Universidade Estadual de Londrina

HELOÍSA CRISTINA DA SILVA

MATEMATIZAÇÃO E MODELAGEM MATEMÁTICA:

POSSÍVEIS APROXIMAÇÕES

Londrina

2013

HELOÍSA CRISTINA DA SILVA

MATEMATIZAÇÃO E MODELAGEM MATEMÁTICA:

POSSÍVEIS APROXIMAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina como requisito para obtenção do Título de Mestre.

Orientadora: Profª. Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina

2013

Aos meus familiares, especialmente minha Mãe, meu Pai e meu Irmão, e ao meu esposo pela compreensão e apoio.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por me dar forças nos momentos difíceis me auxiliando a superar minhas dificuldades e os obstáculos.

Agradeço pela compreensão dos meus familiares, especialmente minha Mãe, meu Pai e meu Irmão, quando da minha ausência nos momentos em que não pude estar próximo a eles.

Em especial ao meu esposo pelo seu apoio e seu incentivo. Pela ajuda nas traduções dos artigos, pelas conversas relacionadas ao meu referencial teórico, pela leitura cuidadosa deste trabalho. Por estar ao meu lado em todos os momentos. Amo você!

À minha orientadora pelas sugestões e críticas que possibilitaram a elaboração deste trabalho.

Às professoras Vanilde Bisognin e Sandra Malta Barbosa pelas sugestões dadas ao trabalho.

Aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT) pelo convívio e aprendizado durante esses dois anos de participação no grupo.

Aos alunos que participaram do curso. Pela dedicação no desenvolvimento das atividades.

A todos os amigos pelas orações e incentivo, principalmente Mabel, Helton, Keila, João Paulo, Tatiana e Rodrigo. À amiga Leonice pelas suas orações e pela disponibilidade em fazer as traduções das citações em inglês.

A CAPES pelo apoio financeiro.

SILVA, Heloísa Cristina. **Matematização e modelagem matemática: possíveis aproximações.** 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

RESUMO

A pesquisa busca aproximações entre a matematização como caracterizada nos esquemas de modelagem matemática e a matematização como reconhecida na Educação Matemática Realística. No âmbito da modelagem matemática, matematização diz respeito a uma transição ou a uma ação cognitiva que se faz entre diferentes etapas do que se reconhece na literatura como um esquema ou um ciclo de modelagem. Já na Educação Matemática Realística, a matematização é um processo e apresenta-se, em geral, uma classificação que a associa uma matematização horizontal e uma matematização vertical. Com o objetivo de identificar e caracterizar elementos da matematização, realizada pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, é desenvolvido um curso de modelagem com alunos de uma universidade pública. Os dados coletados, obtidos por entrevista, questionários, registros escritos dos alunos, gravações em áudio e em vídeo, do desenvolvimento das atividades de modelagem são analisados com base no referencial teórico. Realiza-se análises que, considerando as caracterizações apresentadas na literatura, evidenciam aproximações entre a matematização nessas duas sub-áreas da Educação Matemática. Já a análise dos dados coletados com as atividades de modelagem desenvolvidas pelos alunos evidencia que os mesmos realizaram matematização horizontal e matematização vertical, especialmente nas ações de compreensão da situação, estruturação da situação, matematização e síntese.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Matematização. Educação Matemática.

SILVA, Heloísa Cristina. **Mathematization and mathematical modeling: possible approximations**. 2013. Dissertation (Master's in Teaching Science and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina. 2013.

ABSTRACT

This research looks for similarities between mathematization as it is characterized in schemes of mathematical modeling and mathematization as it is recognized by Realistic Mathematics Education. Within the mathematical modeling, mathematization concerns a transition or a cognitive action made in different stages, which is pointed out by literature as an outline or a modeling cycle. In the Realistic Mathematics Education, the mathematization is a process and it is presented usually as a classification that associates a horizontal mathematization and a vertical one. Aiming to identify and characterize elements of mathematization, performed by the students during the development of mathematical modeling activities, it is developed a modeling course with students from a public university. The collected data which were obtained through interviews, questionnaires, students' written, audio and video records of development of modeling activities are analyzed based on the theoretical framework. The analyses, considering the characterizations presented in the literature, show similarities between mathematization in these two sub-areas of Mathematics Education. The analysis of the collected data with the modeling activities developed by students shows that they performed horizontal mathematization and vertical mathematization, especially in the actions of understanding of the situation, structuring of the situation, mathematization and synthesis.

Keywords: Mathematical modeling. Mathematization. Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Ciclo Vital 24
Figura 2 - Ciclo de Modelagem 27
Figura 3 - Processo de Modelagem com base em Blum 1996 28
Figura 4 - Ciclo de Modelagem sob uma perspectiva cognitiva 29
Figura 5 - Etapas da modelagem matemática e as ações cognitivas dos alunos 30
Figura 6 - Esquema de uma modelagem 31
Figura 7 - Ilustração do experimento de Eratóstenes 35
Figura 8 - Medindo a circunferência maior das laranjas-lima 40
Figura 9 - A contextualização e a descontextualização na matematização 42
Figura 10 - Processo de matematização 44
Figura 11 - Processo de matematização 49
Figura 12 - O processo de matematização 49
Figura 13 - Quantidade de PET reciclado e percentual de reciclagem de PET no Brasil 57
Figura 14 - Percentual de reciclagem de PET no mundo 58
Figura 15 - Dados da reciclagem de PET no Japão 58
Figura 16 - Calculando um modelo matemático para a reciclagem de PET no Brasil 60
Figura 17 - Calculando um modelo matemático para a reciclagem de PET no Brasil 60
Figura 18 - Modelo matemático para a reciclagem de PET no Brasil 60
Figura 19 - Modelo matemático para a reciclagem de PET no Brasil utilizando os anos 2007 e 2008. 61
Figura 20 - Modelo matemático para a reciclagem de PET no Brasil utilizando os anos 2008 e 2011. 61
Figura 21 - Modelo matemático considerado válido pelo grupo 2 para a reciclagem de PET no Brasil utilizando os anos 2008 e 2011 62
Figura 22 - Calculando um modelo matemático para a reciclagem de PET no Japão utilizando o ano 2005 62
Figura 23 - Calculando um modelo matemático para a reciclagem de PET no Japão utilizando o ano 2006 62
Figura 24 - Modelo matemático considerado válido pelo grupo 1 para a reciclagem de PET no Japão utilizando os anos 2005 e 2006 62
Figura 25 - Ajuste para o Japão utilizando os anos de 2006 e 2008 63
Figura 26 - Modelo considerado válido pelo grupo 2 para o percentual de reciclagem de PET no Brasil 63
Figura 27 - Calculando um resultado matemático para o problema (grupo 1) 63
Figura 28 - Calculando um resultado matemático para o problema (grupo 2) 64
Figura 29 - Associação do índice n ao ano 66
Figura 30 - Associação do índice n ao ano 67
Figura 31 - Ilustração da fala da aluna Elaine 69
Figura 32 - Primeiro modelo matemático para a reciclagem de PET no Brasil 69
Figura 33 - Primeiro modelo matemático para a reciclagem de PET no Japão 69
Figura 34 - Reiniciando os cálculos para a obtenção de um modelo matemático para as taxas de reciclagem de PET 70

Figura 35 - Esboço da função raiz 73
Figura 36 - Expressão algébrica da função logarítmica 73
Figura 37 - Esboço de um gráfico utilizando os anos a partir de 1997 74
Figura 38 - Expressão geral de uma função exponencial 75
Figura 39 - Verificando a variação do percentual de reciclagem de PET no Brasil em anos consecutivos 77
Figura 40 - Calculando um modelo matemático para a reciclagem no Brasil 78
Figura 41 - Calculando um modelo matemático para a reciclagem no Brasil 78
Figura 42 - Calculando um modelo matemático para a reciclagem no Brasil 78
Figura 43 - Expressão geral da função exponencial considerando o valor 100 como máximo 79
Figura 44 - Modelo matemático 1 para a reciclagem de PET no Brasil 80
Figura 45 - Elaboração do modelo matemático 2 para a reciclagem de PET no Brasil 80
Figura 46 - Analisando os dados da reciclagem de PET no Japão 82
Figura 47 - Desenho representando o campo visual e a distância da pessoa à TV 83
Figura 48 - Formato de tela da TV 83
Figura 49 - Cálculo da relação entre distância da TV ao sofá e largura do campo visual 83
Figura 50 - Relação entre distância da TV ao sofá e largura do campo visual 84
Figura 51 - Cálculo da diagonal do campo visual 84
Figura 52 - Cálculo da diagonal da TV 84
Figura 53 - Cálculo das polegadas da TV 84
Figura 54 - Validação do modelo matemático obtido pelo grupo 1 85
Figura 55 - Informações sobre a resolução da tela 87
Figura 56 - Desenho representando o campo visual e a distância da pessoa à TV 88
Figura 57 - Representação da situação utilizando conhecimentos matemáticos 90
Figura 58 - Resposta ao terceiro item do questionário 90
Figura 59 - Cálculo da largura e da altura do campo visual 91
Figura 60 - Cálculo das diagonais do campo visual e da TV e cálculo das polegadas da TV 91
Figura 61 - Esboço da situação e variáveis destacadas como importantes 93
Figura 62 - Esboço da situação 93
Figura 63 - Tabela relacionando tamanho da TV (polegadas), largura da TV e distância mínima que o sofá deveria ficar da TV 94
Figura 64 - Representação gráfica dos dados da tabela presente na Figura 62 95
Figura 65 - Cálculos e modelo matemático para a distância mínima entre a TV e o sofá 95
Figura 66 - Encontrando um modelo matemático a partir dos dados da tabela da Figura 62 96
Figura 67 - Representação gráfica da área nítida do campo visual 97
Figura 68 - Modelo matemático considerando a constante de conforto 98
Figura 69 - Representação do campo visual nítido 98
Figura 70 - Dados do preço médio do álcool no Brasil 103
Figura 71 - Elaborando um modelo matemático para o preço do álcool no Brasil 103
Figura 72 - Validação do modelo para o preço do álcool no Brasil 104
Figura 73 - Elaborando o modelo para o preço da gasolina 104
Figura 74 - Elaboração do novo problema 105
Figura 75 - Apresentação dos dados do preço médio da gasolina para a turma e para a professora 108
Figura 76 - Diferentes representações para o modelo matemático obtido pelo grupo 2 110
Figura 77 - Exemplo de generalização 119

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Dados da atividade Reciclando Garrafas PET 57
Quadro 2 - Resposta ao quinto item do questionário 92
Quadro 3 - Problema elaborado pelo grupo 2 99
Quadro 4 - Hipóteses 99
Quadro 5 - Variáveis 99
Quadro 6 - Justificativa pela escolha da função logarítmica 100
Quadro 7 - Validação do modelo matemático obtido 100
Quadro 8 - Problema elaborado pelo grupo 105
Quadro 9 - Dados do preço médio da gasolina C ao consumidor no Brasil 105
Quadro 10 - Hipóteses e variáveis consideradas pelo grupo 106
Quadro 11 - Justificativa pela escolha da função logarítmica 107
Quadro 12 - Modelo matemático do grupo para o preço médio da gasolina 109
Quadro 13 - Parte do caminho percorrido pelo grupo 1 no desenvolvimento da atividade Reciclando Garrafas PET que evidencia o caráter dinâmico da modelagem matemática e da matematização... 114
Quadro 14 - Parte do caminho percorrido pelo grupo 2 no desenvolvimento da atividade Distância entre a TV e o Sofá evidenciando o caráter dinâmico da modelagem matemática e da matematização 115
Quadro 15 - Aproximação entre o processo de matematização e as transições compreensão e estruturação da modelagem matemática 116

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Suco das laranjas em mililitros 40
Tabela 2 - Detalhamento do curso 54
Tabela 3 - Dados coletados. 55
Tabela 4 - Descrição das atividades analisadas 56
Tabela 5 - Comparação entre os modelos matemáticos 67
Tabela 6 - Comparação entre os modelos matemáticos 96
Tabela 7 - Preço médio da gasolina C ao consumidor, segundo Grandes Regiões e Unidades da Federação - 2002-2011 99
Tabela 8 - Validação do modelo obtido 100
Tabela 9 - Reservas e produção de petróleo no Brasil por ano 101
Tabela 10 - Dados do preço médio do álcool no Brasil 103

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA 15

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO 15

2 ASPECTOS METODOLÓGICOS 16

2.1 O CONTEXTO DA PESQUISA 16

2.2 O CURSO EXTRACURRICULAR DESENVOLVIDO 16

2.3 COLETA DE DADOS 19

2.4 ANÁLISE DOS DADOS 20

2.5 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA 21

3 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 24

3.1 O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA 24

3.2 MODELOS MATEMÁTICOS 26

3.3 O QUE SE FAZ EM MODELAGEM MATEMÁTICA E OS ESQUEMAS CARACTERIZADOS NA LITERATURA 27

3.4 A MATEMATIZAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA 32

4 MATEMATIZAÇÃO: UMA CARACTERIZAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 35

4.1 MATEMATIZAÇÃO 35

4.2 MATEMATIZAÇÃO COMO PRINCÍPIO DIDÁTICO 37

4.2.1 Matematização horizontal e matematização vertical 39

4.2.2 Matematização e desmatematização 44

4.2.3 Etapas de uma matematização 48

4.3 MODELAGEM MATEMÁTICA E MATEMATIZAÇÃO: UM PRIMEIRO OLHAR SOBRE APROXIMAÇÕES 50

5 COMO OS ALUNOS FIZERAM A MATEMATIZAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA 53

5.1 O AMBIENTE DA PESQUISA 53

5.2 AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS 53

5.3 AS ANÁLISES ESPECÍFICAS 56

5.3.1 Reciclando Garrafas PET 57

5.3.1.1 A matematização na atividade 64

5.3.1.1.1 Grupo 1 65

5.3.1.1.2 Grupo 2 71

5.3.2 Distância entre a TV e o Sofá 82

5.3.2.1 A matematização na atividade 86

5.3.2.1.1 Grupo 1 87

5.3.2.1.2 Grupo 2 92

5.3.3 Um Modelo Matemático para o Preço da Gasolina 98

5.3.3.1 A matematização na atividade ... 100
5.4 ANÁLISE GLOBAL ... 110
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS ... 120
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ... 124
8 ANEXOS ... 128
ANEXO 1 ... 129
Aeroportos e a Copa de 2014. ... 129
ANEXO 2 ... 135

1 INTRODUÇÃO

As aplicações da matemática podem ser percebidas não apenas no desenvolvimento da própria área, mas também no desenvolvimento de outras áreas do conhecimento como é o caso da Física, da Biologia, da Moda e da Economia, por exemplo. Neste contexto, a matematização auxilia a compreensão e/ou resolução de situações e/ou problemas da própria matemática ou de outras áreas do conhecimento.

O termo matematização tem sido usado por diferentes autores e em diferentes contextos. Neste trabalho nos referimos ao termo, considerando o âmbito da Educação Matemática Realística (RME) e o âmbito da modelagem matemática.

No âmbito da Educação Matemática, a referência ao termo matematização teve início na Holanda em um movimento no Ensino de Matemática, chamado Educação Matemática Realística (RME), contrário à abordagem mecanicista do ensino da disciplina, dominante na época. Hans Freudenthal foi um dos colaboradores da RME e sua visão de que em "seus princípios iniciais, matemática significa matematizar a realidade[1]" (FREUDENTHAL, 1968, p. 7, tradução nossa), influenciou profundamente a RME. A partir da ideia de matematização de Freudenthal, Treffers sistematizou a matematização em duas componentes: horizontal e vertical. Com base nessa sistematização de matematização horizontal e matematização vertical elaborada por Treffers, Freudenthal também elaborou sua concepção dessas duas componentes da matematização, sendo que, para Freudenthal, a matematização horizontal é o caminhar da realidade para a matemática e a matematização vertical, por sua vez, é o movimento dentro da própria matemática.

Na Educação Matemática encontramos vários autores que utilizam a ideia da matematização e associam-lhe esquemas de representação tratando de aspectos como contextualização e descontextualização (LUCCAS; BATISTA, 2011) ou detalhando atividades vinculadas à matematização horizontal e à matematização vertical (JZN, 1987, RICO, 2006).

[1] Its first principles mathematics means mathematizing reality.

Levando em consideração discussões sobre a importância de tratar de possibilidades para matematizar a realidade em ambientes educacionais, a matematização tem sido referida como etapa integrante do que vem a constituir um processo de modelagem matemática. Neste contexto, esquemas de modelagem matemática incorporam a matematização e, de modo geral, associam-na à capacidade do modelador (aluno ou professor) fazer uso da matemática para estudar um problema, *a priori*, não matemático.

Em termos gerais, a matematização está associada à introdução de conteúdos e/ou métodos matemáticos em determinado domínio. No âmbito da modelagem matemática, matematização diz respeito a uma transição ou a uma ação cognitiva que se faz entre diferentes etapas do que se reconhece na literatura como um esquema ou um ciclo de modelagem. Já na Educação Matemática Realística, a matematização é um processo e apresenta-se, em geral, uma classificação que lhe associa uma matematização horizontal e uma matematização vertical. Tratar dessa introdução em ambientes educacionais, ou em aulas de matemática, mais especificamente, tem sido o interesse de diferentes frentes e linhas de pesquisa no âmbito da Educação Matemática.

Nesta pesquisa estamos interessados em investigar possíveis aproximações entre os diferentes encaminhamentos que caracterizam a matematização. Tendo em vista especificidades mencionadas para a matematização e para a matematização como uma etapa da modelagem matemática algumas questões parecem relevantes: Matematização horizontal, teoricamente, parece se aproximar da transição matematização da modelagem matemática, mas será que a matematização horizontal se aproxima a outras transições presentes nos esquemas de modelagem matemática?; com relação à matematização vertical, é possível perceber aproximações com alguma etapa ou transição da modelagem matemática?; no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática conseguimos perceber as aproximações que o estudo dos esquemas sugere?; conhecer a matematização de forma ampla auxilia a compreensão da modelagem matemática?; Esses são questionamentos que orientam a nossa investigação.

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Considerando que caracterizações de matematização aparecem em diferentes contextos no âmbito da Educação Matemática, neste trabalho estamos interessados em buscar aproximações considerando a matematização como caracterizada nos esquemas de modelagem bem como identificada em um contexto mais amplo, no âmbito da Educação Matemática Realística.

Assim, o objetivo da pesquisa consiste em identificar e caracterizar elementos da matematização realizada pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O texto que descreve a pesquisa realizada está organizado em seis capítulos e as referências bibliográficas.

Na introdução definimos o nosso problema de pesquisa. No segundo capítulo, apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa, bem como os instrumentos utilizados e os atores que dela participaram.

No terceiro capítulo tratamos da modelagem matemática na Educação Matemática, apresentando uma caracterização, bem como explicitamos o ciclo de modelagem elaborado por Blum e Leiβ (2005) e as adaptações realizadas por alguns pesquisadores, nesse ciclo. Por fim, tratamos da matematização em atividades de modelagem matemática, apresentando definições dadas ao termo no âmbito da modelagem matemática.

O quarto capítulo, *Matematização: uma Caracterização na Educação Matemática* refere-se à matematização de maneira mais geral, ou seja, a matematização para além da modelagem matemática. O capítulo traz caracterizações para a matematização presentes na literatura apresentando algumas etapas da matematização.

O quinto capítulo, *Como os Alunos Fizeram a Matematização em Atividades de Modelagem Matemática*, contém as atividades de modelagem matemática que foram desenvolvidas e que serão analisadas à luz do nosso referencial teórico visando responder à pergunta de pesquisa destacada na introdução desse trabalho.

Por fim, apresentamos nossas considerações finais e as referências bibliográficas utilizadas na elaboração do presente trabalho.

2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

2.1 O CONTEXTO DA PESQUISA

Para investigar o nosso problema de pesquisa desenvolvemos no período de 15 de Agosto a 17 de Outubro de 2012 um curso extracurricular com carga horária de 30 horas, sendo 25 horas presenciais, com estudantes de uma universidade pública do Estado do Paraná. A turma iniciou com dez alunos, sendo seis alunas do curso de Licenciatura em Matemática, três alunas do curso de Engenharia Civil e uma aluna do curso superior de Tecnologia em Processos Químicos. No segundo encontro do curso, dois alunos passaram integrar a turma, uma aluna do curso de Licenciatura em Matemática e um aluno do curso de Engenharia Eletrônica. No decorrer do curso alguns alunos desistiram, ficando a turma composta, ao final, por oito alunos, sendo quatro alunas do curso de Licenciatura em Matemática, duas alunas do curso de Engenharia Civil, uma aluna do curso superior de Tecnologia em Processos Químicos e um aluno do curso de Engenharia Eletrônica.

2.2 O CURSO EXTRACURRICULAR DESENVOLVIDO

Os encontros para o desenvolvimento do curso foram realizados às quartas-feiras das 15h30min às 18h. Nos encontros foram desenvolvidas seis atividades de modelagem matemática, sendo quatro delas propostas pela professora[2] do curso e duas elaboradas pelos alunos.

As duas primeiras atividades de modelagem matemática, *Aeroportos e a Copa de 2014* e *Reciclando Garrafas PET*, propostas pela professora, faziam parte do primeiro momento da inserção de atividades de modelagem matemática em sala de aula, conforme Almeida e Dias (2004). Em conformidade com essas autoras, a professora do curso, nessas duas primeiras atividades, apresentou aos alunos um tema, um conjunto de dados e um problema a ser investigado, orientando os alunos, quando solicitada, durante a resolução do problema. Na atividade *Aeroportos e a Copa de 2014*, foi introduzido o método dos mínimos quadrados visando determinar

[2] Neste trabalho a autora desempenhou dois papéis, a saber: pesquisadora com o objetivo de responder problema de pesquisa e professora do curso de modelagem matemática. Assim, ainda que no texto, em algumas situações usemos “professora” em outra “pesquisadora”, trata-se da mesma pessoa, autora da dissertação.

um modelo que se ajustasse aos dados. Na atividade *Reciclando Garrafas PET*, a busca do modelo foi realizada usando sistemas lineares uma vez que os estudantes já estavam familiarizados com esse conteúdo.

As atividades, *Quantidade de Suco em uma Laranja* e *Distância entre a TV e o Sofá* fizeram parte do segundo momento de inserção das atividades de modelagem matemática, conforme Almeida e Dias (2004). Segundo as autoras, no segundo momento a participação dos alunos é mais ativa, sendo que eles escolhem as estratégias a serem seguidas. A atividade *Quantidade de Suco em uma Laranja* consta de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e no curso a professora apresentou o tema e o problema aos alunos, porém não forneceu os dados. Inicialmente, os alunos elaboraram estratégias com o objetivo de calcular a quantidade de suco em uma laranja, elaboraram algumas hipóteses, variáveis e explicaram a estratégia à professora, explicitando quais dados necessitariam para responder o problema proposto. Realizada essa primeira parte, os alunos foram levados ao laboratório de química, onde tinham à disposição algumas laranjas, béqueres, funis, balanças de precisão. No laboratório de química, com o material disponível, os alunos produziram os dados que necessitariam para responder o problema. Após a coleta de dados, os alunos propuseram um modelo, o validaram e interpretaram os resultados obtidos e, por fim, responderam o problema. Durante todo o desenvolvimento da atividade, a professora questionou os alunos quanto às decisões tomadas, tentando não influenciá-los no desenvolvimento da atividade.

Na atividade *Distância entre a TV e o Sofá*, a professora apresentou aos alunos um vídeo que tratava do assunto. Ao final do vídeo, pediu que eles expusessem problemas relacionados ao tema. Um dos problemas elencados foi o proposto pela professora, *Distância entre a TV e o Sofá*. Após a formulação do problema, os alunos passaram à coleta de dados, que nesse caso, se deu por meio de sites na Internet. Os alunos encontraram vários modelos prontos nos sites, e em muitos casos as distâncias eram completamente diferentes. Dessa forma, o desafio dos alunos era formular seu próprio modelo, explicitando quais seriam as hipóteses e as variáveis consideradas. Nessa atividade a validação se deu de forma diferente das atividades anteriores, pois não há dados reais, o que se tem são dados resultantes de modelos. Assim, os alunos realizaram a validação do modelo de forma empírica, devendo calcular a que distância deveria estar o sofá das TV's em suas casas e verificando se consideravam o modelo válido ou não. Porém, os integrantes dos grupos não executaram a validação em suas casas, assim, a mesma foi realizada com os laptops e desktops que os alunos dispunham na universidade.

Ao final do curso os alunos realizaram uma atividade relativa ao terceiro momento da inserção de atividades de modelagem matemática. Segundo Almeida e Dias (2004), no terceiro momento, os alunos são responsáveis por todo o desenvolvimento da atividade e o professor atua como orientador. Assim, cada um dos grupos, nesse caso dois grupos, escolheu um tema, buscou dados e formulou o problema a ser estudado. O grupo 1, inicialmente, pensou em três temas: *Reciclagem em Toledo; Número de vereadores de Toledo; Comparação do analfabetismo no Brasil com outros países*. Com relação ao tema *Reciclagem em Toledo*, as alunas não conseguiram informações sobre o assunto junto aos órgãos responsáveis na referida cidade. No caso do segundo tema, *Número de vereadores de Toledo*, as alunas conseguiram informações referentes à temática, porém, não foi possível estabelecer uma relação entre o número de habitantes da cidade e o número de vereadores que se candidatavam ao cargo nas eleições. Tal relação era esperada pelas alunas para que pudessem abordar a temática matematicamente. Já com relação ao terceiro tema, somente uma das alunas estava interessada em realizar a comparação do analfabetismo no Brasil com outros países e, por isso, o tema foi pouco explorado e abandonado pelo grupo. Por fim, o tema apresentado no trabalho final pelo grupo 1 foi *Índice de Reprovação da Escola Municipal Carlos Friedrich*.

O grupo 2 pensou em dois temas: *Exploração do petróleo no Brasil* e *Variação do comprimento das televisões*. O tema *Variação do comprimento das televisões* foi pouco explorado pelo grupo que mostrou mais interesse em assuntos relacionados ao petróleo. Esse interesse resultou no trabalho final do grupo 2, *Um Modelo Matemático para o Preço da Gasolina*.

Desde o início do curso os alunos foram organizados em grupos, como usualmente é utilizado em atividades de modelagem matemática. No total foram desenvolvidas quatro atividades de modelagem matemática propostas pela pesquisadora e duas atividades foram elaboradas pelos alunos, em que cada um dos grupos desenvolveu uma atividade.

2.3 COLETA DE DADOS

Utilizamos como instrumentos de coleta de dados gravadores e filmadora, visando conservar o registro dos diálogos dos alunos durante o desenvolvimento das atividades. Além disso, a gravação em vídeo mostrou-se importante, pois algumas vezes os alunos se expressaram por meio de gestos, os quais não seriam compreendidos somente pelo registro em áudio.

Ao final de cada reunião os alunos deixavam com a professora do curso o material escrito daquele encontro. Ao final da atividade a pesquisadora fazia cópia dos registros escritos dos alunos, possibilitando a análise dos diálogos, por meio dos áudios e das filmagens e do registro escrito de cada aluno.

Ao final das atividades, *Quantidade de Suco em uma Laranja* e *Distância entre a TV e o Sofá*, os alunos responderam a um questionário referente a cada uma das atividades. Quando se mostrou necessário, a pesquisadora questionou os alunos quanto a aspectos não destacados nos questionários. O desenvolvimento da atividade *Quantidade de Suco em uma Laranja* foi registrado em áudio, inclusive enquanto os alunos respondiam ao questionário. Na atividade *Distância entre a TV e o Sofá* foram gravados áudios dos diálogos dos dois grupos e a gravação em vídeo dos grupos alternadamente, pois havia somente uma filmadora à disposição. Desse modo, a professora realizava a gravação em vídeo dos grupos de forma alternada, em cada encontro a filmadora ficava com um dos grupos.

Terminada a atividade referente ao terceiro momento de inserção de atividades de modelagem matemática, os alunos responderam a uma entrevista semiestruturada referente ao desenvolvimento da atividade. Além disso, cada grupo fez uma apresentação de sua atividade para o outro grupo e para a professora, sendo que nessa apresentação houve perguntas e/ou comentários tanto da professora quanto dos alunos do outro grupo. Todo o desenvolvimento do trabalho final do grupo 1 foi registrado em áudio, um encontro foi registrado também em vídeo. Os registros escritos do desenvolvimento da atividade também foram copiados pela professora.

O desenvolvimento do trabalho final do grupo 2 foi, em parte, registrado em áudio, visto que algumas discussões do grupo foram realizadas por email, com cópia para a professora, que os manteve como registro para análise do desenvolvimento da atividade. Alguns encontros do grupo 2, visando o trabalho final, foram gravados em vídeo.

Após a apresentação do trabalho final, os alunos entregaram um relatório escrito da atividade. A apresentação foi gravada em áudio e em vídeo e a entrevista realizada com os dois grupos utilizou-se desses mesmos recursos, havendo também anotações realizadas em diário de campo pela pesquisadora.

Com os dados coletados, questionários, entrevista, gravação em áudio e em vídeo e registros escritos do desenvolvimento das atividades realizamos a análise conforme descrita a seguir.

2.4 ANÁLISE DOS DADOS

A partir dos dados coletados, áudios, vídeos, registros escritos, anotações do diário de campo, respostas dos questionários, houve a análise usando todos os registros para investigar como ocorre a matematização nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas no curso. Esses registros trazem os elementos presentes na matematização realizada pelos alunos.

A análise dos dados é composta por duas etapas. A primeira é uma análise específica, centrada no desenvolvimento de cada uma das atividades, focada nos dados coletados de cada um dos grupos e visando identificar a matematização realizada pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Na segunda etapa realizamos uma análise geral, com o intuito de perceber as aproximações entre matematização e modelagem matemática evidenciadas pelas análises específicas.

2.5 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Em uma investigação qualitativa,

> [..] em vez de privilegiar a sistematicidade garantida por um método determinado, a objetividade dada pela neutralidade do investigador e pela consistência dos dados tratados, a racionalidade explicitada como quantificação, a definição prévia de conceitos e a construção prévia de conceitos e a construção de instrumentos para garantir a objetividade da pesquisa, privilegiam-se descrições de experiências, relatos de compreensões, respostas abertas a questionários, entrevistas com sujeitos, relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de acontecimentos, etc. (BICUDO, 2004, p. 105).

Levando em consideração essa argumentação bem como as características apresentadas para a pesquisa qualitativa em Lüdke e André (1986) e os encaminhamentos dados à nossa pesquisa, podemos afirmar que se trata de pesquisa qualitativa. Lüdke e André (1986) apresentam cinco aspectos fundamentais para a pesquisa qualitativa:

a) "A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento." (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 11).

A fonte dos dados da presente pesquisa foi o ambiente da sala de aula do curso extracurricular e na análise dos dados existe a subjetividade do investigador que seleciona trechos considerados importantes para responder à questão de pesquisa. A seleção dos trechos é realizada após o estudo de todo o material coletado no desenvolvimento de cada atividade de modelagem matemática.

b) A segunda característica apontada por Lüdke e André (1986) é que "os dados coletados são predominantemente descritivos" (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 12).

Tal característica está vinculada à forma dos dados coletados.

> O material obtido nessas pesquisas é rico em descrições de pessoas, situações, acontecimentos; inclui transcrições de entrevistas e de depoimentos, fotografias, desenhos e extratos de vários tipos de documentos. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 12).

As análises neste trabalho consideraram as transcrições dos áudios das falas dos alunos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, seus registros escritos, sejam eles em linguagem natural, por meio de desenhos ou utilizando linguagem matemática, na forma em que foram elaborados e sempre que necessário esses elementos são evidenciados.

c) A terceira característica identificada por Lüdke e André (1986) é que a "preocupação com o processo é muito maior do que com o produto" (p. 12).

Durante o desenvolvimento das atividades de modelagem por vezes a pesquisadora questionou os alunos, pedindo que explicitassem os procedimentos usados para o desenvolvimento da atividade. Esse questionamento evidencia a importância que a pesquisadora atribui ao processo. Tal atitude da pesquisadora está em consonância com a modelagem matemática e com uma atitude qualitativa pela busca do processo e não dos resultados.

d) Lüdke e André (1986) destacam que o "'significado' que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador" (p. 12).

Durante o desenvolvimento das atividades, quando pertinente, a pesquisadora questionou os alunos visando compreender e coletar dados que pudessem contribuir para a compreensão do fenômeno estudado. Muitas vezes a pesquisadora se ausentava do grupo e quando retornava solicitava aos alunos que descrevessem o que haviam feito e/ou pensado acerca do que estavam fazendo. Essa solicitação buscava deixar claro aquilo que os alunos pensaram e refletiram, os caminhos que percorreram e, dessa forma, estabelecer um diálogo que permitisse questionamentos para melhor compreensão dos significados construídos pelos alunos.

e) Como última característica, a "análise dos dados tende a seguir um processo indutivo." (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 13).

Essa característica está presente na elaboração dos questionários, que haviam sido pré-estruturados antes do início do curso. Porém, conforme o curso acontecia e a pesquisadora tinha contato com os alunos os questionários foram sendo modificados, além disso, em um dos questionários aplicados, a pesquisadora fez perguntas que não constavam no mesmo. Essa atitude tomada pela pesquisadora deve-se ao fato de que no decorrer daquele dia de curso alguns fatos necessitavam de esclarecimentos e essa percepção ocorreu pelo contato da pesquisadora com os dados coletados nas atividades anteriores.

Assim, após a explicitação das características de uma investigação qualitativa e a visualização de que durante a pesquisa tais características estão presentes, podemos afirmar que a presente investigação pode ser caracterizada como qualitativa.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática pode ser compreendida como em D'Ambrósio (2009) que a reconhece como "a estratégia por excelência dos seres humanos para a geração de conhecimento[3]" (p. 91, tradução nossa). Em seu livro *Educação Matemática: da Teoria à Prática*, D'Ambrósio elabora um ciclo vital (Figura 1) que "permite a qualquer ser vivo interagir com seu meio ambiente" (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 20).

Figura 1 - Ciclo Vital

ciclo vital:
...→ REALIDADE informa INDIVÍDUO que processa e executa uma AÇÃO que modifica a REALIDADE que informa INDIVÍDUO →...

Fonte: D'Ambrósio (1996, p. 20)

A ação realizada pelo indivíduo advém das informações resultantes da interação com a realidade (D'AMBRÓSIO, 1996). Da ação realizada pelo indivíduo resulta o conhecimento, tanto novo conhecimento quanto a melhoria daqueles já existentes. A "História da Ciência tem sido exatamente esta: melhorar teorias, com base em modelos da realidade, graças ao desenvolvimento de novos instrumentos intelectuais e materiais[4]" (D'AMBRÓSIO, 2009, p. 92, tradução nossa).

Nesse contexto, podemos dizer que a modelagem matemática tornando possível a investigação e a descrição de situações problema, possibilita a geração do conhecimento humano. Considerando essa geração de conhecimento por meio da modelagem, podemos nos referir à modelagem matemática em ambientes educacionais.

Internacionalmente o debate sobre a utilização da modelagem na Educação Matemática iniciou por volta de 1960. Como nos relata Biembengut (2009)

[3] the strategy per excellence of human beings for generating knowledge
[4] History of Science has been exactly this: to improve theories, based on models of reality, thanks to the development of new intellectual and material instruments.

> o debate sobre modelagem e aplicações na Educação Matemática no cenário internacional ocorre, em especial, na década de 1960, com um movimento chamado “utilitarista”, definido como aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade que impulsionou a formação de grupos de pesquisadores sobre o tema. (p.8)

Na Holanda, este movimento “utilitarista” foi composto, entre outros, por Hans Freudenthal, diretor do Instituto para o Desenvolvimento da Educação Matemática (IOWO). Tal movimento internacional influenciou a Educação Matemática no Brasil pela participação de representantes brasileiros na comunidade internacional. A

> modelagem matemática na educação brasileira tem como referência singulares pessoas, fundamentais no impulso e na consolidação da modelagem na Educação Matemática, tais como: Aristides C. Barreto, Ubiratan D’ Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Meyer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, que iniciaram um movimento pela modelagem no final dos anos 1970 e início dos anos 1980, conquistando adeptos por todo o Brasil. (BIEMBENGUT, 2009, p. 8)

Atualmente, o interesse pela modelagem matemática está bastante difundido na literatura, podendo ser percebido pela quantidade de publicações na área, bem como pela sua inserção em Programas de Pós Graduação e em disciplinas na Graduação, dando origem a eventos regionais, nacionais e internacionais. Além dos eventos específicos de modelagem matemática, existe um número crescente de publicações sobre o assunto em eventos e em revistas na área de Educação Matemática.

Considerando o histórico da modelagem matemática na Educação Matemática e a quantidade de publicações, diferentes conceitualizações podem ser percebidas.

Para Barbosa (2004), “Modelagem [...] é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade” (p. 3).

Segundo Chaves (2011) a

> modelagem matemática pode ser entendida como um processo que consiste na tradução/organização de situações/problemas, provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, segundo a linguagem simbólica da Matemática, fazendo aparecer um conjunto de símbolos ou relações matemáticas – Modelo Matemático – que procura representar ou organizar a situação/problema proposta, com vistas a compreendê-la ou solucioná-la. (p. 2)

Almeida e Brito (2005) consideram que modelagem matemática

> [...] constitui uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática. (p. 120)

Ainda que diferentes conceitualizações sejam apresentadas, o que lhes é comum diz respeito à possibilidade de abordar problemas não matemáticos e de construir representações matemáticas e modelos matemáticos.

3.2 MODELOS MATEMÁTICOS

Quando pensamos em modelo imaginamos algo que serve como padrão, como molde. D'Ambrósio (2009) diz que modelos "são representações do real[5]" (p. 91, tradução nossa). Bassanezi (2009) refere-se a modelo matemático como "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado" (p. 20). Gowers (2002) caracteriza os modelos como "uma versão imaginária e simplificada duma parte do mundo sob análise, em que os cálculos exatos são possíveis" (p. 14).

A adequação do modelo matemático a uma situação problema nem sempre é realizada de maneira simples, uma vez que nas situações há muitas variáveis a considerar. Para formular um modelo matemático, de modo geral, realizamos simplificações. Como um exemplo simples da quantidade de variáveis presentes na realidade e das simplificações necessárias para elaborar um modelo, citamos o lançamento de uma pedra (GOWERS, 2002). Ao lançar uma pedra com o desejo de que ela alcance a maior distância possível, podemos pensar em lançá-la em uma trajetória mais horizontal, dessa forma a força exercida pelo nosso braço deslocaria a pedra na horizontal, fazendo-a alcançar uma distância que poderia ser a máxima. Porém, a gravidade exerce uma força vertical, levando a pedra ao encontro do solo. Assim, é possível que a pedra arremessada dessa forma não chegue muito longe. Pensamos então em lançar a pedra mais na vertical, porém a força exercida pelo nosso braço seria dissipada somente no deslocamento vertical e a pedra cairia a alguns centímetros do pé do arremessador. Nessa pequena exploração sobre o tema, lançamento de uma pedra, não foram consideradas todas as variáveis que podem atuar sobre a realidade estudada, não falamos da resistência do ar, nem

[5] [...] are representations of the real.

indagamos sobre como seria o lançamento se fosse uma bola, ao invés de uma pedra. O lançamento de uma pedra e de uma bola aconteceria da mesma forma?

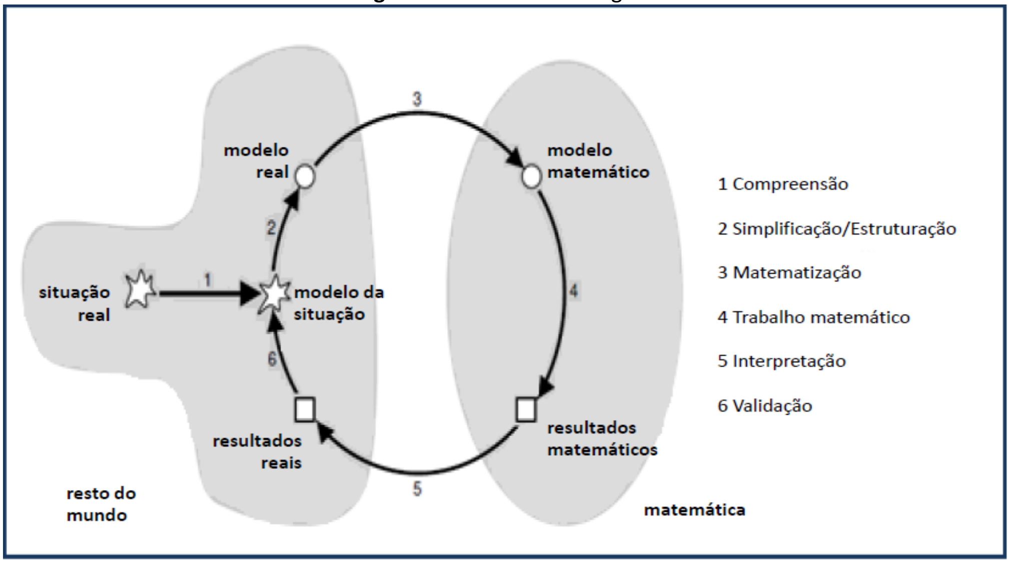
Usando as palavras de Gowers (2002), a elaboração de um modelo “é o processo de considerar somente os fatos essenciais de uma situação da vida real, transformando-a num problema matemático” (p. 8). Por esse motivo os modelos matemáticos comumente estão presentes nas caracterizações de modelagem matemática, pois são os modelos que possibilitam a transformação do problema da realidade em um problema matemático.

3.3 O QUE SE FAZ EM MODELAGEM MATEMÁTICA E OS ESQUEMAS CARACTERIZADOS NA LITERATURA

Na literatura sobre modelagem matemática encontramos autores (BLUM; LEIβ, 2005, MAAβ, 2006, FERRI, 2006, ALMEIDA; SILVA, 2012, BASSANEZI, 2009) que elaboram esquemas para explicitar como ocorre o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática e como é comum a sua representação por meio de figuras. Os esquemas são úteis por mostrar mais explicitamente o que se faz em uma atividade de modelagem matemática.

Blum e Leiβ (2005) apresentam a ilustração de um Ciclo de Modelagem (Figura 2).

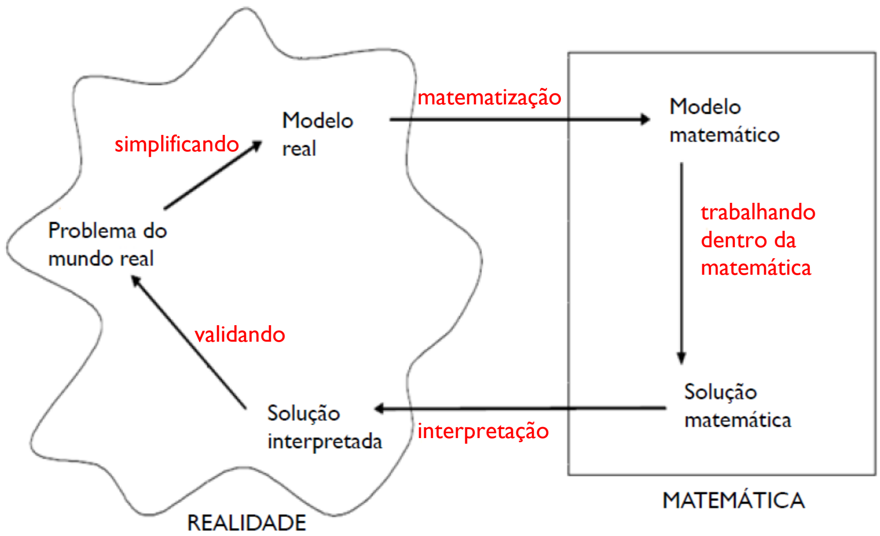
Figura 2 - Ciclo de Modelagem



Fonte: Blum e Leiβ (2005, p. 1626, tradução nossa)

No estudo, Blum e Leiβ (2005) fazem uma análise cognitiva. Já Maaβ (2006) faz seu estudo questionando o que são competências de modelagem e utiliza um ciclo para criar subcompetências, as quais ela verifica, empiricamente, se estão presentes no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática com alunos (Figura 3).

Figura 3 - Processo de Modelagem com base em Blum 1996



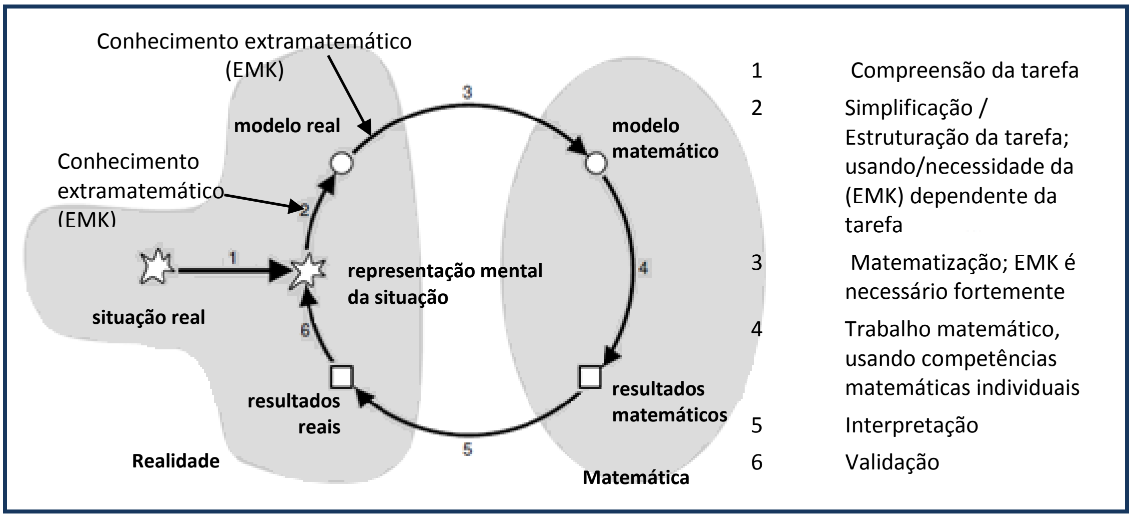
Fonte: Maaβ (2006, p. 115, tradução nossa)

O processo de modelagem de Maaβ (2006) se diferencia do ciclo de Blum e Leiβ (2005) por não haver a etapa *modelo da situação*. No artigo de Maaβ (2006) a transição *simplificação* é descrita pela “simplificação, estruturação e idealização do problema[6]” (p. 115, tradução nossa).

O Ciclo de Modelagem de Blum e Leiβ (2005) é utilizado também por Ferri (2006). O ciclo ilustra o caminho considerado ideal no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Em seu estudo com alunos, Ferri (2006) caracteriza, empiricamente, as etapas, de um ponto de vista cognitivo, que ocorrem quando se desenvolve uma atividade de modelagem matemática. Além disso, a autora faz uma breve caracterização daquilo que acontece entre uma etapa e outra, ou seja, o que acontece na transição das etapas. A este conjunto de etapas e transições a autora chama Ciclo de Modelagem sob uma perspectiva cognitiva (Figura 4).

[6] Simplifying, structuring and idealizing this problem.

Figura 4 - Ciclo de Modelagem sob uma perspectiva cognitiva



Fonte: Ferri (2006, p. 92, tradução nossa)

O ciclo de Modelagem de Ferri (2006) é uma adaptação do ciclo de Blum e Leiβ (2005). Ferri (2006) adiciona ao ciclo de Blum e Leiβ (2005) a importância do conhecimento extramatemático e localiza, no Ciclo de Modelagem, em que momentos tal conhecimento exerce maior influência no desenvolvimento da atividade. Além disso, a etapa *modelo da situação*, presente em Blum e Leiβ (2005), é chamada por Ferri (2006) de *representação mental da situação*. Com relação aos elementos presentes no Ciclo de Modelagem, Ferri (2006) explica que "fases se referem às seis áreas pelas quais um indivíduo pode passar durante a modelagem, ou seja, de uma situação real para resultados reais. Transição se refere à transição de uma fase para a outra[7]" (p. 91, tradução nossa). A autora destaca que a pessoa que realiza o processo de modelagem pode não passar por alguma das etapas[8] ou passar por alguma delas mais vezes, caracterizando a dinamicidade do processo. A esse caminhar pelas etapas em um nível interno e externo, Ferri (2006) o denota *rotas individuais de modelagem*.

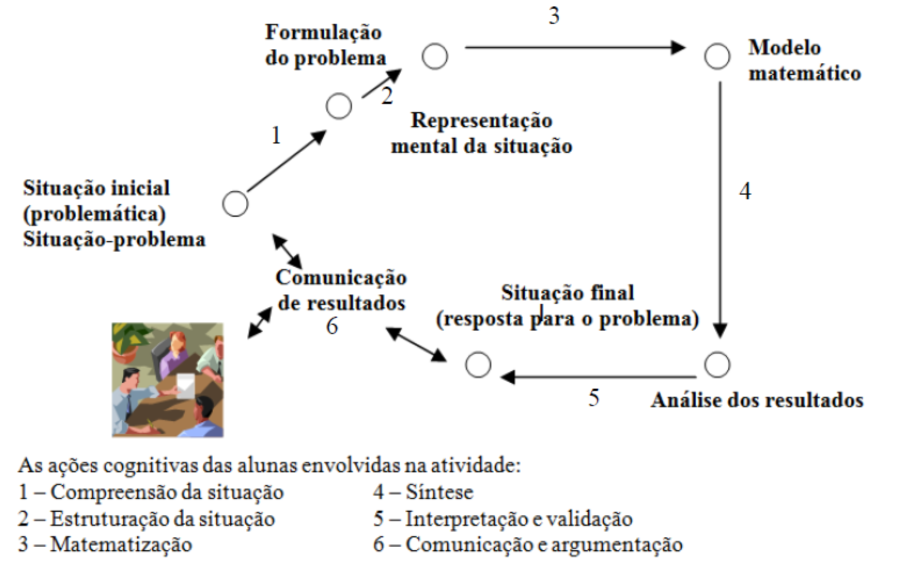
Uma diferença entre o artigo de Ferri (2006) e o artigo de Blum e Leiβ (2005), está no foco do estudo de cada artigo. Ferri (2006) seleciona vários esquemas presentes na literatura de modelagem matemática e após desenvolver atividades de modelagem matemática com alunos, caracteriza o processo de modelagem empiricamente. Ferri (2006) confronta a teoria e a prática do processo de modelagem, resultando na figura que a autora chama Ciclo de Modelagem a partir

[7] In what I call the phases, they are the six areas an individual can go through while modeling, that means from real situation to real results. What I call the transition also means the transition from one phase to another phase.
[8] O que Ferri (2006) chama fases é o que, neste trabalho, chamamos etapas.

de uma perspectiva cognitiva (Figura 4). O artigo de Blum e Leiβ (2005) não tem como foco essa comparação entre teoria e prática. Com relação ao processo de modelagem matemática, não é objetivo dos autores que o artigo questione como o processo é apresentado e sim, a atitude dos professores com relação ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em sala de aula.

No Brasil, destacamos o trabalho de Almeida e Silva (2012) que ilustra o processo de modelagem matemática por meio de um esquema (Figura 5) com base em Ferri (2006).

Figura 5 - Etapas da modelagem matemática e as ações cognitivas dos alunos

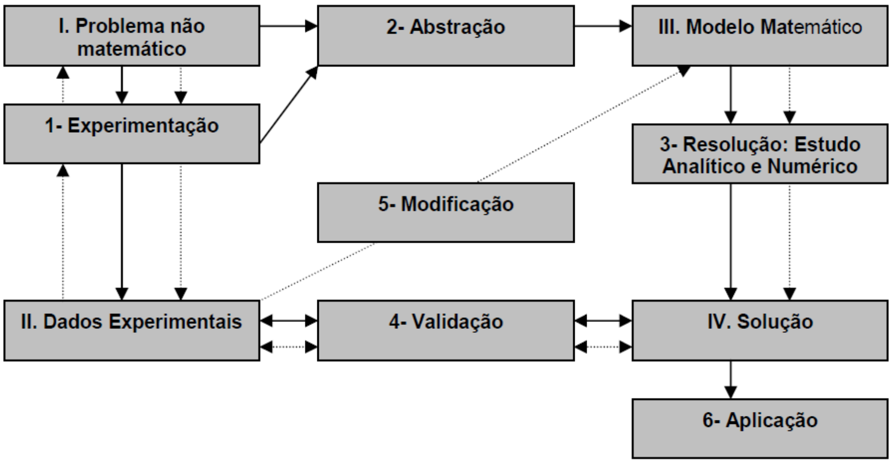


Fonte: Almeida e Silva (2012, p. 1022)

Almeida e Silva (2012) identificam a modelagem matemática como uma atividade investigativa. Dessa forma “como atividade de investigação, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática requer do aluno um conjunto de ações cognitivas” (ALMEIDA; SILVA, 2012, p. 1019). Considerando a modelagem matemática como uma atividade investigativa e sendo o Ciclo de Modelagem de Ferri (2006) apresentado em uma perspectiva cognitiva, Almeida e Silva (2012) ilustram o processo de modelagem matemática, por meio de etapas e ações cognitivas (Figura 5). As ações cognitivas estão associadas às transições realizadas pelos alunos de uma etapa à outra (ALMEIDA; SILVA, 2012).

Bassanezi (2009) também descreve uma atividade de modelagem por meio de um esquema conforme mostra a Figura 6.

Figura 6 - Esquema de uma modelagem



Fonte: Bassanezi (2009, p. 27)

No esquema de Bassanezi (2009) “as setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas.” (p. 27). Diferente dos esquemas anteriores, Bassanezi (2009) não descreve o que ocorre nas transições, porém destaca o que ocorre em cada uma das etapas.

Algumas características são comuns a todos os esquemas apresentados. A característica de que o processo de modelagem é dinâmico e que os esquemas servem não como um guia que necessita ser rigorosamente seguido, mas sim como uma forma de explicitação e orientação de como o processo pode ocorrer. Os esquemas de Blum e Leiβ (2005) e Ferri (2006) apresentam uma separação entre a realidade e a matemática. Dessa forma, parece que a matemática não faz parte da realidade. Não existe separação da realidade e da matemática nos esquemas apresentados por Almeida e Silva (2012) e Bassanezi (2009). É possível que esses autores, Almeida e Silva (2012) e Bassanezi (2009), compreendam que a matemática e a realidade fazem parte do mesmo mundo, ou seja, que a matemática faz parte da realidade.

O nosso interesse reside no estudo do que os autores denominam matematização e que aparece na maior parte dos esquemas apresentados. Ao final da transição matematização se encontra o modelo matemático e é por meio dessa transição que se caminha de um problema não matemático para um modelo matemático.

3.4 A MATEMATIZAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

O termo matematização tem diversas caracterizações assim como a própria modelagem matemática. Para Blum e Leiβ (2005) a matematização “transforma o modelo real em um modelo matemático[9]” (p. 1626, tradução nossa). Maaβ (2006) afirma que a “matematização do mundo real conduz a um modelo matemático[10]” (p. 115, tradução nossa). Para Kaiser (2005), o modelo do mundo real deve ser matematizado, ou seja, “traduzido em matemática para que conduza a um modelo matemático da situação original[11]” (p. 111, tradução nossa). Grigoras (2009) utiliza as caracterizações de matematização de Maaβ e Kaiser para elaborar sua caracterização de matematização como,

> [...] a atividade ou o processo de representação e estruturação dos artefatos e/ou situações do mundo real através de meios matemáticos. O objetivo geral é permitir um tratamento lógico, rastreável e racional de certos artefatos e situações com a ajuda de conhecimento e ferramentas matemáticos.[12] (p. 2206, tradução nossa).

As caracterizações de Blum e Leiβ (2005), Maaβ (2006) e Kaiser (2005) não apresentam muitos detalhes de como ocorre a matematização. O aspecto comum é que a matematização conduz ao modelo matemático.

Grigoras (2009) apresenta mais detalhes, afirmando que na matematização se utilizam conhecimentos e ferramentas matemáticas.

Para Ferri (2006) matematização é

> a transição de um modelo real para um modelo matemático se faz como segue: o indivíduo progride na matematização; além disso, o conhecimento extramatemático (que depende da tarefa) é extremamente exigido pelos indivíduos e usado para construir um modelo matemático.[13] (p, 92, tradução nossa).

A caracterização de Ferri (2006) destaca a importância dos conhecimentos extramatemáticos e, para chegar ao modelo matemático, são necessários

---

[9] [...] transforms the real model into a mathematical model.
[10] The mathematizing of the real model leads to a mathematical model.
[11] [...] translated into mathematics so that it leads to a mathematical model of the original situation.
[12] [...] the activity or process of representing and structuring real world artefacts and/or situations by mathematical means. The overall aim is to enable a logical, traceable and rational treatment of the given artefacts and situations with the help of mathematical knowledge and tools.
[13] The transition from real model to mathematical model is characterized as follows: the individual progress in mathematizing; moreover the extramathematical knowledge (depends on the task) is strongly demanded by the individuals and used to build a mathematical model.

conhecimentos matemáticos e extramatemáticos, sendo os últimos vinculados à situação que se está modelando.

Almeida e Silva (2012) apresentam mais alguns elementos presentes na matematização que

> [...] culmina na construção de um modelo matemático é fundamentada na definição e no julgamento de hipóteses que guiam a construção do modelo. Esta ação também vem revestida de uma transição de linguagens: a situação problema se apresenta em linguagem natural e não parece diretamente associada a uma linguagem matemática; gera-se, assim, a necessidade de transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática). Esta linguagem matemática evidencia o problema matemático a ser resolvido; a elaboração de um modelo matemático é mediada por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente estas características, a organização de partes, a identificação de componentes. (p. 1021)

Na caracterização de Almeida e Silva (2012) novos elementos são apresentados: a definição e o julgamento de hipóteses. Segundo as autoras, a definição e o julgamento de hipóteses guiam a construção do modelo, assim esses dois elementos são a base para a construção do modelo matemático. As autoras reforçam a ideia presente em Ferri (2006) com relação a conhecimentos matemáticos e extramatemáticos, quando afirmam que a elaboração de um modelo matemático é realizada pelas características da situação e pelos conhecimentos matemáticos.

As caracterizações de matematização apresentam a característica comum de traduzir o problema, que inicialmente não se encontra em linguagem matemática, para um problema matemático, descrito em linguagem matemática. Somente em Grigoras (2009) não aparece explicitamente o termo modelo matemático, porém o autor fala em "representação e estruturação dos artefatos e/ou situações do mundo real através de meios matemáticos[14]" (p. 2206, tradução nossa). Essa representação e estruturação nos remetem a um modelo matemático.

A matematização é normalmente apresentada como uma transição, tradução, transformação da realidade para o modelo matemático. A matematização tem como objetivo principal a transformação, tradução do problema do mundo real em um problema matemático e assim tem um papel fundamental na modelagem

[14] [...] representing and structuring real world artefacts and/or situations by mathematical means.

matemática, pois é por meio dela que a modelagem assume característica matemática. Em outras palavras, se não houvesse a matematização no processo de modelagem matemática, não caracterizaríamos tal modelagem como modelagem matemática, pois não haveria a tradução do problema para um problema matemático.

Mesmo em esquemas de modelagem matemática em que o termo matematização não aparece explicitamente, ele está presente, como no esquema de Bassanezi (2009). Em seu esquema, a matematização está implícita na abstração. Para o autor a abstração é a “problematização ou formulação aos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando” (p. 28). O que Bassanezi (2009) chama de abstração pode ser associado à matematização presente em Almeida e Silva (2012). Tanto na abstração de Bassanezi (2009) quanto na matematização de Almeida e Silva (2012) é destacado o papel das variáveis e das hipóteses na construção do modelo matemático.

A matematização é importante para que o problema possa ser abordado matematicamente. Porém, o termo matematização não é utilizado somente na modelagem matemática e pode ser compreendido, na Educação Matemática, como um processo desvinculado da modelagem matemática.

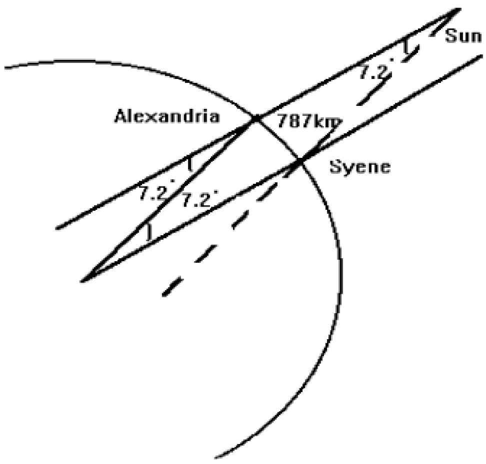
4 MATEMATIZAÇÃO: UMA CARACTERIZAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

4.1 MATEMATIZAÇÃO

Segundo o dicionário Priberam, matematização é a ação de matematizar que, por sua vez, significa introduzir num domínio os métodos matemáticos (leis, conceitos, formalização).

Quando Eratóstenes calculou a circunferência da Terra (VARGAS, 1996), por exemplo, estava introduzindo os métodos matemáticos em determinado domínio. O experimento de Eratóstenes pode ser ilustrado conforme apresenta a Figura 7 e descrito como segue.

Figura 7 - Ilustração do experimento de Eratóstenes



Fonte: Santos (2002)

> Eratóstenes, um geógrafo Grego (276-194 BC), sabia que durante o solstício do verão, os raios solares atingiam perpendicularmente a superfície de Siena (Egito) ao meio-dia. Neste mesmo instante, a inclinação dos raios solares era de 7,2° em Alexandria. Sabendo que os raios solares chegam à terra paralelamente, e que a distância entre Siena e Alexandria é 787 km, Eratóstenes usou uma simples regra de três para calcular o perímetro da terra. Isto é

$$\frac{7{,}2}{360} = \frac{787}{x}$$

> Portanto, a circunferência da terra será $x = 39350$ km. Para se calcular o raio da terra, basta fazer $x = 2\pi R$. (SANTOS, 2002)

Assim, o experimento de Eratóstenes pode constituir uma matematização. Também na Física, a matemática passou a compor conhecimento importante, como na utilização de conceitos matemáticos por Albert Einstein para expressar sua compreensão sobre a gravitação (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008), expressa pela equação:

$$R_{\mu\gamma} - \frac{1}{2} g_{\mu\gamma} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\gamma}$$

Sendo que $R_{\mu\gamma}$ designa o tensor de Ricci, $g_{\mu\gamma}$ designa o tensor métrico, R é o escalar de Ricci, $T_{\mu\gamma}$ designa o tensor energia-movimento, G é a constante de gravitação universal e c é a velocidade da luz no vazio (HERDEIRO, 2006).

A utilização da matemática em outras áreas do conhecimento e mesmo no desenvolvimento da própria matemática faz com que novos conhecimentos matemáticos sejam elaborados. As compreensões da realidade por meio de conhecimentos matemáticos por vezes são revisadas e modificadas. Uma vez que

> a História da Ciência tem sido exatamente isto: melhorar teorias, com base em modelos da realidade, graças ao desenvolvimento de novos instrumentos materiais e intelectuais. A evolução dos sistemas Ptolomeu-Copérnico-Galileu, da newtoniana para a mecânica quântica e, ainda, a biologia molecular claramente ilustram os efeitos dos novos instrumentos materiais e intelectuais na História das Ciências[15]. (D'AMBROSIO, 2009, p. 92, tradução nossa)

Mas não somente nos primórdios da história da humanidade ocorreu matematização, mas também durante todo o desenvolvimento da Matemática e das Ciências, assim como em nossos dias e por isso podemos dizer que “a matemática é o estilo de pensamento dos dias de hoje, a linguagem adequada para expressar as reflexões sobre a natureza e as maneiras de explicação” (D'AMBROSIO, 1996, p. 59).

Vista a importância do uso de conhecimentos matemáticos em nossas vidas, é possível imaginarmos que na escola seja incentivada a capacidade de realizar a

---

[15] History of Science has been exactly this: to improve theories, based on models of reality, thanks to the development of new intellectual and material instruments. The evolution of Ptolemy→Copernicus→Galileo systems, of Newtonian to Quantum Mechanics, and also molecular biology clearly illustrate the effects of new intellectual and material instruments in the History of Sciences.

matematização. No ensino de matemática, o termo foi introduzido por Hans Freudenthal.

4.2 Matematização como princípio didático

Em 1960, o Ensino de Matemática da Holanda foi marcado por um movimento chamado *Educação Matemática Realística* (*RME*), que visava um ensino de matemática diferente da abordagem mecanicista, dominante na época (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010). No ano de 1960,

> a Holanda quis abandonar a então prevalecente abordagem mecanicista para o ensino da matemática. Uma característica dessa abordagem é o foco em cálculos com números em si e pouca atenção às suas aplicações, principalmente no início do processo de aprendizagem. A matemática é ensinada de um modo atomizado. Os alunos aprendem os procedimentos passo-a-passo, com a demonstração feita pelo professor de como solucionar um problema[16]. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2012, p.4, tradução nossa)

O termo *Realística* na RME não se refere somente a contextos reais. Na RME são considerados também outros contextos e o importante é que o contexto possa ser imaginado pelo aluno. Van den Heuvel-Panhuizen (2003) enfatiza esse aspecto, afirmando que o "mundo da fantasia dos contos de fadas e, até mesmo, o mundo formal da matemática podem ser contextos muito adequados para problemas, desde que eles sejam 'reais' na mente dos alunos[17]" (p. 10, tradução nossa).

Com a reforma teve início o projeto Wiskobas, significando matemática na escola primária, composto por Wijdeveld, Goffree, Treffers e Freudenthal. Em 1968, no início do movimento da reforma,

> o projeto Wiskobas (que quer dizer 'matemática na escola primária') foi iniciado por Wijdeveld e Goffree e, não muito depois, contou com a participação de Treffers. Foram os três quem, de fato, construíram a base para a RME. Em 1971, quando o Instituto IOWO, cujo diretor era Freudenthal, foi fundado para o projeto Wiskobas e um projeto semelhante para o ensino médio, o movimento recebeu um novo impulso para reformar o ensino da matemática[18]. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p.3, tradução nossa)

---

[16] In the 1960 the Netherlands wanted to abandon the then prevalent mechanistic approach to mathematics education. Characteristic of this approach is its focus on calculations with bare numbers, and the little attention that it pays to applications; which is certainly true for the beginning of the learning process. Mathematics is taught in an atomised way. Students learn procedures in a step-by-step way in which the teacher demonstrates how to solve a problem.

[17] The fantasy world of fairy tales and even the formal world of mathematics can be very suitable contexts for problems, as long as they are 'real' in the students' minds.

[18] […] of the Wiskobas project (meaning 'mathematics in primary school') initiated by Wijdeveld and Goffree, and joined not longer after by Treffers. It was these three who in fact built the foundation for RME. In 1971, when the IOWO Institute, with Freudenthal as its director, was established for the Wiskobas project and a similar project for secondary education, the movement received a new impulse to reform mathematics education.

Apesar de Freudenthal não ter construído as bases de RME, suas ideias a influenciaram profundamente. Para Freudenthal, a matemática deveria ser vista como uma atividade de organização da realidade, sendo essa realidade matemática ou não, porém sempre vinculada a determinado contexto.

> O que é matemática? […] É uma atividade de resolução de problemas, de busca de problemas, mas também uma atividade de organização de um assunto. Pode ser um problema advindo da realidade que tem de ser organizado de acordo com padrões matemáticos se problemas da realidade tiverem de ser resolvidos. Também pode ser uma questão matemática, resultados novos ou velhos, seus ou de outros, que tenham de ser organizados de acordo com novas ideias, para serem mais bem compreendidos, em um contexto mais amplo ou por uma abordagem axiomática[19]. (FREUDENTHAL, 1971, p. 413-414, tradução nossa).

Em sua opinião não era possível estudar matemática desvinculada de um contexto, em "seus princípios iniciais, matemática significa matematizar a realidade[20]." (FREUDENTHAL, 1968, p. 7, tradução nossa). Por esse motivo, Freudenthal defendia que era necessário ensinar matemática vinculada a um contexto, sendo ele matemático ou não, "Os humanos não têm de aprender a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade e, se possível, até mesmo o processo de matematização da matemática.[21]" (FREUDENTHAL, 1968, p. 7, tradução nossa). Nas palavras de Freudenthal (1968),

> […] ensinar matemática sem nenhuma relação ao seu uso, mas apenas com a esperança de que os alunos sejam capazes de aplicá-la quando precisarem. Se existente, essa esperança tem se mostrado ociosa. A grande maioria dos alunos não é capaz de aplicar suas experiências matemáticas de sala de aula, nem nos laboratórios escolares de física ou de química nem em situações triviais da vida real[22]. (p. 5, tradução nossa).

Dessa forma, Freudenthal destacava que a escola não deve somente ter esperança de que os alunos apliquem seus conhecimentos em suas vidas diárias, mas sim, que os ajude a aplicar seus conhecimentos na vida cotidiana.

Vinculada à ideia de matematização de Freudenthal, Treffers (1993) afirma que foi ele quem sistematizou, em 1987, a matematização em duas componentes: horizontal e vertical, pois até então Freudenthal havia somente elaborado a ideia de

[19] What is mathematics? […] It is an activity of solving problems of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter. This can be a matter from reality which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or of others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach.
[20] In Its first principles mathematics means mathematizing reality.
[21] What humans have to learn is not mathematics as a closed system, but rather as an activity, the process of mathematizing reality and if possible even that of mathematizing mathematics.
[22] […] to teach mathematics with no other relation to its use than the hope that students will be able to apply it whenever they need. If anything, this hope has provide idle. The huge majority of students are not able to apply their mathematical classroom experiences, neither in the physics or chemistry school laboratory nor in the trivial situations of daily life.

matematização sem classificá-la em duas componentes. Dessa forma, a compreensão da matematização, por meio de duas componentes, a saber, horizontal e vertical, foi realizada primeiro por Treffers, em 1987, e posteriormente, também Freundethal elaborou sua concepção dessas duas componentes.

4.2.1 Matematização horizontal e matematização vertical

Podemos dizer que a matematização horizontal é a transformação de um problema em linguagem natural para um problema em linguagem matemática. Na matematização vertical utilizam-se métodos, ferramentas, organização e conhecimentos matemáticos, ou seja, é uma ação realizada dentro da própria matemática. Esta visão de Treffers, de que a matematização poderia ser compreendida como composta por duas componentes, fez com que também Freudenthal sistematizasse a matematização em horizontal e em vertical. Em seu último livro, *Revisiting Mathematics Education* (Revisitando Educação Matemática), Freudenthal afirma que, a

> matematização horizontal leva do mundo da vida para o mundo dos símbolos. No mundo da vida se vive, age (e sofre); no outro, uma forma de símbolos é formada, remodelada, e manipulada mecanicamente, compreendida, refletida, esta é matematização vertical. O mundo da vida é o que é vivido como realidade (...) [23] (FREUDENTHAL, 1991, p. 41-42, tradução nossa).

Vamos ilustrar a ideia da matematização horizontal e da matematização vertical considerando o problema *Quanto suco existe em uma laranja?* que consta de Almeida, Silva e Vertuan (2012). Com o intuito de saber quanto suco há em uma laranja é necessário perceber quais características da laranja devem ser levadas em consideração com o intuito de abordar a situação matematicamente. Poderíamos, por exemplo, considerar como informações importantes a escolha de um tipo de laranja e que, em Almeida, Silva e Vertuan (2012), foi considerada a laranja-lima, e que quanto maior a circunferência maior da laranja-lima mais suco ela produzirá. A Figura 8 mostra como pode ser medida a circunferência maior de uma laranja.

[23] Horizontal mathematisation leads from the world of life to the world of symbols. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly; this is vertical mathematisation. The world of life is what is experienced as reality […]

Figura 8 - Medindo a circunferência maior das laranjas-lima

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 143)

Essa coleta de dados resultaria em uma tabela que relaciona o comprimento da circunferência em centímetros e o suco em mililitros, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1 - Suco das laranjas em mililitros

Comprimento da circunferência (cm)	Suco (ml)
7,3	45
8,8	52
9,5	55
10	74
10,8	78
12,1	85
12,2	88
13,2	100

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 144)

O percurso realizado desde o problema até a Tabela 1 faz parte da matematização horizontal, pois para se elaborar a Tabela 1 foi necessário caminhar da realidade para a matemática. De posse dos dados da Tabela 1 pode-se ter a percepção de que tais dados se aproximam de uma função do primeiro grau $S(c) = 9{,}6c - 28{,}8$ (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) em que c é o comprimento da circunferência maior da laranja-lima e $S(c)$ é a quantidade de suco de laranja-lima em mililitros. Para encontrar a função que expressa a quantidade de suco em uma laranja-lima há um trabalho matemático que independe do contexto da situação. A obtenção da função do primeiro grau necessita somente de conhecimentos matemáticos, como sistemas lineares, e dos dados presentes na Tabela 1, caracterizando assim a matematização vertical.

Com relação à matematização horizontal e à matematização vertical, alguns autores como Jzn (1986), Luccas e Batista (2011) e Rico (2006) destacam quais atividades estão vinculadas a cada uma das componentes, horizontal e vertical.

Jzn (1987) elencou algumas atividades associadas à matematização horizontal e matematização vertical. Para o autor as atividades que contém forte componente horizontal são:

- identificação da matemática específica em um contexto geral;
- esquematização;
- formulação e visualização de um problema de diferentes maneiras;
- identificação de relações;
- identificação de regularidades;
- reconhecimento de aspectos isomorfos em problemas diferentes;
- transferência de um problema do mundo real para um problema matemático;
- transferência de um problema do mundo real para um modelo matemático conhecido.[24] (JZN, 1987, p. 69, tradução nossa)

As atividades seguintes têm forte componente vertical:

- representação de uma relação em uma expressão matemática;
- prova de regularidades;
- refinamento e ajuste de modelos;
- uso de diferentes modelos;
- combinação e integração de modelos;
- formulação de um novo conceito matemático;
- generalização.[25] (JZN, p. 69, tradução nossa).

A partir das atividades identificadas na matematização horizontal e na matematização vertical, podemos dizer que a matematização horizontal se refere à relação entre conhecimentos não matemáticos referentes à situação e conhecimentos matemáticos do aluno (LUCCAS; BATISTA, 2011). A matematização vertical, por sua vez, envolve a habilidade de operacionalização com os objetos matemáticos.

Freudenthal, no decorrer de seus textos, destacava a importância de se ensinar a matemática vinculada a um contexto. Por meio de uma contextualização, os alunos poderiam iniciar a matematização horizontal por meio de reflexões, análise

[24] - identifying the specific mathematics in a general context
- schematizing
- formulating and visualizing a problem in different ways
- discovering regularities
- recognizing isomorphic aspects in different problems
- transferring a real world problem to a mathematical problem
- transferring a real world problem to a known mathematical model.

[25] - representing a relation in a formula
- proving regularities
- refining and adjusting models
- using different models
- combining and integrating models
- formulating a new mathematical concept
- generalizing.

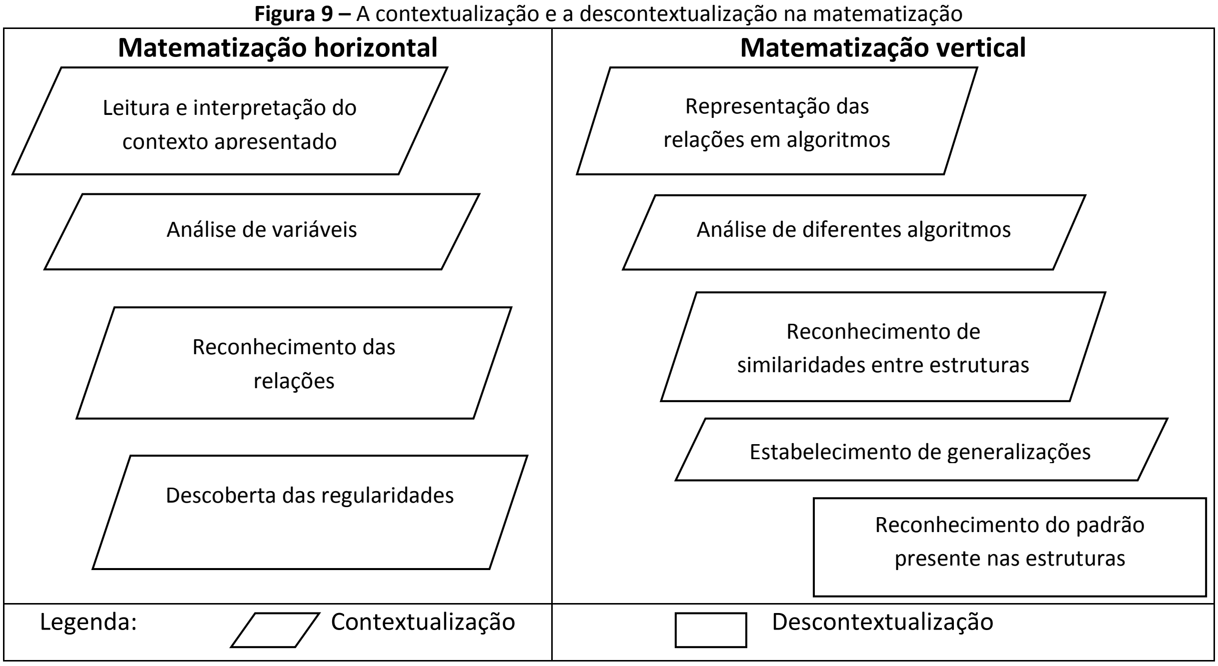
de variáveis, reconhecimento de relações e descoberta de regularidades caminhando da realidade para a matemática.

No entanto, Luccas e Batista (2008) destacam a importância da matematização horizontal e da contextualização para que se realize a descontextualização, pois

> em se tratando de atividades desenvolvidas em sala de aula, o trabalho com o objeto matemático contextualizado apresenta-se como uma etapa inicial do ensino. Logo após, é importante que uma outra etapa se concretize – a descontextualização. Nesta etapa é possível ter acesso à estrutura do objeto matemático estudado, cujo intuito é garantir o caráter universalizante e não simplista do mesmo. (p. 12).

Por meio da descontextualização é possível ter acesso ao objeto matemático associado ao contexto do problema. É importante que o aluno tenha contato com o objeto matemático descontextualizado, pois esse possibilita "o acesso à estrutura dos objetos matemáticos, fortalece o desenvolvimento do pensamento lógico-racional e abstrato, bem como evidencia a natureza do conhecimento matemático" (LUCCAS; BATISTA, 2011, p. 461). Assim, ainda que a matematização horizontal constitua parte importante na contextualização, é na fase final da matematização vertical que a descontextualização conduz ao reconhecimento e/ou ao desenvolvimento de conhecimento matemático. Essa ideia é ilustrada por Luccas e Batista (2011) conforme mostra a Figura 9.

Figura 9 – A contextualização e a descontextualização na matematização



Fonte: Adaptada de Luccas e Batista (2011, p. 463)

Em se tratando das etapas constituintes da matematização horizontal e da matematização vertical, Rico (2006) apresenta atividades que fazem parte da matematização horizontal:

- identificar matemática relevante em um contexto geral;
- levantar questões;
- articular problemas;
- representar o problema de uma maneira diferente;
- compreender a relação entre linguagem natural e linguagem simbólica formal;
- encontrar regularidades, padrões e relações;
- reconhecer isomorfismos com problemas conhecidos;
- traduzir o problema em um modelo matemático;
- utilizar ferramentas e recursos[26]. (p. 51, tradução nossa)

Rico (2006) também destaca as atividades que fazem parte da matematização vertical:

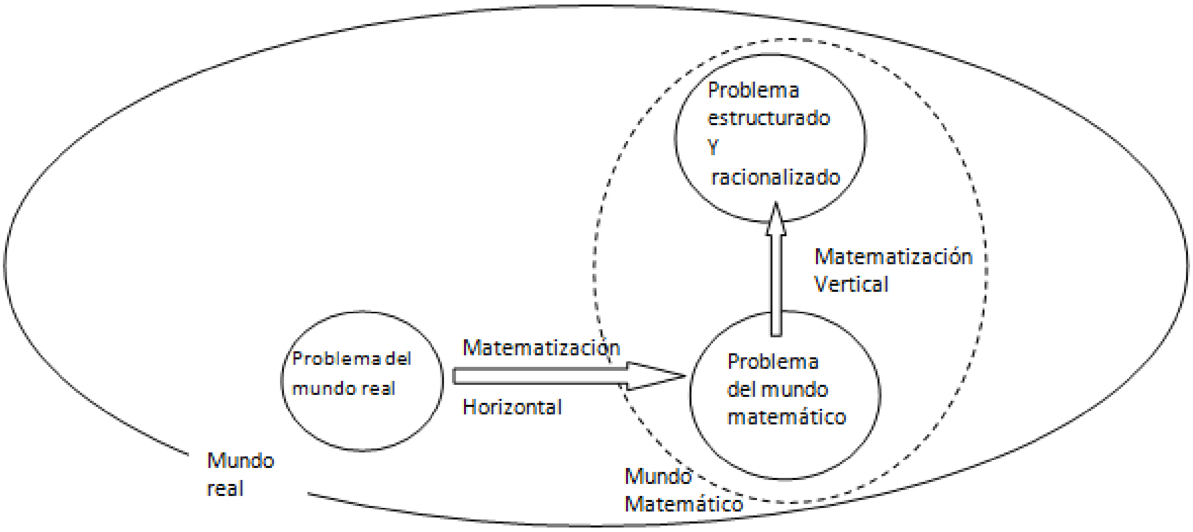
- usar diferentes representações;
- usar linguagem simbólica, formal e técnica e suas operações;
- refinar e ajustar modelos matemáticos, combinar e integrar modelos;
- argumentar e generalizar27. (p. 51, tradução nossa)

Para Rico (2006) o processo de matematização inicia com um problema real, dando início à matematização horizontal, e é finalizado com um problema estruturado, momento em que termina a matematização vertical. A Figura 10 ilustra o processo de matematização elaborado pelo autor.

[26] identificar matemáticas relevantes en un contexto general
plantear interrogantes
enunciar problemas
representar el problema de un modo diferente
comprender la relación entre lenguaje natural, lenguaje simbólico y formal
encontrar regularidades, relaciones y patrones
reconocer isomorfismos con problemas ya conocidos
traducir el problema a un modelo matemático
utilizar herramientas y recursos adecuados.

[27] usar diferentes representaciones
usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones
refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos y
argumentar y generalizar.

Figura 10 - Processo de matematização



Fonte: Rico (2006, p. 52)

O processo de matematização apresentado por Rico (2006), Figura 10, esclarece a ideia de Freudenthal de que a matematização horizontal é o caminhar da realidade para a matemática e que a matematização vertical é um movimento dentro da própria matemática, pois na ilustração de Rico (2006) há um mundo matemático inserido dentro da realidade, ao qual se tem acesso por meio da matematização horizontal.

4.2.2 Matematização e desmatematização

Jabonkla e Gellert (2007) discutem a matematização compreendendo-a como um processo social. Segundo os autores, “qualquer discussão sobre matematização tem de levar em consideração o processo social pelo qual os modelos matemáticos são desenvolvidos, implementados, aceitos e encobertos[28]” (JABONKLA; GELLERT, 2007, p. 6, tradução nossa).

Tratar a matematização como processo social implica em pensar na influência que a matemática exerce nas mais diversas áreas. Muitas teorias atuais utilizam conhecimentos matemáticos e esses podem contribuir para a compreensão de teorias sociológicas, psicológicas e educacionais. Essa influência exercida pela matemática pode, muitas vezes, passar despercebida. Skovsmose (2001) apresenta

[28][...] any discussion of mathematisation has to take into account the social process by which mathematical models are developed, implemented, accepted, and obscured.

reflexões sobre a utilização de conhecimentos matemáticos em nosso cotidiano, podendo muitas vezes influenciar decisões em nossa sociedade.

Um exemplo de como a matemática pode influenciar e conduzir a decisões sociais importantes é a distribuição do número de senadores e deputados no Congresso Nacional Brasileiro apresentado em Borba e Skovsmose (2001).

O Congresso Nacional Brasileiro é composto por deputados e senadores que em 2010 totalizavam 81 senadores e 513 deputados. Os dados do Censo 2010 apontam que a população total brasileira em 2010 era de 190.755.799 pessoas, sendo 2.068.017 residentes no estado do Sergipe e 19.597.330, no estado de Minas Gerais. Um raciocínio comum para a distribuição das cadeiras no Congresso Nacional Brasileiro é a proporcionalidade. Pensando proporcionalmente, a população de Sergipe representa aproximadamente 1,08% da população brasileira e a população mineira, 10,27%. Visando manter a proporção, o Sergipe deveria ter lugar para 0,87 senador. Imagine que nesse modelo, quando ocorrer um valor com decimal acima de 0,5 o valor seja arredondado para mais e abaixo de 0,5, para menos. Então o estado do Sergipe deveria ter um senador. Já o estado de Minas Gerais deveria ter aproximadamente 8,32 senadores, resultando, pelo modelo, em 8 senadores. Quanto à quantidade de deputados, os sergipanos deveriam ter aproximadamente 5,54 deputados, ou seja, 6 deputados e os mineiros, aproximadamente 52,68 deputados, resultando em 53 deputados. A quantidade de deputados e senadores foi elaborada aqui segundo um modelo proporcional, mas na prática, o estado do Sergipe tem 2 senadores e 8 deputados, enquanto o estado de Minas Gerais tem 2 senadores e 53 deputados. A crítica de alguns políticos é que a divisão deveria seguir um modelo proporcional e não a atual divisão, herança da ditadura no Brasil (BORBA; SKOVSMOSE, 2001).

Mas, será que a divisão proporcional seria mais adequada? Borba e Skovsmose (2001) trazem um exemplo apresentado em Garfunkel (1991 apud BORBA; SKOVSMOSE, 2001):

> Os distritos A, B e C têm, respectivamente, as populações de 50 mil, 20 mil e 10 mil habitantes. Cada distrito elege um representante com o mesmo poder para a Câmara de Deputados de Saint Lawrence. [...] Quantos representantes cada distrito deve ter se o número total de representantes deve ser mantido em um mínimo? (p. 139).

Um modelo proporcional resulta em cinco representantes do distrito A, dois de B e um de C. Outro modelo é que cada distrito escolhe um representante e que esses tem votos com pesos diferentes, sendo o voto do representante A com peso cinco, o representante B com peso dois e, C com peso um. O problema desse último modelo, semelhante ao primeiro, pode ser visto quando se imagina uma votação, pois o representante A sempre decidirá a votação.

Mas o que o exemplo da distribuição das cadeiras no Congresso Nacional Brasileiro nos mostra? Que por vezes imaginamos que a utilização da matemática sempre resultará em uma solução justa, adequada. Essa visão deixa transparecer a ideologia de que a matemática é "perfeita, pura e geral, no sentido de que a verdade de uma declaração matemática não se fia em nenhuma investigação empírica" (BORBA; SKOVSMOSE, 2001, p. 130) e confiável, podendo ser utilizada para qualquer tipo de situação, conforme Borba e Skovsmose (2001). O exemplo ilustra o poder formatador que a matemática exerce na sociedade, mostra a dependência de que as decisões tenham como base argumentos matemáticos para serem consideradas válidas.

Se em alguns casos, como o da distribuição das cadeiras do Congresso Nacional, a matemática não se apresenta como a maneira mais adequada para se resolver um problema, em outros casos o conhecimento matemático é essencial.

Alguns autores como Ubiratan D'Ambrósio e Ole Skovsmose, discutem a relação da Educação Matemática com a democracia. Podemos entender que a democracia "caracteriza os modos de participação em discussões e na crítica de decisões reais" (SKOVSMOSE, 2001, p. 76) e com isso queremos dizer que nossa visão de democracia não supõe que todas as pessoas devam participar do governo e das escolhas feitas pelo governo. Isso porque seria impossível uma reunião em que todas as pessoas pudessem participar e opinar sobre as decisões. Dessa forma, é necessário escolher representantes considerados capazes de tomar decisões e à população cabe o papel de julgar se tais decisões foram adequadas, sendo essa a maneira de exercer sua cidadania. A "educação para a cidadania, que é um dos grandes objetivos da educação de hoje, exige uma 'apreciação' do conhecimento moderno, impregnado de ciência e tecnologia" (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 87) e segundo Skovsmose (2001), a

> sociedade e a tecnologia estão integradas e a tecnologia tornou-se o aspecto dominante da civilização. A matemática é o sustentáculo lógico do processamento da informação, e o pensamento matemático é também a base para as atuais aplicações da tecnologia da informação. De fato, todas as aplicações de um computador podem ser vistas como uma aplicação de um modelo matemático simples ou complexo. [...]. O efeito dos computadores é a colonização de todas as áreas da vida pelas aplicações de métodos formais. É isso que caracteriza a sociedade da informação. (p. 76-77)

Como atualmente, em nossa sociedade, muitas decisões são tomadas por meio da utilização de sistemas computacionais, temos como uma das consequências a não visualização dos modelos matemáticos que possibilitam as decisões apresentadas pelos computadores. Assim, torna-se presente o processo de desmatematização, a "existência de uma matemática materializada na forma de caixas pretas reduz a importância de habilidades matemáticas e o conhecimento para a vida social e profissional do indivíduo. O processo de desmatematização está tomando lugar[29]" (JABLONKA; GELLERT, 2007, p. 8, tradução nossa).

Podemos dizer que a desmatematização é a redução da importância das habilidades matemáticas, pois as máquinas, que são as caixas pretas, executam os cálculos necessários e fornecem como resultado uma resposta para o problema com o qual o sistema foi abastecido.

Um exemplo de desmatematização presente em nosso cotidiano são os sistemas computacionais de bancos quando, por exemplo, avaliam a quem se podem fornecer empréstimos. Tais sistemas provavelmente necessitam de alguns dados pessoais do interessado e, por meio de um modelo matemático, determinam se aquela pessoa pode ou não pegar dinheiro emprestado do banco. Mesmo que um determinado funcionário forneça as informações para o sistema computacional, é muito provável que ele não saiba exatamente como se chega à conclusão de liberar ou não o empréstimo.

Com isso, a desmatematização está tomando o lugar das reflexões das ações humanas. Dessa forma, a decisão de fornecer ou não um empréstimo a determinada pessoa passa a ser uma decisão matemática. Dá-se menos importância a questões subjetivas em favor de um olhar mais objetivo quando se utilizam modelos matemáticos na tomada de decisões.

[29] The existence of materialised mathematics in the form of black boxes reduces the importance of mathematical skills and knowledge for the individual's professional and social life. A *demathematisation* process is taking place

Deixa-se que as caixas pretas, atualmente representadas pelas máquinas, realizem decisões com base em critérios matemáticos. Porém, assim como no exemplo da distribuição de cadeiras no Congresso Nacional Brasileiro, nem sempre decisões com base em uma abordagem matemática é a melhor opção quando os resultados dessas decisões tem impacto social.

Essa utilização de modelos matemáticos nas mais diversas áreas já está tão presente em nossas vidas que não percebemos mais sua atuação. Desse modo, a matematização se faz importante, não somente como princípio didático, mas também no sentido em que necessitamos compreender como conceitos matemáticos são utilizados em nossa vida diária, pois somente dessa forma podemos avaliar se concordamos ou não com essas decisões e como resultado poderemos exercer nossa cidadania de maneira mais crítica.

4.2.3 Etapas de uma matematização

Na literatura, de modo geral, realizar uma matematização, ainda que possa ser horizontal ou vertical, implica em um conjunto de procedimentos por vezes identificados como etapas ou fases.

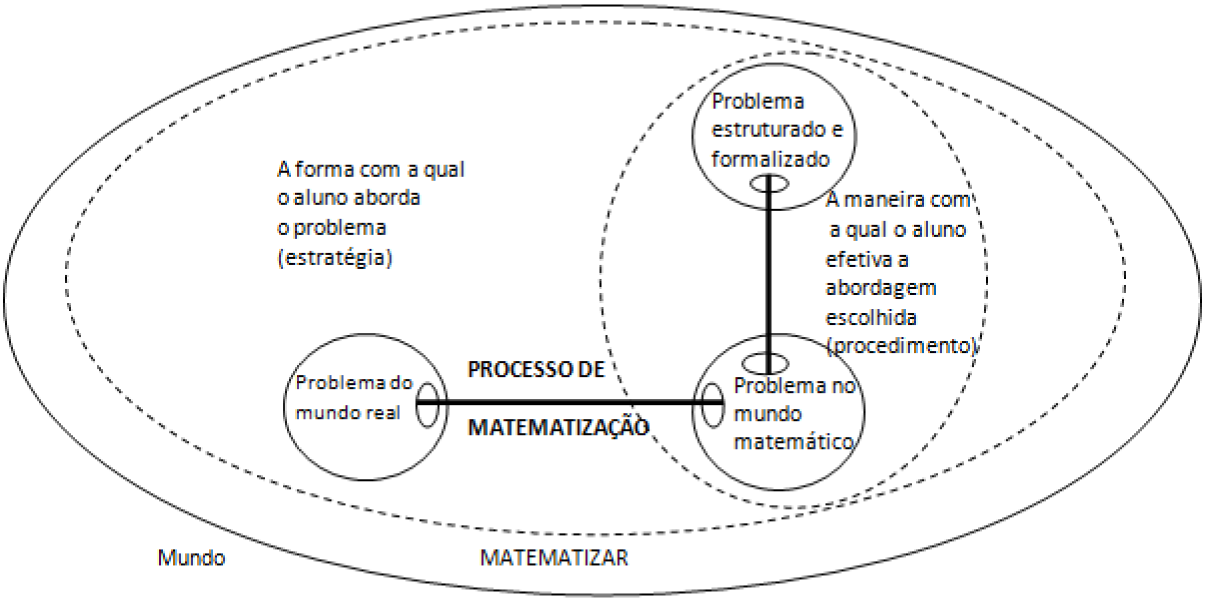
Para Almeida (2009) o processo de matematização envolve as fases:

> 1ª) compreensão do problema (o aluno produz um enunciado do problema, seja por escrito, oral ou por pensamento);
> 2ª) planejamento de como resolver o problema (analisar o problema; retirar informações; associar características relevantes com procedimentos promissores de solução; formular hipóteses);
> 3ª) resolver o problema (transformar o enunciado do problema em linguagem matemática; representações da situação-problema; solução provisória);
> 4ª) validar e apresentar a solução (confrontar a solução com o problema proposto; verificação da solução, se não, determinação de um método alternativo de solução ou de solução provisória). (p. 25)

A partir dessas quatro fases, Almeida e Buriasco (2011), ponderam que uma matematização contempla dois tipos de ações: “a escolha de uma estratégia que resolve o problema (primeira e segunda fases), seguida de um procedimento que a resolve (terceira e quarta fases)” (p. 30). Ou seja, matematizar implica em, a partir de um problema não matemático, planejar estratégias de resolução e, a seguir, utilizar ferramentas matemáticas para realizar a resolução.

A Figura 11 ilustra o processo de matematização caracterizado em Almeida e Buriasco (2011).

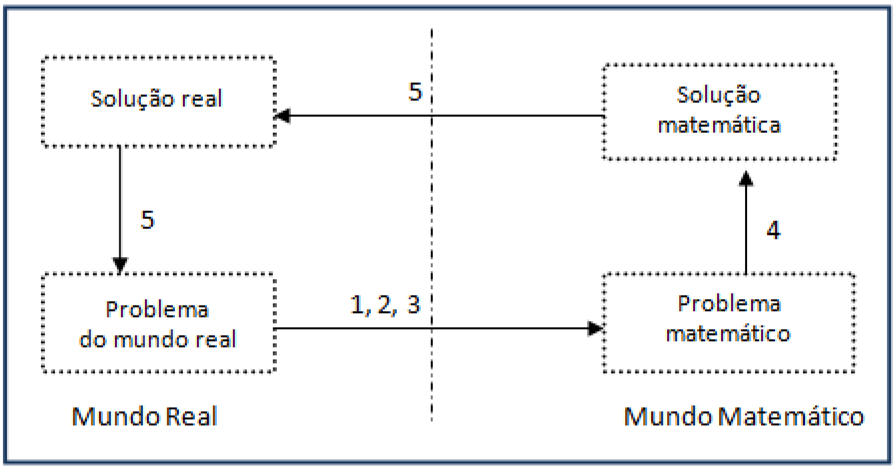
Figura 11 - Processo de matematização



Fonte: Almeida e Buriasco (2011, p. 30)

GAVE (2005) caracteriza o processo de matematização por meio de cinco etapas, conforme mostra a Figura 12.

Figura 12 - O processo de matematização



Fonte: GAVE (2005, p. 21)

As cinco etapas, indicadas na Figura 12, pelos números de um a cinco, são:

1. Partir de um problema situado na realidade;
2. Organizá-lo de acordo com conceitos matemáticos e identificar a matemática relevante;
3. Clarificar gradualmente a realidade, através de processos tais como colocar hipóteses, generalizar e formalizar, os quais ponham em evidência as características matemáticas da situação e transformam o problema do mundo real num problema matemático que representa fielmente a situação;
4. Resolver o problema matemático;

5. Validar a solução matemática em termos da situação real, incluindo a identificação das limitações da solução. (GAVE, 2005, p. 21).

Os autores que explicitam o processo de matematização sem categorizá-lo em horizontal e vertical (ALMEIDA, 2009, ALMEIDA; BURIASCO, 2011, GAVE, 2005) incluem no processo uma etapa referente à validação da solução matemática obtida. Já os autores que realizam a categorização da matematização nas componentes horizontal e vertical (JZN, 1986, LUCCAS; BATISTA, 2011, RICO, 2006) não fazem menção explícita a uma etapa referente à validação da solução matemática obtida.

4.3 Modelagem Matemática e Matematização: um Primeiro Olhar Sobre Aproximações

Os esquemas de modelagem matemática, apresentados em 3.3, ilustram como ocorre o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Tais esquemas têm como elementos as etapas do processo de modelagem matemática, bem como as transições entre as etapas. Alguns autores, como Almeida e Silva (2012), nomeiam essas transições como ações cognitivas e outros autores, como Ferri (2006), Blum e Leiβ (2005) e Maaβ (2006) chamam esse caminhar entre as etapas, de transição ou não fornecem um nome específico.

Uma das transições do processo de modelagem matemática é chamada matematização e, no contexto do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, é nessa transição que um problema não matemático é traduzido em um problema matemático ou modelo matemático. Porém, na Educação Matemática Realística, a matematização é compreendida como um processo.

O processo de matematização se inicia em um problema não matemático já formulado, diferente da modelagem matemática, que se inicia em uma situação problema e a escolha e formulação de um problema não matemático é parte integrante do processo de modelagem matemática. Desde a situação problema até a formulação de um problema não matemático, na modelagem matemática, se transita em duas etapas bem como as transições entre essas etapas.

Dessa forma, o processo de modelagem matemática se inicia antes do processo de matematização. No primeiro, o início está localizado na situação problema e no segundo, em um problema não matemático já estruturado. Assim, um aluno que desenvolve uma atividade de modelagem matemática tem contato com a complexidade que uma situação real apresenta como exemplificamos em 3.2 e com isso é necessário que simplificações sejam realizadas com o intuito de tornar possível uma abordagem matemática da situação. Já no processo de matematização, o aluno se depara com um problema já estruturado, e assim, se envolve menos com a complexidade da situação real.

Tendo o problema não matemático estruturado, no processo de matematização, se inicia a matematização horizontal que conduzirá a um problema matemático, pois a matematização horizontal leva da realidade para a matemática (FREUDENTHAL, 1991). Esse caminhar da realidade para a matemática se aproxima da caracterização da ação cognitiva matematização, da modelagem matemática, presente em Almeida e Silva (2012). Com relação à matematização, as autoras explicitam que é nessa transição que se realiza uma transição de linguagens, de uma linguagem natural para uma linguagem matemática. Nos esquemas de Blum e Leiβ (2005), Maaβ (2006) e Ferri (2006) também percebemos que é a transição matematização que faz a ligação entre a realidade e a matemática. Considerando essas caracterizações da matematização horizontal e da matematização da modelagem matemática, podemos dizer que essas duas se aproximam.

No processo de matematização, a partir de um problema matemático, inicia-se a matematização vertical, que pode ser compreendida como o trabalho realizado dentro da própria matemática, sem a necessidade de referência a um contexto. Na modelagem matemática a síntese, presente em Almeida e Silva (2012), ou trabalho matemático, presente em Blum e Leiβ (2005), Maaβ (2006) e Ferri (2006), se aproximam da matematização vertical. Para Almeida e Silva (2012), a ação cognitiva síntese diz respeito ao domínio de técnicas matemáticas e de diferentes representações do objeto matemático. Ferri (2006) caracteriza a transição trabalho matemático como o uso que o indivíduo faz de suas competências matemáticas.

Assim, é possível perceber uma aproximação entre a matematização vertical e a síntese da modelagem matemática.

Em se tratando de modelagem matemática, os esquemas apresentados em 3.3 podem sugerir que o processo é linear, uma vez que as setas são unidirecionais, porém Ferri (2006) destaca que esse processo é dinâmico e que seu esquema ilustra qual seria o caminho percorrido por uma pessoa que passasse por cada uma das etapas uma única vez.

Com relação ao processo de matematização, quando esse não é classificado em horizontal e vertical, como em Almeida (2009), Almeida e Buriasco (2011) e GAVE (2005), uma etapa referente à validação dos resultados matemáticos obtidos se torna presente no processo. Já autores como Luccas e Batista (2011), Jzn (1987) e Rico (2006) classificam a matematização em horizontal e vertical e não incluem a etapa referente à validação no processo de matematização.

Para Rico (2006) a etapa referente à validação bem como o processo de matematização, compreendido em suas componentes horizontal e vertical, faz parte do processo de resolução de problemas. Para o autor, na matematização horizontal e na matematização vertical se desenvolve o problema e na etapa de validação se reflete sobre o desenvolvimento realizado, ou seja, na validação se realiza a reflexão do processo de matematização. Essa validação realizada com relação ao processo de matematização, segundo o autor, é a última etapa da resolução de problemas.

Esse primeiro olhar sobre as aproximações teve como base o referencial teórico. No próximo capítulo descrevemos e analisamos elementos da matematização realizada pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

5 COMO OS ALUNOS FIZERAM A MATEMATIZAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

5.1 O AMBIENTE DA PESQUISA

As atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas em curso extracurricular em uma universidade pública do Estado do Paraná no período de 15 de Agosto a 17 de Outubro de 2012. O curso, com carga horária de 30 horas, foi composto por dez encontros com duração de duas horas e meia, totalizando vinte e cinco horas de encontros presenciais. Inicialmente, a turma era formada por seis alunas do curso de Licenciatura em Matemática, três alunas do curso de Engenharia Civil e uma aluna do curso superior de Tecnologia em Processos Químicos. Na segunda semana do curso, dois alunos passaram a compor a turma e no decorrer das aulas alguns alunos desistiram, sendo a turma composta ao final por oito alunos: quatro alunas do curso de Licenciatura em Matemática, duas alunas do curso de Engenharia Civil, um aluno do curso de Engenharia Eletrônica e uma aluna do curso superior de Tecnologia em Processos Químicos.

5.2 AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Para o curso foram desenvolvidas duas atividades do primeiro momento, duas do segundo momento e duas do terceiro momento, sendo uma atividade de cada grupo. As atividades do primeiro e segundo momentos foram propostas pela professora do curso, que é também a autora deste trabalho. As atividades do primeiro momento foram *Aeroportos e a Copa de 2014* e *Reciclando Garrafas PET*. *Quantidade de Suco em uma Laranja* e *Distância entre a TV e o Sofá* foram as atividades do segundo momento.

Inicialmente, foi realizado um cronograma das datas em que cada atividade seria desenvolvida, sendo destinado um encontro do curso para cada atividade do primeiro momento, um encontro para cada atividade do segundo momento e três encontros para a atividade do terceiro momento, além de um encontro para a comunicação das atividades do terceiro momento. Porém, o cronograma foi alterado no decorrer do curso, pois para cada atividade do primeiro e segundo momentos foram utilizados dois encontros. O trabalho final foi desenvolvido em dois encontros do curso, além de troca de emails entre os alunos dos grupos e a professora. A Tabela 2 detalha as datas em que foram realizadas as atividades, a identificação do grupo, a identificação dos integrantes do grupo (utilizamos nomes fictícios visando manter o anonimato dos alunos que participaram do curso), o título da atividade e o momento, segundo Almeida e Dias (2004) em que a atividade se insere.

Tabela 2 - Detalhamento do curso

<table>
<tr><th>Data</th><th>Grupo</th><th>Integrantes</th><th>Atividade</th><th>Momento</th></tr>
<tr><td rowspan="3">15/08</td><td>1</td><td>Valéria / Gabriela</td><td rowspan="3">Aeroportos e a Copa de 2014</td><td rowspan="3">Primeiro</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Inês / Rita / Karla</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Débora
Paula</td></tr>
<tr><td rowspan="3">22/08</td><td>1</td><td>Valéria
Elaine
Paula</td><td rowspan="3">Aeroportos e a Copa de 2014</td><td rowspan="3">Primeiro</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Inês / José / Karla</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Rita
Gabriela / Daniele</td></tr>
<tr><td rowspan="3">29/08</td><td>1</td><td>Valéria / Elaine
Paula</td><td rowspan="3">Reciclando Garrafas PET</td><td rowspan="3">Primeiro</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Inês / José / Karla</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Rita
Gabriela / Daniele</td></tr>
<tr><td rowspan="3">05/09</td><td>1</td><td>Valéria
Elaine
Paula</td><td rowspan="3">Reciclando Garrafas PET

Quantidade de Suco em uma Laranja</td><td rowspan="3">Primeiro

Segundo</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Inês / José / Karla</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Rita</td></tr>
<tr><td rowspan="2">12/09</td><td>1</td><td>Valéria / Elaine
Paula / Daniele</td><td rowspan="2">Quantidade de Suco em uma Laranja</td><td rowspan="2">Segundo</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Inês / José / Karla / Rita</td></tr>
<tr><td rowspan="2">19/09</td><td>1</td><td>Valéria / Elaine
Paula / Daniele</td><td rowspan="2">Trabalho Final</td><td rowspan="2">Terceiro</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Inês / José / Karla / Rita</td></tr>
<tr><td rowspan="2">26/09</td><td>1</td><td>Valéria / Elaine
Paula / Daniele</td><td rowspan="2">Distância entre a TV e o Sofá</td><td rowspan="2">Segundo</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Inês / José / Karla / Rita</td></tr>
<tr><td>27/09</td><td>1</td><td>Valéria / Elaine
Paula / Daniele</td><td>Distância entre a TV e o Sofá</td><td>Segundo</td></tr>
</table>

03/10	2	Inês / José / Karla / Rita	Distância entre a TV e o Sofá	Segundo
04/10	1	Valéria / Elaine Paula / Daniele	Distância entre a TV e o Sofá	Segundo
10/10	1	Valéria Elaine Paula / Daniele	Trabalho Final	Terceiro
	2	Inês / José / Karla / Rita		
17/10	1	Valéria / Elaine Paula / Daniele	Apresentação Trabalho Final	Terceiro
	2	Inês / José / Karla / Rita		

Fonte: Elaborada pela autora.

No início do curso, a professora disse aos alunos que aconteceriam encontros dos grupos com a professora para orientação, caso solicitado pelos grupos. O grupo 1 se reuniu com a professora nos dias 27/09 e 04/10 visando orientação e nesses dias as alunas desenvolveram a atividade *Distância entre a TV e o Sofá*. Os alunos do grupo 2 não solicitaram encontros.

Os dados coletados durante o desenvolvimento do curso e que compõem o material para as análises foram entrevista, questionários, registros escritos do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e registros em áudio, em vídeo e fotos dos encontros do curso. A Tabela 3 detalha qual a natureza dos dados coletados em cada uma das atividades de modelagem matemática que compuseram o curso.

Tabela 3 - Dados coletados.

Atividade	**Natureza dos dados coletados**					
	Material escrito da atividade	**Áudio**	**Vídeo**	**Questionário**	**Entrevista**	**Foto**
Aeroportos e a Copa de 2014	X	X				
Reciclando Garrafas PET	X	X				
Quantidade de Suco em uma Laranja	X	X		X		X
Distância entre a TV e o Sofá	X	X	X	X		X
Apresentação Trabalho Final	X	X	X		X	X

Fonte: Elaborada pela autora.

Os registros escritos do desenvolvimento das atividades eram recolhidos pela professora quando a atividade era finalizada. A professora fazia cópia desses registros, devolvendo o original aos alunos no encontro seguinte. Os questionários eram entregues aos grupos no final da atividade de modelagem matemática desenvolvida e entregue à professora. Diferente dos registros escritos, os questionários não eram devolvidos aos alunos.

5.3 As Análises Específicas

Nas análises específicas utilizamos os dados coletados durante o desenvolvimento de três atividades, a saber: *Reciclando Garrafas PET*, que foi elaborada tendo como base a atividade “um bom ‘fim’ para as garrafas pet: a reciclagem” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), *Distância entre a TV e o Sofá* e *Um Modelo Matemático para o Preço da Gasolina*, visando identificar elementos da matematização realizada pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades.

As atividades *Reciclando Garrafas PET* e *Distância entre a TV e o Sofá* foram propostas pela professora e no curso fizeram parte do primeiro e do segundo momentos de inserção de atividades de modelagem matemática, respectivamente. Essas duas atividades foram desenvolvidas pelos dois grupos.

A terceira atividade analisada fez parte do terceiro momento da modelagem matemática e foi proposta e desenvolvida somente pelo grupo 2, isso porque nesse momento cada um dos grupos propôs e desenvolveu uma atividade diferente. O grupo 2 desenvolveu a atividade *Um Modelo Matemático para o Preço da Gasolina*. A Tabela 4 apresenta as atividades e os grupos analisados em cada uma das atividades, sendo utilizado G1 para o grupo 1 e G2 para o grupo 2.

Tabela 4 - Descrição das atividades analisadas

Atividade	Grupo
Reciclando Garrafas PET	G1 / G2
Distância entre a TV e o Sofá	G1 / G2
Um Modelo Matemático para o Preço da Gasolina*	G2

Fonte: Elaborado pela autora.
* O título dado pelos alunos do grupo 2 à atividade foi Modelo Matemático para a Gasolina.

Tendo em vista uma melhor compreensão das análises específicas, faremos uma descrição de cada atividade analisada e em seguida a análise específica da atividade.

5.3.1 Reciclando Garrafas PET

A primeira atividade consta de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e no curso fez parte do primeiro momento de inserção das atividades de modelagem matemática (ALMEIDA; DIAS, 2004). Por se tratar do primeiro momento, a temática, o problema e os dados foram fornecidos pela professora aos alunos. O Quadro 1 descreve a atividade.

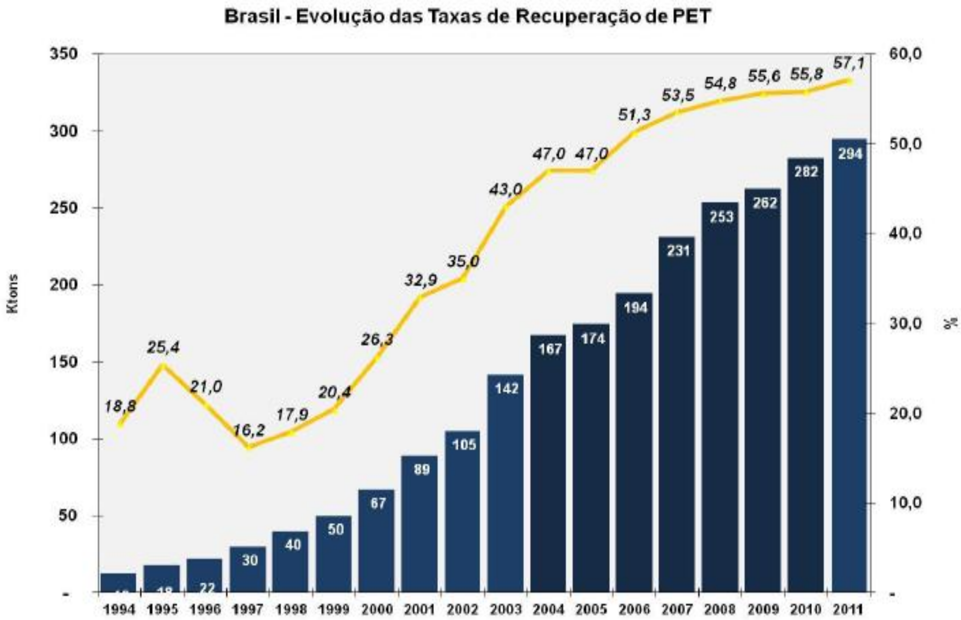
Quadro 1 - Dados da atividade Reciclando Garrafas PET

A reciclagem tem sido destacada por fazer parte da temática do desenvolvimento sustentável. Na mídia percebemos que em todo o Brasil são realizadas ações que caminham em direção ao desenvolvimento sustentável.

Na cidade em que o curso foi realizado, a iniciativa da prefeitura em colocar containers em algumas ruas para que a população coloque o lixo reciclável, é um exemplo dessa conscientização. Visando essa temática, que poderia ser parte da realidade dos alunos, a pesquisadora propôs o desenvolvimento da atividade relacionada à reciclagem de PET – politereftalato de etileno – no Brasil.

No Brasil, a Associação Brasileira da Indústria do PET (ABIPET), realiza censos com relação à reciclagem de PET no país. A Figura 13 apresenta dados da reciclagem.

Figura 13 - Quantidade de PET reciclado e percentual de reciclagem de PET no Brasil

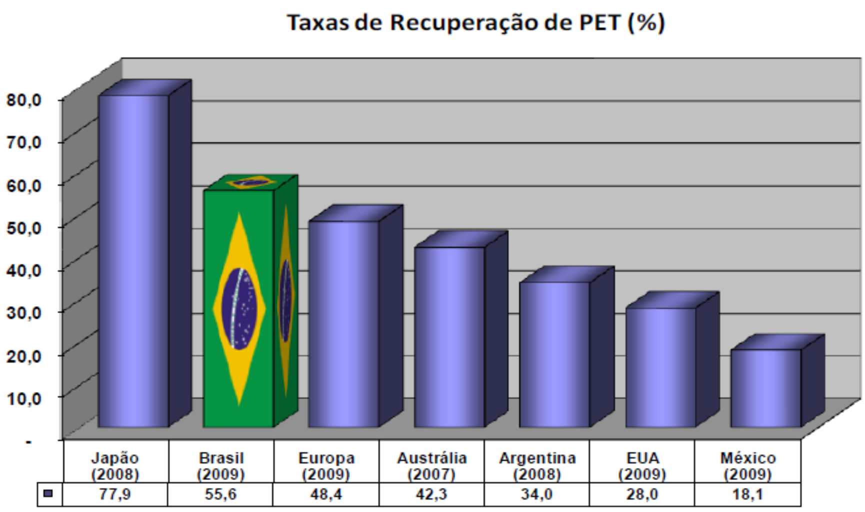


Fonte: 8º censo da reciclagem de PET no Brasil (ABIPET, p. 16)

1 Os valores presentes nas barras verticais da Figura 13 referem-se ao total de reciclagem de PET em mil toneladas. A linha amarela indica o percentual de PET reciclado considerando a produção total do Brasil.

A Figura 14 apresenta uma comparação da reciclagem de PET no mundo.

Figura 14 - Percentual de reciclagem de PET no mundo



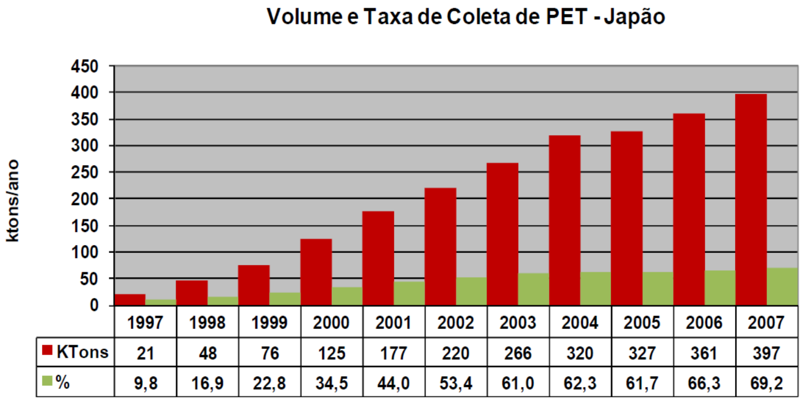
Fonte: 6º censo de reciclagem de PET no Brasil (ABIPET, p. 9)

A partir das Figuras 13 e 14, a professora propôs o problema:

Problema: O Brasil conseguirá atingir o mesmo percentual de reciclagem de garrafas PET que o Japão, país que em 2008/2009 teve maior índice de reciclagem de garrafas PET?

Após a apresentação dos dados e do problema, os alunos passaram a trabalhar visando responder ao problema proposto. Em ambos os grupos, os alunos perceberam que tendo o percentual de reciclagem do Japão, poderiam fazer as estimativas dos dois países e depois realizar a comparação entre eles. Na sequência do material entregue havia essa informação, conforme Figura 15.

Figura 15 - Dados da reciclagem de PET no Japão



Fonte: 5º censo da reciclagem de PET no Brasil (ABIPET, p. 6).

Fonte: Elaborado pela autora

A ABIPET utiliza censos para conhecer a reciclagem de PET no Brasil. Na sua oitava edição o censo foi realizado da seguinte forma: segmentação do setor e identificação das empresas (recicladores e aplicadores); contato com as empresas por telefone (no oitavo censo foram entrevistadas 409 empresas);

aplicação de questionário; elaboração de tabulação primária; análise de inconsistência de bancos de dados (recicladores e aplicadores); novo contato com as empresas que apresentaram inconsistências; tabulação final e apresentação. A Figura 13 apresenta porcentagens de reciclagem no Brasil provenientes do censo.

O problema, *O Brasil conseguirá atingir o mesmo percentual de reciclagem de garrafas PET que o Japão, país que em 2008/2009 teve maior índice de reciclagem de garrafas PET?*, pretende verificar se em algum momento os percentuais de reciclagem de PET do Brasil e do Japão serão iguais, considerando a tendência de crescimento presente nas Figuras 13 e 14.

De posse das informações das Figuras 13, 14 e 15, os alunos passaram a ajustar os dados referentes ao Brasil. Os dois grupos trabalharam com a função exponencial e com os dados a partir do ano 2005 para realizar o ajuste. O procedimento para encontrar a função que melhor se ajustaria aos dados foi considerar os pontos dois a dois e comparar os resultados obtidos com os dados da Figura 13 até que o melhor modelo fosse encontrado, considerando as comparações estabelecidas entre os dados reais e aqueles obtidos pelos modelos.

Para o grupo 1 o modelo considerado adequado para o Brasil foi aquele que utilizou os anos de 2005 (Figura 16) e 2009 (Figura 17), o qual resultou no modelo da Figura 18.

Figura 16 – Calculando um modelo matemático para a reciclagem de PET no Brasil

$$100 - y = a \cdot e^{Bn}$$
$$100 - 47 = a \cdot e^{Bn}$$
$$53 = a \cdot 1$$
$$a = 53$$

Fonte: Registro escrito da aluna Valéria

Figura 17 - Calculando um mo… atemático para a reciclagem de … il

$$y = 55{,}6$$
$$100 - 55{,}6 = 53 \cdot e^{B.4}$$
$$44{,}4 = e^{4B}$$
$$0{,}837 = e^{4B}$$
$$-0{,}177 = 4B$$
$$\boxed{B = -0{,}04}$$

Fonte: Registro esc… Valéria

Figura 18 - Modelo matemático para a reciclagem de PET no Brasil

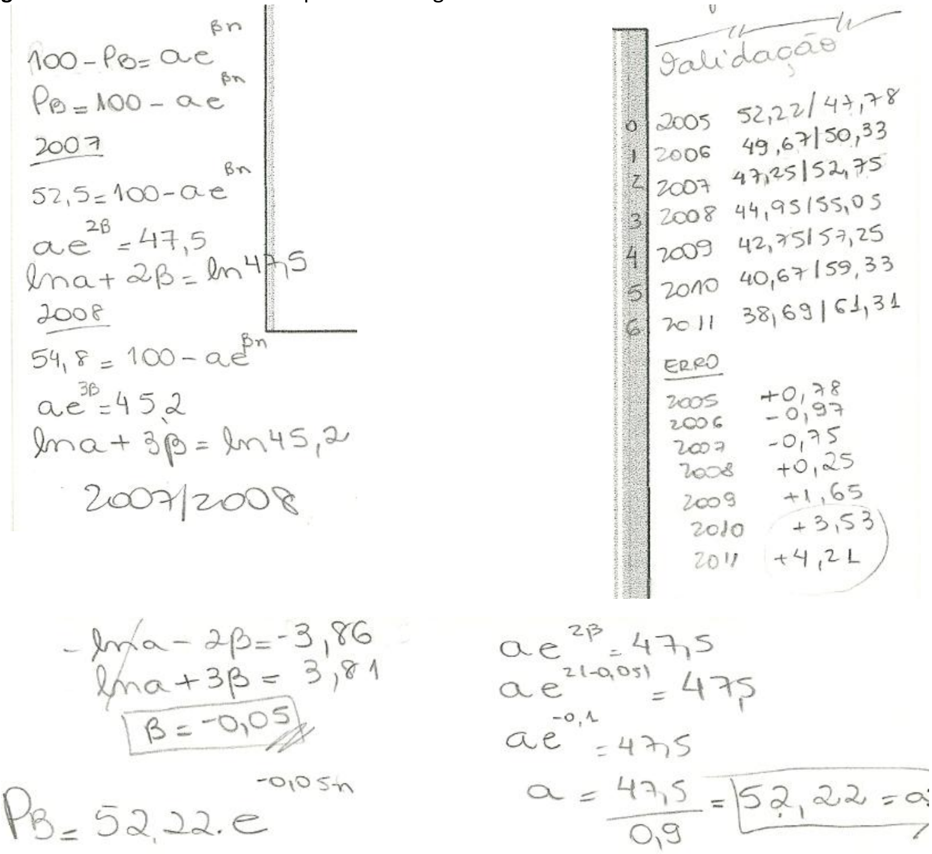
$$y = 100 - 53 \cdot e^{-0{,}04 \cdot (t - 2005)}$$

Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

Nas Figuras 16 e 17 não fica claro que a aluna Valéria usou os anos de 2005 e 2009, porém é possível concluir que ela considerou tais anos, pois a aluna utiliza nos cálculos da Figura 15 o valor 47, que é a taxa de reciclagem de PET no Brasil no ano de 2005, e nos cálculos da Figura 16 a aluna utiliza o valor 55,6 que é a taxa de reciclagem de PET no Brasil para o ano de 2009. Dessa forma, concluímos que o modelo matemático da Figura 17 utiliza dados da taxa de reciclagem de PET no Brasil nos anos de 2005 e 2009.

A aluna Inês, integrante do grupo 2, inicialmente considerou os anos de 2007 e 2008 e em seguida realizou a comparação dos dados obtidos pelo modelo e os dados reais, conforme Figura 19.

Figura 19 – Modelo matemático para a reciclagem de PET no Brasil utilizando os anos 2007 e 2008


$100 - P_B = ae^{\beta n}$

$P_B = 100 - ae^{\beta n}$

2007

$52,5 = 100 - ae^{\beta n}$

$ae^{2\beta} = 47,5$

$\ln a + 2\beta = \ln 47,5$

2008

$54,8 = 100 - ae^{\beta n}$

$ae^{3\beta} = 45,2$

$\ln a + 3\beta = \ln 45,2$

2007/2008

Validação

0	2005	52,22 / 47,78
1	2006	49,67 / 50,33
2	2007	47,25 / 52,75
3	2008	44,95 / 55,05
4	2009	42,75 / 57,25
5	2010	40,67 / 59,33
6	2011	38,69 / 61,31

ERRO

2005	+0,78
2006	−0,97
2007	−0,75
2008	+0,25
2009	+1,65
2010	+3,53
2011	+4,21

$-\ln a - 2\beta = -3,86$

$\ln a + 3\beta = 3,81$

$\boxed{\beta = -0,05}$

$P_B = 52,22 . e^{-0,05n}$

$ae^{2\beta} = 47,5$

$ae^{2(-0,05)} = 47,5$

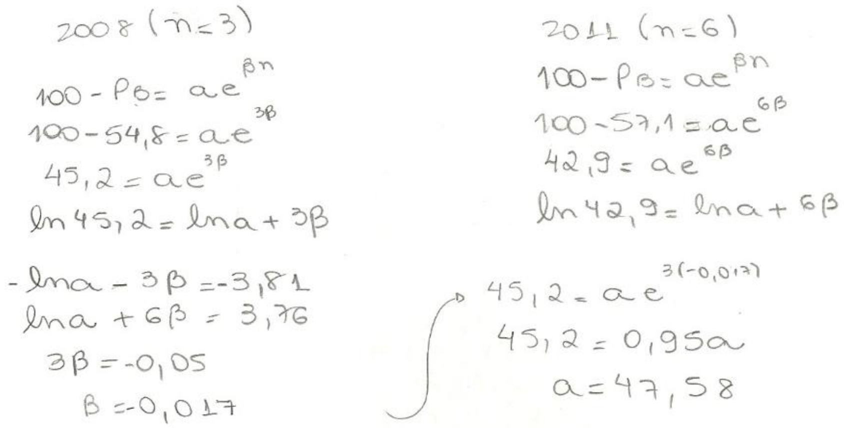
$ae^{-0,1} = 47,5$

$a = \dfrac{47,5}{0,9} = \boxed{52,22 = a}$

Fonte: Registro escrito da aluna Inês

A percepção da aluna Inês de que os erros em 2010 e 2011 foram maiores que os erros nos anos anteriores, fez com que ela utilizasse outros dois anos para o ajuste, 2008 e 2011, conforme Figura 20.

Figura 20 – Modelo matemático para a reciclagem de PET no Brasil utilizando os anos 2008 e 2011


2008 $(n=3)$

$100 - P_B = ae^{\beta n}$

$100 - 54,8 = ae^{3\beta}$

$45,2 = ae^{3\beta}$

$\ln 45,2 = \ln a + 3\beta$

2011 $(n=6)$

$100 - P_B = ae^{\beta n}$

$100 - 57,1 = ae^{6\beta}$

$42,9 = ae^{6\beta}$

$\ln 42,9 = \ln a + 6\beta$

$-\ln a - 3\beta = -3,81$

$\ln a + 6\beta = 3,76$

$3\beta = -0,05$

$\beta = -0,017$

$45,2 = ae^{3(-0,017)}$

$45,2 = 0,95a$

$a = 47,58$

Fonte: Registro escrito da aluna Inês

O modelo encontrado por Inês e considerado válido tanto por ela quanto pelo seu grupo é descrito na Figura 21.

Figura 21 - Modelo matemático considerado válido pelo grupo 2 para a reciclagem de PET no Brasil utilizando os anos 2008 e 2011

$$P_B = 100 - 47{,}58\, e^{-0{,}017t + 34{,}085}$$

modelo válido

Fonte: Registro escrito da aluna Inês

Para obter um modelo matemático que descreveria as taxas de reciclagem de PET no Japão, os dois grupos consideraram os dados a partir de 2005. A estratégia para encontrar a função foi a mesma para o ajuste dos dados do Brasil, ou seja, os grupos utilizaram pontos dois a dois visando montar um sistema linear para calcular os valores de a e β.

O modelo considerado válido pelo grupo 1 encontra-se na Figura 24. O modelo matemático foi registrado por escrito pela aluna Elaine, a qual apresentou os cálculos para encontrar os valores de a e β nas Figuras 22 e 23.

Figura 22 – Calculando um modelo matemático para a reciclagem de PET no Japão utilizando o ano 2005

$$100 - 61{,}7 = a \cdot e^{\beta \cdot 0}$$
$$38{,}3 = a \cdot 1$$
$$a = 38{,}3$$

Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

Figura 23 – Calculando um modelo matemático para a reciclagem de PET no Japão utilizando o ano 2006

$$100 - 66{,}3 = 38{,}3 \cdot e^{\beta}$$
$$\ln 0{,}879 = \beta$$
$$\beta = -0{,}1289$$

Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

Figura 24 – Modelo matemático considerado válido pelo grupo 1 para a reciclagem de PET no Japão utilizando os anos 2005 e 2006

$$y = 100 - 38{,}3 \cdot e^{-0{,}1289 \cdot n}$$

Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

Novamente a aluna Elaine não deixa claro quais anos utilizou para calcular o modelo matemático, porém identificamos o uso do ano 2005, pois o valor 61,7 (Figura 22) é o percentual de reciclagem de PET no Japão (Figura 15) no referido ano. Já o valor 66,3 (Figura 23) é o percentual de reciclagem de PET no Japão (Figura 15) no ano de 2006. Assim, podemos concluir que a aluna Elaine utilizou os anos 2005 e 2006 para elaborar o modelo matemático da Figura 24.

Já o grupo 2 utilizou os anos 2006 e 2008 para elaborar o sistema linear, que foi escrito pela aluna Inês (Figura 25).

Figura 25 - Ajuste para o Japão utilizando os anos de 2006 e 2008

$$100 - P_J = ae^{\beta n}$$

2006

$$100 - 66{,}3 = ae^{\beta}$$
$$33{,}7 = ae^{\beta}$$
$$\ln 33{,}7 = \ln a + \beta$$
$$\begin{cases} -3{,}52 = -\ln a - \beta \\ 3{,}10 = \ln a + 3\beta \end{cases}$$
$$-0{,}42 = 2\beta$$
$$\boxed{\beta = -0{,}21}$$

2008

$$100 - 77{,}9 = ae^{3\beta}$$
$$22{,}1 = ae^{3\beta}$$
$$\ln 22{,}1 = \ln a + 3\beta$$
$$3{,}10 = \ln a + 3\beta$$
$$33{,}7 = ae^{-0{,}21}$$
$$\boxed{a = 41{,}57}$$

Fonte: Registro escrito da aluna Inês

O modelo obtido por Inês e considerado válido pelo grupo 2 é descrito na Figura 26.

Figura 26 - Modelo considerado válido pelo grupo 2 para o percentual de reciclagem de PET no Brasil

$$P_B = 100 - 47{,}58\, e^{-0{,}017t + 34{,}085}$$

Fonte: Registro escrito da aluna Inês

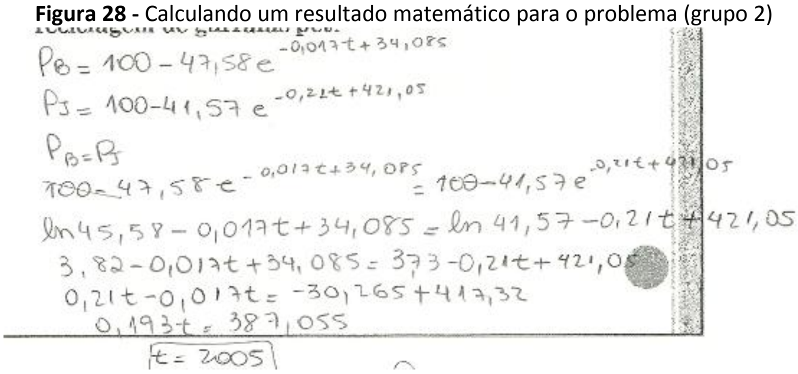
Após os grupos terem validado os modelos para o Brasil e para o Japão, igualaram as funções obtidas tendo como objetivo responder ao problema inicialmente proposto. Para o grupo 1 o ano em que Brasil e Japão atingiriam o mesmo percentual de reciclagem de PET foi 2001 (Figura 27). Já para o grupo 2 foi o ano 2005 (Figura 28).

Figura 27 - Calculando um resultado matemático para o problema (grupo 1)

$$100 - 53 \cdot e^{-0{,}04(t-2005)} = 100 - 38{,}3 \cdot e^{-0{,}1289(t-2005)}$$
$$-53 \cdot e^{-0{,}04(t-2005)} = -38{,}3 \cdot e^{-0{,}1289(t-2005)}$$
$$1{,}3838 = \frac{e^{-0{,}1289(t-2005)}}{e^{-0{,}04(t-2005)}}$$
$$1{,}3838 = e^{-0{,}0889(t-2005)}$$
$$1{,}3838 = e^{-0{,}0889t + 178{,}2445}$$
$$\ln 1{,}3838 = -0{,}0889t + 178{,}2445$$
$$0{,}3248 = -0{,}0889t + 178{,}2445$$
$$-177{,}9196 = -0{,}0889t$$
$$t = 2001{,}346 \Rightarrow t = 2001$$

Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

Figura 28 - Calculando um resultado matemático para o problema (grupo 2)



$P_B = 100 - 47,58\,e^{-0,017t+34,085}$

$P_J = 100 - 41,57\,e^{-0,21t+421,05}$

$P_B = P_J$

$100 - 47,58\,e^{-0,017t+34,085} = 100 - 41,57\,e^{-0,21t+421,05}$

$\ln 45,58 - 0,017t + 34,085 = \ln 41,57 - 0,21t + 421,05$

$3,82 - 0,017t + 34,085 = 3,73 - 0,21t + 421,05$

$0,21t - 0,017t = -30,265 + 417,32$

$0,193t = 387,055$

$\boxed{t = 2005}$

Fonte: Registro escrito da aluna Inês

Como as respostas obtidas pelos grupos 1 e 2, 2001 e 2005, respectivamente, não foram confirmadas pelos dados das Figuras 13 e 15, os grupos chegaram à conclusão de que, matematicamente, o Brasil nunca alcançaria o percentual de reciclagem de PET do Japão, porém perceberam que as respostas encontradas se referiam ao modelo matemático elaborado. Vale lembrar que o relatório da ABIPET apresenta uma expectativa de investimento de empresários em reciclagem de PET no Brasil o que resultaria em uma possível equiparação com o Japão no futuro dependendo desse investimento.

5.3.1.1 A matematização na atividade

A análise específica com relação à matematização na atividade *Reciclando Garrafas PET* utiliza registros escritos e em áudio do desenvolvimento da atividade realizada pelos alunos dos dois grupos.

Nessa primeira atividade, utilizamos os diálogos realizados entre os alunos ou com a professora e registros escritos pelos próprios alunos durante o desenvolvimento da atividade. Os diálogos são trechos dos registros em áudio destacados por fornecer informações sobre a matematização realizada pelos alunos enquanto desenvolviam a atividade. O mesmo critério foi utilizado na seleção dos registros escritos, foram selecionados aqueles registros que fornecem informações sobre a matematização realizada pelos alunos. Alguns diálogos e registros escritos são apresentados juntos, pois os registros escritos reforçam a ideia contida nos diálogos.

5.3.1.1.1 Grupo 1

O primeiro diálogo destacado é referente ao momento seguinte à apresentação da temática da reciclagem de PET pela professora, constituindo os primeiros diálogos do grupo.

Diálogo 1:
Valéria: olhando isso aqui, o Brasil tem uma evolução. O Japão também deve ter.
Professora: isso aí.
Valéria: mas como é que eu vou... eu só sei a do Brasil. A do Japão eu sei que ele é...eu não sei se ele vai... está aumentado.
Professora: e se você tivesse o do Japão? O que ia acontecer?
Valéria: aí eu saberia.
Professora: aí tu poderias fazer né?
Valéria: é, por exemplo, daí se o Japão tivesse aumentado menos que o Brasil... com certeza em algum momento, o Brasil ultrapassaria, agora caso contrário, o Japão continuasse aumentando mais ou no mesmo tanto que o Brasil, como tá pela frente nunca ia acontecer. Mas eu não tenho o do Japão.

Nesse primeiro diálogo, a aluna Valéria explicitou uma estratégia de resolução do problema caso tivesse acesso aos dados do percentual de reciclagem de PET do Japão. As considerações de Valéria nos remetem à estratégia presente em Almeida e Buriasco (2011) e que se aproxima da matematização horizontal. O mesmo está presente na última fala da aluna, deixando claro que de alguma forma seria necessário realizar uma comparação entre a evolução das taxas de reciclagem de PET no Brasil e no Japão. Podemos dizer que as falas de Valéria evidenciam que ela realiza a estruturação da situação, conforme consta de Almeida e Silva (2012), Blum e Leiβ (2005) e Ferri (2006).

No Diálogo 2 as alunas justificam a escolha da função exponencial para realizar o ajuste dos dados da Figura 13 (Quadro 1).

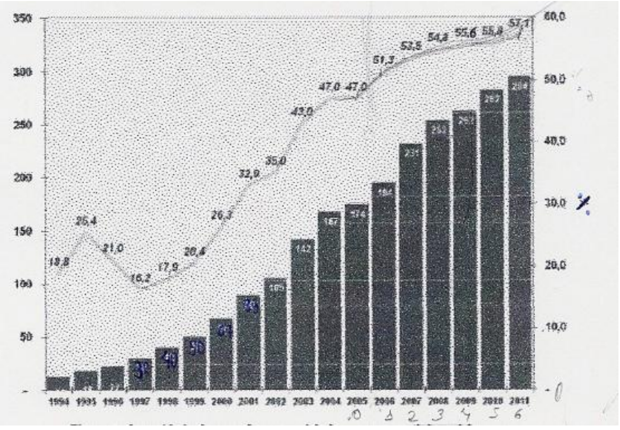
Diálogo 2:
Valéria: seria uma exponencial.
Professora: olhando para os seus dados, por que você acha que a exponencial dá?
Valéria: porque ela é uma das funções que a gente já conhece que sabe que ela sempre vai continuar crescendo né. E ela cresce bastante de um para o outro. Tipo é mais rápido.
Professora: a exponencial, ela sempre cresce? Sempre vai crescer? Como é o gráfico da exponencial?

Valéria: exponencial é assim, não é?
Paula: não é o contrário?
Professora: é, depende do expoente que vai colocar. Então desenha o gráfico aí pequeninho, só pra eu te mostrar uma coisa. Certo, agora a questão é: primeiro, aqui quando se trabalha com a exponencial ou a logarítmica né, ela vem pra parte negativa do x?
Valéria: não.
Professora: não né. E aqui, ela atinge um limite ou ela vai continuar crescendo sempre, igual a linear, por exemplo? Como é que é o gráfico dela?
Valéria: não atinge um limite pra cá, fica crescente. Aqui ela nunca encosta, ela tende a um limite...o limite tende a zero...aqui também ela vai indo, vai indo...eu acho.

No Diálogo 2, a conversa trata da função exponencial, seu gráfico e suas características, dessa forma identificamos a matematização vertical pelo reconhecimento do padrão presente na referida função, conforme descrito por Luccas e Batista (2011). O conhecimento matemático sobre a função exponencial se refere às competências matemáticas dos indivíduos integrantes do grupo caracterizando o trabalho matemático destacado por Ferri (2006).

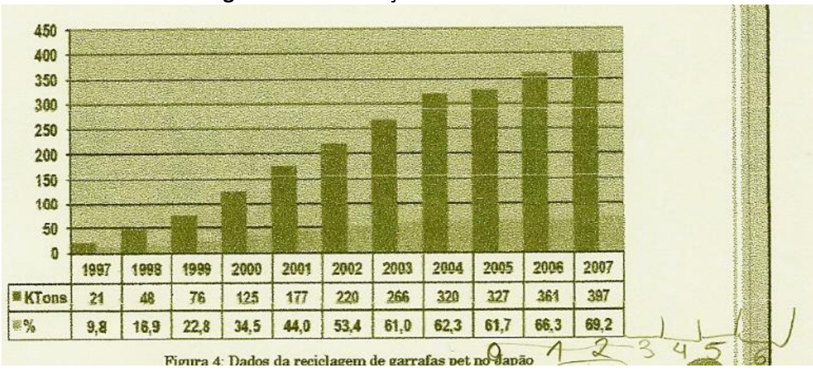
Tendo elaborado uma estratégia as alunas decidem elaborar um modelo matemático com base em uma função exponencial e a partir do ano de 2005, tanto para o Brasil quanto para o Japão. A maneira utilizada pelas alunas para elaborar um modelo foi considerar os anos dois a dois e com isso montar um sistema linear. Para isso associaram um índice n ao ano, como pode ser visto na Figura 29, no caso do Brasil, e na Figura 30, para o caso do Japão.

Figura 29 - Associação do índice n ao ano



Fonte: Registro escrito da aluna Paula

Figura 30 - Associação do índice n ao ano



Fonte: Registro escrito da aluna Valéria

Essa associação de um índice n ao ano foi utilizada pela professora no desenvolvimento da primeira atividade do curso – *Aeroportos e a Copa de 2014* (Anexo 1) – como um recurso para elaborar um modelo matemático.

A utilização do índice $n = t - 2005$ pode estar relacionada à matematização horizontal ou à matematização vertical. Como na primeira atividade desenvolvida no curso – *Aeroportos e a Copa de 2014* – a professora vinculou o índice n ao ano, os alunos podem ter reconhecido na atividade da *Reciclando Garrafas PET* aspectos isomorfos à atividade *Aeroportos e a Copa de 2014*, tal elemento foi caracterizado por Jzn (1987) e por Rico (2006) como relacionados à matematização horizontal.

A utilização de $n = t - 2005$ em vez de n, em que n é o ano, como expoente na função exponencial resulta no mesmo modelo com as mesmas expressões algébricas, porém essa mudança de variáveis auxilia na resolução matemática, conforme apresenta a Tabela 5.

Tabela 5 - Comparação entre os modelos matemáticos

Modelo $P_B = ae^{\beta(t-2005)}$	Modelo $P_B = ae^{\beta n}$
$\begin{cases} 47 = 100 - ae^{\beta(2005-2005)} \\ 55{,}6 = 100 - ae^{\beta(2009-2005)} \end{cases}$ $P_B = 100 - 53e^{-0{,}04(t-2005)}$	$\begin{cases} 47 = 100 - ae^{2005\beta} \\ 55{,}6 = 100 - ae^{2009\beta} \end{cases}$ $P_B = 100 - 3{,}58.10^{36}e^{-0{,}04n}$
$P_B = 100 - 3{,}58.10^{36}e^{-0{,}04t}$	$P_B = 100 - 3{,}58.10^{36}e^{-0{,}04n}$

Fonte: Elaborada pela autora

A utilização de $n = t - 2005$ pode ter sido um artifício matemático para facilitar cálculos e nesse caso estaria associado ao refinamento de modelos explicitado por Jzn (1987) e ao uso da linguagem simbólica, formal e técnica e suas operações destacada por Rico (2006), ambos relacionados à matematização vertical.

Os dados coletados – registros escritos e áudio dos diálogos durante o desenvolvimento da atividade – não permitem concluir se a escolha dos alunos se tratou de matematização horizontal ou matematização vertical. Porém, independente da intenção das alunas quando utilizaram o recurso $n = t - 2005$ podemos destacar a transição matematização da modelagem matemática, pois este recurso é utilizado visando à elaboração de um modelo matemático que descreveria a situação.

No Diálogo 3, as falas das alunas nos remetem à estruturação da situação:

Diálogo 3:
Valéria: esse símbolo aqui é a porcentagem, está vendo?
(...)
Elaine: esse aqui, essa linha representa o quê? (...) porque depois de ter as duas funções daí acho que é só igualar o $f(x)$ de cada uma e ver quem é o x e pronto.

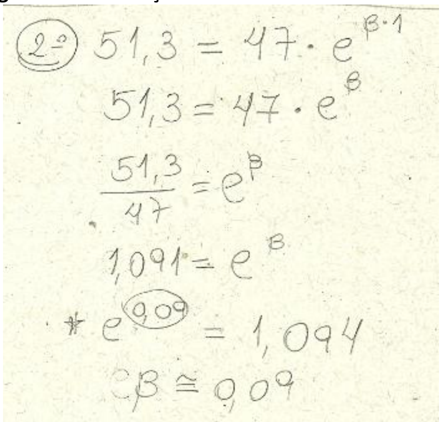
Essas falas remetem à estratégia descrita por Almeida e Buriasco (2011, p. 30) “analisar o problema; retirar informações; associar características relevantes com procedimentos promissores de solução; formular hipóteses” e à matematização horizontal pela “leitura e interpretação do contexto apresentado” (LUCCAS; BATISTA, 2011, p. 463).

A aluna Elaine explica à aluna Paula como fariam para encontrar um modelo matemático para a reciclagem de PET no Brasil:

Elaine: eu fui pra um segundo ponto, fiz a mesma ideia. Só que agora eu já usei um α igual a 47. Então eu vou escrever de novo, só que agora o meu y, é $51{,}3$ é igual ao α, que eu já vou colocar 47 vezes $e^{\beta n}$ agora é um, vezes um. Daí eu só fui fazendo continha de novo, 47 vezes e^{β}, tá. E daí, o que a gente fez, aqui tá multiplicando então passamos dividindo, então ficou $51{,}3$ sobre 47 igual a e elevado a um β, daí a Valéria resolveu na calculadora. Quanto deu mesmo? (...) Então, dividido $1{,}091$ é igual a e^{β}, por aproximação, por tentativa, a gente foi fazendo, a gente encontrou um valor bem próximo.

O registro escrito de Elaine (Figura 31) coincide com sua fala.

Figura 31 - Ilustração da fala da aluna Elaine

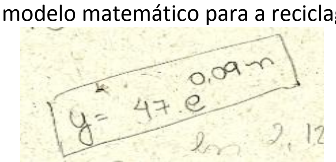


Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

De forma geral, a fala de Elaine trata da explicação à aluna Paula com relação ao procedimento que realizariam para ajustar os dados da Figura 13 (Quadro 1). Assim identificamos a matematização vertical, pois as considerações de Elaine “tem como base um atalho dentro do sistema matemático” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003, p. 29). Com relação à modelagem matemática presenciamos a síntese, pois a aluna Elaine utiliza seus conhecimentos matemáticos. Quanto ao processo de matematização descrito por Almeida e Buriasco (2011), podemos dizer que esse trecho faz parte do procedimento.

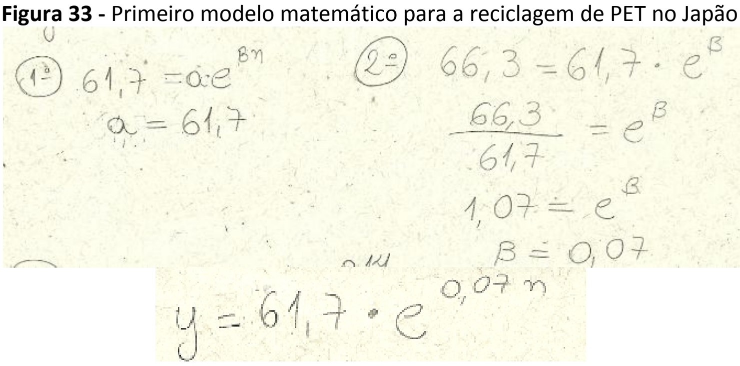
As alunas elaboraram os modelos matemáticos referentes às taxas de reciclagem de PET para o Brasil e para o Japão. Os modelos obtidos são ilustrados nas Figuras 32 e 33.

Figura 32 - Primeiro modelo matemático para a reciclagem de PET no Brasil



Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

Figura 33 - Primeiro modelo matemático para a reciclagem de PET no Japão

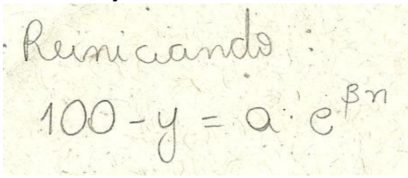


Fonte: Registros escritos da aluna Elaine

Encontrado os modelos matemáticos para a reciclagem de PET no Brasil e no Japão, as alunas perguntaram à professora se seria necessário igualar as funções. Nesse momento a professora sentou-se próximo ao grupo e viu que apesar do diálogo inicial sobre as assíntotas e a conclusão de que a função exponencial deveria assumir o valor máximo 100, no decorrer dos cálculos, tal informação não foi considerada pelo grupo, no modelo do Brasil nem no modelo do Japão. Dessa forma, a professora fez uma intervenção com o intuito de que as alunas percebessem que se não considerassem 100 como valor máximo para a função exponencial, o modelo matemático resultante seria menos adequado ao contexto do problema em estudo – reciclagem de PET.

Após a intervenção da professora, as alunas reiniciaram os cálculos visando à obtenção dos modelos matemáticos que descreveriam as taxas de reciclagem de PET no Brasil e no Japão (Figura 34).

Figura 34 - Reiniciando os cálculos para a obtenção de um modelo matemático para as taxas de reciclagem de PET



Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

As alunas seguiram realizando os cálculos necessários para obter uma função que se ajustaria aos dados utilizando pontos dois a dois como fizeram anteriormente, chegando a uma função considerada não adequada pelo grupo por resultar em um erro considerável, ou seja, os valores obtidos pelo modelo foram muito diferentes dos valores reais. Assim, questionaram a professora sobre possíveis erros nos cálculos, o que não foi confirmado, pois os cálculos estavam corretos. Nesse momento a professora chamou a atenção das alunas para um aspecto importante na obtenção da função que melhor se ajustaria aos dados: cada dois pontos considerados resultaria em uma função exponencial diferente e cada uma delas resultaria em erros diferentes. O Diálogo 4 é a conversa das alunas sobre a intervenção realizada pela professora.

Diálogo 4:

Valéria: eu não entendi. A gente pegou o primeiro e o segundo, porque primeiro a gente achou o α e em seguida a gente achou o β. Agora a gente acha o β a partir do quarto?
Elaine: depende. Eu pensei em usar o primeiro e o quarto, porque eu vou ter o α, daí eu ia sugerir pra gente usar o primeiro e outro ponto. Por exemplo, você pega o primeiro e o terceiro, eu o primeiro e o quarto...
Valéria: mas você vai ter o β?
Elaine: ...você o primeiro e o quinto.
Valéria: não teremos o β.
Elaine: sim, todo mundo vai achar um β diferente, essa é a lógica.
Valéria: ah, então...
Elaine: a gente vai achar o α pra achar um β diferente. Daí a gente vai achar todo o resto diferente, cada um vai encontrar alguma coisa e vamos ver se a gente acha...
Paula: por que um β diferente?
Elaine: porque a gente não vai usar mais...do primeiro a gente não vai para o segundo ponto, a gente vai para o terceiro, para o quarto e para o quinto. Entendeu? Então cada um vai achar um β diferente, e com um β diferente cada uma vai ter uma função diferente. Vai ter valores todos diferentes e vai ter erros diferentes. Você tem a...o primeiro passo que a gente fez, encontrou o α igual a 53. Quando foi para o segundo ponto a gente encontrou um β porque a gente já usou esse $\alpha = 53$. Então eu trabalho, por exemplo, trabalhando com o terceiro ponto, qual que é o terceiro ponto? O terceiro ponto é esse aqui. Então você vai colocar lá, $53{,}5$...esse aqui é o x ou é o y?
Paula: esse é o y.
Elaine: então $100 - 53{,}5$ é igual ao α que é 53...taltaltal. Entendeu?

A aluna Elaine demonstrou que compreendeu que cada dois pontos considerados resultaria em uma função e que cada uma dessas funções apresentaria um erro quando comparada com os dados reais que se tinha, porém as outras duas alunas pareciam ainda não compreender que β e α necessitariam assumir valores diferentes para cada uma das funções, caso contrário não seriam funções diferentes. As falas da aluna Elaine nos remetem ao uso de linguagem simbólica, técnica e formal e suas operações que são elementos destacados por Rico (2006) como associados à matematização vertical. Com relação à modelagem matemática identificamos a síntese, pois a aluna Elaine explicita seus conhecimentos matemáticos.

5.3.1.1.2 Grupo 2

Apresentado o tema aos alunos juntamente com as Figuras 13 e 14, os alunos fizeram questionamentos com relação às informações presentes nas figuras apresentadas, como vemos no Diálogo 5 a seguir.

Diálogo 5:
I: dos 294 do que...
Professora: não, o 294 *ele reciclou. E isso equivale a* 57,1*. Você não sabe o total de, de garrafas PET. Você tem que fazer a conta pra saber.*
Inês: 57,1 *o quê?*
Professora: 57,1%*. É porcentagem. Ali.*
José: não tem a quantidade de produção?
Professora: não. Se você quiser saber a quantidade de produção você tem que calcular. Ó, 294 *é quanto se reciclou, certo? E isso equivale a* 57,1% *do que se produziu...*
José: ah tá, tá.
Inês: ah tá.
José: é fácil achar.

No Diálogo 5 os alunos fazem questionamentos visando compreender as informações que a professora lhes forneceu. Associamos esse primeiro diálogo ao que Luccas e Batista (2011) caracterizam como leitura e interpretação do contexto apresentado e estando integrado à matematização horizontal. Em se tratando da modelagem matemática os questionamentos dos alunos nos remetem à compreensão da situação que consta nos esquemas de Blum e Leiβ (2005), Ferri (2006) e Almeida e Silva (2012).

A professora apresentou o problema aos alunos sem fornecer os dados da reciclagem de PET no Japão. Os alunos conheciam o percentual de reciclagem de PET no Japão somente no ano de 2008, pois a Figura 14 (Quadro 1), apresentada no início da atividade, trazia um ranking de reciclagem e o Japão aparecia como primeiro colocado no ano de 2008 e por isso outro questionamento se torna presente (Diálogo 6).

Diálogo 6:
Inês: o do Japão fixo? O do Japão é pra ser fixo?
Professora: não necessariamente.
Inês: mas e aí como é que...
Karla: mas é que a gente não tem aqui.
Professora: mas e se tivesse?
(...)
José: então tem que fazer duas estimativas.
Professora: isso aí. Então se a gente tiver o do Japão também, a gente consegue estimar o do Japão, não consegue? Esse aumento dele?
José: é, se tiver isso aqui do Japão...

Esse diálogo informa que o aluno José conseguiu elaborar uma estratégia de resolução, como caracterizada por Almeida (2009), sendo tal estratégia evidenciada pela fala de José: **então tem que fazer duas estimativas**. A abordagem que o aluno José apresentou nos remete ao que Ferri (2006) chama matematização, pois fica implícito que o mesmo está fazendo uma relação entre as características da situação e os conhecimentos matemáticos prévios.

Tendo compreendido as informações fornecidas e elaborada uma estratégia, os alunos iniciaram o ajuste dos dados da reciclagem de PET no Brasil. Algumas funções foram discutidas pelo grupo como sendo funções adequadas para realizar o ajuste dos dados, a saber: exponencial, logarítmica, raiz e polinomiais. As funções raiz e logarítmica foram registradas, por escrito, pelos alunos José e Karla, nas Figuras 35 e 36, respectivamente.

Figura 35 - Esboço da função raiz

Fonte: Registro escrito do aluno José.

Figura 36 - Expressão algébrica da função logarítmica

$$y = a \log n^{\beta}$$
$$y = a \ln n^{\beta}$$

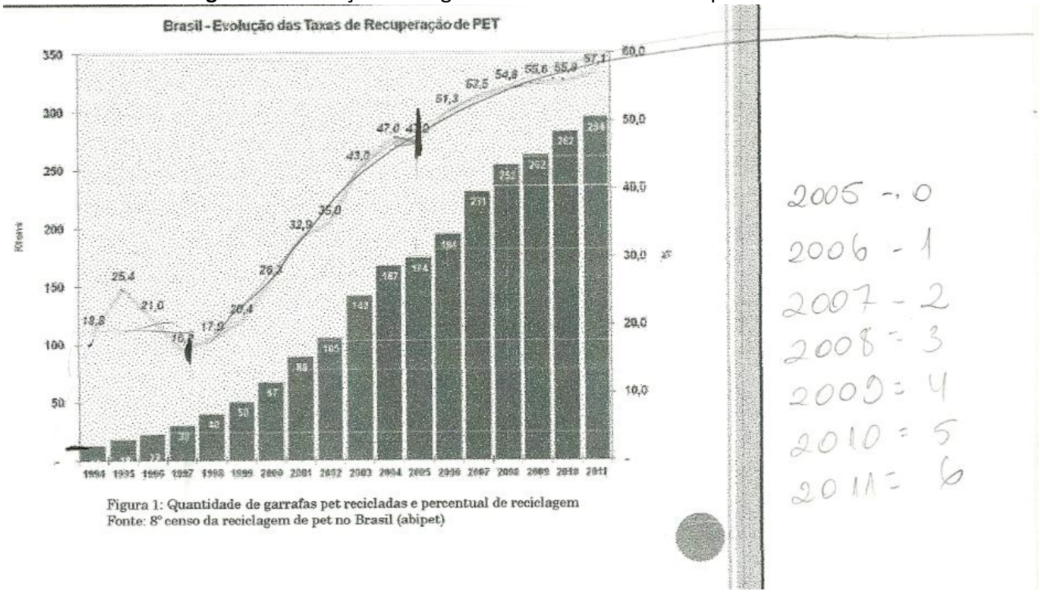
Fonte: Registro escrito da aluna Karla.

Com relação à função raiz, destacamos os comentários do aluno José: **essas funções com raiz, é transcendente que chama? Ela pega aqui assim ó. Ela não fica abaixo do eixo x (...) ela só tem positivo, pega daqui e vai assim... função com raiz é transcendente que chama? Eu esqueci, só sei que ela não, ela não tem negativo porque não tem raiz de número negativo.** Associamos essa busca dos alunos por funções que se ajustem aos dados ao que é caracterizado em GAVE (2005) como a organização de acordo com conceitos matemáticos e a identificação da matemática relevante. Grigoras (2009) caracteriza na modelagem matemática a matematização como "a atividade ou processo de representação e estruturação de artefatos do mundo real e/ou situações através da matemática." (p. 2206), assim associamos os registros escritos dos alunos José e Karla (Figuras 35 e 36, respectivamente) como a matematização a qual Grigoras (2009) se refere.

Destacadas algumas funções para realizar o ajuste, os alunos argumentaram sobre não utilizar todos os dados presentes na Figura 13

(Quadro 1), como descreve a fala do aluno José juntamente com seu registro escrito na Figura 37.

Figura 37 - Esboço de um gráfico utilizando os anos a partir de 1997



Fonte: Registro escrito do aluno José.

José: professora, aqui a gente pensou em considerar a partir de 97 por dois motivos, primeiro porque é a partir desse ano que a gente tem os dados do Japão e segundo, pra eliminar essa bagunça aqui que vai só complicar a nossa vida. Porque se eu considerar o começo do gráfico aqui, vai dar uma função de 5º grau, complicada pra caramba. Então pegar daqui. Ah, a gente viu que esse traçado se assemelha a uma função com raiz? Seria...

Percebemos que os alunos estavam planejando como resolveriam o problema. Isso nos remete a estratégia presente no processo de matematização de Almeida (2009). A fala: **professora, aqui a gente pensou em considerar a partir de 97 por dois motivos, primeiro porque é a partir desse ano que a gente tem os dados do Japão e segundo, pra eliminar essa bagunça aqui que vai só complicar a nossa vida;** leva-nos a hipótese implícita de que os dados anteriores a 1997 não exerceriam influência sobre a projeção que seria realizada no modelo matemático, assim identificamos a matematização conforme Almeida e Silva (2012). As outras falas de José: **Porque se eu considerar o começo do gráfico aqui, vai dar uma função de 5º grau, complicada pra caramba. Então pegar daqui. Ah, a gente viu que esse traçado se assemelha a uma função com raiz;** estão associadas à síntese, pois revelam conhecimentos matemáticos anteriores.

A professora realizou duas intervenções, uma delas com relação à função escolhida. Ela sugeriu que utilizassem a função exponencial, conforme a atividade anterior, porém sem utilizar o método dos mínimos quadrados para realizar o ajuste. Além disso, o aluno José coloca como uma opção a função raiz. Porém, a professora chamou a atenção ao contexto dos dados da Figura 13 (Quadro 1), que se refere às taxas de reciclagem de PET e por esse motivo seria necessário que o valor 100 fosse o valor máximo da função. A utilização da função raiz não possibilitaria a imposição do valor 100 como máximo.

A outra intervenção foi com relação à troca do ano de 1997 pelo ano de 2005, ou seja, em vez de iniciar o ajuste pelo ano de 1997 a professora sugeriu que iniciassem com o ano de 2005. Após isso, os alunos começaram a escrever a expressão geral de uma função exponencial e utilizaram os dados do problema (Figura 38).

Figura 38 - Expressão geral de uma função exponencial

$$P_B = a e^{\beta n} \qquad P_B = a e^{B(t-2005)}$$

Fonte: Registro escrito da aluna Inês

As intervenções realizadas pela professora, no contexto da modelagem matemática são associadas à matematização, pela elaboração de hipóteses, e à síntese, pela percepção de que os dados da reciclagem de PET no Brasil poderiam ser ajustados por uma função exponencial. Com relação ao processo de matematização, está presente a compreensão da relação entre linguagem natural e linguagem simbólica formal e a identificação da matemática relevante em um contexto geral, ambas destacadas por Rico (2006) e relacionadas à matematização horizontal.

Os alunos do grupo 2, assim como as alunas do grupo 1 utilizaram $n = t - 2005$ como expoente da função exponencial (Figura 38). Novamente não conseguimos identificar pelos registros escritos e pelos diálogos dos alunos durante o desenvolvimento da atividade se essa mudança de variáveis está relacionada à matematização horizontal ou à matematização vertical[30].

O registro escrito de Inês, presente na Figura 38, pode ser caracterizado como a transformação do problema do mundo real em um problema matemático, conforme GAVE (2005). Segundo Maaβ (2006), “a matematização do mundo real conduz a um modelo matemático[31]” (p.115, tradução nossa), e no registro escrito de Inês identificamos a matematização que Maaβ (2006) se

[30] Esse aspecto está detalhado nas páginas 64-66.
[31] The mathematizing of the real model leads to a mathematical model.

refere, pois a aluna está elaborando um modelo matemático a partir do mundo real.

A expressão geral escrita pela aluna Inês na Figura 38 ainda não era um modelo matemático para a situação, pois os alunos não conheciam os valores de α e β. A aluna Inês questionou como encontrariam tais valores, conforme trecho abaixo.

Inês: só que daí, qual que...quais são os dados que você acha que a gente deveria utilizar? Ou vai ter que fazer, por exemplo. Tipo assim, como a gente tem duas incógnitas, que é o α e o β, a gente tem que ter duas equações, mas quais os anos que a gente vai pegar? Entende? Ou tem que fazer com todos, eu não sei o que fazer.

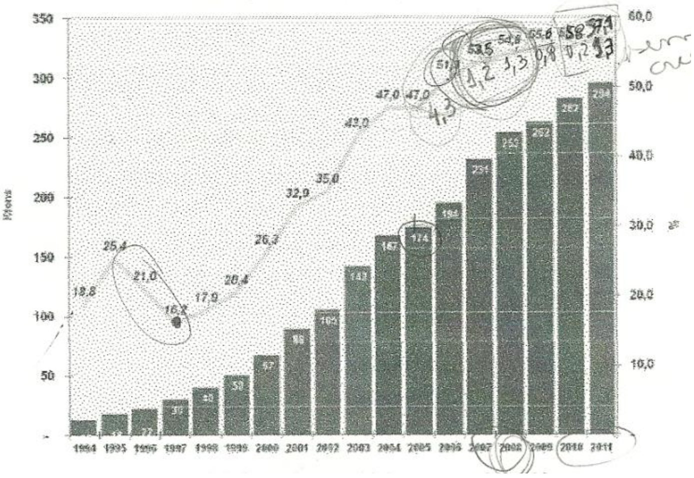
Apesar de Inês afirmar que não sabia o que fazer, vimos que ela conhece o procedimento que se deve realizar quando se deseja resolver um sistema linear. Dessa forma, ela reconhece o que JZN (1987) e Rico (2006) nomeiam isomorfismos com problemas conhecidos e que está associado à matematização horizontal. Parece que o que causa certo desconforto em Inês é o fato de que quando os alunos necessitam resolver um sistema linear de duas variáveis, costumeiramente, são fornecidos apenas dois pares ordenados e no caso dessa atividade a aluna tinha sete pares ordenados, compostos pelo ano e pelo respectivo percentual de reciclagem de PET naquele ano. Já com relação à modelagem matemática identificamos a síntese destacada por Almeida e Silva (2012) ou trabalho matemático presente nos esquemas de Ferri (2006) e Blum e Leiβ (2005), pois a aluna Inês demonstrou que conhecia os sistemas lineares.

Os alunos comentaram com a professora o desconforto citado acima e a mesma confirmou que eles necessitariam de apenas dois pares ordenados para resolver o sistema linear e que o modelo seria mais adequado conforme a escolha dos pares ordenados (Diálogo 7). A última fala de Inês no Diálogo 7 explica o esboço que ela fez, presente na Figura 39.

Diálogo 7:
Professora: a questão aí é, a gente tem 2, 4, 6, 7 pontos né. Desses sete a gente só vai usar dois. A questão é a escolha desses dois é que vai fazer esse ajuste ficar melhor ou pior.
Inês: mas o primeiro não tem que ser esse?
Professora: não.

Inês: mas se você achar o a.
Professora: olha só, se você faz com esses dois pontos e você tem duas variáveis, você consegue montar um sistema, não consegue?
Inês: eu sei, mas pelo menos esse primeiro ponto não tinha que pertencer exatamente?
Professora: não, não precisa.
Inês: então como ele é mais discrepante, a gente pega os dois que perece mais...

Figura 39 - Verificando a variação do percentual de reciclagem de PET no Brasil em anos consecutivos

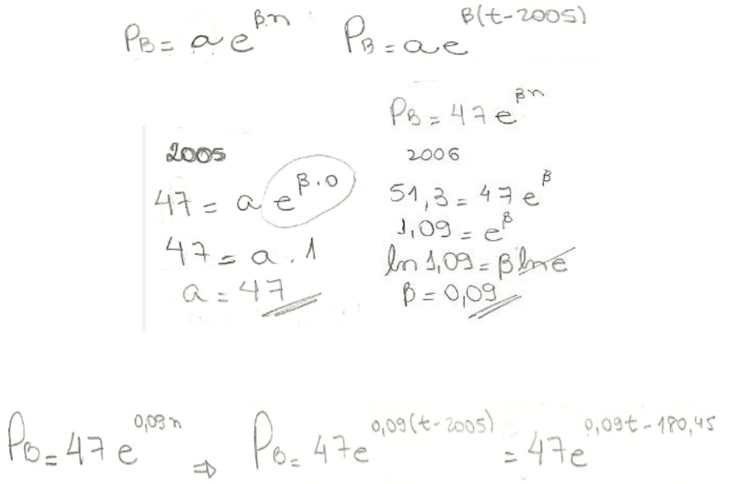


Fonte: Registro escrito da aluna Inês.

Quando a aluna Inês disse que o primeiro ponto era discrepante, ela reconheceu uma característica similar às funções exponenciais, destacada em Luccas e Batista (2011) e integrada à matematização vertical. Quanto à modelagem matemática identificamos a síntese ou trabalho matemático presente em Almeida e Silva (2012), Ferri (2006) e Blum e Leiβ (2005), pois a aluna reconheceu que fixada uma função exponencial nem todos os pontos presentes na Figura 39 fariam parte de tal função exponencial.

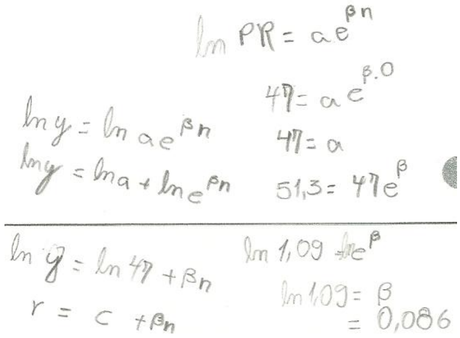
Na sequência, os alunos passaram a considerar dois dos sete anos e a montar o sistema linear a fim de elaborar um modelo matemático para a taxa de reciclagem de PET no Brasil. As Figuras 40, 41 e 42 ilustram os sistemas lineares de Inês, Karla e José, respectivamente.

Figura 40 - Calculando um modelo matemático para a reciclagem no Brasil



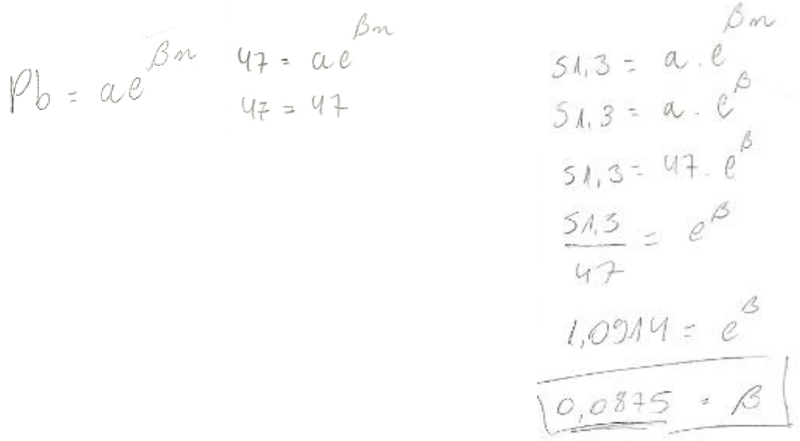
Fonte: Registros escritos da aluna Inês

Figura 41 - Calculando um modelo matemático para a reciclagem no Brasil



Fonte: Registro escrito da aluna Karla

Figura 42 - Calculando um modelo matemático para a reciclagem no Brasil



Fonte: Registros escritos do aluno José

Os três alunos usaram os anos 2005 e 2006 para elaborar o sistema linear haja vista o percentual de reciclagem para o Brasil presente nos seus registros escritos. No entanto, os valores encontrados para a e β foram diferentes para cada um dos alunos (Figuras 40, 41 e 42) devido ao número de casas decimais consideradas por cada um. Além disso, somente Inês deixou claro quais anos foram considerados para elaborar o sistema linear bem como a expressão algébrica do modelo por ela obtido (Figura 40). Já Karla (Figura 41) e José (Figura 42) não deixaram explícitos os anos considerados nem o modelo matemático encontrado.

Nos registros escritos dos alunos Inês (Figura 40), José (Figura 42) e Karla (Figura 39), a síntese que Almeida e Silva (2012) se referem se torna presente, pois os alunos após selecionarem os anos que iriam considerar necessitaram somente de conhecimentos matemáticos. Apesar de nenhum dos três alunos deixar registrado por escrito a validação do modelo, no Diálogo 8 é possível identificar que o modelo é considerado inadequado.

Diálogo 8:
José: β é igual a $0{,}0875$*? Ah, você arredondou.*
Inês: ah é. Você vai ver, no final das contas não vai dar diferença nenhuma.
(...)
Inês: agora vou ver se dá certo para os outros né. $56{,}26.\ 52.$
(...)
Inês: tá aumentando demais, não pode. A gente tem que achar outra maneira de encontrar o β, né?

Apesar de os alunos não deixarem registrado por escrito a validação, ela se torna presente na última fala de Inês, quando conclui que o modelo é considerado inadequado por resultar em valores muito diferentes dos presentes na Figura 13. Os alunos conversam então sobre utilizar o método dos mínimos quadrados, pois o método foi utilizado no ajuste da atividade *Aeroportos e a Copa de 2014*. Porém, a professora interviu orientando que não utilizassem o método dos mínimos quadrados e, semelhante ao que fez no grupo 1, chamou a atenção para uma hipótese que foi desconsiderada no decorrer dos cálculos que realizaram: a utilização do valor 100 como máximo para a função exponencial. A partir desse momento os alunos escreveram uma nova expressão geral para a função exponencial que seria utilizada no ajuste (Figura 43).

Figura 43 - Expressão geral da função exponencial considerando o valor 100 como máximo

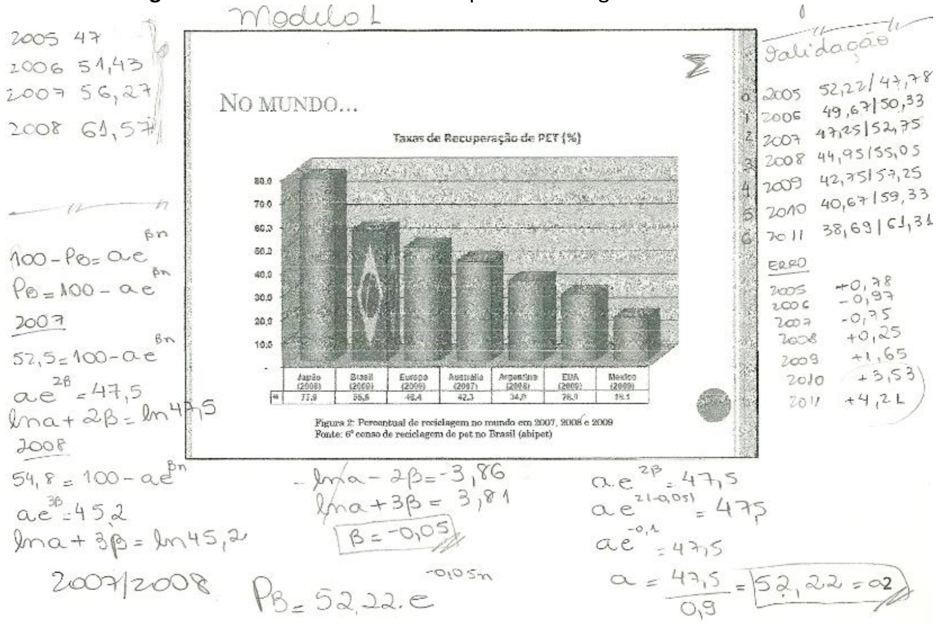
$$100 - Pb = ae^{\beta n}$$

$$Pb = 100 - ae^{\beta n}$$

Fonte: Registro escrito do aluno José

Os alunos, a partir da expressão que considerou o valor 100 como máximo, construíram novos sistemas visando encontrar um modelo adequado, conforme apresenta a Figura 44.

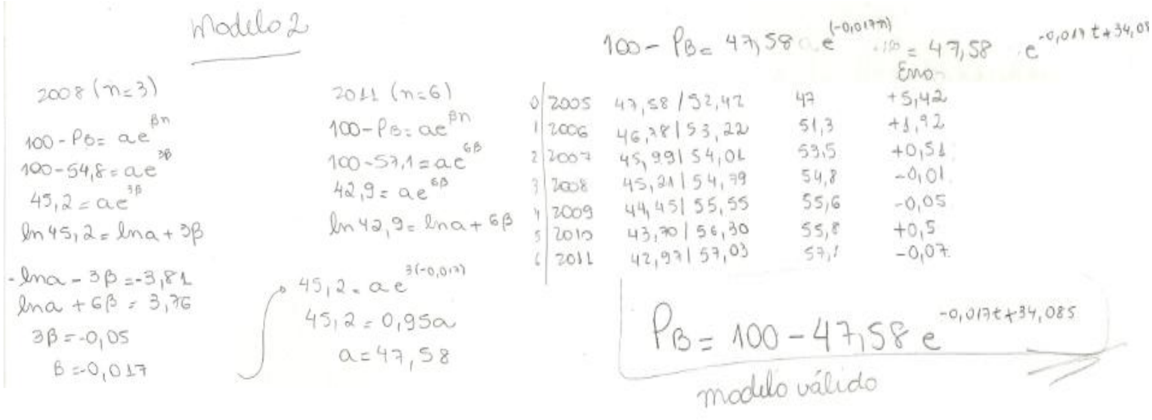
Figura 44 – Modelo matemático 1 para a reciclagem de PET no Brasil



Fonte: Registro escrito de Inês

A Figura 44 exibe as marcações da aluna Inês nos erros para o modelo 1 para os anos 2010 e 2011. Não satisfeita com o modelo encontrado, um novo ajuste utilizando os anos 2008 e 2011 foi elaborado pela aluna (Figura 45).

Figura 45 - Elaboração do modelo matemático 2 para a reciclagem de PET no Brasil



Fonte: Registro escrito da aluna Inês

Inês calculou os valores de a e β e em seguida escreveu o modelo associado (Figura 44). Por fim, realizou a validação e considerou o modelo válido. Comparando os dois modelos elaborados por Inês, concluímos que há pouca diferença entre eles, o erro médio do modelo 1 é 1,734 e o erro médio do modelo 2 é 1,21. Então o modelo 2 é o que apresenta menor erro médio e essa poderia ser uma justificativa para considerá-lo mais adequado, porém

Inês usou outra justificativa para considerar o modelo 2 mais adequado como vemos no Diálogo 9.

Diálogo 9:
José: estava testando essas coisas. Qual foi o modelo que você acredita o melhor?
Inês: 2008 *e* 2011*. Porque a diferença maior, porque se eu pego o mais próximo do início a diferença vai estar lá no final, e como no início tem um crescimento maior então o meu modelo vai ter um crescimento maior. Então a gente vai ter que pegar o que aqui tiver um crescimento mais constante e o erro maior consequentemente vai estar aqui.*

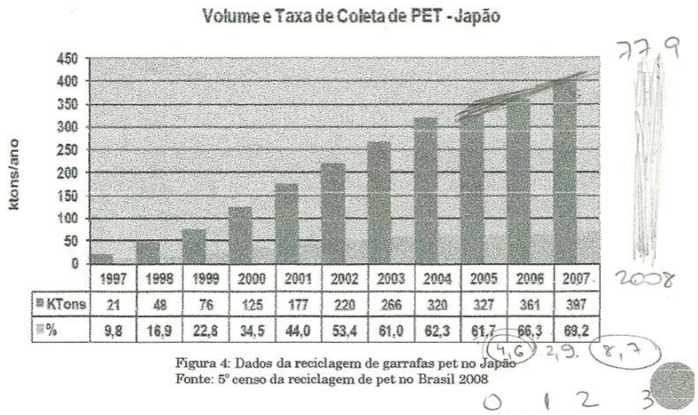
A aluna Inês tentou representar a situação com fidelidade, escolheu o modelo que para ela estaria mais adequado à situação. O Diálogo 9 e os registros escritos da aluna Inês mostram que ela tentou representar a situação com fidelidade conforme já destacado em GAVE (2005). É possível também perceber um "refinamento e ajuste de modelos" (JZN, 1987, p. 69) associado à matematização vertical. Os outros alunos do grupo 2 concordaram com a argumentação da aluna Inês e, assim, o grupo 2 considerou o modelo 2 de Inês como o modelo matemático adequado para descrever a taxa de reciclagem de PET no Brasil. Identificamos a síntese presente no esquema de Almeida e Silva (2012) ou trabalho matemático presente em Ferri (2006) e em Blum e Leiβ (2005).

Encontrado o modelo que representaria a taxa de reciclagem do Brasil os alunos iniciaram o ajuste aos dados do Japão presentes na Figura 15. Inicialmente, a aluna Inês verificou os crescimentos em anos consecutivos a partir de 2005 (Figura 46 e Diálogo 10), pois o grupo decidiu utilizar somente os dados a partir de 2005, assim como considerado para o Brasil.

Diálogo 10:
José: você está usando quais dados aí da, do Japão?
Inês: eu estou, eu peguei os dois crescimentos maiores, que foi 2006 *e* 2008*. Porque sei lá. Porque a partir daqui eu acho que o crescimento vai aumentar mais ainda. Porque ele está bem ruim.*
José: esse gráfico tem um comportamento muito engraçado.
Inês: porque 2005 *e* 2006*, o crescimento deu* 4,6, 2006 *e 2007,* 2,9, 2007 *e* 2008, 8,7*. Então de quatro, ou de dois ou de oito. Não tem muita...e como se você pegar esses dois crescimentos não vai abater aqui, muito. Então eu peguei esses dois aqui né. Porque se você fizer com esses dois anos,* 2005 *e* 2006*.*

José: você está pegando 2005 *e* 2007*? É, porque* 2005 *e* 2006 *se fizer um modelo baseado nesses dois não tem um crescimento proporcional.*
Inês: é. Então, daí eu peguei 2007 *e* 2008*.*

Figura 46 - Analisando os dados da reciclagem de PET no Japão



Fonte: Registro escrito da aluna Inês

No Diálogo 10 os alunos tentaram encontrar um padrão característico da função exponencial, quanto mais próximas as imagens estivessem do máximo da função mais próximas seriam uma das outras. Porém, para os dados da reciclagem de PET no Japão, os alunos não encontraram esse padrão. Destacamos, novamente, o “reconhecimento de similaridades entre estruturas” (LUCCAS e BATISTA, 2011, p. 463) que segundo as autoras Luccas e Batista (2011) faz parte da matematização vertical. As falas: **Porque a partir daqui eu acho que o crescimento vai aumentar mais ainda**, **como se você pegar esses dois crescimentos não vai abater aqui, muito. (...). É, porque 2005 e 2006, se fizer um modelo baseado nesses dois não tem um crescimento proporcional** nos remetem à síntese ou trabalho matemático destacados em Almeida e Silva (2012), Ferri (2006) e Blum e Leiβ (2005).

5.3.2 Distância entre a TV e o Sofá

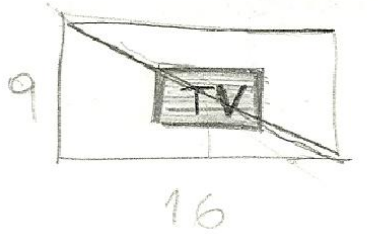
A atividade *Distância entre a TV e o Sofá* no curso fez parte do segundo momento de inserção de atividades de modelagem matemática, por esse motivo a professora apresentou aos alunos o vídeo intitulado *Veja o que Levar em Conta na Hora de Escolher sua Nova TV*, vinculado no dia 16 de Agosto de 2009 no programa Olhar Digital. Além disso, a reportagem *Qual é a Distância Ideal entre o Sofá e a TV?* foi entregue aos alunos. Considerando as informações sobre o assunto e a diversidade de modelos que se pode encontrar na Internet, a professora propôs aos alunos que eles elaborassem um modelo para responder ao problema: Qual a distância entre o sofá e a TV? Após a apresentação do tema e do problema os alunos passaram a trabalhar na elaboração do modelo.

O grupo 1 utilizou as informações de que o campo visual humano é 120º (Figura 47) e que as TVs atuais utilizam como formato de tela a proporção 9:16 (Figura 48), além disso consideraram que a TV deveria ocupar $1/4$ do campo visual (Figura 48), como forma de garantir conforto ao telespectador. As Figuras 47 e 48 são os desenhos feitos pela aluna Elaine para representar as informações.

Figura 47 - Desenho representando o campo visual e a distância da pessoa à TV

Fonte: Registro escrito da aluna Elaine.

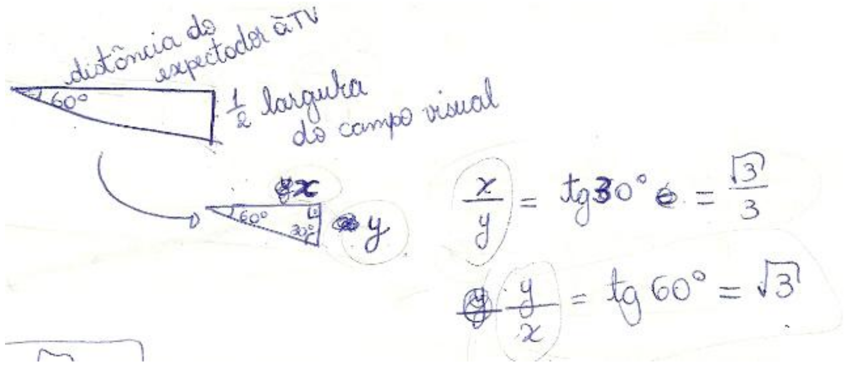
Figura 48 - Formato de tela da TV



Fonte: Registro escrito da aluna Elaine.

Na Figura 48 a borda desenhada no exterior do desenho da TV indica o campo visual. Na Figura 49 a distância entre a TV e a pessoa foi chamada de x e a largura do campo visual de y. Já a relação entre a distância da pessoa à TV e a largura do campo visual foi expressa pela equação $y = 2\sqrt{3}x$ (Figura 50).

Figura 49 - Cálculo da relação entre distância da TV ao sofá e largura do campo visual



Fonte: Registro escrito da aluna Elaine.

Figura 50 - Relação entre distância da TV ao sofá e largura do campo visual

$$y = 2\sqrt{3}\,x$$

Fonte: Registro escrito da aluna Elaine.

As alunas do grupo 1 utilizaram a proporção 9:16 como sendo a proporção do campo visual humano, pois dessa forma poderiam calcular a diagonal da TV como sendo $1/_4$ da diagonal do campo visual, conforme mostra a Figura 51.

Figura 51 - Cálculo da diagonal do campo visual

$$\text{Diag. do campo visual} = \sqrt{h^2 + \left(\tfrac{9y}{16}\right)^2}$$
$$= \sqrt{y^2 + \left(\frac{9y}{16}\right)^2} = \sqrt{y^2 + \frac{81y^2}{256}}$$
$$= \sqrt{\frac{256y^2 + 81y^2}{256}} = \sqrt{\frac{337y^2}{256}}$$
$$= \frac{y\sqrt{337}}{16}$$

Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

Calculada a diagonal do campo visual, o grupo 1 calculou a diagonal da TV (Figura 52).

Figura 52 - Cálculo da diagonal da TV

$$\underline{\text{Diag. da TV}} = \frac{y\sqrt{337}}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{y\sqrt{337}}{64}$$

Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

Com a informação da diagonal da TV o grupo 1 obteve as polegadas da TV (Figura 53).

Figura 53 - Cálculo das polegadas da TV

$$\underline{\text{Polegadas da TV}} = \frac{y\sqrt{337}}{64} \cdot \frac{10}{127} = \frac{y\sqrt{337}\cdot 5}{4064}$$

$$\cong y \cdot 0{,}02258$$

Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

Utilizando a relação inicial $y = 2\sqrt{3}x$ e a informação que as $polegadas\ da\ TV = 0{,}02258y$ as alunas calcularam as polegadas da TV em função da distância entre a pessoa e a TV.

$$polegadas\ da\ TV = 0{,}02258y$$

$$polegadas\ da\ TV = 0{,}02258\left(2\sqrt{3}x\right)$$

$$polegadas\ da\ TV = 0{,}0782x$$

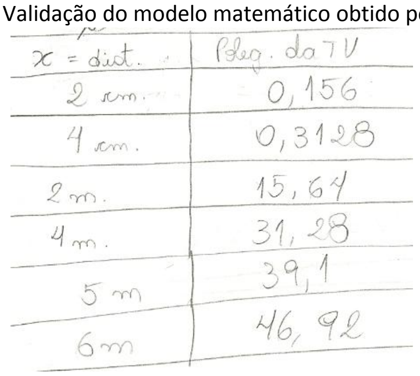
As polegadas da TV estão em centímetros e por isso as alunas realizaram a mudança para metros, o que resulta em

$$polegadas\ da\ TV = 7{,}82x$$

em que x é a distância da TV à pessoa (em metros).

Por fim, as alunas elaboraram uma tabela visando à validação do modelo (Figura 54).

Figura 54 - Validação do modelo matemático obtido pelo grupo 1



x = dist.	Pleg. da TV
2 cm.	0,156
4 cm.	0,3128
2 m.	15,64
4 m.	31,28
5 m	39,1
6 m	46,92

Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

As alunas consideraram o modelo válido usando os desktops e laptops que havia na sala.

O grupo 2 também considerou que o campo visual é de 120º e que as TVs atuais seguem a proporção 9:16. Inicialmente, os alunos consideraram somente essas duas informações, fazendo um caminho próximo às alunas do grupo 1 para encontrar a relação distância entre a TV e o sofá.

O grupo 2 encontrou a distância mínima da TV ao sofá a partir da largura da TV que teve por base o formato de tela, 9:16, e a diagonal da TV (as polegadas) transformadas em centímetros, resultando na seguinte função:

$$d_{mín} = 0{,}638p$$

em que $d_{mín}$ é a distância mínima entre a TV e o sofá, em cm, e p é o tamanho da TV, dado em polegadas. A letra grega $\varphi = 25\ cm$ foi adicionada pelos alunos na elaboração da função que descreveu a distância mínima e foi nomeada pelos alunos de *constante de conforto*, resultando no modelo (3). O grupo 2 propôs ainda dois outros modelos (4 e 5) para a situação.

$$d_{mín} = 0{,}638p + \varphi \qquad (3)$$

$$d_{máx} = 16{,}88p \qquad (4)$$

$$d_{ideal} = 8{,}759p + \frac{\varphi}{2} \qquad (5)$$

Para elaborar o modelo 4, da distância máxima, os alunos utilizaram a informação de que somente 5% do campo visual humano é nítido, e em conjunto com a informação de que o campo visual humano é de 150º, consideraram 7,5º como angulação nítida. Para construir o modelo (5), que descreveria a distância ideal, calcularam a média aritmética entre a distância mínima e a distância máxima.

A validação foi feita usando os laptops dos alunos do grupo e pela percepção do tamanho da sala em que estavam e o tamanho de uma TV de 32’ e 42’ polegadas.

5.3.2.1 A matematização na atividade

Na atividade, *Distância entre a TV e o Sofá*, foram coletados registros escritos, em áudio e em vídeo dos alunos enquanto desenvolviam a atividade. Além disso, ao final da atividade foi entregue aos grupos um questionário com a intenção de coletar mais informações que pudessem ser relevantes no estudo da matematização realizada pelos alunos.

Na análise destacamos trechos das falas dos alunos, registros escritos, tanto do desenvolvimento da atividade quanto aqueles relativos às respostas às perguntas do questionário. Destacamos que os registros escritos realizados pelos alunos do grupo 2 foram retirados do registro em vídeo, pois os alunos utilizaram o quadro para registrar o desenvolvimento da atividade.

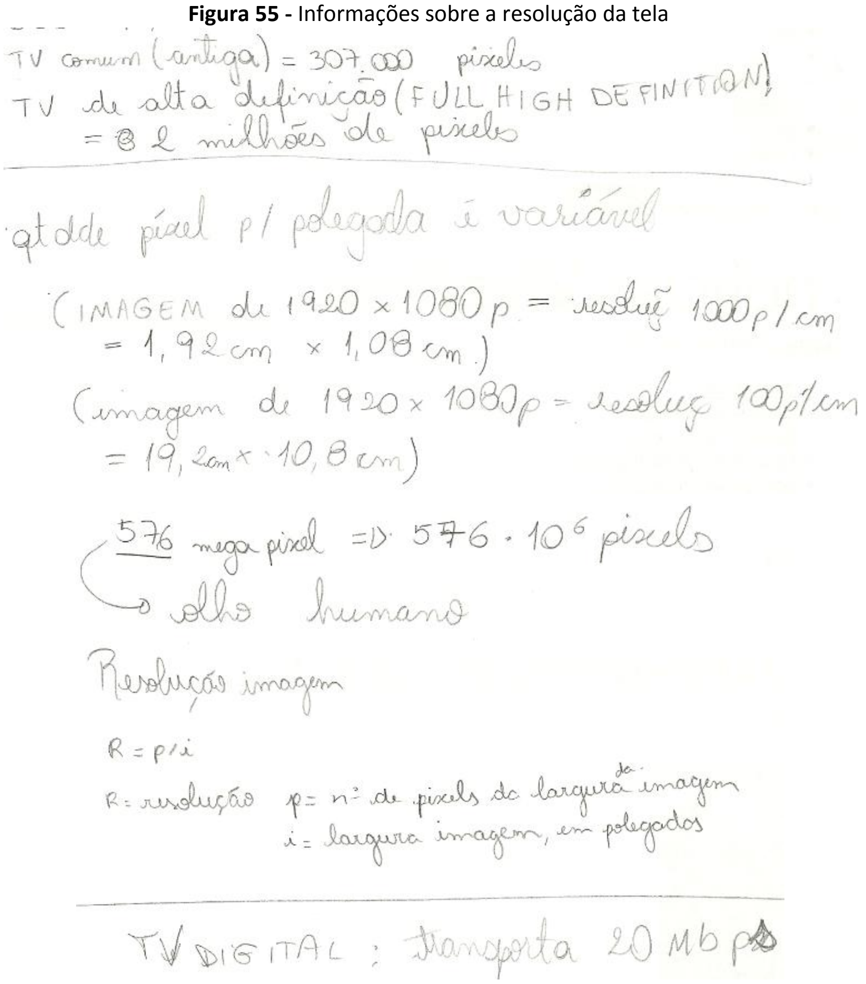
Os registros destacados e analisados a seguir foram selecionados por terem se apresentado como importantes para evidenciar a matematização realizada pelos alunos durante o desenvolvimento da atividade.

5.3.2.1.1 Grupo 1

As alunas tiveram dificuldade em iniciar a atividade, pois na Internet havia vários modelos prontos e a proposta era de que elas elaborassem um modelo a partir de algumas informações, sem utilizar um modelo pronto.

Depois de algum tempo decidiram procurar uma relação entre a resolução de tela da TV e a distância entre a TV e o sofá. O que resultou nas informações da Figura 55.

Figura 55 - Informações sobre a resolução da tela


TV comum (antiga) = 307.000 pixels
TV de alta definição (FULL HIGH DEFINITION)
= 2 milhões de pixels

qtdde pixel p/ polegada é variável

(IMAGEM de 1920 x 1080 p = resoluç 1000 p/cm
= 1,92 cm x 1,08 cm.)
(imagem de 1920 x 1080p = resoluç 100p/cm
= 19,2cm x 10,8 cm)

576 mega pixel => $576 \cdot 10^6$ pixels
→ olho humano

Resolução imagem

R = p/i

R = resolução p = nº de pixels da largura da imagem
i = largura imagem, em polegadas

TV DIGITAL : transporta 20 Mbps

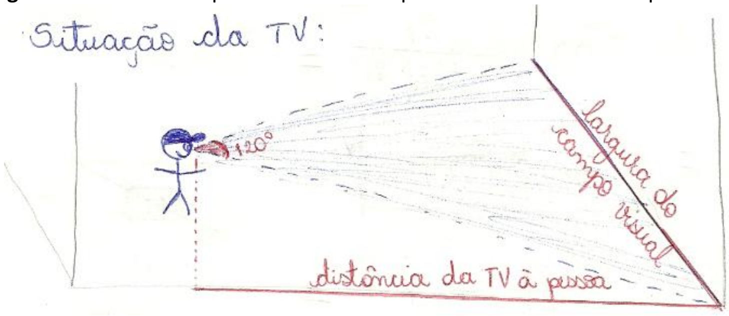
Fonte: Registro escrito da aluna Elaine.

As informações encontradas pelas alunas (Figura 55) eram somente da resolução de tela da TV, sem relacionar a distância que uma pessoa deveria ficar do aparelho dependendo da resolução da sua tela. As alunas poderiam ter escolhido muitos aspectos da televisão que podem ser considerados para determinar a distância que uma pessoa deveria ficar da TV. A escolha da resolução de tela da televisão é uma hipótese que fica implícita, ou seja, dos vários aspectos de uma TV, a escolha pela resolução de tela sugere que para as alunas seria esse o aspecto que mais exerceria influência na determinação da distância entre a pessoa e a TV.

Considerando a busca por informações e a hipótese implícita, identificamos as transições estruturação e matematização do processo de modelagem matemática descritas por Almeida e Silva (2012). Como as alunas não encontraram informações suficientes para relacionar a resolução de tela da TV com a distância que uma pessoa deve ficar do aparelho passaram a procurar outro fator que parecesse tão relevante quanto o fator da resolução de tela da TV.

A segunda hipótese elaborada pelo grupo foi de que o fator que influenciaria a distância da TV ao sofá seria o campo visual. Após a decisão de considerar o campo visual as alunas elaboraram uma representação para a situação (Figura 56).

Figura 56 - Desenho representando o campo visual e a distância da pessoa à TV



Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

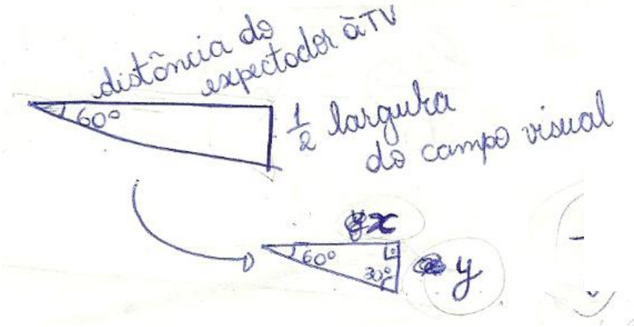
As alunas decidiram representar, por meio de um desenho (Figura 56) a situação estudada, incluindo a informação do campo visual, que sugere a matematização horizontal destacada por Rico (2006) por meio da representação do problema de uma maneira diferente. A Figura 56 relaciona elementos da situação estudada e conhecimentos matemáticos das alunas. Tal representação se aproxima daquilo que Almeida e Silva (2012) chamam de matematização, pois

> a elaboração de um modelo matemático é mediada por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente estas características (ALMEIDA; SILVA, 2012, p. 1021).

Ao final do desenvolvimento da atividade, a professora se aproximou das alunas e solicitou que elas explicassem o caminho que percorreram assim como as estratégias e as escolhas que realizaram para elaborar um modelo matemático para a situação. Destacamos algumas falas da aluna Elaine, que foi quem fez a descrição para a professora. **A gente pensou nesse triângulo aqui, distância do telespectador, que é metade da largura do campo visual. Daí x é a distância e y é metade do campo visual. Daí a gente fez, encontrou essa relação, por tangente. (...). Daí aqui, eu encontrei o valor de y, então y largura do campo visual total em relação a distância que eu tiver desse tal campo visual.**

A fala da aluna nos remete à síntese presente no esquema de modelagem matemática de Almeida e Silva (2012) e ao trabalho matemático citado nos esquemas de Blum e Leiβ (2005), Ferri (2006) e Maaβ (2006), sendo descrita pela utilização de conhecimentos matemáticos, pois está presente na descrição da aluna Elaine (Figura 57) conceitos como tangente, assim como a percepção da possibilidade da visualização de um triângulo retângulo com vértices posicionados no telespectador, no centro do campo visual e na borda desse campo. O registro escrito da aluna Elaine ilustra sua fala e evidencia o uso de linguagem simbólica, formal e técnica e suas operações como destacado por Rico (2006), que compõe a matematização vertical.

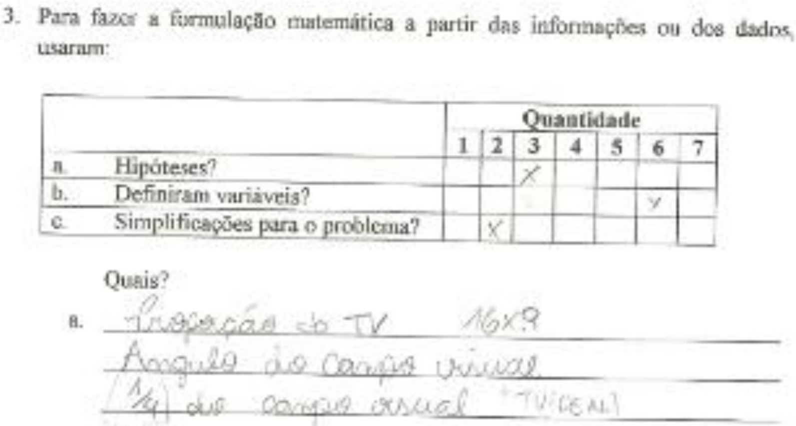
Figura 57 - Representação da situação utilizando conhecimentos matemáticos



Fonte: Registro escrito da aluna Elaine

Ao final dessa atividade a professora entregou um questionário com o intuito de coletar mais informações sobre a matematização realizada pelas alunas no desenvolvimento da atividade. O terceiro item desse questionário (Anexo 2) solicitava que as alunas descrevessem quais hipóteses utilizaram. A resposta dada a esse item vai de encontro à fala da aluna Elaine (Figura 58).

Figura 58 – Resposta ao terceiro item do questionário



3. Para fazer a formulação matemática a partir das informações ou dos dados usaram:

	Quantidade 1	2	3	4	5	6	7
a. Hipóteses?			X				
b. Definiram variáveis?						V	
c. Simplificações para o problema?		X					

Quais?

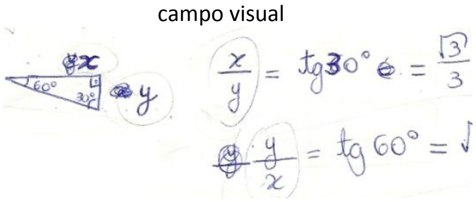
a. Proporção da TV 16x9
Ângulo do campo visual
1/4 do campo visual (TV IDEAL)

Fonte: Registro escrito do grupo 1.

A resposta das alunas quanto às hipóteses foi: **proporção da TV $16x9$**, **ângulo do campo visual**, **¼ do campo visual (TV ideal)**. A elaboração das hipóteses faz parte da matematização presente nos esquemas de modelagem matemática de Almeida e Silva (2012), Ferri (2006), Blum e Leiβ (2005) e Maaβ (2006). As hipóteses elaboradas pelo grupo foram resultado de análises de variáveis que influenciariam o modelo matemático. Essa análise de variáveis faz parte da matematização horizontal presente em Luccas e Batista (2011).

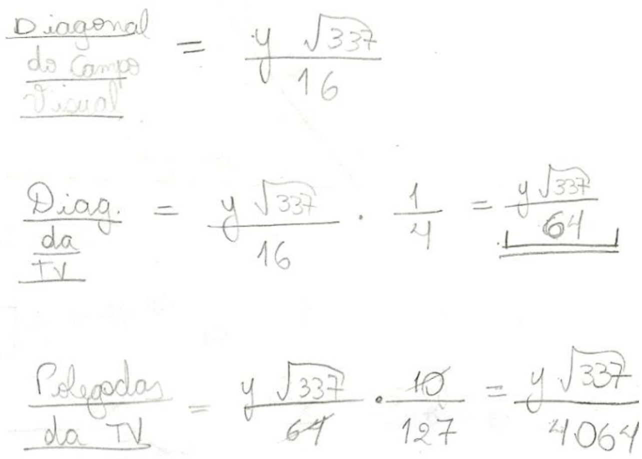
Os registros escritos das Figuras 59 e 60 nos remetem ao que Almeida e Silva (2012) nomeiam síntese na modelagem matemática e ao trabalho matemático presente em Ferri (2006), Blum e Leiβ (2005) e Maaβ (2006), pelo uso de conhecimentos matemáticos como Teorema de Pitágoras, triângulo retângulo, operações com fração, operações com radicais, trigonometria, ângulos, e ao uso de linguagem simbólica, formal e técnica e suas operações que Rico (2006) associa à matematização vertical.

Figura 59 - Cálculo da largura e da altura do campo visual



Fonte: Registro escrito da aluna Elaine.

Figura 60 - Cálculo das diagonais do campo visual e da TV e cálculo das polegadas da TV

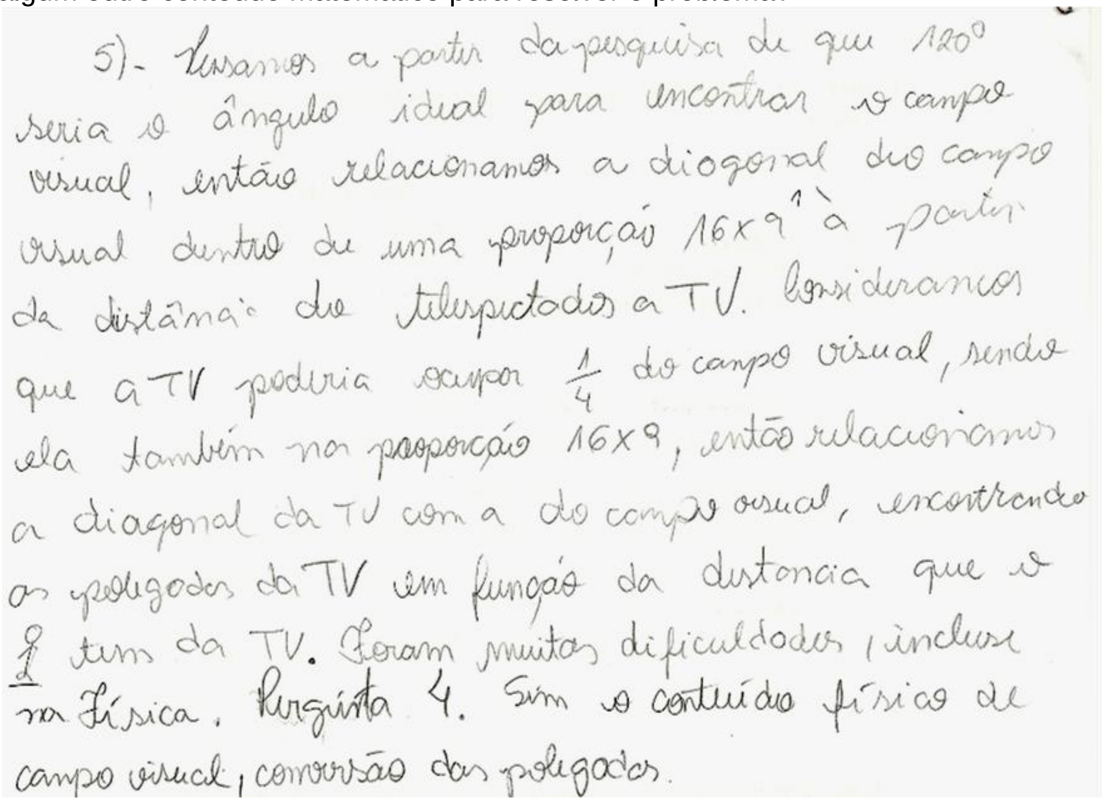


Fonte: Registro escrito da aluna Elaine.

A descrição de como chegaram a uma resposta para a situação problema que a aluna Elaine deu à professora foi escrita pelo grupo como resposta ao quinto item do questionário (Quadro 2).

Quadro 2 – Resposta ao quinto item do questionário

De que modo você conduziu a resolução matemática da situação? Que dificuldades você enfrentou? Usou que conhecimentos já aprendidos? Foi necessário aprender algum outro conteúdo matemático para resolver o problema?


5)- Usamos a partir da pesquisa de que 120º seria o ângulo ideal para encontrar o campo visual, então relacionamos a diagonal do campo visual dentro de uma proporção 16x9 à partir da distância do telespectador a TV. Consideramos que a TV poderia ocupar $\frac{1}{4}$ do campo visual, sendo ela também na proporção 16x9, então relacionamos a diagonal da TV com a do campo visual, encontrando as polegadas da TV em função da distancia que o ℓ tem da TV. Foram muitas dificuldades, inclusive na Física. Pergunta 4. Sim o conteúdo física de campo visual, conversão das polegadas.

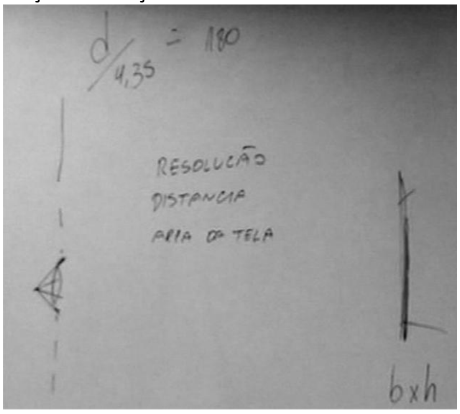
Fonte: Registro escrito do grupo 1

5.3.2.1.2 Grupo 2

Assim como o grupo 1, o grupo 2, inicialmente, procurou por informações sobre o assunto na Internet e encontrou vários modelos diferentes. Após essa primeira busca por informações, o grupo começou a perceber que eram muitas as variáveis e que teriam de fazer escolhas para abordar matematicamente o problema.

De posse de informações sobre o assunto, os alunos destacaram quais informações pareciam mais importantes (Figura 61): resolução, distância e área da tela.

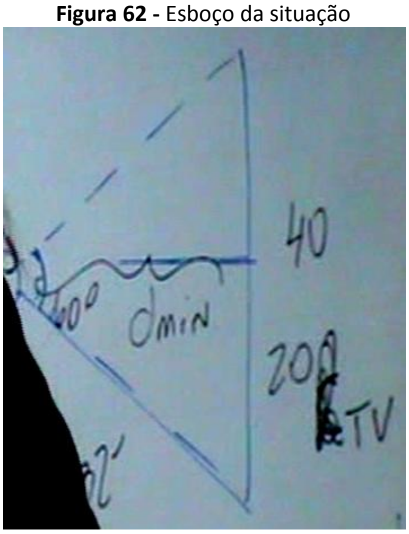
Figura 61 - Esboço da situação e variáveis destacadas como importantes



Fonte: Registro escrito do aluno José realizado no quadro

Essa percepção das variáveis nos remete à análise de variáveis destacada em Luccas e Batista (2011) e também à estruturação da situação que figura nos esquemas de modelagem matemática de Blum e Leiβ (2005), Ferri (2006) e Almeida e Silva (2012).

Figura 62 - Esboço da situação



Fonte: Registro escrito dos alunos Inês e José realizados no quadro

Na Figura 62, Inês e José fazem um esboço da situação problema o qual está relacionado à visualização do problema de diferentes modos, que consta em Jzn (1987), juntamente com a transferência do problema do mundo real em um problema matemático também presente em Jzn (1987) e em Rico (2006). Como no esboço feito pelos alunos, há indícios de relação entre características da situação e conhecimentos matemáticos, dizemos que os alunos estão realizando a transição matematização que Almeida e Silva (2012) destacam em seu esquema de modelagem matemática.

Após fazerem um esboço da situação (Figura 62) os alunos descreveram como fariam para elaborar um modelo.

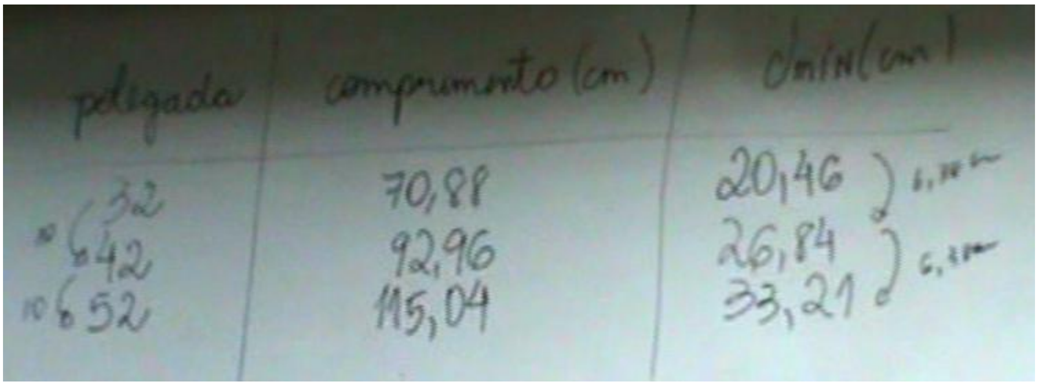
Inês: então a gente precisa da polegada, o comprimento e faz essa regrinha. Considerando que o campo visual nítido é de $120°$*, sobreposição dos olhos.*

Essa descrição da aluna Inês é uma estratégia elaborada pelo grupo para resolver o problema, assim como presente em Almeida (2009), “analisar o problema; retirar informações; associar características relevantes com procedimentos promissores de resolução; formular hipóteses” (p. 25). A fala da aluna Inês **Considerando que o campo visual nítido é de $120°$, sobreposição dos olhos** é uma hipótese que está sendo considerada pelo grupo e assim, a matematização presente em Almeida e Silva (2012) é identificada.

A partir desse ponto, os alunos passaram a calcular a distância de algumas TVs, considerando, além do que a aluna Inês falou, o formato de tela como sendo $9:16$. Assim, mais uma hipótese é considerada e novamente se trata da matematização de Almeida e Silva (2012) e a estratégia de Almeida (2009).

Os alunos montaram uma tabela com vários tamanhos de TV e a distância mínima que se deve ficar do aparelho (Figura 63).

Figura 63 - Tabela relacionando tamanho da TV (polegadas), largura da TV e distância mínima que o sofá deveria ficar da TV



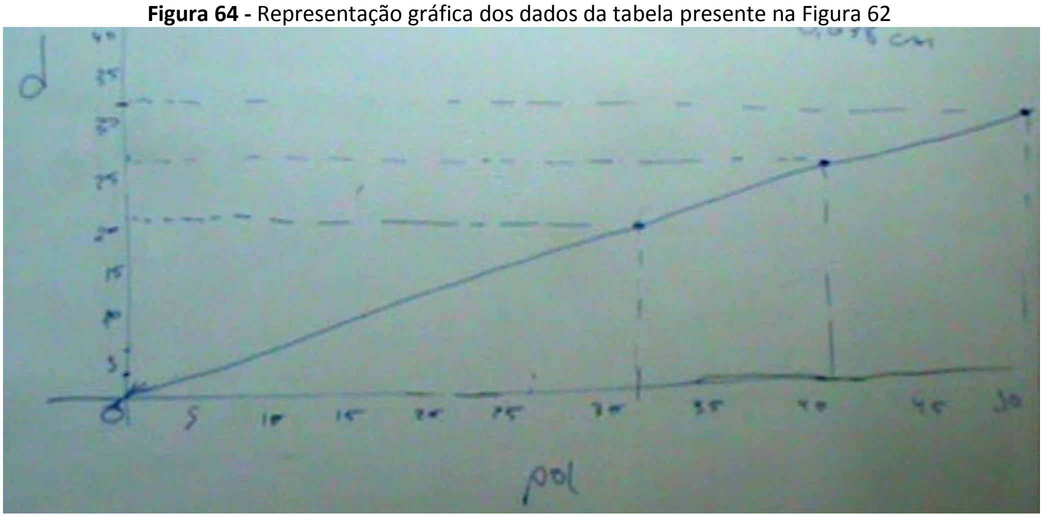
polegada	comprimento (cm)	dmín (cm)
32	70,88	20,46
42	92,96	26,84
52	115,04	33,21

Fonte: Registro escrito da aluna Inês realizado no quadro

Pela tabela (Figura 63), os alunos viram que a cada dez polegadas a distância que a TV deveria ficar do sofá aumentaria 6,38 centímetros. Assim, concluíram que se tratava de uma função linear e, dessa forma, fica evidente o conhecimento matemático dos alunos com relação a funções, mais especificamente as funções do primeiro grau. Tal evidência está vinculada à síntese que Almeida e Silva (2012) ilustram em seu esquema de modelagem matemática e ao trabalho matemático presente nos esquemas de Ferri (2006), Blum e Leiβ (2005) e Maaβ (2006). A percepção da relação presente entre o tamanho da tela da TV e a distância que a pessoa deveria ficar do aparelho torna claro o uso da linguagem simbólica e suas operações que Rico (2006) associa à matematização vertical.

Os dados da tabela foram representados graficamente pela aluna Inês como vemos na Figura 64.

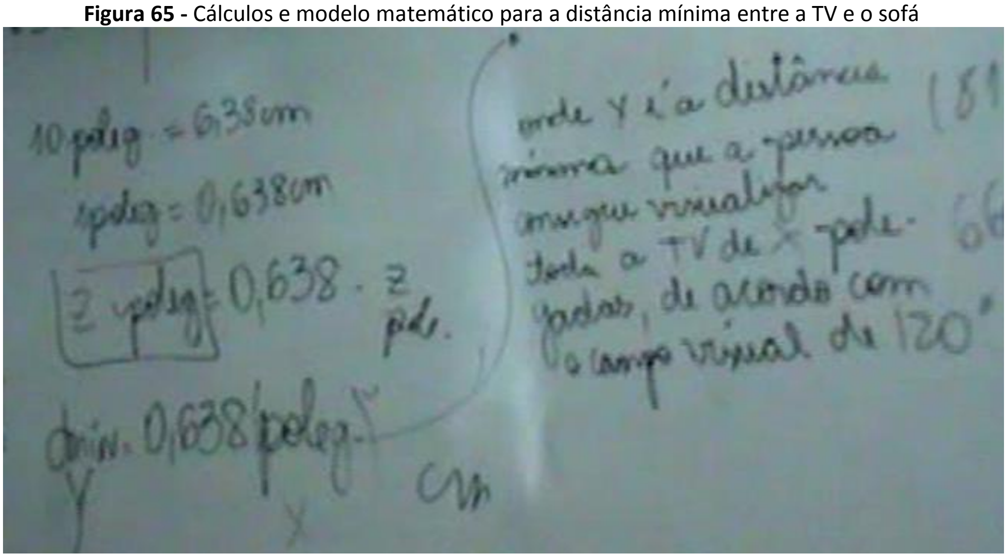
Figura 64 - Representação gráfica dos dados da tabela presente na Figura 62



Fonte: Registro escrito da aluna Inês realizado no quadro

Por fim, a aluna Inês chegou ao modelo da distância mínima entre a TV e o sofá (Figura 65).

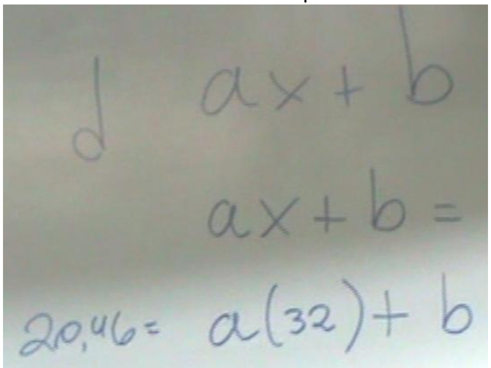
Figura 65 - Cálculos e modelo matemático para a distância mínima entre a TV e o sofá



Fonte: Registro escrito da aluna Inês realizado no quadro

O aluno José também iniciou a elaboração do modelo a partir dos dados da tabela da Figura 63 e chegou à expressão algébrica da Figura 66.

Figura 66 - Encontrando um modelo matemático a partir dos dados da tabela da Figura 62



Fonte: Registro escrito do aluno J realizado no quadro

Após iniciar os cálculos presentes na Figura 66, o aluno saiu da sala para atender ao celular e quando retornou a aluna Inês já havia formulado o modelo da Figura 65. Todos os integrantes do grupo concordaram que o modelo matemático elaborado por Inês estaria correto, porém havia um erro nos cálculos que poderia ter sido percebido se o aluno José tivesse continuado com os seus cálculos. A Tabela 6 traz a comparação do modelo matemático elaborado pela aluna Inês e o modelo matemático que o aluno José encontraria se tivesse continuado os cálculos.

Tabela 6 - Comparação entre os modelos matemáticos

Modelo a partir dos cálculos da aluna Inês	**Modelo a partir dos cálculos do aluno José**
$x\ polegadas = 0{,}638x$ $d = 0{,}638p$	$\begin{cases} 26{,}84 = 42a + b \\ 20{,}46 = 32a + b \end{cases}$ $a = 0{,}638$ $b = 0{,}044$
$d = 0{,}638p$	$d = 0{,}638p + 0{,}044$

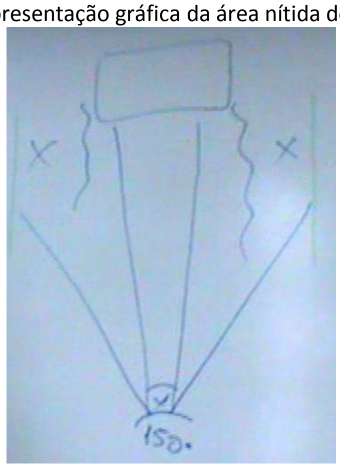
Fonte: Elaborado pela autora

Após a elaboração do modelo apresentado na Figura 65 os alunos realizaram a validação em seus laptops, pois de uma semana para a outra o grupo não realizou a validação em casa, e dessa forma, a utilização dos laptops foi a alternativa disponível em sala de aula. A conclusão dos alunos foi que o modelo não era adequado (Diálogo 11).

Diálogo 11:
Professora: o modelo de vocês do jeito que ficou vocês acham, (...) vocês acham que conseguiriam ficar assim, duas horas de um filme com legenda?
José: nem dois minutos.

Pelo Diálogo 11 fica claro que os alunos consideram o modelo inadequado e por isso buscaram por mais informações para refinar o modelo que haviam elaborado na aula anterior. A intenção dos alunos era encontrar alguma informação sobre a nitidez do campo visual.

Figura 67 - Representação gráfica da área nítida do campo visual



Fonte: Registro escrito do aluno José realizado no quadro

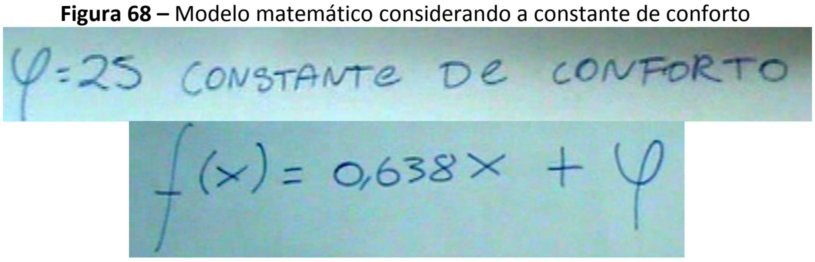
O esboço do aluno José (Figura 67) representa o campo visual de 150º. A região descrita por X representou a parte do campo visual que não seria nítida, ou seja, para que a pessoa visualizasse o que estaria naquela área seria necessário movimentar a cabeça na frente da TV, sendo tal ação indesejada. Assim, os alunos buscaram por informações sobre a região do campo visual que não foi marcada com o X. Esse raciocínio dos alunos está vinculado à chamada estruturação presente nos esquemas de Almeida e Silva (2012), Ferri (2006) e Blum e Leiβ (2005) e nos remete à esquematização descrita por Jzn (1987) e à análise de variáveis que consta de Luccas e Batista (2011) ambas vinculadas à matematização horizontal.

A fala da aluna Karla apresentou informações novas para a elaboração de um modelo:

Karla: eu encontrei aqui que a distância mínima que a gente consegue enxergar nitidamente, para um olho normal, é 25 *centímetros. Então a gente teria que ter esse* 25 *mais essa distância que a gente calcula.*

A partir da informação encontrada no site os alunos adicionaram 25 centímetros ao modelo inicial que haviam elaborado (Figura 68).

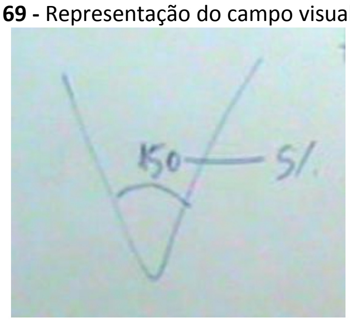
Figura 68 – Modelo matemático considerando a constante de conforto



Fonte: Registro escrito do aluno José realizado no quadro

A chamada *constante de conforto* (φ) foi resultado de uma busca por informações que gerou uma nova hipótese. Apesar da adição da constante de conforto, o modelo foi considerado inadequado. Novamente, os alunos buscaram por informações e encontraram que somente 5% do campo visual são nítidos (Figura 69) e assim o ângulo nítido do campo visual seria 7,5º.

Figura 69 - Representação do campo visual nítido



Fonte: Registro escrito do aluno José realizado no quadro

Essa busca por informações está vinculada à estruturação e a quando as informações passam a ser consideradas como uma hipótese – adição da constante de conforto e do ângulo nítido do campo visual seria 7,5º – temos a chamada matematização, ambas presentes nos esquemas de modelagem matemática de Ferri (2006), Blum e Leiβ (2005) e Almeida e Silva (2012). A formulação de hipóteses também é destacada por Almeida (2009) e podemos associá-la à matematização horizontal.

5.3.3 Um Modelo Matemático para o Preço da Gasolina

Essa atividade fez parte do terceiro momento de inserção de atividades da modelagem matemática e foi desenvolvida somente pelo grupo 2. Nessa atividade os alunos foram responsáveis por todas as escolhas realizadas, desde o tema até a interpretação dos resultados matemáticos obtidos. A professora atuou como orientadora, auxiliando os alunos quando necessário.

Os alunos tinham a intenção de trabalhar com o tema *petróleo* desde que a professora solicitou que pensassem em temas para a atividade de modelagem matemática do terceiro momento. Quanto ao tema *preço da gasolina*, os alunos encontraram na Internet alguns dados referentes à evolução do preço médio da gasolina ao consumidor no Brasil, conforme Tabela 7.

Tabela 7 - Preço médio da gasolina C ao consumidor, segundo Grandes Regiões e Unidades da Federação - 2002-2011

	Preço médio[1] da gasolina C ao consumidor (R$/litro)									
	2002	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**
Brasil	1,735	2,072	2,082	2,340	2,552	2,508	2,500	2,511	2,566	2,731

Fonte: Trabalho final do grupo 2

O tema despertou o interesse dos alunos resultando no problema presente no Quadro 3:

Quadro 3 - Problema elaborado pelo grupo 2

Problema: Quando o preço da gasolina chegará a R$ 3,00?

Fonte: Trabalho final do grupo 2.

Para responder o problema, os alunos elaboraram as hipóteses presentes no Quadro 4:

Quadro 4 - Hipóteses

Hipótese 1: O Brasil não passará por nenhuma crise de combustível fóssil.
Hipótese 2: O preço do modelo não pode fornecer um número muito além de R$ 2,73.

Fonte: Trabalho final do grupo 2

E definiram as variáveis conforme o Quadro 5:

Quadro 5 - Variáveis

- $t =$ anos que se passaram $(ano\ -\ 2001)$;
- y = preço da gasolina comum ao consumidor.

Fonte: Trabalho final do grupo 2

Visando encontrar uma função que melhor se ajustasse aos dados referentes ao preço médio da gasolina, os alunos utilizaram o software Curve Expert[32]. A função indicada pelo software como melhor ajuste aos dados foi uma função logarítmica, como descrito no trabalho final no Quadro 6.

[32] Informações: http://www.curveexpert.net

Quadro 6 - Justificativa pela escolha da função logarítmica

Analisando o gráfico plotado pelo software Curve Expert verificou-se que os anos 2003 e 2008 tinham erros menores em relação aos valores estimados pelo gráfico, então partiu-se para a modelagem tendo como base a função genérica $y = a + b\ln(ano)$. Quando utilizou-se os anos como variável independente, o ln dos anos resultavam em valores muito próximos e também o modelo tinha um erro grande. Para resolver esse problema decidiu-se trabalhar com a variação dos anos usando a fórmula genérica $y = a + b\ln(ano - 2001)$.

Fonte: Trabalho final do grupo 2

Os alunos utilizaram os sistemas lineares:

$$\begin{cases} 2{,}072 = a + b\ln(2003 - 2001) \\ 2{,}5 = a + b\ln(2008 - 2001) \end{cases}$$

atribuindo ao ano 2001 o índice zero. Como resultado obtiveram o modelo,

$$y = 1{,}8353 + 0{,}3416\ln(ano - 2001).$$

A validação do modelo obtido pode ser vista no Quadro 7:

Quadro 7 - Validação do modelo matemático obtido

Tabela 8 - Validação do modelo obtido

Ano	Preço Real	Preço estimado pelo modelo	Erro Relativo
2002	1,735	1,8325	5,88%
2003	2,072	2,0721	1,52%
2004	2,082	2,2106	3,68%
2005	2,34	2,3089	3,85%
2006	2,552	2,3851	3,06%
2007	2,508	2,4474	1,75%
2008	2,5	2,5	0,16%
2009	2,511	2,5456	1,6%
2010	2,566	2,5859	3,43%
2011	2,731	2,6219	5,3%
2012		2,6544	

Fonte: Trabalho final do grupo 2

Fonte: Trabalho final do grupo 2

Após a validação do modelo obtido, o grupo considerou o modelo válido e passou a elaborar a resposta para o problema. Para isso consideraram $y = 3$, obtendo o ano de 2032 como sendo o ano em que a gasolina atingiria o valor de R$ 3,00.

5.3.3.1 A matematização na atividade

Na atividade *Um Modelo Matemático para o Preço da Gasolina*, coletamos dados por meio de uma entrevista ao final da apresentação do trabalho final do grupo, registros escritos realizados no quadro e registros escritos do trabalho final entregue à professora do curso, além de registros em áudio e em vídeo do desenvolvimento da atividade, da apresentação da atividade pelo grupo e da entrevista.

Na análise dessa atividade destacamos registros escritos dos alunos do grupo realizados no quadro, pois os alunos registravam o desenvolvimento da atividade no quadro, bem como registros do trabalho entregue à professora. Além disso, trechos de falas dos alunos do grupo na apresentação do trabalho final são destacados na análise.

Os dados evidenciados na análise foram selecionados por evidenciar a matematização realizada pelos alunos durante o desenvolvimento da atividade.

Inicialmente, a intenção do grupo era a de conhecer o ano em que as reservas de petróleo do Brasil acabariam. Na busca por informações para responder a essa pergunta, os alunos compreenderam que levaria muitos anos para que isso acontecesse, conforme a Tabela 9, pois a quantidade de produção de petróleo é significativamente menor à das reservas.

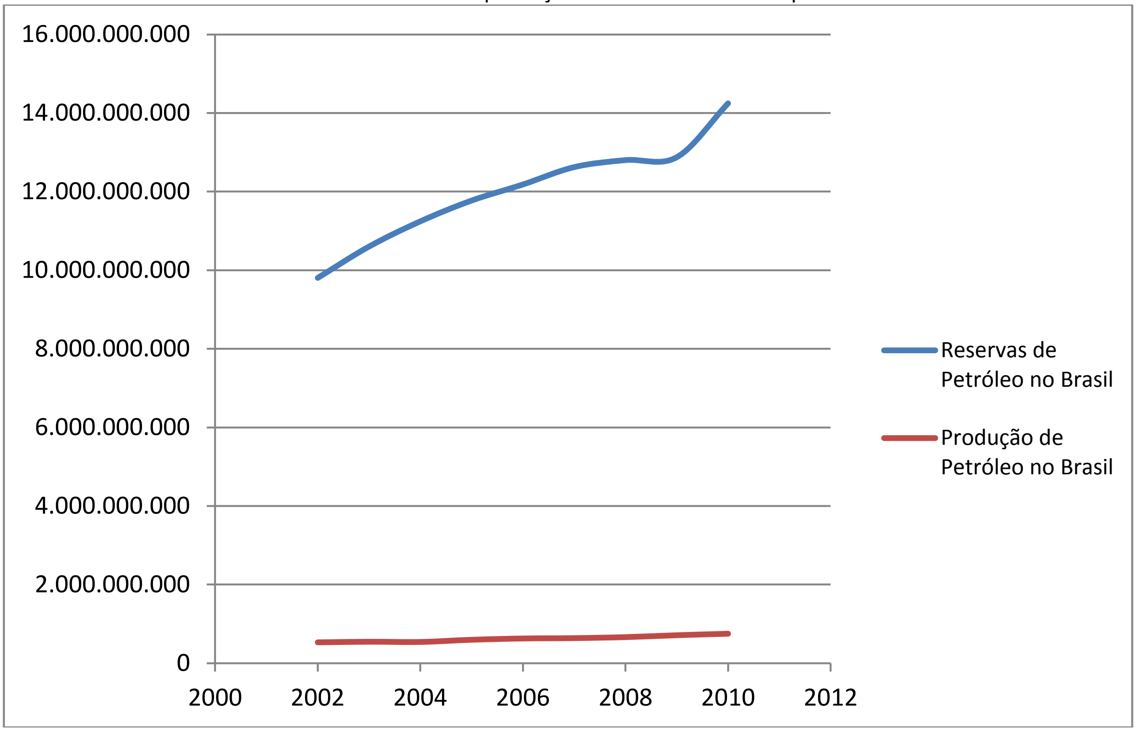
Tabela 9 - Reservas e produção de petróleo no Brasil por ano

Ano	Reservas de petróleo	Produção de petróleo
2002	9804600000	530855000
2003	10601900000	546080000
2004	11243300000	540717000
2005	11772600000	596255000
2006	12181600000	628797000
2007	12623800000	638018000
2008	12801400000	663275000
2009	12875700000	711883000
2010	14246300000	749954000

Fonte: Anuário Estatístico Brasileiro do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis – 2011

O Gráfico 1 ilustra os dados da Tabela 9, ficando mais claro que levará muitos anos até que se esgote o petróleo extraído no Brasil.

Gráfico 1 - Reservas e produção de Petróleo no Brasil por ano



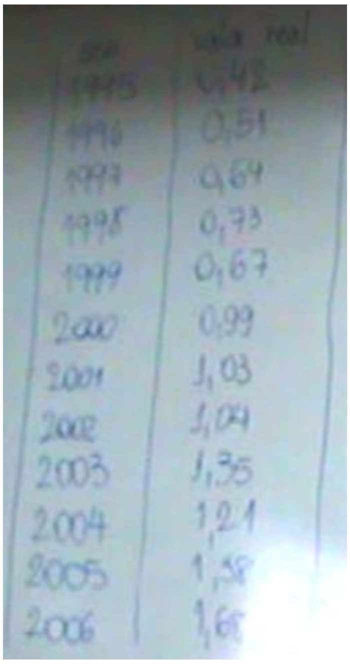
Fonte: Anuário Estatístico Brasileiro do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis – 2011

Os alunos desistiram do problema pela dificuldade em encontrar uma função adequada para os dados da Tabela 9, e porque, depois, que encontraram os dados o problema passou a ser desinteressante.

No primeiro problema, o grupo buscou informações visando compreender o problema, sendo essa compreensão identificada na primeira transição do processo de modelagem matemática de Almeida e Silva (2012), "entendimento da situação, apreensão de significado, interpretação de fatos e informações, agrupamento de ideias" (p. 1021). A partir do momento que os alunos selecionaram quais informações provenientes da compreensão da situação seriam utilizadas, eles estão estruturando a situação sendo que a "formulação de um problema para uma situação requer a estruturação e/ou simplificações deliberadas das informações acerca da situação" (ALMEIDA; SILVA, 2012, p. 1021).

O segundo problema que o grupo elaborou visava saber quando o preço da gasolina seria o dobro do que é atualmente e para o ano em que isso ocorresse quanto custaria o álcool. A Figura 70 mostra os dados que o grupo dispunha com relação ao preço do álcool e a Tabela 10 a sua representação.

Figura 70 - Dados do preço médio do álcool no Brasil



Fonte: Registro escrito da aluna Inês realizado no quadro

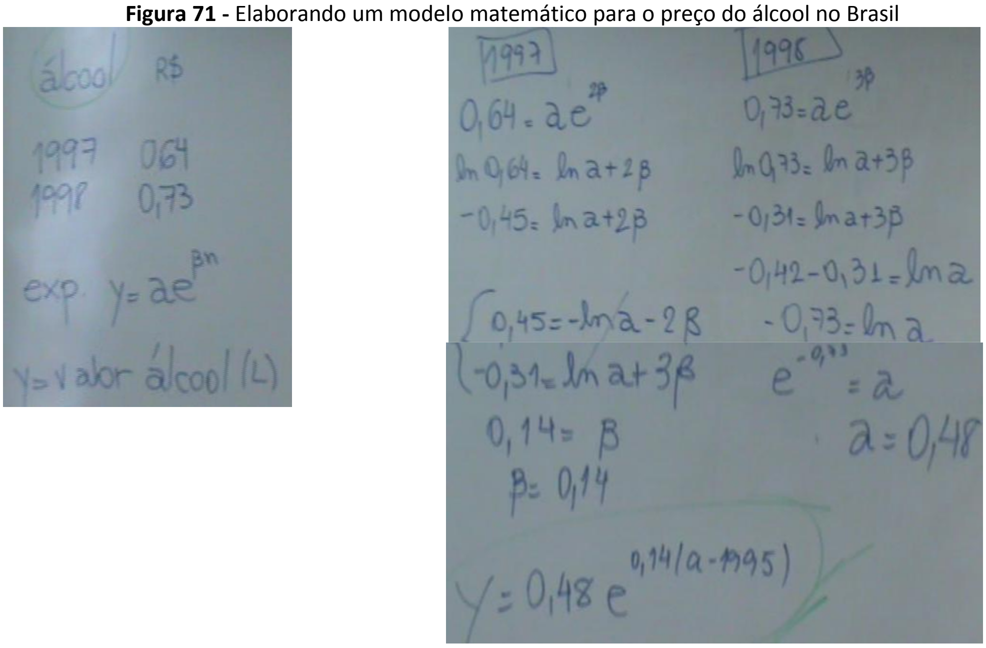
Tabela 10 - Dados do preço médio do álcool no Brasil

Ano	Valor real
1995	0,42
1996	0,51
1997	0,64
1998	0,73
1999	0,67
2000	0,99
2001	1,03
2002	1,04
2003	1,35
2004	1,21
2005	1,38
2006	1,68

Fonte: Registro escrito da aluna Inês realizado no quadro

Os alunos utilizaram o software Excel para verificar qual função se ajustaria melhor aos dados e dessa forma concluíram que uma função logarítmica seria a mais adequada das funções disponíveis no Excel. Posteriormente, utilizaram dois pontos para montar um sistema linear que possibilitasse a elaboração de uma função logarítmica referente aos dados (Figura 71).

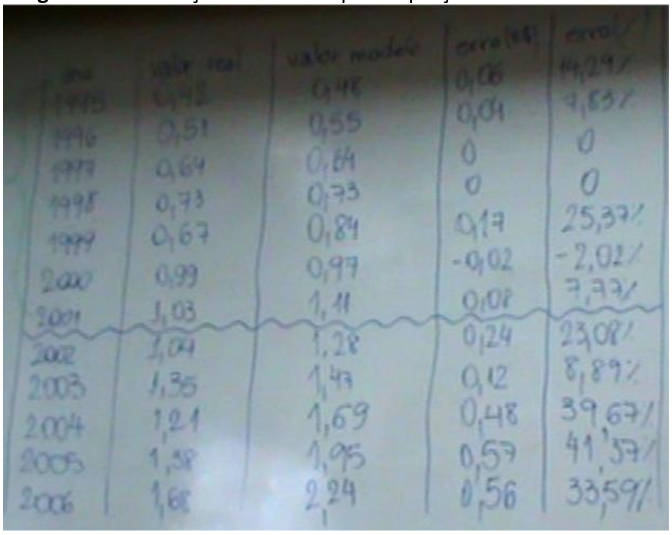
Figura 71 - Elaborando um modelo matemático para o preço do álcool no Brasil



Fonte: Registros escritos da aluna Inês realizados no quadro

Em seguida o grupo realizou a validação do modelo, conforme a Figura 72.

Figura 72 - Validação do modelo para o preço do álcool no Brasil

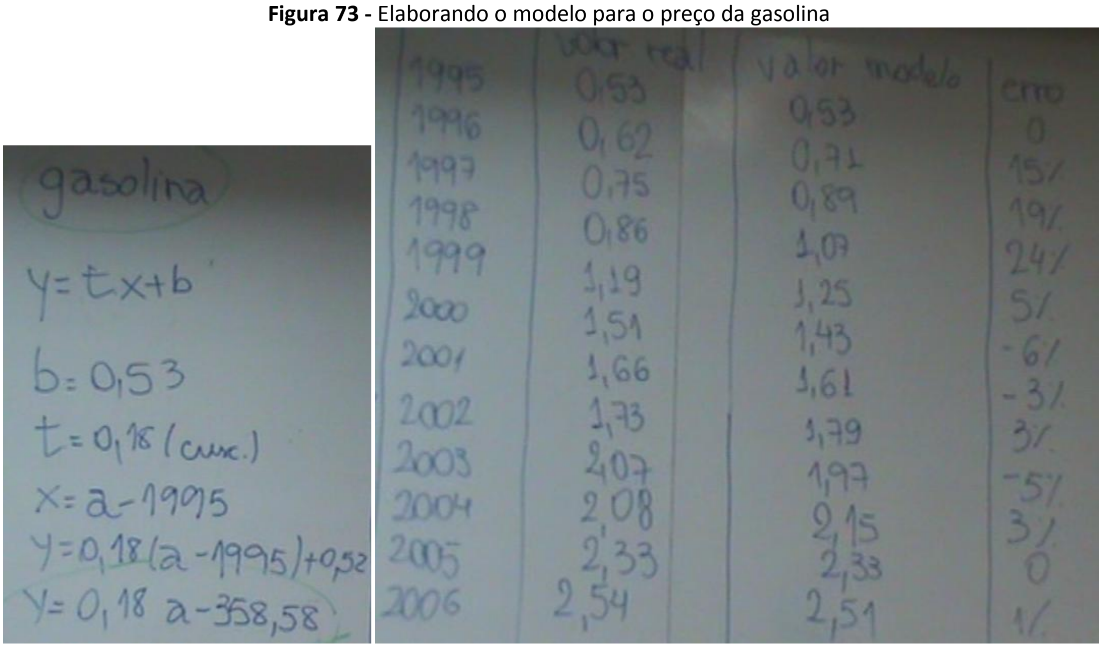


ano	valor real	valor modelo	erro (R$)	erro(%)
1995	0,42	0,48	0,06	14,29%
1996	0,51	0,55	0,04	7,83%
1997	0,64	0,64	0	0
1998	0,73	0,73	0	0
1999	0,67	0,84	0,17	25,37%
2000	0,99	0,97	-0,02	-2,02%
2001	1,03	1,11	0,08	7,77%
2002	1,04	1,28	0,24	23,08%
2003	1,35	1,47	0,12	8,89%
2004	1,21	1,69	0,48	39,67%
2005	1,38	1,95	0,57	41,57%
2006	1,68	2,24	0,56	33,59%

Fonte: Registro escrito da aluna Inês realizado no quadro

O grupo considerou que o erro ficou grande, pois os dados obtidos pelo modelo foram diferentes dos dados reais, porém passou a modelar o preço médio para a gasolina (Figura 73) deixando para outro momento a discussão da adequação do modelo matemático para o preço do álcool.

Figura 73 - Elaborando o modelo para o preço da gasolina



gasolina

y = tx + b

b = 0,53

t = 0,18 (aux.)

x = a - 1995

y = 0,18 (a - 1995) + 0,52

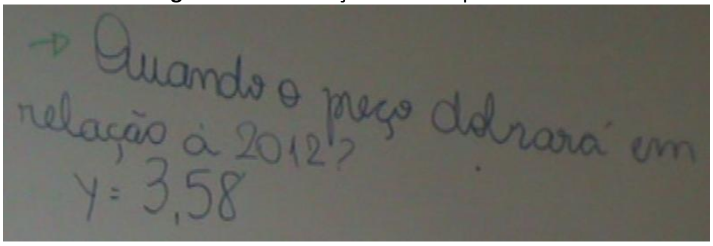
y = 0,18 a - 358,58

	valor real	valor modelo	erro
1995	0,53	0,53	0
1996	0,62	0,71	15%
1997	0,75	0,89	19%
1998	0,86	1,07	24%
1999	1,19	1,25	5%
2000	1,51	1,43	-6%
2001	1,66	1,61	-3%
2002	1,73	1,79	3%
2003	2,07	1,97	-5%
2004	2,08	2,15	3%
2005	2,33	2,33	0
2006	2,54	2,51	1%

Fonte: Registros escritos da aluna Inês realizados no quadro

Realizada a validação para o preço da gasolina os alunos reformularam o problema, pois o modelo foi considerado adequado somente a partir do ano de 1999. A Figura 74 ilustra o novo problema formulado pelo grupo.

Figura 74 - Elaboração do novo problema



Fonte: Registro escrito da aluna Inês realizado no quadro

O valor $y = 3{,}58$ (Figura 74) é o valor médio do preço da gasolina no ano de 2012 pelo modelo matemático elaborado pelo grupo. Considerando a realidade da região de Toledo, local em que a maioria dos alunos do grupo reside, o valor obtido pelo modelo matemático para o litro da gasolina não se confirma. Porém, os dados do preço médio da gasolina são referentes a todo o Brasil e como os alunos não conheciam a realidade de outros estados, buscaram informações com relação ao preço da gasolina em outras regiões e chegaram à conclusão de que o valor médio de $y = 3{,}58$ para o preço da gasolina para o ano de 2012 parecia ser adequado. Pelos dados, o preço médio da gasolina aumenta pouco de um ano para o outro e, assim, os alunos consideraram o problema que formularam desinteressante.

Por fim, no dia da apresentação do trabalho para o outro grupo e para a professora, o grupo apresentou um novo problema (Quadro 8) baseado em dados mais recentes (Quadro 9).

Quadro 8 - Problema elaborado pelo grupo

Problema: Quando o preço da gasolina chegará a R$ 3,00?

Fonte: Trabalho final do grupo 2

Quadro 9 - Dados do preço médio da gasolina C ao consumidor no Brasil

Tabela 3.20 – Preço médio da gasolina C ao consumidor, segundo Grandes Regiões e Unidades da Federação – 2002-2011

	Preço médio[1] da gasolina C ao consumidor (R$/litro)									
	2002	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**
Brasil	1,735	2,072	2,082	2,340	2,552	2,508	2,500	2,511	2,566	2,731

Fonte: Trabalho final do grupo 2

A elaboração de um problema, segundo as etapas do processo de matematização de Almeida (2009), é o início do processo de matematização e está associada à matematização horizontal. Como os alunos dispunham de informações sobre o preço médio da gasolina no Brasil, eles passaram a identificar relações entre as características da situação e os conceitos matemáticos e dessa forma a matematização presente no esquema de Almeida e Silva (2012) pode ser vista.

Tendo elaborado um problema e de posse de informações consideradas necessárias pelo grupo para respondê-lo, as hipóteses e as variáveis foram elaboradas (Quadro 10).

Quadro 10 – Hipóteses e variáveis consideradas pelo grupo

Hipótese 1: O Brasil não passará por nenhuma crise de combustível fóssil. **Hipótese 2:** O preço do modelo não pode fornecer um número muito além de R$ 2,73.
• $t =$ anos que se passaram $(ano\ -\ 2001)$; • $y =$ preço da gasolina comum ao consumidor.

Fonte: Trabalho final do grupo 2

A elaboração de hipóteses está presente tanto na matematização da modelagem matemática em Almeida e Silva (2012), quanto no processo de matematização de Almeida (2009), esse último como parte da estratégia que resolve o problema e estando associada à matematização horizontal.

Os alunos utilizaram o software Curve Expert e os dados presentes na tabela do Quadro 9 com o intuito de que o software fornecesse uma função que se ajustasse aos dados. Tal função foi a função logarítmica. A partir desse momento, os alunos definiram que a função utilizada seria a logarítmica e passaram a escolher quais dois pontos dos dados da tabela presente no Quadro 9 utilizariam para encontrar o melhor ajuste. Por meio do software concluíram que os anos 2003 e 2008 seriam os que melhor se adequariam aos dados.

Karla: aí olhando o gráfico que o Curve gerou os anos que ficaram mais próximos da linha da função que o programa gerou foram 2003 *e* 2008*. Daí então, para modelar foram escolhidos esses anos.* (fala da aluna Karla na apresentação do trabalho final).

Inicialmente o grupo utilizou a função $y = a + b\ln(ano)$, porém perceberam que o preço médio da gasolina em cada ano seria muito diferente do preço real, presente no Quadro 9 e, por isso, o modelo não seria adequado. Passaram a utilizar a função $y = a + b\ln(ano - 2001)$, como descrito no trabalho escrito no Quadro 11.

Quadro 11 - Justificativa pela escolha da função logarítmica

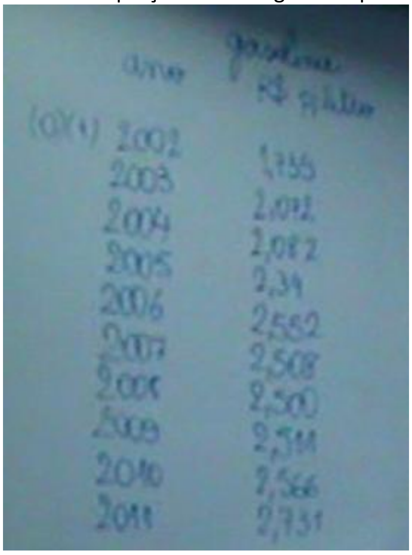
Analisando o gráfico plotado pelo software Curve Expert verificou-se que os anos 2003 e 2008 tinham erros menores em relação aos valores estimados pelo gráfico, então partiu-se para a modelagem tendo como base a função genérica $y = a + b\ln(ano)$. Quando utilizou-se os anos como variável independente, o ln dos anos resultavam em valores muito próximos e também o modelo tinha um erro grande. Para resolver esse problema decidiu-se trabalhar com a variação dos anos usando a fórmula genérica $y = a + b\ln(ano - 2001)$.

Fonte: Trabalho final do grupo 2

A mudança de representação, da representação gráfica para a representação algébrica, realizada pelos alunos, nos remete à representação de uma relação em uma fórmula presente no processo de matematização descrito por Jzn (1987) e associada à matematização vertical. Já as diferentes representações sugerem que os alunos desejavam usar diferentes modelos, o gráfico e o algébrico, que são associados à matematização vertical tanto por Jzn (1987) quanto por Rico (2006). A representação algébrica do modelo sugere a síntese presente no esquema de Almeida e Silva (2012) e ao trabalho matemático presente em Ferri (2006), pois os alunos explicitaram que reconheceram a expressão geral de uma função logarítmica e o conceito matemático logaritmo.

Os alunos indicaram que utilizando a função $y = a + b\ln(ano)$ o erro seria grande e como os dados do preço médio da gasolina no Brasil que dispunham iniciava no ano 2002, decidiram associar um índice a cada ano, sendo que o ano 2002 foi associado ao índice 1 por não ser possível calcular o logaritmo do valor zero (Figura 75).

Figura 75 - Apresentação dos dados do preço médio da gasolina para a turma e para a professora



Fonte: Registro escrito da aluna Inês realizado no quadro

Fica evidente o conhecimento matemático do conteúdo logaritmo pelos alunos quando a aluna Inês explicou, na apresentação do trabalho final, a associação do índice zero ao ano 2002.

Inês: ...eu vou tentar trabalhar com índice que nem vocês estavam trabalhando e que nem a gente trabalhou nas outras, trabalhar com índice né. Ou a gente trabalha esse aqui com zero ou a gente trabalha com um né? Então a gente pode começar o ano menos 2002 *ou o ano menos* 2001*. Aí põe lá,* 2002 *menos* 2002 *vai dar zero, não existe né. Então por isso que a gente trabalhou com ano menos* 2001*. Porque daí esse vai ser o ano um,* 2002 *menos* 2001*, o* ln *vai ser um, o* ln *de um é zero, daí ficou mais tranquilo de resolver. Por isso que a gente pegou o índice ano menos* 2001*.*

Além disso, a percepção dos alunos de que a mudança realizada na expressão algébrica poderia ser suficiente para fazer com que o modelo matemático fosse mais próximo dos dados reais, novamente, nos remete à transição nomeada síntese por Almeida e Silva (2012) e ao trabalho matemático de Ferri (2006), Blum e Leiβ (2006) e Maaβ (2006). A mudança de $y = a + b\ln(ano)$ para $y = a + b\ln(ano - 2001)$ evidencia um refinamento e ajuste de modelos que é associado por Rico (2006) e por Jzn (1987) à matematização vertical.

Visando elaborar um modelo matemático e tendo decidido que usariam os anos de 2003 e 2008 o grupo montou o sistema linear.

$$\begin{cases} 2{,}072 = a + b\ln(2003 - 2001) \\ 2{,}500 = a + b\ln(2008 - 2001) \end{cases}$$

Resultando em valores $a = 1{,}8353$ e $b = 0{,}3416$ e o modelo matemático elaborado é visto no Quadro 12.

Quadro 12 - Modelo matemático do grupo para o preço médio da gasolina

$y = 1{,}8353 + 0{,}3416 ln(ano - 2001)$

Fonte: Trabalho final do grupo 2

A partir do momento em que o grupo decidiu que a função logarítmica seria adequada para descrever os dados do problema até a explicitação do modelo no Quadro 12, identificamos a presença da matematização vertical.

Quando os alunos decidem utilizar a função logarítmica $y = a + b\ln(ano - 2001)$ ao invés da função $y = a + b\ln(ano)$ identificamos o refinamento e ajuste de modelos destacados por Jzn (1987) e associado à matematização vertical. Além disso, os alunos utilizam diferentes representações para o modelo elaborado (Figura 76). A mudança da utilização do $ano - 2001$ em vez somente do ano, foi utilizada pelos alunos como um recurso matemático, que teve como base características da situação, pois o ano 2001 é proveniente da situação. Dessa forma, associamos a transição matematização que é “mediada por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente estas características” (ALMEIDA; SILVA, 2012, p. 1021).

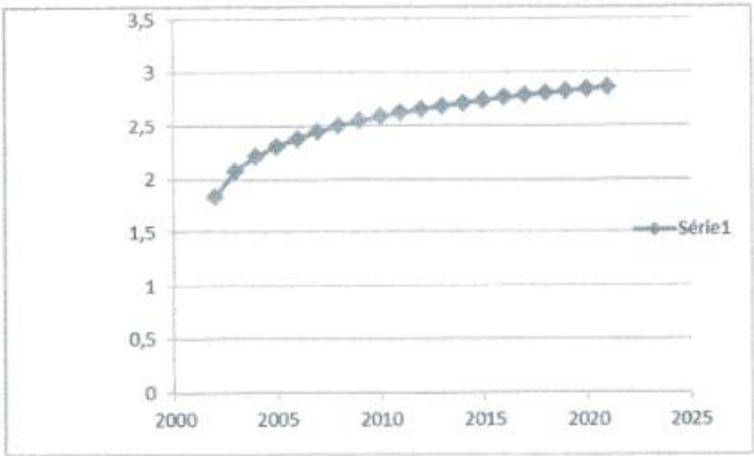
Figura 76 - Diferentes representações para o modelo matemático obtido pelo grupo 2

Portanto, a fórmula geral do modelo é:
y = 1,8353+0,3416*ln(ano-2001)

Registro algébrico

Ano	Preço Real	Preço estimado pelo modelo	Erro Relativo
2002	1,735	1,8325	5,88%
2003	2,072	2,0721	1,52%
2004	2,082	2,2106	3,68%
2005	2,34	2,3089	3,85%
2006	2,552	2,3851	3,06%
2007	2,508	2,4474	1,75%
2008	2,5	2,5	0,16%
2009	2,511	2,5456	1,6%
2010	2,566	2,5859	3,43%
2011	2,731	2,6219	5,3%
2012		2,6544	

Registro tabular



Registro gráfico

Fonte: Trabalho escrito do grupo 2

A Figura 76 ilustra as diferentes representações que os alunos utilizaram para o modelo obtido. Isso é destacado por Jzn (1987) quando trata da matematização vertical. Com relação à modelagem matemática o uso de representações, conhecimentos, técnicas e uso de recursos tecnológicos nos remetem ao que Almeida e Silva (2012) nomeiam síntese.

5.4 ANÁLISE GLOBAL

Visando responder nosso problema de pesquisa que propõe vislumbrar aproximações considerando a matematização como caracterizada nos esquemas de modelagem matemática e a matematização como identificada em um contexto mais amplo, no âmbito da Educação Matemática, desenvolvemos um curso extracurricular em que foram desenvolvidas atividades de modelagem matemática com alunos de uma universidade pública. Com base nos registros escritos do desenvolvimento das atividades, respostas a questionários e/ou entrevista referentes à atividade, bem como o registro em áudio e/ou vídeo do desenvolvimento das atividades, identificamos, nas análises específicas, elementos da matematização realizada pelos alunos.

O primeiro ponto a se destacar é que, no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática desenvolvidas com os alunos participantes do curso, o processo de matematização sempre esteve presente. Nas análises específicas podemos verificar que em todas as atividades desenvolvidas no curso existe a presença tanto do processo de modelagem matemática, pois as atividades desenvolvidas estavam em consonância com a modelagem matemática, quanto o processo de matematização.

Pelas análises específicas realizadas neste trabalho percebemos o caráter dinâmico da modelagem matemática. Esse aspecto é destacado na literatura por Ferri (2006) que afirma que os alunos podem passar por uma etapa da modelagem matemática uma única vez ou várias vezes e que também é possível que o aluno não percorra alguma das etapas. As etapas podem ser compreendidas como áreas que se pode percorrer de uma situação problemática a uma solução para um problema inicialmente proposto e relacionado à situação. Esse caminho que os alunos fazem pelas diferentes etapas é chamado, por Ferri (2006), de rotas de modelagem e nessas rotas fica evidente o caráter dinâmico do processo de modelagem matemática.

Com base em nossas análises, percebemos que no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática os alunos percorreram as duas componentes, horizontal a vertical, do processo de matematização. Além disso, ficou evidente que a matematização realizada pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática apresenta um caráter dinâmico em que os alunos caminham pelas duas componentes, horizontal e vertical, do processo de matematização de maneira não linear. Ou seja, em alguns momentos quando os alunos estavam realizando a matematização vertical necessitavam retornar à matematização horizontal.

No desenvolvimento da atividade *Reciclando Garrafas PET* percebemos esse caráter dinâmico tanto da modelagem matemática quanto da matematização. As alunas do grupo 1 elaboraram um modelo matemático que descrevia as taxas de reciclagem de PET no Brasil e no Japão utilizando uma função exponencial. Os cálculos realizados pelas alunas até obterem um modelo matemático pode ser associado à matematização vertical, pois elas necessitaram somente do conhecimento da expressão geral de uma função exponencial e de sistemas lineares para elaborar um modelo. Porém, quando realizaram a validação dos modelos obtidos o resultado não foi satisfatório, pois os valores encontrados para as taxas de reciclagem em cada ano eram bastante diferentes dos valores reais que as alunas tinham.

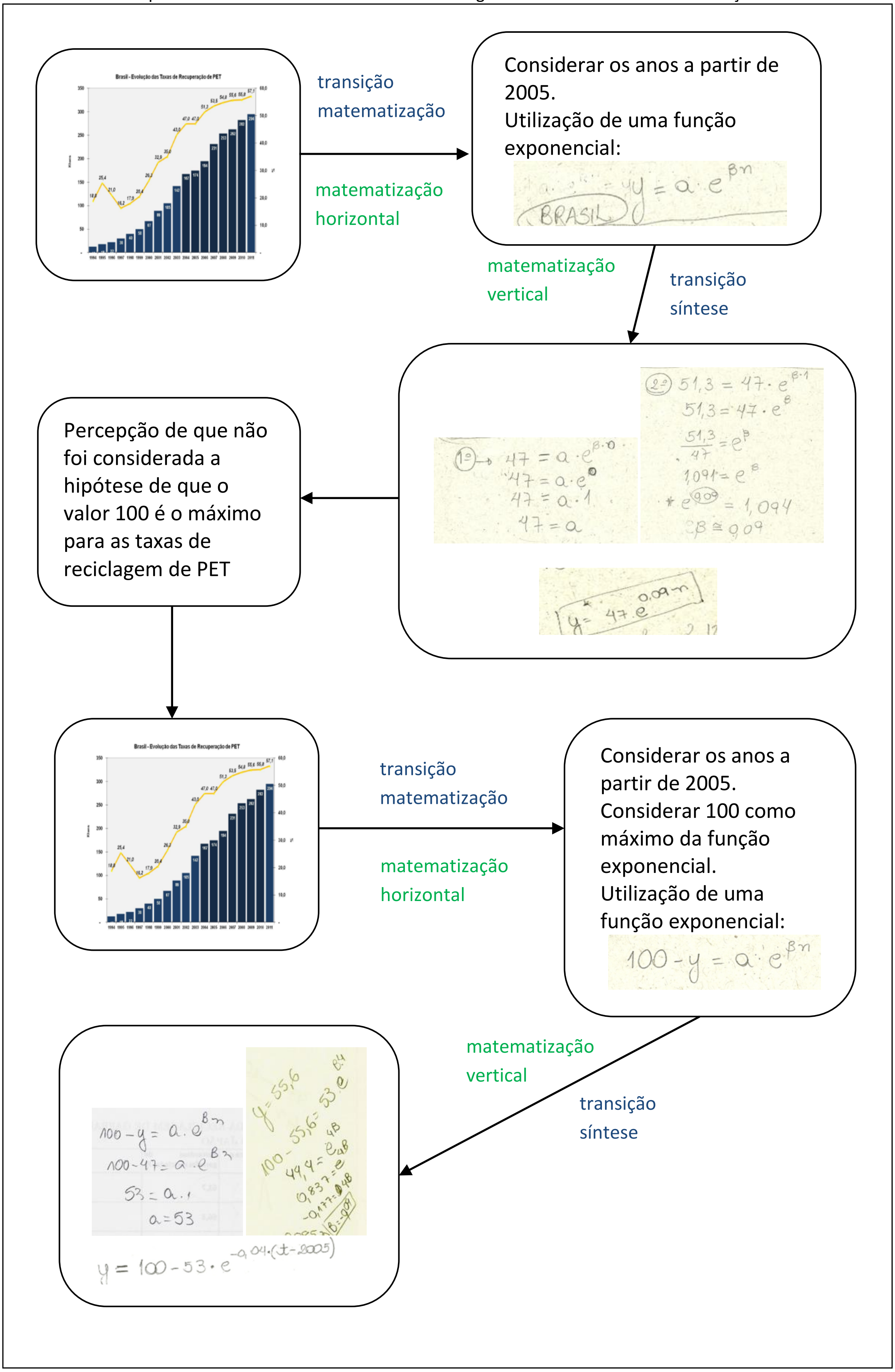
Nesse momento foi necessário voltar à situação e compreender que em se tratando de reciclagem de garrafas PET, o valor 100 deve ser considerado como o valor máximo que se consegue reciclar e assim, por esse retorno ao contexto da situação a matematização horizontal se fez presente. Depois de considerar o valor 100 como máximo da função exponencial, as alunas voltaram a elaborar um modelo matemático e, novamente, foram necessários conhecimentos matemáticos, sem a necessidade de referência ao contexto do problema e por isso, retornaram a realizar a matematização vertical. O Quadro 13 ilustra esse trecho do caminhar das alunas do grupo 1 pelo processo de matematização e pela modelagem matemática.

No desenvolvimento da atividade *Distância entre a TV e o Sofá* também podemos perceber o caráter dinâmico do processo de modelagem matemática e também do processo de matematização. Os alunos do grupo 2, inicialmente, buscaram informações sobre o assunto e decidiram quais hipóteses seriam consideradas na elaboração de um modelo matemático. Após alguns cálculos perceberam que um modelo matemático poderia ser escrito por meio de uma função do primeiro grau. Essas decisões dos alunos podem ser associadas à matematização horizontal.

A partir de uma tabela elaborada pelos alunos foi possível montar um sistema linear, visando obter a função do primeiro grau que descreveria os dados da tabela. Como foram necessários conhecimentos matemáticos, agora desvinculados do contexto, temos a matematização vertical. Os alunos realizaram uma validação para esse primeiro modelo e concluíram que o modelo matemático obtido não era adequado à situação, pois perceberam que com a distância calculada pelo modelo matemático seria cansativo assistir à TV. Por esse motivo, novamente, buscaram informações e assim, retornam à matematização horizontal. O Quadro 14 ilustra esse caminho percorrido pelos alunos do grupo 2 no desenvolvimento da atividade *Distância entre a TV e o Sofá*.

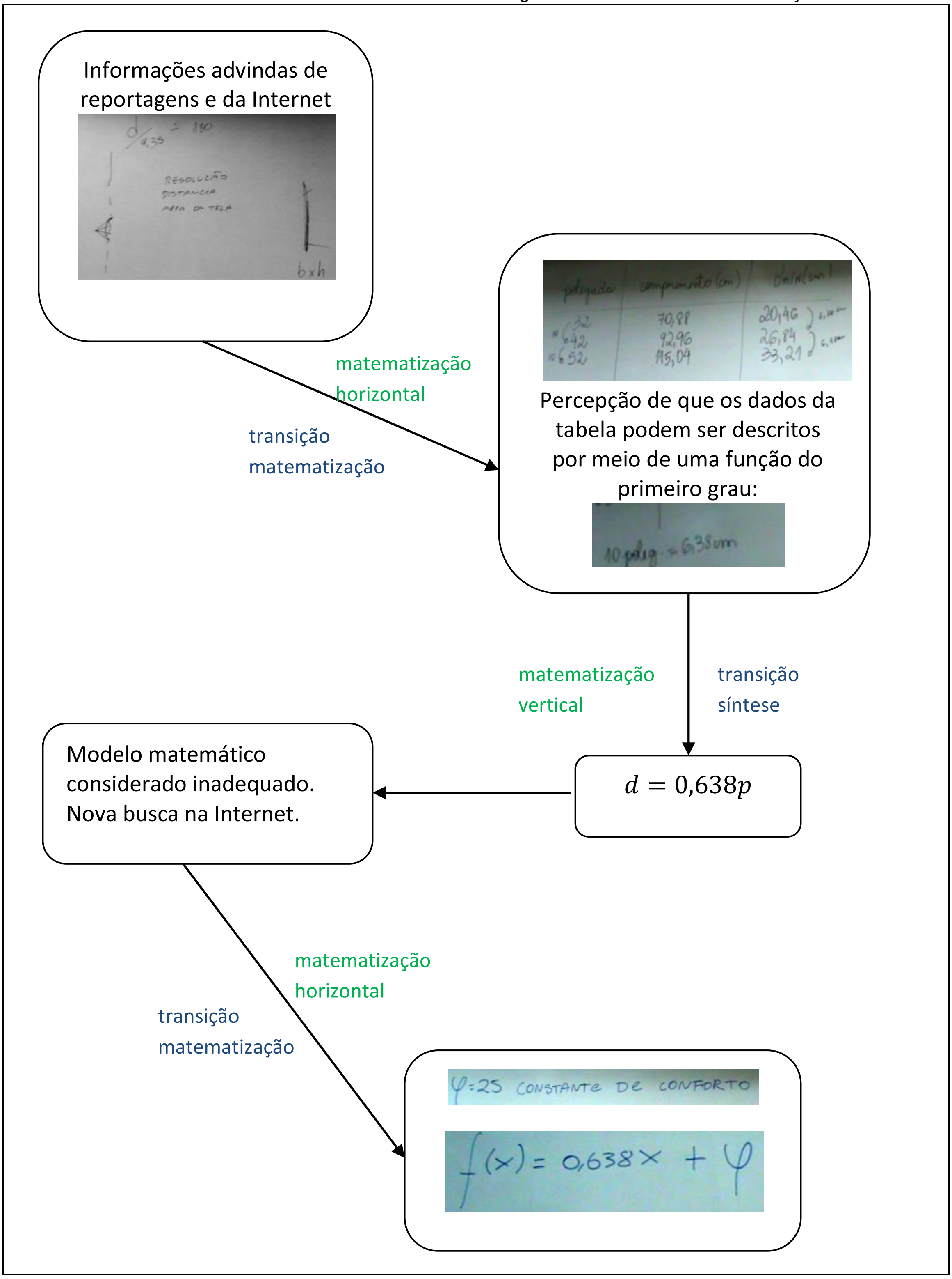
Durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática foi possível perceber que os alunos passaram por todas as etapas e por todas as transições do processo de modelagem matemática e que foram ilustradas nos esquemas apresentados em 3.3.

Quadro 13 - Parte do caminho percorrido pelo grupo 1 no desenvolvimento da atividade Reciclando Garrafas PET que evidencia o caráter dinâmico da modelagem matemática e da matematização



Fonte: Elaborado pela autora

Quadro 14 - Parte do caminho percorrido pelo grupo 2 no desenvolvimento da atividade Distância entre a TV e o Sofá evidenciando o caráter dinâmico da modelagem matemática e da matematização



Fonte: Elaborado pela autora

Com relação aos esquemas de modelagem matemática, a etapa inicial trata de uma situação problemática, ou seja, tem-se uma situação real, não estruturada, sem um problema formulado e com toda a complexidade que temos em nossa realidade. É nas etapas e nas transições seguintes que são realizadas as devidas simplificações da realidade, com o intuito de selecionar aspectos da situação que pareçam essenciais para que uma abordagem matemática possa ser realizada. Já o processo de matematização inicia com um problema formulado e um pouco mais estruturado. Desse modo, pela literatura do processo de matematização, parece que nesse processo o aluno não passa por etapas referentes à compreensão e estruturação da situação em estudo.

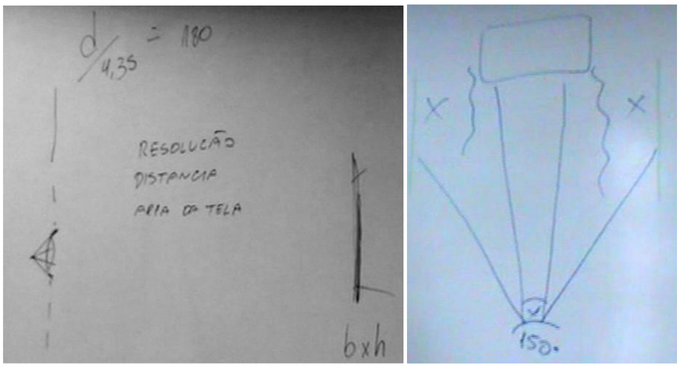
Porém, em nossas análises específicas percebemos que os alunos passaram por etapas referentes ao processo de matematização mesmo quando estavam nas transições compreensão e estruturação da modelagem matemática. Essa evidência foi percebida no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática do primeiro e segundo momento de inserção de atividades de modelagem matemática.

Essa aproximação entre as transições compreensão e estruturação, da modelagem matemática, e de etapas do processo de matematização estão descritas no Quadro 15.

Quadro 15 - Aproximação entre o processo de matematização e as transições compreensão e estruturação da modelagem matemática

Grupo 1 (Atividade: Reciclando Garrafas PET): *Valéria: olhando isso aqui, o Brasil tem uma evolução. O Japão também deve ter.* *Professora: isso aí.* *Valéria: mas como é que eu vou... eu só sei a do Brasil. A do Japão eu sei que ele é...eu não sei se ele vai... está aumentado.* *Professora: e se você tivesse o do Japão? O que ia acontecer?* *Valéria: aí eu saberia.* *Professora: aí tu poderias fazer né?* *Valéria: é, por exemplo, daí se o Japão tivesse aumentado menos que o Brasil... com certeza em algum momento, o Brasil ultrapassaria, agora caso contrário, o Japão continuasse aumentando mais ou no mesmo tanto que o Brasil, como tá pela frente nunca ia acontecer. Mas eu não tenho o do Japão.*
Grupo 2 (Atividade: Reciclando Garrafas PET): *I: dos 294 do que...* *Professora: não, o 294 ele reciclou. E isso equivale a 57,1. Você não sabe o total de, de garrafas PET. Você tem que fazer a conta pra saber.* *Inês: 57,1 o quê?* *Professora: 57,1%. É porcentagem. Ali.* *José: não tem a quantidade de produção?* *Professora: não. Se você quiser saber a quantidade de produção você tem que calcular. Ó, 294 é quanto se reciclou, certo? E isso equivale a 57,1% do que se produziu...* *José: ah tá, tá.* *Inês: ah tá.* *José: é fácil achar.*

Grupo 2 (Atividade: Distância entre a TV e o Sofá):



Fonte: Elaborado pela autora

Os dois diálogos destacados no Quadro 15 são referentes ao desenvolvimento da atividade *Reciclando Garrafas PET*, que no curso fez parte do primeiro momento de inserção de atividades de modelagem matemática. Já as figuras presentes no Quadro 15 são referentes ao desenvolvimento da atividade *Distância entre a TV e o Sofá* e que no curso fez parte do segundo momento de inserção de atividades de modelagem matemática. Com relação à atividade do terceiro momento não percebemos uma aproximação entre o processo de matematização e as transições compreensão e estruturação da modelagem matemática.

Considerando essas aproximações entre o processo de matematização e as transições compreensão e estruturação presente nos esquemas de modelagem matemática e os momentos de inserção de atividades de modelagem matemática relembramos que, as características comuns ao primeiro e segundo momentos de inserção de atividades de modelagem matemática são que, em ambos é responsabilidade do professor trazer aos alunos um tema e um problema. Além disso, no primeiro momento é o professor quem fornece as informações que pareçam mais importantes para o desenvolvimento da atividade e, dessa forma, é o professor quem realiza a estruturação da situação, pois é nessa transição que se decide quais informações parecem mais importantes. Porém, apesar disso, parece que os alunos necessitam passar pela compreensão e estruturação da situação, mesmo que tais transições sejam realizadas pelos alunos tendo como base informações que o professor lhes apresenta e que foram previamente estruturadas.

Dessa forma, na atividade *Reciclando Garrafas PET*, os alunos sentiram a necessidade de compreender a figura apresentada pela professora, a qual fornecia informações sobre as taxas de reciclagem de PET no Brasil, presente no diálogo do grupo 2 (Quadro 15). Além disso, depois de compreender a situação, foi necessário estruturá-la, na tentativa de encontrar um caminho que fosse possível de ser percorrido para se chegar a uma resposta para o problema, presente no diálogo do grupo 1 (Quadro 15).

Já no segundo momento de inserção de atividades de modelagem matemática, são os alunos que buscam tais informações e com isso são eles que realizam a estruturação da situação, como podemos ver nas figuras do grupo 2 presentes no Quadro 15.

Muitas etapas do processo de matematização foram percebidas no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática realizadas no curso e, com isso, parece que o processo de matematização é parte integrante do processo de modelagem matemática. Porém, destacamos que, em nossas análises específicas, a generalização presente no processo de matematização e destacada por Jzn (1987), Luccas e Batista (2011) e Rico (2006) não foi percebida, pelo menos explicitamente, no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

A generalização requer que o aluno tenha como ponto de partida uma situação particular e chegue a uma situação geral. Luccas e Batista (2011) exemplificam essa generalização, conforme Figura 77.

Figura 77 - Exemplo de generalização

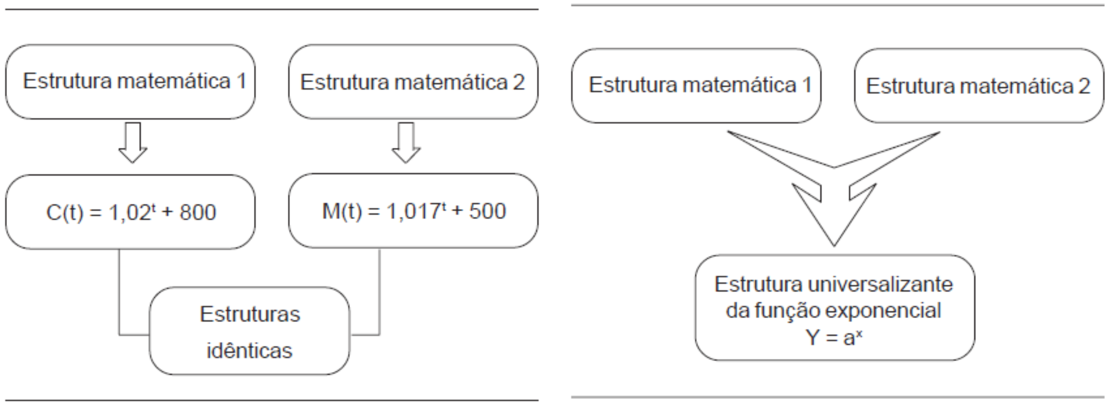


Figura 1. Estruturas matemáticas idênticas. **Figura 2.** Generalização da função exponencial[11].

Fonte: Luccas e Batista (2011, p.462)

No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, quando os alunos usaram a função exponencial, tiveram como ponto de partida a expressão geral das funções utilizadas e chegaram a uma expressão particular, que descrevia a situação específica que estavam estudando. Assim, os alunos não realizaram a generalização, de maneira explícita, conforme descrita por Luccas e Batista (2011) e expressa na Figura 77.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, estudamos o tema modelagem matemática na Educação Matemática salientando pontos considerados importantes para a compreensão do assunto. Esse estudo possibilitou encontrar uma diversidade de esquemas de modelagem matemática. Esses esquemas são ilustrações que fornecem uma visão geral de como ocorre o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Um dos elementos presentes nos esquemas de modelagem matemática é a matematização, que nesse contexto é compreendida como uma das transições do processo de modelagem matemática. Porém, a matematização é caracterizada também fora da modelagem matemática, em um contexto mais amplo na Educação Matemática.

A busca pela compreensão da matematização no âmbito da Educação Matemática levou-nos à compreensão da matematização como um processo e organizada em duas componentes: horizontal e vertical. Como resultado desse estudo teórico, tínhamos a visão da matematização como um processo, no âmbito da Educação Matemática, e como uma transição entre etapas como ação cognitiva, no processo de modelagem matemática.

Dessas duas compreensões da matematização emergiu nosso problema de pesquisa que busca aproximações considerando a matematização como caracterizada nos esquemas de modelagem matemática e a matematização como identificada em um contexto mais amplo, no âmbito da Educação Matemática. Tais aproximações pareciam existir quando realizamos nosso estudo teórico, baseado nos trabalhos de Blum e Leiβ (2005), Maaβ (2006), Ferri (2006), Almeida e Silva (2012), Van den Heuvel-Panhuizen (2003), Luccas e Batista (2011), Almeida (2009), Almeida e Buriasco (2011), Rico (2006) e no documento do Ministério da Educação de Portugal (GAVE, 2005).

Com o intuito de obter mais informações sobre as aproximações entre a modelagem matemática e o processo de matematização, desenvolvemos um curso de modelagem matemática composto, ao final, por oito alunos de uma universidade pública em que foram coletados dados por meio de questionários, entrevista, registros escritos dos alunos durante o desenvolvimento das atividades, bem como gravações em áudio e em vídeo dos encontros do curso em que as atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas.

A partir dos dados coletados do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, realizamos as análises específicas, identificando elementos da matematização realizada pelos alunos durante o desenvolvimento de três atividades de modelagem matemática. Das três atividades analisadas neste trabalho, duas foram elaboradas pela pesquisadora, que no curso também atuou como professora, e a terceira atividade foi o trabalho final de um dos grupos de alunos.

No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática percebemos que os alunos passaram por todas as etapas e todas as transições que são ilustradas nos esquemas de modelagem matemática. Algumas vezes os alunos passaram por uma etapa uma única vez, em outras passaram pela mesma etapa mais de uma vez e em outras ocasiões não passaram por alguma das etapas. Esse movimento dos alunos pelas etapas do processo de modelagem matemática, ilustrado nos esquemas, evidencia o caráter dinâmico do processo de modelagem matemática, indo ao encontro das chamadas rotas de modelagem caracterizadas por Ferri (2006).

Conforme os alunos caminhavam pelas etapas da modelagem matemática, também identificamos etapas referentes ao processo de matematização e com isso, percebemos que quando se realiza uma matematização em que as componentes horizontal e vertical estão presentes no mesmo problema, o processo de matematização torna-se dinâmico. Essa dinamicidade do processo de matematização, quando se percebe as componentes horizontal e vertical foi evidenciado em nosso estudo.

O processo de matematização inicia com um problema real e já estruturado e por isso, inicialmente, imaginávamos que as transições compreensão e estruturação da situação, presentes nos esquemas de modelagem matemática, não se aproximariam do processo de matematização. Porém, no desenvolvimento das atividades *Reciclando Garrafas PET* e *Distância entre a TV e o Sofá*, referentes ao primeiro e segundo momentos de inserção de atividades de modelagem matemática respectivamente, percebemos aproximações entre etapas do processo de matematização e as transições compreensão e estruturação da modelagem matemática.

Vale destacar a importância do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática para a formação de cidadãos críticos. No desenvolvimento da atividade *Reciclando Garrafas PET*, a resposta matemática encontrada por meio do modelo matemático não se confirma quando comparada com os dados reais.

Na atividade *Distância entre a TV e o Sofá*, também é possível questionar com os alunos sobre questões subjetivas quando se deseja decidir qual a distância se deve ficar da TV. Muitas pessoas gostam de ficar mais próximas da TV, outras mais longe. Dessa forma, apesar de existirem muitos modelos matemáticos para responder essa questão, a subjetividade do modelo matemático ficou evidente para os alunos nessa atividade.

Atividades como essas podem tornar mais claro aos alunos que nem sempre as soluções resultantes de um modelo matemático são as mais adequadas, aspecto já destacado e exemplificado em Skovsmose (2001), e mostram a importância que a modelagem matemática pode assumir no desenvolvimento de cidadãos críticos.

O grupo 2, desde o início, pensou em estudar problemas relacionados à combustíveis, pois sabem que o petróleo não é renovável e isso os motivou para tentar descobrir, por meio de um modelo matemático, quando as reservas de petróleo no Brasil se extinguiriam. O interesse desses alunos mostrou que eles conhecem algumas questões atuais de nossa sociedade.

Nosso trabalho traz aproximações entre modelagem matemática e matematização, que podem ser vistas primeiramente na teoria, e que neste trabalho, foram evidenciadas pela análise do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática com alunos do Ensino Superior. Algumas das aproximações que chegamos a partir das análises já haviam sido percebidas pela teoria outras, porém, somente se tornaram perceptíveis a partir da análise dos dados coletados.

Como indicativo de trabalho futuro se poderia analisar a aprendizagem dos alunos quando envolvidos em atividades que requerem e/ou viabilizam a matematização.

Como pesquisadora, este trabalho proporcionou um aprofundamento com relação à modelagem matemática e à matematização. Foi possível compreender melhor cada uma das etapas e das transições do processo de modelagem matemática, assim como o processo como um todo.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGÊNCIA NACIONAL DO PETRÓLEO, GÁS NATURAL E BIOCOMBUSTÍVEIS. Anuário estatístico brasileiro do petróleo, gás natural e biocombustíveis. 2011. Disponível em: http://www.brasilcom.com.br/_dados_estatisticos/arquivos/anuario2011.pdf. Acesso em: 24 out 2012.

ALMEIDA, V. L. C. de. **Questões não-rotineiras: a produção escrita de alunos da graduação em Matemática**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ALMEIDA, L. M. W. ; BRITO, D. S.. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência e Educação** (UNESP), v. 11, p. 1-16, 2005.

ALMEIDA, V. L. C. de; BURIASCO, R. L. C. Processo de matematização: investigação de registros escritos de alunos de licenciatura e bacharelado em Matemática. **Alexandria** (UFSC), v. 4, n. 1, p. 27-43, 2011.

ALMEIDA, L. M. W. ; DIAS, M. R.. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema. Boletim de Educação Matemática** (UNESP. Rio Claro. Impresso), RIO CLARO, v. ano 17, n. 22, p. 19-36, 2004.

ALMEIDA, L. M. W. ; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência e Educação** (UNESP. Impresso), v. 18, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. W. ; SILVA, K. P. ; VERTUAN, R. E.. **Modelagem matemática na educação básica**. 1 ed. São Paulo: Contexto, 2012. 156 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DA INDÚSTRIA DO PET. **8º Censo da Reciclagem de PET no Brasil**. 2011. Disponível em: http://www.abipet.org.br/index.html?method=mostrarDownloads&categoria.id=3 . Acesso em: 03 jul. 2012.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DA INDÚSTRIA DO PET. **6º Censo da Reciclagem de PET no Brasil**. 2011. Disponível em: http://www.abipet.org.br/index.html?method=mostrarDownloads&categoria.id=3 . Acesso em: 03 jul. 2012.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DA INDÚSTRIA DO PET. **5º Censo da Reciclagem de PET no Brasil**. 2011. Disponível em: http://www.abipet.org.br/index.html?method=mostrarDownloads&categoria.id=3 . Acesso em: 03 jul. 2012.

BARBOSA, J. C. modelagem matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.

BARBOSA, J. C.. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. **Alexandria** (UFSC), v. 2, n. 2, p. 69-85, jul 2009.

BASSANEZI, R. C.. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2009. 389 p.

BERLINGOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A matemática através dos tempos**. Tradução de Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2008. 267 p. Tradução de: Math through the ages: a gentle history for teachers and others.

BICUDO, M. A. V.. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, Marcelo C.; ARAUJO, Jussara L. (org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, p. 99-112, 2004. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BIEMBENGUT, M. S.. 30 anos de modelagem matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria** (UFSC), v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BLUM, W. ; LEIβ, D.. “Filling up” – the problem of independence – preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks. In: EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION IV. Sant Feliu de Guíxols, Espanha, 17 a 21 fev 2005.

BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, O.. A ideologia da certeza em Educação Matemática. In: SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia.** 3 ed. Campinas: Papirus, 2001. p. 127-148.

CHAVES, M. I. A.. Elaboração de atividades de modelagem. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VII, 2011, Belém. **Anais**... Belém: 2011.

Dicionário Priberam da Língua Portuguesa. Disponível em: http://www.priberam.pt/dlpo/. Acesso em: 08 fev. 2013.

D’AMBROSIO, U.. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 19 ed. Campinas: Papirus, 1996. 120 p.

D’AMBROSIO, U.. Mathematical Modeling: cognitive, pedagogical, historical and political dimensions. **Journal of mathematical modelling and application**. v.1, n. 1, p. 89-98, 2009.

FERRI, R. B.. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 38, n. 2, p 86-95, 2006.

FREUDENTHAL, H.. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics**, v.1, n. ½, Mai 1968, p. 3-8.

FREDENTHAL, H.. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics,** v. 3, n. ¾, Jun 1971, p. 413-435.

FREUDENTHAL, H.. **Revisiting Mathematics Education**. China Lectures, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1991.

GAVE – Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação. **PISA 2003 – Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de Literacia Matemática.** 1 ed. Lisboa: Ministério da Educação, 2005. 106 p.

GOWERS, T. **Matemática: uma breve introdução**. Tradução de Laura Silva e Jorge Nuno Silva.1 ed. Gradiva, 2008. 168 p. Tradução de: Mathematics: a Very Short Introduction.

GRIGORAS, R. Modelling in environments without numbers – a case study. In: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, VI, 2009, France. **Anais…** France, 2009.

HERDEIRO, C.. Uma breve história do universo: do big bang ao universo acelerado. **Gazeta de Física**, Coimbra, v. 29, f. 3, p. 22-27, 2006.

JABLONKA, E; GELLERT, U. Mathematisation-demathematisation. In: JABLONKA, E; GELLERT, U (org.). **Mathematisation and Demathematisation: social, philosophical and educational ramifications**. Holanda: Sense Publisher, p. 1-18, 2007. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

JZN, J. L. **Mathematics, insight and meaning**: teaching, learning and testing of mathematics for the life and social sciences. Rijksuniversiteit Utrecht: Vakgroip Onderzock Wiskundeonderwijs en Onderwijscomputercentrum, 1987.

KAISER, G. Modelling and modelling competencies in school. In: THE INTERNATIONAL COMMUNITY OF TEACHERS OF MATHEMATICAL MODELLING AND APPLICATIONS, 12, 2005, Londres. **Anais…** France, 2005.

LUCCAS, Simone; BATISTA, Irinéa de Lourdes. A importância da contextualização e da descontextualização no Ensino de Matemática: uma Análise Epistemológica. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática, XII, 2008, Rio Claro. Anais... Rio Claro, 2008.

LUCCAS, S.; BATISTA, I. L.. O papel da matematização em um contexto interdisciplinar no Ensino Superior. **Ciência e Educação** (UNESP), v. 17, n. 2, p. 451-468, 2011.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A.. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986. 99 p.

MAAβ, K. What are modeling competencies? **The International Journal on Mathematics Education**, v. 38, n. 2, p. 113-142, 2006.

Olhar digital: veja o que levar em conta na hora de escolher sua nova TV. Disponível em: http://olhardigital.uol.com.br/produtos/central_de_videos/veja-o-que-levar-em-conta-na-hora-de-escolher-sua-nova-tv. Acesso em: 26 set. 2012.

RICO, L.. **La competencia matemática en PISA**. PNA, 1(2), p. 47-66. 2006.

SANTOS, C. A..**O Experimento de Eratóstenes**. 2002. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/historia/eratostenes.html. Acesso em: 20 nov. 2012.
Sinopse do Censo Demográfico 2010. Disponível em: http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/censo2010/tabelas_pdf/Brasil_tab_1_4.pdf. Acesso em: 10 jan. 2013.

SKOVSMOSE, O.. Competência democrática e o conhecer reflexivo na matemática. In: SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia.** 3 ed. Campinas: Papirus, 2001. p. 65-96.

THAMIRES, G. P. **Qual é a distância ideal entre o sofá e a TV?** Disponível em: http://www.burohaus.com.br/blog/qual-e-a-distancia-ideal-entre-o-sofa-e-a-tv. Acesso em: 29 set. 2012.

TREFFERS, A. Wiskobas and Freudenthal Realistic Mathematics Education. **Educational Studies in Mathematics**, v, 25, n. ½, p. 89-108, 1993

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.. The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**. 2003, p. 9-35.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), Shaping the future of mathematics education: PROCEEDINGS OF THE 33RD ANNUAL CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA (pp. 1-25), 2010. Fremantle: MERGA.

VARGAS, M.. História da matematização da natureza. **Estudos avançados**, São Paulo, v. 10, n. 28, p. 249-276, dez 1996.

Veja o novo mapa do Congresso e conheça a distribuição partidária. Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br/poder/823736-veja-o-novo-mapa-do-congresso-e-conheca-a-distribuicao-partidaria.shtml. Acesso em: 10 jan. 2013.

8 ANEXOS

ANEXO 1

Aeroportos e a Copa de 2014.

1. Introdução

O país conhecido internacionalmente como o “país do futebol”, o Brasil, sediará a Copa de 2014. Devido a este acontecimento, muitas são as obras e as providências que estão sendo tomadas para que a Copa de 2014 seja um evento bem sucedido, como reformas e ampliação em estádios; adequação da rede hoteleira, tanto em quantidade como em qualidade; transporte, terrestre e aéreo; entre outras.

Em relação ao transporte aéreo, parece que as opiniões, relacionadas às obras que estão sendo realizadas, divergem. Em reportagem veiculada pela Folha.com, em agosto de 2011, o coordenador de Infraestrutura do Ipea (Instituto de Pesquisa Econômica e Aplicada), Carlos Campos, disse que “as obras de ampliações dos aeroportos para a Copa do Mundo não darão conta da demanda em 2014 em pelo menos dez locais” e ainda, “o atual plano de investimento não vislumbrou uma projeção adequada para o aumento da demanda”. Tais declarações são resultado de uma projeção de um crescimento de passageiros de 10% ao ano. Já o presidente da Infraero, Gustavo do Vale, na mesma reportagem, diz que “‘respeita’ as projeções do Ipea, mas defendeu os cálculos da estatal”, e reforçou essa ideia, “o que posso garantir que os investimentos vão atender não só a demanda da Copa, mas a de hoje e a dos brasileiros em 2014. Projeção é assim mesmo: não se faz uma projeção de três ou quatro anos esperando que ela seja rigorosamente o que se projetou”, afirma Gustavo do Vale.

Diante dessas divergências de opiniões e considerando que Curitiba será uma das cidades sede da Copa de 2014, elaboramos o nosso problema.

Problema 1: As obras realizadas no aeroporto Afonso Pena, em Curitiba, serão suficientes para suprir a demanda de passageiros no ano de 2014, sem contar com o aumento de passageiros devido a Copa de 2014?

Problema 2: Se a resposta ao problema 1 for sim. As obras serão suficientes para o aumento na demanda devido à Copa de 2014?

Para responder os problemas, definimos algumas hipóteses e as variáveis.

2. Variáveis e hipóteses

2.1. Hipóteses:

H_1: O Brasil sediará a Copa de 2014.

H_2: A Copa de 2014 não sofrerá interferência da crise econômica internacional que a Europa está passando.

H_3: As obras no aeroporto de Curitiba estarão prontas no ano de 2014.

2.2. Variáveis

t → tempo (ano)

y → número de passageiros

3. Modelando o problema

Para que possamos fazer alguma previsão em relação à demanda de passageiros no aeroporto Afonso Pena, necessitamos de dados sobre a demanda de passageiros neste aeroporto.

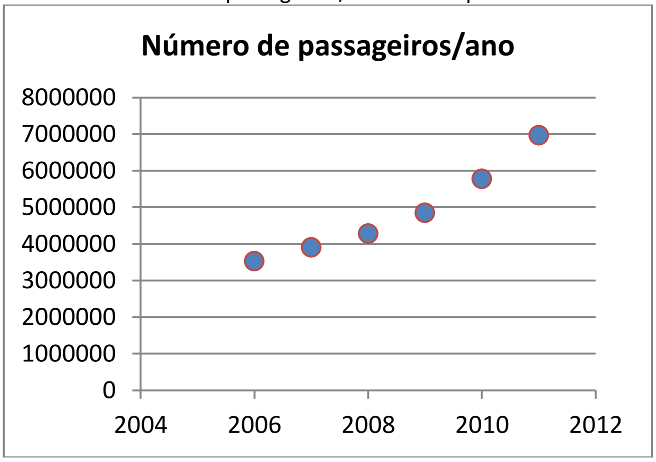
Tabela 1: Número de passageiros/ano no aeroporto Afonso Pena

Ano	Número de passageiros
2006	3532879
2007	3907275
2008	4281354
2009	4853733
2010	5774615
2011	6969484

Fonte: Infraero

Os dados da Tabela 1 podem ser visualizados no Gráfico 1:

Gráfico 1: Número de passageiros/ano no aeroporto Afonso Pena



Fonte: Elaborado pela autora

O Gráfico 1, apenas nos mostra os dados que temos na tabela. Para fazermos uma projeção do número de passageiros no ano de 2014 utilizaremos o método dos mínimos quadrados e associaremos a cada ano um índice como indica a Tabela 2.

Tabela 2: Número de passageiros/ano

Ano	n	Número de passageiros
2006	0	3532879
2007	1	3907275
2008	2	4281354
2009	3	4853733
2010	4	5774615
2011	5	6969484

Fonte: Elaborada pela autora

O Gráfico 1, sugere uma tendência exponencial ($y = ae^{\beta n}$) para o número de passageiros. Aplicando logaritmo nesta função exponencial temos:

$$y = ae^{\beta n}$$
$$\ln y = \ln(ae^{\beta n})$$
$$\ln y = \ln a + \ln(e^{\beta n})$$
$$\ln y = \ln a + \beta n$$

Chamando $\ln y = r$ e $\ln a = p$, temos $r = p + \beta n$ (1). As equações normais, para a função (1), pelo método dos mínimos quadrados, serão:

$$\begin{cases} \beta \sum n_i^2 + p \sum n_i = \sum n_i r \\ \beta \sum n_i + kp = \sum r_i \end{cases} \quad (2)$$

A Tabela 3 apresenta as somas necessárias para resolver as equações normais.

Tabela 3: Somas para ajuste

Ano	n_i	y	n_i^2	$r_{i=} \ln y_i$	$n_i r_i$
2006	0	3532879	0	15,07762	0
2007	1	3907275	1	15,17835	15,17835
2008	2	4281354	4	15,26978	30,53956
2009	3	4853733	9	15,39526	46,18578
2010	4	5774615	16	15,56898	62,27593
2011	5	6969484	25	15,75705	78,78526
Somas	**15**	**29319340**	**55**	**92,24705**	**232,9649**

Fonte: Elaborada pela autora

Substituindo as somas presentes na Tabela 3, temos

$$\begin{cases} 55\beta + 15p = 232,9649 \\ 15\beta + 6p = 92,24705 \end{cases} \quad (3)$$

Resolvendo o sistema de equações (3), $\beta = 0,134259429$ e $p = 15,03885976$. Dessa forma a função (2) é $r = 15,03885976 + 0,134259429n$. Como $\ln a = p = 15,03885976$, então $a = 3398551,128$. Substituindo a e β em (1),

$$y = 3398551,128e^{0,134259429n}$$

Nossas variáveis, definidas em **2.2** são ***y*** e ***t***, por isso fazemos a troca da variável ***n***, resultando na seguinte função,

$$y = 3398551,128e^{0,134259429(t-2006)} \quad (4)$$

3.1. Validação do modelo

Encontrado o modelo descrito em (4), é necessário voltar aos dados originais do problema a fim de verificar se o modelo encontrado é adequado aos dados iniciais. Na Tabela 4 é realizada a validação.

Tabela 4: Validação do modelo

Ano	Número de passageiros	Número de passageiros pelo modelo $y(t) = 3398551,128e^{0,134259429(t-2006)}$	Erro relativo
2006	3532879	3398551,128	3,80%
2007	3907275	3886887,197	0,52%
2008	4281354	4445392,026	3,83%
2009	4853733	5084148,128	4,75%
2010	5774615	5814686,766	0,69%
2011	6.969.484	6650196,127	4,58%

Fonte: Elaborada pela autora

Pela validação exibida na tabela 4, podemos dizer que o modelo é adequado, pois o erro realtivo é pequeno.

3.2. Respondendo o primeiro problema

Fazendo a previsão para o ano de 2014, utilizando o modelo descrito em (4), $y(2014) = 9948528{,}333$, ou seja, 9948529 passageiros no ano de 2014 no aeroporto de Curitiba.

Para responder ao primeiro problema é necessário saber qual a capacidade do aeroporto Afonso Pena após as obras de ampliação da Copa de 2014. A Figura 1, retirada do site da Infraero, traz os seguintes dados:

Figura 1 - Dados das obras de ampliação do aeroporto Afonso Pena

Obras em aeroportos da Copa

- Brasília - DF
- Campinas - SP
- Confins - MG
- Curitiba - PR
- Cuiabá - MT
- Fortaleza - CE
- Galeão - RJ
- Guarulhos - SP
- Manaus - AM
- Natal - RN
- Porto Alegre - RS
- Recife - PE
- Salvador - BA

Curitiba - PR

Investimentos para a Copa de 2014

Ações previstas:

- Ampliação do Terminal de Passageiros e Ampliação do Sistema Viário.
  Término: Dezembro de 2013
  Status: Projeto básico em execução
- Ampliação do Pátio, Infraestrutura, Macrodrenagem e Obras Complementares
  Término: Junho de 2012
  Status: Obra em execução
- Restauração da Pista de Pouso e Decolagem
  Término: Maio de 2012
  Status: Obra em execução

Investimento total: R$ 84,49 milhões

Dados Operacionais	2011	2014
Terminal de passageiros (m^2)	45.000	62.445
Capacidade do terminal (ano)	7,8 milhões	14,6 milhões
Demanda Passageiros/ano	6,9 milhões	7,6 milhões
Pátio de aeronaves (m^2)	84.062	143.941

Fonte: www.infraero.gov.br/obras/index.php/br/curitiba

Pela Figura 1, temos a informação de que a capacidade do terminal de passageiros por ano, em 2014, será de 14,6 milhões de passageiros. A quantidade de passageiros calculada pelo modelo (4) está abaixo da capacidade do terminal de passageiros estimada para 2014. Porém não basta somente que o número de passageiros por ano em um aeroporto seja menor que sua capacidade máxima. A publicação Radar: tecnologia, produção e comércio exterior, do Instituto de Pesquisa Econômica e Aplicada (Ipea), em sua décima oitava publicação apresenta a seguinte medida de ocupação para aeroportos brasileiros:

> A partir de dados da Infraero, foi possível analisar a taxa de ocupação dos aeroportos do país. Esta taxa é obtida dividindo-se o número de passageiros movimentados pela capacidade de cada aeroporto. Considera-se que o limite de eficiência operacional de um aeroporto ocorre a uma taxa de ocupação de 80% (CARVALHO e ALVES, 2006). A partir deste conceito, os aeroportos foram separados em três grupos:
> • situação adequada: apresentam taxa de ocupação abaixo de 80%;
> • situação preocupante: apresentam taxa de ocupação acima de 80%, mas abaixo de 100%; e
> • situação crítica: apresentam taxa de ocupação acima de 100%. (RADAR, 2012, p. 48)

Calculando a referida taxa de ocupação temos um valor aproximado de 68,15%; tal valor demonstra que as obras no aeroporto Afonso Pena serão suficientes para a demanda no referido aeroporto em 2014, segundo o modelo (4).

3.3. Respondendo o segundo problema

Estimar a demanda de passageiros de um aeroporto durante a Copa do Mundo não é tarefa simples, afinal muitos são os fatores que podem influenciar tal número. A fim de fazer tal estimativa vamos considerar uma cidade da África do Sul com algumas características semelhantes à cidade de Curitiba.

H_4: O aumento do número de passageiros será semelhante ao observado no aeroporto internacional de Kruger Mpumalanga, o mais próximo de Nelspruit.

A escolha da cidade de Nelspruit deu-se pelas seguintes características:

Tabela 5: Comparação de algumas características de Curitiba - Brasil e Nelspruit - África do Sul

Dados	**Curitiba – Brasil**[1]	**Nelspruit – África do Sul**[2]
Quantidade de jogos sediados	4	5
Etapa dos jogos sediados	Primeira fase	Primeira fase
Capacidade do estádio que sediará os jogos	42 mil cadeiras	46 mil pessoas

Fonte: Elaborada pela autora

[1] www.portal2014.org.br/cidades-sedes/CURITIBA

[2] www.africadosul.org.br/?pg=copa2010

Escolhida a cidade, Nelspruit, verificamos que o aumento de passageiros no ano de 2010, ano da Copa do Mundo realizada na África do Sul, foi de 14,6% em relação ao ano anterior.

Calculando a estimativa de passageiros para o ano de 2013, ano anterior à realização da Copa do Mundo no Brasil, temos $y(2013) = 8698627{,}068$, ou seja, 8698628 passageiros no ano de 2013. Fazendo, 14,6% desse número, a estimativa é 9968628 passageiros no aeroporto Afonso Pena.

Utilizando novamente a taxa de ocupação, agora com o valor estimado levando em consideração a Copa de 2014, a nova taxa de ocupação é de aproximadamente 68,3%.

Como resposta ao segundo problema, temos que as obras no aeroporto Afonso Pena serão suficientes para suprir a demanda da Copa de 2014, se considerarmos o modelo (4) e a cidade de Nelspruit, na África do Sul, como base de comparação do aumento de passageiros devido à Copa do Mundo.

4. Referências Bibliográficas

CONSULADO GERAL DA REPÚBLICA DA ÁFRICA DO SUL. **Informação sobre a Copa de 2010 da África do Sul. 2012**. Disponível em: < http://www.africadosul.org.br/?pg=copa2010>. Acesso em: 14 abr. 2012.

COUTINHO, Felipe. **Dez aeroportos não atenderão demanda da Copa, diz Ipea**. 2011. Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br/mercado/961254-dez-aeroportos-nao-atenderao-demanda-da-copa-diz-ipea.shtml. Acesso em: 18 abr. 2012.

INFRAERO – EMPRESA BRASILEIRA DE INFRAESTRUTURA AEROPORTUÁRIA. **Obras em aeroportos da Copa**. Brasília: Infraero. Disponível em: < http://www.infraero.gov.br/obras/index.php/br/curitiba>. Acesso em: 10 abr. 2012.

IPEA – INSTITUTO DE PESQUISA ECONÔMICA APLICADA. Infraestrutura econômica no Brasil: Tecnologia, Produção e Comércio Exterior. **Radar**, Brasília, n.

18, fev. 2012. Disponível em: < http://www.ipea.gov.br/portal/index.php?option=com_content&view=article&id=13488&catid=158&Itemid=8>. Acesso em: 18 abr. 2012.

Portal 2014: a arena dos negócios da Copa. **Cidades-sede Curitiba**. 2012.Disponível em: < http://www.portal2014.org.br/cidades-sedes/CURITIBA>. Acesso em: 14 abr. 2012.

ANEXO 2

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA
Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática
Prof. Dra. Lourdes M. W. de Almeida
Mestranda: Heloísa Cristina da Silva

Alunos:____
Data:

Sobre a atividade “Distância entre a TV e o sofá” responda:

1. Quais informações vocês utilizaram no desenvolvimento da atividade? Houve necessidade de incluir/excluir alguma informação ou algum novo dado sobre a situação?

2. Como foi para vocês passar das informações para a matemática? O quê cada uma das informações ou dos dados influenciou para cada escolha matemática que fizeram? (Assinale a influência – pequena, média ou alta – para cada informação/dado. Os itens g., h. e i. são para outras informações encontradas pelo grupo).

Informação/dado		Influência		
		Pequena	**Média**	**Grande**
a.	Resolução de tela			
b.	Tamanho da tela			
c.	Formato de tela			
d.	Acuidade visual			
e.	Altura da tela			
f.	Largura da tela			
g.				
h.				
i.				

3. Para fazer a formulação matemática a partir das informações ou dos dados, usaram:

		Quantidade						
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
a.	Hipóteses?							
b.	Definiram variáveis?							
c.	Simplificações para o problema?							

Quais?

a. ____
____
____
b. ____
____
____
c. ____
____
____

4. Quais conceitos/relações matemáticas foram utilizadas para passar das informações iniciais ao modelo matemático elaborado pelo grupo? (Assinale todos os conceitos utilizados pelo grupo para a elaboração do modelo).

( ) Regra de três.	( ) Geometria espacial.
( ) Porcentagem.	( ) Trigonometria.
( ) Funções.	( ) Limite.
( ) Relações trigonométricas.	( ) Outros.
( ) Geometria plana.	________________________________
( ) Progressão aritmética (PA).	________________________________
( ) Progressão geométrica (PG).	________________________________

5. De que modo você conduziu a resolução matemática da situação? Que dificuldades você enfrentou? Usou que conhecimentos já aprendidos? Foi necessário aprender algum outro conteúdo matemático para resolver o problema?

6. No modelo elaborado pelo grupo, como foram utilizadas as seguintes características:
   a. Resolução de tela;
   b. Tamanho da tela;
   c. Acuidade visual.