UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

EDILAINE PEREIRA DA SILVA

ASPECTOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO E DA LINGUAGEM MANIFESTADOS POR ESTUDANTES DO 6º ANO EM UM EXPERIMENTO DE ENSINO

Londrina
2013

EDILAINE PEREIRA DA SILVA

ASPECTOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO E DA LINGUAGEM MANIFESTADOS POR ESTUDANTES DO 6º ANO EM UM EXPERIMENTO DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S586a Silva, Edilaine Pereira da.
Aspectos do pensamento algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6° ano em um experimento de ensino / Edilaine Pereira da Silva. – Londrina, 2013.
145 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Álgebra – Teses. 3. Matemática (Ensino fundamental) – Teses. 4. Matemática – Estudo e ensino – Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

EDILAINE PEREIRA DA SILVA

ASPECTOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO E DA LINGUAGEM MANIFESTADOS POR ESTUDANTES DO 6º ANO EM UM EXPERIMENTO DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

_____
Orientadora: Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Universidade Estadual de Londrina

_____
Profª. Drª. Regina Celia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina

_____
Profª. Drª. Eliane Maria de Oliveira Araman
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Londrina, _____de _____de _____.

Dedico este trabalho a meu pai (in memorian), que sempre acreditou em mim e a minha mãe, que me apoiou incondicionalmente.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, por ter me iluminado e me protegido por todos os caminhos que passei.

Aos meus pais Juvercino (in memorian), e Maria pela minha existência e educação.

À minha orientadora, Prof^{a}. Dr^{a}. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, por ter se empenhado em dar orientações precisas e se dedicado com toda a paciência e atenção necessárias.

Às professoras, Dr^{a}. Regina Célia e Dr^{a}. Eliane Maria que trouxeram importantes contribuições durante o exame de qualificação.

Aos colegas do GRUPO DE ESTUDO E PESQUISA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO – GEPPMAT, pelas valiosas contribuições durante as reuniões do grupo.

Aos meus familiares, pela compreensão nos momentos de ausência.

A todos que de alguma maneira contribuíram para a realização deste sonho, os meus sinceros agradecimentos.

“Tudo o que a gente ensina a uma criança, a criança não pode mais, ela mesma, descobrir ou inventar.”

Jean Piaget

SILVA, Edilaine Pereira. **Aspectos do Pensamento Algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6º ano em um Experimento de Ensino.** 2013. 145 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Esta investigação, de cunho qualitativo, objetivou identificar, analisar e discutir aspectos do pensamento algébrico manifestados por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas em um Experimento de Ensino. O referencial teórico utilizado reúne informações a respeito de quais processos matemáticos realizados possam ser evidências de que crianças do Ensino Fundamental estejam pensando algebricamente. Referimo-nos a aspectos de pensamento algébrico como evidências de habilidades do pensamento matemático, consideradas necessárias para o sucesso em álgebra ao resolverem problemas que envolvem conceitos algébricos. A coleta de informações se deu no ano de 2012 em uma sala de aula de uma escola pública de Palotina – Pr., por meio da metodologia baseada no Experimento de Ensino, devida a Steffe e Thompson (2000). Analisamos três episódios de ensino e registros escritos de dois problemas à luz da Análise de Conteúdo de Bardin (2004). Foi possível identificar alguns aspectos de pensamento algébrico nos registros escritos dos estudantes, destacando o desenvolvimento de uma linguagem sincopada para expressar-se matematicamente, a utilização de símbolos não convencionais e convencionais relacionados a conceitos e propriedades, a compreensão dos conceitos envolvidos no problema, a utilização da proporção direta, a resolução de equações por meio de operações inversas, a análise e expressão de relações entre grandezas desconhecidas sem recorrerem a valores específicos, entre outros. Além disso, verificamos quais aspectos de pensamento algébrico apresentaram-se com maior e menor frequência e identificamos três modos de pensar matemática apresentados pelos estudantes do 6º ano: i) um modo algébrico de pensar; ii) um modo de pensar limitado por crenças e rotinas; iii) um modo ingênuo de pensar.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pensamento Algébrico. Experimento de Ensino. Ensino Fundamental.

SILVA, Edilaine Pereira da. **Aspects of algebraic thinking and language manifested by 6th year students in a Teaching Experiment**. 2013. 145 p. Dissertation (Graduate Program in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

This research, qualitative slant, aimed to identify, analyze and discuss aspects of algebraic thinking manifested by students of the sixth grade of elementary school to solve problems in an experiment of teaching. The theoretical framework used gathers information about which mathematical processes carried out, may be evidence that children of elementary school are thinking algebraically. We refer to aspects of algebraic thinking as evidence of mathematical thinking skills, considered necessary for success in algebra to solve problems involving algebraic concepts. Information was given in the year 2012 in a classroom of a public school of Palotina – Pr., by means of the methodology based on the Experiment of teaching, due to Steffe and Thompson (2000). Three teaching episodes and written records of two problems were analyzed in the light of the analysis of content of Bardin (2004). It was possible to identify some aspects of algebraic thinking in written records of students, emphasizing the development of a syncopated language to express it mathematically, the use of non-conventional and conventional symbols related to concepts and properties, understanding the concepts involved in the issue, the use of direct proportion, solving equations using inverse operations, the analysis and expression of relationships between unknown quantities without resorting to specific values, among others. In addition, we can see which aspects of algebraic thinking presented themselves more often and with less frequency and identify three ways of thinking math presented by the students of the sixth grade: : i) an algebraic way of thinking; ii) a limited way of thinking by beliefs and routines; iii) a naive way of thinking.

Key words: Mathematics Education. Algebraic Thinking. Teaching Experiment. Elementary School.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 01 – Problema dos santos e passos 49
Figura 02 – Registro do estudante E1 53
Figura 03 – Registro do estudante E10 54
Figura 04 – Registro do estudante E8 55
Figura 05 – Registro do estudante E6 56
Figura 06 – Registro do estudante E11 59
Figura 07 – Registro do estudante E18 60
Figura 08 – Registro do estudante E3 61
Figura 09 – Registro do estudante E14 63
Figura 10 – Registro do estudante E16 65
Figura 11 – Registro do estudante E7 67
Figura 12 – Registro do estudante E5 67
Figura 13 – Registro do estudante E12 68
Figura 14 – Registro do estudante E12 69
Figura 15 – Representação do problema dos saltos e passos 72
Figura 16 – Registro do estudante E5 80
Figura 17 – Registro do estudante E3 81
Figura 18 – Registro do estudante E3 82
Figura 19 – Registro do estudante E14 82
Figura 20 – Registro do estudante E14 83
Figura 21 – Registro do estudante E17 83
Figura 22 – Registro do estudante E8 84
Figura 23 – Registro do estudante E11 86
Figura 24 – Registro do estudante E11 87
Figura 25 – Registro do estudante E12 88
Figura 26 – Registro do estudante E18 90
Figura 27 – Registro do estudante E16 91
Figura 28 – Registro do estudante E1 92
Figura 29 – Registro do estudante E1 92
Figura 30 – Registro do estudante E1 93
Figura 31 – Registro do estudante E1 94

Figura 32 – Registro do estudante E6 94
Figura 33 – Registro do estudante E18 94
Figura 34 – Registro do estudante E6 94
Figura 35 – Registro do estudante E10 95
Figura 36 – Registro do estudante E14 96
Figura 37 – Registro do estudante E6 97
Figura 38 – Registro do estudante E3 98
Figura 39 – Registro do estudante E3 99
Figura 40 – Registro do estudante E12 102
Figura 41 – Registro do estudante E1 103
Figura 42 – Registro do estudante E1 104
Figura 43 – Registro do estudante E16 104
Figura 44 – Registro do estudante E8 104
Figura 45 – Registro do estudante E5 105
Figura 46 – Registro do estudante E7 106
Figura 47 – Registro do estudante E11 106
Figura 48 – Registro do estudante E17 107
Figura 49 – Registro do estudante E10 107
Figura 50 – Registro do estudante E17 108
Figura 51 – Registro do estudante E8 108
Figura 52 – Registro do estudante E16 109
Figura 53 – Registro do estudante E16 109
Figura 54 – Registro do estudante E18 110
Figura 55 – Registro do estudante E1 111
Figura 56 – Registro do estudante E7 111
Figura 57 – Registro do estudante E14 112
Figura 58 – Registro do estudante E3 112
Figura 59 – Registro do estudante E3 113
Figura 60 – Registro do estudante E3 115
Figura 61 – Registro do estudante E3 116

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – As Concepções de álgebra e os usos das letras em cada concepção . 22
Quadro 2 – Objetivos da álgebra em um nível elementar 34
Quadro 3 – Cronograma do Experimento de Ensino 46
Quadro 4 – Síntese dos agrupamentos do Problema um 69
Quadro 5 – Agrupamentos do Problema três 116
Quadro 6 – Agrupamentos da Categoria um 119
Quadro 7 – Agrupamentos da Categoria dois 121
Quadro 8 – Agrupamentos da Categoria dois 124
Quadro 9 – Quantidade de estudantes por agrupamento e por categoria 126

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 12

1 PENSAMENTO ALGÉBRICO E LINGUAGEM ALGÉBRICA 15
1.1 ALGUMAS ABORDAGENS NO ENSINO DE ÁLGEBRA 17
1.2 CARACTERIZAÇÕES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO 29

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 38
2.1 NATUREZA DA PESQUISA 38
2.2 OS SUJEITOS DA PESQUISA 43

3 EPISÓDIOS DE ENSINO 46
3.1 EPISÓDIO UM 47
3.2 ANÁLISE DOS REGISTROS ESCRITOS DO PROBLEMA UM 50
3.3 EPISÓDIO DOIS 70
3.4 EPISÓDIO TRÊS 74
3.5 ANÁLISE DOS REGISTROS ESCRITOS DO PROBLEMA TRÊS 78

4 OS MODOS DE PENSAR APRESENTADOS PELOS ESTUDANTES DO 6º ANO 119
4.1 CATEGORIZAÇÃO E DESCRIÇÃO DAS CATEGORIAS 119
4.2 SÍNTESE DOS RESULTADOS 126

CONSIDERAÇÕES FINAIS 133

REFERÊNCIAS 136

ANEXOS 139
ANEXO A – QUESTÕES DA INVESTIGAÇÃO PILOTO 140
ANEXO B – TERMOS DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 144

INTRODUÇÃO

O presente trabalho apresenta uma discussão a respeito de álgebra e pensamento algébrico em anos anteriores à instrução formal algébrica. No currículo atual, os conteúdos de álgebra são apresentados formalmente a partir do 7º ano, quando os estudantes passam a conhecer a linguagem algébrica simbólica[1]. Antes disso, é entendido que os estudantes lidam com a álgebra de uma maneira informal, utilizando outras linguagens.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais fazem alguma referência ao ensino de álgebra nos anos iniciais[2] e apresentam que,

> [...] embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe. (regras para resolução) de uma equação. (PCN, 1998, p. 50-51)

No currículo atual, álgebra se faz presente no terceiro e quarto ciclo que correspondem aos anos finais do Ensino Fundamental. No entanto, é também afirmado no texto que trata do currículo nacional, que nos anos iniciais é possível que os estudantes desenvolvam alguns aspectos da álgebra e que, ao ingressarem no sexto ano, possam apresentar aspectos do pensamento algébrico desenvolvido. Assim, a nossa questão investigativa é:

- *Que aspectos de pensamento algébrico e da linguagem podem ser manifestados por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas em um Experimento de Ensino?*

---

[1] Trataremos por linguagem algébrica simbólica a linguagem constituída de símbolos, razoavelmente uniforme entre os povos e amplamente compartilhada, desenvolvida e aperfeiçoada ao longo da história da matemática, para expressar o pensamento algébrico.

[2] Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentem as expressões ‘séries finais’ e ‘séries iniciais’, ao longo do nosso trabalho utilizamos as expressões ‘anos finais’ e ‘anos iniciais’ em conformidade com a nomenclatura atual, uma vez que os PCN foram elaborados anteriormente à mudança.

Embora haja um entendimento de que a álgebra deva ser iniciada desde os anos iniciais, as formas de introduzir bem como o momento de iniciar os estudantes em álgebra é um tema ainda emergente.

Fizemos um levantamento bibliográfico que aponta para novas abordagens no ensino de álgebra. Essas novas abordagens incluem um ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico e levantam uma discussão a respeito de quando a álgebra deve ser introduzida na escola (BRIZUELA, CARRAHER e SCHLIEMANN, 1998, 2000, 2001). Esses autores têm defendido que estudantes dos anos iniciais são capazes de aprender álgebra. Além disso, apresentam que a linguagem simbólica nos anos iniciais pode servir de ferramenta (KIERAN, 2004), e que os estudantes desse nível de escolaridade precisam lidar com diversos sistemas simbólicos convencionais (CARRAHER, SHLIEMANN, BRIZUELA, 2007), e serem capazes de inventar seus próprios sistemas (BRIZUELA, 2006).

Realizamos um breve levantamento histórico para entender as relações entre o desenvolvimento do pensamento algébrico e da linguagem, considerando que esses elementos podem contribuir para uma discussão a respeito do desenvolvimento do pensamento algébrico e linguagem no ensino e aprendizagem nos anos iniciais.

Para atingir o nosso objetivo de pesquisa que consiste em *identificar, analisar e discutir aspectos do pensamento algébrico manifestados por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas em um Experimento de Ensino,* propusemos aos estudantes resolver problemas que pudessem oportunizar experiências envolvendo o pensamento algébrico, de forma que pudessem manifestar ideias algébricas.

Escolhemos o 6º ano por se tratar de um momento do currículo em que o estudante traz alguns conhecimentos dos anos iniciais e ainda não passou pela instrução de álgebra formal, em que é utilizada a linguagem algébrica simbólica.

Apresentamos em nossa fundamentação teórica algumas caracterizações da álgebra e do pensamento algébrico realizadas por autores como Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), Kaput (2005), Kieran (1992, 2004), Usiskin (1988), Lew (2004) e a teoria de atividade algébrica de Kieran (2004, 2007). Para tratar das representações recorremos a Dreyfus (2002), Kaput (1987 a) e Brizuela (2006).

As informações da pesquisa foram coletadas em uma escola pública do Ensino Fundamental e os procedimentos metodológicos ocorreram à luz do Experimento de Ensino, um método de pesquisa qualitativa devida a Steffe e Thompson (2000), que tem o objetivo de conhecer a matemática dos estudantes. Em razão da metodologia utilizada, coletamos os dados nos episódios de ensino, que consistem em momentos de compartilhamento de informações entre estudantes e pesquisador. Os registros escritos das resoluções dos problemas pelos estudantes durante os episódios de ensino foram analisados com base na Análise de Conteúdo de Bardin (2004).

Organizamos este trabalho em cinco capítulos. No primeiro, apresentamos o referencial teórico, no segundo relatamos os procedimentos metodológicos adotados, fazemos uma descrição dos sujeitos da pesquisa e apresentamos algumas considerações a respeito das resoluções dos estudantes nas questões da OBMEP na investigação 'piloto' [3]. No terceiro capítulo apresentamos três episódios de ensino e as resoluções dos estudantes de forma descritiva, bem como as análises dos registros escritos. No quarto capítulo mostramos a fase final das análises, em que se apresentam os processos de categorização realizados e as descrições das categorias, bem como os resultados da investigação seguidos de algumas discussões à luz do referencial teórico. No quinto capítulo estão as considerações finais do trabalho, no qual falamos da Matemática dos estudantes do 6º ano, indicando que um fazer matemático baseado em rotinas e sem análises e justificativas pode ser um limitador para o desenvolvimento do pensamento algébrico e para o sucesso na resolução de problemas.

[3] A investigação 'piloto' consistiu em uma aplicação de tarefas com o objetivo de conhecer melhor os estudantes. Nesta etapa todos os problemas foram selecionados das Olimpíadas Brasileiras das Escolas Públicas (OBMEP) e estão disponibilizadas nos anexos deste trabalho.

1 **O PENSAMENTO ALGÉBRICO E A LINGUAGEM ALGÉBRICA**

Visando uma discussão a respeito do ensino e aprendizagem de álgebra e de novas abordagens no ensino que priorizam o desenvolvimento do pensamento algébrico, faremos uma breve descrição de elementos históricos que contribuíram para o entendimento da álgebra e da educação algébrica.

Segundo Baumgart (1992), desde 1700 A. C. os babilônicos e os egípcios já haviam desenvolvido uma álgebra, direcionada ao estudo de equações e métodos para resolvê-las. Esses povos não se utilizavam do formalismo da álgebra atual, no entanto naquela época, apresentavam um pensamento algébrico.

Os métodos babilônicos eram mais sofisticados do que os egípcios. Comparando os sistemas de numeração desses povos, Baumgart (1992), afirma que a falta de sofisticação da álgebra egípcia seja consequência de um sistema de numeração primitivo em relação ao sistema de numeração babilônico. Os egípcios resolviam problemas envolvendo equações lineares em que a incógnita era representada por "*aha*" e utilizavam a regra da falsa posição[4]. Os babilônicos resolviam vários tipos de equações e sistemas de equações. Pertencem a essa civilização os mais antigos registros de resoluções de equações cúbicas, por volta de 1800-1600 A. C. (BAUMGART, 1992). Em relação à linguagem, essas civilizações apresentavam um estilo retórico, ou seja, as resoluções consistiam em descrições passo a passo dos processos realizados em linguagem verbal (BAUMGART, 1992).

De acordo com Eves (1997), no processo de evolução da linguagem algébrica evidenciam-se três fases distintas. A fase *retórica,* que consistia em uma linguagem verbal*,* perdurou até o tempo do matemático Diofanto[5], quando este começou a introduzir alguns símbolos e abreviações em meio aos textos matemáticos, dando início à fase *sincopada*. A fase *simbólica* iniciou-se em cerca de

---

[4] Segundo Mainville (1992) é um método de resolver equações em que se atribui um valor à incógnita. Se o número atribuído não satisfaz as condições dadas, o valor é alterado proporcionalmente. Assim, para a equação x+x/4=30, a atribuição de um valor conveniente como x=4 resulta em x+x/4=5. Como 6.5=30, multiplica-se 4 . 6 obtendo-se 24.

[5] "Não há um consenso sobre o tempo de Diofanto. Alguns especialistas acreditam que ele viveu no século III d. C., outros o situam no século I d.C. Sabe-se, todavia, que era um matemático grego que trabalhou na Universidade de Alexandria, Egito, como residente". (BAUMGART, 1992, p. 30)

1500 D. C. quando os matemáticos passaram a inserir mais símbolos em seus textos. Nesta fase, o sistema simbólico foi sofrendo mudanças e alcançando razoável uniformidade por volta de 1700 D. C. (BAUMGART, 1992).

Ao longo do processo de evolução da matemática o pensamento algébrico se fez anterior à linguagem simbólica, o qual foi apresentado por diferentes civilizações com mudanças de palavras para símbolos em um processo contínuo de adequação da linguagem resultando na atual linguagem simbólica. Para Baumgart (1992),

> [...] o divisor de águas do pensamento algébrico concretiza-se no francês François Viète (1540 - 1603), que foi o primeiro, em sua logística speciosa, a introduzir letras como coeficientes genéricos (positivos) e a dar alguns outros toques de acabamento no simbolismo que se finalizou e atualizou na época de Newton (1643 - 1727)".

Isso evidencia que o simbolismo veio a contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que a partir dessa época ocorreram notáveis avanços na matemática.

Em uma análise histórico-epistemológica Radford (2001), afirma que a linguagem simbólica surgiu como uma ferramenta ou técnica e que depois evoluiu sócio-culturalmente para um nível em que foi considerada como um objeto da matemática. Esse mesmo autor aponta que, no currículo moderno, a linguagem simbólica aparece desde o início como um objeto matemático por si mesmo.

A mudança do papel da linguagem e a importância que ela passa a ter ao longo dos tempos fazem com que os currículos atuais se voltem mais para o formalismo do que para o desenvolvimento do pensamento algébrico, levando estudantes a reproduzirem técnicas sem compreenderem os motivos pelos quais realizam tais procedimentos.

Outro apontamento feito por Radford (2001), em sua análise sugere que o pensamento algébrico das antigas civilizações se mostra relacionado ao pensamento proporcional. A prática de utilizar proporcionalidade ao lidar com objetos algébricos, verificada, por exemplo, na forma como os egípcios resolviam equações de primeiro grau, consiste em elementos que possam dar suporte ao currículo atual. A álgebra apresentada pelos povos antigos se deu em um sistema de numeração distinto do que atualmente utilizamos, e foi expressa por uma linguagem retórica, diferente daquela que atualmente é repassada aos estudantes nos anos finais do

Ensino Fundamental. Os antigos lidavam com os mesmos objetos da álgebra com os quais lidamos hoje, porém com métodos distintos dos que convencionalmente são difundidos no ensino. Esses fatos nos levam a perceber que a álgebra não pode ser unicamente associada a procedimentos específicos e a uma linguagem, podendo se apresentar por meio de linguagens distintas e com realização de procedimentos diversos para lidar com um objeto da matemática. Acreditamos que esses fatos históricos que esclarecem a respeito do surgimento da álgebra possam nos ajudar a pensar no currículo de álgebra nos anos iniciais, uma vez que a criança nessa fase de ensino, ainda não recebeu instruções a respeito da linguagem simbólica e de procedimentos convencionalmente difundidos no ensino.

1.1 Algumas Abordagens no Ensino de Álgebra

Usualmente a álgebra é vinculada à linguagem simbólica de tal forma a ser confundida como sendo apenas um tipo específico de linguagem. Isso se explica pelo fato do ensino ter tratado a linguagem simbólica como um objeto em si mesmo. Segundo Fiorentini, Miguel e Miorin (1993), algumas concepções de educação algébrica têm dado ênfase a ensinar uma linguagem simbólica já constituída em detrimento da construção do pensamento algébrico e de sua linguagem. Ao considerarmos os aspectos históricos de desenvolvimento da álgebra entendemos que antes de surgir a linguagem simbólica já havia pensamento algébrico desenvolvido e que o desenvolvimento da mesma foi importante para a evolução da álgebra contribuindo para formas mais sofisticadas de pensar. Desta forma, entre pensamento algébrico e linguagem subsiste “não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética...” (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIN, 1993, p. 85).

O avanço do pensamento algébrico é associado ao desenvolvimento da linguagem uma vez que,

> [...] enquanto idéias algébricas são vestidas em palavras e em apenas palavras, é difícil imaginar a abordagem estrutural mais avançada, onde os processos computacionais são considerados em sua totalidade a partir de uma perspectiva mais elevada, e onde as inclinações operacionais e estruturais se encontram nas mesmas representações. Em resumo, as palavras não são manipuláveis da forma que os símbolos são. É esta manipulabilidade que torna possível para que conceitos algébricos tenham a qualidade como objeto. É a possibilidade de realizar processos de alto nível sobre os processos representados por expressões compactas que

> estimulam o pensamento estrutural.[6] (SFARD e LYINCHEVSKI, 1994a, p. 197)

Nesse sentido, o processo histórico de sofisticação da linguagem contribuiu para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado, sendo que a linguagem específica se tornou ferramenta para pensar.

No ensino de álgebra, quando as concepções de educação algébrica acabaram por dar ênfase à linguagem simbólica, evidenciou-se uma crença de que "o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e específica da álgebra" (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIN, 1993, p. 85). Essas concepções que predominaram no ensino de álgebra, segundo Fiorentini, Miguel e Miorin (1993), subordinavam o desenvolvimento do pensamento algébrico à apropriação da linguagem simbólica e a reprodução de métodos de manipulação dos símbolos. O ensino priorizava a difusão de uma linguagem sócio cultural na maioria das vezes desvinculada de seu papel inicial ao longo da história. Os currículos, nesse sentido, seguiam por caminhos inversos ao da história da matemática, partindo da linguagem simbólica para se chegar ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Na concepção de educação algébrica para o desenvolvimento do pensamento algébrico, o foco consiste em estabelecer uma relação dialética entre pensamento algébrico e linguagem de forma que a apropriação da linguagem simbólica ocorra de forma gradativa e significativa.

Novas abordagens de educação algébrica vêm sendo discutidas por pesquisadores que se dedicam a estudos a respeito do ensino de álgebra nos anos iniciais, defendendo que é possível ensinar aritmética relacionada com a álgebra de forma que "desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra" (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 10). A *Early Algebra*[7] tem proposto abordagens de

---

[6] Tradução nossa de …that as long as algebraic ideas are dressed in words and in words only, it is difficult to imagine the more advanced structural approach, where the computational processes are considered in their totality from a higher point of view, and where operational and structural slants meet in the same representations. To put it differently, words are not manipulable in the way symbols are. It is this manipulability which makes it possible for algebraic concepts to have the object-like quality. It is the possibility of performing higher level processes on the processes represented by compact expressions that spurs structural thinking.

[7] Grupo de pesquisadores que se dedicam a estudos relacionados ao ensino e à aprendizagem de álgebra nas séries iniciais considerando que essas crianças podem apresentar desde cedo o pensamento algébrico e aprender conceitos algébricos.

ensino de álgebra com estudantes dos anos iniciais. Esses estudos, que investigam a evolução do pensamento infantil à medida que são introduzidos conceitos de álgebra e representações, concluíram que crianças de 8 a 11 anos de idade aprendem, entre outras coisas, a

> [...] (a) pensar a respeito de operações aritméticas como funções em vez de meros cálculos de números específicos; (b) aprender sobre números negativos; (c) compreender o significado das variáveis, em oposição aos valores instanciados; (d) mudança de pensamento a respeito das relações entre os números específicos e medidas para o pensamento sobre as relações entre conjuntos de números e medidas; (e) mudança de computar respostas numéricas para descrever e representar relações entre variáveis; (f) construir e interpretar gráficos de funções lineares e não lineares; (g) resolver problemas algébricos usando vários sistemas de representação, como tabelas, gráficos e equações escritas; (h) resolver equações com variáveis em ambos os lados da igualdade; e (i) serem capazes de inter-relacionar sistemas diferentes de representações para funções.[8] (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2007, p. 694)

Abordagens como essas nos fazem refletir a respeito das dificuldades em álgebra escolar apresentadas por estudantes no atual currículo. Se crianças de 8 a 11 anos podem desenvolver o pensamento algébrico, então as dificuldades que estudantes demonstram quando são iniciados em álgebra no atual currículo, por volta dos 11 anos, não são devidas a idade dos mesmos. As abordagens de ensino de álgebra para os anos iniciais apresentam como foco principal o desenvolvimento de uma forma de pensar, com aspectos relacionais e funcionais, de forma que os estudantes não fiquem restritos a casos particulares e que possam ser iniciados no uso de outras representações para o objeto matemático. Tais experiências são raras quando a matemática se reduz única e exclusivamente à aritmética nos anos iniciais.

A *Early Algebra* tem defendido um ensino desde os anos iniciais com foco no raciocínio algébrico dos estudantes considerando que “aritmética tem um caráter algébrico” (CARRAHER e SCHIELMANN, 2003; CARRAHER, SCHLIEMANN e BRIZUELA 2000; SCHLIELMANN, CARRAHER e BRIZUELA, 2007) e sugerindo

---

[8] Tradução nossa de (a) think of arithmetical operations as functions rather than as mere computations on particular numbers; (b) learn about negative numbers; (c) grasp the meaning of variables, as opposed to instantiated values; (d) shift from thinking about relations among particular numbers and measures toward thinking about relations among sets of numbers and measures; (e) shift from computing numerical answers to describing and representing relations among variables; (f) build and interpret graphs of linear and non-linear functions; (g) solve algebraic problems using multiple representation systems such as tables, graphs, and written equations; (h) solve equations with variables on both sides of the equality; and (i) are able to inter-relate different systems of representations for functions

que “aritmética e álgebra elementar não são completamente distintas” (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2003). Isto se justifica melhor quando os mesmos autores afirmam que “uma profunda compreensão da aritmética, por exemplo, requer generalizações matemáticas que são algébricas em sua natureza”, (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2007). Assim, o estudante pode raciocinar algebricamente quando ao estudar aritmética perceber padrões. Além disso, pode lidar com objetos algébricos como, por exemplo, variáveis, com foco nos processos partindo de uma perspectiva operacional. O pensamento algébrico pode ser manifestado e representado sem a necessidade de um formalismo uma vez que, “estudantes também podem expressar essas relações e propriedades por meio de representações escritas ou notações sem que tenham que fazer uso da linguagem convencional algébrica”, (BRIZUELA, CARRAHER e SCHLIEMANN, 2000, p.2).

Alguns resultados de pesquisas realizadas com estudantes dos anos finais do ensino fundamental indicam que o modelo de currículo que primeiro se ensina aritmética para depois ensinar álgebra, como se as duas estivessem completamente separadas, levam estudantes a ter dificuldades em mudar de um pensamento aritmético desenvolvido para um pensamento algébrico. Booth (1989) e Kieran (1981), têm apontado que algumas dificuldades que os estudantes apresentam em álgebra são decorrentes da atribuição de significado aritmético para os símbolos, levando-os a realizarem processos aritméticos em expressões algébricas. De acordo com Booth (1989), estudantes de nono ano do Ensino Fundamental até o segundo ano do Ensino Médio tendem a dar respostas particulares quando deveriam responder de forma mais geral; não aceitam expressões algébricas como procedimento e resposta ao mesmo tempo, apresentando uma tendência a reduzi-las a um único termo; entendem que o sinal + significa efetivamente realizar a operação e o sinal = significa dar a resposta; apresentam dificuldades em atribuir significados às letras e tendem a atribuir valores específicos para as letras mesmo quando estas se apresentam como variáveis.

Kieran (1992), discute os pensamentos desenvolvidos por estudantes no ensino tradicional[9] de aritmética e afirma que essa passagem da aritmética para a álgebra requer ajustes de pensamento para o desenvolvimento do

[9] Forma de ensino em que a aritmética é ensinada desvinculada da álgebra. Ensina-se apenas aritmética nas séries iniciais para depois ensinar álgebra. Nesse modelo curricular, álgebra e aritmética são tratadas como coisas que nunca se relacionam.

pensamento algébrico. Isso se verifica, por exemplo, quando os estudantes tratam o sinal de igual como um indicador da resposta, consistindo em algo que separa o problema da solução, indicando os resultados das operações que se apresentam à esquerda do sinal, (KIERAN, 1992).

As evidências mostram que não há uma compreensão do sinal de igual como uma afirmação da equivalência entre duas expressões. Além do mais, esses estudantes não se mostram confortáveis em trabalhar com duas expressões numéricas, uma em cada lado do sinal de igual, sem que cada uma tenha um resultado particular, (KIERAN, 1981). Dessa forma, entendemos que o ensino de Matemática nos anos iniciais pode ser considerado um momento de relacionar-se com a mesma de forma a descobrir que se pode ir além de calcular resultados particulares, criando oportunidades a estudantes de construírem idéias algébricas.

O ensino deve considerar questões como essas objetivando que em séries posteriores estudantes possam construir significados algébricos para os símbolos, desenvolver uma concepção estrutural em complemento à operacional e compreender objetos da álgebra como incógnitas, variáveis e parâmetros. Além disso, as letras devem ser interpretadas como a representação daqueles objetos e não como o objeto por si mesmo.

Diante de questões em que estudantes tendem a realizar processos aritméticos em situações que requerem processos algébricos, alguns apontamentos sugerem a necessidade de ajustes no ensino para o desenvolvimento de uma forma algébrica de pensar como, por exemplo:

> 1. Um foco sobre as relações e não apenas sobre o cálculo de uma resposta numérica; 2. Um foco sobre as operações, bem como suas inversas e a idéia relacionada de fazer/desfazer; 3. Um foco em que representam e resolvem um problema, em vez de meramente solucioná-lo; 4. Foco em números e letras, em vez de números por si só; Isso inclui: (i) trabalhar com letras que às vezes podem ser incógnitas, variáveis ou parâmetros; (ii) aceitar fechamento de expressões literais como respostas; (iii) comparar expressões para equivalência baseada em propriedades, em vez de avaliação numérica; 5. Uma reorientação do significado do sinal de igual. (KIERAN, 2004, p. 140-141)[10]

[10] Tradução nossa de: “1. A focus on relations and not merely on the calculation of a numerical answer; 2. A focus on operations as well as their inverses, and on the related idea of doing / undoing;
3. A focus on both representing and solving a problem rather than on merely solving it; 4. A focus on both numbers and letters, rather than on numbers alone. This includes: (i) working with letters that may at times be unknowns, variables, or parameters; (ii) accepting unclosed literal expressions as responses; (iii) comparing expressions for equivalence based on properties rather

Esses ajustes são elementos importantes para a elaboração de currículos para os anos iniciais, e podem contribuir para que as crianças concebam a matemática para além da realização de cálculos.

O ensino de matemática nos anos iniciais deve considerar aspectos importantes do desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes como as equivalências entre duas expressões, as conexões entre as quatro operações de forma que oportunize a compreensão da ideia de fazer e desfazer, explorar a generalidade a partir de casos particulares levando os estudantes a compreender as propriedades dos números e iniciar a utilização de outras representações além da linguagem aritmética na resolução de problemas. Experiências como essas são inerentes ao desenvolvimento do pensamento matemático, uma vez que possibilitam um envolvimento com a aritmética e um elo com a álgebra, contribuindo para o desenvolvimento algébrico.

O desenvolvimento do pensamento algébrico está relacionado à produção de significados. Como dissemos anteriormente, para o desenvolvimento de uma forma algébrica de pensar há a necessidade de atribuir significados algébricos aos símbolos que também são utilizados em aritmética. Além disso, na linguagem algébrica, as letras assumem diferentes usos que também merecem considerável atenção quando falamos em aprendizagem de álgebra. Usiskin (1988), aponta distintos papéis das letras diretamente relacionados a diferentes concepções da álgebra, conforme o quadro 1 que organiza essa comparação.

Quadro1 - As Concepções de álgebra e os usos das letras em cada concepção.

Concepção da Álgebra	**Uso das variáveis**
Aritmética Generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver problemas	Incógnita, constantes (resolver, simplificar)
Estudo das relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)

than on numerical evaluation; 5. A refocusing of the meaning of the equal sign.” (KIERAN, 1992, p. 140-141)

Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: Usiskin (1988, p.20)

O quadro apresentado por Usiskin (1988), destaca as finalidades da álgebra e os respectivos papéis das letras, isto é, os distintos modos de uso das letras. Na álgebra concebida como aritmética generalizada, as letras são usadas para modelar, compondo expressões que descrevem a generalidade de uma situação quando são usadas para descrever as propriedades dos números. Quando a álgebra é considerada como um meio de resolver problemas, o papel das letras consiste em representar determinadas quantidades desconhecidas que solucionam o problema, ou seja, aparecem como incógnitas. Nos casos em que álgebra é tratada como o estudo das relações, utilizamos $y = ax + b$, para representar uma função. Nessa representação, o '*x*' aparece como argumento, isto é, os valores pertencentes ao domínio de uma função e o *'y'* aparece como parâmetro. Entre argumentos e parâmetros há uma relação de dependência indicada pela igualdade e descrita por coeficientes numéricos que servem para descrever a relação entre os elementos de dois conjuntos.

As categorizações do quadro apresentam diferentes percepções de álgebra que não se excluem mutuamente e assim se complementam de modo a formar uma ideia geral de álgebra em que as letras assumem diferentes significados. Além desses usos, há também os casos em que as letras servem para especificar números como o "π" e o "e" e para abreviar um objeto ou unidade de medidas como o "*m*" para metro. Tem sido comum ao invés de letras o uso de outros símbolos em uma sentença aritmética aberta como 3 + ☐ = 5, indicando um espaço reservado, (KIERAN, 1992).

Os diferentes papéis das letras levam a necessidade de identificar os significados que assumem em diferentes situações. Quando as letras aparecem como incógnitas representam um conjunto verdade a ser determinado, enquanto que quando aparecem como argumentos ou parâmetros representam elementos de conjuntos, assumindo valores variados e descrevendo padrões.

Os significados das letras e símbolos algébricos estão associados a determinados processos. Os tipos de processos a serem realizados derivam dos significados que os estudantes atribuem ao símbolo. Assim quando os estudantes

afirmam que $5a+7b=12ab$, ainda concebem o sinal de + como uma indicação de que obrigatoriamente se deve realizar a soma e não entendem $5a+7b$, como uma resposta. (KIERAN, 1981; 1992; BOOTH, 1989). Essas evidências mostram que os estudantes não desenvolveram um pensamento estrutural. A não aceitação de fechamento de expressões literais como resposta leva os estudantes a realizarem cálculos em álgebra próprios de um modo aritmético de pensar e não conseguem perceber que a igualdade estabelecida *(*$5a+7b=12ab$*)* não é verdadeira.

Sfard e Lynchevski (1994), defendem que um componente importante do pensamento algébrico é a flexibilidade, ou seja, a habilidade de alternar entre uma abordagem de pensamento operacional e uma abordagem estrutural concentrando-se ora nos processos e ora nos objetos abstratos que estão por trás dos símbolos. De acordo com esses autores, as descrições estruturais parecem ser mais abstratas uma vez que para falar de objetos matemáticos, nós devemos ser capazes de lidar com produtos de alguns processos sem se preocupar sobre os processos em si mesmos.

Quando um estudante faz $5a+7b=12ab$, não concebe que a expressão $5a+7b$, representa um resultado e focam na operação, em que a resposta $12ab$, parece ser satisfatória. Se esses estudantes recorressem a dar valores numéricos aos símbolos realizando os processos aritméticos poderiam concluir que a igualdade estabelecida não é verdadeira. Com relação a isso, Sfard e Lynchevski (1994), esclarecem que as manipulações algébricas podem ser vistas como processos secundários que são significativamente explicados por processos aritméticos subjacentes a eles. A realização de processos secundários, no caso as manipulações algébricas, sem estabelecer relações com os processos primários, nesse caso processos aritméticos subjacentes, os símbolos passam a ter significados em si mesmos e os métodos algébricos não fazem sentido. Para Sfard e Lynchevski (1994), a *abordagem relacional* entre os processos primários e secundários consiste na habilidade de produzir algum tipo de justificativa para as manipulações feitas e a *abordagem instrumental* consiste em usar uma técnica sem que se possam justificar as manipulações de alguma maneira, o que as torna não significativas. Portanto, lidar com a linguagem simbólica requer uma flexibilidade em alternar entre objetos e processos além de reconhecer os objetos algébricos por trás dos símbolos. A capacidade de justificar manipulações consiste em uma característica do pensamento algébrico.

A álgebra como estudo das estruturas envolve propriedades e objetos matemáticos abstratos por trás dos símbolos ou expressões simbólicas. Para Sfard e Lynchevski (1994b, p. 286),

> Uma incapacidade de ver os objetos abstratos por trás de fórmulas algébricas, frequentemente, se transformaria em uma séria desvantagem para um aluno. Na ausência de elementos que são necessários para dar um significado mais profundo para manipulações do símbolo, as regras da álgebra são condenadas a serem interpretadas como arbitrárias e sem motivos e o entendimento do estudante pode somente ser instrumental. O aluno, incapaz de entender a natureza das entidades abstratas que servem como entradas e saídas para os procedimentos que ele ou ela realiza, frequentemente iria desenvolver concepções que, uma vez decidimos chamar semanticamente nulas ou pseudoestrutural (Veja também Sfard, 1992). Quando os sinais sobre o papel não parecem repousar em qualquer entidade concebível diferente dos próprios sinais, o significante torna-se o significado.[11]

Alguns estudantes podem manipular símbolos sem desenvolver uma compreensão. São as concepções semanticamente nulas que se referem à realização de manipulações algumas vezes com certa fluência, porém não são capazes de justificar as transformações feitas. Nesses casos os símbolos parecem existir por si só, e não estão atrelados aos objetos algébricos. Decorre disso que o ensino deva focar no desenvolvimento de significados para os símbolos e para as manipulações algébricas.

Embora as evidências mostrem as dificuldades dos estudantes com a linguagem simbólica e "[...] mesmo que a natureza do significado que os estudantes retiram de estruturas algébricas possam ser ilusórias, esta fonte de significados é considerada por muitos educadores matemáticos e pesquisadores ser fundamental para aprendizagem de álgebra",[12] (KIERAN, 2007, p. 711).

---

[11] Tradução nossa de "A failure to see the abstract objects behind algebraic formulae would often turn into a serious handicap for a learner. In the absence of the elements which are necessary to give a deeper meaning to symbol manipulations, the rules of algebra are doomed to be perceived as arbitrary and having no reasons and student's understanding can only be instrumental. The pupil, unable to fathom the nature of the abstract entities which serve as inputs and as outputs to the procedures he or she performs, would often develop conceptions which we once decided to call *semantically debased or pseudostructural* (see also Sfard, 1992). When the signs on the paper do not seem to stand for any conceivable entity different from the signs themselves, *the signifier becomes the signified."*

[12] Tradução nossa de ... even though the nature of the meaning that students draw from algebraic structure can be elusive, this source of meaning is considered by many mathematics educators and researchers to be fundamental to algebra learning.

Além da linguagem simbólica, outras representações matemáticas, incluindo múltiplas representações têm sido consideradas como uma das principais fontes de significados em álgebra, (KIERAN, 2007).

O papel das representações na aprendizagem matemática vai além de expressar ideias matemáticas. Sistemas de representações como a linguagem simbólica e os gráficos, por exemplo, são formas adotadas socialmente para se referir aos objetos matemáticos abstratos. Esses sistemas são chamados de representações externas, pois, são externamente escritos ou falados, em geral com o objetivo de facilitar a comunicação sobre o conceito, (DREYFUS, 2002).

De acordo com Kaput (1987), os sistemas de representações funcionam como artefatos concretos que geram representações mentais. Estas são consideradas representações internas, formadas na mente do indivíduo. Para Dreyfus (1991), as representações mentais referem-se a esquemas internos ou quadros de referência utilizados para interação com o mundo externo e afirma que para se ter êxito em matemática é necessário ter ricas representações mentais de conceitos, ou seja, representações internas contendo vários aspectos vinculados àquele conceito. Para esse autor, crianças pequenas criam representações mentais de qualquer coisa que pensam, inclusive dos objetos matemáticos como os números.

Assim, as representações externas fazem um papel intermediário entre o objeto matemático e a construção do conceito pelo indivíduo. Quando estudantes lidam com diferentes sistemas simbólicos, como gráficos, tabelas, linguagem aritmético-simbólica, entram em contato com diferentes representações do objeto matemático que podem oportunizar a construção de representações mentais do objeto, em processos de construção de conceitos.

As abordagens da *Early Algebra* têm reconhecido sistemas simbólicos ou de representação como fundamentais na construção de significados: notações aritmético-algébricas, tabelas, gráficos e linguagem natural, (CARRAHER, SCHLIEMANN, 2007). Em Schliemann et. al. (2003) são apresentadas algumas ideias que direcionam as abordagens da *Early Algebra* como: a compreensão matemática é uma construção individual que é transformada e expandida por meio de uma interação social, de experiências em múltiplos contextos significativos e acesso a sistemas simbólicos e ferramentas matemáticas. Além disso, acreditam que as crianças necessitam ser socializadas nos sistemas simbólicos, mas também

precisam fazer os seus próprios sistemas, pois tanto os sistemas simbólicos convencionais[13] como aqueles construídos pelas crianças desempenham um papel importante na educação matemática. De acordo com Schliemann et al. (2003, p. 2), “um problema central em matemática consiste em mover-se entre diversas representações, muitas vezes entre esses sistemas simbólicos principais”[14].

Nos anos iniciais os estudantes podem se familiarizar com diferentes sistemas simbólicos e compreender que um objeto matemático, como as funções, por exemplo, pode ser representado de maneiras diferentes, seja, linguagem simbólica, gráficos, ou ainda por elementos organizados em tabelas. De acordo com Carraher; Brizuela, Earnest (2006, p.88), mesmo

> [...] nos anos iniciais, a notação algébrica pode desempenhar um papel de apoio na aprendizagem de matemática. Notação simbólica, reta numérica, tabelas de funções e gráficos são ferramentas poderosas que os alunos podem usar para compreender e expressar relações funcionais por meio de uma ampla variedade de situações problema.[15]

Lidar com diferentes representações nos anos iniciais pode servir de apoio aos estudantes ao resolverem problemas, além de colocá-los diante da possibilidade de ampliar suas formas de representar o pensamento. Ainda, permite que os estudantes permeiem entre diferentes representações de um mesmo objeto matemático de forma a construir representações mentais cada vez mais elaboradas.

Os sistemas simbólicos socialmente compartilhados, como por exemplo, gráficos e tabelas, aos quais chamaremos de sistemas convencionais, são dotados de regras e funcionamentos dos quais os estudantes devem se apropriar. Esses sistemas carregam significados que nem sempre são percebidos pelos estudantes. Nos processos de construção do conhecimento, esses sistemas algumas vezes são utilizados pelos estudantes, atribuindo-lhes um sentido diferente

---

[13] Consideramos ‘sistemas simbólicos convencionais’ como representações sistemáticas do objeto matemático, amplamente difundidas, adotadas por grupos, ou podemos dizer, socialmente compartilhados, e usualmente, ensinados nas escolas. Como exemplo, citamos os gráficos, tabelas e linguagem simbólica.

[14] Tradução nossa de “A central problem in mathematics consists in moving back and forth between diverse representations, often across these key symbolic systems”

[15] Tradução nossa de “Even in Early grades, algebraic notation can play a supportive role in learning mathematics. Symbolic notation, number lines, function tables, and graphs are powerful tools that students can use to under-stand and express functional relationship across a wide variety of problem contexts.”

daquele pretendido. Como exemplo, podemos citar o caso em que o estudante constrói uma tabela, mas essa construção não é usada para comparação ou análise. As crianças conseguem completar corretamente as tabelas por perceberem que as quantidades aumentam de 1 em 1 ou de 3 em 3, embora não se ocupem das relações regulares entre a primeira e a segunda coluna, (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2007). Nesse caso, a finalidade de buscar as relações entre os conjuntos não é atingida, pois o objetivo da tarefa não foi alcançado sendo reduzido a completar a tabela. Nesse sentido, a representação aparece como um objeto em si mesmo.

Além de representações socialmente compartilhadas como as tabelas, gráficos, linguagem simbólica, outros tipos de representações podem ser utilizados por estudantes para resolver um problema ou enunciar um processo matemático. Estamos nos referindo às representações não convencionais e/ou não sistemáticas que consistem em uma linguagem própria do estudante para expressar ideias matemáticas.

Ao resolver uma tarefa matemática, o estudante pode utilizar uma linguagem própria, uma vez que “aprender e construir conhecimentos são processos que envolvem invenções – produções novas que criamos, utilizando nossas estruturas cognitivas atuais, enquanto tentamos compreender uma situação ou um fenômeno.”, (BRIZUELA, 2006, p. 51). Dessa forma, chamaremos de linguagem matemática não convencional, qualquer forma de representar inventada pelo estudante, diferente de sistemas simbólicos convencionais, desde que expresse ideias matemáticas.

A *Early Algebra* tem apresentado a resolução de problemas como fundamental para a aprendizagem de álgebra nos anos iniciais. Além das representações como fonte de significado para a álgebra, resolver problemas também oportuniza experiências que contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. Em uma investigação realizada por Carraher; Schliemann e Brizuela (1998), envolvendo resolução de problemas de álgebra com estudantes da terceira série do Ensino Fundamental, resultados mostraram que os mesmos demonstram compreender que se transformações equivalentes são realizadas para quantidades iguais, as quantidades resultantes também são iguais, mas raramente usam esses princípios na solução de equações em que aparecem incógnitas em ambos os lados. Também verificaram que os estudantes conseguem

elaborar sistemas de representações consistentes para representar elementos e as relações em problemas envolvendo incógnitas. Essas representações foram denominadas pelos autores de notações significativas de transição entre quantidades medidas e quantidades desconhecidas. Assim, representar situações problemas pode ser um meio de provocar o estudante a manifestar o pensamento algébrico, colocando-os diante de princípios os quais antes não haviam pensado, mas que são capazes de compreender e os contextos dos problemas funcionam como uma ferramenta didática. Cabe ressaltar que embora os problemas sejam fontes de significados e oportunidades para a manifestação do pensamento algébrico, as resoluções dos estudantes podem não apresentar elementos que levem a verificar a presença de pensamento algébrico.

1.2 CARACTERIZAÇÕES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Na busca de elementos que indiquem a manifestação do pensamento algébrico, apresentamos neste trabalho algumas das caracterizações do pensamento algébrico resultantes do trabalho de pesquisadores que tratam do assunto. Acreditamos que essas caracterizações possam contribuir para realizarmos as análises de nossa investigação.

A respeito do pensamento algébrico Kieran (1992, p. 4), afirma que

> Na maioria das principais atividades encontramos aspectos do pensamento algébrico (processos mentais como raciocinar com incógnitas, generalizar e formalizar relações entre grandezas e desenvolver o conceito de “variável”) e simbolização algébrica (manipulação de símbolo no papel). Geralmente é aceito que os alunos devem adquirir ambas as competências para ter o entendimento completo algébrico. (KIERAN, 1992, p. 4)[16]

Formalmente em álgebra, raciocinar com incógnitas relaciona-se a resolver equações realizando operações inversas às operações dadas no problema, seguindo uma ordem que possibilite determinar o valor desconhecido. No entanto, estudantes podem apresentar outras formas de lidar com incógnitas sem escrever

[16] Tradução nossa de ... In most of the core activities we find aspects of *algebraic thinking* (mental processes like reasoning with unknowns, generalizing and formalizing relations between magnitudes and developing the concept ‘variable’) and *algebraic symbolizing* (symbol manipulation on paper). Generally it is agreed that students must acquire both competencies in order to have full algebraic understanding.

uma equação. Resoluções de problemas envolvendo um valor desconhecido podem apresentar as operações inversas, indicando um raciocínio com incógnitas, utilizando uma linguagem aritmética.

A generalização e formalização das relações entre grandezas são aspectos de um pensamento em que casos particulares não são a finalidade, mas servem para iniciar percepções de leis gerais. Um estudante dos anos iniciais pode lidar com variáveis e incógnitas mesmo sem conhecer a linguagem simbólica. Nesse sentido, problemas envolvendo objetos da álgebra como incógnitas e variáveis, nos anos iniciais, contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Fiorentini, Cristóvão e Fernandes (2005, p. 5), apresentam alguns aspectos do pensamento algébrico anterior à linguagem simbólica que definem como elementos caracterizadores do pensamento algébrico, quando a criança

> [...] estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente...

Esses elementos indicam pensamento algébrico também em resoluções de estudantes que ainda não tiveram a instrução formal em álgebra, pois não dependem do conhecimento da linguagem simbólica. No entanto os autores consideram que a criação de uma linguagem sincopada consiste em buscar uma linguagem adequada para expressar esse pensamento. Esses aspectos de pensamento algébrico apresentados estão relacionados a processos matemáticos que se mostram necessários para a compreensão de álgebra como, generalizar, abstrair, modelar e representar. Além desses processos mais gerais envolvidos, os elementos caracterizadores do pensamento algébrico também se relacionam com processos específicos da álgebra como o estabelecimento de relações, interpretação da igualdade como uma equivalência entre duas grandezas ou duas expressões numéricas, processos de transformações de uma expressão em outra, percepção e expressão de regularidades.

As concepções de álgebra apresentadas por Usiskin (1988), também revelam aspectos do pensamento matemático e aspectos específicos da álgebra.

Quando a álgebra é concebida como aritmética generalizada “é natural pensar as variáveis como generalizadoras de modelos”, (USISKIN, 1988, p. 13). Nesses casos, os processos de generalização e tradução para uma linguagem adequada estão envolvidos. Na concepção de álgebra como meio para resolver certos problemas trabalha-se com incógnitas e “neste caso, as instruções chave são simplificar e resolver”, (USISKIN, 1988, p. 15). Álgebra como estudo de relações entre grandezas envolve análises de variações partindo de um modelo e álgebra como estudo das estruturas consiste em propriedades atribuídas às operações e polinômios (USISKIN, 1988). Destacar essas concepções não só revela os diferentes usos das letras como quais processos do pensamento matemático fazem parte da álgebra.

Em uma tentativa de organizar álgebra e pensamento algébrico, Kaput (1999), apresenta cinco aspectos da álgebra que são: generalização e formalização, manipulações sintaticamente guiadas, o estudo de estruturas, o estudo de funções, relações, variações e uma linguagem para modelagem. Esse mesmo autor afirma que o raciocínio algébrico pode assumir várias formas, incluindo:

> (a) o uso de aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada); (b) generalizar padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); (c) modelagem como um domínio para expressar e formalizar generalizações e (d) generalizar sobre sistemas matemáticos abstraídos a partir de cálculos e relações. (BLANTON e KAPUT, 2005, p. 413)[17]

No mesmo sentido, em uma tentativa de organizar a álgebra escolar de acordo com a natureza da atividade algébrica, Kieran (2007), construiu categorias resultando em três grupos: atividades geracionais, atividades transformacionais e atividades meta nível globais. As atividades geracionais de álgebra envolvem a formação de expressões e equações e inclui também trabalhar com incógnitas, variáveis e igualdades. Essas atividades envolvem relações entre grandezas, o desenvolvimento de um pensamento funcional, a construção de significado para o sinal de igual. Além disso, envolve lidar com os conceitos de incógnitas e variáveis. De acordo com Kieran (2007, p. 713), “grande parte da construção de significados

[17] Tradução nossa de …(a) The use of arithmetic as a domain for expressing and formalizing generalizations (generalized arithmetic); (b) generalizing numerical patterns to describe functional relationships (functional thinking); (c) modeling as a domain for expressing and formalizing generalizations; and (d) generalizing about mathematical systems abstracted from computations and relations.

para objetos algébricos ocorre com as atividades geracionais de álgebra”[18]. As atividades transformacionais são classificadas como estritamente algébricas, que se referem a

> [...] mudar a forma simbólica de uma expressão ou equação segundo as regras de forma a manter equivalências. Além de desenvolver o significado de equivalência, esta atividade também inclui construção de significado para o uso de axiomas e propriedades nos próprios processos de manipulação” [19] (KIERAN, 2007, p. 714).

Esse grupo inclui manipulações que têm sido chamadas em alguns livros didáticos[20] de ‘cálculo algébrico’. Envolve qualquer transformação, seja no desenvolvimento de equações ou em expressões algébricas ao estudar as propriedades dos números e polinômios. O terceiro grupo, denominadas globais ou meta nível, consistem em atividades

> [...] para as quais a álgebra é usada como uma ferramenta mas que não são exclusivas da álgebra. [...] Sugerem processos e atividades matemáticas mais gerais. Elas também fornecem o contexto, um objetivo e motivação para o envolvimento nas atividades geracionais e transformacionais anteriormente descritas. As atividades meta nível globais incluem resolver problemas, modelar, trabalhar com padrões generalizáveis, justificar e provar, fazer predições e conjecturas, estudar as variações em situações funcionais, examinar relações ou estruturas, e assim por diante. (KIERAN, 2007, p. 714)[21]

As atividades globais ou meta nível não são específicas da álgebra, mas são consideradas como “essenciais para as outras atividades em especial para atividades geracionais de construção de significados”, (KIERAN, 2004, p. 148)[22]. No

---

[18] Tradução nossa de : Much of the meaning building for algebraic objects occurs within the generational activity of algebra.

[19] Tradução nossa de …A great deal of this type of activity is concerned with changing the symbolic form of an expression or equation in order to maintain equivalence. In addition to developing meaning for equivalence, this activiy also includes meaning building for the use of properties and axioms in the manipulative processes themselves.

[20] Como exemplo, o livro ‘Matemática: Ideias e Desafios, 7ª série, apresenta um capítulo com o título ‘Introdução ao cálculo algébrico’ para tratar das manipulações simbólicas.

[21] Tradução nossa de: […] algebra is used as a tool but that are not exclusive to algebra. […] they suggest more general mathematical processes and activity. They also provide the context, sense of purpose, and motivation for engaging in the previously described generational and transformational activity. The global/meta-level activities include problem solving, modeling, working with generalizable patterns, justifying and proving, making predictions and conjectures, studying change in functional situations, looking for relationships or structure, and so on-activities that could indeed be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all. (KIERAN, 2007, p. 714)

[22] Tradução nossa de …are essential to the other activities of algebra, in particular, to the meaning-building generational activities;

grupo de atividades descritas como meta nível globais aparecem modelagem, generalização, justificação e abstração, isto é, processos do pensamento matemático necessários em álgebra. Realizar atividades que são próprias da álgebra, como resolver equações ou fazer manipulações simbólicas, envolve também realizar atividades globais ou meta nível como a justificação. Dessa maneira, o modelo de atividade algébrica apresenta as três categorias de atividades interdependentes. As atividades geracionais e transformacionais envolvem a linguagem simbólica e ao desenvolver essas atividades, é necessário envolver-se com as atividades do terceiro grupo.

A organização da álgebra em três categorias de atividade algébrica contribui para definir objetivos do ensino de álgebra nos anos iniciais. No que diz respeito a isso Kieran (2004, p. 149), afirma que,

> [...] pensamento algébrico nos anos iniciais envolve o desenvolvimento de formas de pensar no âmbito das atividades para as quais a linguagem simbólica pode ser usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas para álgebra e com as quais podem se envolver sem usar qualquer linguagem simbólica, tais como analisar relações entre quantidades, observar a estrutura, estudar variações, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever.[23]

Podemos dizer que o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais pode ocorrer no âmbito das atividades globais ou meta nível. O desenvolvimento de formas de pensar matematicamente mais abrangentes nos anos iniciais pode ser o caminho para que realizem outras atividades mais específicas da álgebra em séries posteriores.

A álgebra nos anos iniciais consiste em desenvolver maneiras de pensar de forma que a generalidade complemente a particularidade, em que os resultados são objetos passíveis de análises, observações e percepções e em que os processos sejam realizados amparados em justificações e provações.

Acreditamos que o ensino nos anos iniciais deva oportunizar a realização dos processos acima citados de forma a contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes, dando ênfase a

---

[23] Tradução nossa de …Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting.

generalização, modelagem, abstração, justificação, provação, resolução de problemas, entre outros, que também são considerados como formas algébricas de pensar. Assim, as novas abordagens para o ensino de álgebra nos anos iniciais não propõem que estudantes desse nível de ensino possam ser capazes de realizar manipulações algébricas ou que esses estudantes se apropriem da linguagem simbólica. No entanto, podem utilizar a linguagem simbólica como ferramenta, incluindo gráficos e tabelas que consistem em sistemas simbólicos convencionais.

Na busca por definir os objetivos da álgebra nos diferentes níveis de ensino buscou-se a compreensão de como a mesma pode ser apresentada, distinguindo-se a álgebra como um conjunto de conhecimentos e técnicas da álgebra como uma maneira de pensar, (LEW, 2004). Quando o ensino de álgebra se apresenta como reprodução das técnicas e manipulação simbólica, os estudantes podem ser levados a realizar procedimentos de repetição sem que sejam capazes de justificar suas ações. Esse tipo de ensino não leva os estudantes a realizarem as atividades que se encontram no grupo global meta nível e geracionais, quebrando a interdependência entre os três grupos de atividades algébricas.

Álgebra como uma maneira de pensar poderia também ser definida como a realização de processos algébricos do sujeito ativo, que realiza a atividade algébrica ao invés de meramente reproduzi-la.

De acordo com Lew (2004), “sucesso em álgebra depende de pelo menos seis tipos de habilidades de pensamento matemático, que são: generalização, abstração, pensamento analítico, pensamento dinâmico, modelagem e organização.”[24] (LEW, 2004, p. 93). Em uma discussão a respeito do currículo de álgebra nos anos iniciais Lew (2004), apresenta um quadro com os objetivos da álgebra nesse nível de ensino e as correspondentes habilidades do pensamento algébrico mencionadas, consideradas necessárias para o sucesso em álgebra. Vejamos no quadro 2.

Quadro 2 - Objetivos da álgebra em um nível elementar.

Pensamento Algébrico	**Objetivos Específicos**

[24] Succes in algebra depends on at least six kinds of mathematical thinking abilities as follows: Generatization, Abstraction, Analytic thinking, Dynamic thinking, Modeling, and Organization.

Generalização	Reconhecer padrões e relações de sequências de números e figuras.
	Resolver problemas usando padrões descobertos.
	Resolver problemas usando de simplificação.
Abstração	Compreender conceitos matemáticos e propriedades.
	Usar símbolos relacionados com os conceitos e propriedades.
	Atividades operacionais com símbolos abstratos.
Pensamento analítico	Resolver equações por métodos intuitivos.
	Resolver equações por operações inversas.
	Resolver problemas usando um trabalho de volta.
Pensamento dinâmico	Separar um número em várias formas e reagrupá-lo.
	Resolver problemas usando uma estratégia de tentativa e erro.
	Identificar relações entre dois conjuntos de objetos variáveis.
	Resolver problemas usando uma proporcionalidade direta.
Modelagem	Fazer uma estória relacionada com uma expressão dada.
	Fazer um problema relacionado a uma expressão dada.
	Representar um problema usando uma expressão adequada.
	Modelar uma situação usando um diagrama ou uma figura.
Organização	Classificar.
	Resolver problema fazendo uma tabela.
	Resolver problema usando uma estratégia de dedução lógica.

Fonte: Adaptado de Lew (2004, p.95)

O que Lew (2004), apresenta como objetivos para o ensino de álgebra nos anos iniciais nós entendemos como aspectos do pensamento algébrico, uma vez que quando os estudantes realizam essas atividades demonstram habilidades do pensamento matemático necessárias para pensar algebricamente. Dessa forma, consideramos como aspectos de pensamento algébrico as evidências de que os estudantes se utilizam de habilidades do pensamento matemático para lidar com problemas que envolvem conceitos algébricos, utilizando qualquer tipo de linguagem para se expressar.

No quadro 2, as habilidades do pensamento algébrico podem ser manifestados nos anos iniciais em diferentes aspectos dependendo da série e do desenvolvimento do estudante. Os diferentes aspectos que se referem a uma mesma habilidade podem indicar níveis de complexidade diferentes.

A generalização é um processo que pode partir de casos particulares para perceber algo de comum em um dado conjunto que se confirmada à regra geral pode ser expressa verbalmente ou por meio de uma linguagem concisa ou simbólica. De acordo com Lew (2004, p. 93), “generalização é um processo para

encontrar um padrão”[25]. Para Dreyfus (1991, p. 35), generalizar é “derivar ou induzir de particularidades, identificar pontos comuns, expandir os domínios de validade”.[26] No quadro verificamos uma diferenciação entre reconhecer um padrão e aplicar o padrão conhecido na resolução de um problema ou de obter um padrão a partir da simplificação de várias situações.

A habilidade de pensar analiticamente envolve raciocinar com incógnitas. Ao resolver uma equação do tipo □+12=20, o estudante pode intuitivamente pensar em um número que satisfaça a sentença ou usar de uma operação de subtração. Na resolução de problemas os estudantes podem usar operações inversas e chegar ao valor da incógnita, ou modelar em forma de equação e, resolver formalmente usando o trabalho de volta. Desenvolver o pensamento dinâmico consiste na capacidade de lidar com variações ou realizar “manipulações dinâmicas de objetos matemáticos”, (LEW, 2004, p. 96) [27]. Está incluída nessa habilidade a realização de transformações de expressões aritméticas em outras para realizar cálculos mentais, como pensar na expressão 6.10,como $6.(10+2)=60+12=72$, trabalhando com o número 10, ou, resolver problemas testando números, de forma que uma das variáveis satisfaça a situação problema, apresentar um pensamento funcional identificando relações entre dois conjuntos de variáveis ou usando proporcionalidade direta para resolver problemas.

A modelagem está na essência da álgebra formal. Expressar um problema por meio de uma equação ou construir uma expressão matemática para descrever relações consistem em processos algébricos de modelação. De acordo com Lew (2004, p. 95), modelagem é “um processo de *representar* as situações complexas utilizando expressões matemáticas, investigar a situação com um modelo, e *tirar* algumas conclusões da atividade.” [28] Nos anos iniciais, a modelagem pode ocorrer, mesmo que os estudantes se utilizem de representações não convencionais.

---

[25] Tradução nossa de …Generalization is a process to find a pattern

[26] Tradução nossa de … To generalize is to derive or induce from particulars, to identify commonalities, to expand domains of validity.

[27] “dynamical manipulation of mathematical objects”. (LEW, 2004, p.96)

[28] Tradução nossa de…a process to *represent* the complex situation using mathematical expressions, to *investigate* the situation with a model, and to *draw* some conclusions from the activities.

Outra habilidade que consideramos pertinente abordar em nosso estudo é a organização. Em álgebra, recursos como tabelas, diagramas ou mesmo esquemas organizadores do pensamento, podem ser utilizados para ajudar na realização de análises e a descobrir variáveis independentes.

Consideramos para as análises dos registros escritos dos estudantes que a manifestação do pensamento algébrico em crianças que ainda não tiveram aulas de álgebra formal pode ser identificada em resoluções de problemas que apresentam os aspectos desse pensamento. Esses aspectos relacionam-se com habilidades do pensamento matemático como generalização, abstração, pensamento analítico, pensamento dinâmico, modelagem e organização. Para nós, aspectos de pensamento algébrico consistem em evidências de que os estudantes apresentaram habilidades do pensamento matemático, consideradas necessárias para o sucesso em álgebra, ao resolverem problemas que envolvem conceitos algébricos.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os primeiros trabalhos a campo iniciaram-se em uma turma de 6º ano[29] do Ensino Fundamental no início do ano de 2012. Escolhemos esse nível de escolaridade, pois pretendíamos trabalhar com estudantes que ainda não haviam recebido instrução de álgebra formalmente. Utilizamos quatro aulas e aplicamos oito problemas selecionados da OBMEP[30], a fim de buscar aspectos de pensamento algébrico nas resoluções desses estudantes. Nessa etapa, que chamaremos de investigação 'piloto', foram realizadas observações que possibilitaram averiguar algumas peculiaridades da turma com relação a seus conhecimentos de matemática. Dando sequência às investigações, retornamos à escola para trabalhar com a mesma turma, de forma a iniciar a investigação, foco deste trabalho. Na segunda etapa da pesquisa, utilizamos os procedimentos metodológicos à luz do Experimento de Ensino, a ser definido posteriormente.

2.1 NATUREZA DA PESQUISA

A investigação foi iniciada em uma sala de aula de Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Palotina no Estado do Paraná em que os procedimentos realizados apresentam as características da pesquisa qualitativa descritas por Bogdan e Biklen (1991). O ambiente natural dos estudantes em sua rotina de aprendizagem constituiu a nossa fonte de dados, onde a pesquisadora esteve presente e fazendo parte do grupo. Assim, algumas observações foram realizadas de forma a valorizar as informações considerando "que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo." (BOGDAN e BIKLEN, 1991, p.49).

A pesquisadora estava presente no ambiente habitual dos estudantes a fim de obter os registros escritos dos mesmos e observá-los. De

[29] Utilizaremos a denominação 6º ano devido às mudanças de nomenclatura, embora a turma em questão faça parte do Ensino Fundamental de 8 anos regido pela antiga Legislação Educacional Brasileira.

[30] Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas.

acordo com Bogdan e Biklen (1991), dirigir-se ao local de contexto dos sujeitos da pesquisa pode possibilitar capturar na essência o comportamento habitual dos indivíduos de uma sociedade, comunidade ou grupo e permitir uma aproximação de sua realidade procurando perceber comportamentos espontâneos apresentados pelos sujeitos em suas formas de viver, conviver e lidar com situações.

As atitudes, diálogos, olhares dos observados bem como o ambiente em que estavam foram descritos. Essas informações poderiam ser pistas não só para responder nossa pergunta inicial, uma vez que a metodologia de pesquisa de caráter qualitativo permite evidenciar fenômenos a partir dos dados ampliando as possibilidades de contribuições para a pesquisa, para a área de Educação Matemática e de forma geral para a Educação, considerando que “os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.” (BOGDAN e BIKLEN, 1991, p. 49)

Na investigação piloto foram escolhidas oito questões da OBMEP e aplicadas sem intervenção do pesquisador, as quais se encontram nos anexos deste trabalho. Os estudantes resolveram as questões individualmente.

Embora fossem questões de múltipla escolha foi solicitado aos estudantes que deixassem suas resoluções registradas e que explicassem utilizando a linguagem materna suas formas de pensar. Isso porque não nos interessamos somente em verificar quantos estudantes escolheram determinada alternativa, mas observar como eles chegaram àquela resposta.

Por meio da investigação piloto, passamos a conhecer o cotidiano dos estudantes em sala de aula. Nessa fase podemos perceber algumas peculiaridades da turma com relação ao comportamento e a algumas dificuldades apresentadas com relação a conteúdos de Matemática dos anos iniciais. Os estudantes demonstraram dificuldades em interpretar os problemas, principalmente quando se tratava de textos mais longos. Nesse tipo de problema realizavam algum algoritmo em sua produção escrita sem conexão com a situação problema apresentada demonstrando pouca motivação ou desistência.

Alguns estudantes justificavam que haviam tentado resolver, embora não houvessem conseguido. Outros realizavam um algoritmo que tivesse como resultado um dos valores das alternativas da questão, demonstrando uma preocupação maior com a resposta do que com apresentar um desenvolvimento coerente com a situação problema proposta. Suas estratégias de resolução partiam

de informações das alternativas, ao invés de utilizarem as informações do texto do problema. Alguns diziam que não haviam entendido o problema e demonstraram uma dependência, talvez cômoda, de que alguém explicasse os problemas a serem resolvidos. Faziam observações e reclamações a respeito dos problemas, as quais tinham por trás um pedido de ajuda.

Quase todos os estudantes resistiam em deixar registros no papel. Consideraram as questões difíceis e apresentaram problemas conceituais com relação a frações equivalentes, áreas de superfícies planas e simbologia. Alguns estudantes se envolveram no processo de resolução, fazendo tentativas e buscando um convencimento enquanto que outros utilizavam uma única estratégia, mesmo quando a resposta obtida não correspondia às alternativas. Demonstraram dificuldades aritméticas no desenvolvimento de algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão, decorrentes da falta de significados para as técnicas utilizadas em aritmética. Além disso, algumas falhas foram verificadas como o fato de somarem em uma conta de menos e subtraírem em uma conta de mais.

Continuamos a investigação com a mesma turma, dessa vez optando por uma metodologia à luz do Experimento de Ensino. De acordo com Steffe e Thompson (2000, p.267), "um objetivo principal para a utilização da metodologia do experimento de ensino é para o pesquisador experimentar, em primeira mão, a aprendizagem matemática e o raciocínio dos estudantes."[31] Com a pesquisa piloto percebemos que alguns daqueles estudantes apresentavam dificuldades em aritmética e na compreensão de problemas.

Para atingir nosso objetivo de pesquisa que consiste em *identificar, analisar e discutir que aspectos do pensamento algébrico são manifestados por estudantes do sexto ano ao resolverem problemas em um Experimento de Ensino*, propusemos situações problemas envolvendo ideias algébricas, pois, de acordo com a metodologia escolhida nosso interesse seria nas maneiras próprias dos estudantes de lidarem com as situações, tentando compreender o raciocínio dos mesmos. Os problemas dessa segunda etapa estimulavam a mostrarem seus cálculos com desenhos ou representações de forma que identificássemos que tipos de

[31] Tradução nossa de … A primary purpose for using teaching experiment methodology is for researchers to experience, firsthand, students'[2] mathematical learning e reasoning.

representações os estudantes se utilizariam no desenvolvimento dos problemas.

O Experimento de Ensino é uma metodologia essencialmente qualitativa que se embasa em considerações de que os estudantes constroem conceitos e operações matemáticas independentemente de nossas interações com eles e que esses conceitos e operações podem ser diferentes das formas convencionais ou de formas conhecidas pelo pesquisador. Assim, ao escolher essa opção metodológica partimos de uma distinção entre a matemática dos estudantes e a matemática convencional, uma vez que os mesmos podem apresentar uma realidade matemática diferente da nossa, atrelada a um contexto físico e sociocultural no qual estão inseridos. De acordo com Steffe e Thompson (2000, p. 268), "a matemática dos estudantes é indicada pelo que dizem e fazem, como se envolvem em atividade matemática, e um objetivo básico dos pesquisadores em um experimento de ensino é construir modelos de matemática dos alunos."[32] O pesquisador não assume o papel de professor, pois não tem que apresentar uma matemática que utiliza ou que convencionalmente é apresentada nas escolas. Para isso o pesquisador deve estar aberto a aprender com os estudantes e tem que considerar que sua realidade consensual não é a única, (STEFFE e THOMPSON, 2000).

Esse tipo de metodologia é caracterizada por apresentar uma sequência de episódios de ensino que possuem alguns elementos metodológicos incluindo um agente de ensino, uma testemunha e um método de gravação. Os episódios são planejados previamente às aplicações e os registros e gravações de um episódio podem servir na preparação de episódios futuros, bem como na realização da análise conceitual que visa "encontrar motivos racionais para o que os estudantes dizem e fazem." (STEFFE e THOMPSON, 2000, p. 269)

Foram quatro semanas de trabalho em sala de aula totalizando nove episódios de ensino, com aplicação de nove problemas. Os episódios foram gravados em áudio e transcritos pela pesquisadora com o devido consentimento dos estudantes e da escola mediante o compromisso de mantermos o anonimato no relato, conforme termo de consentimento disponibilizado nos anexos deste trabalho.

---

[32] Tradução nossa de… Students' mathematics is indicated by what they say do as they engage in mathematical activity, and a basic goal of the researchers in a teaching experiment is to construct models of students' mathematics.

Cada episódio teve duração de uma aula, em que a pesquisadora era mediadora das situações atuando como agente de ensino, não com objetivo de ensinar uma matemática que conhecíamos e sim explorar a matemática dos estudantes. A pedagoga da escola atuou como testemunha, observando os episódios e registrando suas observações em notas de campo.

Para dar início a esse trabalho, dois problemas foram escolhidos para o primeiro dia de aplicação. Foi explicado aos estudantes que estávamos fazendo uma pesquisa e que tínhamos interesse em saber como eles resolviam aqueles problemas. Em geral, realizamos um episódio com aplicação de problemas e no episódio seguinte promovíamos discussões com a turma de forma que os estudantes pudessem ter oportunidades de expor seu conhecimento matemático e suas maneiras próprias de lidar com problemas envolvendo ideias algébricas utilizando-se de qualquer linguagem para expressar suas resoluções e pensamentos.

Nesses momentos de discussão exploramos algumas notações como tabelas, reta numérica, ou esquemas, e também estimulávamos os estudantes a construírem seus desenhos ou suas próprias formas de representar aquela situação.

Os problemas escolhidos foram retirados de trabalhos em educação algébrica como Carraher, Schliemann e Brizuela (2001a), Carraher, Schliemann e Brizuela (2001b), Brizuela e Schliemann (2003), Brizuela (2006), Ponte, Branco e Matos (2009) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005). Apenas três problemas foram traduzidos por nós. Em alguns fizemos adaptações com frases adicionais do tipo “Mostre com desenhos” para que os estudantes apresentassem outras formas de se expressarem. Em geral, esses problemas envolvem quantidades desconhecidas, variações e relações entre grandezas.

Mesmo apresentando um estranhamento inicial, os estudantes se envolveram com entusiasmo nas resoluções dos problemas. Embora tivéssemos critérios de escolha, nem todos os problemas estavam definidos previamente. Alguns foram escolhidos com base nos acontecimentos do episódio, como sugere o Experimento de Ensino.

As análises dos dados foram realizadas com base na metodologia da Análise de Conteúdo de Bardin (2004). De acordo com a autora, este método de análise aparece com duas funções: a propensão à descoberta e a confirmação de

hipóteses. Na prática as duas funções podem coexistir de maneira complementar. O material e os objetivos dos investigadores podem ser distintos. A descrição analítica funciona segundo procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, analisando o significado ou os significantes (BARDIN, 2004).

O primeiro passo para a realização da análise qualitativa foi a construção de uma lista para cada problema, contendo os detalhes dos processos de resolução de todos os estudantes. No segundo momento foram realizados processos de fragmentação e formação de unidades de significado pela reunião de fragmentos que apresentavam o mesmo sentido. Essas fases propiciaram um envolvimento do pesquisador com os dados.

Buscando identificar fenômenos relacionados ao nosso objetivo de pesquisa, iniciamos os agrupamentos das unidades de significados, uma vez que, na Análise de Conteúdo, as unidades de significado são organizadas e ordenadas em conjuntos lógicos abstratos, possibilitando o início do processo de teorização (BARDIN, 2004).

Ao processo de fragmentação e categorização se aplicam critérios de adequação ou pertinência ao conteúdo e aos objetivos da pesquisa. De acordo com Bardin (2004, p.32) “a técnica consiste em classificar os diferentes elementos nas diversas gavetas segundo critérios susceptíveis de fazer um sentido capaz de organizar uma confusão inicial.” O objetivo da análise de conteúdo é a inferência de conhecimentos recorrendo a indicadores quantitativos ou não. Ao realizarmos os agrupamentos das unidades de significados, fomos descrevendo os indicadores que nos permitiram construir aquele agrupamento. Feitos os agrupamentos e sub-agrupamentos iniciamos os processos de construção de categorias buscando “inferir sobre uma outra realidade não explícita na mensagem.”(BARDIN, 2004, p. 41).

2.2 Os Sujeitos da Pesquisa

Devido à natureza de nossa pesquisa, consideramos pertinente fazer uma descrição dos sujeitos que fizeram parte desta investigação.

A turma do 6º ano era formada por 13 estudantes com idade entre 11 e 14 anos de uma escola pública do município de Palotina - Pr. De acordo com informações da escola, todos os estudantes dessa turma apresentavam dificuldades em Língua Portuguesa e Matemática e por esta razão foram convidados a

participarem da sala de apoio no contraturno em ambas às disciplinas. No entanto, nem todos frequentavam.

Quatro estudantes dessa turma frequentavam a sala de recursos multifuncionais[33]. As dificuldades consistiam em não conseguir se expressar na oralidade, déficit de atenção, déficit intelectual e obesidade. Um desses estudantes gostava de desenhar e frequentemente se negava a resolver as tarefas propostas. Dois deles tinham dificuldades em se concentrar para fazer cópias e para resolver tarefas propostas. Raramente esses estudantes terminavam uma tarefa, pois se ocupavam com outras coisas durante a aula e não era possível que a professora os atendesse individualmente com frequência por questões de administração da sala.

A classe apresentava em geral um comportamento agitado. Eram falantes e participativos, com exceção de um. Percebemos que era comum contarem alguma coisa de suas vidas durante a aula, demonstrando que o conteúdo nem sempre era o foco de suas discussões e de seus pensamentos. Queriam contar algum fato ocorrido em suas casas ou falar de suas famílias. Gostavam quando a professora fazia perguntas durante a explicação, pois respondiam sem medo de errar. Desse modo, se envolviam com o tema da aula. Nem sempre acertavam a resposta, mas sempre tinha alguém querendo responder às perguntas, aparentemente, porque aquela pergunta era ponte para estabelecer um diálogo entre a professora e a turma e eles não perdiam essa chance. Embora muitas vezes errassem a resposta, as perguntas geravam momentos de reflexão na turma.

Algumas falhas no desenvolvimento de algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão foram verificadas nos registros escritos dos estudantes. Em operações de subtração somavam, e em operações de adição subtraíam alguns algarismos. Apresentaram erros no método de emprestar e às vezes subtraíam em uma ordem inversa, como se a subtração fosse comutativa.

Um estudante apresentava atitudes de negatividade na aula como dizer “eu não gosto de matemática”, “minha mãe disse que Matemática é difícil”. Este mesmo estudante, com frequência, realizava algoritmos de maneira não

[33] O objetivo da sala de recursos multifuncionais é “apoiar a organização e a oferta do Atendimento Educacional Especializado – AEE, prestado de forma complementar ou suplementar aos estudantes com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento, altas habilidades/superdotação matriculados em classes comuns do ensino regular, assegurando-lhes condições de acesso, participação e aprendizagem” (http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=17430&Itemid=817)

pertinente. Demonstrava também não compreender o valor posicional dos algarismos no sistema de numeração decimal. Algumas vezes montava uma operação de adição sem organizar unidades com unidades, dezenas com dezenas, o que evidenciou pouca compreensão da aritmética, do sistema de numeração decimal, da construção do número e dos significados dos procedimentos que envolvem os algoritmos.

3 OS EPISÓDIOS DE ENSINO

Neste capítulo apresentaremos os relatos dos episódios, algumas considerações a respeito dos problemas que aplicamos, bem como as análises dos registros escritos dos estudantes. Os relatos sobre os episódios de ensino serão feitos por recortes dos acontecimentos que consideramos como dados importantes como: as observações feitas pelos estudantes, os estranhamentos, as ideias compartilhadas entre eles, os questionamentos, a busca pela compreensão, os raciocínios, as situações que tornam o conceito mais acessível e até as “barreiras” que encontraram naqueles problemas. Na sequência dos episódios de ensino em que ocorreram aplicações de problemas faremos as análises dos registros escritos.

Escolhemos os problemas de forma a promover situações nos episódios de ensino que oportunizassem a manifestação do pensamento algébrico.

Para preservar as identidades dos estudantes foram atribuídos os seguintes códigos de identificação: E1, E3, E5, E6, E7, E8, E10, E11, E12, E14, E16, E17 e E18. Utilizamos a letra ‘A’ para indicar as falas do agente de ensino, e a letra ‘O’ para as observações da testemunha.

Os episódios foram numerados conforme a ordem de aplicação em episódio um, episódio dois, ..., episódio nove. Os problemas também foram numerados para facilitar a identificação em um, problema dois, problema três, ..., problema nove. A seguir apresentamos as datas dos episódios e os procedimentos, de acordo com o quadro 3.

Quadro 3 - Cronograma do experimento de ensino.

Episódios	**Data**	**Duração**	**Procedimentos**
1	17/02/2012	1 aula	Aplicação dos problemas 1 e 2;
2	23/02/2012	1 aula	Discussão dos problemas 1 e 2; Iniciamos a aplicação do problema 3;
3	24/02/2012	1 aula	Aplicação do problema 3 e 4;
4	27/02/2012	1 aula	Discussão do problema 3 e 4;
5	28/02/2012	1 aula	Aplicação do problema 5;
6	01/03/2012	1 aula	Construindo uma tabela para o problema 5; Responderam um questionário com duas perguntas que elaboramos;

7	02/03/2012	1 aula	Aplicação do problema 6;
8	05/03/2012	1 aula	Continuação da aplicação do problema 6; Discussões; Aplicação do problema 7;
9	06/03/2012	1 aula	Aplicação dos problemas 8 e 9;

Fonte: a autora

Os dados das gravações e anotações dos episódios não estão descritos na íntegra, mas aparecerão no texto descritivo-interpretativo das análises. O texto que trata dos episódios está organizado em apresentação do problema aplicado, algumas considerações a respeito do problema e análises dos registros escritos dos estudantes.

3.1 Episódio Um

O primeiro episódio ocorreu no dia 17 de fevereiro de 2012, já na terceira semana do ano letivo, com duração de 45 minutos. Explicamos que iríamos dar início à aplicação de alguns problemas dos quais faríamos discussões e que nos interessava a forma como eles resolveriam os problemas. Dissemos que era importante que eles deixassem todas as operações e maneiras de pensar registradas na folha. Neste episódio foram aplicados dois problemas. A seguir apresentamos o problema um:

Problema Um

Dois terços de um peixe pesam 10 quilos. Quanto pesa o peixe ao todo? Mostre com desenhos.

Fonte: Adaptado de Brizuela (2006)

Esse problema foi escolhido para realizarmos o primeiro episódio, por apresentar um texto curto de forma a motivá-los. Fizemos uma adaptação acrescentando a frase “mostre com desenhos”. O objetivo dessa adaptação era iniciarmos o estudante em um processo de representar o pensamento não só por meio de operações, mas com outros tipos de notações, seja para demonstrar seu raciocínio como também, engajá-los em experiências em que pudessem expressar-se matematicamente por meio de outras linguagens.

O problema envolve relações entre a quantidade dez quilos e a razão $\frac{2}{3}$. Se dois terços equivalem a dez quilos então um terço equivale a cinco quilos e três terços equivalem a 15 quilos. A compreensão do conceito de frações é necessária para o desenvolvimento do problema, bem como o entendimento do termo “dois terços” que está em linguagem natural. Utilizando a linguagem simbólica poderíamos escrever a situação em forma de uma equação e realizar as transformações algébricas para descobrir o resultado. Representando o peso total do peixe por *“x”* temos a igualdade $\frac{2}{3}x = 10$.

Alguns estudantes conversavam bastante durante a aula. Outros reclamavam dizendo que não conseguiam pensar por causa do barulho. Aos poucos foram se acalmando e se envolvendo com a resolução. Pedimos que usassem qualquer forma de representação para demonstrar formas de pensar e maneiras de resolver. Esperávamos que os estudantes apresentassem algumas dificuldades nas resoluções, contudo não fizemos intervenções nesse primeiro episódio, pois iríamos discutir os problemas no episódio seguinte.

Dois estudantes se manifestaram oralmente a respeito do problema um, ambos demonstrando que era preciso, em primeiro momento, decifrar o significado do termo ‘dois terços’ que aparece no problema, para em seguida resolvê-lo.

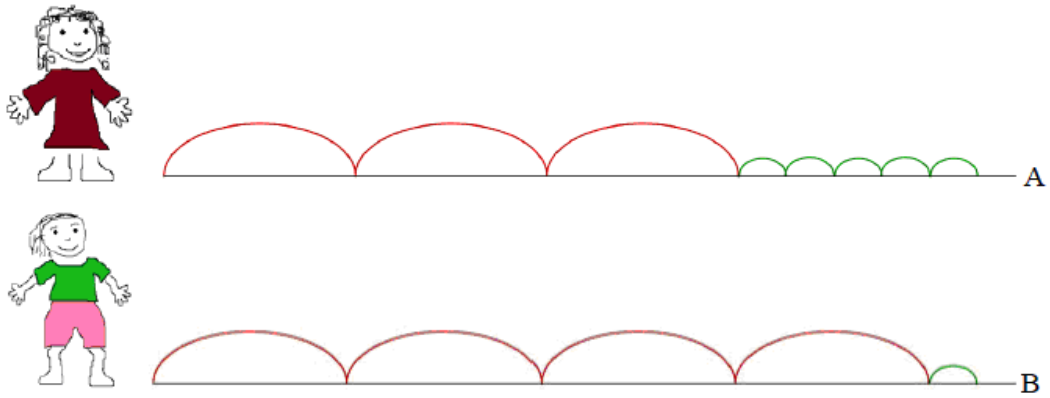
Quando um aluno terminava o problema um, entregávamos o problema dois, procurando evitar que uns atrapalhassem os outros.

Solicitamos aos estudantes que resolvessem da forma que eles entendessem, e que na próxima aula faríamos as discussões.

O problema dois foi entregue aos estudantes.

Problema dois

Numa actividade de Educação Física, o professor propôs aos seus alunos realizar dois tipos diferentes de percurso sobre uma linha com o mesmo comprimento, um constituído por saltos (todos com o mesmo comprimento) e outro por passos (também todos com os mesmo comprimento). A Anabela fez o percurso A e a Beatriz fez o percurso B:



A quantos passos corresponde todo o percurso?

Figura 1 – Problema dos saltos e passos[34]

O problema apresenta dois percursos de comprimentos iguais, que foram realizados de maneiras diferentes. A partir da igualdade entre as distâncias, o estudante pode comparar os percursos estabelecendo relações entre saltos e passos. A relação um salto para quatro passos permite chegar a solução visto que quatro saltos mais um passo é equivalente a 16 passos mais um passo. Utilizando uma linguagem simbólica podemos representar a situação por 3x+5=4x+1, em que ‘x’ representa a quantidade de passos em cada salto.

Após a entrega do problema, tivemos o seguinte diálogo.

O: _A professora leu o problema em voz alta. Alguns estudantes não compreendiam o problema. Disseram:
E5: _Professora, eu não entendi essa.
E11: _Eu também não entendi.
A: _ E11, leia em voz alta mais uma vez.
O: O estudante E11 leu a questão e a professora perguntou:
A:_ Qual é o percurso feito pela Anabela?
E11: _ O percurso A.
E8: _ O de cima, o primeiro.
A: _ Qual é o percurso feito pela Beatriz?
E11: _O percurso B.
A: _ Os percursos estão medidos de que forma?
E3: _ Três passos e cinco saltos
A: _ E o percurso B?
E11: _Quatro passos e um salto.

[34] **Fonte**: Ponte, Branco e Matos (2009).

A: O que o problema está pedindo?
O: Nesse momento ocorreu um silêncio na sala. Os estudantes não conseguiram interpretar ou entender a pergunta da tarefa, o que os impedia de resolver a questão. A professora perguntou:
A: E se eu fosse medir todo o percurso em passos, quantos passos dariam?
E11: _Ah! Agora eu entendi.
E3: _ Eu tinha entendido de outro jeito e estava fazendo errado. Vou arrumar.
E8: _ Eu também.
E1: _ Eu também tinha entendido de outro jeito, mas não vou arrumar porque vai aparecer outra dúvida. Vou deixar assim mesmo.

Houve a necessidade de questionar os estudantes a respeito do texto, para verificar qual era a dúvida. Eles entenderam várias informações, no entanto, não compreendiam a pergunta.

Nesse episódio não houve muitas discussões por parte dos estudantes. Foram poucas perguntas, porém importantes para revelar algumas dificuldades conceituais. Os questionamentos feitos são evidências de quais dificuldades se fizeram presentes na realização do problema.

A maior parte dos estudantes demonstrou não compreender frações e não estabeleceram uma comparação entre os caminhos percorridos por Beatriz e Anabela no problema dois. O único estudante que chegou à resposta correta utilizou uma régua para medir as distâncias. Em geral, os estudantes tiveram dificuldades de interpretar o problema dois, o que nos levou a fazer questionamentos, para que a situação apresentada fosse compreendida.

Em geral, as resoluções do problema dois apresentaram um caráter experimental, em que utilizavam os desenhos do problema para testar quantos passos cabiam, sem utilizarem uma unidade padrão, uma vez que desenhavam passos de diversos tamanhos.

Para análise dos registros escritos, selecionamos o problema um, uma vez que consideramos a produção escrita dos estudantes nesse problema importante para atingirmos o nosso objetivo de pesquisa.

3.2 ANÁLISE DOS REGISTROS ESCRITOS DO PROBLEMA UM

Iniciamos as análises realizando a desconstrução do texto, ou seja, a fragmentação das resoluções do problema um. O segundo passo foi reconhecer as unidades de significado, que fazem parte do processo inicial de organização. Nesse momento da análise algumas observações já começaram a ser realizadas e começam a emergir informações que anteriormente ficavam ocultas. Inicialmente

observamos que um grupo formado por seis estudantes respondeu que o peixe pesa 30 quilos (E1, E10, E11, E16, E17, E18). Três estudantes determinaram que o peixe pesa 15 quilos (E3, E6 e E14). Os outros estudantes obtiveram outras respostas (E5, E7, E8) ou não responderam (E12). Em um processo interpretativo, realizamos alguns agrupamentos com base nos aspectos apresentados pelos teóricos desta pesquisa e nas unidades de significados obtidas a partir das resoluções dos estudantes.

Neste trabalho, para a construção dos agrupamentos optamos por realizar um sistema de categorização não excludente. Isto significa que uma mesma resolução pode pertencer a agrupamentos distintos, considerando que um único registro pode conter mais de uma evidência aos olhos do pesquisador. Dessa forma, um mesmo estudante pode aparecer em dois ou mais agrupamentos.

Atribuiremos os códigos A1, A2, A3, ..., aos agrupamentos, para facilitar a identificação.

Agrupamentos:

A1) Compreendem os conceitos matemáticos envolvidos no problema, (E3, E14, E6).

Nesse agrupamento os estudantes estabelecem relações entre frações e as quantidades envolvidas no problema. Demonstram compreender o termo ‘dois terços’ e conseguem relacionar a fração adequadamente à quantidade dez quilos, dividindo por dois para obter o peso equivalente a $\frac{1}{3}$ do peixe. O estudante E6 deixa em seu registro o algoritmo da divisão, enquanto que E3 e E14 demonstram ter realizado esse cálculo mentalmente, pois relacionam $\frac{2}{3}$ a 10 quilos e $\frac{1}{3}$ a cinco quilos. Os estudantes E6 e E14 realizam a operação 5 vezes 3, determinando o peso total do peixe, enquanto que E3 soma 10 quilos com 5 quilos, ou seja, soma a quantidade equivalente a $\frac{2}{3}$ do peixe com a quantidade equivalente a $\frac{1}{3}$ do peixe, obtendo o peso que corresponde a $\frac{3}{3}$ do peixe.

Entendem que $\frac{2}{3}$ é equivalente a dez quilos e que ‘dois terços’ é o dobro da unidade fracionária. Conseguem determinar que $\frac{1}{3}$ é equivalente a 5 quilos, e que $\frac{3}{3}$ é equivalente a 15 quilos. Nesse sentido, esses estudantes percebem e tentam expressar as estruturas aritméticas de uma situação problema que consiste em um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico de acordo com Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005). Compreendendo conceitos envolvidos no problema, e realizando os cálculos corretamente, os estudantes chegam à resposta correta. De acordo com Lew (2004), compreender conceitos matemáticos e propriedades é um dos objetivos da álgebra para os anos iniciais. A compreensão de conceitos relaciona-se a abstração, considerada por Lew (2004), como uma das habilidades do pensamento algébrico. Podemos dizer que esse agrupamento se apresenta como um aspecto de pensamento algébrico, pois evidencia que os estudantes realizam processos algébricos relacionados ao conceito de frações.

A2) Compreendem parcialmente os conceitos matemáticos envolvendo frações, (E1, E10, E11).

Neste grupo os estudantes apresentam algum conhecimento com relação ao conceito de frações, pois o termo ‘terço’ os leva a dividir o peixe em três partes, demonstrando que compreendem o seu significado. No entanto, não fazem alusão ao numerador ‘dois’, levando-nos a afirmar que eles compreendem parte do conceito. Esse grupo não divide dez por dois. Consideram que o peixe deva ser dividido em três partes ou que o peso do peixe está dividido em três partes iguais sendo que cada parte equivale a dez quilos. Entendem que o peixe está dividido em três partes e determinam que o peixe todo pesa 30 quilos. Realizam uma operação pertinente ao problema que consiste na multiplicação por três ou na adição das quantidades correspondentes à cada parte do peixe embora não realizem a divisão por dois. Vejamos o registro do estudante E1 na figura 2.

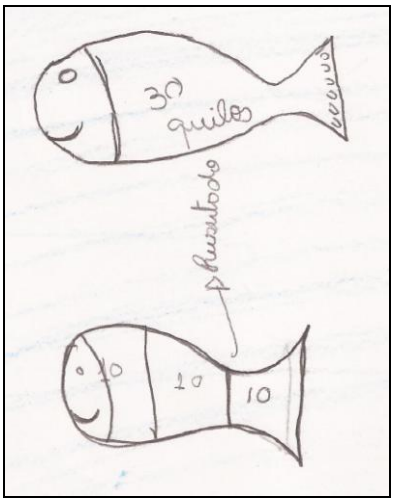


Figura 2 – Registro do estudante E1

A ideia apresentada é a de juntar as partes. A seta serve para indicar a direção da conta e o resultado. Não é feita referência ao numerador (dois) da fração, apenas ao denominador (peixe dividido em três partes).

Durante esse episódio ocorreu o seguinte diálogo:

E1: _O que é terço?
A: _ Terço se refere ao denominador três.
E1: _ Eu ainda não entendi.
O: Aparentemente, a palavra "denominador" não trazia algum significado para a estudante. Assim, a professora escreveu a representação $\frac{2}{3}$ *no quadro e perguntou:*
A: _Você reconhece essa representação?
E1: _ Ah! Lembrei.
O: Nesse momento a estudante E1 volta a desenvolver o problema em silêncio.

O trecho desse episódio demonstra que E1 não compreende frações na linguagem verbal 'dois terços'. Aparentemente a notação $\frac{2}{3}$ lhe pareceu familiar, pelo modo como se expressou. Demonstrou compreender que o peixe estava dividido em três partes, embora não tenha mencionado o numerador dois. Os estudantes desse agrupamento não têm um conceito bem construído com relação às frações. Demonstram não conseguir transitar entre diferentes representações do objeto matemático. A estudante E1 não reconhece as frações em linguagem verbal. O estudante E11 consegue construir um gráfico, em que duas partes são coloridas, embora não compreenda o significado adequadamente, uma vez que, ele não associa as duas partes a 10 quilos. Vejamos o registro escrito na figura 3.

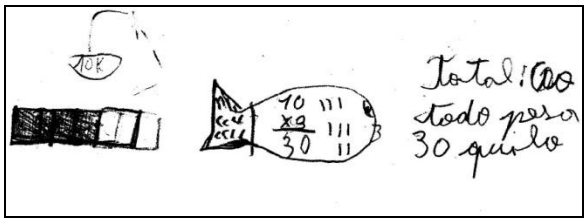


Figura 3 – Registro do estudante E10

O estudante E10 representa adequadamente a fração “dois terços” por uma barra, pois podemos ver que ele coloriu duas partes, mas não tem o conceito bem construído de forma a não conseguir realizar os processos adequados.

A3) Utilizam símbolos não convencionais e convencionais relacionados a conceitos e propriedades, (E1, E3, E10, E11, E14).

Esse grupo apresenta uma linguagem que expressa as ideias matemáticas, utilizando símbolos improvisados como, por exemplo, chaves para indicar agrupamentos (E3, E11), setas para indicar o resultado (E1), gráficos (E10, E11, E14), e linguagem aritmética, expressando adequadamente os conceitos envolvidos. E6 desenha uma balança na qual um dos pratos contém dois peixes e o outro contém três peixes expressando a ideia de razão empregada para lidar com a fração dois terços. Os peixes desenhados em geral expressam o peso todo, embora alguns desenhos façam referência às partes. Os gráficos também fazem referência às partes.

A4) Acrescentam informações ao problema, (E6, E8, E17, E16, E18).

Embora o contexto do problema proposto se refira a um único peixe, alguns estudantes acreditam haver mais peixes. O estudante E6 apresenta uma compreensão dos conceitos de fração envolvidos e das equivalências e relações, determinando a resposta correta e realizando operações aritméticas adequadas. No entanto, considera haver muitos peixes envolvidos no problema. Talvez porque não acredite que um único peixe possa pesar dez quilos. Embora o problema envolva a ideia de parte/todo, o estudante E6 apresenta uma balança na qual de um lado há dois peixes e do outro há três peixes. Desenha potes cheios de peixes para

representar dez quilos e cinco quilos de peixe. Dessa forma, demonstra considerar que todos os peixes têm o mesmo peso, e que os quilos aumentam proporcionalmente ao passo que a quantidade de peixes aumenta.

O estudante E8 escreve que os peixes pesam 20 quilos e escreve ‘com + 20 gelos’. As ingênuas considerações feitas com dados que não estão no problema revelam experiências dos estudantes suscitadas pelo problema. Esses estudantes apresentam uma tendência em trazer elementos do seu cotidiano e de suas crenças no momento de resolução de um no problema matemático. Consideramos esses elementos como uma dificuldade em resolver problemas com contextos próprios ou distintos do contexto dos estudantes.

No registro de E8, os dois peixes desenhados não levam à ideia de comparação e sim de quantidade de peixes. O estudante inclui elementos que não fazem parte da situação problema, como os gelos.

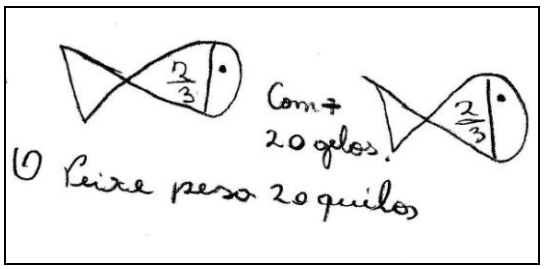


Figura 4 – Registro do estudante E8

A5) Resolvem problemas usando proporcionalidade direta, (E3, E6, E14).

Esses estudantes apresentam um raciocínio proporcional. Os estudantes E3 e E14 entendem que se $\frac{2}{3}$ do peixe equivalem a dez quilos, $\frac{1}{3}$ do peixe equivale a cinco quilos e, portanto, $\frac{3}{3}$ do peixe equivalem a 15 quilos. Expressam a proporcionalidade juntando duas partes correspondentes a dez quilos (E3), relacionando cada grandeza equivalente com desenhos, notações para frações e quantidades, além da utilização de gráficos (E14). A cabeça do peixe é menor do que as partes do corpo do peixe, dando indícios de que o estudante considerou que o volume da cabeça é menor do que as partes do corpo com mesmo peso. No caso de E6, percebe que dois está para dez assim como três está para o peso total do

peixe e expressa essa relação proporcional por meio de uma balança, um pote maior e um pote menor. O registro escrito desse estudante apresenta a ideia de que a quantidade de peixes é diretamente proporcional aos quilos de peixes, uma vez que, imaginou que todos os peixes tinham o mesmo peso.

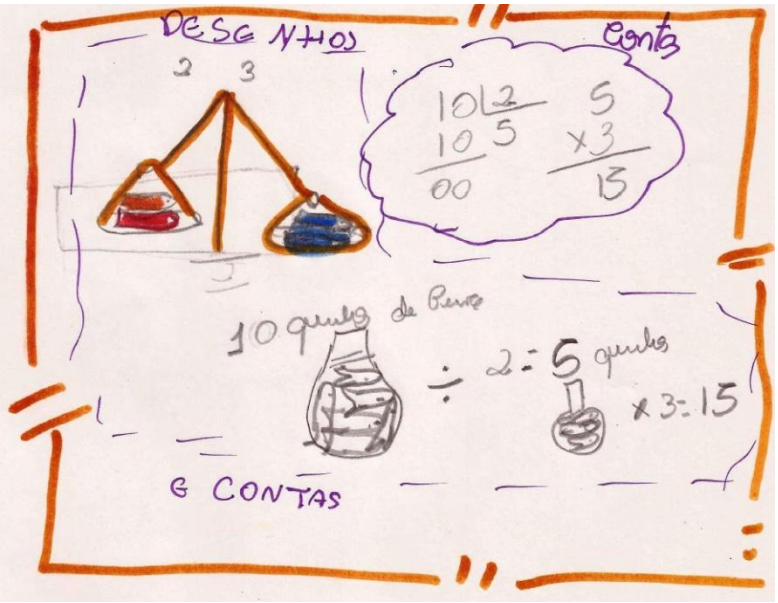


Figura 5 – Registro do estudante E6

Um questionamento que fizemos durante as análises foi: Por que o estudante E6 sentiu necessidade de expressar dez quilos de peixe por um pote cheio de peixes, visto que a quantidade dez era um valor conhecido? Consideramos que o estudante levantou outra questão durante suas resoluções. Embora tenha seguido uma meta de determinar o peso total, as representações demonstram alusões à quantidade de peixes. Sobre a mesma representação (potes) incide duas grandezas: o peso e a quantidade de peixes. Isso se comprova na diferença de tamanho entre os dois potes e na quantidade de peixes dentro deles. Os desenhos dos potes com os respectivos pesos na parte superior levam-nos a visualizar a relação estabelecida.

O uso da proporcionalidade para resolver equações era uma prática comum entre os egípcios na fase retórica da álgebra, ao empregar método da falsa posição (BAUMGART, 1992), e podemos verificar que consiste em uma prática entre os estudantes. Radford (2001), sugere que o pensamento algébrico das antigas civilizações se mostra relacionado ao pensamento proporcional e que o ensino de álgebra poderia explorar razões e proporções seguindo os caminhos da história. Lew

(2004), considera que um dos objetivos da álgebra em um nível elementar é “resolver problemas usando uma proporcionalidade direta” e relaciona-a a um pensamento dinâmico. Assim, consideramos que resolver problemas usando proporcionalidade direta consiste em um aspecto de pensamento algébrico manifestado pelos estudantes deste grupo.

A6) Resolvem equações por operações inversas, (E3, E6, E14).

O problema um apresentado poderia ser representado pela equação $\frac{2}{3}x=10$, em que x representa o peso total do peixe. Nesse caso, x é multiplicado por dois e divido por três e em resoluções formais aplicamos as operações inversas na quantidade dez. Assim, dividimos dez por dois e multiplicamos por três. Os estudantes E6 e E14 realizaram essas operações inversas mesmo não conhecendo a linguagem formal e o estudante E3 utiliza uma das operações inversas. De acordo com Lew (2004), resolver equações por operações inversas, mesmo quando não se usa da formalidade é uma forma de pensar analiticamente. O uso das operações inversas consiste na busca de outras expressões equivalentes à expressão dada no problema e trata-se de um aspecto de pensamento algébrico presente nas resoluções desses estudantes, pois de acordo com Kieran (1992, p.4), pensar algebricamente envolve a realização de “processos mentais como raciocinar com incógnitas”, por exemplo.

A7) Concebem a ideia de relações entre dois conjuntos de objetos variáveis, (E1, E3, E10, E6, E14, E11, E8, E16, E17, E18).

Para este grupo, é aceitável a ideia de dois conjuntos relacionados, em que os objetos variam. A seguir faremos uma explicitação de cada subgrupo identificado.

A7.1) Identificam relações entre dois conjuntos de objetos variáveis, (E3, E6, E14).

O estudante E6 representa as relações com uma balança em que um dos pratos há dois peixes e no outro, três peixes. O prato com três peixes está

mais baixo. Abaixo apresenta um pote cheio de peixes equivalente a dez quilos de peixes e um pote menor equivalente a cinco quilos de peixes. O estudante E14 representa as relações com um desenho de um peixe de cabeça cortada, abaixo um peixe com a cabeça com a quantidade 15 quilos e mais abaixo um gráfico, em que cada parte possui cinco quilos e duas partes foram destacadas, indicando dez quilos.

Esses estudantes deixam claro em suas representações que cada terço do peixe equivale a cinco quilos. Encontram o valor da incógnita, porém evidenciando a ideia de variável em que o peso varia em função da quantidade de terços. De acordo com Kieran (2004), o pensamento algébrico nos anos iniciais envolve o desenvolvimento de formas de pensar no âmbito de atividades como estudar variações. Entendemos que esses estudantes resolvem uma equação usando operações inversas, mas ao mesmo tempo expressam variáveis em suas representações. Verificamos a presença de um pensamento funcional na resolução desse problema, ao qual geralmente é atribuída a ideia de incógnita e não de variável. Ao usar a proporcionalidade direta os estudantes identificam uma relação entre as grandezas e constroem desenhos e gráficos para representar essas relações.

A7.2) Estabelecem relações entre duas grandezas desde que conheçam a quantidade relacionada com a unidade fracionária, (E1, E10, E11).

Nas resoluções deste grupo, verificamos que representam adequadamente conjuntos relacionados, fazendo dois desenhos de um mesmo objeto, de forma que possam ser comparados. As representações de E1, E10 e E11 consistem em comparações entre figuras dividas e figuras inteiras. O estudante E1 faz o desenho de um peixe dividido em três partes, em que cada parte apresenta a quantidade dez. Desse desenho parte uma seta com a palavra resultado e um desenho de um peixe inteiro com a quantidade 30 quilos. Os estudantes E10 e E11 desenham um gráfico dividido em três partes e na frente um peixe inteiro. Nesse caso, inter-relacionam diferentes representações. No gráfico de E11, cada parte apresenta a quantidade dez e usa uma chave indicando que juntou as partes para obter o todo.

O estudante E10 chega a representar adequadamente ‘dois terços’ em um gráfico dividido em três partes, sendo duas partes coloridas. À frente, o desenho do peixe inteiro contém operação dez vezes três, no seu interior, obtendo o peso total do peixe. Esses três estudantes (E1, E10 e E11), demonstram conceber a ideia de relacionar grandezas entre dois conjuntos de variáveis. No entanto, só resolvem o problema quando a quantidade relacionada à unidade fracionária é informada. Esses estudantes partem de uma relação entre a quantidade dez quilos e a unidade fracionária $\frac{1}{3}$. Não são capazes de conceber a equivalência entre $\frac{2}{3}$ e dez e obter uma quantidade relacionada a $\frac{1}{3}$. Seus registros permitem verificar que estabelecem uma relação de equivalência entre um terço do peixe e dez. Usam barras para representar frações, além de desenhos do peixe se referindo peso ao todo. Apresentam outros símbolos como uma seta (E1), um indicador de agrupamento das partes (E11), e uma tentativa de construir uma balança (E10).

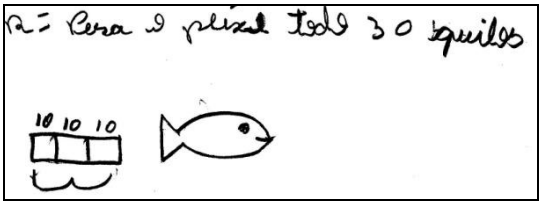


Figura 6 – Registro do estudante E11

A barra construída por E11 se refere ao todo dividido em três partes, cada parte equivalente a dez. Juntando todas as partes obtém-se o todo.

A7.3) Estabelecem relações entre duas grandezas desde que conheçam a quantidade relacionada com a unidade inteira, (E8, E16, E17, E18).

Este grupo considera que um peixe pesa dez quilos e três peixes pesam 30 quilos. Fazem desenhos se referindo à quantidade de peixes. Desenham três peixes (E16, E17, E18), sem escrever a quantidade que está associada a cada peixe. Em geral, usam o algoritmo dez vezes três. Concebem a relação entre dois conjuntos de objetos variáveis, em que, de um lado se tem a quantidade de peixes e do outro o peso variando conforme a quantidade. Consideram que cada peixe tem o

mesmo peso. Não se referem às frações em suas resoluções. O estudante E8 desenha dois peixes com a notação $\frac{2}{3}$ em seu interior. Obtém a resposta '20 quilos'. Para ele, um peixe pesa dez quilos e dois peixes pesam 20 quilos. Vejamos o registro escrito do estudante E18, na figura 7.

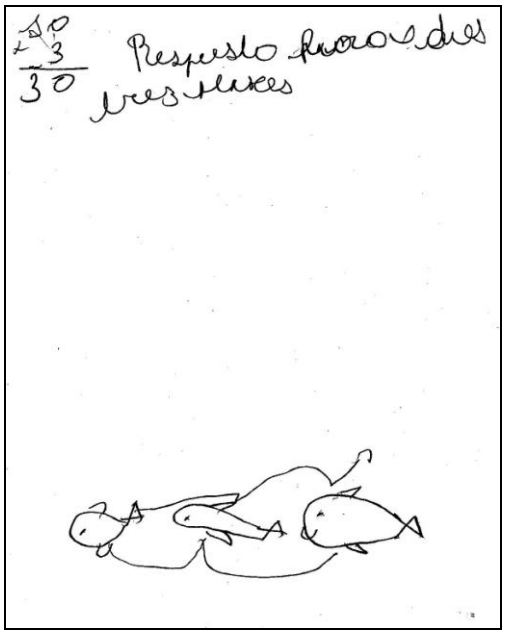


Figura 7 – Registro do estudante E18

O estudante E18 faz referência a três peixes tanto no desenho como em sua resposta.

Em geral, esse grupo não compreende os conceitos matemáticos envolvidos na situação problema. Vejamos um fragmento do episódio que evidencia essa característica.

E17: _ Eu não sei fazer.
A: _ O que você não entendeu?
E17: _Eu não sei o que é dois terços.
A: _Você estudou frações no ano passado?
E17: _ Estudei, mas eu não aprendi essa matéria.

É possível perceber que esses estudantes não conseguem lidar com frações. Apresentar dois terços na forma a/b, parece não ter os ajudado na resolução da questão. Utilizam o numerador ou o denominador da fração como se fossem quantidades de peixes.

Concebem relações, desde que a quantidade informada no problema esteja relacionada a uma unidade.

A8) Modelam uma situação problema utilizando figuras, gráficos, símbolos não convencionais pertinentes e expressões aritméticas, (E3, E6, E14).

Esses estudantes apresentam todas as representações pertinentes ao problema proposto e modelam o problema. Utilizam expressões aritméticas adequadas, desenhos e gráficos para representar frações, desenhos para representar proporções (E14, E6), desenhos para representar incógnitas (E3 e E14), e conseguem criar um modelo para a situação problema. Embora esses estudantes não conheçam a linguagem simbólica formal, conseguem representar uma equação com símbolos não convencionais (E3). E expressam uma relação de proporcionalidade (E6), com desenhos e operações. Representam relações e equivalências com desenhos, gráficos e operações (E14).

O estudante E3 também escreve uma equação utilizando desenho e um símbolo que indica a relação das duas partes à quantidade dez.

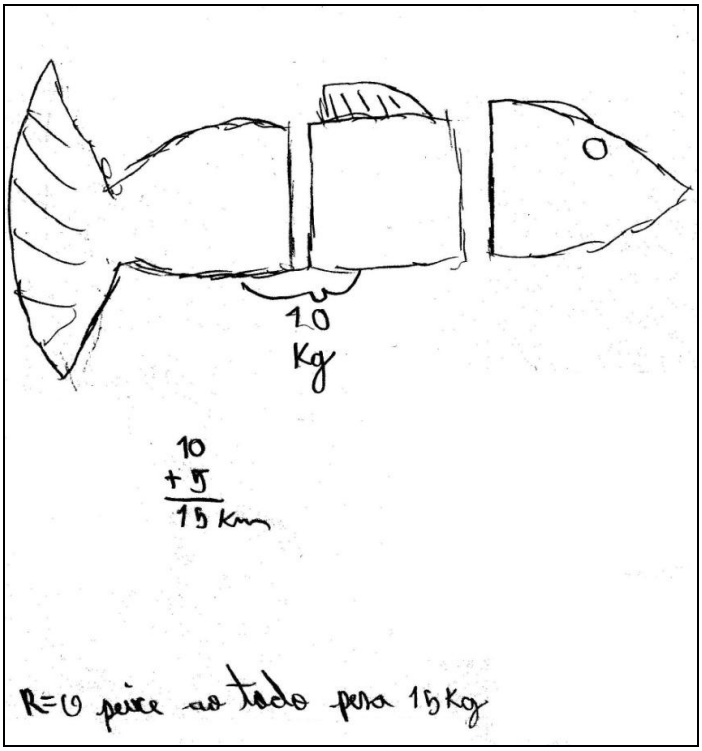


Figura 8 – Registro do estudante E3

O estudante E3 expressa que $\frac{2}{3}$ do peixe é igual a dez quilos. Representa uma equação de maneira não convencional, utilizando uma espécie de chave que associa as duas partes. O sinal de igual foi usado pelo estudante para dar a resposta do problema o que nos leva a entender que não atribui um significado relacional para este sinal. Utilizou-se de outro símbolo para expressar a relação e do sinal de igual para indicar a resposta.

A9) Desenvolve/cria uma linguagem adequada para expressar equivalências e relações, (E1, E3, E6, E14, E10, E11).

Esses estudantes usam chaves para a idéia de juntar e indicar equivalência entre quantidades (E3), expressam relações entre grandezas usando dois desenhos comparativos, sendo em alguns casos, o desenho de dois peixes em que um está dividido e o outro não (E1 e E14), um gráfico e um peixe (E10, E11, E14), balança em que um dos pratos tem dois peixes e o outro três peixes (E6). O estudante E14 desenha figuras geométricas para destacar duas partes de um gráfico dividido em três partes. Nos potes apresentados pelo estudante E6 havia muitos peixes, o que nos leva a pensar que outras variáveis são colocadas em questão na resolução do estudante. Podemos dizer que em sua resolução existe uma quantidade de peixes que pesam dez quilos, uma quantidade de peixes que pesam cinco quilos, obedecendo a razão $\frac{2}{3}$, conforme mostrado na balança. Usam setas para indicar o resultado (E1).

Para Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), desenvolver uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente consiste em um elemento caracterizador do pensamento algébrico. Verificamos o uso criativo de uma linguagem algébrica não convencional por parte desses estudantes. Podemos dizer que entre o pensamento e linguagem nesses registros subsiste “não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética,...” (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIN, 1993, p. 85). Entendemos que esses estudantes apresentam um pensamento estrutural, uma vez que,

> [...] enquanto idéias algébricas são vestidas em palavras e em apenas palavras, é difícil imaginar a abordagem estrutural mais avançada, onde os

> processos computacionais são considerados em sua totalidade a partir de uma perspectiva mais elevada, e onde as inclinações operacionais e estruturais se encontram nas mesmas representações. Isto quer dizer que, as palavras não são manipuláveis da forma que os símbolos são. É esta manipulabilidade que torna possível para que conceitos algébricos tenham a qualidade como objeto. É a possibilidade de realizar processos de alto nível sobre os processos representados por expressões compactas que estimulam o pensamento estrutural.[35] (SFARD e LYINCHEVSKY, 1994a, p. 197)

Embora os estudantes não tenham utilizado símbolos convencionais, a linguagem utilizada tem característica essencialmente simbólica. Expressam os processos e propriedades dos objetos envolvidos na situação problema. Brizuela (2006, p.51), afirma que "aprender e construir conhecimentos são processos que envolvem invenções – produções novas que criamos, utilizando nossas estruturas cognitivas atuais, enquanto tentamos compreender uma situação ou um fenômeno." Com uma linguagem simbólica própria, esse grupo foi bem sucedido na resolução do problema.

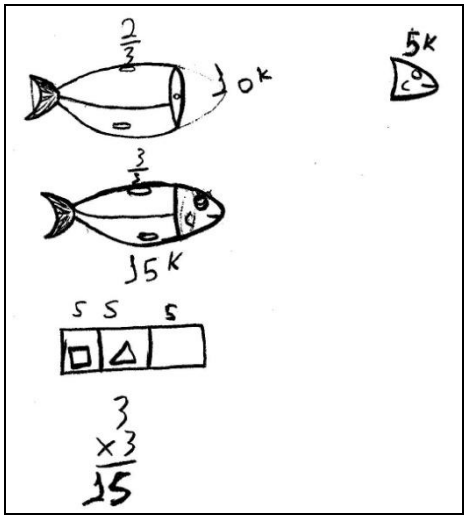


Figura 9 – Registro do Estudante E14

Com relação à figura 9, o estudante utiliza desenhos, a forma a/b e as barras para expressar o conceito de fração. Na parte superior esquerda do

[35] Tradução nossa de …that as long as algebraic ideas are dressed in words and in words only, it is difficult to imagine the more advanced structural approach, where the computational processes are considered in their totality from a higher point of view, and where operational and structural slants meet in the same representations. To put it differently, words are not manipulable in the way symbols are. It is this manipulability which makes it possible for algebraic concepts to have the object-like quality. It is the possibility of performing higher level processes on the processes represented by compact expressions that spurs structural thinking.

registro podemos verificar a equivalência que convencionalmente expressamos por $\frac{2}{3}x = 10$, em que x representa o peso total do peixe. Na parte superior direita encontra-se a equivalência $\frac{1}{3}x = 5$. Mais abaixo temos que $\frac{3}{3}x = 15$. A barra dividida em três partes, das quais duas contém figuras geométricas expressam o raciocínio proporcional apresentado pelo estudante. Os desenhos dos dois peixes expressam transformações algébricas significativas, atreladas ao contexto do problema. Os desenhos dos dois peixes, sendo um de cabeça cortada e um peixe inteiro mostra que uma comparação foi feita entre as quantidades relacionadas o que nos leva a afirmar que esses desenhos sejam um tipo de tabela não convencional. A construção de tabelas e diagramas ou desenhos são aspectos do pensamento algébrico relacionados à organização, (LEW, 2004).

A conta de multiplicação escrita pelo estudante E14 chamou a nossa atenção. Embora tenha montado a conta 3x3, ao invés de 3x5, ele responde corretamente o problema com a resposta 15. Entendemos que ele pensou na operação 3x5 = 15 e se equivocou no momento de efetuar o registro.

A10) Utilizam símbolos matemáticos convencionais atribuindo-lhes outros sentidos, (E3, E5, E7, E8, E10, E11, E16).

Esses registros apresentam símbolos matemáticos dissociados ou distanciados dos conceitos matemáticos aos quais se referem. Embora os estudantes (E5, E7, E8, E16), tenham apresentado em seus registros notações convencionais para frações na forma a/b, demonstraram não compreender o conceito, ou mesmo, não compreendem o objeto matemático por trás do símbolo, pois suas resoluções não são pertinentes.

O estudante E10 desenha um gráfico que representa adequadamente a fração $\frac{2}{3}$, pois colore duas das três partes do gráfico. No entanto, não compreende que dez quilos equivalem às duas partes coloridas e que deve ser dividido por dois para obter $\frac{1}{3}$. O estudante E16 usa o sinal de igual como direcionador de operações e mesmo estudantes que foram bem sucedidos na

resolução do problema, como o E3, utilizam o sinal de igual a frente da letra R para dar a resposta do problema, (E3, E5, E7, E11, E16). Verificamos que algumas dificuldades com a simbologia que os estudantes apresentam em álgebra são decorrentes da atribuição de significado aritmético para os símbolos levando-os a realizarem processos aritméticos em expressões algébricas conforme afirmações de Booth (1989) e Kieran (1981).

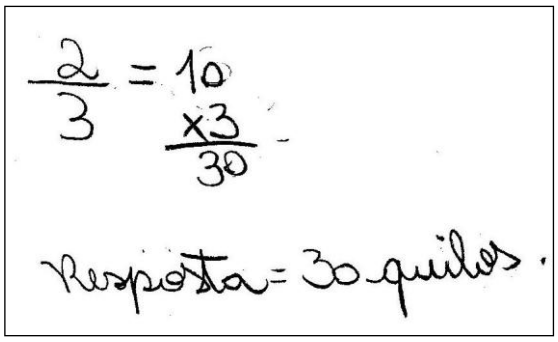


Figura 10 – Registro do estudante E16

O registro evidencia a falta de significado para a forma a/b e para o sinal de igual. Há evidências de que ele não associa dez quilos a $\frac{2}{3}$ do peixe, mas tenta associar dez a $\frac{2}{3}$ e em seguida, usa o dez que está a frente do sinal de igual para montar a operação de multiplicação. A representação $\frac{2}{3}$ é apresentada embora não compreenda o conceito por trás do símbolo. O sinal de igual aparece na parte inferior como um indicador da resposta. Na parte superior entendemos o sinal de igual como um separador entre a informação do problema e a conta, aparecendo novamente como um indicador. Demonstra que esse estudante não atribui um significado relacional para o sinal de igual apresentando umas das dificuldades descritas por Booth (1989) e Kieran (1981), comuns em crianças que se iniciam em álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental.

A11) Precisam fazer adaptações no problema, (E1, E8, E10, E11, E16, E17, E18).

Os estudantes E1, E10 e E11 resolvem o problema ‘terços de um peixe pesam dez quilos’. A palavra ‘dois’ é desconsiderada. É como se eles

adaptassem o problema ao nível de conhecimento do qual dispõem, para resolvê-lo. Esses estudantes conseguem lidar com $\frac{1}{3}$, mas encontraram dificuldades em lidar com $\frac{2}{3}$. Os estudantes E16, E17 e E18 adaptam o problema para ‘um peixe pesa dez quilos. Quanto pesa três peixes?’ Apresentam dificuldades em lidar com frações, e substituem o termo ‘terços’ pela quantidade ‘três’. O estudante E8 desenha dois peixes e escreve a notação $\frac{2}{3}$ no interior dos peixes. Esse estudante refere-se à quantidade dois devido ao numerador da fração. Todos esses estudantes (E1, E10, E11, E16, E17, E18), lidam com uma unidade de grandeza para comparar, como: um peixe pesa 10 quilos ou uma parte do peixe pesa dez quilos.

A12) Não construíram os conceitos matemáticos envolvidos na situação problema, (E5, E7, E12, E8, E16, E17, E18).

Esses estudantes usam representações dissociadas de conceitos ou não conseguem utilizar gráficos e notações para frações de forma pertinente. Tentam representar, mas não são bem sucedidos. Suas operações demonstram que não compreendem os conceitos envolvidos na situação.

Não conseguem estabelecer as relações de forma pertinente uma vez que não identificam o que relacionar. Isso porque as frações consistem ainda em algo sem significados para esses estudantes. Não há indícios de que esses estudantes utilizem os conceitos de frações para resolver a questão embora registrem representações que em geral não servem como ferramenta para a resolução (E5, E7, E12).

Realizam operações não pertinentes como ‘10 : 3’ (E5, E7). O estudante E7 escreve ‘dez dividido por três ou dez vezes três’, evidenciando uma resolução em que demonstra não compreender o problema, realizando operações aleatoriamente. A frase ‘Dois terços de um peixe pesam dez quilos’ leva esses estudantes a associar mecanicamente a quantidade dez à representação $\frac{2}{3}$, que embora não esteja no texto do problema, foi apresentada à turma durante o episódio de ensino. Esses estudantes buscam nas representações e no texto do problema

elementos para construírem uma resolução. Dessa forma essas informações disponíveis consistem em um conjunto de fragmentos que os estudantes tentam reunir para montar um quebra-cabeça. No entanto, as peças que faltam não permitem que suas resoluções sejam pertinentes, ou seja, a falta de conceitos construídos.

Dois desses estudantes escrevem a representação $\frac{2}{3}$ e logo a frente aponta para a quantidade dez, uma vez que o problema informa que dois terços do peixe pesam dez quilos. Em seguida realizam operações não pertinentes, conforme podemos verificar nas figuras 11 e 12.

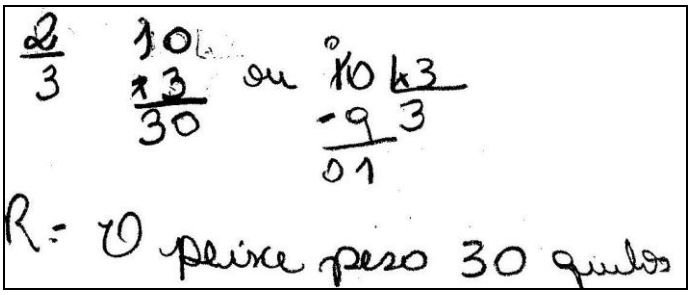


Figura 11 - Registro do estudante E7

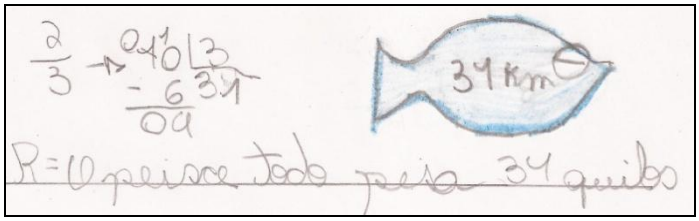


Figura 12 – Registro do estudante E5

O registro do estudante E5 mostra a falta de significados atribuídos à linguagem matemática. O sinal de igual é usado para dar uma resposta, $\frac{2}{3}$ é associado a uma divisão de dez por três. Além disso, a resposta obtida no processo algorítmico não foi analisada. O resto da divisão é maior do que o divisor e o resultado da operação ‘dez dividido por três’ deu um número maior do que dez. Há indícios de uma resolução realizada de forma mecânica em que não há associações mentais a conceitos e não se realiza análise de resultados. Esses estudantes seriam bem sucedidos na resolução de uma situação problema a que foi proposta se

pensassem ‘a respeito de operações aritméticas como funções em vez de meros cálculos de números específicos’, (CARRAHER e SHLIEMANN, 2007, p. 694).

O estudante E12 constrói um gráfico dividido em dez partes, das quais três estavam destacadas. Na frente desse gráfico, usa a notação $\frac{7}{3}$, indicando a razão entre partes brancas em relação às partes destacadas. Essa linguagem não representa os conceitos do problema proposto. Vejamos a figura 13 que mostra o seu registro escrito.

Figura 13 – Registro do estudante E12

O estudante E12 faz um gráfico divido em dez partes ao invés de três partes. Portanto o gráfico construído está dissociado da situação problema proposta. Embora o corpo do peixe esteja dividido em três partes, o estudante não conseguiu em momento algum relacionar à quantidade dez. Assim, ele utiliza a informação ‘dez’ como se fosse o denominador da fração, uma vez que o gráfico construído está divido em dez partes. Dessas dez partes, três foram destacadas pelo estudante nos levando a perceber que a expressão ‘terços’ apresentada no problema foi considerada como a quantidade de partes a ser destacada, como se esse fosse o numerador da fração.

Não consegue representar o problema adequadamente e não consegue realizar atividades operacionais com símbolos abstratos que consiste em um dos objetivos da álgebra em um nível elementar relacionado a processos de abstração apresentados por Lew (2004). Embora o problema envolva a ideia parte/todo, o estudante não foi capaz de apresentar essa ideia em algumas de suas representações. Vejamos o registro escrito na figura 14.

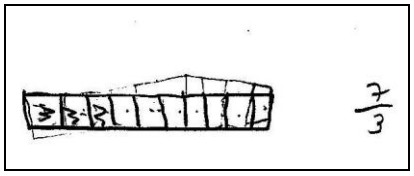


Figura 14 – Registro do estudante E12

Acima do gráfico, há um destaque nas sete partes brancas restantes e à frente aparece a fração $\frac{7}{3}$. Dessa forma, consideramos que para esse estudante, a forma a/b é utilizada para a ideia de razão, mas não para a ideia de parte/todo. A quantidade dez representada no gráfico, não aparece na forma a/b construída à frente do gráfico. O numerador apresenta a quantidade de partes brancas do gráfico e o denominador se refere à quantidade de partes destacadas.

Os estudantes E8, E16, E17, E18 lidam apenas com quantidades inteiras, fazem desenhos se referindo a dois e três peixes e em momento algum utilizam notações relacionadas a frações.

A seguir apresentamos um quadro síntese dos agrupamentos obtidos.

Quadro 4 - Síntese dos agrupamentos do Problema um.

Agrupamentos	**Estudantes**
A1) Compreendem os conceitos matemáticos envolvidos no problema.	(E3, E14, E6)
A2) Compreendem parcialmente os conceitos matemáticos envolvendo frações ou não lidam com frações.	(E1, E10, E11)
A3) Utilizam símbolos não convencionais e convencionais relacionados a conceitos e propriedades.	(E1, E3, E10, E11, E14)
A4) Acrescentam informações ao problema.	(E6, E8, E17, E16, E18)
A5) Resolvem problemas usando proporcionalidade direta.	(E3, E6, E14)
A6) Resolvem equações por operações inversas.	(E3, E6, E14)
A7) Concebem a ideia relações entre dois conjuntos de	(E1, E3, E10, E6, E14,

objetos variáveis. A7.1) Identificam relações entre dois conjuntos de objetos variáveis, (E3, E6, E14). A7.2) Estabelecem relações entre duas grandezas desde que conheçam a quantidade relacionada com a unidade fracionária, (E1, E10, E11). A7.3) Estabelecem relações entre duas grandezas desde que conheçam a quantidade relacionada com a unidade inteira, (E8, E16, E17, E18).	E11, E8, E16, E17, E18)
A8) Modelam uma situação problema usando figuras, gráficos, símbolos não convencionais pertinentes e expressões aritméticas.	(E3, E6, E14)
A9) Desenvolve/cria uma linguagem adequada para expressar equivalências e relações.	(E1, E3, E6, E14, E10, E11)
A10) Utilizam símbolos matemáticos convencionais atribuindo-lhes outros sentidos.	(E3, E5, E7, E8, E10, E11, E16)
A11) Fazem adaptações no problema.	(E1, E8, E10, E11, E16, E17, E18)
A12) Não construíram os conceitos matemáticos envolvidos na situação problema.	(E5, E7, E12, E8, E16, E17, E18)

Fonte: A autora.

3.3 EPISÓDIO DOIS

No episódio dois ocorreram discussões entre pesquisador e estudantes a respeito dos problemas aplicados no episódio 1.

Com relação ao problema um, os estudantes iniciaram uma discussão entre si antes que o agente de ensino houvesse exposto o problema no quadro. Mesmo sem terem suas resoluções em mãos, lembravam-se de como haviam resolvido e comentavam. Um estudante (E3) dizia que o resultado era 20. O estudante E14 discordava afirmando que o resultado era 15.

Com base nos registros realizados pelos estudantes no episódio anterior observamos que a maioria associou a quantidade dez a uma parte do peixe

ou a um peixe. A partir desta observação, optamos por organizar as informações do problema um em tabelas e gráficos. Foi apresentada a seguinte tabela:

1/3	
2/3	10 quilos
3/3	

Em seguida, foi solicitado aos estudantes que completassem aquela tabela. Pouco tempo depois ocorreu o seguinte diálogo:

A: Se dois terços equivalem a 10 quilos, qual o valor de $\frac{1}{3}$*?*
E8: 5 quilos
E14: 5 quilos
A:O peso total peixe corresponde a fração $\frac{3}{3}$*. Assim, qual é o peso total do peixe?*
E3: 15 quilos
E1: Eu pensei que 1/3 era 10 quilos e o resultado da minha conta deu 30.
E5: Eu também fiz assim.
O: Os estudantes foram convidados a resolver o problema no quadro da forma que haviam feito. O estudante E14 fez no quadro as mesmas representações que havia deixado em seus registros.

Em seguida, completamos a tabela de acordo com as respostas dos estudantes.

A utilização da tabela possibilitou uma organização dos dados e esclarecimento a respeito do problema proposto, consistindo em um objeto visual de conhecimento de todas as informações do problema e das formas como essas informações se relacionam. Quando as informações de que $\frac{1}{3}$ do peixe correspondia a cinco quilos e $\frac{2}{3}$ do peixe correspondia a 10 quilos ficaram organizadas e em evidência, os estudantes em geral, demonstraram estarem convencidos de que o peixe pesava ao todo 15 quilos, o que nos levou a observar que a ideia de proporcionalidade direta é bem aceita entre os estudantes, principalmente quando os dados estão organizados em uma tabela. Além disso, foram utilizados gráficos como forma de representar o problema.

Foram iniciadas as discussões com relação ao problema dois. A tarefa foi exposta no quadro tal qual havia sido apresentada pelos estudantes no

episódio anterior. Foi realizada uma leitura do problema e os estudantes começaram a explicar como haviam resolvido, conforme diálogo abaixo:

E3: Eu fui colocando passos dentro dos saltos para contar o total no final.
E1: Eu também fiz isso.
O: E6 se levantou e veio ao quadro para explicar como ela havia feito:
E6: Eu tinha que ver quantos passos cabe em um salto.
A: E quantos passos cabem em um salto?
E6: 4 passos.
E14: 4 passos.
E3: Eu acho que é cinco.

Embora houvesse um consenso a respeito de "colocar passos dentro dos saltos", surgiram divergências nas opiniões em relação a quantos passos cabiam em um salto. Os registros escritos dos estudantes levaram a perceber que nenhum deles fez uma comparação entre os percursos A e B.

A: Quantos passos cabem em todo o percurso?
E14: Eu sei. 17 passos. Eu sei porque eu usei a régua.

Nenhum estudante propôs uma comparação. Assim, utilizando o desenho dos percursos que apareciam no quadro, fizemos duas linhas pontilhadas verticais que destacavam os quatro primeiros passos de Anabela e o último salto de Beatriz conforme figura:

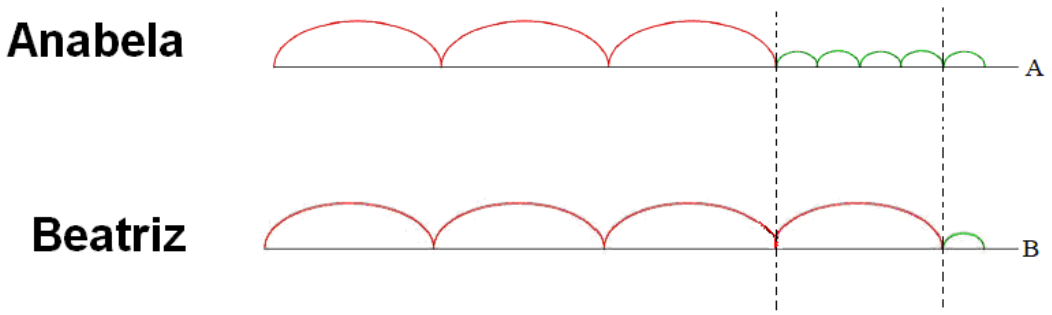


Figura15 – Representação do problema dos saltos e passos

As linhas pontilhadas consistiam em uma forma visual de levar os estudantes a realizarem uma comparação entre os percursos.

De fato, as linhas pontilhadas tornaram mais clara a relação entre a quantidade de passos e saltos. Em geral, os estudantes demonstraram perceber que em cada salto cabiam quatro passos. Assim, houve o seguinte diálogo:

A: Mas como faremos para calcular a medida de todo o percurso em passos?
E14: Três saltos são 12 passos mais cinco dá 17 passos.

O estudante E14 olhou na tabela construída, verificou que três passos era equivalente a 12 e somou com cinco obtendo 17. Embora ele tivesse sido o único a chegar a essa resposta nas resoluções da aula anterior, sua estratégia foi completamente distinta, pois havia utilizado a régua para medir um passo e depois para ver quantas vezes aquela medida cabia em um salto.

Foram exploradas nas discussões algumas equivalências em que o sinal de igual foi utilizado. Sugeri que representássemos a medida do salto por um símbolo ou uma letra. Os estudantes sugeriram a letra ‘s’. Com a ajuda dos estudantes representamos da seguinte forma:

Anabela: $3s+5=12+5=17$

Beatriz: $4s+1=16+1=17$

E também que: $3s+5=4s+1$

A escolha da letra ‘s’ me pareceu-nos arriscada por ser a letra inicial da palavra ‘salto’. Tememos que isso pudesse ocasionar futuras confusões no pensamento dos estudantes. No entanto, convencionalmente, unidades de medidas são representadas por letras iniciais como no caso da letra ‘m’ para metro.

Não era nosso objetivo resolver uma equação de primeiro grau com os estudantes. Assim, as discussões do episódio dois tiveram como foco o estabelecimento de relações, as representações e a resolução de problemas, sem necessariamente resolver a equação.

Nenhum estudante questionou o fato de que as pessoas não dão passos de mesma medida, como o problema sugere.

3.4 EPISÓDIO TRÊS

No início do episódio distribuímos o problema três aos estudantes. O problema foi organizado em quatro páginas de forma que os estudantes tivessem espaço suficiente para escrever. Todas as páginas foram entregues de uma só vez.

Problema três

Maria e João, cada um tem um saco com bolas de gude.

*No domingo, ambos tinham a mesma quantidade de bolas de gude em seus sacos.

*Na segunda-feira, eles jogaram bola de gude com os amigos na escola, e cada um ganhou 5 bolas de gude.

a. Maria tem mais bolas de gude do que João?
b. João tem mais bolas de gude do que Maria?
c. Eles tem a mesma quantidade?
d. Como você sabe?

*Na terça-feira, eles jogaram outra vez bola de gude na escola. Dessa vez, Maria perdeu 3 bolas, e João 7.

e. Maria ainda tem a mesma quantidade que João de bolinhas de gude?
f. Como você sabe?
g. Qual é a diferença entre as duas quantidades?

*Na quarta-feira, Maria abriu seu saco e descobriu que tinha 9 bolas de gude dentro dele.

h. Quantas bolas de gude cada um deles tinha no domingo?
i. Quantas bolas de gude João acabou tendo em seu saco na quarta-feira?

Mostre em uma tabela o que aconteceu de domingo até quarta-feira.

Fonte: Brizuela (2006)

As primeiras perguntas do problema envolvem igualdades e desigualdades entre quantidades desconhecidas. Os estudantes podem raciocinar com desconhecidos, pensar em propriedades ao invés de resultados particulares e utilizar qualquer linguagem, escrita ou falada. As duas últimas perguntas envolvem um raciocínio com incógnitas, quando a quantidade de bolinhas que Maria tem é revelada. Para saber quantas bolinhas João e Maria tinham inicialmente o estudante deve apresentar um pensamento indutivo de tentativa e erro, ou mesmo realizar as operações inversas para determinar a quantidade inicial de bolinhas. Os primeiros quatro itens do problema são questões envolvendo igualdades entre quantidades desconhecidas. É possível que os estudantes percebam que se duas quantidades são iguais, se aumentarem a mesma quantidade, a igualdade se mantém. Poderíamos representar a situação, utilizando a linguagem simbólica, por:

$$A=A$$

$$A+5=A+5$$

Os itens ‘e’, ‘f’ e ‘g’ tratam das relações de desigualdade. Quando João perde sete bolinhas e Maria perde três bolinhas é possível que os estudantes compreendam que as quantidades de bolinhas de João e Maria deixam de ser iguais e que Maria tem mais bolinhas de gude do que João, pois perdeu uma quantidade menor. Além disso, mesmo sem saber as quantidades que cada um tem, podem determinar uma diferença de quatro bolinhas entre eles. Poderíamos representar por:

$$A+5-7<A+5-3$$

$$A-2<A+2$$

$$A<A+4$$

Os itens ‘h’ e ‘i’ sugerem ao estudante determinar a quantidade de bolinhas que Maria tinha no domingo sabendo que na quarta-feira ela abriu o saco e havia nove bolinhas dentro, e determinar a quantidade de João na quarta-feira. Para saber quantas bolinhas Maria tinha no domingo o estudante pode realizar operações inversas, por exemplo. A quantidade de João na quarta-feira é de quatro bolinhas a menos do que Maria. Se Maria tem nove, João tem cinco bolinhas. Podemos representar por:

$$A+2=9$$

$$A=7$$

João e Maria tinham sete bolinhas no domingo.

Assim que leram a questão, os estudantes iniciaram as indagações:

E1: Como vou fazer se não sei quantas bolinhas tem?
E17: É, como?
A: Mas será que você precisa saber quantas bolinhas eles tem?
E1: Precisa.
A: Será que é possível trabalhar com uma quantidade, sem conhecer o seu valor?
E1: Eu vou inventar um valor.
A: Mas você não sabe quantas bolinhas eles têm. Você pode pensar em criar uma forma de representar essa quantidade?
E6: Um saco! As bolinhas podem estar dentro de um saco.
E8: Mas professora, não fala quantos amigos eles têm.

A: É necessário saber quantas bolinhas eles tinham?
E8: A quantia de bolinhas não precisa saber, mas a quantidade de amigos precisa.
A: Embora eles tenham jogado bola de gude com outros amigos, o problema se refere às quantidades de bolinhas de João e Maria apenas.
E11: Mas como, não sei quanto eles têm.
A: Você pode pensar que as bolas estão dentro de uma caixa e que você não sabe quantas bolinhas tem dentro.
O:E11 e E17 não conseguiam começar a resolver e estavam agitados.
E3: Professora, quando a gente compra um saco de burca, vem trinta bolinhas dentro.
A: Mas não sabemos se João e Maria tinham sacos completos de burca.
O: O estudante E17 foi até a agente de ensino e disse:
E17: Se eles tinham quantidades iguais e eles ganharam o mesmo tanto, então eles continuam com quantidades iguais.
A: Então escreve o que você pensou.
E14: O que é pra fazer aqui?
O: Ele queria saber o que era pra fazer na última questão.
A: É para fazer uma tabela.

Os estudantes apresentaram um estranhamento com relação ao problema três por não conceberem a ideia de trabalhar com quantidades desconhecidas. No diálogo percebemos que eles buscavam estratégias para lidar com a situação. Uma delas consistiu em considerar a quantidade 30, justificando que os sacos de bolinhas contêm 30 bolinhas.

Conforme os estudantes entregavam o problema três, iniciavam a resolução do problema quatro.

Problema quatro

Marcos e Tiago têm cada um algum dinheiro. Marcos tem R$ 8,00 em sua mão e o resto do seu dinheiro está em sua carteira. Tiago tem ao todo exatamente três vezes a quantidade de dinheiro que Marcos tem em sua carteira. Quanto dinheiro poderia haver na carteira de Marcos?

Fonte: Brizuela e Schliemann (2003)

O problema envolve quantidades desconhecidas e estabelece uma igualdade entre as quantidades de Marcos e Tiago. Representando a quantidade de dinheiro que Marcos tem na carteira por ‘x’ podemos resolver a situação por meio da equação $8 + x = 3x$.

A seguir apresentamos os questionamentos e discussões que ocorreram com relação ao problema quatro.

E14: Qual é a quantidade?
A: Não sabemos.
O: Os estudantes em geral demonstraram dificuldade. Consideraram o problema 4 difícil ou diziam não ser possível de resolver.
A: No problema três vocês também não sabiam quantas bolinhas Maria e João tinham.
E3: No começo não tinha, mas depois apareceu a quantidade.

A: Quando vocês não sabiam quantas bolinhas tinham, decidiram representar por um saco. Então vocês podem fazer o mesmo.
E8: Mas agora é dinheiro.
E3: Lá no Banco do Brasil tem um símbolo do dinheiro bem grande.
E14: Mas como vamos fazer?
E16: Tiago tem 24 reais.
A: Mas como ele tem 24 reais?
E16: Porque ele tem três vezes o que marcos tem.
A: Ele tem três vezes o que Marcos tem em sua carteira não é?
E14: É.
A: E quanto dinheiro Marcos tem em sua carteira?
E14: Não fala.
E16: Zero.
A: Zero?
A: Quanto dinheiro Marcos tem ao todo?
E8: Oito reais
E16: Oito reais
A: Oito reais ele tem em sua mão não é?
E14: É
A: Ele tem um tanto em sua carteira e 8,00 em sua mão.
E1: Eu vou colocar um valor.
E8: Professora, a gente não pode tentar um valor.
A: E se a gente atribuísse alguns valores? Que tal?
A: Quem tem mais dinheiro?
E16: Marcos
E14: Tiago, porque ele tem três vezes a quantidade do que Marcos em sua carteira.
E3: Se Marcos tiver 4,00 na carteira, ele vai ter mais porque 4+8=12, e o Tiago vai ter 12. Ah não, eles vão ter o mesmo tanto.
E3: Se marcos tiver 1 real na carteira, ele vai ter mais porque 1+8=9, e o Tiago vai ter só três. Se Marcos tiver cinco reais na carteira, 5+8=13. Tiago vai ter mais, porque 3 vezes cinco dá 15.
A: Que tal construirmos uma tabela?
Vamos começar colocando uma coluna para carteira. Poderíamos escolher um símbolo para representar o dinheiro da carteira.
E6: O símbolo do dinheiro.

Com as sugestões dos estudantes e a releitura do problema foi apresentada a seguinte tabela:

Dinheiro da carteira $	Marcos $+8,00	Tiago 3$
0,50		
1		
2		
3		
4		
5		

Outros questionamentos surgiram:

E16: E se marcos tiver R$ 0,50 centavos na carteira?
O: A agente de ensino reorganizou a tabela inserindo R$0,50 antes do um. Verificaram que com R$ 0,50 na carteira, Marcos teria mais do que Tiago.
E3: Se for de cinco reais em diante, o Tiago vai ter mais.

Diante da dificuldade que os estudantes demonstraram em iniciar suas resoluções, aplicamos o problema e oportunizamos algumas discussões. Realizamos as intervenções explorando o conceito de variável, de forma que os estudantes pudessem resolver por meio de tentativas. Exploramos a ideia de função para lidar com uma equação com variáveis em ambos os lados da igualdade.

Para análise dos registros escritos selecionamos o problema três, em que os estudantes produziram maior quantidade de registros escritos e foram mais independentes ao resolverem, ocorrendo maior participação por parte da turma.

3.5 ANÁLISE DOS REGISTROS ESCRITOS DO PROBLEMA TRÊS

Por se tratar de um problema extenso, decidimos fazer um quadro para as unidades de significado dos itens ‘a’, ‘b’, ‘c’, e ‘d’ que tratam das igualdades entre as grandezas, um quadro para os itens ‘e’, ‘f’ e ‘g’ que tratam das desigualdades entre grandezas e um quadro para os itens ‘h’ e ‘i’ que se referem à descoberta de valores desconhecidos.

Com relação aos itens ‘a’, ‘b’, ‘c’ e ‘d’ do problema três, no processo de construção das unidades de significado observamos que dos 13 estudantes que participaram, 11 afirmam que João e Maria continuarão tendo quantidades iguais de bolinhas após ganharem cinco bolinhas de gude cada um, (E1, E3, E5, E6, E7, E8, E12, E14, E16, E17, E18). No entanto, suas maneiras de resolver foram distintas, sendo possível verificar que a alguns atribuíram valores por não conseguirem responder as perguntas que tratavam de quantidades desconhecidas. Um estudante diz que Maria ficou com mais bolinhas do que João (E11), e um estudante não deixa claro em suas respostas o seu posicionamento a respeito das questões (E10).

Com relação aos itens ‘e’, ‘f’ e ‘g’ do problema três, todos os estudantes entendem que João e Maria têm quantidades diferentes de bolinhas após Maria perder três e João perder sete bolinhas. Alguns montam operações atribuindo um valor específico para as quantidades de João e Maria e verificam a desigualdade, (E1, E6, E16, E18). Outros resolvem utilizando a quantidade nove, isto é, a quantidade de bolinhas que Maria tinha na quarta-feira, realizando uma operação não pertinente (9-7 e 9-3), e concluindo que João tem duas e Maria tem seis bolinhas, (E5, E10). Um grupo de estudantes percebe que as quantidades de

João e Maria são diferentes sem recorrer a valores particulares (E3, E7, E8, E12, E14, E17). Os estudantes E11 e E12 entendem que as quantidades de João e Maria são diferentes, mas afirmam que João fica com mais bolinhas do que Maria. Apenas três estudantes calcularam corretamente a diferença entre as quantidades (E3, E12, E18).

Inicialmente o que nos chamou atenção no que se referem aos itens ‘h’ e ‘i’ foi o fato de nenhum dos estudantes determinar corretamente a quantidade de bolinhas que João e Maria tinham no domingo. Os estudantes E5 e E8 conseguiram determinar quantas bolinhas de gude João tinha na quarta-feira. O estudante E8 percebeu que na terça-feira João e Maria tinham 12 bolinhas. Os estudantes E1, E6, E16 e E18 continuaram a dar respostas com base em valores que atribuíram desde os primeiros itens, mesmo quando o problema apresentava a quantidade de bolinhas de Maria. Os estudantes E8 e E17 realizam uma das operações pertinentes na equação.

A partir das unidades de significados dos três quadros organizados, iniciamos alguns agrupamentos buscando identificar que aspectos do pensamento algébrico e da linguagem são manifestados por estudantes do sexto ano em um Experimento de Ensino, contudo ficamos abertos para esclarecer outros fenômenos que pudessem emergir dos dados, como é característico de pesquisas qualitativas.

Agrupamentos

A13) Analisam e expressam relações entre grandezas desconhecidas sem se referir a um valor em particular, (E3, E5, E7, E8, E14, E17).

Esses estudantes respondem corretamente às perguntas ‘a’, ‘b’, ‘c’ e ‘d’, concluindo que após ganharem cinco bolinhas cada um, João e Maria ainda ficam com a mesma quantidade de bolinhas. Respondem que Maria não tem mais bolinhas do que João e que João não tem mais bolas do que Maria, compreendendo que a igualdade se mantém. Eles percebem e expressam as estruturas aritméticas da situação problema de acordo com Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005). Demonstram compreender a situação sem fazer referência a valores específicos, e usam principalmente a linguagem verbal para se expressarem. Para eles, suas frases justificam suas respostas sem que necessitem recorrer a operações

matemáticas com números específicos. Expressam as estruturas sem se referir a valores numéricos e fazem desenhos de sacos representando quantidades desconhecidas sem se referir a quantidades de bolinhas específicas dentro do saco. Esse grupo também é bem sucedido nos itens que envolvem as quantidades desiguais. Entenderam que João perdeu mais bolinhas do que Maria, portanto, Maria passa a ter mais bolinhas do que João. Todos expressam esse entendimento por meio da escrita e alguns utilizam símbolos. Dessa forma, é possível que crianças expressem relações e propriedades por meio de representações escritas ou notações sem fazer uso da linguagem convencional algébrica, (BRIZUELA, CARRAHER e SCHLIEMANN, 2000). Neste agrupamento identificamos dois subgrupos:

A13.1) Justificam adequadamente em linguagem verbal ou simbólica, (E3, E5, E14).

Entendemos a justificativa como a apresentação de ideia matemática que explique a resolução do estudante, ou seja, a capacidade de apresentar elementos para demonstrar a veracidade de uma proposição. Nesse subgrupo foram reunidos os estudantes que conseguiram utilizar a linguagem verbal ou simbólica adequadamente para expressar as ideias matemáticas que os levaram a dar respostas adequadas ao problema. Esse grupo tem um domínio maior da linguagem, pois a usam em seu favor e expressam a ideia completa, sem que falte algum elemento para o convencimento de quem lê sua afirmação.

O estudante E5 apresenta, no item d) do problema elementos que o levaram a afirmar nos itens a), b), c) que João e Maria têm quantidades iguais de bolinhas. Vejamos sua justificativa na figura 16.

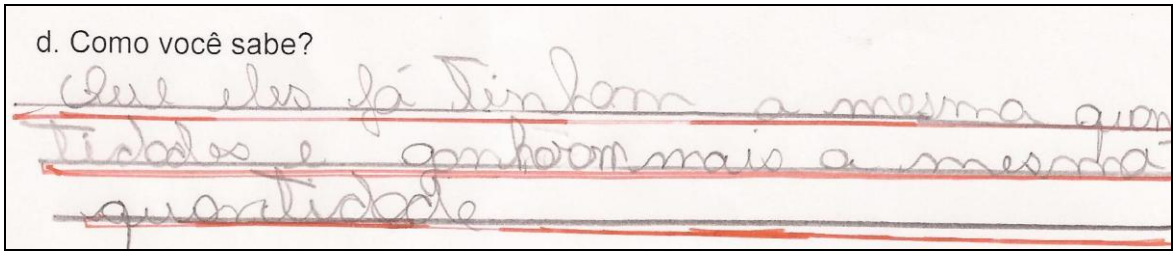
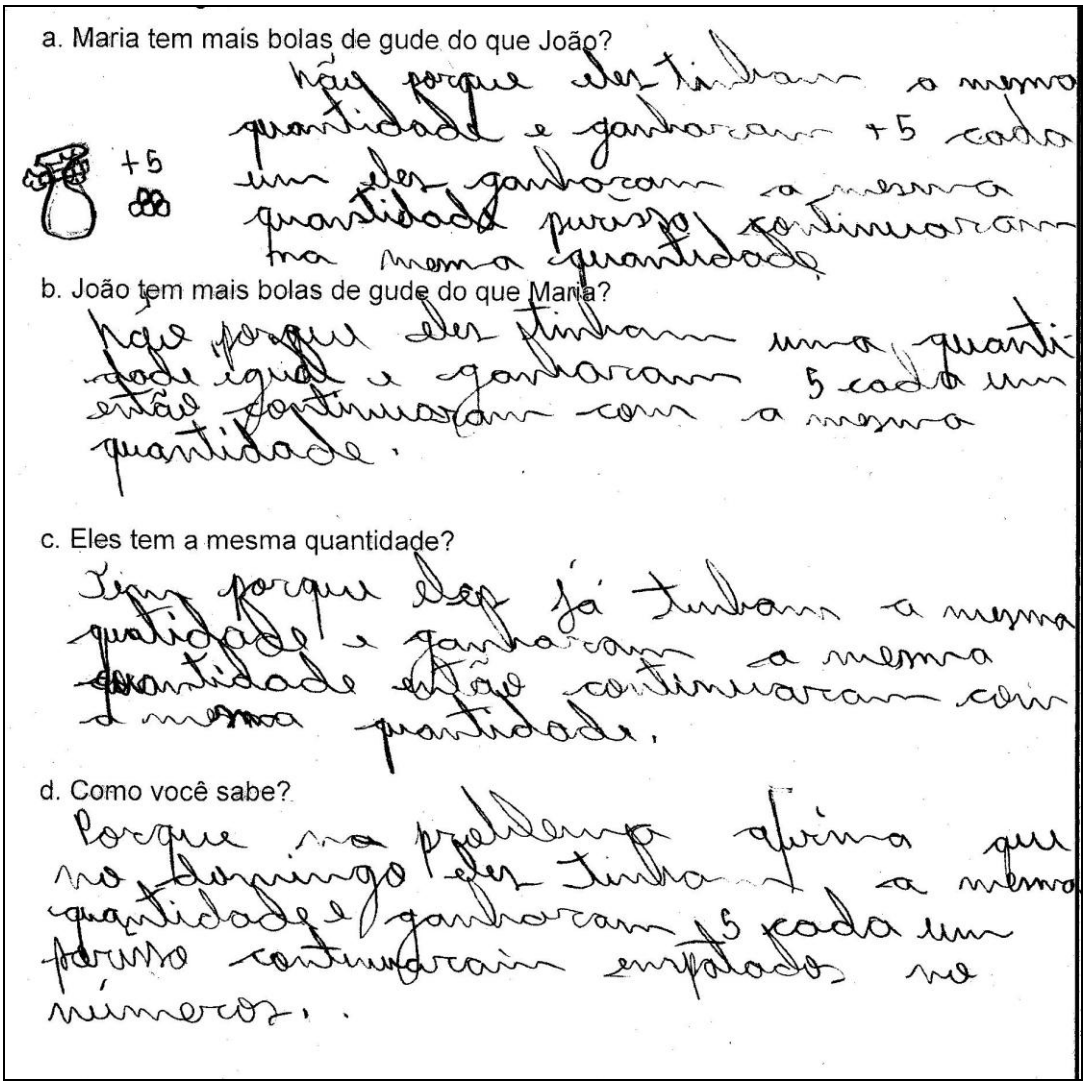


Figura 16 – Registro do estudante E5

Destacamos neste subgrupo o registro do estudante E3 conforme figura 17. Esse estudante justifica suas ideias expressando-se claramente e adequadamente por meio de linguagem verbal.


a. Maria tem mais bolas de gude do que João?

Não porque eles tinham a mesma quantidade e ganharam +5 cada um eles ganharam a mesma quantidade porisso continuaram na mesma quantidade

+5

b. João tem mais bolas de gude do que Maria?

Não porque eles tinham uma quantidade igual e ganharam 5 cada um então continuaram com a mesma quantidade.

c. Eles tem a mesma quantidade?

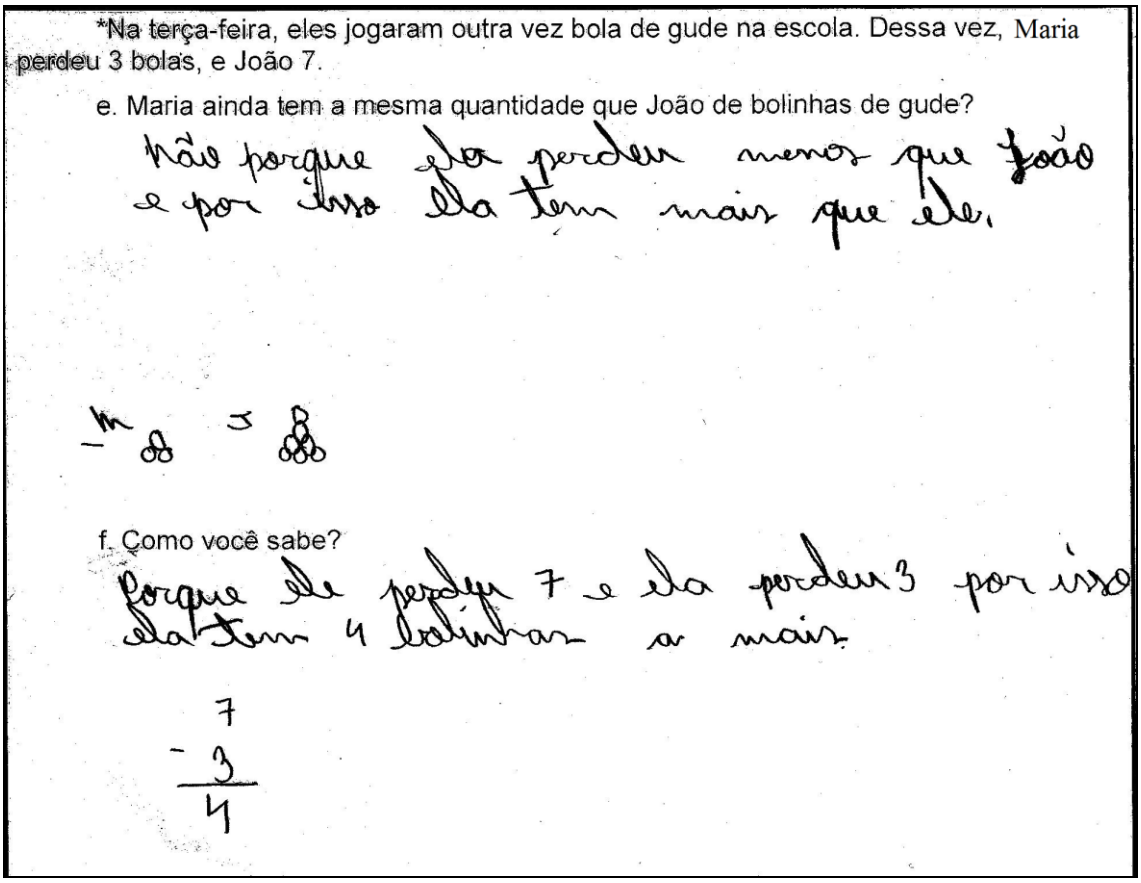
Sim porque eles já tinham a mesma quatidade e ganharam a mesma quantidade então continuaram com a mesma quantidade.

d. Como você sabe?

Porque na pralbema afirma que no domingo eles tinham a mesma quantidade e ganharam +5 cada um porisso continuaram empatados no números.

Figura 17 – Registro do estudante E3

O estudante E3 faz justificativas em todos os itens e se expressa adequadamente em linguagem verbal. Além disso, consegue escrever a mesma ideia de maneiras diferentes. Vejamos como esse mesmo estudante se expressa nos itens que se referem às desigualdades.



*Na terça-feira, eles jogaram outra vez bola de gude na escola. Dessa vez, Maria perdeu 3 bolas, e João 7.

e. Maria ainda tem a mesma quantidade que João de bolinhas de gude?

Não porque ela perdeu menos que João e por isso ela tem mais que ele.

f. Como você sabe?

Porque ele perdeu 7 e ela perdeu 3 por isso ela tem 4 bolinhas a mais.

$$\begin{array}{r} 7 \\ -\ 3 \\ \hline 4 \end{array}$$

Figura 18 – Registro do estudante E3

Além de apresentar uma ideia racional que explique satisfatoriamente sua resposta o estudante E3 apresenta uma habilidade de explicitar essa ideia por meio da linguagem verbal e simbólica.

A forma de se expressar simbolicamente do estudante E14 demonstra que consegue justificar suas respostas, conforme figura 19.

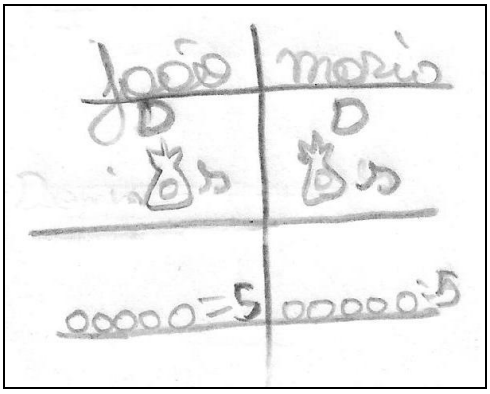
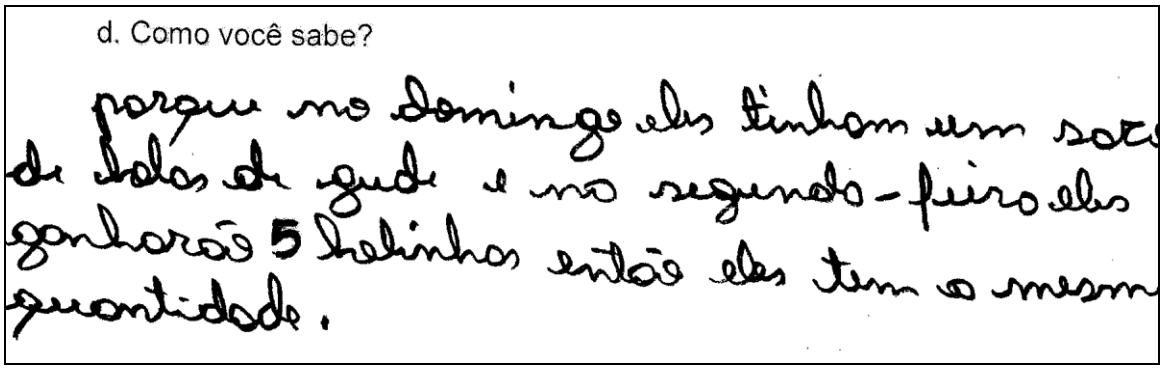


Figura 19 – Registro do estudante E14

O esquema de E14 apresenta que cada um tem sacos de bolinhas iguais no domingo e cada um deles ganha cinco bolinhas, mostrando que há uma igualdade em ambos os lados. Com base no esquema podemos afirmar que esse estudante tem uma ideia matemática clara que o permite fazer afirmações. Ele consegue expressar essas ideias matemáticas simbolicamente e verbalmente. Vejamos sua justificativa em linguagem verbal, na figura 20.


d. Como você sabe?

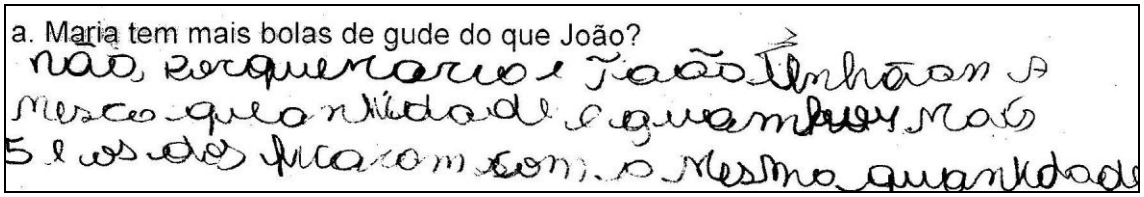
porque no domingo eles tinham um sac
de bolas de gude e no segunda-feira eles
ganharão 5 bolinhas então eles tem o mesm
quantidade.

Figura 20 - Registro do estudante E14

Comparando as formas de justificar do estudante E14, consideramos que ele se justifica melhor em linguagem simbólica do que em linguagem verbal. Podemos afirmar que alguns estudantes conseguem justificar suas respostas, pois suas ideias matemáticas os levaram a fazer afirmações pertinentes, embora alguns encontrem dificuldades em expressar-se verbalmente.

Podemos afirmar que uma ideia pode estar clara para um estudante, no entanto, ele pode não conseguir expressá-la. Foi o que aconteceu com o estudante E14 quando usou a linguagem verbal.

Assim como o estudante E3, o estudante E17 começa a justificar desde o primeiro item do problema. Vejamos a figura 21.


a. Maria tem mais bolas de gude do que João?

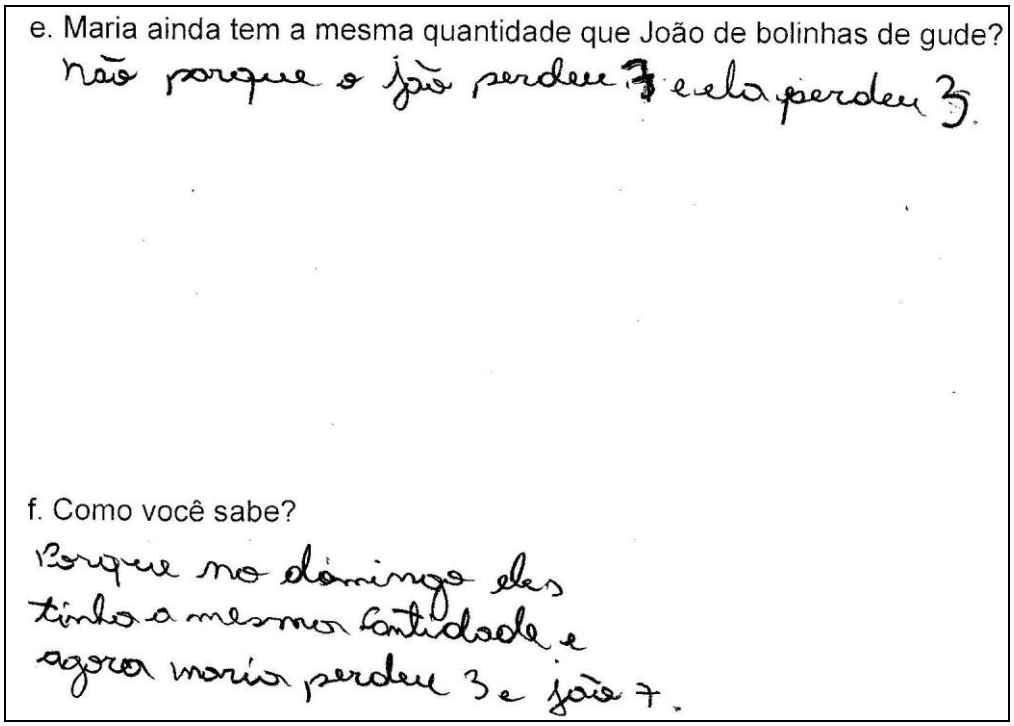
não, porque Maria e João tinhaam a
mesma quantidade e quando
5 e os dois ficaram com a mesma quantidade

Figura 21 – Registro do estudante E17

O estudante E17 demonstra compreender as ideias matemáticas envolvidas na situação, e parece estar convicto de que suas respostas são corretas. Quando o estudante responde aos itens do problema sente necessidade de justificar cada um.

A13.2) Tentam justificar embora não se expressem adequadamente por meio da linguagem, (E8, E7).

Neste subgrupo, os estudantes respondem corretamente, mas não apresentam clareza ao justificar-se. Suas frases são objetivas ou com duplo sentido. Consideramos que esses estudantes não se expressam adequadamente por meio da escrita, embora apresentem ideias matemáticas que possam explicar suas respostas. Demonstram entender as igualdades e desigualdades que o problema apresenta, mas são sucintos em sua tentativa de justificar. Vejamos o registro do estudante E8 na figura 22.


e. Maria ainda tem a mesma quantidade que João de bolinhas de gude?

Não porque o João perdeu 7 e ela perdeu 3.

f. Como você sabe?

Porque no domingo eles tinha a mesma Quantidade e agora maria perdeu 3 e João 7.

Figura 22 – Registro do estudante E8

O estudante E8 afirma que Maria não tem a mesma quantidade de bolinhas que João. Demonstra compreender que isso ocorre porque antes eles

tinham a mesma quantidade e agora perderam quantidades diferentes, o que leva a uma desigualdade.

Para as desigualdades, E7 justifica com poucas palavras o motivo pelo qual considera que Maria não tem mais a mesma quantidade que João. No entanto, estudante não consegue explicar porque considera que João e Maria continuam com as quantidades iguais após ganharem cinco bolinhas cada um.

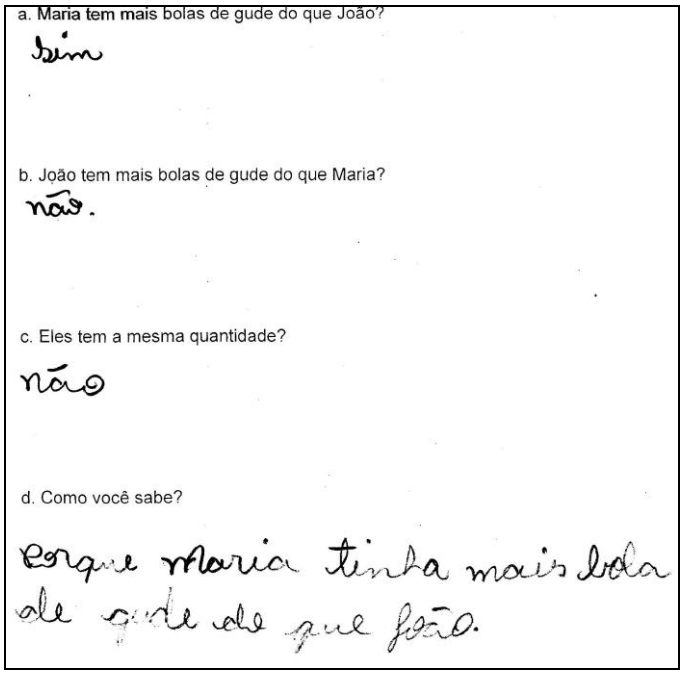
Neste agrupamento identificamos aspectos do pensamento algébrico nas resoluções dos estudantes por apresentarem uma capacidade de perceber e expressar relações entre grandezas desconhecidas. Esse grupo demonstra compreender conceitos e propriedades matemáticas que consiste em um dos objetivos do ensino de álgebra para os anos iniciais relacionados habilidade de abstração de acordo com Lew (2004). Além disso, os estudantes dos subgrupos 13.1 e 13.2 conseguem justificar suas respostas. De acordo com Kieran (2004), justificar consiste em uma das atividades com as quais os estudantes dos anos iniciais devem se envolver, sem necessariamente terem que utilizar a linguagem simbólica e afirma também que o pensamento algébrico nesse nível de ensino envolve o desenvolvimento de formas de pensar no âmbito de atividades tais como “analisar relações entre quantidades, observar a estrutura, estudar variações, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever” (KIERAN, 2004, p. 149). Também se mostram capazes de “comparar expressões equivalentes baseando-se em propriedades, em vez de avaliação numérica” (KIERAN, 1992, p. 141), e conseguem raciocinar com variáveis. Demonstram compreender quais transformações realizadas mantém a igualdade e quais transformações resultam em uma desigualdade. Além disso, são capazes de identificar a quantidade maior e a quantidade menor, mesmo lidando com valores desconhecidos.

A14) Não conseguem lidar com igualdades e desigualdades envolvidas na situação problema, (E10, E11).

Esses estudantes não atribuem valores específicos para responder aos itens do problema, no entanto, apresentam algumas dificuldades ao tentar lidar com as relações entre quantidades desconhecidas que apresentaremos a seguir nos subgrupos 14.1, 14.2 e 14.3.

A14.1) Troca uma igualdade por uma desigualdade, (E11).

O estudante E11 demonstra não compreender que Maria e João continuaram com quantidades iguais depois de ganharem cinco bolinhas cada um.


a. Maria tem mais bolas de gude do que João?

Sim

b. João tem mais bolas de gude do que Maria?

não.

c. Eles tem a mesma quantidade?

não

d. Como você sabe?

porque Maria tinha mais bola de gude do que João.

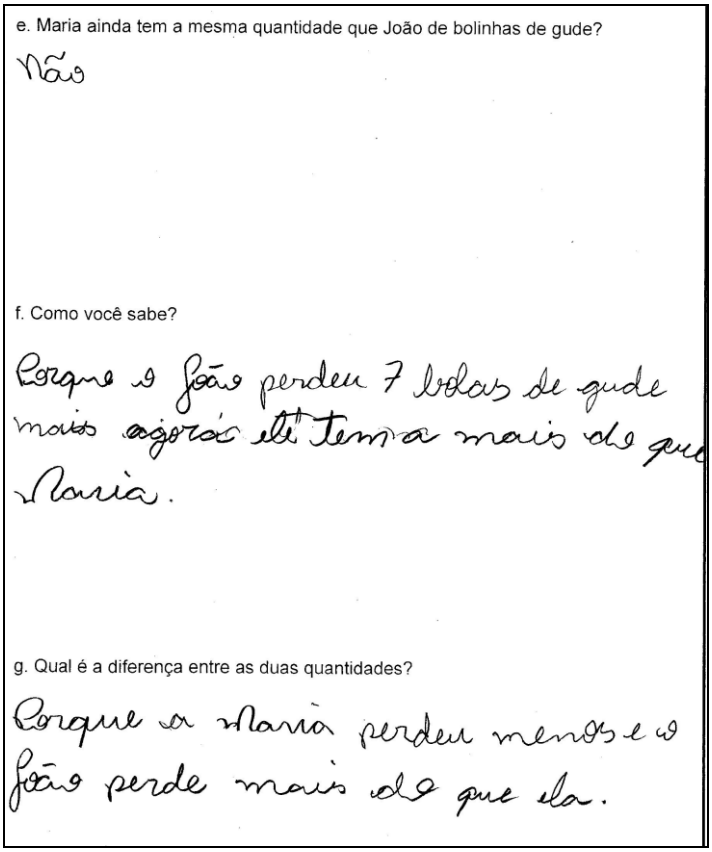
Figura 23 – Registro do estudante E11

O estudante E11 demonstra acreditar que João e Maria não têm quantidades iguais de bolinhas e que Maria tem uma quantidade maior do que João. Esse estudante não compreende que se transformações equivalentes são realizadas para quantidades iguais, as quantidades resultantes também serão iguais.

A14.2) Inverte a desigualdade, (E11, E12).

Nos itens ‘e’ e ‘f’ fica evidente a dificuldade em comparar as quantidades desconhecidas. Nas questões anteriores E11 afirmava que Maria tinha mais bolinhas do que João. Considerando que João perdeu sete bolinhas agora, ele deveria ficar com menos do que antes. Se o estudante tivesse dado continuidade a seu raciocínio poderia dizer então que Maria continua com mais bolinhas do que João porque João perdeu mais do que Maria. No entanto, ele afirma no item ‘f’ que João perdeu sete bolinhas, mas agora tem mais bolinhas do que Maria. Afirma que, Maria tinha mais do que João, perdeu menos do que João e agora ficou com menos

do que João. Não entende que se eles tinham a mesma quantidade, quem perde mais fica com menos.


e. Maria ainda tem a mesma quantidade que João de bolinhas de gude?

Não

f. Como você sabe?

Porque o João perdeu 7 bolas de gude mais agorá ele tem a mais do que Maria.

g. Qual é a diferença entre as duas quantidades?

Porque a Maria perdeu menos e o João perde mais do que ela.

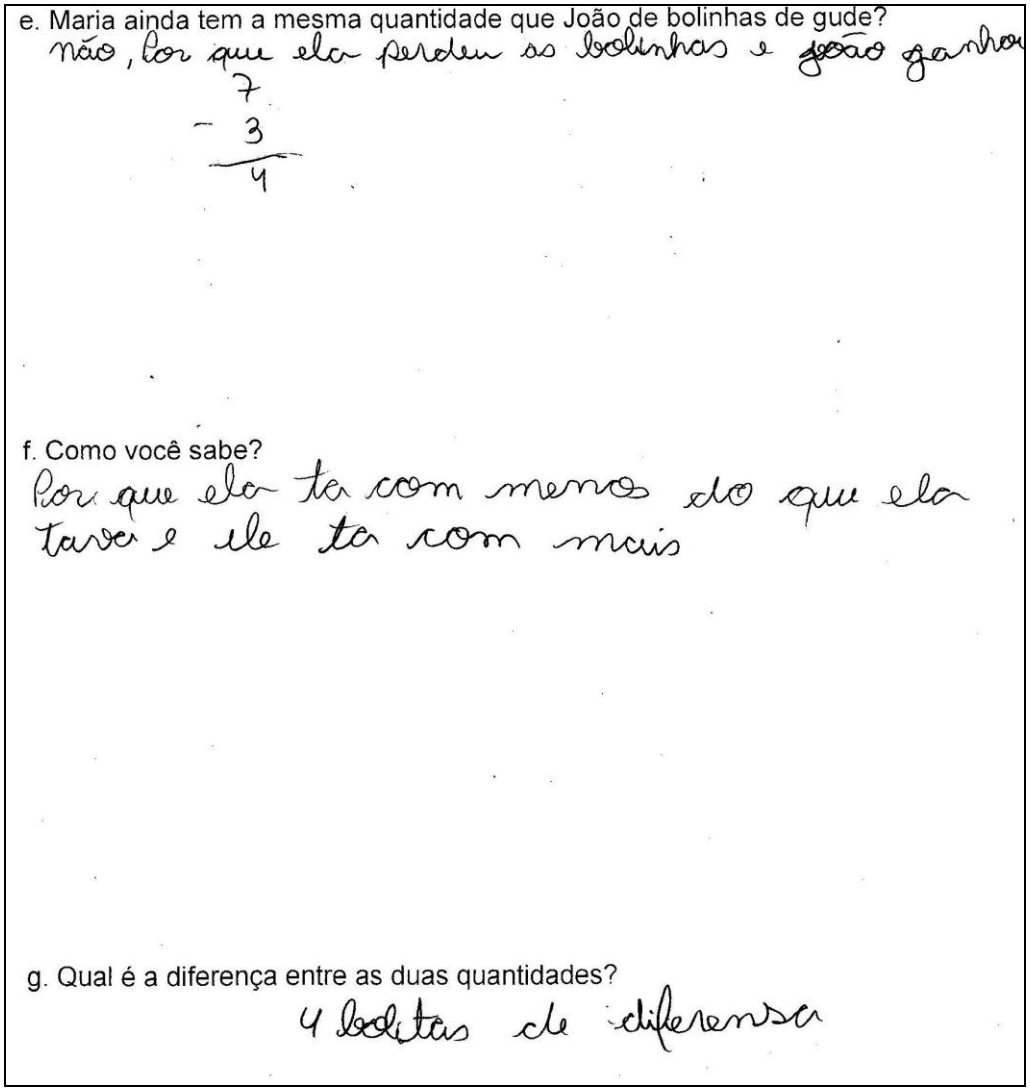
Figura 24 – Registro do estudante E11

O estudante E11 demonstra não identificar adequadamente qual dos lados da desigualdade é menor e qual é maior. Não recorre a valores específicos e não compara as quantidades ao lidar com valores desconhecidos. Apresenta uma confusão de ideias, entrando em contradição quando tenta justificar.

A14.3) Não consegue determinar a diferença entre quantidades desconhecidas quando uma das quantidades aumenta e a outra diminui, (E12).

Embora o problema informe que *'Maria perdeu 3 bolas, e João 7',* o estudante E12 entende que João ganhou. Afirma que João ficou com mais do que Maria, porque Maria perdeu e João ganhou. Consideramos que esse estudante acredita que só Maria perdeu bolinhas. Isso fica mais evidente no item 'f' quando ele

afirma que Maria está com menos do que ela estava e ele, João, está com mais, ou seja, ele ganhou bolinhas. Vejamos o registro escrito na figura 25.


e. Maria ainda tem a mesma quantidade que João de bolinhas de gude?

não, por que ela perdeu as bolinhas e João ganhou

7
− 3
4

f. Como você sabe?

Por que ela ta com menos do que ela tava e ele ta com mais

g. Qual é a diferença entre as duas quantidades?

4 bolitas de diferensa

Figura 25 – Registro do estudante E12

Realiza uma inversão da desigualdade por uma interpretação equivocada do problema. Numa tentativa de dar sequência à interpretação feita pelo estudante, se Maria tivesse perdido quatro bolinhas e João ganhado sete bolinhas, a diferença entre eles seria de 11 bolinhas e não de quatro bolinhas conforme afirmou o estudante em seu registro escrito.

A15) Não compreende as relações/comparações entre quantidades mesmo lidando com valores específicos, (E10).

O estudante E10 não dá respostas aos itens e sim, inicia uma resolução trabalhando com a quantidade nove. Suas respostas dão valores específicos, mas não se posiciona a respeito das relações entre quantidades. Seu objetivo é determinar a quantidade de bolinhas que Maria tem no domingo, utilizando a informação de que Maria tem nove bolinhas na quarta-feira. Esse estudante não responde adequadamente os itens que se referem às relações. Suas resoluções não parecem ter relação com as perguntas que foram feitas. É possível que ele esteja respondendo a outros itens da questão. Recorre a um valor particular, embora, não consiga responder corretamente aos itens relacionados à igualdade. Os itens que se referem à desigualdade também são respondidos incorretamente, mesmo atribuindo quantidades particulares. Apresenta falta de objetividade nas respostas e não justifica. Não consegue dar respostas coerentes e responde com valores numéricos em todos os itens, demonstrando um foco em dar respostas específicas.

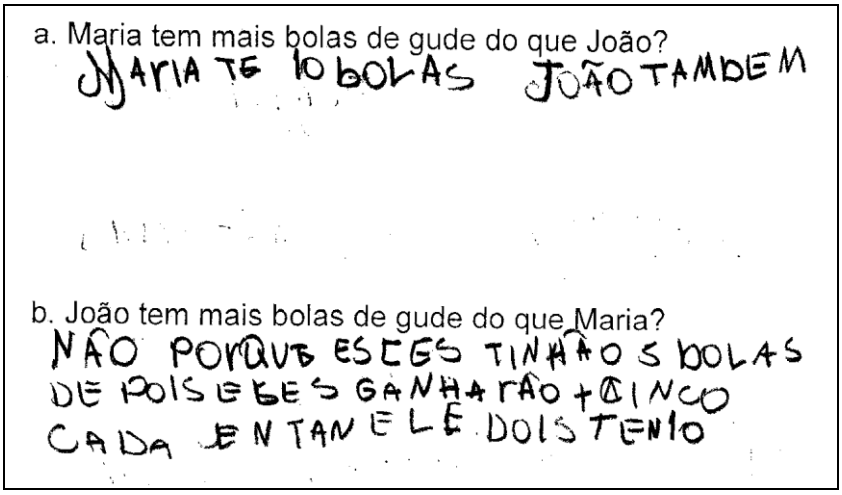
A16) Percebem e expressam relações entre números específicos (E1, E6, E16 e E18).

Os estudantes que fazem parte desse agrupamento respondem corretamente todas as questões relativas às relações entre grandezas. Entendem que depois de ganharem cinco bolinhas cada um, João e Maria continuam com quantidades iguais. Entendem também que se João perdeu mais do que Maria, esta passa a ter mais bolinhas do que João. No entanto, essas percepções ocorrem recorrendo a valores específicos, atribuindo uma quantidade de bolinhas para João e Maria. Esses estudantes não se desvinculam de respostas numéricas e resultados particulares.

Verificamos que os motivos que os levam a atribuir valores são distintos, como podemos verificar nos subagrupamentos.

A16.1) Lidam com o problema buscando um dado que falta (E16, E18, E6, E12).

Esses estudantes inventam informações que não existem no problema. O estudante E8 afirma que no domingo Maria tem cinco bolinhas e João tem cinco bolinhas. Ganhando cinco cada um, ficam com dez bolinhas, conforme figura 26.


a. Maria tem mais bolas de gude do que João?
MARIA TE 10 BOLAS JOÃO TAMBEM

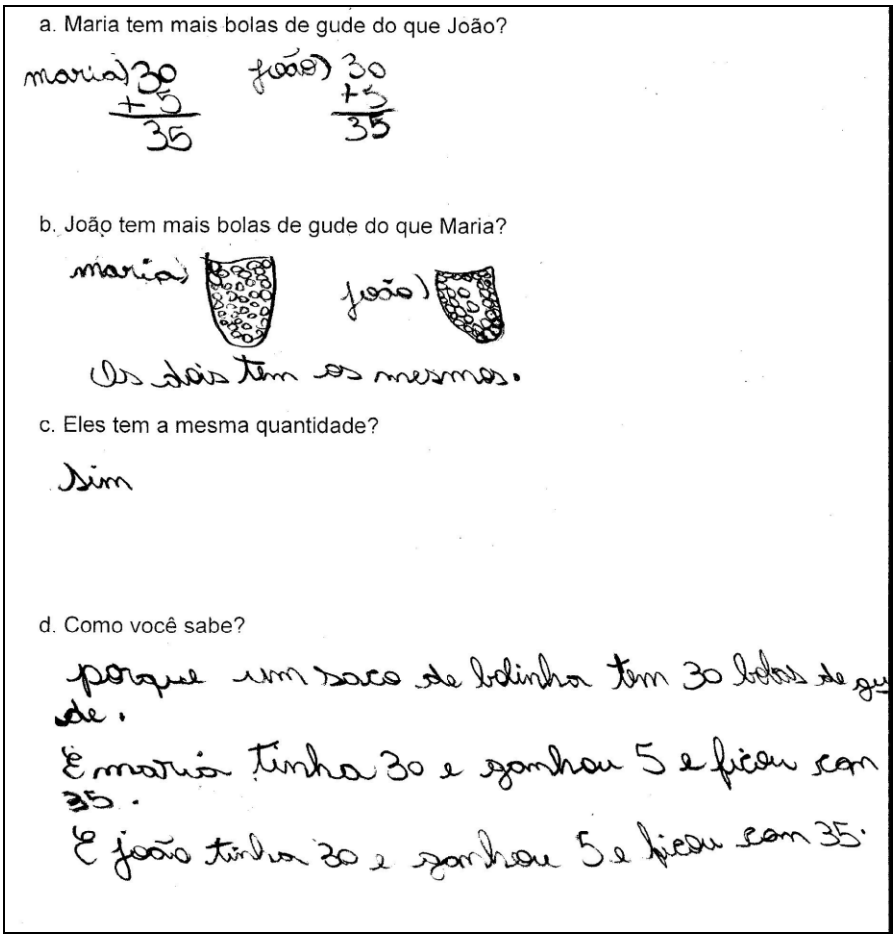
b. João tem mais bolas de gude do que Maria?
NÃO PORQUE ESES TINHÃO 5 BOLAS
DE POIS E ES GANHARÃO + CINCO
CADA ENTAN ELE DOIS TENIO

Figura 26 – Registro do estudante E18

Embora o problema não informe a quantidade de bolinhas ele atribui um valor utilizando a informação ‘cinco’ do problema. Ele acredita que essa informação possa ser a quantidade de bolinhas de gude de João e Maria no domingo.

De forma semelhante a resolução de E18, o E16 faz uma operação com números informados no problema e obtêm um valor numérico com o qual trabalha. Obtém o valor numérico 25, fazendo a operação cinco vezes cinco, ou seja, busca um valor numérico a partir das informações do problema.

O estudante E16 acredita que no domingo João e Maria têm 30 bolinhas, porque um saco de bolinhas de gude contém 30 bolinhas. Vejamos o registro escrito desse estudante na figura 27.


a. Maria tem mais bolas de gude do que João?

maria) 30 + 5 = 35 joão) 30 + 5 = 35

b. João tem mais bolas de gude do que Maria?

maria) joão)

Os dois tem os mesmos.

c. Eles tem a mesma quantidade?

Sim

d. Como você sabe?

porque um saco de bolinha tem 30 bolas de gude.
E maria tinha 30 e ganhou 5 e ficou com 35.
E joão tinha 30 e ganhou 5 e ficou com 35.

Figura 27 – Registro do estudante E16

O estudante traz uma informação do cotidiano para resolver o problema. Entende que todos os sacos de bolinhas completos contêm 30 bolinhas e considera que os sacos de bolinhas de João e Maria estavam completos, embora o problema não faça referência a isso. Para ele, a informação ‘Maria e João, cada um tem um saco com bolas de gude’ revela que ‘Maria e João tem cada um 30 bolinhas de gude’.

Os estudantes deste subgrupo acreditam que todos os problemas matemáticos devam apresentar valores específicos para as quantidades. Por isso, buscam essa informação no texto do problema ou a partir de uma operação matemática com as informações numéricas do problema.

A16.2) Imagina um valor para uma informação que falta, (E1).

O estudante E1 escolhe um valor e atribui, afirmando que João e Maria têm 50 bolinhas de gude cada um. Afirma também que imaginou esse valor, conforme figura 28.

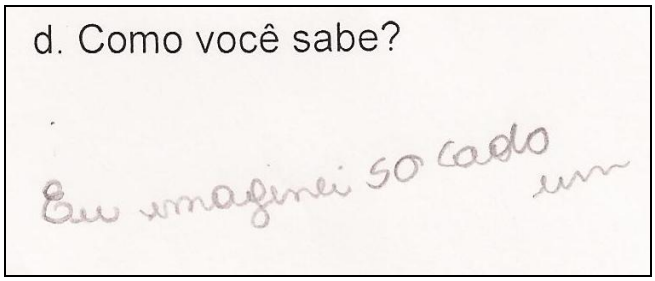


Figura 28 – Registro do estudante E1

Entendemos que imaginar um valor é diferente de buscar um valor no problema, pois percebeu que a quantidade de bolinhas de João e Maria de fato não é informada. O valor imaginado pelo estudante continua a ser utilizado pelo estudante nos itens posteriores do problema. O valor escolhido é transformado na verdadeira quantidade de bolinhas de João e Maria. Vejamos a figura 29.

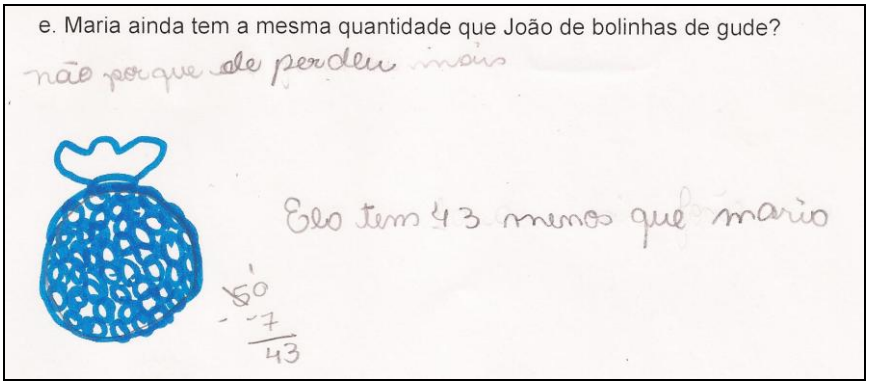


Figura 29 – Registro do estudante E1

Embora o estudante E1 faça uma operação atribuindo valores para as quantidades de bolinhas, demonstra perceber que João e Maria não têm a mesma quantidade porque ele perdeu mais bolinhas. Acredita que João agora tenha 43 bolinhas, pois tinha 50 e perdeu sete. Também afirma que ele ficou com menos do que Maria. Isso demonstra que está fazendo comparações entre as grandezas.

O registro referente à figura 30 mostra que mesmo depois de ser revelada a quantidade de bolinhas de Maria, o estudante E1 continua lidando com a quantidade atribuída.

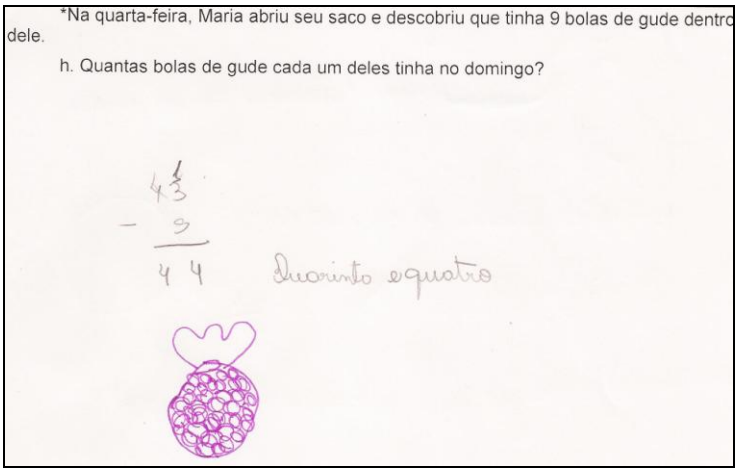


Figura 30 – Registro do estudante E1

Entendemos que o estudante não se adapta a informação nova continuando na mesma estratégia que optou por realizar no início da resolução.

Para a aprendizagem de álgebra os estudantes desse agrupamento precisam mudar o pensamento a respeito das relações entre números específicos para o pensamento sobre as relações entre conjuntos de números e compreender o significado das variáveis em oposição aos valores instanciados, (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2007).

A17) Acreditam que as respostas dos problemas devam conter resultados particulares, (E16, E18, E1, E6, E10).

Esses estudantes estão habituados em dar respostas particulares ao resolver problemas. Ao longo de todo o problema lidam com valores que atribuíram. Em geral suas respostas apresentam um valor numérico. Dessa forma, são estudantes que valorizam resultados particulares. Não concebem resolver problemas dando respostas gerais. É possível perceber, porque mesmo ao responder perguntas que não se referem a valores, fazem questão de dar um valor numérico. Veja os registros escritos, nas figuras 31, 32, 33 e 34.

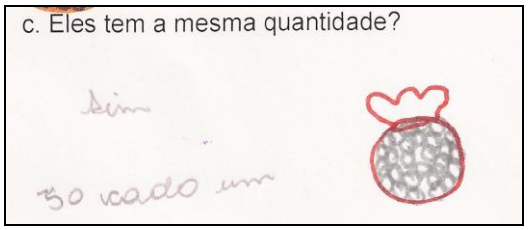


Figura 31 – Registro do estudante E1

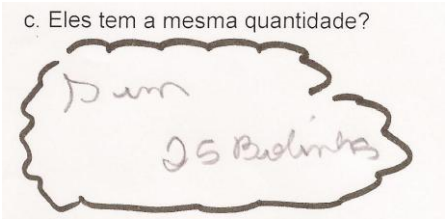


Figura 32 – Registro do estudante E6

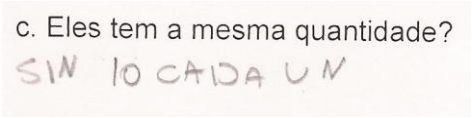


Figura 33 – Registro do estudante E18

Esses registros mostram que os estudantes tendem a dar respostas particulares para problemas que requerem respostas mais gerais.

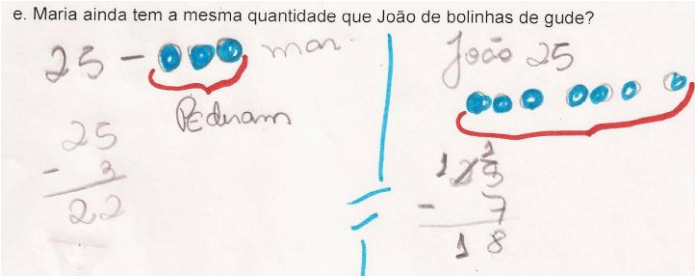


Figura 34 – Registro do estudante E6

Ao invés de responder à pergunta, realiza as operações e obtém resultados numéricos para as quantidades de Maria e João. Para ele, João e Maria tinham 25 bolinhas e ficaram com 18 e 22 bolinhas. É como se a pergunta fosse: ‘Com quantas bolinhas cada um ficou?’

Observamos também como o resultado é valorizado no registro da figura 35.

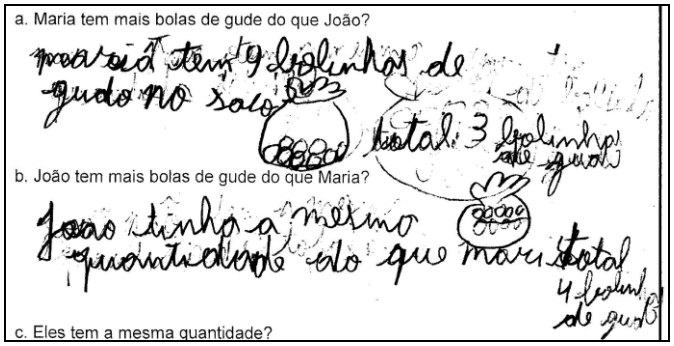


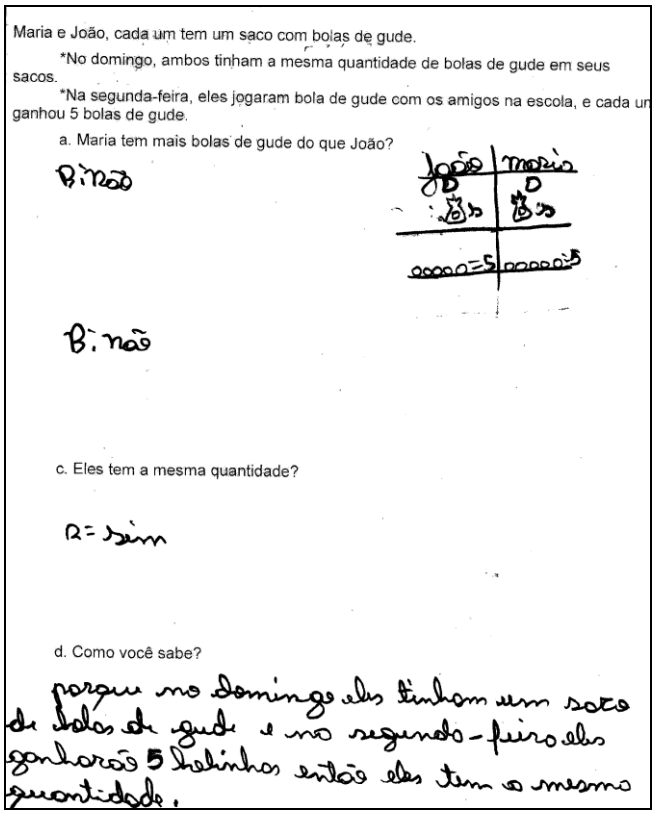
Figura 35 – Registro do estudante E10

Percebemos que este estudante dá ênfase às respostas utilizando a palavra ‘total’. Ao invés de responder às perguntas ele se dedica a determinar valores. Ao responder a página um, do problema três, lida com a quantidade nove que aparece apenas na página três do problema. Ele recorre à quantidade de bolinhas de Maria na quarta-feira para tentar responder os itens da página um.

As evidências mostradas nesse agrupamento levam nos a concluir que esses estudantes precisam mudar suas finalidades na resolução de problemas, avançar do processo de “computar de respostas numéricas para descrever e representar relações entre variáveis,” (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2007, p. 694), e conceberem respostas mais gerais.

A18) Modelam uma situação usando um esquema ou uma figura, (E14, E5).

Por meio de representações, esses estudantes organizam seu pensamento e contemplam todas as informações do problema em um esquema construído. Conseguem representar as quantidades desconhecidas e representam adequadamente a igualdade entre essas quantidades, com desenhos de sacos iguais um ao lado do outro, cada um com uma quantidade de bolinhas por fora (E5), ou desenha uma tabela em que de um lado está o saco de João com cinco bolinhas abaixo e do outro está o saco de Maria com cinco bolinhas abaixo, (E14).



Maria e João, cada um tem um saco com bolas de gude.

*No domingo, ambos tinham a mesma quantidade de bolas de gude em seus sacos.

*Na segunda-feira, eles jogaram bola de gude com os amigos na escola, e cada un ganhou 5 bolas de gude.

a. Maria tem mais bolas de gude do que João?

R: não

João	Maria
D	D
5	5
5	5

b. não

c. Eles tem a mesma quantidade?

R= sim

d. Como você sabe?

porque no domingo eles tinham um saco de bolas de gude e no segundo-feira eles ganharão 5 bolinhas então eles tem a mesma quantidade.

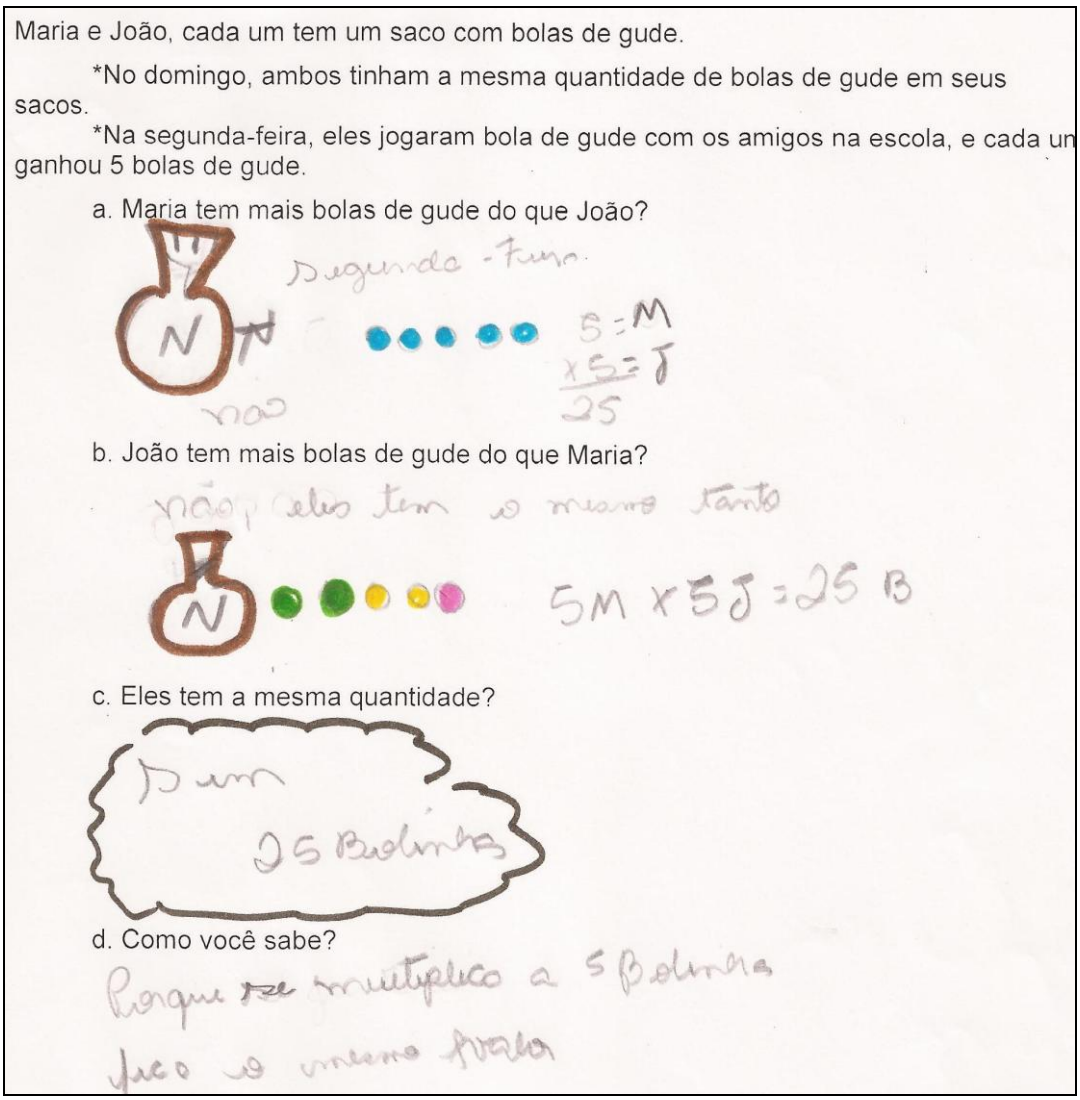
Figura 36 – Registro do estudante E14

O estudante E14 compreende que a igualdade será mantida e responde adequadamente às questões ‘a’, ‘b’, ‘c’ e ‘d’. A linguagem simbólica que ele utiliza para representar o problema modela, uma vez que descreve as quantidades desconhecidas de João e de Maria e a igualdade que é mantida mesmo após serem acrescidas as cinco bolinhas para cada um. A tabela tem o papel de fazer a comparação entre as grandezas. Desenha os sacos exatamente da mesma maneira dando indícios de que considera que os sacos contêm a mesma quantidade. De acordo com Kaput (1995), um dos aspectos do pensamento algébrico consiste em uma linguagem para modelagem. O mesmo autor afirma que o raciocínio algébrico pode assumir várias formas, incluindo “modelagem como um domínio para expressar e formalizar generalizações”, (KAPUT, 2005, p. 413). Esses estudantes conseguem elaborar sistemas de representações consistentes em problemas envolvendo desconhecidos. Dessa forma, consideramos que apresentaram um aspecto do pensamento algébrico em suas resoluções. De acordo com Lew (2004), a modelagem consiste em uma das habilidades do pensamento matemático necessárias para o sucesso em álgebra.

A19) Desenvolve/cria uma linguagem sincopada para expressar-se matematicamente, (E3, E6, E14, E5).

Os estudantes desse grupo utilizam uma linguagem simbólica própria, em geral dissociada de significados convencionais adotados para os símbolos utilizados. Apresentam um processo de adaptação da linguagem para expressar o pensamento matemático como historicamente ocorreu, fazendo abreviações e utilizando alguns símbolos.

Os estudantes E5, E6 e E14 utilizam letras iniciais para se referir a uma informação do contexto do problema. Como no caso em que a letra ‘D’ aparece para especificar o dia da semana ‘domingo’. O estudante E5 escreve 4B para se referir a quatro bolinhas. Vejamos a figura 37.


Maria e João, cada um tem um saco com bolas de gude.

*No domingo, ambos tinham a mesma quantidade de bolas de gude em seus sacos.

*Na segunda-feira, eles jogaram bola de gude com os amigos na escola, e cada un ganhou 5 bolas de gude.

a. Maria tem mais bolas de gude do que João?

Segunda-feira.

5 = M
x5 = J
25

não

b. João tem mais bolas de gude do que Maria?

não, eles tem o mesmo tanto

5M x 5J = 25 B

c. Eles tem a mesma quantidade?

Sim
25 Bolinhas

d. Como você sabe?

Porque multiplico a 5 Bolinha
fico o mesmo valor

Figura 37 – Registro do estudante E6

O estudante E6 apresenta 25B para expressar 25 bolinhas. Também utilizam as letras associadas ao sinal de igual para indicar as quantidades de cada um, como no caso em que E6 faz M=5, indicando que Maria ganhou cinco, J=5, indicando que João ganhou cinco. A mesma estudante desenha um saco e escreve ‘N’ para indicar um ‘número desconhecido’, isto é, uma quantidade de bolinhas que o saco contém. Há indícios de que utilizam a letra com finalidades diferentes, ora para especificar de quem são aquelas quantidades, ora para falar de um número desconhecido, ora para evitar escrever a palavra toda. O estudante E14 desenha sacos pequenos com apenas uma bolinha dentro e apresenta a letra ‘S’ fora dos sacos para indicar o ‘plural’, ou seja, pode ter mais de uma bolinha no saco. Em geral, podemos dizer que quando os estudantes utilizam iniciais estão se referindo a um nome e não diretamente a quantidade. As letras ‘N’ e ‘S’ estão representando quantidades, mas as letras ‘D’, ‘M’, ‘J’ e ‘B’ servem para especificar informações e se referem a nomes.

Além de usar abreviações esses estudantes representam a quantidade de João e Maria de uma forma simbólica própria. Desenham um saco acompanhado de cinco bolinhas (E6), ou um saco acompanhado de ‘+5’ e desenha cinco bolinhas (E3). Esses estudantes representam a quantidade desconhecida de forma semelhante a representações que usamos convencionalmente. Os estudantes E14 e E5 desenham dois sacos, um de João e o outro de Maria. Para cada saco acrescentam bolinhas. No caso de E5, desenha cinco bolinhas abaixo dos sacos e E4 desenha quatro bolinhas ao lado dos sacos. O saco é uma maneira que os estudantes encontraram de encapsular as bolinhas, uma vez que se trata de uma quantidade desconhecida, conforme podemos ver na figura 38.

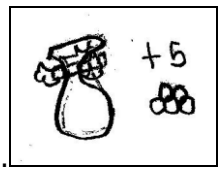


Figura 38 – Registro do estudante E3

É uma representação equivalente a (x+5). O desenho do saco com cinco bolinhas indica uma aceitação de fechamento de expressões literais. A aceitação de fechamento consiste em uma das dificuldades apresentadas por

estudantes em álgebra. Kieran (1992), afirma que o ensino voltado para o desenvolvimento de uma forma algébrica de pensar deve ter, entre outros, foco em números e letras e isso inclui a aceitação de fechamento de expressões literais. Vejamos também a forma como esse estudante apresenta as quantidades de João e Maria após perderem as bolinhas:

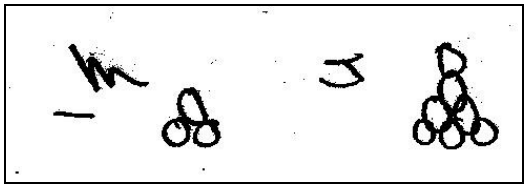


Figura 39 – Registro do estudante E3

Escreve de forma abreviada que Maria perdeu três bolinhas e João perdeu sete bolinhas, utilizando o sinal de menos para indicar as perdas.

Esse agrupamento mostra que alguns estudantes procuram utilizar uma linguagem com abreviações, demonstrando uma tendência em desenvolver uma linguagem mais sincopada. Demonstram conseguir representar quantidades desconhecidas por meio de símbolos. Representam o problema ao invés de meramente solucioná-lo, sendo capazes de criar uma linguagem própria.

Podemos perceber que existe uma criatividade por parte dos estudantes com relação à linguagem. Essa criatividade envolve a invenção de símbolos que julguem adequados para representar determinada situação atribuindo-lhes um sentido e a utilização de símbolos convencionais atribuindo-lhes outros sentidos. Brizuela (2006, p. 51), afirma que “aprender e construir conhecimentos são processos que envolvem invenções – produções novas que criamos, utilizando nossas estruturas cognitivas atuais, enquanto tentamos compreender uma situação ou um fenômeno”.

A20) Precisam trabalhar com quantidades conhecidas e resolvem problemas rotineiros, (E1, E10, E16, E6, E12, E18).

Este grupo trabalha com informações que não estão no problema ou fazem operações aritméticas não pertinentes, pois apresentam necessidade de dar resultados ou mostrar uma operação ao resolver um problema. Podemos dizer que

eles resolvem problemas rotineiros, uma vez que fazem as coisas que estão mais acostumados, como montar uma operação e dar um resultado. Para isso, fazem adaptações no problema. Os tipos de adaptações que os estudantes fazem foram organizados por subgrupos.

A20.1) Busca uma informação da realidade para inserir no problema, (E16).

Esses estudantes estão acostumados a resolver problemas ou exercícios que fornecem todas as informações numéricas de modo que eles possam fazer uma operação e em seguida dar a resposta do problema. Para eles, não era possível responder às perguntas sem as quantidades específicas. O estudante E16 considera que os sacos de bolinhas de João e Maria devem conter 30 bolinhas, pois em geral, os sacos de bolinhas de gude completos contêm essa quantidade.

A20.2) Atribui um valor para as quantidades desconhecidas, (E1).

Imagina um valor e considera que João e Maria têm 50 bolinhas. Atribuindo esse valor, o estudante consegue responder às perguntas que levam a comparar as quantidades. Mesmo no item que revela a quantidade de bolinhas de Maria na quarta-feira, o estudante dá continuidade aos cálculos relacionados ao valor 50.

A20.3) Utilizam os dados numéricos do problema como se fossem a quantidade desconhecida, (E18).

Esse estudante considera que João e Maria tinham cinco bolinhas cada um e quando ambos ganharam cinco bolinhas, ficaram com dez bolinhas cada. O valor cinco que é apresentado no problema foi utilizado duplamente, como sendo a quantidade de bolinhas que João e Maria tinham e como a quantidade de bolinhas que eles ganharam.

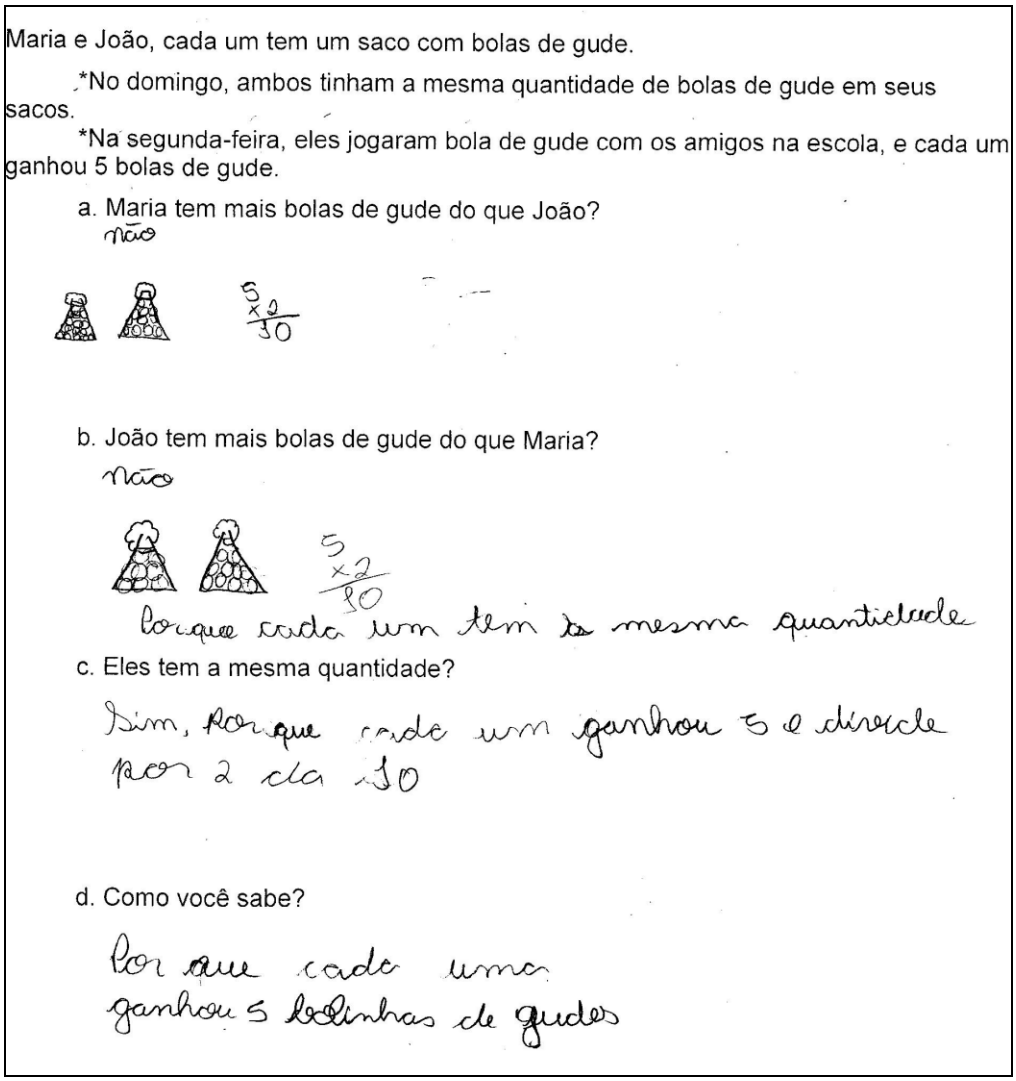
A20.4) Busca determinar os valores não revelados operando com uma informação numérica apresentada no problema, (E6, E10).

Acreditam que uma operação com a informação numérica leve à resposta do problema. Esses estudantes buscam por um resultado, mesmo que o problema não solicite tal informação. Fazendo cinco vezes cinco obteve 25 e considerou que João e Maria tinham 25 bolinhas cada um, (E6).

O estudante E10 recorre ao valor que é apresentado no item ‘h’ para responder aos itens ‘a’, ‘b’, ‘c’, ‘d’, ‘e’, ‘f’ e ‘g’. O valor nove é utilizado para fazer operações e dar respostas nesses itens, apresentando quantidades de bolinhas de João e Maria. Buscar esse valor, desnecessário para responder àquelas perguntas, foi um recurso para lidar com o problema não rotineiro, uma vez que, os poucos valores numéricos apresentados no problema foram utilizados.

A20.5) Desconsidera as quantidades desconhecidas e trabalha apenas com as quantidades conhecidas, (E12).

Para esse estudante João e Maria ganharam cinco bolinhas cada um, portanto, tem quantidades iguais. Em nenhum momento considera as quantidades que João e Maria tinham no domingo. É como se resolvesse um problema do tipo ‘Se João e Maria tem cinco bolinhas cada um, quantas bolinhas os dois tem ao todo?’ Tem necessidade de montar uma conta para mostrar porque respondeu daquela forma. Considera que cinco é a quantidade de bolinhas que João e Maria tinham e dois é a quantidade de pessoas que ganharam as bolinhas. Faz cinco vezes dois, obtendo dez. No entanto, cada um tem cinco bolinhas, o que o leva a responder que cada um tem a mesma quantidade de bolinhas. Vejamos a figura 40 que mostra o registro escrito.



Maria e João, cada um tem um saco com bolas de gude.

*No domingo, ambos tinham a mesma quantidade de bolas de gude em seus sacos.

*Na segunda-feira, eles jogaram bola de gude com os amigos na escola, e cada um ganhou 5 bolas de gude.

a. Maria tem mais bolas de gude do que João?

não

5 x 2 10

b. João tem mais bolas de gude do que Maria?

não

5 x 2 10

Porque cada um tem a mesma quantidade

c. Eles tem a mesma quantidade?

Sim, Porque cada um ganhou 5 e divide por 2 da 10

d. Como você sabe?

Por que cada uma ganhou 5 bolinhas de gudes

Figura 40 - Registro do estudante E12

Ao resolver esse problema, E12 responde adequadamente às perguntas dizendo que nenhum tem mais do que o outro, pois eles têm a mesma quantidade. No entanto, não considera as quantidades desconhecidas, apenas faz referências à quantidade de bolinhas que João e Maria ganharam. Entende que João e Maria ganharam cinco bolinhas cada um e os dois juntos têm dez bolinhas. Nesse caso, nenhum tem mais do que o outro e ambos têm a mesma quantidade. No item ‘c’ é possível observar que o estudante confunde os nomes das operações. Ele se refere à multiplicação embora denomine de divisão.

A21) Não pensam a respeito das respostas obtidas, (E1).

Esse estudante tem como finalidade principal o cálculo e a resposta. Opera por si só, sem pensar a respeito das respostas obtidas. O cálculo é o objeto por si mesmo, não realizando uma análise das respostas. Nesse sentido, qualquer resposta obtida será aceita mesmo que não seja pertinente. O estudante E1 atribui 50 para as quantidades de bolinhas de João e Maria. Embora o problema informe que Maria perdeu três e João sete, E1 subtrai apenas as bolinhas de João. João fica com 43 bolinhas e Maria continua com 50 bolinhas. Ao apresentar a diferença entre João e Maria, faz 50 – 43 obtendo a resposta 13. O cálculo está incorreto e a resposta não é pertinente à situação, pois considerando que João e Maria tinham quantidades iguais, e foi subtraído sete da quantidade de bolinhas de João, seria mais esperado que apresentasse sete como a diferença entre a quantidade de bolinhas dos dois. Vejamos o registro escrito na figura 41.

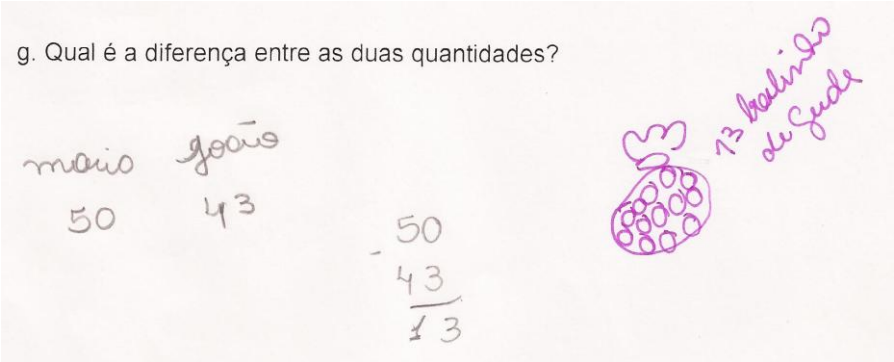


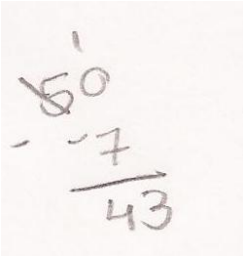
Figura 41 – Registro do estudante E1

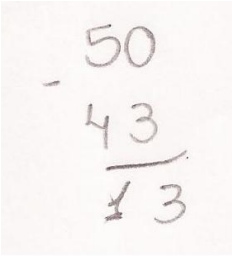
O estudante não subtrai as três bolinhas que Maria perdeu. Mesmo tendo subtraído sete de João, esse valor não consiste na diferença. Na ordem das unidades faz três menos zero, ao invés de dez menos três. Nas dezenas faz cinco menos quatro. Obtém 13 como a diferença entre 50 e 43. Não há reflexão a respeito dos resultados. Se 50 - 7 é 43, como é possível 50 - 43 dar 13? Podemos perceber também uma falta de noção intuitiva com relação à diferença entre essas quantidades. O mesmo estudante efetua uma operação em que 43 - 9 tem como resultado 44. Mais uma evidência de que não há um pensamento a respeito das respostas.

O estudante demonstra um pensamento aritmético restrito a tarefas computacionais mecânicas que se distanciam do contexto do problema.

A22) Falta de justificação em cálculos aritméticos, (E1).

Os estudantes em alguns momentos realizam as operações adequadamente e em outros não. O estudante E1 realiza três operações de subtração, sendo que em uma delas utiliza o método de emprestar corretamente, em outra não utiliza o método de emprestar, obtendo um resultado incorreto e na terceira operação emprega o método de emprestar de forma incorreta.





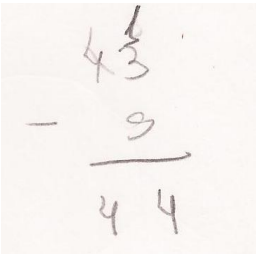


Figura 42 Figura 43 Figura 44
Registros escritos de E1

O estudante ora utiliza uma técnica rotineira, que consiste no método de emprestar, ora utiliza outro procedimento não pertinente. Na operação da figura 43, faz 3 – 0, como se a ordem de subtrair não importasse. Na figura 42, utiliza o método de emprestar adequadamente e na figura 44 utiliza o método de forma incorreta. Atribuímos esse tipo de resolução à falta de compreensão dos algoritmos das quatro operações que resulta em uma flexibilidade de adotar outros procedimentos não pertinentes. A incapacidade de reconhecer os significados das técnicas faz parecer qualquer procedimento legal igualmente inexplicável. Realiza técnicas sem que seja capaz de justificar os procedimentos realizados. Assim, consideramos que o ensino nos anos iniciais deva promover situações em que os estudantes realizem atividades, como justificar e analisar respostas, necessárias para o desenvolvimento do pensamento matemático.

A23) O termo ‘diferença’ suscita significados distintos do significado pretendido, (E5, E6, E7, E8, E10, E11, E16, E17).

A pergunta relativa ao item ‘g’ do problema é ‘Qual é a diferença entre as duas quantidades?’. Embora o item esteja solicitando aos estudantes que

determinem um valor, este grupo não compreende dessa forma. Todos os integrantes deste agrupamento não fazem a operação de subtração e não apresentam o valor numérico que corresponde à diferença entre as quantidades. Eles entendem que devem apresentar as quantidades, ou mesmo explicar por que as quantidades são diferentes. Percebemos que esses estudantes atribuem à palavra diferença um de seus significados que é apresentar as diferenças, ou, o que torna diferente, embora não atribuam o significado aritmético que consiste em calcular o valor que torna as quantidades desiguais. Apresentaremos alguns subgrupos com relação ao tipo de resposta que os estudantes deram ao item ‘g’.

A23.1) Apresentam as quantidades de cada um, resultantes de valores atribuídos, (E6, E16).

Neste subgrupo os estudantes lidam com quantidades específicas para mostrar a diferença entre as quantidades conforme solicitado no item ‘g’ do problema. Eles já lidavam com valores específicos desde o início do problema e apenas apresentam as quantidades de cada um de acordo com os valores que atribuíram e os cálculos que realizaram. Vejamos o registro escrito do estudante E16 na figura 45.

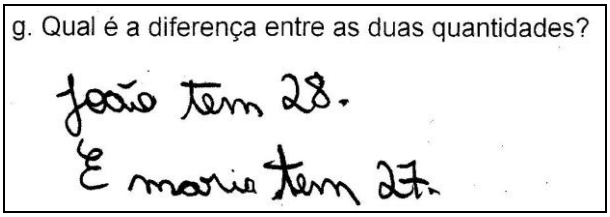


Figura 45 – Registro do estudante E16

O estudante E16 registra as quantidades que acredita que cada um tenha. São valores distintos, portanto essa é a diferença. Isto é, um tem uma quantidade diferente do outro. Logo, faz uma referência a desigualdade, embora não apresente o valor que torna as quantidades desiguais.

A23.2) Apresentam as quantidades de cada um, calculando quantas bolinhas tinham na terça-feira, (E8, E5).

Esses estudantes procuram determinar quantas bolinhas João e Maria tinham na terça-feira, pois acreditam que para apresentar as diferenças é necessário apresentar as quantidades. Nesse caso, precisam descobrir as quantidades de cada um. Esse grupo utiliza a informação numérica da página seguinte do problema para responder o item ‘g’. A informação de que Maria tem nove bolinhas na quarta-feira é utilizada por esses estudantes. Vejamos os registros escritos.

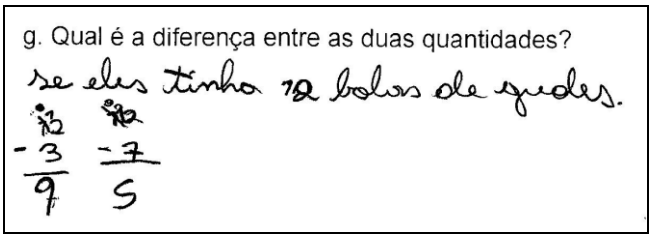


Figura 46 – Registro do estudante E8

O estudante verificou na página seguinte a informação de que Maria tinha nove bolinhas de gude na quarta-feira. Desse modo, conclui que antes de perder três bolinhas, Maria deveria ter 12 e João também. Em seu registro apresenta as duas subtrações que mostram que eles tinham quantidades iguais, sendo que Maria perdeu três e João perdeu sete. Esse estudante buscou mostrar a diferença apresentando as quantidades que João e Maria tinham na terça-feira.

Mesmo sabendo quantas bolinhas João e Maria tinham não determinou a diferença de quatro bolinhas, pois não compreende o termo ‘diferença’ como buscar um valor quantitativo que torna as quantidades desiguais. O estudante E5 também procura determinar a quantidade de bolinhas de João e Maria na terça feira com o objetivo de apresentar que as quantidades eram diferentes. Vejamos na figura 47.

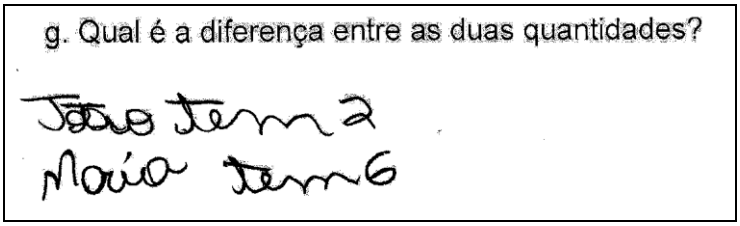
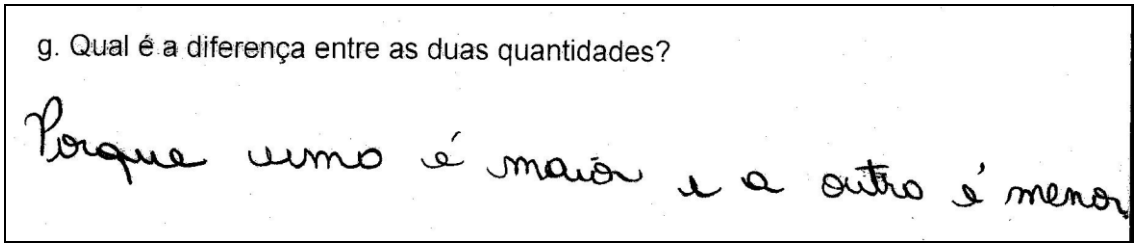


Figura 47 - Registro do estudante E5

E5 também utiliza a quantidade nove. Pelos valores apresentados é possível perceber que ele fez as operações nove menos sete obtendo dois e nove menos três obtendo seis. Assim, apresenta as diferentes quantidades de bolinhas de João e Maria.

A23.3) Explicam porque as quantidades são diferentes, (E7, E11, E17).

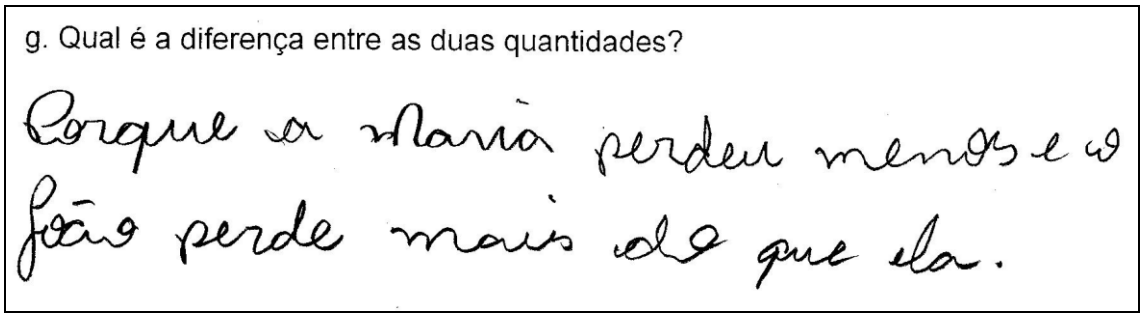
Esses estudantes não lidam com quantidades específicas, portanto, não apresentam as quantidades de cada um, como no subgrupo anterior. No entanto, como todos desse agrupamento, não apresentam o valor que consiste na diferença entre as quantidades. Tentam explicar porque as quantidades são diferentes. Vejamos os registros escritos dos estudantes.


g. Qual é a diferença entre as duas quantidades?

Porque uma é maior e a outro é menor

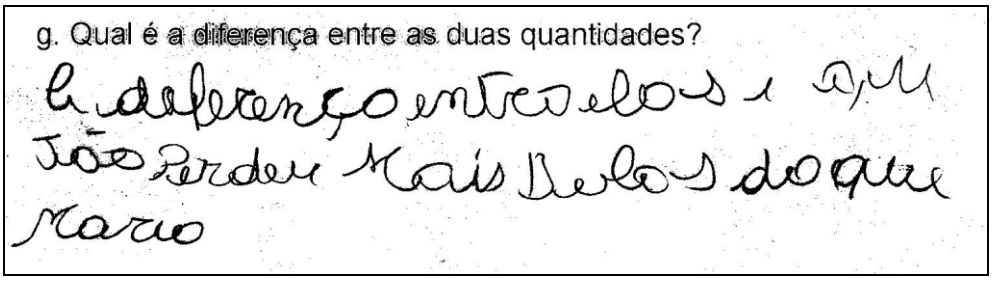
Figura 48 – Registro do estudante E7

O estudante E7 responde como se a pergunta fosse ‘Por que as quantidades são diferentes?’. Faz referência a desigualdade.


g. Qual é a diferença entre as duas quantidades?

Porque a Maria perdeu menos e o João perde mais ele que ela.

Figura 49 – Registro do estudante E11

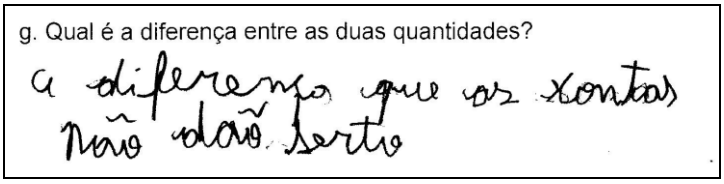

g. Qual é a diferença entre as duas quantidades?

a diferença entre elas é a,M João perdeu mais bolas do que Mario

Figura 50 – Registro do estudante E17

A23.4) A diferença é entendida como resultados contraditórios obtidos, (E10).

Buscando valores para as quantidades de João e Maria o estudante E10 percebe que há algo de errado com os resultados que obtém. Vejamos o registro na figura 51.


g. Qual é a diferença entre as duas quantidades?

a diferença que as contas não dão certo

Figura 51 – Registro do estudante E10

Esse estudante havia determinado que Maria tinha quatro bolinhas, fazendo nove menos cinco. Depois disso faz nove menos três, obtendo seis bolinhas para Maria. Percebemos que para ele é contraditório que Maria tenha quatro bolinhas na segunda e seis bolinhas na terça-feira. Há uma contradição entre os resultados que ele não consegue explicar, o que considera como a diferença.

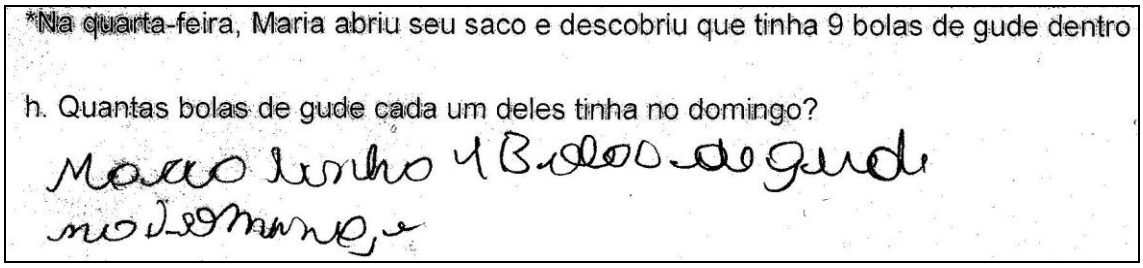
A24) Resolvem equações por métodos intuitivos, (E8, E17).

Os estudantes deste agrupamento fizeram uma das operações pertinentes na equação ‘a+5-3=9’. Nenhum deles realiza todas as operações pertinentes. O que impede os estudantes de resolverem corretamente é o fato de lidarem com uma parte da equação envolvida no problema. Ou resolvem a equação ☐+5=9, ou fazem ☐-7=9. Mesmo assim, esses estudantes acreditam ter determinado a quantidade de bolinhas que João e Maria tinham no domingo.

Resolvem equações por métodos intuitivos sem realizar as operações inversas. O estudante E17 descobre um número que somado a cinco

resulte em nove e o estudante E8 encontra um número que subtraído de três resulte em nove. O método consiste em fazer tentativas para descobrir o número adequado. Em geral, nas equações em que se representa a incógnita com um espaço a ser completado, do tipo ☐+5=9, os estudantes resolvem por tentativa e erro. Desse modo, mesmo estudantes que não conseguem pensar em desfazer por meio de uma operação inversa, poderão encontrar o valor desconhecido. Resolvem mantendo a ordem das operações, embora tenham percebido que o valor desconhecido vem antes do sinal de igual.

Vejamos o registro escrito do estudante E17 na figura 52.


*Na quarta-feira, Maria abriu seu saco e descobriu que tinha 9 bolas de gude dentro

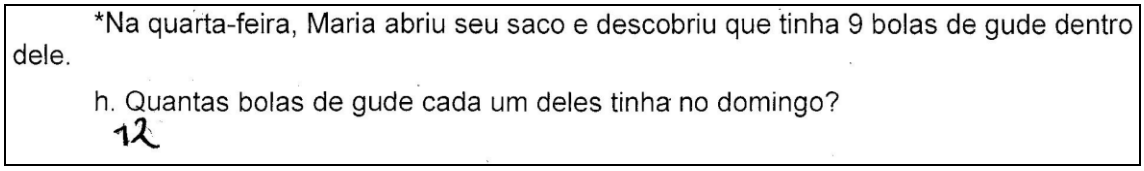
h. Quantas bolas de gude cada um deles tinha no domingo?

Maria tinha 4 Bolas de gude no domingo

Figura 52 – Registro do estudante E17

Para o estudante E17, se Maria havia ganhado cinco bolinhas tinha nove bolinhas na quarta-feira, no domingo Maria tinha quatro bolinhas. Não considerou que Maria ganhou cinco, somente que perdeu três bolinhas.

Vejamos o registro escrito do estudante E8 na figura 53.


*Na quarta-feira, Maria abriu seu saco e descobriu que tinha 9 bolas de gude dentro dele.

h. Quantas bolas de gude cada um deles tinha no domingo?

12

Figura 53 - Registro do estudante E8

O estudante E8 considera que se Maria havia perdido três bolinhas e ficou com nove bolinhas na quarta-feira feira, ela deveria ter 12 bolinhas. Mas 12 era a quantidade de bolinhas de Maria na terça-feira após ter ganhado cinco bolinhas. Dessa forma o estudante calcula quantas bolinhas Maria tinha na terça-feira e afirma que essa era a quantidade de bolinhas que ela tinha no domingo. Leva em consideração parte das informações do problema.

Os estudantes desse agrupamento resolvem equações por métodos intuitivos, sendo este, um aspecto do pensamento algébrico. Demonstram a

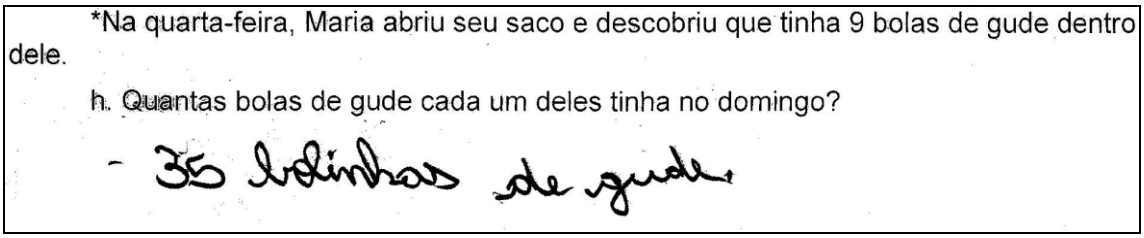
capacidade de pensar analiticamente, um dos objetivos do ensino de álgebra em um nível elementar que compõe o grupo de habilidades do pensamento matemático necessárias para o sucesso em álgebra apresentada por Lew (2004). São capazes de raciocinar com incógnitas, um dos aspectos de pensamento algébrico de acordo com Kieran (1992).

A25) Não percebem a equação apresentada no problema, (E1, E3, E5, E6, E7, E10, E14, E16, E18).

Todos os estudantes deste agrupamento não lidam com a quantidade nove como se fosse o resultado de uma sequência de operações. No problema apresentado, podemos dizer que em uma igualdade, o número nove ocuparia o lado oposto das operações ‘a+5-3’. Vejamos os subgrupos que revelam os motivos pelos quais os estudantes não perceberam a equação apresentada no problema.

A25.1 Acreditam conhecer o valor desconhecido do problema, (E6, E16 e E18).

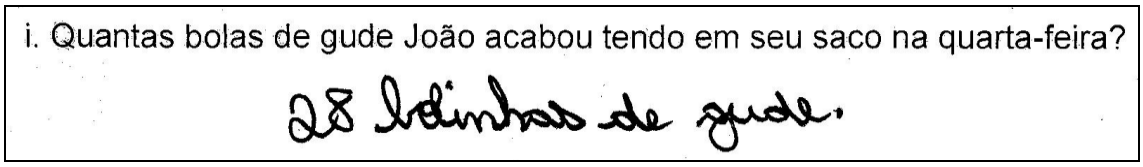
Para os estudantes que compõe este subgrupo, a informação ‘nove’ necessária para resolver os itens ‘h’ e ‘i’ do problema se faz desnecessária, uma vez que os mesmos acreditavam ter conhecimento das quantidades de bolinhas de João e Maria no domingo. Quando iniciaram a resolução do problema, a primeira coisa da qual se ocuparam foi descobrir um valor desconhecido. Assim, não precisaram da informação ‘nove’ ao responder quantas bolas de gude cada um deles tinha no domingo. Os estudantes E6, E16 e E18 desconsideram a informação, sem mencioná-la. Vejamos alguns registros escritos dos estudantes.


*Na quarta-feira, Maria abriu seu saco e descobriu que tinha 9 bolas de gude dentro dele.

h. Quantas bolas de gude cada um deles tinha no domingo?

- 35 bolinhas de gude.

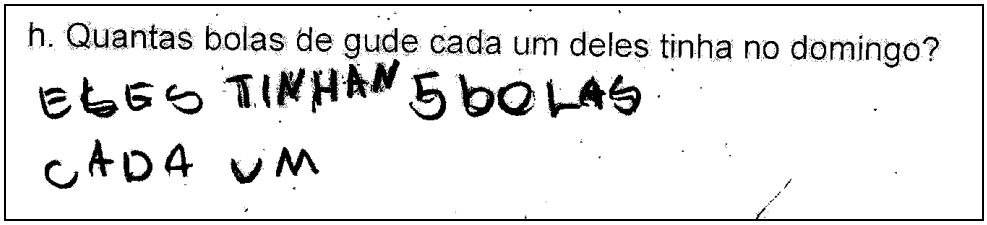
Figura 54 – Registro do estudante E16


i. Quantas bolas de gude João acabou tendo em seu saco na quarta-feira?

28 bolinhas de gude.

Figura 55 – Registro do estudante E16

No início do problema, o estudante E16 considerou que João e Maria tivessem 30 bolinhas de gude e ganhando mais 5 ficaram com 35 cada um. Após perder sete bolinhas João fica com 28 bolinhas na quarta-feira, conforme figura 55. Para esse estudante, essa é a quantidade de bolinhas de João e Maria no domingo. Não houve necessidade de fazer operação com o nove, pois acreditava conhecer o valor a ser determinado. O mesmo ocorre com o estudante E18. Vejamos o registro escrito na figura 56.


h. Quantas bolas de gude cada um deles tinha no domingo?

ELES TINHAM 5 BOLAS CADA UM

Figura 56 – Registro do estudante E18

O estudante E18 desde o início acreditava que João e Maria tinham cinco bolinhas de gude no domingo. O valor desconhecido do problema era, para ele, conhecido, levando-o a reafirmar que ‘eles tinham 5 bolas cada um’.

Os estudantes deste subgrupo não conseguiram perceber o nove como uma pista para descobrir o valor desconhecido, uma vez que acreditavam saber quais eram os valores desconhecidos. Eles não resolveram uma equação. Apenas realizaram cálculos aritméticos com valores atribuídos, que não estavam no problema, obtendo valores particulares.

A25.2) Realizam operações arbitrárias envolvendo o nove, (E1, E7).

Esses estudantes não entendem de que forma o valor ‘nove’, apresentado no problema, pode ser utilizado para encontrar a quantidade

desconhecida. No entanto, realizam alguma operação com o nove, buscando um resultado.

O estudante E1 apresenta uma operação de subtração com o nove, conforme podemos ver no registro escrito abaixo.

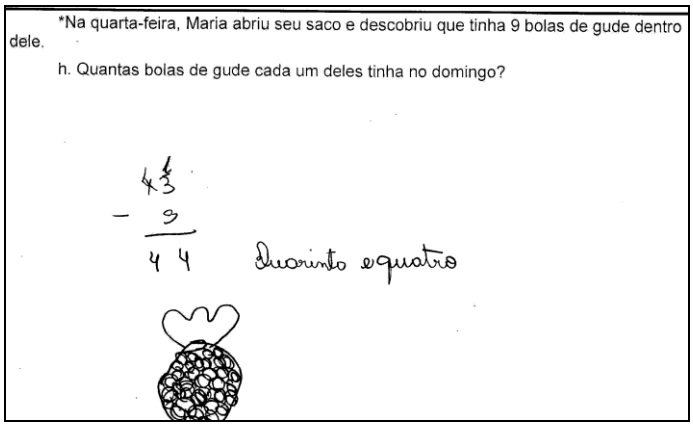


Figura 57 – Registro do Estudante E1

O estudante E1, que vinha resolvendo o problema como se as quantidades fossem conhecidas, considerou que João e Maria tinham 50 bolinhas cada um. Em seguida, determinou que João tivesse 43 bolinhas, pois perdeu sete bolinhas. Na figura 57, verifica-se que o estudante continua a lidar com as quantidades que ele atribuiu ao problema e realiza uma operação com o nove. Faz 43 menos nove obtendo 44.

O estudante E7 realiza uma operação de multiplicação com os dados numéricos do problema, conforme figura 58.

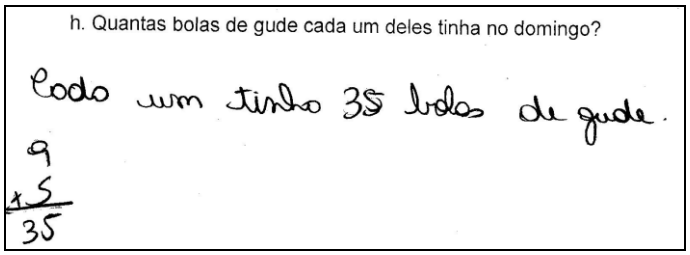


Figura 58 – Registro escrito do estudante E7

Esses estudantes não conseguem entender o nove como o resultados das operações realizadas com o número desconhecido.

A25.3) Trocam a incógnita pelo resultado da equação, (E3, E5, E10, E14).

Os integrantes deste grupo não foram capazes de determinar o resultado correto porque não concebem a ideia de realizar operações em uma ordem inversa. O nove é utilizado para realizar as operações na mesma ordem em que aparecem no problema. Os estudantes E5 e E10 determinaram que João tem duas bolinhas e Maria tem seis bolinhas na terça-feira. De acordo com o problema, João perdeu sete e Maria perdeu três bolinhas. Dessa forma, os estudantes fazem nove menos três obtendo seis e nove menos sete obtendo dois. A ordem dos fatos é desconsiderada, uma vez que João e Maria perderam bolinhas na terça, e na quarta-feira Maria tinha nove bolinhas no saco.

Na quarta-feira João e Maria não tinham a mesma quantidade. No entanto, o estudante utilizou a quantidade nove nas duas operações, considerando que os dois tinham nove bolinhas. É possível perceber que eles tratam o ‘nove’ como o valor desconhecido. Ao fazer isso, lidam com operações a que estão acostumados, em que o valor desconhecido sempre está à direita do sinal de igual, e os valores conhecidos encontram-se à esquerda do sinal do igual. Conseguem pensar em 9-3=☐, ao invés de ☐-3=9, uma vez que esta operação apresenta o resultado e o valor desconhecido à esquerda do sinal de igual. O estudante E14 também faz 9+5-3 obtendo o resultado 11, ao invés de pensar em ☐+5-3=9. Vejamos o registro escrito do estudante E14 na figura 59.

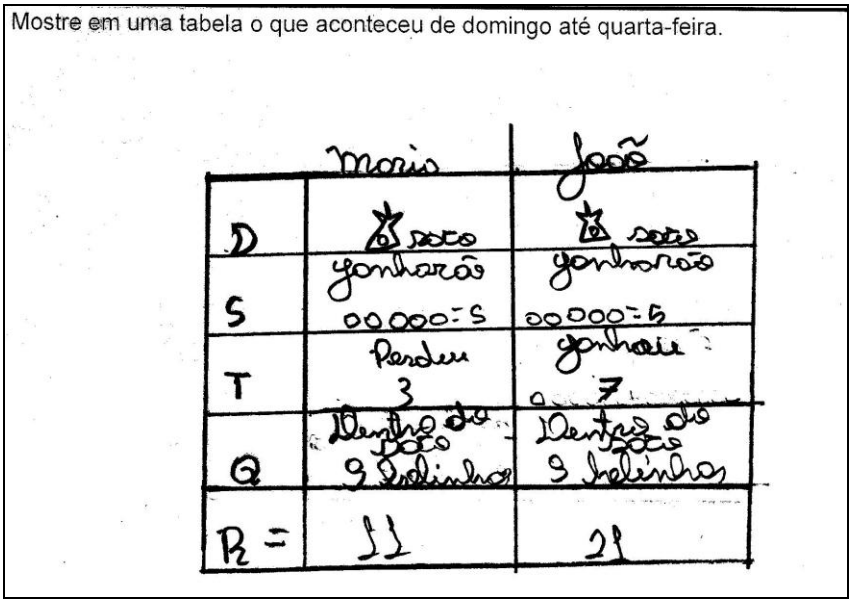
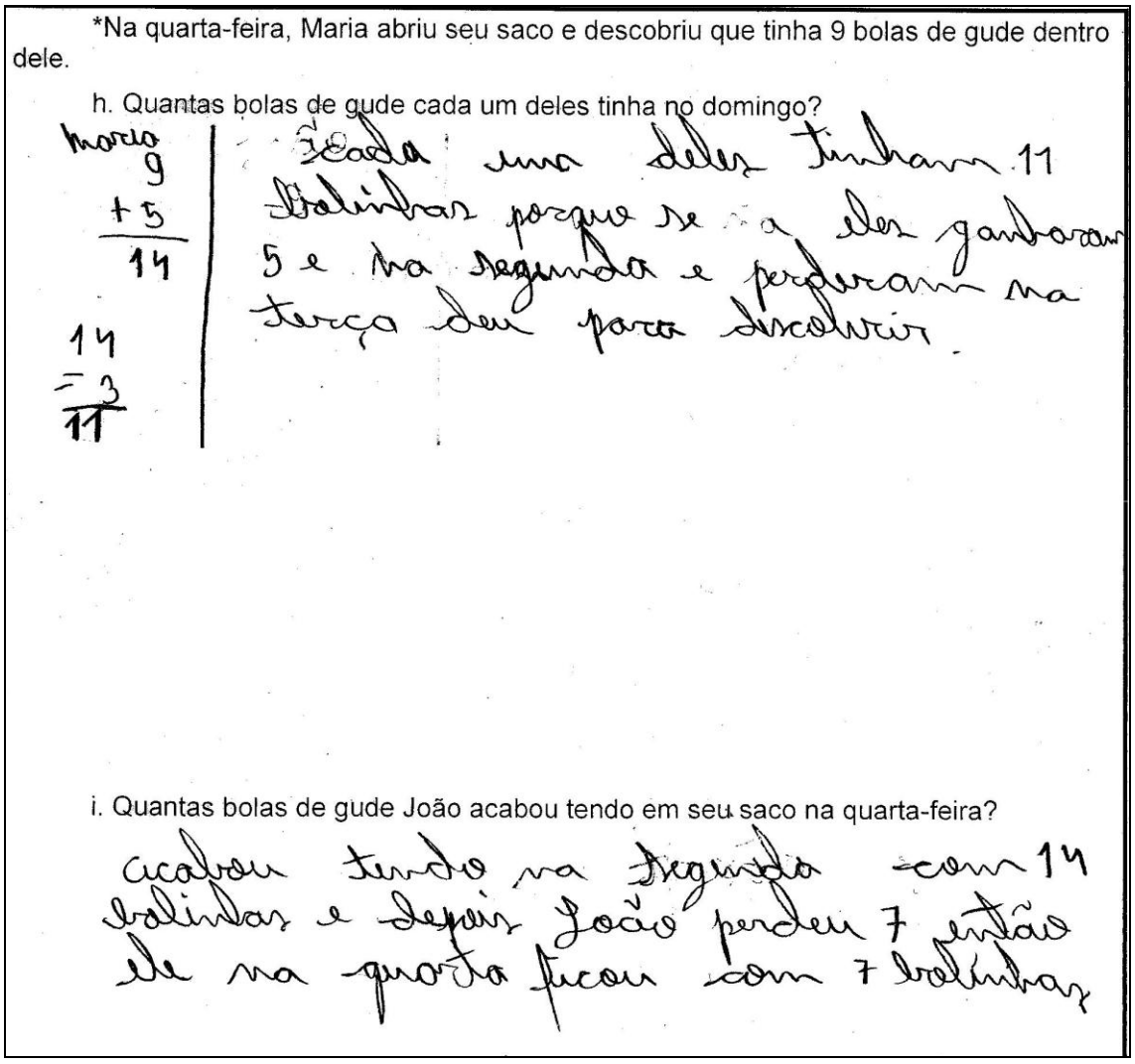


Figura 59 – Registro do estudante E14

O estudante apresenta as informações do problema de forma organizada, obedecendo à ordem dos acontecimentos do domingo até a quarta-feira. Embora ele tenha a ideia correta do tempo em que ocorreram os acontecimentos, e entenda que o nove é a quantidade de bolinhas na quarta-feira, o valor nove não é considerado por ele como o resultado das operações. Ele atribui nove para João e Maria como se fossem as quantidades que eles tinham no domingo, dentro do saco, embora o mesmo tenha sido aberto apenas na quarta-feira. O estudante imaginou que as bolinhas que eles tinham no domingo estivessem guardadas no saco e a quantidade que eles ganharam ficaram fora do saco. Isso se confirma na figura 57, pois escreve ‘dentro do saco’ e a quantidade nove abaixo. Assim, as três bolinhas que Maria perdeu são retiradas das cinco que ela ganhou. No caso de João, como a perda é maior do que o que ele ganhou, ficaria devendo duas bolinhas. Como esses estudantes ainda não trabalham com números negativos, não são capazes de conceber a ideia de fazer cinco menos sete. Possivelmente isso explica o porquê do estudante afirmar que João ganhou sete bolinhas. Para ele, não é possível que ele perca sete bolinhas. Por isso faz 5+7+9 obtendo 21 bolinhas.

O estudante E3 demonstra estar tentando determinar a quantidade de bolinhas que eles tinham no domingo. Faz 9+5-3 obtendo 11. Afirma que cada um tinha 11 bolinhas no domingo. Para determinar a quantidade de bolinhas de João na quarta-feira, faz 11 + 5 – 7 = 7. Vejamos o registro escrito do estudante E3.



*Na quarta-feira, Maria abriu seu saco e descobriu que tinha 9 bolas de gude dentro dele.

h. Quantas bolas de gude cada um deles tinha no domingo?

Marcio
9
+5
14

14
-3
11

Cada uma deles tinham 11 bolinhas porque se a eles ganharam 5 e na segunda e perderam na terça deu para descobrir.

i. Quantas bolas de gude João acabou tendo em seu saco na quarta-feira?

acabou tendo na segunda com 14 bolinhas e depois João perdeu 7 então ele na quarta ficou com 7 bolinhas

Figura 60 – Registro do estudante E3

Ao invés de fazer as operações inversas, o estudante E3 realiza as operações que de fato são apresentadas no problema. Na sequência, o estudante E3 tenta construir uma tabela, atribuindo 11 para o domingo, conforme a figura 61.

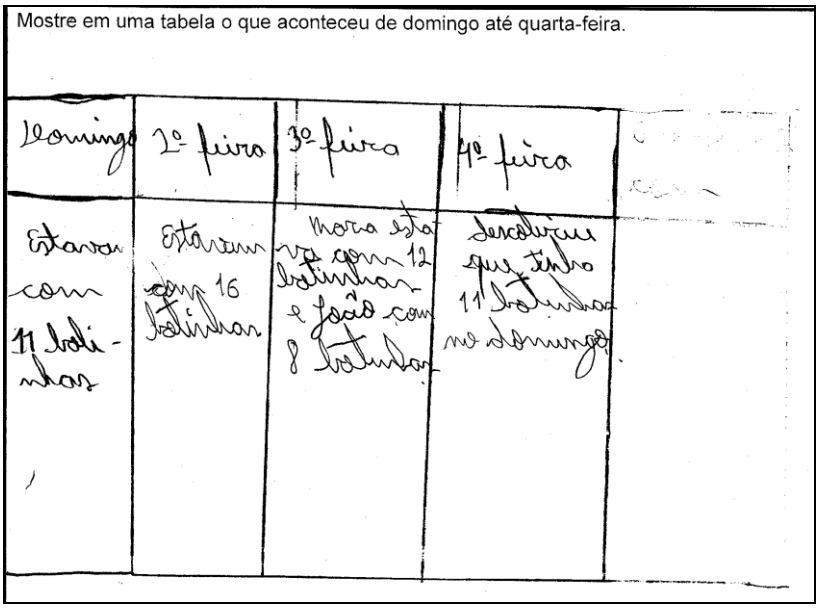


Figura 61 – Registro do estudante E3

Depois que realiza os cálculos e obtém o valor 11, constrói uma tabela partindo da quantidade 11 no domingo. Somou cinco na segunda-feira, obteve 16 e subtraiu três de Maria e sete de João, resultando nas quantidades doze e oito. Não apresenta a quantidade de bolinhas de Maria na quarta-feira. Ao invés disso, prefere dizer que na quarta-feira *'descobriu que tinha 11 bolinhas no domingo'.* Entendemos que o estudante percebeu algo de errado em seus cálculos, verificando que a quantidade de bolinhas de Maria na quarta-feira deveria ser nove.

Os estudantes deste agrupamento não concebem que o valor a ser determinado está do lado esquerdo da igualdade. São evidências de que eles precisam desenvolver o pensamento analítico, uma das habilidades necessárias para o sucesso em álgebra apontada por Lew (2004). Além disso, são indícios de que o ensino para o desenvolvimento de formas algébricas de pensar deve ter foco "sobre operações, bem como suas inversas e a ideia relacionada de fazer/desfazer". (KIERAN, 1992, p. 140 - 141).

A seguir apresentamos um quadro síntese dos agrupamentos.

Quadro 5 - Agrupamentos do Problema três.

Agrupamentos	**Subagrupamentos**	**Estudantes**
A13) Analisam e expressam	A13.1) Justificam adequadamente em linguagem verbal ou simbólica, (E3, E5, E14).	(E3, E5, E7, E8, E14, E17).

relações entre grandezas desconhecidas sem se referir a um valor em particular.	A13.2) Tentam justificar embora não se expressem adequadamente por meio da linguagem, (E7, E8 e E17).	
A14) Não conseguem lidar com igualdades e desigualdades envolvendo valores desconhecidos.	A14.1) Troca uma igualdade por uma desigualdade, (E11). A14.2) Inverte a desigualdade, (E11, E12). A14.3) Não consegue determinar a diferença entre quantidades desconhecidas quanto uma das quantidades aumenta e a outra diminui, (E12).	(E10, E11, E12).
A15) Não compreende as relações/comparações entre quantidades mesmo lidando com valores específicos.		E10.
A16) Percebem e expressam relações entre números específicos.	A16.1) Lidam com o problema buscando um dado que falta. (E16, E18, E6, E12). A16.2) Imagina um valor para uma informação que falta, (E1).	(E1, E6, E16 e E18).
A17) Acreditam que as respostas dos problemas devam conter resultados particulares.		(E16, E18, E1, E6, E10).
A18) Modelam uma situação usando um esquema ou uma figura.		(E14, E5).
A19) Desenvolve/cria uma linguagem sincopada para expressar-se matematicamente.		(E3, E6, E14, E5).
A20) Precisam trabalhar com quantidades conhecidas e resolvem	A20.1) Busca uma informação da realidade para inserir no problema, (E16). A20.2) Atribui um valor para as quantidades desconhecidas, (E1). A20.3) Utilizam os dados numéricos do	(E1, E10, E16, E6, E12, E18).

problemas rotineiros.	problema como se fossem a quantidade desconhecida, (E18). A20.4) Busca determinar os valores não revelados operando com uma informação numérica apresentada no problema, (E6, E10). A20.5) Desconsidera as quantidades desconhecidas e trabalha apenas com as quantidades conhecidas, (E12).	
A21) Não pensam a respeito das respostas obtidas.		(E1).
A22) Falta de justificação em cálculos aritméticos.		(E1).
A23) O termo ‘diferença’ suscita significados diferentes do significado pretendido.	A23.1) Apresentam as quantidades de cada um, resultantes de valores atribuídos, (E6, E16). A23.2) Apresentam as quantidades de cada um, calculando quantas bolinhas tinham na terça-feira, (E8, E5). A23.3) Explicam porque as quantidades são diferentes, (E7, E11, E17). A23.4) A diferença é entendida como resultados contraditórios obtidos, (E10).	(E5, E6, E7, E8, E10, E11, E16, E17).
A24) Resolvem equações por métodos intuitivos.		(E8, E17).
A25) Não percebem a equação apresentada no problema.	A25.1) Acreditam conhecer o valor desconhecido do problema, (E6, E16 e E18). A25.2) Realizam operações arbitrárias envolvendo o 9, (E1, E7). A25.3) Trocam a incógnita pelo resultado da equação, (E3, E5, E10, E14).	(E1, E3, E5, E6, E7, E10, E14, E16, E18).

Fonte: A autora

4 OS MODOS DE PENSAR APRESENTADOS PELOS ESTUDANTES DO 6º ANO

Neste capítulo relatamos a fase final das análises, em que são apresentadas as categorias identificadas e os resultados obtidos discutidos à luz do referencial teórico.

4.1 CATEGORIZAÇÃO E DESCRIÇÃO DAS CATEGORIAS

Iniciamos um processo de classificação dos agrupamentos por critério de semelhança. Conseguimos identificar três categorias que sintetizam e organizam as informações obtidas em nossa pesquisa. Como critério de categorização, buscamos agrupar de acordo com modos de pensar apresentados pelos estudantes do 6º ano. Utilizaremos os códigos C1, C2 e C3 para indicar as categorias.

C1) Modo algébrico de pensar, (A1, A3, A5, A6, A7, A8, A9, A13, A18, A19, A24).

Quadro 6 - Agrupamentos da categoria um.

Agrupamentos	**Estudantes**
A1) Compreendem os conceitos matemáticos envolvidos no problema, (E3, E14, E6).	(E3, E14, E6).
A3) Utilizam símbolos não convencionais e convencionais relacionados a conceitos e propriedades.	(E1, E3, E10, E11, E14).
A5) Resolvem problemas usando proporcionalidade direta.	(E3, E6, E14).
A6) Resolvem equações por operações inversas.	(E3, E6, E14).
A7) Concebem a ideia de relações entre dois conjuntos de objetos variáveis.	(E1, E3, E10, E6, E14, E11, E8, E16, E17, E18).
A7.1) Identificam relações entre dois conjuntos de objetos variáveis.	(E3, E6, E14).
A8) Modelam uma situação problema usando figuras, gráficos, símbolos não convencionais pertinentes e	(E3, E6, E14).

expressões aritméticas.	
A9) Desenvolve/cria uma linguagem adequada para expressar equivalências e relações.	(E1, E3, E6, E14, E10, E11).
A13) Analisam e expressam relações entre grandezas desconhecidas sem se referir a um valor em particular.	(E3, E5, E7, E8, E14, E17).
A13.1) Justificam adequadamente em linguagem verbal ou simbólica.	(E3, E5, E14).
A18) Modelam uma situação usando um esquema ou uma figura.	(E14, E5).
A19) Desenvolve/cria uma linguagem sincopada para expressar-se matematicamente.	(E3, E6, E14, E5).
A24) Resolvem equações por métodos intuitivos.	(E8, E17).

Fonte: A autora.

Descrição da categoria C1: Modo algébrico de Pensar

Esta categoria reúne agrupamentos nos quais identificamos aspectos de pensamento algébrico, definidos como evidências de que os estudantes apresentaram habilidades do pensamento matemático, consideradas necessárias para o sucesso em álgebra, ao resolverem problemas que envolvem conceitos algébricos.

Envolve a apropriação de conceitos matemáticos relacionados a frações ou números racionais quando o estudante se mostra capaz de utilizar os conhecimentos aplicando na resolução de problemas. Inclui a capacidade dos estudantes de aceitarem a ideia de relações entre dois conjuntos de objetos que variam, demonstrando a aceitação do conceito de variável, e a utilização de símbolos não convencionais e convencionais relacionados a conceitos e propriedades.

Apresenta indícios de pensamento dinâmico quando os estudantes resolvem problemas usando proporcionalidade direta ou quando, ao conceberem a ideia de relações entre dois conjuntos de objetos variáveis, identificam as relações, corretamente, entre os dois conjuntos.

Inclui também nessa categoria a capacidade de resolver problemas que poderiam ser modelados por uma equação, uma vez que, envolvem incógnitas, utilizando métodos intuitivos como tentativa e erro ou utilizando operações inversas.

Modelam situações matemáticas por meio de figuras, gráficos, esquemas, símbolos não convencionais pertinentes e expressões aritméticas. Fazem justificações em linguagem verbal ou simbólica e desenvolvem uma linguagem não formal, porém adequada para expressar equivalências e relações identificadas, com caráter sincopado.

Mostram-se capazes de darem respostas gerais ao resolverem problemas envolvendo desconhecidos, ao invés de exemplificar casos particulares, dando indícios da habilidade de generalizar. Para quantidades iguais, no caso de ocorrerem as mesmas transformações em ambos os lados da igualdade, os estudantes são capazes de prever que as quantidades resultantes continuarão iguais. No caso de ocorrerem transformações diferentes, são capazes de constatar que as quantidades passam a ser diferentes, verificando a desigualdade.

C2) Modo de pensar limitado por crenças e rotinas, (A7.2, A7.3, A16, A17, A20, A21, A22, A25).

Quadro 7 - Agrupamentos da categoria dois.

Agrupamentos	**Estudantes**
A7.2) Estabelecem relações entre duas grandezas desde que conheçam a quantidade relacionada com a unidade fracionária,	(E1, E10, E11).
A7.3) Estabelecem relações entre duas grandezas desde que conheçam a quantidade relacionada com a unidade inteira,	(E8, E16, E17, E18).
A10) Utilizam símbolos matemáticos convencionais atribuindo-lhes outros sentidos,	(E3, E5, E7, E8, E10, E11, E16).
A16) Percebem e expressam relações entre números específicos,	(E1, E6, E12, E16 e E18).
A16.1) Lidam com o problema buscando um dado que falta,	(E16, E18, E6, E12).
A16.2) Imagina um valor para uma informação que falta,	(E1).
A17) Acreditam que as respostas dos problemas devam conter resultados particulares,	(E16, E18, E1, E6, E10).

A20) Precisam trabalhar com quantidades conhecidas e resolvem problemas rotineiros,	(E1, E10, E16, E6, E12, E18).
A20.1) Busca uma informação da realidade para inserir no problema,	(E16).
A20.2) Atribui um valor para as quantidades desconhecidas,	(E1).
A20.3) Utiliza os dados numéricos do problema como se fossem a quantidade desconhecida,	(E18).
A20.4) Buscam determinar os valores não revelados operando com uma informação numérica apresentada no problema,	(E6, E10).
A20.5) Desconsidera as quantidades desconhecidas e trabalha apenas com as quantidades conhecidas,	(E12).
A21) Não pensa a respeito das respostas obtidas,	(E1).
A22) Falta de justificação em cálculos aritméticos,	(E1).
A25) Não percebem a equação apresentada no problema,	(E1, E3, E5, E6, E7, E10, E14, E16, E18).

Fonte: A autora.

Descrição da Categoria C2: Modo de pensar limitado por crenças e rotinas

Esta categoria reúne elementos que mostram a falta de aceitação de ideias algébricas presentes nos problemas propostos, como se tratasse de uma parte da Matemática ainda desconhecida. Esses estudantes estão acostumados a pensar que todo problema matemático deva ser solucionado realizando um algoritmo e obtendo um resultado numérico como resposta. Além disso, buscam resultados operando da esquerda para a direita e não é possível fazer previsões e constatações quando não se conhece os valores. Acreditam que as respostas sejam o objetivo principal e que não precisem ser reavaliadas e analisadas.

Alguns estudantes concebem a ideia de relações, mas não são capazes relacionar $\frac{2}{3}$ do peixe a 10 quilos e descobrir o valor relacionado a $\frac{1}{3}$ do peixe. No entanto, se soubessem que $\frac{1}{3}$ do peixe é equivalente a cinco quilos, seriam capazes de determinar que $\frac{2}{3}$ do peixe equivale a dez quilos. Como o problema solicita o peso do peixe ao todo, os estudantes só conseguem pensar em avançar e não em voltar. Assim associam $\frac{1}{3}$ do peixe a dez quilos e $\frac{3}{3}$ do peixe a 30 quilos. O mesmo ocorre com estudantes que não concebem a ideia de frações, mas estabelece relações entre as quantidades. Curiosamente eles consideram que um peixe pesa dez quilos, em vez de associarem dois peixes a dez quilos. Desse modo, estabelecem relações entre grandezas desde que conheçam a quantidade relacionada com a unidade fracionária ou com a unidade inteira.

O estranhamento em lidar com desconhecidos levam estudantes a buscar valores específicos e operar com esses valores ao longo do desenvolvimento do problema. Realizam algoritmos desnecessários, por não conceberem a ideia de resolver um problema utilizando a linguagem verbal e dão respostas com resultados particulares quando deveriam responder de forma geral. O número atribuído é imaginado ou retirado das informações numéricas apresentadas no problema. Ou mesmo, resolvem o problema, como se não se tratasse de desconhecidos, realizando alguma operação com os números que aparecem. Tal é o estranhamento em lidar com desconhecidos que utilizam informações da realidade para inserir no problema, demonstrando acreditar que faltam informações no mesmo.

Também faz parte desta categoria o não reconhecimento de uma equação e da incógnita. Não é aceita a ideia de conhecer o valor a direita do igual e desconhecer um valor que esteja à esquerda do sinal de igual. Dessa forma, os estudantes utilizam o resultado como se fosse a incógnita e realizam as operações na mesma ordem em que aparecem no problema. Outros estudantes não percebem que há uma incógnita, lidando sempre com um valor atribuído.

Utilizam representações convencionais como se fossem símbolos em si mesmos, desconectados de objetos abstratos. Além disso, acreditam que o sinal de igual sirva para indicar que a resposta vem logo à frente.

Verificamos um pensamento unidirecional, voltado para trabalhar com valores específicos e dar resultados particulares.

C3) Pensamento Ingênuo, (A2, A4, A11, A12, A14, A15, A23).

Quadro 8 - Agrupamentos da categoria 3.

Agrupamentos	**Estudantes**
A2) Compreendem parcialmente os conceitos matemáticos envolvendo frações ou não lidam com frações,	(E1, E10, E11).
A12) Não construíram os conceitos matemáticos envolvidos na situação problema,	(E5, E7, E12, E8, E16, E17, E18).
A4) Acrescentam informações ao problema,	(E6, E8, E17, E16, E18).
A11) Fazem adaptações no problema,	(E1, E8, E10, E11, E16, E17, E18).
A23) O termo ‘diferença’ suscita significados diferentes do significado pretendido,	(E5, E6, E7, E8, E10, E11, E16, E17).
A23.1) Apresentam as quantidades de cada um, resultantes de valores atribuídos,	(E6, E16).
A23.2) Apresentam as quantidades de cada um, calculando quantas bolinhas tinham na terça-feira,	(E8, E5).
A23.3) Explicam porque as quantidades são diferentes.	(E7, E11, E17).
A23.4) A diferença é entendida como resultados contraditórios obtidos,	(E10).
A14) Não conseguem lidar com igualdades e desigualdades envolvendo valores desconhecidos,	(E10, E11, E12).
A14.1) Troca uma igualdade por uma desigualdade,	(E11).
A14.2) Inverte a desigualdade,	(E11, E12).

A14.3) Não consegue determinar a diferença entre quantidades desconhecidas quanto uma das quantidades aumenta e a outra diminui,	(E12).
A15) Não compreende as relações/comparações entre quantidades mesmo lidando com valores específicos,	E10.

Fonte: A autora.

Descrição da Categoria C3: Pensamento ingênuo

Denominamos de pensamento ingênuo um conjunto de estratégias extra matemáticas, realizadas pelos estudantes diante de situações novas ou que envolvam conhecimentos que não dominam. Fazem generalizações equivocadas e realizam ações não pertinentes dentro da Matemática na resolução de problemas e em procedimentos computacionais. Não se mostram capazes de discernir entre o que é pertinente fazer e o que não é pertinente. Acrescentam informações ou fazem adaptações no problema a ser resolvido quando se deparam com um conceito que não dominam ou com estranhamentos.

Fazem cálculos computacionais sem justificação, consistindo em procedimentos mecânicos, sem questionamentos, e às vezes realizam procedimentos não pertinentes, por não atribuir significados. Como no caso em que o estudante não se importa com a ordem em que deve seguir para fazer a subtração em uma operação aritmética.

Alguns estudantes não conseguem estabelecer relações, além de não conseguirem lidar de forma pertinente com frações. Os símbolos convencionais apresentados se mostram dissociados dos conceitos, uma vez que, não contribuem para que o estudante tenha sucesso ao resolver o problema. Esses estudantes registram cálculos computacionais aleatoriamente, dissociados do problema a ser resolvido ou do conceito envolvido. Nesse sentido, os símbolos consistem em objetos em si mesmos, e não servem de conexão com os objetos abstratos subjacentes a eles.

A falta de significados se estende para termos que são utilizados em matemática com um significado próprio. Ao invés de utilizarem o significado matemático da palavra ‘diferença’ apresentada no problema, os estudantes mostram as diferenças identificadas por eles. Não se referem à diferença quantitativa e sim

qualitativa. Assim, consideramos como ingenuidade por parte dos estudantes, apresentarem as diferenças e não perceberam que o que foi solicitado era determinar a diferença entre as quantidades.

Também como pensamento ingênuo, identificamos a incapacidade de pensar em comparações, seja com valores desconhecidos ou conhecidos.

4.2 Síntese dos Resultados

Vejamos o quadro síntese que apresenta as categorias e os estudantes envolvidos em cada uma delas.

Quadro 9 - Quantidade de estudantes por agrupamento e por categoria.

Categorias	Agrupamentos	Estudantes	Quantidade	Total
C1) Modo algébrico de pensar.	A1	(E3, E14, E6).	3	12
	A3	(E1, E3, E10, E11, E14).	5	
	A5	(E3, E6, E14).	3	
	A6	(E3, E6, E14).	3	
	A7	(E1, E3, E10, E6, E14, E11, E8, E16, E17, E18).	9	
	A7.1	(E3, E6, E14).	3	
	A8	(E3, E6, E14).	3	
	A9	(E1, E3, E6, E14, E10, E11).	6	
	A13	(E3, E5, E7, E8, E14, E17).	6	
	A13.1	(E3, E5, E14).	3	
	A18	(E14, E5).	2	
	A19	(E3, E6, E14, E5).	4	
	A24	(E8, E17).	2	
	A7.1	(E1, E10, E11).	3	
	A7.3	(E8, E16, E17, E18).	4	
	A10	(E3, E5, E7, E8, E10, E11, E16).	7	

C2) Modo de pensar limitado por crenças e rotinas.	A16	(E1, E6, E12, E16 e E18).	5	13
	A16.1	(E16, E18, E6, E12).	4	
	A16.2	(E1).	1	
	A17	(E16, E18, E1, E6, E10).	5	
	A20	(E1, E10, E16, E6, E12, E18).	6	
	A20.1	(E16).	1	
	A20.2	(E1).	1	
	A20.3	(E18).	1	
	A20.4	(E6, E10).	2	
	A20.5	(E12).	1	
	A21	(E1).	1	
	A22	(E1).	1	
	A25	(E1, E3, E5, E6, E7, E10, E14, E16, E18).	9	
C3) Pensamento ingênuo.	A4	(E6, E8, E17, E16, E18).	5	11
	A11	(E1, E8, E10, E11, E16, E17, E18).	7	
	A23	(E5, E6, E7, E8, E10, E11, E16, E17).	8	
	A23.1	(E6, E16).	2	
	A23.2	(E8, E5).	2	
	A23.3	(E7, E11, E17).	3	
	A23.4	(E10).	1	
	A2	(E1, E10, E11).	3	
	A12	(E5, E7, E12, E8, E16, E17 e E18).	7	
	A14	(E10, E11, E12).	3	
	A14.1	(E11).	1	
	A14.2	(E11, E12).	2	
	A14.3	(E12).	1	

	A15	E10.	1	

Fonte: A autora.

O quadro acima demonstra que dos 13 estudantes participantes da investigação, 12 foram capazes de apresentar alguma ideia algébrica, demonstrando que existe entre eles um modo algébrico de pensar. Analogamente, todos os estudantes participantes da pesquisa não conseguiram realizar alguma atividade algébrica, movidos por crenças a respeito da Matemática e rotinas a que estão acostumados. Também verificamos que uma quantidade considerável, 11 de um total de 13 estudantes, apresentou uma ingenuidade com relação à Matemática, decorrentes de falta de conceitos e significados construídos, que os levam a realizar ações não pertinentes.

A ideia mais comum entre os estudantes do sexto ano, no que se refere a um modo algébrico de pensar, consiste em conceber as relações entre dois conjuntos de objetos variáveis, (A7). Os estudantes tendem a resolver problemas que envolvem equações, utilizando uma ideia funcional e demonstram uma aceitação em lidar com variáveis. Seis estudantes foram capazes de analisar e expressar relações entre grandezas desconhecidas sem recorrerem a valores específicos, (A13). Conseguiram fazer previsões com relação a transformações realizadas em ambos os lados da igualdade, indicando processos de generalização.

De quatro a seis estudantes apresentaram habilidades na criação de uma linguagem adequada, lidando com símbolos convencionais e não convencionais relacionados a conceitos e propriedades, (A3), e demonstrando uma tendência a desenvolver uma linguagem sincopada para se expressarem, (A19).

Seis estudantes conseguiram desenvolver uma linguagem adequada para expressar equivalências e relações, (A13). Assim, concluímos que “estudantes também podem expressar essas relações e propriedades por meio de representações escritas ou notações sem que tenham que fazer uso da linguagem convencional algébrica”, (BRIZUELA, CARRAHER e SCHLIEMANN, 2000, p.2).

Os aspectos que se mostraram com uma frequência menor, de dois a três estudantes, estão relacionados à apropriação do conceito de frações, à capacidade de lidar com proporcionalidade direta, lidar com incógnitas utilizando as operações inversas ou métodos de tentativa e erro, modelar situações e identificar

as relações entre dois conjuntos de objetos variáveis, (A1, A5, A6, A24, A8, A18, A7.1).

Identificamos aspectos de pensamento algébrico, uma vez que apresentaram habilidades do pensamento matemático apresentadas por Lew (2004), como abstração, generalização, modelagem, pensamento analítico, pensamento dinâmico e organização. Os estudantes mostraram serem capazes de envolverem com atividades algébricas como justificações, previsões, generalizações, analisar relações entre quantidades, observar estruturas, resolver problemas, e utilizaram a linguagem como uma ferramenta, sendo essas, as atividades que envolvem formas algébricas de pensar de acordo com Kieran (2004).

Na categoria C2, verificamos que algumas crenças apresentadas pelos estudantes impedem que avancem em álgebra. O agrupamento dessa categoria que apresenta a maior frequência, nove de treze, refere-se a não perceberem a equação apresentada no problema (A25). Esses estudantes revelam a presença de um pensamento unidirecional, isto é, pensam em operações da esquerda para a direita não conseguindo operar em uma ordem inversa. Não acreditam que a partir de um resultado dado possam descobrir um valor desconhecido que se apresenta antes do sinal de igual. Utilizam usam o valor que na equação aparece à direita do sinal de igual como se fosse o valor desconhecido e acreditam que o valor a ser determinado deva estar sempre à direita do sinal de igual.

Sete estudantes compõem o agrupamento que trata da utilização de símbolos convencionais atribuindo algum sentido diferente de seu significado matemático. Trata-se de crenças a respeito do uso dos símbolos matemáticos, em geral, ocasionadas pelo uso rotineiro em aritmética como no caso do sinal de igual. Os estudantes associaram o sinal de igual a um indicador da resposta, e pela frequência com que o fato ocorreu, é possível que eles estejam reproduzindo a forma como esse sinal é apresentado em sala de aula. Esse tipo de situação leva à construção de significados equivocados visto que, mesmo estudantes de 9º ano, não se mostram confortáveis em trabalhar com duas expressões numéricas, uma em cada lado do sinal de igual, sem que cada uma tenha um resultado particular (KIERAN, 1981), por não terem se apropriado do significado relacional do sinal de igual.

Cinco estudantes acreditam que as respostas dos problemas devam conter resultados particulares, (A17). Seis estudantes precisam trabalhar com quantidades conhecidas e resolvem problemas rotineiros, (A20). Seis estudantes são capazes de expressar relações entre números específicos, (A16), demonstrando não conseguirem generalizar e fazer previsões com números desconhecidos.

Sete estudantes não são capazes de descobrir o valor relacionado à unidade quando conhecem o dobro desse valor, (A7.2 e A7.3). Nesse sentido, só conseguem definir uma sequência partindo do primeiro termo e não do segundo termo, sendo esta mais uma evidência de pensamento unidirecional.

Esses estudantes tendem a realizar processos aritméticos em situações que requerem processos algébricos. De acordo com Kieran (2004, p. 140 - 141), esses fatos revelam a necessidade de ajustes no ensino para o desenvolvimento de uma forma algébrica de pensar como, por exemplo:

> Um foco sobre as relações e não apenas sobre o cálculo de uma resposta numérica; 2. Um foco sobre as operações, bem como suas inversas e a idéia relacionada de fazer/desfazer; 3. Um foco em que representam e resolvem um problema, em vez de meramente solucioná-lo; 4. Foco em números e letras, em vez de números por si só; Isso inclui: (i) trabalhar com letras que as vezes podem ser incógnitas, variáveis ou parâmetros; (ii) aceitar fechamento de expressões literais como respostas; (iii) comparar expressões para equivalência baseada em propriedades, em vez de avaliação numérica; 5. Uma reorientação do significado do sinal de igual. [36]

Esses ajustes apenas se fazem necessários no ensino posterior ao ensino de aritmética quando o currículo dos anos iniciais não tem foco no raciocínio algébrico dos estudantes, e não leva em conta que “aritmética tem um caráter algébrico” (CARRAHER e SCHIELMANN, 2003; CARRAHER, SCHLIEMANN e BRIZUELA 2000; SCHLIELMANN, CARRAHER e BRIZUELA, 2007), e que “aritmética e álgebra elementar não são completamente distintas”, (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2003).

---

[36] Tradução nossa de: “1. A focus on relations and not merely on the calculation of a numerical answer; 2. A focus on operations as well as their inverses, and on the related idea of doing / undoing;
3. A focus on both representing and solving a problem rather than on merely solving it; 4. A focus on both numbers and letters, rather than on numbers alone. This includes: (i) working with letters that may at times be unknowns, variables, or parameters; (ii) accepting unclosed literal expressions as responses; (iii) comparing expressions for equivalence based on properties rather than on numerical evaluation; 5. A refocusing of the meaning of the equal sign.” (KIERAN, 1992, p. 140-141)

A estudante A21 demonstra que resolver um problema seja uma tarefa em si mesma, mecânica, dissociada de atividades como pensar a respeito das respostas obtidas.

A falta de justificações em cálculos aritméticos (A22), revela a crença na inexplicabilidade da matemática, ou seja, o hábito de realizarem cálculos matemáticos sem se questionarem a respeito ou sem conhecerem as razões pelas quais realizam tais procedimentos.

Na categoria C3 o pensamento ingênuo é principalmente caracterizado pela falta de apropriação de conceitos matemáticos, verificado nos agrupamentos A2 e A12. Três estudantes compreendem parcialmente os conceitos relacionados a frações e seis estudantes não compreendem os conceitos relacionados a frações, sendo que três deles não concebem a ideia de variável.

Oito dos treze estudantes investigados não tratam o termo 'diferença' de forma quantitativa quando aparece em um problema de matemática, (A23). Assim, não associam esse termo a uma operação de subtração.

Sete estudantes resolvem outro problema, ao invés de resolver o problema proposto (A11), demonstrando a falta de clareza entre o que se é possível de ser realizado e o que não é pertinente. Além disso, a falta de conceitos construídos leva-os a resolver com os recursos disponíveis, ou seja, com os conhecimentos que possuem. Quatro estudantes acrescentam informações que não estavam no problema, (A4). Resolvem como se o texto tratasse de dois peixes, três peixes ou muitos peixes, embora o problema se refira a um único peixe. Possivelmente porque não compreendem a ideia de parte/todo. Para esses estudantes 'dois terços' se refere a dois, três ou mesmo vários peixes.

O ensino de Matemática nos anos iniciais poderia contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico no sentido de levar as crianças a

> [...] (a) pensar a respeito de operações aritméticas como funções em vez de meros cálculos de números específicos; [...] (c) compreender o significado das variáveis, em oposição aos valores instanciados; (d) mudança de pensamento a respeito das relações entre os números específicos e medidas para o pensamento sobre as relações entre conjuntos de números e medidas; (e) mudança de computar respostas numéricas para descrever e representar relações entre variáveis; [...] (g) resolver problemas algébricos usando vários sistemas de representação, como tabelas, gráficos e equações escritas; (h) resolver equações com variáveis em ambos os lados da igualdade; e (i) serem capazes de inter-relacionar sistemas diferentes de representações para funções.[37] (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2007, p. 694)

[37] Tradução nossa de (a) think of arithmetical operations as functions rather than as mere computations on particular numbers; (b) learn about negative numbers; (c) grasp the meaning of variables, as opposed to

É possível perceber que os estudantes formam crenças a respeito do que seja Matemática e que essas crenças estão muito associadas ao modo como praticam a Matemática em seu cotidiano escolar. Assim, a realização de atividade algébrica nos anos iniciais poderia fazer com que os estudantes desenvolvessem uma ideia mais ampla a respeito da Matemática e poderiam se envolver com atividades do pensamento matemático, as quais não são possíveis em um currículo voltado apenas para a aritmética.

---

instantiated values; (d) shift from thinking about relations among particular numbers and measures toward thinking about relations among sets of numbers and measures; (e) shift from computing numerical answers to describing and representing relations among variables; (f) build and interpret graphs of linear and non-linear functions; (g) solve algebraic problems using multiple representation systems such as tables, graphs, and written equations; (h) solve equations with variables on both sides of the equality; and (i) are able to inter-relate different systems of representations for functions

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa buscou responder à pergunta: "Q*ue aspectos de pensamento algébrico e da linguagem podem ser manifestados por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas em um Experimento de Ensino?"*

Na busca de respostas, apresentamos uma fundamentação teórica a respeito de álgebra e pensamento algébrico, elencando pontos importantes a respeito da história da álgebra e pensamento algébrico, da educação algébrica, bem como, as caracterizações de pensamento algébrico. Utilizamos procedimentos metodológicos de coleta de dados baseados no Experimento de Ensino e procedimentos de análise à luz da Análise de Conteúdo.

Após o processo de fragmentação e reorganização das informações coletadas, foi possível identificar alguns aspectos de pensamento algébrico manifestados por estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas em um Experimento de Ensino, a saber:

- Concebem a ideia de relações entre dois conjuntos de objetos variáveis;
- Resolvem problemas que envolvem equações utilizando o conceito de variável;
- Desenvolve/cria uma linguagem sincopada para expressar-se matematicamente;
- Desenvolve/cria uma linguagem adequada para expressar equivalências e relações;
- Utilizam símbolos não convencionais e convencionais relacionados a conceitos e propriedades;
- Compreendem os conceitos matemáticos envolvidos no problema;
- Resolvem problemas usando proporcionalidade direta;
- Resolvem equações por meio de operações inversas;
- Resolvem equações por tentativa e erro;
- Identificam relações entre dois conjuntos de objetos variáveis;
- Analisam e expressam relações entre grandezas desconhecidas sem recorrerem a valores específicos;

- Fazem justificações em linguagem verbal ou simbólica quando lidam com desconhecidos;
- Modelam uma situação problema utilizando figuras, gráficos, esquemas, símbolos não convencionais pertinentes e expressões aritméticas.

Dando continuidade à análise, após construirmos alguns agrupamentos, iniciamos um processo interpretativo que culminou na identificação de três categorias. Essas categorias, detalhadas na seção 4.1, organizam e sintetizam as informações de nossa pesquisa e se referem aos modos de pensar apresentados pelos estudantes do sexto ano:

- C1 - Modo algébrico de pensar inclui;
- C2 - Modo de pensar limitado por crenças e rotinas;
- C3 - Pensamento Ingênuo.

A ideia de estabelecer relações entre dois conjuntos de objetos variáveis mostrou-se bem aceita pelos estudantes do sexto ano. Uma quantidade considerável demonstrou a capacidade de utilizar símbolos novos e de organizar esses símbolos de forma a expressar-se matematicamente. Analogamente, demonstraram não lidar adequadamente com símbolos convencionais por não terem se apropriado de seu significado socialmente compartilhado.

O ensino dos anos iniciais pode proporcionar aos estudantes oportunidades de avançar no desenvolvimento do pensamento algébrico rompendo com algumas crenças a respeito da Matemática, que perduram em anos posteriores. As experiências diversificadas podem ser um maneira de evitar conclusões equivocadas.

Para que estudantes avancem no desenvolvimento do pensamento algébrico acreditamos que seja necessário:

- Compreender a ideia de operações inversas;
- Determinar valores desconhecidos que apareçam à esquerda do sinal de igual;
- Compreender que valores conhecidos podem aparecer à direita do sinal de igual;
- Pensar em fazer e desfazer;
- Compreender o significado relacional do sinal de igual;

- Lidar com símbolos como ferramentas e não como objetos em si mesmos;
- Darem respostas gerais ao invés de apenas respostas particulares;
- Compreender que resolver problemas não se resume em fazer uma conta, trabalhar com valores conhecidos e dar respostas particulares;
- Fazer análises das respostas obtidas e justificar cálculos.

Com base nesses resultados, concluímos que embora os estudantes do 6º ano sejam capazes de pensar algebricamente, se mostram influenciados por uma forma de fazer matemática rotineira em que a reprodução se sobrepõe à reflexão. Uma forma de aprender matemática fazendo “sempre” da mesma maneira não exige a realização de atividades de análise e justificação. Os aspectos de pensamento algébrico apresentados por esses estudantes consistem em um conhecimento intuitivo, pouco consolidado, que poderia ser mais explorado pelo currículo das séries iniciais. Além disso, os estudantes devem lidar com a Matemática racionalmente ao invés de ingenuamente. Isso envolve principalmente a construção de conceitos matemáticos básicos nos anos iniciais de forma que possam ter mais sucesso na resolução de problemas. Esperamos que este trabalho possa contribuir para isso.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3ª ed. Lisboa: Edições 70, 1977.

BAUMGART, J. K. **História da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1992.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BOGDAN, R. C; BIKLEN, S.K. **Investigação qualitativa em educação**. 1ª ed. Porto: Porto Editora, 1994.

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org). **As ideias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995. p. 23-37.

BRASIL. Ministério de Educação e do Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais:** terceiro e quarto ciclos: Matemática / Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF, 1998.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança: explorando notações.** 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SCHLIEMANN, A.D., CARRAHER, D.W., BRIZUELA, B., PENDEXTER, W. Solving algebra problems before algebra instruction. **Second Early Algebra Meeting**. University of Massachusetts at Dartmouth/Tufts University, 1998.

BRIZUELA, B., CARRAHER, D., SCHLIEMANN. **Mathematical notation to support and further reasoning ("to help me think of something")**. Symposium paper, 2000 NCTM Research Pre-session Meeting, 18 p. 1998.

BRIZUELA, B.M.; SCHLIEMANN, A.D. **Fourth graders solving equations**. Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Honolulu, HI, July, 2003.

CARRAHER, D.W., SCHLIEMANN, A.D., & BRIZUELA, B.B. **Algebra in the Early Grades**. Hands On!, Spring 2001, v. 24, n. 1, p.8-11, 2001a.

CARRAHER, D.W., SCHLIEMANN, A.D., & BRIZUELA, B.B. **Can Young Students Operate on Unknowns?** Proceedings of the XXV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands (invited research forum paper), v. 1, p. 130-140, 2001b.

CARRAHER, D.W., SCHLIEMANN, A.D., & BRIZUELA, B.B. Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education,** v. 37, n. 2, p. 87-115, 2006.

CARRAHER D. W.; SCHLIEMANN A. D. Early algebra and algebraic reasoning**.** In: LESTER, F. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte, USA: NCTM e IAP, 2007. p. 669-705.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, p. 25-41, 1991.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues.2. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristóvão2.doc>. Acesso em 03 out. 2005.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A; MIORIN, M. A. Contribuições para um repensar... A educação algébrica elementar. **Pro-prosições**, v. 4, n 1, p. 78 – 91, 1993.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA. E; ROMBERG, T. (Orgs). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Erlbaum, p. 133 – 155, 1999.

KAPUT, J. J. Linking representations in the symbol systems of algebra. In: WAGNER, S.; KIERAN, C. (Eds). **Research issues in the learning and teaching of algebra**. Research agenda for mathematics education, v. 4, p. 167-194, 1989.

KIERAN, C. Concept associated with the equality symbol. **Educational studies in Mathematics**, v. 12, p. 317-326, 1981.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** New York: Macmillan, 1992, p. 390-419.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

KIERAN, C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels**.** In: LESTER, F. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte, USA: NCTM e IAP, 2007. p. 707-762.

LEW, H. C. Developing Algebraic Thinking in Early Grades: Case Study of Korean Elementary School Mathematics. **The Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 88-106, 2004.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o Século XXI**. 6ª ed. São Paulo: Papiros, 1997.

PONTE, J. P., BRANCO, N., & MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009

RADFORD, L. The historical origins of algebraic thinking. In: **Perspectives in School Algebra.** Sutherland, R.; Rojano, T; Bell, A e Lins, R; Dordrecht /Boston/ London: Kluwer, pp. 13-36, 2001.

SFARD, A; LINCHEVSKI, L. The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra. **Educational Studies in Mathematics**, v 26, p. 191-228.1994.

SFARD, A; LINCHEVSKI. Between arithmetic and algebra: in the search of a mission link the case of equations and inequalities. **Rend. Sem. Mat. Univ. Poi. Torino,** v. 52, n. 3, 1994.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In: LESH, R; KELLY, A. E. (Eds). **Research design in mathematics and science education.** Hillsdale, NJ: Erbaum, p.267-307. 2000.

USISKIN, Z. Concepções sobre a algebra da escola média e utilizações das variáveis. In A. F. COXFORD & A. P. SHULTE, A. P. (Orgs). **As ideias da algebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9 - 22)

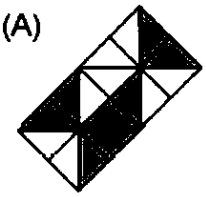
ANEXOS

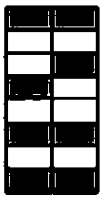
ANEXO A
QUESTÕES DA PESQUISA PITOLO

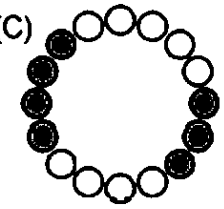
Pedro Américo e Cândido Portinari foram grandes pintores brasileiros e Leonardo da Vinci foi um notável artista italiano. Pedro Américo nasceu em 1843. Já Leonardo nasceu 391 anos antes de Pedro Américo e 451 anos antes de Portinari. Em que ano Portinari nasceu?

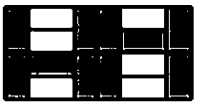
(A) 1903
(B) 1904
(C) 1905
(D) 1906
(E) 1907

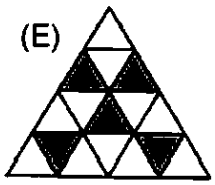
Cada uma das figuras está dividida em 16 partes iguais. Em qual delas a parte cinza corresponde a $\frac{5}{8}$ da área total?

(A)


(B)


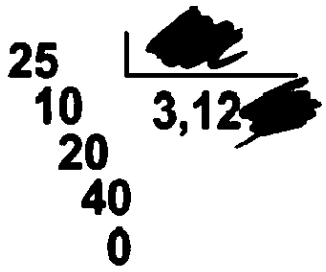
(C)


(D)


(E)


Lucinda manchou com tinta dois algarismos em uma conta que ela tinha feito, como mostra a figura. Qual foi o menor dos algarismos manchados?

(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8



Veja na tabela o resultado da pesquisa feita em um bairro de uma grande cidade sobre os modos de ir ao trabalho.

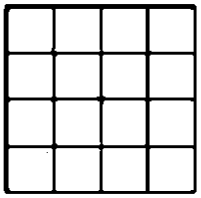
ônibus		
carro		
a pé		
bicicleta		
= 500 entrevistados		

Com base nessa tabela, qual é a alternativa correta?

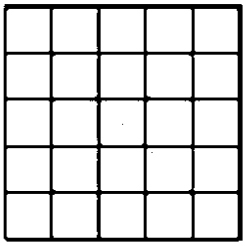
(A) Metade dos entrevistados vai a pé ao trabalho.
(B) O meio de transporte mais utilizado pelos entrevistados para ir ao trabalho é a bicicleta.
(C) 50% dos entrevistados vão ao trabalho de ônibus.
(D) A maioria dos entrevistados vai ao trabalho de carro ou de ônibus.
(E) 15% dos entrevistados vão ao trabalho de carro.

Observe que no tabuleiro 4 x 4 as duas diagonais cortam 8 quadradinhos. Já no tabuleiro 5 x 5, as duas diagonais cortam 9 quadradinhos. Em qual tabuleiro as diagonais cortam 77 quadradinhos?

(A) 35 x 35
(B) 36 x 36
(C) 37 x 37
(D) 38 x 38
(E) 39 x 39

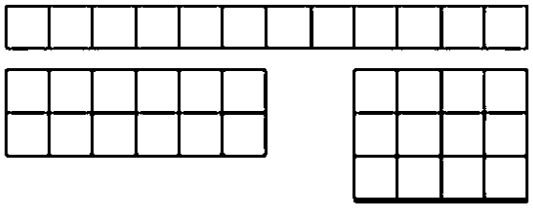


4 x 4



5 x 5

A figura mostra os três retângulos diferentes que podem ser construídos com 12 quadradinhos iguais.



Quantos retângulos diferentes podem ser construídos com 60 quadradinhos iguais?

(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

Usando todo o suco que está numa jarra é possível encher 9 copos pequenos e 4 copos grandes ou então encher 6 copos pequenos e 6 copos grandes. Quantos copos grandes é possível encher usando todo o suco da jarra?

(A) 8
(B) 9
(C) 10
(D) 11
(E) 12

Um fazendeiro perguntou ao seu filho. *Quantos pés eu posso contar quando eu estou tirando leite de uma vaca?* O menino respondeu: *São 6, sendo 4 da vaca e 2 seus.* O pai então disse: *Na verdade são 9, porque você esqueceu de contar os 3 do banquinho em que eu fico sentado.* A seguir o pai propôs outro problema ao seu filho. *Num curral há algumas pessoas, vacas e banquinhos, pelo menos um de cada. O número total de pés é 22 e o de cabeças é 5. Quantas vacas há no curral?* O menino resolveu o problema corretamente. Qual foi sua resposta?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

ANEXO B
TERMOS DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE

CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nome: ADEMIR DE CARLI

Identidade: 3324240-9

CPF: 554 715 799 68

Endereço: RUA FRANCISCO CATOLINO, 151

Telefone: (44) 9997-2710

E-mail: ADEDECARLI @ SEED.PR.GOV.BR

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento de dissertação de mestrado a respeito de álgebra e pensamento algébrico dos estudantes, sob responsabilidade da Prof(ª) Edilaine Pereira da Silva, com a orientação da Prof(ª) Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, declaro que consinto que a coleta de informações seja feita na escola sob minha direção, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área garantido o anonimato no relato.

Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à dissertação que será desenvolvida.

Palotina, 04 /03 /2012 .

ADEMIR DE CARLI
Diretor - RG 3324240-9
Res.: 6012/2011 - DOE 06/01/2012

NOME: _____

ASS.: _____

TERMO DE
CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nome: ADEMIR DE CARLI

Identidade: 3324240-9

CPF: 554715799 68

Endereço: RUA FRANCISCO ORTOLAN, 151

Telefone: (44) 9997-2710

E-mail: ADEDECARLI@SEED.PR.GOV.BR

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento de dissertação de mestrado de título "Aspectos do pensamento algébrico de estudantes do 6º ano do ensino fundamental em um Experimento de Ensino", sob responsabilidade da Prof(ª) Edilaine Pereira da Silva, com a orientação da Prof(ª) Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, como diretor do colégio, declaro que consinto que a mesma utilize parcial ou integralmente os registros escritos dos estudantes da turma do 6º ano B que participaram da pesquisa, matriculados nesta escola, podendo divulgá-los em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que ele seja citado apenas como participante da pesquisa, garantido o anonimato no relato da pesquisa.

Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

ADEMIR DE CARLI
Diretor - RG 3324240-9
Res.: 6012/2011 - DOE 06/01/2012

Palotina, 04/03/2012.

NOME:_____

ASS.:_____