Universidade Estadual de Londrina

EDUARDO MACHADO DA SILVA

COMPREENSÃO DE ESTUDANTES DE UM CURSO DE MATEMÁTICA A RESPEITO DO CONCEITO DE INDUÇÃO FINITA

Londrina
2010

EDUARDO MACHADO DA SILVA

COMPREENSÃO DE ESTUDANTES DE UM CURSO DE MATEMÁTICA A RESPEITO DO CONCEITO DE INDUÇÃO FINITA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ensino de Ciências de Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Londrina
2010

EDUARDO MACHADO DA SILVA

COMPREENSÃO DE ESTUDANTES DE UM CURSO DE MATEMÁTICA A RESPEITO DO CONCEITO DE INDUÇÃO FINITA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ensino de Ciências de Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
UEL – Londrina – PR

Profa. Dra. Ana Márcia Fernandes
Tucci de Carvalho
UEL – Londrina – PR

Profa. Dra. Elisangela de Campos
UFPR – Curitiba – PR

Londrina, 02 de novembro de 2010.

Dedico esta pesquisa especialmente aos meus pais Silvia e Antonio que sempre me "obrigaram" a estudar. Também dedico a minha esposa Roberta que me incentivou constantemente e também ao Dudu.

AGRADECIMENTOS

Profesora Angela Marta muito obrigado pela sua orientação, dedicação, incentivo, amizade, paciência, disponibilidade e pela oportunidade de realizar este trabalho.

Professoras Ana Márcia e Elisangela agradeço pelas sugestões que ajudaram a aperfeiçoar este trabalho. Muito obrigado por dedicarem parte do seu tempo a leitura desta dissertação. Afinal, como dizem alguns: "tempo é dinheiro", assim, espero que vocês não tenham perdido tempo.

Aos colegas do mestrado meu muito obrigado. Em especial ao Gefferson com quem troquei muitas ideias. Valeu cara!

Moreco e Dudu, obrigado por entenderem esse momento. Agradeço a paciência, a compreensão e principalmente o amor.

Pai, mãe obrigado por me incentivarem a estudar. Cheguei aqui graças a vocês.

Obrigado ao Edio (Black Power) pelas correções ortográficas desta dissertação.

Aos estudantes que participaram gentilmente desta pesquisa meu muitíssimo obrigado.

Bem e por fim obrigado Papai do céu ...

A cabeça pensa a partir de onde os pés pisam. Para compreender, é essencial conhecer o lugar social de quem olha. Vale dizer: como alguém vive, com quem convive, que experiências tem, em que trabalha, que desejos alimenta, como assume os dramas da vida e da morte e que esperanças o animam. Isso faz da compreensão sempre uma interpretação. Sendo assim, fica evidente que cada leitor é co-autor. Porque cada um lê e relê com os olhos que tem. Porque compreende e interpreta a partir do mundo que habita.

Leonardo Boff

SILVA, Eduardo Machado da. **Compreensão de estudantes de um curso de matemática a respeito do conceito de indução finita**. 2010. 157f. Dissertação (Mestrado em ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é verificar, por meio de uma sequência didática que trabalha com a indução finita via axiomas de Peano, se os estudantes compreenderiam a diferença entre o método de indução empírica e de indução finita, bem como esta última como uma demonstração formal. Com relação aos aspectos referentes às provas e demonstrações, fundamentamos este trabalho a partir dos estudos de Balacheff (1987, 1988, 2004) e Hanna (1990, 1989a, 1989b), já a indução finita está baseada em (PALIS, 2001), Cury et al (2002), Savioli (2007) e Souza e Miranda (2007). Utilizamos a Engenharia Didática, nos moldes de Artigue (1996) para o desenvolvimento deste estudo sendo os sujeitos da pesquisa estudantes do curso de Matemática - Habilitação: Licenciatura. O confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori mostrou que alguns deles ainda associavam a indução finita com a indução empírica. Entretanto, com o desenvolvimento das atividades da sequência didática, pudemos verificar que outros estudantes passaram do nível do empirismo ingênuo para o nível do exemplo genérico, ou seja, entendemos que eles se encontram em um momento de transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais, consideradas por Balacheff (1988).

Palavras-chave: Provas e demonstrações. Indução finita. Engenharia didática. Ensino superior. Educação matemática.

SILVA, Eduardo Machado da. **Compreensão de estudantes de um curso de matemática a respeito do conceito de indução finita**. 2010. 157 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ABSTRACT

The objective of this research is to verify, by a didactic sequence that works with the finite induction through Peano axioms, if the students would understand the difference between the empirical induction method and finite induction, as well as, this last one as a formal demonstration. With regard to the referring aspects the tests and demonstrations we base this work from the studies of Balacheff (1987, 1988 and 2004) and Hanna (1990, 1989a, 1989b), already the finite induction this one based on (PALIS, 2001), Cury et al (2002), Savioli (2007) and Souza e Miranda (2007). We used Didactic Engineering, according to Artigue (1996) for the development of this study being the citizens of the research students of the course of Mathematics - Qualification: Licentiate. The confrontation between a priori and posteriori analysis showed that some of them still associated the finite induction with the empirical one. However, with the development of the activities of the didactic sequence, we could verify that other students had passed from ingenuous empiric level to the generic example one, thus, we understand that they have been at a moment of transition between the pragmatic tests and the conceptual ones considered for Balacheff (1988).

Keywords: Proofs and demonstrations. Finite induction. Didactic engineering. Superior education. Mathematical education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência dedutiva cuja validade de seus resultados exige uma demonstração, como afirmam Domingues e Iezzi (2003, p. 17). Dessa forma, durante o curso de matemática é comum estudantes lidarem com métodos de provas ou demonstrações, pois estas são as ferramentas utilizadas por um matemático profissional para mostrar que um teorema (ou proposição) é verdadeiro (a). Dessa maneira, temos com relação à formação de professores, a seguinte afirmação: "... um professor precisa dominar o conteúdo da disciplina que pretende ensinar." Sztajn (2002, p. 18). Portanto, parte da formação do professor de matemática deve contemplar o conteúdo referente aos métodos de demonstração matemática. Destacamos, a seguir, algumas competências que Pires (2002, p. 47) apresenta como fundamentais a um professor que ensina matemática: "conceber que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação [...], compreender noções de conjectura, teorema, demonstração, [...], ter confiança pessoal em desenvolver atividades Matemáticas [...]". Acreditamos que o desenvolvimento de tais competências indica a necessidade de serem abordados o tema provas e demonstrações matemáticas durante a formação inicial.

Assim, apesar do tema demonstração estar presente durante o curso de matemática e pertencer também a trajetória do professor de matemática, pois com este assunto é possível desenvolver as características já apontadas, encontramos pesquisas que indicam o abandono do ensino de provas e demonstrações por parte de alguns professores dos Ensinos Fundamental e Médio (CARVALHO, 2007). Em outra pesquisa Gouvêa (1998) afirma que há professores de escolas públicas do estado de São Paulo que não ministram mais o conteúdo referente a Geometria Euclidiana porque esse assunto envolve discussão e desenvolvimento de demonstrações. Com relação ao Ensino Superior, Carvalho (2004), afirma que a dificuldade dos estudantes em aprender com as demonstrações provoca um alto índice de desistência em cursos de matemática, pois

> Demonstrar é um grande desafio para o aluno, iniciante ou não, pois o professor usa argumentos que parecem "obscuros", os encadeamentos de proposições não lhe fazem sentido. Aparecem as queixas relativas à excessiva ansiedade provocada pelo que é ensinado e pela repetição de um enunciado que será cobrado em prova. Os alunos costumam declarar que se sentem impotentes diante das primeiras tentativas de elaborar demonstrações e que isso provoca ansiedades. (CARVALHO, 2004, p. iii)

Dessa forma, mesmo com os problemas levantados por Gouvêa (1998), Carvalho (2004) e Carvalho (2007), acreditamos que

> Demonstrar é um processo que serve para validar, esclarecer, sistematizar o conhecimento matemático, por isso um tal processo deve ser utilizado com as crianças, desde que começam a aprender matemática. Neste sentido, a demonstração estaria no cerne de toda a educação matemática, sem que envolvesse nos primeiros anos de escolaridade qualquer tentativa de formalismo. Para os alunos desenvolverem apreciação pela demonstração matemática é necessário tempo, muitas e variadas experiências em todos os conteúdos e anos de escolaridade, orientação para desenvolver a habilidade para construir argumentos válidos e para avaliar os argumentos construídos por si e pelos outros. (FONSECA, 2005)

Assim, com o intuito de realizar uma pesquisa que contemplasse o tema provas e demonstrações matemáticas notamos que os trabalhos de Palis (2001), Cury et al (2002), Hanna (1990), Savioli (2007) e Souza e Miranda (2007) abordam um método de demonstração matemática em especial, trata-se do princípio de indução finita[1]. O trabalho de Palis (2001) tem como foco as dificuldades apresentadas pelos estudantes acerca o conceito de indução finita. Já Cury et al (2002) procuram estabelecer conexões entre a Álgebra e Educação Algébrica a partir das respostas dos estudantes quando os mesmos realizam a prova de uma proposição usando a indução finita. Hanna (1990) caracteriza em sua pesquisa, que aborda aspectos pedagógicos da prova, a indução finita como uma prova que prova, ou seja, uma prova não explicativa em geral. A pesquisa de Savioli (2007) promove uma reflexão sobre a indução finita a partir de atividades de investigação em sala de aula em um curso de formação de professores de matemática. Já Souza e Miranda (2007) discutem a indução finita como um método de demonstração a partir de uma experiência em um curso de formação de professores.

Observamos que as pesquisas anteriores tratam da indução finita sob vários aspectos, porém nenhuma delas busca explicação acerca da compreensão e da aplicação da indução finita por parte dos estudantes. Desse modo, inferimos que a compreensão e a aplicação da indução finita pelos estudantes se restringem a encontrar modelos que podem ser seguidos, ou seja, que a utilização da indução finita é aplicada pelos estudantes como uma "receita" a ser seguida, isto é, como um processo mecânico que consiste em verificar se para uma determinada proposição as duas propriedades que compõe a demonstração por indução finita são verdadeiras.

---

[1] Há outras denominações para este conceito, como por exemplo, indução matemática e método de indução, entretanto optamos por utilizar neste trabalho a denominação indução finita.

Assim, as primeiras evidências com relação à hipótese deste trabalho foram realizadas comparando as pesquisas já citadas com alguns livros didáticos, como por exemplo, Domingues e Iezzi (1982), que abordam a indução finita, e foi possível perceber que as fórmulas que devem ser provadas por indução finita já vêem prontas, isto é, os autores apresentam imediatamente as proposições que devem ser provadas sem se quer oferecer oportunidade aos estudantes de realizarem uma experiência matemática. Entendemos que este modo de trabalhar os exercícios de indução finita não motiva os estudantes a resolvê-los, a não ser é claro, se tais problemas forem para nota. Assim pensamos que "A motivação e, conseqüentemente, o envolvimento nas atividades, constitui uma questão essencial nos processos de ensino e de aprendizagem. Eles estão diretamente relacionados com a predisposição do aluno para uma aprendizagem efetiva.", como afirma Savioli (2007, p. 46). Além disso, Savioli (2007, p. 45) assegura que "... quando se trata de um problema de indução finita existe uma preocupação com o procedimento e, geralmente, este não apresenta nenhuma motivação que gere o envolvimento dos alunos nas atividades."

Além dos argumentos anteriores foi possível notar no trabalho de Palis (2001) outras características por parte dos estudantes com relação a demonstrações por indução finita, como por exemplo, a dificuldades que eles apresentam com relação ao significado do termo indução. Outra característica que Palis (2001) aborda em seu trabalho é a existência de um equívoco quanto ao entendimento do conceito da indução finita, isto é, em não considerar que uma das propriedades que compõe a demonstração é fundamental, ou seja, em não considerar a primeira propriedade, que constitui a base da indução finita como uma das etapas. Assim como esta autora Ávila (2005) e Souza e Miranda (2007) fazem uma observação sobre a importância dessa etapa ser verificada. Watanabe (1986), propõe um exercício nesse trabalho que consiste em demonstrar que em uma turma de n alunos todos são inteligentes. A resolução deste exemplo permite verificar a importância de se estabelecer a base indutiva na demonstração por indução finita.

Hanna (1990) caracteriza a prova realizada por indução finita como um tipo de prova que prova, isto é, considera tais provas como sendo não explicativas, isto porque, nesse tipo de prova não é possível encontrar explicitamente as justificativas apresentadas pelos estudantes, assim, entendemos que a preocupação deles consiste em buscar modelos a fim de que seja possível resolver o problema a partir de algumas manipulações algébricas. É isto que caracterizamos como processo mecânico nesta pesquisa.

A terminologia processo mecânico, que usamos anteriormente, também se justifica pelo seguinte argumento: os estudantes sabem como desenvolver uma prova por indução finita, isto é, que devem provar que uma determinada afirmação é verdadeira para um n_0 inicial e que se para um k qualquer ela também for verdadeira, então também será para o seu sucessor, ou seja, para k+1. Dessa forma nossa hipótese de trabalho foi delineada a partir das leituras anteriores, onde notamos que os estudantes não entendem *por quê* e nem *para quê* se utiliza o princípio de indução finita.

Assim, a partir dessas analises estabelecemos como objetivo deste trabalho **verificar por meio de uma sequência didática, que trabalha com a indução finita via axiomas de Peano, se os estudantes compreenderiam a diferença entre o método de indução empírica e de indução finita, bem como, esta última como uma demonstração formal e não somente como um processo mecânico.**

Visando atingir nosso objetivo buscamos como a indução finita aparece na literatura, nos livros didáticos, na história da matemática e nos registros escritos dos estudantes.

Esta dissertação é composta por seis capítulos. No primeiro capítulo a apresentamos uma exposição sobre a definição dos termos prova e demonstração relatando sobre a origem histórica dos processos de prova e demonstração e finalizamos este capítulo expondo algumas posições sobre a importância das provas e demonstrações além de suas funções a partir de perspectivas da Educação Matemática. No segundo capítulo, abordamos o princípio de indução finita juntamente com o método de indução empírica, no qual caracterizamos cada um deles. O terceiro capítulo se refere aos procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa, assim, expomos a teoria das situações didáticas e a engenharia didática focadas no desenvolvimento do nosso trabalho. O quarto capítulo trata da análise preliminar onde definimos nosso fenômeno de estudo e descrevemos os procedimentos utilizados para a construção da sequência didática. No quinto capítulo relatamos como ocorreram as etapas de experimentação, as análises a priori, as análises a posteriori juntamente com a validação. Por fim no sexto e último capítulo apresentamos nossas considerações finais.

CAPÍTULO 1
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 PROVA E DEMONSTRAÇÃO: BREVE EXPOSIÇÃO

Denominar professores de matemática como matemáticos é um hábito comum, porém isso nem sempre corresponde a uma verdade, isso porquê suas práticas profissionais podem ser muito diferentes. Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 3) apontam que um matemático profissional concebe a matemática com um fim em si mesma, além disso, priorizam conteúdos formais dela com intuito de formar pesquisadores em matemática. Já o educador matemático, como é denominado por esses autores o professor de matemática, idealiza a matemática "como um meio ou instrumento à formação intelectual e social de crianças, jovens e adultos..." Dessa forma, temos que a produção de conhecimento dessas duas categorias é distinta.

Com relação à prática do matemático profissional destacamos que

> [...] uma de suas características mais importantes, a produção de resultados originais de **fronteira**. Os tipos de objetos com os quais se trabalha, os níveis de abstração em que se colocam as questões e a busca permanente de máxima generalidade nos resultados fazem com que a ênfase nas estruturas abstratas, o processo rigorosamente lógico-dedutivo e a extrema precisão de linguagem sejam, entre outros, valores essenciais associados à visão que o matemático profissional constrói do conhecimento matemático. (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 21)

Complementando a ideia referente à prática do matemático profissional apresentamos a posição de Bicudo (1999, p. 117) na qual "o matemático profissional, eliminado tudo o que seja supérfluo, está constantemente preocupado com duas operações de sua razão: definir os conceitos de uma certa teoria e demonstrar as propriedades desse conceito."

Esclarecidas as tarefas desenvolvidas por um matemático profissional tem-se que um dos temas presentes neste trabalho se refere à segunda operação apresentada por Bicudo (1999), ou seja, consiste no ato ou efeito do profissional de matemática em realizar demonstrações. Essa é sem dúvida uma tarefa que os matemáticos profissionais desenvolvem frequentemente em seu ofício. Mas afinal, o que é uma demonstração? Qual o objetivo de uma demonstração? Qual a utilidade de uma demonstração? A demonstração busca demonstrar o quê?

Segundo o dicionário Aurélio (1999, p. 621) demonstração é: "1. ato ou efeito de demonstrar. 2. Tudo que serve para demonstrar; prova." Já o dicionário Houaiss (2001) define demonstração como:

> ato ou efeito de demonstrar 1 qualquer recurso capaz de atestar a veracidade ou a autenticidade de alguma coisa; prova 1.1 raciocínio que torna evidente o caráter verídico de uma proposição, idéia ou teoria <*d. matemática*> [...] 5 FIL raciocínio que desenvolve princípios reconhecidamente verdadeiros com o intuito de alcançar, por intermédio da evidência e da necessidade inerentes ao processo de elaboração dedutiva, determinadas verdades que não se manifestam à primeira vista.

No dicionário filosófico de Abbagnano (2000, p. 239 e 240) o termo demonstração possui a seguinte definição:

> O termo D. e seu conceito foram introduzidos na Lógica por Aristóteles (*Top.*, I 100 a *27; An.post.*, I, 2 e *passim*) como silogismo que deduz uma conclusão de princípios primeiros e verdadeiros de outras proposições deduzidas silogisticamente de princípios primeiros e evidentes. [...] Mas, enquanto do ponto de vista gnosiológico se acentuaram os caracteres de *necessidade* e *evidência intuitiva* da D. (Descartes, Kant), do ponto de vista lógico evidenciou-se o caráter de dedução formal a partir de premissas (Descartes, Leibniz), o que distingue a D. (cujo tipo ou ideal continua sendo a D. matemática) de outros gêneros de prova.

As definições anteriores não apresentam aparentemente um consenso em relação a uma mesma interpretação ou mesmo um entendimento para o termo demonstração. Porém, em todos os significados apresentados é possível notar um termo comum. Trata-se do termo prova ou provar. Mas então, o que significa a palavra prova? No dicionário Aurélio (1999, p. 1656) o termo prova é definido como: "1. Aquilo que atesta a veracidade ou a autenticidade de algo. 2. Ato que atesta uma intenção ou sentimento; testemunho. 3. Processo que permite verificar a exatidão dum cálculo. 4. Ato de provar...". Já para a palavra provar o mesmo dicionário trás como significado: "1. Estabelecer a verdade, a realidade de; dar prova de. 2. Demonstrar, comprovar." No dicionário Etimológico Nova Fronteira (1997, p. 642) encontramos apenas a palavra provar, e esta possui como definição: "'estabelecer a verdade' 'patentear, testemunhar.'"

No dicionário Houaiss (2001, p. 2320) encontramos os dois vocábulos. A definição de prova é: "1 aquilo que demonstra que uma afirmação ou um fato são verdadeiros; evidência, comprovação." E para a palavra provar temos como significado: "demonstrar a verdade, a realidade, a autenticidade de uma coisa com razões, fatos etc. 2 dar testemunho, prova, demonstração de; patentear, evidenciar, revelar."

Já, no dicionário filosófico Abbagnano (2000, p. 805) o termo prova é definido como:

> Procedimento apto a estabelecer um saber, isto é, um conhecimento válido. Constitui P. todo procedimento desse gênero, qualquer que seja sua natureza: mostrar uma coisa ou um fato, exibir um documento, dar testemunho, efetuar uma indução são P. tanto quanto as demonstrações da matemática e da lógica. Portanto esse termo é mais extenso que *demonstração* (v): as demonstrações são P., mas nem todas as P. são demonstrações.

Podemos notar que nos dicionários os termos demonstração e prova apresentam certas sutilezas que os tornam substancialmente diferentes. Contudo, matematicamente pode-se utilizar os dois termos indistintamente. Assim,

> No léxico, tanto quanto no jargão matemático, prova e demonstração são tidos como sinônimos: é o que atesta a veracidade ou autenticidade, a garantia, o testemunho, o processo de verificação da exatidão de cálculos ou raciocínios, a dedução que mantém a verdade de sua conclusão apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras. Em Matemática, "Prova" ou "demonstração" sempre vêm, implícita ou explicitamente, adjetivados: são rigorosas. (GARNICA, 2000, p. 8)

Neste sentido, para o desenvolvimento desta pesquisa vamos adotar, os termos prova e demonstração como sinônimos.

1.2 Prova e Demonstração: Origens Históricas

O intuito desta sessão é descrever como ocorreu o nascimento dos processos de provas e demonstrações na matemática. Além disso, pretendemos identificar quais foram as necessidades iniciais que levaram os primeiros estudiosos de Matemática a desenvolverem estes processos. Assim, como D'Ambrósio (1996, p. 29 - 30), concordamos que: "A história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época."

Os alicerces de uma teoria em matemática são compostos por conceitos primitivos ou postulados e por teoremas ou proposições. Os conceitos primitivos são afirmações aceitas sem a necessidade de demonstração, como por exemplo, na Álgebra temos a noção de conjunto, de elemento de um conjunto e de pertinência. Na Geometria Euclidiana temos os conceitos de: ponto, reta e plano. Já os teoremas são afirmações em que é imprescindível ter uma prova. Na Geometria Euclidiana um dos teoremas mais antigos e também um dos mais conhecidos que podemos citar como exemplo é o teorema de Pitágoras. Já na vertente algébrica um exemplo de teorema é o teorema fundamental da Álgebra.

As primeiras evidências sobre o desenvolvimento de alguma atividade matemática se deram, segundo Boyer (1974) e Eves (2004), por meio de ideias relacionadas com os problemas de contagem, donde vem os primeiros conceitos relacionados à definição de número. Além dessa atividade, houve preocupação do Homem antigo em relacionar grandezas e formas.

Boyer (1974) e Eves (2004) apontam também que os primeiros povos antigos a desenvolverem aplicações da Matemática para atender suas necessidades diárias foram os egípcios e os babilônios. Devido ao interesse pela Astronomia os egípcios elaboraram um calendário com a finalidade de determinar os períodos de enchente do rio Nilo. Segundo Boyer (1974) este calendário era composto de 12 meses dispostos em 30 dias cada mês. Os egípcios também dispunham de um sistema decimal usado para realizar contagens. A partir do desenvolvimento do processo de escrita, os egípcios deixaram os registros de seus estudos em papiros. Para Boyer (1974) e Eves (2004) os papiros que apresentam um vasto conjunto de informações sobre o desenvolvimento da matemática egípcia são os papiros de Rhind e de Moscou. Nestes papiros há descrições de métodos de multiplicação e divisão desenvolvidos pelos egípcios, além de uma regra conhecida como a regra da falsa posição, utilizada para resolver equações lineares.

Já os babilônios dispunham de regras gerais para determinar a área de figuras planas, além de regras para calcular volumes de certos sólidos geométricos. Este povo também aplicava com êxito o que mais tarde chamou-se de teorema de Pitágoras. Os registros do desenvolvimento da matemática babilônica estão contidos no Papiro de Plimpton 322.

Olhando o desenvolvimento da matemática promovido pelos egípcios e babilônios não encontramos registros sobre os processos de provas e demonstrações relativos à matemática, isto é, a ênfase destes povos era centrada em aplicações práticas do dia-a-dia, seus interesses estavam voltados para o desenvolvimento de estratégias que pudessem ser aplicadas para encontrar a solução de problemas particulares. Tanto os egípcios quanto os babilônios não se preocupavam em generalizar suas regras.

> Deve-se notar, contudo, que nenhum exemplo do que hoje chamamos demonstração pode ser encontrado na matemática oriental antiga. Em vez de

> um argumento encontra-se meramente a descrição de um processo. Instrui-se 'Faça assim e assim'. Além disso, exceto possivelmente em alguns casos, essas instruções não eram dadas na forma de regras gerais, mas simplesmente aplicadas a seqüências de casos específicos. (EVES, 2004, p. 58)

Além disso,

> No caso da matemática babilônica e egípcia, por exemplo, os historiadores são concordes em que nenhuma delas se baseou em qualquer estrutura axiomática que pudesse servir de garantia para a validade dos procedimentos práticos de que essencialmente se compunham. O critério de confiabilidade das regras e procedimentos usados era simplesmente a concordância com a realidade a que se destinavam. O que também pode ser tomado como uma idéia de verdade matemática. (DOMINGUES, 2002, p. 47).

Assim, como se pode notar, não há qualquer evidência sobre o desenvolvimento de provas e demonstrações na matemática desenvolvida pelos povos egípcios e babilônios, a ênfase destes povos estava centrada em regulamentar instruções que serviam para os mesmos resolverem certos problemas ou efetuarem cálculos.

De acordo com Cajori (2007), foi por meio de um intercâmbio que o povo grego tomou contato com a matemática desenvolvida pelos egípcios. Isso ocorreu, segundo este autor, em meados do século VII a.C., e por essa razão a matemática grega não é considerada totalmente original. Apesar disso, temos ainda, segundo Cajori (2007), que os conceitos egípcios ao chegarem à Grécia estimularam esse povo direcionando novas linhas de pensamento. Portanto, apesar de terem recebido todo o arcabouço da matemática da época, os gregos não ficaram satisfeitos em apenas aplicar regras e seguir instruções. Dessa forma, Bicudo (2005, p. 58) aponta que: "... com os matemáticos da Grécia, a razão suplanta a 'empeiria[2]' como critério de verdade, tornando-se a Matemática uma ciência dedutiva."

Como afirma Eves (2004, p. 94), isto ocorre porque os gregos pela primeira vez formulam questões como, por exemplo: "Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?" Podemos verificar a validade da questão anterior construindo finitos triângulos isósceles e medindo os ângulos da base, mas apenas pela experiência não é possível garantir que isso seja de fato uma afirmação verdadeira sempre, pois não é possível testar todos os casos.

Os processos empíricos que satisfaziam as necessidades dos egípcios e babilônios eram aceitáveis apenas para responder *como*, mas não eram suficientes para

---

[2] Relativo a empirismo

responder por que. O caráter de generalização, isto é, de apontar a validade de uma afirmação para todos os casos possíveis é o que distingue o pensamento grego do pensamento egípcio e babilónico. É a busca de uma verdade incontestável que impulsiona os gregos a uma nova perspectiva de raciocínio. Portanto, é essa a característica que diferencia o pensamento dos gregos e que Bicudo (1999, p. 118) enfatiza: "[...] não bastar mais ver para crer; para CRER era preciso PROVAR."

É a mudança da matemática empírica dos egípcios e babilônios para a matemática dedutiva sistemática grega, que dá esse novo método de pensamento, o qual atualmente é denominado de método dedutivo.

O dicionário Aurélio (1999, p. 613) tem como definição para dedução: "1. ação de deduzir. 2. o que resulta de um raciocínio; conclusão. 3. enumeração minuciosa de fatos e argumentos". Em linhas gerais podemos dizer que a dedução é um tipo de raciocínio que vai do geral ao particular. Adiante discutiremos os aspectos dos métodos dedutivos, indutivos e abdutivos.

Voltando aos gregos, foi a partir das investigações realizadas por esse povo que nasce o conceito moderno de matemática:

> Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano. Assim, a matemática, no sentido moderno da palavra, nasceu nessa atmosfera de racionalismo e em uma das novas cidades comerciais localizada na costa oeste da Ásia Menor. (EVES, 2004, p. 94)

Para Boyer (1974), Eves (2004) e Cajori (2007), os protagonistas que desenvolveram as primeiras provas e demonstrações matemáticas foram Tales de Mileto (624 - 547 a.C.) e Pitágoras de Samos (596 - 475 a.C.). Ambas as datas são aproximadas, pois não há registros oficiais sobre nenhum deles. Assim, os resultados de suas pesquisas são citados por outros estudiosos gregos. Para Boyer (1974), Tales é considerado o primeiro matemático moderno:

> A proposição agora conhecida como teorema de Tales - que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto - pode ter sido aprendida por Tales durante suas viagens a Babilônia. No entanto, a tradição vai mais longe e lhe atribui uma espécie de demonstração do teorema. Por isso Tales foi saudado como o primeiro matemático verdadeiro. (BOYER, 1974, p. 34)

Apesar de Boyer (1974) considerar Tales como o primeiro matemático moderno ele discorda que Tales teria dado os primeiros passos em direção à criação de um sistema axiomático-dedutivo. Assim, Boyer (1974, p. 35) afirma que: "Tais referências, no entanto, não trazem mais provas relativas à importante questão de saber se Tales arranjou de fato, ou não, um certo número de teoremas geométricos numa sequência dedutiva." Existem outras demonstrações de teoremas que são creditadas a Tales, mas não há documentos que comprovem a veracidade de tais informações.

Assim como Tales, outro estudioso que tem seu nome ligado a várias descobertas e demonstrações matemáticas é Pitágoras. Para Boyer (1974), Eves (2004) e Cajori (2007) o nome de Pitágoras é cercado de misticismo e incertezas. Porém, estes autores apontam Pitágoras como fundador de uma escola, denominada escola pitagórica, onde ele e seus seguidores se dedicavam a estudar filosofia, música e matemática.

> O *Sumário Eudemiano* diz que 'Pitágoras transformou o estudo de geometria em uma forma de educação liberal, pois examinou seus princípios a fundo, e investigou de um modo integral e intelectual os seus teoremas'. A geometria estava intimamente ligada a sua aritmética. Ele foi particularmente admirador das relações geométricas extraídas da expressão aritmética. (CAJORI, 2007, p. 47)

Por ser Pitágoras o fundador da escola pitagórica tem-se que muitas descobertas e demonstrações produzidas nessa escola são atribuídas a ele, mas assim como aconteceu com Tales, isto é, por não haver registros seguros que garantam a veracidade das informações, não se sabe realmente quais das descobertas foram legitimamente desenvolvidas por Pitágoras. Embora tais fatos não possam ser comprovados, Domingues (2002) afirma que a escola dirigida por Pitágoras é a responsável pela criação da chamada matemática pura[3]. Isso porque os pitagóricos se dedicavam ao estudo de problemas abstratos.

Apesar das ideias iniciais referentes ao conceito de provas e demonstrações terem início na Grécia Antiga com os trabalhos realizados por Tales e Pitágoras, não foram estes homens os primeiros a organizar a matemática do modo como ela é concebida atualmente. Para Domingues (2002, p. 49), Tales e Pitágoras muito contribuíram, mas "ainda faltava uma estruturação preliminar composta de noções básicas, postulados e definições."

Foi Euclides de Alexandria, que viveu entre 325 - 265 a.C. aproximadamente, que, na sua obra denominada *Os Elementos*, escrita por volta do século III antes de Cristo, estruturou a matemática utilizando a perspectiva expressa por Domingues

---

[3] Matemática pura: Segundo Eves (2004) é uma ramo da Matemática no qual especialistas se interessam por um assunto em si próprio.

(2002). Assim como Tales e Pitágoras, pouco se conhece da vida de Euclides. De acordo com Boyer (1974), sabe-se que Euclides era da cidade de Alexandria, e dedicava sua vida a ensinar matemática nesta cidade. Além disso, se tem conhecimento, segundo o mesmo autor, que Euclides conviveu com discípulos de Platão.

Segundo Boyer (1974, p. 77), Os *Elementos,* de Euclides, "estão divididos em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o livro X sobre incomensuráveis e os três últimos versam sobre geometria no espaço."

A obra *Os Elementos*, de Euclides, se diferencia dos demais trabalhos desenvolvidos, pois o autor conseguiu organizar logicamente todo o conteúdo matemático até então conhecido. A organização lógica que nos referimos é expressa por Bicudo (2005, p. 65) da seguinte maneira: "Euclides abre os seus *Elementos*, o mais bem acabado exemplar da matemática grega a chegar até nós, arrolando três tipos de princípios: "*as definições*, os *postulados*, e as *noções comuns* (ou *axiomas*)." Ainda com relação à organização lógica do conteúdo matemático disponível Boyer (1974, p. 76 - 77) diz que: "*Os Elementos* se limitam austeramente ao seu campo - a exposição em ordem lógica dos assuntos básicos da matemática elementar."

Apesar de não ser considerada uma obra totalmente original, como apontam Boyer (1974) e Cajori (2007), *Os Elementos* é a primeira obra a apresentar uma organização conhecida como axiomática, isto é, a partir de um conjunto de noções primitivas que não admitem demonstração e que constituem a base de um ramo da matemática, é possível deduzir, pelo raciocínio, todo o conteúdo deste ramo. Assim, as novas afirmações são chamadas de teoremas e diferentemente das definições anteriores os teoremas devem ser demonstrados a partir das noções precedentes.

Embora a obra Os *Elementos* seja considerada como uma das mais notáveis obras matemáticas, Cajori (2007) aponta uma crítica ao trabalho de Euclides:

> Os Elementos, em uso, pode ser considerado como oferendo modelo de escrupulosas e rigorosas demonstrações. É certamente verdade que em termos de rigor pode ser comparado favoravelmente com os seus rivais modernos; mas quando examinado exclusivamente sob a luz da lógica matemática, foi considerado por C. S. Pierce[4] 'crivado de falácias[5]'. Os resultados estão corretos somente porque a experiência do escritor o coloca sob proteção. Em muitas provas Euclides baseou-se na intuição. (CAJORI, 2007, p. 63)

---

[4] Charles Sanders Pierce (1839 - 1914).

[5] Falácia: engano que se comete com razões falsas ou mal deduzidas

Outro problema da obra Os *Elementos*, agora apontado por Boyer (1974) é:

> [...] algumas definições não definem, pois não há um conjunto prévio de elementos não definidos em termos dos quais os outros sejam definidos. Assim, dizer como Euclides, que 'um ponto é o que não tem parte', ou que 'uma reta é comprimento sem largura', ou que 'uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura' não é definir esses entes, pois uma definição deve ser expressa em termos de coisas precedentes que são melhor conhecidas que as coisas definidas. (BOYER, 1974, p. 77)

Mesmo com algumas deficiências, *Os Elementos* foi a obra que abriu o caminho para o desenvolvimento dos conceitos referentes à prova e demonstração que utilizamos hoje em dia. Assim, foram os gregos que, segundo D'Ambrósio (1996), proporcionaram a nós a concepção de matemática que se tem atualmente,

> Eles praticaram uma matemática utilitária, semelhante àquela dos egípcios, mas ao mesmo tempo desenvolveram um pensamento abstrato, com objetivos religiosos e culturais. Começa assim um modelo de explicações que vai dar origem às ciências, à filosofia e à matemática abstrata. (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 35)

Temos, portanto, que os primeiros conceitos que se referem à busca de uma verdade absoluta e incontestável tiveram início com os gregos, isto é, este povo foi o primeiro, como aponta relatos históricos, a demonstrar interesse em entender por que determinadas afirmações são verdadeiras; foi a partir dessa nova perspectiva que os conceitos envolvendo provas e demonstrações matemáticas foram estudados e desenvolvidos. A Matemática como é conhecida e praticada atualmente por matemáticos profissionais possui forte influência dos gregos.

1.3 Prova e Demonstração: no Contexto da Educação Matemática

Nesta sessão veremos alguns problemas, como os levantados pelos pesquisadores Balacheff (1987, 1988, 1999, 2004), Hanna (1998a, 1998b, 2000), Villiers (2001), dentre outros que se referem ao ensino de provas e demonstrações matemáticas. Também abordaremos algumas perspectivas relativas à definição de alguns autores sobre os termos: provas e demonstrações; apresentando as funções deste objeto matemático, isto é, as funções que as provas e demonstrações têm na Matemática.

Garnica (2002, p. 74) afirma que: "a prova rigorosa é tida como elemento fundamentalmente importante para a formação de professores." Temos deste modo, que o trabalho relativo ao ensino de provas e demonstrações matemáticas se faz essencial e relevante, pois tais objetos matemáticos pertencem à etapa de validação de conhecimentos, segundo Pais (2006). Porém, a dificuldade associada ao ensino de provas e demonstrações é uma realidade constatada tanto por estudantes de Ensino Médio quanto do Ensino Superior. Talvez uma das razões para essa dificuldade se refere à metodologia adotada pelos professores que ministram aulas de matemática. Tal metodologia é baseada na transmissão dos conceitos esperando que os estudantes memorizem regras e princípios pré-estabelecidos. Um exemplo característico deste tipo de aula de matemática em nível superior é:

> Na universidade, uma aula típica de matemática avançada, especialmente uma aula dada por um professor com interesses 'puros', consiste inteiramente em definição, teorema, demonstração, definição, teorema, demonstração, numa concatenação solene e sem interrupções. (DAVIS; HERSH, 1985, p. 182)

Com relação à formação de professores Fonseca (2005) aponta que "a formação inicial deve proporcionar aos futuros professores experiências enriquecedoras e desafiadoras, permitindo-lhes ser criativos, tanto na resolução de problemas e nas investigações, como na formação de novos conceitos." Dessa forma, as demonstrações matemáticas cumprem esse papel, pois, é um processo útil que serve para validar, esclarecer, sistematizar o conhecimento matemático.

Balacheff (1999) expõe que os primeiros sintomas relativos a fontes de dificuldade no ensino e aprendizagem da prova matemática se refere à posição do estudante e do professor, isto é, é o professor o responsável em garantir a legitimidade dos conceitos em questão, além de validar epistemologicamente o conceito que está se construindo. Dessa forma, o estudante fica privado de um acesso autêntico no que se refere à problemática da verdade da prova. Portanto, corroboramos com Pais (2006) quando este afirma que:

> A validade dos enunciados de uma disciplina escolar não pode ser imposta por uma atitude dogmática, o que seria incompatível com as finalidades da educação, pois o estímulo da argumentação contribui tanto na formação de uma atitude mais crítica quanto no desenvolvimento intelectual do aluno. Para isso, diferencia-se a argumentação científica da argumentação didática. (PAIS, 2006, p. 40)

Além dos problemas levantados por Balacheff (1999) quanto à dificuldade dos estudantes em lidar com provas matemáticas, há ainda outro fato, apresentado agora por Bicudo e Garnica (2006):

> Várias são as origens dessas dificuldades mas, certamente, a linguagem matemática desempenha, quanto a isso, papel significativo. Compreender o funcionamento dos mecanismos da Matemática, a natureza de seus objetos e processos e a vinculação desses mecanismos com a prática materializada nas salas de aula de Matemática podem ser uma possibilidade de desenhar, com mais clareza, um quadro desse contexto, indicando propostas de ação. (BICUDO; GARNICA, 2006, p. 44)

Ainda com relação às dificuldades dos estudantes quanto às provas e demonstrações em matemática temos que:

> [...] diversos alunos em diferentes situações em que 'demonstrações' de resultados matemáticos foram exigidas. Há registros de alunos que se dizem confusos entre o que é 'hipótese'e 'tese', isto é, entre o que se pretende utilizar para demonstrar certo resultado e o que é para ser demonstrado; e quais os caminhos seguir, por exemplo, se a demonstração será feita por 'contradição' ou 'contra-positiva'. (CARVALHO, 2004, p. ii)

Complementando as idéias descritas anteriormente, Villiers (2001) aborda outro fator que se refere às dificuldades dos estudantes produzirem demonstrações matemáticas. Este autor sinaliza para os trabalhos de Freudenthal (1958), que dizem que o problema está presente nas dificuldades cognitivas dos estudantes. Para estes autores o problema consiste em um desenvolvimento cógnito lento, ou seja, falta aos estudantes desenvolverem competências para demonstrar proposições matemáticas.

Apesar de a descrição anterior pertencer a uma gama de problemas referentes ao ensino de provas e demonstrações, Villiers (2001, p. 31) afirma que: "A questão que se coloca, contudo é, 'que funções tem a demonstração na própria matemática que podem ser utilizadas na sala de aula para tornar a demonstração mais significativa para os alunos?'"

Outro problema referente à questão das provas é detectado por Carnielli e Epstein (2006), que afirmam ser grande o número dos matemáticos que não se preocupam em definir o que é uma prova. Tais matemáticos sabem de forma intuitiva quando uma prova está certa e quando está errada. Para estes autores essa intuição característica dos matemáticos é: "resultado da imitação e correção durante o aprendizado de matemática, cada geração passando à próxima um modo de se expressar matematicamente, uma cultura matemática."

Estes autores ainda fazem uma advertência com relação às provas produzidas hoje, as produzidas por Euclides e ainda as produzidas por Newton e Leibniz:

> Certamente, em nosso trabalho fazemos muitas distinções que nunca foram feitas antes. Mas serão nossas provas melhores? Pensar assim leva as provas matemáticas do domínio da cultura para um domínio de padrões absolutos. Uma das razões para pensar que há somente um padrão absoluto de prova é que acreditamos que provas fornecem conhecimento absoluto e certo. (CARNIELLI; EPSTEIN, 2006, p. 56)

Portanto, como as culturas passam por modificações com o decorrer do tempo, temos que os padrões relativos às provas também se alteram. Este aspecto pode ser também acusado como um dos problemas relacionados ao ensino de provas e demonstrações.

Expostos alguns dos problemas referentes ao ensino de provas e demonstrações vamos caracterizar, segundo alguns autores, o significado dos termos prova e demonstração agora sob o ponto de vista da Educação Matemática. Davis e Hersh (1985, p. 178) afirmam que a matemática fica caracterizada de maneira única pelas suas demonstrações. Estes autores ainda dizem que: "o que torna a demonstração mais do que um simples pedantismo são suas aplicações a situações onde as afirmativas são muito menos transparentes." Também destacam que a linguagem da demonstração possui uma qualidade formal e severamente restritiva. Prosseguem ainda dizendo que os ingredientes que compõe uma demonstração são: abstração, formalização, axiomatização e dedução.

> As demonstrações preenchem simultaneamente vários fins. Ao serem expostas ao exame e julgamento de uma nova audiência, as demonstrações estão sujeitas a um processo constante de criticismo e revalidação. Erros, ambigüidades e incompreensões são dissipados devido à exposição constante. Uma demonstração significa respeitabilidade. Uma demonstração é o sinete da autoridade. Uma demonstração, no melhor dos casos, aumenta o entendimento, mostrando o que é essencial no assunto. As demonstrações sugerem matemática nova. O principiante que estuda demonstrações se aproxima mais da criação de matemática nova. Uma demonstração é potência matemática, a voltagem elétrica no assunto, que vitaliza as afirmativas estáticas dos teoremas.
>
> Finalmente, as demonstrações são um ritual, e uma celebração do poder da razão pura. Um tal exercício de reafirmação pode ser muito necessário, levando em conta todas as confusões em que o pensamento claro claramente nos mete. (DAVIS; HERSH, 1985, p. 182)

Carnielli e Epstein (2006, p. 56) dizem que: "uma prova é uma forma de comunicação. A demonstração consiste na apresentação ou no particular arranjo dos argumentos que produzem a prova." Deste modo, tem-se, que uma prova tem como objetivo convencer alguém (ou a si mesmo) de que uma afirmação segue a partir de outras. Além disso, estes autores apontam que:

> Se provas são formas de comunicação, então são formas altamente especializadas. Uma prova matemática é diferente de uma num tribunal de justiça, não pela virtude de apelar para termos especializados ou formas de comunicação rígidas, porque a lei também o faz, mas sim pelas formas particulares de prova que são consideráveis aceitáveis. Consideraremos como sinônimos os conceitos de prova e demonstração, embora alguns autores prefiram considerar uma demonstração como uma versão informal de uma prova, que comunica as idéias gerais a partir das quais a prova pode ser reconstruída. (CARNIELLI; EPSTEIN, 2006, p. 56)

Silva (2002) antes de apresentar sua definição para demonstração matemática, apresenta três aspectos referentes a ela. Estes aspectos são: o retórico, o lógico-epistemológico e o heurístico. Porém, antes de definí-los Silva (2002) destaca duas finalidades para a demonstração ou prova matemática:

> Uma demonstração (ou, como alguns preferem, prova) matemática tem várias finalidades. Em primeiro lugar, compete-lhe estabelecer a veracidade relativa de um enunciado (a tese da demonstração). A veracidade da tese depende, claro, da veracidade dos enunciados pressupostos na demonstração, esta é suficiente para aquela. Em segundo lugar, uma demonstração deve convencer-nos da veracidade da tese que demonstra, desde que aceitemos os pressupostos dos quais essa demonstração depende. (SILVA, 2002, p. 56)

Porém, Silva (2002, p. 56) ressalta o seguinte alerta em relação aos objetivos da demonstração: "esses dois aspectos, apesar de relacionados, são independentes entre si." Além disso, este autor propõe as seguintes definições referentes aos aspectos das demonstrações: (1) Aspecto Retórico: as demonstrações aparecem como portadoras de força coercetiva[6] de aquiescência[7] às teses demonstradas; (2) Aspecto Lógico-Epistemológico: as demonstrações se mostram como objetos lógicos ideais, árvores ou sequências ordenadas no espaço lógico, segundo relações de dependência, ou consequência lógica; (3) Aspecto Heurístico: as demonstrações são indutoras de descoberta matemática.

Quanto à relação entre estes aspectos Silva (2002) propõe que os aspectos lógico e retórico podem conviver em harmonia, enquanto que o aspecto heurístico depende dos erros ocorridos na lógica da demonstração e resume:

---

[6] Se refere a coercivo, isto é, que pode exercer coerção, ou seja, impõe seu direito por obediência.
[7] Ato de aquiecer (anuência), consentir, aprovar.

> Em suma, uma demonstração não é uma demonstração propriamente dita, do aspecto lógico-epistemológico; se não for logicamente impecável, ela pode desempenhar sua função retórica, mesmo se for logicamente falha, mas não tem certamente, ou assim parece, nenhum papel heurístico, a menos que seja logicamente imperfeita. (SILVA, 2002, p. 57)

A fim de associar os aspectos referentes a uma demonstração matemática Silva (2002) afirma:

> Parece, somando todos os aspectos que consideramos até aqui, que uma demonstração matematicamente perfeita deve ser logicamente correta, compreensível a um agente racional com limitações cognitivas humanas, e, ainda assim, heuristicamente estimulante. Um delicado equilíbrio de demandas quase inconciliáveis: correção lógica e riqueza heurística acessíveis a um agente severamente limitado em termos cognitivos. (SILVA, 2002, p. 59)

A partir da caracterização das demonstrações matemáticas Silva (2002) faz o seguinte questionamento: as demonstrações matemáticas da forma como foram caracterizadas podem ser objeto de estudo matemático? E apresenta como resposta:

> Ao contrário de um preconceito muito difundido entre matemáticos, nem todo domínio de interesse admite um tratamento matemático. E isso não significa necessariamente, de modo algum, uma limitação, talvez apenas temporária, da própria Matemática ou de matemáticos de pouca imaginação ou talento. Há domínios que são essencialmente intratáveis do ponto de vista matemático. Para se entender isso, é necessário se ter claro o que é a Matemática. Uma das características fundamentais da Matemática é sua universalidade. O escopo irrestrito da Matemática só é possível porque seu foco de interesse é exclusivamente formal, os domínios objetivos interessam-lhe apenas pela sua forma, não pelo seu conteúdo. Por isso tudo, a rigor, pode ser de interesse matemático, *desde que* seja formalmente interessante. Um domínio é matematicamente tratável na exata medida em que se pode extrair dele uma forma matematicamente tratável. Se abstrairmos a natureza dos objetos de um domínio, ou, se quisermos, a sua matéria, resta a sua forma, se é que alguma coisa sobra. (SILVA, 2002, p. 61)

Além disso, Silva (2002, p. 62) aponta que uma demonstração matemática é definida como uma sequência finita de proposições logicamente ordenadas, ou seja, "... para fins de tratamento matemático, as demonstrações não são nada além de *cadeias finitas logicamente articuladas de formas declarativas no contexto de um sistema formal determinado*"

Silva (2002, p. 63) expõe ainda que, "da perspectiva da teoria das demonstrações, uma demonstração não é aquilo que os matemáticos entendem como tal, mas uma imagem ideal disso." O autor salienta ainda, que um defeito em relação às demonstrações matemáticas é uma mistura de elementos objetivos e subjetivos.

Em seus trabalhos Hanna (2000, p. 5) afirma que "a prova se encontra viva e saudável na prática matemática e continua a merecer um lugar de destaque no currículo de matemática." Carvalho (2004) concorda com Hanna (2000), que a prova está presente na prática matemática, porém aponta que isso não garante que os estudantes considerem as provas e demonstrações como uma oportunidade para aprender.

Hanna (1989a) apresenta uma discussão acerca do papel das provas rigorosas no ensino secundário canadense. Esta autora diz que as provas podem ter diferentes níveis de validade já que tais níveis dependem dos processos sociais vivenciados pelos estudantes. Portanto, para Hanna (1989a), os processos de provas possuem caráter de flexibilidade já que são passíveis de críticas, contraexemplos e se constitui como um processo social de negociação de significados, isto é, uma prova para se constituir como prova precisa ser aprovada pela comunidade matemática dos matemáticos, assim, a prova não possui caráter definitivo. Com relação ao desenvolvimento do raciocínio, para a realização de provas matemáticas Hanna (1989a) apresenta 4 fatores. São eles: (1) O formalismo que atua como instrumento que visa clarear ideias, validar argumentos e o entendimento; (2) As experiências matemáticas que não são suficientes, sendo assim necessário refletir sobre elas; (3) Que os estudantes devem ser tolerantes às ambiguidades e (4) Que na ocorrência de desentendimentos deve-se aplicar o rigor com o intuito de correção.

Hanna (1989b, p. 46) destaca uma distinção com relação às provas que provam e as provas que explicam. Para a autora ambas as modalidades de provas são legítimas e "... possuem os requisitos de uma demonstração matemática ..." além disso, ambas objetivam constituir a verdade de uma afirmação e são aceitas pela comunidade matemática. A distinção entre as provas que provam e as provas que explicam, segundo Hanna (1989b, p. 47), é quanto à presença de argumentos matemáticos para a compreensão da prova, isto é, as provas que explicam procuram apresentar as ideias de maneira clara a fim de encadear um encaminhamento lógico para o desenvolvimento da demonstração. Assim, a autora explicita essa diferença como: "... há, entretanto uma diferença muito importante entre estes dois tipos de demonstração. Uma demonstração que prova mostra apenas que um teorema é verdadeiro; uma demonstração que explica também mostra porquê ele é verdadeiro." Como consequência pedagógica esta autora diz que as provas que explicam estão ao alcance dos estudantes, pois estão presentes nesse tipo de prova as ideias do cotidiano deles. Dessa forma, acredita-se que o estudante é desafiado a encontrar argumentos que justifiquem os resultados. Assim, para

Hanna (1989b), a característica fundamental que deve ser desenvolvida nos estudantes a partir das provas que explicam é o entendimento, pois é a partir daí que eles iniciam a construção de uma cadeia de argumentos dedutivos.

Ainda segundo Hanna (1990), há três aspectos sob os quais devemos considerar as provas. O primeiro aspecto é a prova formal, o segundo a prova aceitável e o terceiro é ensinar por meio da prova. Com relação aos aspectos apresentados por Hanna (1990), Carvalho (2004) vê a prova formal da seguinte maneira:

> A 'prova formal' é a prova vista sob o viés da conceitualização teórica, na lógica formal, uma seqüência finita de afirmações, cada afirmação sendo ela própria um axioma ou advindo de uma afirmação prévia - e, portanto, talvez de um axioma -como resultado de aplicações corretas das regras de inferência, a última sentença sendo o resultado a ser provado. (CARVALHO, 2004, p. 60)

Para a prova aceitável, Carvalho (2004) aponta que:

> A prova aceitável é aquela vista como um princípio normativo; mais do que enraizada em critérios lógicos, a prova precisa ser compatível com o corpo do conhecimento matemático que define o que é aceitável ao matemático. A prova é considerada um processo social, sendo uma de suas funções 'promover o entendimento'. (CARVALHO, 2004, p. 61)

E com relação ao ensino por meio da prova Carvalho (2004, p. 61) expõe que: "O ato de se ensinar através de uma demonstração deve incluir a possibilidade de se fazer da própria demonstração a resposta de *como* o resultado foi possível de ser provado e não apenas de demonstrar o resultado."

Além das perspectivas apresentadas até aqui, temos em Hanna (2000) que as provas possuem 8 funções que são,

1. Verificar (relacionado com a verdade de uma afirmação);
2. Explicar (fornecendo 'pistas' do por que é verdade);
3. Sistematizar (organizar os vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas);
4. Descobrir (a descoberta ou a invenção de novos resultados);
5. Comunicar (a transmissão do conhecimento matemático);
6. Construir (uma teoria empírica);
7. Explorar (o significado de uma definição ou as consequências de uma afirmação);

8. Incorporar (um fato bem conhecido em um contexto diferente e, portanto vê-lo sob outro ponto de vista).

Relacionando os itens anteriores com o nosso objeto de estudo, a indução finita, é possível notar que na realização de uma experiência matemática os estudantes podem descobrir proposições por meio de construções empíricas, a partir daí verificar a veracidade de tal proposição. Para isso o estudante deve apresentar argumentos explicando porque se trata de uma afirmação verdadeira. Assim, continuando a experiência matemática, organizar os resultados encontrados em um sistema dedutivo, explorar novas possibilidades com relação a essa nova afirmação, investigar sob outros aspectos a experiência realizada e por fim comunicar os resultados encontrados.

Villiers (2001, p. 32) também apresenta suas concepções sobre prova e demonstração em matemática além de elencar as funções deste objeto matemático. Para este pesquisador temos que: "... a prática real da investigação moderna em matemática requer uma análise mais completa das diversas funções e papéis da demonstração."

Assim, para Villiers (2001), um panorama referente à função de uma demonstração é dada por:

> Tradicionalmente, a função da demonstração foi vista exclusivamente como dizendo respeito à verificação da correção das afirmações matemáticas. A ideia é que a demonstração é usada principalmente para remover a dúvida pessoal ou a de cépticos, uma ideia que dominou unilateralmente a prática de ensino e a maior parte das discussões ou da investigação relativa ao ensino da demonstração. (VILLIERS, 2001, p. 62)

Segundo Almouloud (2007), as funções da demonstração para Villiers (2001) são:

1. De verificação, onde se busca o convencimento próprio e de outros a respeito da veracidade de uma afirmação;
2. De explicação, que consiste na compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;
3. Na descoberta de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de demonstrar uma conjectura;
4. Na comunicação que versa sobre a negociação dos significados de objetos matemáticos;
5. No desafio intelectual que contempla a satisfação pessoal por ter obtido êxito na demonstração de um teorema;

6. E na sistematização onde há organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

Garnica (1995, p. 14) faz um levantamento acerca do estudo da prova rigorosa em matemática com o foco na formação de professores. Logo na revisão bibliográfica o autor apresenta sua definição sobre a prova rigorosa: "... a prova rigorosa é tomada como elemento formador do discurso matemático, manifestado em salas de aulas - mais claramente aquelas de 3° grau - pela chamada metodologia tradicional vigente, alimentando-se e sendo por ela alimentado."

Além disso, com relação à formação do professor, Garnica (1995) define duas leituras referentes às demonstrações, que são a leitura técnica e a leitura crítica. Carvalho (2004) apresenta essas leituras do seguinte modo:

> A leitura *técnica* privilegia o uso da demonstração apenas pelo viés sintático, com a função exclusivista de validar o conhecimento matemático por ela gerado; é subjugada por normatizações, procedimentos bem definidos e transmissíveis, objetivando a produção de resultados considerados úteis. A leitura *crítica*, embora não se desfaça do viés técnico, atenta para os relativismos pertinentes à prova rigorosa e sua dependência com o regime de 'verdade' adotado; preocupa-se com o exame de um fato ou princípio, para produzir um juízo de apreciação. Implica, pois, em uma reflexão intrínseca à elaboração da demonstração, feita por aquele que a lê. (CARVALHO, 2004, p. 65)

Outras possibilidades para se atribuir funções às provas e demonstrações matemáticas é apresentado por Bashmakova e Smirnova (2000) onde tais autoras afirmam que as proposições matemáticas lidam com objetos matemáticos. Desta forma, para essas autoras as demonstrações possuem várias funções:

> A primeira dessas funções foi a de estabelecer a verdade de uma proposição. A prova chegou a ser considerada como o único meio de estabelecer a verdade. O que é compreensível: afinal, todas as proposições da matemática referem-se a objetos abstratos que pode ser realizado apenas aproximadamente em prática (como por exemplo a construção de um triângulo equilátero). Além disso, a maior parte das proposições matemáticas se referem às classes contendo infinitamente muitos desses objetos (por exemplo, a classe de todos os triângulos retângulos, de todos os triângulos isósceles, de todos os primos, e assim por diante). Assim é impossível estabelecer a verdade de tais proposições sem prova. (BASHMAKOVA; SMIRNOVA, 2000, p. 11)

A segunda função da demonstração que Bashmakova e Smirnova (2000, p. 12) propõe é: "A segunda, não menos importante função da prova foi a de estabelecer conexões entre as proposições, para descobrir por que algumas proposições são verdadeiras." Para a terceira função encontramos: "A terceira função da prova consiste na descoberta do novo."

Para finalizar a exposição de alguns trabalhos referentes às provas e demonstrações em matemática apresentamos as perspectivas desenvolvidas por Balacheff (1987, 1988, 2004). Para este pesquisador o elemento que nos permite raciocinar e tomar decisão com relação a um processo de prova é a racionalidade. Isso se deve ao fato de que a verdade ou validade de uma afirmação depende das regras e critérios que são utilizados, isto é, dependem do contexto onde estão envolvidos.

As atividades referentes às provas são consideradas, segundo Balacheff, sob diferentes perspectivas, nas quais podem explicitar características particulares. Dependendo da situação a ser considerada há vários tipos e níveis de provas.

> Para Balacheff (1987), a atividade de provar pode ser considerada sob diferentes perspectivas podendo-se explicitar características que em cada situação nos permitem falar de tipos de prova. Por outro lado, em um contexto de ensino e aprendizagem, indica que os processos de prova devem ser estudados na situação em que são colocados em funcionamento e em referência ao sujeito cognoscente que os põe em prática. (PIETROPAOLO, 2005, p. 93)

O trabalho de Balacheff (1987), referente às provas e demonstração, está baseado na metodologia de resolução de problemas, isto por que este autor possui interesse nas possíveis relações entre as provas e as contradições, sob a ótica cognitiva e situacional, na forma de como os estudantes trabalham com a resolução de determinados exercícios.

Nesse trabalho Balacheff (1987) considera que os termos explicação, prova e demonstração são sinônimos em enunciados de problemas matemáticos, mas alerta que tais termos possuem significados distintos fora destes contextos. Tais distinções são caracterizadas pelo autor da seguinte maneira: a explicação é um discurso cujo objetivo visa tornar inteligível o caráter de verdade adquirido pelo locutor de uma proposição ou de um resultado, os quais podem ser discutidos, recusados ou aceitos. A prova consiste numa explicação aceita por uma dada comunidade num dado momento. Essa determinação pode ser assunto de um debate cujo significado é a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores. A demonstração é uma prova aceita pela comunidade matemática. A demonstração está fundamentada em explicações apresentadas por meio de uma sequência de enunciados conforme regras determinadas. Um enunciado é conhecido como verdadeiro, ou é deduzido a partir daqueles que o precedem devido a uma regra de dedução. Assim, a demonstração é um resultado de um processo particular de prova que valida uma afirmação. Desse modo, temos que a demonstração é um tipo de prova com estas características e que, além disso, as demonstrações são as únicas provas aceitas pelos matemáticos.

Com relação às perspectivas de prova matemática no processo de ensino e aprendizagem Balacheff (2004) expõe as seguintes características a respeito das funções da prova que são baseadas nos trabalhos de Hanna (2000) e Villiers (2001):

1. Verificação, explicação, sistematização, descoberta e comunicação e
2. Construção de uma teoria empírica, com o intuito de explorar o significado de uma definição ou das consequências de uma hipótese, absorvendo um fato novo numa nova estrutura e permitindo uma nova percepção.

Neste trabalho o autor ainda destaca características diferentes na qual a prova pode ter um papel de comprovação universal e exemplar, a prova é tida como início de uma natureza idiossincrática[8] no núcleo da matemática ou ainda como algo que adquire significado de aplicações no campo da matemática.

Para Balachef (1988), há basicamente dois tipos de prova, que são denominadas: prova pragmática e prova conceitual[9]. As provas pragmáticas consistem em ações atuais ou "mostrações". Já as provas conceituais se caracterizam por formulações de propriedades e as possíveis relações entre elas. Assim, as demonstrações seriam um tipo de prova conceitual. Segundo Balacheff (1988) as provas pragmáticas são produzidas por pessoas que tomam como base fatos e ações. A comunicação de tais resultados é por meio de exemplos onde o autor manifesta e apresenta suas ideias. As provas conceituais precisam de uma mudança de posição da pessoa que a realiza, já que sua atuação nessa perspectiva passa a ser de um "teórico". Para elaboração de uma demonstração na perspectiva da prova conceitual, o teórico precisa ter acesso a uma linguagem que se constitui como uma ferramenta intelectual na qual se denomina como uma linguagem funcional, neste caso a linguagem não é apenas um meio de descrever as operações e ações do teórico. Portanto, segundo Balacheff (1987), o que tornam as provas pragmáticas e conceituais diferentes são os tipos de raciocínios subjacentes e a natureza do conhecimento em questão.

Com relação ao sujeito e o processo de validação de afirmações Balacheff (1987) considera que os processos que permitem construir uma prova são de natureza

---

[8] Que se refere a idiossincrasia, isto é, maneira própria de ver, sentir, reagir, de cada pessoa
[9] Ou prova intelectual

distintas, isto é, o "caminho" das provas pragmáticas às provas conceituais, às demonstrações matemática, tem como arcabouço três aspectos que se relacionam entre si. Esses aspectos são: o conhecimento (concepções), a linguagem (formulação) e a validação (tipo de raciocínio).

Segundo Pietropaolo (2005) o quadro a seguir mostra a correspondência entre os diferentes aspectos que interferem no processo de prova.

Tabela 1 – Pietropaulo (2005, p. 93)

Natureza das concepções	Formulação	Tipo de raciocínio
Práticas	Manifestação e expressão	Provas pragmáticas
Conhecimento como objeto	Linguagem familiar	Provas conceituais
Conhecimento teórico e reconhecido	Linguagem funcional Formalismo singelo	Demonstração

Balacheff (1988) admite existir vários níveis de provas pragmáticas e provas conceituais que podem ser classificados da seguinte maneira:

EMPIRISMO INGÊNUO: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização;

EXPERIMENTO CRUCIAL: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar;

EXEMPLO GENÉRICO: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos;

EXPERIMENTO DE PENSAMENTO: consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos.

O autor destaca que as provas pragmáticas se situam ao nível do empirismo ingênuo e do experimento crucial. Já as provas conceituais são estabelecidas ao nível do experimento de pensamento. Porém, as provas situadas ao nível do exemplo genérico caracterizam um momento de transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais.

Balacheff (1988) acrescenta ainda um nível superior de prova denominado cálculo nas afirmações. Neste nível as provas conceituais são semelhantes às demonstrações.

Para Balacheff (1988) há ainda uma hierarquia entre esses níveis de prova de forma que um nível específico depende do grau de generalidade e conceitualização do conhecimento envolvido. Assim, para este pesquisador, a demonstração é um instrumento que busca a negociação da verdade nas salas de aula, portanto trata-se de um instrumento de validação social.

A demonstração é útil como um instrumento de negociação de verdade em sala de aula além de um instrumento de validação social, pois é a partir de resultados experimentais que os estudantes apresentam seus resultados, como afirma Balacheff (1988).

Assim, com relação às análises que apresentaremos ao final do capítulo 4 desta pesquisa, destacamos que para a realização da análise a priori optamos pelos trabalhos de Hanna (2000) e Villiers (2001) com o intuito realizar um levantamento inicial de quais funções da prova os estudantes apresentam quando estão demonstrando determinadas proposições. Apesar de esses trabalhos conterem funções de prova com nomes semelhantes é possível notar que suas definições são diferentes. Entendemos que as funções apresentadas por Hanna (2000) e Villiers (2001) buscam destacar o significado e o objetivo de uma demonstração.

A análise a posteriori será avaliada tomando-se como referências o trabalho de Balacheff (1988) no qual procuraremos caracterizar as provas apresentadas pelos estudantes segundo a classificação desse autor, isto é, em prova pragmática ou prova conceitual. Além do mais, buscaremos estabelecer em qual nível de prova se encontra a solução apresentada, ou seja, se trata-se de um empirismo ingênuo, experimento crucial, exemplo genérico ou experimento de pensamento. Outro trabalho que utilizaremos na análise a posteriori será o de Silva (2002), onde este autor apresenta três aspectos sobre a demonstração. Tais aspectos são: o retórico, lógico-epistemológico e o heurístico. Cada um destes possui uma particularidade, assim, buscaremos nas demonstrações dos estudantes características que apontem quais destes aspectos eles apresentam. Além desses trabalhos já destacados, utilizaremos também o de Hanna (1989b) no qual a autora classifica as provas em provas que provam ou em provas que explicam. Ao mesmo tempo, neste trabalho a autora afirma que a prova por indução finita é uma prova que prova, dessa maneira procuraremos comparar o argumento apresentado pela autora juntamente com os argumentos apresentados pelos estudantes nas demonstrações por indução finita a fim de confirmar ou não tal tese. Por fim, na análise a posteriori, vamos comparar as funções de prova segundo Hanna (2000) e Villiers (2001) que levantamos na análise a priori e verificar quais ocorreram ou não.

CAPÍTULO 2
A INDUÇÃO FINITA E A INDUÇÃO EMPÍRICA

2.1 INTRODUÇÃO

O pensamento é um processo mental. Dessa forma temos segundo Chauí (2000, p. 194) que "O pensamento exprime nossa existência como seres racionais e capazes de conhecimento abstrato e intelectual, e sobretudo manifesta sua própria capacidade para dar a si mesmo leis, normas, regras e princípios para alcançar a verdade de alguma coisa."

A construção do pensamento ocorre por meio da razão, e, segundo Chauí (2000, p. 70 - 71) "a razão ou racional, significa a clareza das ideias, ordem, resultado de esforço intelectual ou da inteligência, seguindo normas e regras de pensamento e de linguagem." Segundo essa autora, na chamada sociedade ocidental, a palavra razão é oriunda das palavras latina ratio e grega logos. O termo logos vem do verbo legein e significa, contar, reunir, juntar e calcular. Já ratio é do verbo reor que quer dizer contar, reunir, medir, juntar, separar, calcular. Assim,

> *logos*, *ratio* ou **razão** significam pensar e falar ordenadamente, com medida e proporção, com clareza e de modo compreensível para outros. Assim, na origem, razão é a capacidade intelectual para pensar e exprimir-se correta e claramente, para pensar e dizer as coisas tais como são. A razão é uma maneira de organizar a realidade pela qual esta se torna compreensível. É, também, a confiança de que podemos ordenar e organizar as coisas porque são organizáveis, ordenáveis, compreensíveis nelas mesmas e por elas mesmas, isto é, as próprias coisas são racionais. (CHAUÍ, 2000, p. 71)

Em Chauí (2000) temos também que, o homem, quando faz uso da razão, realiza uma atividade racional e são elementos desta ação a intuição e o raciocínio. Segundo o dicionário Aurélio (1999, p. 1130) a intuição é: "1. o conhecimento imediato que independe do raciocínio." E raciocínio quer dizer: "1. encadeamento, aparentemente lógico, de juízos ou pensamentos." Dessa forma, temos que:

> Ao contrário da intuição, o raciocínio é o conhecimento que exige provas e demonstrações e se realiza igualmente por meio de provas e demonstrações das verdades que estão sendo conhecidas ou investigadas. Não é um ato intelectual, mas são vários atos intelectuais internamente ligados ou conectados, formando um processo de conhecimento. (CHAUÍ, 2000, p. 71)

O raciocínio é desencadeado segundo certas regras de generalidade e universalidade. Tais regras são chamadas de dedução, indução e abdução. A dedução

> consiste em partir de uma verdade já conhecida (seja por intuição, seja por uma demonstração anterior) e que funciona como um princípio geral ao qual se subordinam todos os casos que serão demonstrados a partir dela. Em outras palavras, na dedução parte-se de uma verdade já conhecida para demonstrar que ela se aplica a todos os casos particulares iguais. Por isso também se diz que a dedução vai do geral ao particular ou do universal ao individual. O ponto de partida de uma dedução é ou uma idéia verdadeira ou uma teoria verdadeira. (CHAUI, 2000, p. 81)

Para Peirce (1975), o raciocínio indutivo (ou sintético) é uma aplicação de uma regra particular a um caso geral, inicia-se com uma premissa menor[10] e conclui-se uma maior. A indução é a inferência de uma regra a partir do caso e do resultado. Sendo assim, ela ocorre quando generalizamos a partir de certo número de casos em que algo é verdadeiro e inferimos que a mesma coisa será verdadeira do total da classe.

Já a abdução (ou hipótese) é considerada um tipo de intuição. Para Pierce (1975) o raciocínio abdutivo está presente em todas as descobertas científicas. Segundo Eco (2003), a abdução é um caso de inferência sintética onde encontramos alguma circunstância muito curiosa que pode ser explicada pela suposição de que ela seja o caso específico de uma regra geral e por isso adotamos essa suposição. Assim, a abdução consiste na formação de hipóteses explicativas para um fenômeno dado.

Para ilustrar o descrito acima, apresentamos o exemplo clássico de Peirce (1975) descrito da seguinte maneira por Mora (1998)

> Se entro num quarto em que há vários sacos que contém diversos tipos de feijão e, depois de investigar, descubro que um dos sacos contém apenas grãos de feijão branco, posso inferir como probabilidade, ou conjectura razoável, que, dado um punhado de feijão branco, este procede do saco que contém somente feijão branco. Com isso formulo uma hipótese, distinta de uma indução e de uma dedução, isto é, infiro um caso partindo de uma regra e de um resultado. (MORA, 1998, p. 12)

Segundo o dicionário de filosofia Abbagnano (2000, p. 2) "Pierce introduziu o termo *abduction* (ou *retroabduction*) para indicar o primeiro momento do processo indutivo, o da escolha de uma hipótese que possa servir para explicar determinados fatos empíricos."

---

[10] Verificação de um caso particular

Como podemos notar o raciocínio é, em particular, uma característica presente e marcante em atividades matemáticas, isto é, quando uma pessoa resolve um exercício, demonstra um teorema ou expõe uma ideia é necessário que ela apresente seus argumentos com o intuito de validar o resultado encontrado. Assim, temos que na matemática a regra de generalidade e universalidade empregada comumente é o raciocínio dedutivo, ou seja, os raciocínios empregados para encontrar a solução de um problema ou a demonstração de uma proposição estão ligados ao encadeamento lógico de princípios e conceitos já estabelecidos anteriormente.

Com o intuito de chegarmos ao objeto de estudo deste trabalho faremos a seguir um levantamento das características do método indutivo utilizado frequentemente nas ciências empíricas e do princípio de indução finita empregado especificamente em problemas matemáticos.

2.2 Aspectos Gerais sobre a Indução Empírica e Indução Finita

Nas ciências como a Física e a Química muitos resultados são generalizados como leis após o estudo de certo número de observações. As conclusões destas observações estão fundamentadas na realização de experiências. Tais experiências são repetidas um número finito de vezes e atendem a certas condições. Assim, após a coleta dos dados, feita por meio das observações, os cientistas físicos ou químicos buscam generalizar um resultado a partir do estudo de um caso particular. O método descrito anteriormente é denominado indução.

Em busca de uma definição precisa para o método de indução investigamos seu significado em alguns dicionários. No dicionário de língua portuguesa Houaiss (2001, p. 1608) temos:

> 1 ação, processo, ou efeito de induzir 2 *p. ext.* raciocínio que serve de indícios para chegar a uma causa por eles tornada patente 3 *p. met.* conclusão ou consequência extraída desse(s) raciocínio(s) 4 FIL raciocínio que parte de dados particulares (fatos, experiências, enunciados empíricos) e, por meio de uma sequência de operações cognitivas, chega a leis ou conceitos mais gerais, indo dos efeitos à causa, das consequências ao princípio, da experiência à teoria [...]

O dicionário etimológico Nova Fronteira (1997, p. 434) trás para o termo indução a seguinte definição: "*sf* 'introdução, condução' 'raciocínio em que, de fatos particulares se tira uma conclusão genérica'

E no dicionário de filosofia de Abbagnano (2000, p. 556) temos:

> 'A I. é o procedimento que leva do particular ao universal': com esta definição de Aristóteles (*Top*., I, 12, 105 a 11) concordaram todos os filósofos. O próprio Aristóteles vê na I. um dos caminhos pelos quais conseguimos formar nossas crenças; a outra é a dedução (*silogismo*) (*An. pr*., II, 23, 68 b 30). Além disso, atribuiu a Sócrates o mérito de haver descoberto os 'raciocínios indutivos' (*Met*., XIII, 4, 1078 b 28)

Assim, tomando as definições acima se pode concluir que a indução é o raciocínio ou método que nos leva a passagem do particular ao geral por meio de observações de fenômenos ou experiências. O método de indução é amplamente utilizado no campo das ciências experimentais, como por exemplo, na Física e na Química, como já dissemos.

Diferentemente do que ocorre nas ciências experimentais, na Matemática não se pode afirmar que uma proposição é verdadeira ou falsa a partir de certo número de observações de uma experiência ou fenômeno. Por exemplo: não é possível afirmar que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é n^2, para qualquer número natural n, testando a mesma para um grande número de valores. Podemos analisar essa afirmação para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, e mesmo depois de realizadas várias tentativas não será possível concluir que se trata de uma afirmação verdadeira ou falsa. Sempre ficará uma dúvida se para o próximo teste a proposição será verdadeira.

A Matemática é uma ciência que possui características próprias e seus resultados não são baseados somente em observações empíricas. Assim, uma das diferenças que podemos apontar entre a Matemática a Física, a Química, a Biologia e outras ciências experimentais é que seus resultados necessitam ser demonstrados por meio de provas formais o que não ocorre necessariamente no campo das ciências experimentais. Davis e Hersh (1985, p. 178) afirmam que "... a matemática fica caracterizada, de maneira única, por algo conhecido como 'demonstrações'".

A organização da Matemática, segundo Bicudo (2005), é descrita da seguinte maneira:

> Ao desenvolver sua ciência, a missão do matemático consiste em *definir* os *conceitos* do ramo em questão, isto é, *definir* seus *objetos matemáticos* e em *demonstrar* as *propriedades* que esses conceitos possuam, ou as *relações* que

> tais objetos satisfaçam. Ora, definir um conceito significa explicá-lo em termos de outros conceitos já definidos, e demonstrar uma proposição que enuncie uma relação entre os objetos matemáticos considerados é argumentar por sua validade, usando regras de inferência fornecidas pela *lógica* (*dos predicados de primeira ordem com igualdade*), a partir de proposições anteriormente demonstradas. (BICUDO, 2005 p. 59)

Entendemos que a proposta de Bicudo (2005) não é viável para ser aplicada em demonstrações matemáticas, pois, segundo as regras da lógica, deveríamos a todo o momento que demonstramos certa proposição, nos remeter a conceitos anteriores relacionando-os com propriedades já demonstradas a fim de obter novas definições e provas de teoremas. Dessa forma, apesar das provas e demonstrações matemáticas não possuírem o rigor da lógica são consideradas como provas formais. Assim, temos que:

> A prova aceitável é aquela vista como um princípio normativo; mais do que enraizada em critérios lógicos, a prova precisa ser compatível com o corpo de conhecimento matemático que define o que é aceitável ao matemático. A prova é considerada um processo social, sendo uma de suas funções 'promover o entendimento'. (CARVALHO, 2004, p. 60)

Além disso, para o desenvolvimento de suas atividades o matemático considera que

> Se uma definição presta-se de bom grado às demonstrações, se em nenhum momento esbarra-se em contradições, se conexões entre temas aparentemente distantes entre si deixam-se perceber, e se deste modo resulta em ordem e regularidade superiores, costuma-se então considerar a definição suficientemente estabelecida, indagando-se pouco sobre sua legitimidade lógica. (FREGE, 1980, p. 203)

Sendo a Matemática uma ciência onde seus resultados precisam ser demonstrados formalmente, encontramos nessa área de pesquisa e estudo alguns tipos de provas que apresentamos segundo Bicudo (2005), Carnielli e Epstein (2006) e Savioli (2007) e que podem ser classificadas do seguinte modo:

Prova Direta: chega-se à conclusão por meio da combinação lógica dos axiomas, definições e teoremas já existentes.

Exemplo: mostrar que, para $a, b, c \in Z$, $a \backslash b \wedge a \backslash c \Rightarrow a \backslash b+c$

Dem.

Como $a\backslash b$,b pode ser escrito na forma ak_1, onde k_1 é um número inteiro. De modo análogo, $c = ak_2$, com $k_2 \in$Z. Portanto, $b+c = ak_1+ak_2 = a(k_1+k_2)$, onde k_1+k_2 é inteiro, ou seja, $a\backslash b+c$.

Prova por Contrapositiva: é considerada uma tipo de prova indireta, pois determina-se a conclusão negando-se a tese e assim chega à negação da hipótese.

Exemplo: mostrar que se o quadrado de um número inteiro é par, então esse número é

par.

Dem.

Para demonstrar a proposição anterior basta notar que se um número é impar, então seu quadrado é impar. Todo número impar pode ser escrito na forma $2k+1$, onde k é um inteiro. Elevando $2k+1$ ao quadrado temos, $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ que é impar, pois também é da forma $2k+1$, $k \in$Z.

Prova por Contradição (*reductio ad absurdum*): nas provas por contradição ao negarmos a tese (enunciado) chegamos também a negação da hipótese o que equivale dizer que temos uma contradição;

Exemplo: mostrar que existe infinitos número primos positivos.

Dem.

Vamos supor, por absurdo, que exista um número finito de primos positivos $p_1, p_2, ..., p_k$, para algum $k \in$ N. Formemos o número $a = p_1p_2p_3...p_k+1$. Temos $a > 1$. Logo existe um número primo positivo p tal que $p\backslash a$. Como existe um número finito de primos positivos, temos que p é um dos p_i, $1 \leq i \geq k$. Temos $p\backslash a$ e $p\backslash p_1p_2...p_k$. Logo $p\backslash 1$. Isso é um absurdo, pois $p>1$.

Prova por Indução Finita: constata-se que uma proposição é verdadeira para um n_0 (base de indução), daí assume que tal proposição é verdadeira para um n fixo arbitrário e mostra-se que a proposição é verdadeira para $n+1$.

Exemplo: mostrar que para todo natural n, $n \geq 1$, $1+3+5+ ...+ (2n-1) = n^2$.

Dem.

Consideremos o conjunto A = {$n \in$ N* / $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$, então temos que demonstrar que A = N$^{*.}$

$1 \in$ pois $1^2 = 1$ é verdadeira (base de indução).

Suponhamos agora que $k>1$ e ainda que $k \in A$ (hipótese de indução), isto é, que $1+3+5+...+(2k-1)\ k^2$ é verdadeira. Vamos demonstrar que $1+3+5+...+\ (2(k+1)-1) = (k + 1)^2$é verdadeira. De fato, supondo que temos $1+3+5+...+(2k-1) = k^2$, podemos somar a ambos os membros $2k+1$, obtendo $1+3+5+...+(2k+1) = 1+3+5+...+(2(k+1)^2-1) = (k+1)^2$ Assim temos que

a)$1 \in A$

b) se $k \geq 1$ e $k \in A$, então $k+1 \in A$.

Logo pelo princípio de indução finita, $A = N^*$, em outras palavras, $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ é válida para todo $n \in N^*$.

Prova por Contraexemplo: neste caso basta apresentar um caso particular onde uma determinada propriedade não vale.

Exemplo: todo número primo é impar.

Dem.

Essa afirmação é falsa, pois 2 é par e é um número primo.

Não há dúvidas que no decorrer do curso de Matemática há diversas oportunidades para que o professor demonstre um teorema ou então deixe como exercício para que os estudantes possam produzi-la. Um dos desafios do professor de matemática é demonstrar os teoremas de forma a priorizar o entendimento dos estudantes e não uma conversão formal produzida no quadro.

Neste trabalho, nosso interesse é estudar vários aspectos de um tipo particular de demonstração. Trata-se da demonstração por indução finita, que também é conhecido como indução matemática, princípio de indução, dentre outras terminologias.

A indução finita é um método dedutivo enquanto que a indução empírica é uma generalização não dedutiva, ou seja, na demonstração por indução empírica não ocorre dedução no sentido matemático, pois a generalização é realizada por meio de observações. Portanto, neste trabalho adotamos:

indução = indução empírica ≠ indução finita = método dedutivo = demonstração formal

A partir de uma pesquisa em livros, como Domingues e Iezzi (1982), Lima (1999) e Gonçalves (2001) é possível notar que eles se referem à indução finita utilizando apenas o termo indução, dessa maneira, entendemos que tais autores propõe uma "simplificação" da linguagem natural. Dessa forma, a partir das definições de indução finita e de indução empírica acima é possível perceber que ambos não possuem características comuns. Concluímos então que essa simplificação da linguagem acaba gerando problemas quando os estudantes estão demonstrando proposições utilizando a indução finita.

Retornando à definição de indução dada pelo dicionário de filosofia de Abbagnano (2000, p. 557) temos:

> Entre a indução e o silogismo, Aristóteles estabelece, todavia uma grande diferença de valor. No silogismo dedutivo ('Todos os homens são animais; todos os animais são mortais; logo, todos os homens são mortais') o termo médio (animal) constitui a *substância* ou a *razão* de ser da conexão necessária entre os dois extremos: os homens são mortais porque são *substancialmente* animais. No raciocínio indutivo, entretanto ('O homem, o cavalo e o mulo são duradouros; o homem, o cavalo e o mulo são animais sem fel; logo, os animais sem fel são duradouros'), o termo médio (sem ser fel) aparece na conclusão, o que significa que ele não é um *porquê* substancial, mas um simples fato (*An. pr.*, II, 23, 68 b 15). Portanto a I. não tem valor necessário ou demonstrativo, conquanto seja mais clara que o silogismo; seu âmbito de validade é o mesmo do fato, ou seja, da totalidade dos casos em que sua validade foi efetivamente constatada. Pode, portanto, ser usada para fins de exercício, em dialética, ou com objetivos persuasivos em retórica (*R. her.*, I, 2, 1356 b 13), mas não constitui ciência porque a ciência é necessariamente demonstrativa (*An. post.*, I, 2, 71 b 19)

Ainda no mesmo dicionário de filosofia (p. 561) encontra-se para indução (matemática) finita:

> Essa expressão designa o princípio que serve para estabelecer a verdade de um teorema matemático em um número indefinido de casos. Denomina-se também princípio de recorrência ou raciocínio por recorrência (POINCARÉ, *La science et l'hipothèse*, I, § 3). Peano assim definiu esse princípio: 'Seja S uma classe, suponhamos que O pertença a essa classe e que todas as vezes que um indivíduo pertença a essa classe o seguinte também pertence a ela; então todos os números pertencerão a classe. Essa proposição denomina-se princípio de I'. (*Formul. mat.*, § 10).

E nesse dicionário ainda é encontrada, como conclusão, que a indução finita e a indução não têm nada em comum a não ser o caráter de generalização.

Se as definições de indução finita e indução nada têm em comum, então porquê os autores de livros didáticos e professores de matemática utilizam o termo indução como sinônimo para indução finita? Quais motivos levam os estudantes de um curso de licenciatura em Matemática a confundir esses termos? Quais fatores fazem com que os estudantes utilizem a indução finita de forma equivocada? Mas então o que significa indução finita? Como os estudantes empregam a indução finita? A indução finita é confiável?

Com relação à primeira pergunta acima Carvalho (2004, p. 154) indica "A palavra que define, que dá nome ao objeto matemático, deixa de ser do domínio do corpo matemático, passa a ser da pessoa." Dessa forma, acreditamos que provavelmente quem detém controle sobre os termos indução e indução finita são os autores de livros didáticos e os professores sendo assim, eles são responsáveis sobre a utilização adequada ou não da terminologia. Portanto

> O dito rigor matemático então sustentado pelo sujeito identificado com o papel que lhe é reservado, escapa da especificidade da fala e passa ao sentindo do discurso. O papel que o sujeito desempenha é o de garantir que a Matemática possa exercer o sentido da fala do rigor no para si de seu discurso, isto é, garantir que termos usados rigorosamente são o próprio sentido do discurso. É, em parte, daí que o efeito autoritário aparece na sala de aula. (CARVALHO, 2004, p. 153.)

Tais questões são pertinentes, pois vários estudantes realizam demonstrações por meio da indução finita seguindo os passos característicos dessa demonstração, utilizando-a como um algoritmo, e nem sequer param para analisar o que significa realizar esses passos e porquê são exatamente esses passos.

Fonseca (2005) aponta diversos contextos onde o termo demonstração é empregado. Assim, no contexto da lógica e dos fundamentos da matemática encontramos: "a veracidade de um teorema baseia-se nas regras lógicas utilizadas na demonstração, visto que o teorema surge como uma consequência lógica e necessária das premissas através de inferência dedutiva". No contexto da matemática profissional esta autora afirma que a noção de demonstração é diferente da utilizada na lógica formal e nos fundamentos da matemática, dessa forma as demonstrações do matemático profissional tornam-se complexas e nas investigações matemáticas não é possível manter a formalização ao longo de toda demonstração. Com relação as ciências empíricas Fonseca (2005) afirma que

> a demonstração é baseada principalmente na indução empírica e na analogia, a partir das quais se conclui que, o que é verdade para alguns indivíduos de um determinado grupo. Neste contexto, a validade das afirmações aumenta proporcionalmente com o número de factos que a suportam, não sendo estas invalidadas por um contra-exemplo. (FONSECA, 2005)

E por fim Fonseca (2005) diz que no âmbito da sala de aula "os teoremas são verdadeiros, mas os argumentos que estabelecem a verdade são frequentemente informais, não dedutivos, ou baseiam-se em critérios de autoridade externa."

2.3 A Indução ou Indução Empírica

Para Popper (1996, p. 27) as ciências empíricas são caracterizadas por empregarem métodos indutivos. Para este pesquisador "É comum dizer-se 'indutiva' uma inferência, caso ela conduza de enunciados singulares (por vezes denominados também enunciados 'particulares'), tais como descrições dos resultados de observações ou experimentos, para enunciados universais, tais como hipóteses ou teorias." E conclui dizendo:

> Ora, está longe de ser óbvio, de um ponto de vista lógico, haver justificativa no inferir enunciados universais de enunciados singulares, independentemente de quão numerosos sejam estes; com efeito, qualquer conclusão colhida desse modo sempre pode revelar-se falsa: independentemente de quantos casos de cisnes brancos possamos observar, isso não justifica a conclusão de que *todos* os cisnes são brancos. (POPPER, 1996, p. 28)

O processo de indução é usado naturalmente nas ciências física, química, dentre outras. Segundo Chauí (2000) o método de indução empírica é caracterizado pela busca de uma conclusão, isto é, de uma lei geral que a partir do estudo de casos particulares, iguais ou semelhantes explica todos os casos particulares. Porém, para a utilização da indução é necessário que sejam respeitadas certas regras, caso contrário a indução será considerada falsa. Um exemplo de aplicação do método de indução é:

> [...] colocamos água no fogo e observamos que ela ferve e se transforma em vapor; colocamos leite no fogo e vemos também que ele se transforma em vapor; colocamos vários tipos de líquidos no fogo e vemos sempre sua transformação em vapor. Induzimos desses casos particulares que o fogo possui uma propriedade que produz a evaporação dos líquidos. Essa propriedade é o calor. (CHAUI, 2000, p. 82)

O exemplo anterior nos mostra que a partir do aquecimento de substâncias no estado líquido todas elas em algum momento evaporam. A experiência produzida com cada um dos líquidos indica que foram verificados casos particulares e, portanto, por indução, podemos dizer que toda substância no estado líquido quando aquecida muda de fase, isto é, passa do estado líquido para o de vapor, que é a conclusão geral.

Um contraexemplo que destacamos e que pode ser encontrado em Watanabe (1986), Sominski (1996) e Geronimo e Franco (2002) com relação ao uso da indução empírica é dado pelo trinômio $n^2 + n + 41$. Substituindo n por 0, 1, 2, 3, 4 e 5 encontramos respectivamente os números primos 41, 43, 47, 53, 61 e 71. Analisando os resultados anteriores somos induzidos a dizer que é possível determinar números primos a partir desse trinômio. Isso, entretanto não é verdadeiro. Basta observar que substituindo n por 40 encontramos o número 1681 que é um número composto, pois seus divisores formam o conjunto $\{1, 41, 1681\}$.

Com relação ao método de indução utilizado nas ciências empíricas, Popper (1996) afirma que:

> O problema da indução também pode ser apresentado como indagação acerca da validade ou verdade de enunciados universais que encontrem base na experiência, tais como as hipóteses e os sistemas teóricos das ciências empíricas. Muitas pessoas acreditam, com efeito, que a verdade desses enunciados universais é *'conhecida através da experiência*"; contudo, está claro que a descrição de uma experiência - de uma observação ou do resultado de um experimento - só pode ser um enunciado singular e não um enunciado universal. (POPPER, 1996, p. 28)

Apesar de levantar tal problema, quanto ao método de indução empírica, Popper (1996, p. 29) diz que as justificativas e inferências produzidas por esse método necessitam estarem embasadas na lógica indutiva e conclui dizendo que "[...] o princípio de indução há de constituir-se num enunciado sintético, ou seja, enunciado cuja negação não se mostre contraditória, mas logicamente possível."

2.4 Origens e História da Indução Finita

Nesta sessão trataremos das características relativas ao conceito de indução finita. Abordaremos a história e as propriedades referentes a este conceito.

Segundo Lima (s/d, s/p) a axiomatização do conjunto dos números naturais deve-se ao matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932). Essa realização quer dizer que é possível deduzir e demonstrar todas as propriedades desse conjunto a partir dos axiomas de Peano. Tais axiomas foram divulgados numa obra de 1889, denominada *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*. É nesta obra que Peano apresenta seus axiomas e enuncia a base de um processo demonstrativo designado como indução finita.

Enunciamos a seguir os axiomas de Peano, segundo Lima com algumas adaptações[11]:

a) Existe uma função s: N →N, que associa a cada $n \in$ N um elemento s (n) $\in$ N, chamado sucessor de *n,* que significa dizer todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural;
b) A função s: N→N, é injetiva, ou seja, números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;
c) Existe um único elemento 0 no conjunto N, tal que $0 \neq s\ (n)$ para todo $n \in$ N, isto é, 0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro;
d) Se um subconjunto $X \subset$ N é tal que $0 \in$ N e $s(X) \subset$ X(isto é, n $\in$ X$\Rightarrow s(n) \in$ X), então X = N. O que significa dizer que se um conjunto de números naturais contém o número 0 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com N, isto é, contém todos os números naturais.

O axioma referente ao item d é chamado de axioma de indução finita. Sobre este axioma Lima informalmente, diz que, é possível obter qualquer número natural a partir de 1 a partir de repetidas operações de tomar o sucessor de *n*. Outra abordagem dada por este autor sobre o axioma de indução finita é:

> Dentro de um ponto de vista estritamente matemático, podemos reformular o axioma da indução do seguinte modo: Um subconjunto $X \subset$ N chama-se *indutivo* quando $s(X) \subset$ X, ou seja, quando $n \in$ X$\Rightarrow s(n) \in$ X, ou ainda, quando o sucessor de qualquer elemento de X também pertence a X.
> Dito isto, o axioma da indução afirma que o único subconjunto indutivo de N que contém o número 1 é o próprio N. (LIMA, s/d, s/p)

E Lima conclui: "O papel fundamental do axioma da indução na teoria dos números naturais e, mais geralmente, em toda a Matemática, resulta do fato de que ele pode ser visto como um método de demonstração, chamado o *Método de Indução Matemática,* ou *Princípio da Indução Finita,* ou *Princípio da Indução*, ..."

Assim, a partir dos axiomas de Peano podemos enunciar o princípio de indução finita: **Princípio de Indução Finita (Teorema)**: Seja P(n) uma proposição envolvendo um número natural n e suponha que:

---

[11] Esse autor assume o conjunto dos números naturais a partir de 1, isto é, N = {1, 2, 3, ...}, neste trabalho abordaremos N como N = {0, 1, 2, 3, ...}.

a – P (0) é verdadeira

b – $\forall\ k \in$ N, P (k) verdadeira$\Rightarrow$ P(k+1) verdadeira.

Então P(n) é verdadeira para todo n $\in$ N

Dem.

Consideremos o seguinte subconjunto de N, A = {n $\in$ N/ P(n) é verdadeira}. Observemos que 0 $\in$ A, pois P (0) é verdadeira e decorre do item a do teorema. Além disso, para todo n $\in$ A $\Rightarrow$ P(n) é verdadeira $\Rightarrow$ P(n+1), que deriva do item b do teorema, é verdadeira$\Rightarrow$$n$+1 $\in$ A. E portanto, em decorrência do axioma d, concluímos que A=N.

A abordagem anterior adota o conjunto dos números naturais N para enunciar o princípio de indução finita, entretanto há abordagens que consideram o conjunto dos números inteiros Z para enunciar o princípio de indução finita. Assim, autores como Domingues e Iezzi (1982), Gonçalves (1999), Shokranian, Soares e Godinho (1999) iniciam a apresentação da indução finita a partir do princípio de boa ordenação[12].

As demonstrações baseadas na indução finita são caracterizadas por duas propriedades. A primeira diz que a proposição deve ser verdadeira para um número natural n_0 (que não necessita ser o 0). A segunda considera que se a proposição for verdadeira para um número natural n arbitrário então é também verdadeira para n+1, ou seja, é válida para o seu sucessor. A primeira propriedade é denominada como base da indução e a segunda é chamada de passo indutivo. Segundo Geronimo e Franco (2002) as propriedades da indução finita podem ser comparadas ao efeito dominó[13], isto é, se temos uma fila de dominós dispostos verticalmente de modo que as distâncias entre eles permitam que uns toquem nos outros ao caírem, então se a primeira peça do dominó cai a seguinte também cairá.

Com relação ao tratamento da indução finita em livros didáticos há autores como Domingues e Iezzi (1982) e Geronimo e Franco (2002) que abordam o conceito como princípio de indução finita enquanto que Lipschutz e Lipson (2004) tratam como teorema de indução finita. Consideramos que tais nomenclaturas são sinônimas, já que, "[...] um **princípio** é um teorema (ou axioma) que ocupa um papel básico e central numa teoria, constituindo um ponto de apoio para demonstrar um grande número de propriedades importantes e é uma arma-chave para resolver uma série de problemas" como sugere Carneiro

[12] Princípio da Boa Ordenação: A definição desse princípio segundo Shokranian, Soares e Godinho (1999) é: "todo subconjunto não vazio A de inteiros não negativos possui em elemento mínimo (isto é, existe $n_0 \leq n$, para todo $n \in$ A)."

[13] Efeito dominó: consiste em dispor verticalmente em fila diversos dominós de modo que se o primeiro for derrubado com um toque, acaba derrubando os demais dominós. Nas ciências é comum utilizar esse termo quando nos referimos a processos recursivos.

(1996, p. 44). No decorrer desta pesquisa abordaremos o assunto como princípio de indução finita.

Apesar do princípio de indução finita ter sido desenvolvido por Peano, Katz (2004) mostra indícios de que a indução finita já era conhecida desde a Antiguidade, aparecendo de forma implícita na obra Os *Elementos*, de Euclides (300 a.C.). Além disso, há autores como Coelho e Milies (2006) que apontam o matemático francês Blaise Pascal (1623 - 1662) como o primeiro a utilizar o princípio de indução finita para demonstrar as propriedades do triângulo aritmético, em um folheto que tinha como título *Traité du Triangle Arithmétique*.

Porém, contrariando a posição anterior, Vacca (1909) defende que foi Francesco Maurolico, matemático italiano (1494 - 1575), o primeiro a utilizar a indução finita em seus trabalhos e que Pascal teria apenas utilizado-a em seu folheto. Hefez (1993), ao encontro de Vacca (1909), vai além e diz que o primeiro problema de indução finita resolvido por Maurolico foi provar que, para todo natural n, a soma dos n primeiros números naturais ímpares é dada por n^2.

Há outros autores como Cajori (1918), que apontam que a indução finita apresenta origens diferentes. Este autor ainda afirma que foi apenas em 1838 que o nome indução finita foi utilizado aparentemente pela primeira vez. Fato esse, que se deve ao matemático britânico Augustus De Morgan (1806 - 1871) em um artigo publicado com o título *Induction* (*Mathematics*).

Outra perspectiva em que se pode abordar o princípio de indução finita é apoiando-se na filosofia da matemática, como fez Russel (1974). Segundo Monk (2000), Russel buscava definir a matemática como uma ciência livre de contradições, sendo assim incontestavelmente verdadeira. Russel (1974) a fim de explicar os axiomas de Peano, introduz a sequência 1, 2, 3, dos números naturais, dizendo que um ponto de partida óbvio em relação à matemática e que, para reescrever esta sequência como 0, 1, 2, 3, n, $n + 1$, ... a civilização passou por vários níveis de desenvolvimentos intelectuais. Para isso, basta notar, que nesta última série temos 0 como elemento, fato que mostra desenvolvimento intelectual da humanidade, já que, por exemplo, os gregos e os romanos não dispunham de uma representação para tal algarismo. Deste modo, Russel (1974) alerta que:

> Pouquíssimas pessoas têm uma definição para o significado de 'número' ou '0' ou '1'. Não é difícil ver que, partindo-se de 0, pode-se atingir qualquer número natural por adições repetidas de 1, mas teremos de definir o que

> queremos dizer com as expressões 'adicionar 1', e 'repetir'. Essas questões não são de modo algum fáceis. (RUSSEL, 1974, p. 11)

Assim, Russel (1974) aponta que para construir a série dos números naturais basta saber o que se quer dizer com os termos "0" e "sucessor" e afirma que:

> Quais os números que podem ser atingidos sendo dados os termos '0' e 'sucessor'? Haverá algum meio pelo qual possamos definir toda a classe de tais números? Atingimos 1 como sucessor de 0; 2, como sucessor de 1; 3, como sucessor de 2, e assim por diante. É esse 'e assim por diante' que desejamos substituir por algo menos vago e indefinido. Poderemos ser tentados a dizer que 'e assim por diante' significa que o processo de passar para o sucessor pode ser repetido *qualquer número finito* de vezes, mas o problema em cuja solução estamos empenhados é o de definir 'número finito', e, portanto, não devemos usar essa noção em nossa definição. Nossa definição não deverá pressupor que saibamos o que seja um número finito. (RUSSEL, 1974, p. 27)

A solução que Russel (1974, p. 27) apresenta para este problema está no princípio de indução finita. Este autor diz que: "Essa proposição declara que qualquer propriedade que pertença a 0, e também ao sucessor de todo número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números naturais."

Portanto, com relação às ideias primitivas de Peano, Russel (1974) apresenta uma perspectiva na qual diz que:

> [...] demos definições delas que as tornam precisas, não mais capazes de uma infinidade de significados diferentes, como eram quando ainda determinadas apenas até ao ponto de obedecer aos cinco axiomas de Peano. Nós retiramos do aparato fundamental de termos que têm de ser meramente apreendidos, e aumentamos assim a articulação dedutiva da Matemática. (RUSSEL, 1974, p. 30)

Assim, a partir dos conceitos apresentados por Russel (1974) temos agora que o princípio de indução finita é o meio pelo qual definimos os números naturais e somos capazes de deduzir, demonstrar e generalizar todas as suas propriedades. Tais propriedades estão baseadas no conceito de posteridade de 0 com relação entre um número natural e seu sucessor imediato. Russel (1974) diz que:

> Uma propriedade é 'hereditária com respeito a N', ou simplesmente 'N-hereditária', se, quando pertencer a um número m, também pertencer a $m + 1$, isto é, ao número com o qual m tenha a relação N. E se dirá que um número n pertence a 'posteridade' de m com respeito à relação N se n tiver todas as propriedades N-hereditárias pertencentes a m. (RUSSEL, 1974, p. 31)

Dessa maneira Russel (1974, p. 33) enuncia o princípio de indução finita como "o que pode ser inferido do seguinte para o seguinte pode ser inferido do primeiro ao último." Tal enunciado é segundo Russel (1974) um modo popular de definir a indução finita.

Gástev (apud SOMINSKI, 1996) afirma que a indução finita é um método dedutivo e a define da seguinte maneira:

> O 'princípio de indução matemática' é uma proposição precisa (cuja evidência intuitiva é aceita por muitos matemáticos como indiscutível, ainda que no momento da exposição axiomática da Aritmética figure como um axioma) que permite obter, a partir da base e do passo indutivo, uma demonstração puramente dedutiva da proposição para todos os números naturais *n*. (*apud* SOMINSKI, 1996, p. 59)

Para este autor os nomes indução e indução finita, estão relacionados devido a uma associação que a nossa consciência, ao realizar argumentações, produz ao envolver esses dois princípios. Além disso, Gástev (apud SOMINSKI, 1996) relata que a indução empírica necessita de algumas experiências em particular a fim de que tenhamos hipóteses iniciais sobre um determinado fenômeno enquanto que a indução finita não necessita de tais hipóteses. Este autor ainda declara que a indução finita é "completa" ou "perfeita", pois é um método dedutivo que pode ser empregado com 100% de segurança, já a indução empírica é "imperfeita" porque não se pode assegurar que a experiência produzirá os mesmos resultados sempre. Deste modo, Gástev (*apud* SOMINSKI, 1996) conclui que a indução finita é um método de demonstração de teoremas aritméticos, isto é, que em se tratando do conjunto dos números naturais a indução finita é um instrumento universal para demonstrar as propriedades desse conjunto.

Complementando as ideias e Gástev temos que:

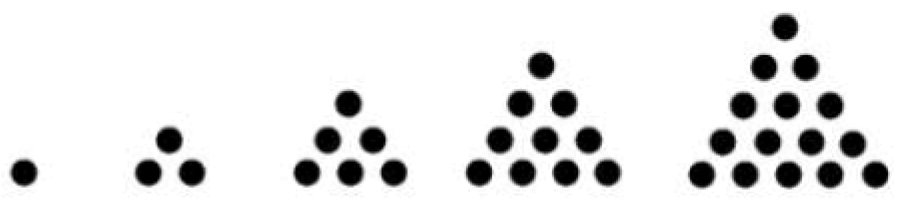
> A indução é o processo de descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares. É utilizada em todas as áreas das ciências, inclusive na matemática. A indução finita é utilizada exclusivamente na Matemática, para demonstrar teoremas de um certo tipo. É de lamentar que estes nomes estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto uma conexão prática, pois muitas vezes utilizamos ambos conjuntamente. (POLYA, 1975, p 91).

Assim, é necessário tomar cuidado quando nos referirmos à indução finita e à indução empírica. A indução finita é um método dedutivo, enquanto que a indução empírica, como aponta Chauí (2000, p. 82) trata de um estudo de casos particulares, iguais ou semelhantes e busca uma lei geral que explica e subordina tais casos. Assim, temos que neste último "a definição ou a teoria são obtidas no ponto final do percurso."

Ao encontro da posição de Katz (2004) quanto ao aparecimento da indução finita, Baron (1985) trás algumas aplicações para este princípio, que segundo a autora se devem aos pitagóricos.

> [...] que o número exercia para os pitagóricos o papel da *matéria* e da forma do universo. Eles chamavam *um* ponto de um, uma reta de *dois*, uma superfície de *três* e um sólido de *quatro*. O somatório de pontos gerava retas, o de retas, superfícies e o de superfícies, sólidos; com os seus *um, dois*, *três* e *quatro* eles poderiam construir o universo! (BARON, 1985, p. 17)

Assim, Baron (1985) afirma que os pitagóricos já conheciam os números figurados[14], como os números triangulares, quadrangulares, dentre outros, mas foi Nicômano de Gerasa (100 d. C.) que em sua obra intitulada *Introductio Arithmetica* apresentou a melhor e mais completa descrição dos números figurados. Um exemplo dessas descrições é que os números triangulares que são dados por:



cuja expressão algébrica que representa cada um desses números, é dada por $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

pois, $T_1 = 1$,

$T_2 = 3 = 1 + T_1 + 2$,

$T_3 = 6 = 3 + 3 = T_2 + 3$,

$T_4 = 10 = 6 + 4 = T_3 + 4$,

$T_5 = 15 = 10 + 5 = T_4 + 5$

[14] Ou números poligonais

Assim, observando as parcelas anteriores temos que $T_n=T_{n-1}+n$, isto é, que cada número triangular é a soma do anterior com seu número de ordem. Agora somando, membro a membro, a igualdade anterior tem:

$$T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+\ldots+T_n=1+T_1+T_2+T_3+T_4+\ldots+T_{n-1}+2+3+4+5+\ldots+n$$

e simplificando os termos iguais em ambos os lados da igualdade encontramos a seguinte representação para os números triangulares: $T_n=1+2+3+4+5+\ldots+n$. Essa fórmula expressa a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética e, é dada por $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. De modo análogo podemos deduzir outras expressões para os números figurados.

Nas considerações anteriores apontamos algumas perspectivas sobre a abordagem da indução finita. Como será possível notar mais adiante nesta pesquisa a abordagem do conteúdo indução finita em grande parte dos livros didáticos não é apresentada via axiomas de Peano, mas como uma consequência do princípio da boa ordenação.

A seguir buscaremos esclarecer o que queremos dizer com a aplicação da indução finita como uma "receita" ou utilização da indução finita de forma mecânica.

Como já dissemos, Hanna (1990) afirma em seu trabalho que a indução finita é um tipo de prova considerada como uma prova que prova, pois em geral é vista como não-explicativa. Sendo assim, a autora apresenta o seguinte exemplo para confirmar sua tese.

Figura 1 – Exemplo de uma prova que prova segundo Hanna (1990)

Prove that the sum of the first n positive integers, $S(n)$, is equal to $n(n+1)/2$.

A proof that proves
Proof by mathematical induction:

For $n=1$ the theorem is true.
Assume it is true for an arbitrary k.
Then consider:

$$S(k+1) = S(k) + (k+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Therefore the statement is true for $k+1$ if it is true for k.
By the induction theorem, the statement is true for all n.

É possível notar que na demonstração apresentada por Hanna (1990) constam as duas etapas que compõem a prova por indução finita, além disso, a autora em sua conclusão diz que a afirmação é verdadeira e o que atesta sua veracidade é o princípio de indução finita.

O exemplo a seguir foi realizado pelo estudante pesquisador na última sessão da sequência didática.

Mostre que para qualquer $n \in N^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Dem.

Seja S o conjunto dos números naturais n para os quais a soma dos n primeiros números impares é n^2. Temos que

$1 \in S$, pois a soma dos 1 primeiros números ímpares é $1 = 1^2$.

Vamos supor que $k \in S$, isto é, que a soma dos k primeiros ímpares é k^2.

Estamos supondo que $1+3+5+...+ 2k-1= k2$ e queremos provar que $1+3+5+...+2k+1=(k+1)^2$.

Assim, basta observar que $1+3+5+...+ (2k-1) + (2k+1) = k^2+ (2k+1)=(k+1)^2$.

O princípio da indução matemática nos garante, agora, que $S =N^*$, ou seja, a afirmação "a soma dos n primeiros números ímpares é n^2" é verdadeira para todos os números naturais maiores que zero.

Apresentamos o exemplo anterior, pois as análises das demonstrações, por indução finita, apresentadas pelos estudantes serão realizadas tomando como orientação a demonstração anterior. Isso porque entendemos que além dela conter as duas proposições que fazem parte da prova por indução finita temos em sua conclusão menção a tal princípio. Mais adiante apresentaremos uma demonstração por indução finita na qual entendemos que o estudante age de maneira mecânica.

Com o intuito de exemplificarmos o que é uma prova que explica apresentamos a seguir alguns exemplos propostos por Hanna (1990) que são utilizados para demonstrar a mesma proposição. Assim, os outros exemplos são:

Figura 2 – Primeiro exemplo de prova explicativa segundo Hanna (1990)

A proof that explains

Gauss's proof is as follows:

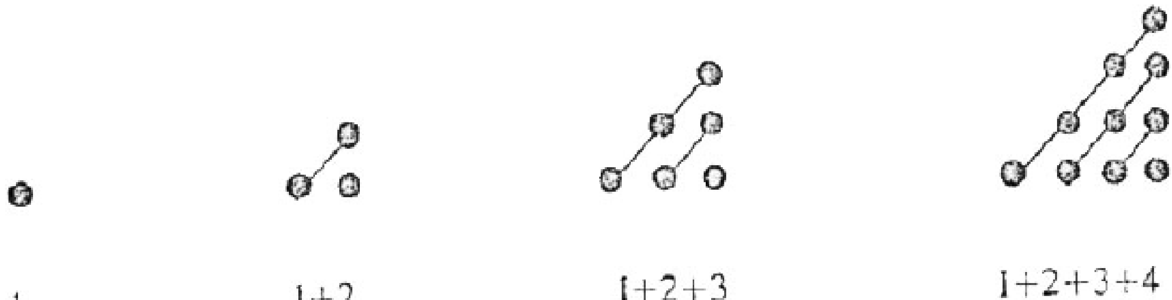
$$S = 1 + 2 + \ldots + n$$
$$S = n + (n-1) + \ldots + 1$$

$$2S = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1)$$
$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para a autora essa prova é considerada explicativa, pois utiliza a propriedade de simetria para a operação de adição, pois como podemos notar existem duas representações diferentes para indicar a mesma operação. Segundo Hanna (1990) essa demonstração foi realizada por Gauss[15].

Outra maneira de demonstrar a mesma proposição é utilizando os números triangulares.

Figura 3 – Segundo exemplo de prova explicativa segundo Hanna (1990)



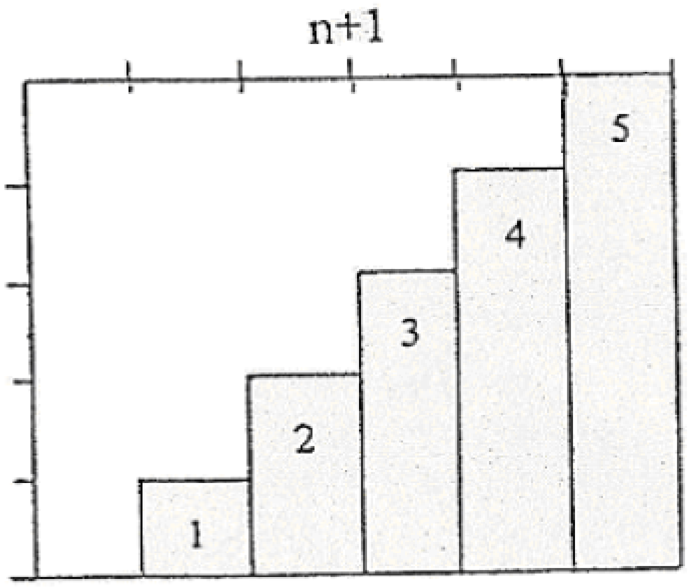
Segundo a autora a explicação é que a soma de S(n) com S(n) resulta em um quadrado que contém n^2 pontos, além disso, há n pontos adicionais já que os pontos que formam a diagonal são contados duas vezes. Assim, temos que

[15] Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) matemático alemão

$$2S(n) = n^2 + n \Rightarrow S(n) = \frac{n^2 + n}{2} \Rightarrow S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

A última maneira apresentada por Hanna (1990) de provar que a soma dos n primeiros números naturais positivos é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$, que é também considerada como uma prova explicativa é representando a soma da seguinte maneira

Figura 4 – Terceiro exemplo de prova explicativa segundo Hanna (1990)



Os lados dos retângulos são dados por n e n+1 respectivamente. Sendo assim, a área total da figura é dada por $n(n+1)$, porém estamos interessados somente na área parcial, isto é, apenas na metade da área, temos que esta é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$.

Como já dissemos anteriormente, apresentaremos um exemplo no qual entendemos se tratar de uma demonstração, que utiliza a indução finita, e que foi desenvolvida de maneira mecânica (ou seguindo uma "receita"). Trata-se de verificar se a proposição dada por $P(n): 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Este exemplo foi retirado de Domingues e Iezzi (2003), com a seguinte demonstração

Figura 5 – Exemplo de uma aplicação da indução finita como um processo mecânico (DOMINGUES; IEZZI, 2003)

Para $n = 1$, o primeiro membro dessa igualdade é $1^2 = 1$ e o segundo $\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Portanto, a função proposicional é verdadeira para $n = 1$.

Suponhamos que seja verdadeira para algum $r \geqslant 1$, isto é, suponhamos que $1^2 + 2^2 + \ldots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$ seja verdadeira.

Então, para $n = r + 1$, o primeiro membro da igualdade a ser provada é

$$1^2+2^2+\ldots+r^2+(r+1)^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} + (r+1)^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)^2 + 6(r+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(r+1)(2r^2+r+6r+6)}{6} = \frac{(r+1)(2r^2+7r+6)}{6}$$

ao passo que o segundo é

$$\frac{(r+1)(r+2)(2(r+1)+1)}{6} = \frac{(r+1)(r+2)(2r+3)}{6} = \frac{(r+1)(2r^2+7r+6)}{6}$$

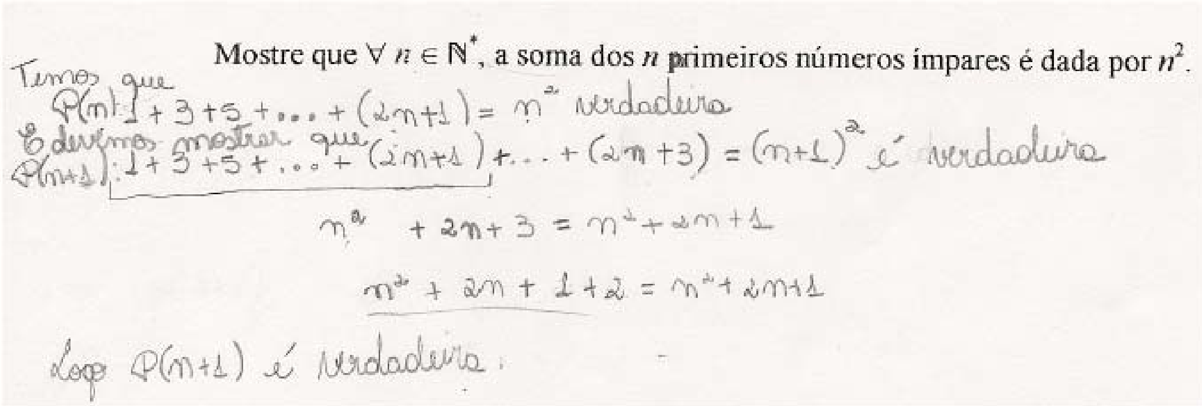
e, portanto, a função proposicional também é verdadeira para $n = r + 1$. Isso prova que a igualdade efetivamente vale para todo inteiro $n \geqslant 1$.

Como podemos notar as duas proposições que compõe a demonstração por indução finita são desenvolvidas e satisfeitas, mas também é possível observar que o princípio de indução finita, que é o que garante se tratar de uma proposição verdadeira não é citado pelos autores.

Em nossa análise não estamos dizendo que a demonstração proposta por Domingues e Iezzi (2003) está errada, porém entendemos que ela não está completa, já que sua essência não consta na prova. Sendo assim, temos que esta é uma das características que nos permite afirmar que a demonstração foi desenvolvida como sendo um processo mecânico, isto é, o que estamos querendo dizer é que o propósito da demonstração consistiu em examinar as duas proposições que pertencem à prova por indução finita.

Além da característica apontada na demonstração anterior, encontramos em algumas provas realizadas por estudantes que participaram das atividades propostas em nossa sequência didática que alguns deles não se preocuparam em verificar a primeira proposição do princípio de indução finita, isto é, eles iniciam a prova a partir da segunda proposição. Essa característica fica evidente quando analisamos a demonstração proposta por E9S2Q1, apesar de não estar correta.

Figura 6 – Solução apresentada pelo estudante E9S2Q1



Mostre que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é dada por n^2.

Temos que

$P(n): 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = n^2$ verdadeira

E devemos mostrar que

$P(n+1): \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1)} + \ldots + (2n+3) = (n+1)^2$ é verdadeira

$$n^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1$$

$$n^2 + 2n + 1 + 2 = n^2 + 2n + 1$$

Logo $P(n+1)$ é verdadeira.

É possível notar a partir dos livros didáticos que analisamos nesta pesquisa, e em outros, que o princípio de indução finita é composto por duas etapas e os autores desses livros deixam explícito quais são essas etapas.

Notamos que esse estudante não se preocupou em verificar se estava partindo de uma afirmação verdadeira ou não, por essa razão também entendemos que demonstrações que apresentam essa característica indicam que o estudante agiu de maneira mecânica, isto é, que ele se preocupou em seguir um modelo, porém se esqueceu de um dos ingredientes.

CAPÍTULO 3
ASPECTOS METODOLÓGICOS

3.1 NATUREZA DA PESQUISA

Segundo Bogdan e Bliken (1994, p. 47, 48, 49) a investigação qualitativa possui cinco características, contudo nem todo trabalho qualitativo precisa contemplar todas elas. Neste trabalho destacamos:

1. A *fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal*: a coleta de dados desta pesquisa foi realizada durante as aulas da disciplina 6MAT019 - Tópicos em Educação Matemática II. O estudante-pesquisador juntamente com a professora responsável pela disciplina e orientadora deste trabalho, se ocuparam com os registros e a coleta dos dados que ocorreram durante as atividades.
2. *A investigação qualitativa é descritiva*: no processo de coleta de dados buscamos descrever as ações produzidas pelos estudantes durante a realização das atividades, dessa maneira buscamos transformar os dados originais provenientes das observações de campo.
3. *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos*: os sujeitos desta pesquisa foram os estudantes matriculados na disciplina 6MAT019. Assim, o processo no qual estamos interessados é analisar por meio de uma sequência didática, que trabalha com a indução finita via axiomas de Peano, se os estudantes compreenderiam a diferença entre o método de indução empírica e de indução finita, bem como, esta última como uma demonstração formal e não somente como um processo mecânico.

3.2 CONTEXTO DA PESQUISA

Com o intuito de compreendermos como os estudantes entendem a indução finita, conteúdo exclusivamente matemático, utilizamos os conceitos que pertencem a Teoria das Situações Didáticas, que segundo Freitas (1999), possibilita compreender o fenômeno da aprendizagem matemática.

A teoria das situações didáticas é um modelo proposto por Guy Brousseau durante a década de 80, onde se busca criar um ambiente de interação entre o estudante e o saber no qual deve-se desenvolver a aprendizagem segundo Almouloud (2007). Nesta teoria o estudante é denominado "o aprendiz" e este se relaciona com o saber por meio do ambiente denominado "meio[16]" no qual a aprendizagem deve ocorrer.

Para Almouloud (2007)

> O objetivo da *teoria das situações* é caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa. (ALMOULOUD, 2007, p. 32)

Ainda temos que:

> Essa teoria representa uma referência para o processo de aprendizagem matemática em sala de aula envolvendo professor, aluno e conhecimento matemático. Trata-se de um referencial para a educação matemática que, por um lado, valoriza os conhecimentos mobilizados pelo aluno e seu envolvimento na construção do saber matemático e, por outro, valoriza o trabalho do professor, que consiste, fundamentalmente, em criar condições suficientes para que o aluno se aproprie de conteúdos matemáticos específicos. (FREITAS, 1999, p. 78)

Em nossa pesquisa propiciamos aos estudantes uma situação didática[17], sobre o princípio de indução finita, isto é, a partir das interações deles com os problemas propostos, nosso intuito foi possibilitar a construção do conhecimento e promover um ambiente onde os mesmos pudessem redescobrir seu conhecimento sobre a indução finita. Isso por que

> O significado do saber matemático escolar, para o estudante, é fortemente influenciado pela forma didática pela qual o conteúdo lhe é apresentado. O envolvimento do aluno dependerá da estruturação das diferentes atividades de aprendizagem através de uma *situação didática*. Existirá uma situação didática sempre que ficar caracterizada uma intenção, do professor, de possibilitar ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo. (FREITAS, 1999, p. 80)

---

[16] Tradução de *milieu* é onde acontecem as interações do estudante.
[17] Ocorre sempre que o professor deseja promover aprendizagem ao estudante.

Com relação à nossa pesquisa, os estudantes que participaram das atividades propostas já haviam estudado a indução finita em outras disciplinas do curso, como por exemplo, em 6MAT007 - Elementos de Matemática. Dessa forma, os sujeitos dessa pesquisa já possuíam noções acerca do nosso objeto de estudo. Tais noções presentes nos estudantes vieram dos livros didáticos utilizados por eles ou pela forma com que os professores das disciplinas anteriores abordaram o assunto.

3.3 A Engenharia Didática

A metodologia utilizada nesta pesquisa foi a engenharia didática, pois segundo Machado (1999), "essa metodologia se constituiu com a finalidade de analisar as situações didáticas objetos de estudo da Didática da Matemática." Dessa forma, a engenharia didática complementa a teoria das situações didáticas.

Segundo Almouloud (2008), a engenharia didática é um recurso metodológico utilizado em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um certo conceito. As noções da engenharia didática nasceram durante a década de 80 com enfoque na didática francesa. Este tipo de pesquisa se diferencia das demais, como, por exemplo, a análise de caso ou registro de representação semiótica devido às etapas de análise e validação dos dados, que são realizadas internamente ao processo, ou seja, é por meio da comparação entre a análise a priori e a análise a posteriori que é possível validar a pesquisa.

Para Sarrazy (1995, p. 10) a engenharia didática é o "meio de ação sobre o sistema de ensino, bem como uma metodologia de pesquisa." Fárfan Márquez (apud D'AMORE, 2007, p. 118) entende que, "a engenharia didática se constitui como uma metodologia de pesquisa que se aplica tanto aos produtos de ensino baseados ou derivados dela própria; bem como metodologia de pesquisa para guiar as experimentações em classe." O conceito de engenharia didática para Artigue (1996) é de uma metodologia de investigação, caracterizada por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula.

Pais (2002, p. 105) acredita que o termo técnica de pesquisa é mais apropriado para caracterizar a engenharia didática, e justifica, "Mesmo que essa possa ser uma diferença secundária, não é bem assim, pois o debate metodológico é fundamental para garantir a validação da pesquisa."

Neste trabalho adotamos, como perspectiva para engenharia didática, uma "metodologia de investigação", já que o objetivo é verificar por meio de uma sequência didática, que trabalha com a indução finita via axiomas de Peano, se os estudantes compreenderiam a diferença entre a indução empírica e a indução finita, bem como, esta última como uma demonstração formal e não somente como um processo mecânico. Segundo Pais (2002, p. 99), "Uma das vantagens dessa forma de conduzir a pesquisa didática decorre dessa sua dupla ancoragem, interligando o plano teórico da racionalidade ao território experimental da prática educativa."

Segundo Artigue (1996) os conceitos da engenharia didática emergiram em meados da década de 1980 e podem ser comparados ao trabalho de um engenheiro, onde:

> para realizar um projecto preciso, se apoia nos conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controlo de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objectos muito mais complexos do que os objectos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar (ARTIGUE, 1996, p. 193)

D'Amore (2007, p. 229) compreende a expressão engenharia didática como "[...] o estudo conduzido de maneira científica (ou pelo menos racional) do fenômeno didático; a colocação em evidência de uma realização didática concreta, como atividade de investigação para verificar as construções teóricas."

A seguir apresentamos as etapas da engenharia didática juntamente com a respectiva descrição:

3.3.1 Análises Preliminares

Nesta fase do projeto o objetivo é identificar quais são os problemas de ensino e aprendizagem de um determinado objeto de estudo, ou seja, consiste em definir o fenômeno a ser estudado. Para isso, o pesquisador procura fazer inferências e levantar hipóteses com o intuito de compreender a realidade na qual o problema está inserido. Pais (2002) aponta que a compreensão inicial da realidade nem sempre é percebida pelo pesquisador devido à sua complexidade. Assim, esse autor recomenda que se faça uma descrição das principais características do problema.

3.3.2 Concepção e Análise a Priori:

Esta fase da engenharia didática compreende a construção das situações-problema e uma análise a priori, que tem por finalidade responder à(s) questão(ões) e validar as hipóteses que foram levantadas nas análises preliminares.

Para Almouloud (2008), na análise a priori, deve-se:

- descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática a ser desenvolvida;
- analisar a importância da situação para o estudante e, em particular, em função das possibilidades de ações, escolhas para a construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o estudante terá. As ações do estudante são vistas no funcionamento, quase isolado, do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o estudante responsável por sua aprendizagem;
- prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlá-los, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultem do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Este mesmo autor ressalta que a análise a priori de situações-problema é composta por duas fases, uma análise matemática e uma análise didática, nas quais se procuram as seguintes características: (a) Análise matemática: busca identificar os métodos e/ou estratégias de resolução de cada situação-problema de forma a evidenciar os saberes matemáticos envolvidos e (b) Análise didática: deve ser feita considerando os seguintes aspectos: análise da pertinência das situações propostas, em relação ao saber matemático em questão e em relação aos saberes anteriormente adquiridos; identificar as variáveis de comando da situação e escolher aquelas necessárias para o estudo; estudar a consistência das situações, isto é, verificar se as variáveis escolhidas não possibilitam que os estudantes construam conhecimentos incompatíveis; previsão e análise das dificuldades que os estudantes podem enfrentar na resolução de cada atividade; identificar os novos conhecimentos e/ou métodos de resolução que os estudantes podem adquirir; prever os saberes/conhecimentos e ou métodos de resolução de problemas que serão institucionalizados.

3.3.3 Experimentação

É considerada uma fase clássica da engenharia didática segundo Almouloud (2007). A experimentação de acordo com Pais (2002, p. 102) "é também uma etapa de suma importância para garantir a proximidade dos resultados práticos com a análise teórica."

É nessa fase que aplicamos a sequência didática construída, corrigindo-a se necessário. Isso implica em um retorno à análise a priori e em um processo de complementação de acordo com Almouloud (2008).

3.3.4 Análise a Posteriori e Validação

Após a fase de experimentação tem-se a análise a posteriori de uma sessão, a qual é constituída por um conjunto de resultados coletados com o intuito de contribuir para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições do saber em questão segundo Almouloud (2007). O mesmo autor ainda acrescenta que a análise a posteriori "[...] não é crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa." Essa fase da pesquisa, segundo Almouloud (2007, p. 177), ainda supõe que:

- a etapa da observação foi preparada por uma análise a priori conhecida do observador;
- os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas, e estruturados também pela análise a priori.

Segundo Almouloud (2007, p. 177) a análise a posteriori "depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático, etc.) utilizadas com as quais se coletam os dados, que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa". As sessões devem ser analisadas de forma rigorosa pelo pesquisador afim de que os resultados obtidos sejam confrontados com a análise a priori.

Almouloud (2008, p. 68) diz que a validação consiste em "relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados." E complementando, temos segundo Pais (2002, p. 103), o processo de validação "é uma etapa onde a vigilância deve ser ampliada, pois se trata de garantir a essência do caráter científico."

Assim, no campo didático, temos que a metodologia da engenharia didática contempla aspectos teóricos e experimentais de tal maneira que eles se complementam.

> Nesse sentido, pelo fato de interligar o aspecto científico com a prática pedagógica, a técnica da engenharia didática está inserida na defesa desse pressuposto. A partir dessa posição, toda racionalização deve ser submetida a uma verificação experimental, e analogamente toda a experiência deve ser submetida a uma análise racional. (PAIS, 2002, p. 104)

Portanto, assumindo engenharia didática como uma metodologia de investigação, que possui seus registros fundamentados em estudos de casos temos que, a validação da pesquisa é dada internamente a essa metodologia, isto é, a validação da pesquisa está apoiada na comparação da análise a priori e da análise a posteriori levando em consideração o contexto em que foi aplicada a sequência didática.

Na sessão seguinte, tratamos das análises preliminares com o foco sobre o nosso objeto de estudo, qual seja indução finita.

CAPÍTULO 4
ANÁLISE PRELIMINAR

4.1 O FENÔMENO

O fenômeno que estamos interessados em analisar nesta pesquisa consiste em identificar qual(is) entendimento(s) alguns estudantes de um curso de licenciatura em Matemática possui(em) acerca do objeto matemático indução finita.

Dessa forma, entendemos que os estudantes ao demonstrarem proposições que envolvem o princípio de indução finita, tomam como referência alguns exemplos e/ou exercícios que estão resolvidos em algum livro didático ou que foram solucionados por algum professor. Assim, quando eles percebem que para provar determinada proposição deve ser empregada a demonstração por indução finita logo realizam a demonstração seguindo os exemplos já conhecidos. Para nós, tal fato caracteriza a aplicação da demonstração por indução finita como um processo mecânico, no qual o objetivo do estudante é realizar a prova tomando como referência os exemplos ou exercícios já resolvidos. Ao agirem com esse intuito é possível notar que não há uma reflexão sobre o que significa a proposição que estão provando, mas sim o interesse em resolver o problema.

Assim, com o objetivo de levantar problemas referentes ao tema do nosso trabalho e propormos uma possibilidade de abordar a indução finita, destacamos nas sessões seguintes as análises preliminares e a construção da sequência didática.

4.2 ANÁLISES PRELIMINARES

Nesta etapa da pesquisa levantamos hipóteses sobre os problemas relativos ao ensino do objeto matemático indução finita, ou seja, submeteremos as primeiras constatações a uma análise inicial da realidade sobre a qual a experiência matemática será realizada.

Na busca de hipóteses, escolhemos como variável macro-didática (ou global), a noção que os estudantes possuem sobre o objeto matemático indução finita, isto é, a abordagem que é dada pelos estudantes sobre tal conceito. Esta escolha nos permite analisar as considerações dos estudantes sobre a indução finita, isto é, como eles entendem, interpretam e aplicam a indução finita como um método, ou seja, usam a indução finita como um processo mecânico. Para isso tomamos como referência os trabalhos desenvolvidos por Palis (2001), Cury et al (2002), Savioli (2007) e Souza e Miranda (2007).

Alguns dos métodos de demonstração que encontramos na Matemática são, como já colocamos anteriormente, segundo Carnielli e Epstein (2006), prova direta, prova por contrapositiva, prova por contradição e prova por indução matemática. Dessa forma, em qualquer atividade matemática que envolva o emprego de provas e demonstrações os estudantes devem indicar o raciocínio empregado explicando e explicitando os procedimentos adotados, a fim de justificar sua resolução. Assim, afirmam Davis e Hersh (1985, p. 32), a demonstração é "a metodologia pela qual a hipótese conduz à conclusão."

Palis (2001) observa, em seu trabalho, que tanto na graduação quanto na pós-graduação os estudantes apresentam dificuldades em redigir uma demonstração usando a indução finita. Considerando a indução finita uma demonstração formal, é relevante que busquemos mais do que a mera aplicação de "um método" para demonstrar proposições ou teoremas. A indução finita, segundo Lima (2006, p. 33), "é uma forma sagaz e operacional de dizer que qualquer número natural n pode ser alcançado se partirmos de 1 e repetirmos suficientemente a operação de tomar o sucessor de um número." Nesta mesma perspectiva Singh (2005, p. 219) diz: "A prova por indução é uma forma poderosa de demonstração porquê permite ao matemático provar que uma declaração é válida para certo número infinito de casos, demonstrando apenas um único caso."

Com relação ao ensino habitual da indução finita Palis (2001) apresenta um levantamento das dificuldades encontradas pelos estudantes. A primeira dessas dificuldades é com relação à analogia que eles fazem a partir do termo indução, dessa forma a autora aponta a necessidade de distinguir a palavra indução que está presente tanto na denominação método de indução empírica quanto no método de demonstração por indução finita. Segundo a autora e como já comentamos anteriormente é comum os estudantes utilizarem a verificação de alguns casos para demonstrarem certa proposição P,

> A argumentação empregada por um aluno para se convencer ou convencer os outros da veracidade de uma operação quantificada como $(\forall\ n)\ P(n)$ pode se restringir a mostrar que algumas instanciações da proposição P são verdadeiras, isto é, que $P(n)$ é verdadeira para alguns valores específicos de n. (PALIS, 2001, s/p)

Outro problema levantado por Palis (2001, s/p) é com relação à necessidade de verificar os dois passos na indução finita. A autora relata que: "Uma interpretação incorreta freqüente do Princípio de Indução Matemática consiste em considerar que uma das suas componentes não é de fato essencial, em particular a que estabelece a base de indução." Isso quer dizer que os estudantes não conseguem perceber a importância em verificar a validade de uma proposição para o menor valor possível. Souza e Miranda (2007) apresentam em seu trabalho uma questão na qual os estudantes deveriam verificar o erro cometido em uma demonstração por indução finita. O enunciado do problema é: "analise a demonstração por Indução abaixo. Qual o erro cometido? Registre as suas analises e conclusões. Prove $P(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(2n+1)^2}{8}$". Nesta atividade os autores apresentam uma solução para este problema na qual os estudantes devem analisar. A atividade foi realizada por 18 estudantes dos quais 6, isto é, pouco mais de 30% encontraram o erro.

Já o terceiro problema relativo ao ensino da indução finita apresentado por Palis (2001, s/p) é quanto a diversidade de ideias que permeiam o conceito de indução finita. A autora afirma que "A presença de múltiplas implicações e quantificações reveste esse princípio de uma complexidade lógica com a qual os estudantes não estão acostumados a lidar quando se deparam pela primeira vez com seu estudo." Algumas das implicações que permeiam o conceito de indução são segundo Palis (2001): o conceito de prova, o conceito de quantificador existencial e universal, o conceito de relação de recorrência dentre outros.

Sendo a indução finita mais do que uma simples "técnica" ou "método" de prova é importante que os estudantes notem e reflitam sobre a importância deste assunto. Dessa forma Savioli (2007) propõe que os estudantes vivenciem uma experiência matemática, isto é, realização de atividades nas quais os mesmos, a partir de certos problemas, façam conjecturas e desenvolvam a demonstração. Assim, uma possibilidade de abordar a indução finita de maneira alternativa seria

> [...] apresentar a indução finita via axiomas de Peano, pois se acredita que esta forma facilita a compreensão da mesma e deixa clara para o estudante a estrutura do método, isto é, mostra a importância das condições a e b para a conclusão de que P(n) é verdadeira para qualquer n natural. (SAVIOLI, 2007, p. 45)

Dessa maneira entendemos que a primeira característica que deve ficar evidente durante a exposição do tema indução finita é que este decorre de um dos axiomas de Peano, ou do Princípio da Boa Ordem. Um tratamento dado ao princípio de indução finita, por alguns autores de livros didáticos como, por exemplo, Domingues e Iezzi (1982) é que este assunto é abordado como um processo mecânico, ou seja, um algoritmo, levando o estudante a acreditar ser suficiente provar apenas as duas propriedades do teorema sem relacioná-las com o mesmoou com a indução finita. É essa a ideia que entenderemos como processo mecânico, ou seja, o estudante provar apenas as duas propriedades que compõe o princípio de indução finita.

Assim, tomando os apontamentos anteriores, temos que é necessário que ocorra uma reflexão sobre o objeto matemático indução finita, ou seja, uma reflexão que contemple outras perspectivas sobre o tema, como os números figurados na História da Matemática. Desse modo, as fórmulas propostas nos exercícios dos livros didáticos poderiam fazer mais sentido aos estudantes. Assim, concordamos com Savioli (2007, p. 45) que "Considerando a indução finita como um método, precisa-se estudá-lo e analisá-lo para que sua aplicação não fique restrita às fórmulas que os alunos não têm idéia de onde vieram."

As metodologias de investigação matemática e resolução de problemas também oferecem uma nova perspectiva para a discussão e desenvolvimento do objeto matemático indução finita. Polya (1975) diz que a utilização de tais metodologias requer que o professor proponha aos estudantes problemas que se oponham aos exercícios repetitivos, isto é, é preciso que o professor desafie a curiosidade dos estudantes, proponha problemas compatíveis com seu desenvolvimento intelectual e que crie condições para que eles cheguem à conclusão. Essa perspectiva dada por Polya (1975) vai de encontro à típica aula de matemática, onde o professor passa para a lousa aquilo que ele julga importante e o estudante copia, seguindo uma repetição de exercícios.

Com relação à abordagem da indução finita apresentada pelos livros didáticos[18] seria interessante que seus autores enfatizassem não só a parte teórica deste tema, mas adotassem, como sugestão, as perspectivas sugeridas por Polya (1975). Tais autores poderiam destacar pelo menos o conteúdo histórico a fim de contextualizar os problemas presentes no livro e não apenas deixar um enunciado do tipo, "demonstre por indução", seguido de vários itens com fórmulas a serem demonstradas sem ao menos apontar outras discussões. Contudo, acreditamos, que a apresentação de alguns aspectos históricos não é suficiente para que a abordagem e a aplicação da indução finita deixe de ser empregada como um processo mecânico.

Complementando a análise relativa aos problemas do ensino da indução finita, realizamos a partir da bibliografia indicada pelos professores das disciplinas 6MAT007 e 6MAT015 dos anos de 2006, 2007 e 2008 e procuramos aqueles que evidenciavam o tratamento do assunto indução finita, encontrando

[18] Domingues e Iezzi (1982) e Geronimo e Franco (2002)

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 1982.

GERONIMO, J. G.; FRANCO, V. S. **Fundamentos de matemática.** Maringá: Eduem, 2002.

No livro de Domingues e Iezzi (1982) a indução finita é abordada no capítulo 0 onde os autores iniciam uma exposição sobre o conjunto dos números inteiros. A sessão referente à indução finita inicia-se após apresentarem o princípio do menor inteiro. Outra característica que notamos ao analisar este livro é que os autores se reportam a indução finita utilizando apenas o termo indução. Além disso, Domingues e Iezzi (1982) formulam a indução finita do seguinte modo:

Figura 7 – Enunciado do 1° princípio de indução (DOMINGUES; IEZZI, 1982, p. 3)

"Dado $a \in \mathbb{Z}$, suponhamos que a cada inteiro $n \geqslant a$ esteja associada uma afirmação $P(n)$. Então, $P(n)$ será verdadeira para todo $n \geqslant a$ desde que seja possível provar o seguinte:

(i) $P(a)$ é verdadeira;

(ii) Se $P(r)$ é verdadeira para $r \geqslant a$, então $P(r+1)$ também é verdadeira."

O enunciado anterior se refere ao que os autores denominam de primeiro princípio de indução. O enunciado abaixo os autores chamam de segundo princípio de indução, e é apresentado aos leitores do seguinte modo:

Figura 8 – Enunciado do 2° princípio de indução (DOMINGUES; IEZZI, 1982, p. 3)

Segundo princípio de indução

"Dado $a \in \mathbb{Z}$, suponhamos que a cada inteiro $n \geqslant a$ esteja associada uma afirmação $P(n)$. Então $P(n)$ será verdadeira para todo $n \geqslant a$, desde que seja possível provar o seguinte:

(i) $P(a)$ é verdadeira;

(ii) Dado $r > a$, se $P(k)$ é verdadeira para todo k tal que $a \leqslant k < r$, então $P(r)$ é verdadeira."

Os autores demonstram, neste livro, apenas o segundo princípio de indução. A demonstração tem como ponto de partida o princípio do menor número inteiro. Além das características já apresentadas, neste livro há apenas um único exemplo da utilização desse princípio. O exemplo apresentado pelos autores é: "Provar que $1+n \leq 2^n, \forall n \geq 0$." Todo o conteúdo da indução finita é apresentado em apenas uma página e os autores retornam ao assunto apenas nos exercícios do final do capítulo. O primeiro exercício já trata da indução finita, e é enunciado da seguinte maneira: "Prove por indução:" É composto por oito itens que envolvem proposições referentes a somas infinitas, desigualdades, múltiplos e divisores e algumas propriedades dos números inteiros.

É possível notar durante a formulação da indução finita deste livro que os autores, como já dissemos anteriormente de maneira geral, não levam em consideração aspectos referentes à resolução de problemas nem sobre investigação matemática. Evidenciam nos exercícios propostos que os estudantes deverão solucioná-los por meio da indução finita. Não há, portanto, aspectos referentes à história da matemática, nem sobre os axiomas de Peano.

As formulações da indução finita apresentadas pelos autores anteriormente, ou formulações semelhantes a elas são, segundo Palis (2001), inadequadas do ponto de vista pedagógico a estudantes iniciantes, isso porque para tais estudantes é interessante iniciar indução finita a partir de $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$ e após essa apresentação dizer que n_0 pode assumir qualquer valor em N. Para a autora o problema de apresentar a indução finita dessa forma consiste na escrita (redação) apresentada. Além disso, Palis (2001) observa que há livros didáticos com formulações mais discursivas podendo ser mais adequadas ao início da aprendizagem da indução finita, como exemplo a autora cita Lima (1992).

Já no livro de Geronimo e Franco (2002) a abordagem do princípio de indução finita é feita no capítulo dois, que tem como título lógica. Pertencem a este capítulo os seguintes tópicos: proposições, tabelas-verdade, inferência e equivalência lógica, quantificadores e método dedutivo. O princípio de indução finita se localiza na sessão método dedutivo. Os autores introduzem a sessão sobre indução finita a partir de uma breve discussão sobre os métodos dedutivos e indutivos. Diferentemente da abordagem do livro anterior, Gerônimo e Franco (2002) introduzem o assunto a partir de um exemplo, onde os leitores devem avaliar uma proposição referente à determinação de números primos. A proposição é: $P(n) = n^2 + n + 41$. Os autores produzem uma tabela com valores de n a partir de 0 até alcançar 40, e fazem uma observação dizendo que somos fortemente induzidos a dizer que $P(n)$ é um número primo para todo natural n. Porém, os autores mostram que $P(41)$ é um contraexemplo da proposição anterior, e isto quer dizer que trata-se de uma proposição falsa.

Gerônimo e Franco (2002) concluem o exemplo dizendo que: "este exemplo mostra que o raciocínio indutivo em matemática nem sempre nos conduz a um argumento válido."

Após a conclusão do exemplo anterior os autores continuam a sessão analisando um novo exemplo, agora referente a seguinte proposição: $P(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{n}$. seguir são apresentados ao leitor alguns exemplos de que a fórmula anterior é verdadeira, porém os autores fazem um alerta quanto ao uso do raciocínio indutivo neste exemplo e dizem que nunca podemos afirmar que tal proposição é verdadeira a partir de alguns testes. Após esse alerta, Geronimo e Franco (2002) demonstram que a veracidade da proposição usando o raciocínio dedutivo e o artifício utilizado para demonstrar esta proposição consiste em somar k +1 a ambos os lados da igualdade, já que para n = 1 a proposição é verdadeira. Os autores associam a demonstração ao efeito dominó. Assim, ao término desse exemplo encontramos a seguinte afirmação: "A matemática não é um jogo de pedras e devemos garantir que estas duas propriedades são suficientes para garantir que P(n) é verdadeira em todo o conjunto dos números naturais, pois lembre-se que em matemática o que vale, precisa passar por um raciocínio dedutivo." Geronimo e Franco (2002, p. 48).

Depois de discutir esses dois exemplos é que Geronimo e Franco (2002) enunciam o princípio de indução finita em forma de teorema. A primeira formulação é dada por:

Figura 9 – Enunciado do 1° princípio de indução finita (GERONIMO; FRANCO, 2002, p. 48)

Teorema 2.21 (1° Princípio de Indução Finita) : Seja P(n) uma proposição aberta envolvendo um número natural n e suponha que:

a) $P(n_0)$ é verdadeira para algum $n_0 \in \mathbb{N}$;

b) $(\forall\ k \in \mathbb{N}, k \geq n_0)[P(k) \Rightarrow P(k+1)]$.

Então P(n) é verdadeiro para todo número natural n maior ou igual a n_0.

□

Após esta formulação os autores explicam que para utilizar tal teorema é preciso verificar as condições a) e b). A condição a) verifica a validade da proposição para o menor dos casos possíveis enquanto que a condição b) é um teorema auxiliar que tem como hipótese P(*k*) verdadeira e tese P(*k*+1). Além disso, Geronimo e Franco (2002, p. 48) apresentam a seguinte observação: "O nome princípio da **indução** finita não é apropriado, pois como se pode observar, este método é sem dúvida nenhuma baseado no método dedutivo. Contudo, a similaridade do método com o raciocínio indutivo serviu como inspiração para este nome."

Os autores fornecem mais um exemplo e fazem a segunda formulação do princípio de indução finita,

Figura 10 – Enunciado do 2° princípio de indução finita (GERONIMO; FRANCO, 2002, p. 49)

Teorema 2.22 (2° Princípio de Indução Finita) : Seja P(n) uma proposição aberta envolvendo um número natural n e suponha que:

a) $P(n_0)$ é verdadeira para algum $n_0 \in IN$;

b) $(\forall\ k \in IN, k \geq n_0)((P(r) \wedge (n_0 \leq r < k)) \Rightarrow P(k))$.

Então P(n) é verdadeiro para todo número natural n maior ou igual a n_0. $\square$

Segundo Palis (2001) os dois princípios de indução finita são enunciados de forma a contribuir com a aprendizagem do estudante iniciante no assunto.

Após esta formulação, os autores apresentam outro exemplo complementar e a seguir inicia-se a lista de exercícios do capítulo. Com relação aos exercícios sobre o princípio de indução finita, os autores deixam a cargo dos leitores doze exercícios, que envolvem somas infinitas, desigualdades e função recursiva, além da fórmula do binômio.

Apesar de não conter citações históricas a respeito da indução finita e nem sobre os axiomas de Peano os autores apresentam diversos comentários como, por exemplo, a diferença entre o raciocínio dedutivo e o raciocínio indutivo e alertam os leitores que apesar de se chamar princípio de indução finita a base da demonstração é um método dedutivo. No livro de Gerônimo e Franco (2002) apesar de haver vários comentários não há a demonstração dos teoremas de indução finita.

Com relação à abordagem da indução finita no Ensino Médio há:

> [...] uma tendência de ampliação de sua presença no ensino pré-universitário, muitos professores de ensino médio têm ainda muito pouco contato com ela, em particular não tiveram a oportunidade de explorar as potencialidades da indução matemática durante a sua graduação e vêem o Princípio da Indução Matemática somente como um método para provar certas fórmulas de somas de n termos de uma seqüência (PALIS, 2001, s/p)

Complementando a perspectiva anterior, encontramos na introdução de algumas notas de aula sobre este tema, para estudantes que participam da Olimpíada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas (OBMEP), a seguinte colocação de Hefez (2008, p. 5), quando perguntado sobre quais temas deveriam compor o currículo de Matemática do Ensino Médio: "É com o conceito de Indução que se estabelece o primeiro contato com a noção de infinito em Matemática, e por isso ele é muito importante; porém, é, ao mesmo tempo, sutil e delicado." Além da posição de Hefez (2008), notamos que a indução finita pode ser abordada no Ensino Médio para demonstrar proposições como, por exemplo, as fórmulas relacionadas às Progressões Aritmética e Geométrica, às propriedades do Triângulo de Pascal, além de algumas fórmulas da Geometria Euclidiana plana. Apesar de não constar oficialmente como um dos tópicos abordados no Ensino Médio, segundo os parâmetros curriculares nacionais, o princípio de indução finita é contemplado em vestibulares como, por exemplo, da Universidade Estadual de Maringá - UEM e da Universidade Estadual Paulista "Julio Mesquita Filho" - UNESP, conforme consta nos manuais do candidato dos vestibulares de inverno 2009. Apesar de não ser contemplado nos parâmetros curriculares nacionais brasileiro a indução finita é abordada no ensino médio norte americano, como aponta Palis (2001). Esse fato segundo a autora se deve à utilização de métodos recursivos e interativos com maior frequência.

Embora o conteúdo referente à indução finita não pertencer oficialmente ao programa do Ensino Médio brasileiro é possível notar que há materiais, como por exemplo, apostilas do Anglo, do Objetivo e do Etapa que abordam esse conteúdo. Analisando esses materiais foi possível concluir que a indução finita é apresentada de forma sucinta sem qualquer menção aos axiomas de Peano ou ao Princípio da Boa Ordenação. Além disso, tais apostilas tratam a indução finita como um processo mecânico a ser desenvolvido, isto é, mostram a prova por indução finita. Tal afirmação se baseia no material disponível a estudantes que cursam a 3a série do Ensino Médio ou curso pré-vestibular que utilizam o sistema Etapa de ensino.

Figura 11 – Enunciado da demonstração por indução finita do sistema Etapa (ETAPA, 2009, p. 144)

Princípio da indução finita

Seja $P(n)$ uma sentença aberta na variável $n \in Z$.
Se:
a) $P(m)$ é verdadeira;
b) para todo inteiro k, se $k \geq m$ e $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira,
então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq m$.

Exemplo:
Demonstrar que para todo natural $n \geq 1, 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

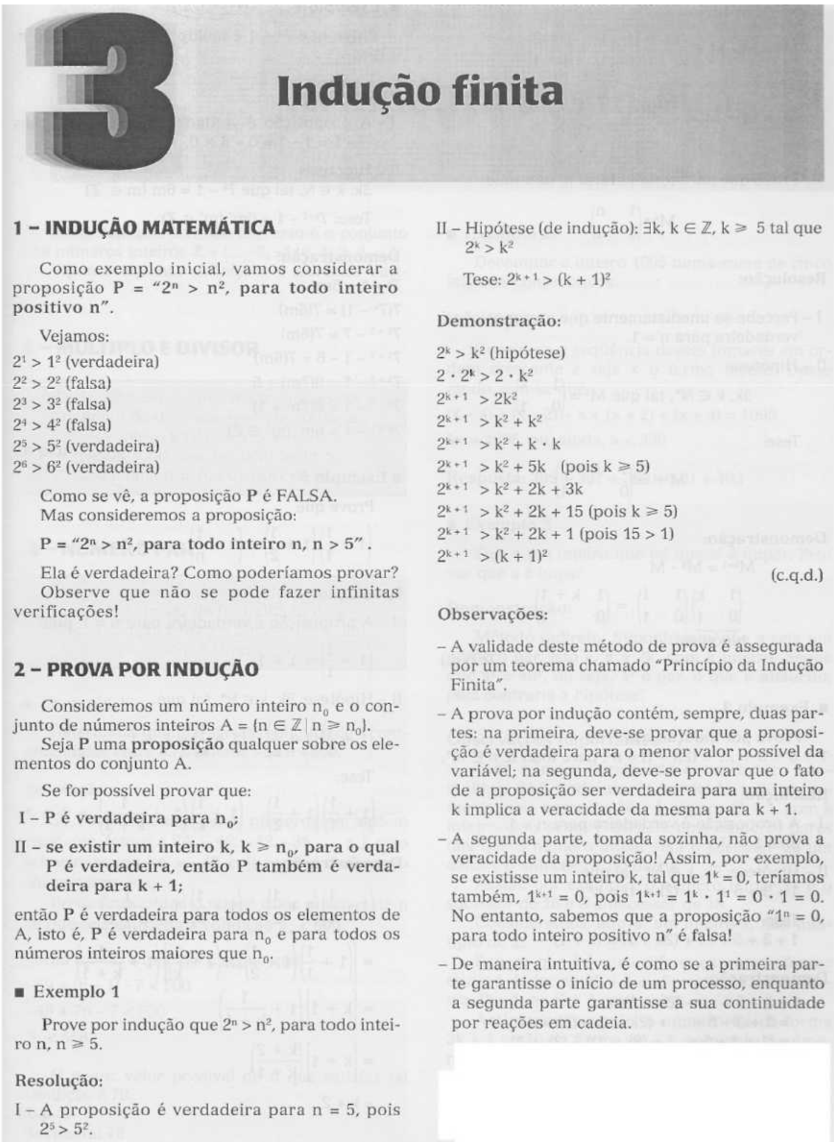
Solução:
A propriedade $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, a qual nos referiremos como $P(n)$, é verdadeira para $n = 1$, pois $1 = 1^2$ é verdadeira.
Suponhamos que a propriedade é válida para k (hipótese de indução) e mostremos que é válida para $k + 1$, isto é:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2 \Rightarrow 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Para isso, somemos $2k + 1$ a ambos os membros de $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$. Temos $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)$. Como para todo k, $k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$, temos $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2$. Pelo princípio da indução finita, a propriedade $P(n)$ é válida para todo natural $n \geq 1$.

Já no sistema Anglo de ensino, que também trata do assunto no material disponível aos estudantes que cursam a 3ª série do Ensino Médio e pré-vestibular, a prova por indução finita é apresentada de modo diferente. Neste material, como veremos a seguir, antes dos autores apresentarem a demonstração por indução finita eles iniciam o capítulo discutindo como seria possível desenvolver a prova para a seguinte proposição, P = $2^n > n^2$, para todo inteiro positivo n. É possível que os autores utilizem tal exemplo com o intuito de diferenciar a indução finita da indução empírica. Apesar dos autores não mencionarem os axiomas de Peano nesse material há algumas observações com relação a demonstração por indução finita.

Figura 12 – Enunciado da demonstração por indução finita do sistema Anglo (ANGLO, 2002, p. 41)



3 Indução finita

1 – INDUÇÃO MATEMÁTICA

Como exemplo inicial, vamos considerar a proposição **P = "$2^n > n^2$, para todo inteiro positivo n".**

Vejamos:

$2^1 > 1^2$ (verdadeira)
$2^2 > 2^2$ (falsa)
$2^3 > 3^2$ (falsa)
$2^4 > 4^2$ (falsa)
$2^5 > 5^2$ (verdadeira)
$2^6 > 6^2$ (verdadeira)

Como se vê, a proposição **P** é FALSA.
Mas consideremos a proposição:

P = "$2^n > n^2$, para todo inteiro n, n > 5".

Ela é verdadeira? Como poderíamos provar? Observe que não se pode fazer infinitas verificações!

2 – PROVA POR INDUÇÃO

Consideremos um número inteiro n_0 e o conjunto de números inteiros $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0\}$.

Seja P uma **proposição** qualquer sobre os elementos do conjunto A.

Se for possível provar que:

I – P é verdadeira para n_0;

II – se existir um inteiro k, $k \geqslant n_0$, para o qual P é verdadeira, então P também é verdadeira para k + 1;

então P é verdadeira para todos os elementos de A, isto é, P é verdadeira para n_0 e para todos os números inteiros maiores que n_0.

■ **Exemplo 1**

Prove por indução que $2^n > n^2$, para todo inteiro n, $n \geqslant 5$.

Resolução:

I – A proposição é verdadeira para n = 5, pois $2^5 > 5^2$.

II – Hipótese (de indução): $\exists k, k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 5$ tal que $2^k > k^2$

Tese: $2^{k+1} > (k+1)^2$

Demonstração:

$2^k > k^2$ (hipótese)
$2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$
$2^{k+1} > 2k^2$
$2^{k+1} > k^2 + k^2$
$2^{k+1} > k^2 + k \cdot k$
$2^{k+1} > k^2 + 5k$ (pois $k \geqslant 5$)
$2^{k+1} > k^2 + 2k + 3k$
$2^{k+1} > k^2 + 2k + 15$ (pois $k \geqslant 5$)
$2^{k+1} > k^2 + 2k + 1$ (pois 15 > 1)
$2^{k+1} > (k+1)^2$

(c.q.d.)

Observações:

– A validade deste método de prova é assegurada por um teorema chamado "Princípio da Indução Finita".

– A prova por indução contém, sempre, duas partes: na primeira, deve-se provar que a proposição é verdadeira para o menor valor possível da variável; na segunda, deve-se provar que o fato de a proposição ser verdadeira para um inteiro k implica a veracidade da mesma para k + 1.

– A segunda parte, tomada sozinha, não prova a veracidade da proposição! Assim, por exemplo, se existisse um inteiro k, tal que $1^k = 0$, teríamos também, $1^{k+1} = 0$, pois $1^{k+1} = 1^k \cdot 1^1 = 0 \cdot 1 = 0$. No entanto, sabemos que a proposição "$1^n = 0$, para todo inteiro positivo n" é falsa!

– De maneira intuitiva, é como se a primeira parte garantisse o início de um processo, enquanto a segunda parte garantisse a sua continuidade por reações em cadeia.

Embora não conste oficialmente no programa do Ensino Médio brasileiro é possível notar que existem materiais desse nível de ensino que abordam esse assunto, já que algumas

Universidades contemplam esse conteúdo em seus vestibulares. Como já dissemos, as abordagens desses materiais visam à busca de um modelo onde o estudante, se cobrado no vestibular, consiga apresentar uma solução para a questão. Além disso, tal abordagem é superficial.

De acordo com nossa experiência docente no Ensino Médio e trabalhando com essas apostilas, foi possível notar que os estudantes deste nível de ensino estão mesmo preocupados em procurar modelos e seguir uma "receita", ou seja, estão interessados em um processo mecânico. Assim, uma discussão sobre a indução finita se torna desinteressante para os mesmos. Entendemos que é possível tratar da indução finita no Ensino Médio, porém não como sugerem as apresentações acima. Acreditamos que problemas computacionais com características recursivas possam motivar os estudantes desse nível de ensino.

4.3 Construção da Sequência

Ao término das análises dos livros didáticos já citados nesta pesquisa e complementando esse exame com verificações em outros livros didáticos como Hefez (1993), Gonçalves (1999), que também foram indicados nas referências bibliográficas dos planos de ensino das disciplinas 6MAT007 e 6MAT015 dos anos de 2006, 2007 e 2008, em anexo, notamos que há alguns exercícios comuns em todos esses livros. Porém, em outra etapa da análise, agora a partir de investigações em artigos da Revista do Professor de Matemática (RPM[19]), percebemos ainda que há exercícios pouco explorados com os estudantes como por exemplo o problema da torre de Hanói, isso comparando os problemas propostos nos livros didáticos e os exercícios sugeridos pela RPM.

Com intuito de atender alguns tópicos a serem desenvolvidos na disciplina 6MAT019 - Tópicos em Educação Matemática II, como a metodologia de resolução de problemas e a investigação matemática, optamos, para a construção da sequência didática, por selecionar tanto exercícios comuns aos livros didáticos quanto exercícios pouco explorados em tais livros. O objetivo dessa escolha foi verificar a abordagem dos estudantes com relação ao objeto de estudo indução finita. Assim, em nossa sequência didática constam exercícios que apareceram frequentemente nos livros didáticos analisados e em outros que serviram de referência para este trabalho, porém excluindo qualquer palavra que remetesse a indução finita, e exercícios que abordam um problema no qual os estudantes devem traçar uma estratégia para resolvê-los. Acreditamos que nossa proposta foi uma maneira de desafiar os estudantes a discutir e apresentar uma solução para os exercícios, além de proporcionar uma experiência matemática aos mesmos.

Pautamos as atividades da nossa sequência didática a fim de atender os conceitos propostos da teoria das situações didáticas, pois esperamos que os estudantes ao final das atividades compreendam a indução finita como uma demonstração e não como um

[19] Revista do Professor de Matemática, publicação da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM.

processo mecânico a ser desenvolvido. Deste modo, desejamos fundamentar e promover o ensino/aprendizagem da indução finita como método de demonstração, além de enfatizar a necessidade de verificar as duas propriedades que constituem a prova por indução finita.

As atividades propostas na sequência didática foram desenvolvidas para serem discutidas pelos estudantes em 4 sessões. Assim foi possível dispor de 8 horas aula para aplicar a sequência didática. A pedido da professora responsável pela disciplina 6MAT019, que é também orientadora deste trabalho, as sessões não foram aplicadas em semanas seguidas, por conta do plano de trabalho dos estudantes. Dessa forma, realizamos os encontros nos meses de março e abril de 2009.

As questões que compõem a sequência didática deste trabalho foram baseadas no artigo de Watanabe (1986), no livro de Lopes (1999), no livro de Hefez (1993) e nos livros analisados nesta pesquisa. Assim, temos a seguinte distribuição: as questões 1, 2, 3, 4 e 5 da primeira sessão foram adaptadas de Watanabe (1986) enquanto que a questão 6 de Lopes (1999). Na segunda sessão, a questão 1 foi adaptada de Watanabe (1986), a questão 2 adaptada de Hefez (1993) enquanto que a questão 3 foi retirada integralmente de Hefez (1993). A questão da terceira sessão foi adaptada de Watanabe (1986). Por fim, na quarta sessão, temos a questões 1 e 2 adaptadas de Hefez (1993) enquanto que a questão 3 foi integralmente retirada de Hefez (1993).

O capítulo seguinte trata do desenvolvimento do estudo e relata as etapas de experimentação, análise a priori e a análise a posteriori e validação desta pesquisa. Nesse capítulo também apresentamos as atividades que compõe a sequência didática.

CAPÍTULO 5
DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO

5.1 EXPERIMENTO

O experimento foi realizado no primeiro semestre de 2009 em uma turma composta por 23 estudantes do curso de Matemática - Habilitação: Licenciatura do período noturno, da Universidade Estadual de Londrina - UEL. As atividades da sequência didática, como já dissemos, foram desenvolvidas nas aulas da disciplina 6MAT019, Tópicos em Educação Matemática II. Esta disciplina faz parte da estrutura curricular do curso de Matemática -Habilitação: Licenciatura, da Universidade Estadual de Londrina e é oferecida regularmente para os estudantes da 3a série.

Tópicos em Educação Matemática II é uma disciplina anual com carga horária de 68 horas, onde 17 horas são destinadas à parte teórica e 51 horas reservadas para a parte prática. A ementa desta disciplina, segundo a resolução CEPE n. 42/2005, da Universidade Estadual de Londrina é: Tendências em Educação Matemática; Elaboração de projetos de investigação/estudo em Educação Matemática.

Por se tratar de uma disciplina específica do âmbito da Educação Matemática, onde são tratadas as tendências dessa área de pesquisa, foram aproveitadas as tendências sobre "resolução de problemas" e "investigação matemática" para o desenvolvimento das atividades desta pesquisa. Dessa forma, optamos pela realização de encontros semanais não necessariamente consecutivos onde seriam aplicadas as atividades da sequência didática e também abordadas questões em relação às tendências anteriores.

Em 2009, ano em que foi aplicada a sequência didática, a disciplina foi oferecida às 6a feiras nos dois primeiros horários de aula do período noturno, isto é, das 19h15 às 20h55. A aplicação das atividades que compõem a sequência didática foi realizada em 4 sessões, que ocorreram durante os meses de março (2 sessões) e abril (2 sessões).

Escolhemos essa turma para aplicarmos as atividades da sequência didática por duas razões: a primeira é que os estudantes já haviam trabalhado em algum momento no decorrer do curso com o nosso objeto de estudo, ou seja, a indução finita, em outras disciplinas do curso e dessa forma poderíamos verificar qual a abordagem que esses estudantes possuem acerca da indução finita. A segunda razão é que a professora orientadora desta pesquisa e responsável pela disciplina 6MAT019 se dispôs a ceder algumas aulas para que as atividades pudessem ser realizadas.

Antes do início da primeira sessão, a professora responsável pela disciplina e também orientadora deste trabalho apresentou o estudante pesquisador aos estudantes informando que os dados coletados durante a realização das atividades fariam parte de um trabalho de pesquisa. Após a apresentação da professora, o estudante pesquisador explicou aos estudantes como ocorreriam as atividades da sequência didática e sobre o termo de consentimento. A primeira instrução do estudante pesquisador era de que os estudantes se dividissem em duplas ou trios. Não ocorreu nenhum tipo de interferência por parte da professora da disciplina nem do estudante pesquisador na composição dos grupos.

Sendo assim, a primeira sessão de atividades foi realizada do seguinte modo: os estudantes receberam duas folhas onde em cada uma havia três proposições para serem examinadas com relação a veracidade das mesmas. As folhas com as atividades foram distribuídas separadamente, isto é, todos os estudantes do grupo receberam a primeira folha com os mesmos problemas e após concluírem a resolução desta primeira atividade eles recebiam a segunda folha. A condição que foi adotada para distribuir a segunda folha de problemas era de que todos os estudantes do grupo tivessem concluído todos os exercícios que compunham a primeira atividade. Dessa forma, procuramos respeitar a forma de cada grupo pensar e discutir a solução para os problemas propostos.

No decorrer das atividades o estudante pesquisador e a professora orientadora desta pesquisa ficaram responsáveis por anotar o maior número de informações possíveis e a única pergunta que poderiam responder aos estudantes seria em relação à notação utilizada nos enunciados dos exercícios. Assim, se um dos estudantes ou o grupo não lembrasse ou não conhecesse o significado de determinados símbolos, os observadores poderiam esclarecer tal notação.

Durante o transcorrer da atividade foi possível notar que todos os grupos e, consequentemente, todos os estudantes participaram da resolução das questões. Dessa forma, constatamos que aconteceram diversas discussões entre os estudantes do grupo até que eles pudessem apresentar alguma solução para a questão. Consideramos essa atitude um fator positivo para o desenvolvimento da atividade, já que a proposta esta pautada nas tendências de resolução de problemas e investigação matemática.

Apresentamos a seguir uma análise dos problemas propostos como foram dados aos estudantes. A sequência utilizada é a mesma que foi adotada durante as sessões. Acreditamos que a notação empregada nas questões não causaria problemas aos estudantes, pois os mesmos se cursavam a 3a série do curso de Licenciatura em Matemática. Dessa forma, consideramos que a notação utilizada já fazia parte do cotidiano dos mesmos.

5.2 ANÁLISE A PRIORI

Nesta análise contemplamos parte do referencial teórico, investigando as possíveis provas a serem utilizadas pelos estudantes e quais funções de demonstração, como coloca Villiers (2001) e as funções da prova apresentadas por Hanna (2000). Também, esporadicamente, Chauí (2000) e outros citados no referencial teórico. O destaque nesta análise a priori para Villiers (2001) e Hanna (2000) se deve ao fato deles trabalharem com funções de demonstração e de prova matemática.

1ª SESSÃO

A primeira sessão ocorreu no dia 13/03/2009 e contou com a participação de 23 estudantes. Iniciou-se às 19h23 e terminou às 21h. Com os estudantes já divididos em grupos iniciamos a aplicação das primeiras atividades.

O início da sessão contou com uma breve explicação aos estudantes de como ocorreria o desenvolvimento da atividade, isto é, que os problemas seriam distribuídos a cada um dos componentes do grupo, que eles poderiam discutí-los, porém cada um deveria apresentar a sua resposta e solução na folha que havia recebido. Para resolver os exercícios os componentes do grupo poderiam discutir a questão entre si, no entanto sem qualquer tipo de consulta a outros materiais como livros, cadernos, apostila, etc.

O objetivo das questões dessa sessão era observar qual(is) estratégia(s) de demonstração os estudantes utilizariam para resolver os exercícios propostos. Além disso, nosso intuito foi buscar indícios de como os estudantes abordam a indução finita.

Assim, as questões propostas para a primeira sessão de atividades da sequência didática foram:

QUESTÃO 1. A sentença $\forall n \in \mathrm{N}, n < 9.876.543.210$ é verdadeira? Por quê? Justifique sua resposta.

Esta questão teve como objetivo verificar qual estratégia os estudantes utilizariam para mostrar que se trata de uma afirmação falsa. Esperávamos que nessa questão os estudantes apresentassem um contraexemplo para demonstrar que não se trata de uma afirmação verdadeira. Assim, acreditávamos que os estudantes não teriam problema para resolver a mesma.

No entanto, algumas dificuldades que os estudantes poderiam apresentar em relação a essa questão é que o número 9.876.543.210, por possuir vários dígitos, causa uma certa estranheza por não ser um número natural encontrado de forma corriqueira no dia a dia.

Com relação ao método de prova que os estudantes utilizariam para verificar a falsidade da proposição, esperávamos que fosse empregado o método de prova por contraexemplo, que consiste em mostrar um caso onde a propriedade não se verifica. Assim, uma característica que levamos em conta ao considerar esta questão na sequência didática, é que a solução, isto é, o contraexemplo procurado, é encontrado a partir da comprovação da existência de um número que torna a proposição falsa. Dessa forma, contemplamos as seguintes funções da demonstração apresentadas por Hanna (2000): a de verificar, a de explicar, a de descobrir, a de comunicar e a de incorporar. Já com relação as funções apresentadas por Villiers (2001) entendemos que esta questão é eficaz para que os estudantes desenvolvam as funções de: verificação, explicação, comunicação e de sistematização.

QUESTÃO 2. É verdade que $\forall\, n \in \mathbf{N},\ n^2 + n + 41$ é um número primo? Por quê? Explique.

Este problema faz parte da nossa sequência didática pois, nosso intuito era verificar qual estratégia que os estudantes utilizariam para mostrar que a proposição é falsa. Deste modo, esperávamos que os estudantes realizassem alguns testes com o objetivo de encontrar um contraexemplo. No entanto, o primeiro contraexemplo para essa proposição é o número 40, dessa forma acreditamos que os estudantes desenvolveriam seu raciocínio por meio da indução empírica.

Diferentemente do problema anterior acreditávamos que os estudantes apresentassem dificuldades para encontrar um contraexemplo que mostrasse que a proposição é falsa, tal dificuldade consiste em determinar o primeiro contraexemplo, já que para isso são necessários vários testes.

Um erro que pode ser cometido pelos estudantes ao tentarem resolver esse problema é que, após alguns testes, eles afirmariam que a proposição em estudo é verdadeira, podendo usar como justificativa a indução finita. Outro dado em relação a essa questão é que ela já pode ter sido discutida com os estudantes em outras disciplinas do curso, isso porque alguns livros da bibliografia indicada pelos professores apresentam essa questão. Dessa forma, entendemos que o objetivo dos autores de tais livros didáticos é mostrar aos estudantes que não basta fazer algumas substituições para afirmar que uma certa proposição é verdadeira diferenciando a indução finita da indução empírica.

A solução desse problema está amparada no método de prova por contraexemplo, pois basta apresentar um valor para *n* onde não seja possível obter um número primo como resposta. Assim, temos que com relação às funções da demonstração os estudantes vivenciariam, segundo Villiers, (2001) um desafio intelectual, ou seja, onde há o contentamento do estudante em obter êxito na demonstração da proposição. Complementando as funções propostas por esse autor temos ainda a de verificação, a de explicação, a de descoberta, a de sistematização e a de comunicação. Além disso, esta questão possui as características que Chauí (2000) relata com relação ao método de indução empírica. Com relação as funções da demonstração apresentadas por Hanna (2000) entendemos que os estudantes podem desenvolver: a de verificar, a de explicar, a de sistematizar, a de comunicar e a de incorporar.

QUESTÃO 3. Será que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito? Justifique.

Esta questão é semelhante à anterior e nosso objetivo continua sendo o mesmo, isto é, verificar qual estratégia os estudantes utilizariam para provar que esta afirmação é falsa. Porém um aspecto que diferencia a questão 3 da questão 2 é que não encontramos a questão 3 em nenhum dos livros didáticos analisados. Outra característica que levamos em conta ao propor essa questão é que, como a questão 2 ocorre em alguns livros didáticos analisados, poderia acontecer de estudantes já saberem antecipadamente qual é o contraexemplo, enquanto que para a presente questão o contraexemplo possui maiores dificuldades para ser encontrado.

Notemos que a questão exige o conhecimento do que seja um quadrado perfeito. Esperamos que isso não seja um problema, pois os estudantes cursam o terceiro ano do curso de Matemática e provavelmente já devem ter trabalhado com essa definição.

Para a resolução dessa atividade esperávamos que os estudantes utilizassem a indução empírica para determinar o contraexemplo, porém, o primeiro número que torna a proposição anterior verdadeira é 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767. Obviamente não seria possível que os estudantes encontrassem esse contraexemplo durante a realização da atividade, assim acreditávamos que os estudantes justificassem a solução usando o princípio de indução finita dizendo se tratar de uma proposição verdadeira.

Esta questão possui características semelhantes as anteriores, isso porquê, o método de prova que deve ser empregado na resolução é a prova por contraexemplo. Além disso, os estudantes poderiam vivenciar as seguintes funções de uma demonstração: a de verificação, explicação, comunicação, descoberta, sistematização e o desafio intelectual, que são funções apresentadas por Villiers (2001). Já na ótica de Hanna (2000) acreditamos que as seguintes funções podem ser desenvolvidas pelos estudantes: a de verificar, a de explicar, a de sistematizar, a de comunicar e a de explorar.

Com relação a indução empírica, temos que esta questão também possui características que podem fornecer pistas a fim de que seja utilização este tipo de raciocínio.

QUESTÃO 4. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, a soma dos *n* primeiros números ímpares é dada por n^2? Por quê? Justifique sua resposta.

O objetivo dessa questão foi verificar se os estudantes lembrariam e utilizariam a indução finita como estratégia para mostrar que se trata de uma proposição verdadeira, ou se os estudantes se baseando nas questões anteriores fariam algumas verificações e diriam que a proposição em estudo é verdadeira. Acreditávamos que os estudantes que utilizassem a indução finita para demonstrar a veracidade dessa proposição a fariam de forma mecânica, isto é, a indução finita seria usada como método. Uma outra possibilidade dos estudantes justificarem a solução seria por meio da indução empírica.

A abordagem dessa questão é distinta em relação às questões anteriores, isso porque se trata de uma proposição verdadeira e, além disso, é apresentada frequentemente em livros didáticos. É possível notar esta característica, pois grande parte dos livros observados apresenta essa proposição, tanto como exercício quanto como exemplo.

Por se tratar de uma questão que ocorre com certa frequência acreditávamos que os estudantes lembrariam rapidamente que se tratava de uma proposição verdadeira e que utilizariam prontamente a indução finita.

Uma das razões dessa questão pertencer à nossa sequência didática é que historicamente há evidências de que esse problema foi um dos primeiros a serem resolvidos por indução finita. Isso se deve ao matemático italiano Francesco Maurolico. Ressaltamos aqui que o método de indução finita utilizado por Maurolico é diferente do método de indução finita conhecido e usado atualmente.

Com relação às funções das demonstrações temos que, os estudantes podem vivenciar as seguintes características apontadas por Villiers (2001): a de verificação, a de explicação, a comunicação, o desafio intelectual e a de sistematização. Já as funções que os estudantes podem desenvolver segundo Hanna (2000) são: a de verificar, a de explicar, a de sistematizar, a de comunicar, a de explorar e a de incorporar.

QUESTÃO 5. A sentença $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 2n+2$ é a soma de dois números primos é verdadeira? Por quê? Justifique sua resposta.

Essa questão não foi encontrada em nenhum dos livros didáticos que verificamos. Ela é referente à Conjectura de Goldbach[20] e um dos objetivos dessa questão era mostrar aos estudantes que existem problemas abertos na Matemática, isto é, problemas que ainda não possuem solução (neste caso demonstração). Assim, nada se pode afirmar quanto à veracidade dessa proposição.

Um outro objetivo dessa questão foi verificar qual a abordagem que os estudantes utilizariam para resolver e justificar sua resposta. Esperávamos que a partir das questões anteriores os estudantes fizessem algumas verificações na tentativa de encontrar um contraexemplo para mostrar que se trata de uma proposição falsa. Entretanto, como esta questão é uma conjectura acreditávamos que os estudantes diriam se tratar de uma afirmação verdadeira por meio da indução empírica ou aplicando a indução finita.

Como essa questão se refere a uma conjectura acreditamos que as funções da demonstração apresentadas por Hanna (2000) e Villiers (2001) não se aplicam integralmente, já que esta afirmação não possui uma prova. Porém, levando em conta o aspecto investigativo e de resolução de problema, pensamos que esta questão possui características que podem estimular e desenvolver as funções de verificação, de descoberta, de comunicação, de desafio intelectual e de sistematização. Além das funções já levantadas anteriormente temos que os estudantes podem vivenciar na visão de Hanna (2000) as seguintes funções: a de verificar, a de explicar, a de descobrir, a de comunicar, a de construir, a de explorar e a de incorporar.

Já com relação ao método de demonstração a ser empregado na resolução desta questão não é possível apresentar um que seja eficaz para resolvê-la, pois esta é uma afirmação que ainda não tem demonstração, entretanto, seria interessante que os estudantes tentassem utilizar os métodos de indução empírica e de indução finita a fim de que possam diferenciá-los.

QUESTÃO 6. Para $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$., considere $a_n = 7^n - 1$. Os resultados obtidos são sempre divisíveis por 3? Por quê? Explique.

Nosso intuito ao propor essa questão também foi verificar qual estratégia os estudantes utilizariam para justificar a solução apresentada. As características que pertencem a

[20] Christian Goldbach (1690 - 1764), matemático prussiano que apresentou esse problema.

essa questão são encontradas com frequência em livros didáticos, inclusive nos livros analisados neste trabalho, portanto é por essa razão que essa questão faz parte das atividades da sequência didática.

Esta proposição é verdadeira, assim acreditávamos que os estudantes lembrariam e utilizariam a indução finita para demonstrar a veracidade dessa questão. Porém, a utilização da indução finita por parte dos estudantes ficaria restrita a um processo mecânico. Há a possibilidade também de alguns estudantes fazerem uso da indução empírica para justificar a validade dessa proposição.

Acreditamos que esta questão, na qual os estudantes deveriam aplicar a indução finita, propicia o desenvolvimento das seguintes funções de demonstração, segundo Villiers (2001): a da verificação, a da explicação, o desafio intelectual, a comunicação e o da sistematização. Com relação as funções da prova apresentadas por Hanna (2000) temos que os estudantes podem ser contemplados com o desenvolvimento das seguintes: a de verificar, a de explicar, a de sistematizar e a de comunicar.

O método de prova eficaz que deveria ser empregado para demonstrar a veracidade desta questão é o da indução finita, no entanto os estudantes poderiam realizar alguns testes e comprovar por meio destes que se trata de uma proposição verdadeira. Porém ao procederem dessa forma estariam se baseando na indução empírica, que neste caso, não é adequada para demonstrar a validade da proposição.

2ª SESSÃO

A segunda sessão ocorreu no dia 20/03/2009. As atividades tiveram início às 19h23 e terminaram às 21h e contou com a participação de 20 estudantes. As atividades se desenvolveram de forma semelhante à primeira sessão de atividades, isto é, primeiramente os estudantes se dividiram em duplas ou trios e assim que eles se organizaram e receberam a primeira lista de exercícios e após a conclusão desta, receberam os demais exercícios. A seguir abordaremos a análise a priori das questões referentes a esta sessão.

O objetivo das duas primeiras questões dessa sessão era avaliar como os estudantes abordam o princípio de indução finita. A terceira questão se refere ao problema da torre de Hanói e é uma questão em que queremos mostrar tanto a aplicação da indução empírica no processo de descobrir padrões quanto do princípio da indução finita para demonstrar a validade de proposições. A terceira questão foi dividida em duas partes, pois o tempo disponível para realização de todas as atividades dessa sessão não era suficiente.

Outro objetivo desta sessão foi complementar a coleta de dados já iniciada na sessão anterior, isto é, como as questões dessa etapa contemplam diretamente a aplicação do princípio de indução finita para serem resolvidas, nosso intuito era buscar os primeiros indícios que pudessem confirmar nossa hipótese inicial, ou seja, que os estudantes aplicam a indução finita como um processo mecânico.

QUESTÃO 1. Mostre que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, a soma dos *n* primeiros números ímpares é dada por n^2.

O objetivo dessa questão nessa atividade era coletar as primeiras informações relativas à abordagem dos estudantes com relação ao nosso objeto de estudo, a indução finita. Acreditávamos que os estudantes utilizariam a indução finita com um processo mecânico, ou seja, seriam guiados por um modelo já conhecido ou que seguiriam uma receita.

Este é um problema semelhante a uma das questões da primeira sessão. Porém, na primeira abordagem o estudante deveria dizer se a proposição em questão era verdadeira ou falsa justificando sua resposta. Nesta sessão, os estudantes deveriam provar que a proposição é verdadeira e apresentar como justificativa na solução a aplicação da indução finita. Uma característica que destacamos aqui é que tal proposição ocorre com frequência em livros didáticos que abordam a indução finita. Assim, um problema que levantamos quanto à abordagem dos livros didáticos é que o enunciado deixa explícito que o estudante deve usar o princípio de indução finita, ou então fica evidente a aplicação da indução finita porque este exercício pertence à sessão do livro onde se aborda esse princípio.

O contexto que utilizamos em nossa atividade não deixa claro como o estudante deve provar a proposição anterior. Dessa forma, no decorrer desta atividade acreditávamos que alguns estudantes ficariam em dúvida em qual procedimento utilizar para demonstrar que tal afirmação é verdadeira. Assim, existia a possibilidade dos estudantes cogitarem, junto aos observadores, uma possível aplicação da indução finita.

Outro fato que podia ocorrer durante a realização dessa atividade comparando com a questão da atividade anterior é que nesta o enunciado indicava se tratar de uma proposição verdadeira e que deve ser demonstrada, enquanto que na sessão anterior o estudante deveria decidir se a proposição era verdadeira ou não.

Consideramos este problema relevante para nossa sequência didática, pois segundo alguns pesquisadores como Hefez (1993) e Vacca (1909), esse foi o primeiro problema a ser resolvido usando a indução finita.

Além dessas características temos que esta questão possui as seguintes funções de prova, segundo Villiers (2001): a da verificação, a da explicação, o desafio intelectual, a de comunicação e o da sistematização. Agora tomando como referência as funções apresentadas por Hanna (2000) temos: a de verificar, a de explicar, a de sistematizar e a de comunicar.

A indução finita deveria ser utilizada pelos estudantes para demonstrarem que a proposição era verdadeira, porém como já dissemos, existia a possibilidade deles abordarem essa questão utilizando a indução empírica, que para este caso não é útil para demonstrar a validade da proposição.

A segunda atividade proposta nesta sessão foi:

QUESTÃO 2. Uma Progressão Aritmética com primeiro termo a_1 e razão r é uma sequência de números cujo primeiro elemento é a_1 e tal que cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior mais a razão. Em símbolos, se $n \geq 2$ então $a_n = a_{n-1} + r$. Prove que o termo geral de uma Progressão Aritmética é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$.

O objetivo dessa questão era verificar qual o tratamento que os estudantes iriam adotar para demonstrar que a fórmula anterior é verdadeira. Uma das razões dessa questão fazer parte da sequência didática era para mostrar aos estudantes, futuros professores de matemática, que a indução finita pode ser estudada e utilizada e aplicada no Ensino Médio, e que uma das aplicações deste princípio se refere ao conteúdo de progressões. Existem outras possibilidades de questões para aplicações da indução finita referentes ao Ensino Médio, porém devido ao tempo, não foi possível abordá-las durante esta sequência didática.

Essa questão, assim como as anteriores, também poderia deixar os estudantes em dúvida com relação ao método de prova que deve ser empregado para solucioná-la. Como já dissemos esperávamos que a opção deles fosse pela indução finita e não pela indução empírica, porém há a possibilidade de encontrarmos algumas soluções onde alguns dos estudantes empregassem este raciocínio a fim de resolver o problema.

Com relação às funções das provas, acreditamos que, segundo Villiers (2001), os estudantes podem desenvolver: a verificação, a explicação, o desafio intelectual, a sistematização, a descoberta e a comunicação. Agora pautando as funções de demonstração, segundo Hanna (2000), eles podem apresentar: o de verificar, o de explicar, o de sistematizar, o de comunicar, o de explorar e o de incorporar.

A terceira atividade que compõe a 2a sessão é o problema conhecido como a Torre de Hanói. E foi assim proposto aos estudantes:

QUESTÃO 3. Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges: "transfiram essa pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez e nunca permitindo que um disco fique acima de um menor. Quando terminarem essa tarefa e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá a pó e com um estrondo de trovões o mundo acabará".

Dizem os sábios que o mundo foi criado a 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de um disco por segundo. Será que o mundo vai acabar?

O problema da Torre de Hanói foi proposto pelo matemático francês Edouard Lucas (1842 -1891) em 1883. O nome Torre de Hanói foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã.

1. Utilizando a Torre de Hanói verifique quantos movimentos são necessários para movimentar 1 disco? E dois discos?
2. Com a Torre de Hanói determine quantos movimentos são necessários para mover 3 discos?
3. É possível diminuir o número de movimentos realizados?
4. Repita os procedimentos anteriores, considerando 4, 5, e 6 discos respectivamente.
5. Organize uma tabela com o número de discos utilizados e o número mínimo de movimentos para transportá-los de um bastão para outro.

Discos						
Movimentos						

6. Analisando a tabela que você organizou, é possível relacionar a quantidade de discos com o número mínimo de movimentos para resolver o problema? Qual é essa relação? Expresse-a por meio de uma fórmula.

A proposta dessa questão era mostrar aos estudantes que a indução empírica e a indução finita são métodos distintos e que não possuem características comuns. Dessa forma, nesta primeira etapa da atividade os estudantes deveriam responder às questões propostas manipulando a torre de Hanói. Devido ao tempo que dispúnhamos para realizar todas as tarefas propostas desta sessão essa atividade foi dividida em duas etapas. A primeira etapa era composta pelas seis perguntas apresentadas anteriormente. Para executar esta atividade cada grupo de estudantes recebeu um modelo da torre de Hanói. Este modelo era composto por seisdiscos. Assim, pensamos ser possível aos estudantes deduzirem a fórmula que determina o número mínimo de movimentos necessários para movimentar os n discos da torre de Hanói. O processo de dedução da fórmula anterior seria realizado utilizando o método de indução empírica, mas a demonstração da fórmula, que foi realizada na sessão seguinte, seria por meio da indução finita.

Esta atividade se apresenta diferente das demais atividades propostas aos estudantes, pois ela está baseada num problema, onde a fórmula que deveria ser provada não era dada. Dessa forma o grupo deveria deduzir a fórmula e a prova dessa fórmula ocorreria na sessão seguinte. Por essa atividade ser composta por uma parte experimental, acreditávamos que os estudantes participariam efetivamente da resolução dessa questão.

Outra característica presente nesta atividade é com relação à promoção da experiência matemática. Acreditamos que essa questão retrata a atividade de um matemático profissional, pois a partir de um problema (neste caso uma lenda) os estudantes discutiriam estratégias para abordá-lo a fim de encontrar uma solução. Tal estratégia passaria por algumas experimentações com o intuito de conjecturar uma possível fórmula, até ser finalizado com a demonstração da validade da fórmula na próxima atividade.

Tomando como referência as funções de prova para Villiers (2001) acreditamos que esta questão pode proporcionar aos estudantes o desenvolvimento de: verificação, explicação, descoberta, comunicação, desafio intelectual e de sistematização. Já tomando as funções apresentadas por Hanna (2000) é possível que sejam observadas: a de verificar, de explicar, de sistematizar, de descobrir, de comunicar e por fim a de explorar.

Durante a resolução desta questão os estudantes não utilizariam a indução finita, entretanto nosso intuito foi e promover uma atividade experimental a fim de que os estudantes utilizassem a indução empírica para encontrar uma fórmula. Assim, esperávamos que após a realização da atividade da sessão seguinte os estudantes poderiam observar que a indução empírica pode ser um complemento da indução finita, isto é, a indução empírica é um meio pelo qual podemos determinar fórmulas[21] enquanto que a indução finita é utilizada para demonstrar que as fórmulas são ou não verdadeira.

3ª SESSÃO

A terceira sessão da sequência didática aconteceu no dia 17/04/2009 iniciando-se às 19h25 e sendo concluída às 20h55. Essa sessão contou com a participação de 19 estudantes.

Começamos com a conclusão da questão iniciada na segunda sessão, qual seja a da Torre de Hanói, apresentando-a da seguinte forma:

QUESTÃO: Em relação ao problema da Torre de Hanói, é possível construir um quadro indicando a quantidade de discos e o número mínimo de movimentos para mudá-los de bastão. Por exemplo:

Discos (n)	1	2	3	4	5
Movimentos (m)	1	3	7	15	31

Analisando a tabela anterior, é possível concluir que para um número n qualquer de discos temos que a quantidade de movimentos mínimos é dada por: $m = 2^n - 1$.

- Mostre que a fórmula anterior é verdadeira
- Sabendo que, segundo os sábios, o mundo foi criado a 4 bilhões de anos e que há 64 discos na Torre original e ainda que os sábios estão movendo os discos na razão de um disco por segundo responda: será que o mundo irá acabar?

O intuito desta atividade era analisar a abordagem que os estudantes utilizariam para demonstrar a fórmula referente ao número mínimo de movimentos necessários para passar os n discos da torre de Hanói de um bastão para outro. A prova dessa fórmula é realizada utilizando a indução finita. Dessa maneira nosso objetivo consistiu em verificar as estratégias que os estudantes utilizariam para concluir que a fórmula é verdadeira.

Como já dissemos os estudantes deveriam provar a fórmula que determina o número mínimo de movimentos necessários para passar n discos da torre de Hanói de um bastão para outro. Como essa sessão ocorreu após certo período de tempo com relação ao

[21] As fórmulas que nos referimos envolvem o conjunto dos números naturais.

término da segunda sessão deixamos indicada a tabela que já havia sido completada pelos estudantes na última sessão. Além disso, apresentamos a fórmula que deveria ter sido deduzida pelos estudantes na segunda sessão.

Além dos estudantes terem de provar a fórmula anterior, eles deveriam calcular aproximadamente em que ano o mundo irá acabar. Acreditamos que esta atividade não gere problemas para ser solucionada, pois pode ser realizada com cálculos aritméticos.

Esperávamos que, após os estudantes terem realizado as atividades das segunda e terceira sessões, estaria evidente para eles a diferença entre a indução empírica e a indução finita. Contudo, entendemos que as funções de prova que essa questão pode proporcionar, na ótica de Villiers (2001) são: verificação, explicação, desafio intelectual, sistematização, descoberta e comunicação. Já na perspectiva de Hanna (2000) entendemos que as funções são: verificar, explicar, sistematizar, comunicar, explorar e incorporar.

A demonstração da fórmula que determina o número mínimo de movimentos necessários para movimentar os n discos de um bastão para outro se faz por meio da indução finita, assim, como os estudantes já haviam realizado a atividade experimental na sessão anterior acreditamos que eles não fariam uso da indução empírica.

Após a conclusão dessa atividade o estudante pesquisador apresentou os axiomas de Peano e demonstrou o princípio de indução finita a partir dos axiomas expostos.

4ª SESSÃO

A quarta e última sessão foi realizada em 24/04/2009 iniciando-se às 19h15 e terminando às 20h55. Estiveram presentes 21 estudantes.

O objetivo dessa sessão era verificar se, após a demonstração do princípio de indução finita via axiomas de Peano, a abordagem dos estudantes havia se modificado. Dessa forma o intuito dessa última sessão era mostrar aos estudantes que a indução finita não consiste apenas num processo mecânico, mas que pode ser utilizada para demonstrar proposições relativas aos números naturais. Além do mais, outro objetivo desta última sessão era explicitar que a prova por indução finita é um método dedutivo e não empírico.

Antes de propor as atividades, o estudante pesquisador refez a apresentação da última sessão sobre os axiomas de Peano, demonstrando novamente o princípio de indução finita, onde apresentou e resolveu dois exemplos aos estudantes.

Assim, as atividades dessa última sessão foram:

QUESTÃO 1. Mostre que proposição $P(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ é verdadeira para $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Trata-se de uma questão que está presente na maior parte dos livros didáticos que verificamos. O objetivo dessa questão era observar como os estudantes utilizariam a indução finita para demonstrar a validade dessa proposição. Acreditávamos que após a exposição realizada sobre os axiomas de Peano e a demonstração do princípio de indução finita os estudantes não apresentariam dificuldades em realizar a demonstração e não a utilizariam como um processo mecânico.

Ainda com relação à solução dessa questão é possível que os estudantes realizem alguns testes, ou seja, façam algumas verificações a fim de se certificarem que se trata de uma proposição verdadeira. Dessa forma, os estudantes partiriam de algumas observações particulares com o objetivo de concluir o caso geral e assim, é possível caracterizar a aplicação da indução empírica como já apresentamos de acordo com Chauí (2000).

Com relação as funções de demonstração, temos que segundo Villiers (2001) os estudantes podem desenvolver as seguintes: a de verificação, a de explicação, o desafio intelectual, a de sistematização e comunicação. Tomando como referências as funções apontadas por Hanna (2000) entendemos que as funções são: verificar, explicar, sistematizar e comunicar.

Esperávamos que os estudantes utilizassem prontamente a indução finita para apresentarem a demonstração dessa proposição.

QUESTÃO 2. Prove que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Esta é outra questão que ocorre com frequência nos livros didáticos que verificamos. É semelhante à anterior e nosso objetivo foi verificar qual a abordagem e estratégia que os estudantes utilizariam ao aplicarem indução finita para demonstrarem que tal proposição é verdadeira.

A solução dessa questão também pode apresentar características da indução empírica, isso porque antes de iniciarem a demonstração dessa proposição com a indução finita os estudantes podem realizar algumas verificações para comprovarem que se trata de uma proposição verdadeira.

As funções que acreditamos que podem ser desenvolvida pelos estudantes durante a resolução dessa questão são, segundo Villiers (2001): a de verificação, a de explicação, o desafio intelectual, a de sistematização e a comunicação. Se adotarmos como referencial as funções apresentadas por Hanna (2000), temos que podem ser notados: verificar, sistematizar e comunicar.

Não esperamos que os estudantes utilizem a indução empírica para resolver esta questão, pois como já dissemos, antes do início do desenvolvimento das atividades eles já teriam visto a demonstração do princípio de indução finita e alguns exemplos.

QUESTÃO 3. Uma progressão Geométrica com primeiro termo a_1 e razão $q\ (q \neq 0 \text{ e } q \neq 1)$ é uma sequência de números cujo primeiro elemento é a_1 e tal que, cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado pela razão. Em símbolos, se $n \geq 2\ a_n = a_{n-1}.q$. Prove que a fórmula do termo geral de uma Progressão Geométrica é $a_n = a_1.q^{n-1}$.

Esta questão não ocorre com tanta frequência como as duas anteriores e isso foi possível notar a partir das análises dos livros didáticos. Porém, trata-se uma questão pertinente às nossas atividades, pois novamente os estudantes deverão utilizar a indução finita para demonstrarem que a fórmula é verdadeira. Dessa forma nosso objetivo consiste em verificar a abordagem dos estudantes quando estes utilizam a indução finita para provarem certas afirmações. Além disso, novamente apresentamos uma oportunidade dos estudantes relacionarem os conteúdos do Ensino Médio e do Ensino Superior.

Outra abordagem que os estudantes podem apresentar com relação à solução dessa questão é que eles podem atribuir alguns valores para *n* a fim de verificar que a fórmula é verdadeira. Dessa forma, é possível caracterizar as ações deles a partir da utilização do conceito de indução empírica que como já afirmamos, segundo Chauí (2000), consiste em concluir uma regra geral a partir de algumas verificações particulares.

Além das possibilidades já apresentadas, temos também que, os estudantes podem confundir hipótese e tese de indução no momento de utilizarem a indução finita, pois estão acostumados em tratar a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica como sendo verdadeira e acabam dessa maneira demonstrando a outra equação, ou seja, a equação de recorrência.

Com relação às funções das provas, entendemos que, segundo Villiers (2001), os estudantes podem desenvolver: a verificação, a explicação, o desafio intelectual, a sistematização e a comunicação. Agora pautando as funções de demonstração, segundo Hanna

(2000), eles podem apresentar: o de verificar, o de explicar, o de sistematizar e o de comunicar.

Acreditávamos que após termos demonstrado o princípio de indução finita no inicio desta sessão, os estudantes não utilizariam a indução empírica para resolver esta questão.

5.3 Análise a Posteriori e Validação

Nesta etapa da análise vamos comparar as funções de prova apresentadas por Hanna (2000) e Villiers (2001) e que foram levantadas na análise a priori, seguindo o esquema utilizado anteriormente. Além desta, propomos como uma forma de complementar a análise os conceitos discutidos por Hanna (1989b) onde a autora apresenta os conceitos de provas que provam e provas que explicam. Também utilizaremos as classificações apresentas por Balacheff (1988) sobre os tipos de provas que são categorizadas em pragmática ou conceitual e seus respectivos níveis que são empirismo ingênuo, experimento crucial, exemplo genérico e experimento de pensamento. Por fim abordaremos também os aspectos retórico, lógico-epistemológico e heurístico apresentados e discutidos por Silva (2002).

A turma em que foi aplicada a sequência didática era composta por 23 estudantes, porém durante a aplicação das atividades nem todos compareceram aos encontros. Dessa forma, com intuito de realizar as análises das atividades selecionamos como amostra desta pesquisa 13 estudantes. Tal escolha se deve ao fato de que foram estes os estudantes que participaram de todas as atividades propostas.

Classificamos os estudantes que fazem parte da amostra da seguinte maneira: depois de selecionados, organizamos os nomes em ordem alfabética. Assim, o estudante 1 corresponde ao primeiro da nossa lista, o estudante 2 corresponde ao segundo e assim sucessivamente. A seguir adotamos a letra E para indicar o estudante, a letra S corresponde a sessão e a letra Q significa questão. Desse modo a classificação E1S2Q3 quer dizer que é o estudante 1 que participou da sessão 2 e apresentou uma solução para a questão 3.

1ª SESSÃO

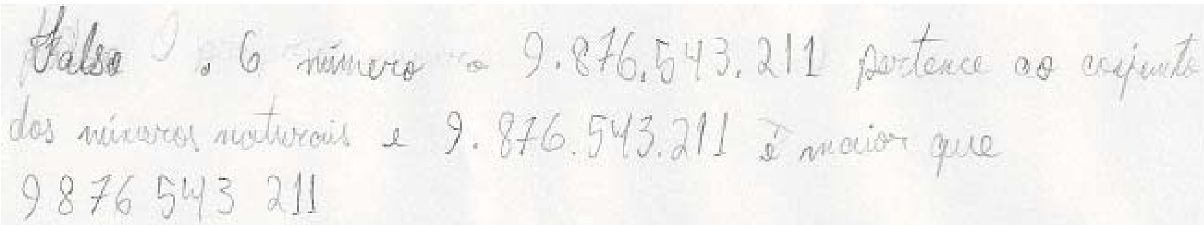
QUESTÃO 1. A sentença $\forall n \in \mathbb{N}, n < 9.876.543.210$ é verdadeira? Por quê? Justifique sua resposta.

O objetivo dessa questão era de que os estudantes apresentassem um contraexemplo para mostrar que tal afirmação é falsa. Todos os estudantes que compõe a amostra selecionada responderam que a proposição é falsa, mas nem todos apresentaram um contraexemplo.

Com relação às respostas dadas pelos estudantes encontramos como contraexemplo que ocorreu com maior frequência o número 9.876.543.211 que apareceu 7 vezes. Os contraexemplos 9.999.889.999, 9.999.999.999 e 10.000.000.000 também foram encontrados para justificar as respostas, cada um deles encontrado uma única vez. Além das justificativas anteriores, três estudantes responderam que a afirmação é falsa, e como justificativa disseram, que o conjunto dos números naturais N é um conjunto infinito, e assim, deve existir um $n \in$ N tal que $n > 9.876.543.210$.

Confirmando as hipóteses que levantamos para essa questão apresentamos a solução do estudante E1S1Q1.

Figura 13 – Solução apresentada pelo estudante E1S1Q1


Falsa. O número 9.876.543.211 pertence ao conjunto dos números naturais e 9.876.543.211 é maior que 9876543 211

Confrontando as análises a priori e a posteriori referentes a essa questão, foi possível notar que o tipo de prova apresentada pelos estudantes ocorreu como previsto nas análises a priori, ou seja, os estudantes utilizaram um contraexemplo para mostrar que a proposição era falsa. Na perspectiva de Balacheff (1988), podemos inferir que os estudantes utilizaram um experimento de pensamento que constitui, segundo esse mesmo autor, um tipo de prova conceitual.

Com relação aos aspectos apresentados por Silva (2002), podemos notar que o aspecto lógico-epistemológico está presente na prova dada pelos estudantes, pois a exibição de um contraexemplo ocorre mediante a apresentação de uma sequência ordenada. Já com relação as características apontadas por Hanna (1989b) entendemos que as provas dos estudantes são provas que explicam, porque as justificativas contemplam suas explicações em particular.

Entendemos que as funções das demonstrações segundo Hanna (2000) e Villiers (2001), já apresentadas anteriormente, neste mesmo capítulo, estão presentes nas respostas dadas pelos estudantes. Com relação as funções da primeira autora temos que a função de verificar está contemplada, pois os estudantes verificaram que se tratava de uma questão falsa, a de explicar também foi notada, pois suas respostas continham justificativas, a de descobrir também esteve presente nas respostas deles já que houve argumentação, a de comunicar foi contemplada já que ocorreu a transmissão do resultado encontrado escrevendo-o, e a de incorporar, foi satisfeita, pois os estudantes utilizaram a noção de sucessor para justificar o resultado obtido. Na perspectiva do segundo autor a função de verificação está presente, pois a questão se refere a uma afirmação evidente na qual se buscou uma demonstração para ela, a função de explicação está presente, pois houve verificação de um certo número de observações, a comunicação também esteve presente, pois ocorreu interação social ente os estudantes, e a sistematização foi atendida os estudantes sistematizaram os conceitos envolvidos na produção escrita. Além disso, para solucionar esta questão foi utilizada a indução empírica por quase toda a amostra considerada.

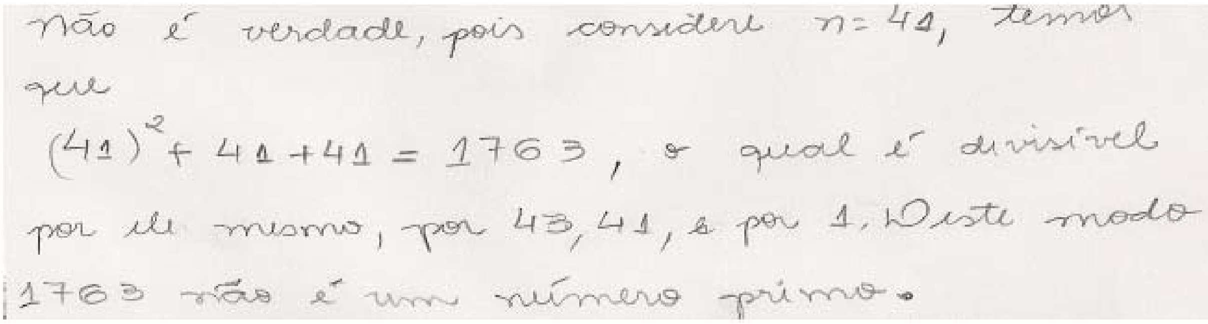
QUESTÃO 2. É verdade que $\forall\, n \in \mathrm{N},\ n^2 + n + 41$ é um número primo? Por quê? Explique.

Nesta questão nosso objetivo era de que os estudantes também apresentassem um contraexemplo para mostrar que a proposição é falsa. A partir das análises das justificativas apresentadas pelos mesmos foi possível notar que nosso objetivo foi alcançado.

Com relação às respostas encontradas temos que 12 estudantes disseram que a proposição é falsa e apresentaram um contraexemplo. Os contraexemplos apresentados pelos estudantes como justificativa foram $n = 40$ dado por um estudante e $n = 41$ apresentado por 11 estudantes. Apenas o estudante E6S1Q2 disse que a proposição é verdadeira e justificou dizendo que não encontrou um contraexemplo. Dessa forma acreditamos que essa questão já havia sido discutida com os estudantes em outras disciplinas.

Um exemplo de uma das respostas apresentadas para essa atividade foi do estudante E5S1Q2:

Figura 14 – Solução apresentada pelo estudante E5S1Q2


não é verdade, pois considere $n = 41$, temos
que
$(41)^2 + 41 + 41 = 1763$, o qual é divisível
por ele mesmo, por 43, 41, e por 1. Deste modo
1763 não é um número primo.

Comparando as análises a priori e as análises a posteriori dessa questão é possível afirmar que, segundo as perspectivas de Balacheff (1988), os estudantes realizaram um tipo de prova conceitual, ou seja, nessa atividade os estudantes que responderam que a proposição é falsa usaram o experimento de pensamento. Já o estudante que afirmou que a proposição é verdadeira justificando que não havia encontrado um contraexemplo, realizou um tipo de prova pragmática chamada de empirismo ingênuo.

A análise das soluções apresentadas pelos estudantes indica que eles realizaram um tipo de prova considerada por Hanna (1989b) uma prova que prova, isto é, o intuito deles consistiu em indicar o contraexemplo que mostrasse que a proposição era falsa. Esperávamos que na resolução houvesse pistas que indicassem o caminho escolhido pelos estudantes para solucionarem esta questão, mas analisando as respostas não os encontramos. Além disso, esperávamos também, que a solução seria apresentada após algumas tentativas, isto é, que a indução empírica seria utilizada para justificar a solução dada pelos estudantes. Se referindo aos aspectos apresentados por Silva (2002) entendemos que o lógico-epistemológico apareceu caracterizando as respostas apresentadas pelos estudantes ao resolverem esse problema. Assim, esse aspecto se caracteriza, pois é possível notar o desenvolvimento de uma sequência ordenada, onde os estudantes descobriram o contraexemplo e em seguida apresentaram, por meio de cálculo, que a afirmação era falsa.

Já com relação as características apontadas por Hanna (2000) temos que a função de verificar ocorreu, pois durante a resolução dessa questão foi possível notar que os estudantes apresentaram prontamente uma solução para a mesma, indicando que houve uma relação da verdade de uma afirmação. Não foi possível caracterizar a função de explicar, pois eles não indicaram indícios de que se tratava de uma afirmação falsa. A função de sistematizar ficou parcialmente caracterizada, pois eles mostraram uma certa organização na forma de apresentar suas soluções, porém não explicitaram como chegaram até ela. A função de comunicar que se refere a transmissão do resultado encontrado foi contemplada e a de incorporar não ocorreu, pois os estudantes já sabiam que se tratava de uma afirmação falsa. Com relação as funções propostas por Villiers (2001), encontramos a de verificação, que não ficou completamente caracterizada, pois segundo o autor, os estudantes deveriam realizar alguns testes para se convencerem ou não da veracidade de tal afirmação e isso não aconteceu. A função de explicação ocorreu, pois houve uma satisfação pessoal dos estudantes em demonstrarem que se tratava de uma questão falsa. Não houve indícios sobre a função de descoberta, pois os estudantes já sabiam que se tratava de uma afirmação falsa e dessa maneira partiram logo para a resposta e a de sistematizar ocorreu devido ao fato deles apresentarem um contraexemplo mostrando se tratar de uma afirmação falsa. A função de comunicação que se expressa pelo processo social de interação humana, apesar do desafio intelectual indicar que houve êxito na demonstração, não há pistas sobre a invenção de uma nova maneira de realizar a prova.

QUESTÃO 3. Será que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito? Justifique.

O intuito dessa questão era de que os estudantes realizassem algumas verificações com o objetivo de encontrar um contraexemplo e mostrar que tal proposição é falsa. Porém determinar o contraexemplo dessa atividade não era uma tarefa fácil. Dessa forma pensamos que após algumas verificações os estudantes diriam se tratar de uma proposição falsa e justificariam a resposta pela indução empírica.

Uma das dificuldades apresentadas pelos estudantes durante a resolução desta questão foi que uma parte deles não se lembrava da definição de quadrado perfeito. Este problema gerou algumas dúvidas e dificuldades no momento em que os estudantes tentavam resolver esta questão.

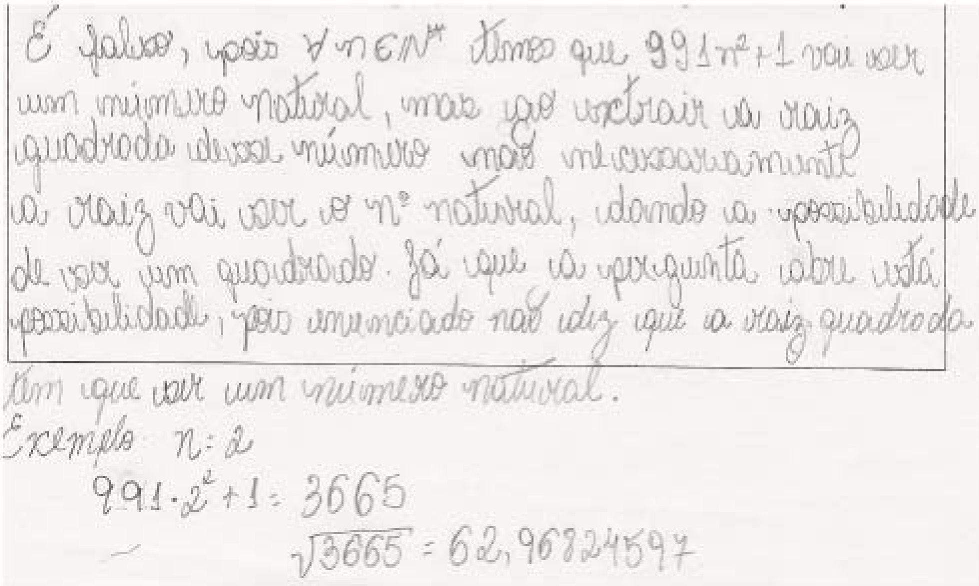
Além de não lembrarem a definição de quadrado perfeito alguns estudantes confundiram a definição de quadrado perfeito com a do trinômio quadrado perfeito. Esta dúvida também influenciou os estudantes no momento de apresentarem a solução para essa questão.

Assim, com relação às respostas apresentadas pelos mesmos encontramos três estudantes que não responderam essa questão deixando o espaço reservado para apresentar a solução em branco. O estudante E13S1Q3, que também não respondeu a questão, tentou resolver a equação $991n^2 + 1 = a^2 + 2a + 1$ e deixou indicado que $n = \sqrt{\frac{a^2 + 2a}{991}}$. A parti dessa última equação o estudante tentou aplicar a indução finita. Notemos que para esse estudante em especial a noção de quadrado perfeito é o resultado de desenvolvimento da seguinte expressão $(a+1)^2$ e não o resultado da multiplicação de um número natural por ele próprio. Dos estudantes selecionados como amostra da pesquisa apenas um, o estudante E12S1Q3 respondeu se tratar de uma proposição falsa e argumentou dizendo que $991n^2 + 1$ é um número natural para $n = 1, 2, 3$, porém a raiz quadrada do número encontrado nem sempre é natural. Dos estudantes que responderam ser verdadeira a proposição encontramos como argumentos: dois estudantes tentaram justificar a solução por meio da indução finita e o estudante E10S1Q3 disse ser verdadeira a proposição, mas não soube justificar sua resposta. Ainda com relação aos estudantes que disseram se tratar de uma proposição verdadeira temos que um deles, o estudante E1S1Q3, tentou resolver a equação $a^2 + 2a + 1 = 991n^2 + 1$ como estratégia. O estudante E7S1Q3 justificou sua resposta com um contraexemplo falso. Já o estudante E5S1Q3 justificou sua resposta dizendo que o conjunto universo não havia sido determinado no enunciado da questão. O estudante E8S1Q3, que respondeu se tratar de uma proposição verdadeira justificou dizendo que a expressão $991n^2 + 1$ não representa um quadrado perfeito. Já o estudante E9S1Q3 disse que a expressão não é um quadrado perfeito, pois o número 991 não é um quadrado perfeito.

Ao relacionarmos as análises a priori com as análises a posteriori desta questão concluímos que os estudantes que responderam ser uma afirmação verdadeira e justificaram suas respostas por meio de algumas verificações, ou seja, substituindo n por alguns números naturais, como por exemplo, $n = 1$, $n = 2$, etc. a fim de testar se a proposição era verdadeira ou não realizou segundo Balacheff (1988), um tipo de prova pragmática denominada de empirismo ingênuo.

O estudante que disse em sua resposta ser falsa a proposição foi guiado pela sua intuição, isso porque ele não dispunha de tempo suficiente para realizar todas as suas hipóteses e justificou que em algum momento seria possível determinar a raiz quadrada de um número natural. Dessa forma classificamos a resposta dada por esse estudante como um experimento crucial que, segundo Balacheff (1988), também é um tipo de prova pragmática.

Figura 15 – solução apresentada pelo estudante E12S1Q3



É falso, pois $\forall n \in \mathbb{N}^*$ temos que $991n^2+1$ vai ser um número natural, mas ao extrair a raiz quadrada desse número não necessariamente a raiz vai ser o nº natural, dando a possibilidade de ser um quadrado. Já que a pergunta abre esta possibilidade, pois enunciado não diz que a raiz quadrada tem que ser um número natural.

Exemplo $n=2$

$991 \cdot 2^2 + 1 = 3665$

$\sqrt{3665} = 62,96824597$

Esta questão era uma tentativa de forçar os estudantes a utilizarem a indução empírica, para resolvê-la, porém nossa tentativa não obteve sucesso, já que eles utilizaram outros caminhos para concluírem suas respostas.

Assim, verificando as soluções apresentadas pelos estudantes foi possível notar que nenhum deles acertou essa questão. Mesmo assim, entendemos ser possível classificá-la segundo Hanna (1989b) e Silva (2002). Com relação a classificação apresentada pela primeira autora temos que os estudantes estão preocupados em mostrar a validade ou não da proposição, isso caracteriza as provas dos estudantes como provas que provam, já que eles não se preocupam em apresentar explicações para indicar os procedimentos adotados. Entendemos que com relação aos aspectos definidos pelo segundo autor temos que estão presentes o aspecto lógico-epistemológico já que os estudantes procuraram estruturar suas justificativas por meio de uma sequência ordenada de argumentos.

Como a análise desta questão é semelhante à análise da questão anterior, temos que, as funções da demonstração apresentadas por Hanna (2000) e Villiers (2001) constam nas resoluções apresentadas e desenvolvidas pelos estudantes.

Pela a ótica de Hanna (2000) notamos que a função de verificar está presente, pois os estudantes buscam de alguma maneira demonstrar a proposição, a de explicar também consta nas soluções apresentadas, isso porque eles indicam quais foram os caminhos que tentaram utilizar para encontrar uma resposta, a de sistematizar está presente, pois há uma ordem na apresentação das respostas, a função de comunicar que consiste na transmissão do conhecimento e a de explorar também está presente, pois os estudantes argumentaram em seus registros escritos, do que poderiam estar pensando e isso talvez fez com que os estudantes apresentassem significados para uma definição e as consequências desta.

Já na perspectiva de Villiers (2001) é possível notarmos a função de verificação onde os estudantes ao suspeitarem que a afirmação é falsa ou verdadeira buscaram uma demonstração para a mesma, entendemos que a de explicação vem junto com uma frustração já que eles não conseguem se convencer de suas próprias justificativas, sendo assim, não há satisfação pessoal. A função de descoberta se dá pelo fato dos estudantes buscarem explorar o problema, a de sistematização ocorre, pois há o desenvolvimento lógico das ideias apresentadas, a comunicação se deve pela transmissão dos resultados obtidos e o desafio intelectual ocorre, pois eles utilizam sua energia intelectual e engenho matemático para encontrar uma solução.

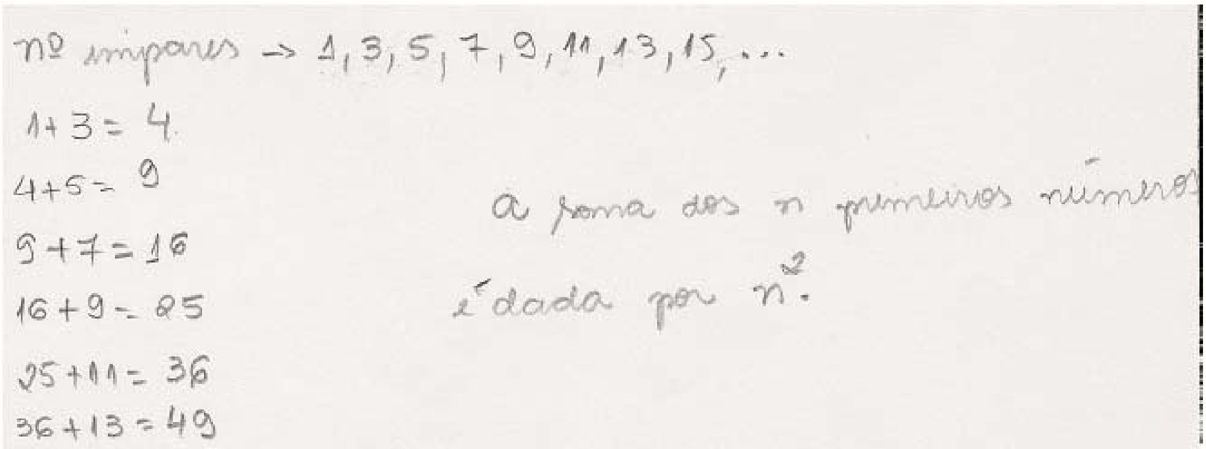
QUESTÃO 4. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é dada por n^2? Por quê? Justifique sua resposta.

O objetivo dessa questão era verificar se os estudantes lembrariam e utilizariam a indução finita para justificarem suas respostas, já que se trata de uma proposição verdadeira.

Todos os estudantes que foram selecionados apresentaram uma resposta para essa questão. Quatro desses estudantes, ou seja, os estudantes E1S1Q4, E7S1Q4, E11S1Q4 e E13S1Q4 utilizaram a indução finita para justificarem a solução apresentada. Entretanto a utilização da indução finita confirmou nossa hipótese inicial, isto é, que os estudantes utilizam-na como um processo mecânico, ou seja, se baseiam em exemplos e modelos já conhecidos.

Os estudantes E4S1Q4, E5S1Q4, E10S1Q4 e E12S1Q4 disseram que a proposição é verdadeira e deixaram indicado como justificativas algumas verificações, isto é, inferimos este grupo de estudantes deixou implícito nas respostas que utilizaram a indução empírica. Um exemplo dessas respostas foi dado por E5S1Q4

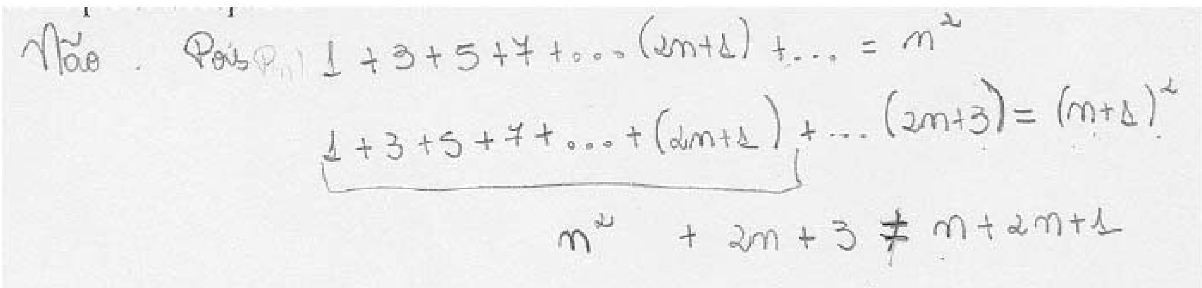
Figura 16 – verificações apresentadas pelo estudante E5S1Q4


nº ímpares → 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...
1+3 = 4
4+5 = 9
9+7 = 16
16+9 = 25
25+11 = 36
36+13 = 49

a soma dos n primeiros números é dada por n^2.

Dos dados coletados encontramos que o estudante E2S1Q4 apenas deixou indicada a n seguinte fórmula: $\sum_{p=0}^{n} 2p+1 = 1+3+5+7+...+2n+1=$, assim consideramos que ele não apresentou uma resposta para essa questão. Já o estudante E3S1Q4 apresentou indícios de que utilizaria o princípio de indução finita, pois verificou a validade da proposição para n = 1, mas esse estudante não conseguiu desenvolver o outro passo da demonstração deixando indicado que a fórmula apresentada era verdadeira. O estudante E8S1Q4 disse que a proposição é verdadeira, porém argumentou que faltou tempo para apresentar uma justificativa para a solução. O estudante E6S1Q4 respondeu não saber se a proposição era verdadeira ou falsa. E o único estudante que respondeu que a proposição era falsa foi o estudante E9S1Q4, e sua solução foi

Figura 17 – solução apresentada pelo estudante E9S1Q4

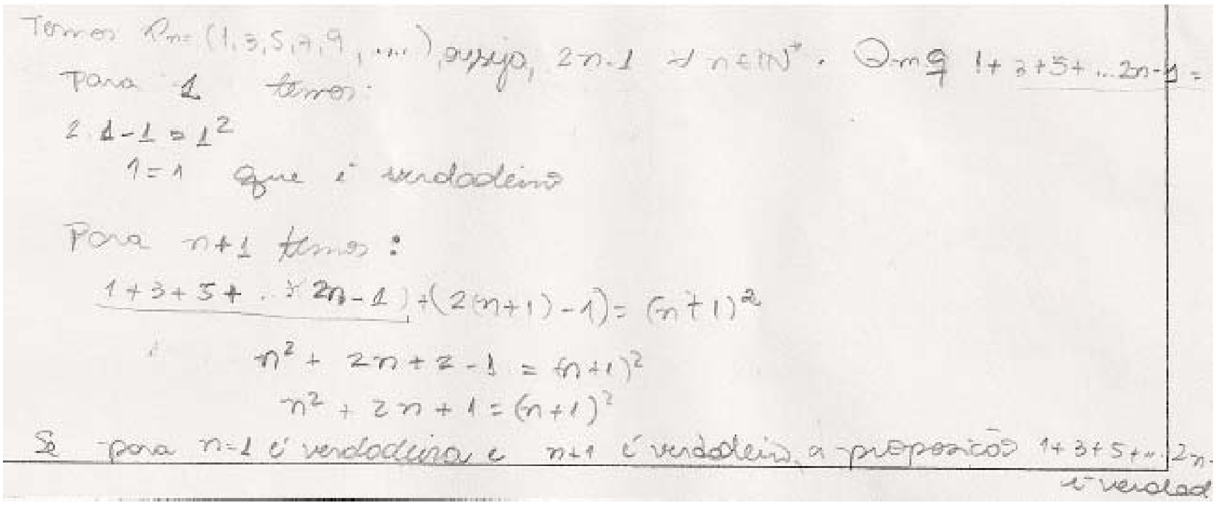

Não. Pois P(n) $1+3+5+7+\ldots(2n+1)+\ldots = n^2$

$\underbrace{1+3+5+7+\ldots+(2n+1)}_{n^2}+\ldots(2n+3) = (n+1)^2$

$n^2 + 2n+3 \neq n+2n+1$

A seguir destacamos a solução do estudante E13S1Q4 para ilustrar nossas análises:

Figura 18 – solução apresentada pelo estudante E13S1Q4


Temos $a_n = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$, ou seja, $2n-1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Q.m.q $1+3+5+\ldots 2n-1 =$
Para 1 temos:
$2 \cdot 1 - 1 = 1^2$
$1 = 1$ que é verdadeiro
Para $n+1$ termos:
$1+3+5+\ldots+2n-1+(2(n+1)-1) = (n+1)^2$
$n^2 + 2n + 2 - 1 = (n+1)^2$
$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
Se para $n=1$ é verdadeira e $n+1$ é verdadeira a proposição $1+3+5+\ldots 2n-$ é verdad

A partir das análises a priori e a posteriori dessa questão notamos que alguns estudantes utilizaram a indução finita para demonstrar a veracidade da proposição, porém no estudo dessas justificativas observamos o emprego da indução finita como método, ou seja, os estudantes a utilizaram de forma mecânica. A partir desta tentativa concluímos que esses estudantes ensaiaram a realização de um experimento de pensamento, considerado para Balacheff (1988), um tipo de prova conceitual.

Os estudantes que justificaram suas respostas a partir de algumas verificações como as de E5S1Q4 apresentaram indícios da utilização da indução finita promoveram um empirismo ingênuo denominado por Balacheff (1988) um tipo de prova pragmática.

Para a resolução desta questão houve tanto o emprego da indução finita quanto da a indução empírica por parte dos estudantes, essa característica indica que existe uma confusão com relação ao procedimento que deve ser adotado para encontrar a resposta para esta questão, isso porque os estudantes empregam ambos os processos.

Analisando as respostas dos estudantes a partir das perspectivas já apresentadas por Hanna (1989b) e Silva (2002) temos que as soluções indicam com relação a primeira autora que encontramos como característica as provas que provam, ou seja, o interesse dos estudantes consiste em encontrar uma solução para o problema, enquanto que na ótica do segundo autor estão presentes os aspectos retórico e lógico-epistemológico. O segundo desses aspectos se justifica pelo modo dos estudantes apresentarem suas respostas, isto é, eles buscam desenvolve-las de maneira ordenada como uma sequência. Já o primeiro desses aspectos se deve pelo fato dos estudantes serem guiados por um modelo já estabelecido previamente, isto é, os estudantes são influenciados pela forma didática pela qual o conteúdo foi exposto, segundo Freitas (1999).

Entendemos que as funções das demonstrações propostas por Hanna (2000) e Villiers (2001), são apresentadas parcialmente nas respostas dos estudantes. Com relação as funções propostas pela primeira autora temos que a de verificar está relacionada com a veracidade ou não da proposição, a de explicar se justifica pelos argumentos utilizados a fim de desenvolver a demonstração, a de sistematizar é caracterizada pela organização apresentada, a função de comunicar se encontra devido a exposição dos resultados encontrados e a de explorar, onde eles abordaram o problema de diversas maneiras. Entretanto, a função de incorporar prevista na análise a priori, não foi contemplada totalmente já que alguns estudantes não associaram a indução finita para demonstrarem que a proposição era verdadeira. Já com relação as funções apresentadas pelo segundo autor entendemos que a de verificação poderia ter ocorrido, pois os estudantes poderiam partir de algumas verificações e assim inferir que a proposição é verdadeira em seguida provando-a, porém alguns deles omitiram a etapa das verificações. Mesmo assim entendemos que tal função foi apresentada por eles. A explicação foi indicada pela realização pessoal em solucionar o problema proposto, a de sistematização onde alguns estudantes, os que justificaram utilizando a indução finita, apresentaram relações lógicas entre as afirmações, a função de comunicação onde eles socializaram suas respostas e por último o desafio intelectual onde eles puderam mostrar suas justificativas.

QUESTÃO 5. A sentença $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 2n+2$ é a soma de dois números primos é verdadeira? Por quê? Justifique sua resposta.

Como já dissemos, um dos objetivos dessa questão era verificar se os estudantes utilizariam a indução empírica para demonstrar a validade ou não dessa proposição. Lembramos aqui que esta proposição trata da Conjectura de Goldbach.

O levantamento dos dados mostrou que, com relação à nossa amostra, quatro estudantes não responderam essa questão deixando-a em branco. O estudante E6S1Q5 disse que não soube respondê-la.

O estudante E1S1Q5 disse que a proposição era verdadeira para um $n \in N^*$, desde que esse *n* tivesse menos de 17 algarismos, e completou seu raciocínio, dizendo que tal proposição ainda não havia sido provada. Já o estudante E8S1Q5 respondeu ser verdadeira e justificou dizendo, que $2n + 2$ é sempre um número par, e que a soma de dois números ímpares primos dão como resultado um número par, e que esse resultado poderia ser expresso por $2n + 2$. Os estudantes E2S1Q5, E4S1Q5 e E10S1Q5 disseram se tratar de uma proposição verdadeira e justificaram suas respostas utilizando exemplos.

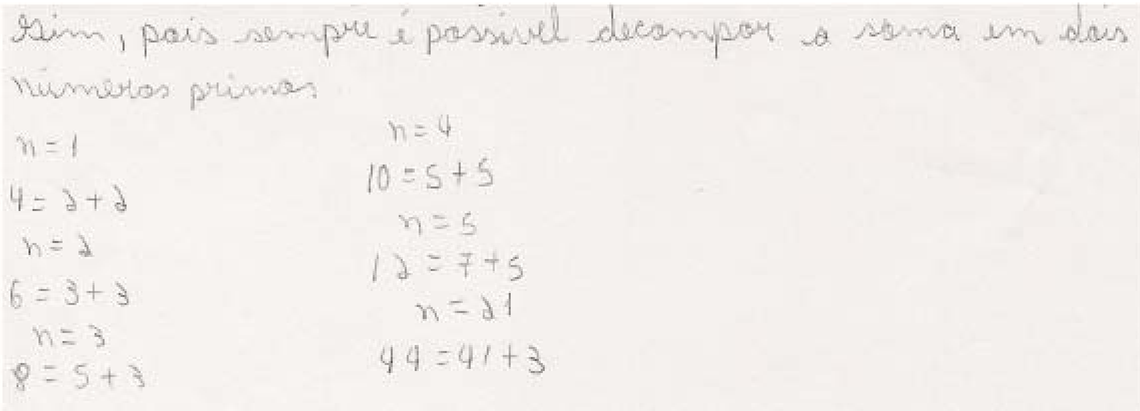
Os estudantes que disseram se tratar de uma proposição falsa foram E5S1Q5, E9S1Q5 e E12S1Q5 e justificaram por meio de exemplos, como $12 = 6 + 6$ e o número 6 não é primo.

Confrontando as análises a priori e a posteriori dessa questão notamos que tanto os estudantes que responderam ser verdadeira quanto falsa se justificaram a partir de manipulações de alguns casos específicos. Portanto, temos que ocorreu o emprego do empirismo ingênuo, que segundo Balacheff (1988) é um tipo de prova pragmática.

As soluções apresentadas pelos estudantes indicam que eles tentaram realizar um tipo de prova, denominada por Hanna (1989b), como provas que explicam, já que analisando as respostas apresentadas encontramos características onde os estudantes, que apostaram em alguma justificativa, tentaram explicar qual foi o procedimento utilizado. Se referindo aos aspectos apresentados por Silva (2002) entendemos que há a presença apenas do lógico-epistemológico, pois os estudantes buscam apresentar ordenadamente suas justificativas. Acreditávamos que o aspecto heurístico poderia ter sido apresentado em algumas respostas, mas não encontramos indícios que indicassem a presença deste aspecto, isso não foi possível em razão de não ocorrer descoberta matemática. Com relação as funções das demonstrações que Hanna (2000) e Villiers (2001) apresentam, temos que nem todas foram contempladas.

Com relação as funções que Hanna (2000) propõe entendemos que a de verificar não pode estar presente, pois como a proposição trata de uma conjectura não há possibilidade de associá-la com a validade de uma afirmação, com relação a de explicar foi possível notar que alguns estudantes propuseram algumas verificações por meio da indução empírica como por exemplo

Figura 19 – solução apresentada pelo estudante E2S1Q5



Para a função de descobrir entendemos também que os estudantes não obtiveram êxito, pois não houve descoberta ou invenção de novos resultados, a de incorporar foi outra função não contemplada durante a realização da atividade, pois a conjectura de Goldbach não se trata de um fato conhecido. Já as funções de comunicar, de construir e de explorar foram observadas durante a atividade sendo caracterizadas da seguinte maneira: a primeira se deve pela ação de comunicar os resultados obtidos, com relação a segunda função, isto é, a de construir, ficou caracterizada pelas verificações realizadas, como o exemplo de E2S1Q5 e por fim entendemos que na terceira função os estudantes buscaram meios para solucioná-la.

QUESTÃO 6. Para $\forall\ n \in \mathrm{N}^*$, considere $a_n = 7^n - 1$. Os resultados obtidos são sempre divisíveis por 3? Por quê? Explique.

O objetivo dessa questão foi verificar novamente se os estudantes utilizariam a indução finita para demonstrar que a proposição é verdadeira.

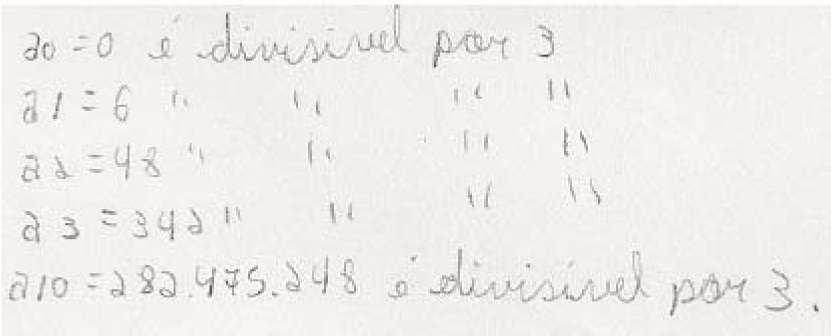
Da amostra considerada temos que apenas o estudante E1S1Q6 utilizou a indução finita para justificar se tratar de uma proposição verdadeira. Esse estudante utilizou a indução finita como um processo mecânico. Os estudantes E2S1Q6, E4S1Q6 e E10S1Q6 disseram que a proposição é verdadeira e argumentaram a partir da indução empírica, ou seja, estes estudantes apresentaram alguns exemplos para chegarem a uma conclusão.

Os estudantes que afirmaram ser falsa a questão argumentaram em suas respostas dizendo que a proposição 7^n - 1 nem sempre é divisível por 3, porque substituindo *n* por 0, obtém-se um contraexemplo. Dois estudantes utilizaram o argumento anterior, são eles o E50S1Q6 e o E12S1Q6. Porém estes estudantes se descuidaram, pois o conjunto considerado na questão foi o N^*, portanto não poderiam ter substituído n por 0.

Os demais estudantes não responderam a essa questão. Assim, temos que os estudantes E3S1Q6, E7S1Q6, E9S1Q6 e E11S1Q6 deixaram a questão sem resposta. Já os estudantes E6S1Q6 e E8S1Q6 alegaram não saber responder essa questão. E por fim o estudante E13S1Q6 deixou indicado que $7^n - 1 = 3q$, mas não respondeu se tratar de uma proposição verdadeira ou não.

O exemplo que destacamos sobre a utilização da indução empírica foi desenvolvido pelo estudante E2S1Q6

Figura 20 – solução apresentada pelo estudante E2S1Q6



$a_0 = 0$ é divisível por 3
$a_1 = 6$ " " " "
$a_2 = 48$ " " " "
$a_3 = 342$ " " " "
$a_{10} = 282.475.248$ é divisível por 3.

Comparando as análises a priori e a posteriori referentes a essa questão encontramos que apenas um dos estudantes provou que a afirmação é verdadeira por meio da indução finita, entretanto a utilização dessa demonstração ficou restrita à aplicação de um modelo, isto é u processo mecânico assim, neste caso, o estudante tentou um tipo de prova conceitual denominada, segundo Balacheff (1988), experimento de pensamento.

Os estudantes que justificaram suas respostas usando a indução empírica, isto é, que afirmaram se tratar de uma proposição verdadeira a partir de algumas verificações realizaram um empirismo ingênuo, que é classificado por Balacheff (1988) como um tipo de prova pragmática.

A análise desta questão é semelhante a da quarta questão desta mesma sessão. Dessa forma, temos novamente que os estudantes confundiram a indução finita com a indução empírica, isto nos mostra que, para os estudantes, o método indutivo e dedutivo pode ser tratado da mesma maneira.

Analisando as respostas apresentadas pelos estudantes entendemos que as provas que provam, classificação dada por Hanna (1989b), se encontram presentes, isso porque o interesse dos estudantes consiste em apresentar uma solução para o problema sem se preocupar em explicar qual(is) procedimentos foram utilizados. Considerando os aspectos de uma demonstração apresentados por Silva (2002) temos que estão presentes o retórico, pois as demonstrações realizadas por meio da indução finita aparentam ter características já estabelecidas anteriormente e o lógico-epistemológico se deve ao encadeamento sequencial da solução.

Analisando as respostas dos estudantes a partir das funções da prova propostas por Hanna (2000) e Villiers (2001) entendemos que com relação a primeira autora a verificação está presente, pois a partir das respostas apresentadas encontramos características que apontam para a validade da proposição. Com relação a de explicar, as soluções indicam qual o raciocínio utilizado, ou seja, foram feitas substituições que indicam que se trata de uma afirmação verdadeira, a de sistematizar é evidenciada por uma certa organização apresentada na solução, e por fim, a função de comunicar é possível ser encontrada já que há a comunicação dos resultados obtidos.

Com relação as funções propostas por Villiers (2001), temos a de verificação, caracterizada pela proposta de uma demonstração após algumas substituições para valores de *n*, a de explicação é apresentada nas respostas que buscaram generalizar a afirmação após a verificação de casos particulares, o desafio intelectual também está presente, pois os estudantes confirmaram os resultados obtidos após a demonstração e isso gerou satisfação pessoal, a de sistematização foi caracterizada pela percepção global do problema e por fim a de comunicação que foi encontrada devido as interações sociais que ocorreram entre eles.

Entendemos que ao final da primeira sessão da sequência didática os estudantes conseguiram diferenciar as características que permeiam tanto o conceito de indução finita quanto o da indução empírica, porém mesmo assim, eles continuam utilizando a indução empírica como uma prova que pode ser empregada na Matemática.

2ª SESSÃO

<u>QUESTÃO 1</u>. Mostre que $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é dada por n^2.

Esta questão tinha como objetivo verificar se os estudantes utilizariam como estratégia a indução finita para demonstrar a validade da fórmula. Com relação às respostas apresentadas foi possível notar que o estudante E6S2Q1 utilizou como meio para resolver essa questão a indução empírica. Este estudante apresentou como solução o seguinte raciocínio:

$$\sum_{n=0}^{n}(2n+1)=(2.0+1)+(2.1+1)+(2.2+1)+\ldots+(2.n+1)\ =n^2.$$

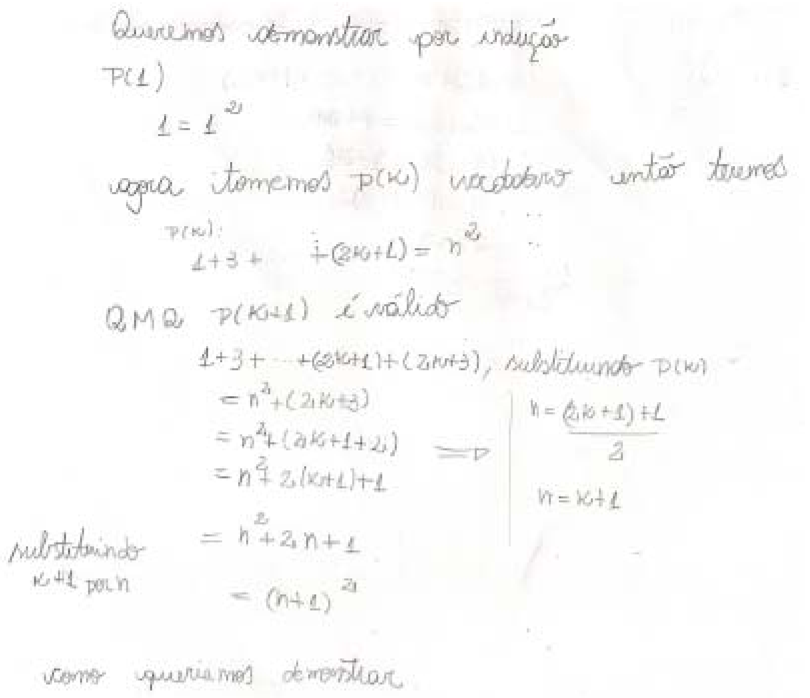
O estudante E8S2Q1 mostrou indícios de usar como estratégia a indução finita, porém esse estudante acabou usando, juntamente com a indução finita, a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. A partir daí o estudante acabou se confundindo com os passos da indução finita e a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética.

As demais soluções foram baseadas na indução finita, entretanto os estudantes cometeram alguns erros. Como por exemplo, o estudante E9S2Q1 apresentou indícios que usaria a indução finita para demonstrar a proposição, mas esse estudante não verificou a primeira parte deste princípio, ou seja, neste caso, não fez a verificação para $n = 1$, portanto esse estudante demonstrou apenas a segunda parte do princípio de indução finita.

Outros três estudantes que foram E2S2Q1, E5S2Q1 e E10S2Q1 também apresentaram pistas que usariam como estratégia a indução finita, entretanto, esses estudantes, ao fazerem a verificação da primeira etapa do processo de demonstração cometeram um erro. O erro cometido foi verificar a hipótese inicial para $n = 0$, o que não se aplica para a proposição, já que a questão é sobre a soma dos primeiros números naturais ímpares. Já o estudante E4S2Q1 verificou corretamente a primeira parte da indução finita, porém ao demonstrar a segunda parte se equivocou trocando o conjunto N^* por Z. Podemos inferir que esta troca significa que o estudante aborda a indução finita a partir do princípio da boa ordenação. Outra característica com relação à demonstração sugerida por esse estudante é que o mesmo utiliza a indução finita como método, ou seja, de forma mecânica.

Já os estudantes E1S2Q1, E3S2Q1, E7S2Q1, E11S2Q1, E12S2Q1 e E13S2Q1 confirmam nossa hipótese inicial, ou seja, adotam como estratégia a indução finita, mas a utilização fica caracterizada como um processo mecânico que se desenvolve a partir de modelos já conhecidos. Como exemplo, apresentamos a solução do estudante E3S2 Q1:

Figura 21 – solução apresentada pelo estudante E3S2Q1


Queremos demonstrar por indução

P(1)

$1 = 1^2$

agora temos P(k) verdadeiro então temos

P(k): $1+3+\ldots+(2k+1) = n^2$

QMQ P(k+1) é válido

$1+3+\ldots+(2k+1)+(2k+3)$, substituindo P(k)

$= n^2+(2k+3)$

$= n^2+(2k+1+2)$

$= n^2+2(k+1)+1 \Longrightarrow$ $n = \frac{(2k+1)+1}{2}$, $n = k+1$

substituindo k+1 por n $= n^2+2n+1$

$= (n+1)^2$

como queríamos demonstrar

Com relação a essa questão, comparando as análises a priori e a posteriori, encontramos que grande parte dos estudantes emprega a indução finita para demonstrar a veracidade de tal afirmação. Porém, a partir das análises das justificativas apresentadas pelos estudantes encontramos erros de manipulações de expressões algébricas, mas mesmo assim, a utilização da indução finita ficou caracterizada como a aplicação de um método. Dessa forma, entendemos que os estudantes se aproximaram do tipo de prova conceitual denominada experimento de pensamento, segundo Balacheff (1988).

Apenas um estudante afirmou que a proposição era verdadeira e justificou sua resposta apresentando verificações de alguns exemplos. Tal estudante realizou um empirismo ingênuo que, segundo Balacheff (1988), é considerado um tipo de prova pragmática.

A partir da análise das respostas dos estudantes entendemos que eles apresentaram, segundo a classificação de Hanna (1989b), um tipo de prova denominado provas que provam. Isso porque, nas soluções, não foi possível encontrar explicações dos estudantes de como eles procederam para chegar até a conclusão, se tal característica estivesse presente poderíamos dizer que se trata de um tipo de prova considerada pela autora como provas que explicam. Levando em conta agora os aspectos das demonstrações apresentados por Silva (2002), encontramos o retórico e o lógico-epistemológico, pois entendemos que com relação ao primeiro aspecto os estudantes procederam seguindo um modelo que já foi assimilado por eles em outras aulas, e com relação ao segundo é possível notar um desenvolvimento sequencial dos procedimentos que foram utilizados até chegarem a uma conclusão.

Analisando as respostas dos estudantes a partir das funções da demonstração temos que na perspectiva de Hanna (2000) a de verificar está presente, pois eles buscaram uma demonstração para mostrar que se tratava de uma proposição verdadeira, a de explicar, para esta questão, tem interpretação idêntica a análise da questão 4 da sessão anterior porém, os estudantes já tinham certeza que se tratava de uma afirmação verdadeira, sendo assim, eles não deixaram as pistas utilizadas na atividade anterior. A função de sistematizar ocorreu devido a uma certa organização apresentada pelos estudantes e por fim a de comunicar se deve ao fato de haver a comunicação escrita dos resultados obtidos.

Já considerando as funções da demonstração propostas por Villiers (2001) entendemos que a de verificação não ocorreu, pois não houveram verificações por parte dos estudantes sobre essa questão, a de explicação ocorreu devido a satisfação de encontrar uma solução para o problema proposto, o desafio intelectual se caracterizou pelo empenho dos estudantes ao buscar uma solução para o exercício. A função de sistematização é notada, pois elesapresentaram uma perspectiva global da situação e por fim a de comunicação que ocorre por meio das interações sociais entre os estudantes.

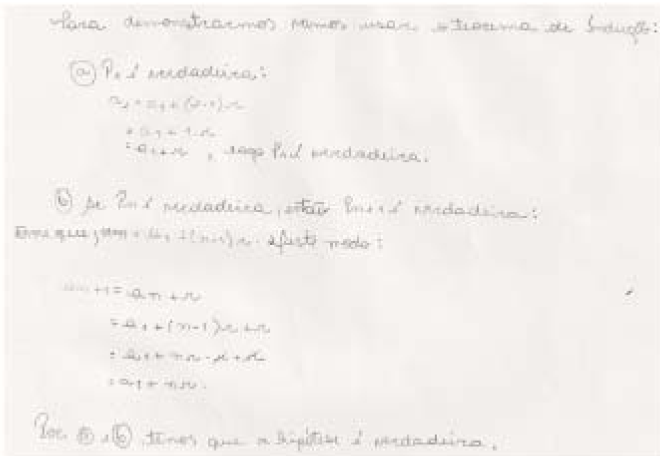
QUESTÃO 2. Uma Progressão Aritmética com primeiro termo a_1 e razão r é uma sequência de números cujo primeiro elemento é a1 e tal que cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior mais a razão. Em símbolos, se $n \geq 2$ então $a_n = a_{n-1} + r$. Prove que o termo geral de uma Progressão Aritmética é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Esta questão se refere à fórmula do termo geral de uma progressão aritmética e nosso objetivo continua sendo analisar quais as estratégias que os estudantes utilizaram para provarem essa afirmação. Durante as análises verificamos que os estudantes E6S2Q2, E9S2Q2 e E12S2Q2 apresentaram como estratégia para solucionar esse problema a indução empírica, ou seja, estes estudantes avaliaram casos particulares da fórmula e concluíram que se trata de uma fórmula verdadeira.

Os demais estudantes adotaram como estratégia a indução finita, porém alguns estudantes cometeram erros de transformações algébricas[22] na segunda etapa da demonstração. Outros estudantes impõem que se P(n) é verdadeira então P(n + 1) também será e a partir daí procuram relacionar as duas proposições. Dessa forma, notamos que a partir das respostas apresentadas pelos estudantes, nossa hipótese inicial se confirma novamente, isto é, que os estudantes utilizam a indução finita de maneira mecânica. Uma observação com relação a essa atividade é que o estudante E12S2Q2 iniciou sua demonstração estudando alguns casos particulares da fórmula e somente após essas verificações é que este estudante utilizou a indução finita.

Apresentamos a solução via indução finita do estudante E4S2Q2

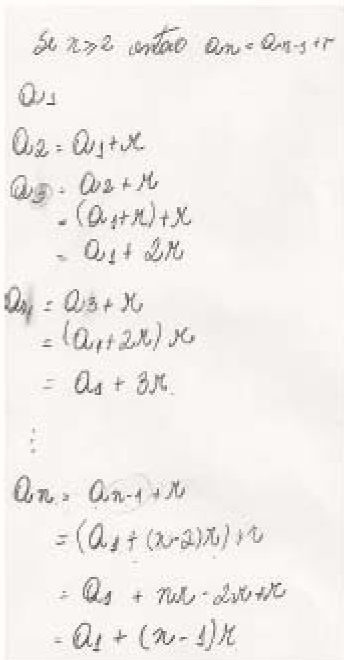
Figura 22 – solução apresentada pelo estudante E4S2Q2



A seguir destacamos uma solução onde o estudante E12S2Q2 utilizou a indução empírica:

[22] Transformação algébrica: segundo Miorim et al (1993), consiste no processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes entre si mediante a utilização de regras e propriedades válidas.

Figura 23 – solução apresentada pelo estudante E12S2Q2



Se $n \geq 2$ então $a_n = a_{n-1} + r$

a_1

$a_2 = a_1 + r$

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + r \\ &= (a_1 + r) + r \\ &= a_1 + 2r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + r \\ &= (a_1 + 2r)\, r \\ &= a_1 + 3r \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + r \\ &= (a_1 + (n-2)r) + r \\ &= a_1 + nr - 2r + r \\ &= a_1 + (n-1)r \end{aligned}$$

O exame das análises a priori e a posteriori mostrou que alguns estudantes justificaram suas respostas para essa questão por meio da indução empírica. Neste caso caracterizamos que houve um empirismo ingênuo, tipo de prova pragmática segundo Balacheff (1988).

Já os demais estudantes tentaram aplicar a indução finita para justificar as respostas. Como neste caso o uso da indução finita ficou caracterizado como um processo mecânico desenvolvido a partir de modelos já conhecidos por eles, assim, entendemos que tais estudantes estão próximos de realizarem um experimento de pensamento, considerado por Balacheff (1988) um tipo de prova conceitual.

Com relação as funções da demonstração que são indicadas por Villiers (2001) temos a de verificação ocorreu, pois os estudantes buscaram analisar casos particulares de que a fórmula da progressão aritmética é verdadeira, a explicação esteve presente no contentamento em apresentar uma solução para o problema, o desafio intelectual deveu-se ao fato deles terem se empenhado em solucionar o problema, a sistematização ocorreu devido a indicação de uma visão geral do problema, a função de descoberta se apresentou em função da investigação promovida pelos estudantes e a de comunicação foi notada a partir das interações sociais entre os estudantes.

Analisando as funções de demonstração apresentadas por Hanna (2000), encontramos a de verificar pela ação dos estudantes associarem a proposição como sendo verdadeira, a de explicar na qual eles apresentam argumentos que evidenciam a validade da proposição, a de sistematizar que ocorreu, pois houve uma organização deles ao resolverem a questão, a de comunicar tendo a demonstração como um resultado, a função de explorar pelo trabalho com a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética com a indução finita e a indução empírica e por fim da de incorporar que é sustentada pelo argumento de terem um conceito conhecido, que é o termo geral de uma progressão aritmética, com os conceitos de indução finita e indução empírica.

Considerando a classificação das provas a partir de Hanna (1989b), as respostas dos estudantes apresentaram aspectos que nos permitiram classificar as provas dadas em provas que provam já que não encontramos como característica a explicação deles de qual foi o procedimento para encontrarem uma solução. Levando em conta agora os aspectos de Silva (2002), notamos a presença do retórico e do lógico-epistemológico, pois os estudantes se preocuparam em seguir um modelo já apresentado anteriormente em outras aulas, além disso, temos que eles se preocuparam também em apresentar seus argumentos numa sequência ordenada.

QUESTÃO 3. Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges: "transfiram essa pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez e nunca permitindo que um disco fique acima de um menor. Quando terminarem essa tarefa e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá a pó e com um estrondo de trovões o mundo acabará".

Dizem os sábios que o mundo foi criado a 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de um disco por segundo. Será que o mundo vai acabar?

O problema da Torre de Hanói foi proposto pelo matemático francês Edouard Lucas (1842 -1891) em 1883. O nome Torre de Hanói foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã.

1. Utilizando a Torre de Hanói verifique quantos movimentos são necessários para movimentar 1 disco? E dois discos?

2. Com a Torre de Hanói determine quantos movimentos são necessários para mover 3 discos?
3. É possível diminuir o número de movimentos realizados?
4. Repita os procedimentos anteriores, considerando 4, 5, e 6 discos respectivamente.
5. Organize uma tabela com o número de discos utilizados e o número mínimo de movimentos para transportá-los de um bastão para outro.

Discos						
Movimentos						

6. Analisando a tabela que você organizou, é possível relacionar a quantidade de discos com o número mínimo de movimentos para resolver o problema? Qual é essa relação? Expresse-a por meio de uma fórmula.

O objetivo dessa questão era promover uma atividade experimental com os estudantes, para que na atividade proposta na sessão seguinte eles pudessem identificar as diferenças entre a indução empírica e a indução finita. Esta questão era composta por 6 perguntas que deveriam ser respondidas usando a torre de Hanói disponibilizada aos mesmos. Nem todos os estudantes responderam todas as perguntas dessa atividade. Por exemplo, o estudante E1S2Q3 não respondeu as perguntas 1, 2 e 3 propostas, mas apresentou respostas para as demais perguntas, inclusive utilizando a indução finita, como método, para demonstrar a veracidade da fórmula da pergunta 6.

Já os estudantes E2S2Q3, E5S2Q3, E1S2Q3 e E10S2Q3 responderam as perguntas 1, 2, 3, 4 e 5 corretamente, porém não conseguiram deduzir a fórmula proposta na pergunta 6. O estudante E8S2Q3 não apresentou respostas para todas as perguntas e respondeu as perguntas 4 e 5. Os estudantes E12S2Q3 e E13S2Q3 não responderam as perguntas 1 e 2, mas responderam às questões 3, 4 e 5. A diferença entre esses estudantes foi que o primeiro colocou, com relação à pergunta 6, que não há fórmula que expresse o número de movimentos mínimos em função do número de discos, enquanto que o segundo estudante deduziu de maneira errada a fórmula proposta.

Por fim, os estudantes E3S2Q3, E4S2Q3, E6S2Q3, E7S2Q3, e E11S2Q3 responderam a todas as questões corretamente, inclusive deduziram a fórmula da pergunta 6 perfeitamente.

O intuito dessa atividade era que os estudantes, a partir de diversas experimentações com a torre de Hanói, conseguissem solucionar as questões. Durante essa atividade os estudantes não precisaram demonstrar nenhuma afirmação. Assim, consideramos que nesta etapa da atividade os estudantes realizaram um experimento genérico, que segundo Balacheff (1988), é uma etapa de transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais.

Durante a resolução desta questão não era necessário que os estudantes demonstrassem nenhuma proposição. Mesmo assim entendemos ser possível que eles apresentem características com relação às funções da demonstração, já que esta atividade se refere a indução empírica para encontrar uma solução. Dessa forma, analisando as respostas dos estudantes e os comportamentos durante a realização dessa atividade foi possível concluirmos que todas as características que levantamos na análise a priori, segundo Hanna (2000) e Villiers (2001) foram apresentadas por eles.

Assim, com relação as características propostas por Hanna (2000), entendemos que a de verificar é associada pelos estudantes, pois eles verificaram experimentalmente que uma fórmula poderia ser deduzida a partir dos movimentos dos discos da Torre de Hanói, a de explicar se constituiu pelo fato deles completarem a tabela a partir das experiências vivenciadas com o jogo, a de sistematizar deveu-se a organização apresentada pelos estudantes, a descoberta deveu-se pelo fato de conjecturarem a existência de uma fórmula matemática a partir de uma experiência matemática. A função de comunicar deveu-se pela argumentação apresentada nas soluções propostas por eles e por último a de explorar onde eles puderam relacionar os resultados com experiências.

As funções da prova dadas por Villiers (2001) foram as de verificação caracterizada pelas experiências realizadas pelos estudantes, a de explicação que entendemos ser indicada pela satisfação da experiência ter sido bem sucedida por eles, a de descoberta onde os mesmos puderam explorar, analisar e vivenciar um processo de descoberta, a função do desafio intelectual onde os estudantes se esforçaram para resolver o problema proposto, a de sistematização que se constituiu como aplicações tanto dentro como fora da matemática e por fim a da comunicação que ocorre devido as interações sociais vivenciadas por eles.

3ª SESSÃO

QUESTÃO. Em relação ao problema da Torre de Hanói, é possível construir um quadro indicando a quantidade de discos e o número mínimo de movimentos para mudá-los de bastão. Por exemplo:

Discos (n)	1	2	3	4	5
Movimentos (m)	1	3	7	15	31

Analisando a tabela anterior, é possível concluir que para um número n qualquer de discos temos que a quantidade de movimentos mínimos é dada por: $m = 2^n - 1$.

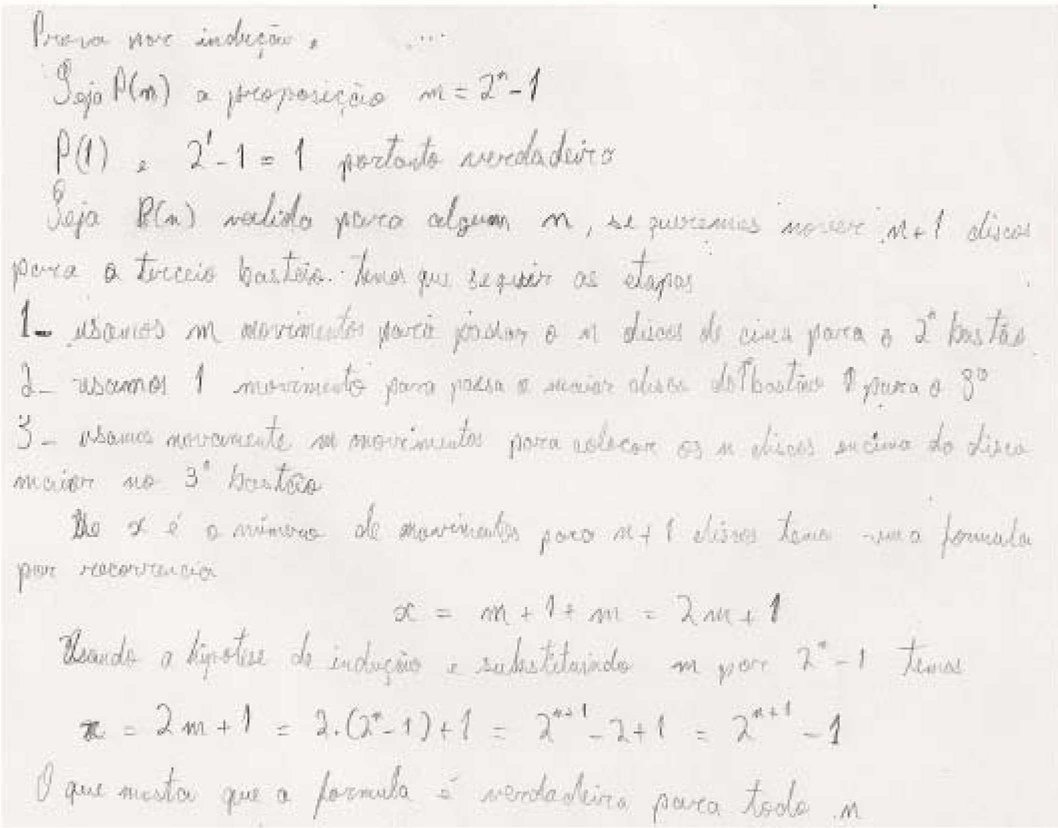
- Mostre que a fórmula anterior é verdadeira
- Sabendo que, segundo os sábios, o mundo foi criado a 4 bilhões de anos e que há 64 discos na Torre original e ainda que os sábios estão movendo os discos na razão de um disco por segundo responda: será que o mundo irá acabar?

Nosso objetivo nesta sessão era analisar qual seria a abordagem dos estudantes, com relação ao nosso objeto de estudo, isto é, a indução finita. Assim, com relação à primeira pergunta dessa atividade, que se refere à demonstração da fórmula do número mínimo de movimentos em função do número de discos da torre de Hanói, temos que o estudante E11S3Q1 não apresentou solução para esta pergunta. Já os estudantes E2S3Q1, E5S3Q1 e E10S3Q1 deixaram alguns cálculos indicados como justificativa que a fórmula é verdadeira. Neste caso temos que os estudantes utilizaram como estratégia a indução empírica.

Os estudantes E3S3Q1 e E7S3Q1 apresentaram indícios de que utilizariam a indução finita, porém eles não conseguiram desenvolver a demonstração. Enquanto isso os demais estudantes abordaram o problema via indução finita, mas todos desenvolveram a demonstração de forma mecânica e isso comprova novamente a hipótese levantada nesta pesquisa. Uma característica que podemos notar em relação às respostas apresentadas nessa atividade é que os estudantes afirmam sempre que se P(n) for verdadeira então P(n +1) também será verdadeira, ou seja, que a veracidade da primeira condição sempre valida a segunda.

Indicamos a seguir a solução apresentada pelo estudante E1S3Q1

Figura 24 – solução apresentada pelo estudante E1S3Q1


Prova por indução:

Seja P(n) a proposição $m = 2^n - 1$

P(1): $2^1 - 1 = 1$ portanto verdadeiro

Seja P(n) válido para algum n, se quisermos mover n+1 discos para o terceiro bastão temos que seguir as etapas

1- usamos m movimentos para mover os n discos de cima para o 2º bastão

2- usamos 1 movimento para passar o maior disco do bastão 1 para o 3º

3- usamos novamente m movimentos para colocar os n discos em cima do disco maior no 3º bastão

Se x é o número de movimentos para n+1 discos temos uma fórmula por recorrência

$$x = m + 1 + m = 2m + 1$$

Usando a hipótese de indução e substituindo m por $2^n - 1$ temos

$$x = 2m + 1 = 2.(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

O que mostra que a fórmula é verdadeira para todo n

A comparação entre as análises a priori e a posteriori dessa questão apontam que alguns estudantes apresentaram como justificativa algumas verificações, ou seja, realizaram alguns testes, isto é, realizaram algumas substituições para mostrar que a fórmula do número mínimo de movimentos necessários para passar os discos de um bastão para outro da torre de Hanói é verdadeira. Assim, esses estudantes se basearam na indução empírica. Consideramos, portanto, que tais estudantes promoveram um empirismo ingênuo, tipo de prova pragmática ao tentarem justificar suas soluções dessa maneira.

Os estudantes que utilizaram a indução finita para justificarem suas respostas, usaram como um método, ou seja, como uma receita a ser seguida, como um processo mecânico. Dessa forma, com relação a esses estudantes concluímos que estes chegaram próximos a promover um experimento de pensamento, que é classificado por Balacheff (1988) como um tipo de prova conceitual.

A partir das respostas dos estudantes temos que eles apresentaram para esta questão um tipo de prova, denominado por Hanna (1989b) como uma prova que prova, isso porque, em nossa análise, não encontramos explicações que indicassem quais foram os procedimentos que eles utilizaram afim de chegarem até a conclusão. Considerando agora as ideias de Silva (2002) localizamos o aspecto retórico, já que os estudantes se basearam em modelos para desenvolverem sua resposta e o aspecto lógico-epistemológico caracterizado pelo encadeamento lógico de suas respostas.

Em nossa análise entendemos que as funções de demonstração apresentadas por Hanna (2000) foram caracterizadas da seguinte maneira: a de verificar se associa com as verificações que foram promovidas pelos estudantes a fim de comprovar a validade da fórmula do número de movimentos mínimos para movimentar os discos da Torre de Hanói, a de explicar foi possível de ser constatada, pois as verificações apontadas anteriormente por eles indicam qual o raciocínio foram utilizados pelos mesmos, a de sistematizar mostra que eles apresentaram a solução com certa organização, a função de comunicar se destaca a partir da notificação da solução encontrada, a de explorar pode ser notada pela associação entre a atividade experimental e a experiência matemática e por último a de incorporar que é percebida devido a relação entre um problema e a teoria matemática.

Já as funções de prova que são destacadas por Villiers (2001) que percebemos foram: a de verificação caracterizada devido as substituições que os estudantes fizeram na fórmula do número de movimentos dos discos com o intuito de comprovar que esta era verdadeira, a de explicação que está relacionada com a demonstração, via indução finita, proposta pelos estudantes, a qual pode gerar uma satisfação pessoal por ter consigo chegar a uma conclusão, o desafio intelectual que se refere ao empenho deles em solucionarem o problema proposto, a função de sistematização que pode ser constatada, pois os estudantes apresentaram uma perspectiva global do problema, a de descoberta que é caracterizada devido a análise do problema e ao processo de explorar e por fim devido as interações sociais que a questão gerou está também presente a função de comunicar.

4ª SESSÃO

QUESTÃO 1. Mostre que proposição $P(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ é verdadeira para $\forall \ n \in \mathbb{N}^*$.

O objetivo desta questão era verificar se após a abordagem da indução finita via axiomas de Peano os estudantes mudariam o tratamento com relação ao nosso objeto de estudo, a indução finita.

Como já dissemos, antes de iniciar esta sessão apresentamos os axiomas de Peano e demonstramos o princípio de indução finita e concluímos nossa apresentação com dois exemplos de como utilizar a indução finita. Desse modo, um dos objetivos de apresentar os axiomas de Peano e demonstrar o princípio de indução finita aos estudantes nesta etapa da sequência didática foi mostrar a eles primeiramente que certas afirmações na Matemática não podem ser consideradas verdadeiras apenas por meio de observações. Dessa forma, nesta etapa, procuramos apresentar algumas ideias que diferenciam a prova por indução empírica da prova por indução finta.

Outro objetivo em discutir os axiomas de Peano e o princípio de indução finita com os estudantes foi mostrar que a aplicação deste conceito é composta por duas etapas onde a primeira delas é chamada de base e a segunda constitui o passo indutivo. Além disso, nosso intuito era deixar claro que para uma afirmação ser demonstrada utilizando a indução finita ambas as etapas deve ser satisfeitas.

Além dos objetivos que já destacamos, procuramos mostrar aos estudantes, com alguns exemplos uma maneira de se utilizar a indução finita. Nos exemplos que apresentamos destacamos a importância de se verificar as duas propriedades que compõe a demonstração por indução finita e, além disso, enfatizamos que ao final da demonstração é necessário que na conclusão indique que tal proposição é verdadeira devido ao princípio de indução finita. Portanto, ao final da apresentação esperávamos que os estudantes começassem a ver a demonstração por indução finita como uma prova dedutiva e não como um método empírico.

Esta questão ocorre frequentemente nos livros didáticos analisados e nos demais livros que utilizamos para construir a sequência didática. Assim, com relação à estratégia adotada pelos estudantes temos que todos utilizaram a indução finita, entretanto, as soluções apresentadas ainda foram desenvolvidas mecanicamente, isto é, como se bastasse apenas verificar as condições do teorema de indução finita. Porém, com relação à apresentação da demonstração, os estudantes conseguiram desenvolver o raciocínio especificando quais hipóteses estavam sendo verificadas.

Como exemplo, destacamos a solução apresentada por E8S4Q1:

Figura 25 – solução apresentada pelo estudante E8S4Q1

(1) Seja $P(n): 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

(2) $P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ é verdadeira, pois $P(1): 1=1$ é verdadeira.

(3) Suponha que $P(n): 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ é verdadeira. Devemos provar que $P(n+1): 1+2+\ldots+(n+1) = \frac{n+1(n+1+1)}{2}$ é verdadeira, ou ainda,

$P(n+1): 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n^2+3n+2}{2}$ é verdadeira.

Vejamos,

$P(n): 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ ⇒ somamos $(n+1)$ de cada lado da igualdade

$P(n+1): 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2}$

$= \frac{n^2+3n+2}{2}$

Desta forma chegamos à nossa tese e concluímos que $P(n+1)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

As análises a priori e a posteriori dessa questão evidenciaram uma característica com relação às respostas dos estudantes. Todos resolveram a questão utilizando a indução finita, porém as justificativas continuaram incompletas, ou seja, as conclusões são dadas da seguinte forma: "como valem as propriedades i e ii temos que a proposição é verdadeira." Não explicitando referência ao princípio de indução finita. É a partir de respostas semelhantes a anterior que podemos concluir que os estudantes ainda utilizam a indução finita como um processo mecânico, como aponta Savioli (2007). Ou que, influenciados por uma concepção linguística-pragmática esperam aprender um conteúdo enquanto que o discurso é sobre um método dedutivo, segundo Cury et al (2002). Contudo não podemos afirmar que eles estão errados, pois podem ter aprendido desse modo nos livros didáticos ou ainda nas disciplinas anteriores.

Dessa maneira, temos que segundo Balacheff (1988), os estudantes mantiveram-se próximos de realizar um experimento de pensamento, que é classificado pelo mesmo autor como um tipo de prova conceitual.

Além de classificar as soluções apresentadas pelos estudantes segundo a perspectiva de Balacheff (1988), podemos complementar a análise desta questão segundo os aspectos definidos por Silva (2002) com relação à demonstração, isto é, encontramos presente na resolução dos estudantes o aspecto retórico e o aspecto lógico-epistemológico. Com relação ao aspecto retórico temos que os estudantes, ao apresentarem suas justificativas, atuam apoiando suas ações em critérios já estabelecidos anteriormente. Quanto ao aspecto lógico-epistemológico os estudantes procuram desenvolver as demonstrações como sequências ordenadas.

Com relação às características apresentadas por Hanna (1989b) acreditamos que as soluções dos estudantes proporcionaram provas que provam, pois o objetivo deles consistiu em validar a proposição sem se preocuparem em explicar quais foram os procedimentos adotados.

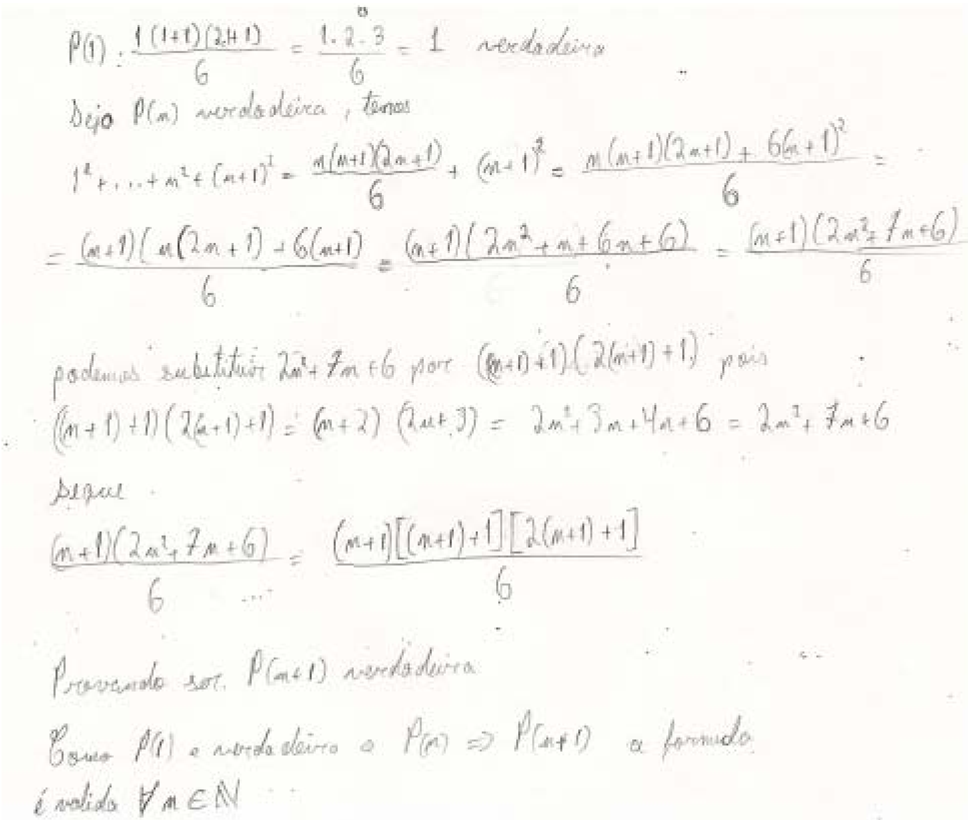
Analisando as respostas dos estudantes a fim de buscar pistas sobre as funções da demonstração presentes nas soluções temos que, considerando Hanna (2000), não há a presença da verificação. Acreditamos que a ausência desta se deve pelo fato de já termos enunciado o princípio de indução finita antes do início das atividades. A função de sistematizar foi notada, pois os estudantes estruturaram a demonstração de uma maneira mais organizada, isto é explicitaram quais eram as etapas que estavam demonstrando e a de comunicar ocorreu quando houve a apresentação dos resultados obtidos. Complementando nossa análise é possível notar que com relação as características apresentadas por Villiers (2001) a função de verificação também não ocorreu. Entendemos que a razão é a mesma que apresentamos anteriormente, ou seja, após a apresentação do princípio de indução finita via axiomas de Peano os estudantes estavam certos de qual o caminho utilizar para demonstrar a proposição. A função de sistematização foi notada, pois eles conseguiram identificar algumas inconsistências que desenvolveram em atividades anteriores. A de explicação foi observada porque os estudantes conseguiram validar a proposição. A função de desafio intelectual esteve presente, pois os estudantes demonstraram interesse em provar que a proposição proposta é verdadeira e por último a de comunicação pelo fato deles interagirem entre si durante a resolução do problema.

QUESTÃO 2. Prove que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

O objetivo desta questão também era verificar a abordagem dos estudantes com relação a indução finita. Na análise das demonstrações apresentadas pelos estudantes para esta questão encontramos características semelhantes às levantadas no problema anterior, ou seja, os estudantes continuaram aplicando a indução finita mecanicamente. Com relação às análises é possível notar que os estudantes continuaram a deixar a demonstração incompleta, ou seja, eles provam as duas etapas que constituem o princípio de indução finita, mas não concluem a demonstração. Apesar dos estudantes não concluírem a demonstração das proposições eles conseguiram organizar a demonstração de modo mais adequado, isto é, especificando qual passo eles estão provando.

Por exemplo, o estudante E1S4Q2 apresentou a seguinte solução:

Figura 26 – solução apresentada pelo estudante E1S4Q2


$P(1): \dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = \dfrac{1.2.3}{6} = 1$ verdadeira

Seja $P(n)$ verdadeira, temos

$1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} =$

$= \dfrac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

podemos substituir $2n^2+7n+6$ por $((n+1)+1)(2(n+1)+1)$ pois

$((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$

segue

$\dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \dfrac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$

Provando ser $P(n+1)$ verdadeira

Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ a formula é valida $\forall n \in \mathbb{N}$

Confrontando as análises dessa questão notamos que os estudantes continuaram aplicando a indução finita como um processo mecânico, ou seja, o objetivo dos estudantes se limita a buscar ou identificar modelos de problemas semelhantes para serem seguidos. Dessa forma, caracterizamos as respostas apresentadas como algo próximo ao experimento de pensamento, que é um tipo de prova conceitual, segundo Balacheff (1988).

Com relação aos apontamentos de Hanna (1989b), podemos classificar as provas que os estudantes apresentaram por indução finita como provas que provam, já que a finalidade deles consistia em mostrar a validade da proposição. Já a partir das considerações de Silva (2002) temos presente novamente nas justificativas dos estudantes os aspectos retórico e lógico-epistemológico. O primeiro desses aspectos ocorre, pois entendemos que os estudantes apresentaram algumas características que apontam influências pela forma didática que o conteúdo foi apresentado. Já o segundo aspecto se deve pela maneira sequencial que os estudantes apresentam suas justificativas.

Analisando as funções de demonstração que são propostas por Villiers (2001) temos que a de verificação não ocorreu, entendemos que isso se deve pelo fato de já termos apresentado o princípio de indução finita juntamente com alguns exemplos. A função de explicação consistiu na satisfação pessoal dos estudantes em resolverem a questão. O desafio intelectual esteve presente, pois eles se empenham em solucionar o problema proposto e a função de sistematização esteve presente porque os estudantes indicaram os passos que seguiram para resolverem o problema e isso quer dizer que eles apresentaram a solução de modo organizado. A comunicação caracterizou-se a partir das interações sociais promovidas por eles mesmos.

Com relação as funções que Hanna (2000) apresenta, temos que a verificação não foi possível notar, pois os estudantes já sabiam qual prova deveriam empregar para solucionar a questão, mas a sistematização ocorreu e é notada pela organização. A comunicação apresentou-se pela solução dada pelos estudantes.

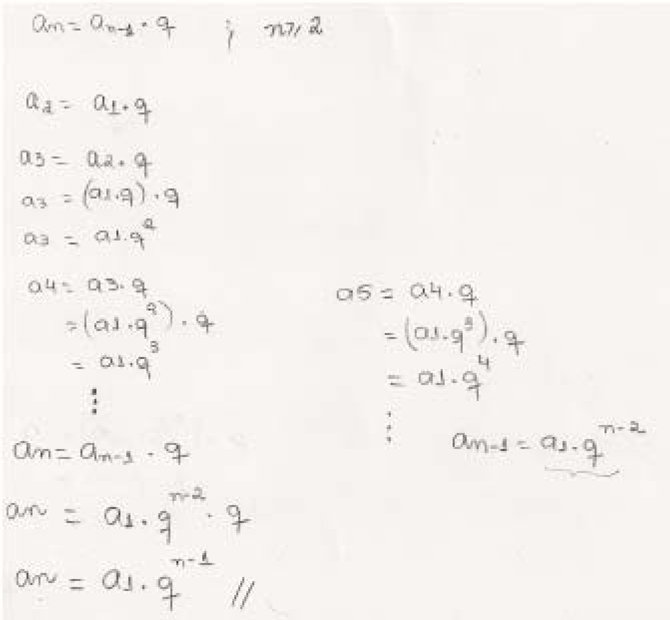
<u>QUESTÃO 3</u>. Uma progressão Geométrica com primeiro termo ai e razão $q\ (q \neq 0 \text{ e } q \neq 1)$ é uma sequência de números cujo primeiro elemento é a1 e tal que, cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado pela razão. Em símbolos, se $n \geq 2\ a_n = a_{n-1}.q$. Prove que a fórmula do termo geral de uma Progressão Geométrica é $a_n = a_1.q^{n-1}$.

A finalidade dessa questão também era observar a abordagem dos estudantes com relação a indução finita.

Os estudantes E2S4Q3 e E10S4Q3 apresentaram pistas de que aplicariam a indução finita para demonstrar a proposição, mas não conseguiram desenvolver a prova. Já os estudantes E5S4Q3, E6S4Q3, E9S4Q3 e E12S4Q3 não utilizaram a indução finita para demonstrar a proposição. Utilizaram o método de indução empírica, isto é, as justificativas foram baseadas a partir das seguintes verificações: $a_2 = a_1.q$; $a_3 = a_2.q = a_1.q.q = a_1.q^2$; $a_4 = a_3.q = a_1.q^2.q = a_1.q^3$ e que em geral tem-se $a_n = a_1.q^{n-1}$.

Como exemplo, destacamos a solução do E5S4Q3:

Figura 27 – solução apresentada pelo estudante E5S4Q3



$a_n = a_{n-1} \cdot q \; ; \; n \geq 2$

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q$

$a_3 = (a_1 \cdot q) \cdot q$

$a_3 = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q$

$= (a_1 \cdot q^2) \cdot q$

$= a_1 \cdot q^3$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} \cdot q$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot q$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ //

$a_5 = a_4 \cdot q$

$= (a_1 \cdot q^3) \cdot q$

$= a_1 \cdot q^4$

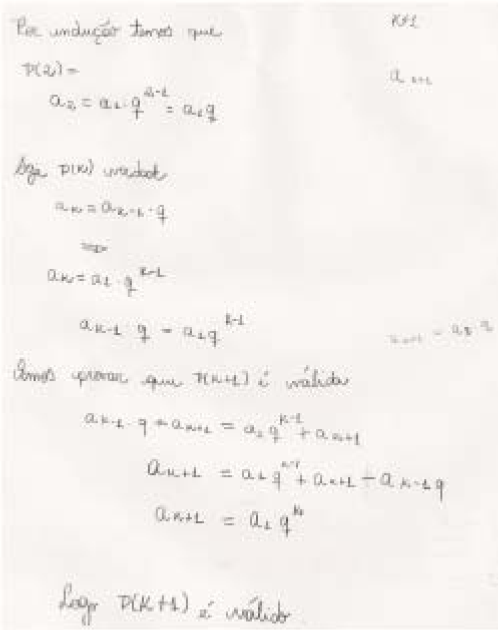
$\vdots$

$a_{n-1} = a_1 \cdot q^{n-2}$

Os demais estudantes demonstraram esta proposição via indução finita, no entanto, os mesmos equívocos das questões anteriores desta mesma atividade se mantiveram, ou seja, os estudantes continuaram aplicando a indução finita de maneira mecânica, como um processo mecânico. As demonstrações continuaram sem conclusões, mas a utilização da linguagem matemática melhorou, isto é, os estudantes começaram a especificar o que estavam tentando demonstrar. Esse modo, que nós consideramos, mais organizado dos estudantes aplicarem a indução finita ocorreu após a apresentação dos axiomas de Peano e a demonstração do princípio de indução finita.

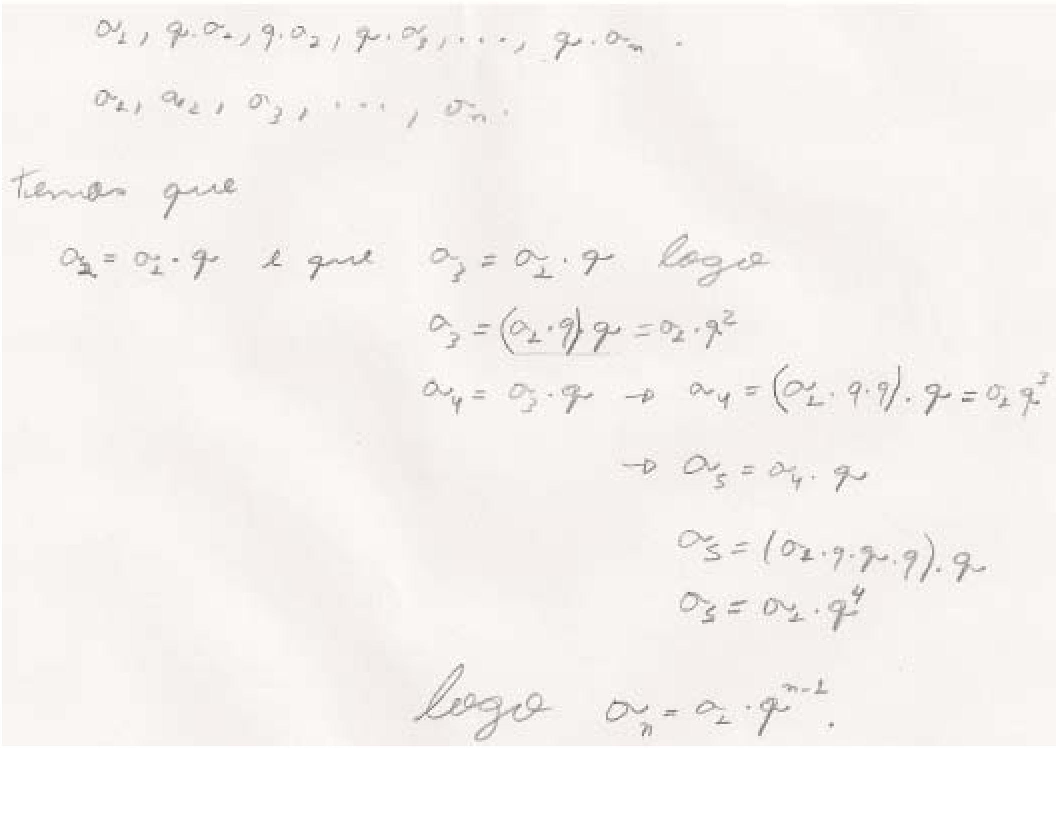
Destacamos a solução do estudante E3S4Q3 que utilizou o princípio de indução finita.

Figura 28 – solução apresentada pelo estudante E3S4Q3



Já o estudante E6S4Q3 aplicou a indução empírica, como podemos observar abaixo:

Figura 29 – solução apresentada pelo estudante E6S4Q3



Sendo esta a última atividade da sequência didática acreditávamos que todos os estudantes utilizariam a indução finita para resolverem a questão, porém nem todos usaram essa justificativa.

As análises dessa questão mostraram que alguns estudantes fizeram verificações de casos particulares para a fórmula da soma do termo geral de uma progressão geométrica. Dessa forma fica caracterizado o empirismo ingênuo, que é, segundo Balacheff (1988), um tipo de prova pragmática. Já os demais estudantes aplicaram a indução finita e continuaram apresentando as mesmas características que já levantamos neste trabalho, isto é, o uso desse princípio fica restrito a aplicação de um método, ou seja, os estudantes caracterizaram a utilização da indução finita de forma mecânica. Dessa forma, temos que os mesmos se aproximaram de um tipo de prova conceitual chamada de experimento de pensamento.

Os estudantes utilizaram a indução finita com o objetivo de provar uma proposição, e isto caracteriza, segundo Hanna (1989b), um tipo de prova denominado prova que prova. Já com relação aos aspectos apresentado por Silva (2002) encontramos novamente o retórico que é caracterizado por alguns termos que apontam para a influência da forma didática que foi apresentado esse conteúdo. O lógico-epistemológico verificou-se por conter sequências ordenadas na solução.

Entendemos, a partir de nossas análises, que durante o desenvolvimento das respostas os estudantes apresentaram as seguintes funções das demonstrações, segundo Hanna (2000): a de verificar não estava dentre as funções, pois os estudantes já sabiam que deveriam utilizar a indução finita para mostrarem que a proposição era verdadeira, dessa forma não foram necessários testes a fim de constatar que se tratava realmente de uma afirmação verdadeira, a de explicar também não apareceu nas respostas, pois eles já sabiam quais procedimentos deveriam ser tomados. A função de sistematizar foi notada a partir da organização apresentada por eles, isto é, os estudantes deixaram claro quais eram as etapas que estavam sendo demonstradas e a de comunicar deveu-se pela resposta apresentada. Levando em consideração agora as funções da demonstração que Villiers (2001) apresenta, não encontramos a verificação pela mesma razão já colocada anteriormente, isto é, por termos apresentado o princípio de indução finita seguido de alguns exemplos, e a sistematização deu-se por meio da organização e por relacionar informações isoladas, o desafio intelectual se constituiu devido ao empenho apresentado pelos estudantes a fim de resolverem a questão, a função de explicação aconteceu a partir da sensação de compreender e resolver o problema e a de comunicação é notada a partir das interações sociais entre os estudantes.

CAPÍTULO 6
CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi verificar por meio de uma sequência didática, que trabalha com a indução finita via axiomas de Peano, se os estudantes compreenderiam a diferença entre o método de indução empírica e de indução finita, bem como, esta última como uma demonstração formal e não somente como um processo mecânico.

No decorrer do trabalho apresentamos elementos como a análise de livros didáticos, os aspectos históricos e filosóficos, além de uma sequência didática construída a partir dos pressupostos da engenharia didática, que apontam para uma discussão acerca do objeto matemático indução finita. Isto se deve pelo fato de alguns estudantes, mesmo já tendo estudado anteriormente este assunto em outras oportunidades, confundirem o uso da indução finita com o da indução empírica.

Com relação a demonstração de sentenças que envolvem o princípio de indução finita serem utilizadas como um processo mecânico por alguns estudantes, acreditamos que a característica que identifica tal processo é quando o estudante não cita em momento algum durante a demonstração de uma dada proposição o princípio de indução finita, ou seja, prova as duas propriedades do teorema sem relacioná-las com o mesmo, desenvolvendo-as de modo independente.

Dessa forma, notamos que nas primeiras atividades da sequencia didática os estudantes utilizaram a indução finita como um processo mecânico, semelhante ao da indução empírica, ou seja, promoveram a verificação de alguns casos particulares e concluíram que a afirmação era verdadeira para todos os demais casos. Durante o processo de análise das justificativas apresentadas pelos estudantes foi possível perceber que o objetivo destes consistia em verificar os passos do princípio de indução finita e a seguir apresentar uma conclusão, onde afirmavam que se a propriedade que estavam avaliando vale para P(n+1) também vale para P(n), isto é, se a propriedade é verificada para o sucessor de n então, esta propriedade, também pode ser estendida para n. Entretanto, a indução finita mostra que se uma propriedade é verdadeira para um n então é verdadeira também para o seu sucessor.

Desse modo, essa análise indica que alguns dos estudantes que participaram das atividades pensam de modo contrário ao apresentado no princípio de indução finita.

Ainda com relação às atividades iniciais da sequência didática, notamos que alguns estudantes verificaram certos casos particulares da propriedade que estão tentando demonstrar. Isso mostra indícios de que tais estudantes apresentaram um tipo de prova, considerada por Balacheff (1988), como prova pragmática, pois suas ações ficam caracterizadas em verificações particulares da afirmação. Com isso, temos que, esses estudantes apresentam suas conclusões baseadas na indução empírica, entretanto, na matemática este processo não é útil para demonstrar afirmações.

Outra análise realizada a partir das respostas das atividades propostas é que alguns estudantes não concluem suas demonstrações, sejam elas pela indução finita ou pelo método indutivo, ou seja, os estudantes indicam o procedimento que utilizaram para demonstrar ou verificar a validade de uma proposição, porém não deixam explícita a conclusão que chegaram. Assim, com relação à indução finita, a impressão que temos é que os estudantes são instruídos pela intuição a verificar as condições que compõe esse método, isto é, se interessam pela busca de modelos, dessa forma, caracterizamos tal aplicação como um processo mecânico a ser desenvolvido, ou como uma "receita" a ser seguida como aponta Savioli (2007). Além disso, os estudantes, provavelmente, se quer se interessam em apresentar ou dar algum significado à propriedade que estão provando. Isto aponta indícios de que eles têm como objetivo concluir rapidamente a demonstração, ou seja, como apontam Cury et al (2002), procuram seguir um modelo a fim de obter regras para solucionar o problema proposto. Essa preocupação em obter regras e modelos e seguir instruções apresenta sinais de que os estudantes pensam de forma empírica. Essa forma de expressar o raciocínio é, segundo Balacheff (1988), um tipo de prova pragmática, denominada empirismo ingênuo, onde os estudantes se expressam de maneira prática.

Além disso, nossas análises apontam que os estudantes associam equivocadamente a indução finita e a indução empírica. Acreditamos que isso se deve ao fato do termo indução pertencer às duas nomenclaturas. Notamos, que grande parte dos livros didáticos apresenta o tema indução finita apenas como indução, e essa pode ser uma das razões que influenciam os estudantes a associar esses dois métodos. Esta abordagem possui razões históricas. Segundo Cajori (2007), o termo indução foi usado de forma ocasional na matemática, assim este termo possui dois significados: (1) para indicar induções incompletas da ciência natural e (2) para prova de n a $n+1$. Outro motivo que encontramos para que autores de livros didáticos usem o termo indução ao invés de indução finita é com a intenção de simplificar a linguagem.

Contudo, notamos a partir da avaliação das respostas dos estudantes que isto pode gerar uma confusão com relação ao entendimento de cada uma dos conceitos envolvidos, assim entendemos que a simplificação de linguagem pode atrapalhar os estudantes. Para isto basta observar que alguns dos estudantes que participaram da pesquisa apenas observaram a validade de uma determinada proposição para casos particulares e após essa verificação eles generalizam para qualquer valor de *n*.

Voltando novamente às análises das atividades propostas na sequência didática temos que mesmo após expor para os estudantes os axiomas de Peano, demonstrar o princípio de indução finita e enfatizar que este princípio é um método dedutivo, as atividades realizadas em seguida, ou seja, na 4ª sessão, apresentaram características semelhantes às verificadas nas atividades anteriores. Temos assim, que determinados estudantes continuaram a interpretar a indução finita como um processo mecânico, buscando modelos para solucionar todos os problemas propostos. No entanto, mesmo mantendo essas características, pudemos observar uma mudança em relação à apresentação da demonstração. Isto é, alguns estudantes expuseram de maneira mais organizada suas demonstrações. Portanto, a partir desse novo panorama concluímos que parte dos estudantes passou do nível do empirismo ingênuo para o nível do exemplo genérico, este último considerado por Balacheff (1988), um momento de transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais.

Como aponta Hanna (1990), a prova é considerada uma atividade da educação matemática para elucidar ideias e transmitir valores aos estudantes. Portanto, sendo a indução finita um método de demonstração formal e um conteúdo abordado inicialmente nas primeiras séries dos cursos de Matemática, existe a oportunidade dos estudantes realizarem suas primeiras experiências matemáticas, ou seja, refletir sobre alguns casos particulares, realizar conjecturas e por fim demonstrá-las usando esse método.

Por fim esperamos que essa pesquisa contribua para uma reflexão do objeto matemático indução finita, a fim de que esse tema, ao ser abordado, em vários níveis não seja visto apenas como um processo mecânico ou uma "receita" a ser seguida. Que os estudantes não fiquem somente à procura de modelos, que não façam associação da indução finita com a indução empírica, mas que possam buscar significado para as fórmulas, além de formalizar suas demonstrações e desenvolver o raciocínio abstrato, elementos considerados fundamentais tanto para um pesquisador em matemática quanto para um professor de matemática.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia.** 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ALMOULOUD, S. A. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n.6, p. 62-77, UFSC, 2008.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A. **Prova e demonstração em matemática**: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: ENCONTRO ANUAL DA ANPED, 30., 2007, Caxumbu. Reunião Anual da ANPED. Timbauda-PE: Espaço Livre, 2007. v. 1. p. 1-18.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In. BRUN, Jean (Org.) Trad. Maria José Figueiredo **Didactica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ÁVILA, G. S. S. **Análise matemática para licenciatura**. São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In David Pimm (Ed.). **Mathematics teachers and children.** Hodder and Stoughton, London, 216 - 229, 1988.

BALACHEFF, N. Preuve et démonstration en mathématiques au collège. **Recherches em Didactique des Matémathiques**, Grenoble, v. 3, n. 3, p. 261-304, 1982.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 18, n. 2, p. 147-176, 1987.

BALACHEFF, N. Is Argumentation an Obstacle? **International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof**. Grenoble, n.1, may-jun, 1999.

BALACHEFF, N. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. **Les Cahiers du Laboratoire Leibniz**, Grenoble, n. 109, 2004.

BARON, M. E. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução: Jose Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1985, v. 1.

BASHMACOVA, I.; SMIRNOVA, G. The Beginnings e Evolution of Algebra. **The Mathematical Association of America**, n. 23, 2000. (Dolciani Mathematical Expositions).

BICUDO, I. História da matemática: o pensamento da filosofia grega antiga e seus reflexos na Educação Matemática do mundo ocidental. In. BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. (Seminários e Debates).

BICUDO, I. Peri Apodeixeos/DeDemonstratione. In BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 2. ed. Revisada, São Paulo: Corteza, 2005.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. Filosofia da educação matemática. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1999.

BORBA, M. C. A Pesquisa qualitativa em educação matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27., Caxambu, MG, 21-24 Nov. 2004.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

CAJORI, F. Origin of the Name "Mathematical Induction". **The American Mathematical Monthly**, v. 25, n.5, p. 197-201, maio. 1918.

CAJORI, F. **Uma história da matemática**. Tradução: Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

CARNEIRO, J. P. Q. O princípio da descida infinita de fermat. **Revista do Professor de Matemática**, **Sociedade Brasileira de Matemática**, n. 32, p. 39-45, 1996.

CARNIELLI, W. A.; EPSTEIN, R. L. **Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2006.

CARVALHO, A. M. F. T. **A extimidade da demonstração**. 2004. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, São Paulo.

CARVALHO, C. C. S**. Uma análise praxeológica das tarefas de provas e demonstração em tópicos de álgebra no primeiro ano do ensino médio**. 2007. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CEPE n. 42/2005 **Universidade Estadual de Londrina** - UEL.

CHAUÍ, Marilena. **Convite à filosofia**. 12 São Paulo, Ática, 2000.

CUNHA, A. G. **Dicionário etimológico nova fronteira da língua portuguesa**. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

CURY, H. N., VIANNA, C. R., LANNES, W. BROLEZZI, A. C. Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de matemática. **Educação Matemática em Revista - RS**, Rio Grande do Sul, v. 4, n. 4, p. 9-15, 2002.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática)

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Tradução: João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DE VILLIERS, M. D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o sketchpad. **Educação e Matemática**. n. 62, p. 31-36, Mar/Abr, 2001.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 1982.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

DOMINGUES, H. H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. **Bolema**, Rio Claro, ano 15, n.18 p. 46-55, 2002.

ECO, U. **Tratado geral de semiótica**. São Paulo: Editora Perspectiva, 2003.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, A. B. H. **Dicionário aurélio básico da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2007. (Coleção Formação de Professores).

FONSECA, L. A **Demonstração e os futuros professores de matemática da educação básica**. On-Line. Disponível em: http://mytwt.net/cibem5/MyFiles/outros/Lina_Fonseca.pdf. Acesso em: 13 agosto 2008.

FREGE, G. **Os fundamentos da aritmética**. Seleção e tradução de Luís Henrique dos Santos. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1980. (Os Pensadores).

FREITAS, J. L. M. Teoria das situações didáticas. In FRANCHI, A. (Org.). **Educação matemática**: uma (nova) introdução. Silvia Dias Alcântara Machado. 3. ed. São Paulo: EDUC, 1999. (Séries Trilhas).

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica**: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática. 1995. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, São Paulo.

GARNICA, A. V. M. É necessário ser Preciso? é preciso se exato? "um estudo sobre a argumentação matemática" ou "uma investigação sobre a possibilidade de investigação". In: CURY, H. N. (Org.) **Formação de professores de matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, p. 49-87, 2000

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em educação matemática: em ensaio. **Bolema**, Rio Claro (SP), ano 15, n. 18, 2002, p. 73 - 81.

GERONIMO, J. G.; FRANCO, V. S. **Fundamentos de matemática**. Maringá: Eduem, 2002.

GONÇALVES, A. **Introdução á álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

GOUVÊA, F. T. **Aprendendo e ensinando geometria com demonstração**: uma contribuição para prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

HANNA, G. More than formal proof. **For the Learning of Mathematics**. v. 9, n. 1, p. 20-23, 1989a

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational Studies in Mathematics**. v. 44, p. 5-23, 2000.

HANNA, G. Proofs that proove and proofs that explain. Proceedings of the 13rd **.Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. **(PME 13)**. Paris, França. n. 2, p. 45-51, 1989b.

HANNA, G. Some pedagogical aspects of proof. **Interchange.** v. 21, n. 1, p. 6-13, 1990.

HEFEZ, A. **Curso de álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 1993. v. 1.

HEFEZ, A. **Indução matemática**. Notas de Aula da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. 2008.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. **Dicionário houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

KATZ, V. J. **A history of mathematics**: an introduction. Reading: Addison-Wesley, 2004.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1999. (Projeto Euclides).

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. **O princípio da indução**. Disponível em: <http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista.../inducao.doc>. Acesso em: 10 abril 2007.

LIPSCHUTZ, S. **Teoria dos conjuntos**. Tradução: Fernando Vilain Heusi da Silva. McGraw-Hill, 1972. (Coleção Shaum).

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. **Matemática discreta**. 2. ed., Artmed: Porto Alegre, 2004. (Coleção Shaum).

LOPES, L. **Manual de indução matemática**. Rio de Janeiro: Interciência 1988.

MACHADO, S. D. A. Engenharia didática. In FRANCHI, A. (Org). **Educação matemática**: uma (nova) introdução. Silvia Dias Alcântara Machado. 3. ed. revista. São Paulo: EDUC, 1999. (Séries Trilhas).

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números**: uma introdução à matemática. 3. ed. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 2006. (Acadêmica).

MIORIM, A; MIGUEL, A; FIORENTINI, D. **Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre a álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro**. Zetetiké, ano I, n. 1, p. 19 -39. Campinas: FE/UNICAMP, 1993.

MONK, R. **Bertrand Russel, matemática**: sonhos e pesadelos. Trad. Luiz Henrique de A. Dutra. São Paulo: Editora da UNESP, 2000. (Coleção Grandes Filósofos).

MORA, J. F. **Dicionário de filosofia**. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PAIS, L. C. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PALIS, G. L. R. Aquisição do conceito de indução matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,7., 2001. Rio de Janeiro. CDROM do VII ENEM, 2001.

PIERCE, C. S. **Semiótica e filosofia**. Cultrix, EDUSP, 1975.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. 2005. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PIRES, C. M. C. Reflexões sobre os cursos de licenciatura em matemática, tomando como referência as orientações propostas nas diretrizes curriculares nacionais para formação de professores da educação básica. **Educação Matemática em Revista**. ano 9, n. 11-A, p. 44-56, mar. 2002.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1975.

POPER, K. R. **A lógica da pesquisa científica**. São Paulo: Cultrix, 1996.

RUSSEL, B. **Introdução à filosofia matemática**. 3. ed. Trad. Giasone Rebuá.Editora da Universidade Federal do Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 1974.

SARRAZY, B. Le contrat didactique. **Reuve Française de Pédagogie**. n. 112, p. 85-118. 1995.

SAVIOLI, A. M. P. D. Uma reflexão sobre a indução finita: relato de uma experiência. **Bolema**, Rio Claro, ano 20, n. 27, p. 41-51, 2007.

SHOKRANIAN, S., SOARES, M.; GODINHO, H. **Teoria dos números**. 2. ed. Editora Universidade de Brasília, 1999.

SILVA, J. J. A demonstração matemática da perspectiva lógica matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), ano 15, n. 18, 2002, p. 56 - 64.

SOMINSKI, I. S. **Método de indução matemática**. São Paulo: Atual, 1996. (Coleção matemática: aprendendo e ensinando).

SOUZA, G. M.; MIRANDA, D. F. A indução matemática como método de demonstração. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SBEM, 9., 2007, Belo Horizonte - MG.

SZTAJN, P. O que Precisa Saber um Professor de Matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. **Educação Matemática em Revista**. ano 9, n. 11-A, p. 17-28, mar. 2002.

VACCA, G. Maurolycos, the First Discoverer of the Principle of Mathematical Induction. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 16, p. 70-73, 1909.

WATANABE, R. G. Vale para 1, para 2, para 3, Vale Sempre? **Revista do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática**, n. 9, p. 32-38, 1986.

APÊNDICES

Sequência Didática

1ª SESSÃO

1. (Adap. RPM 9) A sentença $\forall\ n \in N$, $n < 9.876.543.210$ é verdadeira? Por quê? Justifique sua resposta.

2. (Adap. RPM 9) É verdade que $\forall\ n \in N$, $n^2 + n + 41$ é um número primo? Por quê? Explique.

3. (Adap. RPM 9) Será que $\forall\ n \in N^*$, $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito? Justifique.

4. (Adap. RPM 9) $\forall\ n \in \mathrm{N}^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é dada por n^2? Por quê? Justifique sua resposta.

5. (Adap. RPM 9) A sentença $\forall\ n \in \mathrm{N}^*$, $2n+2$ é a soma de dois números primos é verdadeira? Por quê? Justifique sua resposta.

6. (Adap. LOPES, 1999) Para $\forall\ n \in \mathrm{N}^*$, considere $a_n = 7^n - 1$. Os resultados obtidos são sempre divisíveis por 3? Por quê? Explique.

2ª SESSÃO

1. Mostre que $\forall\ n \in \mathrm{N}^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é dada por n^2.

2. Mostre que proposição $P(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ é verdadeira para $\forall\ n \in \mathrm{N}^*$.

3. (HEFEZ, 1993) Uma Progressão Aritmética com primeiro termo a_1 e razão r é uma sequência de números cujo primeiro elemento é a_1 e tal que cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior mais a razão. Em símbolos, se $n \geq 2$ então $a_n = a_{n-1} + r$. Prove que o termo geral de uma Progressão Aritmética é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Torre de Hanói

(Adap. RPM9)

Lenda

Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges: “transfiram essa pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez e nunca permitindo que um disco fique acima de um menor. Quando terminarem essa tarefa e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá a pó e com um estrondo de trovões o mundo acabará”.

Dizem os sábios que o mundo foi criado a 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de um disco por segundo.

Será que o mundo vai acabar?

O problema da Torre de Hanói foi proposto pelo matemático francês Edouard Lucas (1842 – 1891) em 1883. O nome Torre de Hanói foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã.

1. Utilizando a Torre de Hanói verifique quantos movimentos são necessários para movimentar 1 disco? E dois discos?
2. Com a Torre de Hanói determine quantos movimentos são necessários para mover 3 discos?
3. É possível diminuir o número de movimentos realizados?
4. Repita os procedimentos anteriores, considerando 4, 5, e 6 discos respectivamente.
5. Organize uma tabela com o número de discos utilizados e o número mínimo de movimentos para transportá-los de um bastão para outro.

Discos						
movimentos						

6. Analisando a tabela que você organizou, é possível relacionar a quantidade de discos com o número mínimo de movimentos para resolver o problema? Qual é essa relação? Expresse-a por meio de uma fórmula.

3ª SESSÃO

Em relação ao problema da Torre de Hanói, é possível construir um quadro indicando a quantidade de discos e o número mínimo de movimentos para mudá-los de bastão. Por exemplo:

Discos (n)	1	2	3	4	5
Movimentos (m)	1	3	7	15	31

Analisando a tabela anterior, é possível concluir que para um número n qualquer de discos temos que a quantidade de movimentos mínimos é dada por: $m = 2^n - 1$.

- Mostre que a fórmula anterior é verdadeira

- Sabendo que, segundo os sábios, o mundo foi criado a 4 bilhões de anos e que há 64 discos na Torre original e ainda que os sábios estão movendo os discos na razão de um disco por segundo responda: SERÁ QUE O MUNDO IRÁ ACABAR???

4ª SESSÃO

1. Mostre que proposição $P(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ é verdadeira para $\forall\ n \in \mathrm{N}^*$.

2. Prove que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall\ n \in \mathrm{N}^*$.

3. (HEFEZ, 1993) Uma progressão Geométrica com primeiro termo a_1 e razão q ($q \neq 0$ e $q \neq 1$) é uma sequência de números cujo primeiro elemento é a_1 e tal que, cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado pela razão. Em símbolos, se $n \geq 2$ $a_n = a_{n-1}.q$. Prove que a fórmula do termo geral de uma Progressão Geométrica é $a_n = a_1.q^{n-1}$.

Apresentação dos Axiomas de Peano – 3ª e 4ª sessões

1. $\forall\, n \in N$, $n < 100$

contra-exemplo: $n = 100$

2. $\forall\, n \in N$, n^2+n+41 é um número primo.

contra-exemplo: $n = 40$

3. $\forall\, n \in N^*$, $991n^2+1$ não é um quadrado perfeito.

contra-exemplo: $n = 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767$

4. $\forall\, n \in N^*$, $2n+2$ é a soma de dois números primos.

conjectura de Goldbach

5. $\forall\, n \in N^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Como demonstrar???

Axiomas de Peano

a) Existe uma função s: $N \to N$, que associa a cada $n \in N$ um elemento $s(n) \in N$, chamado sucessor de n;

b) a função s: $N \to N$ é injetora;

c) existe um único elemento 0 no conjunto N, tal que $0 \neq s(n)$ para todo $n \in N$;

d) se um subconjunto $X \subset N$ é tal que $0 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = N$.

Teorema (Princípio de Indução Matemática): Seja $P(n)$ uma proposição envolvendo um número natural n e suponha que:

a - $P(0)$ é verdadeira

b - $\forall\ k \in N$, $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $P(k+1)$ verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in N$.

dem.

Consideremos o seguinte subconjunto de N:

$A = \{n \in N \,/\, P(n) \text{ é verdadeira}\}$

$0 \in A$, pois $P(0)$ é verdadeira (item a do teorema). $n \in A \Rightarrow P(n)$ é verdadeira $\Rightarrow P(n+1)$ (item b do teorema) é verdadeira $\Rightarrow$ $n+1 \in A$. Portanto pelo axioma d, $A = N$.

À

Exemplos:

1. $\forall\, n \in N^*$, a soma dos *n* primeiros números ímpares é n^2.

dem.

Seja S o conjunto dos números naturais *n* para os quais a soma dos *n* primeiros números impares é n^2.

$1 \in S$, pois a soma dos 1 primeiros números ímpares é $1 = 1^2$.

Vamos supor que $k \in S$, isto é, que a soma dos k+1 primeiros ímpares é $(k+1)^2$.

Estamos supondo que $1+3+5+ \ldots + 2k-1 = k^2$

E queremos provar que $1+3+5+ \ldots + 2k+1 = (k+1)^2$

Basta observar que $1+3+5+ \ldots +(2k-1)+(2k+1) = k^2+(2k+1) = (k+1)^2$.

O princípio da indução matemática nos garante, agora, que $S = N^*$, ou seja, a afirmação "a soma dos *n* primeiros números ímpares é n^2" é verdadeira para todos os números naturais maiores que zero.

À

2. Considerando o jogo da Torre de Hanói, mostre que, se $n \geq 1$, então $m = 2^n-1$.

dem.

Seja S o conjunto dos números naturais *n* tais que *n* discos são movidos com 2^n-1 movimentos.

$1 \in S$, pois para 1 disco necessitamos de $1 = 2^1-1$ movimentos.

Vamos supor que $k \in S$, isto é, *k* discos são removidos com 2^k-1 movimentos.

Vamos provar que k+1 discos $\in$ S, isto é, que $m_{k+1} = 2^{k+1}-1$.

Para remover k+1 discos passamos, inicialmente, *k* discos para o bastão de trás com m_k movimentos; em seguida, com 1 movimento, o $(k+1)$-ésimo disco vai para o outro bastão da frente; com mais m_k movimentos, os *k* discos de trás passam para o bastão da frente. Isto é,

$m_{k+1} = m_k+1+m_k$

$m_{k+1} = 2^k-1+1+2^k-1 = 2.2^k-1 = 2^{k+1}-1$

e isso mostra que $k+1 \in S$.

O princípio de indução matemática nos garante que *n* discos podem sempre ser removidos com 2^n-1 movimentos.

À

Em especial temos que 2^{64}-1 segundos após a criação do mundo, ele terminará. Com alguns cálculos vemos que isso ocorrerá logo.

Pois, em um ano há 31.557.600 segundos ($60.60.24.\frac{1}{4}365 = 31.557.600$) e esse valor é menor que 2^{25}

$2^{25} = 1024.1024.32 = 33.554.432$.

Exagerando, vamos supor que os monges façam 2^{25} movimentos por ano (na verdade fazem uns 2 milhões a menos). Com isso o mundo acabará em

$\frac{2^{64}}{2^{25}} = 2^{39}$ anos.

$2^{39} = 2^{10}.2^{10}.2^{10}.2^{9} = 1024.1024.1024.512 > 512.10^{9}$

Passaram-se até hoje 4 bilhões de anos, ou seja, 4.10^{9} anos.

Podemos ficar tranqüilos, faltam mais do que 508 bilhões de anos para os monges terminarem sua tarefa – supondo que eles não errem o caminho.

ANEXOS

Ementas e Conteúdo Programático da disciplina 6MAT007 – Elementos de Matemática

Durante a análise do plano de ensino da disciplina 6MAT007 notamos que nos anos de 2006, 2007 e 2008 a ementa e conteúdo programático foram iguais.

Ementa

Lógica. Teoria de Conjuntos. Relações e Funções. Funções Elementares. Trigonometria. Funções Trigonométricas. Logaritmo e Exponencial. Progressões. Análise Combinatória e os métodos de contagem. Números Complexos.

Conteúdo Programático

3.1. Lógica

A) Raciocínio Lógico

I. Proposições simples e seus valores lógicos.
II. Proposições compostas e os conectivos "e", "ou", "não", "se ... então ..." , " ... se e somente se ... ".
III. Tabela-verdade de uma proposição simples e composta.
IV. Valores lógicos das proposições compostas.
V. Exemplos práticos de proposições compostas.
VI. Problemas práticos para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

B) Técnicas Dedutivas

I. Demonstração direta.
II. Demonstração pela contrapositiva.
III. Demonstração por absurdo.
IV. Demonstração por indução matemática.
V. Mostrar a equivalência das técnicas de demonstrações (direta, contrapositva e por absurdo) usando a tabela verdade.
VI. Aplicações das técnicas dedutivas, em resultados simples da aritmética dos números inteiros, racionais e irracionais e também em conteúdos contidos neste programa.

3.2. Teoria de Conjuntos

I. Sentenças abertas e conjuntos verdade.
II. Quantificador universal e quantificador existencial.
III. Negação de sentenças quantificadas.
IV. Axiomas para a teoria dos conjuntos.
V. Operações com conjuntos.
VI. Propriedades das operações.

3.3. Relações e Funções

A) Relações

I. Produto Cartesiano.
II. Definição de relação.
III. Relação de equivalência: classe de equivalência e conjunto quociente.
IV. Relação de ordem.

B) Funções

I. Definição de função.
II. Gráfico de uma função.
III. Tipos de funções: constante, lineares, quadráticas, polinomiais e racionais.
IV. Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras.
V. Imagem inversa.
VI. Composições de funções.

3.4. Funções Trigonométricas

I. ***Definições das funções trigonométricas.***
II. ***Gráficos.***
III. ***Periodicidade.***
IV. ***Relações entre as funções trigonométricas.***
V. ***Fórmulas de adição e subtração de arcos: arco duplo e arco metade.***
VI. ***Lei dos senos e dos co-senos.***
VII. ***Área do triângulo: fórmula de Herão.***

3.5. Funções Exponenciais e Logarítmicas

I. ***Funções Exponenciais e Logarítmicas.***
II. ***Propriedades.***
III. ***Equações exponenciais.***
IV. ***Equações logarítmicas.***

3.6. Progressões Aritméticas e Geométricas

A) Progressão Aritmética

I. ***Definição e propriedades.***
II. ***Fórmula do Termo Geral.***
III. ***Média aritmética e representações especiais.***
IV. ***Soma dos termos.***
V. ***Aplicações à Matemática Financeira: juros simples e compostos.***

B) Progressão Geométrica

I. ***Definição e propriedades.***
II. ***Fórmula do termo geral.***
III. ***Média Geométrica.***
IV. ***Representações Especiais.***
V. ***Soma dos termos e limite da soma.***

Análise Combinatória

I. ***Principio fundamental da contagem.***
II. ***Arranjos simples e com repetição.***
III. ***Permutações simples e com repetição.***
IV. ***Fatorial.***
V. ***Combinações.***

3.7. Números Complexos

I. ***Corpo dos números complexos.***
II. ***Forma Algébrica.***
III. ***Forma trigonométrica.***
IV. ***Potenciação.***
V. ***Radiciação.***

Ementas e Conteúdo Programático da disciplina 6MAT015 – Álgebra A

Durante a análise do plano de ensino da disciplina 6MAT007 notamos que nos anos de 2006, 2007 e 2008 a ementa e conteúdo programático foram iguais.

Ementa

Teoria dos números. Estruturas algébricas: Grupos. Anéis. Módulos. Aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos trabalhados.

Conteúdo Programático

1. NÚMEROS INTEIROS
1.1 Indução matemática e suas aplicações.
1.2 Divisibilidade nos inteiros, mdc e mmc.
1.3 Números primos, equações diofantinas e congruências.
1.4 Problema chinês do resto.
1.5 Aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos trabalhados.

2. ESTRUTURAS ALGÉBRICAS E GRUPOS
2.1 Principais estruturas algébricas. Operações.
2.2 Grupos: definição, exemplos e resultados importantes. Subgrupos.
2.3 Homomorfismos de grupos. Grupos cíclicos e grupos finitos
2.4 Teorema de Lagrange. Subgrupos normais e grupo quociente.
2.5 Aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos trabalhados.

3. ANÉIS
3.1 Anéis, definição e exemplos. Tipos de anéis.
3.2 Subanéis, exemplos.
3.3 Ideais. Anel quociente e exemplos.
3.4 Homomorfismos de anéis. Corpo de frações de um anel.
3.5 Característica de um anel. Anel de Polinômios.
3.6 Aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos trabalhados.

4. MÓDULOS

4.1 Módulos: definição e exemplos.

4.2 Submodulos, exemplos.

4.3 Módulo quociente e exemplos.

4.4 Aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos trabalhados.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento de projetos de investigação e pesquisa, sob responsabilidade de Angela Marta Pereira das Dores Savioli, professor(a) lotada no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que o(a) mesma utilize, parcial ou integralmente, registros dessas atividades,entrevistas, gravações em áudio ou vídeo de minhas falas ou imagem, minhas anotações, para fins de pesquisa, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome seja citado apenas como participante da pesquisa, garantido o anonimato no relato da pesquisa.

Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Londrina,   /   / 2009.

NOME:____

RG:____

ASS.:____