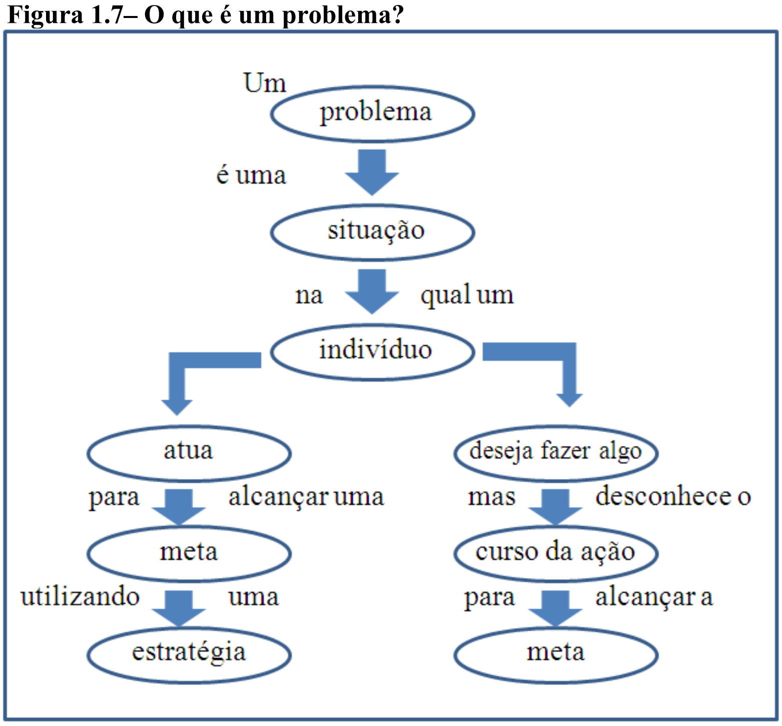
Quando tratamos de desejo/interesse, levamos em consideração a presença de um sujeito,

[8] Existe uma edição em português, intitulada *A arte de resolver problemas*, da Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1977.

pois uma questão por si só não corresponde a um problema, mesmo que sua resposta seja desconhecida (SAVIANI, 1999). Neste sentido, segundo Pires & Gomes (2009, p. 17), “[...] para que uma situação seja um problema, é necessário que o sujeito: esteja ciente dessa situação; esteja interessado em resolver essa situação; não tenha elementos necessários para proceder diretamente”.

Levando em consideração que o problema é uma situação em que o sujeito deseja fazer algo, mas desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua meta[9], Poggioli (2001) utiliza-se de um esquema (Figura 1.7) que ilustra esse possível ‘caminho’ e que descreve ‘o que é um problema’. Para tanto, em um problema, o sujeito envolvido com uma situação pode: atuar para alcançar uma meta utilizando uma estratégia ou fazer algo em que desconhece o curso da ação para alcançar a meta. O papel do sujeito nesse ‘caminho’ é “operar sobre o estado inicial para transformá-lo em meta”[10] (POGGIOLI, 2001, p. 213-214, Tradução nossa).

Figura 1.7– O que é um problema?



Fonte: POGGIOLI, 2001, p. 213. Tradução nossa.

---

[9] Na concepção de Poggioli (2001), ‘meta’ é considerada como a ‘solução’ e o que ocorreu de diferente entre a solução e a situação inicial corresponde ao problema.

[10] Tradução de “[...] operar sobre el estado inicial para transformarlo en meta” (POGGIOLI, 2001, p. 213-214).

Poggioli (2001) reconhece que em uma situação, a solução (meta) é o que se deseja obter. No entanto, a autora afirma que em um problema “pode existir uma ou várias metas, as quais podem estar bem ou mal definidas”[11] (POGGIOLI, 2001, p. 214, Tradução nossa).

Na Educação Matemática, com o propósito de entender como os alunos resolvem problemas nos mais variados contextos, como utilizam seus conhecimentos nessa resolução, que escolhas fazem, que hipóteses levantam, como constroem significados para os objetos matemáticos, como ocorre a aprendizagem da matemática neste contexto, muitos pesquisadores têm seguido a classificação proposta por Butts (1980), no que concerne a tendência Resolução de Problemas[12]. Nesta classificação, considera-se a diversidade de habilidades e/ou competências que os problemas demandam dos resolvedores com relação à resolução. Butts (1980) apresenta cinco classes de problemas matemáticos que podem ser propostos aos alunos (exercícios de reconhecimento, exercícios algorítmicos, problemas de aplicação, problemas em aberto, situações-problema).

Nos *exercícios de reconhecimento*, os alunos precisam reconhecer ou relembrar um fato, uma definição ou um teorema. Os *exercícios algorítmicos* são aqueles que podem ser resolvidos por meio de um algoritmo específico ou executando um procedimento passo a passo. As soluções de um *problema de aplicação* requerem que os alunos façam uma formulação simbólica do problema e a manipulem com algoritmos ou outros procedimentos já conhecidos. Os *problemas em aberto* não contêm, no enunciado, uma estratégia para sua resolução. Nas *situações-problema* o procedimento inicial é identificar o problema inerente a uma situação para, posteriormente, resolvê-lo. Outro procedimento, nas situações-problema, é verificar se a solução encontrada é satisfatória, caso não seja, o problema deve ser retomado e revisto ou um novo problema deve ser identificado.

Nesses diferentes tipos de problemas classificados por Butts (1980), o que aparenta ‘exigir’ mais no que se refere a pensar em estratégias e criar ideias pelo resolvedor diz respeito às situações-problema.

[11] Tradução de “[...] puede haber una o varias metas, las cuales pueden estar bien o mal definidas” (POGGIOLI, 2001, p. 214).

[12] Ao nos remetermos à Resolução de Problemas no que tange as pesquisas realizadas em âmbito nacional, não podemos deixar de citar o grupo de pesquisas da UNESP-Rio Claro (GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas), coordenado pela professora Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic.

A situação-problema em nossa perspectiva com relação à Modelagem Matemática corresponde à situação inicial problemática na qual a primeira etapa decisiva é identificar o problema inerente à situação. O ponto de chegada corresponde à solução da situação perpassando pela obtenção de um modelo matemático.

1.1.2 MODELO MATEMÁTICO

Modelo, de forma geral, corresponde a uma tentativa de expor uma ou mais características de algo. Segundo a caracterização apresentada no dicionário etimológico de Cunha (1989), o termo *modelo* corresponde a "representação de alguma coisa". De ampla utilização, como na Moda, na Engenharia, na Arte, na Matemática e em outras ciências, o modelo assume o papel de representar a tendência de algo. Sriraman & Lesh (2006) defendem a importância do modelo para descrever sistemas complexos na Matemática e na Ciência. Esses autores consideram o modelo como importantes 'peças do conhecimento'[13] e, neste sentido, o modelo deveria ser enfatizado no ensino e na aprendizagem, principalmente da Matemática, da Ciência e da Tecnologia.

Na Matemática, modelo matemático corresponde à representação matemática da situação-problema que o originou. Lesh & Doerr (2003) caracterizam modelo matemático a partir do conceito que esses autores dão a *modelo*. Para eles, modelos são sistemas conceituais que podem ser expressos utilizando sistemas de notação externa e que são utilizados para construir, descrever ou explicar como outros sistemas se comportam. Os sistemas conceituais constituem-se de elementos, relações, operações e regras de interação.

Alinhados à proposta abordada por Lesh & Doerr (2003), Almeida, Silva & Vertuan (2012), caracterizam um modelo matemático como

> [...] um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13).

---

[13] Tradução da expressão *pieces of knowledge*.

Dependendo da situação-problema e do problema propostos para o estudo em uma atividade de modelagem, diferentes modelos matemáticos podem ser explicitados e diferentes discussões podem ser elucidadas para tentar identificar qual deles representa a situação/discussão em estudo. Essa identificação não é objetiva, ela é concretizada por meio de valores e interesses dos modeladores. Neste aspecto, concordamos com Davis & Hersh (1995), quando afirmam que não se deve caracterizar um modelo como verdadeiro ou falso. Uma melhor forma de caracterizar um modelo é considerá-lo simplista ou sofisticado, útil ou inútil. Bassanezi (2002, p. 31) considera que "nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado e, agora poderíamos dizer que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos".

Na atividade de modelagem que descreve o decaimento radioativo do césio-137 em acidente ocorrido em Goiânia (GO) no ano de 1987, Silva & Vertuan (2009) apresentam diferentes modelos matemáticos que sob certo aspecto podem representar a situação-problema. Para tanto, os autores utilizam diferentes abordagens para desenvolver a atividade de modelagem por meio de diferentes conteúdos matemáticos — função exponencial, progressão geométrica e Equações Diferenciais Ordinárias —, para determinar a quantidade remanescente de césio-137 em Goiânia no ano de 2009, denotando diferentes interesses dos autores para a determinação de modelos matemáticos.

Na abordagem da função exponencial, os autores iniciam a dedução do modelo matemático por meio da construção de uma tabela (Tabela 1.1, apresentada na Figura 1.8) que apresenta a quantidade remanescente de césio-137 na cidade de Goiânia a cada 30 anos. Para construir essa tabela, os autores levam em consideração a hipótese de que a meia-vida[14] do césio-137 é de aproximadamente 30 anos, ou seja, a cada 30 anos a quantidade de césio-137 reduz pela metade. Ao utilizar desta hipótese, fica evidente que os autores apresentam o interesse de usar um modelo para se obter o modelo matemático da situação-problema. Ou seja, um conhecimento tido como 'científico' opera nas escolhas feitas pelos autores.

Como a quantidade inicial, em 1987 é de 19,26 g, após 30 anos (em 2017), a quantidade de césio-137 será 19,26/2 e, assim, sucessivamente. Nesta atividade, Q representa a quantidade

[14] Segundo a Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN), meia-vida é o tempo necessário para que a quantidade inicial de um elemento químico radioativo decaia para a metade.

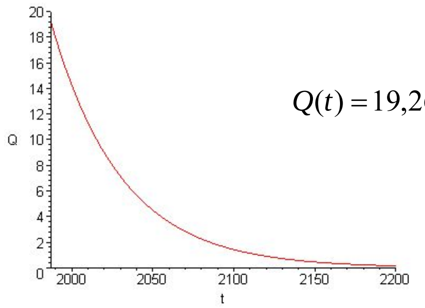
de césio-137 em Goiânia e t o número correspondente ao ano. O modelo matemático apresentado na Figura 1.8 foi escrito utilizando-se de diferentes sistemas de representação — uma tabela, um gráfico e uma expressão algébrica — que correspondem a diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático associado ao decaimento radioativo do césio-137.

Figura 1.8– Modelo matemático obtido na atividade de modelagem que descreve o decaimento radioativo do césio-137 utilizando função exponencial

Tabela 1.1- Quantidade de césio-137 no decorrer do tempo

Tempo (ano)	**Quantidade de césio-137** (gramas)
1987	19,26
2017	9,63
2047	4,815
2077	2,4075

Fonte: Tabela construída por Silva & Vertuan, 2009.



$$Q(t) = 19{,}26.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-1987}{30}}$$

Fonte: SILVA; VERTUAN, 2009.

A partir da sequência dos valores da quantidade de césio-137 apresentada na segunda coluna da Tabela 1.1 (da Figura 1.8), os autores fazem uma abordagem da situação por meio de progressão geométrica (PG) (Quadro 1.1), ressaltando o fato de que a PG é uma função exponencial com valores discretos. A variável dependente Q_n representa a quantidade de césio-137 em Goiânia na posição n e n ($n \in N$ e $n \geq 1$) representa a posição do ano na sequência que se inicia em 1987 e varia de 30 em 30 anos. Ou seja, n=1 corresponde ao ano de 1987, n=2 ao ano 2017, n=3 ao ano 2047 e, assim, sucessivamente.

Quadro 1.1– Modelo matemático obtido na atividade de modelagem que descreve o decaimento radioativo do césio-137 utilizando progressão geométrica

A quantidade inicial de césio-137 que foi liberada no acidente em Goiânia é de 19,26 g. Como esse material reduz-se pela metade a cada 30 anos, temos a sequência

$$(19{,}26, \quad 9{,}63, \quad 4{,}815, \quad 2{,}4075, \ldots)$$

que corresponde à quantidade de césio-137 nos anos de 1987, 2017, 2047, 2077, ... respectivamente.

[...]

Podemos notar que a partir da sequência, temos que

$$\frac{9{,}63}{19{,}26} = \frac{4{,}815}{9{,}63} = \frac{2{,}4075}{4{,}815} = \ldots = \frac{1}{2},$$

que corresponde a uma progressão geométrica (PG) de razão $q = \frac{1}{2}$.

[...]

Assim, o termo geral que define a situação em estudo é $Q_n = 19{,}26.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Fonte: SILVA; VERTUAN, 2009.

Uma terceira abordagem é apresentada por Silva & Vertuan (2009), em que para a obtenção do modelo matemático utilizam-se de Equações Diferenciais Ordinárias para desenvolver a atividade de modelagem (Quadro 1.2).

Quadro 1.2– Modelo matemático obtido na atividade de modelagem que descreve o decaimento radioativo do césio-137 utilizando Equações Diferenciais Ordinárias

O césio-137 decai a uma taxa proporcional à quantidade presente. Sabemos que inicialmente existem 19,26 g de césio-137 e, após 30 anos, o material perde metade de sua massa original. Assim, temos

$$\frac{dQ}{dt} = k.Q \Rightarrow dQ = k.Qdt \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = kdt \Rightarrow \frac{1}{Q}dQ = kdt \Rightarrow \int \frac{1}{Q}dQ = \int kdt$$

$$\ln Q = kt + c \Rightarrow e^{\ln Q} = e^{kt+c} \Rightarrow Q = e^{kt}.e^{c}$$

$$Q = c_1.e^{kt}, \text{ em que } c_1 = e^{c}. \qquad (1)$$

Para $t = 0$, temos que $Q = 19{,}26$ g. De (1), temos que $19{,}26 = c_1.e^{k.0} \Rightarrow 19{,}26 = c_1.1 \Rightarrow c_1 = 19{,}26$

Dessa forma, ficamos com $Q = 19{,}26.e^{kt}$. (2)

Além disso, temos que para $t = 30$ anos, $Q = \frac{Q_0}{2}$. Assim, obtemos de (2)

$$\frac{Q_0}{2} = 19{,}26.e^{30k} \Rightarrow \frac{19{,}26}{2} = 19{,}26.e^{30k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{30k} \Rightarrow e^{30k} = 0{,}5 \Rightarrow \ln e^{30k} = \ln 0{,}5$$

$$\Rightarrow 30k = -0{,}69 \Rightarrow k = \frac{-0{,}69}{30} = -0{,}023.$$

Portanto, o decaimento radioativo do césio-137 é dado pela expressão $Q(t) = 19{,}26.e^{-0{,}023.t}$

Fonte: SILVA; VERTUAN, 2009.

Todavia, se em uma análise *a posteriori* um modelo não for considerado pelo modelador como adequado para representar a situação em estudo, este pode ser submetido a reformulações e pode suscitar outras questões para além do que foi proposto. Com isso, diferentes conhecimentos podem ser elucidados, como na atividade do decaimento radioativo do césio-137, para lidar com a situação inicial, "servindo ao papel de oferecer argumentos para sustentar a introdução de um novo conceito" (BARBOSA, 2009, p. 77). Neste aspecto, D'Ambrosio (2009) argumenta que:

> Como os modelos fornecem somente aproximações do comportamento real, eles também podem ajudar a reformular e até mesmo formular novas hipóteses, preparando o terreno para novas teorias, mais apropriadas para lidar com a questão original. Então, modelos podem ser mais ou menos úteis, e são submetidos a reformulações, levando a melhores aproximações[15] (D'AMBROSIO, 2009, p. 91, Tradução nossa).

Neste caso, o papel do modelador se faz representativo porque este estabelece a mudança nos 'caminhos' a serem seguidos no delineamento do modelo matemático da atividade de modelagem. Além de que aspectos cognitivos relacionados ao problema e ao objeto matemático em questão se referem ao sujeito que lida com a atividade. Segundo Rodríguez Wilhelmi (2003, p. 5-6), "[...] os objetos matemáticos são manipulados por um indivíduo particular segundo certas necessidades técnicas ou teóricas[16]" (Tradução nossa). De modo geral, os interesses do modelador estão presentes na obtenção de um modelo matemático, ou seja, um modelo matemático é, segundo Barbosa (2009, p. 76), "sempre baseado sobre uma interpretação específica da realidade".

Um modelo matemático pode ser obtido por meio de uma atividade de Modelagem Matemática. Chevallard et al (2001) consideram que, na elaboração de um modelo matemático, um aspecto essencial da atividade matemática

> consiste em construir um modelo (matemático) da realidade que queremos estudar, trabalhar com tal modelo e interpretar os resultados obtidos nesse trabalho, para responder às questões inicialmente apresentadas. Grande parte da atividade matemática pode ser identificada, portanto, com *uma atividade de modelagem matemática* (CHEVALLARD et al, 2001, p. 50, grifo dos autores).

---

[15] Tradução de "Since models provide only approximations of the real behavior, they also may help reformulate hypotheses and even to formulate new ones, laying the ground for new theories, more appropriate to deal with the original question. Thus, models may be more or less useful, and are subjected to reformulations, leading to better approximations" (D'AMBROSIO, 2009, p. 91).

[16] Tradução de "[...] los objetos matemáticos son manipulados por un individuo particular según ciertas necesidades técnicas o teóricas" (RODRÍGUEZ WILHELMI, 2003, p. 5-6).

Sriraman & Lesh (2006) afirmam que a atividade matemática correspondente à modelagem é primeiramente uma atividade intencional em que ocorre a descrição, a explicação ou a conceitualização do que está sendo estudado. O modelo matemático, em atividades de modelagem, segundo Borromeo Ferri (2006), constitui uma representação externa à mente dos sujeitos, cujas declarações dos envolvidos estão em um nível matemático.

Com o intuito de introduzir e conduzir atividades em que os alunos externalizam representações em um nível matemático nas aulas, investigações e reflexões vêm sendo conduzidas por diferentes autores. Niss (1992), Blum & Niss (1991), Barbosa (2001), Bassanezi (2002), Almeida & Dias (2004), Legé (2005), Caldeira (2009), Silveira & Caldeira (2010), Klüber (2010), Almeida & Vertuan (2011a) são alguns desses autores.

Almeida & Vertuan (2011a) em discussão sobre ‘como fazer’ modelagem na sala de aula, evidenciam três aspectos que tratam de especificidades do encaminhamento das atividades:

> i) o espaço e a condução das atividades de Modelagem Matemática no currículo escolar e/ou nas aulas de Matemática; ii) a familiarização dos estudantes com atividades de Modelagem Matemática; iii) o que ‘compete’ ao professor e aos alunos em atividades de Modelagem Matemática (ALMEIDA; VERTUAN, 2011a, p. 23).

Dentre os aspectos elucidados por Almeida & Vertuan (2011a), a familiarização refere-se à atitude do aluno diante de atividades de modelagem. É por meio da familiarização que os alunos são colocados em contato com a modelagem de forma gradativa, fazendo-o sentir-se responsável pelo desenvolvimento da atividade. Com o foco na atribuição do significado por parte do estudante para o problema e o objeto matemático em estudo, análises concernentes a diferentes momentos de familiarização se fazem necessárias.

1.2 FAMILIARIZAÇÃO COM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

A implementação de atividades de Modelagem Matemática tem sido defendida por muitos pesquisadores da área de Educação Matemática. Aspectos relacionados ao papel do aluno como investigador (SANTOS; BISOGNIN, 2007, ALMEIDA; FERRUZZI, 2009); o desenvolvimento da capacidade de solucionar problemas oriundos do cotidiano (BISOGNIN; BISOGNIN; ALONSO RAYS, 2004); a motivação para a aprendizagem (BURAK, 2004, SANTOS; BISOGNIN, 2007); a realização de interações e trabalhos cooperativos (BORSSOI; ALMEIDA, 2004; ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, BISOGNIN; BISOGNIN; ISAIA, 2009, FERRUZZI, 2011); o desenvolvimento do conhecimento crítico e reflexivo (SKOSMOSE, 2001, BARBOSA, 2003, ALMEIDA; SILVA, 2004, ARAÚJO, 2007, 2009, OLIVEIRA; CAMPOS; SILVA, 2009, CALDEIRA; SILVEIRA; MAGNUS, 2011, ARAÚJO; FREITAS; SILVA, 2011, ARAÚJO, 2012), são alguns deles.

De forma geral, os alunos estão acostumados a resolver exercícios matemáticos. O exercício, conforme apontado por Ponte, Brocardo & Oliveira (2005) é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido. Atividades de Modelagem Matemática exigem de alunos e professores um envolvimento com o problema. Na maior parte dos casos, há a necessidade de se definir o problema a ser estudado. No entanto, o enfrentamento de sair de uma estabilidade pré-definida requer contato e 'colocar a mão na massa', ou seja, de experimentar o novo e saber como esse novo funciona. Nas palavras de Larrosa Bondía (2002, p. 21), "experiência é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca". A experiência, segundo Borromeo Ferri (2007, p. 2080) é um "fator de influência, razão pela qual as rotas[17] de modelagem podem ser diferentes[18]" (Tradução nossa), ou seja, conforme o modelador tem experiência com atividades de modelagem os 'caminhos' percorridos no desenvolvimento da atividade são diferentes.

Como afirma Larrosa Bondía (2002, p. 27), "[...] ninguém pode aprender da experiência de outro, a menos que essa experiência seja de algum modo revivida e tornada própria". Nesse sentido, o aluno precisa viver experiências com atividades de Modelagem Matemática a fim de aprender a desenvolvê-las. Bisognin & Bisognin (2012b), com o objetivo de investigar as influências das experiências com Modelagem Matemática na prática docente de participantes de um curso de mestrado, reforçam a necessidade da "introdução da Modelagem nos cursos de formação inicial e continuada e sua utilização nas disciplinas desses cursos, no sentido de proporcionar a vivência de diferentes experiências" (BISOGNIN; BISOGNIN, 2012b, p. 1065). Assim, conjecturamos a partir de Almeida & Dias (2004) que a familiarização do aluno com modelagem pode ser realizada gradativamente, caracterizando três diferentes

[17] Borromeo Ferri (2007) caracteriza rota de modelagem como um processo individual de modelagem em que o indivíduo caminha por diferentes fases da modelagem várias vezes ou apenas uma vez, focando em uma fase e ignorando outra.
[18] Tradução de "[...] factor influence, why modelling routes can differ" (BORROMEO FERRI, 2007, p. 2080).

'momentos'[19].

1.º momento: O aluno recebe do professor uma situação-problema em que os dados e as informações necessárias são apresentados, bem como o problema a ser investigado. O professor segue o encaminhamento orientando em ações como definição de variáveis e de hipóteses, simplificações, transição para a linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como em seu uso para a análise da situação e os alunos são co-partícipes nesse trabalho de modelagem.

2.º momento: Uma situação-problema é sugerida pelo professor aos alunos. Os alunos, por sua vez, divididos em grupos, sem a intervenção do professor complementam a coleta de informações para o desenvolvimento da atividade. Neste momento, a definição de variáveis e de hipóteses, a obtenção e validação do modelo matemático bem como seu uso para a análise da situação são de responsabilidade dos alunos. O que o segundo momento difere do primeiro diz respeito à autonomia do estudante no que se refere à definição dos procedimentos extramatemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação, cabendo ao professor orientar o encaminhamento das ações, quando solicitado.

3.º momento: Corresponde 'à vez dos alunos', divididos em grupos, de desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática. Neste momento, cabe a eles a identificação da situação-problema que pretendem desenvolver, a coleta e análise dos dados, as transições de linguagem, a identificação dos conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação. Além da comunicação desta investigação para a comunidade escolar.

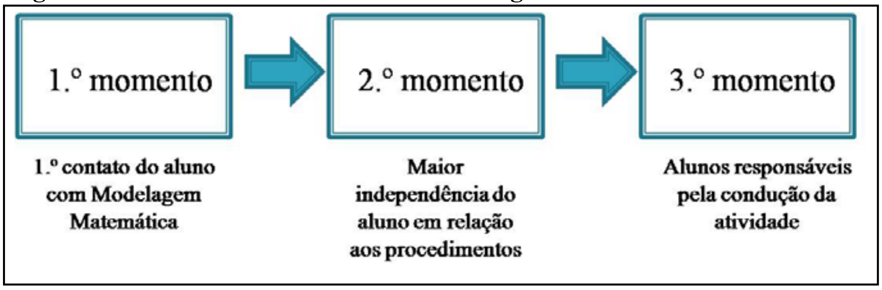
Quando o professor orienta e colabora com os alunos de forma mais intensa no primeiro e no segundo momentos, estes sentem confiança e autonomia para trabalhar uma situação-problema por eles escolhida, no terceiro momento, consolidando uma autoridade de tomar o 'problema como seu'. Com isso, buscam, por meio da matemática, uma solução para o

[19] A familiarização dos estudantes, configurada por meio de "três momentos", corresponde ao contado do aluno com a modelagem de forma gradativa, diferenciando dos "três casos" denominados por Barbosa (2001). Esses três casos estão configurados de acordo com a atribuição de ações para professor e/ou aluno no decorrer da atividade de modelagem, havendo relação explícita com a participação do professor na atividade (ALMEIDA; VERTUAN, 2011a).

problema que pretendem resolver.

Os diferentes momentos da Modelagem Matemática na sala de aula podem ser, em suma, esquematizados (Figura 1.9) como proposto por Almeida & Vertuan (2011a).

Figura 1.9- Diferentes momentos da Modelagem Matemática na sala de aula



Fonte: ALMEIDA; VERTUAN, 2011a, p. 28.

Introduzir atividades de Modelagem Matemática em sala de aula de forma gradativa seguindo os momentos não corresponde uma prescrição rigorosa. Existem várias experiências em que essa prática tem se mostrado adequada, pois o aluno, de forma geral, tem de desenvolver a 'habilidade de fazer modelagem'. Blum & Borromeo Ferri (2009, p. 45) afirmam que de fato é possível que os alunos aprendam a fazer modelagem desde que haja uma manutenção do "equilíbrio permanente entre orientação do professor e independência dos alunos"[20] (Tradução nossa).

No 3.º momento é que se caracteriza o 'fazer modelagem' por parte do aluno. Na busca por uma situação inicial (problemática) até a solução do problema, o conjunto de procedimentos pelos quais o aluno se envolve configura, estrutura e resolve a situação-problema. Para tanto, se faz necessário inteirar-se da situação, transitar entre linguagem natural e linguagem matemática, possibilitando a resolução, interpretação e validação da situação final. Almeida, Silva & Vertuan (2012) caracterizam esse conjunto de procedimentos considerando-os fases da Modelagem Matemática e as nomeia como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

A *inteiração* corresponde ao primeiro contato com a situação-problema que se pretende

[20] Tradução de "[…] a permanent balance between teacher's guidance and students' independence" (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009, p. 45).

estudar. É a busca por informações que possibilitarão vislumbrar o problema a ser estudado bem como as metas que orientam a sua resolução. O problema a ser estudado deve estar estruturado para o desenvolvimento da atividade de modelagem. No entanto, a inteiração não é limitada pela definição do problema, pois se houver necessidade de resgatar ou buscar novas informações para o 'deslanchar' da atividade, o aluno pode se inteirar do que se propôs a estudar.

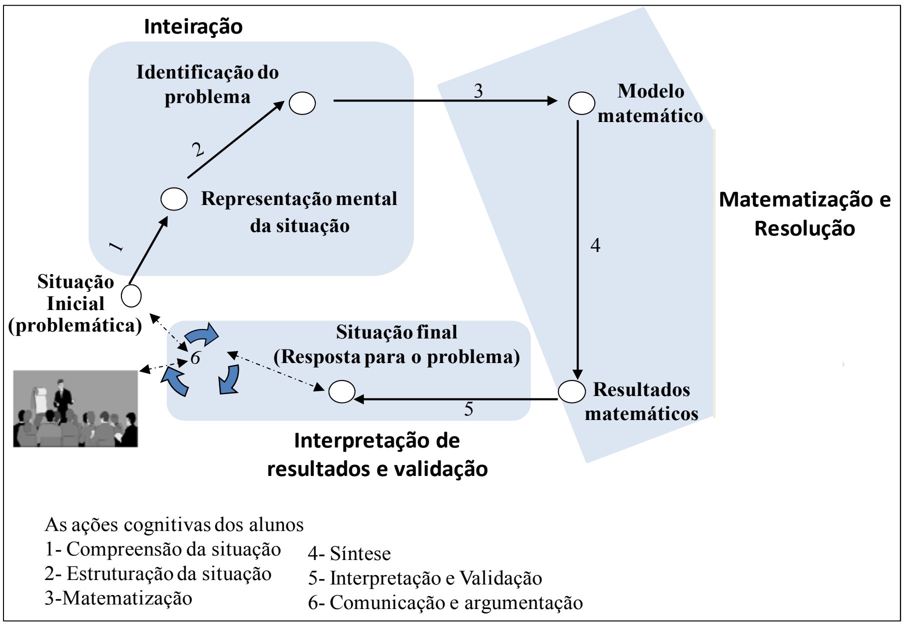
A situação-problema identificada e estruturada na fase de inteiração, de modo geral, se apresenta em linguagem natural e não parece diretamente associada a uma linguagem matemática e, assim, gera-se a necessidade da transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática). A busca e elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente estas características. Daí que a segunda fase da Modelagem Matemática é caracterizada por *matematização*, considerando estes processos de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas. Estas descrições são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de inteiração.

A *resolução* consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes desta situação, responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação e, mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo.

A *interpretação dos resultados* indicados pelo modelo implica na análise de uma resposta para o problema. A análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica em uma *validação* da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação.

As fases da Modelagem Matemática caracterizadas por Almeida, Silva & Vertuan (2012) constituem procedimentos necessários para a realização de uma atividade de modelagem. Elas podem não ocorrer de forma linear, pois a dinamicidade deste tipo de atividade possibilita movimentos de ida e volta. As fases da modelagem estão em consonância com as ações cognitivas dos alunos e podem ser agrupadas em um ciclo conforme apresentado no esquema (Figura 1.10) de Almeida, Silva & Vertuan (2012).

Figura 1.10- Fases da Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos



Fonte: ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 19.

A participação do aluno em relação ao desenvolvimento das diferentes fases da atividade de Modelagem Matemática intensifica-se e solidifica-se no decorrer dos diferentes momentos, pois nesse ‘caminhar’ diferentes experiências passam, acontecem e tocam os alunos. A concretização da responsabilidade de assumir uma situação-problema por eles próprios faz com que perpassem todas as fases de uma atividade de Modelagem Matemática no terceiro momento.

Utilizar atividades de modelagem em sala de aula de forma gradativa, seguindo algumas fases, de forma geral é defendido por muitos pesquisadores. Existem ainda pesquisas que apontam que atividades de modelagem proporcionam a atribuição de significado para objetos matemáticos e o uso de diferentes registros de representação semiótica. Estas pesquisas são apresentadas nas próximas seções.

1.3 O USO DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Dentre as pesquisas que tratam do uso de representações semióticas em atividades de modelagem na sala de aula, destacamos as realizadas por Vertuan (2007), Rosa (2009), Burak & Brandt (2010), Almeida & Vertuan (2010, 2011b). Esses autores utilizam como pressupostos teóricos a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Para se referir aos diferentes tipos de representação semiótica — língua natural, tabelas, gráficos, equações algébricas, figuras, entre outros —, Duval utiliza o termo 'registros de representação semiótica'. Esse autor destaca que a coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica é condição necessária para a compreensão dos objetos matemáticos. A coordenação não é uma atividade que ocorre naturalmente.

Por exemplo, na atividade do césio-137 abordada por meio de função exponencial e apresentada na Figura 1.8 diferentes registros de representação semiótica são associados ao objeto matemático 'função exponencial'. Para que ocorra a compreensão de tal objeto matemático é necessário que os alunos coordenem todos os registros de representação, ou seja, compreendam que todos esses registros — o registro tabular, o registro gráfico e o registro algébrico — correspondem ao mesmo objeto matemático — função exponencial. Além disso, é importante entender que esses registros de representação se complementam, pois um registro expressa características e propriedades do objeto matemático que não são expressas com clareza no outro registro. Por exemplo, o decrescimento da função que representa o decaimento radioativo do césio-137 que pode ser observado mais facilmente no registro gráfico do que no registro algébrico.

Vertuan (2007), Rosa (2009), Burak & Brandt (2010), Almeida & Vertuan (2010, 2011b) destacam o potencial das atividades de Modelagem Matemática no que diz respeito à compreensão dos objetos matemáticos que se fazem presentes nas situações investigadas a partir da coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica associados aos objetos.

Relações entre variedade de representações e criação de diferentes imagens conceituais relacionadas à construção de conceitos matemáticos por meio de atividades de modelagem matemática são abordadas por Bisognin & Bisognin (2011, 2012a).

Ao tratar de modelo como sendo um sistema conceitual, Lesh & Doerr (2003) afirmam que os significados associados a dado sistema tendem a ser distribuídos por meio de uma variedade de representações e que tais representações influenciam habilidades associadas ao significado e à compreensão de um determinado sistema conceitual e seus processos. Nesse sentido, pesquisas que tratam da construção de significado tanto para o objeto matemático como para a modelagem em si têm sido recorrentes. Na próxima seção destacamos algumas dessas pesquisas.

1.4 MODELAGEM MATEMÁTICA E CONSTRUÇÃO/ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADO

Pesquisas que de certa forma se remetem à construção de significados para diferentes fases da modelagem têm sido desenvolvidas por vários autores (CARREIRA; AMADO; LECOQ, 2011, BLOMHØJ; KJELDSEN, 2011, ALMEIDA, 2010).

Com o objetivo de detectar o significado atribuído no processo de matematização e, consequentemente, do modelo obtido, além de elencar as competências em modelagem de alunos de três turmas de Educação Adulta em Portugal, Carreira, Amado & Lecoq (2011) desenvolveram atividades de modelagem sobre o tema culinária. Os autores concluíram que dependendo do contexto abordado, os alunos atribuíam diferentes significados para a matematização que de forma geral, utilizavam o conteúdo matemático ‘proporção’.

Blomhøj & Kjeldsen (2011) ao abordarem as reflexões sobre competências em modelagem matemática por parte dos alunos envolvidos em um projeto, afirmam que o significado corresponde às reflexões internas dos alunos. Com o envolvimento em diversas situações nas quais a modelagem corresponde a uma perspectiva de ensino, o aluno estabelece dependência entre modelagem e modelo matemático. Ou seja, em toda atividade de modelagem, um modelo matemático é construído com o objetivo de responder a um problema. Para tanto, os autores propõem que os alunos “precisam ser expostos a situações didáticas que os desafiam a refletir e criticar o processo de modelagem e a função dos modelos em diferentes contextos[21]" (BLOMHØJ; KJELDSEN, 2011, p. 386, Tradução nossa).

Levando em consideração a importância dos signos para a conceitualização e consequentemente a construção de significados para objetos matemáticos, Almeida (2010), apoiada na semiótica peirceana, apresenta aproximações entre modelos matemáticos e metáforas no desenvolvimento de uma atividade de modelagem com alunos de um curso de licenciatura em Matemática. A autora conclui que o uso da linguagem sígnica relacionada à construção de modelos matemáticos e à produção de metáforas

> [...] desencadearam pensamento metafórico; e se este, por um lado, serviu de "impulso" para a construção do modelo, por outro lado, foi importante para a construção de significados em relação aos objetos (da realidade e da matemática) associados ao problema em estudo. Nesse sentido, as nossas reflexões sinalizam que podemos vislumbrar aproximações entre modelos, modelagem e metáforas que podem ser importantes para a significação, pelos alunos, de objetos matemáticos envolvidos nas atividades de uso e produção de modelos e metáforas (ALMEIDA, 2010, p. 410).

O trabalho de Carreira, Amado & Lecoq (2011) tem como foco a construção do significado para o processo de matematização que ocorre em atividades de modelagem; Almeida (2010) tem como foco o modelo matemático como uma metáfora na construção de significados para a realidade e para a matemática; Blomhøj & Kjeldsen (2011) apresentam a modelagem como foco de construção de significado, em que os alunos associam sempre a construção de um modelo matemático.

De forma geral, as pesquisas que se remetem à construção de significado para a modelagem têm como foco a atividade como um todo ou as fases de matematização e resolução.

Em nossa pesquisa, considerando que o 'problema' corresponde à etapa inicial do desenvolvimento de uma atividade de modelagem na fase de inteiração e que este é a base para todo o desenvolvimento da atividade, buscamos evidenciar a atribuição de significado por parte dos alunos para o problema quando estes experimentam atividades de modelagem de forma gradativa.

---

[21] Tradução de "they need to be exposed to didactical situations that challenge them to reflect upon and critique the modelling process and the function of models in different contexts" (BLOMHØJ; KJELDSEN, 2011, p. 386).

No entanto, em atividades de modelagem, mais do que definir um problema se faz necessário resolver o problema. Neste 'desenrolar', diferentes representações são utilizadas constituindo signos que sugerem, indicam ou representam objetos matemáticos, possibilitando a atribuição de significado para o objeto matemático.

Neste aspecto, configura-se o 'fazer modelagem' com vistas a enfocar o 'aprender a resolver problemas' e o 'aprender conceitos matemáticos'.

Para que seja possível evidenciar a atribuição de significados para o problema e para o objeto matemático, se faz necessário analisar as ações que consistem em signos que os alunos utilizam para sugerir, indicar ou representar o objeto do qual estão tratando. Ao abordar signos nos remetemos ao papel da Semiótica na produção de signos interpretantes nos quais há evidências de atribuição de significado para os objetos pelos intérpretes (alunos) frente ao desenvolvimento de atividades de modelagem.

CAPÍTULO 2 – SOBRE SEMIÓTICA PEIRCEANA E ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADO

“[...] não perguntamos o que realmente existe, apenas o que aparece a cada um de nós em todos os momentos de nossas vidas”
(PEIRCE, 2005, p. 22).

Neste capítulo apresentamos pressupostos teóricos referentes à Semiótica sob a abordagem do filósofo norte-americano Charles Sanders Peirce, ou seja, a semiótica peirceana. Também é foco de nossas intenções neste capítulo abordar como a semiótica pode ser inserida na análise da atribuição do significado para o objeto em estudo.

2.1SOBRE SEMIÓTICA PEIRCEANA: A CIÊNCIA DOS SIGNOS

O termo grego *Semeiotiké*, com o significado de doutrina dos signos, os signos da linguagem[22] foi introduzido em 1690, na filosofia pelo filósofo empirista inglês John Locke (1632-1704), em sua obra intitulada *Essay on human understanding*. Além de Locke, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) tratou a semiótica como doutrina dos signos ao escrever, em 1764, um tratado específico intitulado *Semiotik*. Todavia, delineamentos de ciência para a semiótica são esboçados a partir da metade do século XIX, abarcando três vertentes distintas: uma nos Estados Unidos (por Peirce), outra na antiga União Soviética (por Vygotski e Bakhtin) e a terceira na Europa Ocidental (por Saussure)[23].

Charles Sanders Peirce (1839-1914) — caracterizando a semiótica peirceana — utiliza o termo *Semeiotic* em seu sentido original, a partir da Lógica concebida como uma filosofia científica da linguagem. Segundo Santaella (2008b), a partir de 1857, Peirce preocupou-se com a organização de uma doutrina filosófico-analítica geral capaz de compreender as

[22] A linguagem é entendida como uma forma de comunicação e de significação.
[23] O foco deste trabalho consiste na semiótica peirceana desenvolvida por Peirce, neste sentido, delineamentos sobre as outras vertentes não são abarcados.

estruturas do conhecimento e, assim, passou a fundamentar a semiótica como a ciência dos signos, que tem por objetivo o exame dos modos de atribuição de significado e de constituição de conhecimento.

Para Peirce, o conhecimento consiste em um processo de interpretação, que utiliza de signos para ser evidenciado. A noção de signo para Peirce (2005) foi considerada tão ampla, que o signo não precisa ter uma natureza plena de linguagem, podendo ser uma mera ação ou reação, que verbaliza uma emoção ou sentimento.

O que se destaca na teoria de Peirce é a classificação de todos os tipos de signos com relação à função cognitiva. Tal classificação é complexa, pois leva em consideração um processo triádico de interpretação. Ao definir signo, Peirce (1972) estabelece uma relação entre três elementos: o representámen (ou fundamento[24] do signo), o objeto e o interpretante.

> Um signo, ou *representámen*, é algo que, sob certo aspecto ou algum modo, representa[25] alguma coisa para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa um signo equivalente ou talvez um signo melhor desenvolvido. Ao signo, assim criado, denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu *objeto*. Coloca-se no lugar desse objeto, não sob todos os aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que tenho, por vezes, denominado o *fundamento* do representámen (PEIRCE, 1972, p. 94, grifos do autor).

A base filosófica da concepção sígnica para Peirce é a fenomenologia. Segundo Santaella (2007, p. 2), a fenomenologia é “uma quase-ciência que investiga os modos como apreendemos qualquer coisa que aparece à nossa mente”. Assim, a base filosófica de Peirce é fruto da experiência, do que nos aparece à mente, de nossas vivências. Neste sentido, Santaella (2007, p. 7), alinhada aos estudos de Peirce, afirma que “o signo é um primeiro (algo que se apresenta à mente), ligando um segundo (aquilo que o signo indica, se refere ou representa) a um terceiro (o efeito que o signo irá provocar em um possível intérprete)”. O primeiro, o segundo e o terceiro a que Santaella se refere corresponde, respectivamente, aos elementos da tríade peirceana — signo, objeto e interpretante. Ao mencionar o intérprete,

---

[24] Conforme denotado por Santaella (2005, p. 43), “fundamento é uma propriedade ou caráter ou aspecto do signo que o habilita a funcionar como tal”.

[25] Para Peirce (2005, p. 61), representar consiste em “estar em lugar de, isto é, estar numa tal relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por alguma mente como se fosse esse outro”.

Santaella (2007) o relaciona à mente interpretadora[26] capaz de relacionar o signo com o objeto. Para Peirce (2005), o ser humano corresponde a uma mente interpretadora e somente reconhece o mundo pelo fato de representá-lo de alguma forma. O ser humano somente interpreta essa representação de mundo por meio de uma outra representação. A essa 'nova' representação, Peirce chama interpretante da primeira. O interpretante é algo que se cria na mente do ser humano (intérprete). O interpretante, segundo Santaella (2005, p. 43), "não é qualquer signo, mas um signo que interpreta o fundamento". É por meio da interpretação evidenciada no interpretante que o fundamento do signo revela algo sobre o objeto existente.

Essa relação de interpretação do objeto efetivada pelo signo e estabelecida pelo interpretante ocorre em um ciclo *ad infinitum*, pois um

> *Signo* é tudo aquilo que está relacionado com uma Segunda coisa, seu *Objeto*, com respeito a uma Qualidade, de modo tal a trazer uma Terceira coisa, seu *Interpretante*, para uma relação com o mesmo Objeto, e de modo tal a trazer uma Quarta para uma relação com aquele Objeto na mesma forma, *ad infinitum*. Se a série é interrompida, o Signo, por enquanto, não corresponde ao caráter significante perfeito (PEIRCE, 2005, p. 28, grifos do autor).

Essa assertiva parece indicar que o signo existe somente se puder representar, substituir algo diferente dele, pois o signo não é o objeto, ele está no lugar do objeto. Ao se remeter ao objeto, Peirce (2005, p. 48) o caracteriza como "uma coisa singular existente e conhecida ou que se acredita tenha anteriormente existido ou que se espera venha a existir [...]".

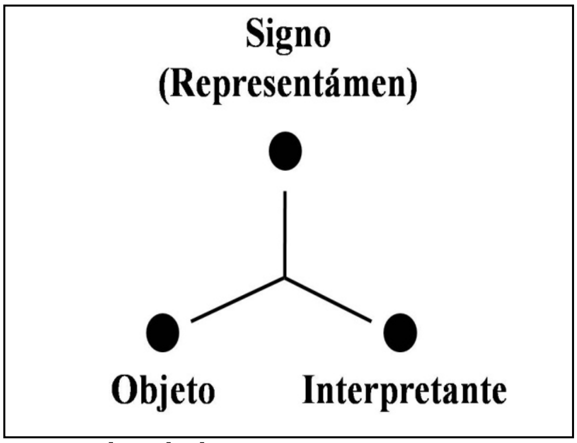
Ao mencionar que um objeto 'venha a existir', Peirce (2005) o relaciona à sua presença por meio de um signo. Essa existência só ocorre na presença de um outro — o intérprete, ou seja, "a ação do signo de 'estar no lugar de' só se completa se houver alguém (ou algo) capaz de interpretar essa relação" (ALMEIDA, 2010, p. 390). Neste sentido Peirce (1972), afirma que da relação entre signo e objeto resulta outro signo, o interpretante. Esse novo signo é um processo racional que se cria na mente do intérprete (ser humano). No entanto, o objeto é algo cujo conhecimento depende do signo e aquilo que é representado pelo signo.

Neste sentido, o signo corresponde a uma estrutura que sustenta objeto e interpretante (Figura

[26] A mente interpretadora não precisa ser necessariamente humana, pois máquinas, outros animais, células interpretam sinais (SANTAELLA, 2005).

2.1), apresentando-se com a função de mediação entre os dois elementos sígnicos, formando uma tríade do signo. Paradoxalmente, 'o signo é a tríade e parte dela'. Além de ser a tríade, é um elemento semiótico da tríade estabelecendo uma relação triádica.

Figura 2.1– Relação triádica do signo



Fonte: Adaptado de OTTE, 2006a, p. 22.

O signo é algo diferente do objeto, ele é determinado pelo objeto. O signo não possui capacidade de substituir o objeto, mas de estar no lugar dele. Santaella (2008a, p. 25) ao tratar da mediação do signo afirma que "a ação do signo ou autogeração só se consuma porque ele determina o interpretante (terceiro), que, sendo criado pelo signo, estará mediatamente determinado pelo mesmo objeto que determina o signo".

Como mencionado por Santaella (2008a), o interpretante é o terceiro elemento sígnico da tríade peirceana. O interpretante, como afirma Santaella (2007), corresponde ao "efeito interpretativo que o signo produz em uma mente real ou meramente potencial" (p. 23). A autora afirma que é preciso entender que "interpretante não quer dizer intérprete. É algo mais amplo, mais geral. O intérprete tem um lugar no processo interpretativo, mas este processo está aquém e vai além do intérprete" (SANTAELLA, 2007, p. 24). Neste sentido, Otte (2011, p. 315), chama a atenção para o fato de que as "pessoas são partes de um processo contínuo de interpretação e comunicação que se eleva acima do subjetivo[27]" (Tradução nossa).

Esse fato leva em consideração o papel do intérprete na tríade objeto-signo-interpretante caracterizada por Peirce, pois a ação de representação do objeto pelo signo é efetivada

[27] Tradução de "The persons are parts of an ongoing process of interpretation and communication that rises above the subjective" (OTTE, 2011, p. 315).

somente se houver alguém capaz de interpretá-la. Neste contexto, Peirce não estuda os signos, mas a *semiose*, um “processo no qual o signo tem um efeito cognitivo sobre o intérprete” (CP, 5.484, apud NÖTH, 2008, p. 66).

Os efeitos cognitivos exercidos pelo signo estão em consonância com o tipo de objeto ao qual o signo condiz para o intérprete — objeto imediato ou objeto dinâmico — que foram caracterizados por Peirce. O objeto imediato é aquele como é representado no signo e o objeto dinâmico, pela natureza, não é representado pelo signo, mas indicado por ele. Peirce (1972) afirma que cabe ao intérprete identificar o objeto dinâmico por meio de experiência colateral. Ao se remeter à experiência colateral, Peirce (1989, p. 61) refere-se “à intimidade prévia com aquilo que o signo denota”.

Quando observamos na tela do computador o gráfico de uma parábola, estamos observando um signo, que representa algo em lugar de outra coisa. Para um intérprete que tem experiência colateral no contexto matemático, o signo parábola pode representar uma função quadrática. Nesse caso, a função quadrática é o objeto dinâmico desse signo para este intérprete. Para um intérprete que não tem experiência colateral com função quadrática, o gráfico é um signo cujo objeto é imediato. Neste sentido, existem objetos imediatos de um signo que podem se tornar objetos dinâmicos à medida que o intérprete venha a se familiarizar, ou seja, segundo Santaella (2005, p. 45), “com que o intérprete deve ter tido ou ter experiência colateral ao signo para que o signo possa ser interpretado”. Por exemplo, uma fotografia do Cristo Redentor para um intérprete que não tenha visitado esta estátua no Rio de Janeiro é um signo cujo objeto é imediato; ao visitar a estátua do Cristo Redentor, esse objeto passa a ser, para esse intérprete, um objeto dinâmico. No entanto, segundo Trevisan & Carneiro (2009), existem signos que não se associam a um objeto dinâmico; por exemplo, a cidade de Pasárgada, ‘criada’ por Manuel Bandeira.

De forma geral, podemos considerar que o objeto imediato é de natureza sígnica e o objeto dinâmico[28] é aquilo que se pretende investigar. A possibilidade de investigação do objeto dinâmico se faz por meio da análise dos símbolos. Segundo Santaella (2008a), o signo em que o objeto imediato denotado corresponde ao objeto dinâmico é o símbolo. Isso ocorre

[28] No trabalho, ao mencionarmos objeto estamos nos referindo ao objeto dinâmico.

porque o símbolo "se faz representar no contexto de uma semiose particular, ou seja: tal como um determinado processo sígnico o torna conhecível" (SANTAELLA, 2008a, p. 42).

Na semiótica peirceana, a estrutura analítica de um signo pode sugerir, indicar ou representar o objeto dinâmico, dependendo da natureza do fundamento do objeto imediato. Tem-se com isso uma tricotomia peirceana em que se considera a relação do signo com o objeto: símbolo, índice e ícone.

Um ícone *sugere* ou *evoca* seu objeto, o fundamento do objeto imediato corresponde à qualidade que ele exibe e que se assemelha a outra qualidade. O ícone, no entanto, não tem conexão dinâmica com o objeto que representa. Suas qualidades se assemelham ao do objeto e provocam sensações parecidas na mente do intérprete que corresponde a uma semelhança. O atalho de um programa que aparece na área de trabalho de um computador é exemplo de um signo que na relação triádica com o objeto corresponde a um ícone. Esse signo sugere que tal programa está instalado nesse computador.

Um índice *indica* seu objeto, o fundamento do objeto imediato é permeado pela existência concreta. O índice está fisicamente conectado com o objeto, mas não estabelece relação com a interpretação da mente. A imagem registrada no cartão postal do Museu do Ipiranga é um índice, pois é o resultado de uma conexão de existência entre a imagem e o museu.

Um símbolo *representa* seu objeto, representa aquilo que a lei determina para que ele represente, ou seja, o objeto imediato de um símbolo representa o objeto dinâmico. O símbolo está conectado com o objeto relacionando-o com a mente usuária do símbolo e cumpre a função de designar o objeto com base em uma lei. Neste sentido, o símbolo, segundo Peirce (2005, p. 29), "só pode ser compreendido com a ajuda de seu interpretante". O brasão da Força Aérea Brasileira estampado na roupa de um oficial é um exemplo de símbolo, pois representa que este oficial é membro do comando da aeronáutica. Abordando o conceito de símbolo, Peirce (1972) argumenta que

> os símbolos se distinguem dos demais signos pelo seu caráter convencional. Esse convencionalismo, contudo, é acolhido em termos de 'Regras', admitidas pela comunidade que se vale dos símbolos. A linguagem, em especial, como se depreende, seria algo que caberia na categoria dos símbolos — em sentido peirceano (PEIRCE, 1972, p. 28).

Embora nem todo signo carregue consigo características de ícone, índice e símbolo, pois essas características têm relação com a experiência colateral do sujeito, é possível um signo ser ícone, índice e símbolo. Um exemplo que ilustra esse fato é a beca, traje especial utilizado por formandos no dia da formatura. A beca é um ícone porque sugere formatura, ou seja, é utilizada nessa ocasião; é um índice enquanto traje de uma pessoa, pois indica que esta pessoa é um formando e é um símbolo quando representa a formatura de alguém.

No contexto matemático, o gráfico de uma função é um exemplo de signo que, dependendo da experiência colateral do sujeito que entra em contato com esse signo, assume o papel de ícone, índice ou símbolo. O gráfico de uma função para uma pessoa que não tem conhecimento sobre função em matemática é um ícone, pois esse signo não passa de uma figura. Porém, é um índice quando a pessoa relaciona esse gráfico a algum conceito no contexto matemático. E é um símbolo quando a pessoa estabelece relações entre o gráfico e o objeto matemático que este representa.

Como o símbolo perde seu caráter de signo se não existir um interpretante, assume-se que por meio do símbolo relações com o objeto estabelecidas no interpretante podem ser evidenciadas. Isso ocorre porque o símbolo "se faz representar no contexto de uma semiose particular, ou seja: tal como um determinado processo sígnico o torna conhecível" (SANTAELLA, 2008, p. 42).

O que podemos ponderar é que por meio do símbolo relações com o objeto estabelecidas no interpretante podem ser evidenciadas. Neste sentido, Peirce (1989, p. 16) se remete ao significado "para denotar o pretendido interpretante de um símbolo".

2.2 SIGNIFICADO NA SEMIÓTICA PEIRCEANA

Discussões teóricas sobre a noção de significado (*meaning*) têm permeado pesquisas nas mais diversas áreas. Dentre as questões que são mais debatidas entre os pesquisadores destacam-se: O que constitui o 'significado'?; Significado pode ser descrito como a ação de significar? Embora possamos nos deparar com diversas teorias acerca da noção de significado, parece que esse assunto não se encontra esgotado.

Na semiótica peirceana, a atribuição de significado é o ponto principal da análise das categorias sígnicas, sendo citado por Peirce em diferentes circunstâncias. Peirce afirma que o "significado não é uma ideia[29] que o símbolo evoca na mente, mas consequência da conduta que gera nos homens (racionais)" (PEIRCE, 1972, p. 18); "*significado* deve envolver uma referência, a *intenção*" (PEIRCE, 1989, p. 16, grifo do autor); emprega o significado como "numa ideia de sentimento ou predominantemente numa ideia de atuar e ser atuado" (PEIRCE, 2005, p. 194); "significado é aquilo que é pretendido, seu propósito" (PEIRCE, 2005, p. 169); "significado é o interpretante declarado de um símbolo" (PEIRCE, 2005, p. 222); "significado de um termo é a concepção que ele veicula" (PEIRCE, 2005, p. 254).

Diante das diferentes circunstâncias em que o significado é inserido em seu vasto estudo sobre a Semiótica Peirceana, a semioticista brasileira Lucia Santaella (2008a) afirma que, embora Peirce tenha utilizado a palavra 'significado' em suas definições de signo, "nenhuma referência textual definitiva sobre o significado poderá ser encontrada em Peirce, visto que essa questão só se faz entender na medida em que se compreende a estrutura da teoria dos signos em geral e, mais especialmente, a dos interpretantes" (SANTAELLA, 2008a, p. 28).

Outros seguidores e estudiosos da teoria de Peirce, como Winfried Nöth e Michael Hoffmann fizeram uma leitura em que o significado é atribuído por meio do interpretante. Segundo Nöth (2008, p. 71), o interpretante corresponde à significação do signo, que por vezes, é caracterizado como "*significance*, significado, ou interpretação do signo" (grifo do autor). Hoffmann (2004, p. 198) afirma que a característica essencial da semiótica de Peirce na atribuição do significado para os objetos "é o papel do interpretante[30]" (Tradução nossa).

Em linhas gerais, na referência que faz à atribuição de significado, Peirce apóia-se no pragmatismo. Nos estudos realizados por Peirce, o pragmatismo foi formulado a partir de 1878 com a publicação de seu primeiro ensaio, intitulado *How to Make Ours Ideas Clear*, concebendo o pragmatismo como um método de reconstrução ou de explicação de significados de qualquer conceito, doutrina, proposição, palavra ou outro signo (PEIRCE, 2005, p. 194). Neste método, o procedimento adotado por Peirce para reconstruir ou explicar significados, consiste no estabelecimento de um conjunto de condições para uma dada

---

[29] Ideia, em sentido peirceano, é entendida como "qualidade ou evento ou signo" (PEIRCE, 2005, p. 194).
[30] Tradução de "[...] is the role of the interpretant" (HOFFMANN, 2004, p. 198).

situação na qual uma operação definida produziria um resultado definido. Ou seja, para determinar o que um conceito significa ou “para deixar claro o significado de uma ideia devemos tentar interpretar cada noção traçando suas consequências práticas” (PEIRCE, 1972, p.21). Por exemplo, para dizer que um objeto é duro, deveríamos tentar riscá-lo utilizando de diferentes substâncias e, com isso, chegar ao resultado: o objeto não é riscável pela maior parte das substâncias a ele aplicada. Dessa forma, o conceito ‘duro’ passaria a ter um significado pragmático preciso: ‘não ser riscável’.

Alinhados ao pragmatismo de Peirce, Costa & Silva (2011, p. 23) ponderam que nesse método o pensamento se “põe entre o objeto e seu significado”. O propósito do pensamento, segundo Santaella (2004), é o desenvolvimento de uma ideia. Como toda ideia é um signo, então o desenvolvimento de um signo deve ser utilizado para mediar o objeto e seu significado. No entanto, como afirmado por Peirce (1972, p. 18) devemos evidenciar que “o significado não é uma ‘ideia’ que o símbolo evoca na mente, mas consequência da conduta que gera nos homens (racionais)”. Essa conduta corresponde às consequências que o significado provoca numa mente interpretadora. Nesse sentido, Peirce (2005) argumenta que

> se o significado de um símbolo consiste em *como* poderia levar-nos a agir, é evidente que este ‘como’ não pode referir-se à descrição dos movimentos mecânicos que o símbolo poderia causar, mas deve ser entendido como referente a uma descrição da ação como tendo este ou aquele objetivo” (PEIRCE, 2005, p. 204).

Uma maneira de evidenciar essas consequências é analisar os símbolos produzidos pelos intérpretes para o mesmo objeto. Isso porque o símbolo representa o objeto dinâmico. Se ocorrerem mudanças significativas para os símbolos, possivelmente há um progresso na atribuição de significado para o objeto. Evidenciamos esse fato nas assertivas de Peirce (2005)

> O corpo de um símbolo transforma-se lentamente, mas seu significado cresce inevitavelmente, incorpora novos elementos e livra-se de elementos velhos (PEIRCE, 2005, p. 40).
>
> Um símbolo, uma vez existindo, espalha-se entre as pessoas. No uso e na prática, seu significado cresce (PEIRCE, 2005, p. 73).

Nessas assertivas também podemos evidenciar que a familiaridade com os símbolos possibilita um progresso no que tange ao ‘crescimento’ do significado para o objeto. Peirce

(1989), se remete à familiaridade e à experiência prévia quando trata da representação do objeto pelo signo.

> Para ler o signo, e distinguir um signo de outro, o que se faz necessário são percepções sutis e familiaridade com os concomitantes habituais de tais aparências, e com as convenções do sistema de signos. Para conhecer o objeto, o que é preciso é a experiência prévia desse objeto individual. O objeto de cada signo é um indivíduo [...] conhecer o interpretante, que é o que o signo ele próprio expressa, pode requerer o mais alto poder do raciocínio (PEIRCE, 1989, p. 61).

Nas abordagens sobre o significado feitas por Peirce (1989, 2005) encontramos uma referência que ele faz a um livro de Lady Victoria Welby no qual ela designa a existência de três modos de significado e que Peirce declara como mérito no quesito *O que é significado*. Para tanto, Welby toma como base o significado da palavra:

> Uma palavra tem significado para nós na medida em que somos capazes de usá-la para comunicar a outros o que sabemos e obter o saber que os outros procuram comunicar-nos. Esse é o mais baixo grau de significado. O *significado* de uma palavra é mais precisamente a soma total de todas as predições condicionais de que a pessoa que a usa *pretende* tornar-se responsável ou pretende negar. Essa *intenção* consciente ou quase-consciente no usar a palavra é o segundo grau do significado. Mas, para além das consequências a que se submete conscientemente uma pessoa que aceita uma palavra, existe um vasto oceano de consequências imprevistas que o aceitar a palavra põe em execução que não são meramente consequências de conhecimento, mas quiçá revoluções sociais. Ninguém pode saber o poder que uma palavra ou frase pode ter para mudar a face do mundo; e a soma destas consequências configura o terceiro grau do significado (PEIRCE, 1989, p. 59, grifos do autor).

A partir desses aspectos abordados sobre o significado, para um estudo sobre a semiose, no que diz respeito, à atribuição de significado para o objeto pelo intérprete fazemos uma transposição da teoria peirceana no que se refere aos símbolos produzidos pelos intérpretes, os interpretantes relacionados a esses símbolos, as consequências práticas e a familiaridade com os signos e os objetos envolvidos.

Para tanto, fizemos um levantamento de estudos que se remetem à semiótica peirceana no âmbito da Educação Matemática e destacamos alguns pesquisadores e resultados de pesquisas nessas linhas. Considerações sobre as pesquisas realizadas sobre semiótica na Educação Matemática são apresentadas na próxima seção.

2.3 SEMIÓTICA PEIRCEANA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: PESQUISAS REALIZADAS

Em Matemática aspectos relacionados à linguagem sígnica têm inquietado diversos estudiosos. Neste aspecto, a Semiótica, enquanto ciência da linguagem, ciência dos signos tem servido como referencial teórico para possibilitar reflexões sobre as diversas inquietações. Nesta seção apresentamos pesquisas que tratam da semiótica na Educação Matemática com vistas a mapear a disseminação desse pressuposto teórico na área.

A ênfase na ligação entre a linguagem matemática estruturada e o seu ensino no contexto escolar com o cuidado de se estabelecer o diálogo entre as diversas áreas do conhecimento, em concepções peirceanas é ressaltado em estudos realizados por Antonio Vicente Marafioti Garnica. Em seu artigo intitulado *Peirce's Mathematical Writings: an essay on primary arithmetic books as it relates to Mathematics Education*, Garnica (2001) aponta a teoria pragmática de Peirce como importante influência em questões educacionais, principalmente no que se refere ao entrelaçamento entre linguagem matemática estruturada e o seu ensino no contexto escolar, destacando o cuidado do estabelecimento de diálogo entre as áreas de conhecimento para abordar as operações matemáticas.

Michael Hoffmann, em comentário sobre os trabalhos publicados em edição especial do periódico *Educational Studiens in Mathematics* volume 61 de 2006, identifica diferentes perspectivas abordadas nos trabalhos no que diz respeito à Semiótica na Educação Matemática. Para tanto, o autor enquadra as perspectivas em quatro campos principais:

1. Discussões acerca do conhecimento matemático aprendido na escola, em que se faz necessário o uso de representações para que este se torne acessível. Nesta perspectiva, o conhecimento opera sistemas semióticos;
2. Pesquisas que têm o significado como problema central, desenvolvido em processos históricos e de aprendizagem, além de abordagens com relação à objetividade do significado em Matemática;
3. Um campo que trata dos aspectos epistemológicos da semiótica com relação à aprendizagem Matemática, que considera os signos como meios de conhecimento que tornam acessíveis os objetos matemáticos;
4. A dimensão social que leva em consideração o papel que os signos desempenham na comunicação e na interação e como o significado pode ser estabelecido cooperativamente.

Em síntese, as perspectivas encaminham-se no âmbito da Semiótica na Educação Matemática, levando em consideração a cognição que pode ser evidenciada por meio de semioses. Nos trabalhos apresentados nesta edição especial, Hoffmann (2006) entende que há casos em que se faz necessária a abordagem de duas ou mais perspectivas.

Um pesquisador que usa Semiótica como base para o estudo dos objetos matemáticos é Raymond Duval. Esse autor trabalha com diferentes registros de representação semiótica em atividades matemáticas (DUVAL, 1988, 1993, 1998a, 1998b, 1998c, 2003, 2004, 2006, 2011). Duval foi um dos precursores do uso da Semiótica na Educação Matemática. Ele desenvolveu a teoria dos Registros de Representação Semiótica. Duval (2006) considera que a Matemática é o domínio privilegiado em que diferentes formas de representação semiótica podem ser utilizadas. Com isso, busca esclarecer que os maiores problemas na aprendizagem da Matemática estão relacionados ao fenômeno de congruência dos diferentes sistemas utilizados, ou seja, a dificuldade está em passar de um tipo de representação a outro. Duval argumenta que as análises das produções matemáticas exigem ferramentas de análises semióticas complexas e adaptadas aos processos cognitivos mobilizados em toda atividade matemática.

Steinbring (2006) ressalta que o conhecimento matemático não pode ser traduzido e interpretado por uma mera leitura de signos, símbolos ou princípios. É preciso que a leitura seja carregada de experiência e conhecimento implícito, isto é, não podemos entender os signos sem alguns pressupostos de tal conhecimento e de atitudes e maneiras de utilizá-lo. Para o autor, signos matemáticos e símbolos têm papel decisivo na codificação, construção e comunicação do conhecimento matemático.

D'Amore (2006) discute o problema da ontologia e do conhecimento do objeto matemático. Com isso, chama a atenção para o problema da representação do objeto e seu sentido. Segundo D'Amore (2006), a passagem da representação de um objeto matemático para outra, por meio de transformações no sistema de representação, conserva o significado do objeto mesmo, mas em certas ocasiões pode mudar seu sentido.

Além das perspectivas apresentadas por Steinbring (2006), a semiótica peirceana também se localiza no campo da construção do significado e pode estar entrelaçada a aspectos epistemológicos que abordam os signos como meios de conhecimento em que os objetos matemáticos são possíveis. Há autores que tomam como base teórica a semiótica peirceana no desenvolvimento de estudos na Educação Matemática. Há estudos de natureza teórica e de natureza aplicada envolvendo semiótica peirceana e Educação Matemática. Pesquisas embasadas na tríade dos signos da semiótica peirceana, bem como o estabelecimento de tríades a partir dos estudos de Peirce, são desenvolvidas por autores como Sáenz-Ludlow (2006), Berger (2010) e Manechine & Caldeira (2010).

Ao tratar da riqueza matemática, entendida como um produto do próprio trabalho matemático do aluno, potencializada pelo discurso matemático, Sáenz-Ludlow (2006) sugere a existência de uma relação triangular entre interpretação, objetivação e generalização. A autora argumenta que o discurso matemático é um importante meio na objetivação semiótica para aumentar a riqueza matemática do aluno; acrescenta, ainda que professores com diferentes perspectivas teóricas em Educação Matemática influenciam na direção do discurso matemático em sala de aula e, com isso, no crescimento da riqueza matemática de seus alunos.

No estudo de um problema matemático usando um Sistema de Álgebra Computacional (CAS) com alunos universitários, Berger (2010) defende que um quadro semiótico pode apoiar ou limitar a atividade matemática. O fazer e o aprender matemática são entendidos como um comportamento semiótico. Neste estudo, é utilizada a noção do signo triádico (objeto-signo-interpretante) de Peirce em que o uso do CAS possibilita mudar o *representámen* no estudo de um objeto matemático para ajudar o estudante a produzir vários interpretantes para esse objeto. Os interpretantes baseados em diferentes *representámens* permitem um acesso epistemológico ao objeto.

Em uma análise semiótica peirceana com relação à construção/representação de signos-pensamento desenvolvidos por alunos das séries iniciais da Educação Básica, Manechine & Caldeira (2010) estabelecem a tríade pedagógica Sentir-Perceber, Relacionar e Conceituar (S-P/R/C). Para o desenvolvimento dessa tríade, as autoras abordaram o processo de semiose definido por Peirce na tríade de signos (Objeto, Representámen e Interpretante) e se pautaram na análise das inferências dos alunos em nível perceptível, indutível e dedutivo.

Estudos que de alguma forma remetem às categorias fenomenológicas[31] (primeiridade, secundidade e terceiridade) e à classificação dos signos estabelecida por Peirce são desenvolvidos por autores como Lakoff & Núñez (2000), Kehle & Cunningham (2000), Carreira (2001), Lakoff & Johnson (2002), Kehle & Lester (2003), Cunningham & Kehle (2003), Otte (2006a, 2006b), Bolite, Acevedo & Font (2005), Williams & Wake (2007), Almeida (2010), Almeida, Silva & Vertuan (2011) e Almeida & Silva (2012) no intuito de evidenciar a construção do significado.

Analisando que na teoria de Peirce há de maneira implícita um modelo geral de cognição e investigação relacionado à aprendizagem, Cunningham & Kehle (2003) examinam empiricamente por meio de uma 'lente' semiótica algumas características utilizadas na resolução de problemas matemáticos.

Em relação à classificação dos signos sugerida por Peirce, Otte (2006a) entende que a cognição e o efeito transformador dos signos sobre o ensino conduzem as pessoas envolvidas a um processo de pensamento mais generalizado sobre a atividade matemática. O autor esclarece que os conceitos matemáticos não se encontram independentes de representações, no entanto, tais conceitos não devem ser confundidos com representações particulares.

Ao trabalhar com demonstração matemática, fazendo uma distinção entre provas que demonstram e provas que explicam, Otte (2006b), seguindo Peirce, sugere que não há separação entre ideia e símbolo. Explicar é exibir o sentido de alguma coisa por meio de signos.

Ao situar a metáfora como signo icônico no âmbito da Educação Matemática, Lakoff & Johnson (2002) argumentam que a metáfora conceitual consiste na conceitualização de um domínio em termos de outro, muitas vezes de modo inconsciente, mas percebendo uma interseção de significados. Neste sentido, para Lakoff & Núñez (2000), as metáforas geram uma relação conceitual entre um "domínio base" e um "domínio alvo", projetando propriedades e inferências do "domínio base" no "domínio alvo".

---

[31] As categorias fenomenológicas na semiótica peirceana correspondem a tudo que aparece à percepção e à mente, levando-se em consideração as experiências passadas. Peirce denotou suas categorias fenomenológicas em: Primeiridade (*firstness*), Secundidade (*secondness*) e Terceiridade (*thirdness*). Abordagens amplas com relação a essas categorias podem ser encontradas em Peirce (1972, 1989, 2005).

Para Bolite, Acevedo & Font (2005), é o fato de as metáforas conectarem diferentes sentidos ou diferentes ‘conhecimentos’ que as torna essenciais para que as pessoas produzam significados. Segundo os autores, com a perspectiva de produzir significado em Matemática, podem ser usados dois tipos de metáforas: as que têm por objetivo relacionar situações não matemáticas com a matemática e as que tratam de diferentes domínios, mas ambos de natureza matemática.

Carreira (2001), Williams & Wake (2007), Almeida (2010), Almeida, Silva & Vertuan (2011) e Almeida & Silva (2012) apresentam resultados relacionados à categorização dos signos na semiótica peirceana em atividades de modelagem. Algumas considerações são apresentadas no próximo capítulo.

Em nossa pesquisa, nos valemos da semiótica peirceana para buscar evidências da atribuição de significados para o problema e o objeto matemático em atividades de Modelagem Matemática. A atribuição de significado a que nos referimos é realizada por um intérprete, que em nosso caso, corresponde ao aluno. Neste sentido, levamos em consideração os interpretantes produzidos pelos intérpretes que utilizam de símbolos para atribuir significado para o objeto. Os símbolos estabelecem uma relação de mediação entre significado e interpretante.

No capítulo 3 apresentamos os aspectos metodológicos que sustentam a viabilização de nossa pesquisa.

CAPÍTULO 3 – NOSSA PESQUISA

"Os métodos expandem e ampliam a nossa perspectiva da vida estudada e, assim, estendem e aprofundam aquilo que aprendemos dela e sobre ela" (CHARMAZ, 2009, p. 31).

Inicialmente apresentamos um mapeamento de pesquisas realizadas no âmbito da semiótica e da modelagem para em seguida elucidarmos uma articulação semiótica da Modelagem Matemática com foco na atribuição de significados para os objetos em estudo — o(s) problema(s) elucidado(s) e o(s) objeto(s) matemático(s) abordado(s) — que são vislumbrados nesta pesquisa.

A opção metodológica baseia-se nas considerações da pesquisa qualitativa. A análise dos dados é inspirada na proposta metodológica da Teoria Fundamentada (*Grounded Theory*) baseada, principalmente, nas indicações de Kathy Charmaz (2006, 2009).

Na sequência apresentamos como se deu a coleta de dados, os sujeitos da pesquisa, o desenvolvimento das atividades de modelagem e a condução das análises.

3.1MODELAGEM MATEMÁTICA E SEMIÓTICA PEIRCEANA: PESQUISAS REALIZADAS

Em linhas gerais já foram desenvolvidos trabalhos que, de alguma forma, se remetem à Modelagem Matemática e à Semiótica Peirceana. Esses trabalhos refletem uma crescente preocupação no que tange à análise da semiose envolvida em atividades de modelagem, principalmente relacionada às categorias fenomenológicas. Dentre as pesquisas, nos remetemos às realizadas por Kehle & Cunningham (2000), Carreira (2001), Kehle & Lester (2003), Williams & Wake (2007), Silva (2008), Almeida (2010), Almeida, Silva & Vertuan (2011), Almeida & Silva (2012).

Kehle & Cunningham (2000), para analisar o comportamento de alunos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática relacionam os tipos de raciocínio (abdução, indução e dedução) estabelecidos por Peirce com as diferentes etapas de uma atividade de Modelagem Matemática. Os autores então classificam as etapas do que consideram como uma atividade cognitiva em vários modos de inferência.

Em pesquisa desenvolvida por Kehle & Lester (2003) além dos modos de inferência — abdução, indução e dedução — (estabelecidos por Peirce) no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, os autores levam em consideração as categorias fenomenológicas — Primeiridade, Secundidade e Terceiridade — para analisarem o comportamento dos alunos quando desenvolvem atividades de Modelagem Matemática.

Ao abordar a metáfora entendida como signo icônico na semiótica de Peirce, Almeida (2010) apresenta possíveis aproximações entre modelos matemáticos e metáforas em atividades de modelagem.

Carreira (2001), ao tratar de possíveis semelhanças entre modelos e metáforas, apresenta suas argumentações a partir de duas questões: Um modelo matemático é uma metáfora? A modelagem matemática é um processo equivalente ao processo de produção de uma metáfora? Na estruturação de reflexões sobre essas questões, a autora assevera que a metáfora é necessária para a construção do modelo; o modelo é o que resulta, efetivamente, após a produção das metáforas.

Ainda no campo de estudo sobre metáforas como um tipo de ícone na semiótica peirceana, Williams & Wake (2007), afirmam que o significado de um modelo é gerado de forma recursiva, por meio de recorrências a outros domínios, a outras representações e sob a influência deste tipo de metáforas. Nesse sentido, a atividade de modelagem possibilita a organização e a elaboração de signos, isto é, a generalização do conhecimento em sistemas semióticos

A partir de uma análise documental de atividades de Modelagem Matemática existentes na literatura, Silva (2008) estabelece algumas relações entre Modelagem Matemática e Semiótica, no que diz respeito à categorização dos signos estabelecida por Peirce e aos modos de inferência — abdução, indução e dedução.

Em trabalho envolvendo Semiótica e Modelagem Matemática, Almeida, Silva & Vertuan

(2011) inferem que há ações que são ‘primeiras’, ações que são ‘segundas’ e ações que são ‘terceiras’ durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, em sintonia com as categorias fenomenológicas Primeiridade, Secundidade e Terceiridade caracterizadas por Peirce. Na análise dos níveis de relações estabelecidos pelos signos e efetivados pelos alunos, os autores observam as relações ou generalizações conceituais emitidas pelos alunos durante suas ações, possibilitando observar elementos indicativos do pensar refletido nas representações apresentadas para o fenômeno em estudo.

Almeida & Silva (2012) sinalizam o potencial que atividades de modelagem têm para desenvolver diferentes tipos de raciocínio (abdução, indução e dedução) abordados por Peirce e diferentes ações cognitivas nos estudantes. As autoras concluem que os tipos de raciocínio ativados em uma atividade de Modelagem Matemática estão associados às ações cognitivas dos alunos durante as transições entre as diferentes fases do desenvolvimento da atividade.

Nas pesquisas as quais tivemos acesso e nas quais nos pautamos para estabelecer uma articulação entre Modelagem Matemática e Semiótica Peirceana, denotamos que um estudo voltado para a atribuição de significado para o objeto elucidado no contexto da modelagem se faz necessário. É neste aspecto que pautamos nossa pesquisa e delineamos articulações entre modelagem e semiótica.

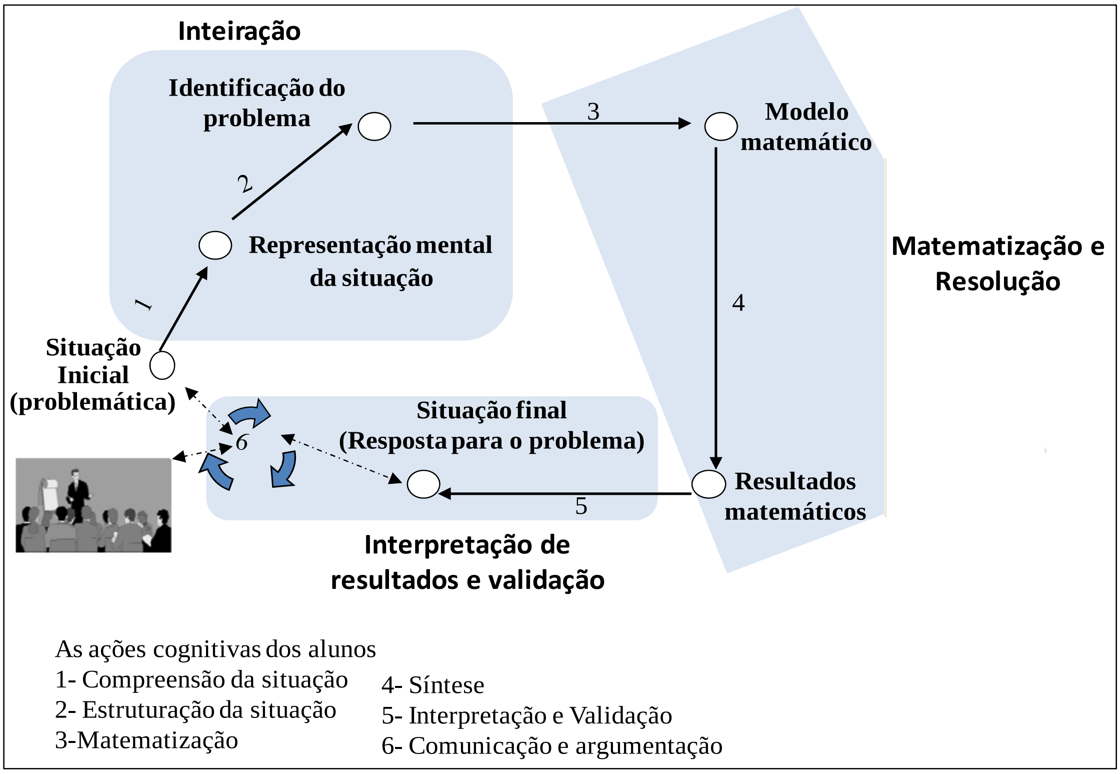
3.2 ARTICULAÇÕES ENTRE SEMIÓTICA E MODELAGEM MATEMÁTICA NESTA PESQUISA

Atividades de Modelagem Matemática possibilitam contatos de forma implícita ou explícita com situações-problema que refletem interesses dos alunos. Em linhas gerais, esse ‘contato’ ocorre por meio de signos que permeiam toda a situação-problema que se investiga. Esses signos podem indicar, sugerir ou representar os objetos de tal situação. O que buscamos, com isso, é uma interpretação semiótica em Modelagem Matemática.

Mas em que consiste uma interpretação semiótica em Modelagem Matemática? Em sentido peirceano, segundo Santaella (2005), a interpretação “se refere ao processo inteiro de geração dos interpretantes” (p. 43). Neste contexto, fazer uma interpretação semiótica em Modelagem Matemática é investigar o processo de geração de interpretantes das atividades de modelagem. Tais interpretantes são gerados pelas mentes interpretadoras dos intérpretes envolvidos na atividade.

Como abordado no Capítulo 1, os diferentes ciclos de modelagem existentes na literatura, deixam evidente que o problema a ser estudado constitui a gênese de uma atividade de modelagem. Para tanto, tratar o problema como um objeto a ser investigado e o significado a ele atribuído, constitui um dos focos do nosso trabalho. Segundo Almeida, Silva & Vertuan (2012), de forma geral, o problema é identificado na fase de inteiração, ou seja, no primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar. Com isso, 'um olhar' para as diferentes fases de desenvolvimento de uma atividade de modelagem como caracterizado por Almeida, Silva & Vertuan (2012) pode ser realizado no sentido de entender se a atribuição de significado para o problema pode ser evidenciada na inteiração. Com o intuito de elucidar as fases de modelagem reapresentamos o esquema (Figura 3.1) proposto pelos autores acima referenciados e que consiste em um pano de fundo para nosso entendimento em relação ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem.

Figura 3.1- Fases da Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos



Fonte: ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 19.

Alinhadas às ideias de Almeida, Silva & Vertuan (2012) de que em atividades de modelagem há de se considerar a intencionalidade dos alunos no quesito da escolha da situação-problema e, consequentemente, do problema a ser estudado, e que essa intenção pode, segundo Peirce (1989) ser considerada uma referência para a atribuição de significado, a análise dos interpretantes produzidos pelos alunos no que concerne a escolha da situação-problema e a definição do problema devem permear a nossa investigação.

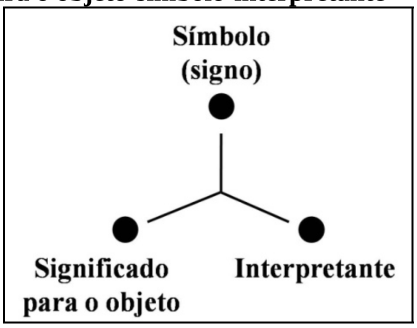
Para se chegar à resposta para o problema que, de forma geral, é apresentada nas fases de interpretação de resultados e validação, o intérprete envolvido na atividade perpassa as fases de matematização e resolução, em que conteúdos matemáticos se fazem necessários. Ao entendermos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica, o enfoque ‘resolução de um problema’ é importante para o ensino e a aprendizagem da matemática. Por isso, evidenciar a atribuição de significado para os objetos matemáticos que emergem em uma atividade de modelagem constitui foco de análise.

Em linhas gerais, para a investigação do objeto de estudo – o problema –, em uma atividade de modelagem, os alunos utilizam de diferentes signos que se remetem a objetos matemáticos. Quando nos referimos a signos temos em mente o signo símbolo que representa o objeto. Neste sentido, a atribuição de significado para problema e objeto matemático é revelada pelos símbolos. Considerando que os símbolos só podem ser compreendidos com a ajuda de interpretantes (PEIRCE, 2005, p. 29), ou seja, o símbolo perde seu caráter de signo se não existir um interpretante, então temos que ter acesso aos interpretantes criados pela mente interpretadora do intérprete que desenvolve a atividade. Como destacado por Peirce (1989), quando os símbolos mudam, o significado cresce.

Em sentido peirceano, de modo geral, há evidências de atribuição de significado para o objeto por meio de: *familiaridade* que o intérprete possui com o dado objeto, se este já faz parte de sua realidade ou contexto; na *intenção* de significar o objeto, em que ocorre, a partir de uma referência, uma articulação deste objeto com o contexto em que este é utilizado; como uma *ideia* que se remete ao objeto, de atuar e ser atuado; como *consequência* futura para abarcar o objeto, em que as consequências práticas estabelecem destaque entre pensamento e ação; por meio de *experiência colateral* com o objeto, ou seja, da intimidade prévia com aquilo que o signo denota.

Na teoria Semiótica de Charles Sanders Peirce, em uma tríade dos signos, o signo corresponde a uma mediação entre objeto e interpretante. Em nossa pesquisa, temos como foco o significado que os intérpretes, por meio de interpretantes, atribuem a objetos representados por símbolos. Neste sentido, levamos em consideração os interpretantes produzidos pelos intérpretes que utilizam de símbolos para atribuir significado para o objeto. Para tanto consideramos que os símbolos estabelecem uma relação de mediação entre significado para o objeto e interpretante (Figura 3.2).

Figura 3.2 – Relação triádica entre significado para o objeto-símbolo-interpretante



Fonte: Figura elaborada pela pesquisadora.

É por meio desta tríade que fazemos uma interpretação semiótica de atividades de modelagem com vistas a identificar atribuição de significado para o objeto.

Levando em consideração as assertivas de Peirce (1972), de que os elementos de todo conceito inserem-se no campo lógico do pensamento, por meio da percepção, e esses se projetam pela ação, intentamos em investigar uma tríade de ações dos alunos envolvidos em atividades de modelagem para poder identificar os interpretantes que produziram a partir dos símbolos estabelecidos para a atribuição do significado. Para tanto, nos baseamos na tríade pedagógica Sentir-Perceber/Relacionar/Conceituar proposta por Manechine & Caldeira (2010) em consonância com o dinamismo do processo de semiose definido por Peirce. As autoras entendem as relações Sentir-Perceber/Relacionar, como propulsoras de sentidos expressos por interpretantes em primeiridade proposta por Peirce. Da relação triádica signo-objeto-interpretante as autoras destacam o nível Sentir/Perceber. A partir da "rede-de-percepções", apontam informações sobre o objeto chegando a possíveis formulações sígnicas no nível Perceber/Relacionar. O nível Conceituar é decorrente da série interpretativa, constituindo o interpretante de maior significado para o objeto, podendo ser considerado em nível de terceiridade (geração de interpretantes tendendo à simbolização).

A tríade de ações que propomos para nossa pesquisa é constituída por Perceber, Agir e Significar. A percepção, segundo Peirce (2005, p. 307) “é a possibilidade de adquirir informação, de significar mais”. Em uma atividade de modelagem, ao se obter informações (*Perceber*) sobre o problema ou objeto matemático envolvido no desenvolvimento da atividade, os alunos buscam *Agir* sobre tais percepções para poder *significar* (atribuir significado) o objeto em questão.

Inferências sobre a atribuição de significado para o que consiste uma atividade de modelagem pode estar relacionada à familiaridade que os alunos têm com esse objeto ‘atividades de modelagem’. Como descrito no Capítulo 1, o ‘fazer’ modelagem se constitui com a familiaridade dos alunos com atividades de modelagem que pode ocorrer de forma gradativa, segundo os momentos já estabelecidos em Almeida & Dias (2004). A familiaridade para Peirce (1989) possibilita aos alunos distinguir um signo de outro para conhecer o objeto.

Tomando por base essa discussão teórica, reapresentamos o problema de nossa pesquisa.

3.3 PROBLEMA DE PESQUISA

Levando em consideração os signos produzidos pelos alunos quando envolvidos em atividades de modelagem, o nosso problema de pesquisa, como apresentado na *Introdução*, consiste em investigar: **Como emergem os signos interpretantes nas diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática?**

Com a intenção de apresentar reflexões a respeito deste problema, orientamos nosso ‘olhar’ por meio das questões específicas:

1. Em atividades de Modelagem Matemática, que signos são produzidos pelos alunos em relação ao problema que emerge dessa atividade?
2. Que relações existem entre os signos interpretantes produzidos pelos alunos para o objeto matemático e para o problema em estudo em atividades de Modelagem Matemática?
3. A produção de signos interpretantes para o problema se modifica com a

familiarização do aluno com atividades de Modelagem Matemática? De que forma?

Para tanto, investigamos algumas ações do intérprete que sinalizam atribuição de significado para o problema e o objeto matemático durante as fases de desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e durante a familiarização com atividades de Modelagem Matemática.

Para orientar nossas reflexões, levando em conta as considerações enunciadas em 3.2, nos baseamos nos pressupostos teóricos sobre Modelagem Matemática como alternativa pedagógica apresentados no Capítulo 1, e sobre a Semiótica Peirceana com foco nos signos interpretantes produzidos pelo intérprete, que abordamos no Capítulo 2.

3.4 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Com o objetivo de evidenciar a atribuição de significados para o problema e para o objeto matemático que emergem em atividades de Modelagem Matemática, analisamos atividades desenvolvidas por alunos do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática. Para tanto definimos uma abordagem de cunho qualitativo. Na concepção de Garnica (2004),

> o adjetivo "qualitativa" estará adequado às pesquisas que reconhecem: (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, se vale de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2004, p. 86).

Os instrumentos adotados para a obtenção dos dados seguem tendências da pesquisa predominantemente qualitativa, cuja preocupação incide mais no processo do que no produto. Uma vez determinada a questão de pesquisa, os elementos de estudo e o desenvolvimento do trabalho, se fez necessária a codificação dos dados. Esta codificação baseia-se nas indicações de Kathy Charmaz (2006, 2009) que aborda a Teoria Fundamentada. A Teoria Fundamentada é um método que se baseia em dados sistematicamente coletados e analisados. A codificação na Teoria Fundamentada é analítica e "exige uma parada para que possamos questionar de modo analítico os dados que coletamos” (CHARMAZ, 2009, p. 67). Segundo Charmaz (2009):

> Codificar significa categorizar segmentos de dados com uma denominação concisa que, simultaneamente, resume e representa cada parte dos dados. Os seus códigos revelam a forma como você seleciona, separa e classifica os dados para iniciar uma interpretação analítica sobre eles (CHARMAZ, 2009, p. 69).

A codificação possibilita problematizar os signos produzidos pelos alunos para que seja possível apresentar uma análise para a atribuição de significado par ao objeto. As etapas de codificação que geralmente são abordadas na Teoria Fundamentada são: codificação inicial, codificação axial e codificação focalizada.

A codificação inicial é a primeira etapa do processo de codificação de dados. Nela os dados são estudados rigorosamente por meio de fragmentos. Os fragmentos podem ser palavra por palavra, linha a linha e incidente por incidente. Os códigos, nesta fase, podem corresponder a ações, como proposto por Charmaz (2009, p. 74), “codificar com palavras que reflitam a ação”.

A codificação axial é uma etapa intermediária entre a codificação inicial e a codificação focalizada. Ela é necessária devido à existência do grande volume de conceitos originários da codificação inicial. Nessa etapa analisam-se os conceitos selecionados, faz-se uma reorganização de tais conceitos e destes extrai-se uma ideia central e suas subordinações. Com esta etapa, define-se codificação e busca-se validar ou não o processo.

> A codificação axial relaciona categorias a subcategorias, especifica as propriedades e dimensões de uma categoria, e reúne os dados que foram quebrados durante a codificação inicial para dar coerência à análise emergente[32] (CHARMAZ, 2006, p. 60, Tradução nossa).

Para Cassiani, Caliri & Pelá (1996, p. 82), a codificação axial corresponde a um “meio que auxilia o pesquisador a realizar a integração das categorias”. Para essas autoras, o objetivo principal é reunir os dados e elaborar conexões entre categorias e subcategorias para

---

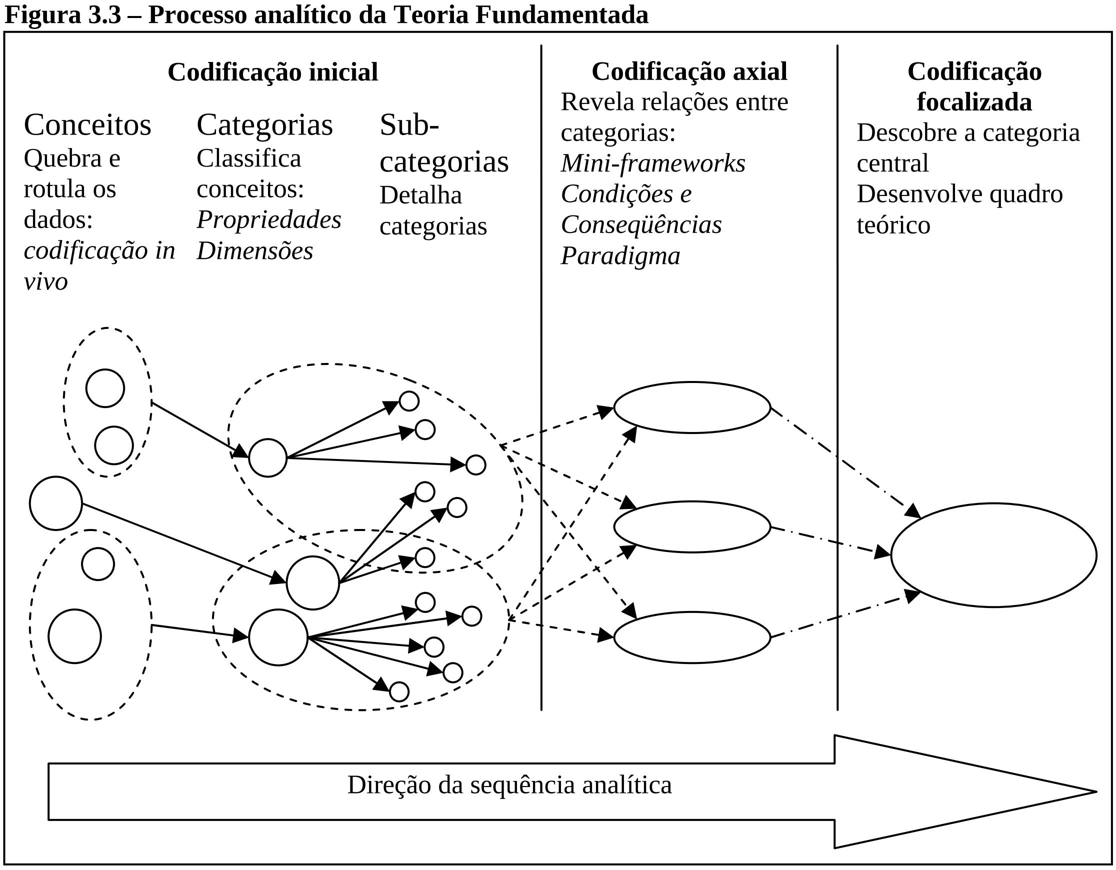
[32] Tradução de “Axial coding relates categories to subcategories, specifies the properties and dimensions if a category, and reassembles the data you have fractured during initial coding to give coherence to the emerging analysis” (CHARMAZ, 2006, p. 60).

“classificar, sintetizar e organizar grandes montantes de dados e reagrupá-los de novas formas” (CHARMAZ, 2009, p. 91).

A etapa final corresponde à codificação focalizada na qual é feita uma revisão e avaliação das categorias, o processo é validado e assume-se um compromisso com a categoria central definida na codificação axial. Para Charmaz (2009, p. 87), essa codificação “constata as suas preconcepções sobre o tópico” que está sendo analisado.

Em Warburton (2005) encontramos um esquema (Figura 3.3) que representa de forma simplificada as etapas da codificação na Teoria Fundamentada.

Figura 3.3 – Processo analítico da Teoria Fundamentada



Fonte: HARWOOD, 2002 apud WARBURTON, 2005. Tradução nossa.

Neste esquema, inicialmente os dados coletados são divididos em três etapas na codificação inicial, em seguida, os dados são reagrupados na codificação axial e, por último, esses dados definem uma categoria central na codificação focalizada.

Para realizar a codificação focalizada se faz necessária a redução das categorias. Nesse momento, é preciso descobrir uniformidades no grupo original de categorias ou suas propriedades e, com isso, formular a teoria com um pequeno grupo de conceitos abstratos, delimitando a terminologia.

Além disso, a lista de categorias é delimitada quando estas se tornam teoricamente saturadas. Essa saturação teórica ocorre, segundo Charmaz (2006), quando nenhum dado relevante ou novo emerge para desenvolver novos conhecimentos teóricos nem revela novas propriedades para a categoria central.

Na Teoria Fundamentada é preciso descrever o cenário em que é feita a análise dos participantes, pois “tentamos entender os pontos de vista e as situações dos nossos participantes, bem como as suas ações dentro daquele cenário” (CHARMAZ, 2009, p. 72).

3.4.1CENÁRIO DE INVESTIGAÇÃO E COLETA DE DADOS

O cenário em que ocorreu a coleta de dados a fim de inferir sobre a atribuição de significado para o problema e o objeto matemático pelos alunos em atividades de modelagem matemática corresponde a uma turma do 4º ano de um curso noturno de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina durante a disciplina de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. Em nosso estudo, os intérpretes correspondem ao grupo constituído por 20 alunos — 11 do sexo masculino e 9 do sexo feminino — com idades entre 21 e 32 anos, em que a maioria trabalhava durante o dia e estudava no período noturno.

A disciplina que tem periodicidade anual foi ministrada pela professora Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida, orientadora desta pesquisa. A participação da pesquisadora e, consequentemente, a coleta de dados ocorreu no segundo semestre (de 29 de agosto a 28 de novembro) da disciplina no ano de 2011, totalizando 13 encontros de 2horas/aula cada um. As aulas, em 2011, foram ministradas às segundas-feiras das 21:10 às 22:50. Além dos encontros em aula, foram realizados cinco encontros extraclasses com alunos reunidos em grupos com cinco ou seis membros. A participação da pesquisadora ocorreu no desenvolvimento de uma atividade de modelagem em conjunto com os alunos, na elaboração de atividades em conjunto com a professora e na orientação do desenvolvimento de algumas atividades de modelagem.

Os dados foram coletados no decorrer do desenvolvimento de atividades de modelagem por meio de registros escritos, gravações em vídeo e gravações em áudio. Para o desenvolvimento da pesquisa, todos os alunos assinaram um consentimento livre esclarecido, no termo de autorização conforme Apêndice A. Alguns encontros não foram registrados, pois no momento de desenvolvimento da atividade existiam alunos que ainda não haviam assinado o termo de consentimento. A seguir descrevemos em que consiste cada um dos meios de coleta de dados.

Registros escritos: correspondem a relatórios entregues pelos alunos com o desenvolvimento de atividades de modelagem e questionários que foram respondidos ao longo ou após o desenvolvimento de atividades. Os questionários utilizados em diferentes atividades encontram-se nos Apêndices B, E e F.

Gravações em vídeo: utilização de filmadora para a captura de gestos e expressões utilizados pelos alunos durante o desenvolvimento ou apresentação de atividades de modelagem matemática.

Gravações em áudio: utilização de gravadores durante o desenvolvimento de atividades de modelagem, em conversas informais com alunos individuais ou em grupo de orientação de trabalhos, nas entrevistas realizadas com alunos após a realização de atividades de modelagem. Os roteiros de entrevistas utilizados em diferentes atividades encontram-se nos Apêndices C, D e G.

Por meio da coleta de dados, organizamos um banco de arquivos com diversas imagens e áudios (que foram transcritos) dos alunos participantes da disciplina de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. Diante do acervo constituído, delineamos o perfil dos estudantes analisados, que chamamos de alunos-colaboradores da pesquisa.

3.4.2 OS ALUNOS-COLABORADORES DESTA PESQUISA

Com a coleta de dados, organizamos um rico acervo de imagens e áudios que foram integralmente transcritos. Para traçar o perfil dos alunos do qual analisamos a produção de signos interpretantes, levamos em consideração alguns critérios:

- participação em todos os encontros realizados em sala de aula (total de 12);
- entrega dos relatórios com as atividades desenvolvidas (total de 3 por aluno);
- resposta a todos os questionários aplicados (total de 3 por aluno);
- participação das entrevistas (total de 2 por aluno).

Do total de alunos da sala de aula quatro atenderam aos critérios estabelecidos. Destes quatro alunos, selecionamos dois para traçarmos as análises. Essa escolha foi embasada no detalhamento da explicitação dos interpretantes produzidos por esses alunos.

Embora apresentamos a análise somente dos interpretantes produzidos por dois alunos, signos interpretantes de outros alunos, da professora e da pesquisadora se fizeram importantes e são apresentados tanto na descrição das atividades (Capítulo 4) quanto nas análises realizadas (Capítulo 5), pois de alguma forma esses signos interpretantes interferiram na atribuição de significado pelos alunos analisados. Em alguns momentos, quando os alunos escolhidos estavam trabalhando em grupos, registros do colega são utilizados ao invés daqueles do próprio aluno, pois retratam a discussão do grupo.

Para fazermos menção aos participantes da pesquisa, utilizamos a letra A para aluno, P para a pesquisadora e PR para a professora da disciplina. Para diferenciar os alunos utilizamos números, por exemplo, para indicar aluno 1, utilizamos A1; para indicar aluno 2, A2 e, assim, sucessivamente. Os alunos analisados foram nomeados por A6 e A8, pois essa nomeação foi inserida desde o início da coleta de dados e ainda não estavam designados quais alunos seriam analisados, não havendo possibilidade de aplicar os critérios de escolha.

As atividades nas quais os alunos-colaboradores da pesquisa participaram foram realizadas no trilhar das aulas e das atividades de modelagem, como descrevemos na próxima seção.

3.5 TRILHAR DAS AULAS E DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

No período de coleta de dados, a disciplina contou com o desenvolvimento de atividades de modelagem de forma configurada nos três momentos de ‘familiarização’ pelos alunos, ou seja, atividades que possibilitaram aos alunos ‘aprender’ a fazer modelagem, ‘aprender’ a resolver problemas e ‘aprender’ conteúdos matemáticos relacionados às atividades desenvolvidas. Neste ‘trilhar’, foram desenvolvidas atividades orientadas pela professora responsável e pela pesquisadora; realização de seminários, configurados como oficinas; desenvolvimento de atividades como forma de avaliação; apresentação de atividades de modelagem desenvolvidas pelos alunos. A seguir descrevemos a ordem em que foi desenvolvida cada uma das atividades em sala de aula.

Atividades de Modelagem Matemática orientadas pela professora: configurou-se como o primeiro momento do desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática (citado no Capítulo 1, seção 1.2) desenvolvendo com todos os alunos a exploração de atividades já abordadas na literatura.

Atividade de Modelagem Matemática orientada pela pesquisadora: também se configurou como o primeiro momento e foi explorada a atividade intitulada *Diazepan no organismo*. Para o desenvolvimento desta atividade, os alunos receberam a situação-problema oriunda de literatura, bem como os problemas que deveriam ser resolvidos — esta atividade está descrita no Capítulo 4. O papel da pesquisadora foi o de ‘conduzir’ a atividade com a participação conjunta dos alunos. Ou seja, pesquisadora e alunos definiram conjuntamente as variáveis e hipóteses, fizeram as simplificações necessárias, realizaram obtenção e validação dos modelos matemáticos correspondentes aos problemas propostos, bem como as análises de cada um dos modelos.

Realização de seminários (oficinas): para a realização das oficinas, a professora distribuiu quatro atividades de modelagem desenvolvidas por alunos de anos anteriores a quatro grupos formados por cinco ou seis membros. Cada grupo desenvolveu uma atividade com os outros colegas de sala em forma de oficina em que junto aos colegas definiram as variáveis e hipóteses, fizeram as simplificações necessárias, realizaram obtenção e validação dos modelos matemáticos, bem como as análises de cada um dos modelos. Esta atividade configurou-se como do segundo momento, pois para a elaboração das oficinas os grupos de alunos precisaram investigar outras informações sobre a situação abordada. As situações-problema abordadas nas oficinas foram: *Aquecimento global*, *Nicotina no organismo*, *Plantação de batatas* e *Produção de carro a álcool*.

Desenvolvimento de atividades em forma de avaliação: professora e pesquisadora apresentaram aos alunos duas situações-problema com os problemas definidos para que os alunos resolvessem. Para tanto, os alunos reunidos em duplas ou trios trabalharam sem o auxílio direto da professora ou da pesquisadora no desenvolvimento de uma das atividades de modelagem propostas, ou seja, na resolução de um dos problemas. Trata-se de uma atividade configurada como do segundo momento em que os alunos definiram as variáveis e hipóteses, realizaram a obtenção e validação do modelo matemático bem como seu uso para analisar a situação. Nesta atividade de avaliação, os alunos utilizaram das notas de aulas ou de outros materiais que possuíam em sala. As situações-problema abordadas nas atividades foram: *Cálcio no rio Limoeiro* e *O consumo de cigarro*. Estas atividades são apresentadas no Capítulo 4.

Desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática pelos alunos: caracterizadas como de 3.º momento, nestas atividades os alunos trabalharam em grupos com cinco ou seis membros em cada grupo e escolheram uma situação para investigar; neste momento os próprios alunos fizeram a identificação da situação-problema que pretendiam desenvolver, a coleta e análise dos dados, o delinear do problema a ser investigado, a identificação dos conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, culminando na comunicação desta investigação para todos os alunos da disciplina. Para o desenvolvimento desta atividade os grupos contaram com a orientação da professora ou da pesquisadora. Nos referimos a este como '*trabalho final*'. As situações-problema desenvolvidas foram *Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil*, *Poda de árvore*, *Consumo de água e crescimento populacional em Londrina* e *Educação*. As atividades *Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil* e *Poda de árvore* são descritas no Capítulo 4.

No último dia de coleta de dados (28/11), a professora proferiu o fechamento da disciplina fazendo uma abordagem dos desenvolvimentos das atividades de modelagem de forma geral. No Quadro 3.1 apresentamos o cronograma das atividades desenvolvidas no 2.º semestre do 'trilhar' das aulas da disciplina de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. Além disso, apresentamos os meios que utilizamos na coleta de dados em cada uma das atividades.

Quadro 3.1 – Cronograma das atividades e coleta de dados

Cronograma das atividades e meios utilizados na coleta de dados		
Data	**Atividade**	**Coleta**
29/08	Atividade desenvolvida pela professora	Observação da pesquisadora
05/09	Diazepan no organismo	Registros escritos / Áudio
12/09	Diazepan no organismo	Registros escritos / Áudio
19/09	Diazepan no organismo	Registros escritos
26/09; 03/10; 10/10; 17/10	Alunos trabalhando em oficinas – situações diversas	Observação da pesquisadora
24/10	O consumo de cigarro Cálcio no rio Limoeiro	Registros escritos / Áudio / Vídeo
31/10	O consumo de cigarro Cálcio no rio Limoeiro	Registros escritos / Áudio / Vídeo
07/11 21/11	Apresentações: Consumo de água e crescimento populacional em Londrina; Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil Educação Poda de árvore	Registros escritos / Áudio / Vídeo
28/11	Finalização da disciplina	Observação da pesquisadora

Fonte: Quadro elaborado pela pesquisadora.

Os dados coletados nas atividades descritas foram codificados segundo a Teoria Fundamentada de Kathy Charmaz. Na próxima seção apresentamos como foi realizada essa codificação.

3.6 INSTRUMENTO ANALÍTICO – CODIFICAÇÃO DOS DADOS

A análise dos dados apresentados nas atividades de modelagem desenvolvidas é realizada conforme o objetivo que nos propusemos a atingir, que consiste em evidenciar como emergem os signos interpretantes em atividades de modelagem e estabelecer relações entre esses signos com a atribuição de significado para o problema e para o objeto matemático em estudo.

Fazemos uma análise predominantemente qualitativa para cada aluno-colaborador que é realizada em duas etapas: uma *análise específica* segundo os pressupostos teóricos da Modelagem Matemática e da Semiótica Peirceana para cada atividade desenvolvida por cada aluno, estabelecendo codificações inicial e axial proposta na Teoria Fundamentada e uma *análise geral*, relativa a todas as atividades desenvolvidas por cada aluno compondo uma codificação focalizada.

Na codificação inicial, parece ser interessante estabelecer uma codificação incidente por incidente, em que cada incidente corresponde a cada uma das fases — inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação — pelas quais os alunos 'caminham' em uma atividade de modelagem e pode ser comparada de acordo com a familiarização dos alunos com este tipo de atividade.

Para que possamos inferir sobre a atribuição de significado para o objeto, levamos em consideração os signos como foram produzidos pelos alunos. Isso corresponde ao que na Teoria Fundamentada constitui os códigos *in vivo*. Os códigos *in vivo* correspondem a termos próprios utilizados pelos alunos e fornecem um vantajoso ponto de partida analítico. Para Charmaz (2009), os "códigos *in vivo* ajudam-nos a conservar os significados dos participantes" (p. 84).

Na codificação axial, utilizamos dos questionários respondidos (Apêndices B, E e F) e das respostas às entrevistas (Apêndices C, D e G) e, nesse sentido, voltamos a fazer uma pesquisa de campo com os alunos referente ao desenvolvimento de cada atividade desenvolvida.

Assim, a análise específica de nossa pesquisa corresponde à codificação inicial que estabelecemos para ações/signos produzidos pelos intérpretes em cada fase das atividades de modelagem e da codificação axial em que utilizamos dos questionários e das entrevistas pós-realização das atividades.

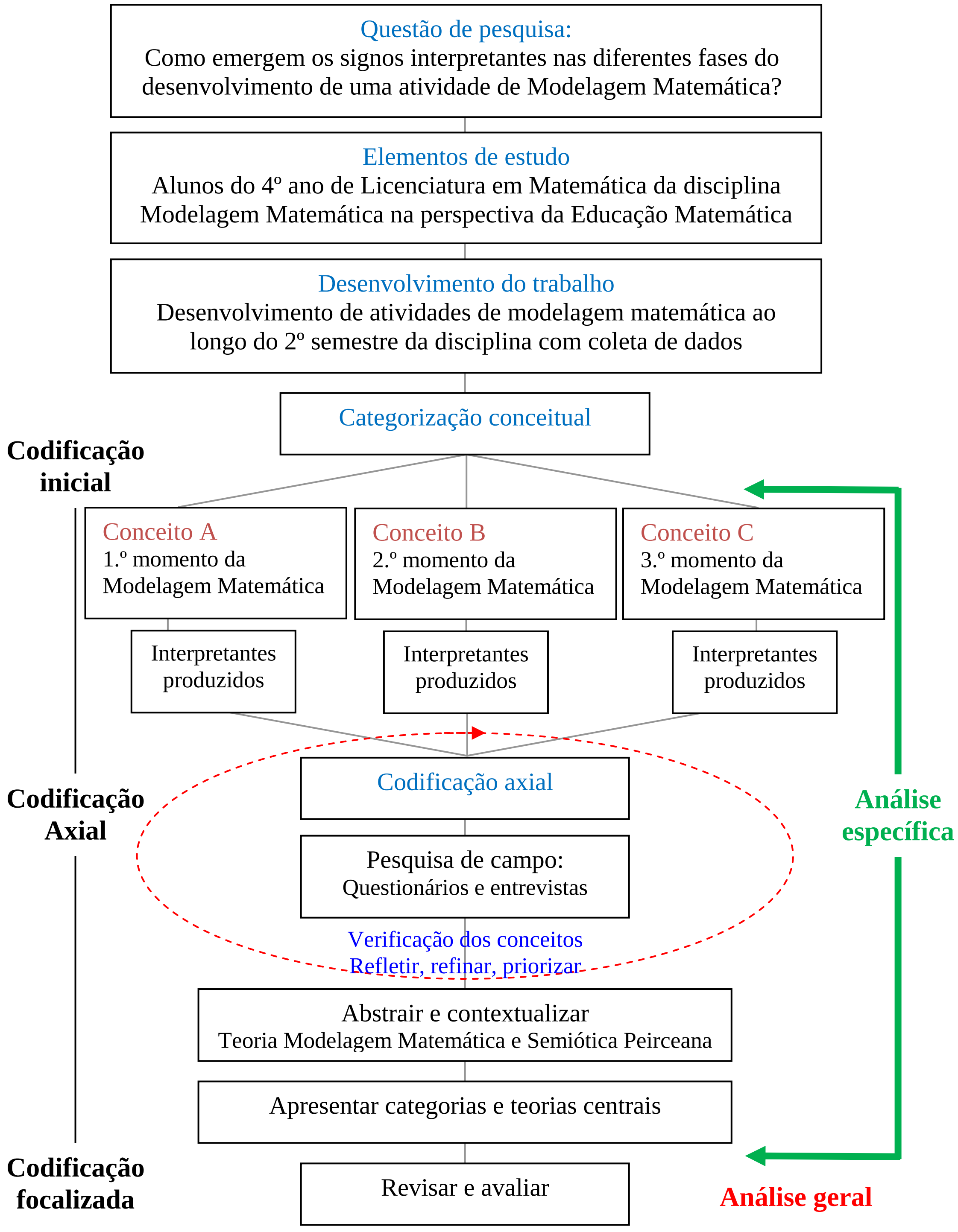
Em nossa pesquisa fizemos a análise segundo os pressupostos teóricos da Modelagem Matemática e da Semiótica Peirceana de cinco atividades de modelagem selecionadas nas quais os alunos-colaboradores A6 e A8 foram participantes. Essas atividades seguem o encaminhamento que se configura nos três momentos de familiarização com atividades de modelagem matemática. As análises apresentadas correspondem às atividades: *Diazepan no* *organismo* (1.º momento); *O consumo de cigarro* e *Cálcio no rio Limoeiro* (2.º momento) e *Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil* e *Poda de árvore* (3.º momento).

Na análise geral em que estabelecemos a codificação focalizada para cada aluno-colaborador, levando em consideração as atividades analisadas, 'traçamos' ciclos de modelagem em cada momento de familiarização inferindo sobre como ocorreu a atribuição de significado para o objeto — problema e objeto matemático —: *familiaridade* com o objeto, *intenção* de significar o objeto, *ideia* que se remete ao objeto, *consequência* futura para abarcar o objeto, *experiência colateral* com o objeto.

Para finalizar as análises, apresentamos reflexões sobre as questões específicas da pesquisa e estabelecemos articulações entre as tríades símbolo/significado para o objeto/interpretante e Perceber/Agir/Significar quando intérpretes estão envolvidos com atividades de Modelagem Matemática.

Nossa pesquisa pode ser representada segundo a Teoria Fundamentada em um esquema como o apresentado na Figura 3.4, em que destacamos a questão de pesquisa, os elementos de estudo (intérpretes), o desenvolvimento do trabalho e a categorização conceitual. É na categorização conceitual que estabelecemos uma articulação com os pressupostos teóricos vislumbrados na pesquisa, ou seja, é neste momento que a Teoria Fundamentada possibilita uma 'conversa' entre as teorias escolhidas para o desenvolvimento da pesquisa. Para tanto, a partir dos momentos de familiarização com atividades de modelagem foi possível evidenciar os signos interpretantes produzidos pelos alunos para a atribuição de significado para o objeto — problema e objeto matemático — e, com isso, estabelecer uma codificação pautada na Teoria Fundamentada.

Figura 3.4– Etapas de nossa pesquisa segundo a Teoria Fundamentada



Fonte: Esquema elaborado pela pesquisadora.

A descrição de como foram desenvolvidas as atividades é apresentada no Capítulo 4. As análises específica e geral, a que correspondem à análise segundo os pressupostos teóricos da modelagem e da semiótica peirceana com relação à atribuição de significado, são apresentadas no Capítulo 5.

CAPÍTULO 4 – O CONTEXTO

"*O que prevemos raramente ocorre; o que menos esperamos geralmente acontece*" (Benjamin Disraeli).

Com o intuito de ambientalizar o leitor com a pesquisa desenvolvida, apresentamos neste capítulo a descrição das atividades analisadas neste trabalho. Para tanto, dissertamos sobre o contexto em que cada uma foi desenvolvida bem como as ações dos estudantes envolvidos.

4.1 CRONOGRAMA DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

O segundo semestre da disciplina, no período de 5 de setembro[33] a 28 de novembro de 2011, contou com o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática de forma configurada nos três momentos de 'familiarização' pelos alunos, ou seja, atividades que possibilitaram aos alunos 'aprender' a fazer modelagem, 'aprender' a resolver problemas e 'aprender' conteúdos matemáticos relacionados às atividades desenvolvidas.

Ao apresentar na íntegra como se deu o desenvolvimento das atividades já estamos subsidiando a codificação inicial, pois as fases desenvolvidas em cada um dos momentos constituem-se de incidentes em que os primeiros dados são coletados e os interpretantes produzidos são enunciados pelos envolvidos nas atividades.

Neste capítulo descrevemos as atividades como foram desenvolvidas pelos alunos-colaboradores com interferências de outros alunos, professora e pesquisadora em cada contexto dos momentos de familiarização. O Quadro 4.1 apresenta a data, o momento em que foi caracterizado o desenvolvimento de cada uma das atividades, a atividade e a indicação do aluno-colaborador envolvido.

[33] O período de participação da pesquisadora na disciplina iniciou-se em 29 de agosto de 2011, com a observação do desenvolvimento de uma atividade pela professora.

Quadro 4.1 – Atividades de modelagem desenvolvidas segundo cada momento de familiarização

Cronograma das atividades de Modelagem Matemática			
Data	**Momento de familiarização**	**Atividade**	**Aluno-colaborador envolvido**
05/09, 12/09, 19/09	1.º momento	Atividade 1: Diazepan no organismo	A6 e A8
24/10, 31/10	2.º momento	Atividade 2: O consumo de cigarro Atividade 3: Cálcio no rio Limoeiro	A8 A6
21/11	3.º momento	Apresentação da atividade 4: Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil	A8
28/11	3.º momento	Apresentação da atividade 5: Poda de árvore	A6

Fonte: Quadro elaborado pela pesquisadora.

Nas seções que seguem apresentamos em que contexto se deu a escolha de cada situação-problema e a descrição de seu desenvolvimento.

4.2 ESCOLHA DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA

As situações-problema escolhidas para o desenvolvimento das atividades de modelagem seguiram cada um dos momentos de familiarização.

As situações-problema que se caracterizam como de 1.º e de 2.º momentos foram escolhidas pela professora e pela pesquisadora. Trata-se de atividades existentes na literatura e que foram adaptadas para serem desenvolvidas com os alunos do 4.º ano de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática de 2011. Neste trabalho, nos referimos a essas atividades como Atividade 1, Atividade 2 e Atividade 3.

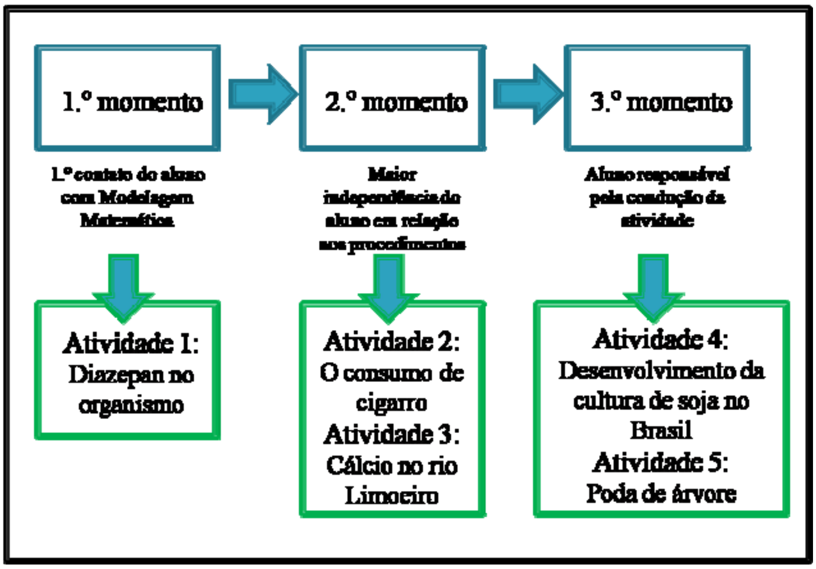
A Atividade 1 — Diazepan no organismo — foi desenvolvida por Palharini (2010) e se refere à concentração do medicamento diazepan no organismo de uma pessoa em diferentes situações. A atividade 2 — O consumo de cigarro — foi adaptada de Almeida, Silva &

Vertuan (2012) em que mais informações foram inseridas para serem apresentadas aos alunos. Na Atividade 3 — Cálcio no rio Limoeiro — foram utilizados os dados coletados por Borssoi (2004) com a inserção do problema e de informações sobre a presença de cálcio em um rio.

A atividade 4 — Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil — e a atividade 5 — Poda de árvore — foram escolhidas pelos alunos reunidos em grupos com cinco e seis membros, respectivamente, e caracterizadas como de 3.º momento. O grupo de alunos que desenvolveu a atividade 5, intitulou tal atividade como Estudo da iluminação pública na cidade de Londrina, mas como o foco foi a poda de árvores, optamos por nos referirmos a esta atividade como Poda de árvore.

No Quadro 4.2 localizamos as atividades segundo os momentos em que foram desenvolvidas.

Quadro 4.2- As atividades desenvolvidas segundo os diferentes momentos de familiarização com atividades de Modelagem Matemática na sala de aula



Fonte: Adaptado de ALMEIDA; VERTUAN, 2011a, p. 28.

Seguindo os momentos de familiarização com atividades de Modelagem Matemática, descrevemos, neste capítulo, como as atividades foram desenvolvidas em conjunto com os alunos. Para isso, utilizamos registros escritos, falados e menções a gestos dos alunos durante o momento de desenvolvimento e/ou apresentação de cada atividade. Além disso, alguns registros obtidos nos momentos de orientação para o desenvolvimento das atividades que antecederam a apresentação são apresentados, pois muitos deles auxiliam na ambientalização.

4.3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM REALIZADAS

Para descrever cada atividade e fazermos menção aos participantes, utilizamos a letra A para aluno, P para a pesquisadora e PR para a professora da disciplina. Para diferenciar os alunos utilizamos números, por exemplo, para indicar aluno 1, utilizamos A1; para indicar aluno 2, A2 e, assim, sucessivamente. As atividades são apresentadas em ordem progressiva de familiarização: 1.º momento, 2.º momento e 3.º momento.

Na atividade 1 *Diazepan no organismo*, que é proposta no 1.º momento e desenvolvida pela pesquisadora e pelos alunos, a maior parte dos registros escritos apresentados correspondem aos do aluno A6, pois a digitalização encontra-se em melhor resolução. No entanto, registros de outros alunos são utilizados, principalmente quando a intervenção de certo aluno encaminha para a produção de um registro específico que não havia sido antecipadamente planejado pela pesquisadora.

Para as atividades 2 *O consumo de cigarro* e 3 *Cálcio no rio Limoeiro*, que se referem ao 2.º momento, apresentamos uma possível resolução que pensamos que os alunos desenvolveriam para, em seguida, apresentarmos os registros dos alunos. Nestas atividades priorizamos os signos produzidos pela dupla na qual A6 faz parte e pelo trio no qual A8 faz parte.

A atividade 4 *Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil* corresponde a de 3.º momento e foi desenvolvida por um grupo de cinco alunos, do qual A8 faz parte. Como tais alunos não tinham disponibilidade extra-aula para serem orientados, a trajetória minuciosa do desenvolvimento da atividade não será apresentada, visto que não há coleta de dados para sua descrição[34]. Os registros utilizados para descrever a atividade correspondem a reproduções de slides apresentados, ao trabalho impresso entregue pelos alunos e aos gestos e falas que utilizaram durante a apresentação da atividade para os outros alunos da sala de aula.

O grupo de seis alunos que desenvolveu a atividade 5 *Poda de árvore* contou com um

[34] Este fato ocorreu, pois os alunos mudaram a situação-problema que pretendiam estudar.

acompanhamento em todo o desenvolvimento da atividade, pois tinham disponibilidade extra-sala e interesse que a professora ou a pesquisadora estivessem presentes em suas discussões e definições. Dessa forma, registros de falas e gestos que antecederam a apresentação da atividade se fazem presentes neste trabalho, bem como as reproduções de slides, o trabalho impresso entregue pelos alunos, as falas e os gestos utilizados durante a apresentação da atividade.

4.3.1 CONTEXTO DO 1.º MOMENTO — ATIVIDADE 1: DIAZEPAN NO ORGANISMO

A atividade relacionada à situação *Diazepan no organismo* foi desenvolvida pelos alunos em conjunto com a pesquisadora, caracterizando o primeiro momento de ‘familiarização’ com o desenvolvimento de atividades de modelagem. Esta atividade foi desenvolvida durante 5horas/aulas, sendo solicitada aos alunos a entrega de relatório com a resolução das três questões propostas. Cada questão foi desenvolvida em 2horas/aula com exceção da terceira em que foi necessária 1hora/aula. Como se trata de atividade do 1.º momento as resoluções foram semelhantes, variando o uso de algumas representações, com as quais os alunos têm mais afinidades.

Nesta atividade, além do relatório entregue, foi realizada gravação em áudio das aulas e respondido um questionário por cada aluno. Alguns questionários não foram entregues ou pelo aluno não estar presente em algumas das aulas ou pelo aluno não ter respondido às questões. O questionário que foi aplicado aos alunos e que é constituído por duas partes encontra-se no Apêndice B. No entanto, resultados das respostas a este questionário são utilizados no Capítulo 5, pois auxiliam nas análises e na codificação axial.

A proposta de desenvolvimento desta atividade foi iniciada com informações sobre a situação-problema que os alunos receberam em folhas impressas. Na primeira folha que os alunos receberam havia informações sobre a situação-problema, o primeiro problema a ser desenvolvido e espaços destinados a identificação de variáveis e hipóteses, conforme apresentado no Quadro 4.3. Inicialmente foram discutidas em grupos de três ou quatro membros as informações e foram feitas algumas explicações.

Quadro 4.3– Atividade de modelagem sobre 'Diazepan no organismo'

SITUAÇÃO-PROBLEMA: DIAZEPAN NO ORGANISMO

Nome: ____

O Diazepan é um medicamento indicado para pacientes com crises de ansiedade, queixas somáticas ou psicológicas relacionadas à ansiedade, no tratamento de desordens psiquiátricas, no alívio do espasmo muscular reflexo devido a traumas, como lesão e inflamação.

Trata-se de um remédio controlado (tarja preta) e seu uso inadequado ou por longas faixas de tempo pode ser prejudicial.

Informações da bula do medicamento:

Eliminação: a curva concentração plasmática/tempo do diazepam é bifásica: uma fase de distribuição inicial rápida e intensa, com uma meia vida que pode chegar a 3 horas e uma fase de eliminação terminal prolongada (meia vida de 20-50 horas). A meia vida de eliminação terminal (t1/2b) do metabólico ativo nordiazepam é aproximadamente 100 horas. O diazepam e seus metabólicos são eliminados principalmente pela urina, predominantemente sob a forma conjugada. O clerence de diazepam é de 20-30 ml/min.

Dessa maneira a **meia-vida** (eliminação do Diazepam) se dá da seguinte maneira:
- na fase inicial pode chegar a 3 horas
- na fase terminal pode durar de 20 – 50 horas.

O **tratamento** deve ser administrado com uma dose inicial que não ultrapasse 10 mg e a duração deve ser a menor possível não excedendo de 2 a 3 meses, incluindo o período de retirada progressiva do remédio.

Fonte: PALHARINI, 2010.

1) Qual é a concentração de Diazepan no organismo, no decorrer do tempo, se uma pessoa ingerir um comprimido de 10 mg?

Hipótese:

Variáveis:

Fonte: Quadro elaborado pela professora e pela pesquisadora.

Ao se inteirarem da situação-problema que seria estudada, os alunos entraram em contato com a primeira questão proposta, isso aconteceu porque cada uma das três questões foram propostas ao término do desenvolvimento da questão anterior, cada uma impressa em uma folha de papel avulsa. As questões desenvolvidas nesta atividade constam no Quadro 4.4.

Quadro 4.4– Questões propostas no desenvolvimento da atividade de modelagem 'Diazepan no organismo'

1Qual é a concentração de Diazepan no organismo, no decorrer do tempo, se uma pessoa ingerir um comprimido de 10 mg?
2Qual é a concentração de Diazepan no organismo, no decorrer do tempo, se o paciente ingerir um comprimido de 10 mg a cada 24 horas?
3Após 4 dias de tratamento, a concentração do medicamento no organismo se estabiliza. Analisar o decaimento da concentração quando o paciente suspende a ingestão do medicamento.

Fonte: PALHARINI, 2010.

De antemão, os alunos leram as informações que lhes foram entregues (Quadro 4.3) e argumentaram e questionaram algumas delas. Dentre as informações abordadas foi explicitado que as substâncias químicas têm uma meia-vida, ou seja, o tempo necessário para que a quantidade inicial de um elemento químico decaia para a metade. Embora essa informação fosse relevante para o desenvolvimento da situação, somente um dos alunos presentes se manifestou quando foi questionado sobre o que é meia-vida, conforme diálogo.

P: *Nas informações que temos, é apontado que a meia-vida do diazepan na fase inicial é de três horas. O que é meia-vida?*
A1: *É o comportamento que reduz a metade da substância no organismo?*
P: *Isso. É o tempo em que o...*
A1: *Que a substância reduz pela metade...*
P: *A sua reação no organismo reduz pela metade. E a gente considera em relação à quantidade em gramas, em miligramas, quantidade de massa, porque é a mesma coisa que dizer quando aquilo vai reagir a metade do que foi inicialmente ingerido.*
A1: *E em nosso caso não é de a substância estar presente no corpo? Por exemplo, quando eu fiz o teste do carbono-14 era algo daquilo no ambiente.* [relembrando uma atividade que havia entrado em contato no primeiro semestre de 2011].
P: *Isso, o que restou da reação do carbono-14. E não a quantidade de massa.*
A1: *Ah é!*
P: *A gente está falando em relação à massa. Com relação ao elemento químico é com relação à massa. A gente fala que a meia-vida do diazepan é de três horas e que se tiver dez miligramas, a reação dele daqui há três horas vai corresponder a metade do que seria de cinco miligramas. Porque depois tem uma reação química no organismo com outros fatores, que tanto do ambiente quanto do corpo, porque o corpo é um ambiente no caso do diazepan, ele vai ter outras reações que podem transformar esse medicamento em outras substâncias.*
PR: *Sempre acontece isso né? Nada desaparece na vida de qualquer produto, ele passa de uma ação para outra ação. Lembram, nós falamos nisso no césio, né?* [relembrando uma atividade que foi realizada no primeiro semestre de 2011]. *Deixa de ser césio cento e trinta e sete e passa a ser outra coisa que tem outro nível de radioatividade, a mesma coisa desse medicamento, ele deixa de fazer as ações que ele faz enquanto diazepan. Ele passa a fazer outras coisas. Por isso que causa dependência.*

Ao se inteirarem da situação-problema, passou-se para a resolução da Questão 1 proposta no

Quadro 4.4, *Qual é a concentração de Diazepan no organismo, no decorrer do tempo, se uma pessoa ingerir um comprimido de 10 mg?*. Por sugestão de A1, considerou-se a meia-vida como informação relevante para iniciar a dedução do modelo, sendo considerada uma hipótese. Alunos e pesquisadora decidiram em conjunto as variáveis que seriam utilizadas. Para tanto, consideraram a variável independente como tempo (t), em horas, e concentração de diazepan no organismo como variável dependente (C), em miligramas. Definidas as variáveis e a hipótese, os alunos reunidos em grupos iniciaram a dedução do modelo.

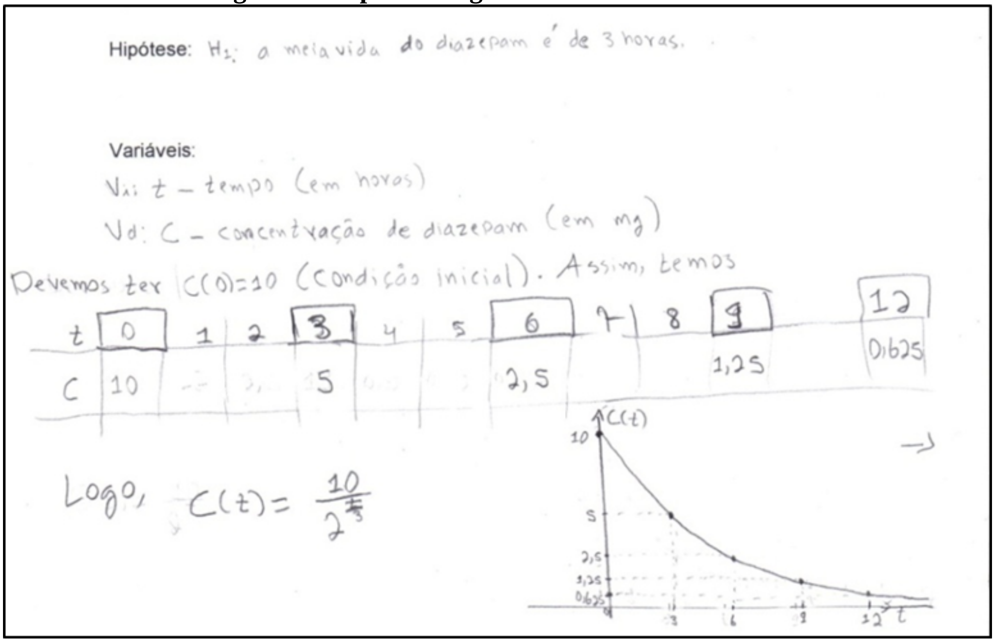
Inicialmente os alunos dos grupos não sabiam o que considerar para iniciar a dedução do modelo para responder à Questão 1.

> A1: *Agora é a gente que vai começar a fazer?*
> P: *É!*
> [murmúrios de vários alunos]
> A1: *Bom a gente vai considerar a meia-vida de três horas e essas variáveis aí...*
> P: *O que mais vocês sabem?*
> A8: *Que a quantidade inicial é de dez miligramas.*
> A1: *E que depois de três horas reduz pela metade.*
> A8: *Então vai ser cinco miligramas depois de três horas.*
> P: *E o que a gente tem então? Agora é com vocês!*

A partir das intervenções realizadas, os alunos se concentraram na dedução do modelo matemático. Embora o problema fosse o mesmo, a orientação realizada fosse feita a todos da mesma maneira, os alunos apresentaram registros diferentes para a construção do modelo.

Para desenvolver o modelo matemático, A5 utilizou três representações (tabela, expressão algébrica e gráfico) para o modelo matemático (Figura 4.1). Quando questionado sobre esse fato, afirma que "*todas são importantes porque se relacionam com a função exponencial e uma ajuda a entender a outra*" [resposta de A5 em questionamento realizado durante o desenvolvimento da atividade]. Como a situação é similar a uma já desenvolvida em sala de aula — decaimento radioativo do césio-137 no ambiente —, A5 utiliza da mesma generalização para a obtenção do modelo matemático. Neste caso, não apresenta todo o desenvolvimento matemático para a obtenção do modelo e sim parte do que já conhecia.

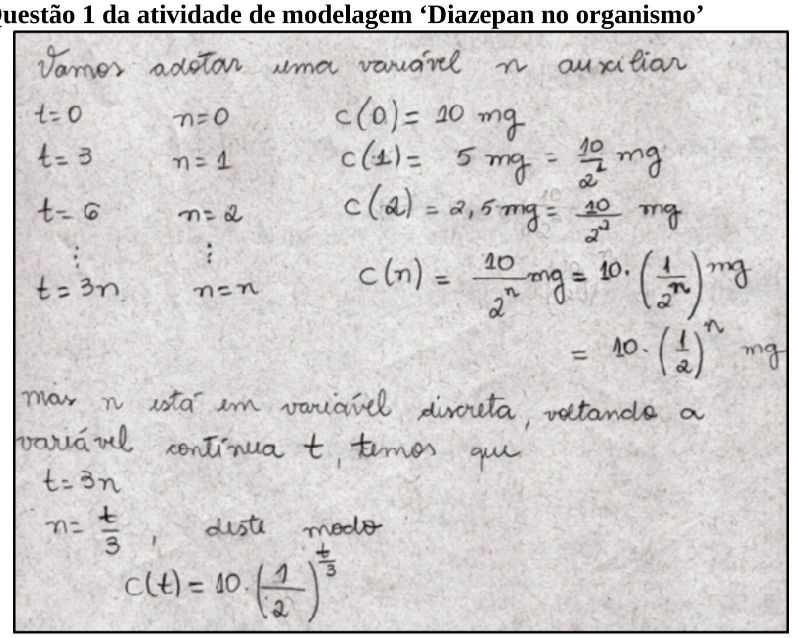
Figura 4.1– Registro de A5 para a dedução do modelo matemático para a Questão 1 da atividade de modelagem 'Diazepan no organismo'



Fonte: Relatório entregue por A5.

A5 é um aluno que mostra ter preferência pelas diferentes formas de representação para tornar acessível o objeto do qual está tratando. O uso de diferentes signos para reportar ao objeto em estudo não é prática de todos os alunos da turma analisada — 4º ano de Licenciatura em Matemática —, como A6 que, em todo o desenvolvimento da atividade, manifesta preferência pela representação algébrica, conforme apresentado na Figura 4.2.

Figura 4.2– Registro de A6 para a dedução do modelo matemático para a Questão 1 da atividade de modelagem 'Diazepan no organismo'



Vamos adotar uma variável n auxiliar

$t=0$ $n=0$ $c(0) = 10$ mg

$t=3$ $n=1$ $c(1) = 5$ mg $= \frac{10}{2^1}$ mg

$t=6$ $n=2$ $c(2) = 2,5$ mg $= \frac{10}{2^2}$ mg

$\vdots$ $\vdots$

$t=3n$ $n=n$ $c(n) = \frac{10}{2^n}$ mg $= 10 \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)$ mg

$= 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ mg

mas n está em variável discreta, voltando a variável contínua t, temos que

$t = 3n$

$n = \frac{t}{3}$, deste modo

$c(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$

Fonte: Relatório entregue por A6.

Quando questionado sobre o uso do recurso gráfico para validar o modelo obtido, A6 informa que prefere fazer a validação por meio de comparação entre os dados e consegue visualizar o comportamento do modelo matemático por meio da expressão algébrica. Não necessitando, neste caso, de uso do gráfico.

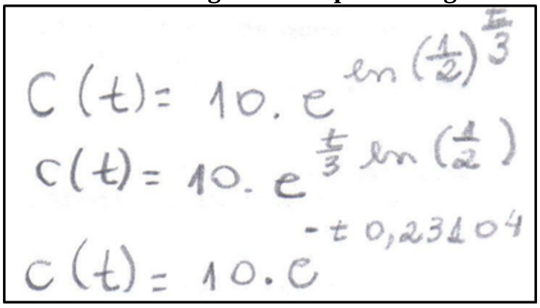
Depois de cerca de 40 minutos de discussão em grupo, foi solicitado a um aluno que escrevesse na lousa o modelo matemático que seu grupo deduziu. A aluna A7 desenvolveu a matematização da atividade, obtendo o modelo matemático $C_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$. A partir desse modelo matemático, iniciou-se uma abordagem sobre função discreta e função contínua[35]. Os alunos convencidos de que a função escrita na lousa corresponde a uma função discreta e que o tempo é uma variável contínua e corresponde à situação em estudo, sugeriram fazer mudança de variável, obtendo o modelo matemático $C(t) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$. Com a obtenção do modelo por meio de função contínua, a pesquisadora sugeriu a realização da mudança de base, obtendo $C(t) = 10e^{-0,23104t}$.

> P: *O que a gente faz para mudar esse C(t) que está escrito como uma função do tipo exponencial de base 1/2 para a base e? Vocês lembram ou não como faz para mudar para a base e?*
> [momento de silêncio]
> PR: *Qual a relação que existe? a elevado a n; e elevado a n. O que acontece?*
> A9: *A relação é com o logaritmo.*
> P: *Então o que faz?* [desenvolvendo na lousa com os alunos os cálculos da mudança de base].

Essa estratégia tem como objetivo mostrar que uma mudança de base pode proporcionar o estudo de algumas propriedades de logaritmo. No entanto, alguns alunos não aprovam tal signo como símbolo da função exponencial, como mencionado por A7: "*para que fazer isso? Não gostei! Olha como ficou feinho!*" [em áudio gravado em aula, ao se referir à primeira expressão apresentada na Figura 4.3].

[35] Embora a ênfase na abordagem da situação seja a função contínua, levando-se em consideração a variável tempo, não é nosso objetivo privilegiar modelos contínuos. Em Bisognin & Bisognin (2011) encontramos atividades de modelagem que possibilitam abordagens via modelos discretos.

Figura 4.3– Registro de A7 para a mudança de base da função exponencial do modelo matemático para a Questão 1 da atividade de modelagem 'Diazepan no organismo'



Fonte: Relatório entregue por A7.

P: *Mas para que fazer essa mudança de base?*
A7: *Então, tanto trabalho para quê?*
P: *Porque com essa situação a gente pode trabalhar, além da função do tipo exponencial, algumas propriedades logarítmicas, que podemos abordar no Ensino Médio.*
A7: *É isso é verdade!*
P: *É... e agora enquanto alunos do Ensino Superior, o que representa para vocês dizer que a concentração de uma substância reduz pela metade com o tempo? O que é essa variação? O que vocês lembram quando falam de variação?*
[momento de silêncio e alguns murmúrios]
A4: *Derivada?* [falando de forma 'tímida']
A1: *Quando fala de taxa de variação? Bom, é uma equação diferencial!* [falando com convicção]

Retomando o que é uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de Primeira Ordem com variáveis separáveis, iniciou-se a resolução de $\frac{dC}{dt} = k.C$, em conjunto, pesquisadora e alunos, obtendo o modelo matemático da situação, denotado por $C(t) = 10.e^{-0,23104\,t}$ (Figura 4.4).

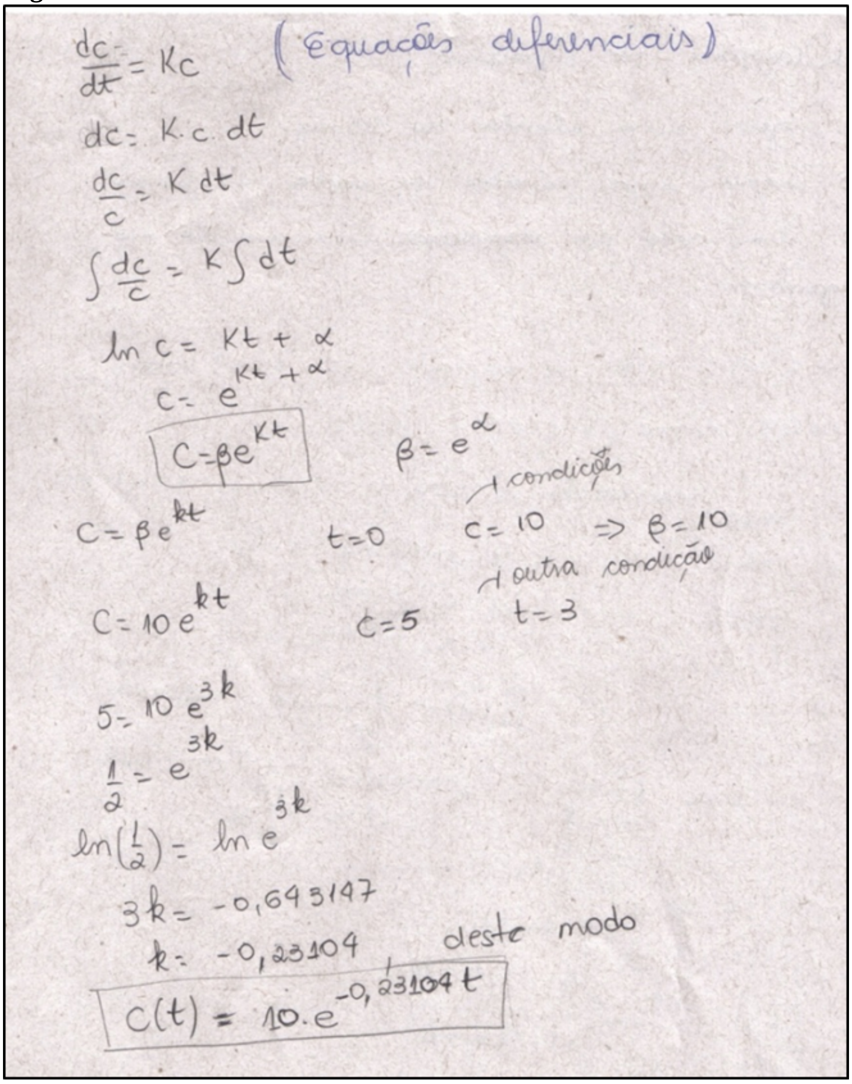
Ao analisar o modelo matemático obtido por meio do desenvolvimento da Equação Diferencial Ordinária, A7 se convenceu do por quê fazer a mudança de base no modelo obtido inicialmente.

A7: *Agora entendi o fato de fazer mudança de base!*
P: *É?*
A7: *Se não tivesse feito mudança de base não ia visualizar facilmente a semelhança entre o modelo contínuo na base meio obtido por meio de função do tipo exponencial e o modelo obtido por meio de equação diferencial* [referindo-se ao modelo obtido na Figura 4.4].

Ao propor mudança de base, a pesquisadora utiliza de motivos matemáticos para justificar tal ação, conforme proposta: *Porque com essa situação a gente pode trabalhar, além da função do tipo exponencial, algumas propriedades logarítmicas, que podemos abordar no Ensino*

Médio. Ao observar que a mudança de base possibilita visualizar uma aproximação dos modelos obtidos por meio de matemáticas ‘diferentes’, A7 apresenta motivos considerados mais interessantes dos que os da pesquisadora.

Figura 4.4– Registro de A6 para o desenvolvimento do modelo matemático para a Questão 1 da atividade de modelagem ‘Diazepan no organismo’ utilizando EDO


$\frac{dc}{dt} = Kc$ (Equações diferenciais)

$dc = K \cdot c \cdot dt$

$\frac{dc}{c} = K\,dt$

$\int \frac{dc}{c} = K \int dt$

$\ln c = Kt + \alpha$

$c = e^{Kt+\alpha}$

$\boxed{C = \beta e^{Kt}}$ $\quad \beta = e^{\alpha}$

condições

$C = \beta e^{kt}$ $\quad t = 0 \quad c = 10 \Rightarrow \beta = 10$

outra condição

$C = 10 e^{kt}$ $\quad c = 5 \quad t = 3$

$5 = 10 e^{3k}$

$\frac{1}{2} = e^{3k}$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{3k}$

$3k = -0,693147$

$k = -0,23104$, deste modo

$\boxed{C(t) = 10 . e^{-0,23104 t}}$

Fonte: Relatório entregue por A6.

O objetivo de utilizar Equações Diferenciais Ordinárias para o desenvolvimento da situação foi o de mostrar que uma situação-problema pode ser desenvolvida, em uma atividade de modelagem, utilizando diferentes conteúdos matemáticos. Ao entrar em contato com essas diferentes ‘matemáticas’, alguns alunos estabeleceram relações entre elas, como a fala de A7.

Para uma interpretação da situação com relação à concentração de diazepan no organismo quando o tempo tende ao infinito, os alunos levaram em consideração que tal decaimento tende a zero (Figura 4.5) e entendem como exposto no início do desenvolvimento da atividade que este não desaparece, mas que pode se transformar em outra substância.

Figura 4.5– Registro de A6 para o cálculo do limite do modelo matemático para a Questão 1 da atividade de modelagem 'Diazepan no organismo'

Calculando o $\lim\limits_{t\to\infty} c(t)$, temos

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty} 10 \cdot \underbrace{e^{-0,231049t}}_{\text{Taxa de decaimento}} = 0$$

Fonte: Relatório entregue por A6.

Isso também fica evidente quando os alunos, mesmo entendendo que a concentração de diazepan não chegaria a zero, mas tenderia a zero, optaram por utilizar um valor muito próximo de zero (com tantas casas quanto a calculadora pudesse representar) para ter uma noção de quanto tempo o medicamento estaria no organismo, mesmo que com outro tipo de reação (Figura 4.6), buscando uma resposta para o problema em termos de resultados matemáticos.

Figura 4.6– Registro de A1 para a determinação do tempo em que o diazepan praticamente 'desaparecerá' do organismo da atividade de modelagem 'Diazepan no organismo'

$$* \quad \lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty} 10 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t/3} = 0$$

$$** \quad 0,000000001 = 10 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t/3}$$

$$0,0000000001 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t/3}$$

$$\log 0,0000000001 = \frac{t}{3} \log\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$3 \frac{\log 0,0000000001}{\log\left(\tfrac{1}{2}\right)} = t$$

$$t \cong 100$$

Após, aproximadamente, 100 horas, a concentração de diazepam é quase nula.

Fonte: Relatório entregue por A1.

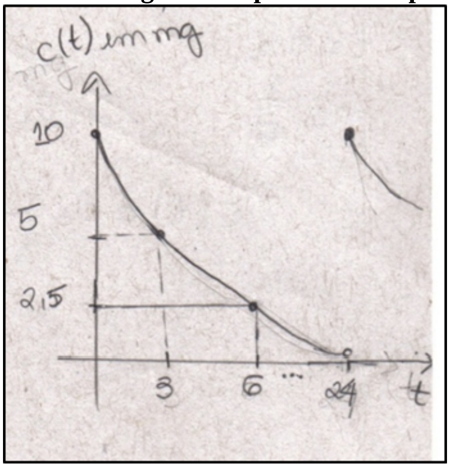
Concluindo que em cerca de 100 horas, ou seja, de 4 ou 5 dias o medicamento praticamente desaparece do organismo, findando o desenvolvimento da Questão 1 e das 2horas/aula em que a questão foi desenvolvida.

Levando em consideração o decaimento da concentração de diazepan no organismo e que de certo modo há de se seguir um tratamento que tem uma regularidade, passou-se para o desenvolvimento da Questão 2 — *Qual é a concentração de Diazepan no organismo, no decorrer do tempo, se o paciente ingerir um comprimido de 10 mg a cada 24 horas?*. Para iniciar esse estudo, os alunos precisam estabelecer relações entre a Questão 1 e a Questão 2, pois é a partir da ingestão do primeiro comprimido, que se comporta como descrito na Questão 1, que podemos generalizar a 'nova' situação-problema que se configurou.

Na inteiração da situação-problema que se configurou com a Questão 2, os alunos por intermédio da professora (PR) e da pesquisadora (P), iniciam a discussão para responderem o problema:

> P: *E agora, a Questão 2, o que vamos fazer para poder resolvê-la?*
> A7: *A gente vai partir do modelo matemático obtido na Questão 1? Mas ele não se aproxima de zero após quatro dias? Não são vinte e quatro horas!*
> P: *Sim, mas para que o medicamento faça efeito não podemos esperar ele praticamente desaparecer, é preciso ter uma periodicidade na sua ingestão.*
> PR: *Faz o gráfico aí na lousa* (Figura 4.7). *Qual é a concentração de diazepan no organismo após vinte e quatro horas?*
> A7: *No modelo da Questão 1?*
> PR: *É.*
> [realizando o cálculo de C(24) em $C(t) = 10.e^{-0,23104\, t}$]
> A7: *0,039071 miligramas.*
> PR: *Isso é o que tem depois de vinte e quatro horas! E se ingerir outro comprimido?*
> A7: *É o que sobrou mais dez miligramas. É agora... e a meia-vida... é do tempo prolongado?*
> P: *Mas um dia é tempo prolongado?*
> A7: *Mas e se tomar quinze dias?*
> P: *Neste caso, o período total é prolongado, mas a ingestão do medicamento ocorre diariamente!*
> [...]

Figura 4.7– Gráfico que representa a concentração de diazepan com a ingestão de novo comprimido após 24 horas da ingestão do primeiro comprimido



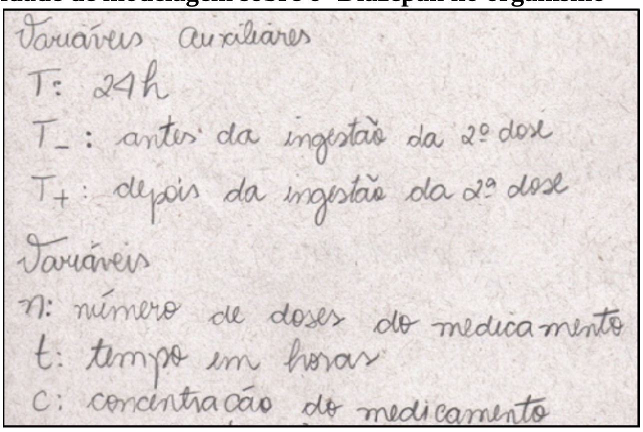
Fonte: Relatório entregue por A6.

De posse do signo gráfico (Figura 4.7), os alunos fizeram algumas considerações com a ajuda da pesquisadora para iniciar a dedução do modelo matemático.

> A7: *Tem que mexer naquele dez, né? Que ele deixa de ser dez e passa a ser dez e mais alguma coisinha. E como vai ingerindo um novo comprimido a cada dia vai aumentando o que fica remanescente.*
> P: *Isso, e agora para a gente desenvolver esse modelo, tem que considerar algumas variáveis auxiliares. Temos que considerar antes das vinte e quatro horas o que acontece, nas vinte e quatro horas o que aconteceu e após ingerir o medicamento, depois das vinte e quatro horas. Porque daí ele vai ter esse decaimento e quando você ingere, vai ter outro decaimento. E assim a gente vai considerando em cada intervalo de vinte e quatro em vinte e quatro horas.*

Conforme argumento apresentado por A7, de que sempre aumenta a quantidade remanescente antes de ingerir um novo medicamento, os alunos entenderam a necessidade de se utilizar variáveis auxiliares para cada dose (Figura 4.8).

Figura 4.8– Registro de A6 que apresenta as variáveis utilizadas para a dedução do modelo matemático para a Questão 2 da atividade de modelagem sobre o 'Diazepan no organismo'


Variáveis auxiliares
T: 24h
T_-: antes da ingestão da 2º dose
T_+: depois da ingestão da 2º dose
Variáveis
n: número de doses do medicamento
t: tempo em horas
c: concentração do medicamento

Fonte: Relatório entregue por A6.

Os alunos entendem que o uso das variáveis auxiliares ajuda na generalização da situação, por isso a importância de diferenciar t e T, para então, calcularem o comportamento do medicamento no organismo. Antes da ingestão da 2.ª dose, há de se considerar o modelo obtido na Questão 1 (Figura 4.9).

Figura 4.9– Registro de A6 que apresenta o modelo matemático da concentração de diazepan antes da ingestão da 2.ª dose para a Questão 2 da atividade de modelagem sobre o 'Diazepan no organismo'

Antes da ingestão vamos considerar a expressão (1)

$$C(T_-) = 10 \cdot e^{-0,23104t}$$

Fonte: Relatório entregue por A6.

A expressão que representa a concentração do medicamento após a ingestão da segunda dose leva em consideração a quantidade remanescente de diazepan em t=24 mais 10 mg do novo medicamento. Para determinar a concentração de medicamento no decorrer do tempo após a ingestão da segunda dose, os alunos afirmam que há a necessidade de utilizarem o decaimento do diazepan que foi expresso na Questão 1, e registrado por A6 na Figura 4.9. Para a visualização da concentração de dizepan remanescente por período após 24 horas é representado pelos alunos por meio de uma tabela (Figura 4.10).

Figura 4.10– Registro de A6 que apresenta a expressão que representa a concentração de diazepan após a ingestão da 2.ª dose para a Questão 2 da atividade de modelagem sobre o 'Diazepan no organismo'

Após tomar a 2ª dose

$C(T_+) = C(24) + 10$

$C(T_+) = 10 \cdot e^{-0,23104T} + 10$ $\quad t \geq T$ $\quad$ (T: 24 horas)

$t \leq 48$ $\quad 48 = 2T$

$C(T_+) = 10\left(e^{-0,23104T} + 1\right)$ para $T \leq t \leq 2t$

Para c(t) após 24 horas

$$C(t) = \underbrace{10\left(1 + e^{-0,23104T}\right)}_{c(t_+)} \cdot \underbrace{e^{-0,23104(t-T)}}_{\text{Taxa de decaimento p/ o intervalo}} \qquad T = 24 \qquad 24 \leq t \leq 48$$

t	c(t)
24	10,23104
25	7,96169
26	6,3152
27	5,0099
⋮	⋮
48	0,03922

$c(t) = 10 \cdot \left(1 + e^{-0,23104 \cdot 24}\right) \cdot e^{-0,23104(t-24)}$

$C(24) = 10 \cdot \left(1 + 0,039071\right) \cdot e^{-0,23104(24-24)}$

$C(24) = 10 \cdot (1,039071)$ ✓

Fonte: Relatório entregue por A6.

Mas, ainda não foi estabelecida uma generalização para a situação em estudo. Uma nova situação particular é proposta com a ingestão da 3.ª dose. Quando questionados sobre o que aconteceria com o comportamento da situação com a ingestão da 3.ª dose, A9 apresenta alguns argumentos.

> A9: *A tendência é aumentar a concentração no final do tempo, porque você está ingerindo a cada período, quer dizer que no próximo período final setenta e duas horas, você teria um pouco mais da quantidade anterior, um pouco mais do que zero vírgula três nove dois dois.*
> P: *E quanto seria esse um pouco a mais?*
> A9: *Aí eu não calculei*, [risos]
> P: *E como você consegue calcular para esse setenta e dois?*
> A9: *É parecida com aquela e ficaria assim* [e relata para a ingestão da 3.ª dose, conforme Figura 4.11].
> P: *E como a gente faz para escrever matematicamente isso?*
> A4: *É mais fácil falar do que escrever!*

Figura 4.11– Registro de A6 que apresenta a expressão que representa a concentração de diazepan após a ingestão da 3.ª dose para a Questão 2 da atividade de modelagem sobre o ‘Diazepan no organismo’

Após a ingestão da 3ª dose de diazepam

$$C(2T_+) = C(2T_-) + 10$$

$$C(2T_+) = \Big[\underbrace{10\,(1+e^{-0,23104T}).\,e^{-0,23104(2t-T)}}_{C(t=2T)}\Big] + 10$$

$$C(2T_+) = 10.\,(1+e^{-0,23104T} + e^{-0,23104.\,2T})$$

Assim para $t \geq 48$ $\quad 48 = 2t$

$$C(t) = 10\,(1+e^{-0,23104T} + e^{-0,23104.\,2T}).\,e^{-0,23104(t-2T)}$$

Fonte: Relatório entregue por A6.

A partir das regularidades observadas com a ingestão das 2.ª e 3.ª doses, é possível generalizar a situação-problema (Figura 4.12).

Figura 4.12– Registro de A6 que apresenta a generalização para a Questão 2 da atividade de modelagem sobre o 'Diazepan no organismo'

Deste modo a expressão que representa a ingestão de $(n+1)$ doses, pode ser dada por

$$\boxed{C(nt) = 10.(1+e^{-0,23104T} + e^{-0,23104\,2T} + \dots + e^{-0,23104nt}).e^{-0,23104(t-nT)}} \quad (2)$$

$$nt \leq t \leq (n+1)T$$

Observe que a expressão entre parenteses é a soma de uma PG finita sendo $a_1 = 1$ e $q = e^{-0,23104T}$

$$S_n = a_1 . \frac{(1-q^n)}{1-q} \quad ; \; n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$1 + e^{-0,23104T} + \dots + e^{-0,23104nT} = \frac{1-(e^{-0,23104T})^{n+1}}{1-e^{-0,23104T}} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2)

$$C(t) = 10\left(\frac{1-e^{-0,23104(n+1)T}}{1-e^{-0,23104}}\right).e^{-0,23104(t-nT)} \quad (4)$$

Fonte: Relatório entregue por A6.

A4: *Muito difícil essas coisas!*
A8: *Eu achei mais trabalhoso do que difícil. Na verdade são coisas que a gente já estudou e a gente precisa relembrar. Mas é bem cansativo o desenvolvimento.*
A4: *Mas será que realmente esse modelo é verdadeiro?*
P: *O que podemos fazer para interpretá-lo?*
A9: *A gente pode fazer cálculos para alguns valores.*
P: *O que vocês acham de fazer uma tabela, considerando que a pessoa toma o medicamento certinho no horário, lembrando que te grande é igual a vinte e quatro. Então podemos pensar em valores de doze em doze horas para ver a concentração de diazepan?*
A4: *Será que sempre vai aumentar o que fica após as vinte e quatro horas?*
A9: *Ah... eu acho que vai chegar um momento que vai ser constante. É só a gente calcular o limite da função e ver o que acontece quando o número de doses tende ao infinito.*
A6: *Eu vou fazer uma tabela aqui* [Figura 4.13]
A9: *Faz a tabela aí A6, eu vou calcular o limite da função aqui e a gente vê o que acontece.*

Os alunos não querem somente generalizar, mas explorar um modelo que descreve a situação-problema em estudo. Uma representação matemática para a situação não é suficiente para esses alunos na atividade de modelagem, eles buscam uma interpretação para o problema, principalmente quando A4 questiona se realmente o modelo condiz com a situação, mobilizando uma aceitação ou refutação para tal. A partir deste questionamento, os alunos se mobilizam para o estudo da concentração de diazepan no organismo.

Figura 4.13– Registro de A6 que apresenta a tabela com a validação do modelo matemático obtido na Questão 2 da atividade de modelagem sobre o 'Diazepan no organismo'

n	t	C(t)	C(mg)
0	0 12 24	$10 \cdot e^{-0,23104t}$	10 0,625 0,0390625
1	24 36 48	$10,0390625\, e^{-0,23104(t-24)}$	10,0390625 0,627441407 0,03922
2	48 60 72	$10,03922\, e^{-0,23104(t-48)}$	10,003922 0,627451 0,039215
3	72 84 96	$10,039215\, e^{-0,23104(t-72)}$	10,039215 0,627450 0,039215

Fonte: Relatório entregue por A6.

Ao observarem o último valor de concentração de diazepan apresentado em cada cédula da tabela, os alunos evidenciam que de fato essa concentração está se estabilizando e quando A9 apresenta o resultado que encontrou aplicando o limite na função quando *n* tende ao infinito (Figura 4.14), estes relacionam o conceito de limite aos valores que foram calculados e apresentados na Figura 4.13, conforme as falas:

> A4: *Nossa, mas dá muito certinho mesmo. Eu não iria pensar em limite para esse caso.*
> A9: *Mas é que uma coisa não pode ir crescendo de forma infinita, tem que haver um limite para isso.*
> A6: *É de fato, quando a gente olha na tabela, nas primeiras doses a concentração vai aumentando e depois vão ficando muito próximas.*

Figura 4.14– Registro de A9 para o cálculo do limite da função apresentada no modelo matemático obtido na Questão 2 da atividade de modelagem sobre o 'Diazepan no organismo'

DA expressão (4) é possível encontrar a concentração saturada de diazepan no organismo

$$\lim_{n \to +\infty} C(nT) = \lim_{n \to +\infty} 10\left(\frac{1-e^{-0,23104(n+1)T}}{1-e^{-0,23104T}}\right) = \frac{10}{1-e^{-0,23104T}}$$

Como $T = 24$

$$\lim_{n \to +\infty} C(nT) = 10,03922425$$

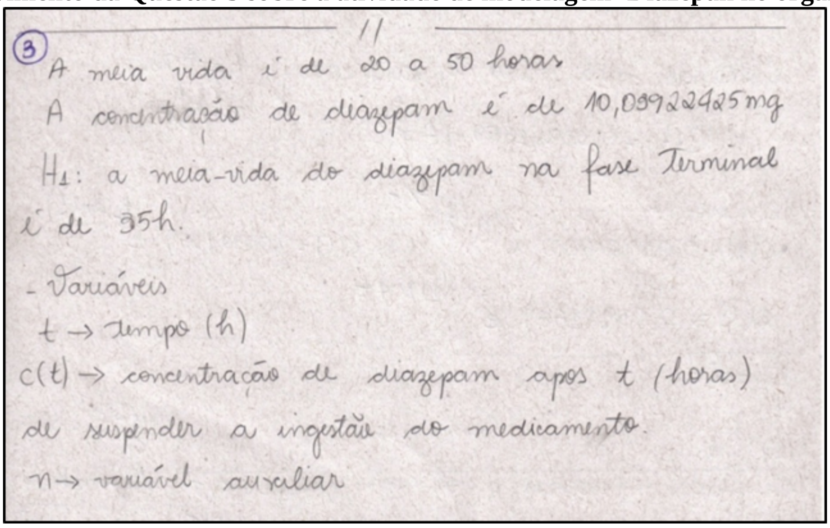
$$C_6 = 10,03922425$$

Fonte: Relatório entregue por A9.

Findada a resolução da Questão 2 com as discussões sobre o conceito de limite na situação-problema, passou-se para a resolução da Questão 3 — *Após 4 dias de tratamento, a* *concentração do medicamento no organismo se estabiliza. Analisar o decaimento da concentração quando o paciente suspende a ingestão do medicamento*. Para resolver esta questão, os alunos entenderam que corresponde a um estudo baseado na Questão 2, em que uma pessoa toma o medicamento e após um período para de utilizá-lo. Embora não foi feita uma abordagem dos malefícios que uma suspensão brusca possa causar ao organismo, os alunos discutiram que essa atitude não pode ser realizada, ou seja, nenhum medicamento pode ser suspendido sem orientações médicas. Os comentários sobre esse fato foram pontuais e breves, focando-se na discussão da resolução da questão em estudo.

Como na Figura 4.14 é apresentada a concentração saturada (C_s=10,03922425) de medicamento, pensou-se em partir dessa concentração de diazepan no organismo e iniciar o estudo do decaimento desta concentração a partir da meia-vida correspondente ao período prolongado de tempo, como apresentado na Figura 4.15.

Figura 4.15– Registros de A6 que apresentam informações e variáveis utilizadas para o desenvolvimento da Questão 3 sobre a atividade de modelagem 'Diazepan no organismo'



3

A meia vida é de 20 a 50 horas

A concentração de diazepam é de 10,03922425mg

H_1: a meia-vida do diazepam na fase Terminal é de 35h.

- Variáveis

t → tempo (h)

c(t) → concentração de diazepam após t (horas) de suspender a ingestão do medicamento.

n → variável auxiliar

Fonte: Relatório entregue por A6.

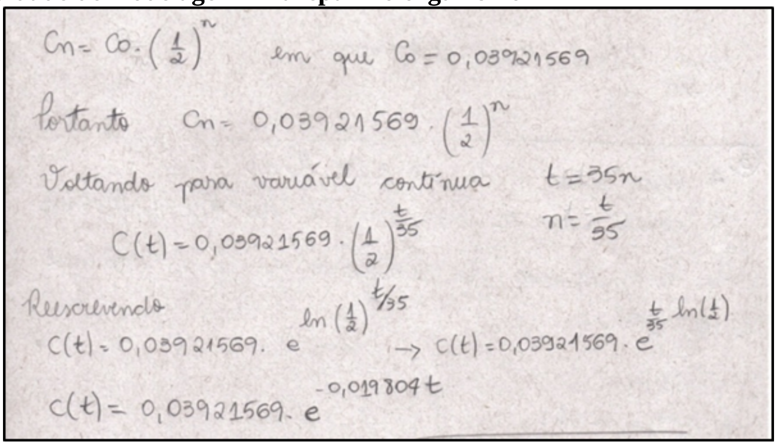
Como se trata de um decaimento da concentração de diazepan no organismo a partir de uma concentração inicial, o desenvolvimento da atividade é similar ao da Questão 1. Para tanto, pensamos inicialmente em utilizar como concentração inicial C_0=10,03922425 mg obtida na Questão 2. No entanto, por meio da fala de A7 fizemos uma análise do problema:

A7: *Por que a gente vai utilizar o valor dez vírgula zero trinta e nove?*
P: *Porque corresponde à concentração saturada do medicamento no instante em que o paciente para de ingerir diazepan.*
A7: *Mas nesse caso a meia-vida é de trinta e cinco horas?*
P: *Sim.*

A7: *O medicamento entende que a pessoa não irá ingerir mais diazepan? Como a gente pode considerar que a meia-vida nesse caso é de longo prazo?*
PR: *É realmente. No momento em que o paciente para de ingerir diazepan a meia-vida do medicamento é de curto prazo!*
P: *Verdade!*
A7: *Professora a concentração após o período de vinte e quatro horas não é de zero vírgula trinta e nove e alguma coisa?*
PR: *É sim.*
A7: *Então a gente poderia considerar essa como inicial e nela aplicar a meia-vida de trinta e cinco horas.*
PR: *É isso mesmo!*
P: *Legal, pessoal, a A7 fez uma consideração interessante que devemos levar em conta para o estudo da diminuição de diazepan no organismo após o paciente finalizar o tratamento. Todos concordam?*
Alunos: *Sim...*

A partir da interferência de A7, os alunos abandonam a ideia de desenvolver a situação a partir da quantidade saturada de medicamento no organismo e consideram a quantidade inicial de concentração como C_0=0,03921569 mg, obtendo o modelo matemático para a concentração de diazepan no organismo (Figura 4.16).

Figura 4.16– Registro de A6 com modelo matemático da Questão 3 sobre a atividade de modelagem 'Diazepan no organismo'



$C_n = C_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ em que $C_0 = 0{,}03921569$

Portanto $C_n = 0{,}03921569 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Voltando para variável contínua $t = 35n$

$C(t) = 0{,}03921569 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{35}}$ $n = \frac{t}{35}$

Reescrevendo

$C(t) = 0{,}03921569 \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{t/35}} \rightarrow C(t) = 0{,}03921569 \cdot e^{\frac{t}{35}\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

$C(t) = 0{,}03921569 \cdot e^{-0{,}019804t}$

Fonte: Relatório entregue por A6.

Ao término do desenvolvimento da atividade, alguns alunos esboçaram algumas considerações:

A4: *Nossa... muitos conteúdos matemáticos foram necessários nesta atividade!*
A8: *Estou bem cansado, mas entendi o comportamento do medicamento no organismo.*
A9: *É tem que saber ou lembrar algumas coisas que a gente já estudou.*
A1: *Será que dá para eu fazer isso em uma sala de aula da Educação Básica?*
A6: *Precisa de algumas adaptações...*
A4: *Eu acho que não dá não!*

No primeiro contato com o desenvolvimento de uma atividade de modelagem, os alunos envolvidos consideraram-na complexa, no entanto, utilizaram de conteúdos matemáticos que já tinham conhecimento.

4.3.2 CONTEXTO DO 2.º MOMENTO — ATIVIDADE 2: O CONSUMO DE CIGARRO

A atividade 2 foi desenvolvida no âmbito de uma avaliação. Alguns dos alunos reunidos em duplas ou trios receberam esta atividade, no entanto, haviam duplas/trios trabalhando com outra atividade[36]. O desenvolvimento desta atividade pelos alunos ocorreu como caracterizado no 2.º momento, em que os alunos complementam a coleta de informações para a investigação da situação com a definição de variáveis e de hipóteses, a obtenção e validação do modelo matemático bem como seu uso para a análise da situação. Para o desenvolvimento desta atividade, os alunos podiam utilizar notas de aula, além de livros de modelagem. Esta atividade foi desenvolvida durante 4horas/aula, sendo solicitada aos alunos a entrega de relatório com a resolução. Nesta atividade, além do relatório entregue, foi realizada gravação em áudio e vídeo do desenvolvimento da atividade e uma entrevista semi-estruturada. O roteiro da entrevista encontra-se no Apêndice C.

Como essa atividade de modelagem foi pensada para ser realizada como uma avaliação no que consiste a deixar para o aluno o desenvolvimento, organizamos (professora e pesquisadora) um encaminhamento que delineasse o trabalho que possivelmente os alunos desenvolveriam.

Para esta atividade inicialmente apresentamos o desenvolvimento que *a priori* pensamos que poderia ser desenvolvido pelos alunos, apresentando o problema, as variáveis, a hipótese, a tendência dos dados e o modelo matemático obtido.

A atividade relacionada à situação *O consumo de cigarro* foi desenvolvida por duas duplas e dois trios de alunos. Em nossa pesquisa vamos apresentar a descrição do desenvolvimento da atividade de um dos trios, no qual A8 faz parte. Os alunos deste trio participaram da atividade do *Diazepan no organismo* e dessa forma vamos representá-los com o mesmo código — A2, A4 e A8.

---

[36] A atividade a qual nos referimos e que outras duplas/trios desenvolveram corresponde à Atividade 3: *Cálcio no rio Limoeiro*.

A situação-problema *O consumo de cigarro* foi elaborada e apresentada aos alunos com base em informações obtidas em Almeida, Silva & Vertuan (2012). Esta atividade consta na referência como sugestão de ser desenvolvida em sala de aula pelo leitor. No entanto, os encaminhamentos não foram apresentados na respectiva referência. Desse modo, propusemos um possível encaminhamento para tal situação, além de acrescentar informações como as apresentadas no Quadro 4.5.

Quadro 4.5– Atividade de modelagem sobre 'O consumo de cigarro'

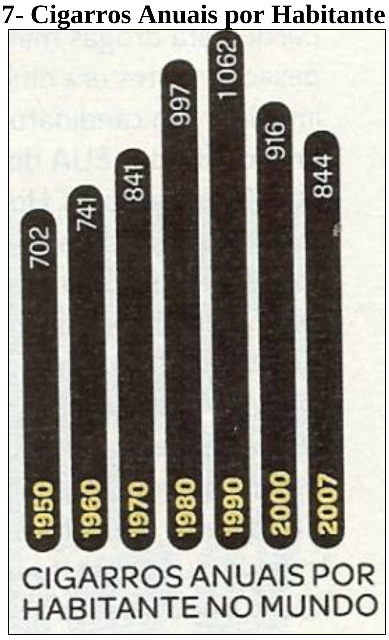
O CONSUMO DE CIGARRO

O consumo de cigarros é uma das causas de doenças e morte prematura mais investigada na humanidade. Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS) mais de 60 mil pesquisas foram publicadas e reproduzidas em diversos lugares do mundo, comprovando a relação causal entre o consumo do cigarro e doenças graves como câncer de pulmão (90% dos casos), enfisema pulmonar (80%), infarto do miocárdio (25%), bronquite crônica e derrame cerebral (40%).

O consumo do cigarro atingiu a proporção de uma epidemia global, provocando, a cada ano, a morte de 4 milhões de pessoas em todo o mundo. Trata-se, portanto, de um quadro preocupante com consequências graves sobre a saúde da população, a economia e o meio ambiente.

Dados da organização não-governamental Aliança de Controle do Tabagismo indicam que o número de fumantes entre os adultos vem caindo nas últimas décadas (Figura 4.17). Entre o público jovem, entretanto, ocorre o processo inverso. O número de jovens entre 13 e 17 anos que são fumantes tem aumentado, fato sinalizado por pesquisa divulgada na revista Nova Escola de 2007 a qual informa que aproximadamente 25% de alunos da rede pública do 6º ano ao Ensino Médio se declararam fumantes.

Figura 4.17- Cigarros Anuais por Habitante no Mundo



Fonte[37]: Revista Super Interessante, agosto de 2009, p. 35.

Fonte: Baseado em ALMEIDA; SILVA; VERTUAN (2012).

[37] VERSIGNASSI, A. Até a última ponta. *Revista Super Interessante*, agosto de 2009, 268, p. 35.

As informações relativas ao período de 1950 e 2007 indicam que entre as décadas de 1950 e 1990 o consumo anual de cigarros por habitante foi crescente. Todavia para o período entre 1990 e 2007 é possível observar o decrescimento deste consumo. Considerando que isso seja uma tendência, pode ser interessante investigar o comportamento dessa diminuição nas próximas décadas. Realizar esta investigação implica em elencar algumas hipóteses que conduzirão a investigação.

Usando os dados da Figura 4.17 podemos verificar que no período entre 1990 e 2000 o decrescimento do consumo anual de cigarros por pessoa corresponde a aproximadamente 13,75%. Já para o período de 2000 a 2007 este percentual cai para 7,86%.

Considerando como hipótese que o decaimento de 7,86% do último período foi igualmente distribuído entre os sete anos, podemos afirmar que o consumo diminuiu em 1,12% ao ano nesse período. Supondo também que este percentual se manteve no período entre 2007 e 2010, podemos afirmar que a quantidade de cigarros consumida por pessoa em 2010 foi de 813 cigarros. Com estes dados construímos a Tabela 4.1.

Tabela 4.1- Número de cigarros consumidos por ano por pessoa

Ano (t)	Número de cigarros
1990	1062
2000	916
2010	813

Fonte: Tabela construída pela professora e pela pesquisadora.

Podemos, portanto, afirmar que os dados da Tabela 4.1 indicam que no período entre 1990 e 2000 o número de cigarros fumados por pessoa diminuiu em 13,75%. Já para o período entre 2000 e 2010 este percentual caiu para 11,22%, aproximadamente.

No entanto, levando em consideração as campanhas mundiais de combate ao fumo bem como as novas regulamentações em relação ao uso do cigarro em lugares públicos, vamos supor que o número de cigarros fumados por pessoa vai continuar diminuindo nas próximas décadas.

PROBLEMA

Considerando essa suposição, estamos interessados em investigar em que época o número de cigarros consumidos por ano por pessoa volta a se aproximar, pelo menos, da quantidade consumida no ano de 1950.

Fonte: Baseado em ALMEIDA; SILVA; VERTUAN (2012).

Para responder o problema, levamos em consideração t como variável independente, dada em anos, n uma variável auxiliar associada ao ano e $f(n)$ o número anual de cigarros consumidos por pessoa e montamos a Tabela 4.2.

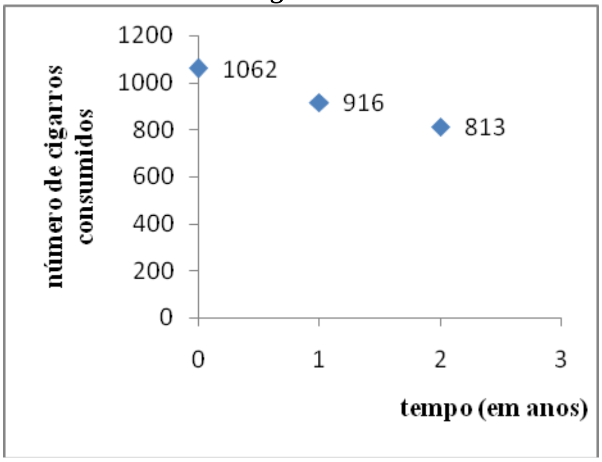
Tabela 4.2 - Número de cigarros consumidos por ano por pessoa, utilizando variável auxiliar

Ano (t)	tempo (n)	Número de cigarros
1990	0	1062
2000	1	916
2010	2	813

Fonte: Tabela construída por professora e pesquisadora.

A partir da Tabela 4.2 representamos os dados no plano cartesiano (Figura 4.18). Neste trabalho, utilizamos a planilha eletrônica Excel.

Figura 4.18- Representação gráfica da tendência dos dados utilizados na atividade de modelagem sobre 'O consumo de cigarro'



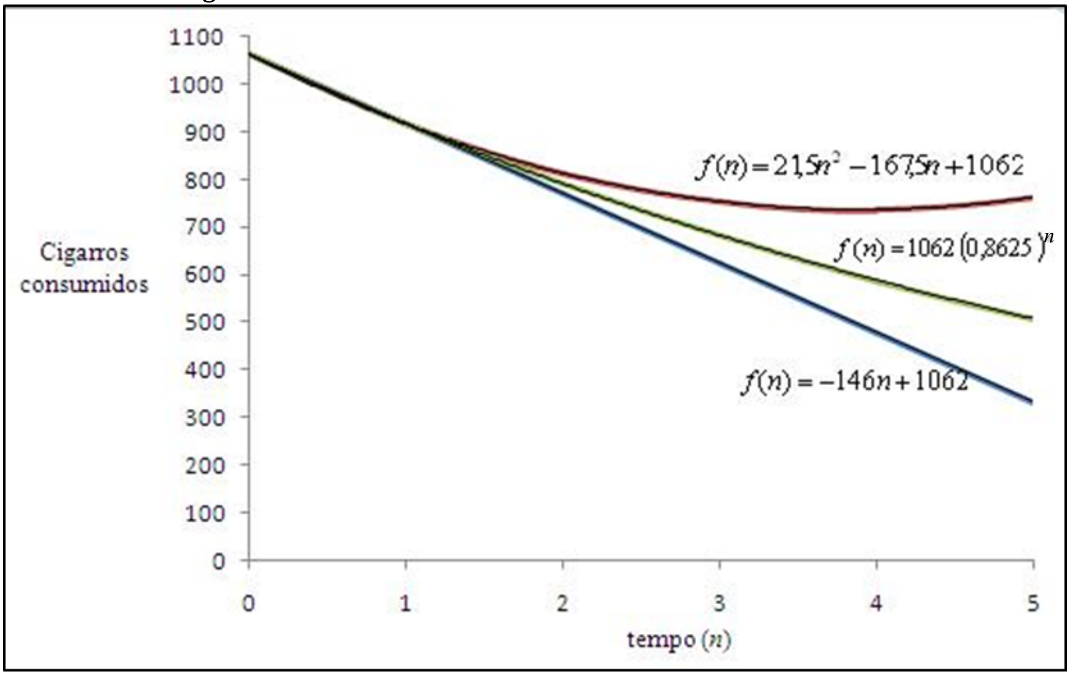
Fonte: Gráfico construído por professora e pesquisadora.

Pela tendência dos dados levamos em consideração que o modelo matemático da atividade poderia ser representado por uma função linear, uma função quadrática ou uma função exponencial. Deste modo, além de considerarmos que o número de cigarros fumados por pessoa por ano continuaria diminuindo, para cada modelo levamos em consideração a tendência dos dados. Obtivemos, então o modelo linear $f(n) = -146n + 1062$; o modelo quadrático $f(n) = 21{,}5n^2 - 167{,}5n + 1062$ e o modelo exponencial $f(n) = 1062(0{,}8625)^n$, em que $n = \dfrac{t - 1990}{10}$ com $t \geq 1990$.

Retomando ao problema, para saber em que ano a quantidade de cigarros consumidos por pessoa por ano aproximasse do número de cigarros consumidos em 1950, igualamos cada modelo matemático a 702. Para o modelo linear, é por volta de 2015 que o número de cigarros se aproximará de 702; no modelo exponencial, é por volta de 2018 e para o estudo do modelo quadrático, encontramos que o ponto de mínimo da função associado ao número de cigarros consumidos por ano por pessoa é de 736, ou seja, superior a 702. Desse modo, pelo modelo quadrático o número de cigarros consumidos por pessoa não chegaria ao de 1950.

Para uma visualização do decrescimento das funções que representam o modelo matemático, traçamos, com ajuda da planilha eletrônica Excel, em um mesmo plano cartesiano o gráfico de cada modelo, como apresentado na Figura 4.19. Neste aspecto, se considerássemos uma política governamental indicando um rápido decrescimento do número de cigarros consumidos por pessoa por ano, o modelo linear seria o mais apropriado.

Figura 4.19- Gráfico dos modelos matemáticos obtidos na atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'



Fonte: Gráfico construído por professora e pesquisadora.

Além do problema a ser resolvido, questionamentos referentes à atividade foram propostos com o objetivo de os alunos fazerem uma análise da situação-problema (Quadro 4.6).

Quadro 4.6– Questões que se remetem à atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'

1. O que significa, do ponto de vista matemático, o fato de a quantidade de cigarros consumida por habitante no ano de 2010 ser 813 unidades e esperar-se que ocorra uma redução para 702 unidades? **2.** Esta redução de consumo anual para aproximadamente 702 cigarros por ano pode variar em decorrência de qual característica do modelo matemático determinado para descrever a situação? **3.** Determine pelo menos 3 modelos matemáticos diferentes analisando-os e comparando-os em relação à característica definida na questão anterior. **4.** Uma política governamental indicando um rápido decrescimento do número de cigarros consumidos por pessoa por ano deveria usar qual dos modelos matemáticos construídos? Justifique.

Fonte: Construído pela professora e pela pesquisadora.

Inicialmente essa atividade foi proposta para ser desenvolvida pelos alunos em 2horas/aula. No entanto, devido ao envolvimento que tiveram com tal atividade, esta foi retomada em aula posterior. Os registros que apresentamos correspondem aqueles que os alunos utilizaram durante a realização da atividade na avaliação. Considerações que eles possam ter abarcado no período de uma aula para outra não foram levantadas, visto que não tivemos contato com os alunos neste período, ou seja, não podemos afirmar que para finalizar o desenvolvimento da atividade os alunos tenham buscado informações em outras fontes.

O primeiro passo dos alunos com relação à atividade foi compreender as informações apresentadas, conforme diálogo:

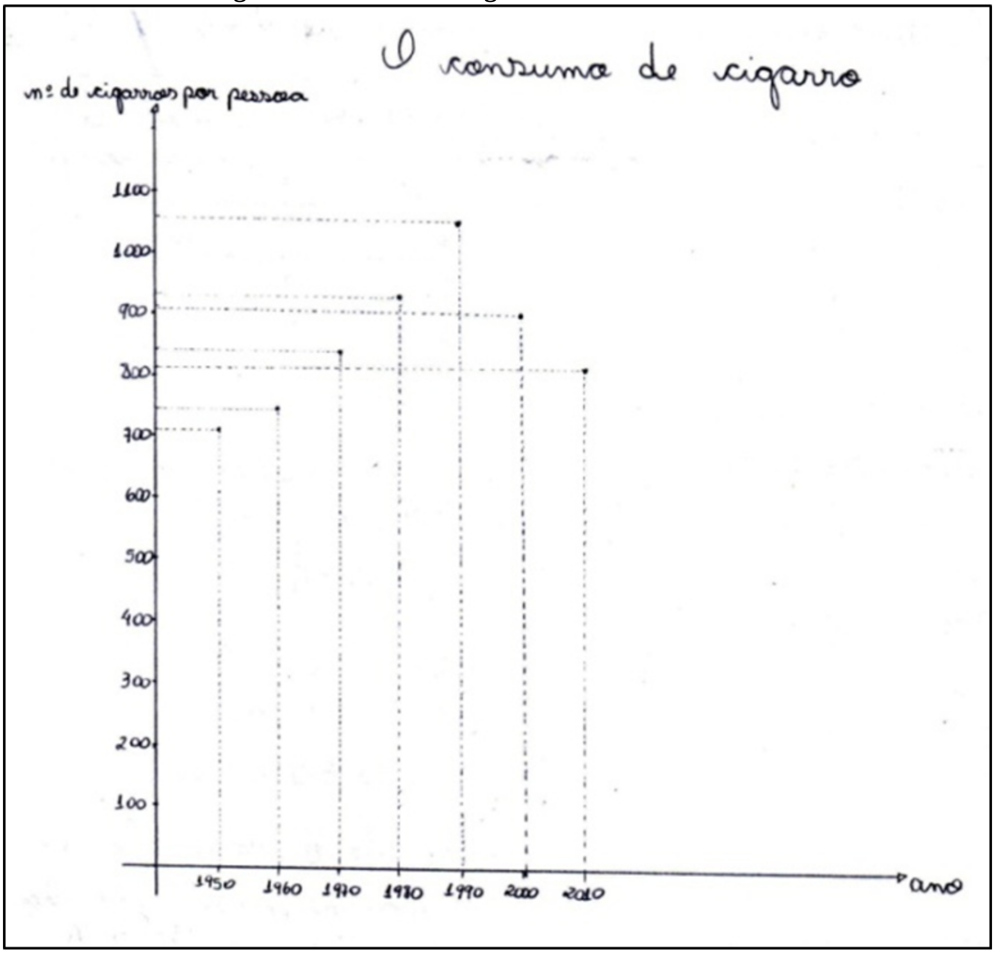
> A2: *Tem uma regrinha não tem?*
> A8: *Mas olha, o valor com relação ao ano, não está em proporção?*
> [e começam a abarcar o problema a partir das informações sobre proporção que foi utilizada para montar a Tabela 4.1].
> A4: *A gente viu que de dois mil e oito, dois mil e nove a taxa diminuiu, mas e a partir de dois mil e dez? Não podemos afirmar nada!*
> A8: *É o que a gente vai utilizar como hipótese... é essa taxa de decaimento.*
> A4: *Então vamos considerar que continue na mesma taxa de decaimento então.*
> A8: *Porque se eu fosse fazer uma função linear daqui para cá, eu ia considerar essa taxa, essa taxa que decai aqui.*
> [e continuam a tentar determinar uma regularidade a partir dessas informações da situação-problema].

Os alunos identificam que com as informações que eles possuem, precisam definir hipóteses, como considerar que a taxa de decaimento continue nos próximos anos. No entanto, toda a discussão fica em torno da taxa de proporção apresentada no texto e que foi utilizada nos cálculos para a obtenção do número de cigarros para o ano de 2010. Uma mudança nas discussões sobre a utilização dos dados ocorre quando A2 apresenta seus argumentos com relação à interpretação com a situação-problema e provoca outra abordagem iniciada por A8.

> A2: *Mas a taxa de decaimento de um mil novecentos e noventa para dois mil é maior do que no outro período, será que a gente pode dizer que esse decaimento é linear?*
> A4: *E daí coloca ou não coloca a taxa de decrescimento como hipótese?*
> A8: *É... eu não posso considerar que isso vai continuar com os demais dados. Se a gente olhar o gráfico como um todo* [referindo-se à curva de tendência que A4 traçou a partir dos dados da Figura 4.17 e que é apresentada na Figura 4.20], *aqui dá uma parábola, e nessa parte* [apontando para anos a partir de 1990] *parece exponencial.*
> A4: *Mas a tabela e o problema falam apenas da parte do decaimento.*
> [e continuam a tentar determinar uma regularidade a partir dessas informações da situação-problema].

Na produção de seus interpretantes, A8 utiliza-se de argumentos com relação ao objeto matemático ‘função quadrática’ que tem como signo gráfico uma representação próxima à apresentada na Figura 4.20.

Figura 4.20- Registro de A4 para a curva de tendência dos dados apresentados na atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'



Fonte: Relatório entregue por A4.

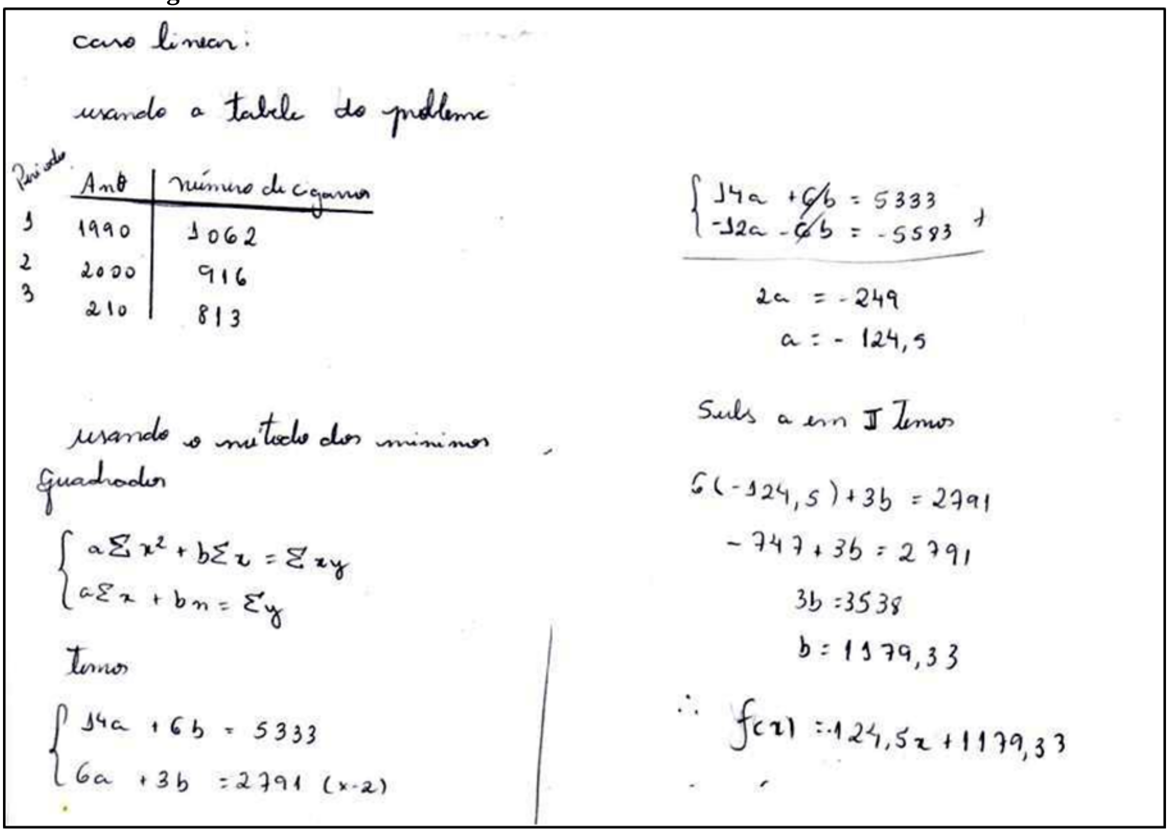
Embora representem todos os dados da Figura 4.17 no plano cartesiano, os alunos entendem que para a abordagem do problema, somente o intervalo decrescente do gráfico é considerado para a resolução do problema proposto e abandonam as hipóteses sobre proporção estabelecidas inicialmente.

Neste sentido, ao fazer as simplificações para a dedução do modelo, estabelecem algumas características para o problema. No caso da situação-problema *O consumo de cigarro*, a simplificação auxiliou os alunos a iniciar o desenvolvimento da atividade para a resolução do problema. Além de simplificações com relação ao que deve ser utilizado para a resolução do problema, os alunos utilizam de variável auxiliar para simplificar os cálculos matemáticos e trabalhar com unidades ao invés de milhares, conforme diálogo durante a resolução.

A4: *Acho bom a gente considerar o período como variável auxiliar. Você utilizou o período A8?* [conversando com A8 que está escrevendo na folha de forma isolada de seu trio].
A8: *Aham* [afirmando, sem parar de escrever].
A2: *Para a gente fazer as continhas, acho bom a gente começar a montar uma tabela.*
A4: *Aham* [afirmando e olhando para os registros de A8].
A8: *O período é de dez em dez anos.*
A2: *Vamos fazer a tabelinha então e começar a deduzir um modelo linear!*
A8: *A partir do método dos mínimos quadrados dá para a gente definir essa função.*
A4: *Beleza, então vamos...*
[começam a realizar individualmente os cálculos para encontrar o modelo linear por meio do método dos mínimos quadrados].

A partir das considerações que realizam sobre a hipótese e as variáveis, o trio inicia a dedução do modelo matemático, representado pela função linear (Figura 4.21). As considerações que utilizam para a dedução do modelo são definidas em conjunto, mas as relações matemáticas e os cálculos matemáticos são realizados individualmente e 'conferidos' entre os alunos. Utilizamos registros dos três alunos do trio por estar em consonância com os registros entregues por A8, mas que apresentam melhor resolução de imagem. Pelas imagens gravadas em vídeo, enquanto A8 resolve, os outros membros do trio discutem a situação-problema e copiam a resolução de A8.

Figura 4.21- Registro de A8 na obtenção do modelo linear na atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'



caso linear:

usando a tabela do problema

Período	Ano	número de cigarros
1	1990	1062
2	2000	916
3	210	813

usando o método dos mínimos quadrados

$$\begin{cases} a\Sigma x^2 + b\Sigma x = \Sigma xy \\ a\Sigma x + bn = \Sigma y \end{cases}$$

temos

$$\begin{cases} 14a + 6b = 5333 \\ 6a + 3b = 2791 \quad (x-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14a + \cancel{6}b = 5333 \\ -12a - \cancel{6}b = -5583 \end{cases} +$$

$$2a = -249$$

$$a = -124,5$$

Subs a em II temos

$$6(-124,5) + 3b = 2791$$

$$-747 + 3b = 2791$$

$$3b = 3538$$

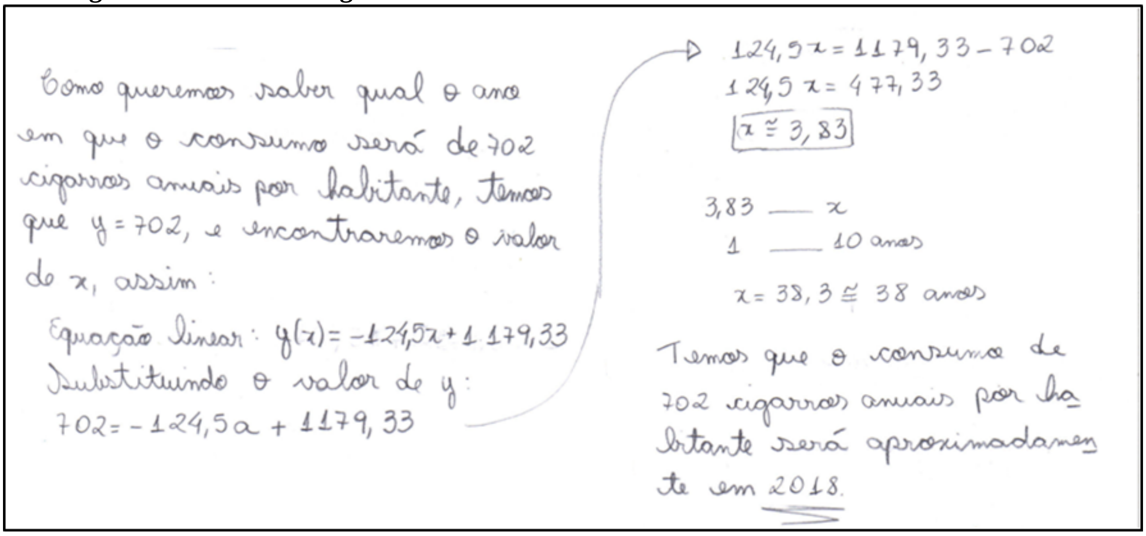
$$b = 1179,33$$

$$\therefore f(x) = -124,5x + 1179,33$$

Fonte: Relatório entregue por A8.

O próximo passo dos alunos foi, a partir do modelo matemático obtido, responder ao problema (Figura 4.22) para, em seguida, validar o modelo matemático (Figura 4.23).

Figura 4.22- Registro de A4 para a resposta ao problema por meio do modelo linear da atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'



Como queremos saber qual o ano em que o consumo será de 702 cigarros anuais por habitante, temos que $y = 702$, e encontraremos o valor de x, assim:

Equação linear: $y(x) = -124{,}5x + 1\,179{,}33$

Substituindo o valor de y:

$702 = -124{,}5a + 1179{,}33$

$124{,}5x = 1179{,}33 - 702$

$124{,}5x = 477{,}33$

$\boxed{x \cong 3{,}83}$

3,83 ___ x

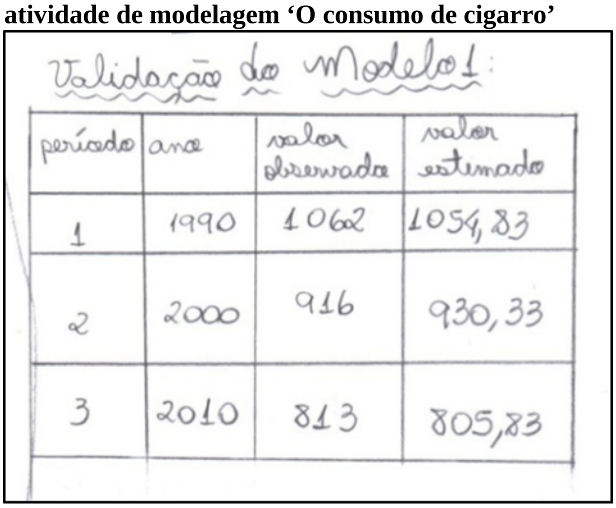
1 ___ 10 anos

$x = 38{,}3 \cong 38$ anos

Temos que o consumo de 702 cigarros anuais por habitante será aproximadamente em 2018.

Fonte: Relatório entregue por A4.

Figura 4.23- Registro de A4 para a validação do modelo matemático obtido por meio do modelo linear da atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'



Validação do Modelo 1:

período	ano	valor observado	valor estimado
1	1990	1062	1054,83
2	2000	916	930,33
3	2010	813	805,83

Fonte: Relatório entregue por A4.

Os alunos também resolveram o problema por meio da obtenção de um modelo matemático representado por uma 'função exponencial' (Figura 4.24). Para a dedução do modelo matemático, os alunos utilizaram Equações Diferenciais Ordinárias, os procedimentos de linearização e o método dos mínimos quadrados.

Figura 4.24- Registro de A4 na obtenção do modelo exponencial na atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'

Consideramos que

$\frac{dc}{dt} = kc$ (EDO separável)

$\int \frac{dc}{c} = \int k\,dt$

$\ln c = kt + c_1$

$e^{\ln c} = e^{kt + c_1}$, $e^{c_1} = \beta$

$c = \beta e^{kt}$

Linearizando temos

$\ln c = \ln \beta + \ln e^{kt}$

$\ln c = \ln \beta + kt$

Considere

$\ln c = y$

$\ln \beta = b$

$k = a$

$t = x$

$\boxed{y = ax + b}$

p	ano	nº cigarros (c)	ln C
1	1990	1062	6,9679
2	2000	916	6,82
3	2010	813	6,7

$\sum_{i=1}^{3} x^2 = 14$ $\sum_{i=1}^{3} xy = 40,7079$

$\sum_{i=1}^{3} x = 6$ $\sum_{i=1}^{3} y = 20,4879$

Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados

13

$\begin{cases} 14a + 6b = 40,7079 \\ 6a + 3b = 20,4874 \quad (x-2) \end{cases}$

$+\begin{cases} 14a + 6b = 40,7079 \\ -12a - 6b = -40,9758 \end{cases}$

$2a = -0,2679$

$a = -0,13395 = K$

$b = 7,0972$

$\ln \beta = b$

$\ln \beta = 7,0972$

$e^{\ln \beta} = e^{7,0972}$

$\beta = 1208,57$

Logo

$C(t) = 1208,578\, e^{-0,13395\, t}$

Fonte: Relatório entregue por A4.

O passo seguinte após dedução do modelo matemático foi a validação de tal modelo (Figura 4.25).

Figura 4.25- Registro de A4 para a validação do modelo matemático obtido por meio do modelo exponencial da atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'

Validação do Modelo 2:

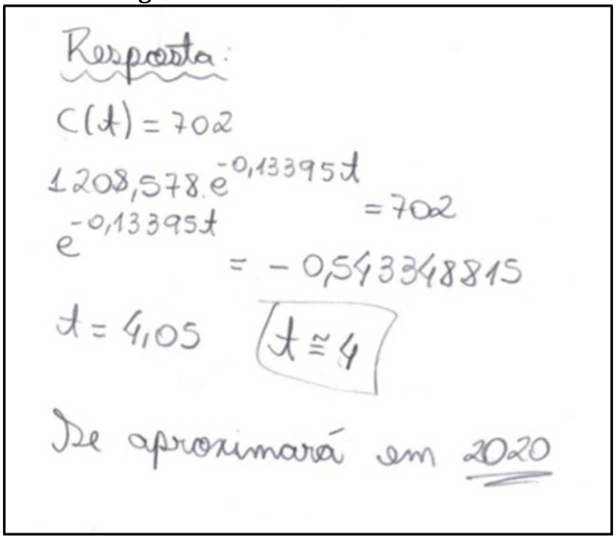
p	ano	valor observado	valor estimado
1	1990	1062	1057,06
2	2000	916	924,5
3	2010	813	808,63

Fonte: Relatório entregue por A4.

Os alunos não utilizaram do recurso gráfico para representar o modelo matemático e fazer uma análise sobre o decrescimento desta função, como esperado no encaminhamento proposto para a resolução.

A resposta ao problema, neste modelo, foi apresentada após a validação, conforme apresentado na Figura 4.26.

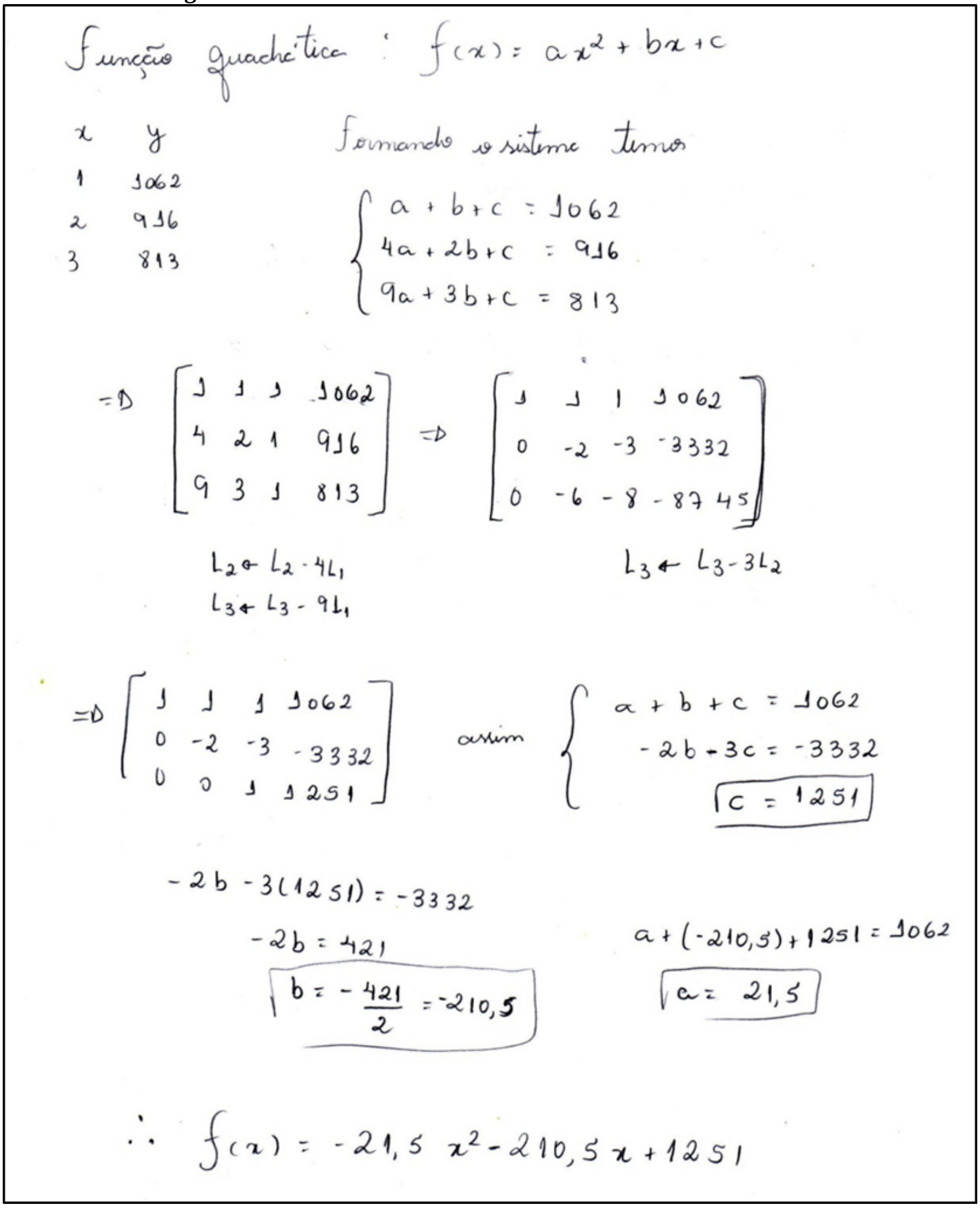
Figura 4.26- Registro de A4 para a resposta ao problema obtida por meio do modelo exponencial da atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'



Fonte: Relatório entregue por A4.

Outro modelo que os alunos desenvolveram para a situação-problema em estudo foi o modelo quadrático. A partir da expressão geral da função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, os alunos, por meio dos três pontos envolvidos na situação e por eles apresentados na Figura 4.21, resolveram o sistema de equações lineares e chegaram ao modelo matemático apresentado na Figura 4.27.

Figura 4.27- Registro de A8 na obtenção do modelo quadrático na atividade de modelagem ‘O consumo de cigarro’



Função quadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$

x	y
1	1062
2	916
3	813

Formando o sistema temos

$$\begin{cases} a + b + c = 1062 \\ 4a + 2b + c = 916 \\ 9a + 3b + c = 813 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1062 \\ 4 & 2 & 1 & 916 \\ 9 & 3 & 1 & 813 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1062 \\ 0 & -2 & -3 & -3332 \\ 0 & -6 & -8 & -8745 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1062 \\ 0 & -2 & -3 & -3332 \\ 0 & 0 & 1 & 1251 \end{bmatrix} \quad \text{assim} \quad \begin{cases} a + b + c = 1062 \\ -2b - 3c = -3332 \\ \boxed{c = 1251} \end{cases}$$

$$-2b - 3(1251) = -3332$$

$$-2b = 421$$

$$\boxed{b = -\frac{421}{2} = -210{,}5}$$

$$a + (-210{,}5) + 1251 = 1062$$

$$\boxed{a = 21{,}5}$$

$$\therefore f(x) = -21{,}5\, x^2 - 210{,}5\, x + 1251$$

Fonte: Relatório entregue por A8.

O passo seguinte, após a dedução do modelo, foi calcular o ponto crítico da função quadrática e verificar em que coordenada encontra-se o vértice da parábola (Figura 4.28).

Figura 4.28- Registro de A8 para o cálculo do ponto crítico do modelo quadrático da atividade de modelagem ‘O consumo de cigarro’

Logo vamos fazer o teste da derivada para analisar os pontos críticos

$f(x) = 21,5x^2 - 210,5x + 1251$

$f'(x) = 43x - 210,5$ igualando a zero

$43x - 210,5 = 0$

$43x = 210,5$

$x = 4,89$

$f''(x) = 43 > 0$ logo o ponto crítico é ponto de mínimo

assim

$f(4,89) = 21,5(4,89)^2 - 210,5(4,89) + 1251$

$f(4,89) = 735,76$

Logo o ponto de mínimo é $(4,89; 735,76)$ onde o modelo não chegará no valor de 702 cigarros consumidos.

Fonte: Relatório entregue por A8.

Isso denota um conhecimento matemático relacionado ao objeto matemático ‘derivada de uma função’ em que ao calcular a primeira derivada da função e igualar a zero, encontra-se o ponto crítico.

Embora entenda que a quantidade de cigarro, segundo o modelo quadrático, não chegará ao valor de 702, pois o ponto de mínimo é 735,76, A8 realiza cálculos igualando o modelo matemático ao valor de 702 (Figura 4.29).

Figura 4.29- Registro de A8 para a resposta ao problema obtida por meio do modelo quadrático da atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'

$$21{,}5x^2 - 210{,}5x + 1251 = 702$$

$$21{,}5x^2 - 210{,}5x + 549 = 0$$

calculando:

$$\Delta = (210{,}5)^2 - 4 \cdot 21{,}5 \cdot 549$$

$$\Delta = 44.310{,}25 - 47.214$$

$$\Delta \simeq -2903.75 \qquad \Delta < 0 \text{ não tem raiz real}$$

Fonte: Relatório entregue por A8.

Para esse desenvolvimento, os alunos não fizeram uma validação do modelo matemático como no trabalho com os outros dois modelos — o linear e o exponencial.

Ao finalizarem a dedução dos modelos matemáticos, levando em consideração um modelo linear, um modelo quadrático e um modelo exponencial, os alunos responderam às questões que lhes foram propostas (Quadro 4.6).

A questão 1: *O que significa, do ponto de vista matemático, o fato de a quantidade de cigarros consumida por habitante no ano de 2010 ser 813 unidades e esperar-se que ocorra uma redução para 702 unidades?* foi proposta por professora e pesquisadora com intuito de que os alunos observassem que a redução do número de cigarros está atrelada em termos matemáticos ao decrescimento de uma função (Figura 4.30).

Figura 4.30- Registro de A8 para a questão 1 sobre a abordagem da diminuição da quantidade de cigarros consumida de um ponto de vista matemático da atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'

1) Do ponto de vista matemático significa que a quantidade de cigarros consumidos por habitante neste período é dada por uma função decrescente.

Fonte: Relatório entregue por A8.

Na questão 2: *Esta redução de consumo anual para aproximadamente 702 cigarros por ano pode variar em decorrência de qual característica do modelo matemático determinado para descrever a situação?* os alunos teriam que estabelecer relações sobre o decrescimento dos modelos matemáticos por meio do intervalo decrescente das funções. O trio do qual A8 fazia parte fez uma aproximação com esta conclusão (Figura 4.31).

Figura 4.31- Registro de A8 para a questão 2 sobre o decrescimento dos modelos matemáticos da atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'

2) nos três modelos construídos consideramos apenas o intervalo decrescente dado na tabela do exercício.

Fonte: Relatório entregue por A8.

Os modelos deduzidos pelos alunos estavam vinculados à questão 3: *Determine pelo menos 3 modelos matemáticos diferentes analisando-os e comparando-os em relação à característica definida na questão anterior.* A partir da questão 2 que se refere ao decrescimento das funções definidas no modelo, o objetivo era que os alunos analisassem qual função tem um maior decrescimento em detrimento das outras. Isso poderia ser analisado e observado mais detalhadamente com a construção gráfica das três funções em um mesmo plano cartesiano, como na Figura 4.19. Para responder a esta questão, o trio levou em consideração somente a relação de decrescimento que existe entre as funções, conforme Figura 4.32.

Figura 4.32- Registro de A8 para a questão 3 sobre os três modelos matemáticos deduzidos na atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'

3) Analisando os intervalos, conseguimos todas as funções, decrescentes nesse intervalo,

modelo 1:

$$f(x) = -124,5x + 1179,33$$

modelo 2:

$$C(t) = 1208,578e^{-0,13395t}$$

modelo 3:

$$f(x) = 21,5x^2 - 210,5x + 1251$$

Porém o modelo 3 é descartado uma vez que seu ponto mínimo não chega à 702, e os modelos 1 e 2 são os mais apropriados para a solução do problema.

Fonte: Relatório entregue por A8.

Uma reflexão que emergiu da situação em estudo é abordada na questão 4: *Uma política governamental indicando um rápido decrescimento do número de cigarros consumidos por pessoa por ano deveria usar qual dos modelos matemáticos construídos? Justifique.* Para esta questão, o trio apontou o modelo linear como o que indica um rápido decrescimento do número de cigarros consumidos por pessoa por ano (Figura 4.33), pois a meta a ser atingida de diminuição do número de cigarros e que era resposta ao problema consistia em um ano mais próximo do que estamos atualmente. Nesse comparativo entre os modelos matemáticos obtidos, os alunos reconhecem uma característica dos objetos matemáticos representada pelos signos algébricos com relação ao decrescimento. A função linear decresce 'mais rapidamente' do que as outras funções — exponencial e quadrática.

Figura 4.33- Registro de A8 sobre a análise com relação ao decrescimento dos modelos em uma abordagem política da atividade de modelagem 'O consumo de cigarro'

4) Tendo em vista a política governamental o modelo 1 é o mais indicado nessa situação, pois é o que apresenta o decresci-mento mais rápido chegando em 2018 a meta de 702 cigarros consumidos por ano aproximadamente.

Fonte: Relatório entregue por A8.

Enquanto o grupo em que A8 fazia parte desenvolveu a atividade 2, outro grupo em que A6 fazia parte resolveu a atividade 3 — Cálcio no rio Limoeiro —, conforme apresentado na próxima seção.

4.3.3 CONTEXTO DO 2.º MOMENTO — ATIVIDADE 3: CÁLCIO NO RIO LIMOEIRO

Nas mesmas horas/aulas em que trios e duplas desenvolveram a atividade 2 — *O consumo de cigarro* —, três duplas e um trio de alunos desenvolveram a atividade 3 — *Cálcio no rio Limoeiro*. Sendo assim, os alunos que participaram do desenvolvimento da atividade 2 não participaram do desenvolvimento da atividade 3 e vice-versa. Em nossa pesquisa vamos apresentar a descrição do desenvolvimento da atividade de uma das duplas da qual A6 faz parte. Os alunos desta dupla participaram da atividade *Diazepan no organismo* e dessa forma vamos representá-los com o mesmo código — A6 e A11.

O desenvolvimento desta atividade pelos alunos ocorreu como caracterizado no 2.º momento de familiarização, em que os alunos complementam a coleta de informações para a investigação da situação com a definição de variáveis e de hipóteses, a obtenção e validação do modelo matemático bem como seu uso para a análise da situação. Para o desenvolvimento desta atividade, os alunos podiam utilizar notas de sala de aula, além de livros de modelagem. Esta atividade foi desenvolvida durante 4horas/aula, sendo solicitada aos alunos a entrega de relatório com a resolução. Nesta atividade, além do relatório entregue, foi realizada gravação em áudio e vídeo das aulas e uma entrevista semi-estruturada. O roteiro da entrevista encontra-se no Apêndice D.

Nesta atividade, como na atividade 2, também organizamos (professora e pesquisadora) um encaminhamento que delineasse o trabalho que possivelmente os alunos desenvolveriam. Assim, a descrição do desenvolvimento desta atividade tem uma estrutura semelhante com a descrição da atividade 2, ou seja, inicialmente apresentamos o desenvolvimento que *a priori* pensamos que poderia ser realizado pelos alunos, apresentando o problema, as variáveis, a hipótese, a tendência dos dados e o modelo matemático obtido, em seguida, apresentamos os registros escritos e falados dos alunos nesta atividade.

A situação-problema *Cálcio no rio Limoeiro* foi elaborada utilizando dados coletados experimentalmente e apresentados em Borssoi (2004). Em pesquisa de Borssoi (2004), os alunos reunidos em grupo encontraram um modelo matemático que descreve a concentração de cálcio no rio Limoeiro, localizado em área rural de Ibiporã (PR) de acordo com a profundidade para denotar se tal rio encontra-se contaminado por essa substância. No trabalho desenvolvido pelo grupo de alunos em Borssoi (2004) foi encontrado o modelo matemático $C(p) = 3{,}416.e^{-0{,}0048p}$ e concluído por análises químicas que o rio Limoeiro não apresenta indicação de contaminação por cálcio. Utilizando os dados coletados pelos alunos de Borssoi (2004), elaboramos uma situação-problema que pudesse ser desenvolvida em sala de aula com os alunos (Quadro 4.7).

Quadro 4.7– Atividade de modelagem sobre 'Cálcio no rio Limoeiro'

CÁLCIO NO RIO LIMOEIRO

O cálcio é um elemento necessário para o desenvolvimento dos vegetais e animais. No caso dos vegetais, o cálcio participa da formação da substância intercelular cimentante, unindo as células, sendo fundamental em relação à criação de um tecido novo. A maior participação do cálcio nos animais está relacionada com a formação de esqueletos, pois ele é parte constituinte dos exoesqueletos de invertebrados e conchas.

Tal elemento encontra-se na natureza somente em forma de compostos, dos quais o mais comum é o carbonato. Muitos organismos são ricos em sais de cálcio em suas estruturas, notadamente carbonatos e fosfatos de cálcio. Esses sais são encontrados na organização de corpos espongiários e dos corais, bem como nas conchas de moluscos (ostras, mexilhões, mariscos, caramujos) e nos esqueletos dos vertebrados. Quando estes animais morrem, há lentamente, a decomposição dessas estruturas e os seus sais de cálcio são, então, dissolvidos na água e no solo. Com o passar do tempo, pode ocorrer a sedimentação desses sais em determinadas regiões, surgindo assim os terrenos sedimentares de calcário, dentre os quais os tipos de rochas calcárias mais conhecidos são o mármore e a calcita. Por meio de processos de erosão ocorre o escoamento de sais de cálcio para rios e mares. Isto tornará possível a sua absorção e aproveitamento por novos animais para a formação de seus esqueletos reiniciando assim o ciclo.

A presença de cálcio em rios tem sido objeto de estudo, investigando a concentração de cálcio em solos de fundo de rios. Segundo estudos realizados pela EMBRAPA com a criação de peixes em viveiros, o crescimento de fitoplâncton (seres fotossintetizantes, base da cadeia alimentar aquática) e a produção de organismos aquáticos são limitados pelo suprimento inadequado de substâncias como o cálcio existente no substrato (solo do fundo de rios). A fertilidade natural das águas que garante a existência de diversas espécies de peixes aumenta com o aumento da concentração de cálcio e, consequentemente, do aumento da produção de fitoplâncton. Um ambiente aquático com cerca de 150 mg/L de cálcio é considerado fértil.

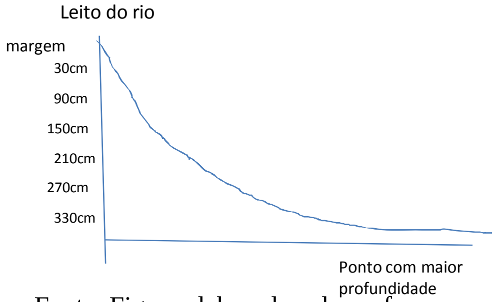
Em uma pesquisa realizada foram retirados sedimentos de diferentes profundidades do Rio Limoeiro – localizado em área rural de Ibiporã (PR) – e as concentrações de cálcio em cada profundidade são apresentadas na Tabela 4.3.

Tabela 4.3- Concentração de cálcio no rio Limoeiro

Profundidade do rio (cm)	**Concentração de Cálcio no substrato** (mg/cm^3)
30	2,958
90	2,316
150	1,641
210	1,264
270	0,893
330	0,697

Fonte: Borssoi, 2004.

Figura 4.34- Representação do rio



Fonte: Figura elaborada pela professora.

PROBLEMA

Considerando que a produção de fitoplâncton requer uma concentração de cálcio de 150 mg/L, ou seja, 0,15mg/cm^3, até qual profundidade do rio Limoeiro esta produção ainda pode acontecer?

Fonte: Texto elaborado por professora e pesquisadora.

Para responder o problema, levamos em consideração a profundidade do rio, utilizando p como variável independente, dada em centímetros, n uma variável auxiliar associada à profundidade e $C(n)$ a concentração de cálcio no ponto n do substrato — Tabela 4.4.

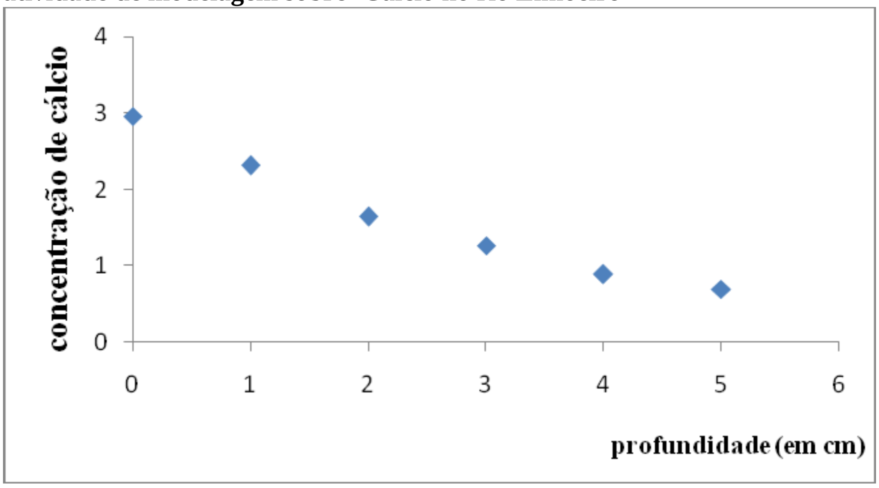
Tabela 4.4– Concentração de cálcio no rio Limoeiro de acordo com profundidade, utilizando variável auxiliar

Profundidade do rio, em centímetros (p)	Profundidade – variável auxiliar (n)	Concentração de cálcio (C_n), em mg/cm^3
30	0	2,958
90	1	2,316
150	2	1,641
210	3	1,264
270	4	0,893
330	5	0,697

Fonte: Tabela elaborada por professora e pesquisadora.

A partir da Tabela 4.4 representamos os dados no plano cartesiano (Figura 4.35). Neste trabalho, utilizamos a planilha eletrônica Excel.

Figura 4.35- Representação gráfica da tendência dos dados utilizados na atividade de modelagem sobre 'Cálcio no rio Limoeiro'



Fonte: Gráfico feito por professora e pesquisadora.

Pela tendência dos dados levamos em consideração que o modelo matemático da atividade poderia ser representado por uma função do tipo exponencial. Deste modo, além de considerarmos que a concentração de cálcio diminui com a profundidade, levamos em consideração a tendência dos dados. Utilizando dois pontos da Tabela 4.4, obtivemos, então o modelo exponencial $C(n) = 2{,}958.0{,}753^n$, em que $n = \dfrac{p-30}{60}$ com $p \geq 30$. Realizando a mudança de base ficamos com o modelo $C(p) = 3{,}409.e^{-0{,}0047.p}$ (modelo I).

Outra abordagem que pensamos para o desenvolvimento da atividade foi analisar se os dados seguem alguma regularidade e, com isso, apresentar uma hipótese. Para tanto, realizamos alguns cálculos como os apresentados no Quadro 4.8.

Quadro 4.8- Cálculo da variação da concentração de cálcio na atividade de modelagem 'Cálcio no rio Limoeiro'

Profundidade do rio (cm)	**Variável auxiliar (n)**	**Concentração de Cálcio (C_n) no substrato mg/cm^3**	**Variação de C $\Delta C = C_{n+1} - C_n$**	$\frac{\Delta C}{C} = \frac{C_{n+1} - C_n}{C_n}$
30	0	2,958	-0,642	-0,217
90	1	2,316	-0,675	-0,291
150	2	1,641	-0,377	-0,229
210	3	1,264	-0,371	-0,293
270	4	0,893	-0,196	-0,219
330	5	0,697		

Fonte: Quadro elaborado por professora e pesquisadora.

A partir dos resultados encontrados na quinta coluna do Quadro 4.8, estabelecemos a hipótese de que a variação da concentração remanescente de cálcio no substrato é proporcional à concentração de cálcio em cada profundidade. Isso nos remete a afirmar que a taxa de variação de cálcio com relação à profundidade é proporcional à concentração de cálcio em cada profundidade. A partir dessa hipótese e utilizando os dados da Tabela 4.4, deduzimos o modelo matemático $C(p) = 3{,}344.e^{-0{,}0041.p}$ (modelo II).

Retomando ao problema, para saber até em que profundidade a quantidade de cálcio encontra-se adequada para a produção de fitoplâncton, igualamos cada modelo matemático à 0,15 mg/cm^3. Para o modelo I, temos a profundidade de 664 cm e, para o modelo II, a profundidade de 757 cm.

Além do problema a ser resolvido, questionamentos referentes à atividade foram propostos com o objetivo de os alunos fazerem uma análise da situação-problema (Quadro 4.9).

Quadro 4.9– Questões que se remetem à atividade de modelagem 'Cálcio no rio Limoeiro'

1Como justificar, do ponto de vista matemático, a hipótese usada para orientar a construção dos modelos?

2A presença de fitoplâncton indica que o ambiente possui nutrientes, como por exemplo o cálcio, em quantidades adequadas para a existência de vida. Considerando que a profundidade do rio Limoeiro é de cerca de 4 metros em grande parte de sua extensão, o que se pode afirmar sobre este rio no que se refere à presença de fitoplâncton, a partir da resposta encontrada?

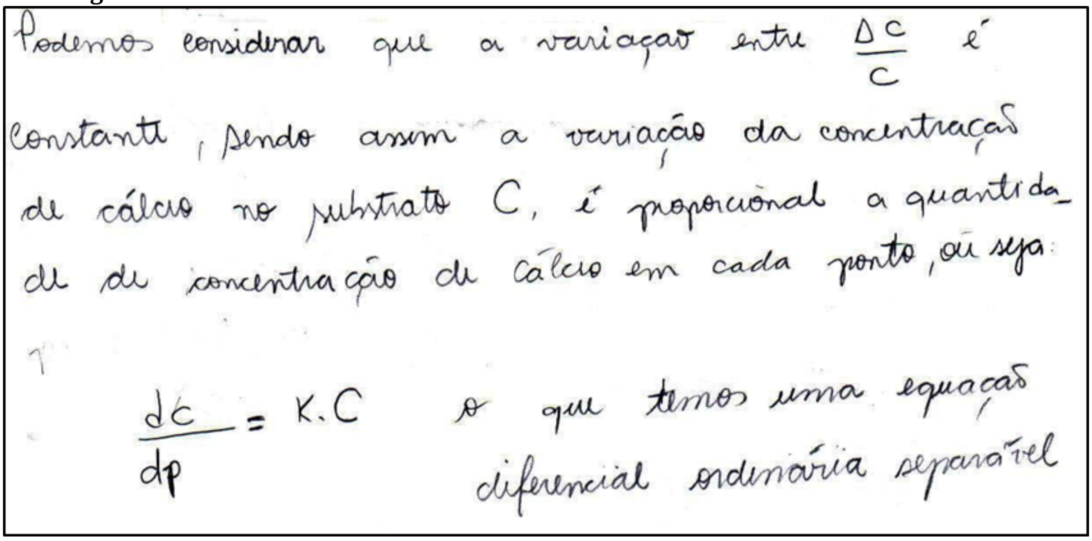
Fonte: Construído pela pesquisadora e pela professora.

Essa atividade foi proposta para ser desenvolvida pelos alunos em 2horas/aula. No entanto, devido ao envolvimento que tiveram com tal atividade, esta foi retomada em aula posterior.

Os registros que apresentamos correspondem àqueles que os alunos utilizaram durante a realização da atividade na avaliação. Considerações que eles possam ter abarcado no período de uma aula para outra não foram levantadas, visto que não tivemos contato com os alunos neste período, ou seja, não podemos afirmar que para finalizar o desenvolvimento da atividade os alunos buscaram informações em outras fontes.

Após um período de cerca de 10 minutos de silêncio entre a dupla, em que cada participante estava lendo as informações apresentadas, A6 começa a realizar alguns cálculos [conforme imagens capturadas em vídeo] que não foram entregues no relatório, mas no qual A6 e A11 concluíram que a taxa de variação da concentração de cálcio diminuía com a profundidade e que esse decrescimento ocorria de maneira proporcional (Figura 4.36).

Figura 4.36- Registro de A6 sobre a definição da hipótese do modelo I da atividade de modelagem 'Cálcio no rio Limoeiro'


Podemos considerar que a variaçao entre $\frac{\Delta C}{C}$ é constante, sendo assim a variação da concentraçao de cálcio no substrato C, é proporcional a quantida- de de concentração de cálcio em cada ponto, ou seja:

$$\frac{dc}{dp} = K.C$$

o que temos uma equaçao diferencial ordinária separável

Fonte: Relatório entregue por A6.

Para resolver a Equação Diferencial Ordinária de 1.ª ordem com variáveis separáveis, A11 busca auxílio nas notas de aula que tinha em mãos e relata:

> A11: *Olha A6* [segurando uma folha com anotações] *naquela atividade do diazepan a gente já resolveu essa Equação Diferencial! Vamos utilizar já esses resultados ou vamos realizar novamente os cálculos?*
> A6: *Vamos fazer de novo A11. Daí é mais garantido e a gente deixa mais organizadas as continhas, eu faço aqui e você já passa a limpo aí.*
> A11: *Beleza, mas eu quero te ajudar aí nesses cálculos!*
> A6: *Tá.*
> [olhando a folha, A11 vai sussurrando as etapas de resolução e A6 escreve, Figura 4.37].

Figura 4.37- Registro de A6 para a resolução da Equação Diferencial Ordinária do modelo I da atividade de modelagem 'Cálcio no rio Limoeiro'

$$\frac{dc}{c} = K \cdot dp$$

$$\int \frac{dc}{c} = K \int dp$$

$$\ln C = K \cdot p + m$$

$$C = e^{K \cdot p + m}$$

$$C = e^{Kp} \cdot e^{m} \qquad \beta = e^{m}$$

$$C = \beta \cdot e^{Kp}$$

$$C(p) = \beta \cdot e^{Kp}$$

Fonte: Relatório entregue por A6.

Para determinar os parâmetros do modelo exponencial apresentado na Figura 4.37, a dupla de alunos utilizou dois pontos da Tabela 4.3. Para escolher os pontos, a dupla utilizou um método aleatório de escolhas, determinava o modelo matemático e realizava a validação para todos os pontos da Tabela 4.3 [conforme imagens registradas em vídeo durante a resolução da atividade]. Utilizando os pontos (30, 2,958) e (90, 2,316) da Tabela 4.3 para encontrar os parâmetros, a dupla de alunos deduz o modelo matemático I para a concentração de cálcio de acordo com a profundidade (Figura 4.38).

Figura 4.38- Registro de A6 para a dedução do modelo I da atividade de modelagem 'Cálcio no rio Limoeiro'

$$C(p) = \beta \cdot e^{Kp}$$

$$\begin{cases} 2{,}958 = \beta \cdot e^{30K} \Rightarrow \ln(2{,}958) = \ln(\beta \cdot e^{30K}) \\ \qquad 1{,}0845 = \ln\beta + 30K \quad (I) \\ 2{,}316 = \beta \cdot e^{90K} \Rightarrow 0{,}8398 = \ln\beta + 90K \quad (II) \end{cases}$$

Subtraindo (I) e (II) temos

$$0{,}2447 = -60K$$
$$K = -0{,}004083$$

$$\begin{cases} 0{,}8398 = \ln\beta + 90K \\ \ln\beta = 0{,}8398 + 0{,}36747 \\ \ln\beta = 1{,}20727 \\ \beta = 3{,}3443 \end{cases}$$

$$\boxed{C(p) = 3{,}3443\, e^{-0{,}004083\, p}}$$

modelo da concentração de cálcio em função da profundidade p.

Fonte: Relatório entregue por A6.

De posse do modelo matemático que pudesse responder ao problema em estudo, a dupla realiza os cálculos para encontrar a profundidade em que a concentração de cálcio atingiria a concentração de 0,15mg/cm^3 (Figura 4.39).

Figura 4.39- Registro de A6 para a resolução do problema utilizando o modelo I da atividade 'Cálcio no rio Limoeiro'

Para qual p, $C(p) = 0,15$

$$0,15 = 3,3943\, e^{-0,004083\, p}$$

$$0,044852 = e^{-0,004083\, p}$$

$$\ln(0,044852) = -0,004083\, p$$

$$\frac{-3,104387}{-0,004083} = p$$

$p \cong 760$ cm ou ainda

7,6 m

Fonte: Relatório entregue por A6.

Além de desenvolver a atividade de modelagem sobre a concentração do cálcio no rio Limoeiro por meio de Equações Diferenciais Ordinárias, a dupla de alunos utilizou Método dos Mínimos Quadrados para encontrar uma função que melhor se ajustava aos pontos de concentração de cálcio de acordo com a profundidade (Figura 4.40).

Figura 4.40- Registro de A6 para a dedução do modelo matemático II por meio do Método dos Mínimos Quadrados da atividade de modelagem 'Cálcio no rio Limoeiro'

n: VARIÁVEL AUXILIAR

Linearização para obter uma função que melhor se ajusta aos pontos

n (x_j)	$C(n)$	$\ln(C_n)$ (y_j)
1	2,958	1,0845
2	2,316	0,8398
3	1,641	0,4953
4	1,264	0,2342
5	0,893	-0,1131
6	0,697	-0,3609

Pelo método dos mínimos quadrados

$\sum x_j^2 = 91$

$\sum x_j = 21$

$\sum x_j \cdot y_j = 2,4559$

$\sum y_j = 2,1798$

$n = 6$

$$\begin{cases} 91a + 21b = 2,4559 \\ 21a + 6b = 2,1798 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 91a + 21b = 2,4559 \\ -73,5a - 21b = -7,6293 \end{cases}$$

$17,5a = -5,1734$

$a = -0,295622$

$b = 1,39798$

$x(-3,5)$

$y = -0,295622n + 1,39798$ mas $y = \ln(C_n)$

$$\ln C = e^{-0,295622n} \cdot e^{1,39798}$$

$$C = 4,047016 \cdot e^{-0,295622n}$$

$$\boxed{C = 4,047016\, e^{-0,0049270\, p}}$$

$$C(p) = 4,047016 \cdot e^{-0,0049270 \cdot p}$$

Fonte: Relatório entregue por A6.

Com a obtenção do modelo matemático II, a dupla realiza os cálculos para encontrar a profundidade em que a concentração de cálcio atingiria 0,15mg/cm^3 (Figura 4.41).

Figura 4.41- Registro de A6 para a resolução do problema utilizando o modelo II da atividade 'Cálcio no rio Limoeiro'

$C(p) = 4{,}047016 \cdot e^{-0{,}0049270 \cdot p}$

para qual p , $c(p) = 0{,}15$

$$0{,}15 = 4{,}047016 \cdot e^{-0{,}004927 \cdot p}$$

$$0{,}03706 = e^{-0{,}004927\, p}$$

$$-3{,}295217 = -0{,}004927\, p$$

$$p = \frac{3{,}295217}{0{,}004927} \cong 668{,}80 \text{ cm}$$

ou ainda aproximadamente 6,688 m

Fonte: Relatório entregue por A6.

Embora os modelos matemáticos encontrados pelos alunos nos diferentes procedimentos encaminharam para respostas distintas, estes entendem que esse fato pode ter sido evidenciado em virtude de aproximações de casas decimais, como explicitado nos registros apresentados na Figura 4.42.

Figura 4.42 – Considerações de A6 para as respostas ao problema da atividade de modelagem sobre 'Cálcio no rio Limoeiro'

Obs: acreditamos que a diferença entre os valores encontrados nos modelos é justificada pela quantidade de casas decimais, que nesse modelo foi considerada 5 casas após a vírgula

Fonte: Relatório entregue por A6.

Para justificarem as hipóteses que utilizaram na dedução dos modelos matemáticos, como proposto na questão 1: *Como justificar, do ponto de vista matemático, a hipótese usada para* *orientar a construção dos modelos* , apresentada no Quadro 4.9, a dupla de alunos fez as considerações conforme apresentada na Figura 4.43.

Figura 4.43– Considerações da dupla de alunos para a questão 1 referente à definição de hipóteses da atividade de modelagem sobre ‘Cálcio no rio Limoeiro’

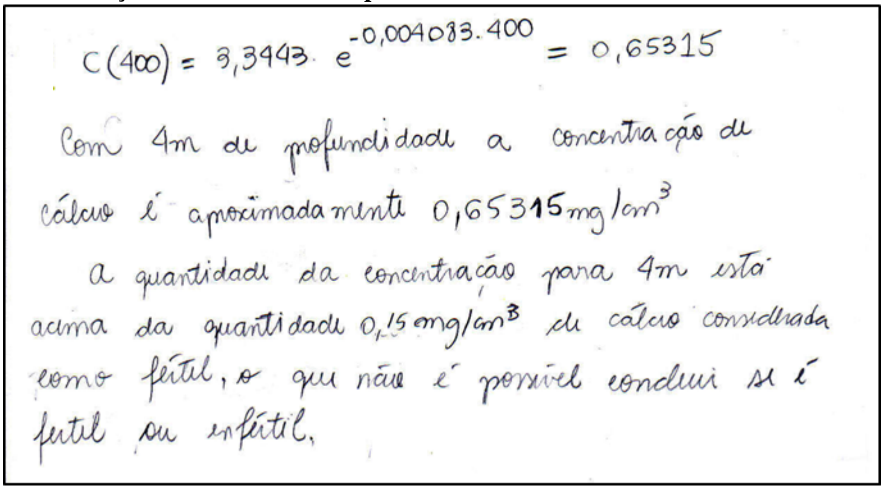
- como a concentração de cálcio no substrato depende da profundidade, e a variação entre as profundidade pode ser considerada constante, isto implica que a variação da concentração em cada profundidade é proporcional a quantidade de substância de cálcio em cada ponto, isto é

$$\frac{\frac{dc}{dp}}{c} = K \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{dp} = K.c$$

Fonte: Relatório entregue por A6.

Uma reflexão sobre a presença de fitoplânctons para a existência de vida no rio Limoeiro é proposta na questão 2 *A presença de fitoplâncton indica que o ambiente possui nutrientes, como por exemplo o cálcio, em quantidades adequadas para a existência de vida. Considerando que a profundidade do rio Limoeiro é de cerca de 4 metros em grande parte de sua extensão, o que se pode afirmar sobre este rio no que se refere à presença de fitoplâncton, a partir da resposta encontrada?*. O objetivo para tal questão era de que os alunos respondessem a partir das observações que fizeram de que como a quantidade de cálcio correspondente a 0,15mg/cm^3 pode ser encontrada até uma profundidade superior a 4m, então o rio Limoeiro apresentava uma boa concentração de cálcio em toda sua profundidade. No entanto, os alunos desta dupla apresentam uma reflexão mais abrangente e relevante (Figura 4.44).

Figura 4.44– Reflexão da dupla de alunos para a questão 2 referente à concentração de cálcio em toda profundidade do rio Limoeiro



$$C(400) = 3{,}3443 \cdot e^{-0{,}004083 \cdot 400} = 0{,}65315$$

Com 4m de profundidade a concentração de cálcio é aproximadamente 0,65315mg/cm³

a quantidade da concentração para 4m está acima da quantidade 0,15 mg/cm³ de cálcio considerada como fértil, o que não é possível concluir se é fértil ou infértil.

Fonte: Relatório entregue por A6.

Com a realização desta atividade de Modelagem Matemática, A6 afirmou que sentiu *o peso da responsabilidade, da autonomia que tivemos que encarar* [afirmado por A6 ao entregar a prova no final da aula].

4.3.4 CONTEXTO DO 3.º MOMENTO — ATIVIDADE 4: DESENVOLVIMENTO DA CULTURA DE SOJA NO BRASIL

A atividade 4 foi desenvolvida por alunos em seu grupo, caracterizando o 3.º momento de familiarização com atividades de modelagem matemática. Para tanto, eles escolheram a situação-problema que pretendiam desenvolver, coletaram e analisaram dados, realizaram as transições de linguagem, a identificação dos conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, além da comunicação desta investigação para o restante da turma da sala.

A atividade que descrevemos corresponde ao *Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil* e neste trabalho foi denotada como Atividade 4. Esta atividade de modelagem foi desenvolvida por um grupo de cinco alunos composto por dois homens e três mulheres, do qual faz parte A8, sujeito desta pesquisa.

A ideia da situação-problema foi inicialmente vislumbrada por A8 devido ao fato de ter morado por muitos anos na área rural e, atualmente, seu irmão trabalhar em uma empresa de soja. No entanto, momentaneamente, tal situação foi abandonada por surgirem ideias de estudo de situações consideradas mais relevantes pelo grupo. Devido ao fato de não obterem dados suficientes para trabalhar outras situações pelas quais se interessaram, o grupo retomou a situação-problema proposta por A8, visto que este tinha maior familiaridade e experiência com o assunto.

Pelo fato de o grupo retomar o tema 15 dias antes da apresentação do trabalho final, a orientação da professora e da pesquisadora foi pequena quando comparada com a orientação realizada no desenvolvimento da Atividade 5[38]. No entanto, dois encontros extraclasse foram realizados com o intuito de orientar uma atividade, quando a situação-problema ainda era a reciclagem de lixo na Universidade Estadual de Londrina. Devido às dificuldades encontradas pelo grupo no que concerne à falta de registros do lixo reciclável coletado na instituição, os encontros de orientação não tiveram avanço para o desenvolvimento da atividade.

Informações sobre o desenvolvimento da atividade foram relatadas na comunicação dos resultados em forma de seminário a todos os colegas da sala de aula, no relatório impresso e gravado em CD e entregue pelo grupo com o desenvolvimento da atividade e na entrevista semi-estruturada. O seminário foi gravado em áudio e vídeo e a atividade foi analisada pelo restante da turma por meio de um questionário em que foi possível ter indícios das impressões que tiveram. Os questionários para não-membros do grupo e para membros do grupo encontram-se nos Apêndices E e F, respectivamente. O roteiro da entrevista encontra-se no Apêndice G.

Os recortes que apresentamos correspondem a trechos de falas dos alunos durante a apresentação do seminário, reprodução de slides utilizados na apresentação e recortes de informações apresentadas no relatório entregue pelo grupo.

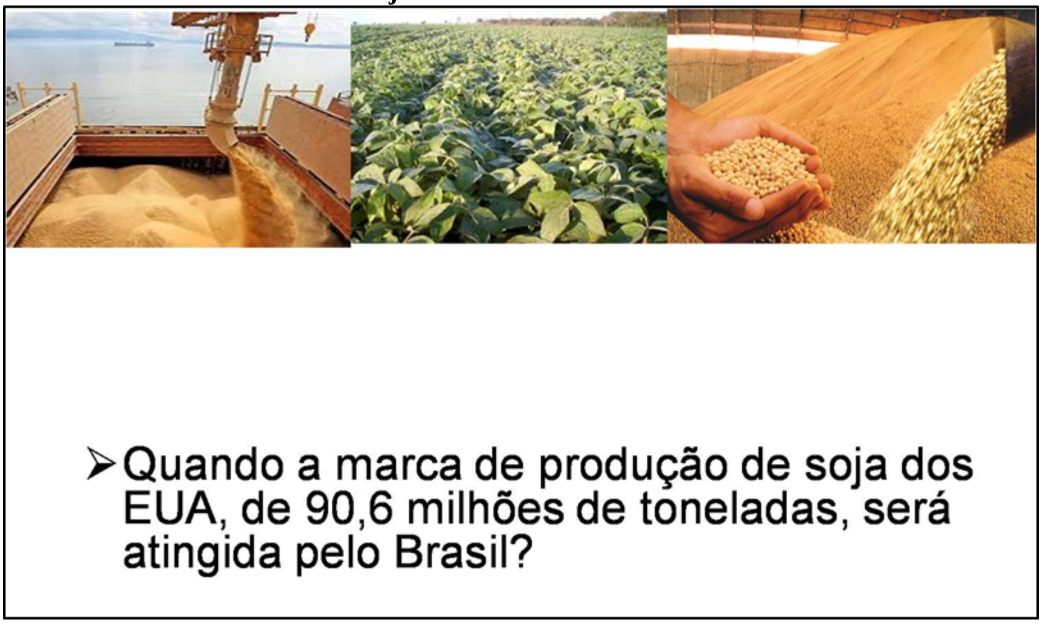
Após apresentarem informações sobre a *origem, o início da cultura da soja no Brasil, os impactos ambientais que o cultivo gera*, *as diferentes técnicas de cultivo, informações sobre área e produção da soja* e *a utilização de soja em produtos, indústrias e como biodiesel*, os

---

[38] A atividade 5 corresponde à *Poda de árvore* e sua descrição consta da seção 4.3.5. Esta atividade tem como membro A6 que é aluno-colaborador de nossas análises.

alunos adentram à problematização que desenvolveram, conforme Figura 4.45 e fala de A8.

Figura 4.45– Slide que apresenta a problematização da atividade de modelagem ‘Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil’



Fonte: Slide apresentado pelo grupo de alunos.

> A8: *Então gente, tendo esse contato que vocês estudaram aí com a soja, sobre a produção de soja no Brasil a gente passa para a parte da problematização que a gente vai focar agora né? Como o Brasil é o segundo maior produtor de soja mundial, certo? E perde apenas para os Estados Unidos, são dados retirados da Empresa Brasileira de Pesquisas Agropecuária e da Companhia Nacional de Abastecimento – a Embrapa e a Conab. Eles disponibilizaram esses dados em relação a essa comparação e os Estados Unidos que aparecem em primeiro lugar em questão de produção. A gente pegou um comparativo em relação à safra de 2010 que é a divulgada recentemente e os Estados Unidos conseguiram um recorde de 90,6 milhões de toneladas nessa produção.*
> *Então nosso trabalho tem em vista essa comparação do Brasil e os Estados Unidos... então a gente vai analisar em que ano possivelmente o Brasil vai conseguir chegar nesse recorde que os Estados Unidos conseguiram, visando que os Estados Unidos já estão chegando no seu limite de produção em questão de expansão agrícola* [comentando slide apresentado na Figura 4.45]. *Os Estados Unidos não têm tanta área mais disponível para a produção. Visando também pela produção climática, o Brasil aparece como um forte sucessor deles pelas condições climáticas que favorecem o desenvolvimento da cultura no país. Então no nosso trabalho a gente vai analisar: quando possivelmente o Brasil vai chegar nessa produção de 90,6 milhões de toneladas e também qual seria a área necessária para plantar essa... né... deveria ser plantado para colher essa quantidade. Então chegando nesse tempo, qual seria a área necessária para o Brasil?*

Embora o problema estivesse delimitado, os alunos ‘abriram’ outros dois problemas como mencionado na fala de A8 — em que ano vai atingir a produção de soja e a área necessária para abordar essa produção. No Quadro 4.10 apresentamos a problematização a qual A8 se refere com os dados coletados pelo grupo com relação à produtividade e área plantada de soja no Brasil no período de 1990 a 2010.

Quadro 4.10– Problematização da atividade de modelagem ‘Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil’

Problematização

Segundo dados da EMBRAPA e CONAB, o Brasil aparece em segundo lugar no *ranking* dos maiores produtores mundiais de soja, perdendo apenas para os EUA, que lideram esse *ranking*. Em dados da safra 2010, apontaram os EUA como recordista, em produção de soja, atingindo 90,6 milhões de toneladas produzidas. Tendo em vista as condições climáticas e agrárias do Brasil, nesse trabalho pretendemos fazer uma análise sobre a produção de soja no país e a área ocupada para o seu cultivo (Tabela 4.5).

Nesse trabalho analisaremos em que ano possivelmente o Brasil chegará nessa produção de 90,6 milhões de toneladas de soja, conquistada pelos EUA na safra de 2010, e chegando nessa marca qual a área, necessária, em hectares para o seu cultivo no território nacional.

Tabela 4.5- Produtividade e área plantada de soja no Brasil, ano a ano (1990 – 2010)

Ano	Quantidade Produzida (toneladas)	Área plantada (hectares)
1990	19.897.804	11.584.734
1991	14.937.806	9.667.625
1992	19.214.705	9.463.625
1993	22.590.978	10.654.163
1994	24.931.832	11.544.577
1995	25.682.637	11.702.919
1996	23.166.874	10.356.156
1997	26.392.636	11.508.120
1998	31.307.440	13.319.749
1999	30.987.476	13.069.793
2000	32.820.826	13.693.677
2001	37.907.259	13.988.351
2002	42.107.618	16.376.035
2003	51.919.440	18.527.544
2004	49.549.941	21.601.340
2005	51.182.074	23.426.756
2006	52.464.640	22.082.666
2007	57.857.172	20.571.393
2008	59.833.105	21.252.721
2009	57.345.382	21.761.782
2010	75.000.000	24.200.000

Fonte: IBGE/Produção Agrícola Nacional.

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Definido o problema e considerando as variáveis produtividade de soja, em toneladas, e área plantada, em hectares, os alunos optaram por separar o problema gerador em dois outros problemas, que denominaram por *Problema 1* e *Problema 2* (Quadro 4.11).

Quadro 4.11– Problemas propostos na atividade de modelagem ‘Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil’

Nesse trabalho estaremos interessados em estudar o desenvolvimento da cultura de soja no Brasil, obtendo modelos que nos permitam analisar a produção média da cultura e a média da área ocupada pela mesma.

Conforme mencionamos anteriormente, de acordo com a EMBRAPA, os EUA, atingiram a marca de 90,6 milhões de toneladas produzidas na safra de 2010.

Com base nisto, a partir dos dados obtidos, trabalhamos na elaboração de modelos que nos permitam responder as seguintes questões:

1 - Se a tendência do crescimento da produção de soja no Brasil permanecer no ritmo que vem apresentando nos últimos anos, quando a produção nacional atingirá a marca conquistada pelos EUA (maior produtor de soja mundial) de 90,6 milhões de toneladas?

2 - Considerando também o avanço da área de plantio (em hectares) no decorrer dos últimos anos, qual será a área média de plantio no ano em que o Brasil atingirá a marca de 90,6 milhões de toneladas de soja produzida?

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Para desenvolver os modelos matemáticos que poderiam ser utilizados para responder aos problemas em estudo, os alunos fizeram simplificações nos dados apresentados na Tabela 4.5, levando em consideração intervalos de tempo de 3 em 3 anos e a média da produtividade (em toneladas) e da área plantada (em hectares) em cada um desses intervalos (Tabela 4.6).

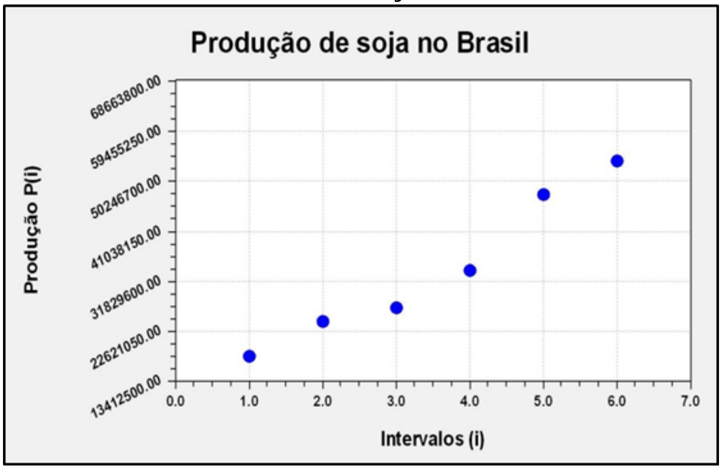
Tabela 4.6- Média da produtividade e área plantada de soja no Brasil

Intervalo	Ano	Média da Quantidade Produzida (toneladas)	Média da Área Plantada (hectares)
1	1990-1992	18.016.771,67	7.338.661,333
2	1993-1995	24.401.815,67	11.300.553
3	1996-1998	26.955.650	11.728.008,33
4	1999-2001	33.905.187	13.583.940,33
5	2002-2004	47.858.999,67	18.834.973
6	2005-2007	53.834.628,67	22.026.938,33
7	2008-2010	64.059.495,67	22.404.834,33

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Para responder o problema 1: *Se a tendência do crescimento da produção de soja no Brasil permanecer no ritmo que vem apresentando nos últimos anos, quando a produção nacional atingirá a marca conquistada pelos EUA (maior produtor de soja mundial) de 90,6 milhões de toneladas?*, os alunos representaram a tendência dos dados no plano cartesiano (Figura 4.46), utilizando o software Curve Expert, e consideraram que a produção de soja mantém o crescimento no decorrer do tempo, segundo tendência. Utilizaram a variável dependente P para a produção de soja e a variável independente i para o intervalo de tempo de 3 em 3 anos.

Figura 4.46- Representação gráfica da tendência dos dados da produção de soja no Brasil da atividade de modelagem ‘Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil’



Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Observando a tendência dos dados apresentados na Figura 4.46, os alunos iniciaram a dedução do modelo matemático para responder o problema. Para tanto, deduziram três modelos: linear, quadrático e exponencial, conforme Quadro 4.12.

Quadro 4.12– Desenvolvimento dos modelos matemáticos para o Problema 1 proposto na atividade de modelagem ‘Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil’

Modelo 1 (Linear)

Para a obtenção do modelo linear foi escolhido o método dos mínimos quadrados.

O método consiste na resolução do seguinte sistema de equações, $\begin{cases} \sum x^2 a + \sum xb = \sum xy \\ \sum xa + nb = \sum y \end{cases}$ para a obtenção de um modelo da forma $P(i) = ai + b$.

De acordo com os dados, temos, $\sum x^2 = 140, \sum x = 28, n = 7, \sum xy = 1294027341$ $e \sum y = 269032548,4$.

Substituindo os dados no sistema, temos, $\begin{cases} 140a + 28b = 1294027341 \\ 28a + 7b = 269032548,4 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema, obtém-se $a = 7782040,964$ e $b = 7305057,343$.

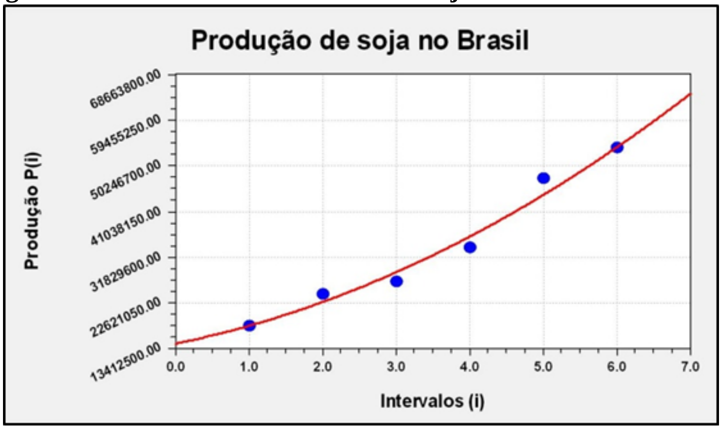
Assim, o modelo desejado pode ser escrito da forma $P(i) = 7782040{,}964.i + 7305057{,}343$.
[...]

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Modelo 2 (Quadrático)

Para desenvolver esse modelo, utilizamos o software Curve Expert, para fazer uma aproximação dos dados com uma função quadrática (Figura 4.47).

Figura 4.47- Representação gráfica da tendência dos dados da produção de soja no Brasil com a curva de tendência função quadrática da atividade de modelagem 'Desenvolvimento da cultura de soja no



Brasil'

Com auxílio do Curve obtivemos o seguinte modelo:

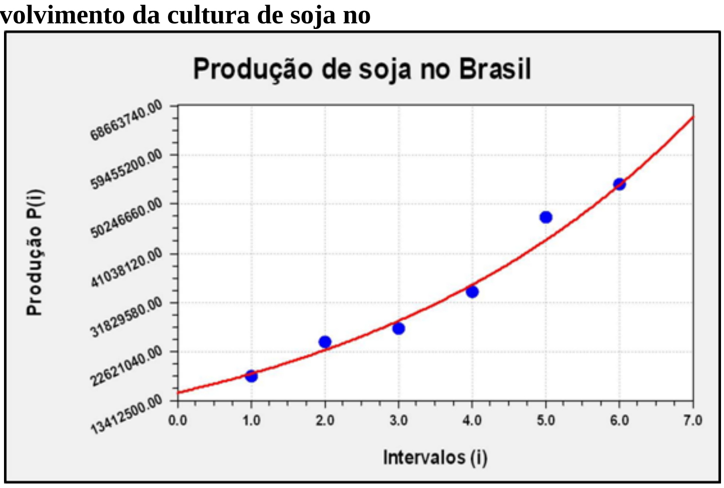
$P(i) = 14493148,624 + 2989980,06536i + 599007,615357i^2$

[...]

Modelo 3 (Exponencial)

Tendo em vista o crescimento da produção de soja, analisamos uma função exponencial que se adeque aos dados obtidos. Novamente feito o ajuste no Curve Expert (Figura 4.48).

Figura 4.48- Representação gráfica da tendência dos dados da produção de soja no Brasil com a curva de tendência função exponencial da atividade de modelagem 'Desenvolvimento da cultura de soja no



Brasil'

Obtivemos o modelo: $P(i) = 14998380.e^{0,2129326.\ i}$.

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Ao deduzir cada um dos modelos (linear, quadrático e exponencial) os alunos já realizavam a validação comparando os dados estimados com os dados 'reais'. Após validarem cada um dos modelos, os alunos calcularam o intervalo em que a produção de soja brasileira se aproximava da produção dos Estados Unidos – 90,6 milhões de toneladas produzidas (Quadro 4.13).

Quadro 4.13– Resultado para o Problema 1 proposto na atividade de modelagem 'Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil'

Modelo 1 (Linear): $P(i) = 7782040{,}964.i + 7305057{,}343$

Dado que os valores estimados podem ser considerados próximos dos valores observados, tomamos $P(i) = 90600000$. Substituindo no modelo encontrado temos, i=10,703.

Deste modo, podemos concluir que, no intervalo i=11, que se refere ao período de 2020 a 2022, o Brasil já terá atingido a produção de 90,6 milhões toneladas de soja.

Modelo 2 (Quadrático): $P(i) = 14493148{,}624 + 2989980{,}06536i + 599007{,}615357i^2$

Como os valores estimados estão bem próximos dos valores observados, concluímos que o modelo pode representar a situação.

Queremos saber quando o Brasil atingirá a marca de 90,6 milhões de toneladas alcançada pelos EUA na safra de 2010, para isso consideramos $P(i) = 90600000$.

Sendo assim, temos $i = 9{,}049079704$, ou ainda, $i \cong 9$.

Diante disso, como $i \cong 9$, concluímos que entre 2014 e 2016 o Brasil atingirá a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja.

Modelo 3 (Exponencial): $P(i) = 14998380.e^{0{,}2129326.\ i}$

Observando a validação do modelo, consideramos que ele se adequa aos dados observados sendo assim vamos responder o problema, quando $P(i) = 90600000$.

Sendo assim, temos que i=8,446391101.

Ou ainda $i \cong 8$, sendo assim 8 - 7 = 1, logo em 2013 o Brasil atingirá a marca de 90,6 milhões de toneladas de soja, podemos observar que pelo fato de ser um modelo exponencial seu crescimento é muito rápido.

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Analisando os resultados obtidos, os alunos concluíram que, dentre os modelos matemáticos deduzidos, o que mais se aproximava da realidade era o modelo quadrático. Esse fato foi confirmado em conversa com agrônomo, como relatado por A8.

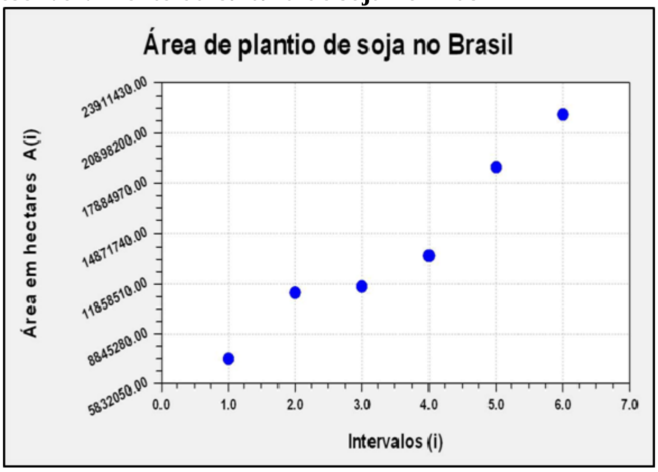
> A8: *A conclusão então foi que o modelo mais adequado é o quadrático que foi o que a gente tinha falado, ou seja, vai atingir a média de produção de 90,6 milhões de toneladas nos anos de 2014 a 2016, que é por intervalo né, que a gente tá fazendo.* [...] *Eu tenho um irmão que é agrônomo então eu conversei com ele e falei assim 'cara... e aí?' porque ele trabalha em uma multinacional, então ele tem todas essas projeções né? Tem estudos sobre isso, então ele sempre comenta. Ele falou assim 'nossa vocês conseguiram um modelo que fala certinho, porque é mesmo entre 2014 e 2016 que a gente chega nessa produção, que é uma das metas brasileiras!'.*

O problema 2 *Considerando também o avanço da área de plantio (em hectares) no decorrer dos últimos anos, qual será a área média de plantio no ano em que o Brasil atingir a marca de 90,6 milhões de toneladas de soja produzida?* foi definido por inquietações por parte dos alunos sobre a necessidade de conhecer o espaço necessário para a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja. *Será que o Brasil dispõe dessa área para a cultura de soja? A área disponível para o cultivo é limitada?*, foram algumas das questões que permearam essas inquietações. No entanto, devido ao fato do trabalho se encaminhar para questões relativas à produção de soja e devido ao fato de que a produção pode ser aumentada não necessitando de um aumento excessivo de área cultivada, os alunos se deram por satisfeitos em determinar a área necessária hoje para a produção de 90,6 milhões de toneladas, seguindo a evolução da produtividade no período de 1990 a 2010, conforme apresentação de A8.

> A8: *Daí eu me convenci que isso não tem um limite, porque se tiver área para plantar... é ilimitado, e aí com conversas assim... que eu fui conversando com agrônomos e meu irmão é agrônomo também, meu irmão falou assim que você pode ter uma mesma área, mas inovar em tecnologia que você consegue produzir mais... assim, às vezes muito pouco mas produz mais. Aí ele falou assim se você for pensar no âmbito dessa forma, às vezes o crescimento não chega a ser limitado. O nosso enfoque é na produção, a gente só foi trabalhar a área para ver a relação da área com a produção né? Chegando no tempo em que a produção é tal, então vamos nesse tempo qual seria a área necessária.*

Utilizando a Tabela 4.6, mas agora levando em consideração as médias das áreas plantadas, os alunos representaram, utilizando o software Curve Expert, a tendência dos dados no plano cartesiano (Figura 4.49) e consideraram que a média da área plantada mantém o crescimento no decorrer do tempo, segundo tendência. Utilizaram a variável dependente A para a média da área cultivada e a variável independente i para o intervalo de tempo de 3 em 3 anos.

Figura 4.49- Representação gráfica da tendência dos dados da área de plantio de soja no Brasil da atividade de modelagem ‘Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil’



Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

A dedução do modelo matemático para responder o problema 2 discorreu nos mesmos procedimentos realizados para o problema 1, ou seja, a partir da tendência dos dados apresentados na Figura 4.49, os alunos deduziram três modelos: linear, quadrático e exponencial, realizaram a validação de cada um deles e considerando os modelos válidos responderam o problema utilizando o intervalo i=9 (Quadro 4.14) encontrado no problema 1, conforme comunicação iniciada por A1.

> A1: *Bom... com o problema 1 resolvido, a gente parte para o problema 2. A ideia é que a gente precisa do resultado do problema 1 que é esse i aproximadamente 9 para a gente estimar em qual intervalo de tempo, que de acordo com o intervalo de tempo, qual é a área necessária para plantar soja no Brasil para atingir essa produção. Então a ideia foi que a gente considerou os intervalos assim como do problema 1 e a média da área plantada por hectare. A gente tem essa tabela* [referindo ao slide com Tabela 4.6]. *A gente montou essa tabela com os dados e assumiu como hipótese para resolver esse problema: o aumento da área do plantio tende a manter seu crescimento no decorrer do tempo e a tendência dos dados e as variáveis a gente considerou A de i como sendo área do plantio de soja no decorrer do tempo e o i como sendo intervalo de tempo. Então a ideia é que esse intervalo de tempo a gente já sabe qual é o que a gente vai usar, então i=9 que nos leva a produção dos Estados Unidos. Então com isso a gente vai encontrar os três modelos: um linear, um quadrático e um exponencial e vai substituir esse i=9 para tentar encontrar uma área aproximada que a gente vai precisar para produzir soja de acordo com o recorde dos Estados Unidos.*

Quadro 4.14– Desenvolvimento dos modelos matemáticos e solução do Problema 2 proposto na atividade de modelagem 'Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil'

Modelo 1 (linear)

Para a obtenção do modelo linear foi escolhido o Método dos Mínimos Quadrados. [...]
De acordo com os dados, temos, $\sum x^2 = 140, \sum x = 28, n = 7, \sum xy = 502629888{,}9$ $e \sum y = 107217458{,}7$. Substituindo os dados no sistema, temos, $\begin{cases} 140a + 28b = 502629888{,}9 \\ 28a + 7b = 107217458{,}7 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema, obtém-se $a = 2634287{,}654$ e $b = 4779629{,}2$.

Assim, o modelo desejado pode ser escrito na forma $A(i) = 2634287{,}654i + 4779629{,}2$.

[...]

Dado que os valores estimados podem ser considerados próximos dos valores observados, tomamos $A(9)$. Substituindo no modelo encontrado temos,

$$A(9) = 2634287{,}654 \cdot 9 + 4779629{,}2$$

$$A(9) = 28488218{,}09$$

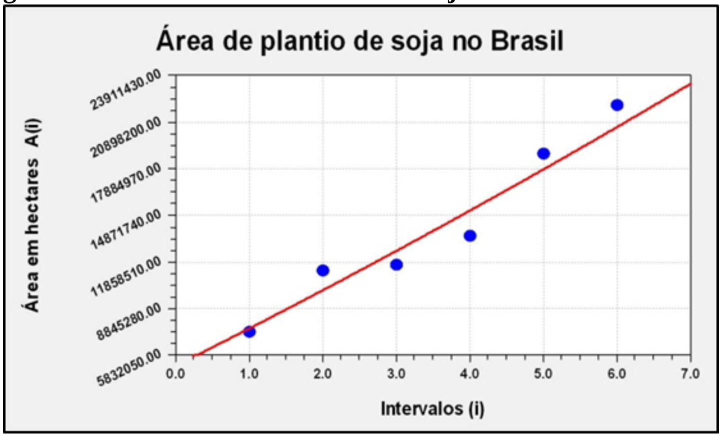
Portanto, podemos concluir que, no período que o Brasil atingir a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja, aproximadamente 28.488.218,09 de hectares do território brasileiro estará sendo usado para a cultura de soja.

Modelo 2 (quadrático)

Para desenvolver esse modelo, utilizamos o software Curve Expert, para fazer uma aproximação dos dados com uma função quadrática (Figura 4.50).

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Figura 4.50- Representação gráfica da tendência dos dados da área de plantio de soja no Brasil com a curva de tendência função quadrática da atividade de modelagem 'Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil'



Com auxílio do Curve Expert obtivemos o seguinte modelo $A(i) = 5164632,47286 + 2377768,79845i + 32056,8213095i^2$

[...]

Para i = 9 (resultado obtido no problema 1), substituímos no modelo obtido para encontrar a área referente a esse período.

$$A(9) = 5164632,47286 + 2377768,79845 \cdot 9 + 32056,8213095 \cdot 9^2$$

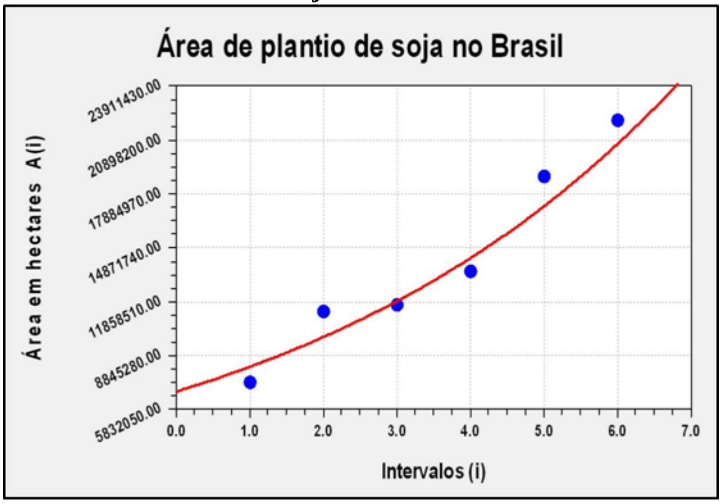
$$A(9) = 29161397,18$$

Assim, a área ocupada pela cultura de soja quando o Brasil atingir a produção de 90,6 milhões de toneladas será de, aproximadamente, 29161397,18 hectares.

Modelo 3 (Exponencial)

Tendo em vista o crescimento da área de plantio da soja, analisamos uma função exponencial que se adeque aos dados obtidos. Novamente feito o ajuste no Curve Expert (Figura 4.51).

Figura 4.51- Representação gráfica da tendência dos dados da área de plantio de soja no Brasil com a curva de tendência função exponencial da atividade de modelagem 'Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil'



Obtivemos o modelo matemático $A(i) = 6849480e^{0,1841759i}$. [...]

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Queremos saber qual será a área plantada de soja no Brasil quando a quantidade 90,6 milhões de toneladas for alcançada.
Como consideramos que i = 9 é quando o Brasil atingirá a marca de 90,6 milhões de toneladas de soja, temos que:

$$A(9) = 6849480e^{0,1841759 \cdot 9}$$

$$A(9) = 35936584,27$$

A partir do modelo 3, podemos concluir que, quando o Brasil atingir a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja, a área ocupada por essa cultura será de 35.936.584,27 hectares.

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Diante dos modelos obtidos e das soluções encontradas, dois alunos do grupo (A8 e A1) teceram considerações sobre o problema 2 e a situação-problema estudada, respectivamente.

> A8: *Aí a conclusão do modelo que pelo comportamento dos dados observados e dos estimados, a gente achou que o modelo 2, o quadrático também era o que mais se adequava pelo que a gente tava querendo, do valor da área que a gente estava buscando e que é aproximadamente 29 milhões de hectares e o que eu queria complementar é que o Brasil atualmente, tem inclusive 39 milhões de hectares para o plantio. Então esses 29 milhões tá dentro, é aceito. E um hectare é 10 mil metros quadrados. Eu acho interessante falar para quem nunca ouviu, porque tá falando em hectares, em hectares, para vocês terem uma ideia. E como o Brasil tem 39 milhões de hectares sem degradação, sem agredir para o plantio, então sim, é possível.*
> A1: *Então a conclusão do trabalho. Na verdade a ideia de fazer esse trabalho é que a gente pensou na agricultura como sendo grande contribuinte do PIB brasileiro. A gente pesquisou e encontrou que a agricultura no Brasil corresponde a 24% do total do PIB e como o Brasil também se mostra como o maior produtor, aliás é o maior exportador... ele é o segundo produtor, mas é o maior exportador de soja no mundo então a gente pensa que essa cultura tem grande importância para a economia brasileira e a gente julgou importante também então para tentar prever para fazer uma previsão de como essa cultura vai desenvolver nos próximos anos, visando na verdade um estudo relacionado a um melhor desenvolvimento a esse tipo de coisa. Então diante dos modelos que a gente obteve, a gente pode concluir que o Brasil vai alcançar o que foi conseguido pelos Estados Unidos na safra do ano passado, que é a produção de 90,6 milhões de toneladas entre os anos de 2014 e 2016 e que então o Brasil vai precisar também de 29 milhões 161 mil 597 hectares aproximadamente para produzir essa quantidade. Então a gente estava interessado em responder a essas duas questões com os modelos que a gente obteve a gente achou isso como resposta. E também a gente analisou, observando os resultados, a gente pensa que a se a coisa correr do jeito que está previsto nos modelos, a economia brasileira está se desenvolvendo muito rápido no que se refere à produção de soja, porque se a gente for analisar é um crescimento bastante significativo num período de tempo curto. E é isso. Se tiver alguma pergunta!*

Ao finalizarem a apresentação, os alunos responderam ao questionário para os membros do grupo (Apêndice F). Outro questionário (Apêndice E) foi respondido pelo restante da turma. Com as respostas a estes questionários, evidenciamos as impressões que os alunos do grupo que viveram a atividade tiveram, além das impressões que os colegas que ouviram a comunicação do grupo tiveram. Esse grupo, dos quatro formados, foi o primeiro a comunicar os resultados do trabalho de modelagem aos colegas.

Segundo respostas ao questionário, os membros do grupo consideraram que na atividade de modelagem foi difícil escolher o problema a ser estudado, no entanto, ao desenvolverem a situação-problema sentiram-se muito confiantes em relação à Matemática utilizada, pois conforme registros de A2 (Figura 4.52), os conteúdos matemáticos utilizados já eram conhecidos por eles. A tarefa que desenvolveram favoreceu a troca de ideias com os colegas do grupo, o conhecimento matemático dos membros do grupo foi fundamental na resolução do problema.

Figura 4.52- Resposta de A2 para Q1 do questionário (Apêndice F) referente às impressões da atividade de modelagem 'Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil'

1) Os conteúdos matemáticos necessários para esta atividade eram coisas já apreendidas ou foi necessário buscar algum tipo de suporte?

Os contéudos utilizados foram estudados em sala de aula. Inclusive, foi por esse motivo que fizemos os três modelos

Fonte: Registro da resposta entregue por A2.

Para os não-membros do grupo, a atividade de modelagem sobre o Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil, segundo questionário entregue por 7 alunos, foi considerada como uma atividade cujo problema é relevante para ser estudado; os objetos matemáticos utilizados pelo grupo são adequados e a atividade ajuda na aprendizagem dos objetos matemáticos; a validade da solução convence aos que estão em primeiro contato com ela; de forma geral, é uma atividade interessante, mas que pouco possibilita refletir sobre o problema, identificando possíveis causas diretas (que estão ao nosso alcance para mudá-las) e causas indiretas (fora de nossa esfera de ação).

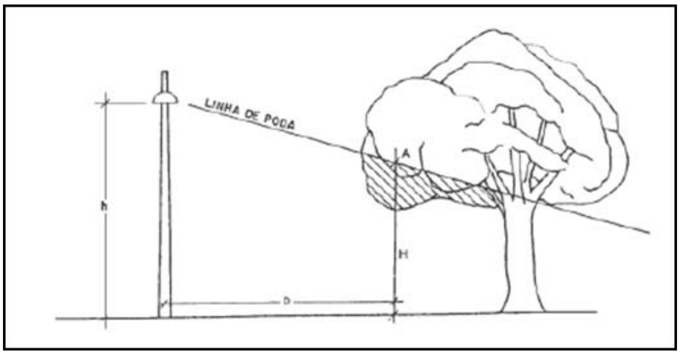
4.3.5 CONTEXTO DO 3.º MOMENTO — ATIVIDADE 5: PODA DE ÁRVORE

O grupo que desenvolveu a atividade 5, *Poda de árvore*, interessou-se pela situação-problema referente à iluminação pública na cidade de Londrina. Esse interesse surgiu quando a professora da disciplina informou que para o *trabalho final* os grupos teriam que escolher uma situação-problema e desenvolver uma atividade de modelagem, definindo o problema, as hipóteses, as variáveis, o modelo matemático que seria utilizado para responder o problema e por fim comunicar os resultados para os colegas por meio de um seminário. Os alunos ficaram ansiosos e pediram que a professora sugerisse algumas situações. Dentre as situações sugeridas, estava a que se referia à iluminação pública com relação à poda de árvores. Um grupo formado por seis alunos do qual A6 fazia parte se interessou por essa situação. Antes de informar à professora que iriam desenvolver uma atividade de modelagem segundo a situação "iluminação pública na cidade de Londrina", buscaram informações, principalmente em sites da internet, conforme relatado por A6 e por A9 no primeiro encontro de orientação[39], quando questionados sobre a responsabilidade da escolha da situação:

> A6: *Foi escolhida em grupo, na verdade nós não tínhamos ainda a questão da situação do trabalho final. Aí quando a professora sugeriu algumas das situações, nós achamos essa interessante e começamos a ler sobre o assunto.* [...] *Aí nós achamos interessante, que daria para pesquisar assuntos interessantes e importantes e aí nós decidimos escolher a situação, tivemos a ideia de fazer uma análise sobre a iluminação pública.*
> P: *Vocês escolheram algum local específico para estudar, coletar os dados...*
> A9: [interrompendo] *a gente vai fazer geral e vamos testar com o modelo padrão de um local específico, a gente pensou em estudar a iluminação dos arredores do Lago Igapó. A gente achou muitas informações gerais com relação às árvores, tipo a distância mínima dependendo do porte, se for assim uma árvore de porte pequeno a distância do poste até a árvore é de quatro metros e entre as árvores é oito, agora se for... entre as árvores. Agora se for de porte médio e grande, a distância da árvore ao poste é de cinco metros e entre elas é dez. Aí a gente está assumindo que a distância entre os postes é de quarenta, que é o que a gente vai trabalhar!*

As informações a que A6 e A9 se referiram constam do Manual de Iluminação Pública da Companhia Paranaense de Energia (Copel), disponível no site www.copel.com. Dentre as informações disponibilizadas no Manual da Copel, os alunos se depararam com uma referência de poda de árvore apresentada por uma imagem (Figura 4.53).

Figura 4.53- Esquema que representa o local de poda da árvore



Fonte: Manual de Iluminação Pública – Copel.

---

[39] Ao todo foram quatro encontros, três extraclasse e um encontro em hora/aula. Os encontros foram gravados em áudio.

Para realizar a poda da árvore, leva-se em consideração seu porte, a altura do poste de iluminação próximo a ela, a distância da árvore ao poste e o tipo de lâmpada utilizado. Diante dessas informações, os alunos se interessaram em estudar especificamente a poda de árvores existentes nos arredores do Lago Igapó, localizado na região central da cidade de Londrina. Em um dia determinado para a coleta de dados, o grupo de alunos e a pesquisadora visitaram os arredores do Lago Igapó. Durante a visita, observaram que os postes que rodeiam o lago se encontram do lado oposto às árvores e que a informação sobre posição de poste e árvore era lado-a-lado. No entanto, ao percorrerem a Rua Bento Munhoz da Rocha Neto que também permeia o Lago Igapó e onde se localiza um Hospital, resolveram coletar alguns dados que foram utilizados durante todo o desenvolvimento da atividade, a partir das informações correspondentes ao tipo de poste localizado nesta rua, como altura da lâmpada no poste e raio de iluminação.

Nesta atividade, os alunos produziram os dados, pois a partir de conceitos matemáticos como semelhanças de triângulos calcularam a altura da lâmpada no poste. Para tanto, a partir da sombra do poste e da sombra de um dos alunos do grupo (A10), realizaram os cálculos necessários. Por meio da área de penumbra que existia em um trecho da rua, devido à existência de uma lâmpada queimada de um dos postes, mediu-se o raio de iluminação para a lâmpada específica daquele poste. A partir desses dados coletados, os alunos partiram para o desenvolvimento da atividade de modelagem pretendida. Os outros encontros foram para delinear o estudo e focar na resolução do problema, pois os alunos estavam preocupados com a complexidade dos conteúdos matemáticos, então buscavam aprofundar mais no problema. Eles queriam estudar a variação de iluminação no raio de iluminação de diferentes lâmpadas, observar o que acontece com a poda em uma representação tridimensional, entre outras inquietações que não obtiveram dados para responder.

Embora os alunos tenham, inicialmente com o acompanhamento da pesquisadora, produzido dados para a Rua Bento Munhoz da Rocha Neto, durante o desenrolar da atividade o aluno A6, voltando para casa após a aula do curso, no período noturno, passou por uma rua (Serra dos Parecis) na qual existia um buraco. Como a rua estava mal iluminada, A6 não viu o buraco e bateu com a roda de seu carro. Ele pensou: *caramba, mas a gente está fazendo um trabalho que trata da iluminação da rua, vamos unir o útil ao agradável!* [trecho da fala de A6 em encontro de orientação para delinear o trabalho].

A partir dessa vivência de A6, o trabalho se orienta para uma investigação e análise dos dados para esta rua específica, mas os alunos não deixam de lado o estudo inicial no qual coletaram dados (Rua Bento Munhoz da Rocha Neto), determinando assim o problema que pretendiam investigar: *Determinar um modelo para o ponto de poda de árvores próximas a diferentes tipos de postes.* Neste caso, os diferentes tipos de postes a ser considerados eram os das ruas Serra dos Parecis e Bento Munhoz da Rocha Neto.

No Manual de Iluminação Pública da Copel é apresentada uma equação matemática em que se encontra a altura (H) do ponto de poda, conforme apresentado na Figura 4.53. Os alunos ficaram intrigados com a forma que foi obtida esta equação e realizaram uma discussão em torno dela. Toda a atividade de modelagem é permeada por essa equação que os alunos não conseguiram informações de como foi obtida. As informações que permeiam os cálculos que os alunos realizaram para a determinação desse ponto de poda são apresentadas no relatório impresso que foi entregue por eles (Quadro 4.15) e explicado em comunicação do seminário pelos alunos A6, A9 e A10.

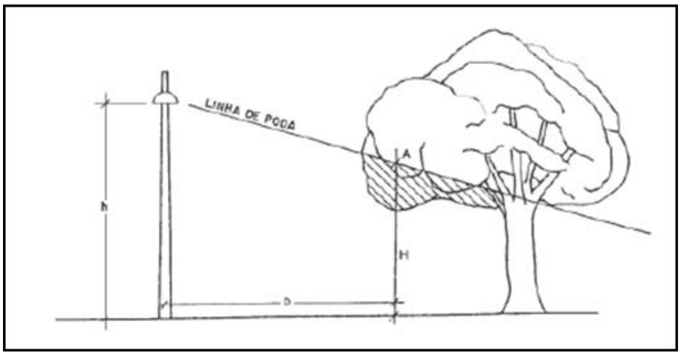
Quadro 4.15– Informações utilizadas para o cálculo de ponto de poda de árvore para a atividade de modelagem ‘Poda de árvore’

A COPEL utiliza de uma equação que determina a linha de poda. Para o desenvolvimento dessa equação são considerados alguns parâmetros que são: *D* distância do poste ao galho mais baixo da árvore e *h* a posição que a luminária está montada.

$$H = -0{,}26D + h$$

No Manual de Iluminação Pública da Copel há uma figura (Figura 4.53) que representa o local de poda da árvore.

Figura 4.53- Esquema que representa o local de poda da árvore



Fonte: Manual de Iluminação Pública – Copel.

Na qual *A* é altura do ponto de poda.

Para a obtenção desta equação, a COPEL levou em consideração:

• A curva que descreve a linha de poda é uma reta;
• Altura da lâmpada no poste de 6*m*;

• Raio de iluminação de 22,5*m*;
• Distância entre dois postes de 40*m*.

Como a distância entre postes é de 40*m* teríamos duas possibilidades para o raio de iluminação. 1ª, o raio ser de 20 metros e 2ª, o raio ser maior que 20 metros. A primeira possibilidade não é aceita porque se o raio for de 20 metros, haverá uma área de penumbra, como mostra a Figura 4.54:

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Figura 4.54- Gráfico do lux

					3	3	3	2	2	2	
	3	3	3	3	4	4	4	3	3	3	3
	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3
	4	5	8	9	12	14	12	9	8	5	4
	4	5	9	12	17	22	17	12	9	5	4
	3	4	7	10	14	17	14	10	7	4	3

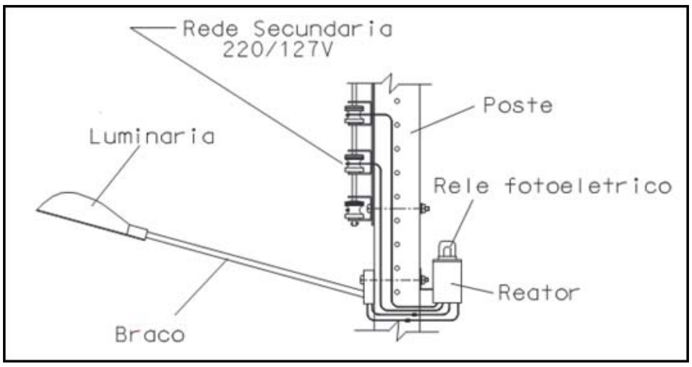
Fonte: Manual de Iluminação Pública – Copel.

Lux é incidência de lúmen por metro quadrado e lúmen é a quantidade de luz emitida por um corpo luminoso. O que vemos na Figura 4.54 são as quantidades de lux por metro quadrado. Dessa forma se o raio for de 20*m* haveria uma zona de penumbra, pois nas extremidades a quantidade de lux é baixa. Dito isso, o correto será usar um raio maior, havendo assim a sobreposição da quantidade de lux nas extremidades evitando a zona de penumbra.

Poste Padrão IP-01

É constituído de uma luminária aberta (LM-1), uma lâmpada a vapor de mercúrio, um reator que incorpora um relé fotoelétrico e um braço de 1 metro (BR-1), que fixa o conjunto ao poste da rede de distribuição.

Figura 4.55- Esquema do poste padrão IP-01



Fonte: Manual de Iluminação Pública – Copel.

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

A6: *Ali* [referindo ao esquema no slide, Figura 4.53] *tem uma ilustração do que acontece. No caso as variáveis que estão envolvidas no problema são: o h minúsculo a gente vai determinar a altura da lâmpada no poste, o H maiúsculo ali no ponto A* [apontando para o slide] *vai*

determinar a altura que deve ocorrer a linha de poda, ou seja, a altura que vai ocorrer, levando em consideração o seguinte: o galho mais baixo da árvore.... então, a análise é feita assim [com gestos] *analisa a árvore, o ponto mais baixo que ele estiver do chão que vai passar a linha de poda, ou seja, naquele ponto onde está o H a distância que é considerada é a distância d, a variável d no caso que é do poste até onde está ocorrendo a interseção da linha de poda com a linha vertical* [apontando para o slide e traçando com as mãos no ar a representação de uma reta perpendicular] *que está tendo ali no ponto A.*
Bom, e a função, o modelo, a função que ela traz é uma função linear do tipo H onde H=-0,26D+h, o h matematicamente falando pode ser considerado como o coeficiente linear e no nosso caso está sendo os 6 metros, o -0,26 é o coeficiente angular dessa reta que nada mais é que a variação da altura do poste pela distância, pelo raio de iluminação, que são os 22 metros e meio. Então -0,26 veio da divisão da variação matematicamente falando, se considerássemos o plano cartesiano xy, seria a variação do y pela variação do x.

A9: *Então, o que acontece? Como eles obtiveram essa distância de 40 metros? Para haver uma distância de 40 metros entre os postes, eu tenho que ter um raio de iluminação que cubra esses 40 metros, então o que acontece?* [indo à lousa escrever, representar o que está falando] *você tem dois postes, né? Um tá aqui* [e representa na lousa] *e tem um outro a 40 metros* [representa a distância por um traçado na lousa que distancia 40m de outro poste representado]. *Então aqui tem que ter um raio de iluminação que vai cobrir toda essa área* [representa a iluminação por meio de traçados], *mas o que acontece com o raio de iluminação? Se esse raio for de 20 metros... a gente vai ter duas possibilidades aqui: se o raio for de 20 metros, eles param aqui* [representa o ponto onde os raios de iluminação atingem a superfície do solo], *mas... passa para o outro slide, mas a Copel traz uma tabela que é essa aqui* [apontando para um quadro que apresenta a frequência de iluminamento - Figura 4.54].
Que é uma tabela de lux. O que é esse lux? Lux é a incidência de lúmen por metro quadrado e lúmen é a quantidade de energia emitida por um corpo luminoso.
Calma já vou dizer [referindo-se a um comentário sussurrado pelo A10]
O que acontece se eu tiver um raio de 20 metros? Vai acontecer que nas extremidades da iluminação [traçando a representação do cone luminoso com as mãos no ar], *eu vou ter um lux muito pequeno* [apontando com a caneta para um valor de lux próximo da extremidade do raio de iluminação da tabela] *ó 3 4 4 3 3, então vai haver uma área de penumbra aqui* [contornando a possível área de penumbra representada na lousa] *e eles não querem que isso aconteça. Então para que isso não aconteça, eu tenho que ter um raio maior que 20 metros* [olhando para o A10].

A10: [interrompendo a apresentação do A9] *só quero esclarecer que é como se o poste estivesse aqui* [apontando para o centro da tabela, em que o lux apresenta um maior valor] *e aqui fosse o centro, tá vendo que esse valor é maior? Tá bem iluminado aqui, então esse é o foco da iluminação* [apontando para o maior valor da tabela]. *Quanto mais distante do poste no caso, menos iluminação vai ter* [apontando para os valores da extremidade da tabela].

A9: *Então por que eles consideram um raio maior do que 20? Para haver uma sobreposição da quantidade de luxes nessas regiões. Então se eu tiver um raio de 22 e meio, eu vou ter nesses pontos 3 3 4 4 3* [apontando para os valores no slide] *a incidência então esses pontos passam a ser 6 6 8 8 e 6, evitando assim a área de penumbra. Então num raio encontrado no caso, para a equação foi de 22 e meio.*

De posse dessas informações os alunos iniciaram a investigação do problema para a Rua Serra dos Parecis. Para tanto, conforme consta no relatório impresso entregue (Quadro 4.16) foi realizada a coleta de dados para essa rua. Durante a comunicação, o grupo mostrou aos outros alunos da sala uma fotografia (Figura 4.56) que foi obtida sem a utilização de flash fotográfico para dar uma ideia mais próxima do que acontece no local.

> A9: *Será que vocês conseguem enxergar?* [referindo-se à Figura 4.56 que foi projetada no slide]. *Essa aí no caso é a rua. Então, essa foto foi tirada sem flash para realmente mostrar como a rua é escura.*
> A10: [interrompendo] *dá para ver aqui...* [apontando para a foto] *aqui tem uma árvore e só tem uma luzinha lá no fundo!*
> A6: [interrompendo] *e nós estávamos aí na foto bem próximos do poste e da árvore onde de fato a iluminação estava comprometida, nem dá para ver a gente!*

Quadro 4.16– Levantamento de dados e resolução do problema sobre poda da árvore da Rua Serra dos Parecis da atividade de modelagem 'Poda de árvore'

A rua utilizada para a obtenção dos dados foi a Rua Serra dos Parecis (Figura 4.56). Esta rua é classificada, segundo o manual da COPEL, como via normal.

São consideradas vias normais as avenidas e ruas asfaltadas ou calçadas, onde há predominância de construções residenciais, trânsito de veículos (não tão intenso) e trânsito de pedestres.

Figura 4.56- Fotografia da Rua Serra dos Parecis retratada no período noturno

Foto obtida do trabalho dos alunos.

Como observado na Figura 4.56, a iluminação está muito comprometida devido ao plantio irregular das árvores e a falta de poda.

Segundo o manual de Arborização e Urbanismo de Londrina, o plantio das mudas de árvores deveria ser de 4m de distância do poste se a árvore for de porte pequeno e 5m para árvores de porte médio e grande. Mas pelas medições que fizemos, havia árvores plantadas a menos de 4m dos postes.

Os dados abaixo foram obtidos com o auxílio de uma trena.

Distância entre poste 1 e árvore 1: 2,5m
Distância da árvore 1 a árvore 2: 13m
Distância da árvore 2 ao poste 2: 17m

Dessa forma, a distância entre dois postes é de 32,5m, o que está dentro do padrão da COPEL, que nos informa que a distância média entre dois postes pode variar de $30 - 40m$.

Etapa 1 - Posição da lâmpada

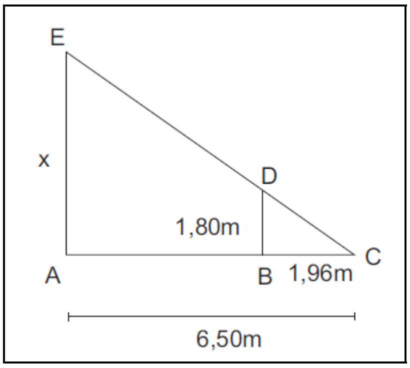
Para o cálculo do posicionamento da lâmpada no poste, utilizamos do conceito de triângulos semelhantes da seguinte forma:

Fizemos a medição da sombra e da altura do A9; e medimos também a distância do centro de iluminação até o final da sombra do mesmo.

Dessa maneira, obtemos os seguintes triângulos (Figura 4.57):

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Figura 4.57- Semelhanças de triângulos



Assim, $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{6{,}5}{1{,}96} = \frac{x}{1{,}80} \Rightarrow 5{,}9693877551 \;\text{ ou }\; x \approx 6$

Com isso obtemos que a altura da lâmpada é de 6 metros.

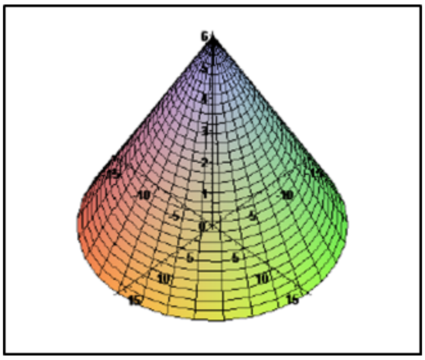
Etapa 2 - Raio de iluminação

O A10 posicionou-se embaixo da lâmpada de forma que houvesse o menor vestígio de sombra possível, ou seja, ele ficou no centro do círculo de iluminamento; e então fizemos a medição do centro até a área de penumbra. Sendo que o raio encontrado foi de 16 metros.

Etapa 3 - Curva de iluminação

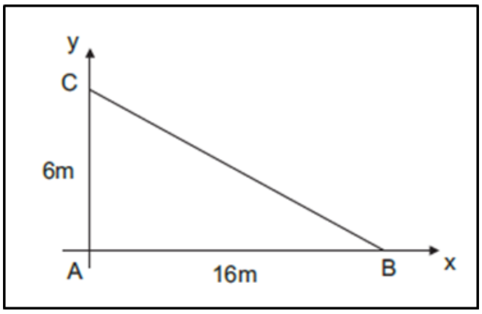
Levamos em consideração que o sólido geométrico que descreve a forma de iluminação é dado por um cone (Figura 4.58).

Figura 4.58- Cone que representa a iluminação



Fizemos a projeção desse cone no plano cartesiano e observamos que a equação será de uma reta (Figura 4.59).

Figura 4.59- Projeção do cone no plano cartesiano



Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Para encontrar essa equação, usamos a equação da reta.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{e} \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Assim, $y = -0{,}375x + 6$ e descreve a curva de iluminação no plano xy e é usada para os postes Padrão IP-01/80M/125M/70S.

Como o galho mais baixo da árvore está localizado à aproximadamente 12*m* do poste, temos

$$f(12) = -0{,}375\ (12) + 6 = 1{,}5$$

ou seja, para resolver o problema dessa área que a iluminação está comprometida, tem que se fazer uma poda na horizontal a 1,5*m* de altura.
[...]

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Observando os resultados encontrados, a árvore localizada na Rua Serra dos Parecis necessita ser podada. Enquanto faziam a coleta de dados, um morador ficou observando e questionando sobre o fato de a Copel/Sema não darem assistência à necessidade de poda naquela rua.

> A9: *Por que o que aconteceu? Quando a gente foi levantar os dados na Rua Serra dos Parecis, o nosso digníssimo A6 aqui* [risos] *em vez de nos ajudar, ele foi tomar um chazinho com um morador e aí o morador acabou contando que eles ligaram na Sema, eles pediram para fazer a poda, a Sema não veio, mas como... acho que algum morador reclamou de roubo por causa da má iluminação, eles foram e podaram a árvore. Só o que aconteceu? A prefeitura foi e multou eles. Porque eles podaram de maneira ilegal, vamos dizer assim.*
> A11: *Sem uma orientação.*
> A9: *E aí, houveram muitos relatos, eles reclamaram demais que a rua sempre foi assim, a Sema não vai podar, você pode ligar e eles não vêm.*
> A6: *É bem isso, mas falando, complementando a informação que o A10 falou, eles comentaram a questão do roubo né? Mas gente eu tava, sério mesmo, eu tava dentro da cozinha dele, ele me levou lá dentro da casa dele, porque o movimento das medições chamou a atenção tanto da primeira casa quanto da segunda, da terceira, enfim... aí eles foram medir, aí eu fui lá tomar um café, bati um papo com ele. E ele falou que de fato na rua foram assaltados duas vezes e eles fizeram o corte por conta própria e eles foram multados, ambos. E tá comprometida, eles estão querendo cortar de novo, só que eles não estão querendo pagar a multa.*
> Ouvinte: *E é cara a multa?*
> A6: *Então... aí se eu pergunto esse valor ele podia pegar meu café de volta né?* [risos]
> A11: *O secretário lá da Sema ele falou né que tem poda atrasada desde 2008 né? O secretário lá já assumiu faz uns dois ou três anos e ele falou que a poda da cidade inteira está atrasada*

desde 2008.
A10: *Só mais uma informação, é que a Copel considera a distância entre os postes de 30 a 40 metros e isso é um padrão da Copel. Então nos nossos modelos eles satisfazem o padrão de distância, quero dizer os postes da Copel satisfazem o padrão deles que tá dentro de 30 a 40 metros de distância.*
Um problema que a gente ficou tentando solucionar, mas não conseguimos foi que tipo de lâmpada foi usado no caso, porque a Copel não traz como eles obtiveram essa análise, eles só trazem assim... ah, uma lâmpada de vapor de sódio de 80 watts se tem 120, 400. Aí eles trazem o fluxo luminoso, lux, lúmen mas essas informações não permitiram que a gente...
A9: *Não tinha como a gente medir.*
A10: *Não tinha como lidar com esse tipo de informação.*
A6: *Tem a lâmpada de mercúrio...*
A10: *Tem a de mercúrio, tem a incandescente, tem a fluorescente. Todos esses tipos de dados estavam no manual, eles falam deles, mas não falam onde é usado, como é usado.*

Utilizando os mesmos procedimentos para o estudo da poda de árvore, os alunos abordaram o a curva de iluminação da Rua Bento Munhoz da Rocha Neto. Isso se deve ao fato de esta rua não apresentar problemas referentes à iluminação causada por árvores, conforme registrado pelos alunos no relatório (Quadro 4.17).

Quadro 4.17– Levantamento de dados e dedução do modelo sobre poda da árvore da Rua Bento Munhoz da Rocha Neto da atividade de modelagem 'Poda de árvore'

A rua utilizada para a medição foi a Rua Bento Munhoz da Rocha Neto (Figura 4.60), próxima ao Hospital Araucária. Esta rua é classificada, segundo o manual da COPEL, como via principal.

São consideradas vias principais as avenidas e ruas asfaltadas ou calçadas, onde há predominância de construções comerciais, assim como trânsito de pedestres e de veículos.

Figura 4.60- Fotografia da Rua Bento Munhoz da Rocha Neto retratada no período noturno

Foto obtida do trabalho dos alunos.

Como observado acima, a rua está bem iluminada e não há árvores atrapalhando.

Os dados apresentados a seguir foram obtidos de maneira análoga ao descrito anteriormente.

Distância média entre dois poste é de 35*m*.

Distância entre um poste e uma árvore foi de 16,8m.
Altura da lâmpada 8,68416667m ou aproximadamente 8,7m
Raio de luminosidade é de 16m.

Assim $y = -0{,}54375x + 8{,}7$ e descreve a curva de iluminação no plano xy e é usada para os postes Padrão IP-03/250M/250S/400M.

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

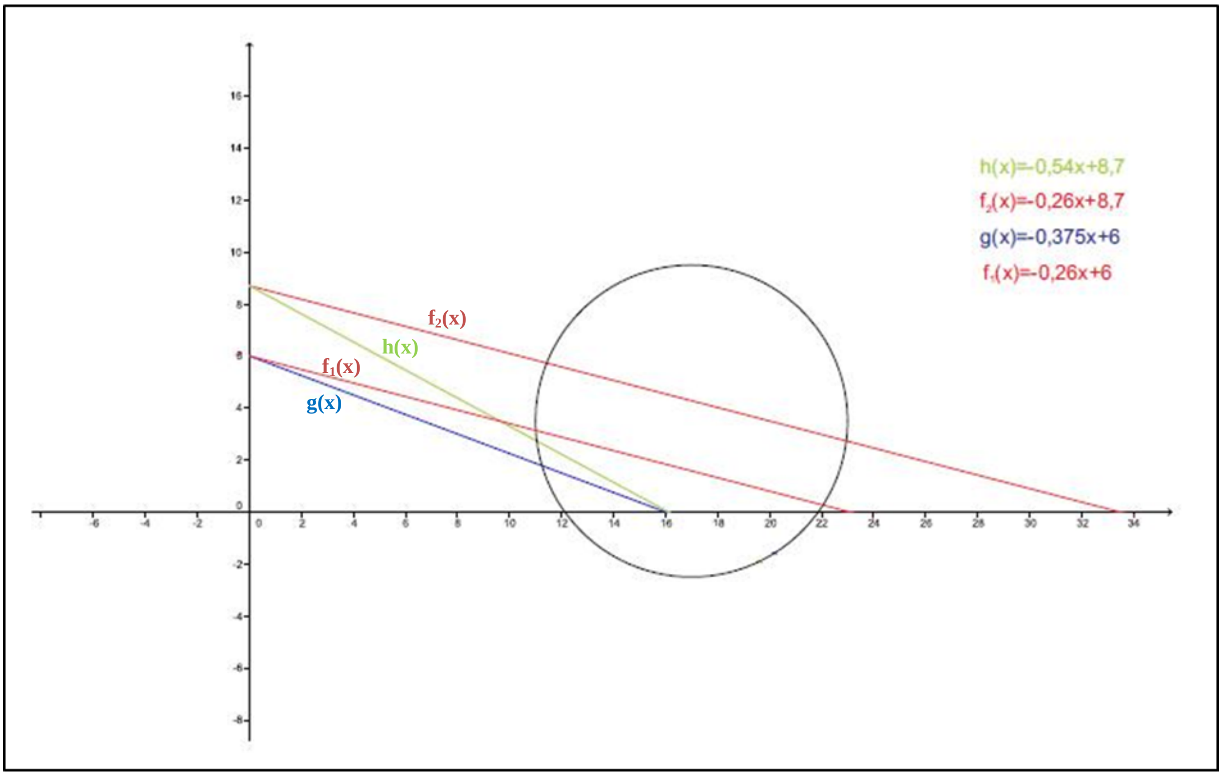
Com o intuito de buscar uma validação para o problema em estudo, os alunos realizaram pesquisas em outros manuais de iluminação pública e encontraram informações referentes a altura na qual a lâmpada é instalada para cada tipo de poste, conforme afirmado por A9.

> A9: *Aqui no caso, tanto para o modelo da Rua dos Parecis quanto da Bento Munhoz a gente encontrou um outro manual da Copel em que ele trazia outras informações sobre posicionamento da lâmpada, esse tipo de informação. E aí a gente percebeu que o nosso trabalho tá bem... as nossas equações estão bem próximas do que a Copel traz como por exemplo daquele poste anterior do IP01* [referindo-se a Rua Serra dos Parecis]*, ele traz que a altura ideal da lâmpada é de 6 metros e meio, o nosso modelo no caso deu 6. E para essa rua* [referindo-se a Rua Bento Munhoz da Rocha Neto]*, para esse tipo de poste, o IP03, a lâmpada fica a 9 metros de altura. No nosso modelo a gente tem uma aproximação melhor, deu 8 ponto 7.*

Observando os modelos obtidos da altura da poda de árvore para a Rua Serra dos Parecis ($y=-0{,}375x + 6$) e para a Rua Bento Munhoz da Rocha Neto ($y=-0{,}54375x + 8{,}7$), os alunos perceberam que havia diferenças entre os coeficiente de cada uma das funções lineares. A partir desta observação, refletiram sobre o por quê da Copel utilizar uma 'equação-padrão' ($H=-0{,}26D + h$) para a poda de árvore.

> A10: *Daí tá, a gente achou duas equações, mas o que isso interferia né? A gente tinha uma equação, por que então se tem vários padrões da Copel, por que ela dava só uma equação? Então para a poda ideal. A gente plotou as equações no gráfico, né?* [apresentando os gráficos no plano cartesiano – Figura 4.61] *começamos a observar que sempre essas vermelhinhas aqui ó* [apontando para a representação gráfica projetada no slide] *são a da Copel só são transladadas mas são a mesma equação da Copel, o mesmo coeficiente angular e essa h é do... da Munhoz da Rocha né, que é a bem iluminada lá e a g é da Serra dos Parecis.*

Figura 4.61- Representação gráfica das linhas de poda indicadas pela Copel e pelas ruas analisadas na atividade de modelagem ‘Poda de árvore’



Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

> A9: [interrompendo] *só fazendo uma observação, aquela circunferência* [referindo-se à circunferência traçada no plano cartesiano apresenta na Figura 4.61 junto às representações das funções dos postes de iluminação] *é uma árvore, que como a gente tinha que fazer uma comparação entre os modelos, a gente pegou uma árvore que tava na rua dos Parecis e aí como a Copel classifica as árvores pelo tipo de copa, aquela árvore ela é do tipo arredondado. Então se ela era uma copa do tipo arredondado, a gente pensou numa circunferência. Então aquela circunferência é como vamos dizer... é a equação da copa da árvore. Então, se eu não me engano, o raio, a gente mediu o raio da copa, deu 6 metros de raio, aí a altura da copa* [gesticulando, indicando na vertical, a cota que determina a altura] *a gente mais ou menos olhando porque não dava para medir, ela tem uns 3 metros e meio de altura, ela tem, quer dizer ela começa a 3 metros e meio do chão, né? E ela está deslocada a 17 metros do poste. Então é aquela curva ali* [risos, porque nota que interrompeu a fala do colega].

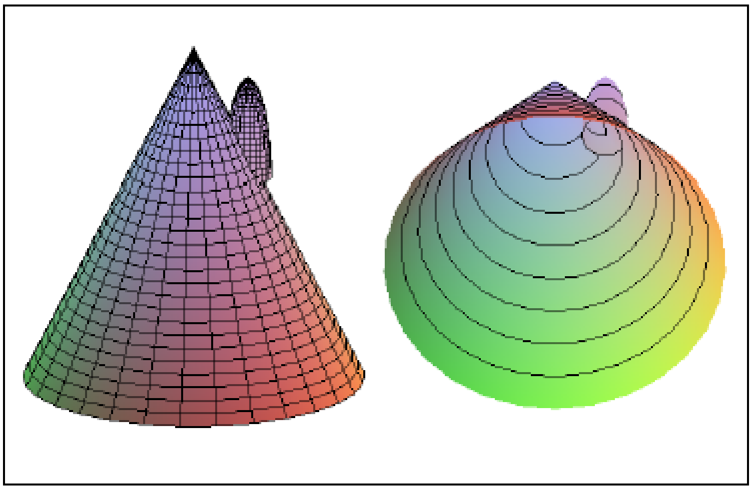
> A10: *É só essa circunferência aqui* [sobrepondo o traçado da circunferência com o dedo indicador sobre a projeção do slide – Figura 4.61]. *Aí o que a gente fez? A gente colocou no modelo da Copel* [apontando no slide com o dedo indicador] *e observamos que sempre a função da Copel que ela dá sempre vai estar acima* [apontando para a representação de todas as funções]. *Talvez para garantir que sempre vai funcionar, né? Se... vai ser sempre um modelo funcional ou também que eu tava pensando em outra coisa, que seja um tempo porque a árvore cresce né gente? Então, você corta mais para cima que dá tempo para ela crescer para a Copel ou a Sema podar outras árvores e ficar com um bom iluminamento ainda. E é isso aí!*

Durante todo o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática a maior preocupação dos alunos era o conteúdo matemático a ser abordado, bem como se o modelo em estudo representava a situação. Para tanto, utilizando recurso computacional, os alunos fizeram uma abordagem no plano tridimensional (Quadro 4.18). Os alunos fazem uma aproximação da copa da árvore com uma esfera e a região de iluminamento com um cone, conforme (Figura 4.62).

> A6: *A gente só pegou o modelo tridimensional para a gente entender que ele é mais preciso, que qualquer ponto que você pegar ali... ah não ele não tá na linha, ele tá naquele espaço. Você consegue... ah então vamos pegar a projeção, pega a interseção do cone naquele ponto, que você tem um resultado bem mais preciso do que no plano, isso é óbvio! Isso parece ser... não é que é obvio, isso é fácil de visualizar, então, por isso que a gente achou que o 3D seria mais interessante. E eu acho que a representação gráfica ajuda você a visualizar isso. A meu ver, eu não sei se ela prova alguma coisa, se ela mostra algum resultado, mas ela possibilita você a compreender o resultado e a partir dessa compreensão, você deduzir o modelo...*
>
> A9: *Então aí no caso, na verdade, a gente não estava muito satisfeito com o modelo bidimensional, então a gente pensou que o modelo tridimensional mostraria melhor a realidade.*
> *Era uma boa representação, com precisão. Aqui no caso o que a gente fez?* [olhando para as figuras] *a gente utilizou da equação da rua Bento Munhoz, só que no caso lá não havia árvore atrapalhando, então o que a gente pensou? Vamos criar uma árvore e vamos testar para ver o que acontece. Então a gente fez uma árvore aí, vocês podem ver que o raio da copa é de 3 metros e ela tá a 5 metros do poste* [olhando para o A10 que afirma com a cabeça]. *Aí no caso é assim, como a gente gerou o cone? A gente pegou a equação da reta e fez uma parametrização da equação na coordenada cilíndrica* [olhando para o A10 e acena com afirmativo com a cabeça] *e para a equação da circunferência a gente fez a mesma coisa só que no caso a gente parametrizou ela na coordenada esférica. Então, só que a única parte que interessava para o nosso caso era a parte de cima da esfera, porque se for parar para pensar a parte de baixo da esfera não seria tão interessante por causa que ela não descreveria tão perfeitamente o modelo. Porque como a gente sabe o galho da árvore não vai descer e encurvar e voltar* [traçando no ar a representação do desenho que os galhos poderiam descrever com as mãos] *para o tronco. Ou ela vai formar uma parábola ou no máximo ficar desse jeito* [olhando para o A10 que faz gesto de que fica do jeito apresentado no slide], *então a gente pensou nesse modelo.*
> [...]
> A9: *Vamos dizer assim, é a área de iluminamento do poste na rua Bento Munhoz. Então aqui é a área de iluminamento* [apontando para o cone – Figura 4.62], *aqui é a área que a árvore ocupa. Aqui é uma visão meio que debaixo do que está acontecendo* [apontando para a figura que mostra uma rotação da imagem anterior – Figura 4.62]. *Você tem um cone, você pode ver que há uma interseção aqui ó* [apontando para a Figura 4.62]. *Então essa área aqui ó* [mostrando na figura] *teria que ser cortada para não atrapalhar a iluminação porque* [A10 faz gesto apontando na figura, que A9 logo entende e começa a explicar]. *É que é complicado, mas pensa que essa área não existe* [referindo-se à parte do cone que está interrompido pela árvore, mas que não conseguiram representar na figura] *essa zona de iluminamento aqui. E aí o software... aí no caso tem outras considerações que você não consideraria a esfera como um sólido todo, porque na realidade ali no caso da árvore a gente levou em consideração que seria uma 'casca' da esfera* [representando a figura com as mãos] *que seria cortada, não toda área, não toda a esfera, porque no caso são só os galhos. E aí essas equações a gente fez no Maple e depois a gente plotou. Brincamos um pouco ali e resolvemos colocar esse modelo.*

Quadro 4.18– Estudo no plano tridimensional do modelo matemático sobre poda da árvore da Rua Bento Munhoz da Rocha Neto da atividade de modelagem ‘Poda de árvore’

Figura 4.62- Representação tridimensional da Rua Bento Munhoz da Rocha Neto



A visualização das imagens em 3D mostra a interseção do cone de iluminamento com a esfera, copa da árvore.

No desenvolvimento do trabalho foi notado que o plano tridimensional trazia uma representação mais precisa da situação. Deste modo o uso do software auxiliou nesta visualização.

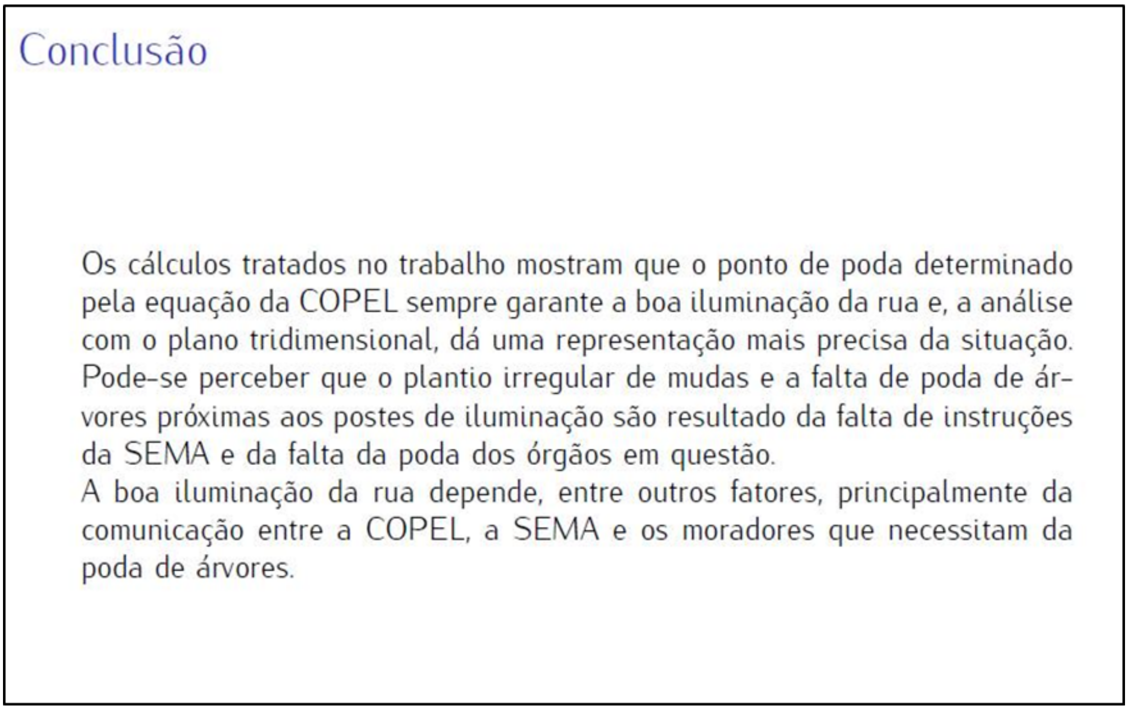
As equações são cone: $f(x) = -0{,}54x + 8{;}7$ com a parametrização da curva em coordenada cilíndrica e $f(x) = \sqrt{9-(x-5)^2}$, com a parametrização da curva em coordenadas esféricas.

Para este modelo escolhemos a equação que descreve a curva de iluminação da Rua Bento Munhoz da Rocha Neto e uma árvore com valores fictícios.

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

Diante dos modelos obtidos e das soluções encontradas, os alunos teceram conclusões referentes à atividade de modelagem desenvolvida (Figura 4.63).

Figura 4.63- Slide com conclusões do grupo de alunos sobre a atividade de modelagem 'Poda de árvore'



Fonte: Slide apresentado pelo grupo de alunos.

Segundo respostas ao questionário (Apêndice E) entregue por 11 alunos que não faziam parte do grupo, a atividade de modelagem *Poda de árvore* foi considerada por eles como uma atividade cujo problema é muito relevante para ser estudado; os objetos matemáticos utilizados pelo grupo são adequados e a atividade ajuda bastante na aprendizagem de tal objeto matemático; a validade da solução convence aos que estão em primeiro contato com ela; de forma geral, é uma atividade muito interessante; que possibilita refletir sobre o problema, identificando possíveis causas diretas (que estão ao nosso alcance para mudá-las) e causas indiretas (fora de nossa esfera de ação).

A partir das descrições que fizemos das atividades de modelagem desenvolvidas pelos alunos nos diferentes momentos de familiarização, iniciamos as análises, específica e geral, levando em consideração o 'trilhar' dos alunos-colaboradores da pesquisa — A6 e A8.

Os recortes que realizamos auxiliam na codificação inicial, pois consistem em signos interpretantes que os alunos produziram e que refletem a atribuição de significado para os problemas e os objetos matemáticos em estudo. Para tecer uma codificação axial em que inferimos sobre a intensificação da atribuição de significado para problema, voltamos a campo por meio de entrevistas em busca de evidências que não foram esclarecidas nos registros capturados anteriormente. Com isso, podemos reorganizar os dados e findar com a análise global do que evidenciamos com a pesquisa com relação à atribuição de significado para o problema e o objeto matemático em estudo.

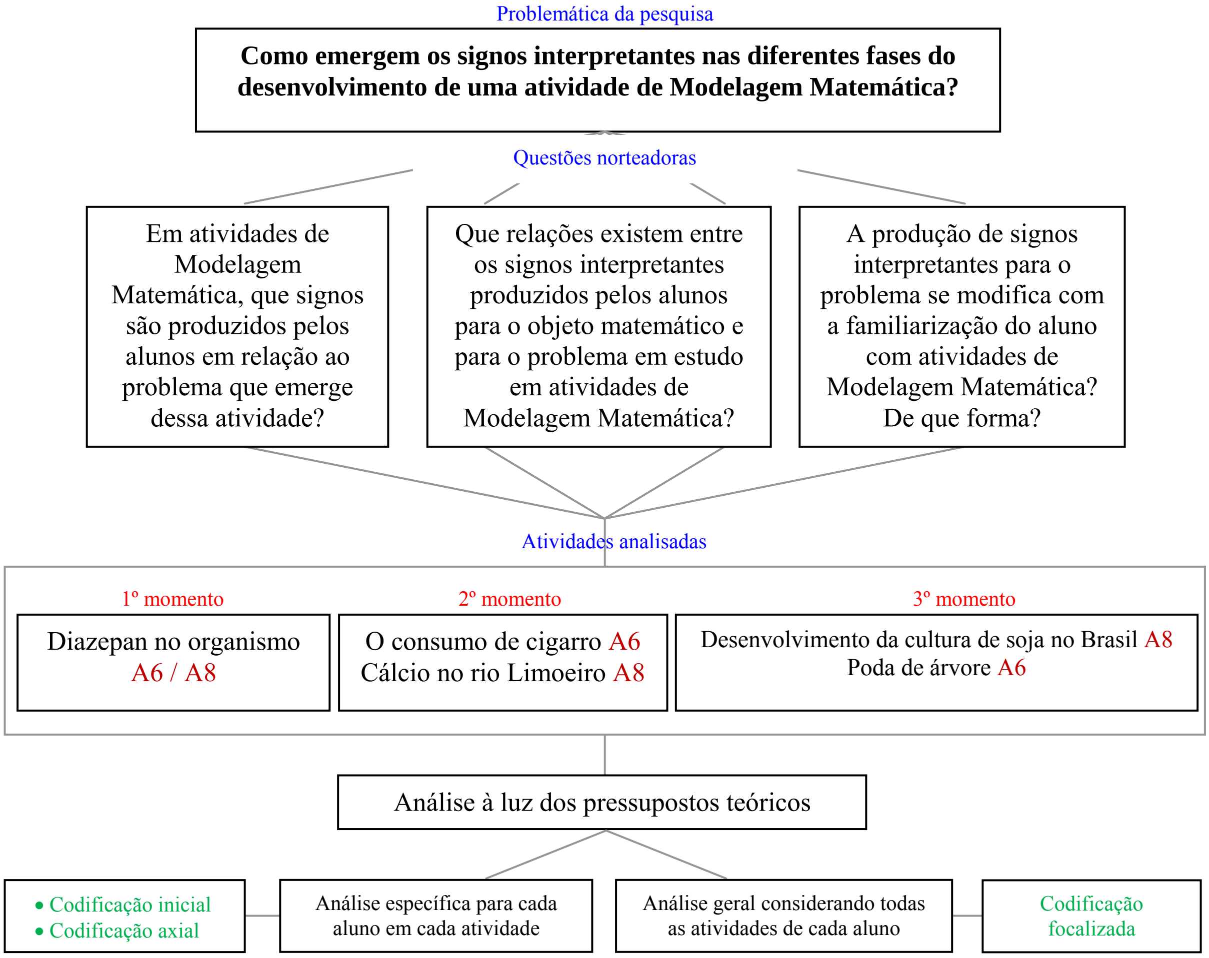
As análises que realizamos constam do Capítulo 5.

CAPÍTULO 5 – ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA SOB UMA PERSPECTIVA SEMIÓTICA PEIRCEANA

"É por isso que analisar semioticamente significa empreender um diálogo de signos, no qual nós mesmos somos signos que respondem a signos" (SANTAELLA, 2007, p. 42).

Neste capítulo apresentamos a análise das atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos alunos como caracterizado nos três momentos de 'familiarização' e descritas no Capítulo 4. A Figura 5.1 mostra como as informações contidas neste capítulo estão organizadas.

Figura 5.1– Esquema da organização do Capítulo 5



Fonte: Figura elaborada pela pesquisadora.

5.1 CONDUÇÃO DAS ANÁLISES

As análises dos signos produzidos por alunos em atividades de modelagem visam estabelecer reflexões sobre a problemática que nos propusemos estudar, a qual consiste em evidenciar como emergem signos interpretantes nas diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática e como estes signos estão atrelados à atribuição de significado para o objeto em estudo.

A busca por essas evidências é orientada pelas questões específicas:

1. Em atividades de Modelagem Matemática, que signos são produzidos pelos alunos em relação ao problema que emerge dessa atividade?
2. Que relações existem entre os signos interpretantes produzidos pelos alunos para o objeto matemático e para o problema em estudo em atividades de Modelagem Matemática?
3. A produção de signos interpretantes para o problema se modifica com a familiarização do aluno com atividades de Modelagem Matemática? De que forma?

Neste sentido, investigamos algumas das ações do intérprete que sinalizam atribuição de significado para o problema e o objeto matemático durante as fases de desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e durante a familiarização com atividades de Modelagem Matemática.

Conforme apresentado no Capítulo 3 e descrito no Capítulo 4, selecionamos cinco atividades de Modelagem Matemática, levando em consideração a participação dos alunos-colaboradores no que se refere aos momentos de familiarização. Neste sentido, cada aluno é analisado no desenvolvimento de três atividades de modelagem, sendo que uma das atividades (Diazepan no organismo) é comum aos dois alunos.

Os dados que analisamos correspondem a signos produzidos por dois alunos — A6 e A8 — do 4.º ano de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina em 2011 quando envolvidos com atividades de modelagem no âmbito de uma disciplina de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

A apresentação das análises se faz por meio de uma articulação entre signos escritos, falados e gesticulados produzidos pelos alunos-colaboradores e a fundamentação teórica que permeia o trabalho no que diz respeito à Modelagem Matemática e à Semiótica Peirceana. Para tanto, signos de outros alunos também se fazem presentes, principalmente quando influenciam na produção de signos dos alunos-colaboradores. Neste sentido, o trabalho envolve quatro grupos de participantes: os alunos-colaboradores — A6 e A8 —, outros alunos da sala de aula, a professora da turma (PR) e a pesquisadora (P).

Nossa análise é de caráter qualitativo e segue indicações propostas na Teoria Fundamentada de Kathy Charmaz. Para tanto, separamos as análises para cada aluno em duas etapas: uma análise específica e uma análise geral.

Na análise específica dos signos produzidos por cada um dos alunos, fazemos a codificação inicial e a codificação axial, conforme proposto na Teoria Fundamentada. Na codificação inicial fazemos uma análise dos signos *in vivo* produzidos pelo aluno em cada uma das três atividades a ele relacionadas por meio dos registros escritos e apresentação das atividades. Para tanto, utilizamos recortes da descrição apresentada no Capítulo 4. Na codificação axial, utilizamos dados da codificação inicial atrelados a dados coletados em questionários e entrevistas realizadas na retomada da pesquisa de campo, com o objetivo de refletir sobre os interpretantes produzidos pelos alunos que correspondem a símbolos que representam o objeto — problema e objeto matemático — abordado em cada atividade.

Na análise geral, estabelecemos a codificação focalizada para cada aluno levando em consideração seu envolvimento com as três atividades de modelagem desenvolvidas. Para tanto, 'traçamos' ciclos de modelagem em cada momento de familiarização — 1.º momento, 2.º momento e 3.º momento —, evidenciando a atribuição de significado para o objeto. Nessas evidências destacamos se a atribuição de significado para o objeto ocorreu por meio de: *familiaridade* que o intérprete possui com o dado objeto, se este já faz parte de sua realidade ou contexto; na *intenção* de significar o objeto, em que ocorre, a partir de uma referência, uma articulação deste objeto com o contexto em que este é utilizado; como uma *ideia* que se remete ao objeto, de atuar e ser atuado; como *consequência* futura para abarcar o objeto, em que as consequências práticas estabelecem destaque entre pensamento e ação; por meio de *experiência colateral* com o objeto, ou seja, da intimidade prévia com aquilo que o signo denota.

A partir da análise geral dos dois alunos, apresentamos discussões referentes à questão de nossa pesquisa.

Para adentrar as análises, iniciamos pelo aluno A6 e posteriormente fazemos as análises referentes ao aluno A8.

5.2 ANÁLISES ESPECÍFICAS PARA A6

Na análise dos signos produzidos por A6, levamos em consideração seu envolvimento com cada atividade. Apresentamos os signos produzidos durante o desenvolvimento e/ou apresentação das atividades em que A6 se fez presente, abordando aspectos relacionados ao problema e ao objeto matemático envolvidos para a realização da codificação inicial.

Evidências de signos interpretantes produzidos por A6 são revelados em respostas a questionários e/ou entrevistas realizadas após o desenvolvimento da atividade. Neste sentido, estabelecemos a codificação axial no que corresponde aos signos interpretantes evidenciados.

Nesta seção, fazemos a análise específica de três atividades de modelagem 'vividas' por A6: *Diazepan no organismo* (descrita como Atividade 1, no Capítulo 4), *Cálcio no rio Limoeiro* (descrita como Atividade 3, no Capítulo 4) e *Poda de árvore* (descrita como Atividade 5, no Capítulo 4).

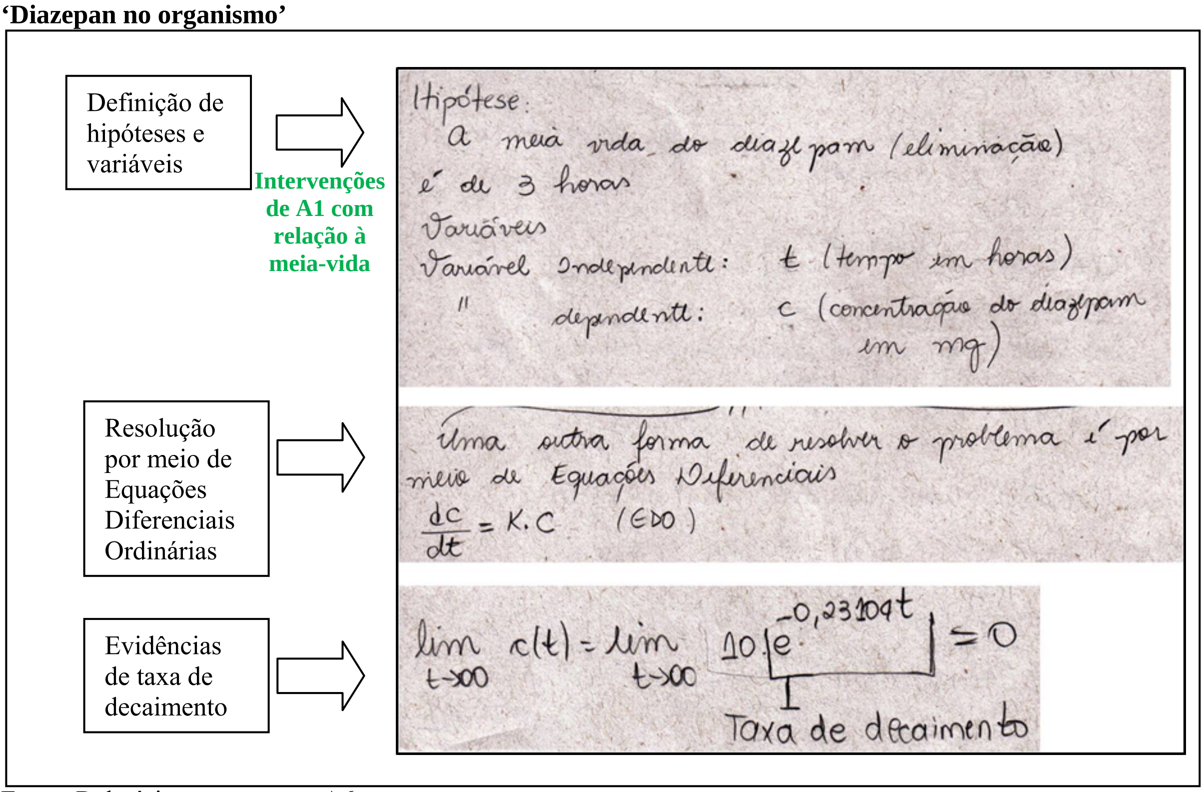
No Capítulo 4 apresentamos de forma detalhada como se deu o desenvolvimento de cada uma das atividades nas quais A6 estava envolvido. Para fazer a codificação inicial, levamos em consideração todos os signos produzidos por A6 atrelados a evidências de que esses signos estejam de alguma forma relacionados aos objetos (problema, objeto matemático) em estudo.

Na atividade 1, intitulada *Diazepan no organismo*, A6 fez algumas considerações sobre o problema e o objeto matemático por meio de considerações escritas que apresentou no relatório entregue. Embora durante o desenvolvimento da atividade sua fala tenha aparecido somente em um trecho da resolução, a organização dos registros escritos de A6 deixa evidente signos interpretantes que ele produziu. Para esta atividade algumas figuras foram novamente reproduzidas para auxiliar as análises.

Para o desenvolvimento da atividade 1, foram propostas três questões para serem respondidas. A abordagem segundo codificação inicial e codificação axial é realizada por questão.

Os signos produzidos por A6 que de alguma forma se referem à questão 1 — *Qual é a concentração de Diazepan no organismo, no decorrer do tempo, se uma pessoa ingerir um comprimido de 10 mg* — estão relacionados a três momentos do desenvolvimento da atividade: na definição de hipóteses e de variáveis (fase de inteiração), após as discussões iniciadas por A1 com relação à meia-vida (fase de inteiração); no início da resolução quando trata de resolver o problema por meio de Equações Diferenciais Ordinárias (fases de matematização e resolução); quando evidencia a 'taxa de decaimento' para determinar o limite da função definida no modelo matemático obtido (fase de interpretação de resultados). Estes signos representam a questão em desenvolvimento, neste sentido correspondem a símbolos do objeto em estudo. Na Figura 5.2 apresentamos os símbolos utilizados por A6 que se remetem à questão 1.

Figura 5.2– Símbolos produzidos por A6 que se referem ao problema na questão 1 da atividade 'Diazepan no organismo'



Fonte: Relatório entregue por A6.

Ao ser questionado em conversa informal[40], durante uma das orientações para o trabalho final em que a pesquisadora estava buscando evidências sobre a produção de cada um desses signos, A6 afirma que:

> A6: *Olha, quando você falou sobre a meia-vida e a professora relembrou da atividade do césio, eu já pensei opa, vou olhar no meu caderno aqui que tenho como a gente pode fazer isso. Porque eu lembrava que tinha alguma coisa com função exponencial e saber o valor da meia-vida era o que a gente precisava. Toma o remédio e daí ele vai diminuindo a concentração com o tempo, ele vai se disseminando. Esse problema foi simples de entender por causa do entendimento que tivemos na atividade do césio.*
> P: *Então você já tinha familiaridade com esse tipo de abordagem?*
> A6: *Da linguagem do problema já, como eu te falei da atividade do césio.*
> P: *E a abordagem por meio de Equações Diferenciais Ordinárias? Como foi para você entender que o problema estava relacionado a esse conteúdo?*
> A6: *Bom, quando vocês mencionaram 'taxa de decaimento', pronto... já relembrei de equações diferenciais, mas na verdade não lembrava em como resolver.* [...]
> [...]
> P: *E a taxa de decaimento? Em que você se pautou para confirmar isso?*
> A6: *Eu sabia que o medicamento ia decair, então olhando o limite, o responsável pelo decaimento só podia ser essa taxa aí* [referindo-se a $e^{-0,23104\,t}$].

Nesta conversa podemos evidenciar que os signos produzidos por A6 para se remeter ao problema correspondem a símbolos para o objeto 'problema', pois foram relacionados a regras convencionais "admitidas pela comunidade que se vale dos símbolos" (PEIRCE, 1972, p. 28). Como são símbolos para o objeto, correspondem a interpretantes produzidos pelo intérprete (A6), pois, segundo Peirce (2005), todo símbolo necessita de um interpretante para não perder seu caráter de signo.

Quando da interferência para iniciar o desenvolvimento da atividade levando em consideração a meia-vida, o que fica evidente é que os símbolos produzidos estão atrelados com a familiaridade que A6 tem com outra situação semelhante. E nesse sentido, A6 conhece o objeto (problema), pois segundo Peirce (1989) para conhecer o objeto, o que é preciso é a experiência prévia.

Os objetos matemáticos que foram necessários para A6 resolver a questão 1 da atividade 'Diazepan no organismo' dizem respeito à função do tipo exponencial e Equações Diferenciais Ordinárias. Para a abordagem desses objetos matemáticos fica evidente a

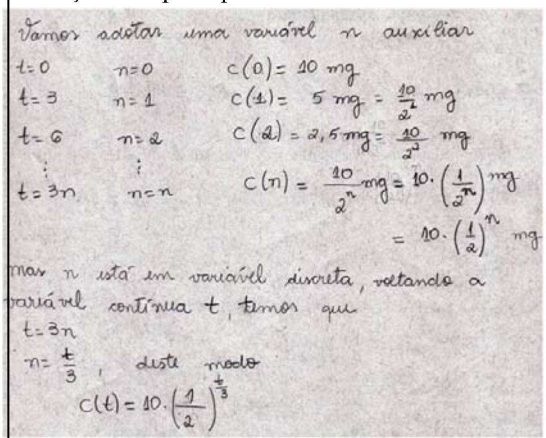
[40] Essa conversa informal aparece nas gravações em áudio de um dos encontros realizados para a orientação do trabalho final em que os alunos estavam desenvolvendo "Poda de árvore". Como no questionário respondido após o desenvolvimento de toda a atividade não havia menção à Questão 1 da atividade "Diazepan no organismo" aproveitou-se esta oportunidade.

preferência de A6 por signos algébricos (Figura 5.3). Isso corrobora resultados de pesquisa desenvolvida por García & Palacios (2006). Os autores, em pesquisa desenvolvida com professores de Química, constataram que, conforme se aumenta o nível acadêmico, cresce a preferência pela utilização não gráfica.

Como correspondem a signos convencionais utilizados no âmbito da Matemática que representam objetos matemáticos, correspondem a leis que permeiam essa área de estudo. Logo, os signos produzidos por A6 são símbolos e, dessa forma, correspondem aos interpretantes produzidos para se referir ao objeto em estudo.

Figura 5.3– Símbolos produzidos por A6 relacionados aos objetos matemáticos da questão 1 da atividade ‘Diazepan no organismo’

Função do tipo exponencial



Vamos adotar uma variável n auxiliar

$t=0 \quad n=0 \quad c(0)=10\ mg$

$t=3 \quad n=1 \quad c(1)=5\ mg=\frac{10}{2}\ mg$

$t=6 \quad n=2 \quad c(2)=2{,}5\ mg=\frac{10}{2^2}\ mg$

$\vdots$

$t=3n \quad n=n \quad c(n)=\frac{10}{2^n}\ mg=10\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right) mg=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n mg$

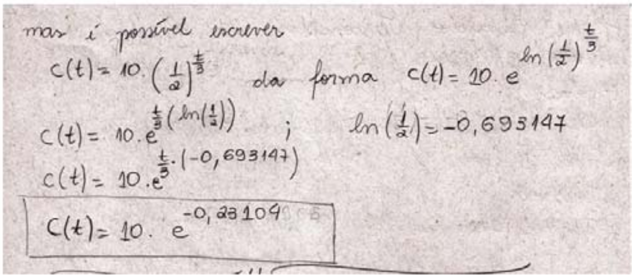
mas n está em variável discreta, voltando a variável contínua t, temos que

$t=3n$

$n=\frac{t}{3}$, deste modo

$c(t)=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$

Mudança de base sugerida pela pesquisadora



mas é possível escrever

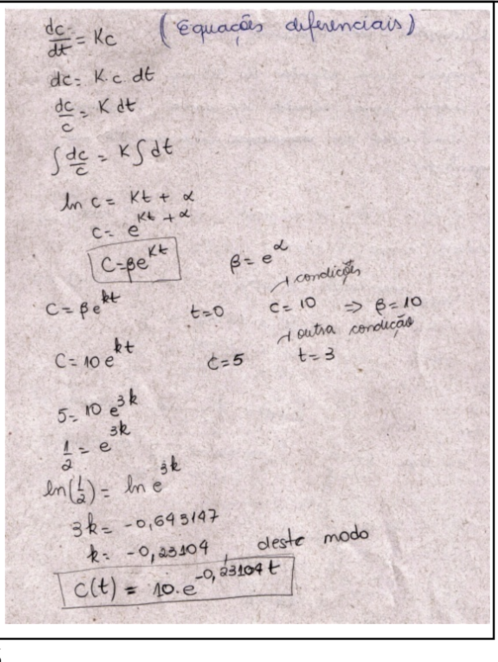
$c(t)=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ da forma $c(t)=10\cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}}$

$c(t)=10\cdot e^{\frac{t}{3}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$; $\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-0{,}693147$

$c(t)=10\cdot e^{\frac{t}{3}\cdot(-0{,}693147)}$

$\boxed{c(t)=10\cdot e^{-0{,}23104}}$

Equações Diferenciais Ordinárias



$\frac{dc}{dt}=Kc$ (Equações diferenciais)

$dc=Kc\,dt$

$\frac{dc}{c}=K\,dt$

$\int\frac{dc}{c}=K\int dt$

$\ln c=Kt+\alpha$

$c=e^{Kt+\alpha}$

$\boxed{c=\beta e^{Kt}} \quad \beta=e^{\alpha}$

condições

$c=\beta e^{kt} \quad t=0 \quad c=10 \Rightarrow \beta=10$

outra condição

$c=10e^{kt} \quad c=5 \quad t=3$

$5=10e^{3k}$

$\frac{1}{2}=e^{3k}$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln e^{3k}$

$3k=-0{,}693147$

$k=-0{,}23104$ deste modo

$\boxed{c(t)=10\cdot e^{-0{,}23104t}}$

Fonte: Relatório entregue por A6.

Levando em consideração o nível de escolaridade no qual se encontra A6 e da preferência elucidada por Garcia & Palacios (2006), somente analisando os signos como os apresentados na Figura 5.3, não há evidências se A6 estabelece relações entre signos algébricos, gráficos e tabulares no contexto da Matemática. No entanto, analisando a resposta à Questão 1 — *Na Modelagem do Diazepan quais formas de representação (algébrica, gráfica e tabela) você considera essenciais? Por quê?* — da parte II do questionário (Apêndice B), A6 apresenta evidências que mesmo não produzindo outros signos entende que estes podem representar objetos matemáticos segundo certas características, como destacado na Figura 5.4. Esse fato está atrelado à assertiva de Santaella (2007) de que os signos só podem se reportar a algo ou alguém, porque esse algo que eles denotam está representado dentro do próprio signo. Para A6 as características a que cada tipo de signo se reporta correspondem à generalização, visualização do comportamento dos dados, auxílio na compreensão, conforme destacado em sua resposta na Figura 5.4.

Figura 5.4– Resposta de A6 à questão 1 da Parte II do questionário da atividade 'Diazepan no organismo'

1) Eu considero as 3 formas de representações essenciais
(algébrica, gráfica e tabela). Na representação algébrica
é uma maneira de você generalizar uma situação, a repre-
sentação gráfica além de mostrar o comportamento da
situação pode auxiliar na compreensão do problema ao ser
analisado valores no gráfico. A tabela auxilia bastante
pelo fato da quantidade de valores e informações a serem
analisadas. Houve momentos em que não estava compreenden-
do muito bem, e ao montar a tabela e explorar o grá-
fico foi possível compreender e estabelecer sentido a
representação algébrica. Por isso ao meu ver as representações
auxiliam e cooperam para um bom desenvolvimento da ati-
vidade

Fonte: Questionário entregue por A6. Grifos realizados pela pesquisadora.

Identificar características específicas distinguindo um signo de outro é necessário, e, segundo Peirce (1989, p. 61), estas diferentes características expressam "percepções sutis e familiaridade com os concomitantes habituais de tais aparências, e com as convenções do sistema de signos". Os interpretantes que se referem aos objetos matemáticos, de acordo com trechos da conversa informal realizada durante uma orientação, já foram produzidos em outras experiências e a atividade possibilitou ao aluno relembrar tais objetos matemáticos, utilizando para tanto outros símbolos. As mudanças de símbolos possibilitam atribuição de significado para o objeto, pois segundo Peirce (1989), quando os símbolos mudam, o significado cresce. Reapresentamos o trecho da conversa informal que se remete aos objetos matemáticos.

> A6: [...] *Porque eu lembrava que tinha alguma coisa com função exponencial e saber o valor da meia-vida era o que a gente precisava.* [...]
> A6: *Bom, quando vocês mencionaram 'taxa de decaimento', pronto... já relembrei de equações diferenciais, mas na verdade não lembrava em como resolver.* [...]

O objetivo de utilizar Equações Diferenciais Ordinárias para o desenvolvimento da situação foi o de mostrar que uma situação-problema pode ser desenvolvida, em uma atividade de modelagem, utilizando diferentes conteúdos matemáticos. Ao entrar em contato com essas diferentes 'matemáticas', A6 estabeleceu relações entre elas conforme resposta à Questão 3 da Parte II do questionário (Apêndice B) — *Você consegue estabelecer relações entre as diferentes "matemáticas" que podem ser usadas para a obtenção do modelo matemático (por meio da função exponencial de base (1/2); da função exponencial de base* e*; da equação diferencial)? Apresente suas argumentações* (Figura 5.5), em que afirma que as 'matemáticas' estão relacionadas ao nível de escolaridade no qual se encontra o sujeito envolvido com o desenvolvimento da atividade de modelagem.

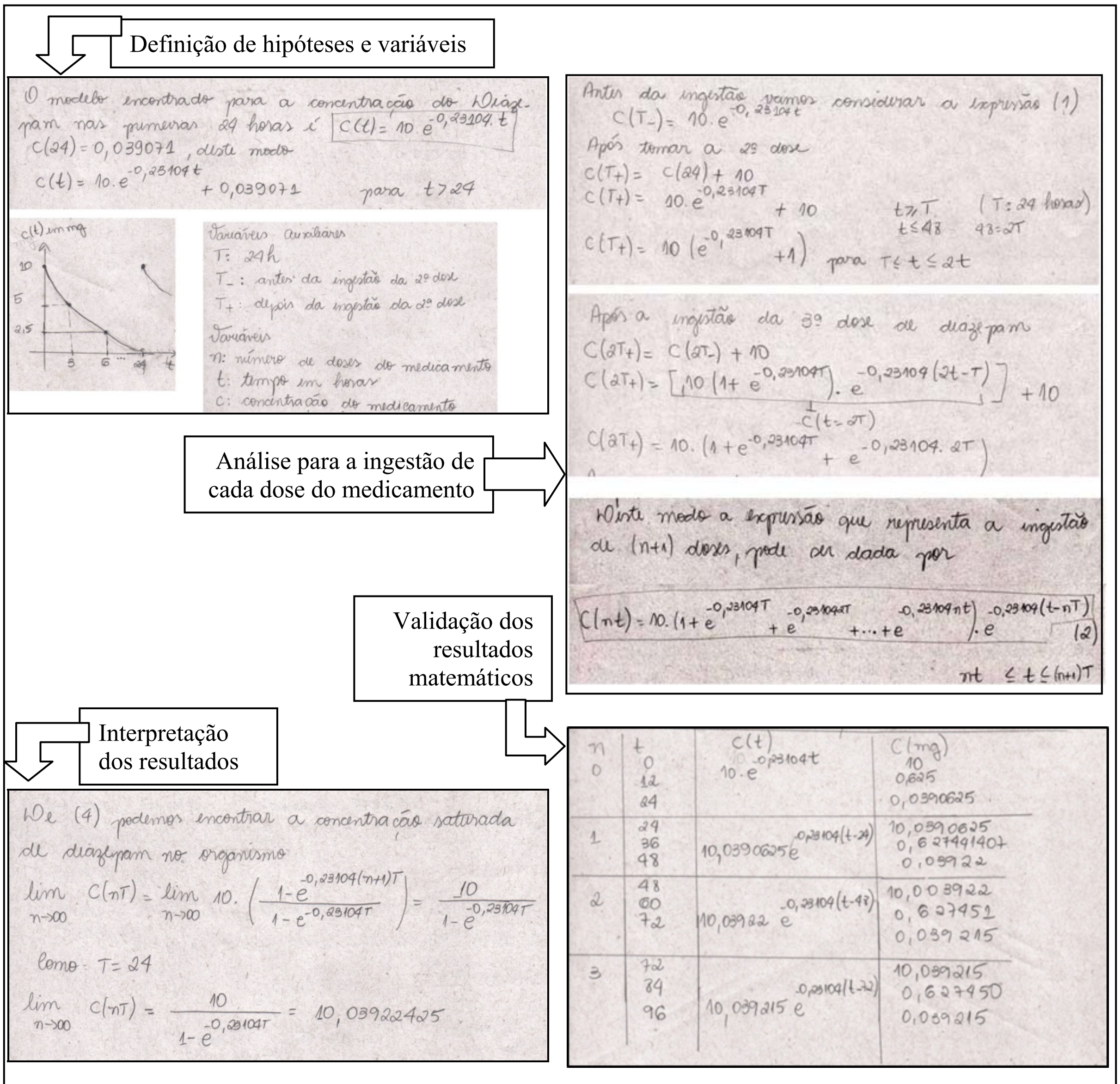
Figura 5.5– Resposta de A6 à questão 3 da Parte II do questionário da atividade 'Diazepan no organismo'

3) Acredito que essas "matemáticas" acontecem de acordo com o nível de ensino, ou seja, o problema pode ser abordados nos diversos níveis de ensino, mas cada nível exige uma matemática. Um bom exemplo é a taxa de variação, uma situação é se trabalhar no discreto, outra é extender um pouco mais o conceito e trabalhar no contínuo com derivadas. Ambas "matemáticas" trazem um modelo aceitável para o problema, a escolha apropriada para qual modelo, deve-se levar em conta o nível da turma e qual poderá ser mais interessante/estimulante para tal.

Fonte: Questionário entregue por A6. Grifo realizado pela pesquisadora.

Findada a questão 1 da atividade, os alunos passaram para a resolução da questão 2 — *Qual é a concentração de Diazepan no organismo, no decorrer do tempo, se o paciente ingerir um comprimido de 10 mg a cada 24 horas?*. Os signos produzidos por A6 que de alguma forma estão relacionados à questão 2 foram produzidos em quatro momentos do desenvolvimento da atividade: na definição de hipóteses e de variáveis, após análise de comportamento do modelo na ingestão de medicamento a cada 24 horas (fase de inteiração); na análise do que ocorre com a ingestão de cada dose do medicamento e sua generalização (fases de matematização e resolução); ao encontrar a concentração saturada do medicamento no organismo (fase de interpretação de resultados); na validação dos resultados (fase de validação). Na Figura 5.6 apresentamos os símbolos produzidos por A6 que estão relacionados à questão 2.

Figura 5.6– Símbolos produzidos por A6 relacionados ao problema na questão 2 da atividade 'Diazepan no organismo'



Fonte: Relatório entregue por A6.

Na codificação inicial dos signos referentes ao problema e produzidos por A6 nos valemos de analisar leis matemáticas para abordar o objeto. Neste sentido, esses signos correspondem a símbolos que representam o objeto (problema) em estudo. Como são símbolos, para poderem ter características de signos necessitam de interpretantes. Com isso, há a necessidade de uma codificação axial, no entanto, é preciso retornar à pesquisa de campo para buscar evidências dos interpretantes produzidos por A6 com relação a esses símbolos e que se relacionam com o problema em estudo. Em resposta à questão 2 da Parte II do questionário (Apêndice B) — *Na atividade do Diazepan, o que foi importante para você entender esse problema antes de começar a resolução? Explique.* — A6 deixa evidente que os símbolos correspondem à dinâmica de ingestão do medicamento no período de tempo estabelecido (Figura 5.7).

Figura 5.7– Resposta de A6 à questão 2 da Parte II do questionário da atividade 'Diazepan no organismo'

2) Antes de começar a resolução foi importante entender digamos a dinâmica entre tomar o medicamento, o período de efeito e a ingerir novamente, por que à medida em que foi desenvolvida a atividade ía-se retomando o raciocínio, justificando as etapas realizadas Por que uma vez compreendida essa dinâmica, as discussões surgem, as perguntas também, contribuindo ainda mais para o desenvolvimento da atividade.

Fonte: Questionário entregue por A6. Grifo realizado pela pesquisadora.

Uma consideração que deve ser referenciada corresponde à análise que A6, em consonância com outros colegas da sala, fez com relação à concentração do medicamento diazepan no organismo, considerando o uso diário do medicamento. Essa análise está associada ao último valor de concentração de diazepan apresentado em cada célula da tabela identificado como *validação dos resultados matemáticos* na Figura 5.6. Os alunos evidenciam que de fato essa concentração está se estabilizando e quando A9 apresenta o resultado que encontrou aplicando o limite na função quando *n* tende ao infinito, estes relacionam o conceito de limite aos valores que foram calculados:

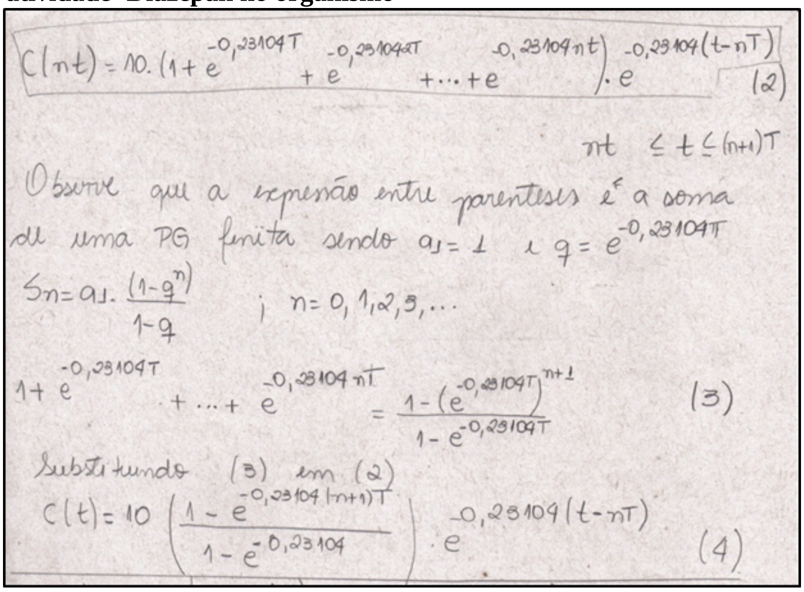
> A4: *Nossa, mas dá muito certinho mesmo. Eu não iria pensar em limite para esse caso.*
> A9: *Mas é que uma coisa não pode ir crescendo de forma infinita, tem que haver um limite para isso.*
> A6: *É de fato, quando a gente olha na tabela, nas primeiras doses a concentração vai aumentando e depois vão ficando muito próximas.*

Neste sentido, o objeto matemático evidenciado nesta questão 2 da atividade estabelece relações com o problema estudado e ganha um caráter de símbolo. Mas este símbolo muda no sentido em que os alunos se referem a ele com relação à saturação do medicamento no organismo. Considerando essa ‘mudança’ no símbolo, fundamentadas em Peirce (1989), podemos inferir que há crescimento no significado para o objeto (limite de uma função) para o intérprete (A6). Desse modo, o significado de limite de uma função ‘cresceu’ para A6 devido à interferência de A9 que se preocupou em dar uma abordagem de limite de uma função por não ficar satisfeito com uma abordagem numérica. Nesse caso, o argumento referente ao trabalho em grupo defendido por muitos pesquisadores na área de Modelagem Matemática se efetiva, como afirmado por Almeida & Dias (2004):

> A Modelagem Matemática em sala de aula pode ser vista como uma atividade essencialmente cooperativa, onde a cooperação e a interação entre os alunos e entre professor e aluno têm um papel importante na construção do conhecimento (ALMEIDA; DIAS, 2004, p. 23).

Além do objeto matemático ‘limite de uma função’, outros se fizeram presentes e foram articulados com a questão 1. Para além desses objetos, na definição do modelo matemático da situação, fez-se necessária a abordagem de um objeto matemático já conhecido por A6. Trata-se da ‘soma de uma Progressão Geométrica’, como apresentado na Figura 5.8.

Figura 5.8– Símbolos produzidos por A6 que se referem ao objeto matemático ‘soma de progressão geométrica’ na questão 2 da atividade ‘Diazepan no organismo’



$C(nt) = 10.(1+e^{-0,23104T}+e^{-0,23104 2T}+\dots+e^{-0,23104nt}).e^{-0,23109(t-nT)}$ (2)

$nt \le t \le (n+1)T$

Observe que a expressão entre parenteses é a soma de uma PG finita sendo $a_1 = 1$ e $q = e^{-0,23104T}$

$S_n = a_1.\frac{(1-q^n)}{1-q}$; $n = 0,1,2,3,\dots$

$1+e^{-0,23104T}+\dots+e^{-0,23104nT} = \frac{1-(e^{-0,23104T})^{n+1}}{1-e^{-0,23104T}}$ (3)

Substituindo (3) em (2)

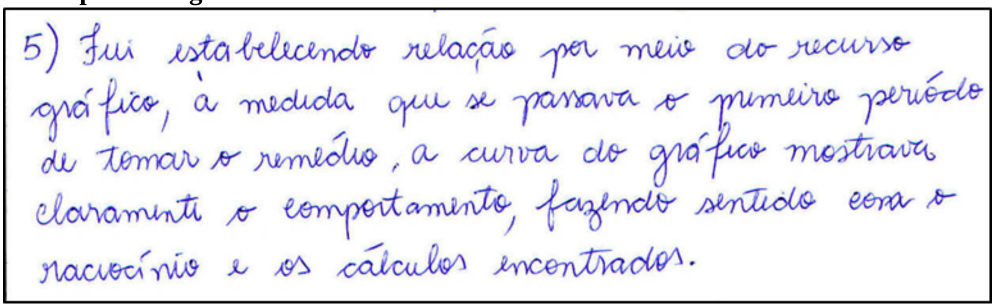
$C(t) = 10\left(\frac{1-e^{-0,23104(n+1)T}}{1-e^{-0,23104}}\right).e^{-0,23109(t-nT)}$ (4)

Fonte: Relatório entregue por A6.

Em conversa informal, A6 afirmou que não havia visto uma aplicação de soma de Progressão Geométrica como a apresentada, em que a resolução faz parte de um ‘pedaço’ do modelo matemático. Para esse aluno, a familiaridade com o objeto matemático possibilitou uma mudança nos símbolos que representam tal objeto e, dessa forma, os interpretantes produzidos refletem atribuição de significado para Soma de Progressão Geométrica.

Ao ser questionado sobre relações entre o problema e os resultados matemáticos no decorrer da atividade, A6 aponta o recurso gráfico (apresentado na Figura 5.6 como *definição de hipóteses e variáveis*) como aliado nessas relações. Nesse decorrer da atividade de modelagem, A6 articula um problema não essencialmente matemático a resultados matemáticos, como evidenciado em resposta à questão 5 da parte II do questionário (Apêndice B) — *Como você foi estabelecendo relações entre o problema da ingestão do medicamento e dos resultados matemáticos no decorrer do desenvolvimento da atividade?* — apresentada na Figura 5.9.

Figura 5.9– Resposta de A6 à questão 5 da Parte II do questionário da atividade 'Diazepan no organismo'



5) Fui estabelecendo relação por meio do recurso gráfico, à medida que se passava o primeiro período de tomar o remédio, a curva do gráfico mostrava claramente o comportamento, fazendo sentido com o raciocínio e os cálculos encontrados.

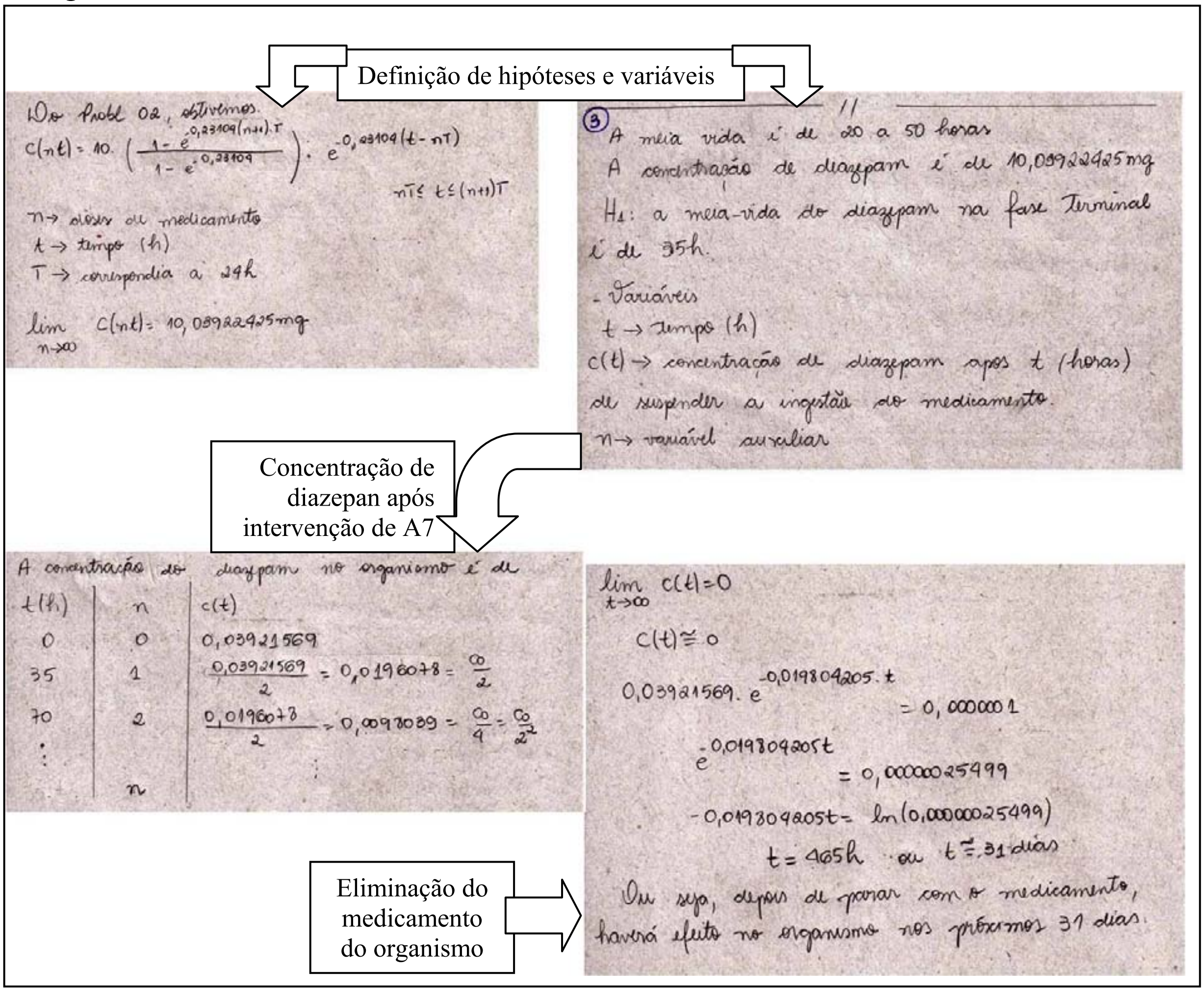
Fonte: Questionário entregue por A6.

Ao articular os diferentes símbolos matemáticos com o problema, A6 deixa evidente uma referência ao objeto (problema) presente em praticamente todo o desenvolvimento da questão 2. Neste sentido, os interpretantes produzidos por A6 articulam recursos gráficos ao problema concordando com a assertiva de Peirce (1989, p. 48), de que "o signo relembra a coisa significada".

Uma abordagem sobre a 'eliminação' do medicamento do organismo após o paciente ter ingerido por algum tempo e suspendê-lo bruscamente é levado em consideração no estudo da questão 3 — *Após 4 dias de tratamento, a concentração do medicamento no organismo se estabiliza. Analisar o decaimento da concentração quando o paciente suspende a ingestão do medicamento* — corresponde a um estudo baseado na Questão 2, em que uma pessoa toma o medicamento e após um período para de utilizá-lo. Como mencionado no Capítulo 4, não foi feita uma abordagem referente aos malefícios que uma suspensão brusca do medicamento possa causar ao organismo. No entanto, os alunos entendem que essa atitude não pode ser realizada, sem orientações médicas.

Signos que se relacionam ao problema em estudo foram produzidos, no que se refere à definição de hipóteses e variáveis (fase de inteiração); ao cálculo da concentração de diazepan de acordo com o tempo após intervenção de A7 (fases de matematização e resolução); à determinação do tempo para ocorrer a eliminação do medicamento do organismo (fase de interpretação de resultados). Na Figura 5.10 apresentamos os símbolos que A6 utilizou para se remeter à questão 3.

Figura 5.10– Símbolos produzidos por A6 relacionados ao problema na questão 3 da atividade 'Diazepan no organismo'



Fonte: Relatório entregue por A6.

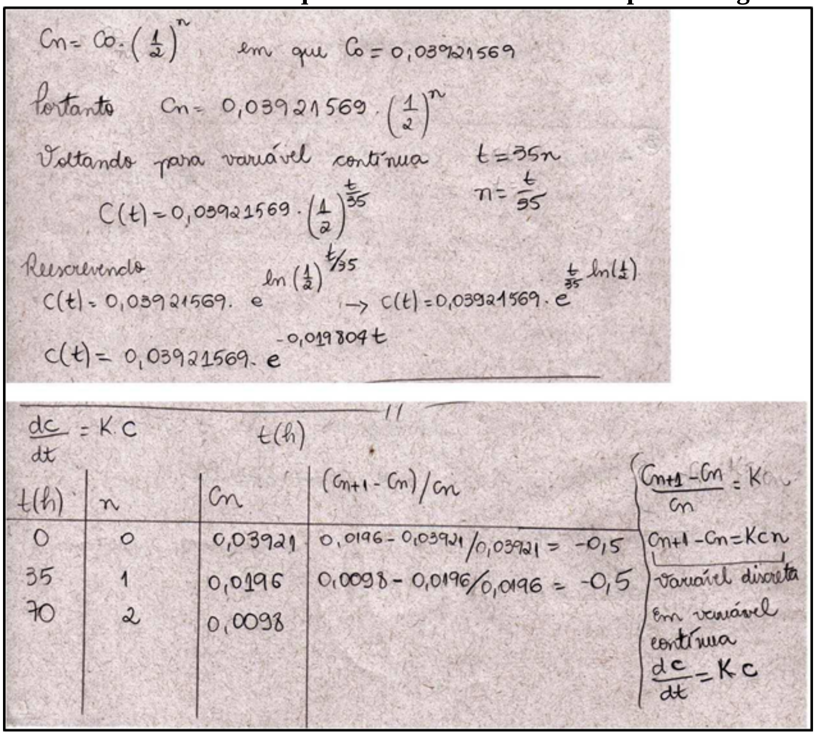
Com base nos símbolos produzidos da questão 2, foram definidas as hipóteses e variáveis. No entanto, os símbolos foram alterados com a intervenção de A7 com relação à meia-vida de longo prazo que estava sendo considerada. Neste sentido, há uma aproximação no que consiste a interpretações sobre o problema e os resultados matemáticos. Os alunos não ficam convencidos do resultado matemático para ser utilizado na resolução do problema, refletindo em uma atribuição de significado para o objeto (problema), pois as experiências colaterais envolvidas no entendimento da questão sobre a meia-vida do medicamento interferiram na condução da atividade. Reapresentamos os argumentos de A7 que mudaram os símbolos para o problema em estudo:

A7: *Por que a gente vai utilizar o valor dez vírgula zero trinta e nove?* [...]
A7: *O medicamento entende que a pessoa não irá ingerir mais diazepan? Como a gente pode considerar que a meia-vida nesse caso é de longo prazo?* [...]
A7: *Professora a concentração após o período de vinte e quatro horas não é de zero vírgula trinta e nove e alguma coisa?*
PR: *É sim.*
A7: *Então a gente poderia considerar essa como inicial e nela aplicar a meia-vida de trinta e cinco horas.*

A referência ao problema ocorreu em praticamente todo o desenvolvimento da questão 3. Os interpretantes produzidos por A6 articulam objetos matemáticos ao problema em estudo e parece se confirmar à afirmação de Peirce (1989, p. 61), de que "a força do Interpretante está em juntar os diferentes assuntos que o Signo representa como relacionados".

Na abordagem da questão 3, os objetos matemáticos recorrentes foram função exponencial e Equações Diferenciais Ordinárias. O encaminhamento para esta situação ocorreu de maneira similar ao que foi feito para a questão 1 (Figura 5.11). Como A6 já tem experiência prévia com a abordagem da situação, então com base em Peirce (1989), podemos inferir que A6 tem familiaridade com tal abordagem, o que possibilita sua significação[41].

Figura 5.11– Símbolos produzidos por A6 relacionados aos objetos matemáticos envolvidos na questão 3 da atividade 'Diazepan no organismo'



$C_n = C_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ em que $C_0 = 0,03921569$

Portanto $C_n = 0,03921569 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Voltando para variável contínua $t = 35n$ $n = \frac{t}{35}$

$C(t) = 0,03921569 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{35}}$

Reescrevendo

$C(t) = 0,03921569 \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{t/35}} \rightarrow C(t) = 0,03921569 \cdot e^{\frac{t}{35}\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

$C(t) = 0,03921569 \cdot e^{-0,019804t}$

$\frac{dc}{dt} = KC$ t(h)

t(h)	n	Cn	$(C_{n+1} - C_n)/C_n$
0	0	0,03921	$0,0196 - 0,03921/0,03921 = -0,5$
35	1	0,0196	$0,0098 - 0,0196/0,0196 = -0,5$
70	2	0,0098	

$\frac{C_{n+1} - C_n}{C_n} = Kc$

$C_{n+1} - C_n = KC_n$

variável discreta em variável contínua

$\frac{dc}{dt} = Kc$

Fonte: Relatório entregue por A6.

[41] Alinhado às ideias de Lady Welby, Peirce (2005) conceitua significação como o mais profundo e elevado sentido em que algo pode ser interpretado, ou seja, seu significado.

A familiaridade com o problema e a articulação deste com os objetos matemáticos foram se estabelecendo com o desenvolvimento da atividade de modelagem. Com isso, diferentes significados foram atribuídos ao problema em estudo. No que concerne à atribuição de significado para o que consiste Modelagem Matemática, embora não seja o foco do trabalho, não há indícios nas falas de A6, pois afirma que necessita de mais experiência para poder ‘falar’ sobre tal objeto. Isso fica evidente em resposta à questão 6 da Parte II do questionário (Apêndice B) — *Vocês já estudaram, em outro momento, as etapas da Modelagem Matemática. Identifique as suas ações no desenvolvimento da atividade do Diazepan em relação a estas etapas*. (Figura 5.12).

Figura 5.12– Resposta de A6 à questão 6 da Parte II do questionário da atividade ‘Diazepan no organismo’

6) Estudamos as etapas da modelagem matemática, mas para mim não está claro como essas etapas acontecem durante a resolução. Acredito que seria necessário p/ resolver uma atividade e ir comparando e discutindo à respeito dessas etapas no decorrer da resolução.

Fonte: Questionário entregue por A6. Grifo da pesquisadora.

Em consonância com a afirmação de Almeida, Silva & Vertuan (2012), de que é por meio da familiarização que os alunos são colocados em contato com a modelagem, propusemos outras atividades para que A6 pudesse [...] *resolver uma atividade e ir comparando e discutindo a respeito dessas etapas no decorrer da resolução* [resposta de A6 ao questionário].

A atividade 3, intitulada *Cálcio no rio Limoeiro*, foi desenvolvida como uma avaliação que foi resolvida em dupla ou trio. Nesta avaliação, A6 em parceria com A11 fez algumas considerações sobre o problema e o objeto matemático por meio escrito, falado (durante a resolução e na entrevista) e gestos. Os signos produzidos foram registrados em áudio, vídeo e no relatório com a resolução entregue.

Para a abordagem do problema referente à concentração de cálcio no rio Limoeiro com relação à profundidade, os alunos durante a realização da atividade produziram signos que se referem ao problema e signos que se referem aos objetos matemáticos em estudo. Para tanto, elaboraram dois modelos matemáticos para a situação que intitularam como ‘modelo 1’ e ‘modelo 2’.Os signos utilizados por A6 que de alguma forma estão relacionados ao problema em cada um dos modelos foram produzidos em praticamente todas as fases de desenvolvimento da atividade de modelagem — na inteiração, na matematização, na resolução, na interpretação de resultados e na validação. Os alunos estavam interessados em responder ao problema, visto que tinham que resolver a avaliação. Na Figura 5.13 reunimos os signos relacionados diretamente ao problema.

Figura 5.13– Símbolos produzidos por A6 e A11 para o problema na atividade 'Cálcio no rio Limoeiro'

2- Como a concentração de cálcio no substrato depende da profundidade, e a variação entre as profundidade pode ser considerada constante, isto implica que a variação da concentração em cada profundidade é proporcional a quantidade de substância de cálcio em cada ponto, isto é

$$\frac{\frac{dc}{dp}}{c} = K \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{dp} = K.c$$

Justificativa para a hipótese do modelo 1

	Modelo 1	Modelo 2
Definição de variáveis e hipóteses	Podemos considerar que a variação entre $\frac{\Delta c}{c}$ é constante, sendo assim a variação da concentração de cálcio no substrato C, é proporcional a quantidade de de concentração de cálcio em cada ponto, ou seja $\frac{dc}{dp} = K.C$ o que temos uma equação diferencial ordinária separável	VARIÁVEIS p: PROFUNDIDADE do RIO - cm C: CONCENTRAÇÃO DE CÁLCIO NO SUBSTRATO mg/cm³ n: VARIÁVEL AUXILIAR
Modelo matemático	$\boxed{C(p) = 3{,}3443\ e^{-0{,}004083p}}$ modelo da concentração de cálcio em função da profundidade p.	$C(p) = 4{,}097016 \cdot e^{-0{,}004927 0 \cdot p}$ para qual p, $c(p) = 0{,}15$
Resposta para o problema	Para qual p, $C(p) = 0{,}15$ $0{,}15 = 3{,}3943\ e^{-0{,}004013p}$ $0{,}044852 = e^{-0{,}004083p}$ $\ln(0{,}044852) = -0{,}004083p$ $\frac{-3{,}104387}{-0{,}004083} = p$ $p \cong 760\ cm$ ou ainda 7,6 m	$0{,}15 = 4{,}047016 \cdot e^{-0{,}004927 \cdot p}$ $0{,}03706 = e^{-0{,}004927p}$ $-3{,}295217 = -0{,}004927p$ $p = \frac{3{,}295217}{0{,}004927} \cong 668{,}80\ cm$ ou ainda aproximadamente 6,688 m

3) $C(400) = 3{,}3443 \cdot e^{-0{,}004083 \cdot 400} = 0{,}65315$

Com 4m de profundidade a concentração de cálcio é aproximadamente 0,65315 mg/cm³

a quantidade da concentração para 4m está acima da quantidade 0,15 mg/cm³ de cálcio considerada como fértil, o que não é possível concluir se é fértil ou infértil.

Interpretação dos resultados

Fonte: Relatório entregue por A6 e A11.

Como descrito no Capítulo 4, antes de iniciar a abordagem do problema a ser estudado, a dupla A6 e A11 ficou um período em silêncio sem inteiração entre ambos. Esse fato é justificado pela pouca experiência com atividades nas quais eles precisam estabelecer relações com várias informações, conforme entrevista *a posteriori* (Apêndice D).

> A6: *Na verdade, acho que a gente não tem essa... esse tipo de trabalho no curso ou nas aulas, então até você ler, até você compreender, até você absorver as informações e ver bom... eu tenho isso, acontece isso e eu quero fazer isso, entendeu? Essa dinâmica dá um trabalho para a gente conseguir, mas é por falta de treino, então você olha, você lê, você vê o que acontece, quem são os fitoplânctos, qual é a questão do cálcio, qual é a importância do cálcio, você vai vendo. Então nossa dificuldade foi trabalhar com as informações e perceber essa relação, que essa relação resolvia o problema. Ou seja, que é diretamente proporcional, que é constante, enfim sabe? A nossa dificuldade maior foi essa. E que eu observei nos trabalhos de modelagem é isso, é você ler o problema, ou a pesquisa da maioria, é você identificar o problema e ter alguma coisa direcionada, porque depois que você encontrou o modelo e vai ver que validou, está dentro do esperado, você resolve o seu problema.*
> [...]
> A11: *Porque até absorver tudo isso* [referindo-se ao processo de desenvolvimento de uma atividade de modelagem] *leva um tempo, não é uma coisa imediata.*

A afirmação de A6 sobre a '*falta de treino*' de trabalhar com atividades de natureza como a tratada na Modelagem Matemática justifica a necessidade de familiarização dos alunos com esse tipo de atividade. Neste sentido, o aluno precisa 'experienciar' trabalhos com atividades de modelagem para se adaptar, se familiarizar com mudanças e assim construir sua experiência, em consonância com as ideias de Larrosa Bondía (2002), de que a experiência é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca. Articulando familiaridade em termos de semiótica peirceana, há mudanças nos símbolos e um aprimoramento na atribuição de significado para o objeto, no caso Modelagem Matemática.

Ao obter o modelo matemático que pudesse responder o problema em estudo, a dupla realiza os cálculos para encontrar a profundidade em que a concentração de cálcio atingiria a concentração de 0,15mg/cm^3. Fica evidente na entrevista que o principal objetivo da dupla era encontrar uma função, um modelo em que pudesse obter a solução para o problema em estudo.

> A6: *Nosso objetivo era encontrar uma função que desse condição de resolver o que? Que com quinze gramas por centímetros cúbicos qual é a profundidade que ele pede a produçãoooo* [Retomando ao problema].
> A11: *Até que profundidade...*
> A6: [interrompendo] *Até que profundidade, então nosso objetivo foi: preciso encontrar um modelo que quando eu der a profundidade... não, quando eu dou a concentração, qual profundidade vai corresponder a essa concentração.*

Neste sentido, o foco dos alunos na atividade consiste no problema, ou seja, resolver o problema se configurou como objeto de estudo para A6 e A11.

A partir do modelo matemático, foi proposto que os alunos refletissem sobre a existência do fitoplâncton em certa profundidade dada (4 m). Para surpresa da pesquisadora, A6 e A11 apresentaram signos interpretantes mais elaborados dos que haviam sido propostos com a elaboração da questão (em *interpretação dos resultados*, na Figura 5.13). Nesse caso, podemos inferir que ocorreu uma interpretação dos resultados com relação à situação-problema. Quando questionados sobre a resposta para a questão em entrevista, A6 apresenta suas justificativas:

> A6: *Está superior, ou seja, o que poderia considerar como fértil ou como infértil? Se essa concentração é prejudicial ou não? Ou seja, quais são as contribuições se você tem o excesso. Se o excesso é por falta então, ou seja, de repente, a gente precisaria de mais definições, ou seja, quando que o solo é considerado fértil? Que eu acho que aqui ele não menciona.* [referindo-se às informações apresentadas na situação-problema].
> P: *Não. É saber se com essa concentração é infértil, não por falta mas por excesso?*
> A6: *É por excesso. Ou às vezes não. O que dá para entender que não é. É com base em que não é? Não posso afirmar nada sobre. É pelos nossos resultados nós concluímos que não é possível.*
> P: *Mas que vai ter naquela profundidade.*
> A6: *Que vai ter naquela profundidade.*

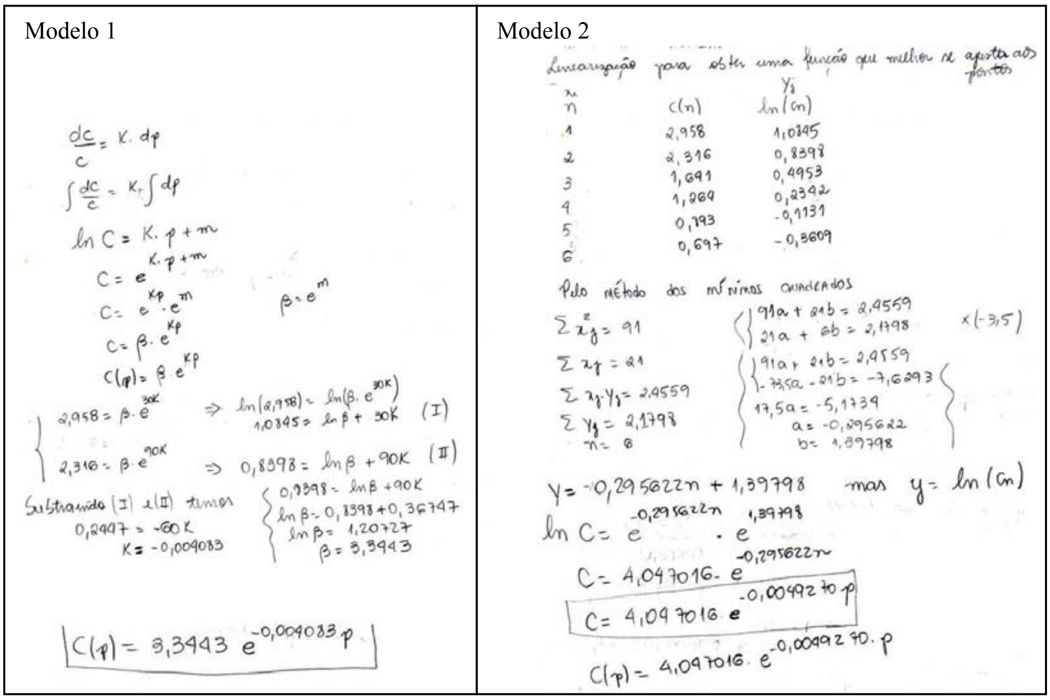
De fato, a situação-problema não apresentava informações que possibilitassem atribuir uma resposta direta para a questão. Nesse sentido, seria necessário que os alunos realizassem uma inteiração para que uma percepção com relação à resposta direta para o problema pudesse ser efetivada. Em sentido peirceano, a percepção "é a possibilidade de adquirir informação, de significar mais" (PEIRCE, 2005, p. 307). A evidência de que necessitariam de uma percepção do que estava ocorrendo com a situação-problema, possibilitou aos alunos uma atribuição de significado para o problema por meios matemáticos, além de "compreender que a modelagem trabalha com diversificados conhecimentos, exigindo do professor e dos alunos a predisposição para buscá-los e relacioná-los com os conhecimentos matemáticos" (BISOGNIN et al, 2012, p. 212).

As respostas foram obtidas com a dedução dos modelos 1 e 2 em que os objetos matemáticos utilizados correspondem a Equações Diferenciais Ordinárias e Método dos Mínimos Quadrados (Figura 5.14), respectivamente.

Figura 5.14– Símbolos produzidos por A6 e A11 que se referem aos objetos matemáticos envolvidos na atividade 'Cálcio no rio Limoeiro'

Busca de auxílio para o desenvolvimento da Equação Diferencial Ordinária

A11: *Olha A6* [segurando uma folha com anotações] *naquela atividade do diazepan a gente já resolveu essa Equação Diferencial! Vamos utilizar já esses resultados ou vamos realizar novamente os cálculos?*
A6: *Vamos fazer de novo A11. Daí é mais garantido e a gente deixa mais organizadas as continhas, eu faço aqui e você já passa a limpo aí.*
A11: *Beleza, mas eu quero te ajudar aí nesses cálculos!*
A6: *Tá.*



Fonte: Relatório entregue por A6 e A11. Gravação realizada durante o desenvolvimento da atividade.

O que se evidencia nos signos escritos é que esses modelos matemáticos não foram validados para que pudessem representar a situação e, assim, serem utilizados para a obtenção de uma resposta, uma interpretação dos resultados matemáticos com relação ao problema abarcado.

A fase de validação de resultados, segundo Almeida, Silva & Vertuan (2012), possibilita o desenvolvimento nos alunos da capacidade de avaliar o processo de construção de modelo e os diferentes contextos de suas aplicações. No relatório entregue não há indícios de que os alunos realizaram a validação dos resultados. No entanto, as imagens gravadas em vídeo apresentam A11 realizando cálculos na calculadora e anotando em uma folha que não foi entregue junto ao relatório. Quando questionados sobre a não presença de validação no relatório, os alunos apresentaram argumentações:

A11: *Eu acho que a gente tentou validar com os dados que a gente tinha na calculadora porque querendo ou não foi extenso para a gente, porque não tinha muito tempo então a gente fazia lá rapidinho na calculadora, mas nada que a gente fosse escrevendo.*
P: *Ah tá, vocês fizeram os cálculos na calculadora mas não registraram?*
A6: *Não registramos, mas a validação ela é essencial, como que eu vou... com que base eu sei se esse modelo é verdadeiro?*
P: *Vocês fizeram um rascunho? E passaram a limpo?*
A11: *Sim.*
A6: *Fizemos... simultaneamente, a medida que a gente via que os resultados que nós encontramos no nosso modelo e comparava com os dados fornecidos na tabela e dava muita diferença, estava dando uma margem de erro acima de 10%...*
P: *Aí vocês mexiam e retomavam.*
A6: *Aí retomava, vamos ver aqui onde nós erramos, voltava nas contas, conferia as contas, até que nós vimos que nós erramos em alguma conta lá na hora de elevar os exponenciais e estava furado estava dando diferença nos coeficientes.*

O fato de conhecer o que os alunos pensaram para escrever um signo auxilia na análise e na visualização do trilhar da atividade de modelagem. Por isso, a retomada à pesquisa de campo sugerida na codificação axial proposta por Charmaz (2006).

Nas imagens capturadas por vídeo, fica evidente que os alunos buscam nas anotações uma espécie de protocolo para desenvolver a atividade utilizando Equações Diferenciais Ordinárias. No âmbito escolar, Manechine & Caldeira (2006, p. 3) afirmam que, "na medida em que o educando vai se familiarizando e apreendendo determinados signos universais, esses vão se tornando objetos referenciais para conexão, relação e apropriação de novos signos".

Embora existam diferentes formas para se resolver um problema, os alunos escolheram utilizar Equações Diferenciais Ordinárias e Método dos Mínimos Quadrados. A escolha realizada por A6 e A11 é justificada em entrevista:

A6: *Então nós pensamos em desenvolver, inicialmente isso, bom que matemática a gente vai usar... a gente usou duas abordagens: uma voltada para o nível médio e outra para o nível superior. Então primeiramente nós levantamos as hipóteses, vimos quais são as variáveis que estão envolvidas no problema, e a partir daí vimos a relação que tem cada profundidade e começamos a desenvolver o modelo para tentar resolver esse problema.*
A6: *Bom... primeiro nós resolvemos por integrais, mas ela veio por equações diferenciais. Em equações diferenciais, trabalhamos com derivadas, com a variação...*
P: *Com a taxa de variação!*
A6: *Com a taxa de variação. Agora com o outro que nós usamos, nós usamos o...*
A11: *O método dos mínimos quadrados.*
A6: *Na verdade, a questão dos métodos dos mínimos quadrados é você achar uma função ou uma reta que melhor se ajusta à distribuição dos pontos que você tem, com as informações, com os dados que você tem. E de repente no caso por ajuste, trabalhando com os mínimos quadrados, a gente achou uma reta quando nós linearizamos né?*
A11: *Aham...*

A6: *Pelo método dos mínimos quadrados a gente achou uma equação, a gente linearizou, achou uma função, uma reta que melhor se ajusta àqueles pontos e a partir dessa reta, deixa eu só ver* [retomando os registros escritos]... *a gente achou uma função* [longo silêncio]...
P: *Com a linearização você vê o comportamento dos dados.*
A6: *O comportamento dos dados.*
A6: *São matemáticas diferentes, uma mais voltada para o Ensino Médio e outra mais voltada para o Ensino Superior, mas ambas da alguma forma vai tentar resolver ao problema.*

Para determinar os parâmetros do modelo exponencial no modelo 1 (obtido por meio de Equações Diferenciais Ordinárias), a dupla de alunos utilizou dois pontos. A escolha dos pontos foi realizada fazendo experimentos e validando, durante um processo exaustivo que pode ser visualizado na gravação em vídeo em que os alunos fazem cálculos utilizando a calculadora e apagam sucessivas vezes. Somente se deram por satisfeitos quando o erro entre o valor modelado e o 'real' foi menor do que 10%, conforme relatado por A6:

A6: *À medida que a gente via que os resultados que nós encontramos no nosso modelo e comparava com os dados fornecidos na tabela e dava muita diferença, estava dando uma margem de erro acima de 10%. Aí a gente retomava, vamos ver aqui onde nós erramos, voltava nas contas, conferia as contas, até que nós vimos que nós erramos em alguma conta lá na hora de elevar os exponenciais e estava furado estava dando diferença nos coeficientes.*
P: *Porque eu vi lá no filme, por isso que se a gente tem a filmagem é interessante, porque quando vocês falam isso eu lembro que vocês utilizaram muita calculadora mesmo, a todo momento vocês estavam fazendo isso, não está aqui explícito* [referindo-se ao relatório entregue] *mas vocês utilizaram da validação para verificar se o modelo era válido e assim aplicar o ponto naquele modelo e responder ao problema.*
A6: *Responder ao problema. Porque na verdade se você tem o modelo, você responde. Só que com base em que você sabe? Quais são as considerações que você está levando para esse modelo?, ou seja, para nós atuou o seguinte: nós encontramos o modelo e vimos que para esses pontos aqui* [referindo-se aos pontos utilizados na dedução do modelo 1] *o resultado dava bem próximo, ou seja, não era uma questão de mais de 10% de erro, porque se a gente considerava que estava dentro desses 10% o modelo era válido, ele é aceitável.* [...].

Na validação dos resultados matemáticos, bem como em todo o desenvolvimento da atividade Cálcio no rio Limoeiro, A6 e A11 preferiram produzir signos algébricos para se referirem aos objetos matemáticos. Atividades de modelagem, de forma geral, possibilitam a produção de diferentes signos para se referir ao objeto em estudo. Segundo Almeida (2010, p. 409-410), "a atividade de modelagem possibilita a organização e a elaboração de signos, isto é, a generalização do conhecimento em sistemas semióticos de representações (algoritmos, esquemas, gráficos, etc.) e sua interpretação". Quando questionamos A6 e A11 sobre o fato da existência de outros tipos de signos como o gráfico, os alunos afirmam que não pensaram em produzir:

> A6: *Nós até fizemos um gráfico, mas ele não serviu de base para validar.*
> P: *Mas assim, ele é importante? A representação é importante?*
> A6: *Ele é importante, eu acho que ele é extremamente interessante para você ver em cada ponto o que está acontecendo. Porque a gente, nós, não sei se vou generalizar, a gente tem muita necessidade de ver o resultado, visualizar de alguma forma, ou seja, como isso está acontecendo, você tem alguma coisa mais palpável. Acho que o gráfico de alguma forma possibilita isso... o comportamento, porque você fala 'nossa tem aquele ponto lá parece que está meio discrepante, o que está acontecendo?' bom, mas naquele ponto está acontecendo isso. O gráfico permite você explorar mais o modelo encontrado. Eu acho que ele contribui muito nesse sentido. Mas nós não pensamos em utilizar gráfico. Primeiro, por questão do tempo, a gente não chegou a esse raciocínio, ou seja, a essa percepção, mas porque também nós não trabalhamos com gráfico. Nosso maior objetivo, objeto foi quem? O modelo. A validação. Bom está dentro do esperado? Está, então vamos seguir! Por questão de tempo. Acho que se a gente tivesse mais tempo para discutir, para conversar, aí a gente poderia pensar: Vamos comparar para ver o que está acontecendo? Tem interseção? A partir de que ponto um está maior que o outro? O que está causando essa variação? É o coeficiente angular? É o coeficiente linear? Eu acho que o tempo possibilitaria a gente chegar a essas conclusões.*

Com a entrevista, pudemos analisar que, embora os alunos não tenham produzido o signo gráfico para se remeterem aos objetos matemáticos, estes entendem que tal signo possibilita um auxílio na visualização do comportamento do modelo matemático obtido, no caso função exponencial. Neste sentido, gráfico e expressão algébrica estão relacionados entre si para caracterizar o objeto matemático 'função exponencial'.

O desenvolvimento de uma atividade de modelagem no âmbito de uma avaliação possibilitou aos alunos sentirem-se mais responsáveis com a atividade, não necessitando de muitas interferências externas, conforme afirma A6 ao entregar o relatório no final da aula: *senti o peso da responsabilidade, da autonomia que tivemos que encarar*. Para tanto, quando nos remetemos ao fato de experimentar algo, se familiarizar com algo para que a esse algo seja atribuído significado, se faz necessário experimentar o desenvolvimento de uma atividade de modelagem desde a escolha da situação-problema, possibilitando 'um peso maior' de autonomia quando comparado com a avaliação na qual já existia um problema a ser abordado. É neste sentido, no fato de experimentar modelagem, de ter autonomia em todo o desenvolvimento de uma atividade, que A6, em consonância com seu grupo, desenvolveu a atividade 5 — Poda de árvore — a qual adentramos nas análises.

Determinar um modelo matemático que indica a altura em que o galho mais baixo de uma árvore pode ficar para não atrapalhar a iluminação de ruas de uma cidade foi o problema escolhido pelo grupo de seis membros em que A6 faz parte. Essa escolha foi permeada por várias pesquisas e reuniões do grupo, assistidas pela pesquisadora ou professora. O que levamos em consideração para levantar a codificação inicial corresponde a signos escritos, falados e gesticulados produzidos no relatório entregue, na apresentação da atividade aos demais alunos e nas reuniões do grupo que foram gravadas. Para a codificação axial, aplicamos uma entrevista (Apêndice G) em que dois membros do grupo, sendo um deles A6, participaram.

Os dados que os alunos utilizaram foram por eles 'produzidos' e isso provocou um envolvimento maior com o problema que pretendiam abarcar, quando comparado aos problemas estudados nas outras atividades de modelagem. Esse fato foi relatado por A6 na comunicação dos resultados para a sala de aula, o grupo parecia 'viver' o problema em outros momentos do dia que justificam a escolha de uma rua específica para ser analisada.

Símbolos que de alguma forma representam o problema e que foram enunciados por A6 são evidenciados em todo o desenvolvimento da atividade de modelagem: na inteiração, quando realizam pesquisas com relação a uma das situações-problema sugeridas pela professora, na vivência de A6 com uma rua específica e que condizia com a situação que pretendiam estudar, na produção dos dados e na definição do problema; nas fases de matematização e resolução, com a apresentação de variáveis e hipóteses, com a coleta de informações que seriam utilizadas na dedução do modelo, com a obtenção dos modelos matemáticos e respostas ao problema; nas fases de interpretação de resultados e validação quando apresentam as respostas para o problema e comunicam a atividade para os demais colegas de sala de aula.

Os símbolos produzidos pelo grupo de A6 e que permeiam o problema em estudo constam da Figura 5.15.

Figura 5.15– Símbolos produzidos pelo grupo de A6 que se relacionam ao problema na atividade ‘Poda de árvore’

Sugestões de situações pela professora

busca de informações

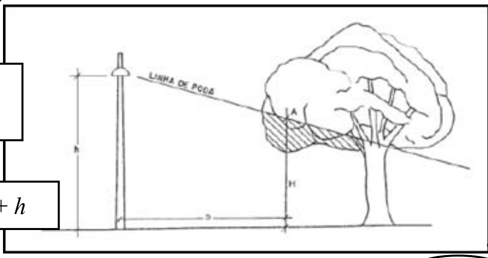
A6: *Para escolher a situação, tivemos a ideia de fazer uma análise sobre a iluminação pública.*
P: *Vocês escolheram algum local específico para estudar, coletar os dados...*
A9: [interrompendo] *a gente vai fazer geral e vamos testar com o modelo padrão de um local específico, a gente pensou em estudar a iluminação dos arredores do Lago Igapó.*

Vivência de A6

A6: *Caramba, mas a gente está fazendo um trabalho que trata da iluminação da rua, vamos unir o útil ao agradável!*

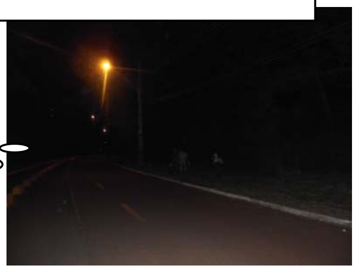
busca de informações

Manual de iluminação pública da Copel



$H = -0{,}26D + h$

Produção de dados
- Rua Serra dos Parecis
- Rua Bento Munhoz da Rocha Neto



Definição do problema

Determinar, de acordo com o tipo de poste, um modelo para o ponto de poda.

Definição de variáveis

Distância do poste ao galho mais baixo da árvore (D)
Altura que a luminária está montada (h)
Altura do ponto de poda (H)

Informações utilizadas

- A curva que descreve a linha de poda é uma reta;
- Altura da lâmpada no poste de $6m$;
- Raio de iluminação de $22{,}5m$;
- Distância entre dois postes de $40m$.

Etapa 1 - Posição da lâmpada - altura da lâmpada é de 6 metros
Etapa 2 - Raio de iluminação - raio encontrado foi de 16 metros
Etapa 3 - Curva de iluminação:
$y = -0{,}375x + 6$ para os postes Padrão IP-01/80M/125M/70S
$y = -0{,}54375x + 8{,}7$ para os postes Padrão IP-03/250M/250S/400M

Resposta ao problema **Ponto de poda:** Serra dos Parecis: 1,5 m de altura
Bento Munhoz da Rocha Neto: 2,2 m de altura

comunicação dos resultados por A6

A6: *No caso as variáveis que estão envolvidas no problema são: o h minúsculo a gente vai determinar a altura da lâmpada no poste, o H maiúsculo ali no ponto A* [apontando para o slide] *vai determinar a altura que deve ocorrer a linha de poda, ou seja, a altura que vai ocorrer, levando em consideração o seguinte: o galho mais baixo da árvore.... então, a análise é feita assim* [com gestos] *analisa a árvore, o ponto mais baixo que o galho estiver do chão que vai passar a linha de poda, ou seja, naquele ponto onde está o H a distância que é considerada é a distância d, a variável d no caso que é do poste até onde está ocorrendo a interseção da linha de poda com a linha vertical* [apontando para o slide e traçando com as mãos no ar a representação de uma reta perpendicular] *que está tendo ali no ponto A.*

Fonte: Relatório entregue pelo grupo em que A6 é membro. Gravação realizada durante a orientação e comunicação da atividade.

Os alunos atribuem significado para o problema em estudo ao estabelecer sua construção desde o início do desenvolvimento da atividade de modelagem. Mesmo quando não há um problema definido, não há uma compreensão sobre o problema, é possível trabalhar na atividade. Essa ação corresponde ao que Borromeo Ferri (2006) denotou como transição da situação real para uma representação mental da situação. Para o grupo de A6 houve atribuição de significado para o problema na produção dos dados que iriam utilizar. Isso ocorre porque "*significado* deve envolver uma referência, a *intenção*" (PEIRCE, 1989, p. 16, grifos do autor), inserindo a participação do intérprete. A intenção de estudar o problema revelou a atribuição de significado para o problema, conforme relato de A6 em entrevista (Apêndice G):

> [...]
> P: *E... O que foi importante para vocês entenderem nos dados coletados antes de definirem o problema? Antes da definição do problema? O que vocês precisaram entender?*
> A6: *Então, antes de responder a essa pergunta, eu acho que a maior dificuldade de você desenvolver o trabalho é 'qual é o problema', certo? Porque nós não tínhamos. Uma coisa é você ter o problema e você começar a levantar informações que de alguma forma te dê suporte para tentar resolver o problema.*
> P: *Diferente do que vocês fizeram no trabalho de avaliação?*
> A6: *Exatamente!*
> P: *Nela vocês já tinham o problema?*
> A6: *Exatamente. Você já tem o problema, então você tem que responder. Agora aqui no nosso trabalho, uma das dificuldades que nós tivemos foi 'qual é o problema? Esse problema dá conta de abranger o trabalho final?' ou seja, entendeu? Digo assim, é consistente? Que isso sim foi a nossa maior dificuldade! Então, para isso o que nós começamos a fazer? Bom... não tem o problema! Então vamos ler, vamos buscar, vamos conversar. Eu acho que foi isso que ajudou a gente a tentar a desenvolver a questão do problema.*
> P: *Mais do que os dados?*
> A6: *Bem mais do que os dados! Eu acho que os dados foram consequência de você tentar resolver o problema para nós foi. E o meu ponto de vista é esse! Eu não sei se a A11 concorda! Porque para mim, a maior dificuldade foi apontar o problema. Depois do problema apontado, foi....*
> P: *E não foram os dados?*
> A6: *Não foram os dados. Os dados foram consequência! Começa com esses propósitos... nós medimos... bom, as medições nos disseram isso! De acordo com o manual da Copel, fizemos a comparação e... é isso! Só que para a gente chegar nisso, a gente precisou do problema, que sem o problema, a gente não ia ter condição de fazer uma análise dessas coisas!*
> P: *Por conta da produção dos dados!?*
> A6: *Exatamente.*
> P: *Porque daí você tem que ter o problema, por que como você vai produzir? Você vai sair medindo?*
> A6: *É, vamos precisar disso para quê? Então, a partir do que vamos ter, a questão da linha de poda, que se você tem a linha de poda, e a manutenção dela é feita adequada, você garante a boa iluminação da rua, certo? Só que nós vimos lá que aquela rua estava com problema, ou seja, qual era o problema daquela rua? Então... ter manutenção. Mas simplesmente ir lá e podar, isso quer dizer... isso vai garantir a boa iluminação? Não! O manual da Copel dá uma equação matemática.*
> [...]

Os interpretantes enunciados por A6 revelam a atribuição de significado para o objeto do qual ele trata, ou seja, do problema a ser estudado. O significado de um objeto só é atribuído por uma mente interpretadora, estabelecendo relações com a experiência que uma pessoa tem do mundo. Os objetos existem, mas são desprovidos de significados por si mesmos. O problema da iluminação com relação à poda existe, mas se não existir uma mente interpretadora para esse objeto ele será desprovido de significado.

Quando o aluno se envolve com a situação-problema escolhida para ser estudada, vislumbra um problema que pode ser resolvido via Matemática, atribui significado para o problema. Isso corrobora com a afirmação de Peirce (apud SANTAELLA, 2008a) com relação ao interpretante enquanto signo que transmite familiaridade com o seu objeto. E ao ter familiaridade com o problema, os interpretantes produzidos se aproximam desse objeto.

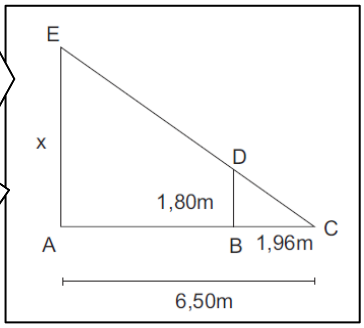
A atribuição de significado para o problema foi sendo constituído no desenvolvimento da atividade e na abordagem matemática para a situação. A definição do problema foi se constituindo por meio da articulação com os objetos matemáticos evidenciados no 'trilhar' do desenvolvimento da atividade. Os alunos organizaram esse trilhar em três etapas — posição da lâmpada no poste, raio de iluminação e curva de iluminação. Essas etapas foram desenvolvidas para o estudo do modelo matemático de cada rua estudada — Serra dos Parecis e Bento Munhoz da Rocha Neto. Os objetos matemáticos que se fizeram presentes nesta atividade foram: semelhanças de triângulos, equação da reta, função linear, coordenadas esféricas e coordenadas cilíndricas. Os objetos matemáticos que emergiram na obtenção dos modelos matemáticos estiveram presentes nas fases de matematização e resolução, bem como na interpretação de resultados e na validação. Símbolos que representam os objetos matemáticos que emergiram no desenvolvimento da atividade de modelagem 'Poda de árvore' são apresentados na Figura 5.16.

Figura 5.16– Símbolos produzidos por A6 relacionados ao objeto matemático na atividade 'Poda de árvore'

Etapa 1 - Posição da lâmpada - altura da lâmpada é de 6 metros

Para o cálculo do posicionamento da lâmpada no poste, utilizamos do conceito de triângulos semelhantes da seguinte forma:
Fizemos a medição da sombra e da altura do A9; e medimos também a distância do centro de iluminação até o final da sombra do mesmo.

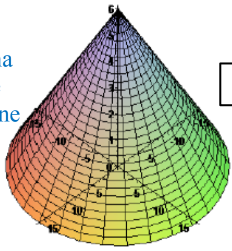
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{6,5}{1,96}=\frac{x}{1,80} \Rightarrow 5,969387755 \text{ ou } x \approx 6$$



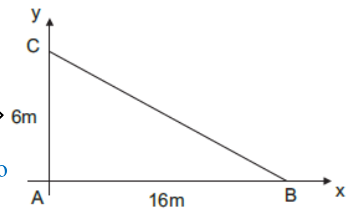
Etapa 2 - Raio de iluminação - raio encontrado foi de 16 metros, utilizando trena.

Etapa 3 - Curva de iluminação

Sólido que descreve a forma de iluminação é dada por um cone



Projeção no plano cartesiano

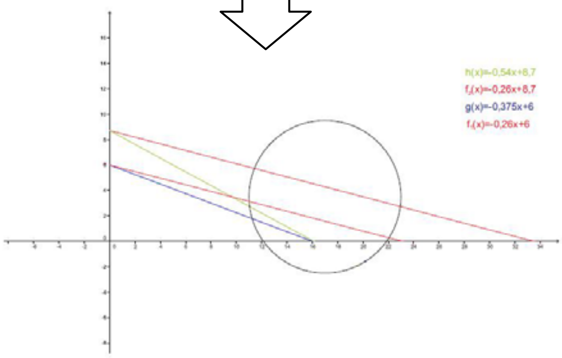


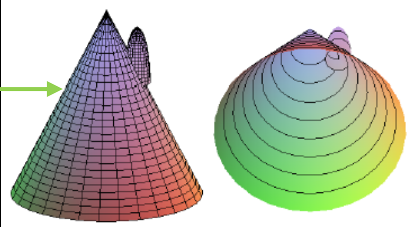
equação da reta

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{e} \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$y = -0{,}375x + 6$ para os postes Padrão IP-01/80M/125M/70S
$y = -0{,}54375x + 8{,}7$ para os postes Padrão IP-03/250M/250S/400M

Representação gráfica da curva de iluminação para cada poste, da equação da Copel e representação de árvore por circunferência





Representação tridimensional da interseção do cone de iluminação da Rua Bento Munhoz da Rocha Neto com a esfera (copa da árvore)

comunicação dos resultados por A6

Explicação da equação apresentada no Manual da Copel $H = -0{,}26D + h$

A6: *Bom, e a função, o modelo, a função que ela traz* [referindo-se ao Manual da Copel] *é uma função linear do tipo H onde H=-0,26D+h, o h matematicamente falando pode ser considerado como o coeficiente linear e no nosso caso está sendo os 6 metros, o -0,26 é o coeficiente angular dessa reta que nada mais é que a variação da altura do poste pela distância, pelo raio de iluminação, que são os 22 metros e meio. Então -0,26 veio da divisão da variação matematicamente falando, se considerássemos o plano cartesiano xy, seria a variação do y pela variação do x.*

A6: *A gente só pegou o modelo tridimensional para a gente entender que ele é mais preciso, que qualquer ponto que você pegar ali... ah não ele não tá na linha, ele tá naquele espaço. Você consegue... ah então vamos pegar a projeção, pega a interseção do cone naquele ponto, que você tem um resultado bem mais preciso do que no plano, isso é óbvio! Isso parece ser... não é que é obvio, isso é fácil de visualizar, então, por isso que a gente achou que o 3D seria mais interessante. E eu acho que a representação gráfica ajuda você a visualizar isso. A meu ver, eu não sei se ela prova alguma coisa, se ela mostra algum resultado, mas ela possibilita você a compreender o resultado e a partir dessa compreensão, você deduzir o modelo...*

Fonte: Relatório entregue pelo grupo em que A6 é membro. Gravação realizada durante a orientação e comunicação da atividade.

A ideia de utilizar semelhanças de triângulos para o cálculo da altura da lâmpada no poste denota um conhecimento matemático que auxilia na tomada de decisão para os desdobramentos da resolução de um problema. Ao ser questionado sobre o objeto matemático envolvido na situação-problema, A6 respondeu:

> [...]
> A6: *Para a dedução do nosso modelo, nós fomos a campo, fomos fazer as medições, aí nos precisávamos da altura da lâmpada, aí nós usamos a semelhança de triângulos para tentar achar a altura da lâmpada. Pegamos a altura do... é... nós calculamos na verdade a altura do poste. Então era mais fácil nós medirmos a altura de uma pessoa, ver a distância que ela estava da extremidade do raio de luminosidade e nós usamos a semelhança de triângulos para encontrar a altura. Para encontrar a equação da reta, nós usamos da mesma forma consideramos o raio de luminosidade como uma reta, usamos um triângulo retângulo e consideramos... jogamos no plano cartesiano, que a altura do poste é uma variação em y e a distância da árvore no poste como uma variação em x. Isso aí vai dar o coeficiente angular em relação ao raio de luminosidade. Então foram essas, a construção matemática nesse sentido. Que até isso era uma discussão, ou seja, a discussão matemática, ou seja, o conteúdo matemático de nosso trabalho ele não é uma matemática é.... sofisticada, super simples, resolvia nosso problema. Só que ela dá um resultado extremamente importante, que era o objetivo do nosso trabalho.*

Na busca de uma saída para impasses que tiveram durante o desenvolvimento da atividade, como determinar a altura da lâmpada no poste e a curva de iluminação, A6 em conjunto com os demais membros do grupo utilizaram de objetos matemáticos cujas consequências futuras seriam obtenções de respostas. Ao ter consciência[42] das consequências do uso de símbolos para representar o objeto é condição para "determinar o que um conceito significa" (PEIRCE, 1989, p. IX).

Embora reconhecessem que o objeto matemático era algo 'simples' para o nível de escolaridade em que se encontravam, a atribuição de significado para este objeto pelos alunos ocorreu nas relações que estabeleceram entre o objeto matemático e a realidade que os cercava. Em uma atividade matemática, como uma atividade de modelagem, o essencial é, segundo Chevallard et al (2001, p. 50) "construir um modelo (matemático) da realidade que queremos estudar, trabalhar com tal modelo e interpretar os resultados obtidos nesse trabalho, para responder às questões inicialmente apresentadas". Essas foram ações dos alunos em toda atividade. Interpretar os resultados obtidos para além da Matemática na retomada da situação-problema é um aspecto que se configura na atribuição de significado para o problema e para o objeto matemático do qual trataram. Isso fica evidente nos interpretantes

[42] Em sentido peirceano, "a consciência é usada para significar o conhecimento que temos daquilo que está em nossas mentes" (PEIRCE, 2005, p. 307).

produzidos por A6 quando questionado sobre o uso do recurso gráfico para representar objeto (problema e objeto matemático).

> P: *Vocês falaram 'usando recurso gráfico para validar o modelo'. Por que vocês utilizaram desse recurso?*
> [...]
> A6: *Porque eu... Na verdade é o seguinte, no plano, tava tranquilo de visualizar, só que a gente achou que ela falava no sentido, no seguinte sentido, que a árvore não é uma coisa linear, principalmente a copa dela! A copa dela tinha um comportamento muito similar com o de uma esfera. Então, o que acontece? Se eu traçasse o raio de luminosidade considerando um galho assim* [fazendo gestos], *eu poderia ter um galho, ou seja, na vertical... vou pensar assim, eu poderia ter um galho na horizontal, ou seja, como eu vou considerar a linha de poda agora olhando para essa, para esse galho e não para aquele? Então, ou seja, a gente achou que o modelo, que o plano não seria uma condição interessante, então nós tínhamos que ir para o 3D. E aí nós acreditamos que a visualização gráfica ela te dá uma abstração bem melhor da situação para você compreender e falar 'ó... a questão do cone, do raio de luminosidade', se você falar uma coisa é... não que ele validou, a nossa ação. A gente achou... levou em consideração... bom... vai ser um cone, vai ser esfera, mas o gráfico eu acho que ele te ajuda, permite a você visualizar, ou seja, como isso está acontecendo? O comportamento dessas coisas. Ou seja, a interseção do cone com a esfera, claro que aí dava um pouco mais de trabalho, mas nós não nos focamos nisso na questão de dedução da equação da esfera, da equação do cone, isso não foi nosso objeto de estudo. Nós usamos o 3D para quê? Ou seja, como isso ocorre em três dimensões?*
> P: *Para isso vocês usaram recurso computacional?*
> A6: *Exatamente, porque ele é bem mais trabalhoso do que você trabalhar no plano! E a gente tem mais contato com o plano do que em 3D, né? Em três dimensões!*

Ao mencionar a importância de retomar a situação-problema, tentar representá-la matematicamente para visualizar por meio de um gráfico tridimensional e reconhecer que a atividade de Modelagem Matemática se encaminhava para a abordagem de uma situação mais complexa, os argumentos de A6 se direcionam para o entendimento de que "os modelos fornecem somente aproximações do comportamento real[43]" (D'AMBROSIO, 2009, p. 91, Tradução nossa).

O que fica evidente é que a intenção dos modeladores era fazer uma aproximação com a realidade. Embora reconhecessem que o modelo que obtiveram era 'simples' do ponto de vista matemático com relação ao nível de escolaridade no qual estavam inseridos, propuseram uma abordagem mais 'sofisticada' para a situação por meio do recurso computacional, mesmo somente mostrando a representação. Neste sentido, o significado atribuído consiste segundo Peirce (2005, p. 194) "numa ideia de sentimento ou predominantemente numa ideia de atuar e ser atuado".

[43] Tradução de "models provide only approximations of the real behavior" (D'AMBROSIO, 2009, p. 91).

Nesta atividade, o foco foi a atribuição de significado para o problema a ser estudado, visto que o objeto matemático era algo que de alguma forma ou capacidade fazia parte da ‘realidade’ daquele grupo, tanto que em vários momentos preocupavam-se de não estarem desenvolvendo uma atividade de modelagem envolvendo uma matemática de Ensino Superior, conforme relatado por A9: *Então aí no caso, na verdade, a gente não estava muito satisfeito com o modelo bidimensional, então a gente pensou que o modelo tridimensional mostraria melhor a realidade* [durante comunicação dos resultados para a sala de aula].

O terceiro momento de familiarização com atividades de Modelagem Matemática possibilitou a esse grupo de alunos uma adaptação com esse tipo de atividade em que há uma mudança de atitude [...] *‘qual é o problema?’ Porque nós não tínhamos. Uma coisa é você ter o problema e você começar a levantar informações que de alguma forma te dê suporte para tentar resolver o problema* [...] [fala de A6 em entrevista]. Assim construindo sua experiência, como proposto por Larrosa Bondía (2002), os alunos podem ‘aprender’ a fazer modelagem.

5.3 ANÁLISE GERAL PARA A6 – CODIFICAÇÃO FOCALIZADA

Diante dos dados coletados e organizados, seguindo indicações propostas na Teoria Fundamentada de Kathy Charmaz, avaliamos o processo de envolvimento de A6 com as três atividades de modelagem desenvolvidas. Neste sentido, o processo de codificação focalizada é validado e assume-se um compromisso com a categoria central definida na codificação axial, que consiste em refletir sobre a atribuição de significado para o objeto — problema e objeto matemático. Para Charmaz (2009, p. 87), essa codificação “constata as suas preconcepções sobre o tópico” que está sendo analisado.

Tendo em vista que a atribuição de significado para o problema e para o objeto matemático pode ocorrer por meio de signos interpretantes produzidos por intérpretes em diferentes fases e momentos de familiarização com atividades de Modelagem Matemática, procuramos por meio da codificação focalizada na análise geral, inferir como emergiram signos interpretantes produzidos por A6. Para tanto, ‘traçamos’ ciclos de modelagem para A6 em cada momento de familiarização — 1.º momento, 2.º momento e 3.º momento —, evidenciando a atribuição de significado para o objeto.

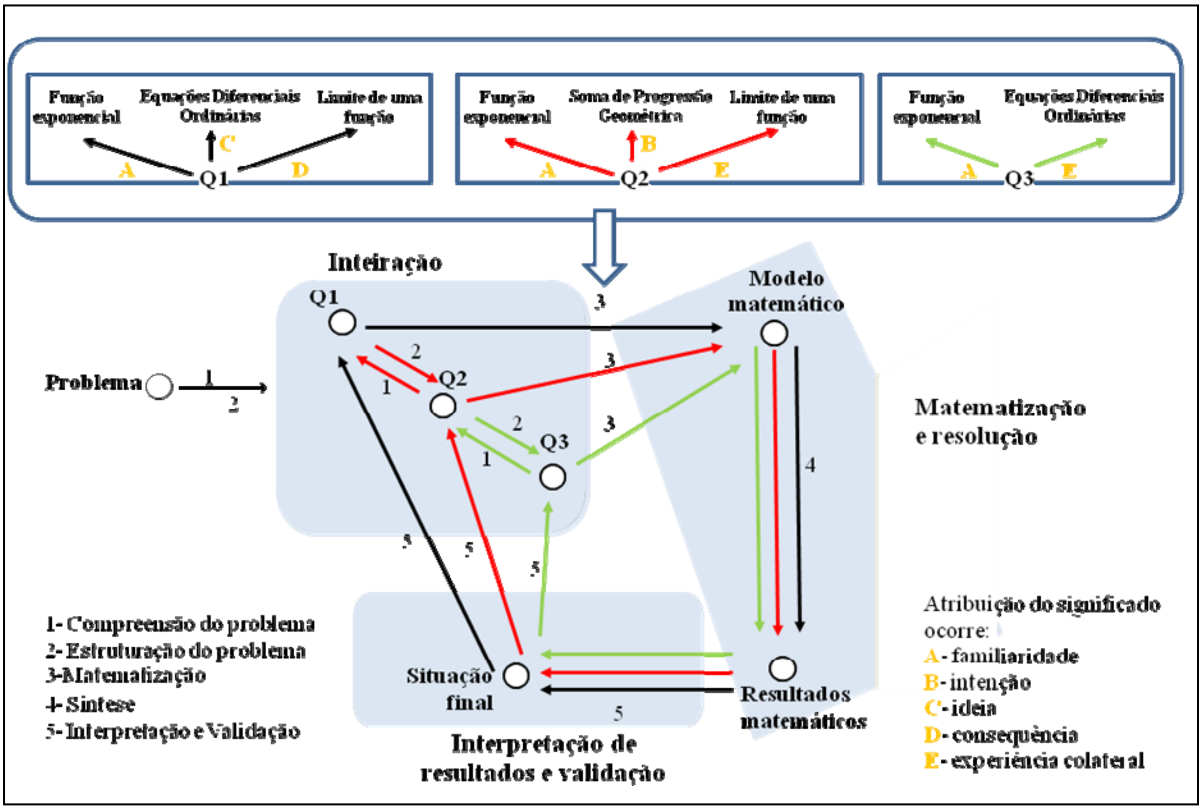
Na atividade 'Diazepan no organismo' caracterizada para ser desenvolvida no 1.º momento de familiarização, os signos interpretantes produzidos por A6 que se referem ao problema e ao objeto matemático em estudo estão relacionados à atribuição de significado para esses objetos. Há evidências de atribuição de significado por meio de *familiaridade* com o objeto, na *intenção* de significar o objeto, como uma *ideia* que se remete ao objeto, como *consequência* futura para abarcar o objeto, por meio de *experiência colateral* com o objeto.

A atribuição de significado para o problema foi se constituindo com o desenvolvimento de cada uma das questões na qual o problema foi dividido — Questão 1 (Q1), Questão 2 (Q2) e Questão 3 (Q3). Em Q1 a experiência colateral que o aluno tem com outra situação envolvendo um elemento químico em que há um decrescimento relacionado à meia-vida, possibilita a atribuição de significado. Isso ocorre, porque por meio do contato recorrente com alguns signos esses podem ser tornar universais e serem solicitados quando outra situação apresenta comportamento semelhante. Em Q2, há uso de resultados referentes a Q1, logo ambas as questões estão relacionadas. Neste sentido, a atribuição de significado corresponde a uma familiaridade com a situação e o entendimento da dinâmica de concentração de medicamento conforme varia o tempo e a nova ingestão aplicada. Para Q3, que se utiliza de resultados de Q2 e tem mesma dinâmica de resolução de Q1, a atribuição de significado ocorre por meio de familiaridade.

Os objetos matemáticos — função exponencial, Equações Diferenciais Ordinárias, limite de uma função, soma de Progressão Geométrica — que são utilizados nas diferentes questões desenvolvidas na atividade 'Diazepan no organismo' de alguma forma já é de conhecimento dos alunos deste nível de escolaridade. No entanto, evidenciamos que a atribuição de significado para cada um desses objetos na atividade ocorreu por meio de familiaridade, no caso da função exponencial em todas as questões; como uma ideia no que tange o desenvolvimento de Q1 quando se propõe a obtenção de modelo matemático por meio de Equações Diferenciais Ordinárias; como consequência futura para saber a tendência da concentração do medicamento no organismo com o decorrer do tempo em Q1 ao calcular o limite da função; como intenção de generalizar o modelo matemático ao usar soma de Progressão Geométrica em Q2; como experiência colateral na determinação do limite da função em Q2, uma vez utilizado o limite em Q1, este se fez presente para verificar a concentração saturada de medicamento no organismo com a ingestão de uma cápsula a cada 24 horas; e como familiaridade com Equações Diferenciais Ordinárias em Q3 visto que o desenvolvimento da atividade é similar ao da Q1.

Na Figura 5.17 apresentamos as evidências de atribuição de significado para os objetos matemáticos envolvidos na atividade de modelagem em questão, além das ações cognitivas que emergem entre as transições de diferentes fases de desenvolvimento de uma atividade de modelagem. As evidências de atribuição de significado descritas anteriormente para o problema não foram destacadas na Figura 5.17 para evitar o excesso de informação. Na Figura 5.17 utilizamos cores diferentes para as setas para representar o 'percurso' referente a cada questão e indicar a atribuição de significado para os objetos matemáticos que emergiram para o desenvolvimento da questão. Desse modo, as setas pretas dizem respeito à Q1; as setas vermelhas estão relacionadas à Q2; as setas verdes se referem à Q3.

Figura 5.17– Evidências de atribuição de significado para objetos matemáticos e ações cognitivas de A6 na atividade do 1.º momento de familiarização 'Diazepan no organismo'



Fonte: Figura construída pela pesquisadora baseada em Almeida, Silva & Vertuan (2012).

O que podemos evidenciar é que A6 foi estabelecendo relações entre os objetos matemáticos e cada uma das questões em estudo. Para tanto, quando tratamos da tríade de ações Perceber/Agir/Significar envolvida nesta atividade e que propomos no Capítulo 3, a ação de *Perceber* o que se estava estudando foi sendo constituída no decorrer do desenvolvimento de cada questão com a interferência constante da pesquisadora e/ou professora, a ação de *Agir* foi se configurando em consonância com a percepção do que poderia ser estudado, conforme resposta à questão 5 da parte II do questionário apresentada na Figura 5.9 e que foi estimulada por intervenções externas e a ação de *Significar* foi evidenciada a partir da ação de Agir em que A6 estabeleceu relações entre problema e objeto matemático, que possibilitou a atribuição de significado para o objeto levando em consideração a tríade símbolo/significado para o objeto/interpretante. Neste sentido, para esta atividade, a articulação entre as tríades Perceber/Agir/Significar e símbolo/significado para o objeto/interpretante foi efetivada na ação significar, pois o 1.º momento de familiarização contou com diversas interferências externas, com baixa autonomia de A6.

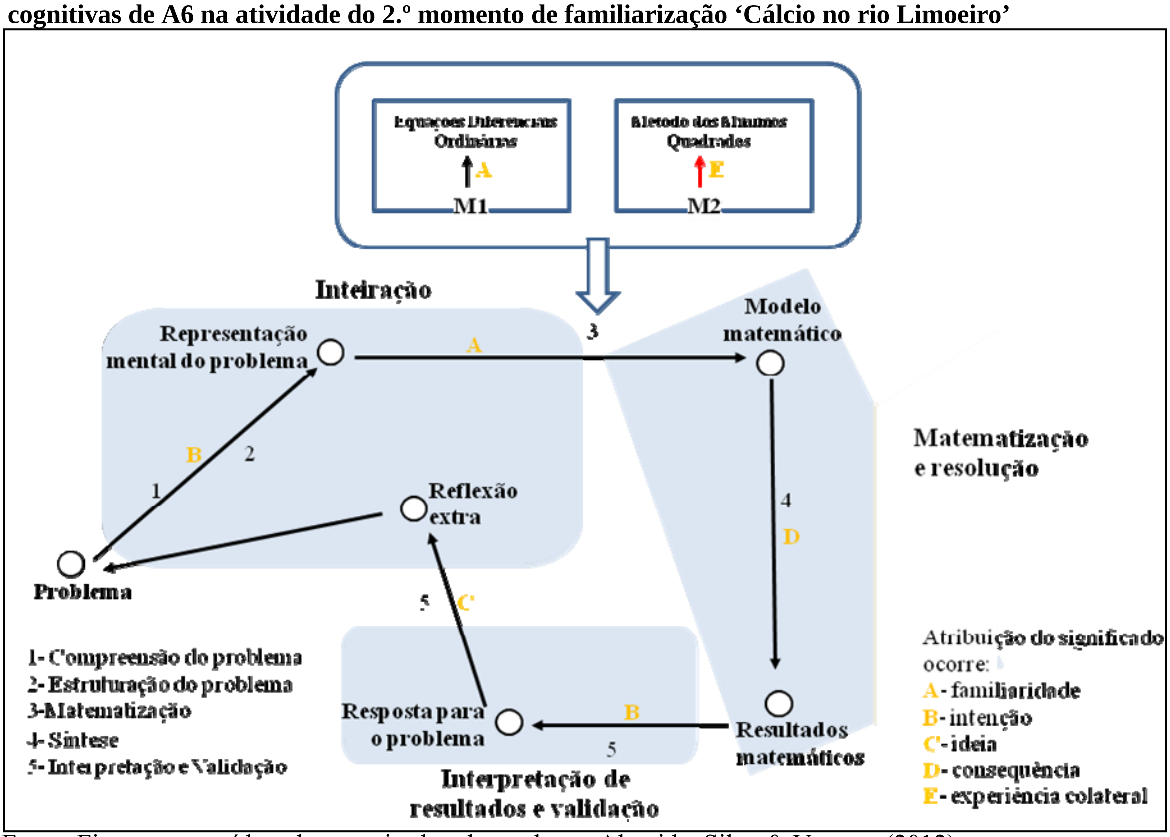
No 2.º momento, A6 desenvolveu a atividade 'Cálcio no rio Limoeiro'. Os signos interpretantes produzidos por A6 que se referem ao problema e ao objeto matemático em estudo estão relacionados à atribuição de significado para esses objetos. Há evidências de atribuição de significado por meio de *familiaridade* com o objeto, na *intenção* de significar o objeto, como uma *ideia* que se remete ao objeto, por meio de *experiência colateral* com o objeto.

Diante de um problema que teria que resolver para lhe ser atribuída uma nota, como uma avaliação, sem intervenção de professora e/ou pesquisadora, A6 atribui significado ao problema inicialmente por meio de uma intenção de significar, de tal modo em que houve uma compreensão do problema, mesmo que isto lhe tenha 'custado' um período de reflexão como descrito e analisado em seções anteriores. Na matematização, A6 atribuiu significado ao problema por meio de familiarização com o que foi desenvolvido na atividade 'Diazepan no organismo'. Como os resultados matemáticos correspondem a consequências futuras para a obtenção de uma resposta ao problema e a resposta é uma intenção de A6 para significar o problema, há atribuição de significado para essas ações segundo consequências e intencionalidade. A reflexão sobre a quantidade de fitoplâncton em certa profundidade corresponde a uma ideia atribuída ao significado do problema, no entanto, tal reflexão necessita de inteiração com a situação-problema a fim de que percepções sejam evidenciadas.

Os signos interpretantes produzidos por A6 para o objeto matemático envolvido em cada modelo — modelo 1 (M1) Equações Diferenciais Ordinárias e modelo 2 (M2) Método dos Mínimos Quadrados —, referentes à concentração de cálcio no rio de acordo com a profundidade, são de conhecimento dos alunos, pois estão utilizando como forma de avaliação. A atribuição de significado para os objetos neste caso ocorreu por meio de familiaridade e experiência colateral. Familiaridade com Equações Diferenciais Ordinárias que foi um dos objetos matemáticos que emergiram com a atividade do diazepan e experiência colateral com Método dos Mínimos Quadrados utilizados como ferramenta na linearização de pontos sobre uma curva.

Na Figura 5.18 apresentamos as evidências de atribuição de significado para o problema e os objetos matemáticos envolvidos na atividade ‘Cálcio no rio Limoeiro’, além das ações cognitivas de A6 que emergiram entre as transições de diferentes fases da atividade de modelagem. Na Figura 5.18 a seta preta foi utilizada para nos referirmos à atribuição de significado para o objeto matemático que emergiu no desenvolvimento do M1; a seta vermelha relaciona-se à atribuição de significado para o objeto matemático que emergiu no desenvolvimento do M2.

Figura 5.18– Evidências de atribuição de significado para problema e objetos matemáticos e ações cognitivas de A6 na atividade do 2.º momento de familiarização ‘Cálcio no rio Limoeiro’



Fonte: Figura construída pela pesquisadora baseada em Almeida, Silva & Vertuan (2012).

Nesta atividade, com relação à tríade de ações Perceber/Agir/Significar, o que podemos inferir é que a ação de *Perceber* foi efetivada por A6 ao *Significar* o problema em estudo, para em seguida *Agir* utilizando objetos matemáticos correspondentes a um possível modelo matemático que poderia atribuir uma resposta ao problema. Ao *Perceber* o objeto matemático que poderia ser utilizado, um significado foi atribuído por meio da ação

Significar para em seguida *Agir* com a obtenção de resposta ao problema. Neste sentido, nesta atividade, a articulação entre as tríades Perceber/Agir/Significar e símbolo/significado para o objeto/interpretante foi efetivada nas ações significar e agir.

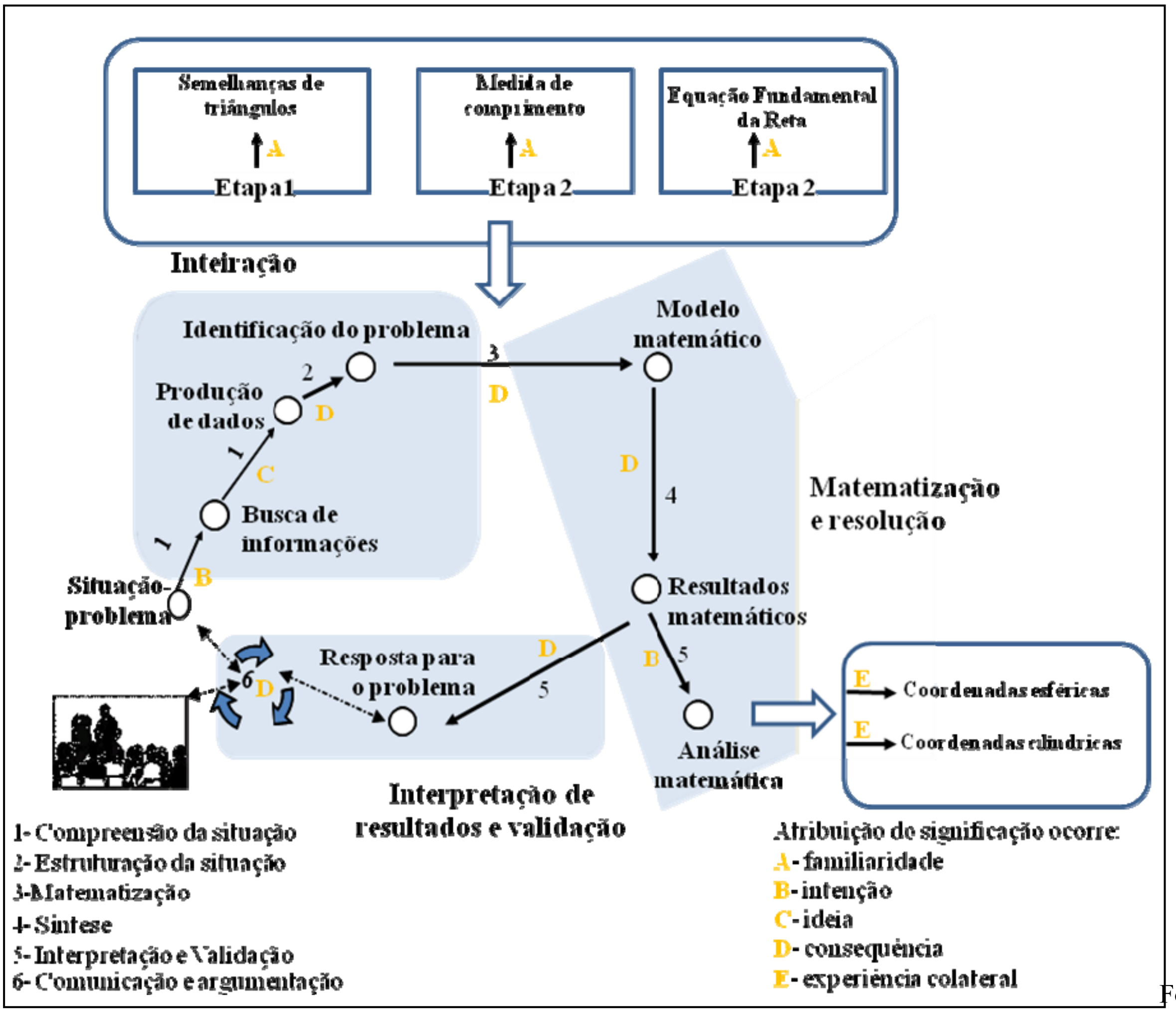
O 3.º momento é dedicado à criatividade e intencionalidade de abordagem de uma atividade de modelagem por parte dos alunos. Neste contexto, o grupo de alunos do qual A6 é membro optou por desenvolver a atividade 'Poda de árvore' para minimizar problemas com iluminação pública. Os signos interpretantes produzidos por A6 em conjunto com seu grupo estão relacionados à atribuição de significado para o problema e os objetos matemáticos envolvidos na situação. Há evidências de atribuição de significado por meio de *familiaridade* com o objeto, na *intenção* de significar o objeto, como uma *ideia* que se remete ao objeto, como *consequência* futura para abarcar o objeto e por meio de *experiência colateral* com o objeto.

Levando em consideração a situação-problema, houve a necessidade de uma compreensão de algo em que se teve intenção de estudar. Estabelecida a situação-problema, A6 e outros alunos estruturaram-na com busca de informações e produção de dados, evidenciando uma ideia do que poderia ser estudado e as consequências futuras que os dados coletados poderiam acarretar para a identificação do problema. Neste sentido, a atribuição de significado para o problema foi permeada por ideia daqueles que iriam abordá-lo e consequências futuras que os dados poderiam gerar na dedução de um modelo matemático. Com o modelo matemático deduzido, a atribuição de significado para o problema foi estabelecida considerando consequências futuras que resultados matemáticos, respostas e comunicações geraram nas ações que A6 e os outros alunos vivenciaram. No entanto, quando optaram por fazer uma análise tridimensional dos resultados matemáticos para a situação, revela-se a intenção dos alunos de apresentarem uma abordagem 'mais próxima' da realidade.

Durante o desenvolvimento do problema referente à poda de árvores para auxiliar na iluminação de ruas da cidade de Londrina, os signos interpretantes produzidos por A6 e seu grupo envolveram objetos matemáticos com os quais tinham familiaridade ou experiência colateral. Os objetos destacados na atividade correspondem a semelhanças de triângulos, medida de comprimento, equação da reta, coordenadas esféricas e coordenadas cilíndricas. Neste sentido a familiaridade e a experiência colateral com os signos a que se remetem esses objetos matemáticos possibilitaram a atribuição de significado.

Na Figura 5.19 apresentamos evidências de atribuição de significado para o problema e os objetos matemáticos envolvidos na atividade ‘Poda de árvore’, além das ações cognitivas de A6 que emergiram entre as transições de diferentes fases da atividade de modelagem.

Figura 5.19– Evidências de atribuição de significado para problema e objetos matemáticos e ações cognitivas de A6 na atividade do 3.º momento de familiarização ‘Poda de árvore’

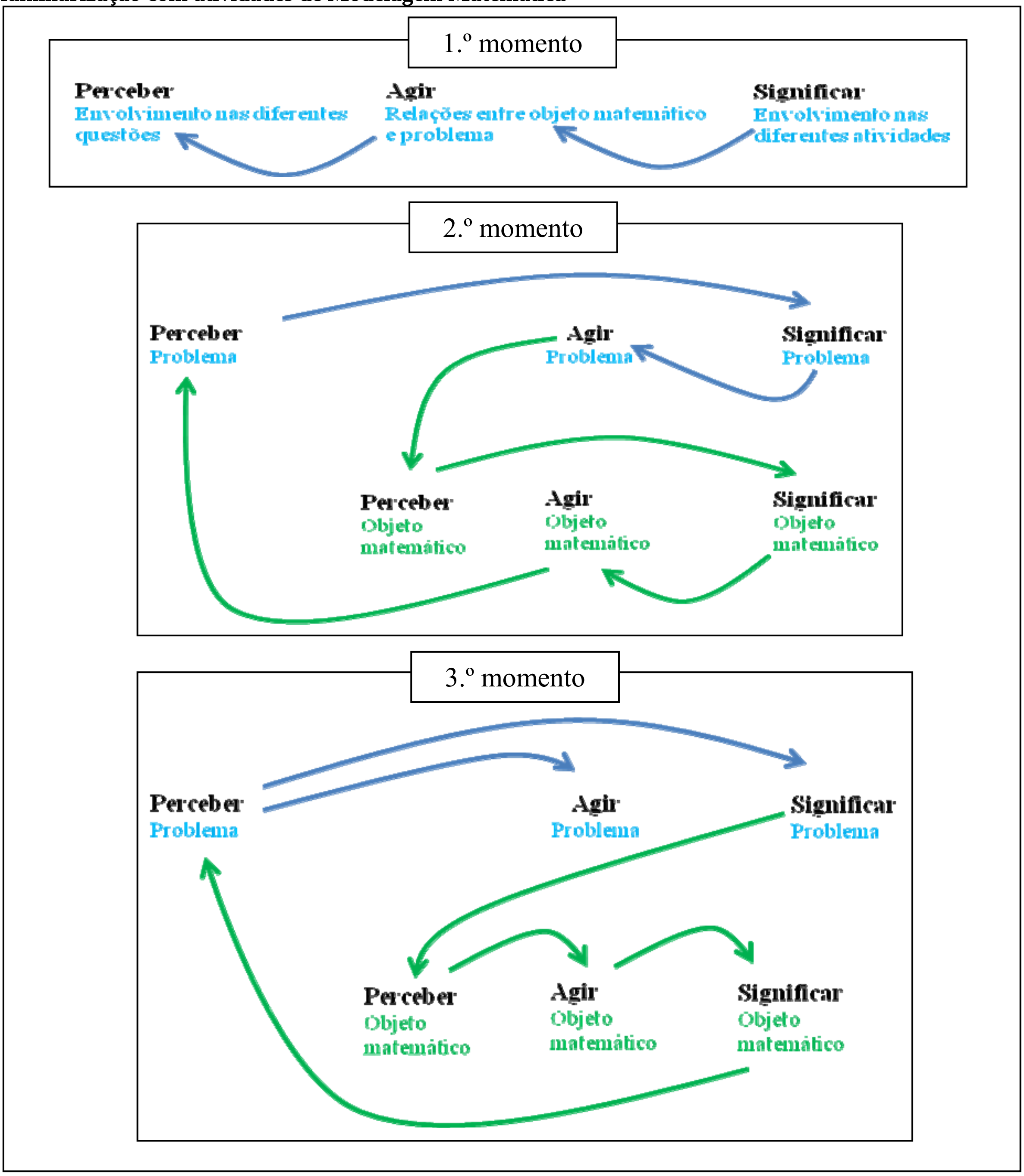


Fonte: Figura construída pela pesquisadora baseada em Almeida, Silva & Vertuan (2012).

Ao que corresponde ao desenvolvimento da atividade ‘Poda de árvore’, considerando a tríade de ações, podemos evidenciar que A6 em consonância com seu grupo, passou pela ação *Perceber* quando identificou o problema a ser estudado e *Agir* e *Significar* tal problema por meio da produção de dados que permearam todo o desenvolvimento da atividade. Ao *Significar* o problema com os dados em mãos, a ação *Perceber* objetos matemáticos, levou-o a *Agir* para *Significar* tais objetos matemáticos com relação ao problema que percebeu que poderia estudar. Nesta atividade, a articulação entre as tríades Perceber/Agir/Significar e símbolo/significado para o objeto/interpretante foi efetivada nas ações perceber, agir e significar.

A Figura 5.20 apresenta um mapeamento da tríade de ações Perceber/Agir/Significar em cada uma das atividades desenvolvidas por A6 segundo o momento de familiarização com atividades de Modelagem Matemática. As setas azuis referem-se ao problema e as setas verdes relacionam-se ao(s) objeto(s) matemático(s).

Figura 5.20– Tríade de ações Perceber/Agir/Significar de A6 nos diferentes momentos de familiarização com atividades de Modelagem Matemática



Fonte: Figura construída pela pesquisadora.

As informações resumidas nas figuras que apresentam os ciclos de modelagem sinalizam que os signos interpretantes que se referem ao significado do problema e dos objetos matemáticos são produzidos por A6 em diferentes fases e momentos de familiarização com atividades de Modelagem Matemática. É evidente que essa atribuição de significado ocorre em fases diferentes conforme o momento no qual é desenvolvida a atividade.

5.4 ANÁLISES ESPECÍFICAS PARA A8

Na análise dos signos produzidos por A8, levamos em consideração seu envolvimento com cada atividade. Apresentamos os signos produzidos durante o desenvolvimento e/ou apresentação das atividades em que A8 se fez presente, abordando aspectos relacionados ao problema e ao objeto matemático envolvidos para a realização da codificação inicial.

Evidências de signos interpretantes produzidos por A8 são revelados em respostas a questionários e/ou entrevistas realizadas após o desenvolvimento da atividade. Neste sentido, estabelecemos a codificação axial no que corresponde aos signos interpretantes evidenciados.

Nesta seção, fazemos a análise específica de três atividades de modelagem 'vividas' por A8: *Diazepan no organismo* (descrita como Atividade 1, no Capítulo 4), *O consumo de cigarro* (descrita como Atividade 2, no Capítulo 4) e *Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil* (descrita como Atividade 4, no Capítulo 4).

No Capítulo 4 apresentamos de forma detalhada como foi o desenvolvimento de cada uma das atividades nas quais A8 estava envolvido. Para fazer a codificação inicial, levamos em consideração todos os signos produzidos por A8 atrelados a evidências de que esses signos estejam de alguma forma relacionados aos objetos (problema, objeto matemático) em estudo.

Na atividade *Diazepan no organismo*, A8 fez algumas considerações sobre o problema e o objeto matemático por meio de considerações escritas apresentadas no relatório entregue, considerações faladas durante o desenvolvimento da atividade e registros de respostas ao questionário (Apêndice B). Como a atividade 1 foi desenvolvida como caracterizada no 1.º momento de familiarização, os signos produzidos por A8 são semelhantes aos produzidos por A6, no entanto, evidenciamos os interpretantes produzidos por meio de falas e nas respostas do questionário (Apêndice B).

Os signos produzidos por A8 que de alguma forma se referem à questão 1 — *Qual é a concentração de Diazepan no organismo, no decorrer do tempo, se uma pessoa ingerir um comprimido de 10 mg?* — foram produzidos na definição de hipóteses e de variáveis (na fase de inteiração) e na variação da concentração de diazepan com o decorrer do tempo (início da dedução do modelo matemático, na fase de matematização). Os símbolos produzidos por A8 e que de alguma forma representam o problema em estudo são apresentados na Figura 5.21.

Figura 5.21– Símbolos produzidos por A8 que se referem ao problema na questão 1 da atividade ‘Diazepan no organismo’

Definição de hipóteses e variáveis	Variação da concentração de diazepan
Hipótese: H_1: a meia vida é de 3 horas Variáveis: V. ind: tempo (em horas) V.d. → c: concentração em mg a → n_i	m_0 = 10 mg m_1 = 5 mg m_2 = 2,5 mg m_3 = 1,25 mg m_4 = 0,625 mg

Fonte: Relatório entregue por A8.

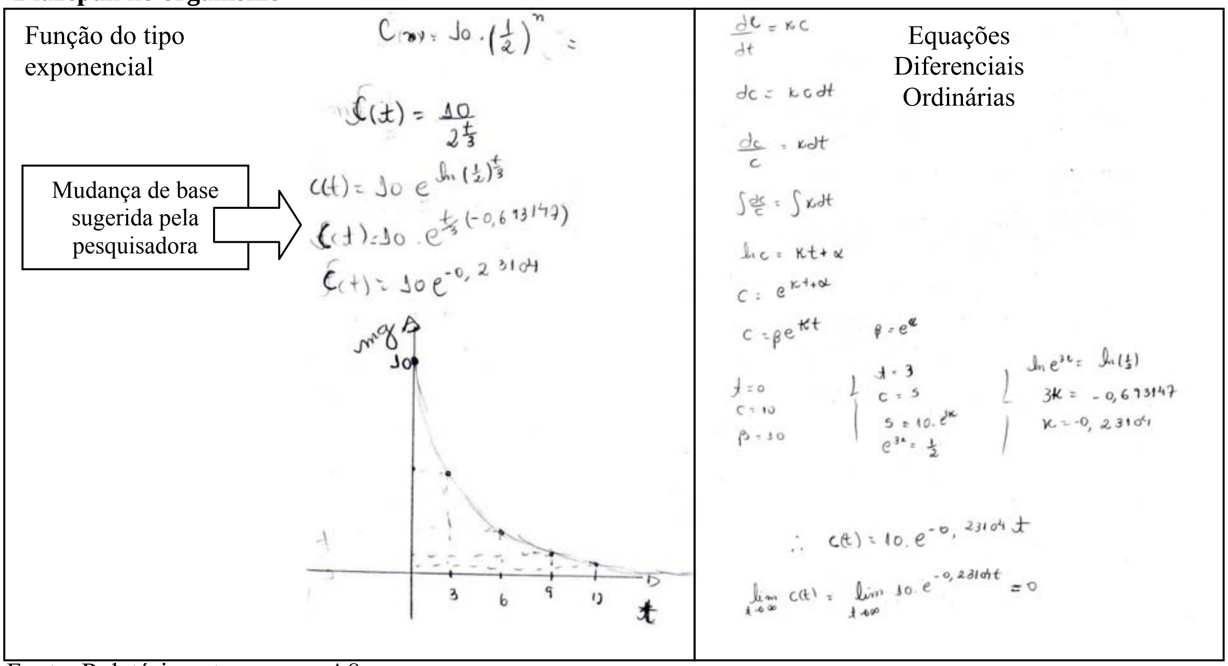
Para responder a questão 1, A8 faz referência ao problema somente no início do desenvolvimento da atividade. No entanto, ao entregar a resolução para a pesquisadora ficou inquieto e esboçou uma emoção: *Ai, você vai olhar o que eu escrevi? É que eu sou assim meio desorganizado então não sei se você vai entender o que eu escrevi!* [em áudio gravado durante o desenvolvimento da atividade]. O que podemos inferir é que A8, mesmo não explicitando por meio de signos escritos a relação que estabeleceu com o problema, essa relação ocorreu, pois ele se considera um aluno desorganizado, o que pode nos levar a inferir que A8 não apresenta seus interpretantes escritos detalhadamente. O interpretante, segundo Santaella (2005, p. 43) é de natureza sígnica, mesmo que “seja um signo rudimentar, um sentimento, por exemplo, ou uma percepção ou uma ação física ou mental”.

Com as explicitações anteriores, não há evidências sobre os interpretantes produzidos por A8 com relação ao objeto (problema).

Todavia, os objetos matemáticos que foram necessários para A8 resolver a questão 1 da atividade ‘Diazepan no organismo’ encontram-se ‘bem organizados’ no relatório entregue (Figura 5.22). Os objetos matemáticos relacionados são função do tipo exponencial e Equações Diferenciais Ordinárias. Para a abordagem da função do tipo exponencial, A8 produz diferentes signos — algébrico e gráfico — além da mudança de base sugerida pela pesquisadora. Isso se relaciona a uma característica da semiose, que segundo Almeida (2010, p. 390), corresponde a “um processo de atividade característico da capacidade humana de produção e entendimento de signos das mais diversas naturezas”.

Os signos produzidos por A8 representam os objetos matemáticos. Nesse sentido, são considerados símbolos que necessitam de interpretantes para manter a característica que o torna um signo. Logo os signos produzidos por A8 para deduzir o modelo matemático para a concentração de um comprimido de diazepan no organismo com o tempo correspondem a interpretantes constituídos em um “processo evolutivo” (SANTAELLA, 2005, p. 47) de signos que se criam na mente do intérprete (A8).

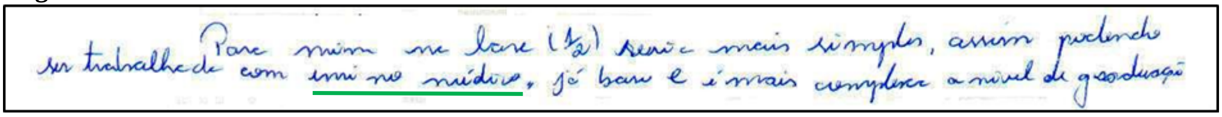
Figura 5.22– Símbolos produzidos por A8 relacionados aos objetos matemáticos da questão 1 da atividade ‘Diazepan no organismo’



Fonte: Relatório entregue por A8.

Embora utilize Equações Diferenciais Ordinárias e função exponencial de base e, A8 considera que a função exponencial de base (1/2) é a mais adequada para ser desenvolvida no Ensino Médio, conforme resposta à questão 3 da Parte II do questionário (Apêndice B) e apresentada na Figura 5.23. Isso se vale porque A8 relaciona o objeto matemático à dimensão social em que se encontra — professor de Matemática da Educação Básica. Neste sentido, o significado para o objeto ganha uma dimensão social, em que corresponde a uma "consequência que gera nos homens" (PEIRCE, 1972, p. 18).

Figura 5.23– Resposta de A8 à questão 3 da Parte II do questionário da atividade 'Diazepan no organismo'


Para mim na base (1/2) seria mais simples, assim podendo ser trabalhado com ensino médio, já base e é mais complexo a nível de graduação

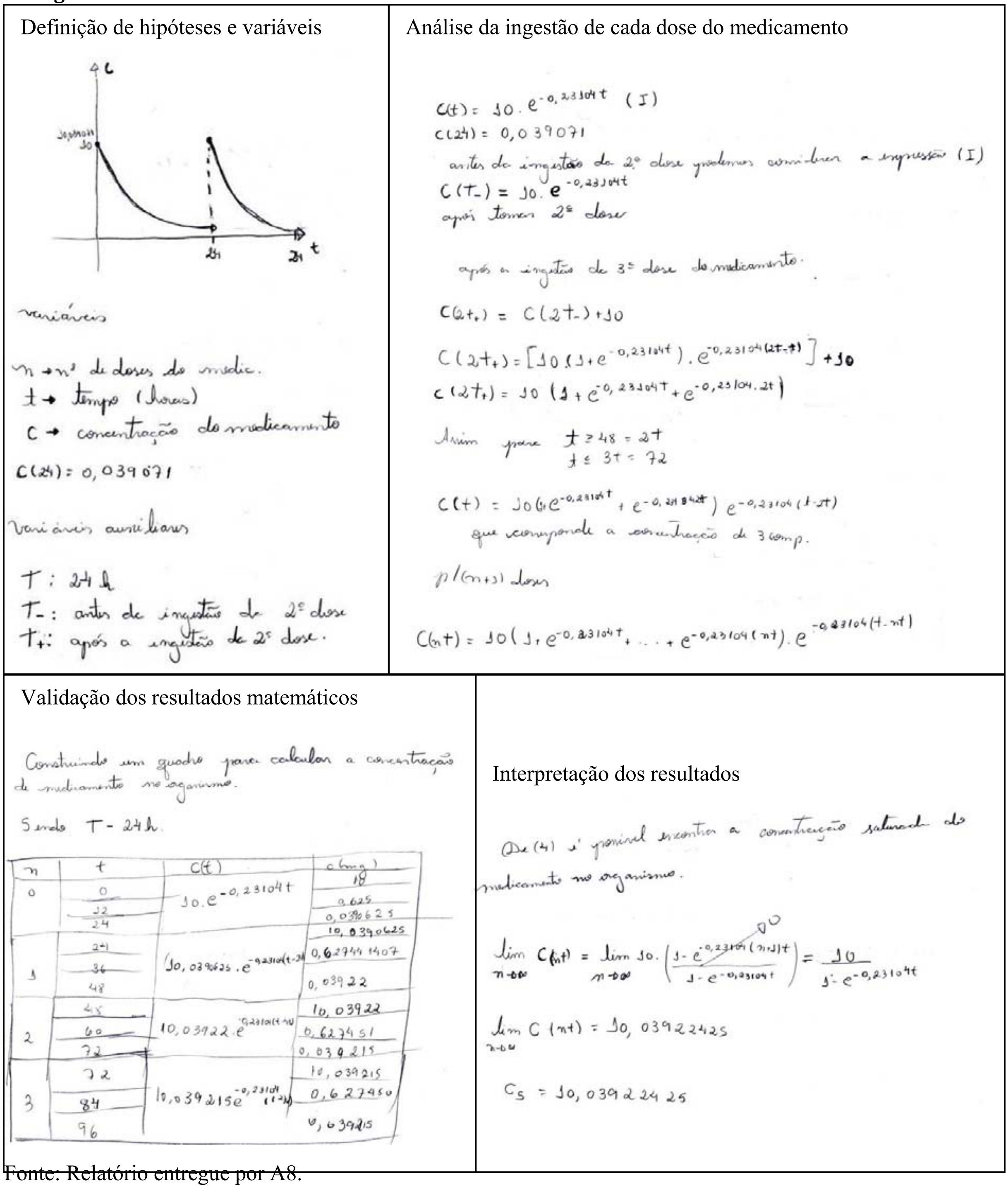
Fonte: Questionário entregue por A8. Grifo realizado pela pesquisadora.

Para a resolução da questão 2 — *Qual é a concentração de Diazepan no organismo, no decorrer do tempo, se o paciente ingerir um comprimido de 10 mg a cada 24 horas?* —, os signos produzidos por A8 que de alguma forma se relacionam à questão 2 estão relacionados em três momentos do desenvolvimento da atividade: na definição de hipóteses e de variáveis (na fase de inteiração); na análise da ingestão de cada dose do medicamento e sua generalização (nas fases de matematização e resolução); na validação dos resultados (na fase de validação); na determinação da concentração saturada do medicamento no organismo (na fase de interpretação de resultados).

Ao analisar os signos produzidos por A8 para o problema, inferimos que esses correspondem a regras matemáticas para serem abordados. Signos que se referem ao objeto por meio de regras ou leis correspondem a símbolos (PEIRCE, 2005). Levando em consideração as assertivas de Peirce de que todo símbolo necessita de interpretantes para poder ser considerado signo, logo temos que os signos produzidos por A8 para o problema são interpretantes.

Na Figura 5.24 apresentamos os símbolos produzidos por A8 e que estão relacionados com o problema nas diferentes fases de desenvolvimento da atividade de modelagem.

Figura 5.24– Símbolos produzidos por A8 relacionados ao problema na questão 2 da atividade 'Diazepan no organismo'



Fonte: Relatório entregue por A8.

No sentido de buscar evidências de atribuição de significado para o problema (objeto), uma retomada ao campo, por meio do questionário (Apêndice B), nos possibilitou inferir que para A8 esse significado ocorreu no desenvolvimento da atividade, conforme resposta à questão 2 da parte II do questionário — *Na atividade do Diazepan, o que foi importante para você entender esse problema antes de começar a resolução? Explique.* —, apresentada na Figura

5.25.

Figura 5.25– Resposta de A8 à questão 2 da Parte II do questionário da atividade ‘Diazepan no organismo’

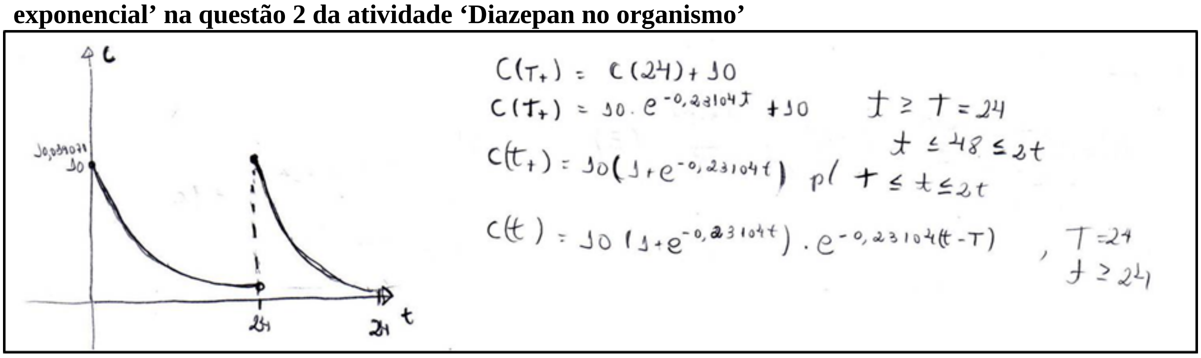

fomos entendendo no desenvolver do problema

Fonte: Questionário entregue por A8.

Analisando a resposta ao questionário (Figura 5.25) podemos inferir que os interpretantes produzidos por A8 para o problema estão articulados entre si e com os objetos matemáticos envolvidos durante a atividade de modelagem. Por meio dessa articulação entre problema e objeto matemático, um signo produzido pode se referir a mais de um objeto em estudo. Por exemplo, ao tratar da saturação do medicamento (apresentada na Figura 5.24), A8 produz o mesmo signo para se referir ao objeto matemático ‘limite de uma função’ e para analisar a ‘concentração de medicamento no organismo’. Isso está em consonância com a afirmação de Peirce (2005, p. 47) de que “um signo pode ter mais de um Objeto”, o que se deve levar em consideração são as características que o signo descreve do objeto a que ele representa.

Além de considerar que um signo pode ter mais de um objeto, existem diferentes signos que se referem ao mesmo objeto. Na articulação do signo gráfico com o algébrico na abordagem da função do tipo exponencial (Figura 5.26), fica evidente que A8 necessita de mais do que um signo para se referir ao objeto.

Figura 5.26– Símbolos produzidos por A8 que se referem ao objeto matemático ‘função do tipo exponencial’ na questão 2 da atividade ‘Diazepan no organismo’



Fonte: Relatório entregue por A8.

Em resposta à questão 1 da parte II do questionário (Apêndice B) — *Na Modelagem do Diazepam quais formas de representação (algébrica, gráfica e tabela) você considera essenciais? Por quê?* —, A8 afirma que a representação gráfica é a que melhor representa a situação, pois possibilita evidenciar as regularidades do objeto em estudo, como apresentado na Figura 5.27. No entanto, reconhece que é preciso utilizar a generalização em forma de representação algébrica. Ao nos referirmos à generalização estamos levando em consideração a ação de generalizar, em que partimos de um particular para um geral, conforme caracterizado por Otte (2006b).

Figura 5.27– Resposta de A8 à questão 1 da Parte II do questionário da atividade 'Diazepan no organismo'

gráfico, pois por meio dele podemos perceber várias regulari de-des

Fonte: Questionário entregue por A8.

Além dos objetos matemáticos 'limite de uma função' e 'função do tipo exponencial', a abordagem de 'soma de progressão geométrica' também foi necessária para a obtenção do modelo matemático que representasse a situação em estudo (Figura 5.28).

Figura 5.28– Símbolos produzidos por A8 que se referem ao objeto matemático 'soma de progressão geométrica' na questão 2 da atividade 'Diazepan no organismo'

$$C(nt) = 10\left(1 + \underbrace{e^{-0,23104t} + \dots + e^{-0,23104(nt)}}_{\text{Soma PG}}\right) . e^{-0,23104(t-nt)} \qquad nt \leq t < (n+1)T$$

onde

$n = 0, 1, 2, \dots$

$a_1 = 1$

$q = e^{-0,23104t}$

$$S_n = \frac{1(1 - e^{-0,23104t})^{n+1}}{1 - e^{-0,23104t}} = \frac{1 - e^{-0,23104(n+1)t}}{1 - e^{-0,23104t}} \qquad (3)$$

Subs (2) em (3)

$$C(t) = 10 . \left(\frac{1 - e^{-0,23104(n+1)T}}{1 - e^{-0,23104}}\right) . e^{-0,23104(t-nt)} \qquad (4)$$

Fonte: Relatório entregue por A8.

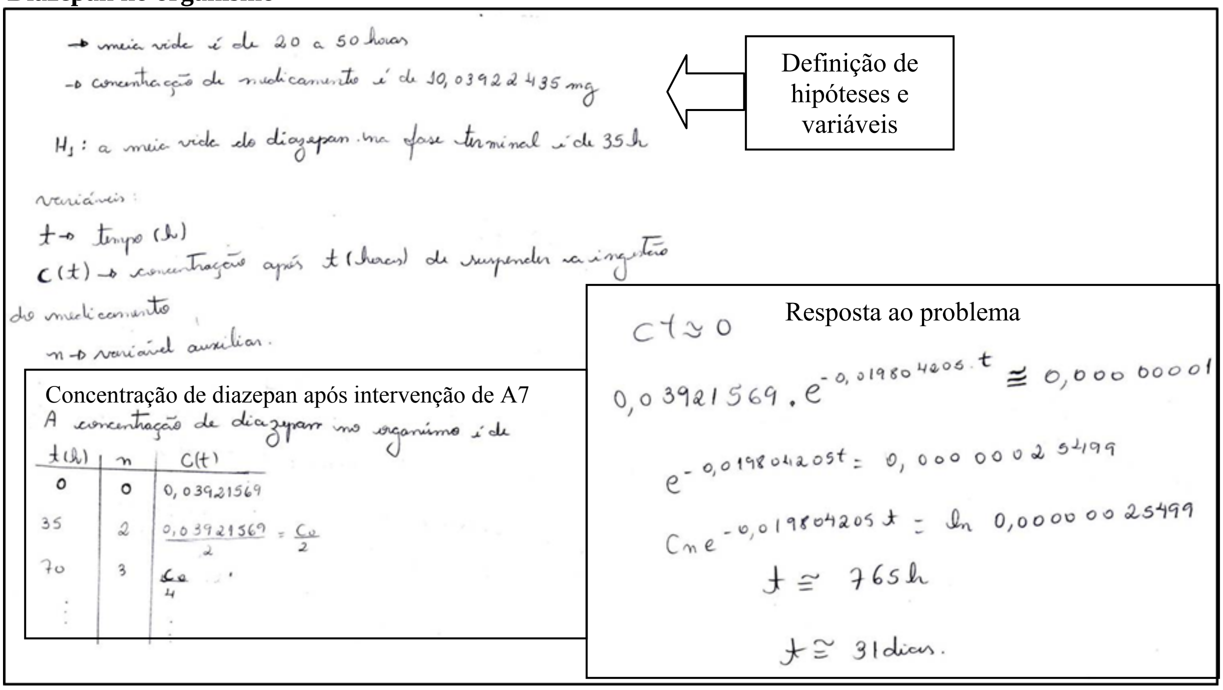
Ao utilizar soma de progressão geométrica para auxiliar na dedução do modelo matemático representado pelo número (4) na Figura 5.28, A4 explicita uma reação emocional no sentido de que a abordagem desenvolvida estava prosseguindo para algo muito complexo do ponto de vista matemático. No entanto, A8 justifica que não há complexidade e sim uma retomada em conteúdos que já foram estudados, conforme diálogo registrado em áudio.

> A4: *Muito difícil essas coisas.*
> A8: *Eu achei mais trabalhoso do que difícil. Na verdade são coisas que a gente já estudou e a gente precisa relembrar. Mas é bem cansativo o desenvolvimento.*

A retomada do estudo de objetos matemáticos que fazem parte da experiência do intérprete possibilita um aprimoramento na atribuição de significado para esse objeto. Segundo Peirce (2005, p. 73), o significado do objeto cresce com o uso e a prática dos símbolos a ele associados.

Na abordagem sobre a 'eliminação' do medicamento do organismo da questão 3 — *Após 4 dias de tratamento, a concentração do medicamento no organismo se estabiliza. Analisar o decaimento da concentração quando o paciente suspende a ingestão do medicamento.* —, os signos produzidos por A8 que se referem ao problema em estudo correspondem à definição de hipóteses e variáveis (na fase de inteiração); ao cálculo da concentração de diazepan de acordo com o tempo com a intervenção de A7 (nas fases de matematização e resolução); à resposta ao problema (nas fases de interpretação de resultados e validação). Os signos utilizados por A8 que representam o problema constam da Figura 5.29.

Figura 5.29– Símbolos produzidos por A8 que representam o problema na questão 3 da atividade 'Diazepan no organismo'

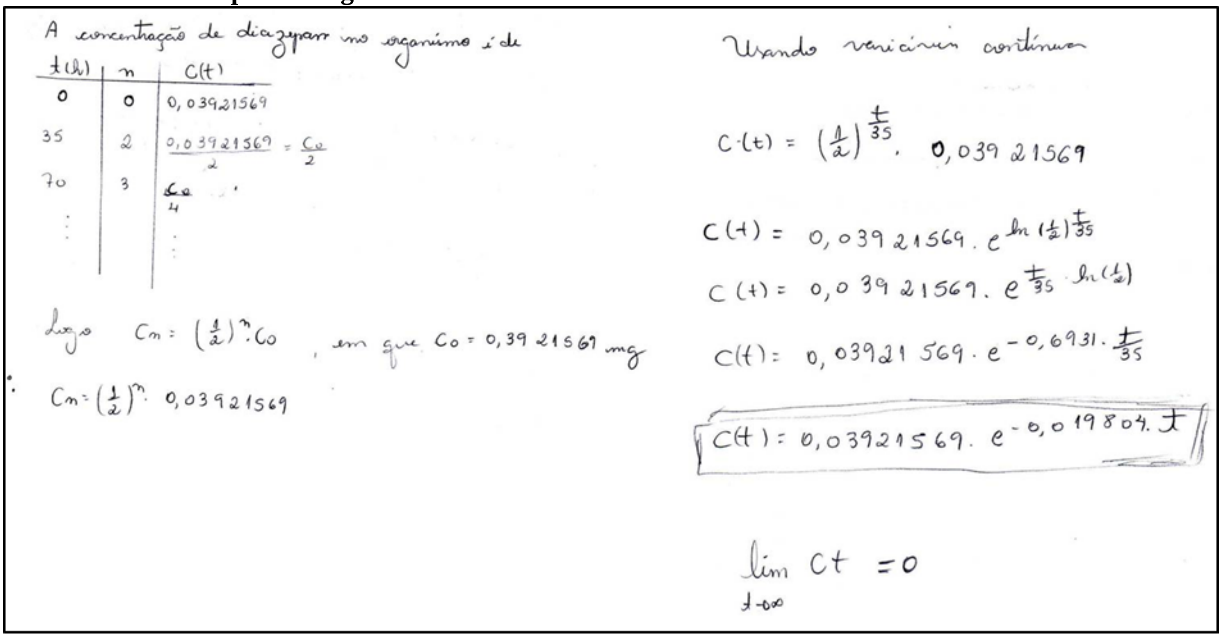


Fonte: Relatório entregue por A8.

Utilizando os resultados obtidos na questão 2, definiu-se as hipóteses e variáveis. No entanto, ocorreram mudanças nos símbolos com a intervenção de A7 com relação à meia-vida de longo prazo que estava sendo considerada. Com a mudança na tomada de decisão com relação à meia-vida e à concentração inicial de diazepan no organismo, fica refletida a afirmação de Peirce (2005, p. 52) de que o signo "denota em virtude de ser realmente afetado por esse Objeto”, ou seja, os signos — variáveis e cálculo da concentração de diazepan no organismo — foram afetados pelo objeto — problema — ao qual se referem. Neste sentido, há uma aproximação no que consiste a interpretações sobre o problema e os resultados matemáticos.

Na abordagem da questão 3, o objeto matemático recorrente foi função exponencial, em que a partir dos dados referentes a concentração de diazepan no organismo foi feita a generalização da função exponencial na base (1/2), mudança de tal função para a base e e a indicação de uso do limite para a função que não foi finalizado por A8 (Figura 5.30).

Figura 5.30– Símbolos produzidos por A8 que se referem ao objeto matemático envolvido na questão 3 da atividade ‘Diazepan no organismo’



Fonte: Relatório entregue por A8.

No desenvolvimento da questão 3, notamos que A8 utilizou-se de mudança de base. Embora no início do desenvolvimento da atividade Diazepan no organismo, na questão 1, A8 tenha afirmado em resposta à questão 3 da Parte II do questionário (Apêndice B) que a mudança de base consiste em algo complexo para ser utilizado no Ensino Médio, realizou a mudança de modo natural, sem contestar. A mudança de base da função exponencial tornou-se algo com que A8 tem familiaridade e, neste sentido, esse símbolo possibilitou uma atribuição de significado para o objeto matemático. Nas assertivas de Peirce (1989, p. 61), “para ler o Signo, e distinguir um Signo de outro, o que se faz necessário são percepções sutis e familiaridade com os concomitantes habituais de tais aparências, e com as convenções do sistema de signos”.

No desenvolvimento do modelo matemático para a questão 3, A8 faz referência à abordagem de limite de uma função, como apresentado na Figura 5.30, mas não o utilizou para desenvolver a situação, pois ao igualar a função a um valor muito próximo de zero — com tantas casas quanto a calculadora pudesse representar — (Figura 5.29), obteve resposta para o problema, que consiste em determinar o tempo que o medicamento leva para ser eliminado do organismo. Esse fato corrobora com a afirmação de Almeida, Silva & Vertuan (2012, p. 18) de que a busca por uma "resposta para o problema obtida, inicialmente em termos de resultados matemáticos por meio dos modelos matemáticos, constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade".

A familiaridade com o problema e a articulação deste com os objetos matemáticos foram se estabelecendo com o desenvolvimento da atividade de modelagem. Com isso, diferentes significados foram atribuídos ao problema com o avanço do estudo. No que concerne à atribuição de significado para o que consiste Modelagem Matemática, A8 proferiu algumas considerações em resposta à questão 6 da Parte II do questionário (Apêndice B) sobre as fases da modelagem que tinha estudado na disciplina (Figura 5.31).

Figura 5.31– Resposta de A8 à questão 6 da Parte II do questionário da atividade 'Diazepan no organismo'

1º identificação com leitura do problema das hipóteses e variáveis, 2º desenvolvimento da atividade, 3º validação do modelo

Fonte: Questionário entregue por A8.

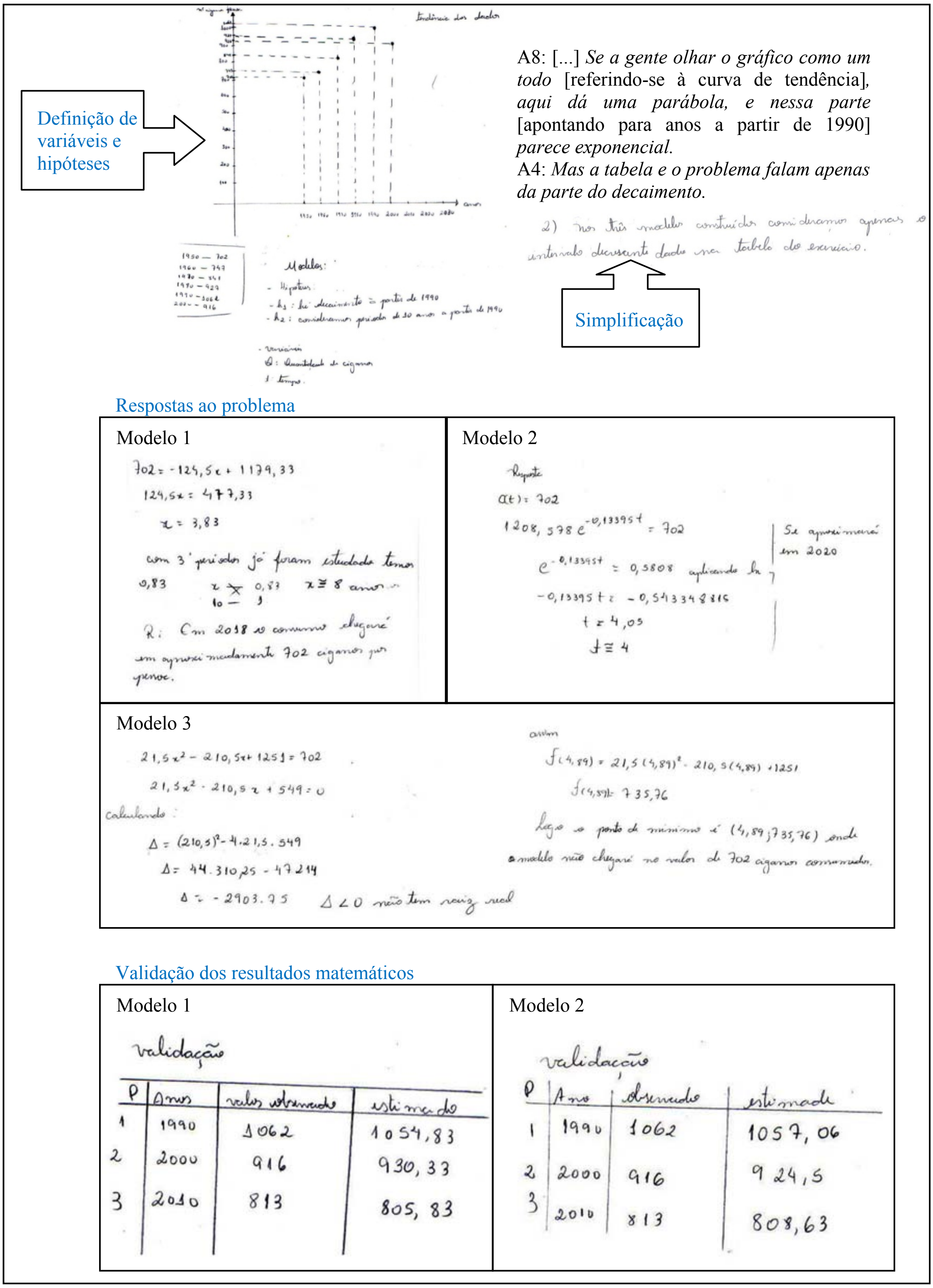
A atividade 1 'Diazepan no organismo' configurou-se como de primeiro momento de familiarização com atividades de Modelagem Matemática. O segundo momento consiste no desenvolvimento da atividade 2 'O consumo de cigarro' que foi tratado em uma avaliação. Os signos que A8 produziu em parceria com A2 e A4 ocorreram durante a avaliação e foram registrados por meio escrito no relatório e por falas e gestos registrados por áudio e vídeo. Na entrevista (Apêndice C), gravada em áudio A8 e A4 estiveram presentes e forneceram as informações necessárias para que evidências sobre a atribuição de significado para o problema e os objetos matemáticos envolvidos na situação fossem estabelecidas.

No desenvolvimento desta atividade, A8, A2 e A4 elaboraram três modelos matemáticos para a situação que intitularam como 'modelo 1', 'modelo 2' e 'modelo3'. Para iniciar o estudo da situação, os alunos conversaram sobre informações que foram abandonadas no desenvolvimento da atividade. As informações das quais os alunos permaneceram um tempo conversando correspondem a taxas de decaimento observadas durante diferentes anos. Após várias discussões, entenderam que nem todos os dados apresentados precisavam ser utilizados para o desenvolvimento da atividade, conforme relatado na entrevista posterior à resolução da situação-problema.

> P: *Vocês falaram que as porcentagens apresentadas no texto não tinham nada a ver... Por quê?*
> A8: *Porque quando a gente pega um texto acha que todas as informações têm que ser usadas...*
> A4: *Exatamente!*
> A8: *Depois a gente viu que realmente a gente não ia precisar de nada também* [risos]
> A4: *Engraçado isso!*
> P: *A interpretação dos dados?*
> A4: *Aham... que a gente acaba confundindo... porque acho que tinham muitos...*
> A8: *Trocou, a gente se perde também... fica um pouco confuso... tipo* [folheando a resolução e se referindo a exemplos de situações-problema que já tinham resolvido].

Os signos produzidos por A8 que de alguma forma representam o problema em cada um dos modelos, estão relacionados à definição de variáveis e hipóteses, em simplificações necessárias para a dedução do modelo matemático (na fase de inteiração com o problema), à resposta ao problema e na validação dos resultados (na fase de interpretação de resultados e validação). Na Figura 5.32 reunimos os símbolos que se referem diretamente ao problema.

Figura 5.32– Símbolos que se referem ao problema na atividade ‘O consumo de cigarro’



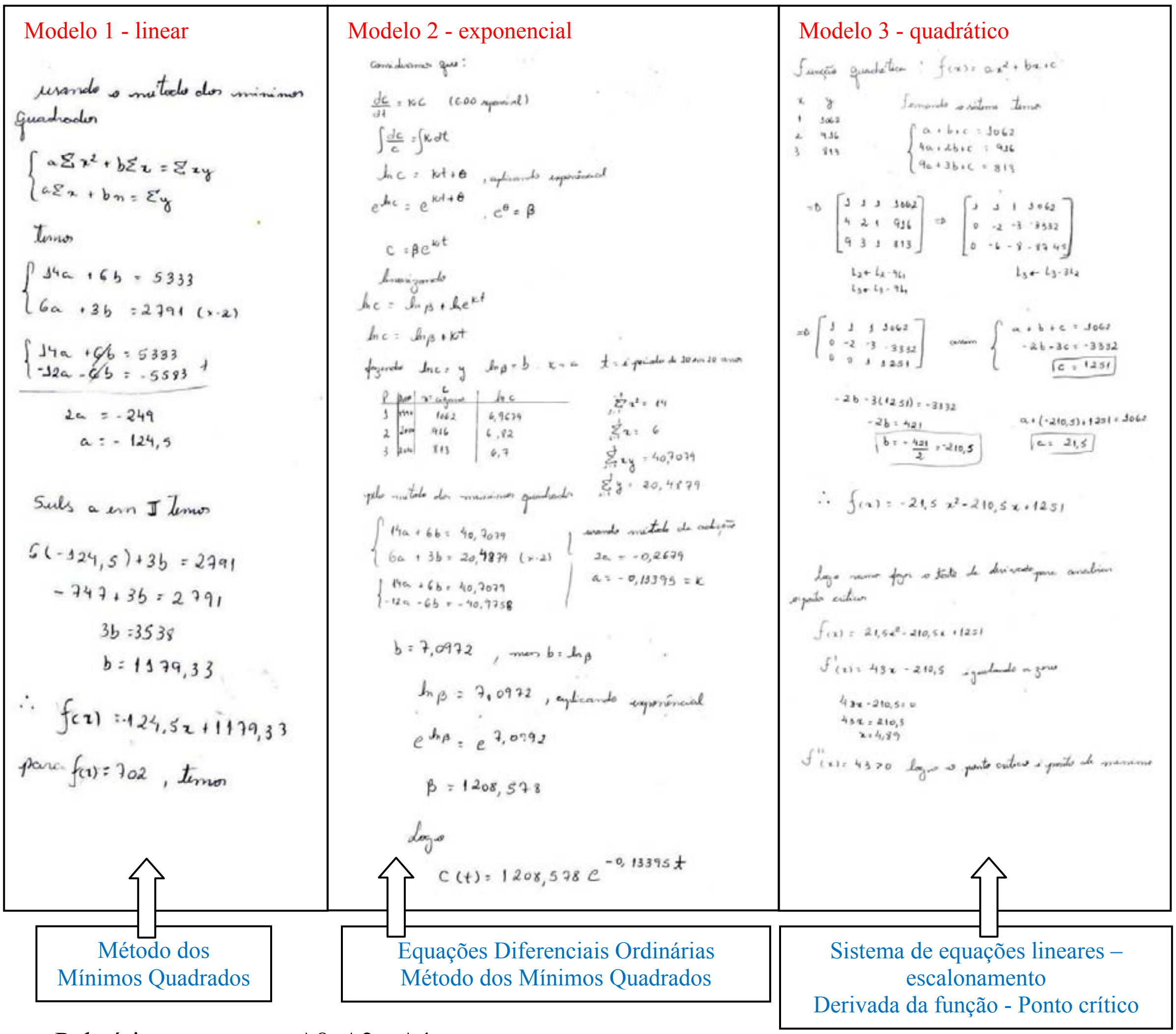
Fonte: Relatório entregue por A8, A2 e A4. Gravação realizada durante o desenvolvimento da atividade.

Ao produzir os interpretantes, A8 utiliza-se de símbolos matemáticos com relação ao objeto matemático ‘função quadrática’. Nesse sentido, para A8 a tendência dos dados configura-se como objeto imediato do objeto dinâmico 'função quadrática'. O objeto imediato do símbolo é o modo como o símbolo representa o objeto dinâmico, por meio de uma lei. Otte (2001) afirma que em termos de semiótica, o objeto imediato de um símbolo é o próprio signo. Mesmo representando todos os dados no plano cartesiano, os alunos entenderam que para a abordagem do problema, somente o intervalo decrescente do gráfico é considerado, realizando simplificações das informações. As simplificações são ações cognitivas que, segundo Borromeo Ferri (2006) auxiliam na definição do problema a ser estudado em atividades de modelagem. No caso da situação-problema *O consumo de cigarro*, as simplificações auxiliaram os alunos a iniciar o desenvolvimento da atividade para a resolução do problema.

Outra retomada ao problema é realizada quando os alunos buscam respostas ao problema e, posteriormente, a validação dos resultados matemáticos. Quando questionados sobre esse procedimento, de responder o problema para em seguida realizar a validação do modelo, A8 argumenta: *A gente só pensava em responder ao problema. Tínhamos o modelo* [risos]*, já queríamos saber logo a resposta e depois a gente falava... ai... tem que validar esse modelo* [risos]. Para esse aluno, o significado atribuído ao problema corresponde à intenção de apresentar uma resposta e findar a atividade. A resposta ao problema é entendida, segundo Almeida, Silva & Vertuan (2012), como uma ação cognitiva de interpretação em que "o aluno se depara com a necessidade de comparação e distinção de ideias, generalização de fatos, articulação de conhecimentos de diferentes áreas" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 18).

O foco na resposta ao problema evidencia que o objeto de estudo dos alunos na atividade era o problema a ser resolvido. Se o modelo matemático de alguma forma pudesse responder ao problema esse era tomado pelos alunos como um modelo que representa a situação em estudo. Para tanto perpassaram por três modelos matemáticos — modelo 1 (linear), modelo 2 (exponencial) e modelo 3 (quadrático) — para os quais foram necessárias abordagens dos objetos matemáticos 'função linear', 'função exponencial' e 'função quadrática'. Símbolos que de algum modo se referem aos objetos matemáticos produzidos para a dedução dos modelos são apresentados na Figura 5.33.

Figura 5.33– Símbolos que se referem a objetos matemáticos envolvidos na atividade 'O consumo de cigarro'



Fonte: Relatório entregue por A8, A2 e A4.

Os diferentes modelos matemáticos deduzidos por A8, A2 e A4 refletem a importância da abordagem de uma situação-problema envolvendo distintas 'matemáticas'. Bassanezi (2002, p. 31) considera que "nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado e, agora poderíamos dizer que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos" e, neste sentido, os alunos fizeram uso de bons modelos.

Na dedução do modelo linear, os alunos utilizaram o Método dos Mínimos Quadrados. Quando pensamos (professora e pesquisadora) em um possível desenvolvimento para a atividade de modelagem utilizando função linear, a estratégia que propusemos foi utilizar dois pontos dados. Ao serem questionados na entrevista sobre o porquê utilizaram esse método ao invés de escolher dois pontos, A8 responde: *Seria muito simples deduzir o modelo* *matemático usando dois pontos. A gente queria fazer algo utilizando técnicas que aprendemos na graduação... só que se tivéssemos escolhido dois pontos teria sido mais rápida a resolução!*

A partir das considerações sobre o uso do Método dos Mínimos Quadrados para determinar a função linear, A8 explicita o signo que tinha em mente para desenvolver a atividade. O que, de acordo com afirmações de Miskulin et al (2007), caracteriza o interpretante. Para os autores "um signo só é signo porque é interpretado por alguém, pelo intérprete e este cria um novo signo em sua mente, o *interpretante*, que é, na realidade, a ideia que o intérprete tinha do signo original" (MISKULIN, et al, 2007, p. 5).

Para a dedução do modelo exponencial, os alunos utilizaram Equações Diferenciais Ordinárias, os procedimentos de linearização e o Método dos Mínimos Quadrados. Alunos desse nível de escolaridade utilizam de procedimentos mais 'sofisticados', envolvendo todos os pontos apresentados ao invés de utilizar dois pontos para determinar a 'função exponencial'.

Diante da possibilidade de, a partir de três pontos, encontrar um modelo quadrático que pudesse representar a situação em estudo, os alunos a partir da expressão geral da função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, resolveram o sistema de equações lineares por meio de escalonamento. O procedimento de utilizar sistema de equações lineares é justificado por A8:

> A8: *Mas, daí depois assim... para desenvolver os modelos assim,... os mais fáceis né que a gente desenvolveu assim em sala rápido foram o linear e o exponencial, aí desenvolver três naquela aula era um problema, naquela aula era impossível* [relembrando a primeira parte da resolução da prova]*, aí depois o quadrático, porque assim embora a gente precisou resolver um sistema, os três pontos que a gente tinha dava para montar a função, aí dava também para fazer pelo método dos mínimos também... aí seria um pouco mais extenso, né? Assim... extenso para a aula.*

Nos interpretantes produzidos pelos intérpretes (alunos) para descrever o desenrolar do desenvolvimento do modelo quadrático para a situação-problema em estudo, é revelado que os alunos entendem que outros procedimentos além de sistemas de equações lineares podem ser utilizados — o método dos mínimos quadrados. Com isso, evidenciamos que A8 estabelece uma articulação entre 'sistema de equações lineares' e 'método dos mínimos quadrados' como procedimentos para a obtenção de uma expressão quadrática.

Para esse desenvolvimento, os alunos não fizeram uma validação do modelo matemático como no trabalho com os outros dois modelos — o linear e o exponencial. Em entrevista, quando questionados sobre esse fato, os alunos utilizam de argumentos que consistem em uma atribuição de significado para o objeto em estudo, conforme diálogo a seguir:

> A8: [...] *o ponto de mínimo era* [folheando], *péra lá... maior que setecentos e dois, porque daí como eu analisei esse ponto, ia dar uma curva crescente, uma curva côncava para cima e não uma côncava para baixo.*
> P: *Mas a parte que vocês analisaram, que vocês consideraram só foi uma parte* [referindo-se a um braço da parábola]...
> A8: *Só foi uma parte. Eu queria inicialmente, durante a semana que a gente teve o tempo para fazer, eu queria achar essa curva que mostrasse essa situação* [apontando para o gráfico da curva de tendência, Figura 5.32]. *Só que eu não consegui* [risos]. *Aí, desisti e trabalhei com esses três dados. Aí por uma côncava para cima, não ia chegar, o ponto de mínimo não dava o valor que ele queria aqui* [referindo-se ao problema proposto]...

Isso denota um conhecimento matemático relacionado ao objeto matemático ‘derivada de uma função’ em que ao calcular a primeira derivada da função e igualar a zero, encontra-se o ponto crítico.

Desde o início do trabalho os alunos fizeram uso de símbolos para representar o problema, isto é, símbolos estão conectados ao objeto ao qual representam, pois segundo Otte (2006a), um símbolo, por si mesmo, é um mero sonho; não mostra sobre o que está falando. Ao serem questionados sobre os diferentes objetos que utilizaram para resolver o problema, os alunos afirmaram que o intuito do trio era analisar qual dos modelos melhor descrevia a situação em estudo, conforme relato de A8.

> A8: *Quando observamos o decrescimento dos valores apresentados na tabela, não ficava claro se era uma reta, uma parábola ou uma curva exponencial. Daí a gente desenvolveu os três modelos.*
> P: *E por que vocês escolheram essas três curvas?*
> A8 *Porque pensamos em conteúdos matemáticos do Ensino Médio e de imediato as curvas que vieram à mente no momento da atividade foram essas. Como seremos professores pensamos em conteúdos desse nível de ensino.*

Ao tratar do que ‘imediato as curvas que vieram à mente’ A8 se refere ao objeto dinâmico que lhe veio à mente por meio de objetos imediatos, em consonância com o que é afirmado por Santaella (2007, p. 15), de que somente “temos acesso ao objeto dinâmico através do objeto imediato”, pois objeto imediato tem função de mediação e é um signo que “nos coloca em contato com tudo aquilo que costumamos chamar de realidade” (SANTAELLA, 2007, p. 15). E essa “realidade” nessa atividade de Modelagem Matemática corresponde à situação-problema da qual se originou o problema a ser estudado.

Embora A8 tenha citado as ‘curvas que vieram à mente’ não foi evidenciado símbolo gráfico para a situação para poder analisar o comportamento dos modelos matemáticos. Quando questionados sobre essa não produção, A8 e A4 argumentam:

> A4: *Não... fizemos só num rascunho, né, assim bem por cima.*
> A8: *É não consigo!*
> A4: [risos] *é mas nós não colocamos no trabalho, foi só para visualizar assim meio por cima, daí foi bem um esboço mesmo.*
> P: *Isso é uma coisa que a gente percebe que as pessoas não fazem, mas por que vocês acham que a representação gráfica... assim de vocês, por que vocês acabam não fazendo?*
> A4: *Ai... porque eu acho assim.. para ser bem sincera... algo para fazer manualmente exige cuidado, porque senão a análise que era para ser feita acaba dando errado, mas eu acho super importante, por exemplo, no trabalho da soja*[44]*, fundamental... eu acho fundamental o gráfico para visualização, que às vezes tá aquele monte... não sei se é porque eu sou meio lerdinha sabe...* [risos] *então para eu visualizar, eu preciso de uma coisa mais concreta. Às vezes, somente com os dados eu não consigo visualizar o que está se falando, o comportamento que tá tendo. Então eu acho super importante.*
> [...]
> A8: *A gente não fez. Uma pelo tempo e outra assim pelos valores dos dados, aí a gente ia ter um gráfico assim... sei lá... eu não sou muito caprichoso para fazer um gráfico com valores altos e compactar os intervalos, também achei que isso iria prejudicar...*
> P: *A escala?*
> A8: *A escala... daí eu pensei assim e optei por não e só analisar mesmo a validação.*
> A4: *Mas se pudesse usar...*
> A8: *... o Curve...* [referindo-se ao software Curve Expert]
> A4: *... o Curve... já ia* [risos] *ser a primeira opção... já ia olhar o gráfico.*
> P: *Já ia influenciar um monte.*
> A8: *Ia influenciar um monte* [risos].

Os alunos não utilizaram do recurso gráfico para representar o modelo matemático e fazer uma análise sobre o decrescimento desta função. No entanto, os interpretantes elucidados principalmente por A8 e A4, possibilitaram-nos inferir que a não produção do gráfico não consiste um não entendimento do signo como representando o objeto, mas uma falta de habilidades para fazer a construção sem o uso de uma ferramenta computacional. O fato de A8 ter dificuldade em ‘compactar os intervalos’, ou seja, de utilizar escalas para a construção do gráfico denota uma falta de familiaridade com a manipulação desse signo. Segundo Peirce (2005, p. 164), é “a familiaridade que uma pessoa tem com um signo e que a torna apta a utilizá-lo ou interpretá-lo”.

A atividade sobre o número de cigarros consumidos por pessoa por ano no decorrer do tempo corresponde ao 2.º momento de familiarização com atividades de Modelagem Matemática.

[44] Referindo-se à Atividade 4 Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil, que o grupo de alunos desenvolveu no 3.º momento de familiarização com atividades de modelagem. Essa retomada aconteceu, porque a entrevista foi realizada uma semana após os alunos terem apresentado o trabalho final.

Em entrevista, os alunos revelam que, embora o desenvolvimento desta atividade tenha levado 4horas/aula, é uma atividade diferente do que geralmente realizam em sala de aula e que, nesse momento, de fazerem sozinhos sentiram o que é experimentar fazer atividade de modelagem, conforme relatado por A4 e A8.

> A8: *Nossa ela foi um pontapé para o nosso trabalho final. Foi assim... tipo... ela foi assim quando a gente pensou vamos voltar para o outro, eu já pensei nela, senão não dava para fazer. Assim, ela foi de grande influência também.*
> A4: *Eu acho que também foi a primeira atividade que nós desenvolvemos sozinhos mesmo. Porque em todas as outras vezes sempre foi durante a aula, então tinha a sua ajuda, tinha a ajuda da professora, cada grupo se focava mais de repente em um problema... que tinham alguns problemas diferentes, às vezes... e depois só apresentava, mas esse daqui aí foi autonomia, foi correr atrás mesmo e colocar em prática tudo que tinha visto. Porque às vezes quando você tem ajuda, parece que dá uma relaxada... ah acho que entendi... não pensa tanto.*

Embora os alunos que fazem parte do trio consideraram a atividade de modelagem O consumo de cigarro complexa para ser desenvolvida por eles com poucas interferências da professora e da pesquisadora, sentiram-se *mais próximo do que é desenvolver uma atividade de modelagem* [fala de A8, confirmada por A4]. Neste sentido, uma vez existente, o símbolo que representa o objeto Modelagem Matemática dissemina-se entre os alunos. E com essa disseminação e por meio do uso e da experiência, seu significado se amplia (PEIRCE, 1972, p. 130).

Na abordagem da atividade configurada como de 3.º momento de familiarização, o grupo com cinco membros do qual A8 fez parte propôs investigar sobre a cultura de soja no Brasil. Para tanto, desenvolveram a atividade 4 — Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil.

Diante do contato que A8 tem com a situação-problema, o grupo se propôs a investigar o ano em que a cultura de soja no Brasil atingirá a marca do atual maior produtor mundial de soja — os Estados Unidos — (Problema 1), além de determinar a área média que será necessária para essa produção (Problema 2). Os signos que os alunos produziram e que estão relacionados ao problema em estudo correspondem a signos escritos, falados e gesticulados obtidos de relatório entregue e apresentação da atividade aos demais alunos. Informações adicionais foram obtidas com uma entrevista (Apêndice G) em que dois membros do grupo, sendo um deles A8, participaram.

Os dados que os alunos utilizaram foram por eles coletados em sites do IBGE e da Embrapa e organizados em tabelas. Para fazer a organização dos dados, fizeram simplificações e utilizaram de ferramenta computacional para traçar a curva de tendência e visualizar o comportamento de cada modelo obtido. Neste sentido, signos que de certa forma se referenciavam ao problema são encontrados em todas as fases de desenvolvimento da atividade de modelagem: a inteiração está relacionada com a familiaridade de A8 para com a situação-problema que é utilizada, para a coleta de dados nos órgãos específicos e na identificação de um problema a ser estudado, além de definição de variáveis e de hipóteses; nas fases de matematização e resolução, os alunos retomam o problema para traçar a curva de tendência dos dados; na interpretação de resultados e na validação, os alunos se referem ao problema quando apresentam as respostas e conclusões para o que se propuseram a estudar.

Para adentrarmos as análises desta atividade, apresentamos na Figura 5.34 os signos produzidos pelos alunos e que estão relacionados a cada um dos problemas. Utilizamos a cor verde para destacarmos os signos que se referem ao Problema 1; e a cor vermelha para destacar os signos relacionados ao Problema 2.

Figura 5.34– Símbolos produzidos pelo grupo de A8 que se referem ao problema na atividade ‘Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil’

Problema

Nesse trabalho analisaremos em que ano possivelmente o Brasil chegará nessa produção de 90,6 milhões de toneladas de soja, conquistada pelos EUA na safra de 2010, e chegando nessa marca qual a área necessária, em hectares, para o seu cultivo no território nacional.

Dados simplificados

Tabela: Média da produtividade e área plantada de soja no Brasil

Intervalo	Ano	Média da Quantidade Produzida (toneladas)	Média da Área Plantada (hectares)
1	1990-1992	18.016.771,67	7.338.661,333
2	1993-1995	24.401.815,67	11.300.553
3	1996-1998	26.955.650	11.728.008,33
4	1999-2001	33.905.187	13.583.940,33
5	2002-2004	47.858.999,67	18.834.973
6	2005-2007	53.834.628,67	22.026.938,33
7	2008-2010	64.059.495,67	22.404.834,33

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

A8: [...] *a gente vai analisar em que ano possivelmente o Brasil vai conseguir chegar nesse recorde que os Estados Unidos conseguiram, visando que os Estados Unidos já estão chegando ao seu limite de produção em questão de expansão agrícola. Os Estados Unidos não têm tanta área mais disponível para a produção. Visando também pela condição climática, o Brasil aparece como um forte sucessor deles pelas condições climáticas que favorecem o desenvolvimento da cultura no país.* [...] *chegando nesse tempo, qual seria a área necessária para o Brasil?*

PROBLEMA 1

Definição de variáveis e hipóteses

Hipóteses

Consideraremos:

A produção de soja tende a manter seu crescimento no decorrer do tempo;

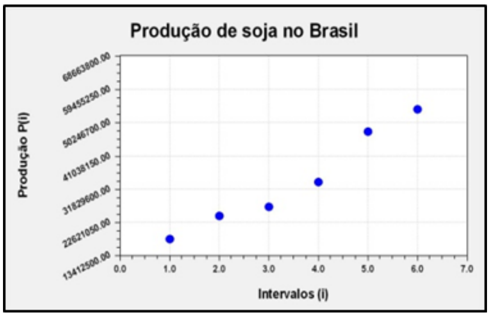
A tendência dos dados.

Variáveis do problema

$P(i)$: Produção de soja no decorrer do tempo;

i: intervalo de tempo (3 anos)

Tendência dos dados



Respostas ao Problema

Modelo 1: No intervalo i=11, que se refere ao período de 2020 a 2022, o Brasil já terá atingido a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja.

Modelo 2: Como $i \cong 9$, concluímos que entre 2014 e 2016 o Brasil atingirá a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja.

Modelo 3: Em 2013 o Brasil atingirá a marca de 90,6 milhões de toneladas de soja.

Conclusão: Concluímos assim que o Brasil atingirá a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja entre os anos de 2014 e 2016.

PROBLEMA 2

Definição de variáveis e hipóteses

Hipóteses

Consideraremos:

O aumento da área de plantio tende a manter seu crescimento no decorrer do tempo;

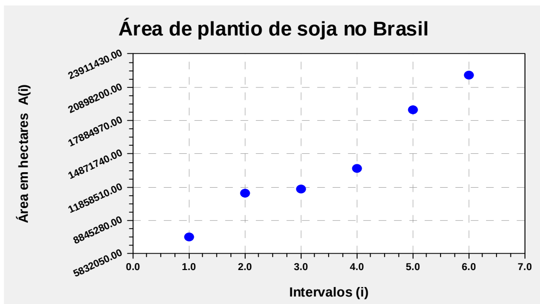
A tendência dos dados.

Variáveis do problema

$A(i)$: Área de plantio de soja em função do tempo;

i: intervalo de tempo

Tendência dos dados



Respostas ao Problema

Modelo 1: No período que o Brasil atingir a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja, aproximadamente 28.488.218,09 de hectares do território brasileiro estará sendo usado para a cultura de soja.

Modelo 2: A área ocupada pela cultura de soja quando o Brasil atingir a produção de 90,6 milhões de toneladas será de, aproximadamente, 29.161.397,18 hectares.

Modelo 3: Quando o Brasil atingir a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja, a área ocupada por essa cultura será de 35.936.584,27 hectares.

Conclusão: Podemos concluir que a partir do modelo encontrado, a área ocupada pela cultura de soja até o ano de 2016 será de 29.161.397,18 hectares.

Fonte: Relatório entregue pelo grupo em que A8 é membro. Gravação realizada durante a comunicação da atividade.

Para A8 que tem familiaridade com o problema, existe uma atribuição de significado para tal, pois segundo Peirce (1989), "para conhecer o Objeto, o que é preciso é a experiência prévia desse Objeto". Mesmo conhecendo o objeto, tendo experiência prévia, A8 relata que a definição do problema que seria estudado só ocorreu com a coleta de dados: *na verdade a gente só definiu depois assim... bateu o martelo mesmo que seria esse depois da coleta de dados para ver o que seria possível trabalhar* [relato de A8 em entrevista]. Com esse encaminhamento para a definição do problema, os alunos organizaram os dados, fizeram simplificações e estruturaram o que poderiam investigar. Ao abordar as barreiras e oportunidades de desenvolvimento de modelagem em sala de aula, Maaβ (2006) propõe um encaminhamento que se aproxima do percorrido pelo grupo de A8, ou seja, faz-se uma investigação do que é possível abordar com a situação-problema findando em um modelo real da situação que se pretende estruturar matematicamente para obter um modelo matemático.

O encaminhamento realizado pelo grupo foi brevemente relatado por A8: *Aí foi tirando assim dos dados a gente tirou o problema... e do problema a gente foi tirando as variáveis e as hipóteses que a gente queria para solucionar o problema* [relato de A8 em entrevista]. Com esse relato fica evidente que mesmo que o problema seja oriundo dos dados, ele é o gerador do desenvolvimento da atividade, pois se não há um problema a ser investigado, não há um trabalho de modelagem a ser desenvolvido.

A partir dos dados coletados, os alunos realizaram simplificações com o objetivo de 'equilibrar' os valores dos dados, visto que existiam anos em que ocorria um pequeno decrescimento, conforme justificado em entrevista:

> [...]
> A4: *Analisar que teve um crescimento, só que nós tivemos... nós tivemos que dar um jeitinho aí nos dados, porque nós pegamos os dados tanto da plantação como da área utilizada para a plantação de 90... de 1990 até 2010... só que teve anos... nós percebemos que sempre ia crescendo, só que teve ano que assim... que não necessariamente cresceu, que vamos dizer que...*
> A8: [interrompendo] *a gente não levou em conta condições climáticas que afetam um pouco a produção. Então a gente poderia ver que em alguns anos da tabela em si às vezes produzia menos do que no outro, mas que no próximo já tinha um crescimento maior, aí porque...*
> A4: [interrompendo] *então deu para analisar, constatar que teve um crescimento, por exemplo, em 1990 foram produzidas 19 milhões de toneladas, em 91 foram 14 milhões, em 92 já foi 19 e depois 22, 24, 25 então nós tivemos que organizar os dados para poder dar certo os modelos, então por isso nós optamos em intervalos de análise de três em três anos, fazendo a média dos anos. Então teve que dar uma adaptada!*
> A8: *Para mostrar o fato dos dados serem crescentes né? Então a gente resolveu isso por não levar em conta as condições climáticas, essas coisas do tipo. Daí foi que a gente compactou os*

dados em intervalos, daí a gente viu que se fizesse em intervalos dava certo!

As simplificações são ações cognitivas que auxiliam na tomada de decisão para o encaminhamento do desenvolvimento da atividade. Quando o aluno opta por uma simplificação específica este, segundo Borromeo Ferri (2006), realiza uma 'filtragem' da informação no problema e precisa levar em consideração conhecimentos extramatemáticos, como condições climáticas, por exemplo. Nesse processo de 'filtragem' há um ato intencional, uma intenção de especificar as informações que 'valerão' no desenvolvimento da atividade. A atribuição de significado, neste caso, corresponde a uma intenção do sujeito envolvido com as simplificações.

Com as simplificações intencionais estabelecidas, com o problema definido, a intenção posterior foi responder cada um dos problemas nos quais o problema geral foi dividido. O foco do grupo foi o problema, responder o problema sem se preocupar que matemática utilizaria. Esse fato corrobora com Almeida, Silva & Vertuan (2012) de que em atividades de modelagem não se sabe de antemão os conteúdos matemáticos envolvidos. Na entrevista, fica evidente a intenção do grupo em responder o problema:

A4: *O nosso a gente focou no problema. Então nós vimos o que a gente vai precisar para responder esse problema? Ah, no problema 1 que era para ver quando que... da plantação, né? Não lembro!*
A8: *... da produção* [folheando o trabalho].
A4: *... da produção. Então o que a gente vai precisar para saber da produção? Vai precisar, o que vai levar em conta? Vai levar a produção, vai levar em conta o tempo que vai gastar e... nós analisamos para responder a esse problema o que vai influenciar? Então a partir disso que nós chegamos nas variáveis...*

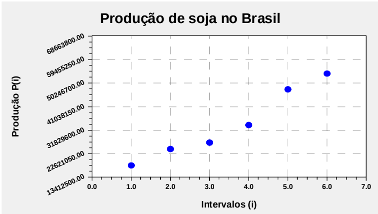
Para responder o problema que era o foco do trabalho dos alunos conforme relato em entrevista, os alunos transitaram por diferentes 'matemáticas' (Figura 5.35). Dentre elas as que os alunos utilizaram no desenvolvimento da atividade 2 — O consumo de cigarro — na qual os alunos se pautaram. Essa 'referência' à atividade anteriormente realizada fica evidente durante relatos de A8 na entrevista:

A8: *Ah... então... a gente primeiro, fez a tendência dos dados, né? Aí a gente viu como que os dados se comportavam, né? Aí a gente teve mais ou menos uma dedução, daí a gente falou 'ah.. vamos optar primeiro para fazer uma linear', né? Como a gente também foi usando mais ou menos o enfoque que a gente tinha de sala de aula também né? Porque a gente tava trabalhando em sala de aula!*
P: *A avaliação influenciou vocês?* [referindo-se à atividade O consumo do cigarro que os alunos desenvolveram como avaliação]
A8: *Sim, me influenciou! Me influenciou!*
P: *Para deduzir esses modelos?*
A8: *Para deduzir os modelos.*

Figura 5.35– Símbolos que se referem aos objetos matemáticos envolvidos na atividade ‘Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil’

PROBLEMA 1

Modelo 1 – linear



Para a obtenção do modelo linear foi escolhido o método dos mínimos quadrados.
O método consiste na resolução do seguinte sistema de equações,

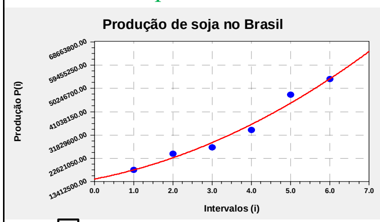
$$\begin{cases} \sum x^2 a + \sum xb = \sum xy \\ \sum xa + nb = \sum y \end{cases}$$ para a

obtenção de um modelo da forma $P(i) = ai + b$.

Assim, o modelo desejado pode ser escrito da forma

$P(i) = 7782040,964i + 7305057,343$

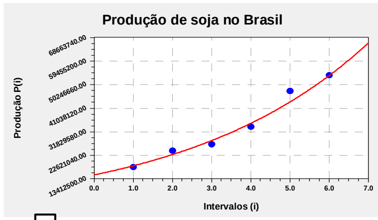
Modelo 2 – quadrático



Curve Expert

$P(i)$=14493148,624+
2989980,06536 i+
599007,615357 i^2

Modelo 3 – exponencial

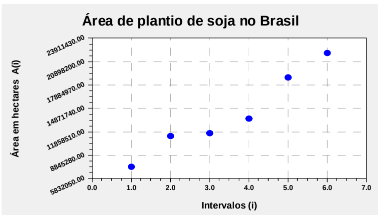


Curve Expert

$P(i) = 14996380\ e^{0,[illegible]\, i}$

PROBLEMA 2

Modelo 1 – linear



Para a obtenção do modelo linear foi escolhido o método dos mínimos quadrados.
O método consiste na resolução do seguinte sistema de equações,

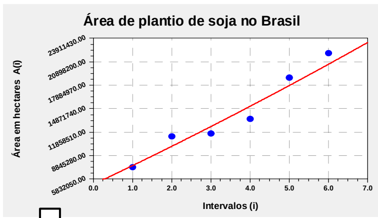
$$\begin{cases} \sum x^2 a + \sum xb = \sum xy \\ \sum xa + nb = \sum y \end{cases}$$ para a

obtenção de um modelo da forma $A(i)$=ai+b.

Assim, o modelo desejado pode ser escrito da forma

$A(i) = 2634287,654i + 4779629,2$

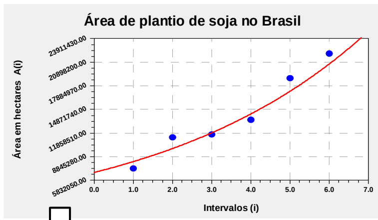
Modelo 2 – quadrático



Curve Expert

$A(i)$=5164632,47286+
2377768,79845 i+
32056,8213095 i^2

Modelo 3 – exponencial



Curve Expert

$A(i) = 6849480\ e^{0,1841[illegible]\, i}$

Fonte: Relatório entregue pelo grupo em que A8 é membro.

A similaridade do desenvolvimento da atividade 4 — Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil — com a atividade 2 — O consumo de cigarro — é conferida à familiaridade que os alunos estabeleceram com a estrutura de atividade de modelagem, fizeram como se fosse uma referência a ser seguida. Dos cinco integrantes do grupo, três (A8, A4 e A2) desenvolveram a atividade 2. Para esses intérpretes os símbolos produzidos no desenvolvimento da atividade conferiram-lhes a atribuição de significado para o desenvolvimento da atividade, pois, segundo Peirce (1989, p. 54), "cada símbolo é, em sua origem, ou imagem da ideia significada, ou reminiscência de ocorrência individual, pessoa ou coisa, ligada com seu significado (...)".

Uma mudança de símbolos que inferimos e que diferencia a ideia significada da atividade 4 para a atividade 2 é o uso do recurso gráfico para representar cada um dos objetos matemáticos explicitados nos modelos. Ao ser questionado na entrevista sobre o uso do recurso gráfico nesta atividade, A8 afirma que:

> A8: *O gráfico, para visualizar foi importante! É porque a gente já tinha, pelo trabalho, pelo que você falou.. eu, assim... eu tinha minha concepção e foi mais ou menos eu que induzi o grupo dessa forma. Que o trabalho desenvolvido na sala, que a gente usou os três modelos, aí eu pensei assim 'ah vamos modelar nos três modelos também' e usar o Curve* [Curve Expert] *para fazer a visualização.*

Por meio da experiência prévia que A8 teve com os signos produzidos na atividade 2, ocorreram 'acréscimos' de símbolos que representam os objetos matemáticos na atividade 4. Isso evidencia crescimento na atribuição de significado para cada objeto matemático envolvido na atividade, pois, segundo Peirce (1989, p. 54), "o corpo do símbolo muda lentamente, mas o significado cresce inevitavelmente, incorpora novos elementos e deita fora elementos antigos".

Os diferentes momentos de familiarização com atividades de modelagem possibilitaram aos alunos a atribuição de significado para o que consiste desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Vivenciando atividades de modelagem, os alunos experimentam essa alternativa pedagógica. Gradativamente, os símbolos mudam e o significado cresce, conforme relato de A8 quando questionado na entrevista sobre o trabalho com atividades de modelagem:

> A8: *Na verdade eu acho que onde, quando começou, foi com seu trabalho do diazepan, porque até então esse tipo de análise nós não tínhamos visto ainda. Né... então, com o seu trabalho* [risos] *que começou a ser desenvolvido esse tipo de questionamento, de análise de dados, de verificar tabelas, tá vendo o crescimento, analisar o que tem por detrás, né? Qual a informação por trás dos dados, então tanto do seu trabalho como os outros que vieram depois, influenciou muito no nosso trabalho.*
> [...]
> *Eu acho que foi um crescimento muito grande! Sem contar também o gostinho da conquista de você chegar à conclusão, porque por ser um trabalho muito amplo às vezes acaba sendo mais difícil ainda do que a professora chegasse e 'vocês vão desenvolver um trabalho sobre esse tema e se vira'. Então por ser muito amplo, pelo tema... a gente ter que ir atrás, ir atrás dos dados para ver se vai dar certo, qual o problema que com aqueles dados dá para desenvolver ou com o problema que você pretendia, quais os dados são necessários. Então eu acho que além de uma... tinha que lembrar todos os conteúdos vistos durante o ano, de colocar em*

> *prática, também teve esse gostinho da conquista de desenvolver sozinho um trabalho que não foi fácil* [risos].

Para esse grupo de alunos, em especial para A8 e A4, o terceiro momento de familiarização com atividades de Modelagem Matemática possibilitou conceber o desenvolvimento desde o início de uma atividade de modelagem. Nas palavras de Peirce (1989, p. IX), "conceber o que seja uma coisa equivaleria a conceber como ela funciona ou o que pode realizar". Conceberam o que é modelagem, como ela 'funciona' e o que podem realizar por meio dela.

5.5 ANÁLISE GERAL PARA A8 – CODIFICAÇÃO FOCALIZADA

Seguindo indicações propostas na Teoria Fundamentada de Kathy Charmaz, o próximo procedimento a ser realizado consiste na avaliação do processo de envolvimento de A8 com as três atividades de modelagem por ele desenvolvidas, caracterizando nossa análise geral. Neste sentido, o processo de codificação focalizada é validado e assume-se um compromisso com a categoria central definida na codificação axial, que consiste em refletir sobre a atribuição de significado para o objeto — problema e objeto matemático. Com as análises específicas das atividades desenvolvidas por A8 e levando em consideração que a atribuição de significado para o problema e o objeto matemático pode ocorrer por meio de signos interpretantes produzidos por intérpretes em diferentes fases e momentos de familiarização com atividades de Modelagem Matemática, 'traçamos' ciclos de modelagem para A8 em cada momento de familiarização — 1.º momento, 2.º momento e 3.º momento —, evidenciando a atribuição de significado para o objeto.

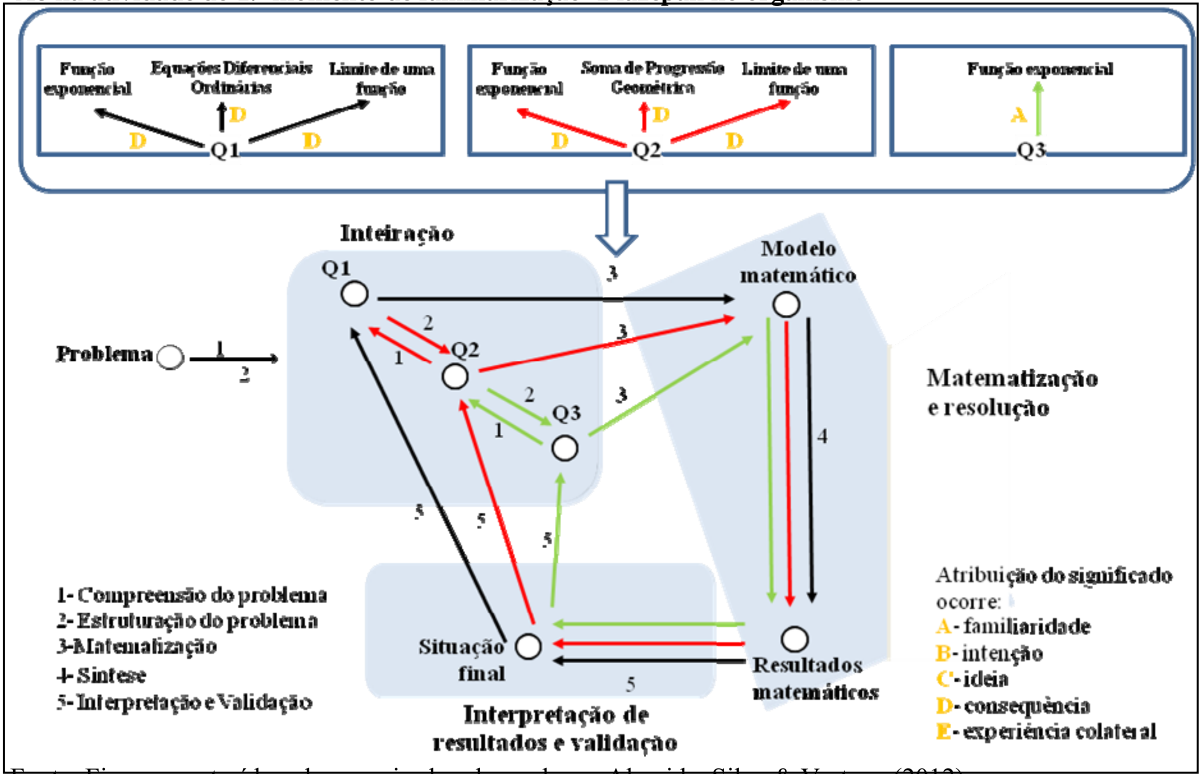
Como a atividade 'Diazepan no organismo' foi caracterizada para ser desenvolvida no âmbito de 1.º momento de familiarização, os signos interpretantes produzidos por A8 são similares aos desenvolvidos por A6 e que foram analisados na seção 5.3, havendo uma diferença no que concerne à atribuição de significado pelo intérprete. Neste sentido, mantemos nossa análise com relação a evidências de atribuição de significado por meio de *familiaridade* com o objeto, na *intenção* de significar o objeto, como uma *ideia* que se remete ao objeto, como *consequência* futura para abarcar o objeto, por meio de *experiência colateral* com o objeto.

A atribuição de significado para o problema foi se constituindo com o desenvolvimento de cada uma das questões na qual o problema foi dividido — Questão 1 (Q1), Questão 2 (Q2) e

Questão 3 (Q3). Em Q1 a familiaridade que A8 estabeleceu com a meia-vida possibilitou a atribuição de significado no que consiste ao decaimento do efeito do medicamento no organismo. Em Q2, há uso de resultados referentes a Q1, logo ambas as questão estão relacionadas. Para A8 a atribuição de significado foi evidenciada por meio de consequência futura que as doses de medicamento foram ingeridas gradualmente, observando resultados do que acontece com uma cápsula ingerida e que foi abordada na Q1. Em Q3, utiliza-se de resultados de Q2 e usa da mesma dinâmica de resolução de Q1, a atribuição de significado ocorre por meio de familiaridade.

Os objetos matemáticos — função exponencial, Equações Diferenciais Ordinárias, limite de uma função, soma de Progressão Geométrica — são de conhecimento dos alunos. No entanto, A8 relata que não consegue estabelecer relações entre eles e em alguns casos são complexos para serem abordados. Na Q1, os objetos matemáticos – função exponencial e Equações Diferenciais Ordinárias — são considerados consequências futuras que possibilitam abordá-los, assim como o são os objeto limite de uma função e soma de progressão geométrica necessários na Q2. Na Q3, a abordagem de função exponencial adquire um caráter de familiaridade quando relacionado à atribuição de significado. Esse fato é justificável, pois A8 já teve contato com os símbolos que representam esse objeto enquanto consequência futura, teve experiência prévia com esses signos. Na Figura 5.36 são apresentadas evidências de atribuição de significado para os objetos envolvidos na atividade ‘Diazepan no organismo’. Utilizamos cores diferentes para as setas para representar o ‘percurso’ referente a cada questão e indicar a atribuição de significado para os objetos matemáticos que emergiram para o desenvolvimento da questão. Desse modo, as setas pretas dizem respeito à Q1; as setas vermelhas estão relacionadas à Q2; as setas verdes se referem à Q3.

Figura 5.36– Evidências de atribuição de significado para objetos matemáticos e ações cognitivas de A8 na atividade do 1.º momento de familiarização 'Diazepan no organismo'



Fonte: Figura construída pela pesquisadora baseada em Almeida, Silva & Vertuan (2012).

Nesta atividade podemos evidenciar que A8 foi estabelecendo relações entre os objetos matemáticos e cada uma das questões em estudo. Para tanto, ao fazermos uma análise do que chamamos de tríade de ações que estabelecemos no Capítulo 3, a ação de *Perceber* o que se estava estudando foi sendo constituída no decorrer do desenvolvimento de cada questão com a interferência da pesquisadora e/ou da professora. A ação de *Agir* foi se configurando em consonância com a percepção do que poderia ser estudado em cada questão com intervenções externas. A ação de *Significar* foi evidenciada a partir da ação de Agir, que possibilitou a atribuição de significado para o objeto levando em consideração a tríade símbolo/significado para o objeto/interpretante. Para esta atividade, a articulação entre as tríades Perceber/Agir/Significar e símbolo/significado para o objeto/interpretante foi efetivada na ação significar.

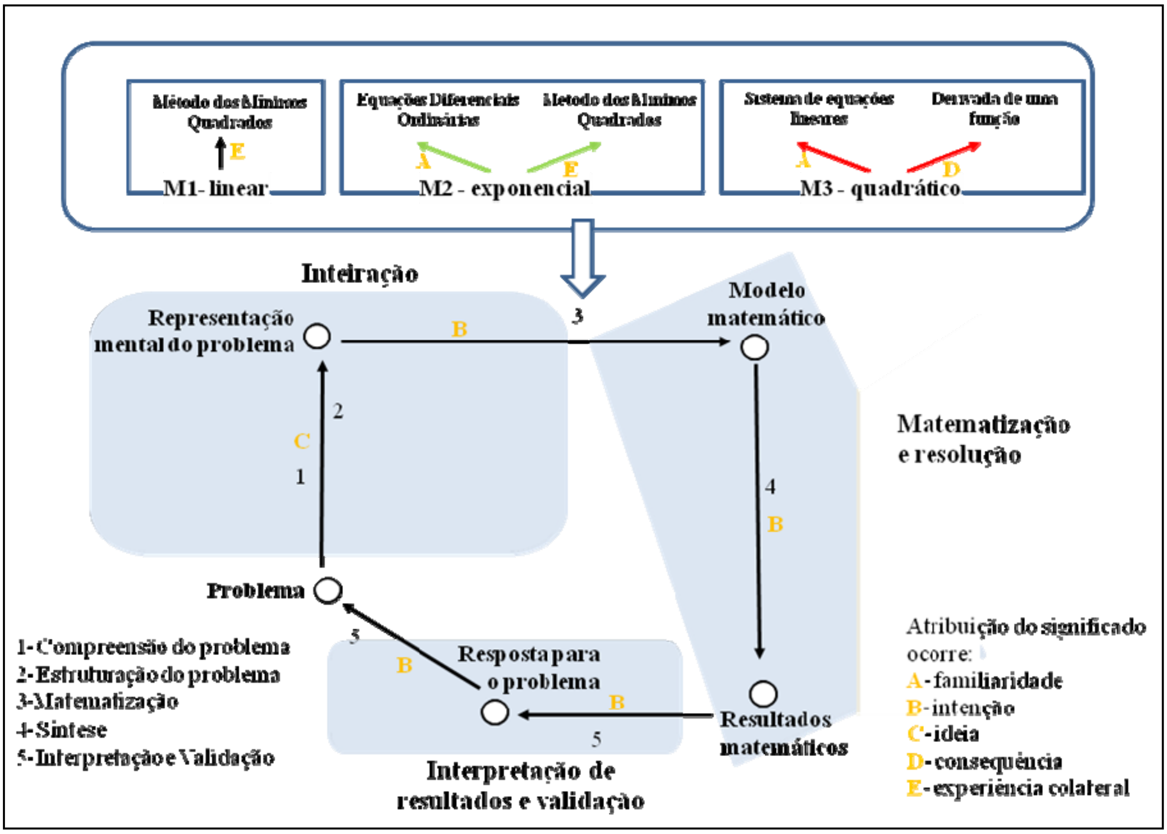
A atividade do 2.º momento desenvolvida por A8 em uma avaliação é a intitulada 'O consumo de cigarro'. Os signos interpretantes produzidos por A8 que se remetem ao problema e ao objeto matemático em estudo estão relacionados à atribuição de significado para esses objetos. Há evidências de atribuição de significado por meio de *familiaridade* com o objeto, na *intenção* de significar o objeto, como uma *ideia* que se remete ao objeto, como *consequência* futura para abarcar o objeto, por meio de *experiência colateral* com o objeto.

Conhecendo as informações que permeavam o problema, inicialmente a atribuição de significado consistiu em uma ideia que poderia ser identificada como uma representação mental do problema. Nesta transição do problema para uma representação mental, ocorreram mudanças nos símbolos utilizados por A8, visto que estava considerando informações que estavam interferindo na compreensão do problema, e que não possibilitavam a estruturação e organização desse problema. Como ocorreram mudanças nos símbolos, o significado para o problema cresceu inevitavelmente. A partir da compreensão do que seria desenvolvido no problema, todo o desenvolvimento da atividade até a obtenção de resposta para o problema, a atribuição de significado consistiu tão somente na intenção de resolver um problema ao qual lhe seria atribuída uma nota.

Os signos interpretantes produzidos por A8 para o objeto matemático envolvido em cada modelo — modelo 1 (M1-linear) método dos mínimos quadrados, modelo 2 (M2-exponencial) Equações Diferenciais Ordinárias e método dos mínimos quadrados e modelo 3 (M3-quadrático) sistema de equações lineares e derivada de uma função —, referentes à quantidade de cigarros consumida por pessoa por ano, são de conhecimento dos alunos, pois estão utilizando como forma de avaliação. A atribuição de significado para os objetos neste caso ocorreu por meio de familiaridade, experiência colateral e consequência. Experiência colateral com o método dos mínimos quadrados utilizado como ferramenta na linearização de pontos sobre a curva, na obtenção do modelo linear e do modelo exponencial; familiaridade com Equações Diferenciais Ordinárias para iniciar a dedução do modelo exponencial; na abordagem do modelo quadrático, familiaridade com sistemas de equações lineares — objeto matemático presente na Educação Básica e da qual os alunos faziam uso no dia a dia enquanto professores. Enquanto estudantes de Ensino Superior, para determinar o vértice da parábola correspondente ao modelo quadrático, os alunos utilizaram de conhecimentos constituídos neste nível de escolaridade, para tanto o significado para o objeto 'derivada de uma função' corresponde a uma consequência do uso do objeto para esse fim.

Evidências que denotamos com relação à atribuição de significado para o problema e os objetos matemáticos na atividade 'O consumo de cigarros' são apresentadas na Figura 5.37. A seta preta foi utilizada para nos referirmos à atribuição de significado para o objeto matemático que emergiu no desenvolvimento do M1-linear; as setas verdes relacionam-se à atribuição de significado para os objetos matemáticos que emergiram no desenvolvimento do M2-exponencial; e as setas vermelhas correspondem à atribuição de significado para os objetos que emergiram na dedução de M3-quadrático.

Figura 5.37– Evidências de atribuição de significado para problema e objetos matemáticos e ações cognitivas de A8 na atividade do 2.º momento de familiarização 'O consumo de cigarro'



Fonte: Figura construída pela pesquisadora baseada em Almeida, Silva & Vertuan (2012).

O que inferimos com relação à tríade de ações Perceber/Agir/Significar 'vivida' por A8 no desenvolvimento desta atividade é que inicialmente A8 teve a ação de *Perceber* o problema e *Significar* o que seria estudado, para então *Agir* sobre o problema e *Perceber* o objeto matemático necessário para seu desenvolvimento. Ao constatar que o objeto matemático a que se referenciava não correspondia ao problema inicialmente percebido, A8 abandonou algumas considerações (taxa de decaimento da quantidade de cigarros consumida por ano por pessoa) que não utilizaria. Neste caso, houve necessidade de retomar o problema e *Perceber* que informações seriam adequadas para novamente *Significar* o problema e então *Perceber* o objeto matemático que poderia ser utilizado. Ao *Significar* o objeto matemático, a ação de *Agir* possibilitou a obtenção de um modelo matemático que conferiu resposta ao problema percebido. Nesta atividade, a articulação entre as tríades Perceber/Agir/Significar e símbolo/significado para o objeto/interpretante foi efetivada nas ações perceber, agir e significar simultaneamente.

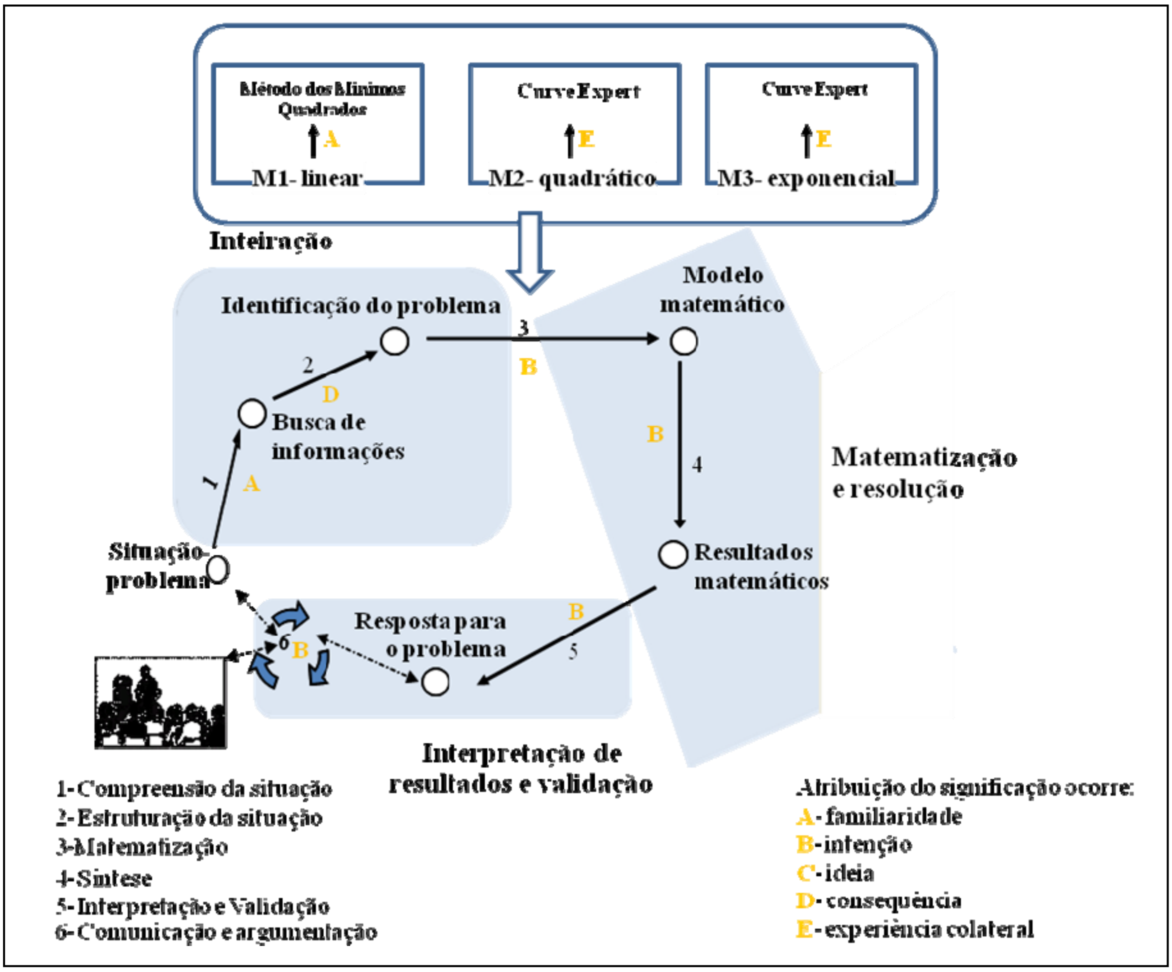
Para o grupo no qual A8 estava inserido, o 3.º momento foi caracterizado pela sua familiaridade com a situação-problema 'Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil'. Os signos interpretantes produzidos por A8 em conjunto com seu grupo estão relacionados à atribuição de significado para o problema e os objetos matemáticos envolvidos na situação. Há evidências de atribuição de significado por meio de *familiaridade* com o objeto, na *intenção* de significar o objeto, como *consequência* futura para abarcar o objeto e por meio de *experiência colateral* com o objeto.

A situação-problema faz parte da vivência de A8, neste sentido, a compreensão da situação na busca de informações para a definição do problema ocorreu por meio de familiaridade com o objeto em estudo — cultura de soja. Com as informações coletadas, a atribuição de significado para a identificação do problema ocorreu por meio de consequência futura, pois com os dados em mãos A8 já evidenciava o que poderia estudar do objeto que tinha familiaridade, para tanto identificou dois problemas relacionados à situação. Com os problemas identificados, a matematização, a síntese, a interpretação e validação e a comunicação e argumentação de ambos os problemas que foram desenvolvidos seguindo um caminho similar corresponderam a uma intenção — obter uma resposta para o problema. A atribuição de significado para o problema a partir da obtenção do modelo matemático consistiu na intenção de chegar a uma resposta ao problema proposto.

Os objetos matemáticos que emergiram no desenvolvimento dos dois problemas foram similares — modelo linear, modelo quadrático e modelo exponencial. Os signos interpretantes produzidos por A8 e seu grupo com relação a esses objetos matemáticos correspondem à familiaridade que os alunos tiveram com esses objetos no desenvolvimento da atividade 2 (O consumo de cigarro), além de experiência colateral com o uso de ferramenta computacional no desenvolvimento dos modelos 2 e 3. Neste sentido, a familiaridade e a experiência colateral com os signos que se referem a esses objetos matemáticos possibilitaram a atribuição de significado.

Na Figura 5.38 apresentamos as evidências de atribuição de significado para o problema e os objetos matemáticos envolvidos na atividade 'Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil', além das ações cognitivas de A8 nas transições de diferentes fases da atividade de modelagem.

Figura 5.38– Evidências de atribuição de significado para problema e objetos matemáticos e ações cognitivas de A8 na atividade do 3.º momento de familiarização ‘Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil’

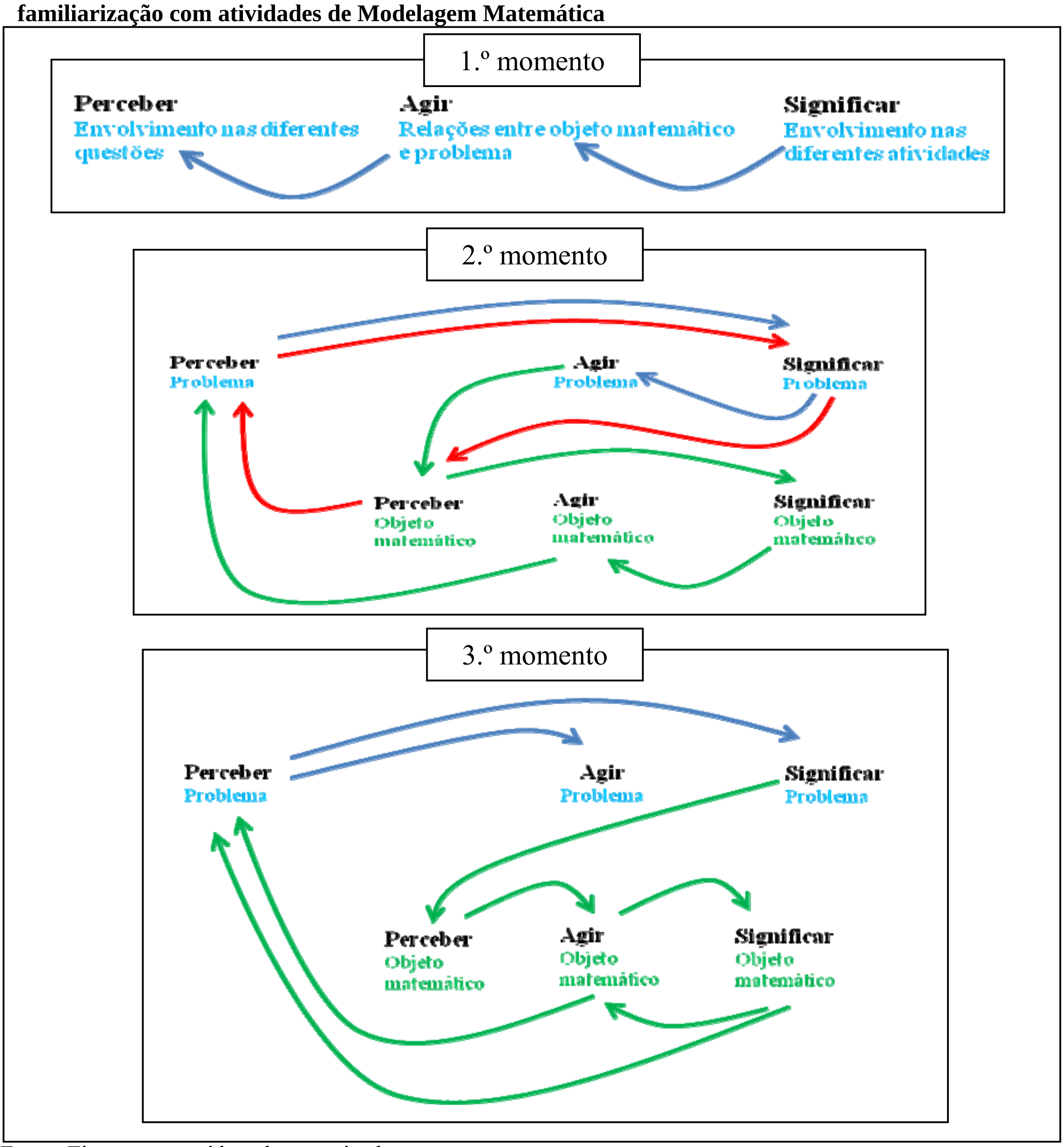


Fonte: Figura construída pela pesquisadora baseada em Almeida, Silva & Vertuan (2012).

Nesta atividade, a tríade de ações Perceber/Agir/Significar pode ser evidenciada iniciando a escolha da situação em que *Perceber* o que seria estudado, levou a *Agir* sobre ela, buscando informações em alguns sites, ao mesmo tempo em que *Significar* o problema foi uma ação que antecedeu o *Perceber* objetos matemáticos que seriam utilizados. Ao perceber os objetos matemáticos A8 teve a ação de *Agir* sobre os objetos matemáticos para *Significar* tais objetos dentro do contexto do problema percebido, ao mesmo tempo em que *Agir* sobre os objetos para a validação possibilitou obter respostas ao problema. A articulação entre as tríades Perceber/Agir/Significar e símbolo/significado para o objeto/interpretante foi efetivada nas ações perceber, agir e significar envolvidas nesta atividade.

Um mapeamento das tríades de ações Perceber/Agir/Significar em cada uma das atividades desenvolvidas por A8 segundo o momento de familiarização com atividades de Modelagem Matemática é apresentado na Figura 5.39. As setas azuis referem-se ao problema e as setas verdes relacionam-se ao(s) objeto(s) matemático(s); como no 2.º momento de familiarização com atividades de modelagem os alunos estavam trabalhando com dados para o problema que não foram levados em consideração para Agir sobre ele, utilizamos a cor vermelha nas setas para representar as ações com os dados simplificados utilizados pelos alunos.

Figura 5.39– Tríade de ações Perceber/Agir/Significar de A8 nos diferentes momentos de familiarização com atividades de Modelagem Matemática



Fonte: Figura construída pela pesquisadora.

As informações resumidas nas figuras que apresentam os ciclos de modelagem, bem como as que apresentam as tríades de ações Perceber/Agir/Significar sinalizam que os signos interpretantes que se referem ao problema e aos objetos matemáticos são produzidos por A8 em diferentes fases e momentos de familiarização com atividades de Modelagem

Matemática. É evidente que a atribuição de significado ocorre em fases diferentes conforme o momento no qual é desenvolvida a atividade.

5.6 DISCUSSÕES SOBRE A QUESTÃO DE PESQUISA

Levando em consideração a análise de como os signos interpretantes emergem nas diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática que constitui a problemática desta investigação, apresentamos reflexões sobre as questões específicas articulando as análises específica e geral realizadas.

Neste sentido, apresentamos considerações que são evidenciadas como possíveis reflexões para as questões:

1. Em atividades de Modelagem Matemática, que signos são produzidos pelos alunos em relação ao problema que emerge dessa atividade?
2. Que relações existem entre os signos interpretantes produzidos pelos alunos para o objeto matemático e para o problema em estudo em atividades de Modelagem Matemática?
3. A produção de signos interpretantes para o problema se modifica com a familiarização do aluno com atividades de Modelagem Matemática? De que forma?

Analisando os signos produzidos por A6 e A8 no desenvolvimento das atividades de modelagem nos diferentes momentos de familiarização estabelecemos algumas reflexões com relação à primeira questão norteadora de nossa pesquisa: *Em atividades de Modelagem Matemática, que signos são produzidos pelos alunos em relação ao problema que emerge dessa atividade?*.

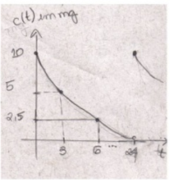
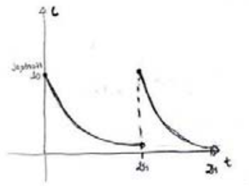
Nas atividades de modelagem analisadas sob um olhar semiótico com relação à atribuição de significado para o problema, o que evidenciamos são signos interpretantes produzidos por uma mente interpretadora — aluno-colaborador — que utiliza dos signos para representar o objeto em estudo. Os signos interpretantes produzidos são evidenciados por meio escrito, por falas e por gestos que o intérprete utiliza para representar o objeto. Considerando que o interpretante “não é qualquer signo, mas um signo que interpreta o fundamento” (SANTAELLA, 2005, p. 43), é que buscamos evidências que revelam algo sobre o objeto existente por entre os interpretantes produzidos.

O signo pode evocar, indicar ou representar o objeto, de acordo com a relação que este estabelece com o fundamento do objeto dinâmico. O único signo capaz de estabelecer a relação de representar o objeto é o símbolo e este está conectado a seu objeto em virtude de uma ideia da mente que o usa, sem o que tal conexão não existiria. Neste sentido, o símbolo somente existe na presença de um interpretante.

Em se tratando de signos relacionados com o problema, evidenciamos que A6 e A8 produzem interpretantes nas fases de inteiração — com a definição de hipóteses e variáveis, na simplificação de informações e na análise dos dados que estão em contato — e de interpretação dos resultados e validação — quando analisam o modelo matemático obtido e o valida para então apresentar uma resposta ao problema em estudo. O que fica evidente é que os alunos desde o início do desenvolvimento da atividade têm como objetivo chegar a uma resposta ao problema, ou seja, o problema é o foco do estudo. De forma geral, as ações dos alunos para chegar a uma resposta ao problema estão relacionadas à familiaridade com outra situação semelhante; à necessidade de argumentar no trabalho em grupo; à familiaridade com o objeto matemático; ao fato de não ficarem convencidos com resultados matemáticos; à necessidade de experienciar; à interação entre os alunos no grupo; à mudança de atitude diante da situação em estudo; ao envolvimento com o problema; à necessidade de representar a realidade.

Na atividade 1 — *Diazepan no organismo* —, constituída por três questões que foram desenvolvidas em conjunto com professora e pesquisadora, tanto A6 quanto A8, produziram signos interpretantes relacionados com o problema na definição de hipóteses e variáveis nas três questões; durante a validação na questão 2; na interpretação de resultados com a obtenção de resposta à questão 3. Para tanto, A6 e A8 produziram signos interpretantes por meio de familiaridade com outra situação, buscando informações no caderno; familiaridade com objetos matemáticos; intervenções de outros colegas do grupo; sugestões da professora e/ou pesquisadora; envolvimento com as questões. Na Figura 5.40 reunimos os signos interpretantes produzidos pelos alunos e que estão relacionados com o problema envolvido na atividade 1.

Figura 5.40– Signos interpretantes relacionados ao problema da atividade 1

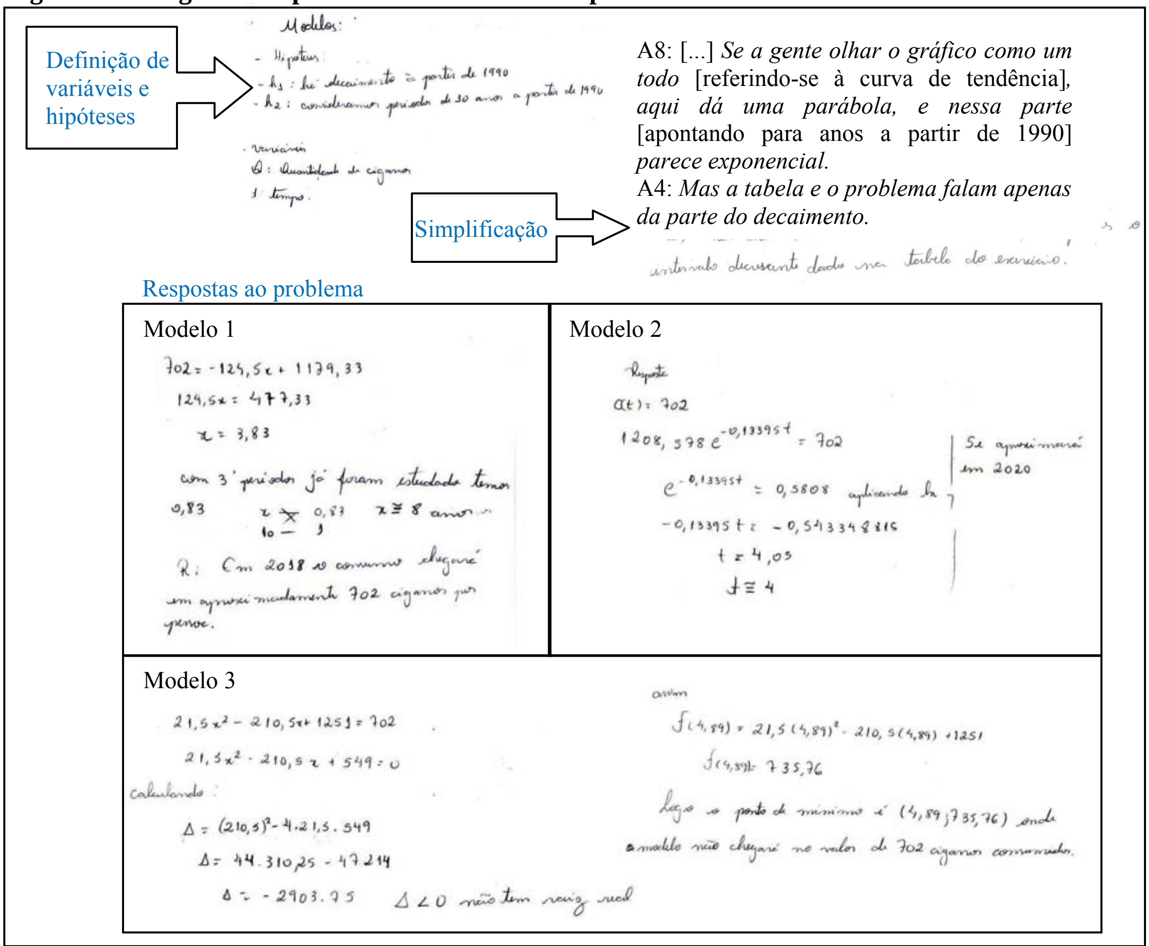
<table>
<tr><td colspan="3">Definição de hipóteses e variáveis</td></tr>
<tr><td></td><td>A6</td><td>A8</td></tr>
<tr><td>Questão 1</td><td>Hipótese:
a meia vida do diazepam (eliminação) é de 3 horas
Variáveis
Variável independente: t (tempo em horas)
" dependente: c (concentração do diazepam em mg)</td><td>Hipótese:
H_1: a meia vida é de 3 horas
Variáveis:
V. i. → t: tempo (em horas)
V. d. → c: concentração em mg
n → n:</td></tr>
<tr><td>Questão 2</td><td>O modelo encontrado para a concentração do Diazepam nas primeiras 24 horas é $\boxed{C(t) = 10\, e^{-0,23104\, t}}$
$C(24) = 0,039071$, deste modo
$C(t) = 10 \cdot e^{-0,23104\, t} + 0,039071$ para $t > 24$

Variáveis auxiliares
T: 24h
T_-: antes da ingestão da 2ª dose
T_+: depois da ingestão da 2ª dose
Variáveis
n: número de doses do medicamento
t: tempo em horas
C: concentração do medicamento</td><td>
variáveis
n → nº de doses do medic.
t → tempo (horas)
C → concentração do medicamento</td></tr>
<tr><td>Questão 3</td><td>Do Probl 02, obtivemos
$C(nt) = 10 \cdot \left(\frac{1 - e^{-0,23104(n+1) \cdot T}}{1 - e^{-0,23104}}\right) \cdot e^{-0,23104(t - nT)}$ $nT \leq t \leq (n+1)T$
n → doses de medicamento
t → tempo (h)
T → corresponde a 24h
$\lim_{n \to \infty} C(nt) = 10,03922425\,mg$

③ A meia vida é de 20 a 50 horas
A concentração de diazepam é de 10,03922425 mg
H_1: a meia-vida do diazepam na fase Terminal é de 35h.
- Variáveis
t → tempo (h)
c(t) → concentração de diazepam após t (horas) de suspender a ingestão do medicamento
n → variável auxiliar</td><td>→ meia vida é de 20 a 50 horas
→ concentração do medicamento é de 10,03922435 mg
H_1: a meia vida do diazepan na fase terminal é de 35h
variáveis:
t → tempo (h)
c(t) → concentração após t (horas) de suspender a ingestão do medicamento
n → variável auxiliar.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Validação</td></tr>
<tr><td></td><td>A6</td><td>A8</td></tr>
<tr><td>Questão 2</td><td>
<table>
<tr><td>n</td><td>t</td><td>C(t)</td><td>C (mg)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0
12
24</td><td>$10 \cdot e^{-0,23104t}$</td><td>10
0,625
0,0390625</td></tr>
<tr><td>1</td><td>24
36
48</td><td>$10,0390625\, e^{-0,23104(t-24)}$</td><td>10,0390625
0,627491407
0,03922</td></tr>
<tr><td>2</td><td>48
60
72</td><td>$10,03922\, e^{-0,23104(t-48)}$</td><td>10,003922
0,627451
0,039215</td></tr>
<tr><td>3</td><td>72
84
96</td><td>$10,039215\, e^{-0,23104(t-72)}$</td><td>10,039215
0,627450
0,039215</td></tr>
</table></td><td>Construindo um quadro para calcular a concentração do medicamento no organismo.
Sendo T = 24h
<table>
<tr><td>n</td><td>t</td><td>C(t)</td><td>c (mg)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0
12
24</td><td>$10 \cdot e^{-0,23104t}$</td><td>10
0,625
0,0390625</td></tr>
<tr><td>1</td><td>24
36
48</td><td>$10,0390625 \cdot e^{-0,23104(t-24)}$</td><td>10,0390625
0,627491407
0,03922</td></tr>
<tr><td>2</td><td>48
60
72</td><td>$10,03922\, e^{-0,23104(t-48)}$</td><td>10,03922
0,627451
0,039215</td></tr>
<tr><td>3</td><td>72
84
96</td><td>$10,039215\, e^{-0,23104(t-72)}$</td><td>10,039215
0,627450
0,039215</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td colspan="3">Interpretação de resultados</td></tr>
<tr><td></td><td>A6</td><td>A8</td></tr>
<tr><td>Questão 3</td><td>$\lim_{t \to \infty} c(t) = 0$
$C(t) \cong 0$
$0,03921569 \cdot e^{-0,019804205 \cdot t} = 0,000001$
$e^{-0,019804205t} = 0,000025499$
$-0,019804205t = \ln(0,000025499)$
$t = 465h$ ou $t \cong 31$ dias
Ou seja, depois de parar com o medicamento, haverá efeito no organismo nos próximos 31 dias.</td><td>$C(t) \cong 0$
$0,03921569 \cdot e^{-0,019804205 \cdot t} \cong 0,0000001$
$e^{-0,019804205t} = 0,00000254199$
$C_n\, e^{-0,019804205\, t} = \ln 0,000000025499$
$t \cong 765h$
$t \cong 31$ dias.</td></tr>
</table>

Fonte: Figura organizada pela pesquisadora, baseada em relatórios de A6 e A8.

Ao analisarmos a atividade 2 — *O consumo de cigarro* — desenvolvida por A8, signos interpretantes que se referem ao problema e que foram produzidos pelo intérprete estão destacados na Figura 5.32. Tais signos foram produzidos na definição de hipóteses e variáveis, na simplificação das informações que seriam utilizadas para o desenvolvimento da atividade e em respostas ao problema. Para tanto, A8 produziu signos interpretantes por meio do trabalho em grupo no qual decidiram que informações seriam utilizadas para o desenvolvimento da atividade; com a familiarização com atividades de modelagem para realizarem simplificações; na busca por resposta ao problema; na identificação do modelo que melhor representava a situação; na autonomia do desenvolvimento desta atividade de modelagem. Na Figura 5.41 reunimos os signos interpretantes produzidos por A8 e que estão relacionados com o problema da atividade 2.

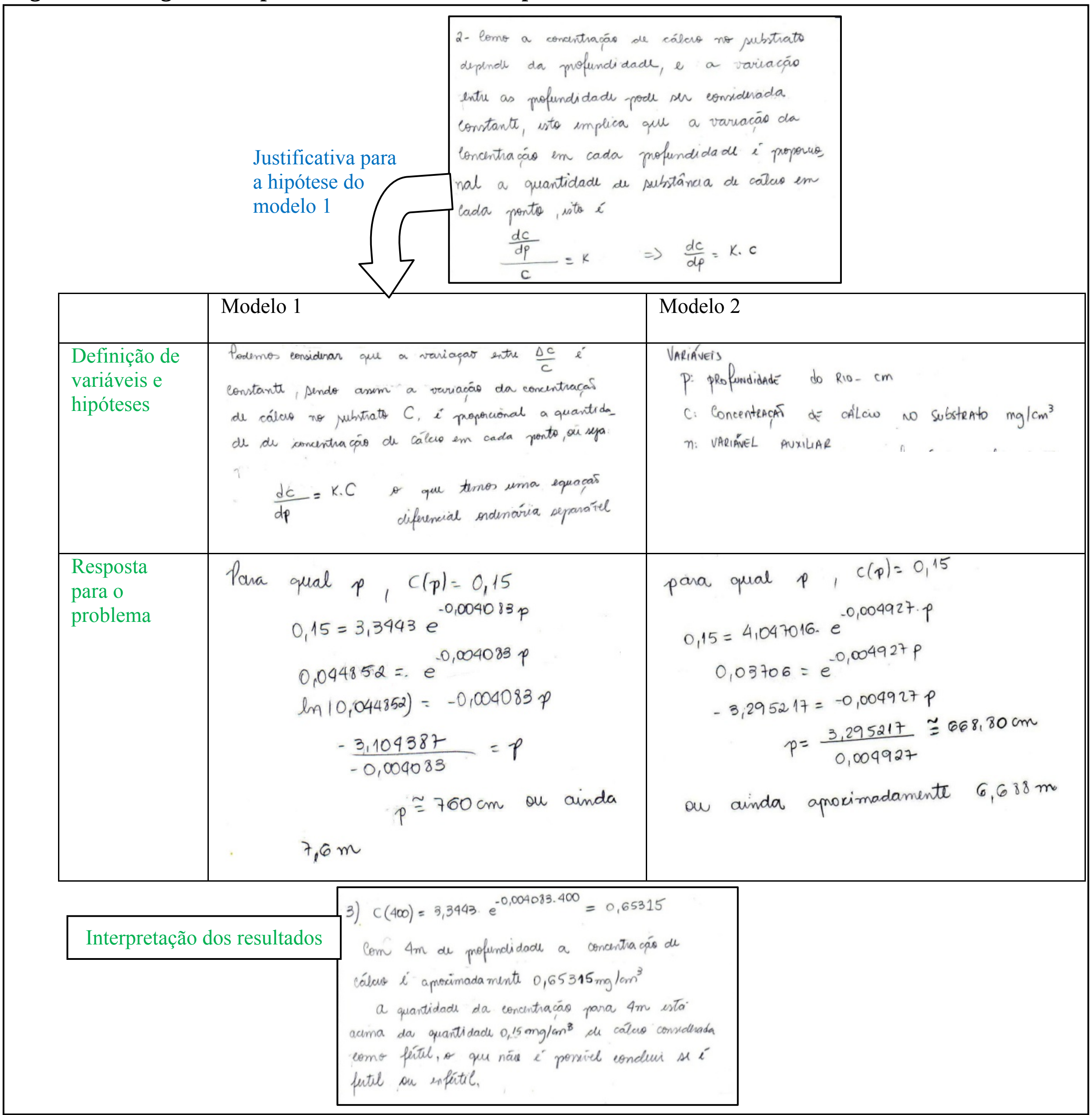
Figura 5.41– Signos interpretantes relacionados ao problema da atividade 2



Fonte: Figura organizada pela pesquisadora, baseada em relatório e gravação de A8.

A atividade 3 — *Cálcio no rio Limoeiro* — foi desenvolvida por A6 nas mesmas condições em que A8 realizou a atividade 2. Signos interpretantes associados ao problema e que foram produzidos por A6 estão destacados na Figura 5.13 no discorrer das análises específicas deste aluno-colaborador. Os signos interpretantes relacionados ao problema foram produzidos na definição de hipóteses e variáveis, na interpretação de resultados por meio da resposta ao problema, além de reflexões com relação aos resultados obtidos com o modelo matemático. Para tanto, A6 produziu signos interpretantes por meio do envolvimento com a atividade; nas relações que estabeleceu com o colega da dupla com referência as informações das quais dispunha; na intenção de responder ao problema; no trabalho em grupo no qual decidiram que informações seriam utilizadas para o desenvolvimento da atividade; na autonomia do desenvolvimento desta atividade de modelagem. Na Figura 5.42 apresentamos os símbolos produzidos por A6 e que estão diretamente relacionados com o problema da atividade 3.

Figura 5.42– Signos interpretantes relacionados ao problema da atividade 3



Fonte: Figura organizada pela pesquisadora, baseada em relatório de A6.

Quando analisamos os signos interpretantes que se referem ao problema na atividade 4 — *Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil* —, desenvolvida pelo grupo ao qual A8 fazia parte, evidenciamos que tais signos estão relacionados ao problema em estudo (Figura 5.34). O que fica evidente nesta atividade e que foi declarado pelos alunos, em todo o momento, que o que pretendiam era encontrar uma resposta ao problema. Neste sentido, todas as relações que estabeleceram na atividade estavam ancoradas no problema identificado para ser estudado. Esse fato também pode ser justificado pelo desenvolvimento da atividade 4 que foi similar ao da atividade 2. O que corresponde ao fato de a atividade 2 ser considerada uma referência para que os alunos pudessem desenvolver uma atividade por eles orientada.

Assim, os signos interpretantes relacionados ao problema ocorreram em todas as fases de desenvolvimento da atividade de modelagem, com menor ênfase na matematização, visto que o processo de obtenção do modelo matemático ocorreu por meio de recurso computacional. Esse recurso 'encurtou' o caminho para os alunos no quesito de cálculos exaustivos e onerosos. Na fase de inteiração, os alunos, a partir dos dados que haviam coletado, identificaram o problema que pretendiam estudar, simplificaram os dados, diminuindo e uniformizando as informações que utilizariam e dividiram o problema principal em outros dois problemas a ele relacionados. Para cada problema, foram definidas hipóteses e variáveis. Na fase de matematização e resolução, a partir da tendência dos dados que haviam coletado, obtiveram por meio computacional os modelos matemáticos referentes a cada um dos problemas, seguindo 'passos' realizados na Atividade 2. A fase de validação e interpretação contou com a obtenção de respostas para os problemas e com a conclusão que findou com a identificação do modelo matemático que melhor se ajustava a cada um dos problemas.

Na Figura 5.43 apresentamos os símbolos produzidos por A8 e que estão relacionados com o problema da atividade 4 — *Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil*.

Figura 5.43– Signos interpretantes relacionados ao problema da atividade 4

INTERAÇÃO

Problema

Nesse trabalho analisaremos em que ano possivelmente o Brasil chegará nessa produção de 90,6 milhões de toneladas de soja, conquistada pelos EUA na safra de 2010, e chegando nessa marca qual a área, necessária, em hectares para o seu cultivo no território nacional.

Dados simplificados

Tabela: Média da produtividade e área plantada de soja no Brasil

Intervalo	Ano	Média da Quantidade Produzida (tonelada)	Média da Área Plantada (hectare)
1	1990-1992	18.016.771,67	7.338.661,333
2	1993-1995	24.401.815,67	11.300.553
3	1996-1998	26.955.650	11.728.008,33
4	1999-2001	33.905.187	13.583.940,33
5	2002-2004	47.858.999,67	18.834.973
6	2005-2007	53.834.628,67	22.026.938,33
7	2008-2010	64.059.495,67	22.404.834,33

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

A8: [...] *a gente vai analisar em que ano possivelmente o Brasil vai conseguir chegar nesse recorde que os Estados Unidos conseguiram, visando que os Estados Unidos já estão chegando ao seu limite de produção em questão de expansão agrícola. Os Estados Unidos não têm tanta área mais disponível para a produção. Visando também pela condição climática, o Brasil aparece como um forte sucessor deles pelas condições climáticas que favorecem o desenvolvimento da cultura no país.* [...] *chegando nesse tempo, qual seria a área necessária para o Brasil?*

PROBLEMA 1

Definição de variáveis e hipóteses

Hipóteses

Consideraremos:

A produção de soja tende a manter seu crescimento no decorrer do tempo;

A tendência dos dados.

Variáveis do problema

$P(i)$: Produção de soja no decorrer do tempo;

i: intervalo de tempo (3 anos)

PROBLEMA 2

Definição de variáveis e hipóteses

Hipóteses

Consideraremos:

O aumento da área de plantio tende a manter seu crescimento no decorrer do tempo;

A tendência dos dados.

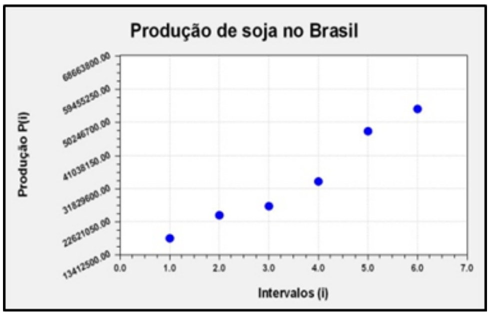
Variáveis do problema

$A(i)$: Área de plantio de soja em função do tempo;

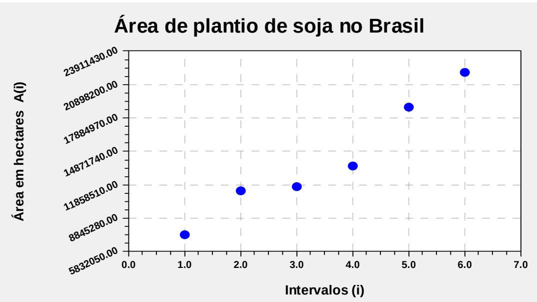
i: intervalo de tempo

MATEMATIZAÇÃO

Tendência dos dados (Problema 1)



Tendência dos dados (Problema 2)



INTERPRETAÇÃO

Respostas ao Problema (Problema 1)

Modelo 1: No intervalo $i=11$, que se refere ao período de 2020 a 2022, o Brasil já terá atingido a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja.

Modelo 2: Como $i \cong 9$, concluímos que entre 2014 e 2016 o Brasil atingirá a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja.

Modelo 3: Em 2013 o Brasil atingirá a marca de 90,6 milhões de toneladas de soja.

Conclusão: Concluímos assim que o Brasil atingirá a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja entre os anos de 2014 e 2016.

Respostas ao Problema (Problema 2)

Modelo 1: No período que o Brasil atingir a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja, aproximadamente 28.488.218,09 de hectares do território brasileiro estará sendo usado para a cultura de soja.

Modelo 2: A área ocupada pela cultura de soja quando o Brasil atingir a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja será de, aproximadamente, 29.161.397,18 hectares.

Modelo 3: Quando o Brasil atingir a produção de 90,6 milhões de toneladas de soja, a área ocupada por essa cultura será de 35.936.584,27 hectares.

Conclusão: Podemos concluir que a partir do modelo encontrado, a área ocupada pela cultura de soja até o ano de 2016 será de 29.161.397,18 hectares.

Fonte: Figura organizada pela pesquisadora, baseada em relatório de A8, gravação realizada durante a orientação e comunicação da atividade.

Na atividade 5 — *Poda de árvore* —, o grupo ao qual A6 pertencia, produziu signos interpretantes relacionados ao problema em todo o desenvolvimento da atividade, desde a escolha da situação-problema até a comunicação dos resultados com resposta para o problema (Figura 5.15).

O que fica evidente nesta atividade e que foi declarado pelos alunos é que, em todo o momento o que pretendiam era encontrar uma resposta ao problema, ao mesmo tempo em que buscavam relações matemáticas para tal abordagem.

Os signos interpretantes relacionados ao problema ocorreram em todas as fases de desenvolvimento da atividade de modelagem. Na fase de inteiração, os alunos, de posse da situação-problema que pretendiam abarcar, buscaram informações em manuais específicos e que davam suporte para o desenvolvimento da atividade, além de estabelecer relações com situações presenciadas no dia a dia; produziram os dados que seriam utilizados e identificaram o problema a ser estudado; envolveram-se no desenvolvimento da atividade; trabalharam em grupo o que possibilitou a produção de dados; experienciaram atividades de modelagem matemática.

Nas fases de matematização e resolução ocorreram articulações entre objetos matemáticos e dados coletados com o objetivo de obter informações que seriam acrescentadas à situação em estudo; buscaram saídas para impasses; buscaram aproximações com a realidade.

As fases de validação e interpretação dos resultados contaram com a obtenção de respostas para os problemas bem como interpretações para a situação-problema com apresentação da conclusão que obtiveram com o desenvolvimento da atividade.

Na Figura 5.44 apresentamos os signos interpretantes produzidos por A6 em seu grupo e que estão relacionados com o problema da atividade 5 — *Poda de árvore*.

Figura 5.44– Signos interpretantes relacionados ao problema da atividade 5

I N T E R A Ç Ã O

Sugestões de temas pela professora

busca de informações

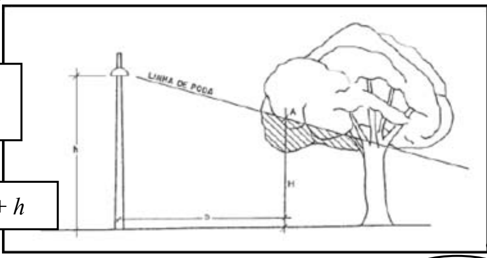
A6: *Para escolher o tema, tivemos a ideia de fazer uma análise sobre a iluminação pública.*
P: *Vocês escolheram algum local específico para estudar, coletar os dados...*
A9: [interrompendo] *a gente vai fazer geral e vamos testar com o modelo padrão de um local específico, a gente pensou em estudar a iluminação dos arredores do Lago Igapó.*

Vivência de A6

A6: *Caramba, mas a gente está fazendo um trabalho que trata da iluminação da rua, vamos unir o útil ao agradável!*

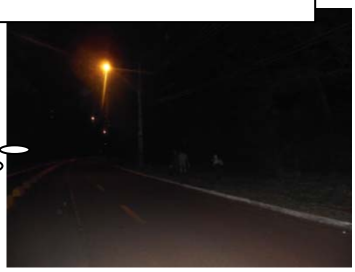
busca de informações

Manual de iluminação pública da Copel



$H = -0{,}26D + h$

Produção de dados
- Rua Serra dos Parecis
- Rua Bento Munhoz da Rocha Neto



Definição do problema

Determinar, de acordo com o tipo de poste, um modelo para o ponto de poda.

Definição de variáveis

Distância do poste ao galho mais baixo da árvore (D)
Altura que a luminária está montada (h)
Altura do ponto de poda (H)

Informações utilizadas

- A curva que descreve a linha de poda é uma reta;
- Altura da lâmpada no poste de 6*m*;
- Raio de iluminação de 22,5*m*;
- Distância entre dois postes de 40*m*.

MATEMATIZAÇÃO

Etapa 1 - Posição da lâmpada - altura da lâmpada é de 6 metros
Etapa 2 - Raio de iluminação - raio encontrado foi de 16 metros
Etapa 3 - Curva de iluminação:

$y = -0{,}375x + 6$ para os postes Padrão IP-01/80M/125M/70S
$y = -0{,}54375x + 8{,}7$ para os postes Padrão IP-03/250M/250S/400M

I N T E R P R E T A Ç Ã O

Resposta ao problema

Ponto de poda: Serra dos Parecis: 1,5 m de altura
Bento Munhoz da Rocha Neto: 2,2 m de altura

comunicação dos resultados por A6

A6: *No caso as variáveis que estão envolvidas no problema são: o h minúsculo a gente vai determinar a altura da lâmpada no poste, o H maiúsculo ali no ponto A* [apontando para o slide] *vai determinar a altura que deve ocorrer a linha de poda, ou seja, a altura que vai ocorrer, levando em consideração o seguinte: o galho mais baixo da árvore.... então, a análise é feita assim* [com gestos] *analisa a árvore, o ponto mais baixo que o galho estiver do chão que vai passar a linha de poda, ou seja, naquele ponto onde está o H a distância que é considerada é a distância d, a variável d no caso que é do poste até onde está ocorrendo a interseção da linha de poda com a linha vertical* [apontando para o slide e traçando com as mãos no ar a representação de uma reta perpendicular] *que está tendo ali no ponto A.*

Fonte: Figura organizada pela pesquisadora, baseada em relatório de A6, gravação realizada durante a orientação e comunicação da atividade.

Embora na fase de matematização e resolução não seja evidenciada relação direta dos signos interpretantes e problema — principalmente nas atividades 1, 2 e 3 —, como o foco dos alunos é obter uma resposta ao problema, os objetos matemáticos envolvidos estão implicitamente relacionados com o problema em estudo. Isso fica evidente quando os alunos afirmam da necessidade de validação do modelo matemático para a obtenção de resposta ao problema, buscando uma avaliação tanto para os procedimentos matemáticos quanto para a adequação da representação para a situação.

Fazendo uma análise dos signos interpretantes que se referem aos objetos matemáticos que emergiram durante o desenvolvimento das cinco atividades de modelagem presentes nesta pesquisa, podemos inferir que os objetos matemáticos estão atrelados com o problema, ou seja, 'na busca por uma resposta ao problema'. Com isso, não há sentido em fazer uma disjunção entre esses objetos — problema e objeto matemático — visto que eles se articulam e possibilitam o desenvolvimento de uma atividade de modelagem. O que fica evidente, de forma geral, é que os signos interpretantes relacionados ao problema estão diretamente associados às fases que iniciam e que finalizam a atividade de modelagem enquanto aqueles relativos aos objetos matemáticos são mais evidentes na fase de matematização e resolução.

Com isso, evidenciar *Que relações existem entre os signos interpretantes produzidos pelos alunos para o objeto matemático e para o problema em estudo em atividades de Modelagem Matemática?* nos remete a olhar para o problema vislumbrado para ser desenvolvido e o modelo matemático obtido para representar tal problema.

Na atividade 1 – *Diazepan no organismo* – o problema consiste na concentração de medicamento no organismo segundo algumas condições de ingestão. As relações entre o problema e os objetos matemáticos envolvidos estão em consonância com a dinâmica da ingestão do medicamento e se fazem específicos e necessários na medida em que essa 'dinâmica' é alterada (Figura 5.7). Ao tratar de decaimento de concentração, os alunos já relacionam tal abordagem ao comportamento exponencial que pode ser obtido por meio de função exponencial ou por equações diferenciais ordinárias. A necessidade de se recorrer a outros objetos matemáticos está atrelada a especificidades da situação e da generalização, como a soma de progressão geométrica. Na Figura 5.45 reunimos as questões relacionadas à atividade 1 bem como os objetos matemáticos oriundos para o desenvolvimento de cada questão. Para tanto utilizamos registros de A6 e A8.

Figura 5.45– Relações entre signos interpretantes produzidos pelos alunos para os objetos matemáticos e para o problema da atividade 1

Q1: *Qual é a concentração de Diazepan no organismo, no decorrer do tempo, se uma pessoa ingerir um comprimido de 10 mg?*

Função exponencial

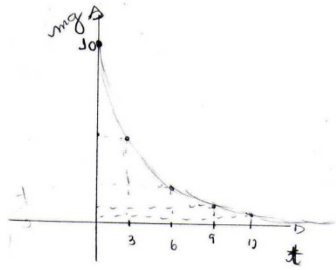
$C_{(n)} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

$C(t) = \frac{10}{2^{\frac{t}{3}}}$

$c(t) = 10\, e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\frac{t}{3}}$

$C(t) = 10 \cdot e^{\frac{t}{3}(-0,693147)}$

$C(t) = 10\, e^{-0,23104}$



Equações Diferenciais Ordinárias

$\frac{dc}{dt} = kc$

$dc = kc\,dt$

$\frac{dc}{c} = k\,dt$

$\int \frac{dc}{c} = \int k\,dt$

$\ln c = kt + \alpha$

$c = e^{kt+\alpha}$

$c = \beta e^{kt}$ $\quad \beta = e^{\alpha}$

$t = 0$; $c = 10$; $\beta = 10$ | $t = 3$; $c = 5$; $5 = 10 \cdot e^{3k}$; $e^{3k} = \frac{1}{2}$ | $\ln e^{3k} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$; $3k = -0,693147$; $k = -0,23104$

$\therefore\ c(t) = 10 \cdot e^{-0,23104\,t}$

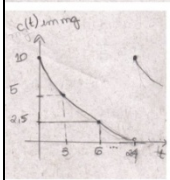
$\lim_{t \to \infty} c(t) = \lim_{t \to \infty} 10 \cdot e^{-0,23104t} = 0$

Q2: *Qual é a concentração de Diazepan no organismo, no decorrer do tempo, se o paciente ingerir um comprimido de 10 mg a cada 24 horas?*

O modelo encontrado para a concentração do Diazepam nas primeiras 24 horas é $\boxed{C(t) = 10 \cdot e^{-0,23104 \cdot t}}$

$C(24) = 0,039071$, deste modo

$c(t) = 10 \cdot e^{-0,23104t} + 0,039071$ para $t > 24$



Variáveis auxiliares

T: 24h

T_-: antes da ingestão da 2º dose

T_+: depois da ingestão da 2º dose

Variáveis

n: número de doses do medicamento

t: tempo em horas

C: concentração do medicamento

Antes da ingestão vamos considerar a expressão (1)

$C(T_-) = 10 \cdot e^{-0,23104t}$

Após tomar a 2º dose

$C(T_+) = C(24) + 10$

$C(T_+) = 10 \cdot e^{-0,23104T} + 10$ $\quad t \geq T \quad (T: 24 \text{ horas})$

$t \leq 48 \quad 48 = 2T$

$C(T_+) = 10\left(e^{-0,23104T} + 1\right)$ para $T \leq t \leq 2t$

Após a ingestão da 3º dose de diazepam

$C(2T_+) = C(2T_-) + 10$

$C(2T_+) = \left[\underbrace{10\left(1 + e^{-0,23104T}\right) \cdot e^{-0,23104(2t-T)}}_{C(t=2T)}\right] + 10$

$C(2T_+) = 10 \cdot \left(1 + e^{-0,23104T} + e^{-0,23104 \cdot 2T}\right)$

Deste modo a expressão que representa a ingestão de (n+1) doses, pode ser dada por

$\boxed{C(nt) = 10 \cdot \left(1 + e^{-0,23104T} + e^{-0,23104 \cdot 2T} + \dots + e^{-0,23104nt}\right) \cdot e^{-0,23104(t-nT)}}$ (2)

$nt \leq t \leq (n+1)T$

Q2: *Após 4 dias de tratamento, a concentração do medicamento no organismo se estabiliza. Analisar o decaimento da concentração quando o paciente suspende a ingestão do medicamento.*

A concentração de diazepam no organismo é de

t(h)	n	C(t)
0	0	0,03921569
35	2	$\frac{0,03921569}{2} = \frac{C_0}{2}$
70	3	$\frac{C_0}{4}$
⋮		⋮

Logo $C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot C_0$, em que $C_0 = 0,3921569$ mg

$\therefore\ C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 0,03921569$

Usando variáveis contínuas

$C(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{35}} \cdot 0,03921569$

$C(t) = 0,03921569 \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\frac{t}{35}}$

$C(t) = 0,03921569 \cdot e^{\frac{t}{35} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

$C(t) = 0,03921569 \cdot e^{-0,6931 \cdot \frac{t}{35}}$

$\boxed{C(t) = 0,03921569 \cdot e^{-0,019804 \cdot t}}$

$\lim_{t \to \infty} Ct = 0$

Fonte: Figura organizada pela pesquisadora, baseada nos relatórios de A6 e A8.

Na atividade 2 – *O consumo de cigarro* – o problema consiste em investigar em que ano o número de cigarros consumido por pessoa volta ao número contabilizado em 1950. As relações entre o problema e os objetos matemáticos envolvidos estão na análise do decrescimento da quantidade de cigarros consumidos entre os anos de 1990 e 2010. A partir da tendência dos dados, os alunos aproximaram a situação por meio dos objetos matemáticos função linear, função quadrática e função exponencial. Neste sentido, o problema se relaciona com os objetos por meio do comportamento dos dados apresentados na situação. Na Figura 5.46 reunimos o problema, a informação que explicita o decrescimento dos dados por meio da tabela e os modelos matemáticos obtidos. Análises com relação ao modelo quadrático se fazem presentes, pois tal modelo foi desconsiderado pelos alunos por não se relacionar com a situação em estudo, pois ao encontrar o ponto de mínimo este se encontrar num valor superior ao proposto.

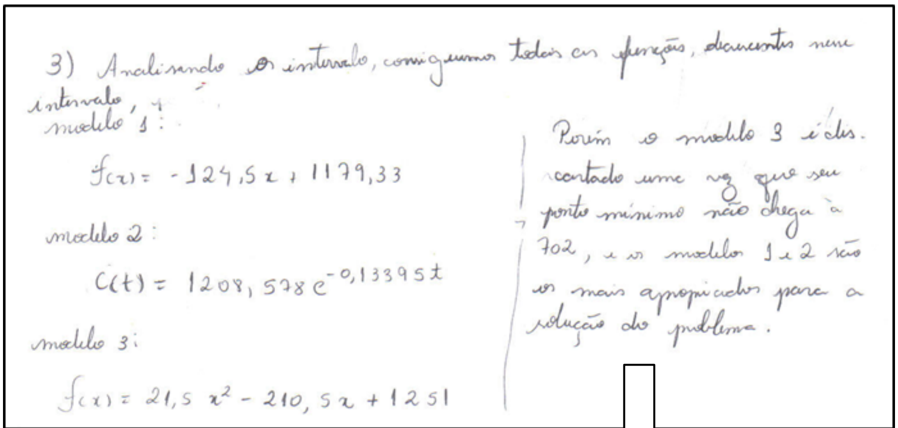
Figura 5.46– Relações entre signos interpretantes produzidos pelos alunos para os objetos matemáticos e para o problema da atividade 2

Considerando essa suposição, estamos interessados em investigar em que época o número de cigarros consumidos por ano por pessoa volta a se aproximar, pelo menos, da quantidade consumida no ano de 1950.

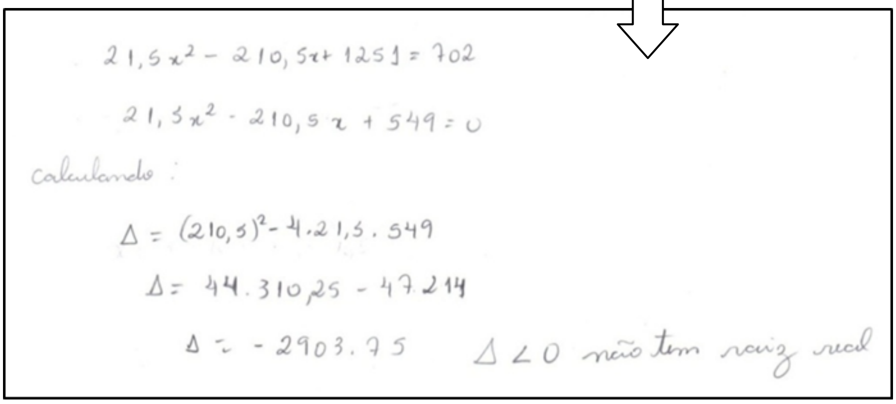
Tabela - Número de cigarros consumidos por ano por pessoa

Ano (t)	Número de cigarros
1990	1062
2000	916
2010	813

Modelos matemáticos obtidos


3) Analisando os intervalo, conseguimos todas as funções, decrescentes nesse intervalo,
modelo 1:
$f(x) = -124,5x + 1179,33$
modelo 2:
$C(t) = 1208,578\, e^{-0,13395t}$
modelo 3:
$f(x) = 21,5x^2 - 210,5x + 1251$

Porém o modelo 3 é descontado uma vez que seu ponto mínimo não chega à 702, e os modelos 1 e 2 são os mais apropriados para solução do problema.


$21,5x^2 - 210,5x + 1251 = 702$
$21,5x^2 - 210,5x + 549 = 0$
Calculando:
$\Delta = (210,5)^2 - 4 . 21,5 . 549$
$\Delta = 44.310,25 - 47.214$
$\Delta = -2903,75$ $\Delta < 0$ não tem raiz real

Fonte: Figura organizada pela pesquisadora, baseada no relatório de A8.

Na atividade 3 – *Cálcio no rio Limoeiro* – o problema consiste em investigar a concentração de cálcio no substrato de acordo com a profundidade. A partir das informações apresentadas na Tabela 4.3, A6 evidenciou que a taxa de variação de cálcio com relação à profundidade é proporcional à concentração de cálcio em cada profundidade. Com isso, problema e objetos matemáticos se relacionam com relação à diminuição da taxa de concentração de cálcio, ou seja, um decaimento exponencial no qual os alunos abordam Equações Diferenciais Ordinárias e Método dos Mínimos Quadrados. Na Figura 5.47 reunimos o problema, a informação que explicita o decrescimento dos dados por meio da tabela e os modelos matemáticos obtidos.

Figura 5.47– Relações entre signos interpretantes produzidos pelos alunos para os objetos matemáticos e para o problema da atividade 3

Considerando que a produção de fitoplâncton requer uma concentração de cálcio de 150 mg/L, ou seja, 0,15mg/cm^3, até qual profundidade do rio Limoeiro esta produção ainda pode acontecer?

Tabela - Concentração de cálcio no rio Limoeiro

Profundidade do rio (cm)	**Concentração de Cálcio no substrato** (mg/cm^3)
30	2,958
90	2,316
150	1,641
210	1,264
270	0,893
330	0,697

Fonte: Borssoi, 2004

Podemos considerar que a variação entre $\frac{\Delta c}{c}$ é constante, sendo assim a variação da concentração de cálcio no substrato C, é proporcional a quantidade de concentração de cálcio em cada ponto, ou seja:

$\frac{dc}{dp} = K.C$ o que temos uma equação diferencial ordinária separável

$$\frac{dc}{c} = K.dp$$
$$\int \frac{dc}{c} = K \int dp$$
$$\ln C = K.p + m$$
$$C = e^{K.p+m}$$
$$C = e^{Kp} \cdot e^{m} \qquad \beta = e^m$$
$$C = \beta . e^{Kp}$$
$$C(p) = \beta e^{Kp}$$

$$\begin{cases} 2{,}958 = \beta . e^{30K} \Rightarrow \ln(2{,}958) = \ln(\beta . e^{30K}) \\ \qquad 1{,}0845 = \ln\beta + 30K \quad (I) \\ 2{,}316 = \beta . e^{90K} \Rightarrow 0{,}8398 = \ln\beta + 90K \quad (II) \end{cases}$$

Subtraindo (I) e (II) temos
$$0{,}2447 = -60K$$
$$K = -0{,}004083$$

$$\begin{cases} 0{,}8398 = \ln\beta + 90K \\ \ln\beta = 0{,}8398 + 0{,}36747 \\ \ln\beta = 1{,}20727 \\ \beta = 3{,}3443 \end{cases}$$

$$\boxed{C(p) = 3{,}3443\, e^{-0{,}004083p}}$$

Linearização para obter uma função que melhor se ajusta aos pontos

x_i n	$c(n)$	y_i $\ln(c_n)$
1	2,958	1,0845
2	2,316	0,8398
3	1,641	0,4953
4	1,264	0,2342
5	0,793	-0,1131
6	0,697	-0,3609

Pelo método dos mínimos quadrados

$\sum x_j^2 = 91$

$\sum x_j = 21$

$\sum x_j . y_j = 2{,}4559$

$\sum y_j = 2{,}1798$

$n = 6$

$$\begin{cases} 91a + 21b = 2{,}4559 \\ 21a + 6b = 2{,}1798 \end{cases} \times(-3{,}5)$$

$$\begin{cases} 91a + 21b = 2{,}4559 \\ -73{,}5a - 21b = -7{,}6293 \\ 17{,}5a = -5{,}1734 \\ a = -0{,}295622 \\ b = 1{,}39798 \end{cases}$$

$y = -0{,}295622n + 1{,}39798$ mas $y = \ln(c_n)$

$$\ln C = e^{-0{,}295622n} \cdot e^{1{,}39798}$$
$$C = 4{,}047016 . e^{-0{,}295622n}$$
$$\boxed{C = 4{,}047016\, e^{-0{,}0049270p}}$$
$$C(p) = 4{,}047016 . e^{-0{,}0049270 . p}$$

Fonte: Figura organizada pela pesquisadora, baseada no relatório de A6.

Na atividade 4 – *Desenvolvimento da cultura de soja no Brasil* – o problema consiste em investigar em que ano a produção de soja no Brasil vai atingir a marca de 90,6 milhões de toneladas e qual a área necessária para esse cultivo. Levando em consideração a tendência dos dados do problema os objetos matemáticos que se aproximaram consistem em função linear, função quadrática e função exponencial. Neste caso, as relações entre problema e objetos matemáticos estão atreladas ao que os dados parecem representar quando plotados no plano cartesiano. Na Figura 5.48 reunimos o problema, os dados apresentados na tabela, a tendência dos dados plotados no plano cartesiano e os modelos matemáticos obtidos.

Figura 5.48– Relações entre signos interpretantes produzidos pelos alunos para os objetos matemáticos e para o problema da atividade 4

Nesse trabalho analisaremos em que ano possivelmente o Brasil chegará nessa produção de 90,6 milhões de toneladas de soja, conquistada pelos EUA na safra de 2010, e chegando nessa marca qual a área necessária, em hectares, para o seu cultivo no território nacional.

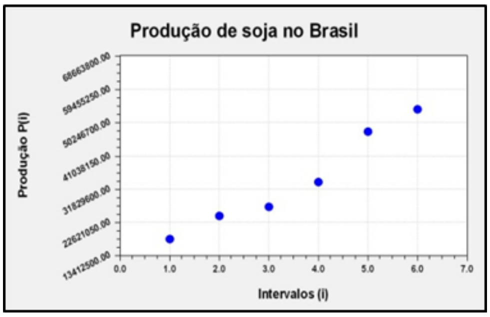
Tabela: Média da produtividade e área plantada de soja no Brasil

Intervalo	Ano	Média da Quantidade Produzida (tonelada)	Média da Área Plantada (hectare)
1	1990-1992	18.016.771,67	7.338.661,333
2	1993-1995	24.401.815,67	11.300.553
3	1996-1998	26.955.650	11.728.008,33
4	1999-2001	33.905.187	13.583.940,33
5	2002-2004	47.858.999,67	18.834.973
6	2005-2007	53.834.628,67	22.026.938,33
7	2008-2010	64.059.495,67	22.404.834,33

Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

PROBLEMA 1

Tendência dos dados



Modelo linear

$P(i) = 7782040,964i + 7305057,343$

Modelo quadrático

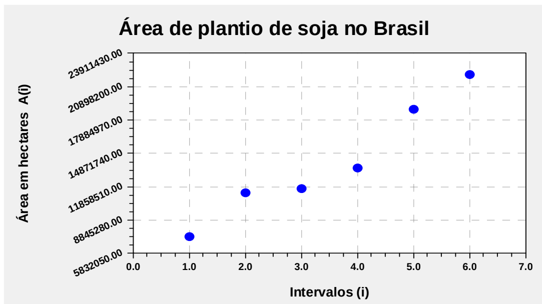
$P(i)$=14493148,624+2989980,06536 i+599007,615357 i^2

Modelo exponencial

$P(i)$=14998380 $e^{0,2129326\,i}$

PROBLEMA 2

Tendência dos dados



Modelo linear

$A(i) = 2634287,654i + 4779629,2$

Modelo quadrático

$A(i)$=5164632,47286+2377768,79845 i+32056,8213095 i^2

Modelo exponencial

$A(i)$=6849480 $e^{0,1841759\,i}$

Fonte: Figura organizada pela pesquisadora, baseada no relatório de A8.

Na atividade 5 – *Poda de árvore* – o problema consiste em determinar o ponto de poda de uma árvore de acordo com o tipo de poste de iluminação próximo a ela. Na produção dos dados para o desenvolvimento do problema, o grupo de A6 estabelece relações com diferentes objetos matemáticos que têm conhecimento, além disso, lançam mão de conteúdos matemáticos mais sofisticados para fazerem uma aproximação do modelo obtido com a realidade circundante. Na Figura 5.49 reunimos o problema, os objetos matemáticos oriundos da produção dos dados, os modelos matemáticos obtidos, bem como representações no plano tridimensional com o intuito de estabelecer uma aproximação com a realidade.

Figura 5.49– Relações entre signos interpretantes produzidos pelos alunos para os objetos matemáticos e para o problema da atividade 5

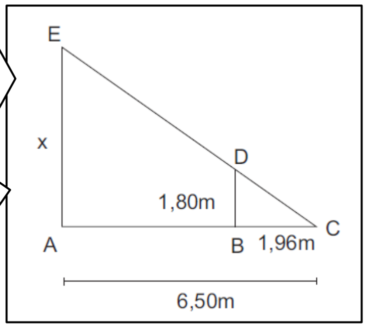
Determinar, de acordo com o tipo de poste, um modelo para o ponto de poda.

Produção dos dados

Etapa 1 - Posição da lâmpada - altura da lâmpada é de 6 metros

Para o cálculo do posicionamento da lâmpada no poste, utilizamos do conceito de triângulos semelhantes da seguinte forma:
Fizemos a medição da sombra e da altura do A9; e medimos também a distância do centro de iluminação até o final da sombra do mesmo.

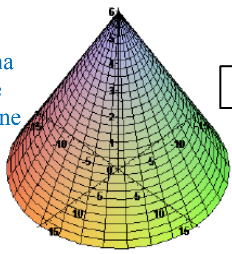
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{6,5}{1,96} = \frac{x}{1,80} \Rightarrow 5,969387755 \text{ lou } x \approx 6$$



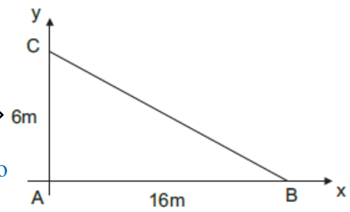
Etapa 2 - Raio de iluminação - raio encontrado foi de 16 metros, utilizando trena.

Etapa 3 - Curva de iluminação

Sólido que descreve a forma de iluminação é dada por um cone



Projeção no plano cartesiano

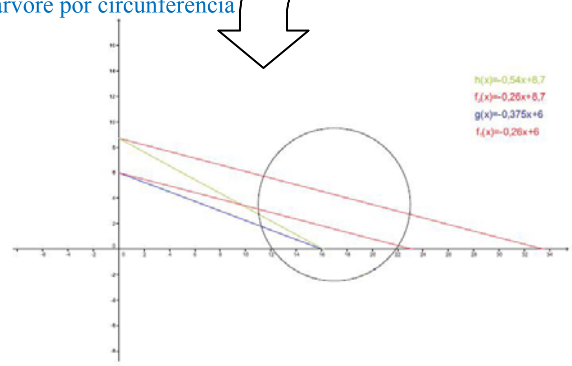


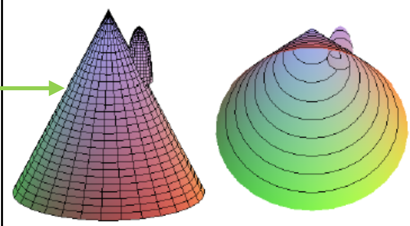
equação da reta

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{e} \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$y = -0,375x + 6$ para os postes Padrão IP-01/80M/125M/70S
$y = -0,54375x + 8,7$ para os postes Padrão IP-03/250M/250S/400M

Representação gráfica da curva de iluminação para cada poste, da equação da Copel e representação de árvore por circunferência





Representação tridimensional da interseção do cone de iluminação da Rua Bento Munhoz da Rocha Neto com a esfera (copa da árvore)

Fonte: Figura organizada pela pesquisadora, baseada no relatório de A6.

No que concerne a uma reflexão com relação à terceira questão norteadora — *A produção de signos interpretantes para o problema se modifica com a familiarização do aluno com atividades de Modelagem Matemática? De que forma?* — podemos inferir que com a familiarização com atividades de modelagem que a produção de signos interpretantes relacionados ao problema se intensifica. Isso fica evidente ao compararmos os signos interpretantes produzidos pelos alunos para o problema em diferentes atividades desenvolvidas nos três momentos de familiarização e que foram apresentados nas Figuras 5.40, 5.41, 5.42, 5.43 e 5.44. O que podemos evidenciar é que com a familiarização com atividades de Modelagem Matemática signos interpretantes permeia todas as fases de desenvolvimento da atividade no 3.º momento, isso porque os intérpretes apresentam um envolvimento maior com a atividade quando comparado com os outros primeiro e segundo momentos.

Apesar de termos consciência da complexidade que envolve o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, análises de como emergem os signos interpretantes podem ser evidenciadas de modo a termos indícios de atribuição de significado pelo aluno para o objeto em atividades matemáticas, em particular, em atividades de Modelagem Matemática.

CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o início de nossa pesquisa, durante a coleta de dados, a seleção dos alunos-colaboradores, e o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática, nossa preocupação era a de encontrar elementos que pudessem auxiliar na busca de reflexões para as questões norteadoras que colocamos relativas à problemática: *como emergem os signos interpretantes nas diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática*.

A partir das reflexões que fizemos, tendo em vista esta problemática e as questões norteadoras, retomamos aqui, de modo geral, as compreensões construídas ao longo da pesquisa, que são oriundas de evidências realizadas com base nas atividades analisadas. A partir dessas reflexões surgiram contextos de pesquisas futuras que aqui enunciamos.

Para a realização da pesquisa, desenvolvemos atividades de Modelagem Matemática com alunos do 4.º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina no 2.º semestre de 2011, numa disciplina de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, segundo os momentos de familiarização — 1.º momento, 2.º momento e 3.º momento — caracterizados por Almeida & Dias (2004) e apresentados no Capítulo 1. Nas análises específicas e geral levamos em consideração os signos interpretantes produzidos por dois alunos-colaboradores (A6 e A8) escolhidos segundo critérios relacionados à participação em todas as atividades, respostas a questionários e entrevistas. As atividades aqui analisadas, com base em aspectos teóricos da Teoria Fundamentada de Kathy Charmaz, foram desenvolvidas por ambos os alunos trabalhando individualmente ou em seu grupo para evidenciar a atribuição de significado para o problema e o objeto matemático envolvidos nas atividades nas quais participaram.

A Teoria Fundamentada nos possibilitou ‘quebrar’ os dados coletados e ‘reorganizá-los’ de modo a apresentar evidências no que tange à problemática de nossa pesquisa. Para tanto, nas análises específicas utilizamos dados *in vivo* que correspondem a signos interpretantes produzidos durante o desenvolvimento de cada atividade, conforme salienta a codificação inicial. Ainda nas análises específicas, por meio da codificação axial, retomamos a pesquisa de campo (por meio de questionários e entrevistas) com o objetivo de buscar evidências que nos auxiliassem a elucidar a ocorrência da atribuição de significado para os objetos em estudo que não foram evidenciadas com os dados *in vivo* para, então, abarcarmos considerações sobre o foco de nossa pesquisa na análise geral embasadas na codificação focalizada.

Em sentido peirceano, há evidências de atribuição de significado para o objeto por meio de *familiaridade*; na *intenção* de significar o objeto; como uma *ideia* que se remete ao objeto; como *consequência* futura para abarcar o objeto; por meio de *experiência colateral* com o objeto. Neste sentido, Peirce (1989, p. 16) se refere ao significado "para denotar o pretendido interpretante de um símbolo".

Em linhas gerais, um símbolo *representa* seu objeto, representa aquilo que a lei determina para que ele represente. Além de estar conectado com o objeto, o símbolo relaciona-o com a mente usuária. Neste sentido, o símbolo, segundo Peirce (2005, p. 29), "só pode ser compreendido com a ajuda de seu Interpretante", ou seja, o símbolo perde seu caráter de signo se não existir um interpretante. Alinhada às ideias de Peirce, Santaella (2007, p. 25) considera que "é no interpretante que se realiza, por meio de uma regra associativa, uma associação de ideias na mente do intérprete, associação esta que estabelece conexão entre o signo e seu objeto".

Como no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, o intérprete (aluno) produz interpretantes por meios escritos, falados e gesticulados, o que pode ser analisado diz respeito à atribuição de significado para o objeto que se pretende investigar, ou seja, o problema e os objetos matemáticos que emergem destas atividades. Neste sentido, reflexões sobre a problemática de nossa pesquisa — *Como emergem os signos interpretantes nas diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática?* — deixam evidentes que os signos interpretantes emergem com as ações dos intérpretes frente a cada uma das fases que caracterizam o desenvolvimento de uma atividade de modelagem e esses signos se modificam com a familiarização com atividades desta natureza.

De forma geral, no primeiro momento de familiarização com atividades de modelagem, os signos interpretantes produzidos na fase de inteiração estão relacionados à busca de informações das quais o intérprete têm familiaridade tanto com relação à situação quanto com os objetos matemáticos a ela relacionados; a intervenções feitas durante o desenvolvimento da atividade tanto do professor quanto dos colegas de sala; ao envolvimento com a situação em estudo. Além disso, a necessidade de experienciar o desenvolvimento com atividades de modelagem é uma ação que se configura na inteiração e que está presente no 1.º momento.

No 2.º momento de familiarização, as ações do intérprete para a produção de interpretantes na fase de inteiração consistem nos argumentos realizados no trabalho em grupo; nas percepções do que está ocorrendo; uma maior familiarização com atividades de modelagem, detectando a necessidade de se realizarem simplificações nos dados; na familiaridade com atividades desta natureza.

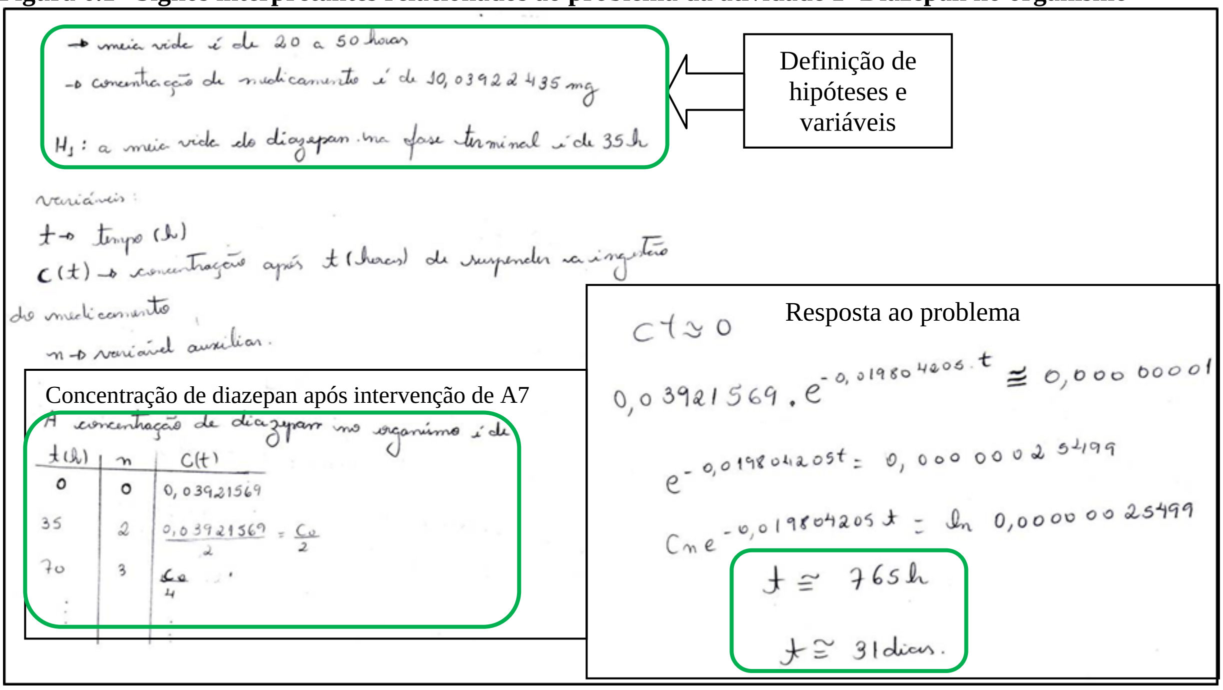
A produção de interpretantes na fase de inteiração no 3.º momento está relacionada com o tipo de problema aos quais os intérpretes se propuseram a investigar. Se o problema consiste em algo similar ao que foi desenvolvido no 1.º e/ou 2.º momentos, então a familiaridade e a similaridade interferem na produção de interpretantes. No caso de o problema ser algo que não é familiar aos intérpretes, a produção de interpretantes na fase de inteiração está relacionada ao envolvimento com a situação que pretendem investigar; bem como na criatividade que os intérpretes têm que apresentar para efetivar a gênese da atividade. Em ambos os casos, podemos ainda inferir que as ações de experienciar atividades de modelagem proporcionam a produção de signos interpretantes no qual o trabalho em grupo é decisivo na coleta de dados e na definição do problema.

As fases de matematização e resolução estão relacionadas a signos interpretantes produzidos pelos intérpretes para representar objetos matemáticos. Nos três momentos de familiarização a ação dos alunos consiste em buscar informações para abarcar os objetos matemáticos; nas simplificações dos dados com o objetivo de auxiliar na dedução do modelo matemático; em aproximações com a realidade circundante; na intenção de responder o problema. O que difere é que com a familiarização, a autonomia dos alunos com relação à produção de interpretantes na matematização se intensifica. No primeiro momento a produção de interpretantes para o os objetos matemáticos está relacionada às articulações feitas pela professora e/ou pesquisadora, no segundo e terceiro momentos os intérpretes, em grupo, realizam tais articulações que possibilitam a produção de interpretantes.

Os signos interpretantes produzidos nas fases de interpretação de resultados e validação estão inseridos na busca de uma solução, uma resposta ao problema. Para tanto, tais interpretantes são produzidos por meio do envolvimento com o problema pelos intérpretes; da identificação do modelo que 'melhor' represente a situação; na necessidade de argumentar; no fato de os alunos não ficarem convencidos com os resultados matemáticos; nas aproximações com a realidade. Essas ações estão caracterizadas nos três momentos de familiarização com atividades de modelagem e correspondem ao 'retorno' para a situação inicial.

Diante dos primeiros contatos com atividades de modelagem evidenciamos que signos interpretantes produzidos pelo aluno podem estar relacionados ao problema em estudo e são sinalizados em 'trechos' do desenvolvimento da atividade quando o aluno se refere ao problema. Na Figura 6.1 reapresentamos recortes do desenvolvimento da atividade '*Diazepan no organismo*' em que podemos evidenciar signos interpretantes relacionados ao problema nas fases de matematização, resolução, validação e interpretação de resultados, caracterizadas por Almeida, Silva & Vertuan (2012). Esta atividade foi desenvolvida como caracterizado no 1.º momento de familiarização com atividades de modelagem.

Figura 6.1– Signos interpretantes relacionados ao problema da atividade 1 'Diazepan no organismo'



Fonte: Relatório entregue por A8. Destaques realizados pela pesquisadora.

O que fica evidente é que por meio da familiarização com atividades de modelagem, a produção de signos interpretantes para o problema se dissemina por todas as fases de desenvolvimento da atividade, pois o aluno sente 'o peso da autonomia' e se preocupa com a resolução do problema. Na Figura 6.2 reapresentamos recortes do desenvolvimento da atividade '*Poda de árvore*' desenvolvida como caracterizado no 3.º momento de familiarização em que podemos evidenciar signos interpretantes em todas as fases de desenvolvimento da atividade — inteiração, matematização, resolução, validação e interpretação de resultados.

Figura 6.2– Signos interpretantes relacionados ao problema da atividade 5 'Poda de árvore'

INTEIRAÇÃO

Sugestões de temas pela professora

busca de informações

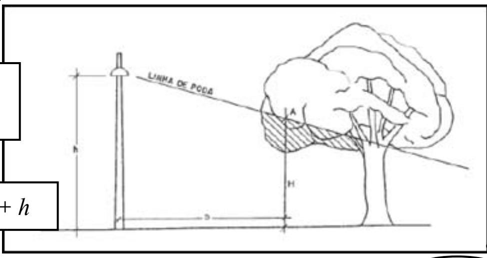
A6: *Para escolher o tema, tivemos a ideia de fazer uma análise sobre a iluminação pública.*
P: *Vocês escolheram algum local específico para estudar, coletar os dados...*
A9: [interrompendo] *a gente vai fazer geral e vamos testar com o modelo padrão de um local específico, a gente pensou em estudar a iluminação dos arredores do Lago Igapó.*

Vivência de A6

A6: *Caramba, mas a gente está fazendo um trabalho que trata da iluminação da rua, vamos unir o útil ao agradável!*

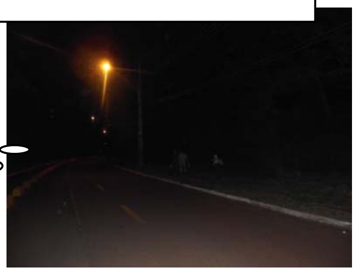
busca de informações

Manual de iluminação pública da Copel



$H = -0{,}26D + h$

Produção de dados
- Rua Serra dos Parecis
- Rua Bento Munhoz da Rocha Neto



Definição do problema

Determinar, de acordo com o tipo de poste, um modelo para o ponto de poda.

Definição de variáveis

Distância do poste ao galho mais baixo da árvore (D)
Altura que a luminária está montada (h)
Altura do ponto de poda (H)

Informações utilizadas

- A curva que descreve a linha de poda é uma reta;
- Altura da lâmpada no poste de 6*m*;
- Raio de iluminação de 22,5*m*;
- Distância entre dois postes de 40*m*.

MATEMATIZAÇÃO

Etapa 1 - Posição da lâmpada - altura da lâmpada é de 6 metros
Etapa 2 - Raio de iluminação - raio encontrado foi de 16 metros
Etapa 3 - Curva de iluminação:
$y = -0{,}375x + 6$ para os postes Padrão IP-01/80M/125M/70S
$y = -0{,}54375x + 8{,}7$ para os postes Padrão IP-03/250M/250S/400M

INTERPRETAÇÃO

Resposta ao problema

Ponto de poda: Serra dos Parecis: 1,5 m de altura
Bento Munhoz da Rocha Neto: 2,2 m de altura

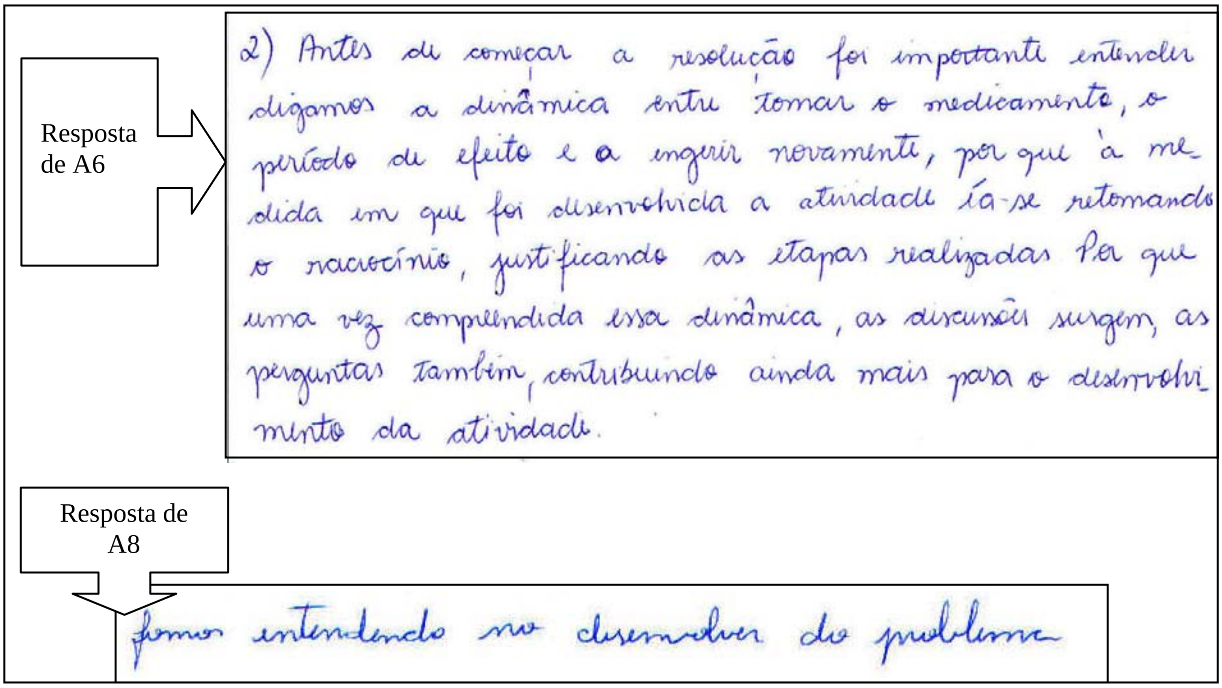
comunicação dos resultados por A6

A6: *No caso as variáveis que estão envolvidas no problema são: o h minúsculo a gente vai determinar a altura da lâmpada no poste, o H maiúsculo ali no ponto A* [apontando para o slide] *vai determinar a altura que deve ocorrer a linha de poda, ou seja, a altura que vai ocorrer, levando em consideração o seguinte: o galho mais baixo da árvore.... então, a análise é feita assim* [com gestos] *analisa a árvore, o ponto mais baixo que o galho estiver do chão que vai passar a linha de poda, ou seja, naquele ponto onde está o H a distância que é considerada é a distância d, a variável d no caso que é do poste até onde está ocorrendo a interseção da linha de poda com a linha vertical* [apontando para o slide e traçando com as mãos no ar a representação de uma reta perpendicular] *que está tendo ali no ponto A.*

Fonte: Figura organizada pela pesquisadora, baseada em relatório de A6, gravação realizada durante a orientação e comunicação da atividade.

Os signos interpretantes para os objetos matemáticos que de certo modo são produzidos com mais intensidade nas fases de matematização e resolução, articulam-se com o problema em estudo e, em muitos casos, possibilitam o entendimento da situação-problema como um todo. Isso fica evidente em respostas de A6 e A8 à questão 2 da parte II do questionário (Apêndice B) — *Na atividade do Diazepan, o que foi importante para você entender esse problema antes de começar a resolução? Explique.* (Figura 6.3).

Figura 6.3– Signos interpretantes que evidenciam a articulação entre problema e objeto matemático

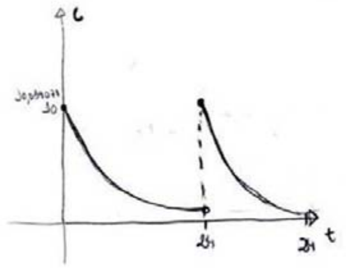


Fonte: Figura organizada pela pesquisadora, baseada em questionário de A6 e A8.

A articulação do objeto matemático com o problema em estudo também fica evidente no desenvolvimento da atividade de modelagem, em que a retomada ao problema se faz presente durante a dedução do modelo matemático, conforme apresentado na Figura 6.4.

Figura 6.4– Articulação entre objeto matemático e problema durante obtenção do modelo matemático na atividade 'Diazepan no organismo'

Definição de hipóteses e variáveis



variáveis

$n \to$ nº de doses do medic.

$t \to$ tempo (horas)

$C \to$ concentração do medicamento

$C(24) = 0,039071$

Variáveis auxiliares

T : 24 h

T_- : antes da ingestão da 2ª dose

T_+ : após a ingestão da 2ª dose.

Análise da ingestão de cada dose do medicamento

$C(t) = 10 \cdot e^{-0,23104t}$ (I)

$C(24) = 0,039071$

antes da ingestão da 2ª dose podemos considerar a expressão (I)

$C(T_-) = 10 \cdot e^{-0,23104t}$

após tomar 2ª dose

após a ingestão da 3ª dose do medicamento.

$C(2t_+) = C(2t_-) + 10$

$C(2t_+) = [10(1+e^{-0,23104t}) \cdot e^{-0,23104(2t-t)}] + 10$

$C(2t_+) = 10(1 + e^{-0,23104t} + e^{-0,23104 \cdot 2t})$

Assim para $t \geq 48 = 2t$, $t \leq 3t = 72$

$C(t) = 10(1+e^{-0,23104t} + e^{-0,231042t})\, e^{-0,23104(t-2t)}$

que corresponde a concentração de 3 comp.

p/(n+1) doses

$C(nt) = 10(1 + e^{-0,23104t} + \dots + e^{-0,23104(nt)}) \cdot e^{-0,23104(t-nt)}$

Validação dos resultados matemáticos

Construindo um quadro para calcular a concentração do medicamento no organismo.

Sendo $T = 24h$.

n	t	C(t)	c(mg)
0	0	$10 \cdot e^{-0,23104t}$	10
	12		0,625
	24		0,0390625
1	24	$10,0390625 \cdot e^{-0,23104(t-24)}$	10,0390625
	36		0,627441407
	48		0,03922
2	48	$10,03922 \cdot e^{-0,23104(t-48)}$	10,03922
	60		0,627451
	72		0,039215
3	72	$10,039215\, e^{-0,23104(t-72)}$	10,039215
	84		0,627450
	96		0,039215

Interpretação dos resultados

De (4) é possível encontrar a concentração saturada do medicamento no organismo.

$$\lim_{n \to \infty} C(nt) = \lim_{n \to \infty} 10 \cdot \left(\frac{1 - e^{-0,23104(n+1)t}}{1 - e^{-0,23104t}} \right) = \frac{10}{1 - e^{-0,23104t}}$$

$$\lim_{n \to \infty} C(nt) = 10,03922425$$

$$C_s = 10,03922425$$

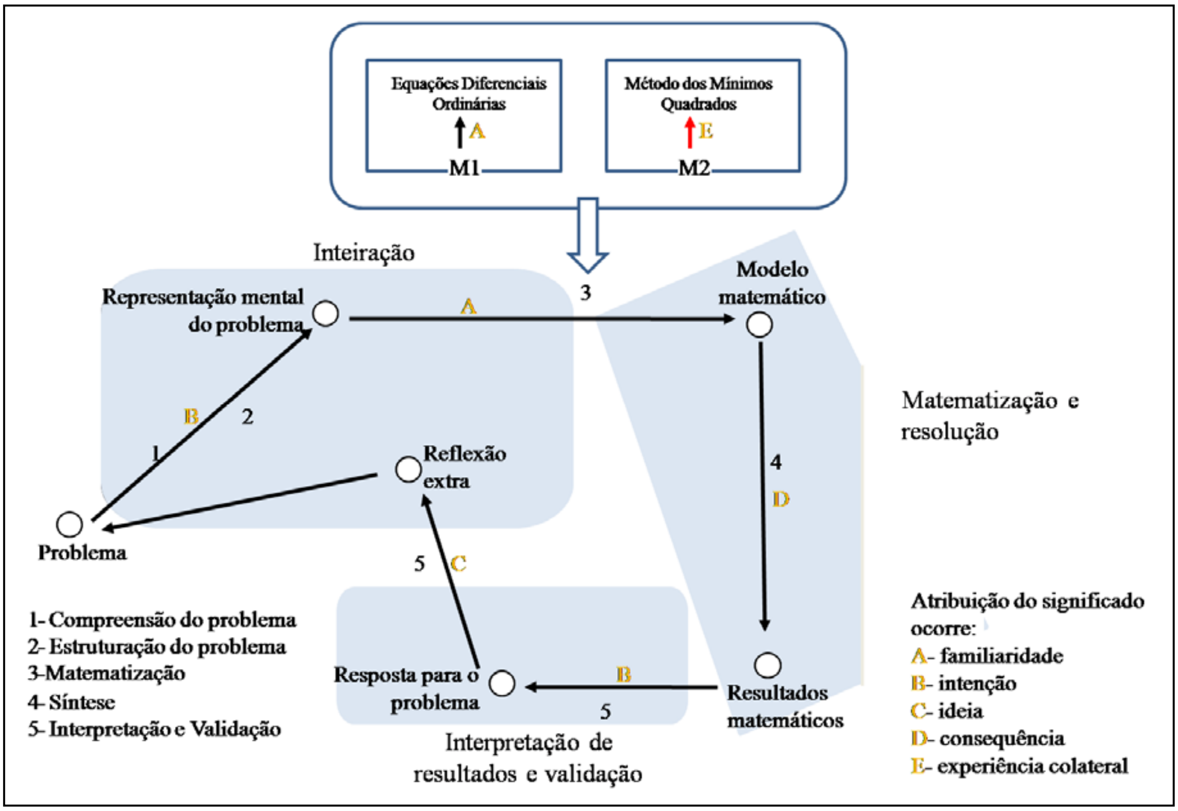
Fonte: Relatório entregue por A8.

A atribuição de significado para o objeto — problema e objeto matemático — pode ocorrer, em sentido peirceano, de acordo com o uso que o intérprete faz dos signos que representam tal objeto. Há evidências de atribuição de significado por meio de *familiaridade* com o objeto, na *intenção* de significar o objeto, como uma *ideia* que se remete ao objeto, por meio de *experiência colateral* com o objeto.

Diante de um problema que teria que resolver para lhe ser atribuída uma nota, A6 atribui significado por meio de uma intenção de significar, de tal modo em que houve uma compreensão do problema, mesmo que isto lhe tenha 'custado' um período de reflexão. Na matematização, A6 atribuiu significado ao problema por meio de familiarização com o que foi desenvolvido na atividade 'Diazepan no organismo'. Como os resultados matemáticos correspondem a consequências futuras para a obtenção de uma resposta ao problema e a resposta é uma intenção de A6 para significar o problema, há atribuição de significado para essas ações segundo consequências e intencionalidade. A reflexão sobre a quantidade de fitoplâncton em certa profundidade corresponde a uma ideia atribuída ao significado do problema, no entanto, tal reflexão necessita de inteiração com a situação-problema a fim de que percepções sejam evidenciadas. Com relação ao objeto matemático envolvido em cada modelo — modelo 1 (M1) Equações Diferenciais Ordinárias e modelo 2 (M2) Método dos Mínimos Quadrados —, referentes à concentração de cálcio no rio de acordo com a profundidade, são de conhecimento dos alunos, pois estão utilizando como forma de avaliação. A atribuição de significado para os objetos neste caso ocorreu por meio de familiaridade e experiência colateral. Familiaridade com Equações Diferenciais Ordinárias que foi um dos objetos matemáticos que emergiram com a atividade do diazepan e experiência colateral com método dos mínimos quadrados utilizados como ferramenta na linearização de pontos sobre uma curva.

Na Figura 6.5 reapresentamos o ciclo de modelagem 'percorrido' por A6 destacando evidências de atribuição de significado para o problema e os objetos matemáticos, além das ações cognitivas deste intérprete que emergiram entre as transições de diferentes fases da atividade de modelagem.

Figura 6.5– Ciclo de modelagem 'percorrido' por A6 destacando evidências de atribuição de significado para problema e objetos matemáticos na atividade 'Cálcio no rio Limoeiro'

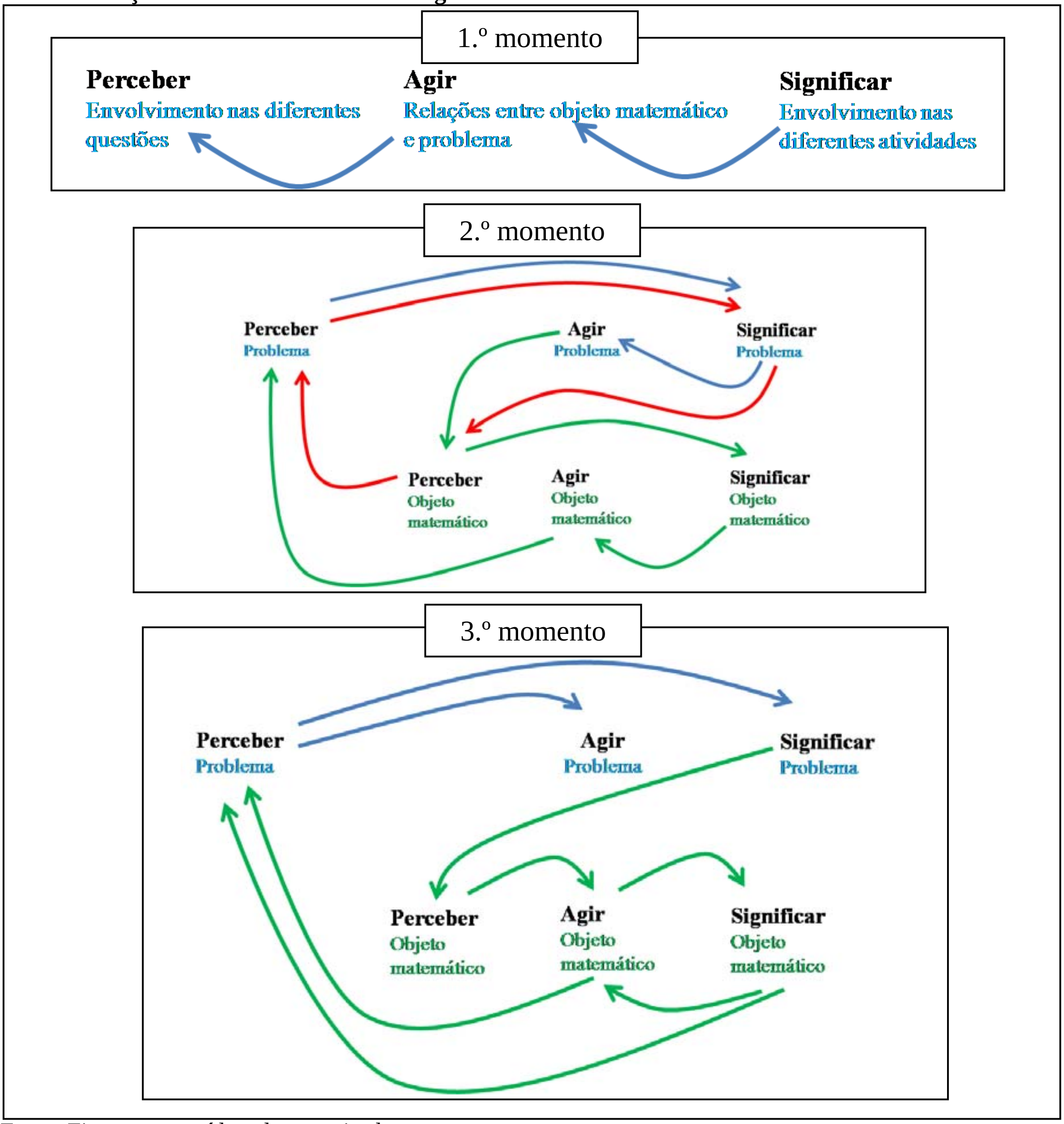


Fonte: Figura construída pela pesquisadora baseada em Almeida, Silva & Vertuan (2012).

Ao evidenciar atribuição de significado para o objeto por meio dos símbolos produzidos nos interpretantes, nos valemos da tríade peirceana signo/objeto/interpretante e consideramos a tríade símbolo/significado para o objeto/interpretante. No que se refere a atividades de modelagem essa tríade pode estar associada a ações que de certa forma caracterizam o 'trilhar' caminhos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem. Neste sentido, configuramos a tríade de ações Perceber/Agir/Significar que pode ser caracterizada durante o envolvimento dos alunos com a atividade de modelagem. Nas atividades analisadas evidenciamos que as tríades de ações são diferentes em cada atividade e se entrelaçam mais intensamente com a familiarização do aluno. De forma geral, é no 3.º momento de familiarização que a articulação entre as tríades Perceber/Agir/Significar e símbolo/significado para o objeto/interpretante foi efetivada nas ações perceber, agir e significar.

Na Figura 6.6 reapresentamos o mapeamento das ações Perceber/Agir/Significar em cada uma das atividades desenvolvidas por A8 segundo o momento de familiarização com atividades de Modelagem Matemática. As setas azuis referem-se ao problema e as setas verdes relacionam-se ao(s) objeto(s) matemático(s); como no 2.º momento de familiarização com atividades de modelagem os alunos estavam trabalhando com dados para o problema que não foram levados em consideração para Agir sobre ele, utilizamos a cor vermelha nas setas para representar as ações com os dados simplificados utilizados pelos alunos.

Figura 6.6– Tríade de ações Perceber/Agir/Significar de A8 nos diferentes momentos de familiarização com atividades de Modelagem Matemática



Fonte: Figura construída pela pesquisadora.

Ainda que estudos que articulam semiótica peirceana e modelagem já tenham sido realizados em pesquisas anteriores, nossa investigação apresenta elementos que sinalizam contribuições no que se refere a evidenciar como signos interpretantes emergem nas diferentes fases de desenvolvimento de uma atividade de modelagem, bem como apresentar inferências sobre a atribuição de significado para o problema e o objeto matemático em estudo durante os diferentes momentos de familiarização com atividades desta natureza.

Embora em alguns momentos apresentássemos indícios de atribuição de significado para o objeto Modelagem Matemática pelo intérprete, esse não foi o foco de nossa investigação, constituindo-se em inquietações para pesquisas futuras. Além disso, inquietações referentes à atribuição de significado para o objeto com o auxílio do computador foram recorrentes em nosso estudo, mas como não foi nosso objetivo, pode se constituir em pesquisa a ser realizada futuramente.

Esperamos que a reflexão desencadeada na pesquisa sobre a análise dos signos interpretantes em atividades de Modelagem Matemática possa atingir também outros pesquisadores que, como nós, buscam compreender a atribuição de significado para o problema e o objeto matemático presentes em atividades desta natureza.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. *Zetetiké. FE-Unicamp*, v. 18, número temático, p. 387-414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W, BRITO, D. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência & Educação*. v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, ano 17, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W. ; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. *Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 117-134, 2009.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, A. G. O. Modelagem Matemática no contexto da Matemática e cidadania. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, EPEM, 7, 2004, São Paulo. *Anais...* São Paulo: Faculdade de Educação, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. *Ciência & Educação.* v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem Matemática. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. REIEC*, v. 6, n. 1, p. 1-10, jul. 2011.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre 'como fazer' Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L; BISOGNIN, E. *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina, PR: Eduel, p. 19-43, 2011a.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por representações semióticas. *Modelagem na Educação Matemática.* v. 1, p. 28-42. 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Registros de representação semiótica em atividades de Modelagem Matemática: uma categorização das práticas dos alunos. *Unión. San Cristobal de La Laguna*, v. 25, p. 109-125, 2011b.

ALRØ, H. E SKOVSMOSE, O. *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. (Tendências em Educação Matemática).

ARAÚJO, J. L (org.). *Educação Matemática Crítica*: reflexões e diálogos. Belo Horizonte, MG: Argvmentvm, 2007.

ARAÚJO, J. L. Ser crítico em projetos de Modelagem em uma perspectiva Crítica de Educação Matemática. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 839-859, ago. 2012.

ARAÚJO, J. L. Uma abordagem sócio-crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crística. *Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 55-68, jul. 2009.

ARAÚJO, J. L.; FREITAS, W. S.; SILVA, A. C.. Construção crítica de modelos matemáticos: uma experiência na divisão de recursos financeiros. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L; BISOGNIN, E. *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina, PR: Eduel, p. 141-160, 2011.

BARBOSA, J. C. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. *Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 69-85, jul. 2009.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e Perspectiva Sócio-crítica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, SIPEM, 2, 2003, Santos. *Anais*... Santos, 2003.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001, Caxambu. *Anais*... Rio de Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.

BERGER, M. A semiotic view of mathematical activity with a Computer Algebra System. *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa. Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa*, Distrito Federal, México, v. 13, n. 2, p. 159-186, 2010.

BISOGNIN, E. et al. Ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos relacionados à Nanociência por meio da Modelagem Matemática. *Acta Scientiae*, Canoas (RS), v. 14, n. 2, p. 200-214, maio/ago. 2012.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Contrução de modelos discretos para o ensino de Matemática. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L; BISOGNIN, E. *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina, PR: Eduel, p. 105-121, 2011.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Explorando o conceito de função por meio da Modelagem Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, SIPEM, 5, 2012, Petrópolis. *Anais*... Petrópolis, 2012a.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Percepções de professores sobre o uso da Modelagem Matemática em sala de aula. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 1049-1079, ago. 2012b.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V.; ALONSO RAYS, O. Modelo matemático da concentração de cocaína no organismo humano: modelagem matemática no ensino de Matemática. *Educação Matemática em Revista, SBEM- RS*, ano 6, n. 6, 2004.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V.; ISAIA, S. M. A. A sala de aula e a Modelagem Matemática: contribuições possíveis em diferentes níveis de ensino. *Horizontes, EDUSF*, v. 27, n. 1, p. 79-90, jan./jun. 2009.

BLOMHØJ, M; KJELDSEN, T. H. Students' reflections in Mathematical Modelling Projects. In: KAISER, G. et al. (ed.). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14). New York: Springer, 2011, p. 385-395.

BLUM, W. Can Modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In: KAISER, G. et al. (ed.). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14). New York: Springer, 2011, p. 15-30.

BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R. Mathematical Modellling: can it be taught and learnt?. *Journal of Mathematical Modelling an Application*, v. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, n. 1, p. 37-68, 1991.

BOLITE F. J.; ACEVEDO, J.; FONT, V. Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções. *Boletim GEPEM*, n. 46, p. 41-54, 2005.

BORGES, A. T. Novos rumos para o laboratório escolar de Ciências. *Cad. Brás. Ens. Fís.*, v. 19, n. 3, p. 291-313, 2002.

BORROMEO FERRI, R. Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modeling routes of pupils. EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, CERME, 5, 2007, Larnaca. fev. 2007, p. 2080-2089. Disponível em http://ermeweb.free.fr/CERME%205/WG13/13_Borromeo-Ferri.pdf capturado em 27/4/2012.

BORROMEO FERRI, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

BORSSOI, A. H. *A aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática como estratégia de ensino*. 2004. Dissertação (Mestrado) — Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 6, n. 2, p. 91-121, 2004.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: EPMEM -ENCONTRO PARANAENSE DA MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2004, Londrina. *Anais...* 2004.

BURAK, D; BRANDT, C. F. Modelagem Matemática e Representações Semióticas: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Zetetiké. FE-Unicamp*, v. 18, n. 33, p. 63-102, 2010.

BUTTS, T. Colocando problemas adequadamente. *Problem solving in School Mathematics.* Yarbool, 1980. Tradução de Regina Luzia Corio de Buriasco. Apresentação de Seminário no Mestrado em Educação Matemática, Unesp – Rio Claro, ago. 1984.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática: um outro olhar. *Alexandria*. *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 33-54, jul. 2009.

CALDEIRA, A. D.; SILVEIRA, E.; MAGNUS, M. C. M. Modelagem Matemática: alunos em ação. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L; BISOGNIN, E. *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina, PR: Eduel, p. 65-82, 2011.

CARREIRA, S. Where there's a model, there's a metaphor: Metaphorical thinking in students' understanding of a mathematical model. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 3, n. 4, p. 261-87, 2001.

CARREIRA, S.; AMADO, N.; LECOQ, F. Mathematical Modelling of daily life in adult education: focusing on the notion of knowledge. In: KAISER, G. et al. (ed.). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14). New York: Springer, 2011, p. 199-209.

CASSIANI, S. H. de B.; CALIRI, M. H. L.; PELÁ, N. T. R. A teoria fundamentada nos dados como abordagem da pesquisa interpretativa. *Rev.latino-am.enfermagem*, v. 4, n. 3, p. 75-88, dez. 1996.

CHARMAZ, K. *A construção da teoria fundamentada*: guia prático para análise qualitativa. Tradução de Joice Elias Costa. Porto Alegre: Artmed, 2009.

CHARMAZ, K. *Constructing Grounded Theory*: a practical guide through qualitative analysis. Londres: SAGE Publications, 2006.

CHEVALLARD, Y. et al. *Estudar matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COSTA, P. H. S.; SILVA, M. R. A. O método pragmático de Charles S. Peirce. *Metávoia*, n. 13, p. 19-32, 2011.

CUNHA, A. G. da. *Dicionário etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1989.

CUNNINGHAM, D. J.; KEHLE, P. E. Cognitive Semiotics in Education. *Recherches en communication.* n. 19, 2003.

D'AMBROSIO, U. Mathematical Modeling: cognitive, pedagogical, historical and political dimensions. *Journal of Mathematical Modelling and Application.* v. 1, n. 6, p. 89-98, 2009.

D'AMORE, B. Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa.* Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México, número especial, p. 177-195, 2006.

DAVIS, P. J; HERSH, R. *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva, 1995.

DUVAL, R. Graphiques et equations: L'Articullation de deux registres. In: DIDACTIQUE ET SCIENCES COGNITIVES. IREM, 1988, Strasbourg. *Annales*... p. 235-253.

DUVAL, R. Quelle Sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?. *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa. Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa*, Distrito Federal, México, número especial, p. 45-81, 2006.

DUVAL, R.. Registre de représentation sémiotique et fonctionnements cognitif de la penseé. DIDACTIQUE ET DE SCIENCES COGNITIVES. IREM, 5, 1993, Strasbourg. *Annales*... Strasbourg: ULP, 1993.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. *Aprendizagem em Matemática*: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003, p. 11-34.

DUVAL, R. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

DUVAL, R. Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. DIDACTIQUE ET DE SCIENCES COGNITIVES. IREM, 6, 1998a, Strasbourg. *Annales*... Strasbourg: ULP, 1998a, p. 139-163.

DUVAL, R. Signe et objet (II): Questions relatives à l'analyse de la connaissance. DIDACTIQUE ET DE SCIENCES COGNITIVES. IREM, 6, 1998b, Strasbourg. *Annales*... Strasbourg: ULP, 1998b, p. 165-196.

DUVAL, R. Un processus central dans le développement des apprentissages intellectuals: La coordination des registres de représentation sémiotique. *Entretiens de bichat, entretiens d'orthophonie*. Paris: Expansion Scientifique Française, p. 81-91, 1998c.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a matemática de outra forma*: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. 1. ed. v. 1. São Paulo: PROEM, 2011. (Estudos).

FERRUZZI, E. C. *Interações discursivas e aprendizagem em Modelagem Matemática*. 2011. Tese (Doutorado) - Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

FREUDENTHAL, H. *Mathematics as an education task*. Dordrecht: Kluwer, 1973.

GARCÍA, J. J. G.; PALACIOS, F. J. P. ¿Cómo usan los profesores de Química las representaciones semióticas?. In: *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciências*, v. 5, n. 2, 2006. Disponível em http://www.saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen5/ART3_Vol5_N2.pdf capturado em 10/10/2006.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, p. 77-98, 2004. (Tendências em Educação Matemática).

GARNICA, A. V. M. Peirce´s Mathematical Writings: an Essay on Primary Arithmetic Books as it Relates to Mathematics Educacion. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Rio Claro, v. 1, n. 2, out. p.37-57, 2001.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. *Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução Matemática*. Disponível em http://www.ugr.es/local/jgodino capturado em 1/5/2006.

HOFFMANN, M. H. G. Learning by developing knowledge networks. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, v. 36, n. 6, p. 196-205, 2004.

HOFFMANN, M. H. G. What is a "Semiotic perspective", and what could it be? Some comments on the contributions to this special issue. *Springer*, v. 61, p. 279-291, 2006.

IMPA — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. *Matemática do Ensino Médio*. Disponível em http://www.ensinomedio.impa.br/materiais/index.htm capturado em 5/8/2006.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KEHLE, P. E.; CUNNINGHAM, D. J. Semiotics and Mathematical Modeling. *International Journal of Applied Semiotics*, v. 3, n. 1, p. 113-129, 2000.

KEHLE, P. E.; LESTER, F. K. Jr. A semiotic look at modeling behavior. In: Lesh, R.; Doerr, H. M. *Beyond constructivism*: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching. Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 2003, p. 97-122.

KLÜBER, T. E. Considerações sobre prática(s) de Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁICA, 10, 2010, Salvador. *Anais…* Salvador: SBEM, 2010.

LAKOFF, G.; JOHNSON, M. *Metáforas da vida cotidiana.* Trad. Maria Sophia Zanotto e Vera Maluf. Campinas: Mercado de Letras, 2002.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. E. *Where mathematics comes from*: How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books, 2000.

LARROSA BONDÍA, J. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. Tradução de João Wanderley Geraldi. *Revista Brasileira de Educação,*n. 19, p. 20-28, jan/fev/mar/abr. 2002.

LEGÉ. J. *Approaching minimal conditions for the introduction of mathematical modeling*. Teaching Mathematics and its Aplications, v. 24, n. 2-3, p. 90-96, sept. 2005. Disponível em http://teamat.oxfordjournals.org/content/24/2-3/90.full.pdf capturado em 17/1/2013.

LESH, R.; DOERR, H. M. Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In: LESH, R.; DOERR, H. M. *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, p. 3-33, 2003.

MAAβ, K. *Barriers and Opportunities for the Integration of Modelling in Mathematic Classes*: Results of an Empirical Study. Disponível em http://www.icme-organisers.dk/tsg20/Maass.pdf capturado em 9/7/2006.

MANECHINE, S. R. S.; CALDEIRA, A. M. A. A significação e ressignificação da linguagem gráfica na compreensão de fenômenos naturais. In: SIPEM – SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2006, Água de Lindóia. *Anais...* 2006. p. 1-16.

MANECHINE, S. R. S.; CALDEIRA, A. M. A. Construção de conceitos matemáticos na Educação Básica numa abordagem Peirceana. *Bolema. Rio Claro*, v. 23, n. 37, p. 887-904, dez. 2010.

MARTINS, M. C. *Descrição da dinâmica da ação cognitiva na atividade composicional*. Disponível em http://lsm.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200352151252DESCRI%C3%87%C3%83O%20DA%20DIN%C3%82MICA%20DA%20A%C3%87%C3%83O.pdf capturado em 17/1/2013.

MISKULIN, R. G. S. et al. A semiótica como campo de análise para as representações de conceitos matemáticos. *Cadernos de Semiótica Aplicada*, v. 5, n. 2, p. 1-18, dez. 2007.

NISS, M. O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar. Tradução de Paulo Abrantes. *Educação e Matemática*, n. 23, 3. trimestre, 1992.

NÖTH, W. *Panorama da semiótica*: de Platão a Peirce. 4. ed. São Paulo: Annablume, 2008.

OLIVEIRA, A. M. P.; CAMPOS, I. S.; SILVA, M. S. As estratégias do professor para desenvolver modelagem matemática em sala de aula. *Boletim, GEPEM*, v.55, p.175-192, 2009.

ONUCHIC, L. de La R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. *Educação matemática*: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, p. 213-231, 2004.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics.* Springer, v. 61, p. 11-38, 2006a.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a semiotic point of view. *PME International Conference*, 25, University of Utrecht, The Netherlands, 2001.

OTTE, M. Proof and Explanation from a Semiotical Point of View. *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa. Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa*, Distrito Federal, México, número especial, p. 23-43, 2006b.

OTTE, M. F. Evolution, learning, and semiotics from a Peircean pont of view. *Educational Studies in Mathematics. Springer*, v. 77, n. 2-3, p. 313-329, 2011.

PALHARINI, B. N. *Modelagem Matemática e pensamento matemático*: um estudo à luz dos três mundos da Matemática. 2010. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

PATROCÍNIO JÚNIOR, C. A. do. Os esquemas explicativos e as diversas práticas de modelagem na Educação Matemática. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática — CNMEM, 5, Universidade Federal de Ouro Preto/Universidade Federal de Minas Gerais, Ouro Preto. *Anais...* Ouro Preto, 2007, p. 843-854.

PEIRCE, C. S. *Escritos coligidos*. Seleção de Armando Mora D'Oliveira, Tradução de Armando Mora D'Oliveira e Sérgio Pomerangblum. 4. ed. São Paulo: Nova Cultural, 1989. (Os Pensadores).

PEIRCE, C. S. *Semiótica*. Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 2. reimpr. da 3. ed. de 2000. v. 46. São Paulo: Perspectiva, 2005. (Estudos).

PEIRCE, C. S. *Semiótica e Filosofia*: textos escolhidos. Tradução de Octanny Silveira da Mota e Leonidas Hegenberg. São Paulo: Cultrix, 1972.

PIRES, M. N. M; GOMES, M. T. Resolução de problemas. In: CARVALHO, A. M. F. T. de; GOMES, M. T.; PIRES, M. N. M. *Fundamentos teóricos do pensamento matemático*. Curitiba: IEDES Brasil S. A., 2009, p. 15-30.

POGGIOLI, L. *Estrategias de resolución de problemas*. Serie Enseñando a aprender. Caracas: Polar, 2001. Disponível em http://www.paideavirtus.cl/mce/PDFS/Ensenando.pdf capturado em 22/4/2012.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na sala de aula*. 1. reimpr. da 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Tendências em Educação Matemática).

RODRÍGUEZ WILHELMI, M. *Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos*. 2003. Resumo de Tese (Doutorado) – UPNA – Universidade Pública de Navarra, Espanha.

ROSA, C. C. da. *Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Médio*. 2009. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SÁENZ-LUDLOW, A. Learning mathematics: increasing the value of initial mathematical wealth . *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa. Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa*, Distrito Federal, México, número especial, p. 225-245, 2006.

SANTAELLA, L. *A teoria geral dos signos*: como as linguagens significam as coisas. 2. reimpr. da 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008a.

SANTAELLA, L. Contribuições do pragmatismo de Peirce para o avanço do conhecimento. *Revista de Filosofia*. Curitiba, v. 18, n. 18, p. 75-86, jan./jun., 2004.

SANTAELLA, L. *Matrizes da linguagem e pensamento*: sonora visual verbal: aplicações na hipermídia. 3. ed. São Paulo: Iluminuras: FAPESP, 2005.

SANTAELLA, L. *O que é semiótica*. 27. reimpr. da 1. ed. v. 103. São Paulo: Brasiliense, 2008b. (Coleção Primeiros Passos).

SANTAELLA, L. *Semiótica aplicada*. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SANTOS, L. M. M.; BISOGNIN, V.. Experiências de ensino por meio da Modelagem Matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira*: Pesquisas e Práticas Educacionais. Recife: SBEM, 2007, v. 3, p. 99-114.

SAVIANI, D. *Pedagogia histórico-crítica*: primeiras aproximações. São Paulo: Cortez, 1999.

SILVA, K. A. P. da. *Modelagem Matemática e Semiótica*: algumas relações. 2008. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SILVA, K. A. P; VERTUAN, R. E. Decaimento radioativo: diferentes abordagens em uma atividade de Modelagem Matemática. In: EPREM - ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2009, Guarapuava. *Anais*... 2009. p. 136-153.

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na educação matemática: é possível fazer sem saber?. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. *Anais*... Salvador: SBEM, 2010.

SKOVSMOSE, Ole. *Educação matemática crítica: a questão da democracia*. São Paulo: Papirus, 2001. (Perspectivas em Educação Matemática).

SRIRAMAN, B.; LESH, R. Modeling conceptions revisited. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 3, p. 247-254, 2006.

STEINBRING, H. What makes a sign a *Mathematical Sign*?: an epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics. Springer*, v. 61, p. 133-162, 2006.

STILLMAN, G. et al. A framework for success in implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. In: WATSON, J.; BESWICK, K. Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice*, Wrest Point Hotel Casino, Hobart, TAS, p. 688-697, 2-6 July, 2007.

TREVISAN, M. D.; CARNEIRO, M. C. Uma descrição semiótica da metáfora no ensino de biologia: asserções sobre a célula animal. *Investigações em Ensino de Ciências*, v. 14, n. 3, p. 479-496, 2009.

VERTUAN, R. E. *Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica*. 2007. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

WARBURTON, W. I. What are grounded theories made of?. In: UNIVERSITY OF SOUTHAMTPON LASS FACULTY POST-GRADUATE RESEARCH CONFERENCE, 10, 2005, UK. *Southampton...* 2005. Southampton, UK, Faculty of Law, Arts and Social Sciences LASS, p. 1-10.

WILLIAMS, J.; WAKE, G. Metaphors and models in translation between college and workplace Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 64, p. 345-371, 2007.

APÊNDICE A

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Tendo em vista o desenvolvimento da pesquisa sobre a Semiótica utilizada em atividades de Modelagem Matemática por estudantes, sob responsabilidade de Karina Alessandra Pessôa da Silva, aluna do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que a mesma utilize meus registros escritos e os registros de minhas discussões na realização das atividades de MM durante o 2º semestre de 2011, bem como os registros de minhas respostas durante entrevistas, podendo utilizá-los parcial ou integralmente, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data, podendo divulgá-lo em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que <u>meu nome não seja citado em hipótese alguma</u>, garantindo o anonimato. Igualmente abdico dos direitos meus e de meus descendentes.

Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Nome	RG	Assinatura
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		
13.		
14.		
15.		
16.		
17.		
18.		
19.		
20.		

Londrina, 05 de setembro de 2011.

APÊNDICE B

QUESTIONÁRIO DA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

DIAZEPAN NO ORGANISMO

SITUAÇÃO-PROBLEMA: DIAZEPAN NO ORGANISMO

Nome: ____

As questões a seguir correspondem à situação-problema "Diazepan no organismo". Considerando o desenvolvido dos três problemas desta situação, responda:

Parte I: As questões serão respondidas no quadro que se encontra no final da página. Sua resposta pode variar de um extremo a outro dependendo de sua opinião.

1)Caracterize o grau de complexidade da atividade desenvolvida.

2)Sua familiaridade com os conceitos matemáticos utilizados durante a resolução da atividade.

3)Suas impressões sobre a atividade desenvolvida.

4)Você ficou convencido(a) da validade da solução encontrada?

5)Importância da generalização da situação-problema.

6)Relação entre os três problemas abordados por meio da situação "Diazepan no organismo.

7)Uso de diferentes maneiras para resolver o problema.

8)Uso da representação gráfica na visualização do comportamento da situação.

1. Pouco complexo	1	2	3	4	5	6	7	Muito complexo
2. Pouco familiar	1	2	3	4	5	6	7	Muito familiar
3. Pouco interessante	1	2	3	4	5	6	7	Muito interessante
4. Pouco convencido(a)	1	2	3	4	5	6	7	Totalmente convencido(a)
5. Sem importância	1	2	3	4	5	6	7	Muito importante
6. Pouca relação	1	2	3	4	5	6	7	Completamente relacionado
7. Dispensável	1	2	3	4	5	6	7	Indispensável
8. Dispensável	1	2	3	4	5	6	7	Indispensável

SITUAÇÃO-PROBLEMA: DIAZEPAN NO ORGANISMO

Nome: ____

Parte II:

1)Na Modelagem do Diazepan quais formas de representação (algébrica, gráfica e tabela) você considera essenciais? Por quê?

2)Na atividade do Diazepan, o que foi importante para você entender esse problema antes de começar a resolução? Explique.

3)Você consegue estabelecer relações entre as diferentes “matemáticas” que podem ser usadas para a obtenção do modelo matemático (por meio da função exponencial de base (1/2); da função exponencial de base e; da equação diferencial)? Apresente suas argumentações.

4)Você pensou em utilizar o recurso gráfico para validar o modelo obtido em cada problema? Como seria isso?

5)Como você foi estabelecendo relações entre o problema da ingestão do medicamento e dos resultados matemáticos no decorrer do desenvolvimento da atividade?

6)Vocês já estudaram, em outro momento, as etapas da Modelagem Matemática. Identifique as suas ações no desenvolvimento da atividade do Diazepan em relação a estas etapas.

7)Quais foram suas dificuldades nessa atividade? Escreva sobre as coisas que você não entendeu.

8)O que significou para você essa atividade?

APÊNDICE C

ROTEIRO DE ENTREVISTA PARA A ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

O CONSUMO DE CIGARRO

GUIA PARA A ENTREVISTA

AVALIAÇÃO – O CONSUMO DE CIGARRO

Sobre o problema em estudo

1)Você considera relevante o problema proposto sobre a redução da quantidade de cigarros consumidos por pessoa? Por quê?

2)O que foi importante para você entender o problema antes de começar a resolução?

3)Identifique as suas ações na solução do problema da quantidade de cigarros consumidos por pessoa em relação às etapas da Modelagem Matemática.

4)Quais foram suas dificuldades nessa atividade? O que você não entendeu?

Sobre o objeto matemático abordado

1)Você consegue estabelecer relações entre as diferentes “matemáticas” que podem ser usadas para a obtenção do modelo matemático com relação à quantidade de cigarros consumidos por pessoa?

2)Como você foi estabelecendo relações entre o problema da quantidade de cigarros consumidos por pessoa e dos resultados matemáticos no decorrer do desenvolvimento da atividade?

3)Que características dos dados matemáticos foram essenciais na construção de cada modelo matemático?

4)Você pensou em utilizar o recurso gráfico para validar os modelos obtidos no problema?

5)Você ficou convencido(a) da validade da solução encontrada?

6)O que significou para você essa atividade?

APÊNDICE D

ROTEIRO DE ENTREVISTA PARA A ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

CÁLCIO NO RIO LIMOEIRO

GUIA PARA A ENTREVISTA

AVALIAÇÃO – CÁLCIO NO RIO LIMOEIRO

Sobre o problema em estudo

1)Você considera relevante o problema proposto sobre a concentração de cálcio no rio Limoeiro? Por quê?

2)O que foi importante para você entender o problema antes de começar a resolução?

3)Identifique as suas ações na solução do problema da concentração de cálcio no rio Limoeiro em relação às etapas da Modelagem Matemática.

4)Quais foram suas dificuldades nessa atividade? O que você não entendeu?

Sobre o objeto matemático abordado

1)Você consegue estabelecer relações entre as diferentes “matemáticas” que podem ser usadas para a obtenção do modelo matemático com relação à concentração de cálcio no rio Limoeiro?

2)Como você foi estabelecendo relações entre o problema da concentração do cálcio no rio Limoeiro e dos resultados matemáticos no decorrer do desenvolvimento da atividade?

3)Que características dos dados matemáticos foram essenciais na construção de cada modelo matemático?

4)Você pensou em utilizar o recurso gráfico para validar os modelos obtidos no problema? Por quê?

5)Você ficou convencido(a) da validade da solução encontrada?

6)O que significou para você essa atividade?

APÊNDICE E

QUESTIONÁRIO UTILIZADO NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DO 3.º MOMENTO PARA NÃO-MEMBROS DO GRUPO

DESENVOLVIMENTO DA CULTURA DE SOJA NO BRASIL

PODA DE ÁRVORE

TRABALHO FINAL

Nome: ____

As questões a seguir correspondem à situação-problema

"____".

Considerando o desenvolvimento desta situação, responda:

Parte I: As questões serão respondidas no quadro que se encontra no final da página. Sua resposta pode variar de um extremo a outro dependendo de sua opinião.

1)A relevância do problema em estudo.

2)A Matemática utilizada no desenvolvimento do trabalho.

3)A atividade possibilitou refletir sobre o problema, identificando possíveis causas diretas (que estão ao nosso alcance para mudá-las) e causas indiretas (fora de nossa esfera de ação)?

4)O desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática ajudou na aprendizagem do conteúdo matemático?

5)Suas impressões sobre a atividade desenvolvida.

6)Você ficou convencido(a) da validade da solução encontrada?

7)Importância da generalização da situação-problema.

1. Pouco relevante	1	2	3	4	5	6	7	Muito relevante
2. Pouco adequada	1	2	3	4	5	6	7	Muito adequada
3. Muito pouco	1	2	3	4	5	6	7	Bastante
4. Em nada	1	2	3	4	5	6	7	Muito
5. Pouco interessante	1	2	3	4	5	6	7	Muito interessante
6. Pouco convencido(a)	1	2	3	4	5	6	7	Totalmente convencido(a)
7. Sem importância	1	2	3	4	5	6	7	Muito importante

TRABALHO FINAL

Nome: ____

Parte II:

Sobre o(s) conteúdo(s) matemático(s) abordado(s):

1) Você compreendeu os conteúdos matemáticos envolvidos na atividade desenvolvida?

2) Que características do conteúdo matemático foram mais evidenciadas na atividade de Modelagem Matemática?

Sobre a atividade de Modelagem Matemática desenvolvida:

3) Em sua opinião, ficou claro o problema que o grupo se propôs a estudar?

4) O grupo respondeu ao problema proposto?

5) Do ponto de vista matemático, a atividade de Modelagem Matemática é relevante para ser desenvolvida em que nível de escolaridade?

APÊNDICE F

QUESTIONÁRIO UTILIZADO NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DO 3.ºMOMENTO PARA MEMBROS DO GRUPO

DESENVOLVIMENTO DA CULTURA DE SOJA NO BRASIL

PODA DE ÁRVORE

TRABALHO FINAL

Nome: ____

As questões a seguir correspondem à situação-problema

"____".

Considerando o desenvolvimento desta situação, responda:

Parte I: As questões serão respondidas no quadro que se encontra no final da página. Sua resposta pode variar de um extremo a outro dependendo de sua opinião.

1)Sobre a escolha do problema (pergunta a investigar).

2)Como se sentiu em relação à Matemática ao desenvolver o trabalho.

3)A tarefa favoreceu a troca de ideias com os colegas do grupo.

4)O uso do conhecimento matemático foi fundamental na resolução do problema.

5)A atividade possibilitou refletir sobre o problema, identificando possíveis causas diretas (que estão ao nosso alcance para mudá-las) e causas indiretas (fora de nossa esfera de ação).

6)O desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática ajudou na aprendizagem do conteúdo matemático.

7)Suas impressões sobre a atividade desenvolvida.

8)Você ficou convencido(a) da validade da solução encontrada.

9)Importância da generalização da situação-problema.

1. Fácil	1	2	3	4	5	6	7	Difícil
2. Inseguro	1	2	3	4	5	6	7	Confiante
3. Muito pouco	1	2	3	4	5	6	7	Bastante
4. Sem importância	1	2	3	4	5	6	7	Importante
5. Muito pouco	1	2	3	4	5	6	7	Bastante
6. Em nada	1	2	3	4	5	6	7	Muito
7. Pouco interessante	1	2	3	4	5	6	7	Muito interessante
8. Pouco convencido(a)	1	2	3	4	5	6	7	Totalmente convencido(a)
9. Sem importância	1	2	3	4	5	6	7	Muito importante

TRABALHO FINAL

Nome: ____

Parte II:

Sobre o(s) conteúdo(s) matemático(s) abordado(s):

1)Os conteúdos matemáticos necessários para esta atividade eram coisas já apreendidas ou foi necessário buscar algum tipo de suporte?

2)Que características do conteúdo matemático foram mais evidenciadas na atividade de Modelagem Matemática?

3)Em sua opinião, a Modelagem Matemática pode contribuir para melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos? Por quê?

Sobre a atividade de Modelagem Matemática desenvolvida:

4)Quais foram suas impressões sobre a definição do problema a ser estudado?

5)Quais foram suas dificuldades nessa atividade? Escreva sobre as coisas que você não entendeu.

6)O que significou para você essa atividade?

APÊNDICE G

ROTEIRO DE ENTREVISTA PARA AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DO 3.º MOMENTO

DESENVOLVIMENTO DA CULTURA DE SOJA NO BRASIL

PODA DE ÁRVORE

GUIA PARA A ENTREVISTA

TRABALHO FINAL

Sobre o problema em estudo

1)Para você: O tema escolhido em grupo para o estudo foi relevante? Por quê?

2)E quanto ao problema: você considerou o problema relevante para ser estudado? Por quê?

3)Em sua opinião, o que o problema representa e representou para o seu grupo?

4)O que foi importante para você entender nos dados coletados antes da definição do problema?

5)E o que foi importante entender para deduzir o modelo matemático?

6)Identifique as suas ações em cada uma das etapas da Modelagem Matemática em seu trabalho final.

7)Quais foram as dificuldades nesse trabalho?

Sobre o objeto matemático abordado

7)Como foi se construindo o modelo matemático na atividade de Modelagem Matemática?

8)Você pensou em utilizar o recurso gráfico para validar o modelo matemático obtido na atividade de Modelagem? Por quê?

9)Você ficou convencido(a) da validade da solução encontrada?

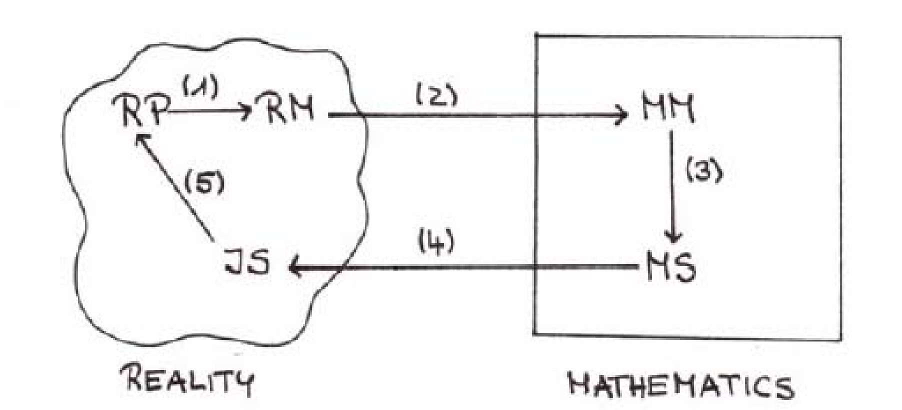
10)O que significou para você essa atividade?

ANEXOS

IMAGENS ORIGINAIS DOS CICLOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA TRADUZIDOS NO CAPÍTULO 1

Imagem original do ciclo de Katja Maaβ utilizado no Capítulo 1 e que na ocasião foi traduzido.

Figura 1.2– Esquema do processo de modelagem proposto por Maass (2006)

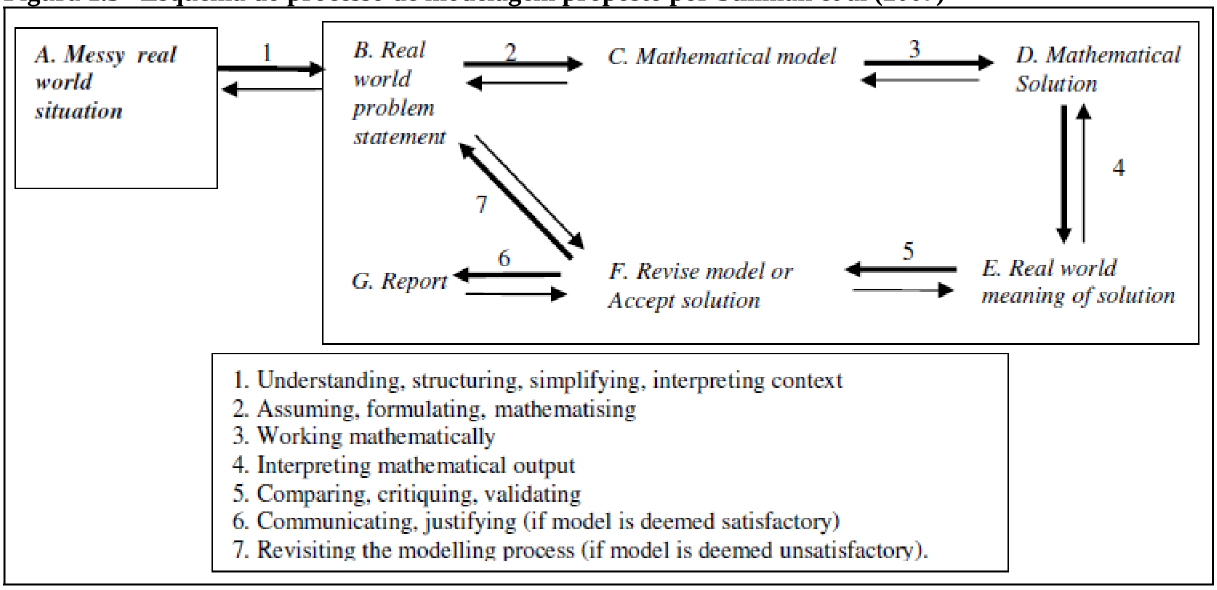


Explanation			
RP:	Real world problem	(1)	Simplifying, structuring, idealizing
RM:	Real model		
MM:	Mathematical Model	(2)	Mathematizing
MS:	Mathematical Solution	(3)	Working within mathematics
IS:	Interpreted solution	(4)	Interpreting
		(5)	Validating

Fonte: MAAβ, K. *Barriers and Opportunities for the Integration of Modelling in Mathematic Classes*: Results of an Empirical Study. Disponível em http://www.icme-organisers.dk/tsg20/Maaβ.pdf capturado em 9/7/2006.

Imagem original do ciclo de Gloria Stillman et al. utilizado no Capítulo 1 e que na ocasião foi traduzido.

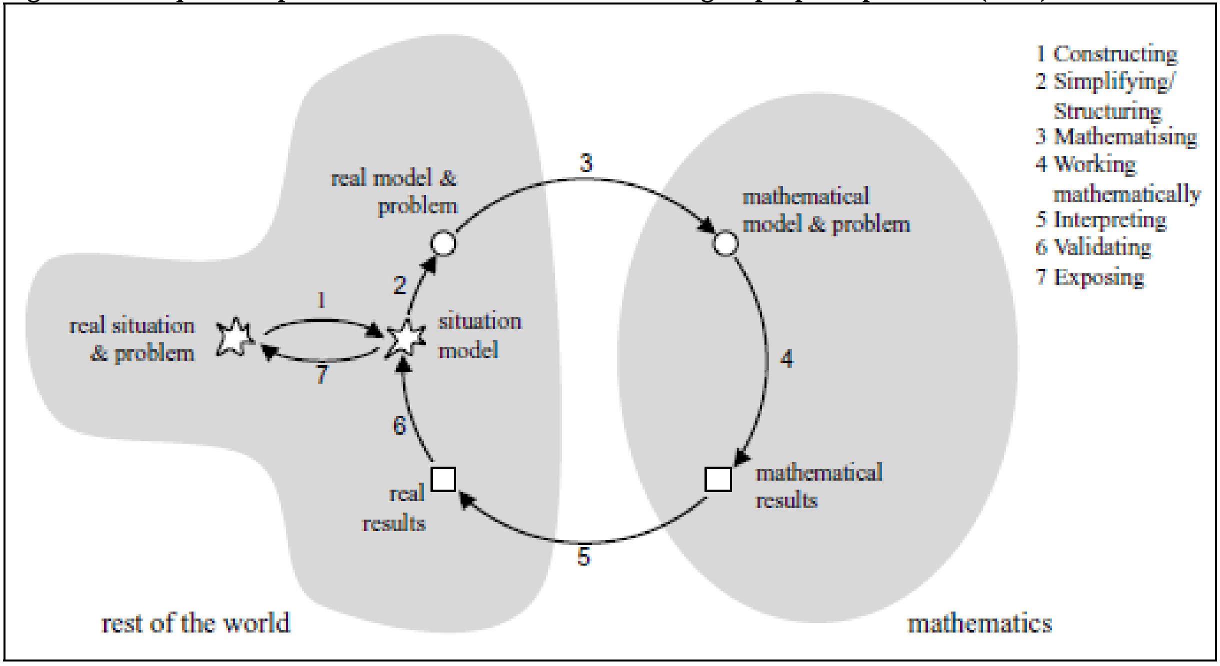
Figura 1.3– Esquema do processo de modelagem proposto por Stillman et al (2007)



Fonte: STILLMAN, G. et al. A framework for success in implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. In: WATSON, J.; BESWICK, K. Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice*, Wrest Point Hotel Casino, Hobart, TAS, p. 688-697, 2-6 July, 2007.

Imagem original do ciclo de Werner Blum utilizado no Capítulo 1 e que na ocasião foi traduzido.

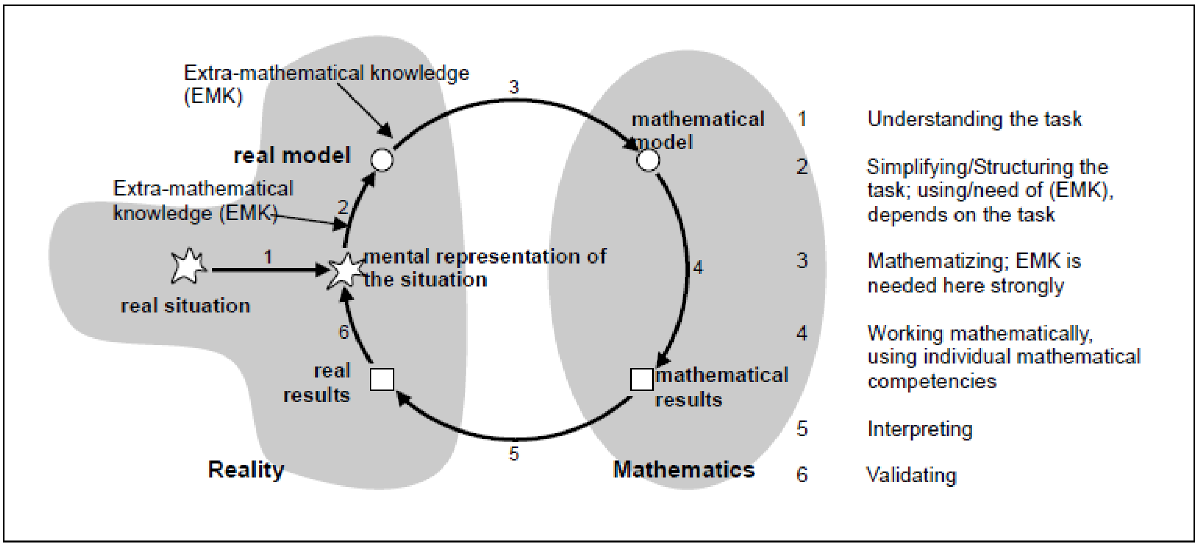
Figura 1.4– Esquema explicativo de uma atividade de modelagem proposto por Blum (2011)



Fonte: BLUM, W. Can Modelling be taught and learnt? Some answers from empirical researcha. In: KAISER, G. et al. (ed.). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14). New York: Springer, 2011, p. 15-30.

Imagem original do ciclo de Rita Borromeo Ferri utilizado no Capítulo 1 e que na ocasião foi traduzido.

Figura 1.5– Ciclo de modelagem sob uma perspectiva cognitiva proposto por Borromeo Ferri (2006)



Fonte: BORROMEO FERRI, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.