Universidade Estadual de Londrina

GABRIEL DOS SANTOS E SILVA

UMA CONFIGURAÇÃO DA REINVENÇÃO GUIADA

Londrina
2015

GABRIEL DOS SANTOS E SILVA

UMA CONFIGURAÇÃO DA REINVENÇÃO GUIADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco

Londrina
2015

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S586c Silva, Gabriel dos Santos e.
Uma configuração da reinvenção guiada / Gabriel dos Santos e Silva. – Londrina, 2015.
97 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Análise de interação em educação – Teses. 3. Avaliação educacional – Teses. 4. Educação matemática – Formação de conceitos – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

GABRIEL DOS SANTOS E SILVA

UMA CONFIGURAÇÃO DA REINVENÇÃO GUIADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Buriasco

Orientadora: Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – Unesp/Bauru

Profª. Drª. Marcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Londrina, 26 de janeiro de 2015.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de compartilhar minha felicidade (em forma de agradecimentos) com aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho pudesse ser elaborado e àqueles que me auxiliaram no período do Mestrado, tornando os dias mais prazerosos. Em especial, destaco aqui agradecimentos:

- a Deus, por cuidar das minhas coisas (e de mim) a todo momento;
- à Nossa Senhora, pela sua especial intercessão;
- à minha família, Lu (mãe), Bá (avó) e Ditian (avô) por me auxiliarem a colocar os meus estudos como prioridade na minha vida. Agradeço por tanto me amarem, por toda a ajuda que me dão, não somente com a compra de livros, materiais, mas por doarem um pouco de suas vidas para que eu pudesse chegar onde cheguei. Não somente agradeço, como dedico a vocês esta dissertação, esta conquista e todas as outras que virão;
- à Regina, minha orientadora, por me dar (mais) uma oportunidade de ser um estudante. Agradeço por todos os momentos de orientação (em relação a este trabalho e a situações da vida num geral), pelas conversas, incentivos e por sempre enxergar o melhor de mim;
- ao GEPEMA, pelas contribuições a este trabalho, pelas amizades e pelos bons momentos que compartilhamos. Em especial, agradeço à Fernanda por dedicar parte do seu tempo a me ajudar com uma tarefa da dissertação, à Adriana, ao Cristiano, ao Diego, à Hallynnee e à Marta pela leitura que fizeram e aos apontamentos que deram na versão da qualificação, ao Rodrigo pelo auxilio com traduções e à Anie Caroline pelas gravações da qualificação e defesa;
- aos membros da banca, Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica e Profª Dra. Marcia Cristina Trindade de Costa Cyrino por aceitarem fazer parte da banca de defesa e pelas contribuições dadas à dissertação. Agradeço também a Profª Dra. Edilaine Regina dos Santos e Prof. Dr. Jader Otávio Dalto por fazerem parte da banca de qualificação e por suas leituras cautelosas do trabalho;
- ao Paulo, amizade que surgiu com o início da Graduação e mantém-se firme até hoje. Agradeço por ser a pessoa com quem posso partilhar angústias, alegrias, ideias, planos, medos e aprendizagens; obrigado por ser um verdadeiro amigo, por acreditar no meu potencial e por me incentivar a fazer a seleção

do Mestrado;

- ao Diego, meu “irmãozinho de orientação”, que se tornou durante a caminhada do Mestrado um grande amigo. Agradeço pelas conversas, amizade e companheirismo ao longo desses anos;
- à Pamela, à Camila e à Loana, por toda a ajuda e incentivo que me deram no processo de seleção do Mestrado;
- à Juliana e à Jaqueline, amigas de muito tempo que dividem comigo os bons momentos e os que não são tão bons. Agradeço pela amizade, pelas madrugadas que dispensaram para me ajudar com tarefas da dissertação, pelos cafés, pelas conversas e por sempre me colocarem em suas orações;
- aos meus afilhados, por todo a confiança que têm em mim e por suas orações. Em especial, agradeço à Letícia, à Beatriz e à Larissa por tudo que fizeram e fazem por mim, pelos momentos que torceram pela minha felicidade e comemoraram comigo as conquistas;
- aos amigos da Igreja, participantes do Grupo Príncipe da Paz, do Grupo Sedecias, músicos da Catedral, servos da Gruta Mãe da Graça e todos que me colocaram em suas orações no período do Mestrado. Em especial, agradeço ao Ettore Zambrin, à Isabela Cunha e à Gabriela Mondek;
- aos professores que me acompanharam durante a minha trajetória escolar e universitária e que muito me deram forças para seguir no caminho dos estudos. Agradeço em especial à Rosangela, à Célia, à Márcia, à Maria, à Regina Célia, à Angela Marta e à Denise Moreira;
- aos servidores da UEL, que me ajudaram com o que parecia ser impossível na busca dos documentos para o processo seletivo do Mestrado; e
- à CAPES pela bolsa concedida.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo configurar a reinvenção guiada por meio de aspectos apresentados por autores de textos da Educação Matemática Realística. Para tanto, foram utilizados 15 livros e 61 artigos de autores da Educação Matemática Realística escritos no período de 1968 a 2013 para fazer agrupamentos e construir inventários. Formaram-se grupos com as temáticas: aprendizagem, avaliação, contexto, fenomenologia didática, inversão antididática, matematização, objetivo da reinvenção guiada, papel do estudante, papel do professor, princípio da atividade, princípio da interatividade, princípio da orientação, princípio da realidade, princípio de níveis, princípio do entrelaçamento, trajetórias de ensino e aprendizagem. Este estudo permitiu evidenciar um entrelaçamento entre temas, ideias, noções da Educação Matemática Realística e entre o papel do professor e do estudante.

Palavras-chave: Educação Matemática. Educação Matemática Realística. Reinvenção Guiada. Configuração.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **A configuration of guided reinvention**. 2015. 94p. Dissertation (Masters in Mathematics Education and Sciences) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

ABSTRACT

This dissertation aims to set the guided reinvention using aspects presented by authors of Realistic Mathematics Education texts. To this end, we used 15 books and 61 articles by authors from the Realistic Mathematics Education, written in the 1968-2013 period to build clusters and inventories. There were formed groups with the following themes: learning, assessment, context, didactic phenomenology, antididactic inversion, mathematization, goal of guided reinvention, student's role, teacher's role, activity principle, interactivity principle, guidance principle, reality principle, level principle, intertwinement principle, trajectories of teaching and learning. This study indicates an interweaving of themes, ideas, notions of Realistic Mathematics Education and between the role of teacher and student.

Key words: Mathematics Education. Realistic Mathematics Education. Guided Reinvention. Configuration.

QUANDO A ESCOLA É DE VIDRO - RUTH ROCHA

Naquele tempo eu até que achava natural que as coisas fossem daquele jeito. Eu nem desconfiava que existissem lugares muito diferentes... Eu ia pra escola todos os dias de manhã e, quando chegava, logo, logo, eu tinha que me meter no vidro. É, no vidro! Cada menino ou menina tinha um vidro e o vidro não dependia do tamanho de cada um, não! O vidro dependia da classe em que a gente estudava.

Se você estava no primeiro ano ganhava um vidro de um tamanho. Se você fosse do segundo ano, seu vidro era um pouquinho maior. E, assim, os vidros iam crescendo à medida que você ia passando de ano. Se não passasse de ano, era um horror. Você tinha que usar o mesmo vidro do ano anterior. Coubesse ou não coubesse. Aliás, nunca ninguém se preocupou em saber se a gente cabia nos vidros. E, pra falar a verdade, ninguém cabia direito.

Uns eram muito gordos, outros eram muito grandes, uns eram pequenos e ficavam afundados no vidro, nem assim era confortável. Os muito altos de repente se esticavam e as tampas dos vidros saltavam longe, às vezes até batiam no professor. Ele ficava louco da vida e atarraxava a tampa com força, que era pra não sair mais. A gente não escutava direito o que os professores diziam, os professores não entendiam o que a gente falava... As meninas ganhavam uns vidros menores que os meninos. Ninguém queria saber se elas estavam crescendo depressa, se não cabiam nos vidros, se respiravam direito...

A gente só podia respirar direito na hora do recreio ou na aula de Educação Física. Mas aí a gente já estava desesperado, de tanto ficar preso e começava a correr, a gritar, a bater uns nos outros. As meninas, coitadas, nem tiravam os vidros no recreio. E na aula de Educação Física elas ficavam atrapalhadas, não estavam acostumadas a ficarem livres, não tinham jeito nenhum para Educação Física. Dizem, nem sei se é verdade, que muitas meninas usavam vidros até em casa. E alguns meninos também. Estes eram os mais tristes de todos. Nunca sabiam inventar brincadeiras, não davam risada à toa, uma tristeza!

Se a gente reclamava? Alguns reclamavam. E então os grandes diziam que sempre tinha sido assim; ia ser assim o resto da vida. Uma professora, que eu tinha, dizia que ela sempre tinha usado vidro, até pra dormir, por isso é que ela tinha boa postura. Uma vez um colega meu disse pra professora que existiam lugares onde as escolas não usavam vidro nenhum, e as crianças podiam crescer à vontade. Então a professora respondeu que era mentira, que isso era conversa de comunistas. Ou até coisa pior...

Tinha menino que tinha até de sair da escola porque não havia jeito de se acomodar nos vidros. E havia uns que, mesmo quando saíam dos vidros, ficavam do mesmo jeitinho, meio encolhidos, como se estivessem tão acostumados que até estranhavam sair dos vidros. Mas, uma vez, veio para minha escola um menino, que parecia favelado, carente, essas coisas que as pessoas dizem pra não dizer que é pobre. Aí não tinha vidro pra botar esse menino. Então os professores acharam que não fazia mal não, já que ele não pagava a escola mesmo...

Então o Firuli, ele se chamava Firuli, começou a assistir às aulas sem estar dentro do vidro. O engraçado é que o Firuli desenhava melhor que qualquer um, o Firuli respondia perguntas mais depressa que os outros, o Firuli era muito mais engraçado... E os professores não gostavam nada disso... Afinal, o Firuli podia ser um mau exemplo pra nós... E nós morríamos de inveja dele, que ficava no bem-bom, de perna esticada, quando queria ele espreguiçava, e até mesmo gozava a cara da gente que vivia preso. Então um dia um menino da minha classe falou que também não ia entrar no vidro.

Dona Demência ficou furiosa, deu um croque nele e ele acabou tendo que se meter no vidro, como qualquer um. Mas, no dia seguinte, duas meninas resolveram que não iam entrar no vidro também: - Se o Firuli pode, por que é que nós não podemos? Mas Dona Demência não era sopa. Deu um croque em cada uma, e lá se foram elas, cada uma pro seu vidro... Já no outro dia a coisa tinha engrossado. Já havia oito meninos que não queriam saber de entrar nos vidros.

Dona Demência perdeu a paciência e mandou chamar seu Hermenegildo que era o diretor lá da escola. Seu Hermenegildo chegou muito desconfiado: - Aposto que essa rebelião foi fomentada pelo Firuli. É um perigo esse tipo de gente aqui na escola. Um perigo! A gente não sabia o que é que queria dizer fomentada, mas entendeu muito bem que ele estava falando mal do Firuli. E seu Hermenegildo não conversou mais. Começou a pegar os meninos um por um e enfiar à força dentro dos vidros.

Mas nós estávamos loucos para sair também, e pra cada um que ele conseguia enfiar dentro do vidro – já havia dois fora. E todo mundo começou a correr do seu Hermenegildo, que era pra ele não pegar a gente, e na correria começamos a derrubar os vidros. E quebramos um vidro, depois quebramos outro e outro mais. Dona Demência já estava na janela gritando: - SOCORRO! VÂNDALOS! BÁRBAROS! (pra ela bárbaro era xingação). Chamem o Bombeiro, o exército da Salvação, a Polícia Feminina...

Os professores das outras classes mandaram cada um um aluno para ver o que estava acontecendo. E quando os alunos voltaram e contaram a farra que estava na 6ª série, todo mundo ficou assanhado e começou a sair dos vidros. Na pressa de sair, começaram a esbarrar uns nos outros e os vidros começaram a cair e a quebrar. Foi um custo botar ordem na escola, e o diretor achou melhor mandar todo mundo pra casa, que era pra pensar num castigo bem grande, pro dia seguinte. Então eles descobriram que a maior parte dos vidros estava quebrada e que ia ficar muito caro comprar aquela vidraria tudo de novo.

Então, diante disso, seu Hermenegildo pensou um bocadinho e começou a contar pra todo mundo que em outros lugares havia umas escolas que não usavam vidro nem nada, e que dava bem certo, as crianças gostavam muito mais. E que de agora em diante ia ser assim: nada de vidro, cada um podia se esticar um bocadinho, não precisava ficar duro nem nada, e que a escola agora ia se chamar Escola Experimental. Dona Demência, que apesar do nome não era louca nem nada, ainda disse timidamente: - Mas seu Hermenegildo, Escola Experimental não é bem isso...

Seu Hermenegildo não se pertubou: - Não tem importância. A gente começa experimentando isso. Depois a gente experimenta outras coisas... E foi assim que na minha terra começaram a aparecer as Escolas Experimentais. Depois aconteceram muitas coisas, que um dia eu ainda vou contar...

APRESENTAÇÃO

DA MINHA TRAJETÓRIA

Desde o início dos meus estudos na Educação Básica, lembro-me[1] de gostar das aulas de matemática. Lembro-me, também, que elas seguiam, de maneira geral, um padrão no que se refere à dinâmica da aula: o professor apresentava algum conteúdo, alguns exemplos e pedia à turma que resolvesse uma lista de exercícios a respeito daquele conteúdo. Eu não via problema algum com esse tipo de dinâmica.

Esse mesmo "padrão" seguiu-se durante o Ensino Fundamental e Médio, o que me levou a perceber que era fácil ser aprovado em matemática com esforço mínimo, a partir do momento em que eu descobria o que o professor achava interessante do conteúdo, bastando que eu memorizasse um ou dois dias antes das provas. Mesmo que eu fosse bem nas provas, observava que meus amigos não iam. O que eu observava me dava uma certeza: matemática é uma ciência complexa!

Ainda assim, eu gostava muito de matemática e no terceiro ano do Ensino Médio decidi dar sequência aos meus estudos nessa área. Tive incentivo da minha professora de matemática da época, que me presenteou com livros didáticos e me permitia corrigir as provas das turmas dela. Esse foi o ano em que tive certeza que estudar matemática era o que eu queria na minha vida.

Fui aprovado no vestibular em Licenciatura em Matemática e tinha interesse em participar de outras atividades durante a graduação além das aulas. Conheci a professora Regina Buriasco, orientadora deste trabalho, docente do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Ela me contou dos grupos de pesquisa da área de Educação Matemática da universidade e me propus a conhecê-los, mesmo que as aulas do curso não tivessem começado.

Assisti à defesa de duas dissertações, de Almeida (2009) e Ferreira (2009), membros do GEPEMA[2], Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação, coordenado pela professora Regina, participei das reuniões semanais do GEPEMA e de uma reunião de um outro grupo de pesquisa da área de

---

[1] Por se referir à minha trajetória escolar, nessa apresentação utilizarei a primeira pessoa do singular para a escrita.
[2] Neste trabalho, "grupo" refere-se ao GEPEMA. http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/.

Educação Matemática coordenado por uma professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Decidi participar do GEPEMA pelo interesse nos estudos referentes à avaliação da aprendizagem escolar, uma vez que tive contato com correções de provas de matemática no meu Ensino Médio e alguns questionamentos tinham se formado.

No período em que participei do GEPEMA (fevereiro de 2009 a março de 2010), o grupo se dedicava a estudar produções escritas de estudantes, professores e futuros professores em questões de provas de matemática.

Algumas dissertações haviam sido produzidas investigando a produção escrita a partir de questões rotineiras de matemática (NAGY-SILVA, 2005; PEREGO, 2005; SEGURA, 2005; ALVES, 2006; NEGRÃO DE LIMA, 2006; PEREGO, 2006; DALTO, 2007; VIOLA DOS SANTOS, 2007). As produções escritas eram proveninentes da prova do AVA/2002 realizada no estado do Paraná. Na época, a Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED) forneceu ao GEPEMA uma amostra significativa de produções de estudantes paranaenses para que se realizasse o estudo. Alguns pesquisadores utilizaram apenas os enunciados das questões para investigar produções de professores e futuros professores, e outros utilizaram as provas fornecidas pela SEED.

Algumas das dissertações foram produzidas com vista a analisar a produção escrita de estudantes, professores e futuros professores em questões não-rotineiras de matemática (CELESTE, 2008; SANTOS, 2008; ALMEIDA, 2009; FERREIRA, 2009; BEZERRA, 2010; LOPEZ, 2010). As questões utilizadas eram provenientes das provas trienais do PISA, porque eram não-rotineiras e já validadas. Com isso, alguns documentos do PISA foram estudados no grupo a fim de se compreenderem algumas classificações feitas pelo comitê de organização da prova.

A partir desses estudos, o GEPEMA começou a estudar a Educação Matemática Realística (RME[3]), uma abordagem holandesa para o ensino de matemática que subsidia parte da fundamentação teórica dos documentos do PISA. Quando comecei a participar do grupo, temas como análise da produção escrita, avaliação como prática de investigação, reinvenção guiada, matematização, Educação Matemática Realística, fenomenologia didática e matemática como

---

[3] *Realistic Mathematics Education* – RME.

atividade humana[4] eram frequentemente discutidos nas reuniões semanais. Eu não conseguia encontrar relações desses temas com o meu interesse em estudar Matemática, mas ainda assim continuei a participar do GEPEMA por um ano.

No meu primeiro ano de graduação, os professores seguiam o mesmo "padrão" que observei nas aulas dos professores da Educação Básica das escolas em que estudei. Eu não enxergava esse padrão como um obstáculo para a minha aprendizagem; o que não era possível aprender em sala, eu buscava estudar a partir dos livros adotados pelo professor, o que quase sempre me eximia de fazer as listas de exercícios.

A partir do segundo ano, começaram as disciplinas pedagógicas. Entre outros temas, discutíamos aspectos referentes à aprendizagem matemática, documentos norteadores da prática docente, diferentes abordagens de ensino, e eu me frustrava, porque esperava que nessas disciplinas fôssemos discutir elementos da prática do professor que seguissem aquele "padrão" com o qual eu estava acostumado. Minha expectativa era de que os professores dessas disciplinas falassem como fazer um bom plano de aula, como organizar os assuntos na lousa, como elaborar boas listas de exercícios e não foi o que aconteceu.

Pensei várias vezes em desistir da Habilitação Licenciatura para matricular-me no Bacharelado. O que me motivava a continuar eram as aulas de matemática que eu dava em uma escola de Ensino Fundamental.

No último ano da licenciatura, decidido a tentar a seleção para o mestrado em Matemática, comecei a ter outra visão em relação ao curso que fazia. Em uma disciplina de um professor da Educação Matemática, tive contato com textos que me levaram a repensar aspectos referentes ao ensino de matemática. Por meio dessas leituras, pude começar a compreender que muitos estudantes tinham dificuldade em aprender matemática, não necessariamente pela complexidade dos conteúdos, mas talvez por motivos vinculados a questões educacionais. Essa "demora" para entender esse fenômeno se deu porque eu não tinha dificuldade em aprender matemática, mesmo as aulas sendo como eram; entretanto, passei a aceitar o fato de que mesmo que eu aprendesse matemática a partir de aulas ditas

[4] Reinvenção guiada, matematização, fenomenologia didática e matemática como atividade humana são temas discutidos pela Educação Matemática Realística e serão abordados no decorrer deste trabalho.

tradicionais, algumas pessoas não aprendiam assim, e essa deveria ser uma minha preocupação.

Decidi tentar a seleção do mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual de Londrina; fui aprovado na seleção e, com isso, voltei a participar das reuniões semanais do GEPEMA. No período em que estive distante, o grupo ainda estudava temas da Educação Matemática Realística e avaliação escolar. Tais estudos, as orientações que recebi e os meus interesses particulares foram alguns dos motivos que levaram à elaboração da temática desta pesquisa. Objetivos, pergunta de investigação, justificativa e algumas questões referentes à temática da pesquisa serão apresentados na seção seguinte.

DESTE TRABALHO

No final da década de 1960, teve início, na Holanda, uma abordagem para o ensino de matemática denominada Educação Matemática Realística (RME), em oposição ao Movimento da Matemática Moderna e às abordagens para o ensino de matemática presentes nas ações de professores e em livros didáticos da época, a saber: mecanicista, estruturalista e empirista (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 98).

No Quadro 1 estão presentes informações referentes a essas abordagens de acordo com autores da Educação Matemática Realística.

Quadro 1 – Algumas características das abordagens mecanicista, estruturalista e empirista.

Abordagem	Algumas características
Mecanicista	– foco em cálculos em problemas com números “nus”[5], dando-se uma pequena atenção às aplicações (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010b, p. 4); – a matemática é ensinada de forma fragmentada (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010b, p. 4); – problemas de contexto são utilizados para concluir o processo de aprendizagem; funcionam apenas como campo de aplicação (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001, p. 4); – o conteúdo é dividido em pequenas partes, sem sentido, em que os estudantes dispõem de procedimentos de resolução fixos, sendo treinados, individualmente, por meio de exercícios (VAN DEN

[5] Van den Heuvel-Panhuizen (2010), ao falar de “problemas com números ‘nus’”, refere-se a questões que, no geral, contêm somente números e operações no enunciado.

	HEUVEL-PANHUIZEN, 2001, p. 4); – o problema não é tomado como ponto de partida (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 99).
Estruturalista	– abordagem derivada do Movimento da Matemática Moderna (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010b, p. 4); – o problema é apresentado enquanto se estuda o conteúdo utilizado para resolvê-lo (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 99); – após o trabalho com um problema, os estudantes precisam mostrar que compreenderam por meio de outro problema (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 99).
Empirista	– os estudantes são estimulados a realizar investigações, ficando muitas vezes livres, por si (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010b, p. 4); – é dada grande atenção à esquematização preliminar dos estudantes ao resolver um problema, esperando-se que comecem formulando hipóteses; essas hipóteses são discutidas e testadas (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 99); – não é dada tanta atenção ao fechamento matemático após a resolução dos problemas (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 99); – buscam-se os pontos de partida dos estudos na esfera dos interesses dos estudantes (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 101).

Fonte: o autor.

A RME[6] pode ser apresentada a partir de alguns princípios. Um deles, denominado princípio da reinvenção guiada, foi formulado por Freudenthal a partir de sua concepção de aprendizagem e, consequentemente, suas implicações para o ensino de matemática.

Assim como outros aspectos, a reinvenção guiada permeia os textos dos autores da Educação Matemática Realística de tal forma que é possível identificar recortes que tratam especificamente a respeito dela, ou até mesmo relatos de experiências em sala de aula em que se destacam alguns de seus elementos característicos. Também em trabalhos do GEPEMA observam-se aspectos referentes à reinvenção guiada.

Ciani (2012) elabora duas propostas de intervenção a partir de produções escritas de estudantes e professores em duas questões de matemática comuns às dissertações de Celeste (2008), Santos (2008) e Ferreira (2009). Essas propostas foram elaboradas à luz de temas da Educação Matemática Realística, como

---

[6] A partir deste momento, a sigla RME será utilizada para se referir à Educação Matemática Realística.

a reinvenção guiada, tomando a avaliação como prática de investigação.

Pires (2013) descreve um trabalho com a prova em fases[7] como instrumento de oportunidade de aprendizagem para professoras de uma escola municipal situada no norte do Paraná. A pesquisadora conduziu um trabalho em que, por meio de perguntas feitas sobre as produções das professoras, levou-as a revisitar conteúdos matemáticos presentes nas tarefas que realizaram.

Santos (2014) analisa os trabalhos do GEPEMA que utilizam a análise da produção escrita como instrumento de avaliação e como subsídio para oportunidade de aprendizagem e apresenta contribuições teóricas a respeito da utilização da análise da produção escrita como estratégia de ensino em aulas na perspectiva da reinvenção guiada.

Oliveira (2014) apresenta um estudo teórico a respeito de um dos temas da Educação Matemática Realística: a matematização. Para isso, analisou textos de autores da RME, documentos do PISA e dicionários. A partir desse estudo, discutiu o significado da expressão à luz dos textos estudados, a evolução histórica do conceito e sua utilização na reinvenção guiada.

Em relação ao instrumento prova em fases, membros do GEPEMA apresentam discussões a respeito de sua utilização com base no referencial teórico da RME, tendo como pano de fundo seus princípios.

Trevisan (2013) apresenta reflexões a respeito de sua prática docente a partir do uso de uma prova em fases como instrumento de avaliação em aulas de matemática, que suscitou um repensar a respeito de aspectos referentes à sua prática, tais como: as questões que compuseram a prova, o currículo de matemática, a avaliação e a prática de avaliação realizada pelo autor enquanto professor da turma.

Mendes (2014) apresenta uma discussão a respeito da regulação da aprendizagem a partir do uso de uma prova em fases como instrumento para oportunidade de aprendizagem. Para tanto, utiliza a análise da produção escrita para elaborar questionamentos, intervenções escritas para os estudantes, em cada uma das fases.

---

[7] “Prova em fases” é um instrumento de avaliação elaborado a partir das ideias de “prova em duas fases” da Educação Matemática Realística. Utilizar o instrumento significa que o estudante resolve questões de matemática e em outros momentos tem acesso à sua resolução, podendo repensar sua estratégia/procedimento, corrigir possíveis erros, refazer os cálculos. Alguns autores elaboram questionamentos por escrito e entregam junto com a resolução do estudante nas fases.

Outros aspectos (da Educação Matemática Realística e da avaliação da aprendizagem) foram estudados por membros do GEPEMA.

Pedrochi Junior (2012) apresenta um estudo de textos de autores da Educação Matemática Realística e de outros que tratam de avaliação da aprendizagem escolar para discutir o que entendem por avaliação como oportunidade de aprendizagem. O mesmo foi feito com textos de membros do GEPEMA.

Ferreira (2013) estuda diferentes classificações de enunciados de tarefas de matemática a fim de compor um quadro de referência que subsidie analisar tais enunciados à luz da RME. Para tanto, apresenta classificações de acordo com o contexto das tarefas, com o tipo de tarefa e com o tipo de item.

Com base em autores da RME, membros do GEPEMA discutem aspectos referentes a elaboração e correção de provas escritas de matemática.

Moraes (2013) discute a correção de uma prova de matemática corrigida por quatro professores da área. A discussão é baseada nos registros dos professores ao realizarem a correção e em dados obtidos a partir de entrevistas posteriores às correções.

Pereira Junior (2014), em sua dissertação, discute a respeito do que autores da RME consideram como bons problemas de avaliação. A partir desse estudo, classifica 81 questões de acordo com De Lange (1987) e analisa e discute uma prova de um professor da Educação Básica à luz das contribuições da Educação Matemática Realística.

Assumindo a avaliação como um processo indissociável dos processos de ensino e aprendizagem e partindo do pressuposto de que os princípios da Educação Matemática Realística devem estar presentes nas ações e/ou discursos daqueles que a tomam como base para ensinar, pesquisar, então é possível afirmar que nos trabalhos dos membros do GEPEMA a reinvenção guiada se faz presente como tema principal ou subjacente a essas pesquisas apresentadas nesta seção.

É possível afirmar, com base nos trabalhos do grupo, que há um interesse em discutir, por meio de estudos teóricos ou análise de experiências práticas, aspectos referentes a avaliação da aprendizagem e Educação Matemática, neste momento, Educação Matemática Realística, especificamente.

Ainda que os trabalhos dos membros do GEPEMA tenham a reinvenção guiada como aspecto subjacente às temáticas, não há algum trabalho em que ela seja o foco principal. Uma publicação em língua portuguesa que trabalhe com ideias a respeito deste tema, de tal forma que possa configurar a reinvenção guiada, sistematizando as noções, termos, ideias (assim como foi feito com o tema matematização em Oliveira (2013)), pode auxiliar os estudos dos membros (e futuros membros) do grupo, de outros pesquisadores e professores em relação a essa temática. Tais estudos podem ser relacionados à compreensão do objeto de estudo deste trabalho, a reinvenção guiada, ou com vistas a desenvolver pesquisas em relação à temática, no que se refere a aprofundamentos teóricos (como problematizações acerca de ideias sistematizadas) ou mobilizações do conceito em situações educacionais.

Assim, justifica-se a relevância deste trabalho a partir dos interesses de pesquisa do GEPEMA e do pesquisador, tendo como objetivo configurar a reinvenção guiada por meio de aspectos apresentados pelos autores estudados da Educação Matemática Realística.

Segundo o dicionário Aurélio da língua portuguesa, o verbete “configurar” pode significar: “dar a forma ou figura de, conformar; ser o indício, o sinal de; denotar, caracterizar” (2009, p. 521). No geral, podemos encontrar os mesmos significados em outros dicionários (NASCENTES, 1972; BIDERMAN, 1992; MUNIZ; CASTRO, 2005). No Dicionário de Sinônimos e Antônimos, encontram-se os sinônimos “(con)formar: afeiçoar, (a)figurar; imaginar: afigurar, conceber, pensar” e os antônimos “deformar, desfigurar” (HOUAISS, 2003).

Ainda em convergência com esses significados, etimologicamente, o verbo “configurar” relaciona-se com “forma exterior, aspecto, representação” (CUNHA, 2010, p. 206; 356). O termo “representação”, que é encontrado no verbete, também é encontrado no dicionário Michaelis (1998, p. 559), em que “configurar” significa “dar a figura ou forma de, representar; revestir-se dos atributos que caracterizam uma ação”.

Dos significados apresentados, destacamos **forma**, **figura**, **representar**.

Por **forma**, o dicionário Aurélio (2009, p. 922) entende “os limites exteriores da matéria de que é constituído um corpo, e que conferem a este um feitio, uma configuração, um aspecto particular” e, ainda, “maneira variável com que uma noção, uma ideia, um acontecimento, uma ação se apresenta”. Abbagnano (1982, p. 446-447) afirma que o termo “forma” é utilizado filosoficamente por Bergson, a partir de uma concepção aristotélica em que “forma” é essência da matéria e estas são indissociáveis, sendo entendido como

> '[...] uma fotografia instantânea' tirada em cima de uma transição, isto é, uma espécie de imagem média à qual se aproximam as imagens reais em sua mudança e que vem assumida como 'a essência da coisa ou a coisa mesma' (ABBAGNANO, 1982, p. 447).

Figura, para o dicionário Aurélio (2009, p. 895), pode ser entendida como "a estatura e a configuração geral de um corpo", ou ainda, "forma exterior, figuração; efeito, aspecto, impressão que as coisas produzem". Etimologicamente, a palavra "configurar" tem sua raiz em "figura" e, portanto, possuem o mesmo significado nesse contexto (HOUAISS, 2003).

Mora (1971) discute o sentido dado por filósofos à palavra "figura". De modo geral, o autor entende que figura é equivalente ao contorno ou ao perfil de um objeto. Entretanto, afirma que

> alguns autores fazem distinção entre figura e forma. A figura [...] é concebida então como o aspecto externo de um objeto, isto é, sua configuração. A forma [...], em contrapartida, é o aspecto interno de um objeto, sua essência (MORA, 1971, p. 658, tradução nossa[8]).

Por sua vez, **representar**, de acordo com o dicionário Houaiss (2001, CD-ROM), pode significar "ser a imagem ou a reprodução de; trazer à memória; figurar como símbolo; aparecer numa outra forma". Abbagnano (1982, p. 820) indica que o termo foi utilizado pelos escolásticos a fim de relacioná-lo com imagem ou ideia, com a busca por uma semelhança com o objeto em si. De acordo com o autor, Ockham fazia distinção entre três principais significados de representar:

> em primeiro lugar, designa-se com este termo aquilo por meio do qual se conhece algo; nesse sentido, o conhecimento é representativo, e representar significa ser aquilo com que se conhece alguma coisa. Em segundo lugar, por representar entende-se conhecer alguma coisa, após cujo conhecimento conhece-se outra coisa; nesse sentido, a imagem representa aquilo de que é imagem, no ato de lembrar. Em terceiro lugar, por representar entende-se causar o conhecimento do mesmo modo como o objeto causa o conhecimento [...]. No primeiro caso, a representação é a ideia no sentido mais geral; no segundo, é a imagem; no terceiro, é o próprio objeto (ABBAGNANO, 1982, p. 821).

A partir dessas considerações, neste trabalho, entender-se-á por **configurar**:

- dar a "forma", como uma fotografia instantânea do objeto, apresentando algo que se aproxima do objeto original;

---

[8] *"Algunos autores distinguen entre figura y forma. La figura [...] es concebida entonces como el aspecto externo de un objeto, esto es, su configuración. La forma, [...], en cambio, es el aspecto interno de un objeto, su esencia".*

- “representar”, apresentando uma imagem por meio da qual pode-se ter conhecimento a respeito do objeto;
- “caracterizar”, ressaltando as características do objeto;
- dar a “figura”, apresentando um perfil externo do objeto.

Entende-se neste trabalho que, para fazer uma configuração, é necessária uma sistematização de ideias, noções, conceitos, nomenclaturas acerca de um objeto, a fim de que ele possa ser conhecido. Não se trata (neste momento) de discutir a relevância dos conceitos em determinados contextos, problematizar os aspectos elencados, fazer críticas em relação à base teórica, mas trata-se de organizar os aspectos a fim de que futuros trabalhos possam possibilitar novas discussões, problematizações, compreensões, perspectivas, reflexões.

Cabe ressaltar que uma configuração não implica, necessariamente, em uma concordância com todos os aspectos utilizados para configurar o objeto ou até mesmo com o objeto e seu uso, mas uma apresentação organizada e sistemática dos elementos que o compõem.

Então, com essa ideia de configurar, pretende-se estudar teoricamente a reinvenção guiada à luz da pergunta de investigação: **que aspectos apresentados pelos autores estudados da Educação Matemática Realística configuram a reinvenção guiada?**

Para realizar este estudo, temos como objetivos específicos:

- inventariar aspectos da reinvenção guiada presentes em textos de autores da Educação Matemática Realística, a fim de analisá-los e discuti-los;
- discutir as relações entre a reinvenção guiada e os seis princípios da Educação Matemática Realística;
- apresentar elementos que constituem a dinâmica de aula (escolha das tarefas, papel do professor e do estudante, avaliação) na perspectiva da reinvenção guiada.

DOS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para este estudo foram utilizadas questões e objetivos norteadores, sem partir de hipóteses a fim de comprová-las ou refutá-las. Na realização da investigação, um importante elemento foi a interpretação, que ocorreu em momento concomitante às inferências e que se demonstrou carregada de subjetividade. Desse modo, esta pesquisa configura-se como qualitativa, de cunho interpretativo, realizada a partir de passos descritos a seguir.

O GEPEMA possui três subprojetos, em cada um dos quais os membros se dedicam a inventariar trabalhos (teses, dissertações e artigos) nacionais e internacionais, que envolvem temas referentes a Avaliação da Aprendizagem, Educação Matemática Realística e Educação Algébrica. O Subprojeto 2 é responsável pelo inventário de textos da Educação Matemática Realística e, ao fim do primeiro semestre de 2013, alguns dos textos inventariados tinham sido arquivados em um *pendrive*, enquanto outros estavam impressos.

Foram utilizados 76 textos, disponíveis no *pendrive*, para este estudo, dos quais 15 são livros e 61 são artigos científicos. Todos os textos foram publicados entre 1968 e 2013 em língua inglesa. Do inventário original, não foram considerados um artigo em língua holandesa e uma transcrição de uma discussão entre alguns matemáticos[9] mediada por Hans Freudenthal. No anexo A encontram-se outras informações a respeito destes textos, em ordem do ano de publicação.

Tendo em vista os objetivos desta pesquisa, buscaram-se, nos textos, trechos referentes à expressão reinvenção guiada, observando principalmente aqueles que continham os verbetes “reinvenção” e suas variações (reinventar, por exemplo) e “guiada” e suas variações (guia, por exemplo). De cada trecho, foi selecionado o menor recorte possível que apresenta a ideia em torno do verbete e assim um inventário foi constituído (Inventário 1), como exemplificado no Quadro 2, contendo a referência e a página do recorte, a sua escrita em inglês e uma nossa tradução para o português.

---

[9] Heinrich Behnke, John Michael Hammersley, Anna Krygovska, Henry Pollak, André Revuz, Willy Servais e Sergei Sobolev.

Quadro 2 - Exemplificação do Inventário 1.

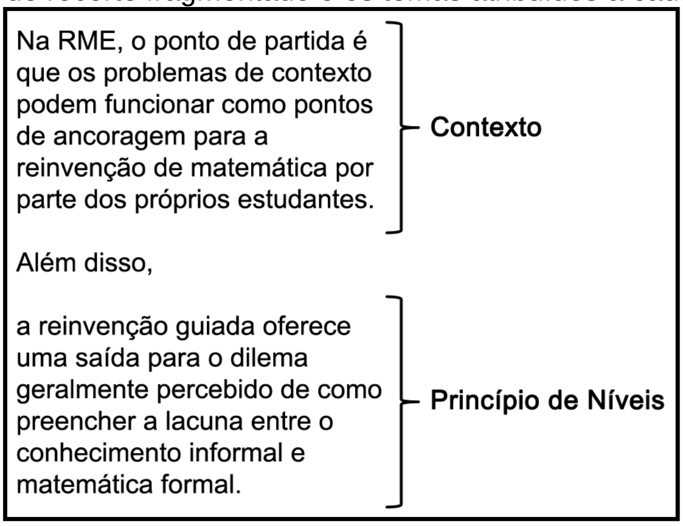
	REFERÊNCIA	RECORTE (EM INGLÊS)	TRADUÇÃO DO RECORTE
	GRAVEMEIJER, K. P. E.; DOORMAN, M. **Context problems in realistic mathematics education:** a calculus course as an example. Educational Studies in Mathematics, v. 39, n. 1, p. 111-129, jan. 1999. p. 111-112	In RME, the point of departure is that context problems can function as anchoring points for the reinvention of mathematics by the students themselves. Moreover, guided reinvention offers a way out of the generally perceived dilemma of how to bridge the gap between informal knowledge and formal mathematics.	Na RME, o ponto de partida é que os problemas de contexto podem funcionar como pontos de ancoragem para a reinvenção de matemática por parte dos próprios estudantes. Além disso, a reinvenção guiada oferece uma saída para o dilema geralmente percebido de como preencher a lacuna entre o conhecimento informal e a matemática formal.

Fonte: o autor.

Em seguida, um segundo inventário foi elaborado, reunindo os recortes que continham a ideia central semelhante. Esse inventário foi feito uma vez que, pela natureza qualitativa desta pesquisa e, sobretudo, pelo seu caráter de não conter hipóteses *a priori*, não foi possível constituir “agrupamentos”, “categorias”, “classes” antes de conhecer o material (o Inventário 1).

Inicialmente, a proposta era associar a cada recorte um tema (palavra ou expressão) representativo de sua ideia central. Entretanto, alguns recortes continham mais de uma ideia central e podiam ser associados a mais de um tema. Nesses casos, os recortes foram fragmentados a fim de obter novos recortes, menores, com a menor quantidade possível de temas associados a eles. Exemplo de um recorte que pode ser associado a mais de um grupo é apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Exemplo de recorte fragmentado e os temas atribuídos a cada fragmento



Fonte: o autor, a partir de um recorte de Gravemeijer e Doorman (1999, p. 111-112).

Para alguns fragmentos, o tema era atribuído por meio de uma palavra presente no texto, como, por exemplo, o tema “contexto” foi atribuído ao primeiro fragmento da Figura 1; para outros fragmentos, por meio de interpretação da ideia central do recorte, foi possível atribuir um tema. Cada união de fragmentos com o mesmo tema foi denominada “grupo” porque os grupos não eram mutuamente exclusivos, ou seja, alguns fragmentos puderam ser associados a mais de um grupo. Ao conjunto de todos esses grupos denomina-se Agrupamento 1.

Foi possível constituir 16 grupos do Agrupamento 1, com os temas: aprendizagem, avaliação, contexto, fenomenologia didática, inversão antididática, matematização, objetivo da reinvenção guiada, papel do estudante, papel do professor, princípio da atividade, princípio da interatividade, princípio da orientação, princípio da realidade, princípio de níveis, princípio do entrelaçamento, trajetórias de ensino e aprendizagem.

Um novo agrupamento foi constituído a partir do Agrupamento 1; buscou-se a união dos grupos que apresentavam ideias semelhantes. Alguns grupos referiam-se, no geral, ao estudante e outros ao professor, ainda que em cada grupo houvesse recortes de ambos os tipos. Então, inicialmente, alguns grupos foram atribuídos à palavra reinvenção (estudante), outros à palavra guiada (professor). No Quadro 3, apresentam-se ideias centrais dos grupos.

Quadro 3 – Agrupamento 2, contendo ideias centrais dos grupos do Agrupamento 1

Grupos	Referem-se...
Princípio da orientação Objetivo da reinvenção guiada	a uma ideia geral do que é a reinvenção guiada
Princípio da atividade Matematização Princípio do entrelaçamento	às ideias, complementares, de matemática e conhecimento matemático
Princípio da realidade Contexto Fenomenologia didática	ao ponto de partida da aprendizagem matemática
Aprendizagem Papel do estudante Princípio de níveis Princípio da interatividade	à aprendizagem
Papel do professor	ao responsável por guiar o estudante na reinvenção guiada
Trajetórias de ensino e aprendizagem Contexto Inversão antididática Avaliação	ao modo de trabalho do professor na reinvenção guiada

Fonte: o autor.

Esses seis grupos do Agrupamento 2 formam os seis primeiros capítulos desta dissertação. Com inspiração nos títulos dos capítulos do livro *Revisiting Mathematics Education* de Freudenthal (1991), esses seis capítulos receberam seus títulos, conforme apresentado no Quadro 4.

Quadro 4 – Apresentação dos capítulos da dissertação

Título	Grupos
Reinvenção Guiada – considerações iniciais	- Princípio da orientação - Objetivo da reinvenção guiada
Reinventar – o quê?	- Princípio da atividade - Matematização - Princípio do entrelaçamento
Reinventar – a partir de onde?	- Princípio da realidade - Contexto - Fenomenologia didática
Reinventar – de que modo?	- Papel do estudante - Aprendizagem - Princípio de níveis - Princípio da interatividade
Guiada – por quem?	- Papel do professor
Guiada – de que modo?	- Trajetórias de ensino e aprendizagem - Inversão antididática - Contexto - Avaliação

Fonte – o autor.

Para a escrita dos capítulos, foram utilizados os recortes presentes nos grupos. Entretanto, somente os recortes que relacionam a reinvenção guiada com os temas não foram suficientes para a escrita. Então, voltou-se aos textos, em cada capítulo, a fim de estudar o que os autores falam a respeito de cada tema, ainda que não tratem da relação entre a reinvenção guiada e o tema. Desse modo, novos recortes foram obtidos e outras informações subsidiaram a escrita dos capítulos.

Além dos textos utilizados para a pesquisa, foi necessária a utilização de dicionários (da Língua Portuguesa, Filosófico, Etimológico, de Sinônimos e Antônimos) para discutir alguns termos utilizados pela Educação Matemática Realística que, em determinados casos, vão de encontro ao significado dos dicionários e, em outros casos, vão ao encontro. Foram utilizados alguns trabalhos produzidos por membros do GEPEMA como subsídio para a escrita, uma vez que alguns contêm contribuições teóricas para temas da RME.

Ao final de cada (sub)capítulo, busca-se uma síntese, em tópicos, de aspectos gerais, a fim de evidenciar a configuração da reinvenção guiada. Desse modo, em cada tópico encontram-se aspectos destacados do (sub)capítulo tendo em vista os objetivos específicos da pesquisa, podendo, em alguns momentos, ser evidenciado o papel do professor, do estudante, ainda que os capítulos não sejam especificamente a respeito dos temas destacados.

Além do capítulo de apresentação, esta dissertação está organizada em mais sete capítulos, da seguinte forma:

- **Reinvenção guiada – considerações iniciais**: contém algumas considerações a respeito do princípio da orientação.
- **Reinventar – o quê?**: refere-se à concepção de matemática da RME.
- **Reinventar – a partir de onde?**: refere-se aos contextos das tarefas utilizadas na reinvenção guiada e à concepção da RME a respeito de realidade.
- **Reinventar – de que modo?**: refere-se ao papel do estudante na perspectiva da reinvenção guiada.
- **Guiada – por quem?**: refere-se ao papel do professor, ao currículo e à formação de professores na perspectiva da reinvenção guiada.
- **Guiada – de que modo?**: refere-se à dinâmica da aula e às ações do professor (tais como avaliação, elaboração de trajetórias de ensino e aprendizagem) na perspectiva da reinvenção guiada.
- **Reinvenção guiada – considerações finais**: contém algumas considerações finais a partir dos estudos apresentados nos demais capítulos.

SUMÁRIO[10]

[10] A minha trajetória, as informações a respeito deste trabalho e os procedimentos metodológicos da pesquisa, que compõem o capítulo de apresentação, levam à construção dos demais capítulos e, consequentemente, deste sumário. Por esse motivo, o sumário foi colocado após a apresentação e refere-se aos capítulos que seguem.

1 REINVENÇÃO GUIADA – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Freudenthal (1973), em seu livro *Mathematics as an Educational Task*, faz críticas a respeito do ensino de matemática como acontecia nas escolas e centros de formação de professores. Criticou o tipo de ensino no qual os estudantes são passivos, receptores de algum conhecimento pronto e acabado, silenciosos, considerando-se apenas a componente individual, e não a social, da aprendizagem[11]. A partir dessa crítica, o autor apresenta um método de ensino que denomina reinvenção guiada (FREUDENTHAL, 1973; SANTOS, 2014).

De acordo com o dicionário Aurélio (2009, p. 1126), o verbo inventar pode significar “ser o primeiro a ter a ideia de; criar na imaginação, imaginar, idear; descobrir, achar”. O verbo guiar pode significar “servir de guia a, orientar, dirigir; aconselhar, orientar” (2009, p. 1015). Ao verbo orientar, podem ser atribuídos os significados: “indicar o rumo a, dirigir, encaminhar, guiar” (2009, p. 1450).

Para Freudenthal (1991), inventar tem um sentido mais abrangente que descoberta, uma vez que abrange tanto o conteúdo quanto a forma; é, portanto, uma palavra que se refere às etapas do processo de aprendizagem. Por sua vez, guiar denota o ensino, o papel do professor.

Com base nas ideias de Freudenthal, a Educação Matemática Realística foi configurada a partir de alguns princípios de ensino e de aprendizagem, os quais constituem, de maneira geral, a base das ideias da RME.

Treffers (1991) afirma que cinco princípios configuram a RME: “exploração fenomenológica”, “construção por instrumentos verticais”, “autoconfiança: construções e produções próprias dos estudantes”, “interatividade” e “entrelaçamento”.

Van den Heuvel-Panhuizen (2000) apresenta uma lista com seis princípios: da realidade, de níveis, da interatividade, do entrelaçamento, da atividade e da orientação. De acordo com a autora, a lista contém os mesmos princípios de Treffers (1991), acrescidos do princípio da orientação, por considerar a importância que Freudenthal dá à reinvenção guiada.

[11] De acordo com De Lange (1999), a RME pode ser considerada como uma abordagem socioconstrutivista. Mais informações a respeito da componente social da aprendizagem (e, portanto, das interações entre estudantes, mutuamente, e com o professor) encontram-se no capítulo 4, “reinventar – de que modo?” na seção 4.3, “a respeito da componente social da aprendizagem”.

Os cinco princípios de Treffers (1991) e os seis de Van den Heuvel-Panhuizen (2000) se relacionam de acordo com o Quadro 5.

Quadro 5 – Relação entre os princípios da RME apresentados por Treffers (1991) e Van den Heuvel-Panhuizen (2000)

Princípios segundo Treffers (1991)	Princípios segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2000)
Exploração fenomenológica	Da Realidade
Construção por instrumentos verticais	De Níveis
Autoconfiança: construções e produções próprias dos estudantes	Da Atividade
Interatividade	Da Interatividade
Entrelaçamento	Do Entrelaçamento
	Da Orientação

Fonte: o autor.

Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2000), esses seis princípios devem ser vistos relacionados entre si, não de maneira biunívoca, mas a partir de uma complexa rede de relações.

Embora o princípio da orientação tenha sido acrescido à lista de princípios por Van den Heuvel-Panhuizen (2000), ele já vinha sendo discutido como um tema de estudo da RME por meio da “reinvenção guiada”. De maneira geral, pode-se dizer que “o princípio da orientação significa que os estudantes dispõem de uma oportunidade ‘guiada’ de ‘reinventar’ a matemática” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010b, p. 5, tradução nossa[12]) experimentando “um processo semelhante ao processo pelo qual a matemática foi inventada” (KWON, 2002, p. 3, tradução nossa[13]).

Aspectos subjacentes a esse princípio, e que o configuram, serão discutidos nos próximos capítulos deste texto.

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ reinvenção guiada é apresentada por Freudenthal como um método de ensino de matemática;

---

[12] *“The guidance principle means that students are provided with a ‘guided’ opportunity to ‘re-invent’ mathematics”.*

[13] *“A process similar to the process by which the mathematics was invented”.*

- ✓ o termo “inventar” abrange conteúdo e forma (que serão inventados) e o termo “guiar” denota o ensino;
- ✓ de acordo com o princípio da orientação, os estudantes têm a oportunidade “guiada” de “reinventar” matemática.

2 REINVENTAR – O QUÊ?

A noção de reinvenção guiada está diretamente ligada ao que se entende por matemática, uma vez que a proposta de reinventar algo deve ser acompanhada do objeto que será reinventado, nesse caso a matemática. Ainda que a resposta para a pergunta “reinventar – o quê?” pareça ser imediata, é necessário discutir o que a abordagem RME considera como matemática.

2.1 A RESPEITO DA MATEMÁTICA COMO UMA ATIVIDADE HUMANA

Um dos princípios da Educação Matemática Realística, princípio da atividade, indica que a matemática é entendida como uma atividade humana. A respeito disso, pretende-se discutir o termo “atividade” e, em seguida, “atividade humana”.

O dicionário Houaiss (2009, CD ROM) apresenta, entre outras acepções para o verbete “atividade”, as seguintes: “qualidade do que é ativo; faculdade ou possibilidade de agir, de se mover, de fazer, empreender coisas; exercício dessa faculdade; ação”. Para Abbagnano (1982), filosoficamente, atividade pode ter dois significados advindos de dois significados da palavra ação. O primeiro refere-se à atividade enquanto antônimo de passividade. Nesse sentido da palavra, entende-se que atividade é uma caracterização daquilo que é ativo, que age, que tem em seu poder a ação (no sentido de fazer, tomar a iniciativa). O segundo significado refere-se à atividade como um complexo mais ou menos homogêneo de ações (no sentido de operações humanas, em que se excluem operações realizadas de tal modo que não podem ser diferentes de como são, como, por exemplo, as operações entre objetos matemáticos, físicos, filosóficos) (ABBAGNANO, 1982).

Tomar a matemática como uma atividade, de acordo com os significados apresentados, implica assumir que ela é caracterizada como ativa, que tem em seu poder a ação; implica, também, que matemática não é uma ciência pronta e acabada, mas um objeto de conhecimento que tem em si movimento, modificação e ação. Nesse sentido, a Educação Matemática Realística valoriza o “fazer matemática”, a ação, ao invés do produto final (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000), ainda que a atividade não seja vista como objetivo em si mesma (TREFFERS, 1987).

Treffers (1987) afirma que tomar matemática como atividade como base para Educação Matemática indica uma oposição às ideias de educação centrada no estudante ou na disciplina e coloca o centro na atividade, em uma concepção em que criança, objeto de estudo e sociedade não devam ser vistos como elementos contraditórios ou separados (TREFFERS, 1987).

Como atividade humana, a matemática é considerada como uma atividade de seres humanos, não somente dos matemáticos. Nesse sentido, entende-se que a matemática deve "ficar perto dos estudantes e ser relevante para a sociedade, a fim de ser de **valor humano**" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 10, tradução nossa[14], grifos nossos), ou seja, ter valor para a constituição da humanidade do indivíduo, enquanto uma atividade relevante para a sociedade a qual ele pertence.

Considerando que matematizar significa organizar e lidar com assuntos a partir de um ponto de vista matemático e que a matemática não é uma atividade restrita aos matemáticos, a ação à qual ela está associada envolve atividades que comumente são associadas aos matemáticos, tais como a resolução de problemas, a procura de problemas, a matematização de assuntos da realidade, a matematização da própria matemática (GRAVEMEIJER, 2008).

Nesse sentido, matematização, atividade de organizar e lidar com assuntos por meio da matemática, denota o "fazer matemática", atividade que envolve, por exemplo, estratégias com características de:

> • **generalidade**: generalizar (procurando analogias, classificação, estruturação);
> • **certeza**: refletir, justificar, provar (usando uma abordagem sistemática, elaborando e testando conjecturas, etc.);
> • **exatidão**: modelar, simbolizar, definir (limitar interpretações e validar); e
> • **brevidade**: simbolizar e esquematizar (desenvolver procedimentos padrão e notações) (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 781, tradução nossa[15], grifos do autor).

Ainda que Treffers (1987) considere artificial, a matematização pode ser admitida em duas componentes: uma horizontal e uma vertical, sendo que a

---

[14] *"Stay close to children and be relevant to society in order to be of human value".*

[15] *"• For generality: generalizing (looking for analogies, classifying, structuring);*
• for certainty: reflecting, justifying, proving (using a systematic approach, elaborating and testing conjectures, etc.);
• for exactness: modelling, symbolizing, defining (limiting interpretations and validity); and
• for brevity: symbolizing and schematizing (developing standard procedures and notations)".

> matematização horizontal conduz do mundo da vida para o mundo dos símbolos. No mundo da vida se vive, age (e sofre); no outro, símbolos são formados, reformulados, e manipulados mecanicamente, conscientemente e reflexivamente: esta é a matematização vertical (FREUDENTHAL, 1991, p. 41-42, tradução nossa[16]).

Para Freudenthal, essa distinção não implica que há diferenças claras entre esses mundos, podendo existir ambiguidades. Van den Heuvel-Panhuizen (2000) afirma que as duas formas de matematização têm igual valor.

A matematização horizontal requer atividades como:

> • identificar as especificidades matemáticas no contexto geral;
> • esquematizar;
> • formular e visualizar o problema;
> • descobrir relações e regularidades;
> • reconhecer similaridades em diferentes problemas (DE LANGE, 1999, p. 18, tradução nossa[17]).

Por outro lado, a matematização vertical é reconhecida a partir das atividades:

> • representar uma relação em uma fórmula;
> • provar regularidades;
> • refinar e ajustar modelos;
> • combinar e integrar modelos;
> • generalizar (ibidem, tradução nossa[18]).

Drijvers (2003) apresenta um esquema (Figura 2) em que matematização horizontal e matematização vertical relacionam contextos experiencialmente reais, quadro de relações matemáticas e modelos matemáticos.

De acordo com a figura, entende-se que, por meio da matematização horizontal, há a elaboração de um modelo matemático que representa um contexto experiencialmente real; além disso, por meio da matematização horizontal, parte-se de um modelo matemático em busca de contextos experiencialmente reais. Com

---

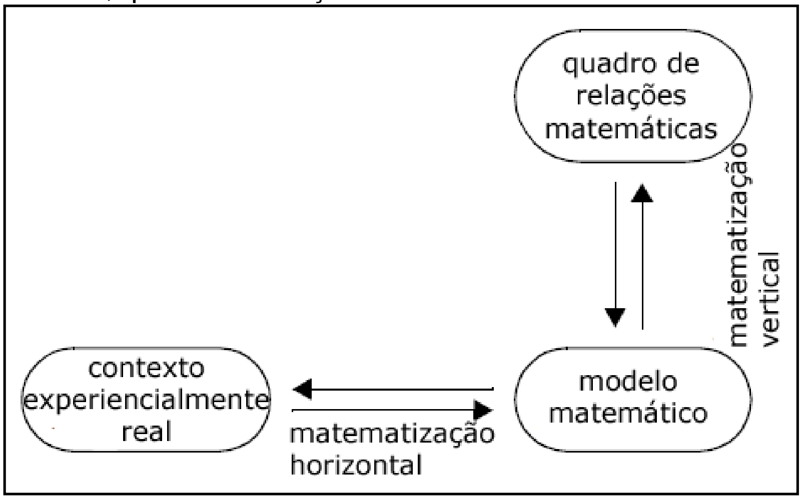
[16] *"Horizontal mathematisation leads from the world of life to the world of symbols. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly; this is vertical mathematisation".*

[17] *"• Identifying the specific mathematics in a general context.*
• Schematizing.
• Formulating and visualizing the problem.
• Discovering relations and regularities.
• Recognizing similarities in different problems".

[18] *"• Representing a relation in a formula.*
• Proving regularities.
• Refining and adjusting models.
• Combining and integrating models.
• Generalizing".

relação à matematização vertical, é por meio dela que, a partir de modelos matemáticos, consegue-se um quadro de relações matemáticas; é por meio da matematização vertical, também, que, a partir de um quadro de relações matemáticas, obtém-se um modelo matemático.

Figura 2 - Matematização horizontal e vertical como relação entre contextos experiencialmente reais, quadro de relações matemáticas e modelos matemáticos.



Fonte: Drijvers (2003, p. 54)

Gravemeijer e Doorman afirmam que, em uma abordagem de reinvenção guiada, é necessário que haja matematização em suas duas componentes e que "é no processo de matematização progressiva – que compreende tanto a componente horizontal quanto a vertical – que os estudantes constroem (nova) matemática" (GRAVEMEIJER; DOORMAN, 1999, p. 117, tradução nossa[19]).

Para Van den Heuvel-Panhuizen (2000), "matematização progressiva" é o resultado de um trabalho com problemas de contexto, que podem ser resolvidos em diferentes níveis de compreensão, de tal modo que os estudantes comuniquem suas resoluções a fim de que possam progredir para níveis mais avançados de compreensão.

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ reinventar matemática se dá por meio do "fazer matemática";
- ✓ matematização progressiva é um meio pelo qual se trabalha a reinvenção guiada;

[19] *"It is in the process of progressive mathematization – which comprises both the horizontal and vertical component – that the students construct (new) mathematics".*

- ✓ na reinvenção guiada é dada igual importância às componentes vertical e horizontal da matematização.

2.2 A RESPEITO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO HISTORICAMENTE ACUMULADO

Na RME, a matemática é vista como uma atividade em que o foco está na ação, no fazer, na matematização, e ao conjunto de conhecimentos historicamente acumulado e validado Freudenthal dá o nome de conhecimento matemático.

Defende-se, na RME, a ideia de que os conteúdos referentes ao conhecimento matemático não devem ser vistos de forma isolada, mas como fios entrelaçados. A essa ideia denomina-se princípio do entrelaçamento. "O princípio do entrelaçamento significa que os domínios do conhecimento matemático como número, geometria, medidas, e tratamento da informação não são considerados como capítulos isolados no currículo, mas como fortemente integrados" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010b, p. 5, tradução nossa[20]).

Considera-se que esse entrelaçamento pode ser encontrado, também, entre diferentes conteúdos de um mesmo domínio (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000; 2010b). De acordo com a autora, "no capítulo de números, por exemplo, tópicos como noção de número, cálculo mental, estimativas e algoritmos estão intimamente relacionados" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 7-8, tradução nossa[21]).

Além disso, Widjaja e Heck (2003) consideram que, a partir desse princípio, há conexões com outras disciplinas e com problemas do mundo real. Nesse sentido, essas conexões estabelecidas propiciam uma fonte para os contextos das situações e problemas, tendo a realidade e os fenômenos como fonte para tal. Uma discussão a respeito desse assunto encontra-se no capítulo "reinventar – a partir de onde?".

---

[20] *"The intertwinement principle means that mathematical domains such as number, geometry, measurement, and data handling are not considered as isolated curriculum chapters but as heavily integrated".*

[21] *"In the number strand, for instance, topics like number sense, mental arithmetic, estimation and algorithms are closely related; this issue is considered in more detail in a later section".*

Ameron aponta implicações do princípio do entrelaçamento para a aprendizagem, ao afirmar que

> processos de aprendizagem podem se tornar mais conectados por entrelaçamento dos conteúdos de aprendizagem. De acordo com Freudenthal não é sensato nem desejável organizar a aprendizagem em faixas separadas, que são, em grande parte, independentes umas das outras. Em vez disso, ele favoreceu um entrelaçamento mútuo e forte entre os conteúdos de aprendizagem, talvez até mesmo envolvendo momentos de aprendizagem prospectiva e retrospectiva para esta finalidade (AMERON, 2002, p. 53, tradução nossa[22]).

De maneira geral, aprendizagem prospectiva refere-se à utilização, pelos estudantes ou pelo professor, de matemática informal para lidar com situações ou problemas. Por exemplo, para trabalhar com frações, o professor propõe a partição de barras de chocolate ou o corte de bolos; a aprendizagem nesse contexto é considerada como aprendizagem prospectiva. Aprendizagem retrospectiva, por sua vez, refere-se à aprendizagem num contexto de retomada da aprendizagem prospectiva, de tal modo que seja mais formal. Para Freudenthal, “aprendizagem retrospectiva tem dupla finalidade: enraizar o novo conhecimento a um antigo e fortalecer as velhas raízes” (FREUDENTHAL, 1991, p. 118, tradução nossa[23]).

Ainda em relação à aprendizagem, Freudenthal considera que,

> em vez de funcionar como faixas separadas que, exceto por referências acidentais e empréstimos, são independentes umas das outras, a aprendizagem deve ser organizada em domínios que são mutuamente entrelaçados tão cedo, tão longo e tão forte quanto possível (FREUDENTHAL, 1991, p. 118, tradução nossa[24]).

Embora a RME entenda que os domínios do conhecimento matemático devam ser entrelaçados, ainda assim, admitem que possam existir “pontas soltas”, ou seja, conteúdos que, por algum motivo, não podem ser entrelaçados aos demais. No caso de existirem pontas soltas, o recomendável é que sejam trabalhadas na primeira oportunidade em que possam ser conectadas com outros conteúdos para dar continuidade ao entrelaçamento (FREUDENTHAL, 1991).

---

[22] *“Learning processes can become more connected by intertwining learning strands. According to Freudenthal it is neither sensible nor desirable to organize learning on separate tracks which are largely independent of each other. Instead he favored a long and strong mutual intertwinement of learning strands, perhaps even involving moments of prospective and retrospective learning for this purpose”.*

[23] *“Retrospective learning serves dual purpose: it roots the new matter in the old one, and it strengthens the old roots”.*

[24] *“Rather than running on separate tracks which, except for incidental references and loans, are independente of one another, learning should be organised in strands which are mutually intertwined as early, as long and as strongly as possible”.*

Para Widjaja e Heck, ter uma visão dos domínios do conhecimento matemático como entrelaçados favorece ao estudante um "espaço de exploração e construção das suas próprias produções e estratégias com vista a desenvolver suas próprias teorias" (WIDJAJA; HECK, 2003, p. 9, tradução nossa[25]), e isso reflete a ideia de reinvenção guiada.

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ os domínios do conhecimento matemático que serão reinventados são vistos de modo entrelaçado;
- ✓ os conteúdos de cada domínio do conhecimento matemático também são vistos como entrelaçados.

[25] *"Room for exploration and for construction of their own products and strategies in order to build up their own theory".*

3 REINVENTAR – A PARTIR DE ONDE?

3.1 DA REALIDADE AOS CONTEXTOS

Na Educação Matemática Realística, o trabalho com situações e problemas tem um papel importante para a aprendizagem matemática. De acordo com Gravemeijer e Terwel (2000), inicia-se o processo de aprendizagem quando estudante lida com situações da realidade. Para os autores,

> os estudantes devem começar por matematizar assuntos da realidade. Depois, eles devem mudar para analisar sua própria atividade matemática. Este último procedimento é essencial, uma vez que ele contém uma componente vertical, que Freudenthal (1971, p. 417), com referência a Van Hiele, descreveu da seguinte forma: 'a atividade em um nível é submetida à análise no próximo, a matéria operacional num nível torna-se assunto no próximo nível' (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 787, tradução nossa[26]).

De acordo com o dicionário Houaiss (2009, CD-ROM), o termo "realidade" é atribuído ao que é real, material. Ainda a partir desse dicionário, "real" pode ser entendido como o que é "relativo ao concreto", "que existe realmente, verdadeiro".

Abbagnano (1982) afirma que o significado filosófico para o termo realidade "indica ao modo de ser das coisas enquanto existem fora da mente humana ou independentemente dela" (ABBAGNANO, 1982, p. 799). A palavra que representa o oposto de realidade, para ele, é "idealidade", que indica o que está na mente, mas ainda não foi (ou não é) incorporado nas coisas.

Mora (1971) afirma que há dois possíveis significados filosóficos para o que é real (ou que pertence à realidade): um que é contrário ao que é aparente, potencial ou possível; outro que é equivalente a "é", "é atual", "existe" e, neste significado, realidade é equivalente a "ser", "atualidade", "existência" (MORA, 1971).

Na abordagem realística, realidade é entendida "como uma mistura de intepretação e experiência sensual" (GRAVEMEIJER; COBB, 2006, p. 63, tradução nossa[27]), não apenas como uma experiência com o que é considerado "concreto".

---

[26] *"Students should begin by mathematizing subject matter from reality. Next, they should switch to analysing their own mathematical activity. This latter procedure is essential since it contains a vertical component, which Freudenthal (1971: 417), with reference to Van Hiele, described in the following manner: 'The activity on one level is subjected to analysis on the next, the operational matter on one level becomes subject matter on the next level'".*

[27] *"As a mixture of interpretation and sensual experience".*

Nesse sentido, faz parte da realidade, por exemplo, o que é material, o que é concreto, o que pode ser experienciado a partir da imaginação, de experiências mentais e dos sentidos (o que é idealizado). Isso implica que o conhecimento matemático também pode ser considerado como parte da realidade. Desse modo, usa-se o adjetivo **realístico** para as situações pertencentes à realidade como é entendida pela abordagem.

A realidade é fonte para a escolha dos contextos das tarefas utilizadas na Educação Matemática Realística. Para Van den Heuvel-Panhuizen (2005), contexto pode ser entendido de duas maneiras distintas em ambientes educacionais:

> - **o ambiente de aprendizagem***:* isso inclui tanto as diferentes situações em que a aprendizagem ocorre [...] e a dimensão interpessoal da aprendizagem [...].
>
> - **uma característica de uma tarefa apresentada aos estudantes**: referindo-se tanto às palavras e imagens que ajudam os estudantes a compreender a tarefa, ou a respeito da situação ou evento em que a tarefa está situada. A descrição de um contexto, dada por Borasi (1986), se aproxima da interpretação de um contexto como característica de uma tarefa (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 2, tradução nossa[28], grifos do autor).

De acordo com Borasi (1986), contexto pode ser entendido como a situação em que a tarefa está embutida e tem como função fornecer informações para auxiliar quem resolve a tarefa. Para a autora, usualmente no texto da tarefa já está contido, ainda que parcialmente, o seu contexto; em alguns casos, o contexto é completamente dado pelo texto da tarefa (BORASI, 1986).

Para Doorman et al (2007), a escolha de problemas de contexto pode oferecer aos estudantes oportunidade de desenvolverem estratégias, modelos de resolução. Ainda, segundo Gravemeijer e Doorman (1999), os problemas de contexto podem auxiliar os estudantes a reinventar a matemática, servindo como um "ponto de ancoragem".

Na RME, "problemas de contexto" são aqueles que estão embutidos em alguma situação/evento, ou um conjunto de situações/eventos, ainda que seja na própria matemática. Aos problemas que não têm contexto algum, e, portanto, não

---

[28] *"• The learning environment: this includes both the different situations in which learning takes place [...] and the interpersonal dimension of learning [...]. • a characteristic of a task presented to the students: referring either to the words and pictures that help the students to understand the task, or concerning the situation or event in which the task is situated. The description of a context, given by Borasi (1986), comes close to the interpretation of a context as a task characteristic".*

estão embutidos em alguma situação/evento, dá-se o nome de *bare problem* (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) apresenta dois enunciados de tarefas (Figura 3) e afirma que o primeiro é considerado como *bare problem*, enquanto o segundo é considerado como problema de contexto:

Figura 3 – Um exemplo de *Bare problem* e um de problema de contexto

Questão 5:	Escreva a resposta: $1 - \frac{1}{4} =$_________ (resposta).
Questão 18:	Um bolo é cortado em quatro partes iguais e Bill pega uma das partes. Qual *fração* do bolo *"que sobra"*?

Fonte: traduzido de Van den Heuvel Panhuizen (1996, p. 121).

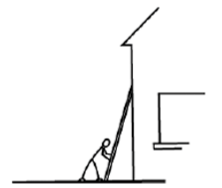
Freudenthal (1981) aponta a importância dos contextos para a matematização. De acordo com o autor, contextos oferecem oportunidades para matematização e, consequentemente, para aprender. Para Doorman e Gravemeijer (2009), a matematização à qual Freudenthal (1981) se refere é a matematização progressiva, que é oportunizada a partir da boa escolha de contextos e envolve atividades de formalização e generalização que visam constituir um processo de abstração (DOORMAN; GRAVEMEIJER, 2009).

Na RME, buscam-se nos contextos das tarefas oportunidades para matematizar e "reinventar novos conteúdos matemáticos" (DE LANGE, 1999, p. 29, tradução nossa[29]) e, nesse sentido, De Lange (1999) apresenta uma classificação em relação à relevância e ao uso dos contextos. De acordo com esse autor, contextos de **ordem zero** são utilizados apenas para fazer com que um problema pareça-se com um problema do "mundo real"[30]; contextos de **primeira ordem** são aqueles em que o contexto é relevante e necessário para resolver o problema e verificar a resposta; contextos de **segunda ordem** são aqueles em que é necessária alguma matematização para resolver o problema e o contexto é necessário e relevante para verificar a resposta; contextos de **terceira ordem** servem para construção ou

[29] *"Reinvention of new mathematical concepts".*
[30] Aqui, a expressão "mundo real" foi escrita com o uso de aspas por tratar-se de uma noção de realidade de acordo com o dicionário Houaiss, não de acordo com a concepção de Freudenthal. Além disso, usam-se as aspas por aparentar existir uma distinção entre "mundo real", "mundo da matemática" e outros mundos.

reinvenção de novos conteúdos matemáticos (DE LANGE, 1999, p. 26). No Quadro 6, apresentam-se exemplos de tarefas com contextos de ordem zero, primeira ordem, segunda ordem e terceira ordem.

Quadro 6 – exemplos de tarefas com contextos de ordem zero, primeira ordem, segunda ordem e terceira ordem

Uso do contexto	Exemplo
Ordem zero	- A secção transversal de um copo de vinho tem a forma da sinusoide seguinte (ou parte dela): $y = 3.\sin\left(x + \frac{1}{2}\right) + 3$ Determinar o volume do presente vidro **Fonte**: Dekker e Querelle (2002).
Primeira ordem	- Para uma reunião escolar noturna são esperados 150 pais. Em cada mesa podem ser colocadas quatro cadeiras. Quantas mesas são necessárias? Mostre como você encontrou a sua resposta. **Fonte**: Dekker e Querelle (2002).
Segunda ordem	- Uma escada de três metros de comprimento é colocada contra a parede, um metro a partir da parte inferior da parede. Até que altura da parede a escada pode alcançar? **Fonte**: Dekker e Querelle (2002). 
Terceira ordem	- Aqui você vê o Problema Ônibus.  1. Use setas para este problema. *resposta:* *4* *3 → 7* 2. Agora faça o seu próprio problema **Fonte**: Dekker e Querelle (2002).

Fonte: adaptado de Ferreira (2013, p. 45-46).

Ainda que os contextos das tarefas tenham um importante papel para o processo de matematização e reinvenção, Drijvers (2000) aponta que uma atenção principal deve ser dada aos processos em si (de matematização e reinvenção).

Além disso, ressalta-se que a

> realidade e o que uma pessoa percebe como o senso comum não são estáticos, mas crescem, e são afetados pelo processo de aprendizagem do indivíduo. O objetivo da Educação Matemática Realística, então, é apoiar os estudantes na criação de uma nova realidade matemática. Isto é para ser realizado pela reinvenção

> guiada, ou 'matematização progressiva' – se tomarmos a perspectiva do estudante (GRAVEMEIJER; COBB, 2006, p. 63-64, tradução nossa[31]).

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ na reinvenção guiada, o processo de aprendizagem se inicia quando o estudante lida com situações realísticas;
- ✓ são utilizados problemas de contexto para dar oportunidade aos estudantes de reinventar matemática;
- ✓ contextos de terceira ordem, especialmente, oportunizam reinvenção guiada;
- ✓ a reinvenção guiada pode ser um caminho para auxiliar o estudante a criar uma nova realidade matemática.

3.2 Dos Fenômenos (*phainómenon*) aos Objetos de Pensamento (*nooumenon*)

A partir dos contextos advindos da realidade, Freudenthal (1983) fala em fenomenologia didática[32], que, de acordo com Drijvers (2003), pode auxiliar a organizar a reinvenção guiada por meio da matematização progressiva. Para definir fenomenologia de acordo com sua perspectiva, Freudenthal (1971), antes, faz uma distinção entre fenômeno (*phainómenon*) e objeto de pensamento (*nooumenon*). Para ele, fenômenos são situações ou objetos realísticos e o *nooumenon* serve para descrever e organizar um *phainómenon*. (FREUDENTHAL, 1971).

Com relação aos objetos matemáticos, a Educação Matemática Realística entende que estes podem ser experienciados como *phainómenon*, ainda que sejam *nooumenon*. Nesse sentido, Freudenthal explica que, por exemplo, "números são *nooumenon*, mas trabalhar com números pode ser um *phainómenon*" (FREUDENTHAL, 1971, p. 28, tradução nossa[33], grifos do autor). Entende-se que os

---

[31] *"Reality and what a person perceives as common sense is not static but grows, and is affected by the individual's learning process. The goal of realistic mathematics education then is to support students in creating some new mathematical reality. This is to be realized by guided reinvention, or, "progressive mathematization" - if we take a student perspective".*

[32] Freudenthal (1983) afirma que o termo "fenomenologia" não é utilizado por ele do mesmo modo que o utilizam os filósofos Hegel, Husserl e Heidegger.

[33] *"Numbers are nooumena, but working with numbers can be a phainómenon".*

objetos matemáticos podem assumir a condição de *phainómenon* uma vez que são aceitos, na RME, como objetos da realidade.

A partir dessa distinção, pode-se dizer que, para a RME,

> fenomenologia de um conceito matemático, uma estrutura matemática, ou uma ideia matemática significa [...] descrever esse *nooumenon* em relação ao *phainómenon* em que ele é o meio de organização, indicando que fenômenos ele é criado para organizar, e para quais ele pode ser estendido, como ele atua sobre esses fenômenos como meio de organização, e com qual poder sobre esses fenômenos que nos conferem (FREUDENTHAL, 1971, p. 28, tradução nossa[34], grifos do autor).

Gravemeijer e Terwel (2000) afirmam que trabalhar fenomenologicamente implica encontrar situações que podem ser utilizadas como ponto de partida para a generalização da maneira de abordá-la. Para os autores, uma das maneiras de se fazer isso é buscar entender como a matemática utilizada para lidar com essas situações foi inventada (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000).

Para Drijvers (2003), a fenomenologia didática proposta por Freudenthal pode servir como um meio para que ocorra reinvenção guiada por meio da matematização progressiva. Nesse sentido, o trabalho de reinvenção dos objetos mentais se dá, de acordo com Keijzer (2003), quando se reexperimenta o processo histórico vivido na elaboração daquele objeto matemático. Tais ideias vão ao encontro das ideias de Freudenthal (1991), uma vez que este assume que, didaticamente, a vivência da elaboração de objetos matemáticos é um fato fenomenológico e surge por meio da reinvenção guiada.

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ a reinvenção guiada pode ser organizada por meio da fenomenologia didática;
- ✓ busca-se entender como a matemática foi inventada de maneira fenomenológica.

---

[34] *“Phenomenology of a mathematical concept, a mathematical structure, or a mathematical idea means [...] describing this nooumenon in its relation to the phainomena of which it is the means of organising, indicating which phenomena it is created to organise, and to which it can be extended,how it acts upon these phenomena as a means of organising, and with what power over these phenomena it endows us”.*

4 REINVENTAR – DE QUE MODO?

4.1 A RESPEITO DO ESTUDANTE COMO AUTOR DO CONHECIMENTO

Keijzer, Galen e Oosterwall (2004) afirmam que, no início dos anos 2000, a maioria dos pesquisadores da área de Educação Matemática considerava a aprendizagem como um processo de construção. Essa ideia de aprendizagem como processo de construção é princípio chave para a RME e "é descrita como um processo de reinvenção: até certo ponto, os estudantes recapitulam o processo de aprendizagem da humanidade" (KEIJZER; GALEN; OOSTERWALL, 2004, p. 1, tradução nossa[35]).

Nesse sentido, espera-se

> que os estudantes desempenhem um papel ativo em construir seu próprio conhecimento matemático [...]. A educação é projetada para se encaixar o máximo possível ao conhecimento informal dos estudantes, e por isso ajudá-los a alcançarem um nível mais alto de entendimento através da reinvenção guiada (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 89, tradução nossa[36]).

De acordo com Van den Boer (2004), o papel ativo que os estudantes desempenham refere-se a, entre outras atividades, justificar suas estratégias de resolução e escutar os outros estudantes, tentar entender as diferentes estratégias, pedir esclarecimentos nas resoluções e participar de discussões. Ameron (2002) elenca outras características de atitudes do estudante que contribuem para a aprendizagem matemática em um ambiente de reinvenção guiada: participação ativa, reflexão e interesse em novas estratégias de resolução.

De acordo com Keijzer, Galen e Oosterwall (2004), faz sentido falar em reinvenção guiada como um paradigma para desenvolver matemática, ainda que a RME entenda que a aprendizagem se dá por construção, uma vez que

> o conceito de reinvenção faz que os desenvolvedores considerem a construção do conhecimento matemático de um ponto de vista histórico. E quando o ponto de vista histórico é levado a sério, o ensino de matemática não é focado em aprender algoritmos e procedimentos, mas terá como objetivo compreender conceitos principais, no sentido

---

[35] *"Is described as a process of reinvention: up to a certain point, students recapitulate the learning process of mankind".*

[36] *"The students are expected to play an active role in constructing their own mathematical knowledge [...]. The education is designed to dovetail as closely as possible with the students' informal knowledge, and therefore help them to achieve a higher level of understanding through guided re-invention".*

> de que o princípio da reinvenção abre o caminho para o desenvolvimento da Educação Matemática, uma vez que ajuda a descrever a atividade dos estudantes (KEIJZER; GALEN; OOSTERWALL, 2004, p. 6, tradução nossa[37]).

Freudenthal buscou na história da matemática inspiração para pensar na reinvenção guiada (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000). O objetivo é que o processo histórico de elaboração do conhecimento matemático seja levado em consideração e, de acordo com Streefland (1991), a reinvenção guiada faz jus a isso. Para Streefland (1991), os estudantes não precisam refazer os caminhos percorridos pela humanidade para a invenção de um conteúdo matemático, mas devem agir de acordo com o mesmo espírito[38]; fazendo isso, acaba-se por "impedir que o processo de aprendizagem comece a partir de um nível muito elevado de abstração e, ao mesmo tempo, pode ajudar a implementar uma progressão gradual em matematização de acordo com um exemplo histórico" (STREEFLAND, 1991, p. 19, tradução nossa[39]).

É nesse sentido que Ameron (2002) destaca que a ideia do "guiar" assume um importante papel na construção do conhecimento, uma vez que é a orientação que faz com que os estudantes não precisem inventar os conteúdos por si só, nem dispor somente de suas ferramentas matemáticas, como foi feito durante o processo histórico. Ainda assim, os estudantes vão tornando-se autores do seu conhecimento matemático seguindo um caminho guiado por uma reconstrução racional do processo histórico de elaboração do conhecimento matemático (STREEFLAND, 1991).

Por meio dessa reconstrução histórica, espera-se que os estudantes tornem-se responsáveis pelos seus conhecimentos matemáticos (GRAVEMEIJER; DOORMAN, 1999).

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ a aprendizagem acontece como um processo de construção, em que o estudante recapitula o processo histórico de

---

[37] *"The concept of reinvention makes that developers consider the construction of mathematics from a historical point of view. And when this historical point of view is taken seriously, teaching mathematics will not be focused on learning algorithms and procedures, but will aim at understanding major concepts, in a sense that the reinvention principle paves the way for developing mathematics education, as it helps to outline students' activities".*

[38] "Agir de acordo com o mesmo espírito" tem o sentido de que as ações dos estudantes assemelham-se em alguns aspectos às ações que ocorreram na elaboração do conhecimento matemático, como o encontro com a situação da qual conteúdos serão reinventados ou a utilização de conhecimentos próprios.

[39] *"Prevent starting the learning process at too high a level of abstraction and, at the same time, can help implement a gradual progression in mathematization according to an historical example".*

elaboração do conhecimento matemático, não refazendo os caminhos percorridos historicamente, mas agindo de acordo com o mesmo espírito;

- ✓ busca-se que os estudantes alcancem níveis mais altos de entendimento a partir de seus conhecimentos informais ou não, por meio da reinvenção guiada;
- ✓ o estudante tem papel ativo na reinvenção guiada;
- ✓ cabe ao estudante, além de outras atividades, justificar suas estratégias de resolução e escutar com atenção os outros estudantes, tentar entender as diferentes estratégias, pedir esclarecimentos nas resoluções, participar de discussões, participação ativa, reflexão e interesse em novas estratégias de resolução;
- ✓ o estudante vai tornando-se autor do e responsável pelo seu conhecimento matemático.

4.2 A Respeito dos Níveis de Aprendizagem

Em relação à aprendizagem, na Educação Matemática Realística, as estratégias informais de resolução dos estudantes são consideradas como ponto de partida para se chegar a modelos mais formais de resolução. Esse processo em que se busca uma passagem entre conhecimento matemático informal e matemática formal é chamado de princípio de níveis (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010b).

De acordo com Gravemeijer e Doorman (1999), há uma lacuna entre o conhecimento matemático informal e a matemática formal; tal lacuna pode ser preenchida por meio da reinvenção guiada.

Aos estudantes deve ser dada a oportunidade de desenvolverem suas próprias estratégias informais, intuitivas de resolução, a fim de que, por meio de estratégias pré-formais e da orientação do professor, comecem a utilizar estratégias mais formais (VAN REEWIJK, 2001).

Além disso,

> o princípio de reinvenção sugere investigar se as interpretações e soluções informais dos estudantes podem “antecipar” práticas

> matemáticas mais formais. Se assim for, o raciocínio inicialmente informal dos estudantes pode ser usado como um ponto de partida para o processo de reinvenção (GRAVEMEIJER, 2008, p. 289, tradução nossa[40]).

Entende-se que a matematização presente em um nível pode servir como objeto de investigação para um próximo nível (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003, p. 11). Ainda assim, Ameron (2002) considera que o caminho que vai do uso de estratégias informais ao uso de estratégias mais formais não é sempre suave, linear e inequívoco. Ele pode ocorrer ao mesmo tempo em que o estudante lida com suas atividades matemáticas, uma vez que essas "ativam e – quando necessário – induzem a invenção de uma estratégia mais avançada em cada nível" (AMERON, 2002, p. 76, tradução nossa[41]).

Van den Heuvel-Panhuizen afirma que a passagem entre os níveis acontece por meio da **reflexão** a partir de **modelos** dos estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003).

Oliveira (2014) faz uma distinção entre "sistema" e "modelo": para ele, sistemas são apresentados como modelos pré-existentes nas abordagens que tomam a matemática como um produto, enquanto os modelos surgem a partir da própria atividade dos estudantes na RME.

No princípio de níveis, Gravemeijer (2007) destaca a "atividade de modelação", em que modelação é entendida como

> uma atividade dos estudantes, que são convidados a resolver um problema de contexto. Então, os estudantes modelam o problema, a fim de resolver com auxílio do modelo. Tal atividade de modelação pode envolver fazer desenhos, diagramas ou tabelas, ou pode envolver o desenvolvimento de notações informais ou usando notações matemáticas convencionais. A conjectura é que agir com estes modelos vai ajudar os estudantes a reinventar a matemática mais formal que é objetivada (GRAVEMEIJER, 2007, p. 11, tradução nossa[42]).

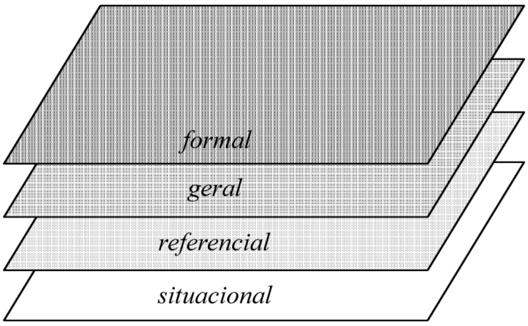
---

[40] *"The reinvention principle suggests investigating whether students' informal interpretations and solutions might 'anticipate' more formal mathematical practices. If so, students' initially informal reasoning can be used as a starting point for the reinvention process".*
[41] *"Enable and – when necessary – induce the invention of a more advanced strategy at each level".*
[42] *"An activity of the students, who are asked to solve a contextual problem. Then the students model the problem, in order to solve it with help of that model. Such a modeling activity might involve making drawings, diagrams, or tables, or it could involve developing informal notations or using conventional mathematical notations. The conjecture is that acting with these models will help the students reinvent the more formal mathematics that is aimed for".*

Não se entende que a matemática formal se configura como separada ou independente do sujeito, mas que emerge da transição entre modelos utilizados pelos estudantes, em especial da transição entre “modelo de” e “modelo para” (GRAVEMEIJER, 2007). “Modelo de” é aquele que organiza uma situação, enquanto o “modelo para” é, de forma mais geral, o que organiza um conjunto de situações (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003; GRAVEMEIJER, 2007).

Essa ideia de “modelo de” e “modelo para” inspirou Gravemeijer (2007) a pensar nos níveis referencial (modelo de) e geral (modelo para) situados entre modelos em nível situacional e modelos em nível formal (Figura 4).

Figura 4 – Níveis apresentados por Gravemeijer.



Fonte: Gravemeijer (2007, p. 14).

Os níveis podem ser entendidos como:

> • situacional: no qual o domínio específico, conhecimento e estratégias são utilizados unicamente dentro do contexto da situação;
>
> • referencial (modelo de): no qual modelos e estratégias se referem à situação descrita no problema, são os "modelos de";
>
> • geral (modelo para): no qual o foco matemático das estratégias se sobrepõe à referência ao contexto, com isso, os modelos servem para representar outras situações, são os "modelos para";
>
> • formal: no qual se trabalha com procedimentos e notações já convencionais (CIANI, 2012, p. 31-32).

A Figura 3 pode ser utilizada para o estabelecimento de algumas diferenças entre a abordagem realística e a estruturalista. Na abordagem realística, portanto em uma abordagem de reinvenção guiada, o caminho é de baixo para cima, começando por estratégias informais a fim de obter estratégias formais, enquanto na abordagem estruturalista o caminho é de cima para baixo, começando pela apresentação de estratégias formais, seguindo para o uso informal de conteúdos em situações (DRIJVERS, 2000; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003).

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ por meio da reinvenção guiada pode-se preencher a lacuna existente entre a matemática informal e a matemática formal;
- ✓ usam-se as estratégias informais dos estudantes como ponto de partida para a reinvenção;
- ✓ a matemática formal emerge da transição entre “modelo de” e “modelo para”.

4.3 A Respeito da Componente Social da Aprendizagem

Ainda que a RME dê atenção aos processos envolvidos na elaboração do conhecimento de forma intrínseca ao indivíduo, considera-se, também, que aprender é uma atividade social. De acordo com Ameron (2002), a interação entre os estudantes uns com os outros e entre eles e o professor é o que, de certa forma, implementa a reinvenção do conteúdo matemático.

De Lange (1999) afirma que, por meio de discussão, justificação, explicação, ilustração e analogias, os estudantes que lidam com problemas em diferentes níveis podem construir argumentos para elaborar ou comunicar resoluções para tarefas matemáticas, contribuindo tanto para a aprendizagem da turma quanto para a aprendizagem individual. Com a argumentação, os estudantes constroem estruturas semelhantes com base em diferentes situações de argumentação, “o que leva ao desenvolvimento matemático conceitual” (DE LANGE, 1999, p. 30, tradução nossa[43]).

Gravemeijer (2008) destaca que o aspecto coletivo da aprendizagem na reinvenção guiada se dá de maneira especial pela interação entre estudantes, tendo essa interação a função de catalisar a aprendizagem dos sujeitos. Portanto, espera-se que as tarefas suscitem o maior número de resoluções distintas possível, para serem exploradas pelo professor, que promove uma discussão entre os estudantes, destacando as diferenças entre os conteúdos matemáticos subjacentes às resoluções. Essa pode ser uma maneira para promover o processo de reinvenção guiada (GRAVEMEIJER, 2008).

---

[43] *“Which leads to conceptual mathematical development”.*

Santos (2014) salienta a interação entre professor e estudante na reinvenção guiada, a partir da análise da produção escrita, como fonte de informações para orientar os processos de ensino, de aprendizagem e de avaliação. Nesse sentido, a análise da produção escrita

> como estratégia de ensino pode ser utilizada para auxiliar o professor na obtenção de informações sobre os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, as quais posteriormente podem subsidiar a elaboração de intervenções, comentários e/ou questionamentos na produção do aluno (CIANI, 2012; PIRES, 2013) de modo que esse possa, sob orientação do professor, desenvolver ferramentas matemáticas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2000, 2002), isto é, ser autor de seu próprio conhecimento matemático, como preconiza a RME (SANTOS, 2014, p. 63).

Kwon (2002) entende que a interação entre estudantes (mutuamente) e com o professor se dá por meio de uma discussão centrada em conjecturas, explicações e justificações, ou seja, na comunicação (oral, escrita) da atividade matemática. De Lange (2005) entende que a competência de comunicação matemática, ao lado de outras[44], é necessária para a literacia matemática.

Ainda que a RME ressalte a importância da comunicação das resoluções entre estudantes que resolvem tarefas em diferentes níveis, cabe ressaltar que “isso não significa que a turma toda está procedendo coletivamente e que todo estudante está seguindo o mesmo caminho e alcançando o mesmo nível de desenvolvimento no mesmo momento” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 9, tradução nossa[45]).

A essa ideia de que a aprendizagem acontece, também, por meio de uma interação social, dá-se o nome de princípio da interatividade, subsidiada pelas ideias de Freudenthal (1981) que afirmava que,

> ao invés de na poltrona ou no laboratório, problemas educacionais são resolvidos no processo educacional [...]. Se isso é verdade, então no nosso mundo real resolvê-los será um processo lento, **um processo social**, um longo processo de aprendizagem da sociedade. Ele pode ser conduzido, pode ser guiado? Pode possivelmente haver uma

[44] Pensamento e raciocínio matemático, argumentação matemática (no sentido de demonstrações matemáticas), modelação, resolução e proposição de problemas, representação, uso de símbolos e ferramentas e tecnologias.

[45] *“This does not mean that the whole class is proceeding collectively and that every student is following the same track and is reaching the same level of development at the same moment”.*

> estratégia de mudança? (FREUDENTHAL, 1981, p. 147, tradução nossa[46], grifos nossos).

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ a aprendizagem na reinvenção guiada é uma atividade social e acontece por meio da interação entre os estudantes (mutuamente) e o professor;
- ✓ cabe ao professor, entre outras atividades, promover discussões entre os estudantes a partir das diferentes resoluções suscitadas pelas tarefas;
- ✓ cabe ao professor, entre outras atividades, analisar a produção escrita dos estudantes para orientar os processos de ensino, aprendizagem e avaliação;
- ✓ a interação na reinvenção guiada ocorre por meio da comunicação (oral, escrita) da atividade matemática.

[46] *“Rather than in the armchair or in the laboratory, educational problems are solved in the educational process [...] If this is true, then in our real world solving them will be a slow process, a social process, a long learning process of the society. Can it be steered, can it be guided? Can there possibly be a strategy of change?”.*

5 GUIADA – POR QUEM?

5.1 O PROFESSOR NA REINVENÇÃO GUIADA

Ainda que na reinvenção guiada se fale de reinvenção e se coloque o estudante com papel ativo na construção do seu conhecimento matemático, isso não implica que o professor seja um espectador no processo de aprendizagem; “na verdade, o papel do professor pode ser ainda mais importante nesta abordagem que nas abordagens tradicionais de aprendizagem” (KWON, 2002, p. 5, tradução nossa[47]). Essa importância se dá uma vez que o professor orienta os estudantes nos caminhos a serem percorridos, auxiliando que desenvolvam sensivelmente suas direções e deixem as “ruas sem saída” (DRIJVERS, 2003). Outra justificativa para a importância do papel do professor na reinvenção guiada se dá pelo fato de que os estudantes não podem simplesmente reinventar a matemática que os matemáticos demoraram para desenvolver (GRAVEMEIJER, 2008); cabe ao professor auxiliar os estudantes nesse processo.

Guiar os estudantes para a reinvenção de conteúdos matemáticos não implica uma contradição com a concepção de matemática e de aprendizagem da abordagem realística, como é mostrado pelo papel do professor. De acordo com Drijvers (2003), em sala de aula o professor tem a função, na reinvenção guiada, de verificar, durante o processo de aprendizagem, a convergência das produções dos estudantes para as normas comuns dentro da comunidade matemática (DRIJVERS, 2003), ou seja, validar a matemática que os estudantes estão utilizando para resolução das tarefas com base no conhecimento matemático, historicamente construído e validado. Não se tem, assim, uma visão de aprendizagem como aquisição de uma matemática pronta e acabada.

Cabe ao professor desenhar rotas de reinvenção para guiar os estudantes nas aulas de matemática a desenvolverem sua “própria matemática” (DRIJVERS, 2003). Nesse sentido, o professor assume o papel de *designer* e, neste trabalho, trataremos “*designer*” e “professor” como sinônimos.

---

[47] *“In fact, the instructor’s role might even be more important in this approach than in the traditional dissemination approach to learning”.*

Uma das maneiras de desenhar rotas de reinvenção é por meio da elaboração de trajetórias de ensino e aprendizagem, o que será discutido no próximo capítulo (“guiada – de que modo?”).

A rota de reinvenção, de acordo com Gravemeijer (2004), pode levar os estudantes a reinventar a matemática pretendida pelo professor; ou, ao menos, experimentar o processo de reinvenção. Para o autor, duas fontes de inspiração podem ser levadas em conta ao desenhar a rota: os procedimentos informais de resolução dos estudantes e a História da Matemática (GRAVEMEIJER, 2004).

A respeito das resoluções informais, Drijvers (2003) sugere ao professor que se questione sobre como abordaria o problema se nunca o tivesse visto ou como ele teria reinventado o conteúdo matemático se ainda não o conhecesse.

Atenção especial deve ser dada para a construção dos problemas, para que a orientação não se torne muito “suave”, ou seja, o trabalho em sala de aula seja reduzido a lidar com as questões sem que os estudantes tenham consciência do conhecimento que estão reinventando. Doorman considera que a questão-chave do trabalho deve ser relevante e clara para os estudantes e sugere que, “depois de resolver um problema, os estudantes representam por eles mesmos as próximas perguntas que devem ser respondidas de acordo com a questão inicial” (DOORMAN, 2002, p. 100, tradução nossa[48]). Além disso, sugere que constantemente o professor retome a reflexão a respeito do que se está trabalhando (DOORMAN, 2002).

A respeito da História da Matemática, Ameron (2002) afirma que ela pode auxiliar nas rotas de reinvenção indicando possíveis etapas intermediárias entre estratégias informais e matemática formal e possíveis obstáculos que podem ser encontrados na reinvenção do conteúdo matemático (AMERON, 2002). A História da Matemática também pode auxiliar o professor em suas dificuldades específicas que envolvem o desenvolvimento dos conteúdos (BAKKER; GRAVEMEIJER; DOORMAN, 1999), por isso aconselha-se o professor a procurar especialmente por potenciais barreiras conceituais, impasses e avanços históricos para que desenhe as rotas de reinvenção (GRAVEMEIJER, 2008).

Kwon (2002) considera que a História da Matemática pode ser, para o professor, uma fonte de inspiração para pensar em estratégias informais dos estudantes, quando, na história do desenvolvimento do conteúdo, outras estratégias

[48] *“After solving a problem, the students pose by themselves the next questions that have to be answered in accordance with this key issue”.*

foram utilizadas até se chegar ao conteúdo ou ao procedimento de resolução de problemas.

Além da construção de conjuntos de problemas, Ameron aponta como função do professor o "estabelecimento de normas sociais e matemáticas claras e um ambiente propício de aprendizagem, estimulando e orientando os processos de aprendizagem e mantendo os estudantes envolvidos" (AMERON, 2002, p. 160, tradução nossa[49]).

Esse ambiente pode proporcionar ao estudante um interesse pelo que vai ser reinventado, cabendo ao professor perguntas como:

> qual é o princípio geral aqui? Por que isso funciona? Isso sempre funciona? Podemos descrevê-lo de uma maneira mais precisa? Nós podemos supor que o professor pode estimular o interesse matemático, fazendo das questões matemáticas um tópico de conversa, e mostrando um interesse genuíno no raciocínio matemático dos estudantes (GRAVEMEIJER, 2008, p. 289, tradução nossa[50]).

Por meio das discussões, o professor conduz a rota de reinvenção planejada por ele. Nos momentos em que as questões construídas suscitam umas estratégias mais formais que outras, o professor pode explorar as diferenças entre as resoluções. De acordo com Gravemeijer (2008), uma alternativa é enquadrar a questão matemática que sublinha as diferenças; outra é buscar as diferenças como tópico de discussão. Caso essas diferenças não existam, o próprio professor pode fazer perguntas que suscitem respostas que levem o estudante à reinvenção dos conteúdos (GRAVEMEIJER, 2008).

Cabe ressaltar que a orientação do professor não tem como função demonstrar o que os estudantes devem aprender. Van den Heuvel-Panhuizen (2001) afirma que agir assim iria contradizer o princípio da atividade. Os professores, então,

> precisam proporcionar aos estudantes um ambiente de aprendizagem em que esse processo de construção possa emergir. Uma exigência para isso é que os professores precisam ser hábeis em prever onde e como podem antecipar as compreensões e habilidades dos estudantes que são apenas vistas a distância [...]. Sem essa

---

[49] *"Establishing clear social and math norms and a positive learning environment, stimulating and guiding the learning process and keeping students involved".*

[50] *"What is the general principle here? Why does this work? Does it always work? Can we describe it in a more precise manner? We may assume that the teacher can foster the students' mathematical interest by making mathematical questions a topic of conversation, and showing a genuine interest in the students' mathematical reasoning".*

> perspectiva não é possível guiar a aprendizagem dos estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001, p. 55, tradução nossa[51]).

A respeito da formação do professor de matemática, Freudenthal (1971) questiona: "em qual ordem, se não em uma dedutiva, os matemáticos deveriam ser ensinados?" (FREUDENTHAL, 1971, p. 416, tradução nossa[52]). E o próprio autor responde:

> na [ordem em] que ela pode ser aprendida, ou seja, na ordem em que poderia ser inventada pelo estudante. Isto não é de nenhuma forma uma ideia revolucionária. É um método socrático. Em uma experiência de pensamento o professor tem reinventado o assunto como se ele mesmo fosse o estudante, e isto é o que ele ensina. Estudantes de didática modernos iriam pedir para que ao invés de ensinar a reinvenção, o professor deveria fazer o estudante reinventar o assunto ele mesmo. Este é um reforço moderno da ideia socrática (FREUDENTHAL, 1971, p. 416, tradução nossa[53]).

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ o professor tem um importante papel na construção do conhecimento dos estudantes;
- ✓ cabe ao professor desenhar rotas de reinvenção e orientar os estudantes nos caminhos escolhidos e percorridos por eles;
- ✓ cabe ao professor verificar, durante o processo de aprendizagem, a convergência das produções dos estudantes para as normas comuns dentro da comunidade matemática;
- ✓ rotas de reinvenção levam os estudantes a reinventar a matemática pretendida pelo professor; ou, ao menos, a experimentar o processo de reinvenção;
- ✓ o professor pode se inspirar na História da Matemática ou nas resoluções informais dos estudantes para desenhar rotas de reinvenção;

---

[51] *"Have to provide the students with a learning environment in which this constructing process can emerge. A requirement for this is that teachers must be able to foresee where and how they can anticipate the students' understandings and skills that are just coming into view in the distance […]. Without this perspective it is not possible to guide the students' learning".*

[52] *"In which order, if not in a deductive one, should mathematics be taught?"*

[53] *"In that one in which it can be learned, which means, the order in which it could be invented by the student. This is not at all a revolutionary idea. It is the socratic lesson. In a thought experiment the teacher has been reinventing the subject matter as though he himself were the student, and this is what he teaches. Modern didacticians would require that rather than teaching the reinvention, the teacher should have the student reinventing himself the subject matter. This is a modern reinforcement of the socratic idea".*

- ✓ por meio de perguntas e condução de discussões o professor guia os estudantes na rota de reinvenção;
- ✓ na formação do professor que vai trabalhar com a reinvenção guiada segue-se um caminho no qual a matemática pode ser reinventada.

6 GUIADA – DE QUE MODO?

6.1 DAS TRAJETÓRIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM[54]

Uma das maneiras de desenhar as rotas de reinvenção é a elaboração de trajetórias de ensino e aprendizagem[55]. Uma trajetória de ensino e aprendizagem é uma descrição de caminhos que podem ser percorridos no processo de aprendizagem, contendo

> • uma **trajetória de aprendizagem**[56] que dá uma ideia geral do processo de aprendizagem dos estudantes;
>
> • uma **trajetória de ensino**, composta por indicações didáticas que descrevem como o ensino pode mais efetivamente articular-se com e estimular o processo de aprendizagem;
>
> • um **esquema dos conteúdos**, indicando quais os elementos centrais do currículo matemático que devem ser ensinados (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 18, tradução nossa[57], grifos nossos).

Uma trajetória de aprendizagem pode configurar-se como uma descrição hipotética dos caminhos a serem seguidos pelos estudantes na "reinvenção" de conteúdos matemáticos. Nesse sentido, o professor pode partir de diferentes estratégias de resolução (consideradas corretas ou não) que imagina que os estudantes utilizarão. As hipóteses do professor podem tomar como base, por exemplo, experiências que já teve em aulas do mesmo conteúdo ou ainda experiências de outros professores e pesquisadores que já trabalharam com esses mesmos assuntos. Ainda assim, os caminhos desenhados e/ou descritos pelo

---

[54] Neste trabalho utilizaremos os termos "trajetória de ensino e aprendizagem" ou apenas "trajetória" tal como são usados em Santos (2014). Em textos de outros autores, encontramos diferentes denominações para o mesmo objeto: "trajetória de aprendizagem" (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000), "trajetória hipotética de aprendizagem" (SIMON, 1995; KWON, 2002; BAKKER; DOORMAN; DRIJVERS, 2003; DRIJVERS, 2003) e "trajetória de ensino-aprendizagem" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

[55] Rotas de reinvenção são caminhos desenhados pelo professor ao imaginar como os estudantes podem reinventar matemática. Tais desenhos feitos pelo professor podem ser mentais, escritos, verbalizados. Por outro lado, as trajetórias de ensino e aprendizagem são como planos de aula, em sua maioria escritos, a partir das características apresentadas neste capítulo.

[56] Aqui, o termo trajetória de aprendizagem não é usado como em Gravemeijer e Terwel (2000), como sinônimo de "trajetória de ensino e aprendizagem"; é usado como uma das partes de uma trajetória de ensino e aprendizagem, referentes aos aspectos da aprendizagem dos estudantes.

[57] *"• A learning trajectory that gives a general overview of the learning process of the students; • a teaching trajectory, consisting of didactical indications that describe how the teaching can most effectively link up with and stimulate the learning process; • a subject matter outline, indicating which of the core elements of the mathematics curriculum should be taught".*

professor não são rígidos, ou seja, os estudantes podem seguir diferentes caminhos no trabalho com as tarefas propostas pelo professor.

Uma trajetória de ensino pode ser configurada descrevendo passos iniciais que o professor seguirá para trabalhar com os conteúdos propostos, encaminhamentos possíveis a partir de cada tipo de estratégias que os estudantes podem usar, tarefas que lhes serão apresentadas, materiais que serão utilizados.

Ao elaborar uma trajetória de ensino e aprendizagem, o professor elenca conteúdos que espera que sejam trabalhados em sala de aula, e que direcionarão a escolha de tarefas e alguns encaminhamentos. Para a escolha das tarefas, deve levar em consideração o princípio do entrelaçamento e o uso de problemas de contexto.

Ainda que o professor elenque conteúdos que direcionarão a aula, estes não compõem uma lista rígida do que será trabalhado em sala de aula, mas possibilidades de trabalho a partir das tarefas. Desse modo, os estudantes podem utilizar estratégias que possibilitam o trabalho com outros conteúdos além daqueles que o professor listou; ainda que os estudantes as usem, cabe ao professor explorar os conteúdos matemáticos a partir dos encaminhamentos dado pelos estudantes.

Entende-se que “trajetória de ensino”, “trajetória de aprendizagem” e “esquema de conteúdos” não são “partes” de uma trajetória, independentes umas das outras, mas sim relacionadas entre si de tal modo que se influenciam e se completam.

Então, de maneira geral, fazem parte de uma trajetória as tarefas utilizadas em sala de aula para que os conteúdos do currículo possam ser trabalhados. Tais tarefas podem ser elaboradas pelo professor ou até mesmo adaptadas de livros didáticos. Além das tarefas, uma trajetória contém uma antecipação das atividades mentais dos estudantes, buscando uma “previsão” do que podem fazer a partir de cada uma das tarefas e dos possíveis questionamentos do professor. As ações que serão tomadas pelo professor para tornar possível o processo de reinvenção guiada, também fazem parte de uma trajetória de ensino e aprendizagem (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001).

Na elaboração das trajetórias de ensino e aprendizagem, Kwon (2002) indica que as heurísticas da Educação Matemática Realística (reinvenção guiada, fenomenologia didática e modelos emergentes) podem orientar o professor, bem como o trabalho de rever as trajetórias, após experimentá-las em sala de aula (KWON, 2002).

Buscando uma comparação das heurísticas com as componentes de uma trajetória de ensino e aprendizagem, entende-se que os modelos emergentes estão relacionados com a “trajetória de aprendizagem”, pois auxiliam o professor na elaboração de tarefas e questionamentos e a “prever” como os estudantes podem lidar com essas tarefas, ao passo que lida com os conhecimentos informais do estudante e com a transição de modelos informais para matemática formal. Fenomenologia didática, por sua vez, está relacionada com o “esquema dos conteúdos”, uma vez que tem por objetivo estudar como objetos do pensamento podem organizar fenômenos. Reinvenção guiada relaciona-se com a “trajetória de ensino”, uma vez que se refere às ações do professor relacionadas com o processo de aprendizagem dos estudantes e com a “trajetória de aprendizagem”, por direcionar o professor em relação aos caminhos que os estudantes podem percorrer em relação ao processo histórico de elaboração do conhecimento matemático da humanidade.

As trajetórias de ensino e aprendizagem têm como objetivos:

> • fornecer uma visão geral, e sua compreensão proporciona um suporte para a prática diária de ensino, mas não como um livro texto;
>
> • estabelecer indicadores importantes sem ser um caminho predestinado de aprendizagem;
>
> • apresentar diferenças reconhecíveis entre as crianças, apesar de não descrever trajetórias de aprendizagem para os estudantes de maneira individual;
>
> • servir como uma fonte de inspiração para as ações didáticas, sem que elas sejam manuais de ensino; e
>
> • poder melhorar a educação, mas não como a única maneira de melhorar a qualidade do ensino (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 25, tradução nossa[58]).

É importante destacar que trabalhar com trajetórias de ensino e aprendizagem não implica em construir uma sequência de passos que serão rigidamente seguidos pelo professor ou pelo estudante. Não se deve ter também a impressão de que todos os estudantes seguirão o mesmo caminho na mesma velocidade no desenvolvimento da trajetória de aprendizagem. Outra impressão que não deve ficar é a de que apenas os conteúdos previstos pelo professor serão

---

[58] *“• provee una mirada general y su comprensión suministra un suporte para la práctica diaria de la enseñanza, aunque no como un libro de texto; • establece indicadores importantes sin ser una ruta predestinada de aprendizaje; • presenta diferencias reconocibles entre los niños, si bien no describe trayectorias de aprendizaje para los alumnos de manera individual; • sirve como una fuente de inspiración para acciones didácticas, sin que por ello sea un manual de didáctica; y • puede mejorar la educación, pero no es la única manera de mejorar la calidad de la enseñanza”.*

trabalhados pelos estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000; BAKKER; DOORMAN; DRIJVERS, 2003).

> Uma descrição da trajetória de ensino e aprendizagem não é um manual para a prática diária, mas apoia um bom ensino de matemática por meio da abertura de uma discussão na escola sobre educação matemática, entre outras coisas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 36, tradução nossa[59]).

Utilizar trajetórias de ensino e aprendizagem implica em que o trabalho com as tarefas tenha uma perspectiva longitudinal[60], por meio da qual é possível guiar os estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ trabalhar com trajetórias de ensino e aprendizagem permite ao professor desenhar rotas de reinvenção;
- ✓ fazem parte de uma trajetória de ensino e aprendizagem: tarefas, antecipação das atividades mentais dos estudantes e ações a partir das possíveis atividades dos estudantes para tornar possível o processo de reinvenção;
- ✓ para elaborar trajetórias de ensino e aprendizagem, o professor pode utilizar reinvenção guiada, fenomenologia didática e modelos emergentes como heurísticas;
- ✓ utilizar trajetórias de ensino e aprendizagem permite que o trabalho com as tarefas tenha uma perspectiva longitudinal, o que possibilita a reinvenção guiada.

6.2 Dos Fenômenos Realísticos à Matemática Formal

Na RME é dado destaque ao papel dos contextos e fenômenos realísticos para a aprendizagem matemática, como apresentado no capítulo 2 deste

---

[59] *"Una descripción de la trayectoria de aprendizaje-enseñanza no es un manual para la práctica diaria, pero apoya una buena enseñanza matemática a través de la apertura de una discusión en la escuela sobre la educación matemática, entre otras cosas".*

[60] Para Van den Heuvel-Panhuizen (2000), perspectiva longitudinal em relação às tarefas refere-se a um trabalho mais extenso com tarefas, não se limitando em resolvê-las e discutir as resoluções, mas na exploração dos diferentes conteúdos matemáticos envolvidos, nas diferentes estratégias e possibilidades de matematização a partir das resoluções.

trabalho. É papel do professor a escolha de contextos que oportunizem matematização e reinvenção guiada.

> Em uma abordagem de reinvenção, [...] problemas de contexto bem escolhidos oferecem aos estudantes a oportunidade de desenvolver modelos informais altamente específicos ao contexto e estratégias de resolução [...]. Estes procedimentos de resolução informais podem então se tornar assunto de formalização e generalização para constituir um processo de maior abstração que, na RME, é chamado de: matematização progressiva (DOORMAN; GRAVEMEIJER, 2009, p. 201, tradução nossa[61]).

Freudenthal (1991) aponta cinco tipos de itens realísticos que podem auxiliar a criar essas oportunidades: localização, história, projeto, tema e recorte[62].

A respeito de localização, o professor pode utilizar lugares que os estudantes conheçam (ou que serão apresentados a eles) para possibilitar matematização; pode ser proposto o estudo do comportamento da população, dos transportes, horários. Utilizando uma história conhecida pelos estudantes (ou não), o professor pode dar oportunidades de matematização; por exemplo, apresentando a história do rei e do xadrez[63], o professor pode trabalhar potenciação. A sugestão de um projeto que os estudantes devem desenvolver, também possibilita matematização; os projetos podem ser relacionados a construções ou planejamentos, por exemplo. Um tema relacionado à realidade pode ser utilizado no ensino, dando possibilidade aos estudantes de matematizar. A escolha e exploração, por exemplo, do tema "crescimento" pode possibilitar um trabalho com funções exponenciais (FREUDENTHAL, 1991).

Outro trabalho para o qual Freudenthal (1991) chama a atenção é o trabalho com recortes. O professor utiliza recortes de textos encontrados em livros, revistas, jornais ou outras mídias para utilizá-los em sala de aula. Uma possibilidade de trabalho é convidar os estudantes a encontrar a matemática presente nos recortes, mesmo que ela esteja evidente ou seja alguma "absurda". Ou, então, pode solicitar

---

[61] *"In a reinvention approach, […] well-chosen context problems offer students opportunities to develop informal, highly context-specific models and solving strategies […]. These informal solving procedures then may become subject of formalization and generalization to constitute a process of further abstraction, in RME dubbed as: progressive mathematization".*

[62] Traduções nossas para *location, story, project, theme* e *clipping*.

[63] "Na história do xadrez, ficou famoso o lendário pedido que o inventor do jogo fez ao rei: um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda, quatro pela terceira e assim por diante, dobrando a quantidade de grãos, até a sexagésima quarta casa. Nem todo o trigo do mundo poderia pagar o pedido de quase 18 e meio quintilhões de grãos". Pode-se encontrar essa história em <http://super.abril.com.br/cotidiano/busca-infinito-438803.shtml>. Acesso em 17/07/2013.

que os estudantes façam análises críticas dos recortes, repensando o que o autor escreveu, dando a possibilidade de matematizar aquilo que está no recorte. Pode-se, também, propor um trabalho de reescrita, a fim de rever, fortalecer, enfraquecer ou modificar as informações. Nesse trabalho de reescrita, Freudenthal (1991) afirma que a matematização acontece em níveis superiores e, por isso, é importante.

> Nos casos de localização, história, projeto e tema tais domínios são propositalmente – em algumas vezes artificialmente – delimitados pelo professor ou desenvolvedor, que quer que o estudante reinvente certos processos e produtos da matematização. O caso dos recortes é um pouco diferente. Aqui não é um domínio, mas um pequeno pedaço que é cortado, embora o seu valor paradigmático para a matematização e para a aquisição de uma atitude matemática possa ser enorme em comparação (FREUDENTHAL, 1991, p. 75, tradução nossa[64]).

Gravemeijer e Terwel (2000) afirmam que iniciar o trabalho com os contextos em que os estudantes têm a oportunidade de utilizar diferentes estratégias auxilia o professor no desenho das rotas de reinvenção e, consequentemente, na reinvenção dos conteúdos.

Esse movimento dos contextos, situações e fenômenos para a matemática formal, por meio da reinvenção guiada, é considerado por Freudenthal como um caminho natural para a aprendizagem. Para ele,

> utilizar currículos cientificamente estruturados, nos quais os estudantes são confrontados com uma matemática pronta, é uma "inversão antididática". Eles baseiam-se na premissa falsa de que os resultados de um raciocínio matemático, colocados numa lista de conteúdos, podem ser transferidos diretamente para os estudantes. [...] De acordo com Freudenthal, isso significa colocar a “carroça na frente dos bois”: tirar dos estudantes a oportunidade deles mesmos desenvolverem matemática. Matemática, em outras palavras, deve ser ensinada na ordem em que os próprios estudantes possam inventá-la (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, tradução nossa[65]).

---

[64] *“In the cases of location, story, project, and theme such domains are purposefully -- and sometimes artificially -- delimited by the teacher or developer, who wants the learner to reinvent certain processes and products of mathematising. The case of clippings is a bit different. Here it is not a domain but a small piece that is cut out, although its paradigmatical value for mathematising and for acquiring a mathematical attitude may be enormous in comparison”.*

[65] *“Using scientifically structured curricula, in which students are confronted with ready-made mathematics, is an ‘anti-didactic inversion’. It is based on the false assumption that the results of mathematical thinking, placed in a subject-matter framework, can be transferred directly to the students. […] According to Freudenthal, this comes from placing the cart before the horse: failing to allow the students the opportunity to develop the mathematics themselves. Mathematics, in other words, must be taught in the order in which the students themselves might invent it”.*

O termo inversão antididática é utilizado para denominar esse movimento inverso (que Gravemeijer (2004) diz ser um “virar de cabeça pra baixo” o processo educacional) em que se inicia com matemática formal para depois apresentar contextos em que a matemática pode ser usada como aplicação. “Antididática” faz um papel de adjetivo, qualificando a inversão como não sendo didática.

Gravemeijer e Terwel (2000) afirmam que essa crítica de Freudenthal se dá a partir do momento em que se passou a utilizar o produto da atividade de alguns matemáticos como ponto de partida para o ensino. Os autores afirmam que se começou a ensinar o resultado das atividades ao invés de ensinar as atividades em si (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000).

Drijvers (2003), com base em Kindt (1980, 2000), ressalta que a crítica de Freudenthal à inversão antididática não exime o trabalho com métodos rotineiros mais formais. De acordo com os autores, esses métodos são eficientes quando reinventados pelo estudante e “liberam-no” de reinventar os métodos de resolução todas as vezes em que forem necessários. A dificuldade encontrada nesse processo é a de que os professores têm gasto mais tempo na fase formal do que no processo de reinvenção, tornando as estratégias encurtadas cedo demais (DRIJVERS, 2003).

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ cabe ao professor a escolha de contextos que oportunizem matematização e reinvenção guiada;
- ✓ o professor pode trabalhar com localização, história, projeto, tema ou recortes para proporcionar reinvenção guiada;
- ✓ a escolha dos contextos pode auxiliar o professor na elaboração de rotas de reinvenção;
- ✓ Freudenthal critica o ensino de matemática que inicia com a matemática formal para depois mostrar aplicação em contextos; a esse tipo de ensino é dado o nome “inversão antididática”, cujo caminho natural seria o de reinvenção guiada;
- ✓ após a reinvenção de procedimentos rotineiros mais formais, o professor pode incentivar os estudantes a utilizá-los para que não seja necessário reinventá-los todas as vezes que forem necessários.

6.3 DA AVALIAÇÃO

Buriasco (2000) apresenta uma distinção entre avaliação de rendimento e avaliação da aprendizagem. Para a autora, avaliação de rendimento é tomada como avaliação do "produto final" que evidencia apenas resultados, enquanto a avaliação da aprendizagem é tomada como avaliação do processo com vistas a subsidiar uma retomada da aprendizagem (BURIASCO, 2000).

De acordo com De Lange (1995), a avaliação reflete a teoria de ensino e aprendizagem, e "a mudança no 'pensar' o currículo força-nos a focar no 'pensar' a avaliação também" (DE LANGE, 1995, p. 3, tradução nossa[66]). Na abordagem realística, em especial, o ensino e a avaliação são fortemente integrados, sendo que a avaliação desempenha seu papel em todos os estágios do processo de ensino (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1994).

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) afirma que a avaliação na RME é, em primeiro lugar, a favor da educação, tendo como finalidade a coleta de dados a respeito da aprendizagem dos estudantes para a tomada de decisões (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). É, portanto, uma avaliação da aprendizagem, ou seja, uma avaliação do processo com vistas a subsidiar uma retomada da aprendizagem.

Para Pedrochi Junior (2012), a avaliação na Educação Matemática Realística converge para um ideal de avaliação: avaliação como oportunidade de aprendizagem. Para o autor, oportunidade de aprendizagem é entendida como "ocasião conveniente ao ato de aprender" (PEDROCHI JUNIOR, 2012, p. 44).

Uma maneira de configurar a avaliação na RME é utilizando os nove princípios:

> 1. O principal objetivo da avaliação em sala de aula é auxiliar a aprendizagem.
>
> 2. A matemática está embutida em problemas que valem a pena (envolventes, educativos e autênticos) e que fazem parte do mundo real dos estudantes.
>
> 3. Métodos de avaliação devem ser tais que permitam aos estudantes mostrarem o que sabem, não o que não sabem.
>
> 4. Um plano de avaliação equilibrado deve incluir múltiplas e variadas oportunidades (formatos) aos estudantes para mostrar e documentar suas realizações.

---

[66] *"The change towards a 'thinking' curriculum forces us to focus on 'thinking' assessment as well".*

> 5. As tarefas devem operacionalizar todos os objetivos do currículo (não apenas os primeiros). Ferramentas úteis para conseguir isso são os padrões de desempenho, incluindo os diferentes níveis de pensamento matemático.
>
> 6. Critérios de avaliação devem ser públicos, consistentemente aplicados e devem incluir exemplos de avaliações anteriores, mostrando trabalhos exemplares e trabalhos não tão exemplares.
>
> 7. O processo de avaliação, incluindo a pontuação e a classificação, deve ser aberto aos estudantes.
>
> 8. Os estudantes devem ter a oportunidade de receber *feedback* genuíno de seu trabalho.
>
> 9. A qualidade de uma tarefa não é definida pela sua acessibilidade à pontuação objetivada, confiabilidade ou validade no sentido tradicional, mas pela sua autenticidade e justiça, na medida em que atende aos princípios acima enunciados. (DE LANGE, 1999, p. 10, tradução nossa[67], grifos nossos).

De acordo com o autor, a lista de princípios revela que a matemática deve ser relevante aos estudantes, utilizada para trabalhar com assuntos vindos do mundo que nos rodeia ou da mente humana. A partir dela, também, justifica-se o entrelaçamento dos conteúdos, que na RME são divididos em quatro temas que ainda devem ser vistos como entrelaçados: álgebra, geometria, números e estatística e probabilidade (DE LANGE, 1999).

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) afirma que a avaliação deve auxiliar na aprendizagem, dando aos estudantes *feedback* de seus processos de aprendizagem, para que revisem seus trabalhos e produções. Mendes considera que

> o *feedback* é uma forma de operacionalizar a regulação da aprendizagem. Entretanto, ele não é garantia de uma regulação pedagógica por depender de sua qualidade e de sua utilização pelo aluno em seu processo de aprendizagem (MENDES, 2014, p. 179).

---

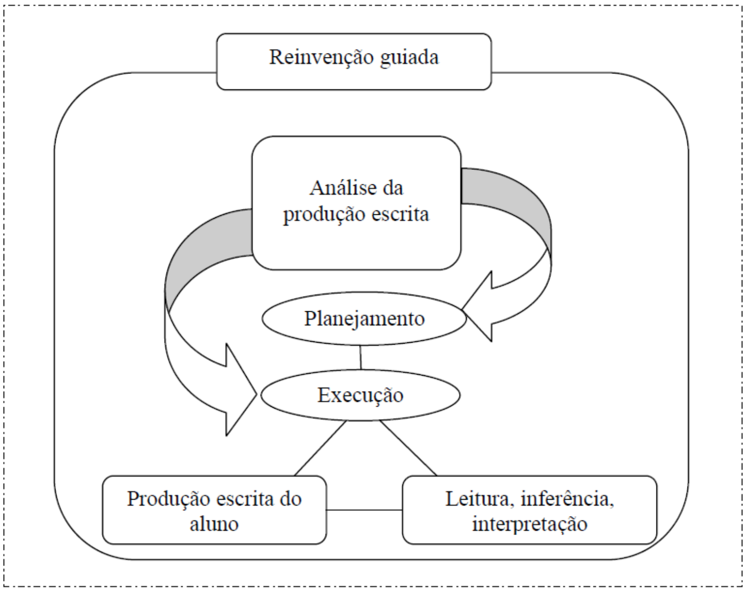
[67] *1. The main purpose of classroom assessment is to improve learning.*
2. The mathematics is embedded in worthwhile (engaging, educative, authentic) problems that are part of the students' real world.
3. Methods of assessment should be such that they enable students to reveal what they know, rather than what they do not know.
4. A balanced assessment plan should include multiple and varied opportunities (formats) for students to display and document their achievements.
5. Tasks should operationalize all the goals of the curricula (not just the "lower" ones). Helpful tools to achieve this are performance standards, including indications of the different levels of mathematical thinking.
6. Grading criteria should be public and consistently applied; and should include examples of earlier grading showing exemplary work and work that is less than exemplary.
7. The assessment process, including scoring and and grading, should be open to students.
8. Students should have opportunities to receive genuine feedback on their work.
9. The quality of a task is not defined by its accessibility to objective scoring, reliability, or validity in the traditional sense but by its authenticity, fairness, and the extent to which it meets the above principles.

Desse modo, a análise da produção escrita associada a avaliação pode servir, entre outras coisas, para produção e emissão de *feedback* (FERREIRA, 2013).

Em relação à análise da produção escrita, considera-se que pode ser utilizada como uma estratégia de avaliação para que seja uma oportunidade de aprendizagem. Assim, trabalhos do GEPEMA (CIANI, 2012; PIRES, 2013; MENDES, 2014) utilizam a análise da produção escrita em (a partir de) situações de avaliação, com vistas a subsidiar tomadas de decisão por parte do professor em contextos de reinvenção guiada; desse modo, a análise da produção escrita é configurada como, além de estratégia de avaliação, uma estratégia de ensino (SANTOS, 2014).

De acordo com Santos (2014), a análise da produção escrita em aulas na perspectiva da reinvenção guiada pode ser considerada como estratégia de ensino, centrada na produção escrita dos estudantes. A autora identificou duas possibilidades de trabalho: em uma, a análise da produção escrita serve como fonte de informações para a elaboração de trajetórias de ensino e aprendizagem (CIANI, 2012), enquanto em outra auxilia o professor na elaboração de questionamentos (intervenções) nas produções dos estudantes (PIRES, 2013). Nesse sentido, Santos (2014) apresenta um esquema que representa a relação da análise da produção escrita com a reinvenção guiada, destacando as dimensões de execução e planejamento e as ações de leitura, inferência e interpretação.

Figura 5 – Esquema representativo da relação entre a análise da produção escrita e a reinvenção guiada.



Fonte: Santos (2014).

No sentido de trabalhar com a análise da produção escrita com vistas a que a avaliação seja uma oportunidade de aprendizagem, a escolha de tarefas influencia as possibilidades de trabalho, no que se refere à possibilidade de estabelecer um diálogo com os estudantes a partir de suas resoluções.

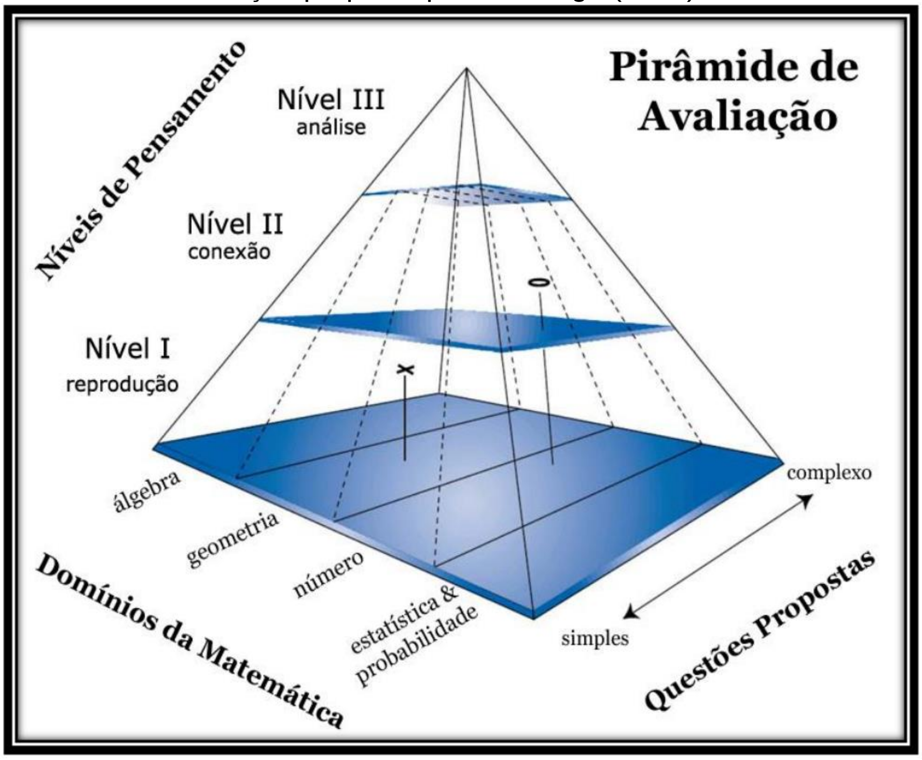
De Lange (1999) classifica as tarefas em três níveis: nível 1 (reprodução), nível 2 (conexão) e nível 3 (análise). No nível 1 (reprodução), os estudantes lidam com tarefas de reconhecimento, sendo necessário memorização de objetos, propriedades, características a fim de realizar procedimentos rotineiros, como a aplicação de algoritmos. No nível 2 (conexão), os estudantes realizam conexões entre os domínios da matemática, integrando informações para resolver os problemas propostos. A exigência de matematização é menor que do próximo nível, sendo necessário o uso de diferentes representações em algumas tarefas. No nível 3 (análise), os estudantes matematizam, reconhecendo e "extraindo" a matemática que está presente na situação. Nesse tipo de questão, o estudante pode desenvolver seus próprios modelos e estratégias, utilizando argumentos matemáticos, como provas e generalizações. Dentre as atividades presentes na matematização necessária para resolver tais tarefas, destacam-se análise, interpretação, reflexão, generalização e *insight*, elaboração de problemas. (DE LANGE, 1999)

De Lange (1999) propõe uma organização dos níveis de pensamento, domínios da matemática e complexidade das tarefas em uma pirâmide (Figura 6). A pirâmide auxilia a elaboração de instrumentos avaliativos, como provas escritas.

Em relação aos níveis, não há

> qualquer ordem de preponderância entre eles, pois todos os três níveis são importantes. A diferença na quantidade se deve à complexidade de realização da tarefa, quanto mais simples, mais podem ser realizadas no mesmo espaço de tempo (PEDROCHI JUNIOR, 2012, p. 41-42).

Figura 6 – Pirâmide de Avaliação proposta por De Lange (1999).



Fonte: Ferreira (2013, p. 61).

Não é possível afirmar que questões de um nível oportunizam "mais" a reinvenção guiada que as de outros níveis em um ambiente em que se trabalha com a reinvenção guiada. Como já discutido, uma das funções do professor é a de realizar intervenções nas ações dos estudantes, por meio de perguntas, promoção de discussões e até mesmo por meio de intervenções escritas nas suas produções. Em sua tese, Mendes (2014) elaborou intervenções nas produções escritas dos estudantes em diversas fases de uma prova e concluiu que

> as intervenções da professora/pesquisadora interferiram nas competências requeridas em cada questão, e, como eram intervenções individuais, ao final das dez provas havia um sólido diferente, não necessariamente convexo, mas um sólido coerente com a produção escrita do aluno e das competências apresentadas por ele (MENDES, 2014, p. 185).

Desse modo, as oportunidades para reinvenção guiada em cada nível são modificadas a cada intervenção do professor, tanto em relação às tarefas de avaliação, quanto às tarefas de ensino.

Ainda em relação às tarefas de avaliação, Van den Heuvel-Panhuizen (1996) apresenta características para bons problemas de avaliação de tal forma que suportem o processo de reinvenção guiada, como apresentamos no Quadro 7.

Quadro 7 – Características dos bons problemas de avaliação que dão suporte ao processo de reinvenção guiada, de acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (1996).

Informativos	Ao envolver o que o professor pretende avaliar, devem • expressar o máximo de informações possíveis a respeito do conhecimento dos alunos e de como aplicam esse conhecimento em situações novas; • revelar algo do processo subjacente às escolhas das estratégias e procedimentos feitos pelo aluno.
Significativos	Devem • ser atraentes, convidativos, desafiadores; • ser matematicamente interessantes e cativantes; • envolver conteúdos interessantes em situações realísticas; • conter características não-rotineiras; • poder ser abordados de diferentes maneiras e em diferentes níveis de compreensão; • ser acessíveis aos alunos; • ter motivo para serem resolvidos.
Transparentes	Devem • permitir ao aluno mostrar o nível em que se encontra; • possibilitar informações para que todos, pelo menos, tentem solucioná-los.
Elásticos/Flexíveis	São os que • exigem mais do que apenas lembrar de um fato ou reproduzir um procedimento conhecido; • não exigem uma única estratégia padrão, podem ser resolvidos por diferentes estratégias, em diferentes níveis de aprendizagem; • possibilitam aos alunos mostrarem seu potencial matemático; • demonstram seu componente educativo (o professor e o aluno poderão aprender a partir da resolução e da resposta à tarefa). Oportunizam aos alunos: • a utilização de suas experiências pessoais na elaboração de suas próprias respostas; • apresentarem suas resoluções e respostas com suas próprias palavras.
Acessíveis	O enunciado deve • ser tão claro quanto possível; • evidenciar se o conhecimento envolvido é insuficiente para a solução; • proporcionar oportunidades para aprofundamento.

Fonte: Pereira Júnior (2014, p. 30).

De maneira geral, é possível sintetizar que:

- ✓ dar *feedback* aos estudantes sobre suas produções oportuniza o processo de reinvenção guiada;

- ✓ as tarefas de avaliação inicialmente escolhidas de acordo com a pirâmide de avaliação de De Lange (1999) podem ganhar dinamismo em relação ao seu nível de pensamento, na medida em que o professor realiza intervenções no trabalho dos estudantes;
- ✓ as tarefas de avaliação devem ser informativas, significativas, transparentes, elásticas/flexíveis e acessíveis;
- ✓ a análise da produção escrita pode ser utilizada como estratégia em aulas na perspectiva da reinvenção guiada a fim de que a avaliação seja tomada como oportunidade de aprendizagem.

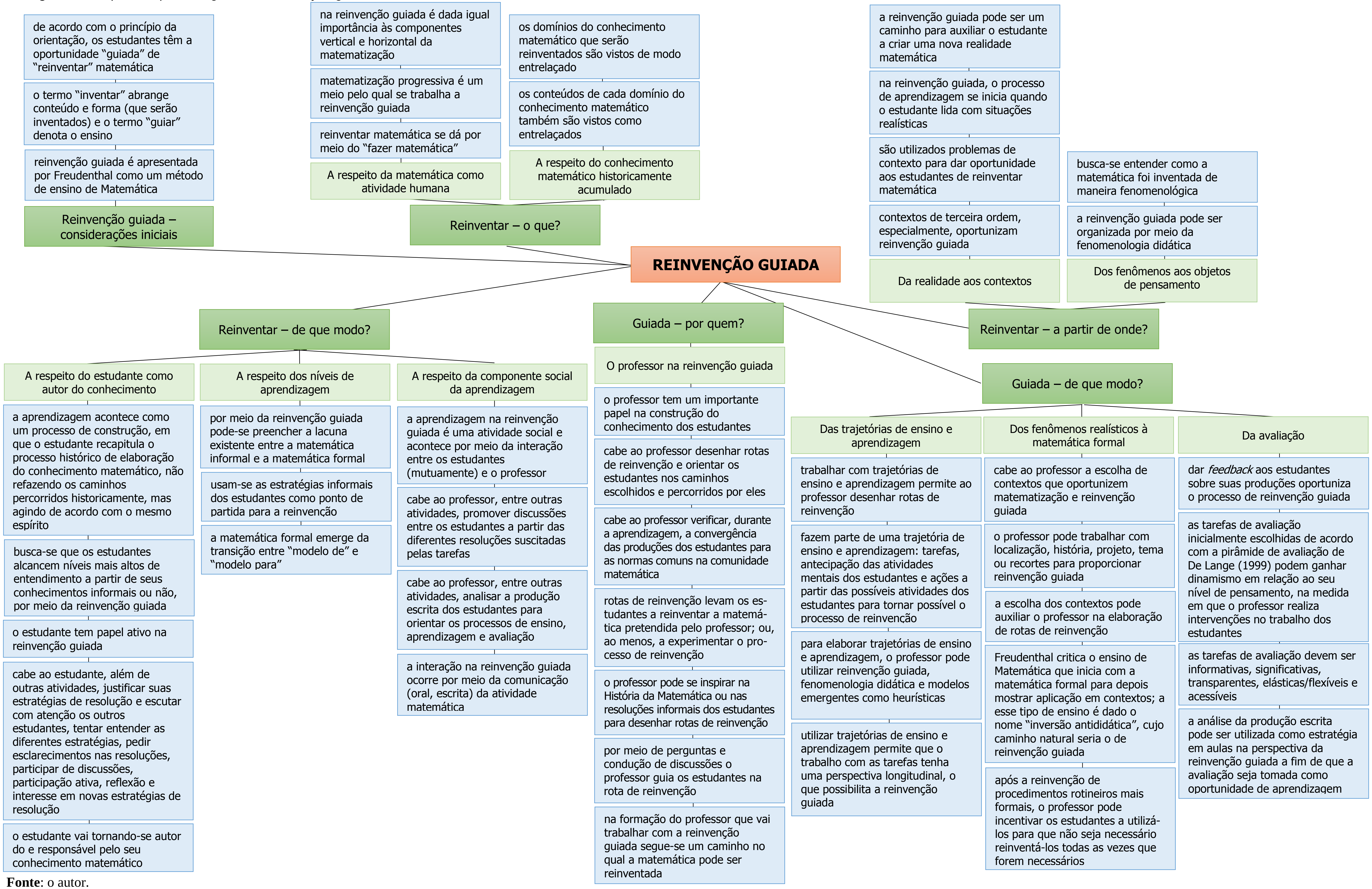
7 REINVENÇÃO GUIADA – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho atendendo a interesses do GEPEMA em estudar noções da RME, entre elas, a da reinvenção guiada, a pergunta de investigação foi: que aspectos apresentados pelos autores estudados da Educação Matemática Realística configuram a reinvenção guiada? Tal configuração teve como objetivo uma sistematização de ideias acerca da reinvenção guiada, discutidas por autores da Educação Matemática Realística, a princípio, e do GEPEMA. Para tanto, foram utilizados 76 textos iniciais em busca de agrupar recortes que contivessem a expressão “reinvenção guiada”. A partir dos grupos, foi possível discutir aspectos referentes à RME que auxiliam a realizar uma configuração da reinvenção guiada. Ao final de cada capítulo, que trata desses aspectos, há uma sistematização com vistas a apresentar as ideias principais do capítulo que servem de elementos para a configuração que se busca neste trabalho, uma vez que o objetivo da investigação é “configurar a reinvenção guiada por meio de aspectos apresentados pelos autores estudados da Educação Matemática Realística”. Três objetivos específicos nortearam a pesquisa:

- inventariar aspectos da reinvenção guiada presentes em textos de autores da Educação Matemática Realística, a fim de analisá-los e discuti-los;
- discutir as relações entre a reinvenção guiada e os seis princípios da Educação Matemática Realística;
- apresentar elementos que constituem a dinâmica de aula (escolha das tarefas, papel do professor e do estudante, avaliação) na perspectiva da reinvenção guiada.

Em relação ao primeiro objetivo específico, por meio da síntese realizada ao final de cada capítulo, apresenta-se a Figura 7 que contém o inventário dos aspectos apresentados no decorrer da pesquisa.

Figura 7 – Aspectos que configuram a reinvenção guiada



Fonte: o autor.

A configuração aqui apresentada é **uma** configuração, entre outras que podem ser feitas, a partir de um estudo de textos de autores da RME. De certo modo, a singularidade desta configuração se dá uma vez que o estudo privilegia aspectos destacados no decorrer desta pesquisa. Outros aspectos poderiam ter sido considerados ou desconsiderados, bem como outros agrupamentos poderiam ter emergido no decorrer da pesquisa caso os pesquisadores fossem outros ou caso a pesquisa fosse realizada em outro contexto. Revela-se, de maneira mais evidente, a importância das inferências e interpretações no decorrer da pesquisa. No caso de alguma configuração apresentar menos aspectos que esta, não deixaria de ser uma configuração do mesmo objeto, a reinvenção guiada. Entretanto, entende-se pela definição de configuração apresentada neste texto que, por ser uma figura, quanto mais aspectos considerados, mais próxima do objeto representado a configuração será.

Emerge uma pergunta a partir do estudo feito: "é necessário que todos os aspectos da Figura 7 sejam também considerados em uma pesquisa ou na prática de algum professor para que se reconheça a reinvenção guiada (ou para que se configure como reinvenção guiada)?". A discussão realizada no parágrafo anterior auxilia na resposta à pergunta. Entende-se que não é necessário que todos os aspectos sejam considerados, mas que quanto mais o professor tenha atitudes próximas às que são pregadas pela RME, mais suas ações aproximam-se dos objetos aqui estudados.

Além do capítulo "reinvenção guiada – considerações iniciais", os títulos dos capítulos deste trabalho foram organizados por meio de perguntas: "reinventar – o que?", "reinventar – a partir de onde?", "reinventar – de que modo?", "guiada – por quem?" e "guiada – de que modo?". A partir das considerações de cada capítulo, as respostas às perguntas são discutidas de tal modo que é possível, no decorrer do texto, encontrá-las (ainda que não imediatamente). As sínteses de cada capítulo e a Figura 7 também auxiliam na busca pelas repostas. Faremos uma discussão em relação às respostas que podem ser dadas a cada pergunta.

No capítulo "reinventar – o quê?", entende-se que a reinvenção está relacionada com o objeto que será reinventado[68]. No âmbito da Educação Matemática

---

[68] Uma vez que o objetivo dos parágrafos que seguem é sistematizar as ideias discutidas ao longo da dissertação com vistas a responder as perguntas dos títulos dos capítulos e que tais ideias já foram

Realística, aos estudantes é dada a oportunidade de reinventar matemática. Para Freudenthal, a matemática é vista como uma atividade humana, ou seja, o foco está na ação ao invés de no produto; a essa ação (em que se organiza e se lida com situações, problemas, tarefas) é dado o nome de matematização. Matemática é, portanto, o que o indivíduo produz no seu processo de matematização. Ainda ao que se refere à pergunta “reinventar – o quê?”, entende-se que a reinvenção é direcionada ao conjunto de conhecimentos historicamente acumulado, que Freudenthal denomina como conhecimento matemático.

No capítulo “reinventar – a partir de onde?”, busca-se uma discussão a respeito do que a Educação Matemática Realística entende por realidade, uma vez que a partir dela reinventa-se. Em um sentido abrangente, entende-se que, na RME, faz parte da realidade o que é considerado concreto, existente e o que pode ser imaginado, concebido na mente das pessoas (como os objetos matemáticos). Portanto, buscam-se nos contextos (realísticos) fenômenos que servem como ponto de partida para a reinvenção de conteúdos matemáticos.

No capítulo “reinventar – de que modo?”, discute-se a aprendizagem na perspectiva da RME, a partir dos processos intrínsecos ao sujeito e das interações em sala de aula. Quanto ao primeiro, na perspectiva da Educação Matemática Realística, entende-se que as estratégias dos estudantes passam por níveis, em que as mais informais podem tornar-se mais formais e, desse modo, suscitar a reinvenção de conceitos matemáticos, possibilitando que o estudante torne-se autor do seu conhecimento matemático. Em relação a componente social, as interações entre os estudantes (mutuamente) e com o professor, por meio de comunicação (oral, escrita) da atividade matemática, auxiliam o modo como se dá a reinvenção dos conteúdos matemáticos.

No capítulo “guiada – por quem?”, apresenta-se o trabalho do professor, cuja função principal é orientar os estudantes em seus processos de aprendizagem. Um dos papéis do professor é o desenho de rotas de reinvenção, por meio das quais ele guia os estudantes na reinvenção de conteúdos matemáticos.

No capítulo “guiada – de que modo?”, busca-se apresentar maneiras pelas quais o professor pode guiar seus estudantes: trajetórias de ensino e aprendizagem, “caminhando” dos fenômenos realísticos à matemática formal,

---

apresentadas e referenciadas ao longo dos capítulos, não serão feitas, novamente, referências aos autores, a fim de evitar repetições.

avaliação. De maneira geral, o modo pelo qual o professor pode guiar os estudantes se dá por meio de trajetórias de ensino e aprendizagem em um movimento dos fenômenos realísticos à matemática formal, que é contrário ao que usualmente é observado em sala de aula. Vinculada aos processos de ensino e aprendizagem, a avaliação que auxilia a educação é vista como um meio pelo qual o professor pode orientar os estudantes na medida em que, por exemplo, emite *feedback* aos estudantes, analisa suas produções escritas, realiza intervenções em suas produções.

Com base nas respostas feitas às perguntas, emerge um questionamento em relação à reinvenção guiada: uma vez que é possível configurá-la, para que, então, reinvenção guiada? Ou melhor, "reinvenção guiada – para quê?".

Freudenthal apresenta uma crítica às abordagens para o ensino de matemática que estavam presentes nas ações de professores e livros didáticos da década de 1960 (estruturalista, mecanicista, empirista). Sua proposta para o trabalho com reinvenção guiada sugere resistência a tais abordagens.

De maneira geral, a abordagem mecanicista tem como foco principal o trabalho com cálculos (inicialmente a partir de números "nus" e, em seguida, a partir de breves aplicações em problemas de contextos) e algoritmos; a abordagem empirista tem como foco a leitura e interpretação de problemas e situações, sem que seja dada importância ao tratamento (e fechamento) matemático da tarefa; a abordagem estruturalista tem como foco as estruturas matemáticas "essenciais".

A abordagem realística, por sua vez, dá igual importância à organização de situações por meio da matemática (matematização horizontal) e ao lidar matematicamente com a própria matemática (matematização vertical). No Quadro 8, apresenta-se uma descrição da presença e da ausência (representada pelo símbolo "+" e "–", respectivamente) de matematização horizontal e vertical nestas abordagens.

Quadro 8 - Tipos de matematização nas abordagens para o ensino de matemática

Abordagem para o ensino de matemática	**Matematização**	
	Horizontal	Vertical
Mecanicista	–	–
Estruturalista	–	+
Empirista	+	–
Realística	+	+

Fonte: adaptado de Treffers (1987).

É a reinvenção guiada, portanto, uma maneira pela qual Freudenthal apresenta sua resistência a essas abordagens: do mesmo modo que a reinvenção refere-se ao conteúdo matemático e, portanto, permite um trabalho de lidar com a própria matemática por meio da matemática, também se tem como ponto de partida essencial para a reinvenção o uso de contextos realísticos, cujo trabalho pode ser organizado por meio da fenomenologia didática.

Além disso, considera-se que reinvenção guiada tem por finalidade possibilitar ao estudante tornar-se autor do seu conhecimento matemático.

Em relação ao segundo objetivo específico, apresenta-se no Quadro 9 os aspectos sistematizados na Figura 7 que se relacionam com cada um dos princípios da RME (da atividade, do entrelaçamento, da interatividade, de níveis, da orientação, da realidade).

Quadro 9 – Relação entre aspectos que configuram a reinvenção guiada e os seis princípios da RME

Princípios	Aspectos que configuram a reinvenção guiada
Da Atividade	✓ Reinventar matemática se dá por meio do “fazer matemática”; ✓ matematização progressiva é um meio pelo qual se trabalha a reinvenção guiada; ✓ na reinvenção guiada é dada igual importância às componentes vertical e horizontal da matematização.
Do Entrelaçamento	✓ Os conteúdos de cada domínio do conhecimento matemático também são vistos como entrelaçados; ✓ os domínios do conhecimento matemático que serão reinventados são vistos de modo entrelaçado.
Da Interatividade	✓ A aprendizagem na reinvenção guiada é uma atividade social e acontece por meio da interação entre os estudantes (mutuamente) e o professor; ✓ cabe ao estudante, além de outras atividades, justificar suas estratégias de resolução e escutar com atenção os outros estudantes, tentar entender as diferentes estratégias, pedir esclarecimentos nas resoluções, participar de discussões, participação ativa, reflexão e interesse em novas estratégias de resolução; ✓ cabe ao professor, entre outras atividades, promover discussões entre os estudantes a partir das diferentes resoluções suscitadas pelas tarefas; ✓ as tarefas de avaliação inicialmente escolhidas de acordo com a pirâmide de avaliação de De Lange (1999) podem

	ganhar dinamismo em relação ao seu nível de pensamento, na medida em que o professor realiza intervenções no trabalho dos estudantes; ✓ a interação na reinvenção guiada ocorre por meio da comunicação (oral, escrita) da atividade matemática; ✓ cabe ao professor, entre outras atividades, analisar a produção escrita dos estudantes para orientar os processos de ensino, aprendizagem e avaliação; ✓ por meio de perguntas e condução de discussões, o professor guia os estudantes na rota de reinvenção.
De Níveis	✓ Busca-se que os estudantes alcancem níveis mais altos de entendimento a partir de seus conhecimentos informais ou não, por meio da reinvenção guiada; ✓ por meio da reinvenção guiada pode-se preencher a lacuna existente entre a matemática informal e a matemática formal; ✓ usam-se as estratégias informais dos estudantes como ponto de partida para a reinvenção; ✓ a matemática formal emerge da transição entre “modelo de” e “modelo para”; ✓ o professor pode se inspirar na História da Matemática ou nas resoluções informais dos estudantes para desenhar rotas de reinvenção.
Da Orientação	✓ Reinvenção guiada é apresentada por Freudenthal como um método de ensino de matemática; ✓ o termo “inventar” abrange conteúdo e forma (que serão inventados) e o termo “guiar” denota o ensino; ✓ de acordo com o princípio da orientação, os estudantes têm a oportunidade “guiada” de “reinventar” matemática.
Da Realidade	✓ Na reinvenção guiada, o processo de aprendizagem se inicia quando o estudante lida com situações realísticas; ✓ busca-se entender como a matemática foi inventada de maneira fenomenológica; ✓ são utilizados problemas de contexto para dar oportunidade aos estudantes de reinventar matemática; ✓ a reinvenção guiada pode ser um caminho para auxiliar o estudante a criar uma nova realidade matemática; ✓ contextos de terceira ordem, especialmente, oportunizam reinvenção guiada; ✓ cabe ao professor a escolha de contextos que oportunizem matematização e reinvenção guiada; ✓ a reinvenção guiada pode ser organizada por meio da fenomenologia didática;

	✓ a escolha dos contextos pode auxiliar o professor na elaboração de rotas de reinvenção.

Fonte: o autor.

O Quadro 9 evidencia, além das relações entre aspectos da reinvenção guiada e os princípios da RME, o que é possível observar ao longo deste texto: as noções, ideias, termos da Educação Matemática Realística possuem um entrelaçamento. No decorrer da escrita deste trabalho, ao tratar de uma ideia da RME, para discutir, era necessário evidenciar outras ideias e noções. De maneira mais geral, para configurar a reinvenção guiada, foi preciso apresentar outras ideias no decorrer do trabalho, muitas delas relacionadas com outras noções, ideias, termos da RME.

Van den Heuvel-Panhuizen afirma que os princípios da Educação Matemática Realística devem ser vistos como uma complexa rede de relações, como já discutido no capítulo de considerações iniciais deste trabalho. Para além dessa afirmação, a configuração aqui apresentada revela que tal entrelaçamento também é válido não só para os princípios, mas também para as noções, ideias, termos associados aos princípios.

Apresentam-se, no Quadro 10, algumas considerações em relação ao terceiro objetivo específico, do qual buscamos evidenciar a dinâmica da aula (escolha das tarefas, papel do professor e do estudante, avaliação).

Quadro 10 – Aspectos que configuram a dinâmica da aula na perspectiva da reinvenção guiada

Dinâmica da aula	Escolha das tarefas	• Os conteúdos de cada domínio do conhecimento matemático são vistos como entrelaçados; • na reinvenção guiada, o processo de aprendizagem se inicia quando o estudante lida com situações realísticas; • são utilizados problemas de contexto para dar oportunidade aos estudantes de reinventar matemática; • contextos de terceira ordem, especialmente, oportunizam reinvenção guiada; • pode-se trabalhar com localização, história, projeto, tema ou recortes para proporcionar reinvenção guiada; • as tarefas de avaliação inicialmente escolhidas de acordo com a pirâmide de avaliação de De Lange (1999) podem ganhar dinamismo em relação ao seu nível de pensamento, na medida em que o professor realiza intervenções no trabalho dos estudantes;

		• as tarefas de avaliação devem ser informativas, significativas, transparentes, elásticas/flexíveis e acessíveis.
	Papel do professor	• Escolher contextos que oportunizem matematização e reinvenção guiada; • desenhar rotas de reinvenção e orientar os estudantes nos caminhos escolhidos e percorridos por eles; • trabalhar com trajetórias de ensino e aprendizagem permite ao professor desenhar rotas de reinvenção; • utilizar trajetórias de ensino e aprendizagem para que o trabalho com as tarefas tenha uma perspectiva longitudinal, possibilitando a reinvenção guiada; • incentivar os estudantes a utilizar procedimentos rotineiros mais formais que foram reinventados para que não seja necessário reinventá-los todas as vezes que forem necessários; • guiar os estudantes por meio de perguntas e condução de discussões na rota de reinvenção; • verificar, durante a aprendizagem, a convergência das produções dos estudantes para as normas comuns na comunidade matemática; • promover discussões entre os estudantes a partir das diferentes resoluções suscitadas pelas tarefas; • analisar a produção escrita dos estudantes para orientar os processos de ensino, aprendizagem e avaliação.
	Papel do estudante	• Ter papel ativo na reinvenção guiada; • criar uma nova realidade matemática por meio da reinvenção guiada; • recapitular o processo de aprendizagem da humanidade, não refazendo os caminhos percorridos historicamente, mas agindo de acordo com seu próprio espírito; • justificar suas estratégias de resolução e escutar os outros estudantes, tentar entender as diferentes estratégias, pedir esclarecimentos nas resoluções, participar de discussões, participação ativa, reflexão e interesse em novas estratégias de solução; • tornar-se autor do e responsável pelo seu conhecimento matemático; • revisar suas produções a partir do *feedback* dado pelo professor.
	Avaliação	• Dar *feedback* aos estudantes sobre suas produções oportuniza o processo de reinvenção guiada; • as tarefas de avaliação inicialmente escolhidas de acordo com a pirâmide de avaliação de De Lange (1999) podem ganhar dinamismo em relação ao seu nível de pensamento, na medida em que o professor realiza intervenções no trabalho dos estudantes;

		• as tarefas de avaliação devem ser informativas, significativas, transparentes, elásticas/flexíveis e acessíveis; • a análise da produção escrita pode ser utilizada como estratégia em aulas na perspectiva da reinvenção guiada a fim de que a avaliação seja tomada como oportunidade de aprendizagem.

Fonte: o autor.

Da mesma forma que foi possível observar entrelaçamento entre as noções, ideias, temas da RME, também é possível observar no que se refere ao papel do professor e do estudante no Quadro 10. Em capítulos cujo objetivo era discutir a aprendizagem da perspectiva do estudante, por exemplo, foi possível, na síntese do final do capítulo, fazer afirmações a respeito do papel do professor. Isso pode ter acontecido devido ao fato de que na Educação Matemática Realística enquanto abordagem para o ensino de matemática que tem uma perspectiva social de aprendizagem, não é possível separar os processos de ensino, aprendizagem e avaliação, a não ser para falar de cada um deles (e ainda assim é possível identificar elementos referentes aos outros processos quando se fala de um deles).

E a partir desses três objetivos específicos, então, configurou-se a reinvenção guiada. A relevância desta configuração no âmbito do GEPEMA é evidenciada ao passo que este trabalho apresenta uma síntese de ideias, noções, termos, temas da Educação Matemática Realística que permitem ao leitor conhecer o objeto aqui representado. Nesse sentido, membros do grupo podem, a partir deste trabalho, utilizar os aspectos aqui sistematizados a fim de elaborar novas pesquisas, no que se refere a estudos teóricos ou práticos, bem como para ter uma ideia inicial de aspectos da RME.

A respeito da elaboração de trabalhos a partir deste, considera-se que três aspectos norteiam futuras investigações: metodológico, teórico e prático.

Quanto ao aspecto metodológico, os procedimentos apresentados no início deste trabalho foram elaborados a partir de uma definição de “configuração” e podem sugerir novas pesquisas que visam configurar outras noções, conceitos, temas, ideias da RME, da avaliação da aprendizagem e até mesmo de temas da Educação Matemática.

Em relação ao aspecto teórico, uma possibilidade de trabalho a partir deste é a elaboração de uma investigação que problematize as ideias aqui apresentadas, uma vez que este não foi um objetivo da pesquisa. Tal problematização pode ser feita não somente a partir desta investigação, mas também de outros temas e conceitos que têm sido discutidos por membros do GEPEMA.

Ainda por meio dessa configuração, é possível investigar relações da reinvenção guiada (e da Educação Matemática Realística) com trabalhos que discutem estratégias, métodos, para a condução de aulas de matemática (por exemplo, resolução de problemas, atividades de investigação, ensino exploratório, modelagem matemática).

Sobre o aspecto prático, considera-se que a RME é uma abordagem para o ensino de matemática, tendo a reinvenção guiada como método de trabalho para o professor. Futuros trabalhos podem investigar a utilização/discussão da reinvenção guiada na/para a formação, inicial ou continuada, de professores.

Parte deste texto fornece informações a respeito da elaboração de trajetórias de ensino e aprendizagem, enquanto um meio de se trabalhar (planejar e guiar a execução) com a reinvenção guiada. A partir da elaboração e aplicação de trajetórias, aspectos referentes ao que o professor planeja hipoteticamente e o que acontece em sala de aula constituem elementos para investigações teóricas (em relação aos conhecimentos mobilizados por professores na elaboração e aplicação das trajetórias) e práticas (no que se refere à possibilidade de reelaboração da trajetória após sua aplicação para utilização em sala de aula).

Tais possibilidades de futuras investigações revelam não somente caminhos que podem ser percorridos em âmbito de pesquisa e de busca por aproximação com a escola, mas também ressaltam a importância deste trabalho, para o GEPEMA e para a Educação Matemática.

Para além da importância que a comunidade acadêmica pode dar a este trabalho, há também uma relevância pessoal em relação a esta pesquisa: enquanto pesquisador, professor, membro do GEPEMA, estudante, em muitos momentos tive[69] resistência em relação a outras abordagens ao ensino de matemática, que não eram semelhantes às que eu observava nas aulas de que participei enquanto estudante. Minha resistência às pesquisas referentes a abordagens não tradicionais refletia no “ser professor” e, consequentemente,

[69] Neste momento do texto, retorno à primeira pessoa do singular para falar da relevância do trabalho para mim (autor da pesquisa).

colocava-me “dentro do vidro”[70]. Esta investigação reflete um primeiro romper vidros, uma fuga das abordagens tradicionais. Não se trata de buscar outros vidros em que me colocar, mas romper com preconceitos que me aprisionavam e que agora começam a não mais aprisionar.

Sei que este trabalho sozinho não é suficiente para mudar toda a minha prática, assim como pode não ser suficiente para mudar a prática de um outro professor que o leia. Entretanto, espero que seja um indicativo para que outros vidros comecem a se romper como o meu.

[70] Metáfora de Ruth Rocha em “Quando a Escola é de Vidro”, apresentada no início deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Vanessa Lucena Camargo de. **Questões não-rotineiras**: a produção escrita de alunos da graduação em Matemática. 2009. 135f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ALVES, Rose Mary Fernandes. **Uma análise da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões abertas de Matemática**, 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2006

AMERON, Barbara Ann van. **Reinvention of early algebra**: developmental research on the transition from arithmetic to algebra [S.l.]: [s.n.] - Tekst. - Proefschrift Universiteit Utrecht, 2002.

ATIVIDADE. In: ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Mestre Jou, 1982.

______. In: HOUAISS, Antônio. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

BAKKER, Arthur; DOORMAN, Michiel; DRIJVERS, Paul. **Design research on how IT may support the development of symbols and meaning in mathematics education**, 2003.

BEZERRA, Gisleine Correa. **Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade**: um estudo. 2010. 183f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

BORASI, Raffaella. On the nature of problems. **Educational Studies in Mathematics**, v. 17, n. 2, p. 125-141, 1986.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Algumas considerações sobre avaliação educacional. **Estudos em Avaliação Educaciona**l, São Paulo, n.22, p.155-177, jul/dez. 2000.

CELESTE, Letícia Barcaro. **A produção escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de Matemática do PISA**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

CIANI, Andréia Büttner. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática.** 2011. 166 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

CONFIGURAR In: **HOUAISS**: dicionário Houaiss de sinônimos e antônimos. Rio de Janeiro: Editora Objetiva, 2003.

______. In: BIDERMAN, Maria Tereza Camargo. **Dicionário contemporâneo de português**. São Paulo: Vozes, 1992.

______. In: CUNHA, Antônio Geraldo da. **Dicionário etimológico da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Lexikon, 2010.

______. In: FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa**. Curitiba: Ed. Positivo, 2009.

______. In: **MICHAELIS**: moderno dicionário da língua portuguesa. São Paulo: Companhia Melhoramentos, 1998.

______. In: MUNIZ, Elisabete Lins Muniz; CASTRO, Hermínia Maria Totti de. **Dicionário Barsa da língua portuguesa**. São Paulo: Barsa Planeta, 2005.

______. In: NASCENTES, Antenor. **Dicionário ilustrado da língua portuguesa da Academia Brasileira de Letras**. v. 2. Rio de Janeiro: Bloch Editores, 1972.

DALTO, Jader Otavio. **A produção escrita em Matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 2007. 100 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina.

DE LANGE, Jan. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

______. Assessment: No change without problems. In: T. A. Romberg (Ed.), **Reform in School Mathematics and Authentic Assessment**. New York: SUNY Press, 87-172, 1995.

______. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.

______. Mathematics for Literacy. In: B.L. Madison & L.A. Steen (Eds.), Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges. Princeton, NJ: National Council on Education and Disciplines. 2005.

DEKKER, Truus; QUERELLE, N. **Great assessment problems**. Utrecht: Freudenthal Instituut, 2002.

DOORMAN, Michiel. How to guide students? A reinvention course on modeling motion. In: LIN, F. L. (Eds.), **Common sense in Mathematics Education,** Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University, p. 97-114, 2002.

DOORMAN, Michiel *et al*. Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. **International Journal of Science and Mathematics Education**, 2012.

DOORMAN, Michiel; GRAVEMEIJER, Koeno. Emergent modeling: Discrete graphs to support the understanding of change and velocity. **ZDM — The International Journal on Mathematics Education**, 41, 199-211, 2009.

DRIJVERS, Paul. Students Encountering Obstacles Using a CAS. **International Journal of Computers for Mathematical Learning** 5:189–209, 2000.

______. **Learning algebra in a computer algebra environment**. 2003. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade de Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, The Netherlands, 2003.

FENOMENOLOGIA. In: ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Mestre Jou, 1982.

______. In: MORA, José Ferrater. **Dicionario de filosofía**. Buenos Aires, Sudamerica, 1971.

FERREIRA, Pamela Emanueli Alves. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. 166f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

______. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FIGURA. In: CUNHA, Antônio Geraldo da. **Dicionário etimológico da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Lexikon, 2010.

______. In: FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa**. Curitiba: Ed. Positivo, 2009.

______. In: MORA, José Ferrater. **Dicionario de filosofía**. Buenos Aires, Sudamerica, 1971.

FORMA. In: ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Mestre Jou, 1982.

______. In: FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa**. Curitiba: Ed. Positivo, 2009.

FREUDENTHAL, Hans. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

______. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

______. Major problems in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, pp. 133-150. 1981.

______. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1983.

______. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAVEMEIJER, Koeno. **Creating opportunities for students to reinvent mathematics**. ICME 10, 2004.

______. Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education. In: APEC - Tsukuba International Conference III, Tokyo Kanazawa and Kyoto, Japão, 2007. **Proceedings...** Disponível em: <http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/index_en.php>. Acesso em: 30 ago. 2014.

______. RME theory and mathematics teacher education. In: **International handbook of mathematics teacher education**, Rotterdam: Sense Publisher, v. 1, p. 238-302, 2008.

GRAVEMEIJER, Koeno; COBB, Paul. Design research from a learning design perspective. In: VAN DEN AKKER, Jan. *et al*. **Educational design research**. London: Routledge, 2006.

GRAVEMEIJER, Koeno; DOORMAN, Michiel. **Context problems in realistic mathematics education:** a calculus course as an example. Educational Studies in Mathematics, v. 39, n. 1, p. 111-129, jan. 1999.

GRAVEMEIJER, Koeno; TERWEL, Jan. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777-796, nov-dez. 2000.

GUIAR. In: FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa**. Curitiba: Ed. Positivo, 2009.

INVENTAR. In: FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa**. Curitiba: Ed. Positivo, 2009.

KEIJZER, Ronald. **Teaching formal mathematics in primary education**. Utrecht, the Netherlands: CD-ß Press. Supervisor: Prof.dr. J. Terwel, 2003.

KEIJZER, Ronald; VAN GALEN, Frans; OOSTERWALL, Lia **Reinvention revisited**: learning and teaching decimals as an example. Paper presented at the ICME 10, 2004.

KINDT, Martin. Als een kat om de hete algebrij. [As a cat around the algebra.] **De Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs***, 5*(21), 155-157. 1980.

______. De erfenis van al-Khwarizmi. [The inheritance of al-Khwarizmi.] In F. Goffreee, M. van Hoorn & B. Zwaneveld (Eds.), **Honderd jaar wiskundeonderwijs** [One hundred years of mathematics education] (pp. 57-70). Leusden, Netherlands: NVvW. 2000.

KWON, Oh Nam. Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equations. **Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level. Hersonissos.** Greece. University of Crete, 2002.

LOPEZ, Juliana Maira Soares. **Análise interpretativa de questões não-rotineiras de matemática**. 2010. 128 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010.

MENDES, Marcele Tavares. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275f. Trabalho Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2014.

MORAES, Marco Antonio Gonzalez. **Correção de uma prova escrita de matemática**: algumas considerações. 2013. 91f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

NAGY-SILVA, Marcia Cristina. **Do observável para o oculto**: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de Matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina.

NEGRÃO DE LIMA, Roseli Cristina. **Avaliação em Matemática**: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.

OLIVEIRA, Rodrigo Camarinho de. **Matematização**: estudo de um processo. 2014. 62f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

ORIENTAR. In: FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa**. Curitiba: Ed. Positivo, 2009.

PEDROCHI JUNIOR, Osmar. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em matemática**. 2012. 58 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

PEREGO, Franciele. **O que a produção escrita pode revelar?:** uma análise de questões de Matemática. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina.

PEREGO, Sibéle Cristina. **Questões abertas de Matemática**: um Estudo de registros escritos. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina.

PEREIRA JUNIOR, Ademir. **Enunciados de Itens de provas de Matemática**: um estudo na perspectiva da Educação Matemática Realística. 2014. 68f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PIRES, Magna Natalia Marin. **Oportunidade para aprender**: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases. 2013. 122f. Tese (Programa de Pós-

Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

REAL. In: HOUAISS, Antônio. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

REALIDADE. In: ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Mestre Jou, 1982.

______. In: HOUAISS, Antônio. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

______. In: MORA, José Ferrater. **Dicionario de filosofía**. Buenos Aires, Sudamerica, 1971.

REPRESENTAR. In: ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Mestre Jou, 1982.

______. In: HOUAISS, Antônio. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Estudo da produção escrita de estudantes do Ensino Médio em Questões discursivas não rotineiras de Matemática**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual dc Londrina, Londrina, 2008.

______. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SEGURA, Raquel de Oliveira. Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões Discursivas de Matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina.

SIMON, Martin A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 26, n. 2, pp. 114-145. 1995.

STREEFLAND, Leen. **Fractions in Realistic Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer, 1991.

TREFFERS, Adri. **Three Dimensions**: a model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

______. Meeting innumeracy at primary school. **Educational Studies in Mathematics.** 22, 333-352, 1991.

TREFFERS, Adri; GOFFREE, Fred. Rational analysis of realistic mathematics education. In: STREEFLAND, L. (ed.). **Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Utrecht, The Netherlands: OW&OC. v. 2, p. 97-123, 1985.

TREVISAN, André Luis. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática**. 2013. 168f. Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VAN DEN BOER, Corine. If you know what I mean. In: DRIJVERS, Paul. **Classroom-based research in Mathematics Education**. 2004

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. Improvement of (didactical) assessment by improvement of the problems: An attempt with respect to percentage. **Educational Studies in Mathematics***, 27* (4), 341-372. 1994.

______. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

______. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. **Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9**. Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.

______. Learning-teaching trajectories with Intermediate attainment targets. In: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja (Ed.). **Children learn mathematics**: a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school. Groningen, The Netherlands: Wolters Noordhoff, 2001.

______. Realistic Mathematics Education in the Netherlands. In: ANGHILERI, Julia (Ed.), **Principles and practice in arithmetic teaching** Buckingham/Philadelphia: Open University Press, p. 49-63, 2001.

______. The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**, v. 54, n. 1, p. 09-35, nov. 2003.

______. (org.). **Los niños aprenden matemáticas**. México: Correo del maestro: La vasija, 2010a.

______. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, Len; KISSANE, Barry; HURST, Chris (Eds.). **Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle: MERGA, 2010b.

VAN REEUWIJK , Maarten. From informal to formal, progressive formalization: an example on “solving systems of equations.” In: CHICK, H.; STACEY, K. ; VINCENT, J. (Eds.), **The future of the teaching and learning of algebra**: Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, vol. 2, p. 613-620, 2001.

VIOLA DOS SANTOS. João Ricardo. **O que alunos da Escola Básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. 114 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina.

WIDJAJA, Yenni B.; HECK, André. How a Realistic Mathematics Education approach and microcomputer-based laboratory worked in lessons on graphing at an

Indonesian Junior High School. **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia**, Amsterdam, v. 26, n. 2, p. 1-51, 2003.

ANEXOS

ANEXO A

Textos utilizados para o estudo

Ano	**Autor(es)**	**Título em língua inglesa**	**Tipo**
1968-69	Hans Freudenthal	Further training of mathematics teachers in the Netherlands	Artigo
1968	Hans Freudenthal	Why to teach mathematics so as to be useful	Artigo
1971	Hans Freudenthal	Geometry between the devil and the deep sea	Artigo
1973	Hans Freudenthal	Mathematics as an educational task	Livro
1973	Hans Freudenthal	Weeding and sowing	Livro
1977	Hans Freudenthal	Teacher training - an experimental philosophy	Artigo
1981	Hans Freudenthal	Major problems of mathematics education	Artigo
1983	Hans Freudenthal	Didactical phenomenology of mathematical strutures	Livro
1985	Adri Treffers e Fred Goffree	Rational analysis of realistic mathematics education	Artigo
1991	Adri Treffers	Meeting innumeracy at primary school	Artigo
1991	Hans Freudenthal	Thoughts on teaching mecanics	Artigo
1991	Hans Freudenthal	Revisiting mathematics education	Livro
1991	Leen Streefland	Fractions in RME	Livro
1993	Adri Treffers	Wiskobas and Freudenthal	Artigo
1993	Leen Streefland	The design of a mathematics course	Artigo
1994	Koeno Gravemeijer	Educational development and development research in mathematics education	Artigo
1994	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Improvement of (didactical) assessment by improvement of problems	Artigo
1995	Jan De Lange	Assessment no change without problems	Artigo
1995	Martin van Reeuwijk	The role of realistic situations in developing tools for solving systems of equations	Artigo
1995	Thomas A. Romberg	Reform in school mathematics and authentic assessment	Livro
1996	Heleen Verhage e Jan De Lange	Mathematics education and assessment	Artigo
1996	Jan De Lange	Using and applying mathematics in education	Artigo
1996	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Assessment and realistic mathematics education	Livro
1999	Jan De Lange	Framework	Livro
1999	Koeno Gravemeijer e Michiel Doorman	Context problem in realist mathematics education	Artigo
2000	Koeno Gravemeijer e Jan Terwel	Hans Freudenthal a mathematician	Artigo
2000	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Mathematics education in the Netherlands - a guided tour	Artigo
2000	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Realistic mathematics education as work in progress	Artigo
2000	Paul Drijvers	Students encountering obstacles using a CAS	Artigo
2001	Marja van den Heuvel-Panhuizen	A learning-teaching trajectory as a hold for teaching primary-school mathematics in the Netherlands	Artigo

2001	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Children learn mathematics	Livro
2001	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Realistic Mathematics Education in the Netherlands	Artigo
2001	Martin van Reeuwijk	From informal to formal, progressive fomalization	Artigo
2001	Monica Wijers	How to deal with algebraic skills in Realistic Mathematics Education	Artigo
2001	Paul Drijvers	The concept of parameter in a computer algebra environment	Artigo
2002	Barbara Ann van Amerom	Reinvention of early algebra	Artigo
2002	Oh Nam Kwon	Conceptualizing the realistic maths education	Artigo
2002	Evertje Helena Kroesberg	Mathematics education for low-achieving students	Livro
2002	Evertje Helena Kroesberg	Teaching multiplication to low math performers - Guided versus structured instruction	Artigo
2002	Michiel Doorman	How to guide students	Artigo
2002	Paul Drijvers	Algebra on screen, on paper, and in the mind	Artigo
2002	Truus Dekker e N. Querelle	Great assessment problems	Livro
2003	Yenni B. Widjaja e André Heck	How a Realistic Mathematics Education approach and microcomputer-based laboratory worked in lessons on graphing at an Indonesian Junior High School	Artigo
2003	Arthur Bakker, Michiel Doorman e Paul Drijvers	Design research on how it may support the development of symbols and meaning	Artigo
2003	Leen Streefland	Learning from history for teaching in the future	Artigo
2003	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Guides for didactical decision making in primary school mathematics education	Artigo
2003	Marja van den Heuvel-Panhuizen	The didactical use of models in Realistic Mathematics Education	Artigo
2003	Marja van den Heuvel-Panhuizen	The learning paradox and the learning miracle	Artigo
2003	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Towards a didactic model for assessment design in Mathematics Education	Artigo
2003	Paul Drijvers	Learning algebra in a computer algebra environment	Livro
2004	Koeno Gravemeijer	Creating opportunities for students to reinvent mathematics	Artigo
2004	Marja van den Heuvel-Panhuizen	All or nothing	Artigo
2004	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Girls' and boys' problems	Artigo
2004	Martin van Reeuwijk	Dot patterns and number strips	Artigo
2004	Paul Drijvers	Classroom-based Research in Mathematics education	Livro
2004	Ronald Keijzer	Reinvention revisited	Artigo
2005	Jan De Lange	Mathematics for Literacy	Artigo
2005	Koeno Gravemeijer	What makes mathematics so difficult, and what can we do about it?	Artigo

2005	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Can scientific research answer the ‘what’ question of mathematics education	Artigo
2005	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Mathematics standards and curricula in the Netherlands	Artigo
2005	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Offering primary school teachers a multi-approach experience-based	Artigo
2005	Marja van den Heuvel-Panhuizen	The role of contexts in assessment	Artigo
2006	Jan van den Akker et al	Educational design research	Livro
2006	Koeno Gravemeijer	Design research and design heuristics in statistics education	Artigo
2007	Anne Teppo e Marja van den Heuvel-Panhuizen	Mathe-didactical analysis - a crucial component of task design	Artigo
2007	Michiel Doorman	Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands	Artigo
2007	Oh Nam Kwon	An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics contributions to instructional design of differential equations	Artigo
2008	Koeno Gravemeijer	RME theory and mathematics teacher education	Artigo
2008	Robert K. Sembiring	Reforming mathematics learning in Indonesian classrooms through RME	Artigo
2009	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Exploring strategy use and strategy flexibility	Artigo
2009	Marja van den Heuvel-Panhuizen et al	Large-scale assessment of change in student achievement	Artigo
2009	Michiel Doorman e Koeno Gravemeijer	Emergent modeling discrete graphs	Artigo
2010	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Reform under attack	Artigo
2012	Marja van den Heuvel-Panhuizen	Freudenthal work continues	Artigo
2012	Michiel Doorman et al	Tool use and the development of the function	Artigo
2013	Marja van den Heuvel-Panhuizen e Paul Drijvers	Realistic Mathematics Education	Artigo