Universidade Estadual de Londrina

DANIELE PERES DA SILVA

CARACTERIZAÇÕES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM TAREFAS REALIZADAS POR ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL I

Londrina
2013

DANIELE PERES DA SILVA

CARACTERIZAÇÕES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM TAREFAS REALIZADAS POR ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL I

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S586c Silva, Daniele Peres da.
Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do ensino fundamental I / Daniele Peres da Silva. – Londrina, 2012.
163 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Matemática (Ensino fundamental) – Estudo e ensino – Teses. 2. Educação matemática – Teses. 3. Álgebra – Formação de conceitos – Teses. 4. Lógica simbólica e matemática – Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

DANIELE PERES DA SILVA

CARACTERIZAÇÕES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM TAREFAS REALIZADAS POR ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL I

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina - PR

____
Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares
UTFPR – Londrina - PR

____
Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina – PR

Londrina, 2013.

O mundo é como um espelho que devolve a cada pessoa o
reflexo de seus próprios pensamentos. A maneira como
você encara a vida é que faz toda a diferença.

“Luís Fernando Veríssimo”

Dedico este trabalho a Deus, o qual me concebe toda sabedoria e a todos que contribuíram para a realização desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida e por ter me privilegiado com tantas bênçãos. Neste momento, sou grata a esta etapa que concluo e a nova fase que se inicia.

Agradeço ao apoio de minha família, em especial a minha mãe Maria de Fátima, por todo o incentivo, força e paciência nas horas de desespero. Certamente, sem ela não teria condições de realizar mais este objetivo alcançado.

Também não poderia deixar de agradecer ao meu namorado Vitor Hugo, por toda paciência e compreensão nos momentos de angústia, estresse e principalmente nas tardes de sábado e domingo em que me ausentei por conta dos estudos. Obrigada por me amparar e me entender nesta caminhada.

Agradeço a minha orientadora Angela Marta, porque confiou em mim desde a entrevista para entrar no mestrado em Educação Matemática. Sou grata por toda paciência, dedicação apoio, amizade, palavras de sabedoria e por me ajudar a realizar um dos meus sonhos.

Alessandra, Débora, Edilaine e Laís, obrigada por todo o auxílio, apoio, motivação, pelas prazerosas conversas durante o grupo de estudos, durante as aulas, os deliciosos lanches que compartilhamos... Obrigada porque vocês também contribuíram com leituras (sugestões) e proveitosas discussões a respeito de meu trabalho. Sou grata pela amizade de vocês. Também quero lembrar meu amigo Emerson, das conversas e desabafos pelo *facebook* e das engraçadas viagens para Apucarana.

Às professoras Lourdes Werle e Maria Tereza Carneiro Soares, por fazerem parte da banca examinadora e terem contribuído com importantes sugestões para o refinamento da pesquisa.

Aos professores do programa, os quais colaboraram para meu crescimento pessoal e intelectual.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que diretamente e indiretamente cooperaram para a melhoria de minha pesquisa e a realização deste sonho. A todos os amigos e colegas que fiz no mestrado, meus agradecimentos.

SILVA, Daniele Peres. **Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I**. 2011. 163 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2011.

RESUMO

Tomando a *Early Algebra* como área de pesquisa, a qual visa uma abordagem para o ensino e aprendizagem da álgebra inicial, esta investigação apresenta uma análise das produções escritas, atitudes, indagações, enfim, o comportamento de crianças durante a resolução de tarefas. O objetivo foi identificar, analisar e discutir características do pensamento algébrico em oito tarefas aplicadas a estudantes do Ensino Fundamental I. Mais especificamente, buscamos compreender como trinta e cinco estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental I de uma escola pública do município de Apucarana-PR lidam com tarefas da *Early Algebra*. Para organização e interpretação dos dados, empregamos procedimentos à luz da Análise de Conteúdo, sendo esta uma modalidade de pesquisa qualitativa. Por meio das respostas apresentadas e das indagações e afirmações dos estudantes durante a resolução das tarefas, o estudo mostrou que, embora as resoluções nem sempre estivessem corretas, estas evidenciam indícios de pensamento algébrico, uma vez que os participantes desse estudo perceberam e tentaram expressar as estruturas aritméticas das tarefas, assim como, descreveram seus processos de pensamento. Portanto, esses estudantes do Ensino Fundamental I têm condições de lidar e de desenvolver aspectos relacionados ao pensamento algébrico, mesmo não apresentando uma linguagem simbólica algébrica.

Palavras chave: Educação matemática. Pensamento algébrico. *Early algebra*. Anos iniciais.

SILVA, Daniele Peres. **Characterizations of algebraic thinking tasks performed by students of Primary School I**. 2011. 163 p. Dissertation (Master's degree in of Teaching Science and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2011.

ABSTRACT

Taking Early Algebra as an area of research, which seeks an approach to teaching and learning of algebra early, this research presents an analysis of written productions, attitudes, questions, finally, the behavior of children during the resolution of tasks. The goal was to identify and analyze characteristics of algebraic thinking in tasks applied to students of Elementary School I. More specifically, we understand as thirty-five students in the 5th year of elementary school to a public school in the city of Apucarana-PR deal with tasks of Early Algebra. For organizing and interpreting data, employ procedures in light of Content Analysis, which is a form of qualitative research. Through the responses presented and questions and statements of students while solving tasks, the study showed that although the resolutions were not always correct, they show signs of algebraic thinking, since the participants in this study perceived and tried to express the structures arithmetic tasks, as well as, described their thought processes. Therefore, these students of Elementary School I have to deal with conditions and issues related to developing algebraic thinking, while not presenting a symbolic algebraic language.

Keywords: Mathematics education. Algebraic thinking. Early algebra. Early grades.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Uma questão que tem levantado discussão entre pesquisadores matemáticos é saber em que momento da escolaridade deve-se iniciar o desenvolvimento do pensamento algébrico[1]. Araújo (1999) observa que pesquisadores estão preocupados com a educação algébrica que se tem proporcionado aos estudantes, afirmando que talvez fosse apropriado iniciar a educação das crianças no pensamento algébrico desde os ciclos iniciais.

Da mesma forma, autores como (CARPENTER, FRANKE e LEVI, 2003; SCHLIEMANN e BRIZUELA, 2004; BLANTON e KAPUT, 2005; LINS e KAPUT, 2004; CARRAHER et al., 2006) têm recomendado a conexão da aritmética com a álgebra já nas primeiras séries do Ensino Fundamental. Suas pesquisas têm registrado que crianças desde os nove e dez anos de idade podem desenvolver o pensamento algébrico, utilizar símbolos para generalizar relações aritméticas ou padrões geométricos, bem como empregar a noção algébrica para representar alguma relação.

É nessa perspectiva que segue esta pesquisa, tendo como foco de estudo o pensamento algébrico manifestado por estudantes de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública da cidade de Apucarana-PR[2], composta por 37 estudantes. Esta pesquisa tem por objetivo investigar como essas crianças, as quais não tiveram contato com uma linguagem simbólica algébrica[3], lidam com tarefas[4] que podem promover o desenvolvimento desse pensamento, analisando as

---

[1] Vale ressaltar que na literatura estudada para este trabalho, alguns autores fazem menção ao termo “pensamento algébrico”, entretanto, outros utilizam “raciocínio algébrico”, sendo estes termos utilizados pelos autores com a mesma ideia. Deste modo, ao longo deste estudo empregamos o termo “pensamento algébrico”.

[2] Escola participante do Programa Observatório da Educação – CAPES – Projeto Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática – UEL, o qual será detalhado posteriormente.

[3] Referenciamos ao termo “linguagem simbólica algébrica” como: a utilização de letras para generalizar uma situação-problema; letras como incógnita, variáveis; cálculo algébrico, como por exemplo, $(a + b)^2= (a^2+ 2ab + b^2)$, etc. (FIORENTINI e LORENZATO, 2006). Enfim, consideramos que um estudante tem contato ou habilidades com este tipo de linguagem se, por exemplo, escrever a equação $3x + 6 = 4$ após ter lido “o triplo de um número somado a seis unidades resulta em quatro unidades”.

[4] De acordo com Ponte (1997), as tarefas são aquelas em que os estudantes se envolvem, e podem ser do tipo problemas, investigações, projetos, exercícios, ensaios, relatórios, etc., sendo estas, na maioria das vezes, apresentadas pelo professor. Já as atividades, que podem ser mentais ou físicas, se referem ao estudante, àquilo que ele pratica durante um processo de ensino-aprendizagem. Assim, consideramos que a tarefa é uma indicação a qual pode levar um indivíduo a desempenhar a atividade por meio de ações.

atitudes, indagações, produções escritas, enfim, o envolvimento desses estudantes durante a aplicação de oito das tarefas propostas.

Para atingir esse objetivo buscou-se a seguinte questão norteadora: *que características de pensamento algébrico são manifestadas por estudantes do Ensino Fundamental I na resolução de tarefas da Early Algebra*[5]*?*

Realizamos um levantamento a partir do ano 2000 junto ao portal da CAPES, e eventos da área de Educação Matemática - SIPEM (2006 e 2009) e ENEM[6] (2001, 2004, 2007, 2009) a respeito do tema desta pesquisa (o pensamento algébrico nos anos iniciais).

No portal de teses e dissertações, encontramos duas pesquisas de mestrado as quais se referem ao tema proposto: FREIRE (2007) investigou, por meio de entrevistas clínicas individuais, se o emprego de ambientes computacionais e manipulativos favorece o entendimento de noções algébricas com estudantes dos anos iniciais, analisando uma sequência didática realizada com estudantes do 3º e 4º anos. PINTO (2001) pesquisou como estudantes do 3º ano resolvem tarefas que envolvem noções algébricas, uma vez que essas atividades foram baseadas em uma sequência didática programada em quatro módulos, respectivamente: a) transformação e modalização dos fenômenos, b) passagem da representação icônica para a simbólica, c) representação simbólica de relações de igualdade e desigualdade e, d) consideração das mesmas relações anteriormente mencionadas, trabalhando-se agora com quantidades completamente desconhecidas.

Nos anais do SIPEM não localizamos pesquisas relacionadas ao tema proposto. Já nos anais do X ENEM, encontramos um relato de experiência (PORTO; COSTA; MARQUES e LUNA, 2009). Esse trabalho expõe a experiência de três professoras polivalentes da Educação Infantil ao trabalharem com uma sequência de tarefas para o ensino de álgebra com estudantes de seis anos. Essa investigação teve como objetivo discutir a respeito da introdução de tarefas que possibilitem o desenvolvimento do pensamento algébrico pelas crianças desde o início de sua escolarização.

Nesta pesquisa buscamos nos diferenciar dos trabalhados citados (FREIRE 2007; PINTO 2001 e PORTO; COSTA; MARQUES e LUNA, 2009) nos seguintes

---

[5] Definiremos posteriormente o que é a *Early Algebra*.

[6] ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática e SIPEM - Seminário de Pesquisa em Educação Matemática.

aspectos: não focamos as dificuldades dos estudantes ao trabalharem com conceitos algébricos ou então a superação de dificuldades; também não temos como foco analisar as tarefas aplicadas aos estudantes e, ainda, antes da aplicação de cada tarefa, não fizemos uma discussão com os estudantes, de modo que resolvessem sem a nossa interferência, a fim de não os influenciar nas estratégias, caminhos, enfim, na resolução das tarefas.

Como já referido, trazemos como objeto de estudo o pensamento algébrico manifestado por estudantes dos anos iniciais, ou seja, pretendemos levantar reflexões acerca de aspectos que envolvem características de pensamento algébrico nas produções escritas de estudantes dos anos iniciais.

Esta investigação apresenta-se em quatro capítulos.

O capítulo I contempla três partes a respeito: da álgebra escolar, do pensamento algébrico elementar - *Early Algebra* e das caracterizações e tipos de pensamento algébrico.

O capítulo II aborda a respeito do caminho percorrido nesta investigação, o qual está dividido em três partes: a estratégia metodológica em que nos baseamos, ou seja, a Análise de Conteúdo, sendo essa uma modalidade de pesquisa qualitativa; o contexto da pesquisa, o projeto - Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática e, por fim, sobre os procedimentos e escolhas adotados.

O capítulo III contempla as descrições das aplicações das tarefas, o recolhimento dos dados e os sujeitos da pesquisa.

O capítulo IV refere-se às análises, interpretações e inferências. Por fim, seguem alguns resultados do nosso trabalho, bem como, indícios de futuras pesquisas a serem alcançadas com relação ao pensamento algébrico elementar.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No presente capítulo, apresentamos os referenciais teóricos que norteiam e sustentam nosso trabalho. Como teóricos escolhemos BLANTON (2001, 2005, 2006); BRIZUELA (1998, 2000, 2001, 2004, 2005, 2006, 2010); CARRAHER (1998, 2000, 2001, 2005, 2006, 2007, 2008); CARPENTER (1995, 2003); FIORENTINI (1993, 1995, 2005); KAPUT (1999, 2001, 2004, 2005); KIERAN (1992, 1996, 2004); LINS(1997, 2004); MIGUEL (1993); MIORIM (1993); SCHLIEMANN (1998, 2000, 2001, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008) os quais deram suporte às análises e a pesquisa como um todo.

Na primeira parte apresentamos uma breve discussão a respeito da álgebra escolar. Tecemos considerações sobre o seu desenvolvimento, algumas das suas mudanças de perspectiva ao longo da história, sobre o seu papel no currículo escolar, sobre os processos de ensino e aprendizagem dos estudantes e professores na sala de aula. Na segunda parte abordamos um breve relato do pensamento algébrico elementar, bem como, apresentamos uma discussão de alguns trabalhos relativos a essa temática, mostrando resultados positivos ao se trabalhar a Educação Algébrica desde as primeiras séries do Ensino Fundamental.

No que diz respeito às caracterizações e tipos de pensamento algébrico, discutimos algumas caracterizações que encontramos na literatura consultada, e, ao fim dessa terceira parte do capítulo I, apresentamos uma caracterização para o pensamento algébrico possível de ser identificada por meio da produção escrita dos estudantes participantes da pesquisa.

1.1 A Álgebra Escolar

Os processos de ensino e aprendizagem da álgebra são assuntos de destaque em pesquisas no Brasil e no exterior (KIERAN, 1992; COXFORD, 1995; CAPRARO, CHAVEZ e CAPRARO, 2008; KAPUT, 2004; BLANTOM E KAPUT, 2005; CARPENTER, FRANKLE E LEVI, 2003; NCTM, 2000; FIORENTINI, FERNADES E CRISTOVÃO, 2005). Estudando a evolução histórica da Álgebra, segundo Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), foi com a “Carta Régia” de 19 de agosto de 1799 que a Álgebra foi introduzida no ensino brasileiro na forma de aulas avulsas, ao lado de outras disciplinas como a Aritmética, a Geometria e a Trigonometria, as quais já estavam inseridas no ensino. No entanto, foi no início do século XIX que se introduziu o estudo da Álgebra no Ensino Secundário e apenas em 1931, com a Reforma Francisco Campos, Álgebra, Aritmética, Geometria e Trigonometria formaram um conjunto de componentes curriculares, denominado “Matemática”.

Ao longo da história do ensino da Matemática, a Álgebra tem sido alvo de preocupações tanto para pesquisadores, como também para professores. Estudando sua trajetória, encontramos modificações nas formas de ensiná-la, nas quais se manifestaram várias concepções de Álgebra e de Educação Algébrica que influenciaram seu desenvolvimento histórico, as quais destacamos: processológica; linguístico-estilística; linguístico-sintático-semântica; linguístico-postulacional; linguístico-pragmática; fundamentalista-estrutural; fundamentalista-analógica (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIM, 1993) e as concepções segundo LINS e GIMENEZ (1997): como cálculo literal e as abordagens facilitadoras.

É importante salientar que não temos como intenção explicitar e/ou discutir cada uma das diferentes concepções elencadas, no entanto, cabe-nos destacar um ponto comum entre essas percepções e considerado pelos autores (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIM, 1993) didaticamente negativo, o qual consiste na carência do pensamento algébrico à linguagem algébrica. Ou seja, nas concepções observa-se uma álgebra simbólica que “[...] em todos esses casos, o ensino-aprendizagem da álgebra reduz-se ao ‘transformismo algébrico’”. (p. 85)

Com o passar do tempo ocorreram mudanças nas formas de pensar a álgebra, trazendo implicações entre o pensamento e a linguagem. Enquanto que, por um longo período, a álgebra foi vista como um sistema estritamente formal, essa visão tomou direções diferentes, e recentes pesquisas concentram-se sobre o pensamento, “[...] reconhecendo que esse precisa desenvolver-se desde os primeiros dias de escola [...]” [7]. (BOOKER, 200, p. 10, tradução nossa)

Há pesquisas e documentos (KAPUT e BLANTON, 2001; BOOTH, 1988; PNC, 1996; NCTM, 2000; CARRAHER, et al., 2005; KIERAN, 2004; MURRAY, 2010; BRIZUELA e SCHLIEMANN, 2004; BOOKER, 2009) os quais sugerem que a álgebra deve tornar-se parte integrante do currículo da educação elementar, de forma que o pensamento algébrico seja trabalhado desde os primeiros anos de

[7] “[...] recognizing that this needs to develop from the earliest days of school [...]” (BOOKER, 2009. p. 10).

escolaridade e que acabe com as fronteiras existentes entre aritmética e álgebra. No entanto, há uma lacuna em como isso se dá em sala de aula, ou seja, de que modo trabalhar álgebra com estudantes dos anos iniciais (BRIZUELA e SCHLIEMANN, 2004), sendo esse um assunto de discussão e pesquisa.

Segundo as Orientações Curriculares e Proposição de Expectativas de Aprendizagem para o Ensino Fundamental I do estado de São Paulo,

> [...] é fundamental também que, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, as crianças realizem atividades matemáticas, sem estar inseridas num contexto particular, com a finalidade de observarem padrões, regularidades e ir construindo um vocabulário próprio da Matemática. (São Paulo, 2007, p. 70).

E mais, o bloco de conteúdos "NÚMEROS E OPERAÇÕES" do Ensino Fundamental traz como objetivos que:

> embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1997, p. 35)

Mediante esses documentos e pesquisas já referidas os quais asseguram a necessidade de iniciar uma educação algébrica desde os ciclos iniciais, surge-nos uma preocupação: os professores que lecionam nos anos iniciais estão preparados para tal compromisso?

Curi (2004) nos dá uma ideia, descrevendo que professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental não possuem formação específica para lidarem com tarefas que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico ocasionando assim futuras dificuldades com a álgebra. A autora afirma que nos cursos de formação de professores dos anos iniciais, os conteúdos matemáticos são pouco destacados havendo uma predominância em realçar o "*como ensinar matemática".* Ainda, de acordo com seus estudos, aos futuros professores faltam conhecimentos de conteúdos matemáticos, uma vez que "parece haver uma concepção dominante de que o professor polivalente não precisa 'saber matemática' e que basta saber como ensiná-la" (CURI, 2004, p. 77).

Tendo em vista a falta de domínio em conteúdos matemáticos e a insegurança na condução desses, alguns professores do Ensino Fundamental I evitam trabalhar com a matemática, visto que, segundo Curi (2004) em uma de suas pesquisas, as alunas-professoras escolhem fazer Magistério para escaparem da Matemática.

Além disso, muitas vezes a álgebra é ensinada na Tendência "Tecnicista" [8], ou seja, centrada em técnicas e recursos de ensino, sendo o estudante um mero receptor da aprendizagem, com a qual a educação teria a "finalidade de preparar e 'integrar' o indivíduo à sociedade, tornando-o capaz e útil ao sistema" (FIORENTINI, 1995, p.15).

Frequentemente, tanto nos anos iniciais do Ensino Fundamental como também na Educação Básica, os estudantes lidam com poucas aplicações matemáticas, pois os professores propõem apenas a repetição mecânica de exercícios, algoritmos e técnicas tornando o ensino de álgebra sem significado (KAPUT, 1999). Ou seja, de modo geral, a álgebra escolar traduz-se "pela manipulação simbólica dos conceitos algébricos" (LANNER DE MOURA e SOUZA, 2008, p. 65). De acordo com Carpenter (1981),

> com frequência os alunos vêem a álgebra como um conjunto de operações abstratas, pouco vinculadas ao mundo real. Embora talvez sejam capazes de repetir certos modelos de manipulações algébricas, muitas vezes lhes falta o conhecimento de conceitos algébricos necessários para a aplicação de álgebra a uma ampla gama de situações-problema. (CARPENTER, 1981, apud A. SIMON; C. STIMPSON, 1995, p. 155).

Concordamos com Murray (2010) ao afirmar que a álgebra "é um corpo de conhecimento que os estudantes aprendem durante um longo período de tempo, começando nas primeiras séries" [9] (MURRAY, 2010, p. 74, tradução nossa). Dessa forma, entendemos que a álgebra deva ser compreendida de forma ampla, de modo que permita aos estudantes construírem significados e lidarem com diferentes contextualizações. Pois, parte das dificuldades e erros comuns deparados ao longo da formação dos estudantes pode ter sua origem na formação inicial desses, uma vez que aritmética e álgebra na educação elementar muitas vezes é ensinada de

[8] Segundo Fiorentini (1995), a tendência tecnicista tem origem norte-americana, a qual surgiu nas décadas de 60 e 70, privilegiando objetivos como, por exemplo, o treinamento de habilidades exclusivamente técnicas, sendo a sociedade um sistema organizado e funcional.

[9] "is a body of knowledge that students learn over a long span of time, beginning in the early grades" (MURRAY, 2010, p. 74).

maneira limitada, ou seja, centrada em regras e manipulações simbólicas (BOOTH, 1988).

Pesquisadores sugerem que a raiz das dificuldades em álgebra demonstradas pelos estudantes ao longo da história se deve à ausência de experiências em generalizações algébricas e aritméticas no ensino elementar. Brizuela e Schliemann (2004) relatam que investigações realizadas em sala de aula pelo grupo de Davydov (1969/1991) apontam que crianças russas, as quais tiveram contato com problemas envolvendo representações algébricas no Ensino Fundamental I, têm um melhor desempenho na resolução de problemas algébricos quando comparados com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental II.

No ensino tradicional de Matemática, geralmente, é por volta da sexta série ou sétimo ano que aos estudantes é iniciada a notação algébrica e conceitos algébricos como a utilização de letras na resolução de Equações do Primeiro Grau. Assim, cabe-nos ressaltar que é comum nessa etapa de ensino surgirem os principais problemas referentes à aprendizagem da matemática, ou seja, os estudantes evidenciam confusões. De acordo com Brizuela (2006) essa deficiência pode ser dos professores e enfatiza o trabalho com a álgebra nos anos iniciais como uma possível maneira de sanar as dificuldades dos estudantes. A autora afirma que, se desenvolvido o pensamento algébrico desde as primeiras séries do Ensino Fundamental, quando os estudantes tiverem 13 ou 14 anos não estranharão a presença de incógnitas ou variáveis nos problemas, de modo que conseguem resolvê-los com domínio. Deste modo, o pensamento algébrico deve ser trabalhado ao longo da escolaridade, e não apenas de uma etapa à frente.

Entendemos que, no currículo escolar, desde os anos iniciais é indispensável que a matemática, de modo geral, seja mais motivadora e significativa aos estudantes, ou seja, que lhes permita a utilização de notações simbólicas, que façam reproduções por escrito de suas ideias de modo a auxiliar no desenvolvimento do raciocínio. De acordo com Brizuela (2006), as notações são ferramentas essenciais para as crianças compreenderem quaisquer conteúdos. Para tanto, é necessário aliar o pensamento algébrico ao currículo escolar, pois esse pensamento

> [...] aborda relações matemáticas gerais, exprimindo-as de maneira sofisticada como atividades dinâmicas de vizualização de padrões de

> geometria, número e medida para determinar as soluções para problemas complexos.[10] (BOOKER, 2009, p. 10, tradução nossa)

Nesse contexto, durante as aulas de matemática, os professores dos anos iniciais necessitam “[...] experimentar o desenvolvimento da linguagem matemática e do simbolismo [...]" (NCTM, APM, 2008, p. 141), de modo que proporcionem aos estudantes momentos que lhes possibilite experiências de álgebra, sendo essa essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico e de habilidades que possam os auxiliar para a álgebra mais formalizada das séries seguintes. Da mesma forma, professores do Ensino Fundamental precisam “compreender os conteúdos algébricos, entender como os estudantes aprendem, e usar estratégias de instrução que promovam aprendizagem para desenvolver o pensamento algébrico” [11] (CAPRARO, RANGEL-CHAVEZ e CAPRARO, 2008, p.1, tradução nossa).

Corroborando de mesmas ideias, segundo o Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM, 2000), a capacidade de lidar com conceitos algébricos é importante tanto na vida adulta, no trabalho, como também sendo uma preparação para o Ensino Superior. Dessa forma, cabe aos professores a promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais.

1.2 Pensamento Algébrico Elementar - Early Algebra

Uma discussão que tem provocado reflexões entre pesquisadores da área de Educação Matemática é acerca de aspectos que envolvem o pensamento algébrico, destacando a *Early Algebra*, como uma área de pesquisa que desenvolve investigações ligadas à Educação Algébrica inicial. Há tempos discute-se em qual fase escolar iniciar esse pensamento. Da mesma forma, outro debate presente na literatura de Educação Matemática é para estabelecer o que é pensar algebricamente, pois não há um consenso. No entanto, vários estudos trazem elementos caracterizadores do pensamento algébrico dos estudantes.

---

[10][...] addresses general mathematical relationships, expressing them in increasingly sophisticated ways as activities move from seeing patterns in number, geometry and measurement to determining solutions to more and more complex problems (BOOKER, 2009, p. 10).

[11]“must understand algebraic content, understand how students learn, and use instructional strategies that foster learning to develop algebraic thinking” (CAPRARO, RANGEL-CHAVEZ e CAPRARO, 2008, p.1).

Enfatizamos a *Early Algebra*, pois como já mencionamos, essa é uma área de pesquisa que visa uma abordagem para o ensino e aprendizagem da álgebra inicial, bem como, investiga o que funciona e o que não funciona em uma educação algébrica elementar. Este termo, "*Early Algebra",* é um projeto criado em 1998 e financiado pela *National Science Fundation* - NSF[12], a qual conta com uma equipe de psicólogos e educadores matemáticos, destacando Analúcia D. Schliemann (Professora de Educação, da Universidade Tufts, co-investigadora principal), Bárbara M. Brizuela (Professora Associada de Educação, da Universidade Tufts, co-investigadora principal) e David W. Carraher (Integrante do TERC[13], co-investigador principal) os quais trabalham com professores e estudantes colaborando com escolas de Boston. Essa abordagem se fundamenta na premissa de que, para se compreender aritmética com profundidade, requer-se que o estudante faça generalizações matemáticas e que compreenda os princípios algébricos. De tal modo, aritmética e álgebra elementar estão intimamente interligadas.

Esse projeto realiza intervenções longitudinais com crianças do Ensino Fundamental da região de Boston, uma vez que investiga as implicações da aprendizagem de álgebra nos anos iniciais, focando na aprendizagem e raciocínio dos estudantes. Cabe destacar que o trabalho nas escolas é desenvolvido em grupos, nos quais os pesquisadores com a cooperação dos professores discutem com os estudantes as diversas estratégias utilizadas na resolução de problemas, sendo que uma boa parte da aula é destinada aos estudantes explicarem seus pensamentos, suas estratégias, representações nas resoluções das tarefas que a eles são propostas. Assim sendo, essas investigações em sala de aula buscam promover um ambiente de ensino e aprendizagem em que os estudantes possam comunicar suas ideias, apresentar suas perspectivas, discutir a respeito de como representaram o problema, entre outras. Além de proporcionar aos estudantes a oportunidade de construir, explorar e representar relações entre conjuntos numéricos, por exemplo, utilizando as ferramentas da álgebra.

---

[12] Criada pelo congresso em 1950, a NSF é uma agência federal independente destinada a promover o progresso da ciência. Esta agência financia pesquisas realizadas pelo governo federal apoiado por faculdades e universidades americanas.

[13] TERC é uma organização independente formada por um grupo de profissionais nas áreas de ciência, matemática, engenharia, educação, psicologia e tecnologia, os quais são líderes em pesquisa educacional e desenvolvimento curricular. Esta organização tem como objetivo melhorar a Matemática e a Educação Científica dos estudantes, introduzindo-os no aprendizado de matemática e ciências, a fim de inspirá-los por meio de programas destinados a desenvolver conhecimentos para resolver problemas, ampliar suas oportunidades, etc.

Segundo Carraher, Martinez e Schliemann (2008) descrevendo os resultados de um estudo longitudinal em uma sala de aula com quinze estudantes de nove anos, na região metropolitana de Boston, abordando sobre a representação de funções lineares em que investigavam como os estudantes produziam e representavam generalizações durante duas aulas,

> [...] nós consideramos não apenas como os alunos introduziram a notação convencional e como utilizaram as técnicas, mas também como representaram e raciocinaram sobre matemática com seus próprios meios. Procuramos determinar os motivos de suas reivindicações, reconhecendo que o que os obriga a tirar conclusões e fazer generalizações pode não estar inteiramente em conformidade com as normas aceitas da matemática [...] [14] (2008, p. 3, tradução nossa)

Nessas investigações os pesquisadores procuraram compreender como o raciocínio algébrico das crianças evoluiu. Cabe comentar que antes e depois da intervenção em sala de aula, os alunos realizaram uma prova escrita, assim os resultados da investigação foram avaliados por meio da análise da participação dos estudantes, que foram gravadas em vídeos, e também pelo desempenho nas provas. Além disso, os resultados da análise foram comparados com o desempenho de estudantes que não participaram da investigação.

Assim, a partir de pesquisas realizadas com estudantes do Ensino Fundamental, tendo em vista que cada turma foi acompanhada durante três anos, uma ou duas vezes por semana, essas pesquisas mostram que introduzir a álgebra nos anos iniciais é altamente viável, pois estudantes dessas séries são capazes de entender expressões algébricas e empregá-las para descrever relações entre os números, por exemplo.

Trabalhar com álgebra nos anos iniciais não quer dizer introduzir a notação convencional, como por exemplo, é trabalhado no oitavo ano. Mas pelo contrário, esse grupo de pesquisa visa a uma abordagem em sala de aula na qual os estudantes tenham oportunidades de refletirem e construírem significados para relações matemáticas e conceitos algébricos, utilizando suas representações intuitivas de modo que aos poucos vão aprendendo a estabelecer representações convencionais, bem como a formular generalizações fazendo uso da notação

---

[14] [...] We consider not only how students make use of introduced, conventional notation and techniques but also how they represent and reason about mathematics in their own ways. We seek to determine the grounds for their claims, recognizing that what compels them to draw conclusions and make generalizations may not fully conform to the accepted norms of mathematics [...] (CARRAHER, MARTINEZ e SCHLIEMANN, 2008, p. 3).

algébrica, uma vez que "[...] generalizações precisam surgir em atividades associadas com situações ricas vivenciadas [...]" (CARRAHER, MARTINEZ e SCHLIEMANN, 2008, p. 5, tradução nossa)[15]. É importante retomar que o ponto central dessas intervenções em sala de aula é

> [...] o uso de contextos problemáticos para situar e aprofundar a aprendizagem da matemática e das generalizações e o uso de múltiplas representações, ou seja, em linguagem natural, em linguagem geométrica, tabelas de função, gráficos cartesianos, e notação algébrica [...][16] (2008, p. 6, tradução nossa)

Vale destacar que são encontradas informações relacionadas ao projeto *Early Algebra* quanto ao grupo de investigadores, pesquisas desenvolvidas com estudantes, publicações, vídeos de projetos, materiais, entre outras, no site http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp, criado para divulgar essa área de pesquisa, a qual faz parte do Departamento de Educação da Universidade Tufts - EUA.

Mediante investigações, vários pesquisadores da área relatam ser importante e necessário iniciar o pensamento algébrico desde os anos iniciais, assim como a relação da aritmética com a álgebra nos primeiros ciclos escolares, tendo em vista que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido antes do estudante apresentar uma linguagem simbólica algébrica, pois ao ver a álgebra

> [...] como uma vertente no currículo a partir do ensino infantil, os professores podem ajudar os estudantes a construir uma fundamentação sólida de compreensão e experiência como uma preparação para o trabalho mais sofisticado em álgebra nas séries finais da educação básica. Por exemplo, experiências sistemáticas com os padrões ajuda na compreensão da ideia de função, experiência com números e suas propriedades definem uma fundamentação para o trabalho posterior com símbolos e expressões algébricas.[17] (KIERAN, 2004, p. 37, tradução nossa)

---

[15] [...] generalizations need to arise in activities associated with rich experiential situations [...] (CARRAHER, MARTINEZ e SCHLIEMANN, 2008, p. 3).

[16] [...] the use of problem contexts to situate and deepen the learning of mathematics and generalizations and the use of multiple representations, namely, natural language, line segments, function tables, Cartesian graphs, and algebraic notation [...] (CARRAHER, MARTINEZ e SCHLIEMANN, 2008, p. 6).

[17] [...] algebra as a strand in the curriculum from prekindergarten on, teachers can help students build a solid foundation of understanding and experience as a preparation for more-sophisticated work in algebra in the middle grades and high school. For example, systematic experience with patterns can build up to an understanding of the idea of function, and experience with numbers and their properties lays a foundation for later work with symbols and algebraic expressions (KIERAN, 2004, p. 37).

Como afirma Kieran (2004), o pensamento algébrico pode não apresentar necessariamente ferramentas de uma linguagem simbólica algébrica, porém pode auxiliar como uma base à introdução da álgebra nas séries posteriores.

Em concordância da mesma ideia, Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) mencionam que “[...] não há razão para sustentar uma iniciação relativamente tardia ao ensino-aprendizagem da Álgebra. Ao contrário, acreditamos que, desde os anos iniciais, o trabalho com esse tipo de pensamento se deve fazer presente na formação do estudante” (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIM, 1993, p. 88). Dessa forma, o pensamento algébrico pode ser desenvolvido antes de o estudante apresentar uma linguagem simbólica algébrica, pois isso advém, principalmente, quando

> [...] a criança estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente... (FIORENTINI, FERNADES e CRISTÓVÃO, 2005, p. 5)

Essa ideia também é evidenciada por Bárbara M. Brizuela em um dos capítulos do livro *“Desenvolvimento Matemático na Criança: Explorando Notações”* (BRIZUELA, 2006) ao refletir a respeito das resoluções de uma estudante de terceira série que está desenvolvendo notações de problemas que tratam de frações. Afirma que, embora

> [...] as notações de Sara não sejam notações algébricas convencionais, elas realmente constituem uma internalização de uma notação convencional aceita no contexto de sua sala de aula, e a gradual apropriação dessas notações apoia e desenvolve o seu raciocínio algébrico. (BRIZUELA, 2006, p. 81)

Além disso, concordando com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), há uma crença, em quase todas as propostas para a educação algébrica, de que a utilização de atividades algébricas só é possível em séries mais elevadas, de modo que a aritmética deva vir primeiro. No entanto, compartilhando as mesmas ideias de autores mencionados anteriormente, de acordo com Lins e Gimenez (1997), a “[...] atividade aritmética envolve, naturalmente, um certo nível de generalidade” (p. 112). Além disso, esses mesmos autores afirmam que “[...] quando dissemos que a diferença entre álgebra e aritmética era de tratamento, de foco, estávamos sugerindo não apenas que uma se beneficia da outra, como também que uma depende da outra". (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 113). Esses autores defendem a necessidade de trabalhar com a álgebra desde os anos iniciais, sobretudo, que essa se desenvolva junto com a aritmética. Em seus estudos, mencionam como exemplo outros países, citando a Inglaterra, em que para solucionarem problemas com a aprendizagem da álgebra, iniciaram seu tratamento em séries posteriores, alcançando efeitos nada positivos.

De maneira semelhante, para Murray (2010), na verdade, "[...] álgebra não é separada da aritmética estudada nas séries elementares, mas sim, álgebra e aritmética estão integralmente conectadas" [18] (MURRAY, 2010, p. 74, tradução nossa).

Nesse contexto, crianças dos anos iniciais seriam capazes de lidar com conceitos e utilizar notação algébrica, como afirmam Carpenter, Franke e Levi (2003), destacando a importância da integração da aritmética com a álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os estudantes podem compreender a aritmética de maneira significativa, uma vez que esse conhecimento sirva de apoio para a aprendizagem da álgebra. Ainda, nas reflexões de professores a partir de atividades de Educação Matemática realizadas por estudantes na sala de aula, descritas no livro *"Por trás da porta, que Matemática acontece?"*, a professora Idméa Ap. Rocha da Silva, conta que

> [...] não é possível, se não impossível, dizer com precisão quando se inicia nos alunos o raciocínio algébrico. No entanto, acredito que no desenvolvimento desta atividade há indícios de uma clara representação algébrica. [...] O caráter dessas respostas implica num grau crescente de generalização e de abstração [...]. (MARCHESI et al., 2001, p. 185)

Dessa forma, concordamos com os autores pesquisados ao sustentarem a ideia de que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido antes de o estudante apresentar uma linguagem simbólica algébrica, uma vez que esse pensamento

> [...] nas primeiras séries envolve o desenvolvimento de formas de pensar em atividades para as quais a álgebra sincopada pode ser usada como uma ferramenta, mas que não é exclusiva da álgebra e poderia ser envolvida

[18] "algebra is not separate from the arithmetic studied in the elementary grades; rather, algebra and arithmetic are integrally connected" (MURRAY, 2010, p. 74).

> sem o uso de símbolos, tal como, analisar relações entre quantidades, perceber mudanças, observar estruturas, resolver problemas, generalizar, modelar, justificar, provar e prever.[19] (KIERAN, 2004, p. 12, tradução nossa)

Vale ressaltar que, quando enfatizamos a introdução e a abordagem de álgebra nos anos iniciais não estamos nos referindo à álgebra formal, por exemplo, a introduzida no Ensino Médio. No entanto, nos referimos como um “meio de lidar com generalizações e modos de pensar os quais permitam que resultados devam ser expressos em uma variedade de formas de problemas” [20] (BOOKER, 2009, p. 11, tradução nossa), como um movimento de experiências em sala de aula a qual promova o desenvolvimento e a construção do pensamento algébrico, de modo a estimular os estudantes a pensarem, raciocinarem, construírem relações entre os números, no sentido de uma preparação para a transição da aritmética para a álgebra, que possa servir de base para os conceitos algébricos das séries seguintes e, também, um apoio ao processo de ensino e aprendizagem da matemática. De tal modo,

> [...] mesmo em séries iniciais, *notação algébrica pode desempenhar um papel de apoio na aprendizagem da matemática*. Notação simbólica, número, linhas, tabelas de funções e gráficos são ferramentas relevantes que os estudantes podem utilizar para compreender e expressar relações funcionais em uma variedade de problemas contextualizados.[21] (CARRAHER, SCHLIEMANN, BRIZUELA e EARNEST, 2006, p. 88, tradução nossa)

Assim, o pensamento algébrico deve ser considerado como uma ponte de conexão entre conceitos existentes na matemática inicial e tópicos da matemática posterior, diferentemente de um novo assunto no currículo de matemática (CARRAHER, SCHLIEMANN e SCHWARTZ, 2008), uma vez que “[...] aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações,

---

[19] [...] in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting (KIERAN, 2004, p. 149).

[20] [...] means of dealing with generalizations and ways of thinking that allow results to be expressed across a range of problem forms rather than simply finding a particular answer to a series of individual problems (BOOKER, 2009, p. 1).

[21] [...] even in early grades, algebraic notation can play a supportive role in learning mathematics. Symbolic notation, number lines, function tables, and graphs are powerful tools that students can use to understand and express functional relationships across a wide variety of problem contexts (CARRAHER, SCHLIEMANN, BRIZUELA e EARNEST, 2006, p. 88).

envolvendo relações, regularidades, variação e modelação [...]" (PONTE; BRANCO e MATOS, 2009, p. 11).

A integração da álgebra no currículo de matemática elementar justifica-se uma vez que tem a capacidade de provocar experiências essenciais na construção do pensamento, bem como, habilidades, compreensão das relações entre os números, medidas, etc., ou seja, promover um ambiente no qual o estudante possa pensar, por exemplo, nas estruturas aritméticas, e consiga relacionar que em uma adição "45 + 12" vale a equivalência "47 + 10", indicando uma ideia de generalização. CARRAHER et al., 2006, sugerem trabalhar com as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) como funções, pois uma adição pode representar não apenas uma operação com números específicos, mas também uma relação entre conjuntos, como um caso geral, em que se trabalha com possíveis valores, com variação e não apenas com casos particulares, de modo que "[...] a aritmética tem um caráter algébrico inerente no que diz respeito aos casos e estruturas gerais que podem ser sucintamente capturadas na notação algébrica [...]"[22] (CARRAHER et al., 2006, p. 89, tradução nossa). Sendo assim, concordamos ao afirmarem que a matemática elementar necessita ter como parte integrante conceitos e notações algébricas.

No mesmo sentido, esses autores relatam várias pesquisas (CARPENTER e FRANKE, 2001 e CARPENTER e LEVI, 2000; SCHIFTER, 1999; BLANTON e KAPUT, 2000; BRIZUELA, 2004; BRIZUELA E LARA-ROTH, 2001; CARRAHER, BRIZUELA e SCHLIEMANN, 2000; SCHLIEMANN, CARRAHER e BRIZUELA, 2001; SCHLIEMANN, GOODROW e LARA-ROTH, 2001; BRIZUELA E SCHLIEMANN, 2004) realizadas com crianças em sala de aula, nas quais esses estudantes evidenciam provas de pensamento algébrico e generalização, bem como: exploram relações matemáticas com as quais compreendem, por exemplo, que "$a + b - b = a$" para quaisquer números *a* e *b;* discutem operações com números pares e ímpares, trabalham com tabelas de funções, utilizam notação de álgebra, etc. (CARRAHER, SCHLIEMANN, BRIZUELA e EARNEST, 2006).

---

[22]"[...] arithmetic has an inherently algebraic character in that it concerns general cases and structures that can be succinctly captured in algebraic notation [...]" (CARRAHER et al., 2006, p. 89).

Mais uma vez as investigações deixam evidências de que estudantes dos anos iniciais podem desenvolver características de pensamento algébrico quando lhes são dadas oportunidades de ambientes que discutem as relações e notações algébricas, ou seja, de modo que construam e desenvolvam esse pensamento, acabando assim com as fronteiras entre aritmética e álgebra. Corroborando as mesmas ideias, Brizuela (2004) descreve uma investigação em sala de aula com estudantes dos anos iniciais, na qual expôs que

> [...] os estudantes mais jovens aprendem a utilizar a notação algébrica simbólica significativamente para expressar generalizações enquanto exploravam problemas abertos em contextos ricos. Nós descobrimos que crianças podem usar notações matemáticas não só para registrar o que elas compreendem, mas também para estruturar e promover o seu pensamento, permitindo a elas fazer inferências que poderiam não ter sido feitas. Nós também mostramos que a notação algébrica pode constituir uma ferramenta para generalizações, para entendimento de funções lineares e para resolução de problemas[23] (p. 34, tradução nossa).

Dessa forma, por meio de investigações realizadas com estudantes dos anos iniciais, temos evidências de que as crianças são capazes de compreender e lidar com conceitos algébricos, bem como, operar com valores desconhecidos. A compreensão desses conceitos é um processo de construção, a qual evolui com o passar dos anos. Portanto, não faz sentido esperarmos até por volta do sétimo ano (em que comumente são introduzidos conceitos e notações algébricas) para intervir em sua evolução (CARRAHER, SCHLIEMANN e BRIZUELA, 2001).

1.3 Caracterizações para o pensamento algébrico

Para o termo “pensamento algébrico” não há ao certo uma definição ou então um ponto de vista assumido entre a comunidade de educadores matemáticos, uma vez que esse pensamento está associado a diversas conotações (KIERAN, 2004). Ao longo dos anos, vários pesquisadores da área de Educação Matemática vêm se debruçando no desenvolvimento de pesquisas referentes ao pensamento algébrico,

---

[23] [...] students can learn to use algebra- symbolic notation meaningfully to express generalizations they have reached while exploring problems in open-ended rich contexts. We have found that children can use mathematical notations not only to register what they understand, but also to structure and further their thinking, allowing them to make inferences they might otherwise not have made. We also showed that algebra notation can constitute a tool for generalizations, for understanding of linear functions, and for solving problems (BRIZUELA, 2004, p. 34).

bem como, sobre sua natureza, em que fase escolar se inicia esse pensamento, como desenvolvê-lo, entre outras questões.

No entanto, apesar de não haver um consenso para a definição do que seja "pensar algebricamente" (LINS e GIMENEZ, 1997), a fim de estabelecer uma acepção para esse pensamento, autores do campo de Educação Matemática trazem elementos que o caracterizam (KIERAN, 2004). Dentre os pesquisadores dessa área, destacamos Kieran (1996, 2004); Carraher, Schliemann e Brizuela (2006); Fiorentini, Miorin e Miguel (1993); Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005); Lins e Gimenez (1997); Blanton (2006, 2007) e Kaput (1999). A seguir apresentaremos, a partir da literatura pesquisada, algumas caracterizações para o pensamento algébrico, e na sequência, uma caracterização que construímos.

Kieran (1996), em seus estudos, traz uma caracterização para o pensamento algébrico relacionado a uma abordagem funcional e a um modelo de atividade algébrica. Para a autora, o pensamento algébrico pode ser interpretado como

> uma abordagem a situações quantitativas que enfatiza os aspectos relativos gerais com ferramentas que não são necessariamente sincopadas, mas que podem em última instância ser utilizadas como suporte cognitivo para introduzir e para sustentar o discurso mais tradicional da álgebra escolar[24] (p. 275, tradução nossa).

Essa caracterização para o pensamento algébrico assinala que estudantes tenham experiências com funções empregando situações da realidade, uma vez que esta definição está relacionada com o modelo composto por três principais atividades da álgebra escolar: atividade geracional, atividade transformacional e atividade de nível meta/global (KIERAN, 1996).

Segundo a autora, as atividades geracionais envolvem "[...] a formação das expressões e equações que são os objetos da álgebra[25] [...]" (KIERAN, 2004, p. 141, tradução nossa), compreendendo: equações com uma incógnita que reproduzem situações problemas; expressões de generalidade resultante de padrões geométricos ou sequências numéricas e expressões de regras que regem relações numéricas. Essas atividades também incluem objetos como variáveis,

---

[24][...] an approach to quantitative situations that emphasizes the general relational aspects with tools that are not necessarily letter-symbolic, but which can ultimately be used as cognitive support for introducing and for sustaining the more traditional discourse of school algebra (KIERAN, 1996, p. 275).

[25][...] the forming of the expressions and equations that are the objects of algebra [...] (KIERAN, 2004, p. 141).

incógnitas, sinal de igualdade e o conhecimento de solução de uma equação, sendo que "[...] muito do significado de construção para objetos algébricos ocorre dentro da atividade geracional de álgebra" [26] (KIERAN, 2004, p. 142, tradução nossa).

A segunda atividade, as transformacionais, é baseada em regras, referindo-se, em geral, em transformar a forma de uma expressão ou equação, com a finalidade de manter a equivalência. Esse tipo de atividade envolve, por exemplo, a redução de termos semelhantes, a fatoração, a substituição, a adição e multiplicação de expressões polinomiais, a resolução de equações, simplificação de expressões, etc.

Com relação às atividades de nível meta/global, são atividades para as quais "[...] a álgebra é usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivos para a álgebra[27] [...]" (KIERAN, 2004, p. 142, tradução nossa). Tais atividades estão relacionadas com o desenvolvimento de formas de pensar, as quais apontam para processos e atividades matemáticas gerais, compreendendo a resolução de problemas, a modelagem, a percepção de estruturas, o estudo de mudanças, a generalização, a análise de relações, a justificação, a prova, a validação, entre outros, sendo esta essencial para as outras duas atividades anteriores, com ênfase nas atividades geracionais.

É importante destacar que essas atividades, ou seja, atividade geracional, atividade transformacional e atividade de nível meta/global, podem não envolver necessariamente uma álgebra sincopada, podendo ser abordadas em qualquer momento da escolaridade.

Tendo em vista o avanço da tecnologia de computação, e os diferentes meios de representar e operar sobre relações, Kieran (2004) reformulou a proposta de 1996 para o pensamento algébrico, apresentada anteriormente. A nova definição considera que o pensamento algébrico

> [...] nas primeiras séries envolve o desenvolvimento de formas de pensar em atividades para as quais a álgebra sincopada pode ser usada como uma ferramenta, mas que não é exclusiva para álgebra e poderia ser envolvida sem o uso do símbolo, tal como, analisar relações entre quantidades, perceber mudanças, observar estruturas, resolver problemas, generalizar,

[26][...] Much of the meaning-building for algebraic objects occurs within the generational activity of algebra (KIERAN, 2004, p. 142).
[27] [...] algebra is used as a tool but which are not exclusive to algebra [...] (KIERAN, 2004, p. 142).

> modelar, justificar, provar e prever[28]. (KIERAN, 2004, p. 149, tradução nossa)

Essa definição fundamenta-se na atividade de nível meta/global (descrita por Kieran, 1996), uma vez que não envolve necessariamente uma álgebra sincopada e é considerada pela autora mais ampla quando comparada com a anterior.

Para os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), o pensamento algébrico é concebido como um tipo especial de pensamento, o qual pode revelar-se nos diversos campos da Matemática como também em outras áreas do conhecimento, de modo que esse pensamento está "[...] na base da construção e da compreensão do universo conceitual desses campos e áreas, isto é, é um pensamento indispensável para a constituição do universo conceitual e temático subjacente à ciência contemporânea [...]" (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 89). Além disso, esses autores explicitam alguns elementos que caracterizam o pensamento algébrico, como: "[...] percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização" (p. 87).

Nesse contexto, a construção desse pensamento não se dá de forma isolada, mas sim em conexão com as mais diversas áreas do conhecimento e espaços da Matemática, existindo entre pensamento e linguagem uma relação de natureza dialética. Para tais autores, o pensamento algébrico pode ser desenvolvido gradualmente mesmo que ainda não exista uma linguagem algébrica simbólica (FIORENTINI, FERNADES e CRISTOVÃO, 2005).

No ponto de vista dos autores Lins e Gimenez (1997), o pensamento algébrico é um dos diferentes modos de produzir significado para a álgebra, o qual possui três características fundamentais, a saber: aritmeticismo, internalismo e analiticidade (LINS e GIMENEZ, 1997).

A primeira característica está pautada na produção de significados somente para os números e operações aritméticas. Já a segunda, o internalismo, significa considerar números e operações exclusivamente mediante suas propriedades.

---

[28] [...] in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting (KIERAN, 2004, p. 149).

Segundo os autores, essa característica não faz menção à modelação com números em outros objetos, como físicos ou geométricos. Por fim, a analiticidade refere-se "[...] a operar sobre de números desconhecidos como se fossem conhecidos" (LINS e GIMENEZ, 1997, p, 151).

Segundo os autores, pensar algebricamente é pensar sempre operando de acordo com essas características.

Os educadores matemáticos Carraher, Schliemann e Brizuela (2006), discutem o pensamento algébrico tendo como questão chave a abordagem das quatro operações básicas como funções. Nesse enfoque, a álgebra é empregada como *aritmética generalizada de números e quantidades* (CARRAHER, SCHLIEMANN e BRIZUELA, 2006), uma vez que o conceito de função assume um papel importante em que a notação algébrica pode fornecer um fundamento ao raciocínio matemático e que a generalização é a essência do pensamento algébrico.

Esses pesquisadores veem a introdução da álgebra na escola elementar como "[...] um movimento de números específicos e medidas para as relações entre os conjuntos de números, especialmente relações funcionais [...]" [29] (CARRAHER, SCHLIEMANN e BRIZUELA, 2006, p. 3, tradução nossa).

Assim como os autores mencionados anteriormente, Kaput (1999) também discute o termo "pensamento algébrico", ao qual se refere como o ato de generalizar e expressar essa generalidade por meio de linguagens cada vez mais formais. Nesse trabalho o autor elenca cinco formas distintas para o pensamento algébrico, a saber: generalização e formalização de padrões e de restrições; manipulação de formalismos guiada sintaticamente; o estudo de estruturas abstratas de cálculos e de relações; o estudo de funções, de relações e de variações conjuntas; utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos[30].

Com relação à primeira forma, Kaput (1999) descreve que a generalização envolve uma elevação do raciocínio e da comunicação com situações gerais, não tendo mais como foco as situações em si, mas sim, sobre os padrões, os procedimentos, as estruturas e as relações entre os mesmos, como a generalização

---

[29] "[...] as a move from particular numbers and measures toward relations among sets of numbers and measures, especially functional relations [...]" (CARRAHER, SCHLIEMANN e BRIZUELA, 2006, p. 3).

[30] Algebra as the Generalization and Formalization of Patterns and Constraints; Algebra as Syntactically Guided Manipulation of (Opaque) Formalisms; Algebra as the Study of Structures Abstracted From Computations and Relations; Algebra as the Study of Functions, Relations, and Joint Variation; Algebra as a Cluster of Modeling and Phenomena-Controlling Languages (KAPUT, 1999).

de padrões em sequências de números, em tabelas de multiplicação. Segundo o autor, é difícil apontar para contextos de situações ou sistemas matemáticos em que a atividade matemática não envolva os processos de generalização e formalização. Do mesmo modo, de acordo com Kaput (1999), esses dois processos são intrínsecos para a atividade matemática e para o pensamento.

No que diz respeito ao tipo de pensamento algébrico - manipulação de formalismos guiada sintaticamente -, segundo o autor, em geral, na abordagem com formalismos a preocupação se concentra nos símbolos e regras sintáticas para manusear esses formalismos. Entretanto, a preocupação não está no que o símbolo representa ou na sua significação, mas sim no seu aspecto formal a fim de construir um pensamento algébrico abstrato, de modo que operemos em relações mais complexas sem ter que, ao mesmo tempo, olhar através dos símbolos e transformações.

Referente à forma de pensamento algébrico - o estudo de estruturas abstratas de cálculos e de relações-, segundo Kaput (1999), tradicionalmente a “álgebra abstrata” é vista no nível universitário como uma “fantasia”. Esse tipo de raciocínio envolve ações de generalização e abstração fundamentadas em cálculos que promovem a compreensão de estruturas abstratas a fim de que os estudantes tenham uma base para os níveis superiores de abstração e formalização.

Na quarta forma, Kaput (1999) descreve que é favorável aos estudantes desenvolver experiências com o conceito de função nos anos iniciais, utilizando-se de quantidades conhecidas que mudam ao longo do tempo, por exemplo, a altura de plantas, temperaturas, etc. O autor aponta que se introduzam as crianças às ideias de correspondência e variação de quantidades subjacentes ao conceito de função.

A última forma de pensamento algébrico envolve o raciocínio quantitativo, bem como a utilização de funções e relações, interpretação e descrição de fenômenos. Para Kaput (1999) o raciocínio quantitativo compreende a modelagem, ou seja, matematizar fenômenos da realidade de modo que esses fenômenos auxiliem os estudantes a compreender conceitos matemáticos. Ainda, este último raciocínio também envolve a utilização da tecnologia, como computadores e calculadoras, a fim de que esses recursos contribuam na compreensão dos conceitos matemáticos. Segundo o autor, essa forma de pensamento algébrico permeia todas as outras formas expostas, refletindo a álgebra como uma teia de linguagens.

Segundo Kaput (1999), as cinco formas de pensamento algébrico descritas, exceto a segunda, não são apresentadas em cursos padrão de álgebra.

Assim como Kaput (1999) e outros autores referenciados neste estudo, Blanton (2007) também debate sobre o pensamento algébrico. Em uma conferência realizada em 2006, a qual reuniu vários representantes da comunidade de Matemática e de Educação Matemática a fim de discutir melhorias no ensino de álgebra, Blanton et al., (2006) descreve que, por meio do pensamento algébrico,

> [...] crianças também aprendem a descrever, simbolizar e justificar propriedades de número e operação, incluindo axiomas importantes, tais como as propriedades comutativa e associativa da adição e multiplicação e a propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição, que são fundamentais para cursos de álgebra formais em graus secundários [...] [31]. (BLANTON et al., 2006, p. 8, tradução nossa)

Para esses autores, a introdução da álgebra nos anos iniciais é uma maneira de pensar a qual oportuniza aos estudantes, entre outras coisas, que generalizem relações e propriedades matemáticas, por exemplo, a propriedade da comutatividade na adição, de modo que tenham essas experiências com o intuito de desenvolver uma base em matemática mais profunda e significativa quando comparada a experiências com ênfase em procedimentos de cálculo.

A fim de responder a questão que norteia esta investigação (que características de pensamento algébrico são manifestadas por estudantes do Ensino Fundamental I na resolução de tarefas da *Early Algebra*?), a seguir apresentaremos uma caracterização que construímos para o pensamento algébrico, a qual é

---

[31] [...] children also learn to describe, symbolize and justify properties of number and operation, including important axioms such as the commutative and associative properties of addition and multiplication and the distributive property of multiplication over addition, that are foundational to formal algebra courses in secondary grades (BLANTON et al., 2006, p. 8).

baseada nas diferentes perspectivas para o pensamento algébrico estudadas e expostas nesta pesquisa.

Nesse sentido, uma vez que não podemos definir precisamente o que seja pensar algebricamente, a partir da literatura estudada, listaremos algumas características para o pensamento algébrico com o objetivo de reconhecer quando esse ocorre. Assim, consideremos que esse pensamento:

Quadro 3- Caracterização para o pensamento algébrico baseado na literatura estudada.

não envolve necessariamente uma simbologia algébrica, de modo que pode ser desenvolvido em qualquer etapa escolar, ou seja, não tem como pré-requisito que o estudante apresente uma linguagem simbólica algébrica;
está presente em todos os campos da Matemática, como na álgebra, geometria, aritmética;
é algo interno ao estudante, de modo que não há uma relação de dependência com a tarefa proposta;
é um modo de pensar que envolve a construção da aprendizagem na medida em que o estudante vai produzindo relações e atribuindo significados para os conceitos a partir do que ele já sabe, ou seja, de seus conhecimentos prévios;
enfim, esse pensamento envolve: formulação de conjecturas; estabelecimento de relações; utilização de diferentes notações para uma mesma tarefa; estabelecimento de regularidades; algum processo de generalização; compreensão de propriedades matemáticas importantes, como a comutatividade na adição; agrupamento, classificação, ordenação, justificação e validação de ideias; etc..

Fonte: do autor

Com essa caracterização temos mais uma vez a intenção de enfatizar que é possível desenvolver o pensamento algébrico nos anos iniciais, uma vez que tal forma de pensamento não requer que o estudante apresente uma linguagem simbólica algébrica. Ao contrário, esse tipo de pensamento envolve a construção do pensamento matemático, tendo como objetivo que os estudantes pensem e reflitam sobre conceitos matemáticos fundamentais, de modo que raciocinem algebricamente a fim de que construam uma “[...] linguagem algébrica para expressar e justificar suas ideias” [32] (BLANTON et al., 2006, p. 8, tradução nossa).

Ao longo deste estudo apontamos e discutimos pesquisas que revelam características de pensamento algébrico manifestadas por estudantes dos anos iniciais, bem como, que a álgebra inicial desafia as limitações de desenvolvimento anteriormente postas sobre as crianças (BLANTON et al., 2006).

Já vimos que é decisivo que nas séries inicias sejam oportunizadas às crianças experiências as quais lhes façam refletir sobre conceitos matemáticos considerados fundamentais para a construção da aprendizagem da álgebra. Por exemplo, sempre que somarmos dois números pares, o resultado será um número par, ou sempre que dividimos um número par por dois a divisão será exata, ou seja, sobrará zero. Vale ressaltar que várias pesquisas apontam que estudantes dos anos iniciais são capazes de compreender tais conceitos (BRIZUELA, 2006), uma vez que os estudantes dos primeiros anos “[...] podem usar números para responder ao problema, identificar a regularidade que se verifica e apresentá-la de um modo geral, sem recorrer à simbologia algébrica [...]” (PONTE; BRANCO e MATOS, 2009, p. 36).

Cabe destacar que durante o estudo da fundamentação teórica já explicitada ao longo desse primeiro capítulo, existiu a necessidade de entendermos como ocorre o processo de construção desse pensamento na criança, uma vez que as crianças “[...] não avançam subitamente da expressão isenta de símbolos para a notação escrita convencional [...]” (BRIZUELA, 2006, p. 72).

Dessa forma, mesmo que nesta pesquisa não tenhamos como intenção discutir sobre teorias que tratam sobre o desenvolvimento de processos de pensamento na criança, vale esclarecer que sentimos a necessidade de olhar para os estudos de Piaget e Vygotsky (2001), a fim de construirmos uma ideia sobre o desenvolvimento cognitivo. Faz-se relevante que nos questionemos a respeito de como o raciocínio infantil evolui, ou seja, as trajetórias desse conhecimento, os pontos críticos desse processo (BRIZUELA, 2006).

[32] [...] ‘algebraic’ language for expressing and justifying their ideas (BLANTON et al., 2006, p. 8).

2 PROCEDIMENTOS ADOTADOS E TRAJETÓRIA DA PESQUISA

Este capítulo diz respeito ao caminho percorrido nesta investigação, o qual está dividido em três partes: os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa; o contexto e os sujeitos da pesquisa; e o método para a obtenção das informações.

Primeiro apresentamos a estratégia metodológica na qual nos baseamos, ou seja, a Análise de Conteúdo, sendo essa uma modalidade de pesquisa qualitativa. A seguir, expomos uma breve discussão referente ao contexto da pesquisa, o projeto - Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática. Por fim, apresentamos algumas considerações sobre os procedimentos e escolhas adotados como, por exemplo, a natureza das tarefas utilizadas.

Partindo do objetivo de levantar reflexões acerca de aspectos que envolvem características de pensamento algébrico nas produções escritas de estudantes dos anos iniciais, nesta investigação temos como intenção responder a questão: que características de pensamento algébrico são manifestadas por estudantes do Ensino Fundamental I na resolução de tarefas da *Early Algebra*?

Para responder a essa pergunta, analisamos o modo como os estudantes se comportaram durante a aplicação de oito tarefas e também, como eles lidaram com tarefas que podem promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, bem como, analisamos as produções escritas referentes às oito tarefas.

2.1 A ESCOLHA METODOLÓGICA

Com a finalidade de atender o objetivo de nosso estudo, escolhemos por uma pesquisa de natureza qualitativa, de cunho interpretativo, sendo que, segundo Bogdan e Biklen (1982) “envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes” (p. 13).

Além disso, para Bogdan e Biklen (1982) “a pesquisa qualitativa tem seu ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento”.

Nesse sentido, consideramos que essa metodologia é adequada à pesquisa, uma vez que a pesquisadora foi o principal instrumento tanto na coleta como também na análise dos dados. Ainda, a pesquisadora teve o contato direto com o ambiente e situação estudada que, nesse caso, com trinta e sete estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Apucarana – PR.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, a preocupação foi com o processo e não com o produto, bem como a observação de como os estudantes se manifestam no decorrer da resolução das tarefas. Dessa forma, a abordagem qualitativa oferece os meios para que esta pesquisa seja realizada de acordo com os objetivos propostos.

Para organização, análise e interpretação das informações foram utilizados procedimentos à luz da Análise de Conteúdo, a qual se configura como uma das modalidades da pesquisa qualitativa. Na sequência apresentaremos uma breve síntese de como se estrutura a Análise de Conteúdo a fim de justificar tal escolha, uma vez que há diversas metodologias de análise de dados.

Bardin (2004) apresenta a Análise de Conteúdo como:

> [...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (várias inferidas) destas mensagens (p. 37).

Esse método de análise tem como finalidade a inferência sobre o fenômeno em estudo, bem como, procura compreender os sujeitos, o contexto e o intervalo de tempo. Busca entender o que está por trás das palavras.

Segundo Bardin (2004), as fases da Análise de Conteúdo organizam-se em torno de três polos cronológicos: a pré-análise; a exploração do material e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

A pré-análise constitui-se como um primeiro contato com os dados, um primeiro olhar. É o momento de organização do material que será submetido à análise, em que surgem as primeiras impressões, na qual se estabelecem as hipóteses e objetivos da investigação.

Esse primeiro olhar recebe o nome de "*leitura flutuante*" (Bardin, 2004), na qual estão as impressões e orientações que surgem numa leitura inicial. Depois desse mergulhar nos dados, o pesquisador estabelece o universo a ser investigado, bem como, constitui as informações essenciais para o desenvolvimento da pesquisa, a qual, denomina-se "*corpus*".

O *corpus* de uma pesquisa é todo o conjunto de informações, o banco de dados constituído essencialmente de produções textuais, sendo os textos entendidos como produções linguísticas referentes a determinado fenômeno, incluindo imagens e outras produções. A composição do *corpus* requer escolhas, seleção e regras, de modo que se produza um conjunto de documentos adequado para ser analisado e que produza resultados válidos. Assim sendo, após delimitar o *corpus*, então se inicia o ciclo da pesquisa.

No que diz respeito à exploração do material, essa etapa é muitas vezes longa e enfadonha, pois incide de procedimentos aplicados aos dados, ou seja, "consiste essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração, em função de regras previamente formuladas" (BARDIN, 2004, p. 95).

Esta fase é importante, tendo em vista que no desenvolvimento da pesquisa o pesquisador retorna com intensidade ao *corpus*, portanto, esse deve estar organizado.

No terceiro polo cronológico, o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação, ao final de uma pesquisa, o pesquisador expressa por meio de texto as principais ideias que surgiram das análises. Apresentam-se os argumentos do investigador, tendo a finalidade de comunicar as novas compreensões e significados alcançados, bem como, os significados construídos a partir das análises.

Em relação ao pesquisador, ele deve ter um papel ativo durante todo o processo, pois é o responsável pela construção dos significados que emergirem do texto. Envolve a subjetividade, suas impressões, sendo que vai além de uma leitura superficial, abarca um esforço, a procura de compreensões mais aprofundadas.

A partir do que fora exposto, esse método de análise faz-se apropriado para esta investigação, uma vez que procura compreender o que está por trás das palavras, tendo como finalidade a inferência sobre o fenômeno em estudo, bem como as análises das produções escritas dos estudantes e o envolvimento dos mesmos durante a aplicação das oito tarefas.

2.2 O Contexto da Investigação

O contexto da investigação se deu em uma escola pública do município de Apucarana - PR, a qual está envolvida no Programa Observatório da Educação, uma vez que a pesquisadora é integrante do projeto: Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática.

O projeto "Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática" tem como objetivo geral desenvolver estudos e pesquisas que promovam a produção acadêmica referente à formação de professores que ensinam Matemática. Além da formação de recursos humanos em Educação Matemática na Educação Básica, na Graduação e na Pós - Graduação (mestrado e doutorado), que colaborem para a elevação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB, objetiva, especificamente, investigar como contextos de formação, caracterizados como uma Comunidade de Prática de Professores que ensinam Matemática, formada por pesquisadores, futuros professores de Matemática, e professores de Matemática que atuam na Educação Básica, colaboram para aprendizagem de professores.

De tal modo, propõe no Edital n. º 38/2010/CAPES/INEP os seguintes objetivos específicos:

> ▪ Fortalecer o diálogo entre pesquisadores da área de Educação Matemática do PECEM, estudantes de mestrado e de doutorado do PECEM, estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UEL e professores que ensinam Matemática de Escolas da Rede Pública de Ensino do Paraná, por meio da formação de grupos de trabalho que desenvolvam atividades acadêmicas voltadas para o diálogo qualificado entre esses dois níveis de escolaridade.
> ▪ Investigar aspectos relativos à formação continuada desencadeados pelo diálogo entre os participantes para adoção de uma agenda de trabalho colaborativo e constituição de uma Comunidade de Prática de Professores que ensinam Matemática formada por pesquisadores, futuros professores de Matemática e professores de Matemática que atuam na Educação Básica.
> ▪ Investigar contextos em que os participantes desenvolvam sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, e comunicar suas idéias matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem e interpretam problemas em uma variedade de situações.
> ▪ Propiciar um campo de investigação e formação profissional para os estudantes do PECEM e do curso de Licenciatura em Matemática, baseado na articulação entre teoria, prática docente e investigação, de modo a gerar uma reflexão sobre conteúdos matemáticos e, do modo como estes conteúdos se transformam em ensino.
> ▪ Fomentar, disseminar e desenvolver metodologias de prática de ensino significativas, para enfrentamento dos problemas na área de Matemática. (CYRINO, 2010, p. 3)

Assim, para atender aos objetivos propostos, participam do projeto duas escolas públicas da Educação Básica, uma na cidade de Apucarana - PR e outra localizada na cidade de Paranavaí - PR, sendo que esta pesquisa desenvolveu-se na escola de Apucarana.

O projeto teve início em março de 2011, contando com reuniões semanais, com duração de aproximadamente três horas. No primeiro semestre de 2011, participávamos do projeto na condição de observadores, ou seja, observávamos uma das ações colaborativas do projeto e produzíamos as memórias dos encontros. Essa ação conta com a participação de uma professora estudante de doutorado que faz parte do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL. Nesses encontros eram realizadas discussões com nove professoras do Ensino Fundamental I, sendo tais encontros conduzidos pela pesquisadora doutoranda.

Esses estudos foram trabalhados em contextos de formação continuada de professores que ensinam Matemática, nos quais estão envolvidos pesquisadores, futuros professores de Matemática, professores de Matemática que atuam em escolas públicas de Educação Básica e uma estudante de Pedagogia.

Nas reuniões observadas foram desenvolvidos estudos sobre estratégias de enfrentamento às dificuldades de ensino e de aprendizagem da Matemática, nomeadamente aos pensamentos algébrico e geométrico, no Ensino Fundamental I, considerando informações fornecidas por meio da Prova Brasil [33], do PISA, SAEB e da *Early Algebra*.

Esses encontros têm como finalidade investigar contextos nos quais os participantes desenvolvam sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, e comunicar suas ideias matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem e interpretam problemas em uma variedade de situações.

2.3 Procedimentos para Obtenção das Informações

---

[33] A Prova Brasil é uma avaliação das escolas públicas, na qual foi criada em 2005 tendo como finalidade avaliar as habilidades de estudantes do Ensino Fundamental (5º e 9º anos) em Língua Portuguesa (foco em leitura) e Matemática (foco na resolução de Problemas). Já o Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB teve a primeira aplicação em 1990 no qual objetiva avaliar as habilidades de estudantes do Ensino Fundamental (5º e 9º anos) e estudantes do 3º Ano do Ensino Médio em Língua Portuguesa (foco em leitura) e Matemática (foco na resolução de Problemas). O Programa para Avaliação Internacional de Estudantes- PISA foi lançado em 1997 sendo que procura medir a capacidade dos jovens de 15 anos para usarem os conhecimentos que têm de forma a enfrentarem os desafios da vida real, em vez de simplesmente avaliar o domínio que detêm sobre o conteúdo do seu currículo escolar específico.

Como já mencionado no item anterior deste capítulo, no primeiro semestre de 2011 participamos semanalmente das reuniões ocorridas na escola, tanto na condição de observadoras das reuniões, das quais era produzido o relato do dia, quanto em alguns encontros na sala de aula desenvolvendo tarefas com os estudantes. Cabe dizer que durante as reuniões dirigidas pela pesquisadora de doutorado, sete estagiários, sendo alguns bolsistas de iniciação científica vinculados ao projeto, e outros colaboradores graduandos do curso de Licenciatura em Matemática, com exceção de uma, que cursava pedagogia, desenvolviam tarefas matemáticas com as seis turmas da escola.

No entanto, a partir do segundo semestre, uma vez que já tínhamos delimitado os instrumentos para a realização da investigação, fomos para a sala de aula ter um primeiro contato com a turma a qual seria submetida à análise, o 5º ano. Justificamos a escolha dessa classe, pois julgamos que esses estudantes não tiveram contanto com uma linguagem simbólica algébrica, no entanto, apresentam habilidades de leitura, o que, por exemplo, o 1º e 2º ano não apresentam. Tomamos isso como critério de escolha tendo em vista que se fazem indispensáveis as habilidades de leitura e escrita para a resolução das tarefas aplicadas, considerando a intenção de não interferir no momento em que estivessem resolvendo-as, nem mesmo para fazer uma leitura.

As tarefas foram realizadas na perspectiva da *Early Algebra*, sendo que, no projeto citado, são desenvolvidos materiais sobre a álgebra do Ensino Fundamental que tratam de vários temas matemáticos como, por exemplo, números, símbolos, comparações, etc., focando na aprendizagem e raciocínio dos estudantes.

Esses materiais são disponibilizados em um *website*, e são totalmente interativas, proporcionando “ideias para discussões” na sala de aula. Essas aulas não têm como objetivo aumentar a quantidade de materiais matemáticos, pelo contrário, a partir de pesquisas realizadas com estudantes do Ensino Fundamental, essa área de pesquisa mostra a importância de introduzir a álgebra nos anos iniciais. De acordo com o grupo de pesquisadores desse campo de pesquisa, é possível ensinar álgebra desde cedo a fim de que as crianças desenvolvam representações de suas ideias de modo a ajudar a construir seu raciocínio.

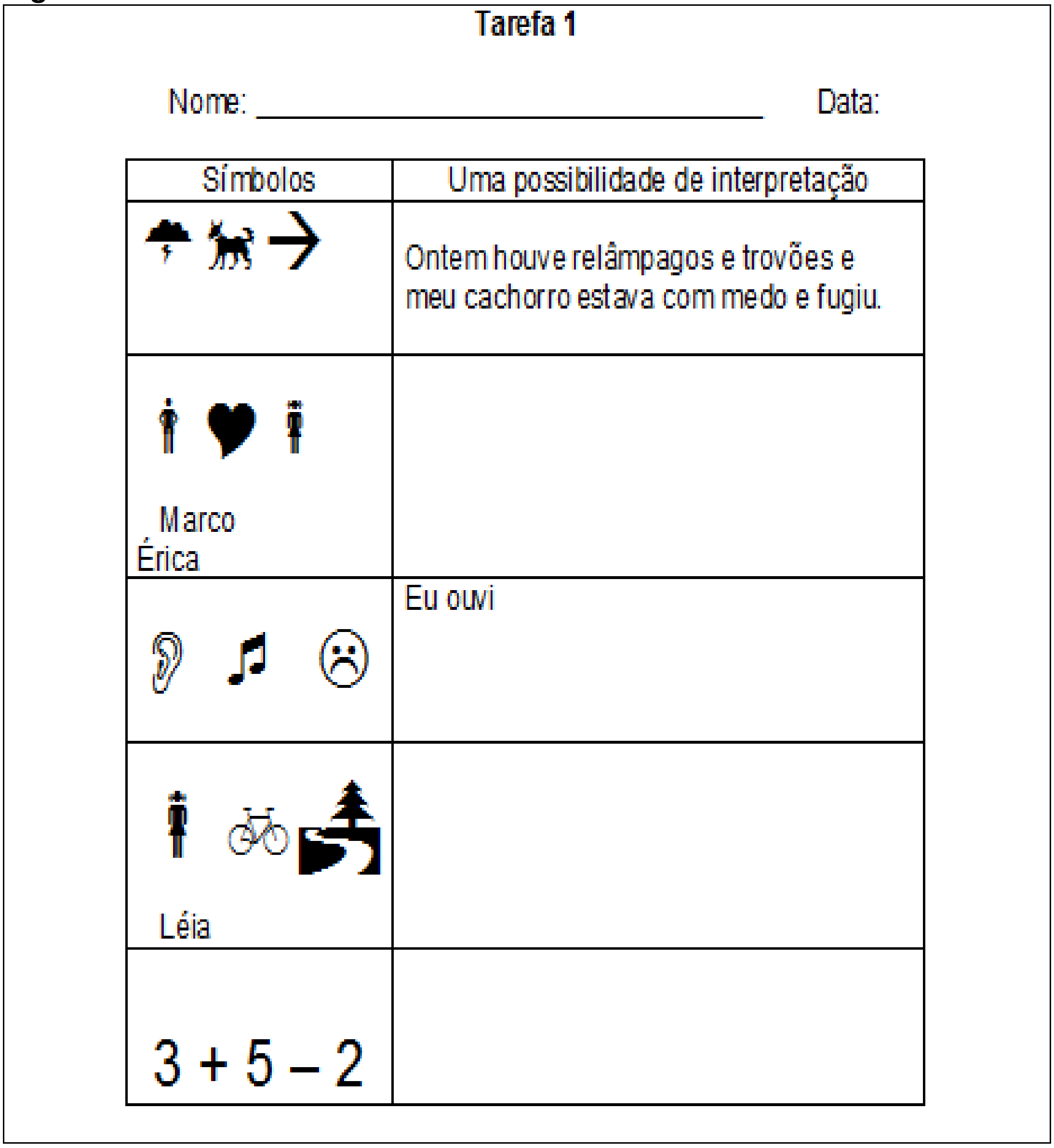
Vale ressaltar que decidimos não aplicar as tarefas relacionadas à pesquisa no primeiro dia em que tivemos contato com a turma, pois nesse primeiro momento almejávamos perceber o comportamento dos estudantes, suas atitudes, enfim, estabelecer uma primeira influência a fim de nos orientarmos para as próximas aulas.

A partir disso, foram aplicadas oito tarefas a uma turma do 5º ano, a qual era composta por 37 estudantes, tendo como finalidade verificar como esses estudantes lidam com tarefas que podem promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Os instrumentos utilizados foram diário de campo e registros escritos produzidos pelos estudantes na resolução das tarefas propostas. O diário de campo foi importante durante a investigação, pois, por meio dele, foi possível registramos informações fundamentais do contexto em questão. Concordamos com Fiorentini e Lorenzato (2006) quando afirmam que o diário de campo é um dos instrumentos mais ricos na coleta de informações, pois é "[...] nele que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos" (p.118-119).

No desenvolvimento das tarefas, os estudantes foram direcionados a resolverem individualmente sem a interferência da pesquisadora. A seguir apresentaremos as tarefas em ordem cronológica, conforme mostram as figuras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Ainda, seguida de cada tarefa, listaremos os objetivos propostos, os quais foram indicados pelo site da *Early Algebra.*

Figura 2 - Tarefa 1



Tarefa 1

Nome: ______________________________ Data:

Símbolos	Uma possibilidade de interpretação
	Ontem houve relâmpagos e trovões e meu cachorro estava com medo e fugiu.
Marco Érica	
	Eu ouvi
Léia	
3 + 5 – 2	

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Objetivos da tarefa:

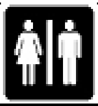
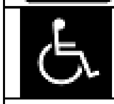
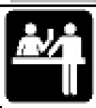
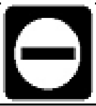
- A tradução de símbolos como meio de comunicação.

Figura 3 - Tarefa 2

Tarefa 2

Nome: ______________________________ Data: __________

Os seguintes sinais podem ser encontrados em uma estação rodoviária ou aeroporto.

Símbolos	Minha interpretação
	
	
	
	
	
	
	
	

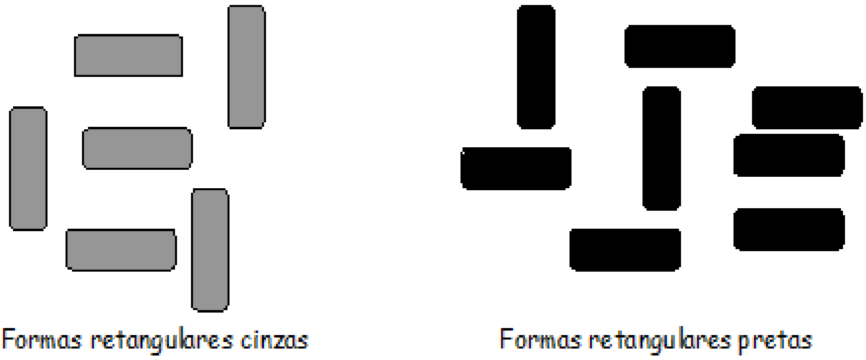
Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Objetivos da tarefa:

- A tradução de símbolos como meio de comunicação.

Figura 4 - Tarefa - 3

Nome: ______________________________ Data:________



José não sabe contar. Como ele pode fazer para saber se existem mais formas retangulares cinzas ou pretas?

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Objetivos da tarefa:

- Trabalhar com as diferenças entre duas quantidades discretas.
- Representar quantidades discretas como segmentos de linha.
- Trabalhar com composição de medidas.

Figura 5 - Tarefa 4

Tarefa 4

Nome: ______________________________Data:________

João e Maria têm uma caixa de doces cada um.
João tem uma caixa e um doce em cima dela.
Maria tem uma caixa e três doces em cima dela.
Dentro das duas caixas têm exatamente o mesmo número de doces.

Desenhe ou escreva algo que compare quantos doces João e Maria têm.

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Objetivos da tarefa:

- Desenvolver uma estratégia e uma notação para encontrar a quantidade total de doces a partir da quantidade de balas em cada caixa.

- Trabalhar a partir do número total de doces (ambas as caixas, mais os doces extras que Maria e João têm), a fim de determinar a quantidade de doces de cada criança.

- Trabalhar com a ideia da função, $n \rightarrow 2n + 4$, *ou* $n \rightarrow (n + n) + 4$, em que n se refere ao número de doces dentro de cada caixa e $2n + 4$ refere-se ao número total de doces de João e Maria. É também objetivo que lidem com a relação inversa, ou seja, $n \rightarrow (n - 4) \div 2$ ou $n \rightarrow (n \div 2) - 2$.

Figura 6 - Tarefa 5

Tarefa 5

Nome: ______________________________________data: ______

	Saída		
Entrada	Adicione 3 a entrada	Subtraia 2 a entrada	Multiplique por 3 a entrada
3			
7			
10			
	9		
		9	
			9
100			
101			
N			

Qual é a primeira regra? ____

Qual é a segunda regra? ____

Qual é a terceira regra? ____

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Objetivos da tarefa:

- Interpretar funções simples de adição e suas inversas.
- Interpretar e produzir tabelas.
- Produzir expressões algébricas.

Figura 6 - Tarefa 6

Tarefa 6

Nome: ______________________________data: ______

Agora você cria a regra...

	Saída		
Entrada	1ª regra	2ª regra	3ª regra
100			
101			
10			
	14		
		14	
			14
15			
6			
n			

Qual é a primeira regra? ______________________________

Qual é a segunda regra? ______________________________

Qual é a terceira regra? ______________________________

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Objetivos da tarefa:

- Interpretar funções simples de adição e suas inversas
- Interpretar e produzir tabelas.
- Produzir expressões algébricas.

Figura 7 - Tarefa 7

Tarefa 7

Nome: ______________________________ Data: ________

Talita e José fazem aniversário no mesmo dia (15 de julho).

Talita é exatamente cinco anos mais jovem do que José.

Complete a tabela para as idades de Talita e de José.

Quantos anos terá Talita quando José tiver 7 anos?

Quantos anos terá José quando Talita tiver 7 anos?

Idade de José	Idade de Talita	A diferença entre as idades deles
7		
	7	
8		
	10	
10		
	15	

Tarefa extra:

Vamos usar a letra k para significar a idade de José.

Se José tem k anos de idade, quantos anos terá Talita?

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Objetivos da tarefa:

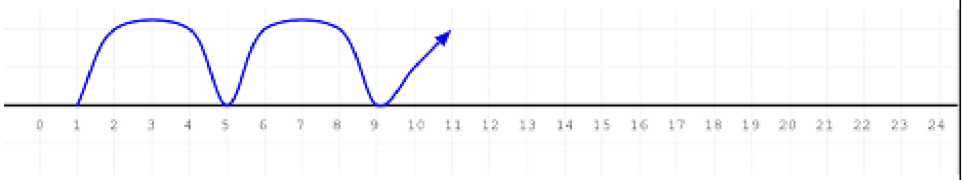
- Trabalhar com variáveis, tabelas de função e representação algébrica de variáveis.

Figura 8 - Tarefa 8

Tarefa 8

Nome: ______________________________data: ______

Descubra que regra segue o salto da curva na reta numerada.



Invente uma história que envolva essa regra.

"Antes de Tony começar a trabalhar tinha R$ 1,00 em seu cofrinho.
Então, ele ganhou R $ 4,00 por cada dia de trabalho. "

Escreva uma expressão matemática para mostrar essa regra.

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Objetivos da tarefa:

- Interpretar as inter-relações entre as diversas representações.
- Trabalhar com funções.
- Observar as relações entre o problema e a representação visual.

A justificativa de termos escolhido para nosso estudo essas tarefas e não outras, tendo em vista que no site da *Early Algebra* estão disponibilizadas mais de 100 tarefas organizadas em várias lições, procede da intenção de trabalhar com tarefas as quais não requerem necessariamente que o estudante apresente uma linguagem simbólica algébrica, como expressões algébricas, pois essas tarefas podem ser abordadas em qualquer momento da escolaridade.

Portanto, optamos por tais tarefas porque julgamos que as mesmas possibilitam aos estudantes a resolução sem a nossa interferência, uma vez que os sujeitos da pesquisa são estudantes do 5º ano (4ª série), então não tiveram contato com uma linguagem simbólica algébrica, e pretendíamos não intervir durante o desenvolvimento das tarefas.

Justificamos a quantidade de tarefas trabalhadas, pois considerando o número de estudantes investigados, avaliamos que oito tarefas seriam suficientes para o desenvolvimento da pesquisa, tendo em vista que o foco da investigação reside no modo como essa turma em questão lida com tarefas que podem promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Assim, o primeiro critério de escolha das tarefas foi quanto à linguagem, ou seja, para cada tarefa fizemos uma pré-análise a fim de entender se os estudantes poderiam resolvê-la sem ter como pré-requisito uma linguagem simbólica algébrica.

O segundo critério foi quanto aos objetivos de cada tarefa, porque tínhamos como intenção apresentar aos estudantes tarefas com um caráter “aberto” no sentido de que em alguns momentos eles teriam autonomia e criatividade para resolvê-las, precisando ler, interpretar e encontrar um caminho de resolução, por exemplo, na tarefa seis, em que cada um tem a liberdade de criar a sua regra.

Ainda, uma vez que tínhamos como propósito investigar como esses estudantes dos anos iniciais resolveriam tarefas as quais podem estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico, também consideramos como regra de seleção, que as tarefas de alguma forma provocassem os participantes da pesquisa a desenvolverem uma notação simbólica algébrica (por exemplo, a tarefa 8, a qual pede para os estudantes escreverem uma expressão matemática para mostrar a regra descrita na tarefa) e que contemplassem: interpretação; utilização de diferentes notações; estabelecimento de relações entre as informações da tarefa; variáveis; interpretação e produção de tabelas, entre outras.

Desse modo, as tarefas empregadas na pesquisa apreciam os critérios estabelecidos.

Cabe lembrar que essas tarefas *podem* promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, como já mencionamos. Entretanto, consideramos que o desenvolvimento desse pensamento não está na tarefa, mas sim que é algo interno ao estudante. De tal modo, uma tarefa pode parecer totalmente aritmética, porém esta pode proporcionar uma resolução que demonstre indícios de pensamento algébrico.

A fim de situar o cenário em questão, o quadro a seguir sintetiza as datas em que foram aplicadas as tarefas, os estudantes presentes em cada uma delas e as tarefas desenvolvidas.

Quadro 4 - Aplicação das tarefas

Datas dos encontros	Número de estudantes	Tarefas desenvolvidas
02-09-2011	35	1, 2 e 3
30-09-2011	35	4, 5 e 6
28-10-2011	34	7 e 8

Fonte: do autor

Adiante, justificaremos os intervalos entre a aplicação das tarefas.

3 DESCRIÇÃO DAS TAREFAS DESENVOLVIDAS PELOS ESTUDANTES

O presente capítulo contempla as descrições das aplicações das tarefas, ou seja, a recolha dos dados e os sujeitos da pesquisa.

3.1 Recolha dos Dados

Como já descrevemos, decidimos não aplicar as tarefas relacionadas à pesquisa no primeiro dia em que tivemos contato com a turma, pois neste primeiro momento almejávamos perceber o comportamento dos estudantes, suas atitudes, enfim, estabelecer um primeiro contato a fim de nos nortearmos para as próximas aulas.

Na sequência seguem as memórias das aulas com o intuito de melhor situar os sujeitos da pesquisa.

Relato das tarefas 1, 2 e 3 – 02 - 09 - 2011

A aula teve início por volta das 8h10min, na qual estavam presentes 35 estudantes, uma vez que esse foi o primeiro dia em que aplicamos as tarefas relacionadas à *Early Algebra*. No entanto, há duas semanas já havíamos trabalhado com esta turma.

Quando entramos na sala de aula, os estudantes estavam bastante agitados. A princípio, comunicamos que fariam uma tarefa um pouco diferente das outras que estavam acostumados a fazer, no sentido de que iriam resolver individualmente e sem a nossa interferência. Desse modo, as crianças mostraram-se um pouco assustadas, como se fossem fazer uma prova.

Diante disso, esclarecemos à turma que não se tratava de uma prova ou teste, e poderiam ficar tranquilos no momento em que estivessem resolvendo as tarefas. Também alertamos que era para cada um fazer o seu sem conversar com o colega, e sem se preocupar se estava errado ou não. Solicitamos aos estudantes que escrevessem tudo o que achassem necessário e, quando terminassem, recolheríamos a folha e a seguir, apresentaríamos a próxima tarefa.

Durante a resolução da primeira tarefa, tendo em vista que cada estudante recebeu uma folha com a tarefa impressa, as crianças conversavam excessivamente, de modo que algumas estavam atrapalhando as que se encontravam na resolução. Portanto, com frequência chamávamos a atenção da turma.

Em aulas anteriores, percebemos que havia uma considerável variação no tempo de resolução das tarefas, ou seja, alguns estudantes terminavam de resolver uma tarefa em dez minutos, enquanto outros levavam trinta a cinco minutos. De tal modo, para essa aula levamos outras tarefas com a finalidade de direcionar aqueles que resolvem primeiro, pois assim, não ficariam sem fazer nada. Vale ressaltar que esta turma é agitada, numerosa e heterogênea.

Com relação à tarefa um, os estudantes demonstraram tranquilidade na resolução. Apenas na última linha de símbolos, questionaram: *"tem que fazer a conta?", "como eu faço este, professora?", "escreve a conta ou só coloca o resultado?"*. Ante esses questionamentos tentamos influenciar o mínimo possível, e sempre articulávamos no sentido de escreverem o que de fato achassem que era. Em alguns momentos pronunciamos: "*escreva a sua interpretação! Não se preocupe se está correta ou não".*

Quando a maioria já havia entregado a tarefa um, então entregamos a próxima tarefa. Assim, surgiram alguns questionamentos: *"professora, você não vai corrigir a tarefa?", "a nossa professora corrige!", "eu quero saber a resposta correta!".*

Esse momento foi difícil, pois a turma não se conformava de fazer outra tarefa sem que tivéssemos feito a resolução da primeira tarefa na lousa. Também, mesmo em todo momento pedindo-lhes que fizessem silêncio e que permanecessem sentados, alguns se agitaram. Assim sendo, novamente comunicamos que essas tarefas eram um pouco diferentes do que estavam acostumados a resolver nas aulas regulares e que naquele momento não faríamos a correção. A seguir, depois de uns minutos discorrendo com a turma, entregamos a próxima tarefa.

Nessa tarefa, os estudantes descreviam não saber o significado de alguns sinais, então, novamente expusemos para escreverem a interpretação de cada um, ou seja, o que pensavam que poderia representar cada símbolo. Alguns começaram a raciocinar em voz alta*: "parece um caixa de supermercado", "não, parece que está pedindo informação", etc.* Mais uma vez, solicitamos silêncio e que cada um fizesse o seu.

Da mesma forma, quando a maioria entregou a folha contendo a segunda tarefa, entregamos a terceira.

Logo que apresentamos a tarefa, articularam: *“ahh, eu não sei fazer professora!”, “como eu faço, me explica?”, “o José não sabe contar, mas eu sei professora!”*. Da mesma forma como procedemos nas outras tarefas, sempre pronunciávamos que fizessem a leitura novamente e registrassem o que haviam entendido. Um estudante fez uma pergunta que consideramos interessante e diferente das outras*: “professora, qual a idade do José?”.* O mesmo mostrou-se espantado pela informação da tarefa de que o José não sabe contar.

Quando faltavam cinco minutos para dar o sinal do intervalo e tendo em vista que a maioria já havia terminado a tarefa, então entregamos aos que já haviam encerrado uma folha contendo um desenho para pintar. Quando deu o horário do lanche alguns não tinham terminado, então permanecemos na sala de aula alguns minutos para que terminassem.

Quando retornamos do intervalo, a turma nos indagou várias vezes a respeito da resolução das tarefas na lousa. Considerando o comportamento da turma, ou seja, a ansiedade e alteração, no restante da aula trabalhamos com outras tarefas a fim de que não comprometesse a resolução das tarefas selecionadas para a pesquisa.

Lembramos que a resolução das tarefas iniciou às 8h10min e encerrou às 9h20, aproximadamente. Nesse primeiro dia, com a aplicação das tarefas da pesquisa, foi complicado controlar os estudantes para que ficassem em silêncio e individualmente durante a resolução, além do que, a turma é numerosa, e a maioria nos solicitava atenção ao mesmo tempo.

Relato das tarefas 4, 5 e 6 – 30 - 09 - 2011

Vale ressaltar que ocorreu um intervalo de algumas aulas para a segunda aplicação das tarefas relacionadas à pesquisa, devido a alguns motivos, dentre os quais destacamos: no dia 09-09 a pesquisadora estava fora da cidade participando de um encontro relacionado à pesquisa; no dia 16-09 não tivemos aula por motivos internos da escola, e no dia 23-09 decidimos não aplicar as tarefas, o que detalharemos na sequência.

Nesse dia, logo no início da aula, percebemos que a turma encontrava-se agitada, pois no período da tarde teria um campeonato de vôlei na escola. Assim, por conta da movimentação dos estudantes, provocadas pela euforia e ansiedade do jogo, decidimos não aplicar as tarefas relacionadas à pesquisa a fim de não influenciar nas resoluções, pois durante toda a aula tivemos que chamar a atenção da turma que conversava. Desse modo, o desenvolvimento das tarefas ficou para a semana seguinte.

No dia 30-09 a aula teve início por volta das 8h05min, na qual estavam presentes 35 estudantes.

Nessa aula os estudantes estavam menos agitados em comparação à aula anterior. A princípio, comunicamos que dariam continuidade nas tarefas que haviam resolvido, ou seja, já resolveram as tarefas um, dois e três, então, nessa aula resolveriam mais três. Assim como no primeiro dia de aplicação das tarefas, optamos por entregá-las no início da aula, tendo em vista que após o intervalo as crianças já estão um pouco cansadas e também mais agitadas.

Diferentemente do primeiro dia em que trabalhamos com as tarefas, os estudantes não mostraram estar assustados com as mesmas, o que contribuiu no andamento da aula. Da mesma forma como nas outras tarefas, explicamos à turma para ficarem tranquilos no momento em que estivessem resolvendo. Também pronunciamos que era para cada um fazer o seu sem dialogar com o colega, e sem se preocupar se estava errado ou não. Pedimos que escrevessem tudo considerado necessário e, quando terminassem, recolheríamos a folha e a seguir, confiaríamos a próxima tarefa. Vale ressaltar que novamente preferimos trabalhar com essas tarefas individualmente, pois como já mencionamos, a turma é numerosa, entretanto o espaço físico da sala de aula é pequeno em relação ao número de estudantes, assim ficaria inviável trabalhar em grupos, além do tempo que levaria para organizá-los.

Durante a resolução da quarta tarefa, tendo em vista que cada estudante recebeu uma folha com a tarefa impressa, esses se mostraram tranquilos. A turma estava menos agitada do que nos outros dias. Refletimos que tal fato se deve pelo contanto estabelecido com as crianças, ou seja, aprendemos a lidar com a turma e, reciprocamente, as crianças se acostumaram conosco.

Com relação a essa tarefa, não houve dúvidas, durante a resolução compreendemos que a maioria estava desenhando, portanto demandaram um pouco mais de tempo em relação às outras tarefas.

No que diz respeito à tarefa cinco, evidenciaram bastante dúvida na resolução. Logo que entregamos a folha contendo a tarefa, nos interrogaram: *“tem que fazer a conta?”, “como eu faço este, professora?”, “tem que pôr números no* *espaço?", "e esse N, o que é isso?"* Ante esses questionamentos novamente tentamos influenciar o mínimo possível, e sempre comunicamos para escreverem o que entendessem. No entanto, em virtude da agitação da turma e diante das perguntas referentes à tarefa, fomos até a lousa e esclarecemos o que deveria ser feito. Proferimos que no quadro havia alguns valores de entrada e, para completar, os valores de saída teriam que seguir as regras estabelecidas no quadro. Por exemplo, o primeiro valor de entrada é 3, assim a primeira regra para o valor de saída diz para adicionar 3 a entrada, então temos 3 (entrada) + 3 = 6 (valor de saída), e assim por diante nas outras regras de saída.

Mesmo depois de resolvido a primeira linha do quadro com os estudantes, durante a resolução dessa tarefa a turma começou a conversar, mostrando-se ansiosa. Assim, em alguns momentos tivemos que interromper a resolução para exigir silêncio dos estudantes. Outro problema enfrentado é que todos ao mesmo tempo nos chamavam a carteira. Diante disso, dissemos que não era possível atendê-los ao mesmo momento, e os indagamos se concordavam, então, se precisassem, era para cada um levantar a mão que iríamos até os mesmos. Após essa conversa, a turma se acalmou.

Com frequência perguntaram*: "e quando não tem o valor de entrada?", "por que do número três já pula para o número100?", "o que é esse N?*". Cabe lembrar que o "N" na última linha do quadro causou dúvidas e um considerável estranhamento. Quando nos questionaram com relação a isso, descrevíamos que o "N"poderia ser outro número qualquer, e tomávamos como exemplo a linha anterior. Indagamos: *"na primeira regra, quanto você adicionou ao número 101?", "que número obteve para o valor de saída?", "então, e para o N, agora esta é a entrada, qual é a primeira regra para o valor de saída?", etc.*

Nesse momento, em algumas carteiras, ficamos felizes, pois depois desses questionamentos, diziam*: "ahhh, então se a regra é adicione três à entrada e o valor é N, então fica N+3!"*

Ao terminarem a resolução, deu o horário pra o lanche, por volta das 9h15min. Cabe lembrar que por conta da variação do tempo durante a resolução das tarefas, levamos algumas tarefas extras para aqueles que terminavam antes.

Quando retornamos do intervalo, mesmo optando por não aplicarmos as tarefas após o lanche, nesse dia fugimos à regra, pois a tarefa seis estava relacionada com a tarefa cinco, e se aplicássemos outro dia, teríamos que retomar a explicação.

Quando a turma se acomodou em suas carteiras, orientamo-los que fariam mais uma tarefa da sequência, e mais uma vez solicitamos para que ficassem em silêncio e sem levantar do lugar. Como quase toda a turma pedia ao mesmo tempo para ajudar na entrega da tarefa, então, desde o primeiro dia de aula, fizemos uma lista dos que queriam colaborar, e essa lista valeu para as outras aulas. No entanto, alguns estudantes ainda queriam ajudar em todas as aulas. Na sequência entregamos a tarefa seis.

Surgiram então alguns questionamentos: "*como eu vou criar a regra?", "que regra professora?", "eu não sei, explica!".* Assim, como a dúvida era geral, fomos à lousa e explicamos que na tarefa anterior já tinham as regras, porém nesta tarefa eles iriam criá-las, ainda, esclarecemos que poderia ser uma regra utilizando uma adição, subtração ou divisão, por exemplo. Enfatizamos que cada um escolheria a sua regra e aplicaria aos valores de entrada. E, em seguida, deveriam escrever quais regras criaram.

Percebemos que quase todas as crianças não sabiam o significado da palavra "adição", estes perguntaram: "*adição é de mais?".*

Após terminarem a tarefa, surgiram novamente os questionamentos: *"professora, você não vai corrigir a tarefa?", "a nossa professora corrigi!", "eu quero saber a resposta correta!"*. Novamente explicamos que essas tarefas eram um pouco diferentes daquelas que estavam acostumados e naquele momento não faríamos a correção.

A seguir, depois de uns minutos conversando com a turma, recolhemos a tarefa e continuamos a aula.

Relato das tarefas 7 e 8 – 28 - 10 - 2011

Tivemos um intervalo de algumas aulas para a terceira aplicação das tarefas relacionadas à pesquisa, devido a alguns motivos, dentre os quais ressaltamos: no dia 07-10 fizemos uma programação diferente, levamos um vídeo para os estudantes e algumas tarefas diferenciadas; no dia 14-10 as professoras pediram para aplicarmos uma olimpíada interna da escola, e no dia 21-10 os estudantes tiveram uma palestra na sala de aula com dois policiais, relacionada a “comportamento”.

No dia 28-10 a aula teve início por volta das 8h20min, na qual estavam presentes 34 estudantes.

Assim como nos outros dias, os estudantes resolveram as tarefas sete e oito individualmente. Neste encontro, a turma estava mais calma, comparado as outras aulas em que aplicamos as tarefas.

Referente à tarefa sete, num primeiro momento foi bastante tranquilo. Na primeira parte, ou seja, quando estavam completando o quadro com as idades de José e Talita, os estudantes não evidenciaram dúvidas. Entretanto, na resolução da segunda etapa, em que aparece a letra “k”, fizeram questionamentos: *“o que é este “k”, professora?”, “como assim, José tem k anos?”, “eu não sei fazer este?”, “que esquisito isso?”*, entre outros.

No entanto, durante os questionamentos, um estudante profere em voz alta: *“ai gente, que falação, vocês não lembram? É a mesma coisa do N do problema da outra aula!!”*

Assim, diante desse comentário, percebemos que alguns estudantes lembraram-se da outra tarefa, porém, alguns demonstraram não se recordar. Aos que não lembraram, fomos passando nas carteiras sempre que possível os indagando: *“quantos anos José é mais velho do que Talita?”, “se, por exemplo, Talita tiver 11 anos, qual será a idade de José?”, “então, se José tiver K anos, Talita terá quantos anos?”, etc.*

Notamos que parte da turma não entendeu a segunda parte da tarefa, devido ao símbolo K.

Após terminarem essa tarefa entregamos a folha contendo a tarefa oito. Cabe ressaltar que neste momento dois estudantes se retiraram da sala de aula por motivos pessoais. Um deles precisou sair com o pai e o outro se retirou para tomar remédio. Assim, 32 estudantes participaram dessa tarefa.

Nessa tarefa a turma mostrou dúvidas. Mostraram estranhamento com relação ao desenho da curva na reta numerada. Contudo, fizemos o possível para não influenciar na resolução, e mesmo percebendo as dúvidas deles, deixamos que resolvessem a tarefa sozinhos.

Alertamos várias vezes que era para fazer com calma e para não se preocuparem se a resolução estaria correta ou não. Essa informação procede ao fato dos estudantes apontam medo de errar. Assim, não queríamos que ficassem presos a isso.

A maioria dos meninos dizia que não queriam inventar uma história. Assim, convencemos que era importante, pois a tarefa pedia isso.

Depois que terminaram a tarefa, logo deu o horário para o lanche.

É importante dizer que as tarefas para a pesquisa se encerraram nessa aula, porém continuamos o trabalho com a turma até o encerramento do projeto nesse ano.

Tendo posse dos dados coletados, bem como, definido o *corpus* da pesquisa, a próxima etapa consiste na análise da produção escrita dos estudantes, ou seja, compõe dos procedimentos aplicados aos dados e de algumas inferências e interpretações mais aprofundadas suscitadas na busca de interpretações e significados construídos a partir das análises.

4 ANÁLISE - ALGUMAS INTERPRETAÇÕES

Este capítulo contempla uma discussão referente às análises, interpretações e inferências a respeito: das estratégias e procedimentos utilizados pelos estudantes ao resolverem as tarefas; das características de pensamento algébrico que os participantes da pesquisa mostram por meio da sua produção escrita e da questão estudada. Por fim, seguem alguns resultados do trabalho, bem como, indícios de futuras pesquisas a serem alcançadas com relação ao pensamento algébrico elementar.

De acordo com as fases da análise de conteúdo, neste momento iniciaremos a fase de exploração do material que será submetido às análises. Neste capítulo, apresentaremos as unidades de registro (agrupamentos) que surgiram a partir de uma leitura flutuante dos dados; as categorias emergentes e por fim, passamos para a terceira etapa da pesquisa, o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. Esta última etapa incide nas principais ideias, compreensões e significados que surgiram das análises.

Na seção 4.1 apresentaremos a organização do material, ou seja, desde os procedimentos aplicados aos dados até a construção das unidades de registro, os agrupamentos compostos por elementos considerados semelhantes.

A seção 4.2 constitui-se de uma primeira análise das unidades de registro construídas na seção anterior. Apresentaremos os significados e impressões que emergiram do texto.

A seção 4.3 compõe as categorias que surgiram a partir das unidades de registro, num processo de refinamento, a fim de sintetizar os dados.

4.1 Agrupamentos x Análises

Para este trabalho constituímos um acervo composto de registros escritos referentes a oito tarefas e, a partir da pré-análise, um *corpus* de 276 registros escritos.

No que diz respeito à exploração do material, como já referido, é nesta fase, a partir de uma intensa impregnação, que surgem as unidades de registro. Assim, após uma leitura flutuante, isto é, um mergulhar nos dados nos quais aparecem as impressões de uma leitura inicial, começamos o ciclo da pesquisa. Cabe esclarecer que antes de iniciarmos os agrupamentos, as resoluções de cada tarefa foram codificadas, como E1, E2,..., E35, em que E1 significa a resolução do estudante um. Essa codificação dos registros escritos para cada tarefa foi aleatória, uma vez que não teve um critério de classificação. Também é importante elucidar que o estudante E1 da tarefa um não é necessariamente o mesmo estudante E1 da tarefa dois, por exemplo.

Na sequência, após o vaivém nos dados, agrupamos as resoluções de cada tarefa, consideradas por nós semelhante e, posteriormente, fizemos a descrição de cada grupo de resolução formando as unidades e subunidades de registro. É importante destacar que toda produção escrita foi cuidadosamente descrita (desenhos, rabiscos, operação, observação, descrição, representação, etc.).

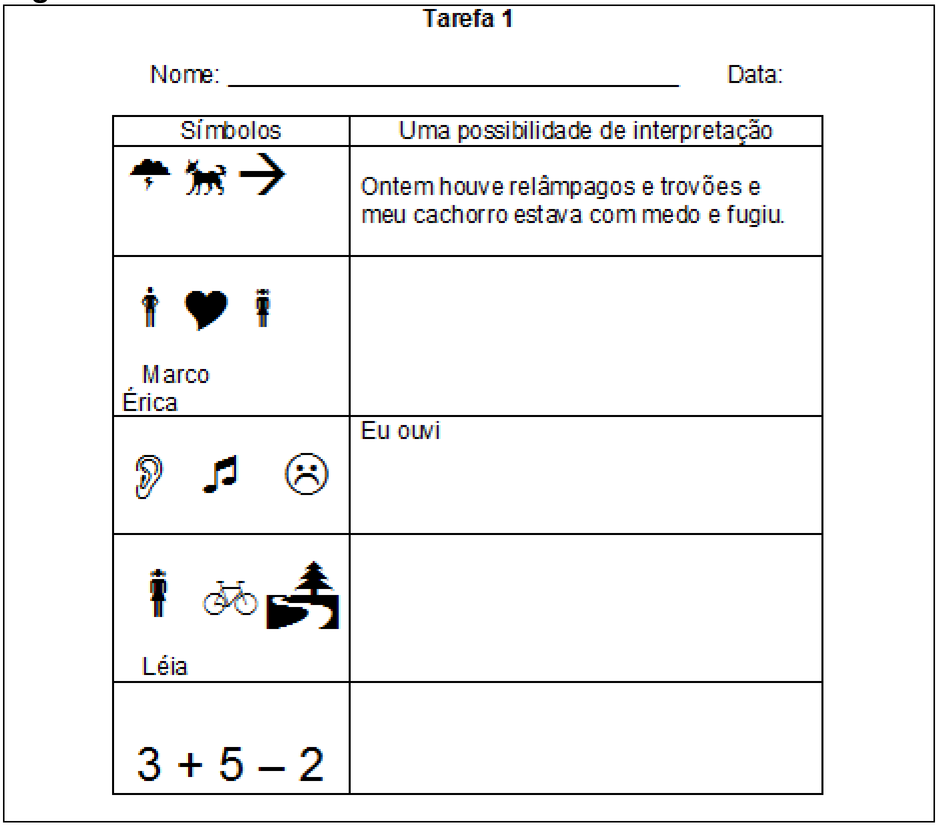
Diversas vezes retornávamos ao *corpus* da pesquisa, sendo que em alguns casos, a cada novo olhar tínhamos uma interpretação distinta da anterior. Assim, esse movimento de intensa exploração e dedicação foi se refinando até compormos as unidades de registro, as quais representam uma síntese dos procedimentos, estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução de cada tarefa.

Também se faz necessário ressalvar que além das unidades de registro, compostas pelas resoluções dos estudantes que consideramos "próximas", como já mencionamos, durante o movimento de exploração do material, descrevemos o comportamento, reação dos estudantes na apresentação e resolução de cada tarefa. Justificamos a composição desses relatos, uma vez que optamos por uma pesquisa de natureza qualitativa, e para organização, análise e interpretação dos resultados, a Análise de Conteúdo. Este método de análise tem como finalidade a inferência sobre o fenômeno em estudo, bem como, procura compreender os sujeitos, o contexto e o intervalo de tempo. Ainda cabe lembrar que temos por objetivo investigar como essas crianças que não tiveram contato com uma linguagem simbólica algébrica lidam com tarefas que podem promover o desenvolvimento desse pensamento, analisando as atitudes, indagações, produções escritas, enfim, o envolvimento desses estudantes durante a aplicação das oito tarefas.

Desse modo, seguem as unidades de registro (agrupamentos), tendo em vista que emergiram dos dados coletados. Ressaltamos que não construímos agrupamentos referentes às resoluções da tarefa dois em virtude desta ter como objetivo a interpretação de sinais, porém, posteriormente, seguem os comentários e inferências.

A seguir, iniciamos nossa discussão referente à tarefa1, representada pela figura 9.

Figura 9 - Tarefa 1



Tarefa 1

Nome: ________________________________ Data:

Símbolos	Uma possibilidade de interpretação
	Ontem houve relâmpagos e trovões e meu cachorro estava com medo e fugiu.
Marco Érica	
	Eu ouvi
Léia	
3 + 5 – 2	

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Nas primeiras quatro linhas de símbolos as respostas dos estudantes foram bastante similares, as quais serão apresentadas e detalhadas posteriormente, junto às interpretações e inferências, não apresentaremos agrupamentos. No entanto, observamos diferenças quanto às respostas referentes à linha cinco. Desse modo, segue os agrupamentos a respeito da expressão numérica (3 + 5 – 2).

Agrupamentos - 35 registros escritos

A- Fez uma descrição, mas não apresentou resultado.

A_1- Apenas descreveu a expressão numérica, por exemplo, “três mais cinco menos dois”.

A_2- Relacionou ou descreveu que a expressão numérica é uma expressão matemática.

A_3- Relacionou a expressão numérica com um algoritmo.

A_4- Fez outra descrição.

B- Apresentou um resultado.

B_1- Apresentou um resultado utilizando a linguagem matemática.

B_2- Apresentou um resultado utilizando a linguagem natural.

B_3- Apresentou um resultado utilizando a linguagem matemática e a linguagem natural.

Durante a resolução dessa tarefa os estudantes mostraram-se assustados como se fossem fazer uma prova, no entanto, depois de uma breve conversa, a turma demonstrou tranquilidade. Nas interpretações dos primeiros símbolos a turma não evidenciou dúvidas. Apenas na última linha de símbolos do quadro, questionaram: *"tem que fazer a conta?"; "como eu faço este, professora?"; "escreve a conta ou só coloca o resultado?"*.

No quadro 3 que segue, apresentamos os registros escritos dos estudantes dispostos nos agrupamentos descritos referentes à tarefa um.

Quadro 3 - Agrupamentos dos registros escritos referentes à tarefa 1

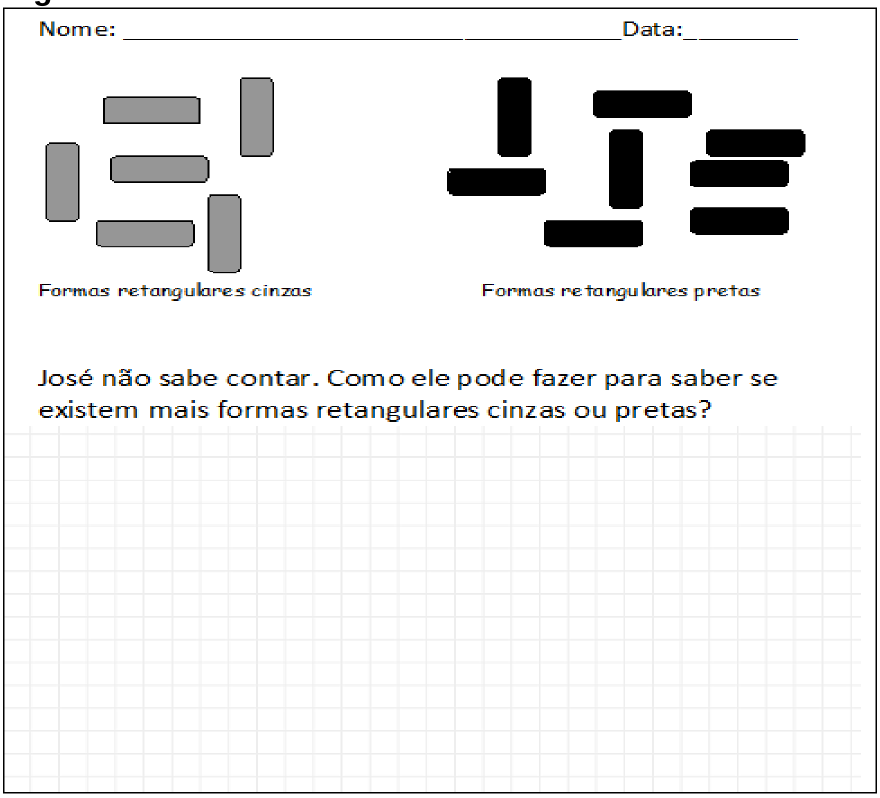
Agrupamentos		***Registros escritos em cada agrupamento***
A	**A_1**	E34, E15, E5, E**6**, E4, E2
	A_2	E**28**, E**10**, E7
	A_3	E33, E24, E23, E**29**, E30, E14, E8, E1, E**12**
	A_4	E21
B	**B_1**	E32, E**29**, E27, E35, E17, E**6**, E13, E3
	B_2	E31, E26, E25, E19, E11, E9
	B_3	E30, E**28**, E22, E20, E8, E**10**, E8, E**12**

Fonte: do autor

Para esta tarefa (figura 9, tarefa 1) não se utilizou a exclusão mútua, ou seja, uma mesma resolução pertence a agrupamentos distintos, como é o caso da resolução 28. É importante destacar que esta não foi uma escolha da pesquisadora, mas sim, emergiu do fenômeno em questão. Também, durante a exploração do material surgiram agrupamentos e subagrupamentos, os quais foram intitulados de A_1, A_2,..., B_1, B_2.

Na sequência, apresentamos a tarefa três, como mostra a figura 10, a fim de iniciarmos as discussões a respeito dos agrupamentos emergidos durante a exploração do material, ou seja, os trinta e cinco registros escritos.

Figura 10 - Tarefa 3


Nome: ____Data:__________

Formas retangulares cinzas

Formas retangulares pretas

José não sabe contar. Como ele pode fazer para saber se existem mais formas retangulares cinzas ou pretas?

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Agrupamentos – 35 registros escritos

A- Relacionou a contagem, mas não deixou explícito que contou.

B- Relacionou a visualização das formas retangulares; a quantidade.

C- Relacionou o espaço ocupado pelas formas retangulares.

D- Relacionou a cor.

E- Os que de fato contaram, ficou explícito.

F- Relacionou uma divisão por dois.

Na resolução dessa tarefa os estudantes demonstraram dúvidas. Uma parte deles indicou estranhamento com a afirmação da tarefa de que “José não sabe contar”, algumas afirmações e indagações foram: *“ahh, eu não sei fazer professora!”; “como eu faço, me explica?”; “o José não sabe contar, mas eu sei professora!”*.

A seguir, apresentamos o quadro 4, o qual compõe os registros escritos dos estudantes dispostos nos agrupamentos descritos referentes à tarefa três.

Quadro 4 - Agrupamentos dos registros escritos referentes à tarefa 3

Agrupamentos	***Registros escritos em cada agrupamento***
A	**E13**, E1
B	E31, E30, E29, E27, E16, E3, E2
C	E26, E15, E**12, E11, E9, E8, E7, E6**
D	E28, E24, E18, E**13, E12, E11**, E10, E**9, E8, E7, E6**
E	E35, E32, E23, E22, E17, E14, E5, E4
F	E33, E25, E21, E20, E19

Fonte: do autor

Para essa tarefa (figura 10, tarefa 3) também não se utilizou a exclusão mútua, ou seja, uma mesma resolução pertence a agrupamentos distintos, como é o caso da resolução 13. Além disso, é importante destacar que essa não foi uma escolha da pesquisadora, mas sim, emergiu do fenômeno em questão.

Dando continuidade a fase de exploração dos registros escritos, a seguir faremos a discussão dos agrupamentos que emergiram referente à tarefa quatro, conforme mostra a figura 11.

Figura 11 - Tarefa 4

Tarefa 4

Nome: ____________________________________Data:________

João e Maria têm uma caixa de doces cada um.
João tem uma caixa e um doce em cima dela.
Maria tem uma caixa e três doces em cima dela.
Dentro das duas caixas têm exatamente o mesmo número de doces.

Desenhe ou escreva algo que compare quantos doces João e Maria têm.

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Agrupamentos – 35 registros escritos

A- Desenhou uma caixa de doces para João e outra caixa de doces para Maria.

A_1- Desenhou a mesma quantidade de doces dentro da caixa de João e de Maria. Relacionou os doces que estão em cima das caixas, ou seja, desenhou os doces em cima das caixas.

A_2- Desenhou quantidades diferentes de doces dentro da caixa de João e de Maria. Não relacionou os doces que estão em cima das caixas, ou seja, não desenhou ou registrou algo que informa os doces que estão fora das caixas.

A_3- Desenhou a mesma quantidade de doces dentro da caixa de João e de Maria. Não relacionou os doces que estão em cima das caixas, ou seja, não desenhou ou registrou algo que informa os doces que estão fora das caixas.

A_4- Desenhou quantidades diferentes de doces dentro da caixa de João e de Maria. Relacionou os doces que estão em cima das caixas, ou seja, desenhou os doces em cima das caixas.

A_5- Não desenhou uma quantidade específica de doces dentro de cada caixa. Ficou explícito que dentro das duas há exatamente o mesmo número de doces. Relacionou os doces que estão em cima das caixas, ou seja, desenhou os doces em cima das caixas.

B- Desenhou mais de duas caixas de doces.

B_1- Considerou que Maria e João têm duas caixas de doces cada um, ou seja, Maria tem uma caixa com doces dentro dela, e outra caixa com três doces em cima. Analogamente para João.

B_2- Considerou que João tem uma caixa de doces e que Maria tem três caixas de doces.

C- Escreveu que João e Maria têm a mesma quantidade de doces. Não especificou quantidades.

D- Fez uma multiplicação e considerou o resultado como a quantidade de doces de João e Maria.

E- Escreveu que João e Maria têm a mesma quantidade de doces. Especificou uma quantidade de doces.

F- Relacionou uma divisão dos doces entre João e Maria. Não fez desenho nem operação

G- Outros.

No momento da resolução desta tarefa os participantes mostraram-se tranquilos, uma vez que a turma estava menos agitada do que nas aulas anteriores. No decorrer da resolução não fizeram questionamentos, percebemos a maioria desenhando, o que levou um pouco mais de tempo em relação às outras tarefas.

Já para essa tarefa (figura 11, tarefa 4) os agrupamentos foram excludentes, ou seja, cada resolução só se encaixa em um agrupamento. Esta escolha também não foi prévia, e sim insurgiu dos dados. Além disso, durante a exploração do material surgiram agrupamentos e subagrupamentos, os quais foram intitulados de A_1, A_2,..., B_1, B_2.

No quadro 5 que segue, apresentamos os registros escritos dos estudantes dispostos nos agrupamentos descritos referentes à tarefa quatro.

Quadro 5 - Agrupamentos dos registros escritos referentes à tarefa 4

Agrupamentos		***Registros escritos em cada agrupamento***
A	**A_1**	E24, E22, E21, E20
	A_2	E19, E34, E35, E25
	A_3	E32, E33
	A_4	E23, E28, E31, E27
	A_5	E26, E29, E30
B	**B_1**	E6, E4, E2
	B_2	E5, E3
C		E18
D		E10, E17
E		E16, E15, E14, E13, E12
F		E11
G		E1, E9, E8, E7

Fonte: do autor

A figura 12, a seguir, inicia a discussão da tarefa cinco, referente às unidades de registro criadas durante o processo de organização do material, bem como, os registros escritos dos trinta e cinco participantes da pesquisa.

Figura 12 - Tarefa 5

Tarefa 5

Nome: ______________________________________data: ______

	Saída		
Entrada	Adicione 3 a entrada	Subtraia 2 a entrada	Multiplique por 3 a entrada
3			
7			
10			
	9		
		9	
			9
100			
101			
N			

Qual é a primeira regra? ____

Qual é a segunda regra? ____

Qual é a terceira regra? ____

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Agrupamentos – 35 registros escritos

A- Completou o quadro utilizando um padrão. Aplicou as regras ao valor da coluna anterior e não ao valor de entrada, ou seja, apenas a primeira regra é aplicada ao valor de entrada.

A_1- Completou o quadro sempre recorrendo aos valores numéricos da coluna anterior e não ao valor de entrada, e, para o valor de entrada “N”, expressou uma linguagem simbólica algébrica. Demonstrou generalização. No entanto, a regra expressa para o valor de entrada "N" não corresponde ao padrão adotado no restante do quadro. Descreveu as regras do quadro.

A_2- Completou o quadro sempre recorrendo aos valores numéricos da coluna anterior e não ao valor de entrada e, para o valor de entrada "N", expressou uma linguagem simbólica algébrica. Demonstrou generalização. No entanto, a regra expressa para o valor de entrada "N" não corresponde ao padrão adotado no restante do quadro. Não descreveu as regras do quadro.

A_3- Completou o quadro sempre recorrendo aos valores numéricos da coluna anterior e não ao valor de entrada e, para o valor de entrada "N", completou com números, não demonstrando generalização. Descreveu as regras do quadro.

B- Não evidenciou um padrão ao completar o quadro e/ou ao descrever as regras do quadro.

C- Completou o quadro utilizando um padrão. Aplicou as regras ao valor de entrada, não recorrendo aos valores numéricos da coluna anterior. No entanto, para o valor de entrada "N", completou com números ou então não completou, não demonstrando generalização. Descreveu as regras do quadro.

D- Não evidenciou um padrão ao completar o quadro. Misturou duas regras, ou seja, ora aplicou as regras somente ao valor de entrada, ora aplicou as regras ao valor anterior e não ao valor de entrada. Descreveu as regras do quadro.

E- Outros.

No que diz respeito à tarefa cinco, os estudantes evidenciaram dúvidas durante a resolução. Logo que entregamos a folha contendo a tarefa, interrogaram-nos: *"tem que fazer a conta?"; "como eu faço este, professora?"; "tem que pôr números no espaço?"; "e esse N, o que é isso?".* Da mesma forma, com frequência nos perguntaram: *"e quando não tem o valor de entrada?"; "por que do número três já pula para o número100?"; "o que é esse N?*". Cabe lembrar que o "N" na última linha do quadro causou dúvidas e um considerável estranhamento.

No quadro 6, exibimos os registros escritos dos estudantes dispostos em cada agrupamento referentes à tarefa cinco.

Quadro 6 - Agrupamentos dos registros escritos referentes à tarefa 5

Agrupamentos		***Registros escritos em cada agrupamento***
A	**A_1**	E4, E2, E1
	A_2	E3
	A_3	E31, E33, E30, E29, E28, E27, E25, E24, E21, E18, E6, E7, E5
B		E22, E32, E35, E23, E12, E11, E10, E9
C		E13, E19
D		E15, E14
E		E34, E26, E20, E17, E16, E8

Fonte: do autor

Para essa tarefa (figura 12, tarefa 5), os agrupamentos foram excludentes, ou seja, cada resolução só se encaixa em um agrupamento. Essa escolha também não foi prévia, e sim emergiu dos dados. Ainda, durante a exploração do material surgiram agrupamentos e subagrupamentos, os quais foram intitulados de $A_{1,}$ $A_{2,}$ e $A_{3.}$

Na sequência, apresentamos a tarefa seis, como mostra a figura 13, a fim de iniciarmos as discussões a respeito dos agrupamentos emergidos durante a exploração do material, ou seja, os trinta e cinco registros escritos.

Figura 13 - Tarefa 6

Tarefa 6

Nome: ______________________________________data: ______

Agora você cria a regra...

	Saída		
Entrada	1ª regra	2ª regra	3ª regra
100			
101			
10			
	14		
		14	
			14
15			
6			
n			

Qual é a primeira regra? ____

Qual é a segunda regra? ____

Qual é a terceira regra? ____

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Agrupamentos – 35 registros escritos

A- Completou o quadro utilizando um padrão. Aplicou as regras criadas ao valor da coluna anterior e não ao valor de entrada, ou seja, apenas a primeira regra é aplicada ao valor de entrada.

A_1- Completou o quadro aplicando as regras criadas ao valor da coluna anterior e não ao valor de entrada e, para o valor de entrada “N”, expressou uma linguagem simbólica algébrica. Demonstrou generalização. Descreveu as regras que criou.

A_2- Completou o quadro aplicando as regras criadas ao valor da coluna anterior e não ao valor de entrada e, para o valor de entrada “N”, completou com números, não demonstrando generalização. Descreveu as regras que criou.

A_3- Completou parcialmente o quadro aplicando as regras criadas ao valor da coluna anterior e não ao valor de entrada. Porém, não deu continuidade à regra ao completar o quadro. Não explicitou ou descreveu as regras criadas.

B- Não evidenciou um padrão ao completar o quadro e/ou ao descrever as regras criadas.

C- Completou o quadro utilizando um padrão. Aplicou as regras criadas aos valores de entrada, não recorreu ao valor da coluna anterior.

C_1- Completou o quadro com as regras criadas aos valores de entrada. No entanto, para o valor de entrada “N”, completou com números ou então não completou, não demonstrando generalização. Ainda, para os campos sem valor de entrada, deixou em branco. Descreveu as regras do quadro.

C_2- Completou o quadro com as regras criadas aos valores de entrada. No entanto, para o valor de entrada “N”, completou com números ou então não completou, não demonstrando generalização. Descreveu as regras do quadro.

C_3- Completou o quadro com as regras criadas aos valores de entrada. No entanto, para o valor de entrada “N”, expressou uma linguagem simbólica algébrica. Demonstrou generalização. Descreveu as regras do quadro.

D- Outros.

Tratando-se da tarefa seis, os estudantes deveriam criar as regras e segui-las de acordo com os valores do quadro. Assim, surgiram alguns questionamentos: “*como eu vou criar a regra?”; “que regra professora?”; “eu não sei, explica!”.*

No quadro 7 que segue, apresentamos os registros escritos dos estudantes dispostos nos agrupamentos descritos referentes à tarefa seis.

Quadro 7 - Agrupamentos dos registros escritos referentes à tarefa 6

Agrupamentos		***Registros escritos em cada agrupamento***
A	**A_1**	E25, E14
	A_2	E2, E4, E7, E10, E12, E13, E15, E17, E19, E20, E22, E26, E27, E28, E31, E32
	A_3	E1
B		E3, E5, E11, E16, E18, E23
C	**C_1**	E6, E8, E21
	C_2	E9, E24, E29, E30
	C_3	E33
D		E34, E35

Fonte: do autor

Para essa tarefa (figura 13, tarefa 6), os agrupamentos foram excludentes, isto é, cada resolução só se encaixa em um agrupamento. Esta escolha também não foi prévia, e sim emergiu dos dados. Durante a exploração do material surgiram agrupamentos e subagrupamentos, os quais foram intitulados de $A_{1,}$ $A_{2,}$ $A_{3,}$ $C_{1,}$ $C_{2,}$ e $C_{3.}$

Prosseguindo a fase de exploração dos registros escritos, a seguir faremos a discussão dos agrupamentos que emergiram referentes à tarefa sete, conforme mostra a figura 14.

Figura 14 - Tarefa 7

Tarefa 7

Nome: ____________________________________Data:________

Talita e José fazem aniversário no mesmo dia (15 de julho).
Talita é exatamente cinco anos mais jovem do que José.

Complete a tabela para as idades de Talita e de José.

Quantos anos terá Talita quando José tiver 7 anos?

Quantos anos terá José quando Talita tiver 7 anos?

Idade de José	Idade de Talita	A diferença entre as idades deles
7		
	7	
8		
	10	
10		
	15	

Tarefa extra:

Vamos usar a letra k para significar a idade de José.
Se José tem k anos de idade, quantos anos terá Talita?

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Agrupamentos – 34 registros escritos

A- Completou o quadro utilizando um padrão. Aplicou a regra das idades entre Talita e José.

A_1- Completou o quadro demonstrando um padrão. Não demonstrou generalização na resolução da tarefa extra, ou seja, atribuiu um valor numérico para as idades de Talita e José.

A_2- Completou o quadro demonstrando um padrão. Não resolveu a tarefa extra, ou seja, deixou em branco.

B- Resolveu a tarefa parcialmente. Não evidenciou um padrão ou generalização ao completar o quadro ou ao resolver a tarefa extra.

C- Não evidenciou um padrão ou generalização ao completar o quadro e ao resolver a tarefa extra.

D- Outros.

Durante a resolução desta tarefa, num primeiro momento foi tranquilo, pois a turma estava comportada enquanto resolviam-na. Ao completarem o quadro com as idades de José e Talita, os estudantes não evidenciaram dúvidas. Contudo, na resolução da segunda etapa, em que aparece a letra "k", estes fizeram questionamentos: *"o que é este "k", professora?"; "como assim, José tem k anos?"; "eu não sei fazer este?"; "que esquisito isso?"*, entre outros. No entanto, durante esses questionamentos, um estudante profere em voz alta: *"ai gente, que falação, vocês não lembram? É a mesma coisa do N do problema da outra aula!"* Percebemos que alguns estudantes lembraram-se da tarefa anterior, porém, alguns evidenciaram não se recordarem. Notamos que parte da turma não entendeu a segunda parte da tarefa, devido ao símbolo K.

A seguir, apresentamos o quadro 7, o qual compõe os registros escritos dos estudantes dispostos nos agrupamentos descritos referentes à tarefa sete.

Quadro 8- Agrupamentos dos registros escritos referentes à tarefa 7

Agrupamentos		***Registros escritos em cada agrupamento***
A	**A_1**	E1, E4, E6, E12, E18, E22, E23, E29
	A_2	E3, E8, E10, E25, E31, E33
B		E5, E7, E11, E13, E14, E15, E17, E19, E20, E21, E27, E32, E34
C		E2, E16, E24, E26, E28
D		E9, E30

Fonte: do autor

Para esta tarefa (figura 14, tarefa 7), os agrupamentos foram excludentes, ou seja, cada resolução só se encaixa em um agrupamento. Essa escolha também não foi prévia, e sim emergiu dos dados. Novamente, durante a exploração do material surgiram agrupamentos e subagrupamentos, os quais foram intitulados de A_1 e A_2.

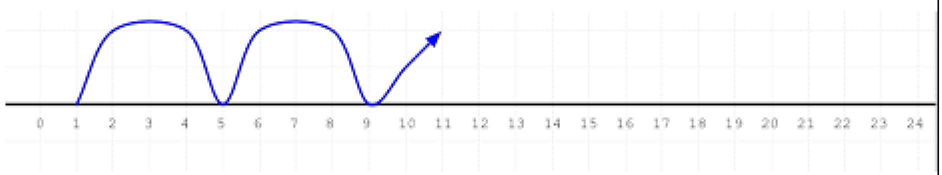
Por fim, a figura 15, encerra a discussão referente às unidades de registro criadas durante o processo de organização do material, bem como, os registros escritos dos trinta e cinco participantes da pesquisa.

Figura 15 - Tarefa 8

Tarefa 8

Nome: ________________________________ data: ______

Descubra que regra segue o salto da curva na reta numerada.



Invente uma história que envolva essa regra.

"Antes de Tony começar a trabalhar tinha R$ 1,00 em seu cofrinho.
Então, ele ganhou R $ 4,00 por cada dia de trabalho. "

Escreva uma expressão matemática para mostrar essa regra.

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

É importante destacar que essa tarefa demandou duas etapas: na primeira os estudantes deveriam inventar uma história que envolvesse a regra com relação à reta numerada; na segunda deveriam escrever uma expressão matemática referente à regra, por isso os agrupamentos foram divididos em duas partes. Assim, os agrupamentos de A até H, correspondem à primeira parte da tarefa e, consequentemente, de I ao S, à segunda parte da tarefa.

Agrupamentos - 32 registros escritos

- Primeira Parte

A- Considerou que o salto da curva na reta numerada vai de cinco em cinco unidades. Continuou desenhando o salto da curva na reta numerada e/ou fez uma descrição acerca da regra.

B- Relacionou o salto da curva na reta numerada com “montanhas”. Descreveu que há três quadrados dentro de cada “montanha”.

C- Considerou que o salto da curva na reta numerada vai de quatro em quatro unidades. Continuou desenhando o salto da curva na reta numerada e/ou fez uma descrição sobre a regra.

D- Considerou que o salto da curva na reta numerada vai de três em três unidades. Continuou desenhando o salto da curva na reta numerada e/ou fez uma descrição sobre a regra.

E- Relacionou o salto da curva na reta numerada com os números pares. Desenhou uma reta numerada com o salto da curva de duas em duas unidades (0, 2, 4, 6, 8, etc.). Não fez uma descrição sobre a regra.

F- Relacionou a seta na curva da reta numerada como parada final. No entanto, a seta indicou que o salto da curva prossegue. Não deu continuidade no desenho do salto da curva na reta numerada.

G- Considerou que o salto da curva na reta numerada “anda” de três em três unidades. No entanto, continuou desenhando o salto da curva na reta numerada de quatro em quatro unidades. Fez uma descrição sobre a regra.

H- Outros.

- Segunda Parte

I- Fez adições mostrando que a cada dia de trabalho Tony ganhará quatro reais. Considerou o que Tony já tinha em seu cofrinho.

J- Relacionou uma adição ou multiplicação por sete. Descreveu que esta é a regra.

K- Descreveu uma expressão numérica em que Tony trabalhou trinta dias. Considerou o que Tony já tinha em seu cofrinho e que a cada dia trabalho ele ganha quatro reais.

L- Fez uma multiplicação com os valores numéricos do problema.

M- Não resolveu, ou seja, deixou em branco.

N- Descreveu uma expressão numérica. Fez uma adição entre os valores do problema.

O- Descreveu uma expressão numérica. Fez uma adição com o valor que Tony ganha a cada dia de trabalho. Não considerou o que Tony já tinha em seu cofrinho.

P- Considerou que Tony trabalhou um dia. Descreveu que Tony ganhou cinco reais.

Q- Descreveu uma expressão numérica em que Tony trabalhou sete dias. Considerou o que Tony já tinha em seu cofrinho e que a cada dia trabalho ele ganha quatro reais.

R- Descreveu uma expressão numérica em que Tony trabalhou seis dias. Considerou o que Tony já tinha em seu cofrinho e que a cada dia trabalho ele ganha quatro reais.

S- Outros.

Durante a resolução dessa tarefa, parte dos estudantes evidenciou dúvidas, uma vez que foram muitos os questionamentos. Demonstraram estranhamento com relação ao desenho da curva na reta numerada. Muitos estudantes apontaram ter medo de errar. Em geral, os meninos diziam que não queriam inventar uma história.

No quadro 9, apresentamos os registros escritos dos estudantes dispostos em cada agrupamento referentes à tarefa oito.

Quadro 9 - Agrupamentos dos registros escritos referentes à tarefa 8

Agrupamentos	***Registros escritos em cada agrupamento***
A	E1, E2, E5, E12, E25, E27
B	E3
C	E4, E9, E10, E15, E13, E19, E20, E21, E30, E31, E32
D	E8, E14
E	E1
F	E16, E17, E26
G	E22, E23, E24
H	E6, E7, E18, E28, E28
I	E1, E26
J	E2
K	E3, E5, E27, E31
L	E4
M	E6, E11, E15
N	E9, E16, E17, E25
O	E10, E13
P	E14
Q	E20, E21, E24, E32
R	E22, E23, E30
S	E7, E8, E12, E18, E19, E28, E29

Fonte: do autor

Para essa tarefa (figura 15, tarefa 8), os agrupamentos foram excludentes, ou seja, cada resolução só se encaixa em um agrupamento. Essa escolha também não foi prévia, e sim emergiu dos dados.

Na seção que segue, apresentaremos uma análise a respeito dos agrupamentos que emergiram num processo de refinamento das descrições das resoluções dos estudantes mediante as oito tarefas.

4.2 Análise dos agrupamentos (unidades de registro)

Nesse momento da investigação, enfocamos nos agrupamentos anteriormente descritos a fim de construirmos uma primeira análise interpretativa referente às resoluções dos estudantes em cada uma das oito tarefas empregadas nesta pesquisa. A partir dos registros escritos, do diário de campo e da fundamentação teórica adotada levantamos inferências e interpretações a respeito da produção escrita dos participantes inerentes ao processo de ensino e aprendizagem tendo o objetivo de levantar reflexões acerca de aspectos que envolvem características de pensamento algébrico nas produções escritas de estudantes dos anos iniciais, analisando as atitudes, indagações, produções escritas, enfim, o envolvimento desses estudantes durante a aplicação de oito dessas tarefas.

Cabe lembrar que durante as análises, consideramos que houve manifestação de pensamento se o registro escrito do estudante apresentar as características descritas no quadro 10.

Quadro 10 - Caracterização para o pensamento algébrico baseada na literatura estudada

não envolve necessariamente uma simbologia algébrica, de modo que pode ser desenvolvido em qualquer etapa escolar, ou seja, não tem como pré-requisito que o estudante apresente uma linguagem simbólica algébrica;
está presente em todos os campos da Matemática como na álgebra, geometria, aritmética;
é algo interno ao estudante, de modo que não há uma relação de dependência com a tarefa proposta;
é um modo de pensar que envolve a construção da aprendizagem na medida que o estudante vai produzindo relações e atribuindo significados para os conceitos a partir do que ele já sabe, ou seja, de seus conhecimentos prévios;
enfim, esse pensamento envolve: formulação de conjecturas; estabelecimento de relações; utilização de diferentes notações para uma mesma tarefa; estabelecimento de regularidades; algum processo de generalização; compreensão de propriedades matemáticas importantes, por exemplo a comutatividade na adição; agrupamento, classificação, ordenação, justificação e validação de ideias; etc..

Fonte: do autor

Por meio do processo de análise, ou seja, partindo das resoluções de cada tarefa com o intuito de tentar entender o processo de resolução e comunicar as novas compreensões e significados alcançados, detectamos que, embora as resoluções das tarefas nem sempre estivessem corretas, elas evidenciam indícios de pensamento algébrico, uma vez que esse pensamento também envolve a construção da aprendizagem na medida em que o estudante vai produzindo relações e atribuindo significados para os conceitos a partir do que ele já sabe, ou seja, de seus conhecimentos prévios[34]. Em geral, os registros escritos investigados verbalizam processos de pensamento matemático, os quais serão descritos e apontados na análise de cada tarefa. Esta ideia também é corroborada por Bárbara M. Brizuela (2006) em um dos capítulos do livro *"Desenvolvimento Matemático na Criança: Explorando Notações"* ao refletir a respeito das resoluções de uma

[34] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

estudante de 3ª série que está desenvolvendo notações de problemas que tratam de frações, afirma que, embora

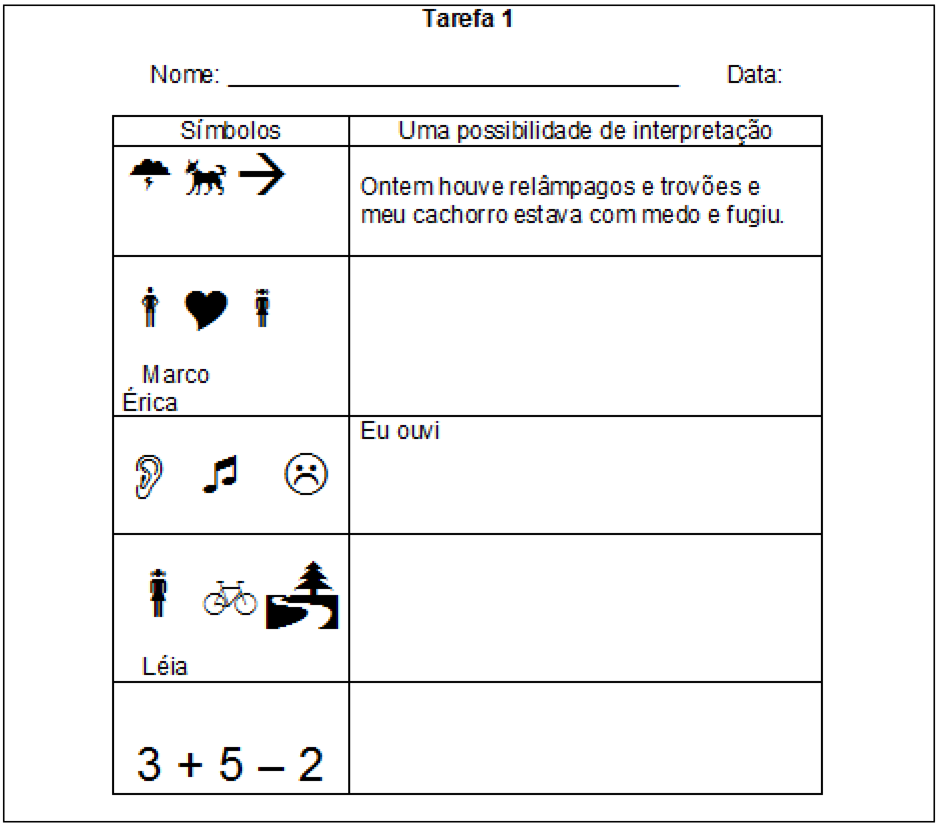
> [...] as notações de Sara não sejam notações algébricas convencionais, elas realmente constituem uma internalização de uma notação convencional aceita no contexto de sua sala de aula, e a gradual apropriação dessas notações apoia e desenvolve o seu raciocínio algébrico. (p. 81)

Compartilhando da mesma ideia, como afirma Kieran (2004), o pensamento algébrico muitas vezes pode não apresentar necessariamente ferramentas de uma linguagem simbólica, porém pode auxiliar como uma base à introdução da álgebra nas séries posteriores.

Análise - Tarefa 1

A seguir, apresentamos a tarefa 1, conforme mostra a figura 16, a fim de iniciarmos uma análise interpretativa da resolução dos estudantes referente as oito tarefas empregadas nesta pesquisa.

Figura 16 - Tarefa 1



Tarefa 1

Nome: ________________________________ Data:

Símbolos	Uma possibilidade de interpretação
	Ontem houve relâmpagos e trovões e meu cachorro estava com medo e fugiu.
Marco Érica	
	Eu ouvi
Léia	
3 + 5 – 2	

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Como já exposto, durante a resolução da primeira tarefa os estudantes mostraram-se um tanto assustados, no entanto, depois de uma breve conversa, a turma demonstrou tranquilidade.

Nas interpretações dos primeiros símbolos os estudantes não evidenciaram dúvidas, sendo que as resoluções que apresentaram são bastante semelhantes. Apenas na última linha de símbolos do quadro, questionaram: *"tem que fazer a conta?"; "como eu faço este, professora?"; "escreve a conta ou só coloca o resultado?"*.

A partir destas indagações podemos inferir que esse tipo de tarefa a turma não está habituada a fazer por dois motivos: houve uma agitação pelo fato de que deveriam resolvê-la sem a interferência da professora e, ainda, porque a tarefa é "aberta" para várias interpretações, não indicando, por exemplo, qual operação fazer. Além disso, tanto nos questionamentos como também nas respostas, encontramos várias expressões como "*armei uma conta*", o que indica que uma parte dos estudantes (aproximadamente um quarto) relacionou a expressão numérica com um algoritmo, uma operação aritmética. Estas afirmações estão presentes nas respostas dos estudantes E23 e E24, conforme mostram as figuras 17 e 18.

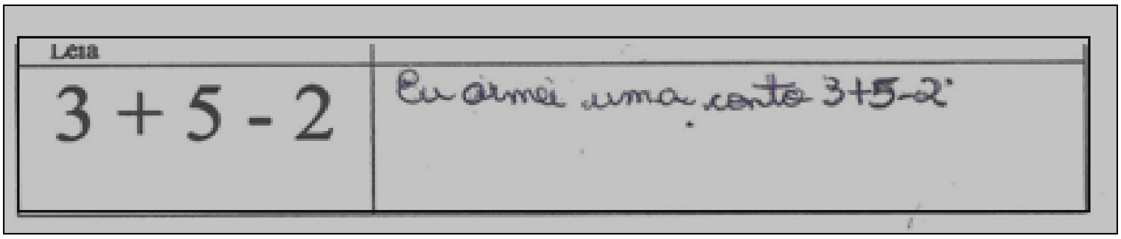


Figura 17- Registro escrito do participante E23 - Tarefa 1

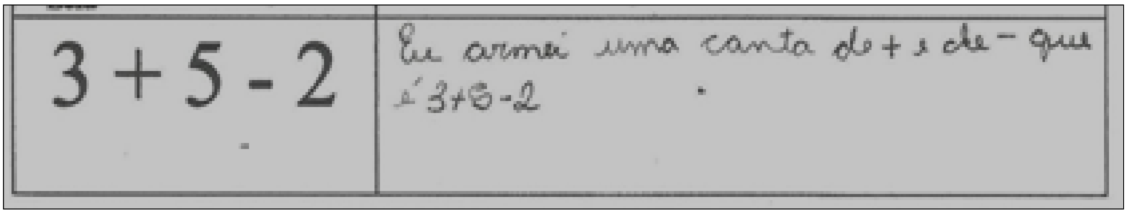


Figura 18 - Registro escrito do participante E24 - Tarefa 1

Desse modo, por meio desses registros escritos e questionamentos apresentados, há indícios de que essas crianças estabeleceram relações/comparações entre expressões numéricas, perceberam e tentaram expressar as estruturas aritméticas da tarefa[35]. Em algumas respostas ficou evidente a falta de atenção dos estudantes ao resolverem a tarefa, pois em várias resoluções (E2, E3, E4, E8, E9, E14, E12, E21, E22) ao registrarem a interpretação dos símbolos, mesmo algumas figuras apresentando nomes, como Marco, Érica e Léia, os estudantes escreveram "*Marcos", "Léa".* Tal afirmação é apresentada nas figuras 19 e 20.

[35] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

Símbolos	Uma possibilidade de interpretação
	Ontem houve relâmpagos e trovões e meu cachorro estava com medo e fugiu.
Marco Érica	Marcos ontem se apaixonol pela a Érica
	Eu ouvi uma musica triste
Léia	Léia foi corida de bicicleta pela florésta

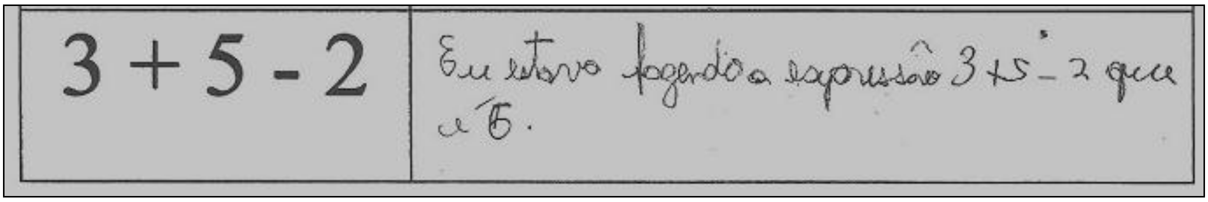
Figura 19 - Registro escrito do participante E3 - Tarefa 1

Símbolos	Uma possibilidade de interpretação
	Ontem houve relâmpagos e trovões e meu cachorro estava com medo e fugiu.
Marco Érica	Ontem Marcos encontro Érica e ficaram apaixonado
	Eu ouvi som mas eu não gostei de nada
Léia	Léila ia andar de bicicleta perto de um pinheiro
3 + 5 - 2	Ontem a soma deu 6.

Figura 20 - Registro escrito do participante E22 - Tarefa 1

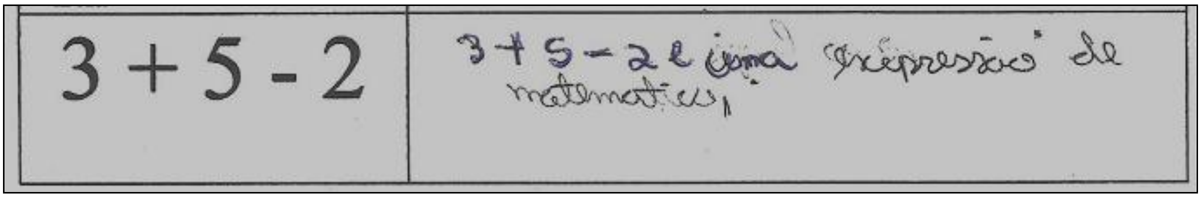
Outro fato que nos chamou a atenção foi de que em algumas interpretações os estudantes utilizaram a palavra “ontem”, como é o caso das resoluções dos estudantes E3 e E22, conforme mostram as figuras 19 e 20, respectivamente. Talvez essa associação esteja relacionada com a primeira linha de símbolos, na qual a tarefa traz como exemplo uma possível interpretação começando com a palavra “Ontem”.

Continuando as análises, algumas resoluções assinalam determinadas características de pensamento algébrico, como nas resoluções E7, E1, E10 e E24, apresentadas pelas figuras 21, 22, 23 e 24.



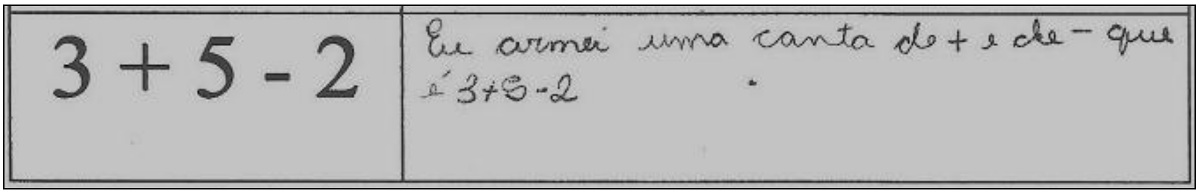
3 + 5 - 2	Eu estava fazendo a expressão 3+5-2 que é 6.

Figura 21 - Registro escrito do participante E10 - Tarefa 1



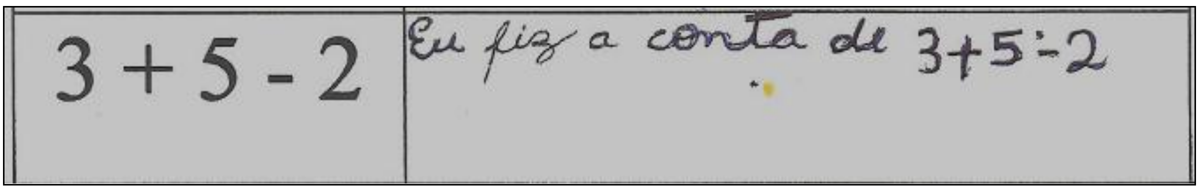
3 + 5 - 2	3+5-2 é uma expressão de matemática,

Figura 22 - Registro escrito do participante E7- Tarefa 1



3 + 5 - 2	Eu armei uma conta de + e de - que é 3+5-2

Figura 23 - Registro escrito do participante E24 - Tarefa 1



3 + 5 - 2	Eu fiz a conta de 3+5-2

Figura 24 - Registro escrito do participante E1- Tarefa 1

Nesses registros escritos (figuras 21, 22, 23 e 24) essas crianças confirmaram evidências desse pensamento, pois produziram várias notações para uma mesma expressão numérica ao registrarem utilizando linguagem matemática e linguagem natural; compreenderam propriedades matemáticas, uma vez que simplificaram a expressão numérica, sendo que atribuem “seis” como resultado; desenvolveram uma linguagem mais concisa ao expressar-se matematicamente, na qual descreveram que a expressão numérica é uma “expressão de matemática” [36].

Outros registros escritos também sinalizam características de pensamento algébrico elencadas no capítulo um deste estudo, como por exemplo, as resoluções dos estudantes E3, E9 e E32, conforme mostram as figuras 25, 26 e 27.

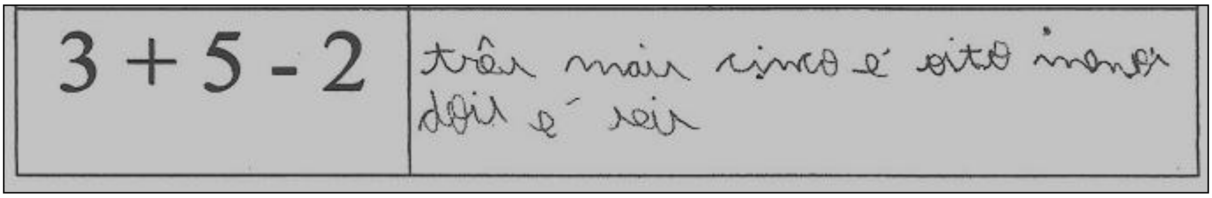


Figura 25 - Registro escrito do participante E9 - Tarefa 1

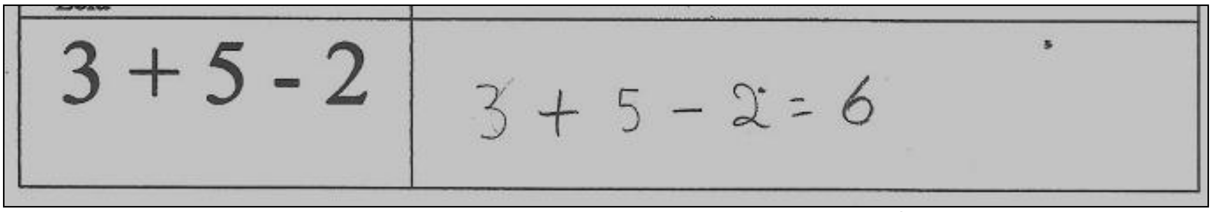


Figura 26 - Registro escrito do participante E3 - Tarefa 1

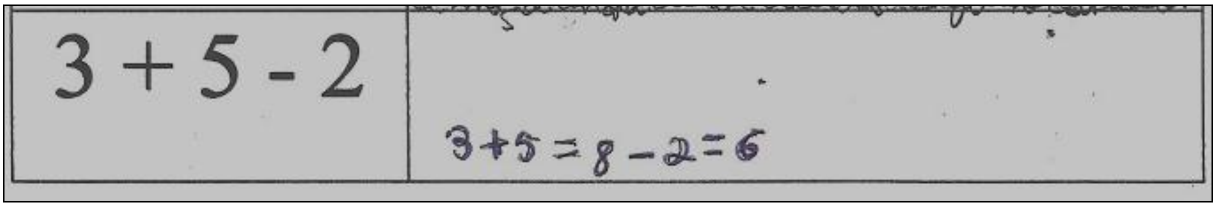


Figura 27 - Registro escrito do participante E32 - Tarefa 1

Nessas resoluções podemos apontar que esses estudantes interpretaram uma igualdade entre duas expressões numéricas; transformaram a expressão numérica em outra mais simples; desenvolveram uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente. No entanto, cabe destacar que o estudante E9 (figura 25), assim como outros, fez uma interpretação utilizando a linguagem natural. Ainda, evidenciaram um pensamento algébrico ao utilizarem a propriedade associativa[37], ou seja, “3+5=8” e “8-2=6“, ou da mesma forma ao registrarem que *“três mais cinco é oito e oito menos dois é seis”.* Essa ideia é verificada por Carraher, Schliemann, Brizuela e Earnest (2006) ao descreverem um

---

[36] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.
[37] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

estudo com estudantes de terceira série o qual apontou que esses desenvolvem pensamento algébrico, assim como trabalham com tabelas de funções utilizando notação algébrica. Para os autores, os estudos em sala de aula revelam que “as crianças podem lidar com conceitos algébricos e utilizam a notação algébrica mais cedo do que comumente se supõe” [38] (CARRAHER, SCHLIEMANN, BRIZUELA E EARNEST, 2006, p. 11, tradução nossa).

Corroborando da mesma ideia, segundo Murray (2010), podemos inferir que esses estudantes, e outros, por meio de suas produções escritas, manifestaram indícios de aritmética generalizada, pois, de acordo com o autor, esse termo

> [...] refere-se ao raciocínio que ocorre quando os estudantes reconhecem padrões que emergem durante seus estudos das quatro operações básicas, e as afirmações que eles fazem e posteriormente justificam, e eventualmente expressam com notação simbólica.[39] (p. 74, tradução nossa)

Analisaremos a figura 28, pois a resolução do estudante E27 merece destaque.

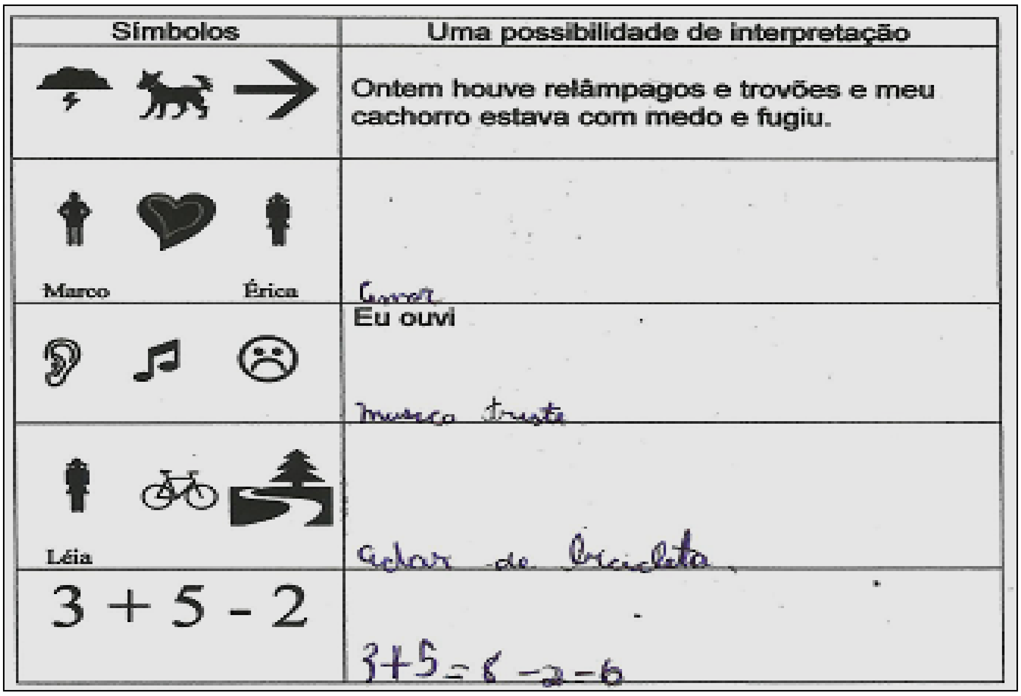


Figura 28 - Registro escrito do participante E27 - Tarefa

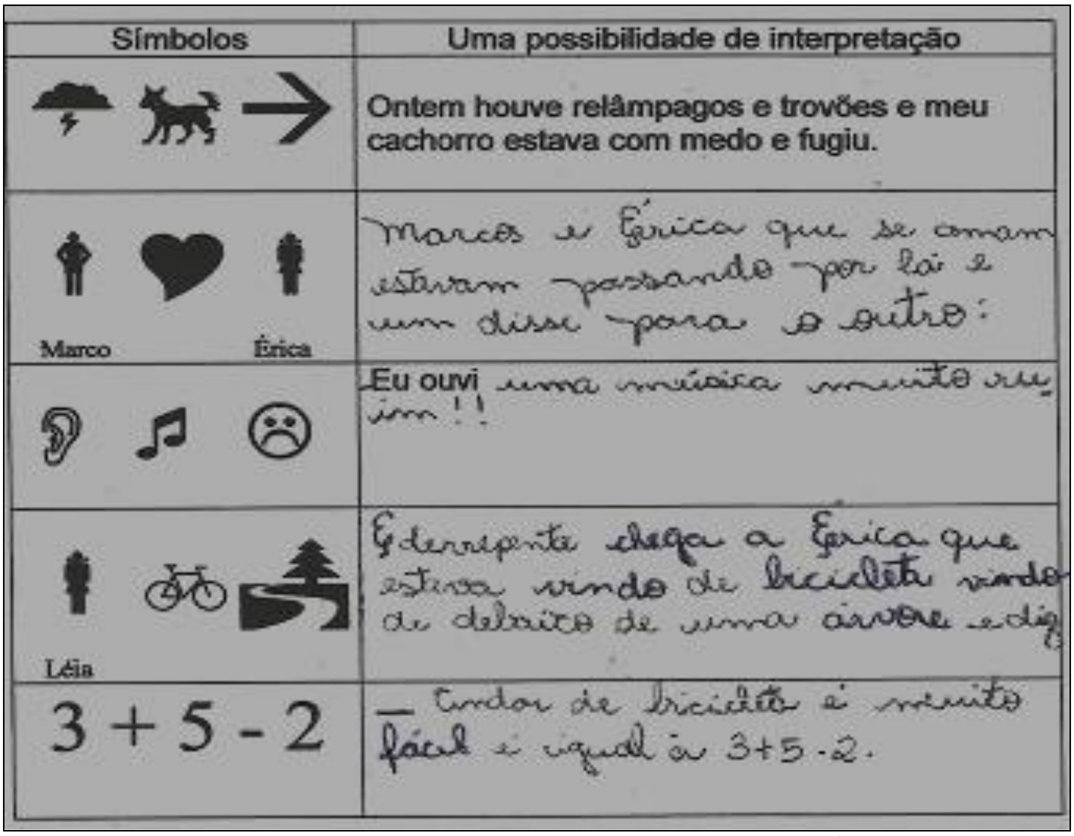
---

[38]“children can handle algebraic concepts and use algebraic notation somewhat earlier than commonly supposed” (CARRAHER, SCHLIEMANN, BRIZUELA E EARNEST, 2006, p. 11).

[39]refers to the reasoning that occurs as students recognize patterns that emerge during their study of the four basic operations, and to the claims they make and later justify, and eventually express with symbolic notation (MURRAY, 2010, p. 74).

Vale ressalvar que esse estudante (E27, figura 28) destacou-se dos demais por apresentar uma interpretação bastante “direta” ou então, concisa. Diferentemente da maioria, que descreveu “histórias” com relação aos símbolos de cada linha, como exposto, esse apenas atribuiu palavras-chave para representar as figuras. Cabe-nos inferir que tal resolução demonstra algum tipo de processo de generalização, sendo essa uma das características do pensamento algébrico elencadas por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005).

A resolução do estudante E21, exposta pela figura 29, também se diferenciou das outras, pois esse interpretou os símbolos como um conjunto, de modo que todas as figuras estão relacionadas.



Símbolos	Uma possibilidade de interpretação
	Ontem houve relâmpagos e trovões e meu cachorro estava com medo e fugiu.
Marco Érica	Marcos e Érica que se amam estavam passando por lá e um disse para o outro:
	Eu ouvi uma música muito ruim!!
Léia	Ederrepente chega a Érica que estava vindo de bicicleta vindo de debaixo de uma árvore e dig
3 + 5 - 2	— Andar de bicicleta é muito fácil é igual à 3+5-2.

Figura 29 - Registro escrito do participante E21 - Tarefa 1

Assim como em outras resoluções verifica-se falta de atenção ao trocar o nome *Léia* por *Érica* na descrição referente à quarta linha de símbolos do quadro. Também podemos considerar que essa troca de nomes se deve pelo fato de, apesar de ter nomes distintos, os símbolos que representam Léia e Érica são iguais, ou ainda, por o estudante querer dar continuidade a sua história.

É importante observar que dentre as resoluções que apresentaram um resultado para a expressão numérica, apenas uma estava com o resultado errado.

A seguir apresentaremos um quadro com as características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referente à tarefa 1.

Quadro 11 - Síntese das características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referente à tarefa 1

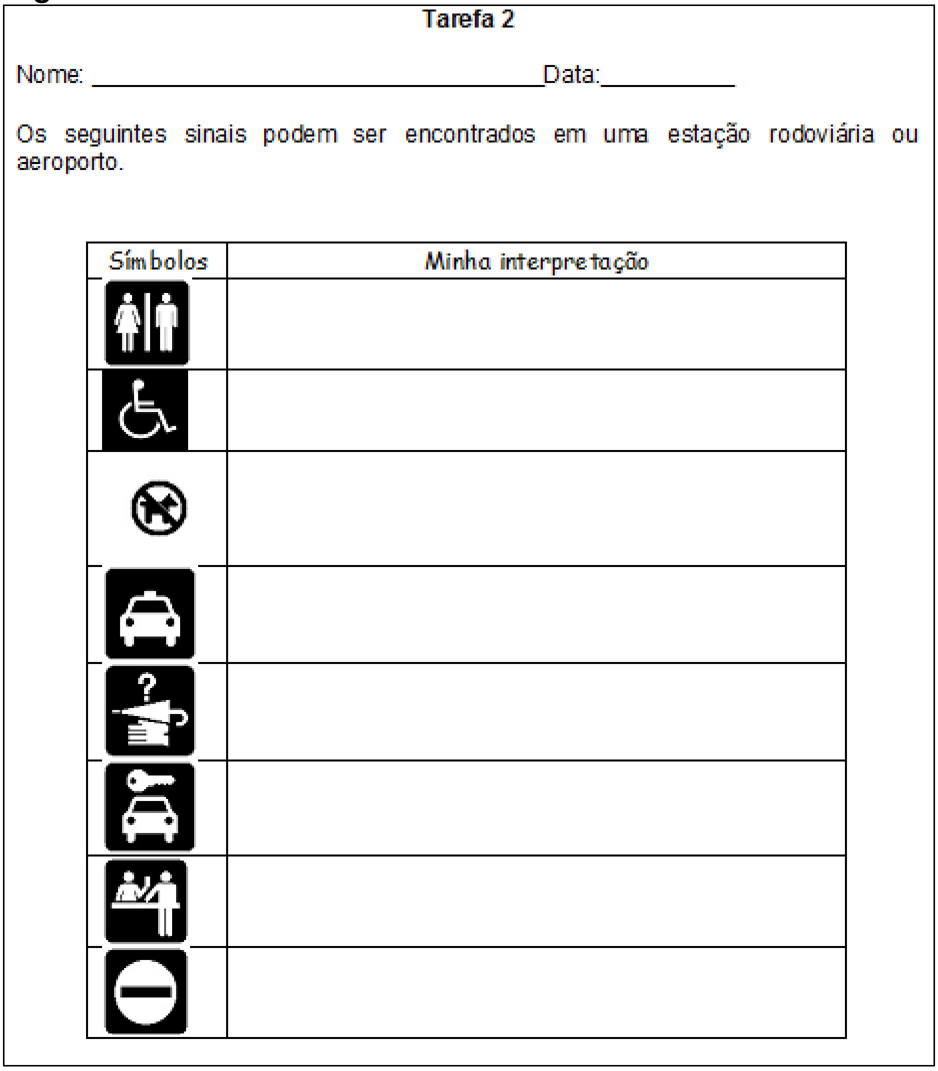
Características de Pensamento Algébrico	***Participantes***	***Quantidade de registros escritos***
Estabeleceu relações/comparações entre expressões numéricas;	E1, E8, E12, E14, E23, E24, E29 e E33	8
Percebeu e tentou expressar as estruturas aritméticas da tarefa;	E1, E3, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E16, E17, E18, E19, E20, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32, E33 e E35	28
Utilizou de diferentes notações para uma mesma tarefa;	E1, E7, E8, E10, E12, E14, E18, E20, E22, E23, E24, E28, E30 e E33	14
Desenvolveu uma linguagem mais concisa ao expressar-se matematicamente;	E7, E10 e E28	3
Interpretou uma igualdade entre duas expressões numéricas;	E3, E8, E9, E10, E11, E12, E18, E19, E20, E22, E25, E26, E27, E28, E30, E31 e E32	17
Transformou a expressão numérica em outra mais simples;	E3, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E16, E17, E18, E19, E20, E22, E25, E26, E27, E28, E30, E31, E32 e E35	21
Demonstrou algum tipo de processo de generalização;	E27	1
Demonstrou indícios de uma aritmética generalizada.	E9 e E32	2

Fonte: do autor

<u>Análise - Tarefa 2</u>

Na sequência, apresentamos a tarefa 2, conforme exibe a figura 30, a fim de expormos a análise interpretativa das resoluções dos estudantes referentes a esta tarefa.

Figura 30 - Tarefa 2



Tarefa 2

Nome: ______________________________ Data: __________

Os seguintes sinais podem ser encontrados em uma estação rodoviária ou aeroporto.

Símbolos	Minha interpretação

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Em relação à tarefa dois (figura 30), assim como na tarefa um, os estudantes revelaram tranquilidade no momento da resolução. Como já referido e explicitado, nessa tarefa não foram construídas unidades de registro, no entanto, tecemos interpretações.

Nos quatro primeiros sinais do quadro, as interpretações dos estudantes são bastante semelhantes, sendo que no primeiro sinal a maioria registrou algo relacionado a “banheiro feminino e masculino”; no segundo sinal a ideia central presente nas resoluções gira em torno de “reservado para cadeirantes”; no terceiro sinal, em geral a turma escreveu “proibido cachorros”, e no quarto sinal relacionaram com ponto de táxi. Já os quatro últimos sinais apresentam diferenças. Podemos concluir que esse fato se deve por conta de que os primeiros quatro sinais são mais comuns que os outros, pois alguns deles são encontrados em vários locais da cidade, como bancos, escolas, supermercados, no trânsito, etc. Essa afirmação pode ser comprovada com as resoluções dos estudantes E9, E10, E11 e E27, conforme mostram as figuras 31, 32, 33 e 34.

Símbolos	Minha interpretação
	banheiro feminino e masculino
	deficientes físicos
	Proibido cães.
	táxi.
	desproibido guardachuva
	carro desligado
	Pessoas trabalhando em uma obra.
	contra mão

Figura 31 - Registro escrito do participante E11 - Tarefa 2

Símbolos	Minha interpretação
	Banheiro para meninas e Banheiros para meninos
	Só para deficientes.
	Proibido cães na rua
	Só para os taxis.
	Onde se coisas para usar dia de chuva
	Chave dos carros.
	Uma mesa de cinema.
	Um cigarro

Figura 32 - Registro escrito do participante E9 - Tarefa 2

Símbolos	Minha interpretação
	banheiro feminino/banheiro masculino.
	Reservado para cadeirantes
	Proibido cachorro.
	Ponto de Táxi.
	Quer pendurar seu guarda-chuva? Pendure aqui!
	Auto peças Copacabana.
	Balconistas por perto.
	Menos velocidade.

Figura 33 - Registro escrito do participante E27 - Tarefa 2

Figura 34 - Registro escrito do participante E10 - Tarefa 2

É importante destacar que em apenas três registros escritos são verificados símbolos sem interpretação, ou seja, sem produção escrita, assim podemos inferir que, em geral, os participantes desse estudo interpretaram e descreveram os símbolos presentes na tarefa. Contudo, desses três registros escritos, os sinais que estavam sem interpretação foram o último e o quinto, ou seja, os que apresentaram registros diferentes e por nós considerados menos corriqueiros.

Pela resolução do estudante E27, exposta na figura 33, inferimos que ele apresentou dificuldades em generalizar, pois descreveu o sexto símbolo como “Auto Peças Apucarana”, uma vez que, de acordo com as informações contidas na tarefa, os sinais são gerais, podendo ser encontrados em locais de uma cidade qualquer, não especificamente de uma cidade.

A seguir apresentaremos o quadro 12 com as características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referente à tarefa 2.

Quadro 12 - Síntese das características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referente à tarefa 2

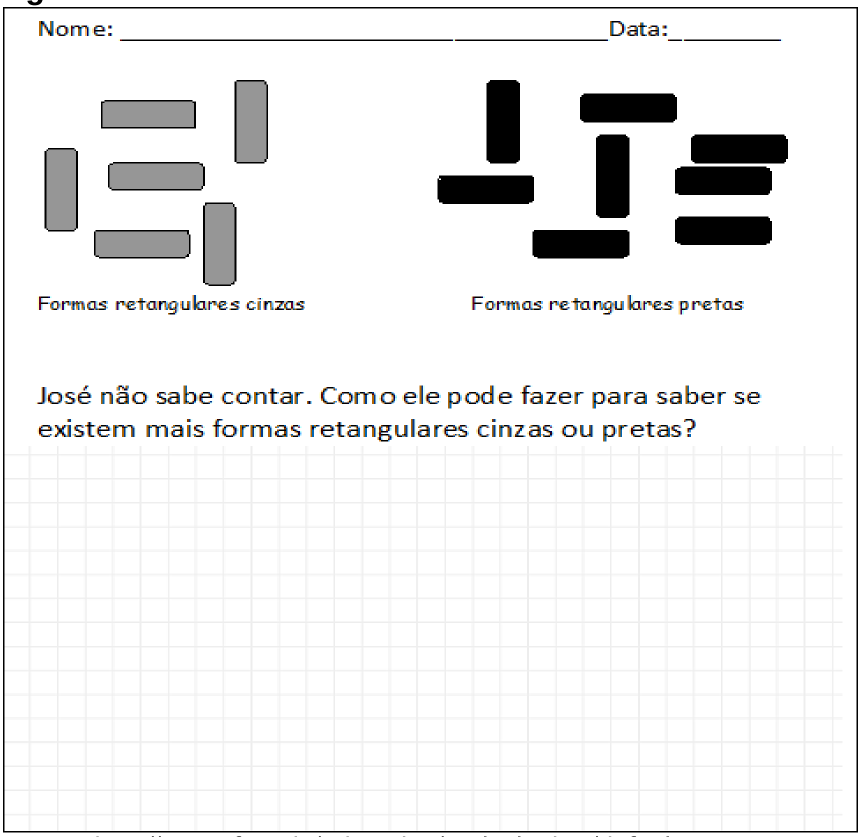
Características de Pensamento Algébrico	Participantes	Quantidade de registros escritos
Percebe e tenta expressar os símbolos da tarefa.	Todos os participantes	35

Fonte: do autor

Análise - Tarefa 3

Prosseguindo as análises de cada tarefa, apresentamos a tarefa 3, conforme exibe a figura 35, a fim de expormos a análise interpretativa das resoluções dos estudantes referente a esta tarefa.

Figura 35 - Tarefa 3



Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

No que diz respeito à tarefa três, os estudantes demonstraram por meio dos registros escritos e também no momento da resolução mais dúvidas do que na tarefa quatro.

Uma parte deles indicou estranhamento com a afirmação da tarefa de que "José não sabe contar", algumas afirmações e indagações foram: *"ahh, eu não sei fazer professora!"; "como eu faço, me explica?"; "o José não sabe contar, mas eu sei professora!"*. Com relação a essas indagações e às resoluções apresentadas, podemos afirmar que parte dos estudantes tiveram dificuldades de interpretação, tendo em vista que registraram terem contado as formas retangulares cinzas e pretas propostas na tarefa, o que não era previsto para essa tarefa. Essa afirmação se comprova nas resoluções dos estudantes E1 e E35, confirmadas pelas figuras 36 e 37.

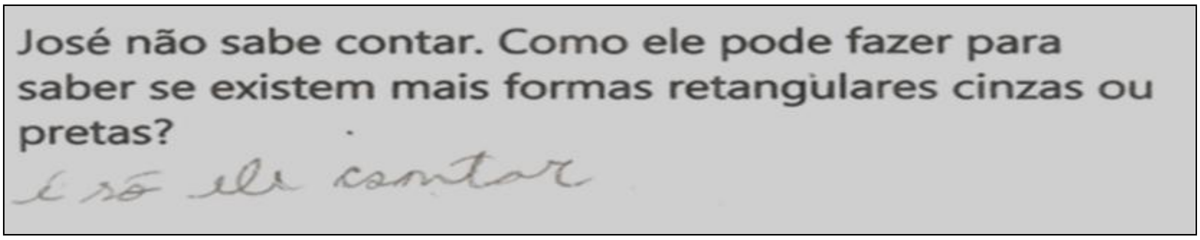


Figura 36 - Registro escrito do participante E1 - Tarefa 3

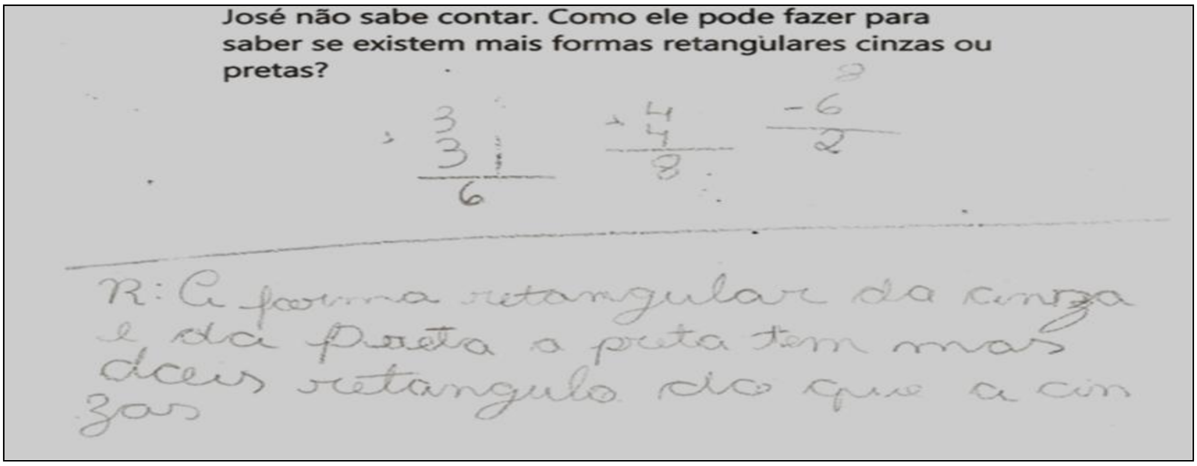


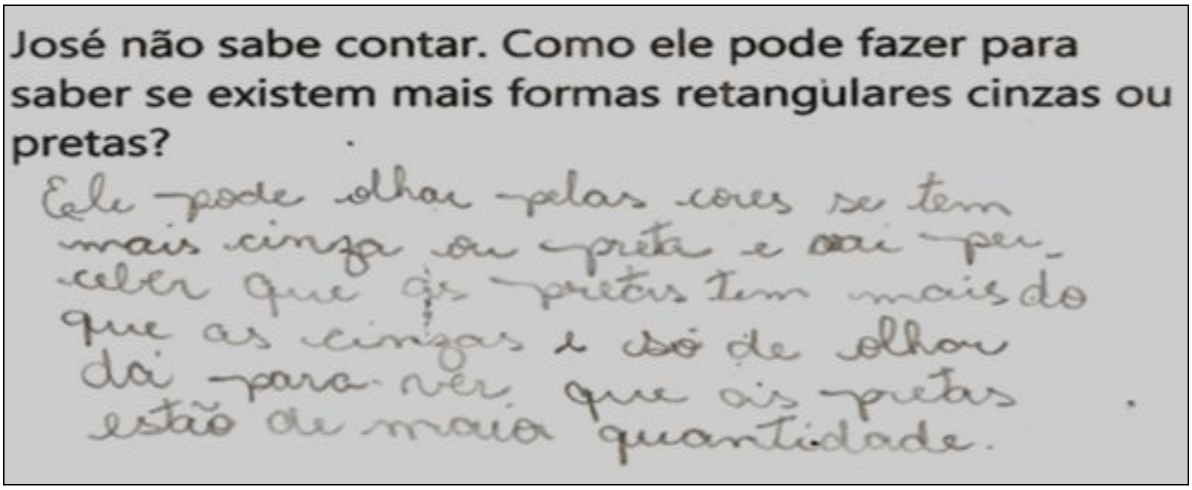
Figura 37- Registro escrito do participante E35 - Tarefa 3

No entanto, mesmo esses estudantes mostrando por meio de suas produções escritas que contaram as formas retangulares cinzas e pretas propostas na tarefa, cabe-nos também ressaltar que a resolução do estudante E35 (figura 37), e outras, evidenciaram que ele resolveu as operações aritméticas (adição e subtração) corretamente, ainda utilizou de duas notações para a tarefa, uma vez que registrou utilizando linguagem matemática e linguagem natural[40].

---

[40] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

Outras situações particulares referem-se às características de pensamento algébrico, consideradas e já elencadas neste estudo, as quais foram observadas em algumas resoluções, como por exemplo, do estudante E2, apresentada na figura 38.


José não sabe contar. Como ele pode fazer para saber se existem mais formas retangulares cinzas ou pretas?

Ele pode olhar pelas cores se tem
mais cinza ou preta e vai per-
ceber que as pretas tem mais do
que as cinzas e só de olhar
dá para ver que as pretas
estão de maior quantidade.

Figura 38 - Registro escrito do participante E2 - Tarefa 3

Nessa resolução podemos inferir que esse estudante estabeleceu uma relação/comparação entre a quantidade de formas retangulares cinzas e pretas descritas na tarefa. Essa criança relacionou a visualização das formas retangulares, à quantidade. Esse pensamento também envolve a construção da aprendizagem na medida em que o estudante vai produzindo relações e atribuindo significados para os conceitos a partir do que ele já sabe, ou seja, de seus conhecimentos prévios[41].

A seguir apresentaremos o quadro 13 com as características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referente à tarefa 3.

[41] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

Quadro 13 - Síntese das características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referente à tarefa 3

Características de Pensamento Algébrico	***Participantes***	**Quantidade de registros escritos**
Estabeleceu relações/comparações entre as informações descritas na tarefa;	E2, E6, E9, E10, E11, E15, E16, E17, E22, E23, E24, E26, E29, E30, E31, E32 e E35	17
Percebeu e tentou expressar as estruturas aritméticas da tarefa;	Todos os participantes	35
Utilizou de diferentes notações para uma mesma tarefa.	E17, E22 e E35	3

Fonte: do autor

<u>Análise - Tarefa 4</u>

A seguir, apresentamos a figura 39, a qual exibe a tarefa 4, a fim de expormos a análise interpretativa das resoluções dos estudantes referente a essa tarefa.

Figura 39 - Tarefa 4

Tarefa 4

Nome: ____Data:_________

João e Maria têm uma caixa de doces cada um.
João tem uma caixa e um doce em cima dela.
Maria tem uma caixa e três doces em cima dela.
Dentro das duas caixas têm exatamente o mesmo número de doces.

Desenhe ou escreva algo que compare quantos doces João e Maria têm.

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Dando continuidade às análises, em relação à tarefa quatro, os participantes mostraram-se mais tranquilos durante a resolução. A seguir, destacamos a resolução do estudante E21, apresentada pela figura 40.

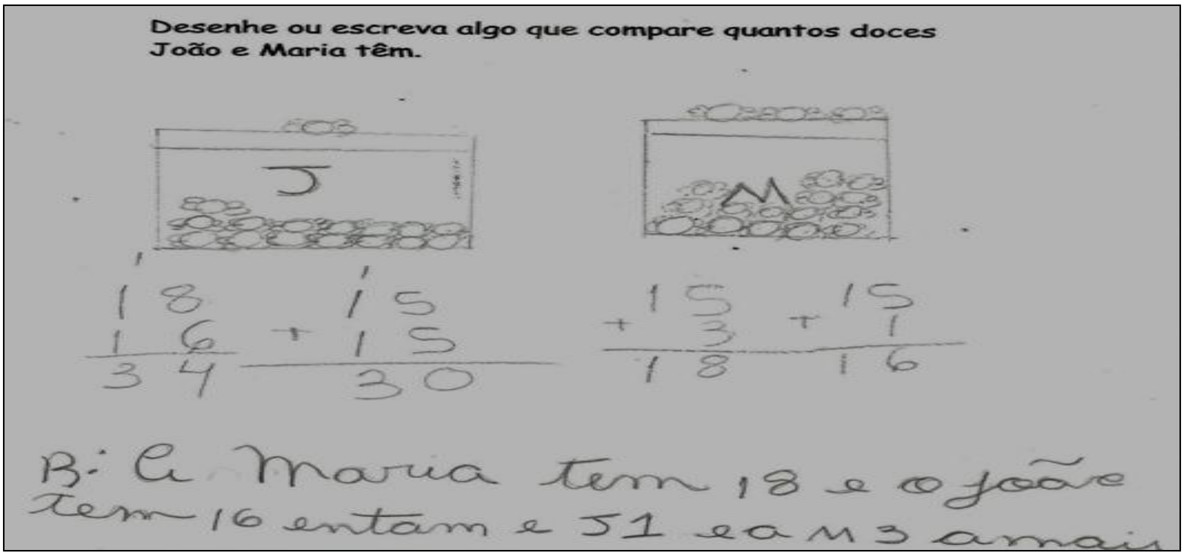


Figura 40 - Registro escrito do participante E21- Tarefa 4

A resolução do estudante E21(figura 40) referente à tarefa quatro aponta para algumas características do pensamento algébrico, bem como: a criança estabeleceu relações/comparações entre as informações da tarefa; percebeu e tentou expressar as estruturas aritméticas da tarefa; produziu mais de um modelo aritmético para uma mesma tarefa[42]. Esses aspectos são verificados, tendo em vista que o estudante utilizou de três representações para a tarefa, ou seja, por meio de desenho, de operações aritméticas e também da escrita natural, as quais autores como Schwartz e Yerushalmy (1995) destacam a importância na utilização de diferentes notações. Ainda, expressou por meio das representações uma relação referente às informações descritas na tarefa, utilizando-se de uma linguagem mais sincopada ao representar a quantidade de doces em cima da caixa de Maria, por M3 e, de maneira análoga, por J1 a quantidade de doces em cima da caixa de João. Assim, essa resolução confirma que o pensamento algébrico não envolve necessariamente uma simbologia algébrica, de modo que pode ser desenvolvido em qualquer etapa escolar, ou seja, não tem como pré-requisito a apresentação, por parte do estudante, da linguagem simbólica algébrica[43].

No entanto, ficou evidente que não somente nessa resolução, mas também na maioria delas, os estudantes apresentaram dúvidas com relação ao processo de generalização, uma vez que desenharam ou escreveram quantidades específicas, diferentes ou iguais de doces dentro da caixa de João e de Maria.

---

[42] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28
[43] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28

Com relação às várias notações, ou representações para uma mesma tarefa, os Princípios e Normas para a Matemática Escolar[44] (NCTM, 2008) reconhecem essa importância no processo de aprendizagem, ao afirmar que:

> [...] nos primeiros anos, os alunos podem usar objectos, figuras e símbolos para construírem modelos de situações envolvendo a adição e a subtracção de números inteiros. Quando as crianças usam objectos para representar um pequeno problema, estão a iniciar-se no trabalho com modelos. (p. 6)

Nesse sentido, encontram-se nas resoluções dos estudantes as representações por meio de desenho, de operações aritméticas e por meio de uma linguagem natural.

Vale destacar o estudante E26, conforme mostra a figura 41, pois ele se distinguiu dos demais por pintar as caixas de doces de João e Maria, demonstrando um tipo de processo de generalização[45], pois diferentemente dos outros, não desenhou uma quantidade específica de doces dentro de cada caixa. Ficou explícito que dentro das duas caixas há exatamente o mesmo número de doces. Também, incluiu os doces que estão em cima das caixas, desenhando-os, e isso representa relações gerais entre as quantidades do problema.

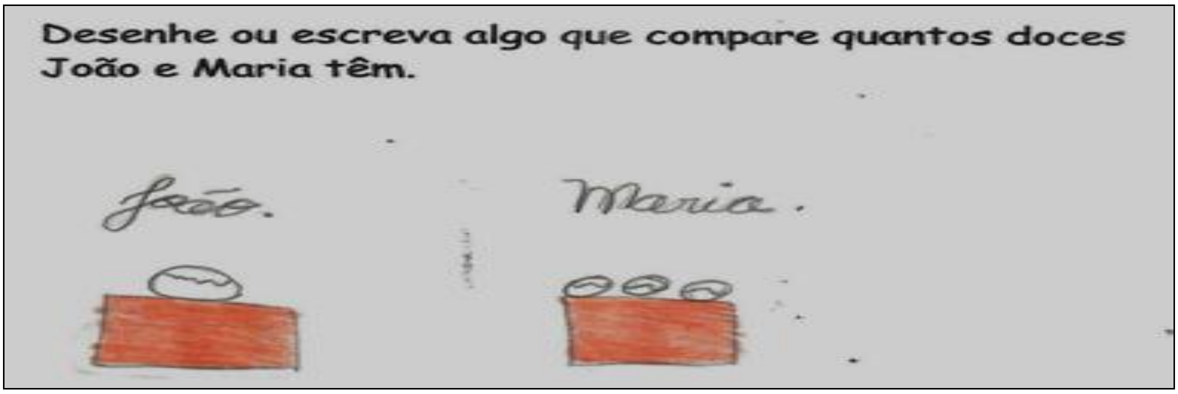


Figura 41- Registro escrito do participante E26 - Tarefa 4

Assim, mesmo não apresentando uma linguagem simbólica algébrica, esse estudante evidenciou por meio de seu registro escrito características de pensamento algébrico, uma vez que “[...] o uso do desenho permite que as crianças compreendam e resolvam situações e realizem procedimentos que, de outra forma,

[44] Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008) é uma tradução portuguesa do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000).
[45] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28

estariam além de seu alcance [...]" (SHARP, GAROFALO e ADAMS, 2002, p. 27 apud BRIZUELA, 2006, p. 73). Ainda, mesmo que

> [...] de uma forma informal, os alunos descobrem e fazem generalizações sobre as propriedades das operações. Cabe aos professores explorar estas descobertas, torná-las relevantes e incentivar os alunos a investigar se certas observações e conjecturas são generalizáveis (NCTM, 2008, p. 10).

Conforme as análises realizadas, e considerando que esses estudantes foram alfabetizados recentemente, podemos afirmar que, de modo geral, não trazem graves erros de gramática. Verificam-se em geral, erros de concordância.

A seguir apresentaremos um quadro com as características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referente à tarefa 4.

Quadro 14- Síntese das características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções referentes à tarefa 4

Características de Pensamento Algébrico	Participantes	Quantidade de registros escritos
Estabeleceu relações/comparações entre as informações descritas na tarefa;	E2, E3, E4, E5, E6, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E30, E31, E32, E33 e E34	29
Percebeu e tentou expressar as estruturas aritméticas da tarefa;	E2, E3, E4, E5, E6, E8, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E30, E31, E32, E33, E34 e E35	31
Utilizou de diferentes notações para uma mesma tarefa;	E10, E17, E19, E21, E23 e E31	6
Desenvolveu uma linguagem mais concisa ao expressar-se matematicamente;	E21	1
Demonstrou algum tipo de processo de generalização;	E26	1

Fonte: do autor

Análise - Tarefa 5

A seguir, apresentamos a figura 42, a qual exibe a tarefa 5, a fim de expormos a análise interpretativa das resoluções dos estudantes referentes a essa tarefa.

Figura 42 - Tarefa 5

Tarefa 5

Nome: ______________________________ data: ______

	Saída		
Entrada	Adicione 3 a entrada	Subtraia 2 a entrada	Multiplique por 3 a entrada
3			
7			
10			
	9		
		9	
			9
100			
101			
N			

Qual é a primeira regra? ______________________________

Qual é a segunda regra? ______________________________

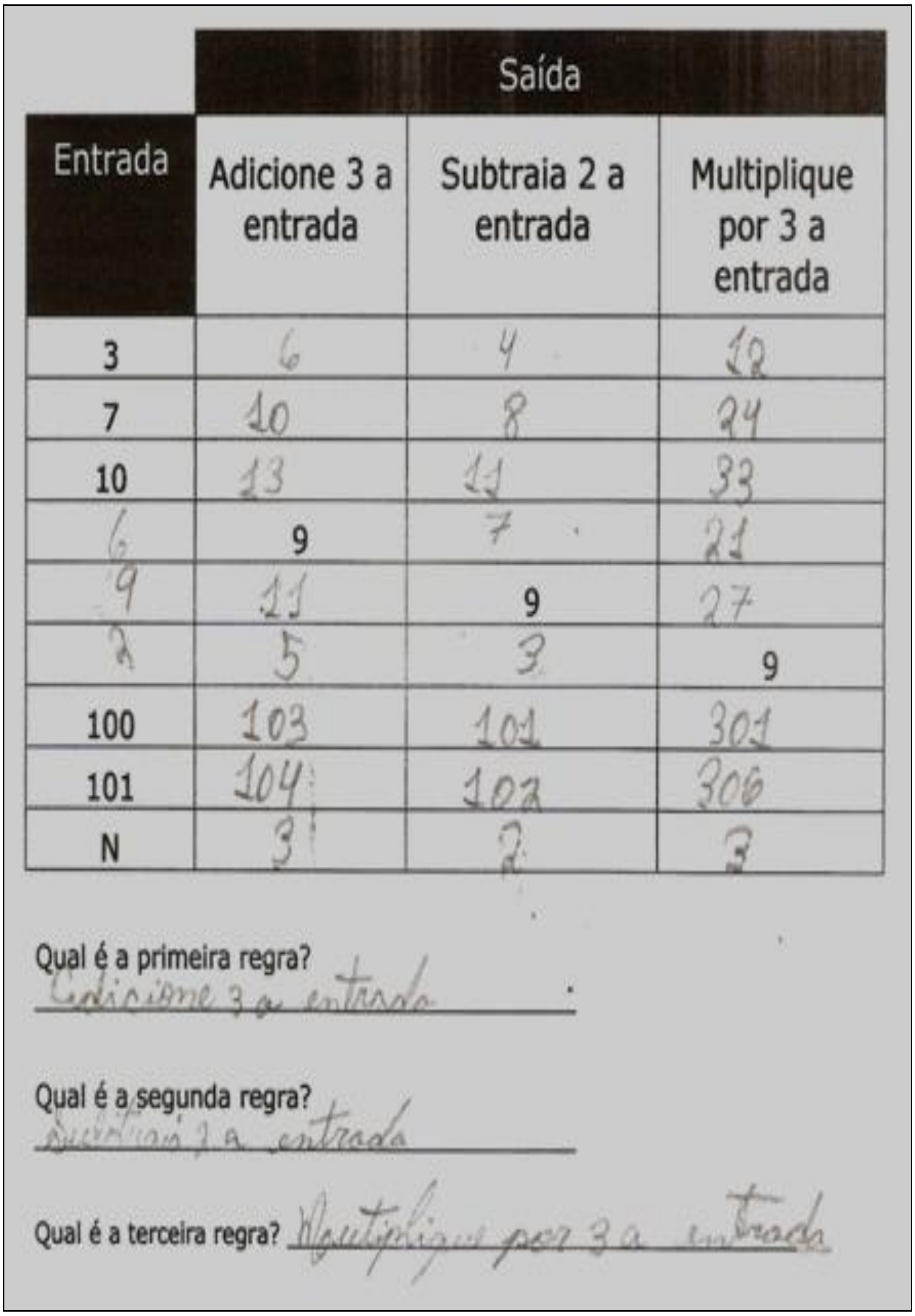
Qual é a terceira regra? ______________________________

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

No que diz respeito à tarefa cinco, como já referido, os estudantes evidenciaram dúvidas durante a resolução. Logo que entregamos a folha contendo a tarefa, interrogaram-nos: *"tem que fazer a conta?"; "como eu faço este, professora?"; "tem que pôr números no espaço?"; "e esse N, o que é isso?".* Da mesma forma, com frequência nos perguntaram: *"e quando não tem o valor de entrada?"; "por que do número três já pula para o número100?"; "o que é esse N?*". Cabe lembrar que o "N" na última linha do quadro causou dúvidas e um considerável estranhamento. Com relação ao questionamento *"por que do número três já pula para o número 100?",* podemos inferir que os estudantes têm uma forte influência das propriedades do conjunto dos números naturais como, por exemplo, de ordenação, uma vez que é nessa fase de escolaridade que os estudantes ampliam os conceitos com relação a esse conjunto numérico.

Vale ressaltar que uma apreciável parcela de estudantes (aproximadamente a metade), ao completarem o quadro, aplicou as regras aos valores da coluna anterior e não ao valor de entrada. Esse fato se revela nas resoluções dos estudantes E1,

E2, E3, E4, E5, E6, E7, E18, E21, E24, E25, E27, E28, E29, E30, E31 e E33. Na sequência apresentamos a figuras 43, 44, 45 e 46 as quais confirmam tal afirmação.



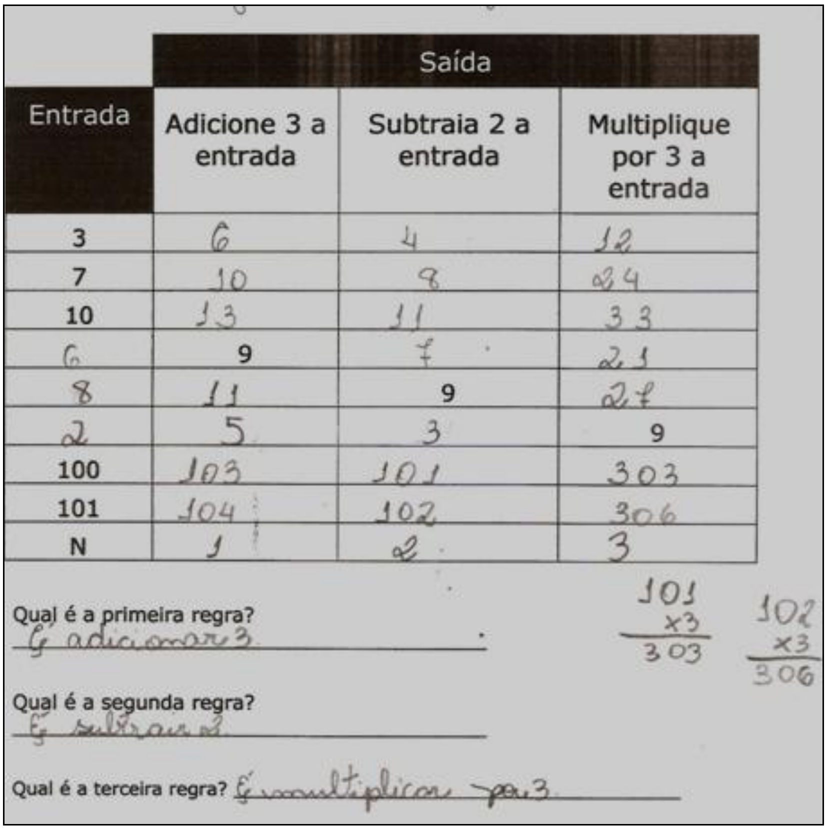
Entrada	Saída: Adicione 3 a entrada	Saída: Subtraia 2 a entrada	Saída: Multiplique por 3 a entrada
3	6	4	12
7	10	8	24
10	13	11	33
6	9	7	21
9	11	9	27
2	5	3	9
100	103	101	301
101	104	102	306
N	3	2	3

Qual é a primeira regra? Adicione 3 a entrada

Qual é a segunda regra? Subtraia 2 a entrada

Qual é a terceira regra? Multiplique por 3 a entrada

Figura 43 - Registro escrito do participante E31 - Tarefa 5



Entrada	Saída: Adicione 3 a entrada	Saída: Subtraia 2 a entrada	Saída: Multiplique por 3 a entrada
3	6	4	12
7	10	8	24
10	13	11	33
6	9	7	21
8	11	9	27
2	5	3	9
100	103	101	303
101	104	102	306
N	1	2	3

101 ×3 = 303

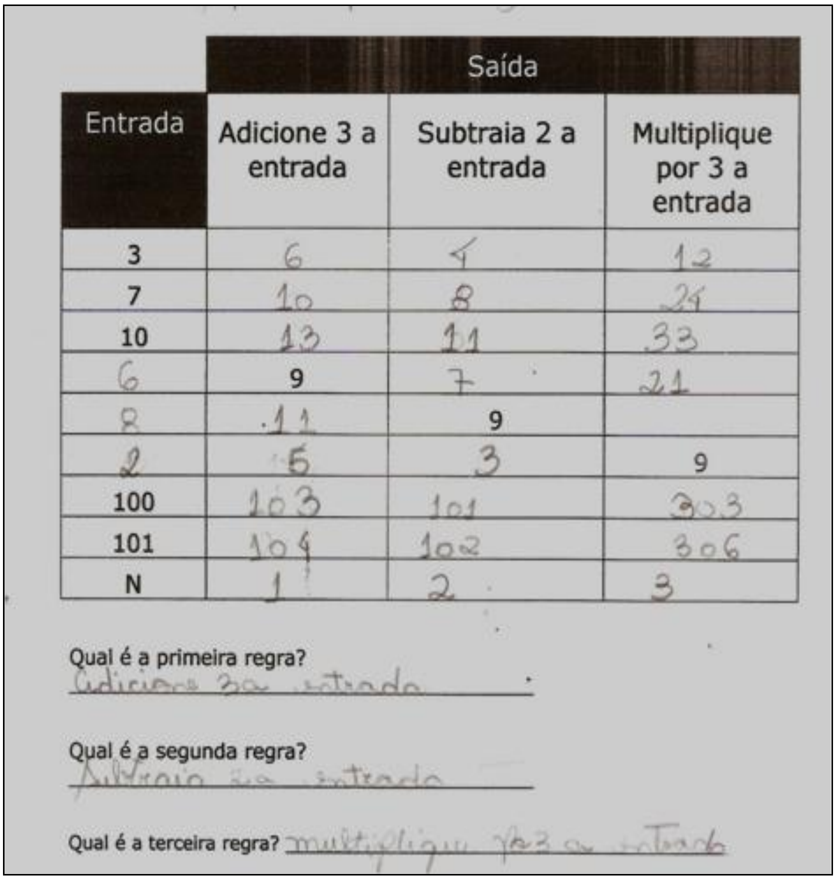
102 ×3 = 306

Qual é a primeira regra? É adicionar 3.

Qual é a segunda regra? É subtrair 2

Qual é a terceira regra? É multiplicar por 3.

Figura 44 - Registro escrito do participante E29 - Tarefa 5



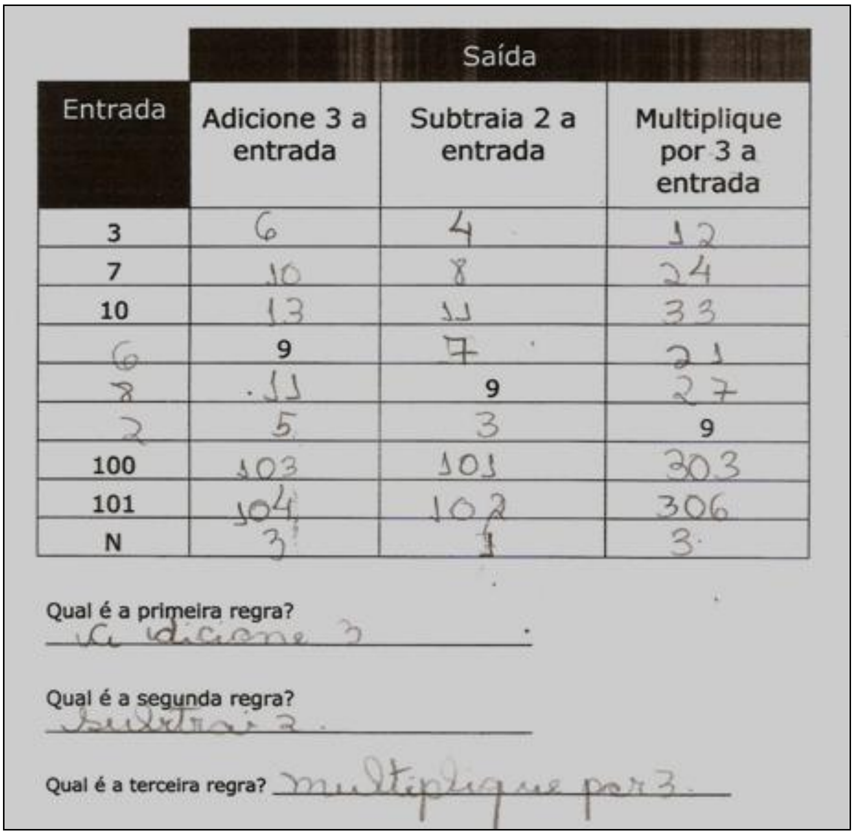
Entrada	Saída: Adicione 3 a entrada	Saída: Subtraia 2 a entrada	Saída: Multiplique por 3 a entrada
3	6	4	12
7	10	8	24
10	13	11	33
6	9	7	21
8	11	9	
2	5	3	9
100	103	101	303
101	104	102	306
N	1	2	3

Qual é a primeira regra? Adicione 3 a entrada

Qual é a segunda regra? Subtraia 2 a entrada

Qual é a terceira regra? multiplique por 3 a entrada

Figura 45 - Registro escrito do participante E28 - Tarefa 5



	Saída		
Entrada	Adicione 3 a entrada	Subtraia 2 a entrada	Multiplique por 3 a entrada
3	6	4	12
7	10	8	24
10	13	11	33
6	9	7	21
8	11	9	27
2	5	3	9
100	103	101	303
101	104	102	306
N	3	1	3

Qual é a primeira regra? a dicione 3

Qual é a segunda regra? Subtrai 2.

Qual é a terceira regra? multiplique por 3.

Figura 46 - Registro escrito do participante E25 - Tarefa 5

Fazendo referência à resolução do estudante E25 (figura 46), e tomando como exemplo a primeira linha de valores do quadro, podemos observar que o estudante adicionou três ao valor de entrada, obtendo como resultado seis, no entanto, aplicou a segunda regra ao resultado seis, e não ao valor de entrada três, pois subtraiu dois de seis, obtendo quatro. Assim, ficou evidente no restante do quadro que esse estudante, e os demais, aplicaram apenas a primeira regra ao valor de entrada.

Da mesma forma, as resoluções dos estudantes E1, E2, E3 e E4, apresentadas nas figuras 47, 48, 49 e 50 a seguir, também apontaram para a utilização das regras aos valores da coluna anterior ao completarem o quadro. No entanto, para o valor de entrada “N”, expressaram uma linguagem simbólica algébrica[46]. Assim, há evidências de pensamento algébrico, pois esses estudantes [...] desenvolvem algum tipo de processo de generalização; percebem e tentam expressar regularidades ou invariâncias; desenvolvem/criam uma linguagem mais

[46] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28

concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente [...] (FIORENTINI, FERNADES e CRISTÓVÃO, 2005, p. 5)

	Saída		
Entrada	Adicione 3 a entrada	Subtraia 2 a entrada	Multiplique por 3 a entrada
3	6	4	12
7	10	8	24
10	13	11	33
6	9	7	21
8	11	9	27
2	5	3	9
100	103	101	303
101	104	102	306
N	N+3	N-2	NX3

101
101
101
303

Qual é a primeira regra? Adicione 3 a entrada

Qual é a segunda regra? Subtraia 2 a entrada

Qual é a terceira regra? multiplique por 3 a entrada

Figura 47- Registro escrito do participante E1- Tarefa 5

	Saída		
Entrada	Adicione 3 a entrada	Subtraia 2 a entrada	Multiplique por 3 a entrada
3	6	4	12
7	10	8	24
10	13	11	33
6	9	7	21
8	11	9	27
2	5	3	9
100	103	101	303
101	104	102	306
N	N+3	N-2	N×3

Qual é a primeira regra? adicione 3 a entrada

Qual é a segunda regra? subtraia 2 a entrada

Qual é a terceira regra? multiplique por 3 a entrada

Figura 48 - Registro escrito do participante E2- Tarefa 5

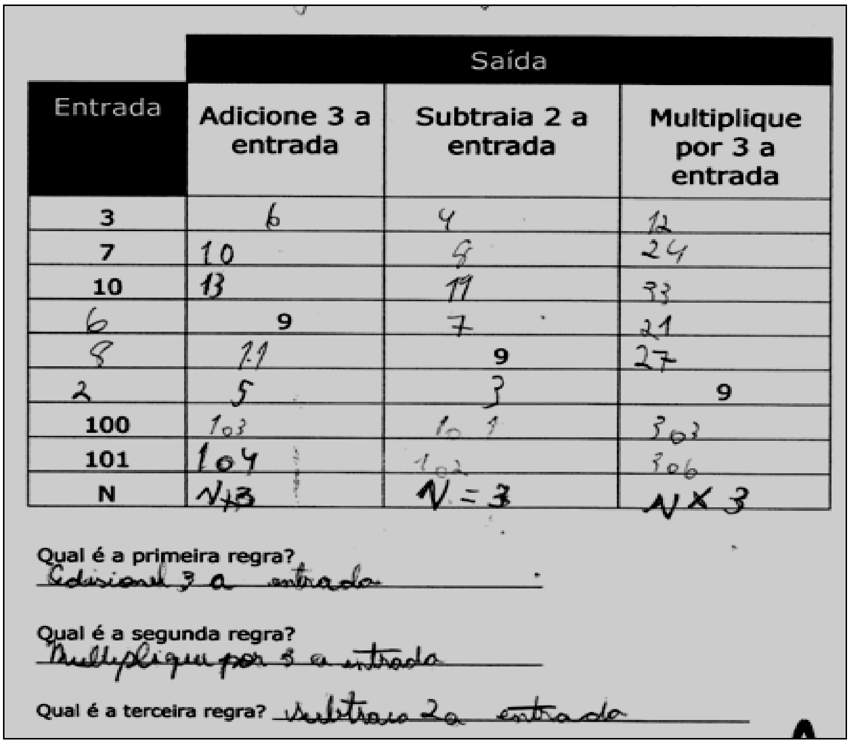
	Saída		
Entrada	Adicione 3 a entrada	Subtraia 2 a entrada	Multiplique por 3 a entrada
3	6	4	12
7	10	8	24
10	13	11	33
6	9	7	21
8	11	9	27
2	5	3	9
100	103	101	303
101	104	102	306
N	N+3	N-2	N×3

Qual é a primeira regra? __________

Qual é a segunda regra? __________

Qual é a terceira regra? __________

Figura 49 - Registro escrito do participante E3 - Tarefa 5



Entrada	Saída		
	Adicione 3 a entrada	Subtraia 2 a entrada	Multiplique por 3 a entrada
3	6	4	12
7	10	8	24
10	13	11	33
6	9	7	21
8	11	9	27
2	5	3	9
100	103	101	303
101	104	102	306
N	N+3	N = 3	N X 3

Qual é a primeira regra? Adicional 3 a entrada

Qual é a segunda regra? Multiplique por 3 a entrada

Qual é a terceira regra? Subtraio 2a entrada

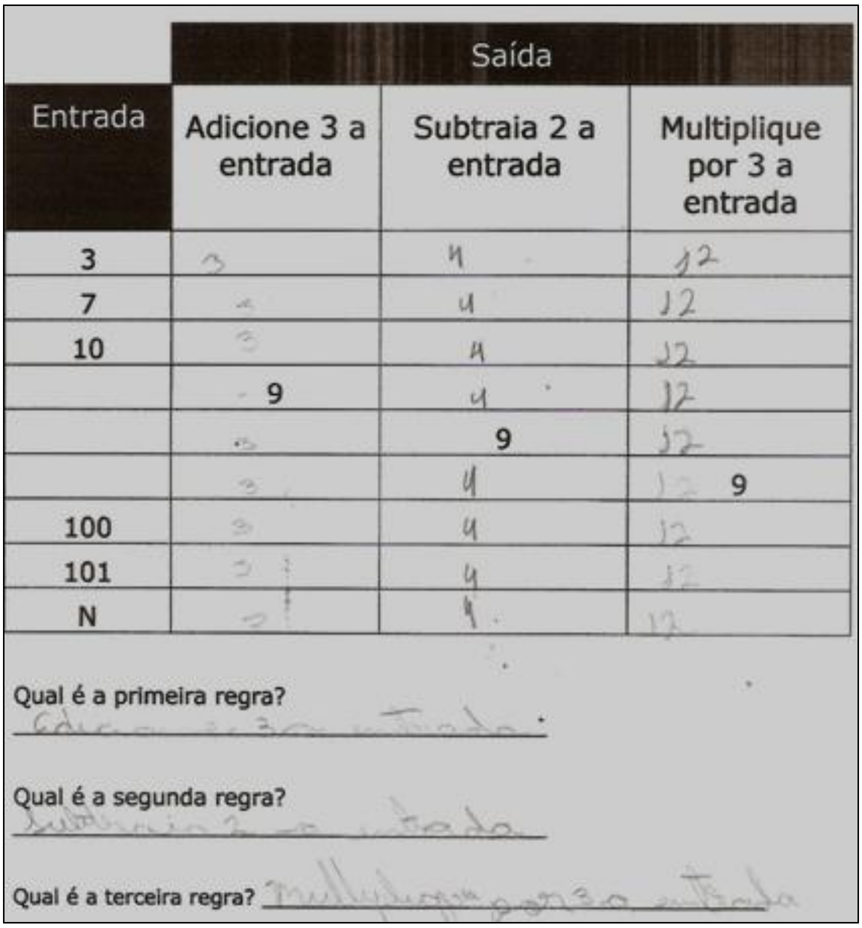
Figura 50 - Registro escrito do participante E4 - Tarefa 5

Outra ocorrência interessante nessas resoluções é que mesmo os estudantes aplicando as regras aos valores da coluna anterior, para o valor de entrada “N” eles generalizaram, porém, diferentemente do padrão que utilizaram para completar a tabela. Podemos inferir que o fato de um número considerável de estudantes completarem o quadro dessa forma, ou seja, recorrendo ao número da coluna que o antecede, pode ter sido por distração, uma vez que o quadro dispõe de vários campos a serem preenchidos. Ainda, em vários momentos, ao atendermos os estudantes em suas carteiras, recebemos a afirmação: *“ahhh, então se a regra é adicione três à entrada e o valor é N, então fica N+3!”.*

Por meio dessa afirmação e das resoluções elencadas, podemos entender que há características de pensamento algébrico, uma vez que esse pensamento

> [...] aborda relações matemáticas gerais, exprimindo-as de maneira sofisticada como atividades dinâmicas de visualização de padrões de geometria, número e medida para determinar as soluções para problemas mais complexos. (BOOKER, 2009, p. 10, tradução nossa)

Dando sequência às investigações referentes às resoluções da tarefa cinco, os registros escritos dos estudantes E16 e E17, conforme mostram as figuras 51 e 52 merecem destaque, pois se diferenciam dos demais.



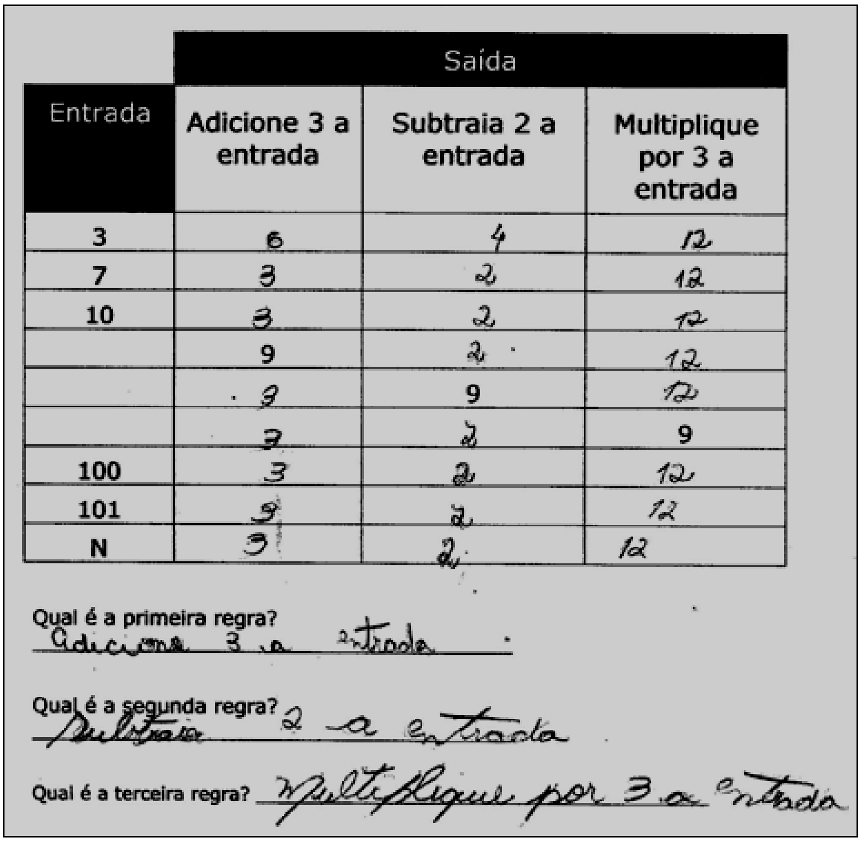
	Saída		
Entrada	Adicione 3 a entrada	Subtraia 2 a entrada	Multiplique por 3 a entrada
3	3	4	12
7	[illegible]	4	12
10	3	4	12
	9	4	12
	3	9	12
	3	4	12 9
100	3	4	12
101	3	4	12
N	3	4	12

Qual é a primeira regra? Adiciona 3 a entrada.

Qual é a segunda regra? Subtraia 2 a entrada

Qual é a terceira regra? Multiplique por 3 a entrada

Figura 51- Registro escrito do participante E16 - Tarefa 5



	Saída		
Entrada	Adicione 3 a entrada	Subtraia 2 a entrada	Multiplique por 3 a entrada
3	6	4	12
7	3	2	12
10	3	2	12
	9	2	12
	3	9	12
	3	2	9
100	3	2	12
101	3	2	12
N	3	2	12

Qual é a primeira regra? Adiciona 3 a entrada.

Qual é a segunda regra? Subtraia 2 a entrada

Qual é a terceira regra? Multiplique por 3 a entrada

Figura 52 - Registro escrito do participante E17-Tarefa 5

Como exposto, na primeira linha do quadro, esses estudantes demonstraram aplicar as regras aos valores da coluna antecedente, como já explanado antes. No entanto, o padrão não segue no restante do quadro, de modo que apenas repetiram os valores para as próximas linhas.

Considerando as análises, julgamos ser importante enfatizar que um número elevado de resoluções não apresentaram generalizações para o valor de entrada “N” (trinta e uma resoluções), pois, em geral, completaram com números ou então não completaram. Entretanto, dezenove registros escritos, ou seja, mais que cinquenta por cento demonstraram um padrão ao concluírem o quadro. Igualmente, concordamos com Kieran (2004) ao afirmar que a manifestação do pensamento algébrico não requer necessariamente uma linguagem simbólica algébrica.

A seguir apresentaremos um quadro com as características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referentes à tarefa 5.

Quadro 15 - Síntese das características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referentes à tarefa 5

Características de Pensamento Algébrico	***Participantes***	***Quantidade de registros escritos***
Estabeleceu relações/comparações entre as informações descritas na tarefa;	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E12, E13, E14, E15, E18, E19, E20, E21, E22, E24, E25, E27, E28, E29, E30, E31, E32, E33 e E34	26
Percebeu e tentou expressar as estruturas aritméticas da tarefa;	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E27, E28, E29, E30, E31, E32, E33, E34 e E35	33
Desenvolveu uma linguagem mais concisa ao expressar-se matematicamente;	E1, E2, E3 e E4	4
Demonstrou algum tipo de processo de generalização;	E1, E2, E3 e E4	4
Percebeu e tentou expressar regularidades ou invariâncias.	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E13, E18, E19, E21, E24, E25, E27, E28, E29, E30, E31 e E33	19

Fonte: do autor

Análise - Tarefa 6

A seguir, apresentamos a figura 53, a qual exibe a tarefa 6, a fim de expormos a análise interpretativa das resoluções dos estudantes referentes a essa tarefa.

Figura 53 - Tarefa 6

Tarefa 6

Nome: ______________________________data: ______

Agora você cria a regra...

	Saída		
Entrada	1ª regra	2ª regra	3ª regra
100			
101			
10			
	14		
		14	
			14
15			
6			
n			

Qual é a primeira regra? ________________________________

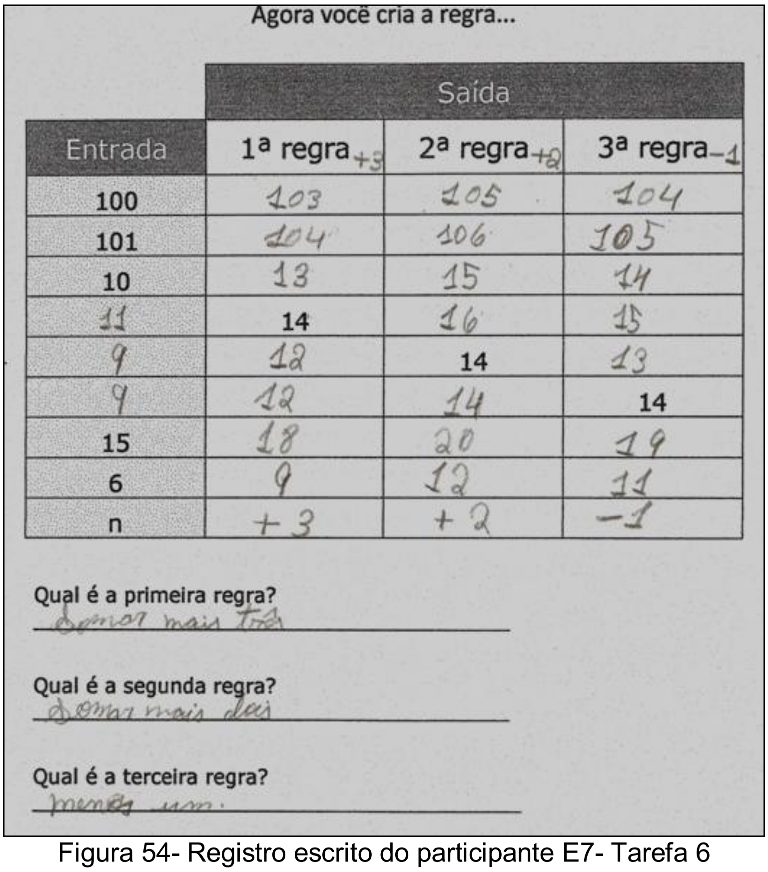
Qual é a segunda regra? ________________________________

Qual é a terceira regra? ________________________________

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Tratando-se da tarefa seis, diferentemente da tarefa anterior, os estudantes deveriam criar as regras e segui-las de acordo com os valores do quadro. Assim, surgiram alguns questionamentos: *"como eu vou criar a regra?"; "que regra professora?"; "eu não sei, explica!".* A partir dessas indagações podemos inferir que essa e outras tarefas foram diferentes do que a turma em questão está habituada a fazer, pois houve uma alteração pelo fato de que deveriam resolvê-la sem a interferência da professora e ainda, porque a tarefa é “aberta” para várias interpretações, não indicando, por exemplo, qual tipo de regra criar.

Também é importante observar, como na tarefa anterior, tendo em vista que aproximadamente a metade dos estudantes ao completarem o quadro aplicou as regras aos valores da coluna anterior e não ao valor de entrada, esse fato também se revela nas resoluções dessa tarefa. Em dezenove resoluções encontramos esse padrão ao concluírem o quadro, ou seja, mais da metade da turma. Seguem as resoluções dos estudantes E7, E10, E12 e E13, expostas pelas figuras 54, 55, 56 e 57, as quais demonstram tal afirmação.



Agora você cria a regra...

	Saída		
Entrada	1ª regra +3	2ª regra +2	3ª regra −1
100	103	105	104
101	104	106	105
10	13	15	14
11	14	16	15
9	12	14	13
9	12	14	14
15	18	20	19
6	9	12	11
n	+ 3	+ 2	−1

Qual é a primeira regra? Somar mais três

Qual é a segunda regra? Somar mais dois

Qual é a terceira regra? menos um.

Figura 54- Registro escrito do participante E7- Tarefa 6

Agora você cria a regra...

	Saída		
Entrada	1ª regra	2ª regra	3ª regra
100	103	106	109
101	104	107	110
10	13	16	19
11	14	17	20
8	11	14	17
5	8	11	14
15	18	21	24
6	9	12	5
n	103	106	109

Qual é a primeira regra? Somar mais 3.

Qual é a segunda regra? transformar o número

Qual é a terceira regra? n e 103

Figura 55 - Registro escrito do participante E10 - Tarefa 6

	Saída		
Entrada	1ª regra+3	2ª regra-5	3ª regra×2
100	103	98	196
101	104	99	198
10	15	10	20
11	14	09	18
16	19	14	28
7	10	7	14
15	18	13	26
6	9	1	8
n	1	2	3

Qual é a primeira regra? Somar mais três

Qual é a segunda regra? Subtrair 5

Qual é a terceira regra? Multiplicar por 2

Figura 56 - Registro escrito do participante E13 - Tarefa 6

Agora você cria a regra...

	Saída		
Entrada	1ª regra +3	2ª regra -2	3ª regra x2
100	103	101	202
101	104	102	204
10	13	11	22
11	14	12	24
13	16	14	28
6	9	7	14
15	18	16	32
6	9	7	14
n	+ 3	- 2	x 2

Qual é a primeira regra?
Mais 3

Qual é a segunda regra?
menos 2

Qual é a terceira regra?
multiplicar por 2

Figura 57 - Registro escrito do participante E15 - Tarefa 6

Dando sequência às análises, destacamos as resoluções dos estudantes E14, E25, E32 e E33, expostas nas figuras 58, 59, 60 e 61. Estes registros escritos evidenciam características de pensamento algébrico, pois para o valor de entrada "N" expressaram uma linguagem simbólica algébrica, sendo que "[...] desenvolvem algum tipo de processo de generalização; percebem e tentam expressar regularidades ou invariâncias; desenvolvem/criam uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente..." (FIORENTINI, FERNADES e CRISTÓVÃO, 2005, p. 5).

Agora você cria a regra...

Entrada	Saída: 1ª regra +3	Saída: 2ª regra ×2	Saída: 3ª regra −1
100	103	206	205
101	104	208	207
10	13	26	25
11	14	28	27
4	7	14	13
3	6	7	14
15	18	36	35
6	9	16	17
n	N+3	N×2	N-1

Qual é a primeira regra?
mais três

Qual é a segunda regra?
vezes 2

Qual é a terceira regra?
menos 1

Figura 58 - Registro escrito do participante E14 - Tarefa 6

Agora você cria a regra...

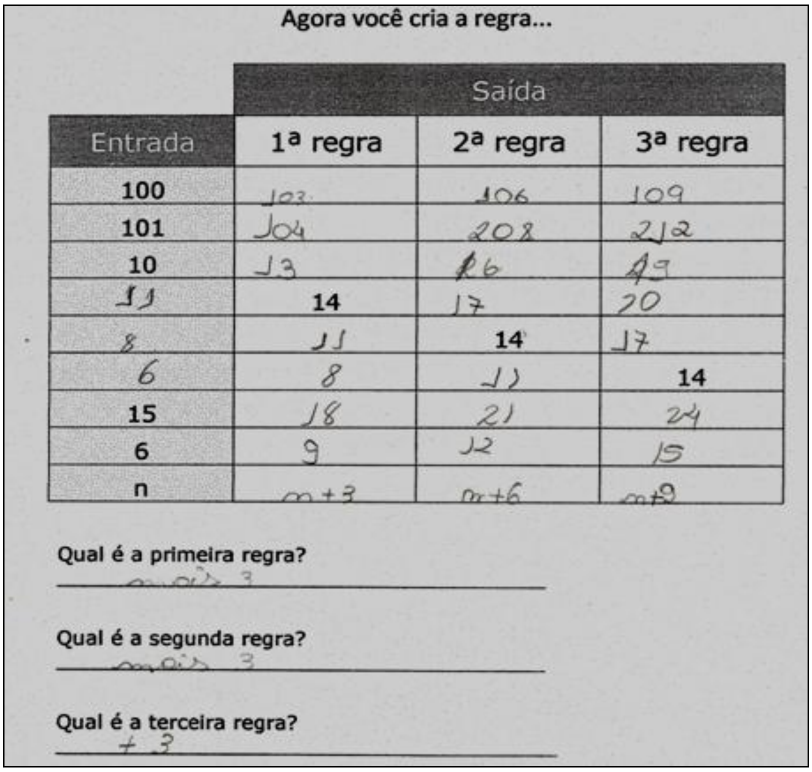
Entrada	Saída: 1ª regra +3	Saída: 2ª regra -5	Saída: 3ª regra +10
100	103	98	108
101	104	99	109
10	13	6	16
11	14	9	19
16	19	14	24
6	9	4	14
15	18	13	20
6	9	4	14
n	N+3	N-5	N+10

Qual é a primeira regra?
mais 3.

Qual é a segunda regra?
menos 5

Qual é a terceira regra?
mais 10.

Figura 59 - Registro escrito do participante E25 - Tarefa 6



Agora você cria a regra...

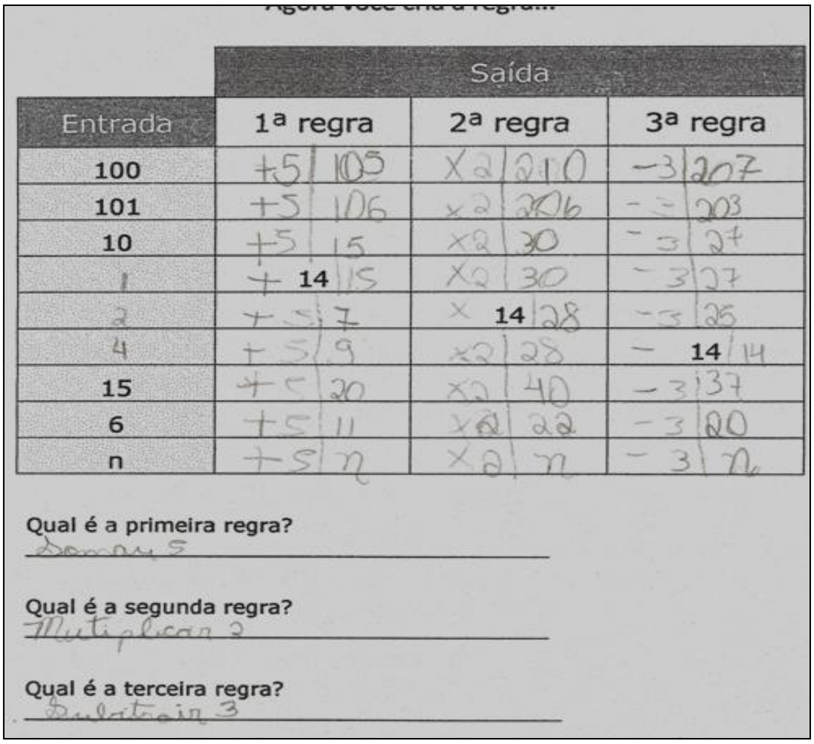
	Saída		
Entrada	1ª regra	2ª regra	3ª regra
100	103	106	109
101	104	208	212
10	13	16	19
11	14	17	20
8	11	14	17
6	8	11	14
15	18	21	24
6	9	12	15
n	n+3	n+6	n+9

Qual é a primeira regra? mais 3

Qual é a segunda regra? mais 3

Qual é a terceira regra? + 3

Figura 60 - Registro escrito do participante E33 - Tarefa 6



Agora você cria a regra...

	Saída		
Entrada	1ª regra	2ª regra	3ª regra
100	+5 105	x2 200	-3 207
101	+5 106	x2 206	-3 203
10	+5 15	x2 30	-3 27
1	+ 14 15	x2 30	-3 27
2	+5 7	x 14 28	-3 26
4	+5 9	x2 28	- 14 14
15	+5 20	x2 40	-3 37
6	+5 11	x2 22	-3 20
n	+5 n	x2 n	-3 n

Qual é a primeira regra? Somar 5

Qual é a segunda regra? Multiplicar 2

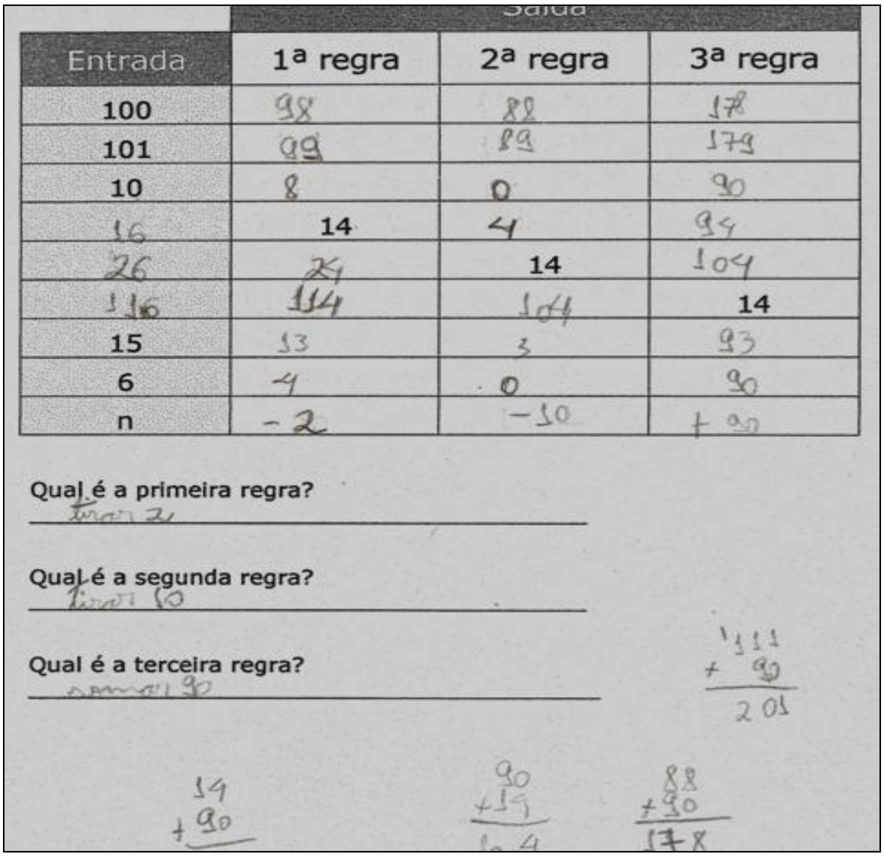
Qual é a terceira regra? Subtrair 3

Figura 61 - Registro escrito do participante E32 - Tarefa 6

Desse modo, por meio desses registros escritos percebemos que semelhante à tarefa antecedente, mesmo as crianças aplicando as regras aos valores da coluna anterior para o valor de entrada “N”, eles generalizaram[47], porém, diferentemente do padrão que utilizaram para completarem a tabela, o que se verifica nas resoluções E14, E25 e E32 (figuras 58, 59 e 61, respectivamente). No entanto, a resolução do estudante E33, exibida na figura 60, diferenciou-se das demais por aplicar as regras aos valores de entrada. Ainda, para o valor de entrada “N”, este estudante expressou uma linguagem simbólica algébrica de acordo com o padrão adotado ao completar o quadro. Cabe-nos concluir que esse aluno confirma características de pensamento algébrico, uma vez que tal pensamento

> [...] nas séries iniciais envolve o desenvolvimento de formas de pensar em atividades para as quais a álgebra sincopada pode ser usada como uma ferramenta, mas que não é exclusiva da álgebra e poderia ser resolvida sem o uso de símbolos, tal como, analisar relações entre quantidades, perceber mudanças, observar estruturas, resolver problemas, generalizar, modelar, justificar, provar e prever. (KIERAN, 2004, p. 12, tradução nossa).

Outras situações particulares referem-se às características de pensamento algébrico que foram elencadas neste estudo, como os registros escritos dos estudantes E2 e E9, apresentados nas figuras 62 e 63, a seguir.



	Saída		
Entrada	1ª regra	2ª regra	3ª regra
100	98	88	178
101	99	89	179
10	8	0	90
16	14	4	94
26	24	14	104
116	114	104	14
15	13	3	93
6	4	0	90
n	-2	-10	+90

Qual é a primeira regra? tirar 2

Qual é a segunda regra? tirar 10

Qual é a terceira regra? somar 90

Figura 62 - Registro escrito do participante E2 - Tarefa 6

---

[47] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

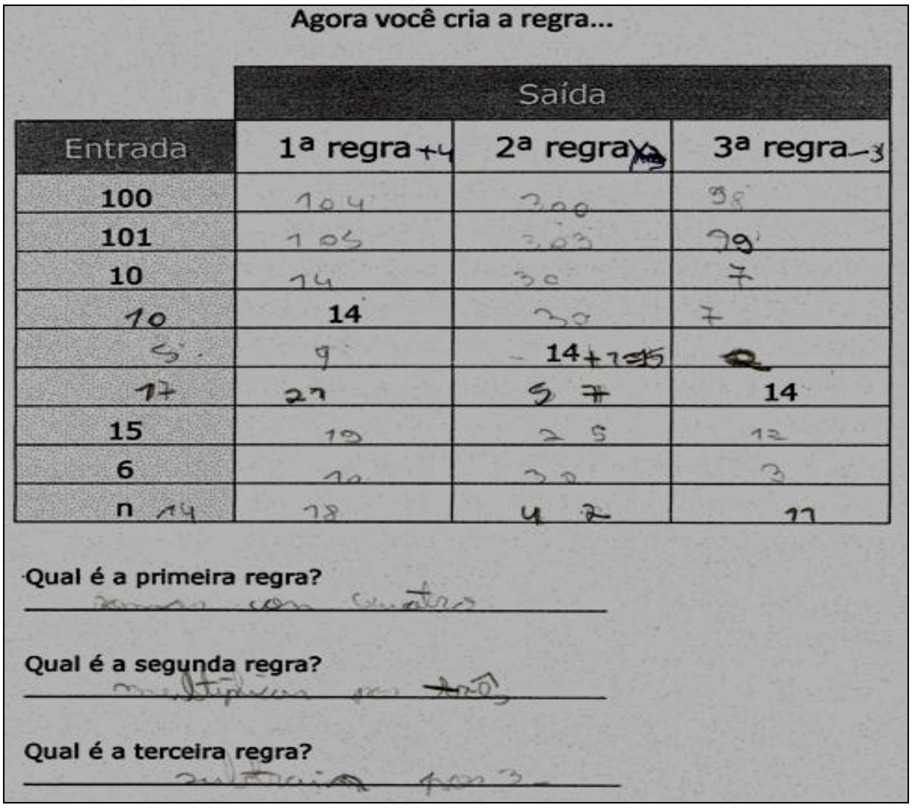


Figura 63 - Registro escrito do participante E9 - Tarefa 6

Como revelado, na resposta do estudante E2 (figura 62) aparece o algarismo zero na terceira coluna, pois essa criança escolheu como regras: “tirar dois”, “tirar dez” e “somar noventa”. De tal modo, como aplicou as regras aos valores da coluna precedente, ao “cair” nas operações 8 - 10 e 4 - 10 atribuiu como resultado, o zero. Concluímos que isso se deve ao fato de que nesta fase de escolaridade aos estudantes não foi introduzido o conceito de números inteiros. Assim, corroboramos com Booker (2009) ao mencionar o pensamento algébrico como um “[...] meio de lidar com generalizações e maneiras de pensar, que permitam que resultados sejam expressos por meio de uma variedade de formas de problemas mais simples do que os que encontram uma resposta particular [...]” [48] (p. 11, tradução nossa). Assim, esse pensamento também envolve a construção da aprendizagem na medida em que o estudante vai produzindo relações e atribuindo significados para os conceitos a partir do que ele já sabe, ou seja, de seus conhecimentos prévios[49].

[48] [...] means of dealing with generalizations and ways of thinking that allow results to be expressed across a range of problem forms rather than simply finding a particular answer [...] (BOOKER, 2009, p. 11).

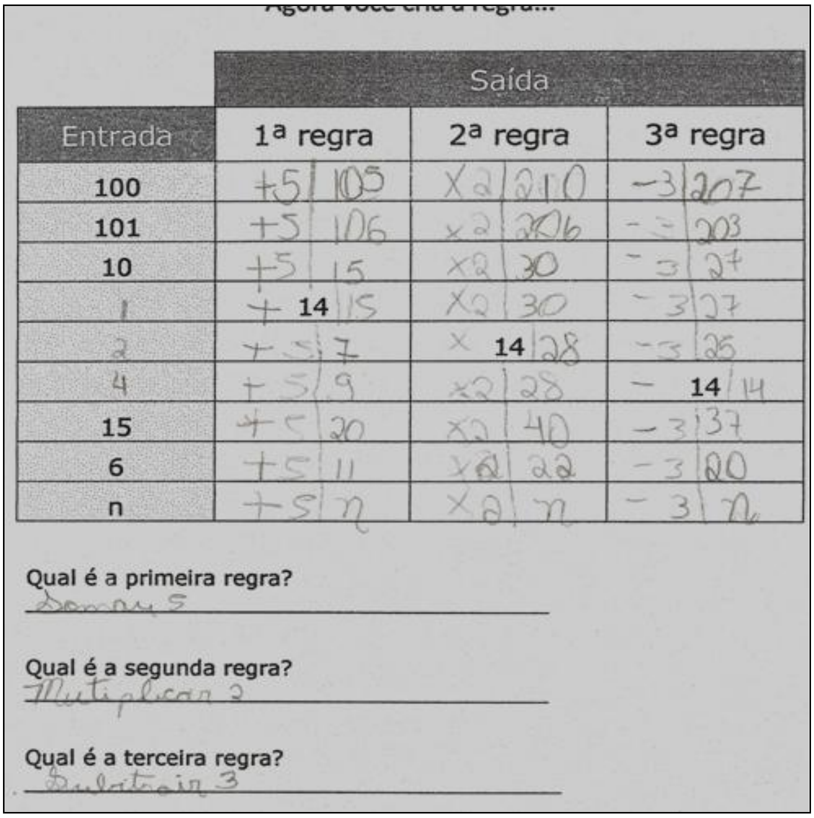
[49] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

O quadro do estudante E9 (figura 63) revelou que essa criança aplicou as regras por ela criada aos valores de entrada, no entanto para o valor “N” atribuiu um número e aplicou as regras a esse valor de entrada. Um fato curioso é que na coluna referente à “segunda regra”, fez uma adição, isto é, escreveu “14+1=15”. Julgamos ser interessante a descrição, uma vez que, como a segunda regra por ele escolhida é “multiplicar por três” e tendo em vista que o valor de entrada foi “5” e a tarefa já trazia o número “14” no quadro, assim aplicando a regra ao valor de entrada “cinco”, teremos “5x3=15”, logo o estudante encontrou uma saída adicionando um a quatorze (14+1=15).

Ainda, podemos apontar que nessas (figuras 62 e 63) e em outras respostas, há evidências de que esses estudantes dominam as operações aritméticas básicas, como por exemplo, multiplicação, adição e subtração, uma vez que o quadro traz alguns valores numéricos e as crianças deveriam criar as regras e levar em consideração esses valores que já estão no quadro. Como exemplo, relatamos a resolução do estudante E32 (figura 64), tendo em vista que escolheu como regras “somar cinco”, “multiplicar por dois” e “subtrair 3”, o qual aplicou aos valores da coluna anterior. Assim, a quinta linha de valores numéricos comprova essa afirmação, pois para escolher o valor de entrada o estudante deveria relacionar a primeira regra, a segunda regra e também, o número “14”, o qual já estava estabelecido pela tarefa. Desse modo, essa criança teve que pensar em um número que somado a cinco e multiplicado por dois daria como resultado quatorze, bem como, fazer o caminho inverso. Esse pensamento se assemelha à equação (x+5) x 2 = 14 . Novamente enfatizamos que a manifestação do pensamento algébrico não envolve necessariamente uma simbologia algébrica, de modo que pode ser desenvolvido em qualquer etapa escolar [50].

---

[50]Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.



	Saída		
Entrada	1ª regra	2ª regra	3ª regra
100	+5 105	x2 210	-3 207
101	+5 106	x2 206	-3 203
10	+5 15	x2 30	-3 27
1	+ 14 15	x2 30	-3 27
2	+5 7	x 14 28	-3 25
4	+5 9	x2 28	- 14 14
15	+5 20	x2 40	-3 37
6	+5 11	x2 22	-3 20
n	+5 n	x2 n	-3 n

Qual é a primeira regra? Somar 5

Qual é a segunda regra? Multiplicar 2

Qual é a terceira regra? Subtrair 3

Figura 64 - Registro escrito do participante E32 - Tarefa 6

Concordamos com Brizuela (2004) ao expor que uma investigação em sala de aula com estudantes dos anos iniciais apresentou que

> [...] os estudantes mais jovens aprendem a utilizar a notação algébrica simbólica significativamente para expressar generalizações enquanto exploram problemas em aberto em contextos ricos. Nós descobrimos que crianças podem usar notações matemáticas não apenas para registrar o que elas compreendem, mas também para estruturar e promover o seu pensamento, permitindo a elas fazer inferências que poderiam não ter sido feitas. Nós também mostramos que a notação algébrica pode constituir uma ferramenta para generalizações, para entendimento de funções lineares e para resolução de problemas (p. 34, tradução nossa).

Igualmente à tarefa anterior, de acordo com as análises, novamente julgamos ser importante realçar que um número elevado de resoluções não apresentou generalizações para o valor de entrada “N” (trinta e uma resoluções), a qual em geral foi completada com números ou então não completa. No entanto, vinte e sete registros escritos, ou seja, aproximadamente setenta e sete por cento confirmaram um padrão ao concluírem o quadro [51]. Do mesmo modo, concordamos com Kieran (2004) ao assegurar que a revelação do pensamento algébrico não requer

[51] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

necessariamente uma linguagem simbólica algébrica e que o desenvolvimento desse pensamento demanda um longo processo em que se faz necessário seu início nas primeiras séries de escolaridade. A seguir apresentaremos um quadro com as características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referentes à tarefa 6.

Quadro 16 - Síntese das características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referentes à tarefa 6

Características de Pensamento Algébrico	*Participantes*	*Quantidade de registros escritos*
Estabeleceu relações/comparações entre as informações descritas na tarefa;	E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32 e E33	32
Percebeu e tentou expressar as estruturas aritméticas da tarefa;	E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32 e E33	32
Desenvolveu uma linguagem mais concisa ao expressar-se matematicamente;	E14, E25, E32 e E33	4
Demonstrou algum tipo de processo de generalização;	E14, E25, E32 e E33	4
Percebeu e tentou expressar regularidades ou invariâncias.	E1, E2, E4, E6, E7, E8, E9, E10, E12, E13, E14, E15, E17, E19, E20, E21, E22, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32 e E33	27

Fonte: do autor

Análise - Tarefa 7

A figura 65 a seguir, abre a discussão com relação à análise interpretativa das resoluções dos estudantes referentes à tarefa 7.

Figura 65 - Tarefa 7

Tarefa 7

Nome: ______________________________ Data: ________

Talita e José fazem aniversário no mesmo dia (15 de julho).
Talita é exatamente cinco anos mais jovem do que José.

Complete a tabela para as idades de Talita e de José.

Quantos anos terá Talita quando José tiver 7 anos?

Quantos anos terá José quando Talita tiver 7 anos?

Idade de José	Idade de Talita	A diferença entre as idades deles
7		
	7	
8		
	10	
10		
	15	

Tarefa extra:

Vamos usar a letra k para significar a idade de José.
Se José tem k anos de idade, quantos anos terá Talita?

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

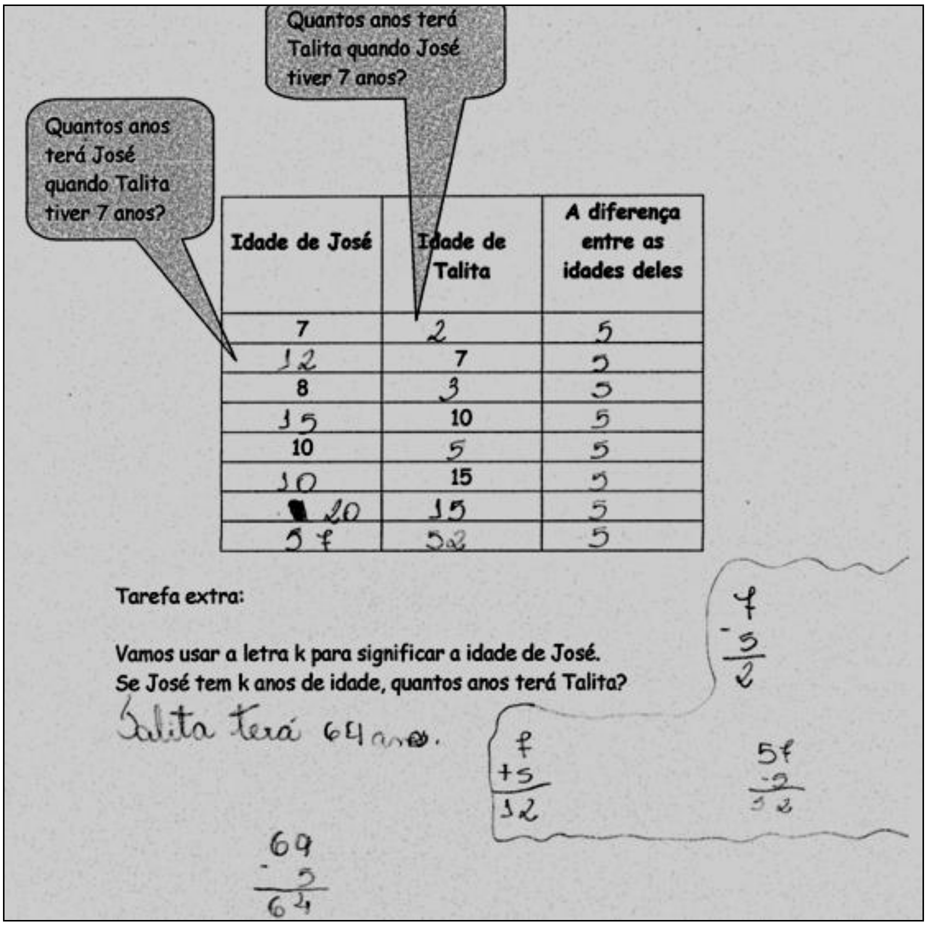
Como já mencionado, o primeiro momento da resolução foi tranquilo, pois os estudantes estavam comportados enquanto resolviam a tarefa. Ao completarem o quadro com as idades de José e Talita, os estudantes não evidenciaram dúvidas. Contudo, na resolução da segunda etapa, em que aparece a letra “k”, os alunos questionaram: *“o que é este “k”, professora?”; “como assim, José tem k anos?”; “eu não sei fazer este?”; “que esquisito isso?”*, entre outros.

No entanto, durante esses questionamentos, um estudante profere em voz alta: *“ai gente, que falação, vocês não lembram? É a mesma coisa do N do problema da outra aula!”*

Assim, diante desse comentário, percebemos que alguns estudantes lembraram-se da tarefa anterior, porém, alguns evidenciaram não se recordarem.

Notamos que parte da turma não entendeu a segunda parte da tarefa, devido ao símbolo K.

Com relação a essa tarefa são evidentes as características de pensamento algébrico nas resoluções dos estudantes, bem como, o estabelecimento de regularidades [52]. Por meio dos registros escritos e das análises, podemos inferir que os estudantes "[...] percebem e tentam expressar regularidades ou invariâncias [...]" (FIORENTINI, FERNADES e CRISTÓVÃO, 2005, p. 5), pois ao completarem o quadro referente às idades de José e Talita, quatorze crianças, ou seja, aproximadamente quarenta e um por cento, utilizaram um padrão. Ainda, demonstraram ter compreendido a relação entre as idades de Talita e José. Essas afirmações estão presentes nas resoluções dos estudantes E1, E4, E6, E12, E18, E22, E23, E29 E3, E8, E10, E25, E31 e E33, conforme mostram as figuras 66 e 67.


Quantos anos terá Talita quando José tiver 7 anos?

Quantos anos terá José quando Talita tiver 7 anos?

Idade de José	Idade de Talita	A diferença entre as idades deles
7	2	5
12	7	5
8	3	5
15	10	5
10	5	5
10	15	5
20	15	5
57	52	5

Tarefa extra:

Vamos usar a letra k para significar a idade de José.
Se José tem k anos de idade, quantos anos terá Talita?

Talita terá 64 anos.

$7 - 5 = 2$

$7 + 5 = 12$

$57 - 5 = 52$

$69 - 5 = 64$

Figura 66 - Registro escrito do participante E12 - Tarefa 7

[52] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

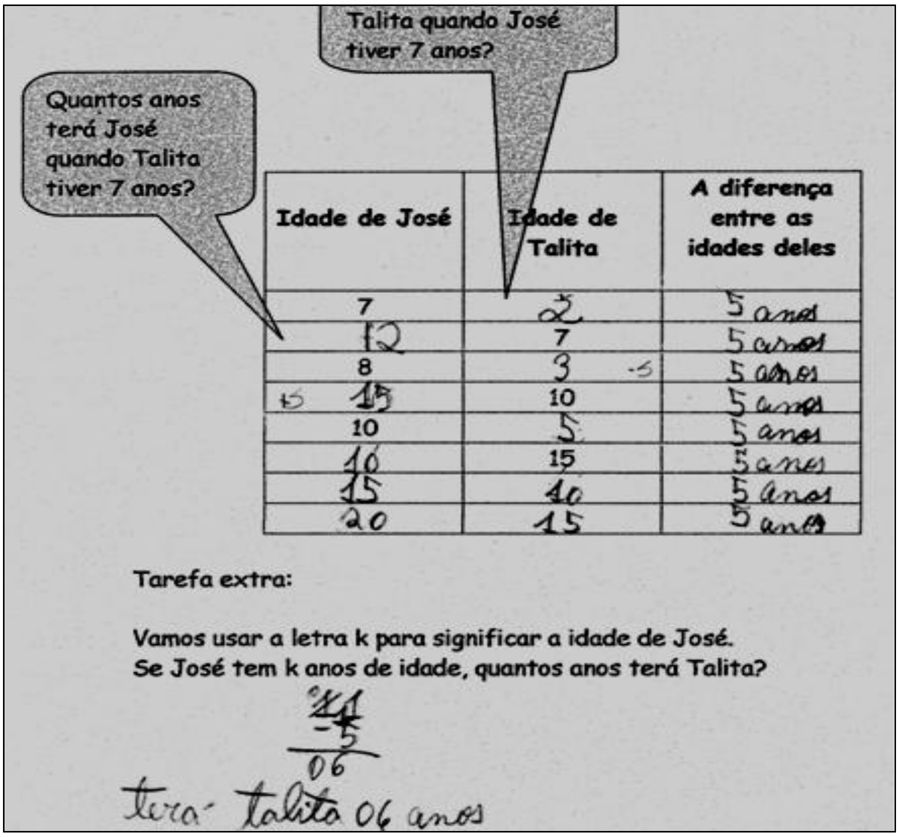


Figura 67- Registro escrito do participante E29 - Tarefa 7

No que diz respeito à tarefa extra, os estudantes não demonstraram processos de generalização, uma vez que dos trinta e quatro participantes, treze atribuíram um valor numérico para as idades de Talita e José e dezoito deles não resolveram a tarefa extra, ou seja, deixaram em branco. Podemos inferir que essas crianças não tiveram contato com uma linguagem simbólica algébrica, pois as respostas apontam que esses não interpretaram a letra K como um termo geral, como evidenciam as figuras 68 e 69.

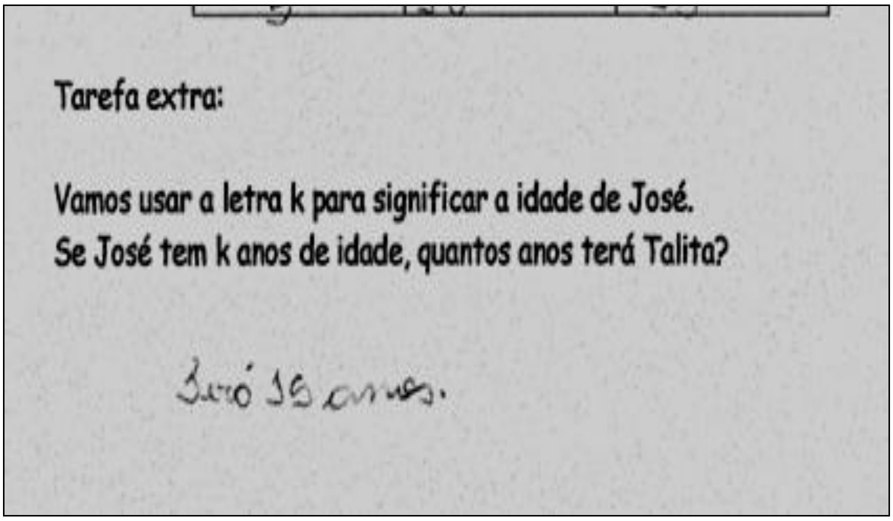


Figura 68 - Registro escrito do participante E26 - Tarefa 7

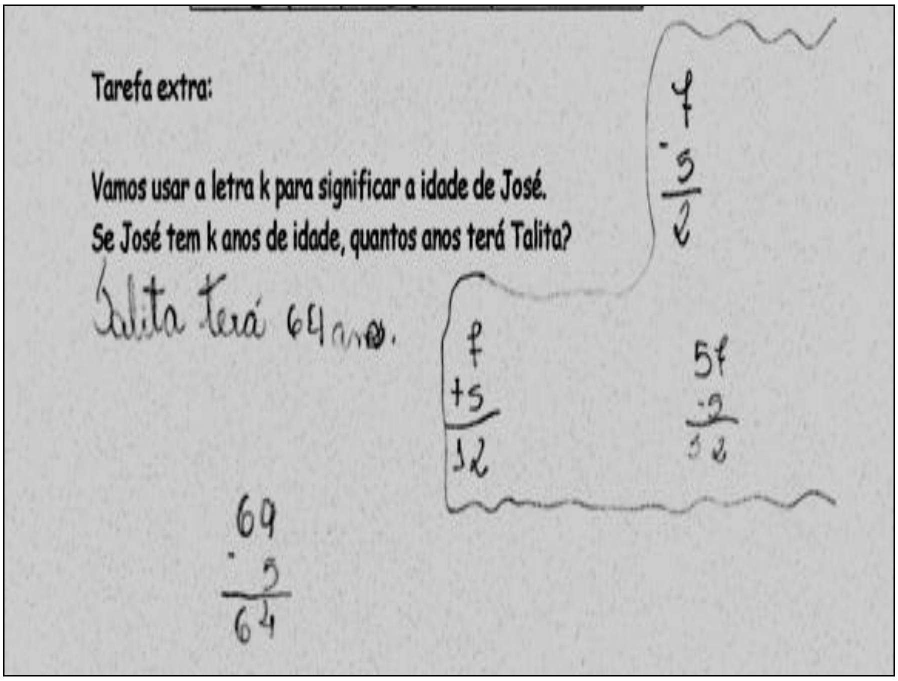
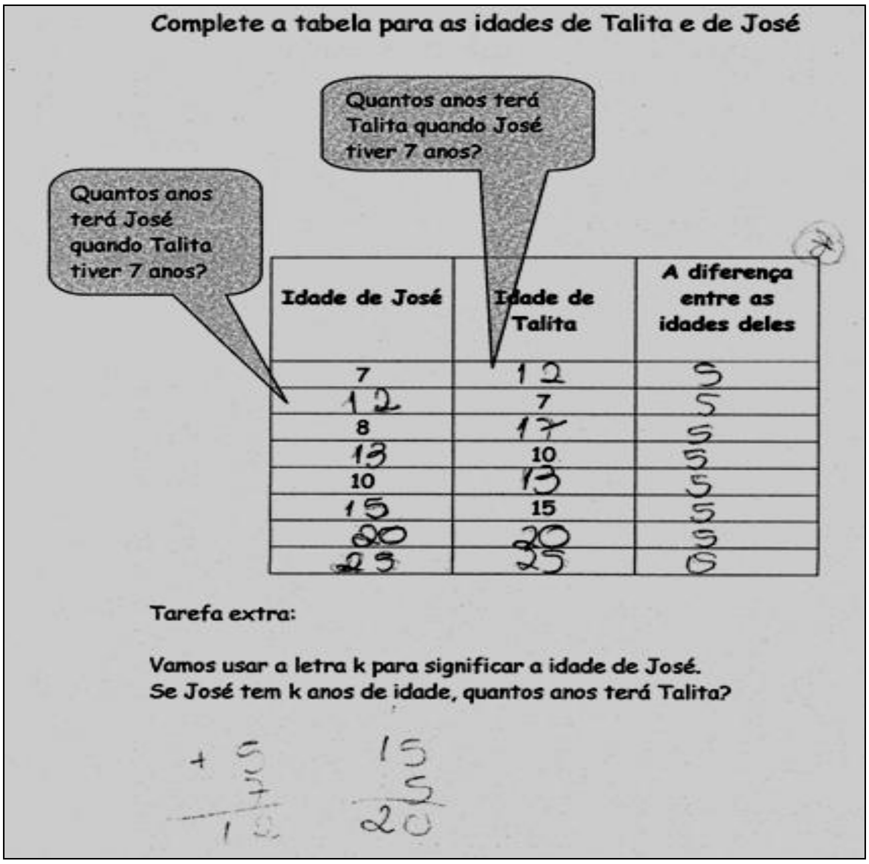


Figura 69 - Registro escrito do participante E12 - Tarefa 7

Continuando as análises, as figuras 70, 71 e 72, as quais exibem as resoluções dos estudantes E9, E28 e E30 nos chama a atenção.



Complete a tabela para as idades de Talita e de José

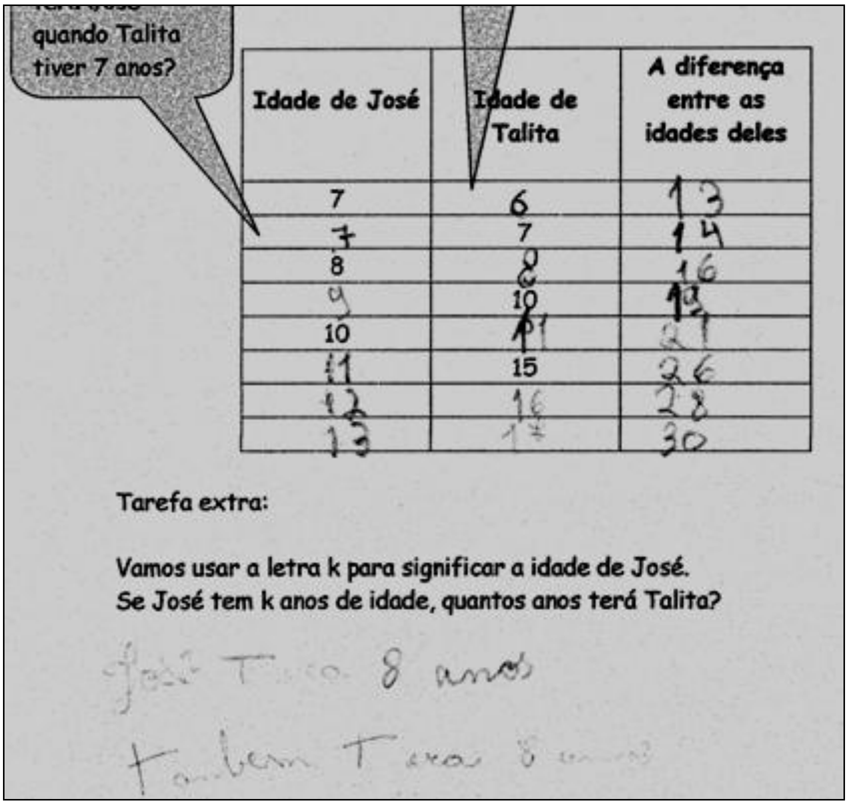
Idade de José	Idade de Talita	A diferença entre as idades deles
7	12	5
12	7	5
8	17	5
13	10	5
10	13	5
15	15	5
20	20	5
25	25	5

Tarefa extra:

Vamos usar a letra k para significar a idade de José.
Se José tem k anos de idade, quantos anos terá Talita?

$+\begin{array}{r}5\\7\\\hline 12\end{array}$ $\begin{array}{r}15\\5\\\hline 20\end{array}$

Figura 70 - Registro escrito do participante E9 - Tarefa 7



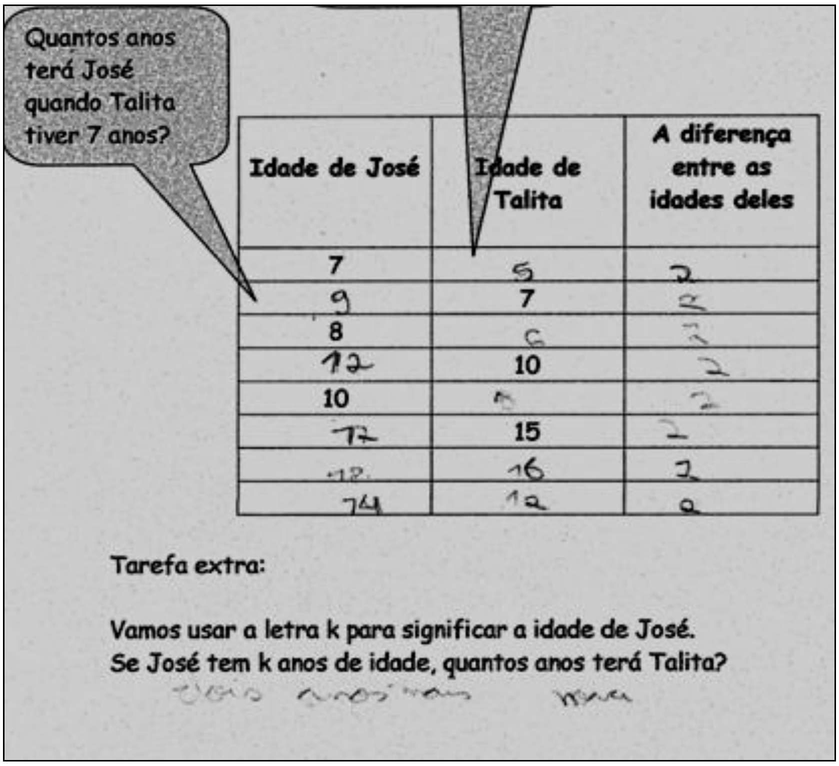
Idade de José	Idade de Talita	A diferença entre as idades deles
7	6	13
7	7	14
8	8	16
9	10	19
10	11	21
11	15	26
12	16	28
13	17	30

Tarefa extra:

Vamos usar a letra k para significar a idade de José.
Se José tem k anos de idade, quantos anos terá Talita?

José Terá 8 anos
Tambem Terá 8 anos

Figura 71 - Registro escrito do participante E28 - Tarefa 7


Quantos anos terá José quando Talita tiver 7 anos?

Idade de José	Idade de Talita	A diferença entre as idades deles
7	5	2
9	7	2
8	6	2
12	10	2
10	[illegible]	2
17	15	2
12	16	2
14	12	2

Tarefa extra:

Vamos usar a letra k para significar a idade de José.
Se José tem k anos de idade, quantos anos terá Talita?

Figura 72 - Registro escrito do participante E30 - Tarefa 7

Como exposto, o estudante E9 (figura 70) não evidenciou um padrão ao completar as idades de José e Talita. No entanto, há indícios de que compreendeu a diferença entre as idades de Talita e José. Já o estudante E28 (figura 71) se destacou dos demais por apresentar uma resolução totalmente incoerente com o problema. Além de não demonstrar um padrão ao completar o quadro, na resolução da tarefa extra, registrou que José e Talita têm oito anos, uma vez que o problema diz: “Talita é exatamente cinco anos mais jovem do que José”. Um possível apontamento é que esse estudante talvez tenha confundido com a informação de que “Talita e José faz aniversário no mesmo dia (15 de julho)”.

O estudante E30, exposto na figura 72, revelou que considerou a diferença entre as idades de José e de Talita de dois anos. Podemos inferir que talvez este fato se deva a uma distração do estudante, pois o mesmo completou o quadro corretamente utilizando a regra de que Talita é dois anos mais jovem do que José.

A seguir apresentaremos um quadro com as características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referentes à tarefa 7.

Quadro 17 - Síntese das características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referentes à tarefa 7

Características de Pensamento Algébrico	***Participantes***	***Quantidade de registros escritos***
Estabeleceu relações/comparações entre as informações descritas na tarefa;	E1, E2, E3, E4, E6, E8, E9, E10, E12, E16, E18, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31 e E33	23
Percebeu e tentou expressar as estruturas aritméticas da tarefa;	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E13, E11, E12, E14, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31 e E33	31
Percebeu e tentou expressar regularidades ou invariâncias.	E1, E3, E4, E6, E8, E10, E12, E18, E22, E23, E25, E29, E31 e E33	14

Fonte: do autor

Análise - Tarefa 8

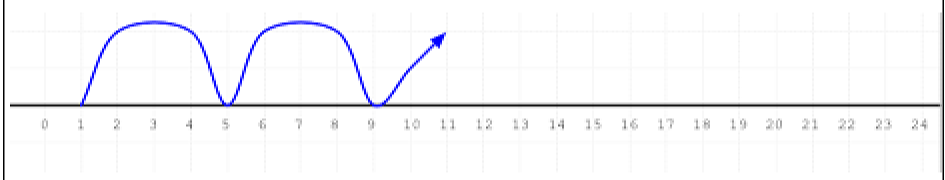
A seguir, apresentamos a figura 73, a qual exibe a tarefa 8, a fim de expormos a análise interpretativa das resoluções dos estudantes referentes a essa tarefa. Com a discussão desta tarefa encerramos a seção 4.2.

Figura 73 - Tarefa 8

Tarefa 8

Nome: ______________________________ data: _______

Descubra que regra segue o salto da curva na reta numerada.



Invente uma história que envolva essa regra.

"Antes de Tony começar a trabalhar tinha R$ 1,00 em seu cofrinho.
Então, ele ganhou R $ 4,00 por cada dia de trabalho. "

Escreva uma expressão matemática para mostrar essa regra.

Fonte: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

Com relação à resolução dessa tarefa, parte dos estudantes evidenciou dúvidas, uma vez que foram muitos os questionamentos.

Na resolução da primeira parte da tarefa, a qual consistia em descrever uma história referente à regra do salto da curva na reta numerada, aproximadamente um sexto da turma descreveu que o salto da curva na reta numerada vai de cinco em cinco unidades. Estas afirmações estão presentes nas respostas dos estudantes E12, E25 e E27, conforme mostram as figuras 74, 75 e 76, respectivamente.

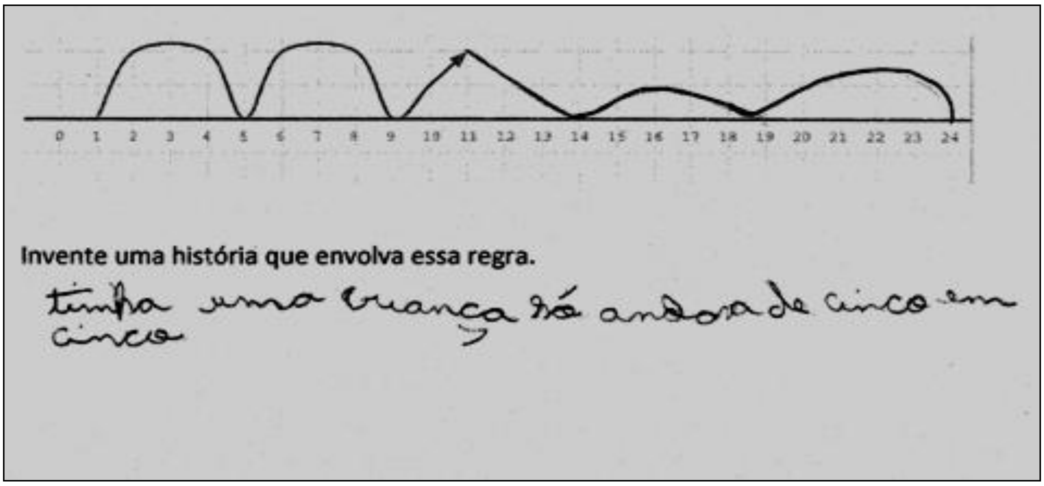


Figura 74 - Registro escrito do participante E12 - Tarefa 8

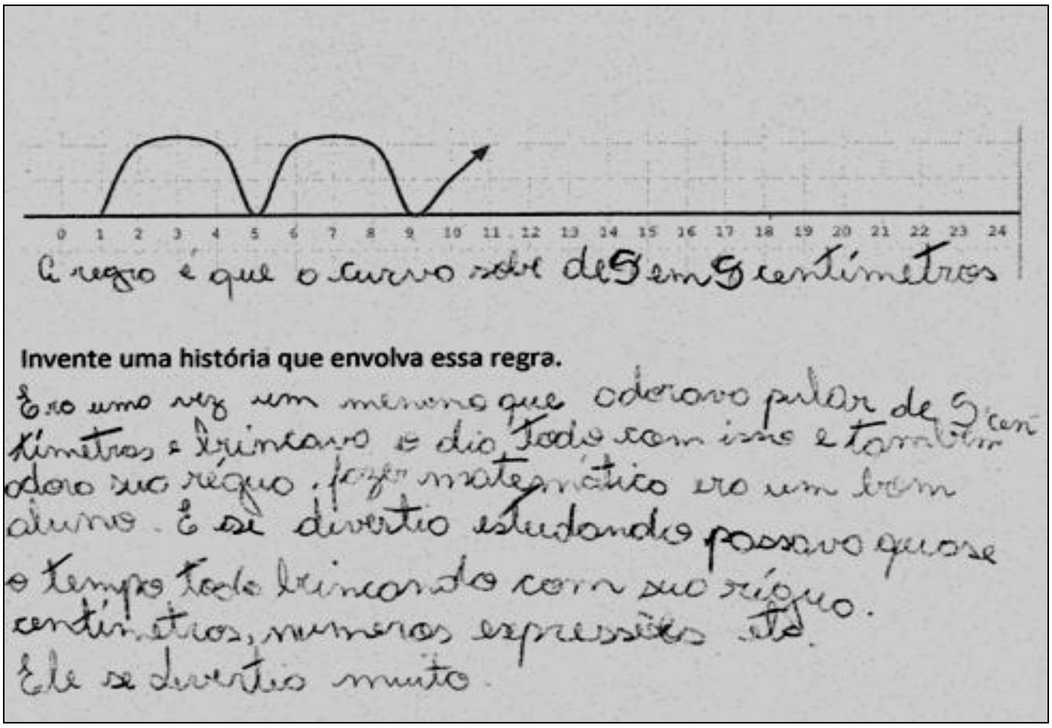


Figura 75 - Registro escrito do participante E25 - Tarefa 8

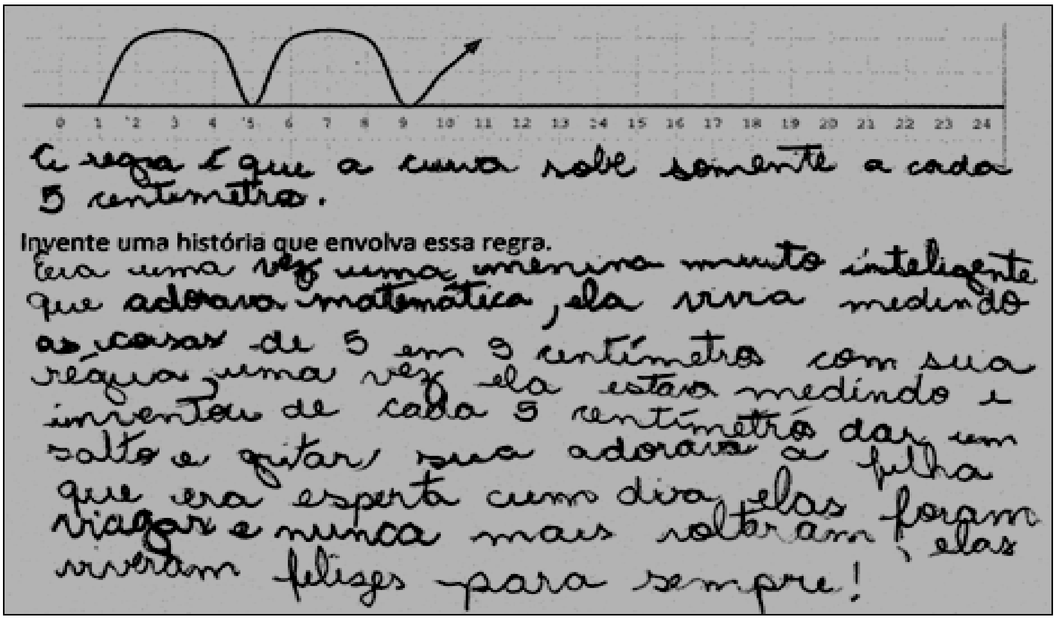


Figura 76 - Registro escrito do participante E27 - Tarefa 8

Podemos inferir que esses estudantes não consideraram o intervalo entre os saltos, ou seja, do um ao número cinco, e sim, consideraram um, dois, três, quatro e cinco.

De forma semelhante, dois estudantes consideraram que o salto da curva na reta numerada vai de três em três unidades. Entendemos que esses estudantes contaram os números entre os saltos e não os intervalos entre os saltos, ou seja, no primeiro salto consideraram os números dois, três e quatro; no segundo salto, seis, sete e oito. Na sequência, apresentamos as figuras 77 e 78 que confirmam tal afirmação.

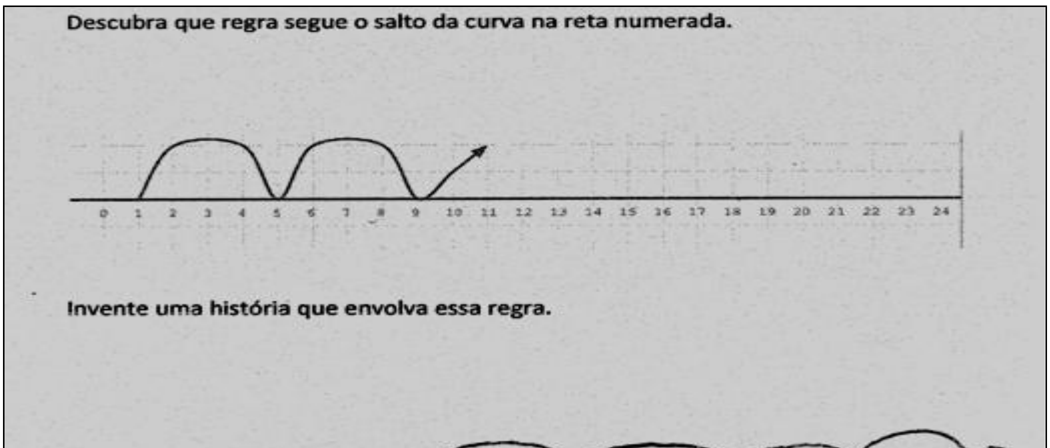


Figura 77 - Registro escrito do participante E8 - Tarefa 8

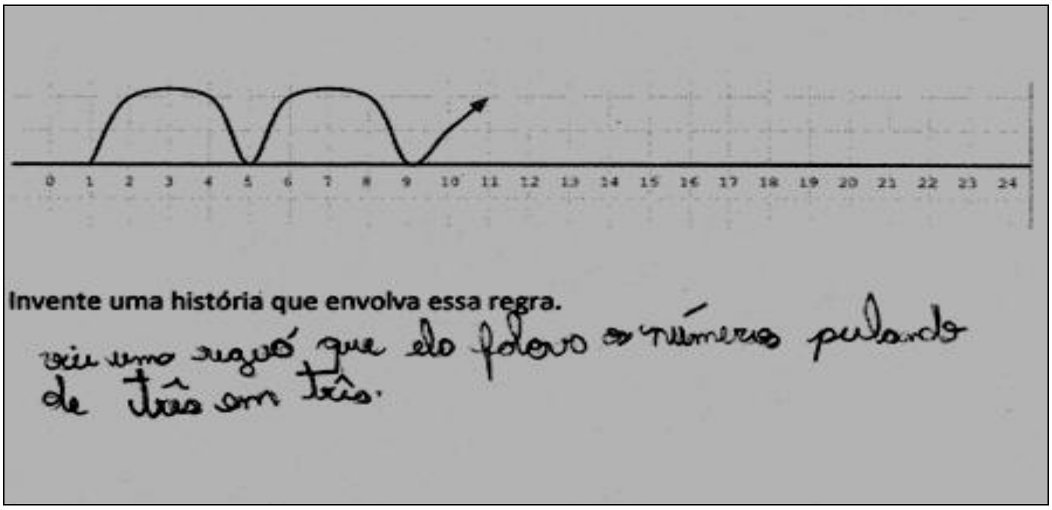


Figura 78 - Registro escrito do participante E14 - Tarefa 8

Outras ocorrências particulares referem-se a indícios de pensamento algébrico observadas em algumas resoluções. Nos registros escritos dos estudantes E4, E9, E10, E15, E13, E19, E20, E21, E30, E31 e E32 encontramos características de pensamento algébrico, bem como identificação de padrão e regularidades [53]. Esses estudantes explanaram que o salto da curva na reta numerada vai de quatro em quatro unidades, na qual alguns continuaram desenhando o salto da curva e outros fizeram uma descrição a respeito da regra, como mostram as figuras 79, 80, 81 e 82.

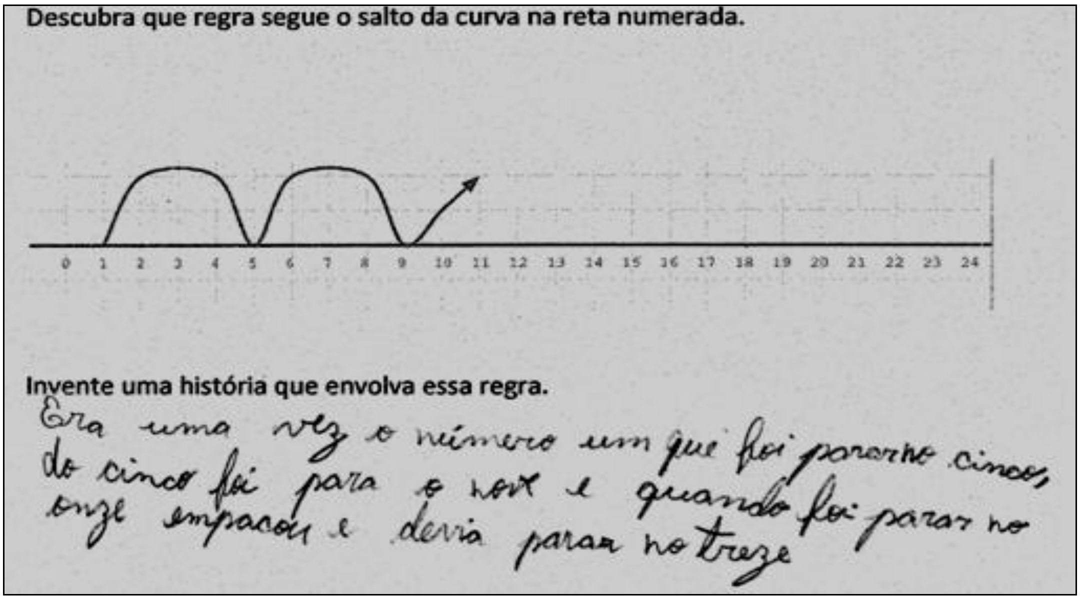


Figura 79 - Registro escrito do participante E4 - Tarefa 8

---

[53] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

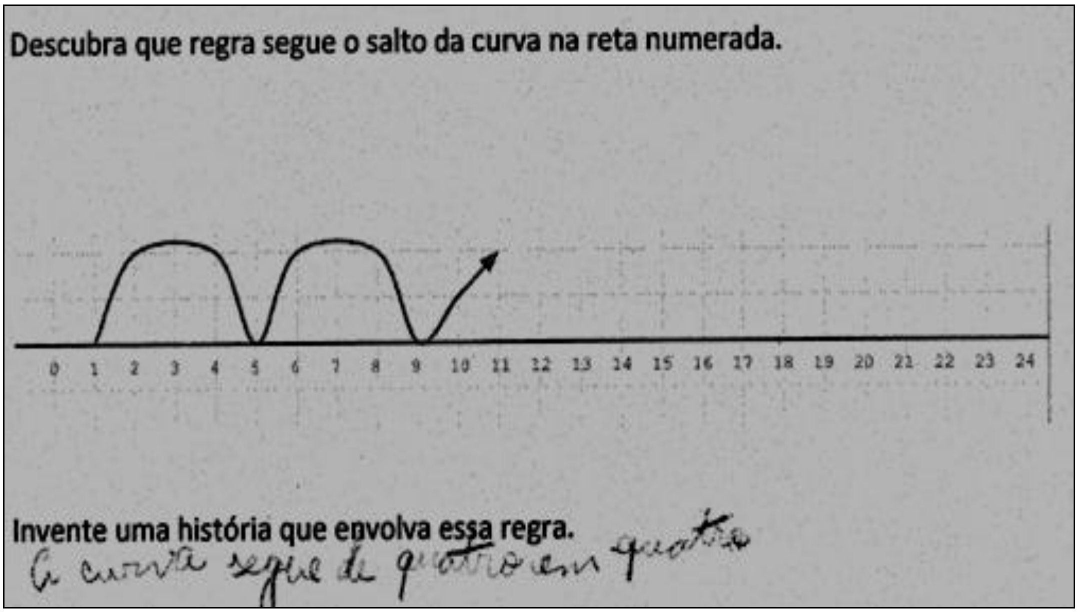


Figura 80 - Registro escrito do participante E10 - Tarefa 8

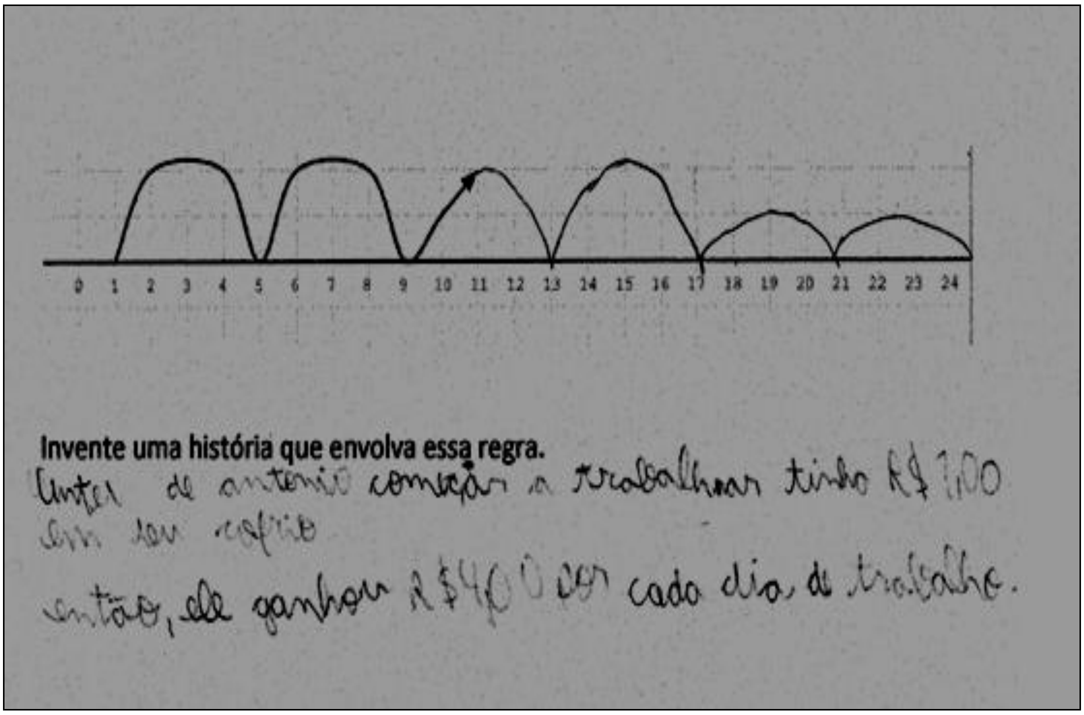


Figura 81 - Registro escrito do participante E13 - Tarefa 8

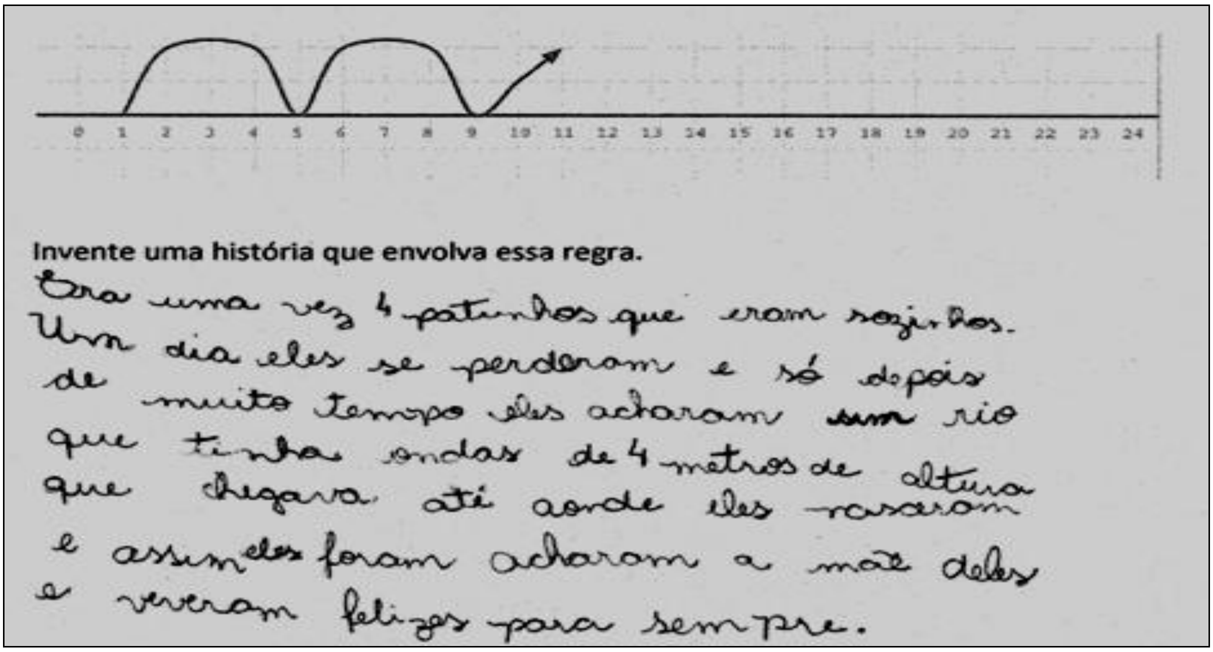


Figura 82 - Registro escrito do participante E20 - Tarefa 8

Continuando as análises, as resoluções dos estudantes E22, E23 e E24, expostas nas figuras 83 e 84, chamaram nossa atenção, pois consideraram que o salto da curva na reta numerada “anda” de três em três unidades. No entanto, continuaram desenhando o salto da curva na reta numerada de quatro em quatro unidades. Inferimos que essas crianças, assim como outras, contaram os números entre os saltos e não os intervalos entre os saltos, ou seja, no primeiro salto consideraram os números dois, três e quatro; no segundo salto, seis, sete e oito. Seguem abaixo as resoluções dos estudantes E22 (figura 83) e E24 (figura 84) que exemplificam tal afirmação.

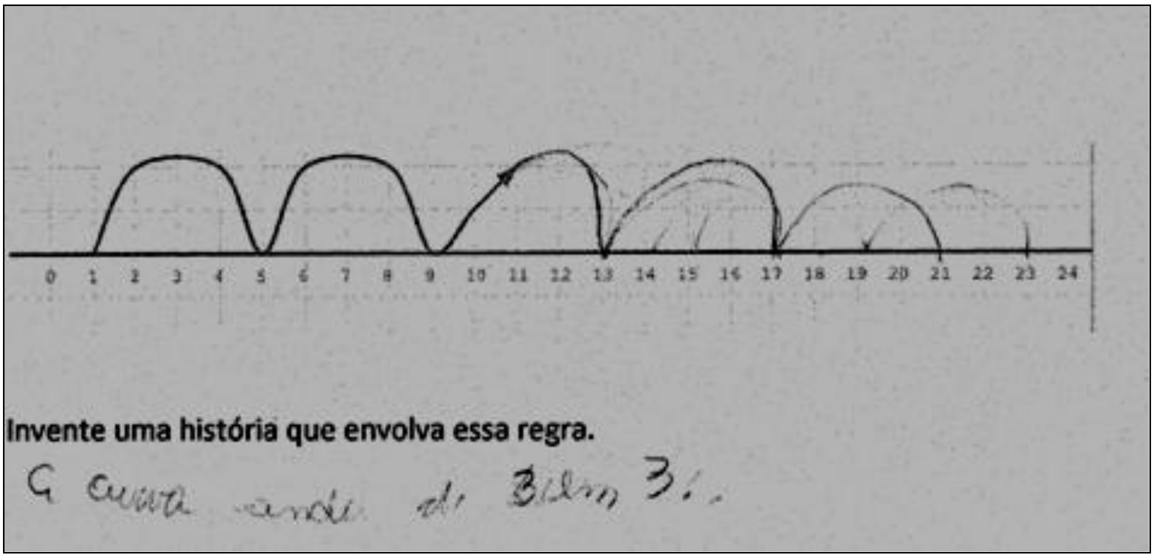


Figura 83 - Registro escrito do participante E22 - Tarefa 8

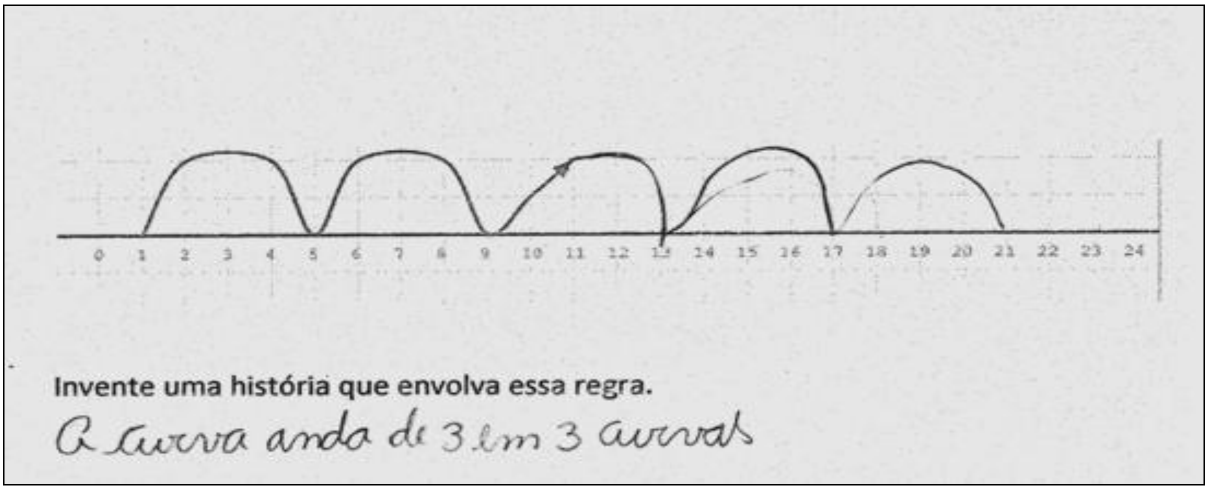
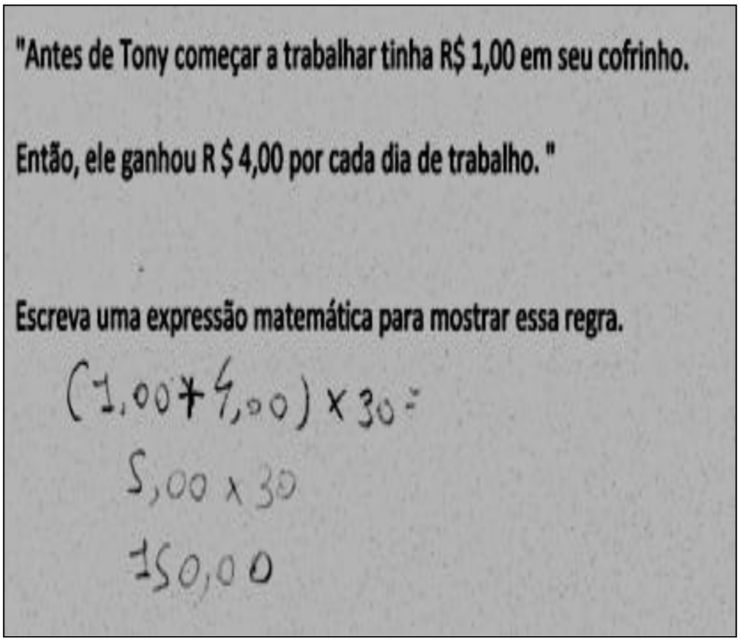


Figura 84 - Registro escrito do participante E24 - Tarefa 8

Assim, tais resoluções assinalam que essas crianças “[...] percebem e tentam expressar regularidades [...]” (FIORENTINI, FERNADES e CRISTÓVÃO, 2005, p. 5), uma vez que compreenderam o padrão do salto da curva na reta numerada.

No que diz respeito à segunda parte da tarefa, por meio das resoluções há indícios de que dezessete estudantes, ou seja, aproximadamente a metade dos estudantes considerou o que Tony já tinha em seu cofrinho e que a cada dia de trabalho ele ganha quatro reais. Os registros escritos a seguir, exibidos nas figuras 85, 86, 87, 88 e 89 verificam tal afirmação.


"Antes de Tony começar a trabalhar tinha R$ 1,00 em seu cofrinho.

Então, ele ganhou R $ 4,00 por cada dia de trabalho. "

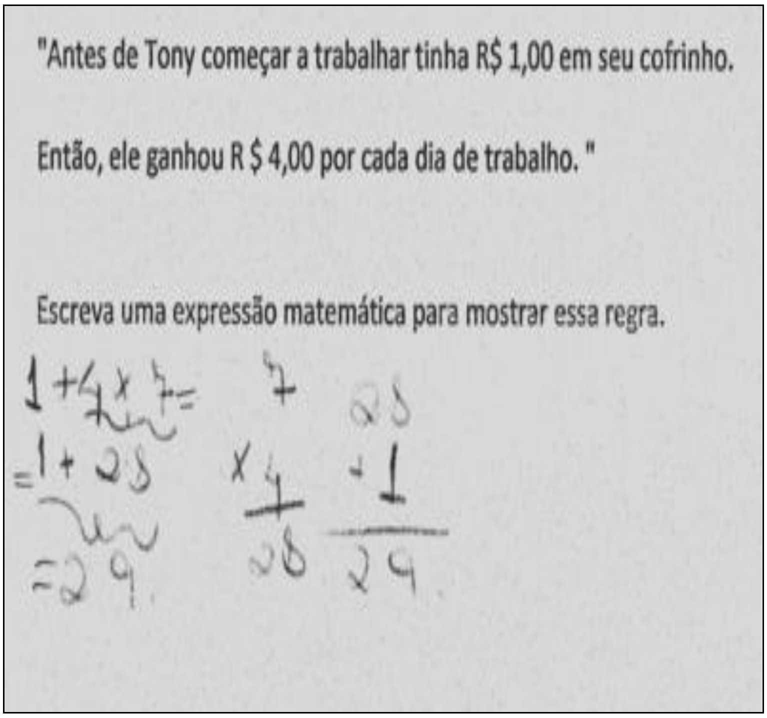
Escreva uma expressão matemática para mostrar essa regra.

$(1,00 + 4,00) \times 30 =$

$5,00 \times 30$

$150,00$

Figura 85 - Registro escrito do participante E3 - Tarefa 8


"Antes de Tony começar a trabalhar tinha R$ 1,00 em seu cofrinho.

Então, ele ganhou R $ 4,00 por cada dia de trabalho. "

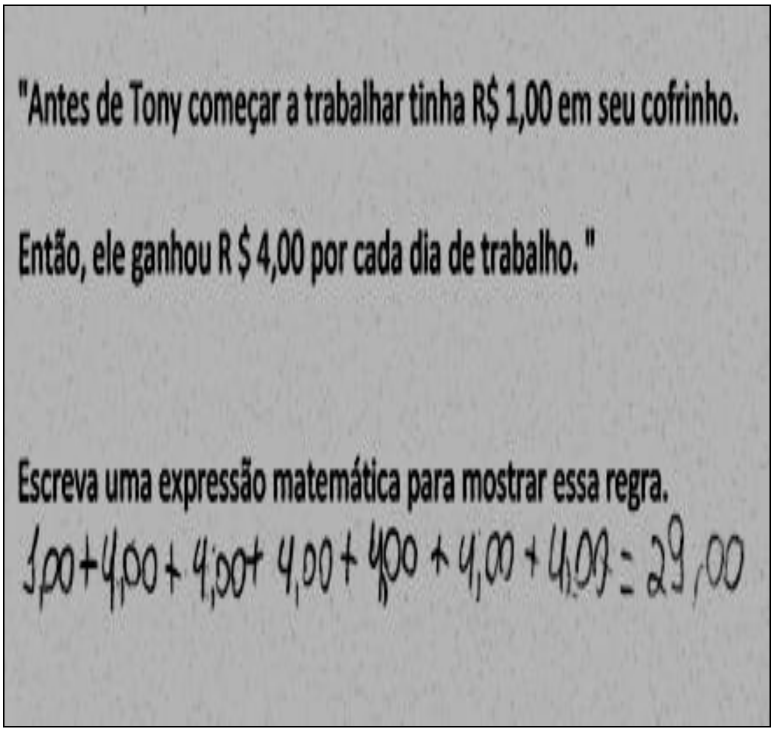
Escreva uma expressão matemática para mostrar essa regra.

1 + 4 x 7 =
= 1 + 28
= 29

7 x 4 = 28

28 + 1 = 29

Figura 86 - Registro escrito do participante E21- Tarefa 8


"Antes de Tony começar a trabalhar tinha R$ 1,00 em seu cofrinho.

Então, ele ganhou R $ 4,00 por cada dia de trabalho. "

Escreva uma expressão matemática para mostrar essa regra.

1,00 + 4,00 + 4,00 + 4,00 + 4,00 + 4,00 + 4,00 = 29,00

Figura 87 - Registro escrito do participante E22 - Tarefa 8

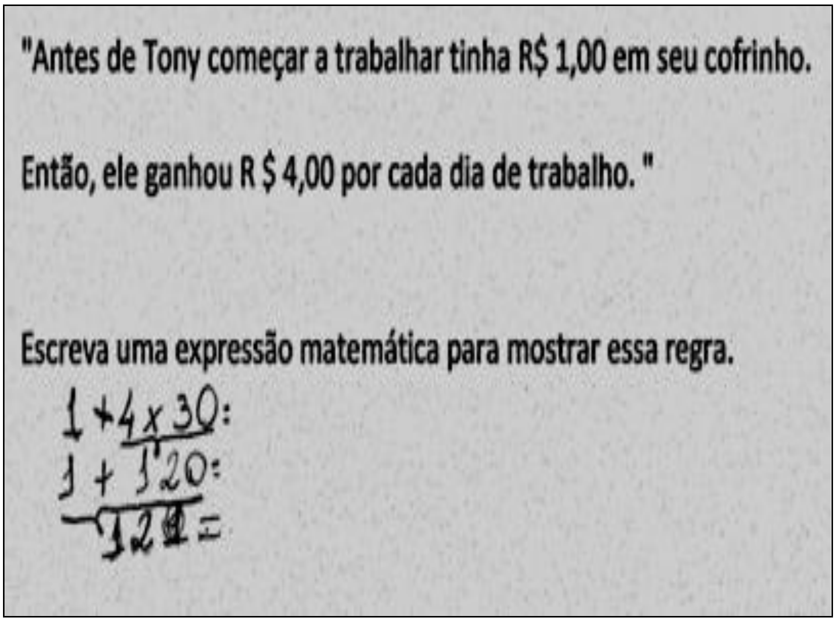


Figura 88 - Registro escrito do participante E25 - Tarefa 8

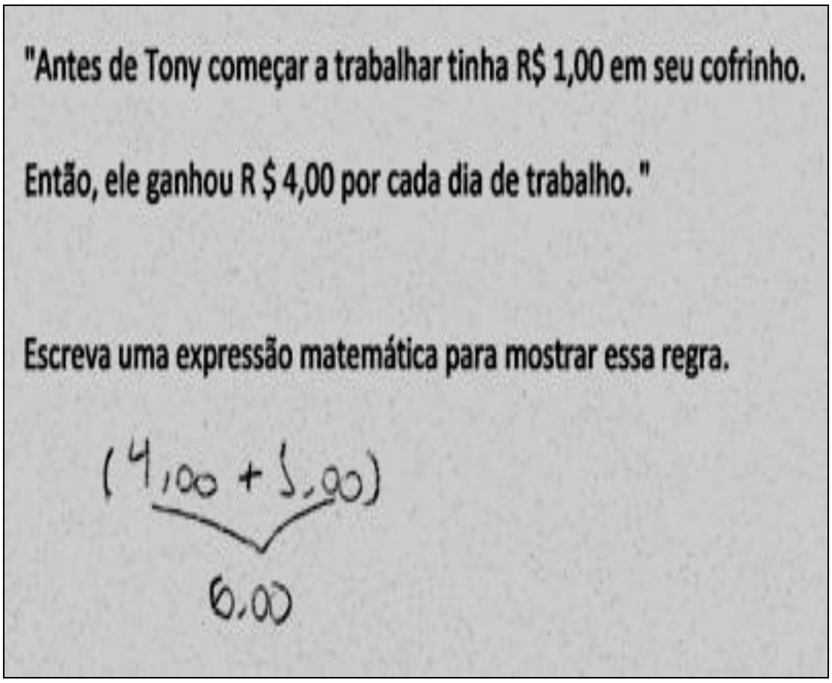


Figura 89 - Registro escrito do participante E27- Tarefa 8

Podemos apontar que essas crianças confirmam evidências de características de pensamento algébrico elencadas neste estudo, bem como: constituíram relações entre as quantidades numéricas da tarefa; registraram mais de um modelo aritmético para a mesma tarefa; interpretaram uma igualdade como equivalência entre duas grandezas; registraram e resolveram expressões numéricas; transformaram uma expressão aritmética em outra mais simples; identificaram e tentaram expressar regularidades da tarefa; desenvolveram uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressarem-se matematicamente... (FIORENTINI, FERNADES e CRISTÓVÃO, 2005)

Além disso, ficou evidente nas resoluções que, em geral, os estudantes ao registrarem uma expressão matemática com relação à tarefa, consideraram valores específicos para os dias de trabalho, por exemplo, que “Tony trabalhou um dia”, que “Tony trabalhou seis dias”, que “Tony trabalhou sete dias”, que “Tony trabalhou trinta dias”.

Esses registros escritos apontam uma linguagem concisa, ou seja, essas crianças demonstraram ter uma compreensão por “expressão matemática”, uma vez que utilizaram de uma combinação de números, operadores, parênteses, bem como, uma linguagem matemática ao manifestarem a propósito da regra do problema. Ainda, ficou evidente que resolveram as expressões corretamente, respeitando a estrutura da expressão matemática, ou seja, podemos observar que os estudantes E25 e E21, apresentados nas figuras 90 e 91, assim como outros, não utilizaram de parênteses para indicar qual operação realizar primeiramente. No entanto, realizaram a multiplicação (4x7 e 4x30 e depois somaram 1) ao invés da soma (1+4 e multiplicar por 30 ou por 7), como comumente acontece nesta fase escolar.

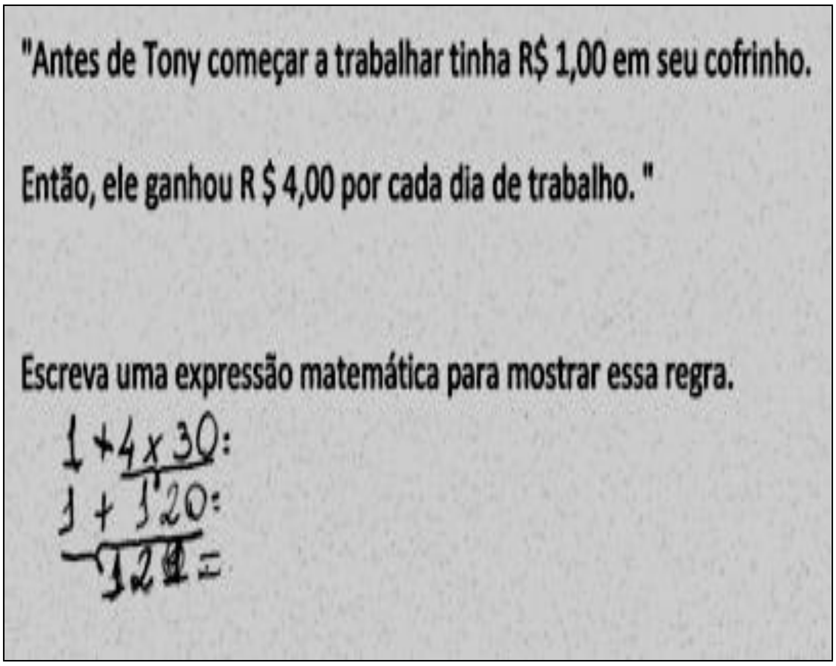
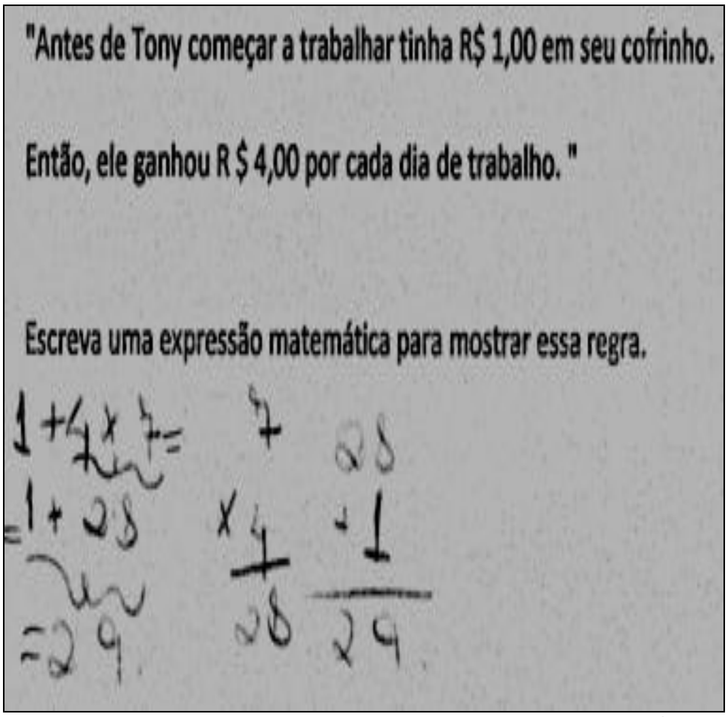


Figura 90 - Registro escrito do participante E20 - Tarefa 8


"Antes de Tony começar a trabalhar tinha R$ 1,00 em seu cofrinho.

Então, ele ganhou R $ 4,00 por cada dia de trabalho."

Escreva uma expressão matemática para mostrar essa regra.

1+4x7=

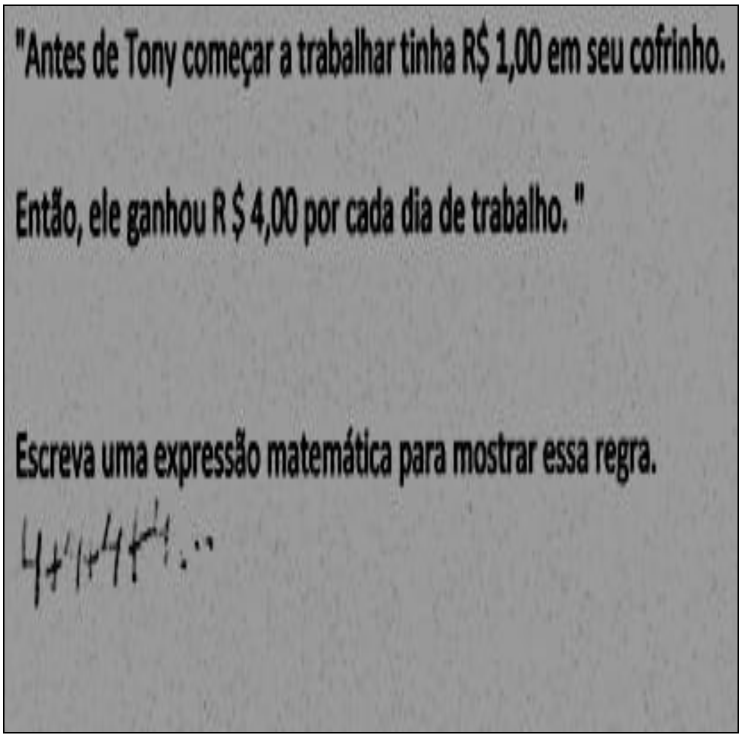
=1+28

=29.

$\begin{array}{r} 7 \\ \times 4 \\ \hline 28 \end{array}$ $\begin{array}{r} 28 \\ +1 \\ \hline 29 \end{array}$

Figura 91 - Registro escrito do participante E21- Tarefa 8

Continuando as análises, apenas dois estudantes não consideram o que Tony já tinha em seu cofrinho, conforme apresentam as figuras 92 e 93.

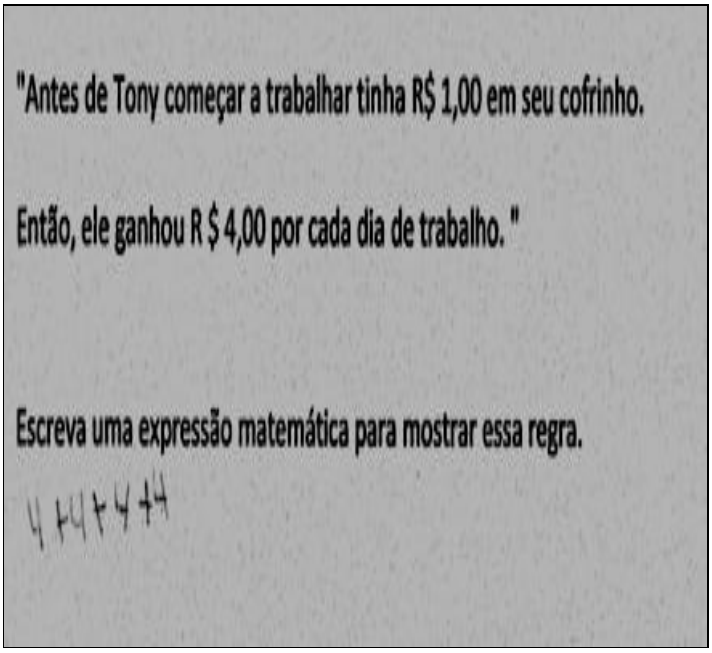

"Antes de Tony começar a trabalhar tinha R$ 1,00 em seu cofrinho.

Então, ele ganhou R $ 4,00 por cada dia de trabalho."

Escreva uma expressão matemática para mostrar essa regra.

4+1+4+1...

Figura 92 - Registro escrito do participante E10 - Tarefa 8


"Antes de Tony começar a trabalhar tinha R$ 1,00 em seu cofrinho.

Então, ele ganhou R $ 4,00 por cada dia de trabalho."

Escreva uma expressão matemática para mostrar essa regra.

4+4+4+4

Figura 93 - Registro escrito do participante E13 - Tarefa 8

Além disso, algo que nos chamou a atenção foi que, dos trinta e dois participantes os quais resolveram essa tarefa, somente três deles deixaram em branco a segunda parte. Consideramos esse fato relevante tendo em vista que, como já mencionado, durante a resolução desta tarefa a turma mostrou-se inquieta e com dúvidas. Além disso, a tarefa utiliza uma linguagem matemática, isto é, o termo "expressão matemática", o que talvez fosse um fator que atrapalhasse na resolução dos estudantes.

Cabe ressaltar que as tarefas presentes neste trabalho, não utilizam de uma linguagem simbólica algébrica, pois tendo em vista a etapa escolar dos participantes, esses não tiveram contato com tal tipo de linguagem. Segundo Kieran (1996), o pensamento algébrico

> [...] pode ser interpretado como uma abordagem a situações quantitativas que enfatiza os aspectos relativos gerais com ferramentas que não são necessariamente sincopadas, mas que podem em última instância ser utilizadas como suporte cognitivo para introduzir e para sustentar o discurso mais tradicional da álgebra escolar. (p. 275, tradução nossa)

Portanto, cabe-nos concluir que esses estudantes investigados têm condições de lidar e de desenvolver aspectos relacionados ao pensamento algébrico, de modo que esse pode ser desenvolvido antes do estudante apresentar uma linguagem simbólica algébrica. Ficou evidente que as crianças investigadas utilizaram notações as quais criaram como ferramentas a fim de resolverem as tarefas propostas, bem como produziram relações e atribuíram significados para os conceitos a partir do que já sabiam, ou seja, de seus conhecimentos prévios [54].

A seguir apresentaremos um quadro com as características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referentes à tarefa 8. Cabe lembrar que essa tarefa demanda de duas etapas, assim o quadro que segue apresenta as características de pensamento algébrico divididas em duas partes: primeira etapa e segunda etapa.

[54] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

Quadro 18 - Síntese das características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referente à tarefa 8

Características de Pensamento Algébrico	***Participantes-primeira etapa***	***Participantes-segunda etapa***	***Quantidade de registros escritos referente às duas etapas***
Estabeleceu relações/comparações entre as informações descritas na tarefa;	E2, E3, E4, E5, E7, E9, E10, E12, E13, E14, E15, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E27, E28, E29, E30, E31 e E32	E1, E2, E3, E4, E5, E9, E10, E13, E14, E16, E17, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E30, E31 e E32	47
Percebeu e tentou expressar as estruturas aritméticas da tarefa;	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E9, E10, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31 e E32	E1, E2, E3, E4, E5, E7, E8, E9, E10, E13, E14, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31 e E32	57
Utilizou de diferentes notações para uma mesma tarefa;	E2, E5, E9, E12, E13, E22, E23 e E24	E2, E4 e E21	11
Desenvolveu uma linguagem mais concisa ao expressar-se matematicamente;		E3, E5, E20, E21, E25 e E27	6
Interpretou uma igualdade entre duas expressões numéricas;		E3, E5, E20, E21, E22, E23, E24 e E27	8
Transformou a expressão numérica em outra mais simples;		E3, E5, E9, E20, E21, E22, E23, E24, E25 e E27	10
Percebeu e tentou expressar regularidades ou invariâncias.	E4, E9, E10, E15, E13, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E30, E31 e E32	E1, E3, E5, E9, E16, E17, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26 e E27	28

Fonte: do autor

A seguir apresentaremos o quadro 19, o qual tem como objetivo sintetizar todas as características de pensamento algébrico encontradas e já explicitadas nas produções escritas dos estudantes com relação às oito tarefas empregadas nesta pesquisa.

Quadro 19 - Síntese das características de pensamento algébrico encontradas nas resoluções dos estudantes referente às oito tarefas

Características de Pensamento Algébrico	***Tarefas em que os estudantes manifestaram as características de pensamento algébrico***
Estabeleceu relações/comparações entre as informações descritas na tarefa;	**1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8**
Percebeu e tentou expressar as estruturas aritméticas da tarefa;	**1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8**
Utilizou de diferentes notações para uma mesma tarefa;	**1; 3; 4; 8**
Desenvolveu uma linguagem mais concisa ao expressar-se matematicamente;	**1; 4; 5; 6; 8**
Interpretou uma igualdade entre duas expressões numéricas;	**1; 8**
Transformou a expressão numérica em outra mais simples;	**1; 8**
Percebeu e tentou expressar regularidades ou invariâncias.	**5; 6; 7; 8**
Demonstrou algum tipo de processo de generalização;	**1; 4; 5; 6**
Demonstrou indícios de uma aritmética generalizada.	**1**

Fonte: do autor

4.3 Categorização das características de pensamento algébrico

Tendo posse da composição das unidades de registro a partir das produções escritas de cada tarefa, em um intenso movimento de construção e desconstrução, foi-nos possível fazer algumas aferições e atribuir algumas interpretações a respeito das resoluções dos estudantes referentes às oito tarefas que empregamos nesta investigação. Como já explicitado, dessa análise fundamentada no referencial teórico adotado, produzimos quadros síntese que apresentam as características de pensamento algébrico encontradas nos registros escritos dos participantes da pesquisa.

Por outro lado, a partir dessa primeira análise, e consequentemente dos quadros síntese, reagrupamos novamente as descrições das resoluções (agrupamentos ou unidades de registro) em categorias, as quais têm como objetivo "[...] fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos [...]" (BARDIN, 2004, p. 112-113). Assim, as categorias congregam elementos comuns, "[...] sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão dos caracteres comuns destes elementos [...]" (BARDIN, 2004, p. 111), bem como, as características de pensamento algébrico nas produções escritas dos estudantes. Resumindo, primeiramente divididos as resoluções dos estudantes em unidades de registro, e posteriormente, em categorias segundo reagrupamentos semelhantes.

A seguir encontram-se as cinco categorias que foram organizadas a partir das resoluções dos estudantes mediante as oito tarefas. O critério de construção foi semântico, ou seja, reunimos as descrições das resoluções de acordo com as características de pensamento algébrico que consideramos neste estudo, e cabe lembrar que:

"*enfim, este pensamento envolve: formulação de conjecturas; estabelecimento de relações; utilização de diferentes notações para uma mesma tarefa; estabelecimento de regularidades; algum processo de generalização; compreensão de propriedades matemáticas importantes, como a comutatividade na adição; agrupamento, classificação, ordenação, justificação e validação de ideias; etc.* [55]*.*"

I) **Estabelecimento de relações/comparações entre as informações da tarefa**
II) **Utilização de diferentes notações/representações**
III) **Generalização**
IV) **Compreensão de propriedades matemáticas importantes**
V) **Regularidades**

É importante destacar que, assim como nas unidades de registro, nas categorias não utilizamos a exclusão mútua, sendo essa escolha emersa dos dados, uma vez que uma unidade de registro pode ser interpretada de diferentes pontos de vista.

---

[55] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

Na sequência apresentaremos as categorias e o que significam para os registros escritos referente às oito tarefas.

I) Estabelecimento de relações/comparações entre as informações da tarefa: nessa categoria consideramos que o estudante estabeleceu relações e/ou comparações entre expressões numéricas; percebeu e tentou expressar as estruturas aritméticas da tarefa.

II) Utilização de diferentes notações/representações: nessa categoria consideramos que o estudante utilizou de diferentes notações e/ou representações para a mesma tarefa, por exemplo, por meio de desenho, linguagem natural, linguagem matemática; desenvolveu uma linguagem mais concisa ao expressar-se matematicamente; percebeu e tentou expressar os símbolos da tarefa.

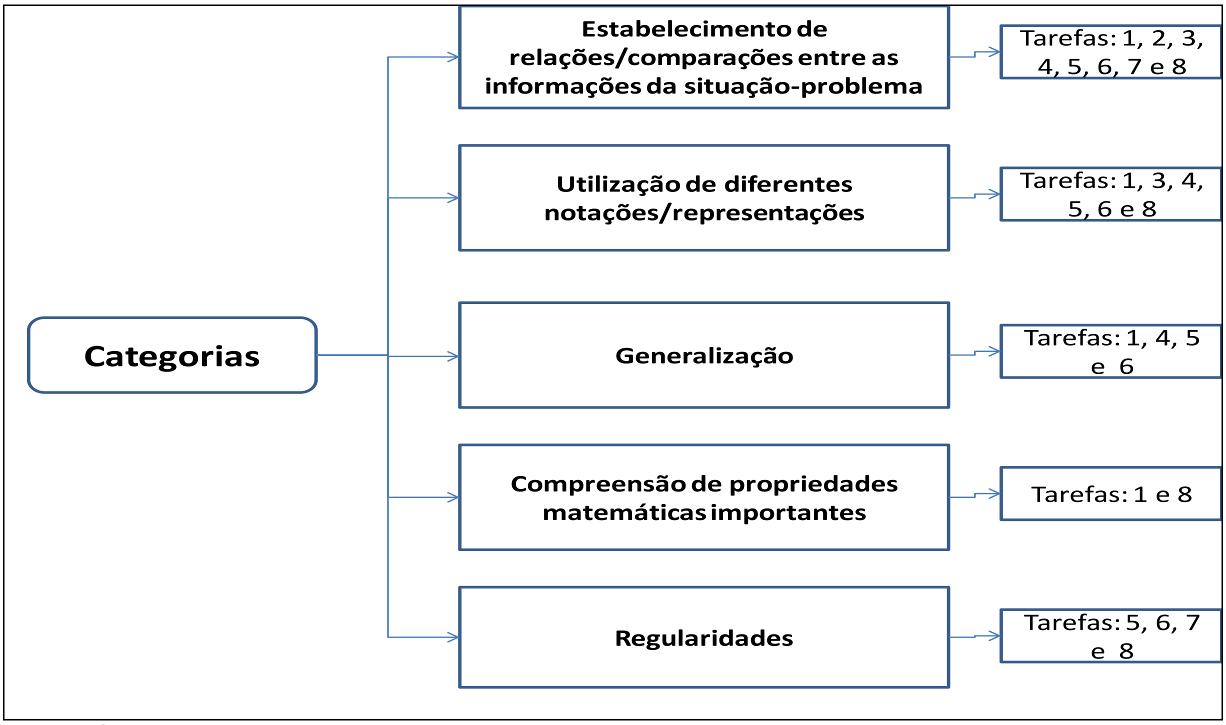
III) Generalização: nessa categoria consideramos que o estudante demonstrou indícios de algum tipo de processo de generalização ao expressar por meio de desenho ou de uma linguagem simbólica algébrica.

IV) Compreensão de propriedades matemáticas importantes: nessa categoria consideramos que o estudante interpretou uma igualdade entre duas expressões numéricas; transformou a expressão numérica em outra mais simples.

V) Regularidades: nessa categoria consideramos que o estudante demonstrou indícios de regularidades por meio de sua produção escrita, por exemplo, como completou o quadro utilizando um padrão ou compreendeu o padrão do salto da curva na reta numerada.

Tendo a intenção de resumir as categorias descritas anteriormente juntamente com resoluções dos estudantes em cada tarefa, na sequência exibiremos a figura 94, a qual apresenta as cinco categorias e as tarefas que as compõe.

Figura 94 - Síntese das categorias presentes na resolução dos estudantes mediante as oito tarefas



Fonte: do autor

A partir da figura anterior, podemos inferir que as produções escritas das tarefas 1, 5, 6 e 8 contemplaram quatro das cinco categorias descritas.

Com relação à tarefa oito, cabe-nos concluir que uma possível justificativa é por essa ter sido a última a ser aplicada, ou seja, os estudantes já estavam familiarizados com as tarefas e também com o modo como resolviam, sem ter a interferência da professora e dos colegas da turma. Além disso, a resolução dessa tarefa pode ter tido a influência das tarefas antecedentes, pois como já explicitado, durante a resolução da segunda etapa da tarefa sete, em que aparece a letra “k”, os estudantes fizeram alguns questionamentos: *“o que é este “k”, professora?”; “como assim, José tem k anos?”; “eu não sei fazer este?”; “que esquisito isso?”*, entre outros.

Contudo, durante essas interpelações, um estudante pronunciou em voz alta: *“ai gente, que falação, vocês não lembram? É a mesma coisa do N do problema da outra aula!”.* Assim, esse fato nos indica que alguns estudantes da turma se recordaram da tarefa anterior, fazendo uma relação com a tarefa que iriam resolver.

Portanto, além desses estudantes estabelecerem relações e/ou comparações entre as informações de cada tarefa, eles constituíram relações entre as diferentes tarefas.

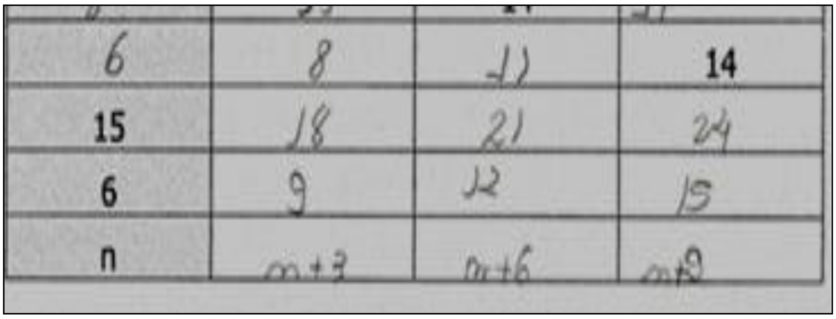
Esse fato se reforça, tendo em vista que a categoria a qual incluiu mais produções escritas é a primeira - **estabelecimento de relações/comparações entre as informações da tarefa** -, pois, em geral, os estudantes estabeleceram relações e/ou comparações entre expressões numéricas, entre as informações descritas na tarefa; os alunos perceberam e tentaram expressar os símbolos e as estruturas aritméticas da tarefa.

Mais uma vez, destacamos que o desenvolvimento do pensamento algébrico demanda um longo processo em que se faz necessário seu início nas primeiras séries de escolaridade (KIERAN, 2004).

As tarefas cinco e seis, as quais apresentam o valor de entrada “N”, de certa forma, provocaram o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois os registros escritos das duas pertencem às categorias - **Generalização e Regularidades** -, uma vez que os estudantes demonstraram indícios de algum tipo de processo de generalização ao expressarem por meio de sua produção escrita uma linguagem simbólica algébrica e evidenciaram sinais de regularidades ao completarem o quadro utilizando um padrão.

Cabe lembrar que durante a resolução das tarefas os estudantes estavam agitados evidenciando dúvidas, pois logo que entregamos a folha contendo as tarefas, interrogaram-nos: *“tem que fazer a conta?”; “como eu faço este, professora?”; “tem que pôr números no espaço?”; “e esse N, o que é isso?”*; etc.. Entretanto, nessas tarefas os estudantes produziram notações que revelam características importantes de pensamento algébrico, bem como registraram expressões do tipo: “N + 3”; “N - 5”; “N +10”; “N x 2”; “N - 1”; entre outras. Assim, quando os estudantes “[...] observam os números e as operações, e a forma como se comportam, e, a partir dessas observações, fazem generalizações, estão a construir as bases do pensamento algébrico” (NCTM, 2008, p. 9).

A seguir apresentamos as figuras 95, 96, 97 e 98 as quais confirmam as características de pensamento algébrico mencionadas anteriormente.

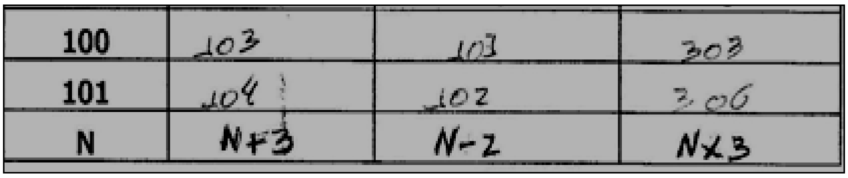


6	8	11	14
15	18	21	24
6	9	12	15
n	n+3	n+6	n+8

Figura 95 - Registro escrito do participante E32 - Tarefa 6

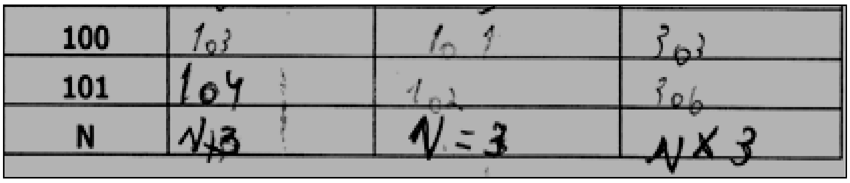
6	9	4	14
n	N+3	N-5	N+10

Figura 96 - Registro escrito do participante E25 - Tarefa 6



100	103	103	303
101	104	102	306
N	N+3	N-2	Nx3

Figura 97 - Registro escrito do participante E3 - Tarefa 5



100	103	101	303
101	104	102	306
N	N+3	N=3	NX3

Figura 98 - Registro escrito do participante E4 - Tarefa 5

Assim, mesmo com dúvidas e questionamentos no momento da resolução, os registros escritos das tarefas cinco e seis confirmam a importância da introdução e da abordagem de álgebra nos anos iniciais, a qual se faz como um “meio de lidar com generalizações e modos de pensar, que permitem que resultados devam ser expressos em uma variedade de formas de problemas” (BOOKER, 2009, p. 11, tradução nossa). Desse modo, enfatizamos a necessidade de experiências em sala de aula que promovam o desenvolvimento e a construção do pensamento algébrico, a fim de estimular os estudantes a pensarem, raciocinarem, construírem relações entre os números, no sentido de uma preparação para a transição da aritmética para a álgebra, que possa servir de base para os conceitos algébricos das séries seguintes e, também como um apoio ao processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Analogamente, os Princípios e Normas para a Matemática Escolar validam tal afirmação ao orientar que os estudantes do quinto ano "[...] devem ser encorajados a representar o seu raciocínio, ao explorarem padrões e ao observarem relações [...]" (NCTM, 2008, p. 11). Ainda enfatizam que

> [...] algumas noções algébricas deverão emergir e ser exploradas, à medida que os alunos: usam notações inventadas por eles, símbolos convencionais e variáveis para representar um padrão, uma generalização ou uma situação. (NCTM, 2008, p. 9)

De tal modo, as categorias criadas confirmam as características de pensamento algébrico descritas anteriormente[56], bem como: formulação de conjecturas; estabelecimento de relações; utilização de diferentes notações para uma mesma tarefa; estabelecimento de regularidades; algum processo de generalização; compreensão de propriedades matemáticas importantes, como a comutatividade na adição; agrupamento, classificação, ordenação, justificação e validação de ideias; etc.".

Por meio dessas categorias podemos mais uma vez corroborar com pesquisadores já discutidos nos capítulos anteriores, que o pensamento algébrico

> [...] nas séries iniciais envolve o desenvolvimento de formas de pensar em atividades para as quais a álgebra sincopada pode ser usada como uma ferramenta, mas que não é exclusiva da álgebra e poderia ser resolvida sem o uso de símbolos, tal como, analisar relações entre quantidades, perceber mudanças, observar estruturas, resolver problemas, generalizar, modelar, justificar, provar e prever. (KIERAN, 2004, p. 12, tradução nossa).

Essas características de pensamento algébrico ficaram evidentes nas produções escritas dos participantes da pesquisa, como já explicitamos e discutimos.

---

[56] Características de pensamento algébrico elencadas no quadro 1 da página 28.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos esta investigação partindo do objetivo de levantar reflexões acerca de aspectos que envolvem características de pensamento algébrico nas produções escritas de estudantes dos anos iniciais, analisando as atitudes, indagações, produções escritas, enfim, o envolvimento desses estudantes durante a aplicação de oito dessas tarefas. Nesse caso específico, buscamos responder à seguinte questão: que características de pensamento algébrico são manifestadas por estudantes do Ensino Fundamental I na resolução de tarefas da *Early Algebra*?

Na busca de alcançar esse objetivo, bem como, de responder a pergunta que norteia esta pesquisa, num movimento interpretativo, construímos agrupamentos e subagrupamentos, os quais compõem uma síntese dos procedimentos, estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução de cada tarefa. Na sequência, compostas as unidades de registro a partir das produções escritas de cada tarefa, emergiram cinco categorias, as quais reúnem as características de pensamento algébrico que consideramos neste estudo, encontradas nas resoluções dos estudantes. Sendo assim, partindo dessa classificação das resoluções dos estudantes e também de uma impregnação e análise dos dados foi-nos possível compor algumas inferências e interpretações mediante as respostas de oito tarefas das trinta e cinco crianças que foram submetidas às investigações.

Diante das categorias constituídas a partir das resoluções dos estudantes, podemos inferir que os participantes deste estudo evidenciaram características de pensamento algébrico em suas resoluções. Em geral, por meio das resoluções verificamos que as crianças estabeleceram relações e comparações entre as informações descritas nas tarefas; produziram mais de uma representação para uma mesma tarefa; desenvolveram algum processo de generalização; estabeleceram regularidades; compreenderam propriedades matemáticas importantes; desenvolveram uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressarem-se matematicamente. Mesmo a maior parte das resoluções não apresentando uma linguagem simbólica algébrica ou, então, não resolveu as tarefas corretamente, os estudantes perceberam e tentaram expressar as estruturas aritméticas da tarefa, assim como, descreveram seus processos de pensamento. Ainda, esses estudantes mostram saber resolver as quatro operações aritméticas básicas.

Como descreve Kieran (2004), o pensamento algébrico pode ser desenvolvido antes de o estudante apresentar uma linguagem simbólica algébrica, de modo que esse pensamento compreende o desenvolvimento de formas de pensar, incluindo, por exemplo, analisar relações entre quantidades, perceber mudanças, observar estruturas, resolver problemas, etc..

De tal modo, essas categorias confirmam que gradualmente os estudantes vão aprendendo a formular generalizações utilizando a notação algébrica convencional, bem como aos poucos se tornam confortáveis, por exemplo, no emprego de letras para representar variáveis e operar em expressões algébricas. Segundo nossa caracterização, a característica de pensamento algébrico que tem maior frequência nas resoluções dos estudantes é "o estabelecimento de relações/ comparações entre as informações da tarefa", uma vez que aparece nos registros escritos das oito tarefas.

Vale ressaltar que a maior parte dos estudantes mostrou-se bastante incomodado com as tarefas, pois durante as resoluções os mesmos tinham que resolver sem a intervenção da pesquisadora, o que gerou indagações, como: *"professora o que eu tenho que fazer?"; "me explica!", "mas não está falando o que temos que fazer", "tem que fazer conta?", etc.* Ainda, constatamos estranhamento dos estudantes com relação à maneira que as tarefas são propostas, ou seja, essas apresentam um caráter mais "aberto" de modo que as crianças para resolvê-las precisam ler, interpretar e elas próprias encontrarem um caminho de resolução.

Dessa forma, mesmo com a agitação dos estudantes, as dúvidas e os questionamentos que surgiram no momento de resolução de algumas das tarefas empregadas nesta pesquisa, os registros escritos confirmam a importância e a necessidade de se trabalhar com a álgebra nos anos iniciais. Igualmente, de se trabalhar com tarefas que proporcionem aos estudantes momentos de reflexão em sala de aula, oportunizando-os construir significados e lidarem com diferentes contextualizações, pois, parte das dificuldades e erros comuns deparados ao longo da formação dos estudantes pode ter sua origem na formação inicial desses. Assim, ressalvamos a *Early Algebra*, uma vez que tal área de pesquisa defende uma abordagem para o ensino e aprendizagem da álgebra inicial, focalizando na aprendizagem e raciocínio dos estudantes. Por meio de pesquisas com estudantes dos anos iniciais, o grupo de investigadores dessa área de pesquisa confirma que introduzir a álgebra nos anos iniciais é importante e necessário, no que diz respeito à formação do estudante.

Sendo assim, essas crianças dos anos iniciais demonstraram ter condições de lidar e de desenvolver aspectos relacionados ao pensamento algébrico, mesmo não tendo habilidades com uma linguagem simbólica algébrica, uma vez que as tarefas propostas e o ambiente de estudo permitiram que elas construíssem sua própria linguagem para justificar suas ideias. Nesta investigação identificamos a presença do pensamento algébrico nas resoluções dos estudantes, de modo que confirmamos que sua iniciação pode e deve ocorrer desde os primeiros anos da escolaridade.

Enfim, com o desenvolvimento desta pesquisa apresentamos algumas considerações, as quais emergiram na busca de atender nosso objetivo, o qual norteou todo nosso trabalho. Acreditamos que uma pesquisa não se encerra, mas por alguns motivos, em nosso caso o tempo, concluímos este estudo com apontamentos que certamente serão importantes para compreender aspectos ligados à formação e aprendizagem de estudantes dos anos iniciais. Ainda, consideramos que este trabalho servirá de alerta aos professores, em específico aos que atuam nos anos iniciais, a fim de enfatizar e valorizar o conhecimento que os estudantes têm, uma vez que se a eles forem proporcionados ambientes que envolvam o desenvolvimento de formas de pensar, o estudante construirá sua própria linguagem para expressar e justificar suas ideias. Cabe lembrar que é o por meio da linguagem natural ou então intuitiva, que as crianças vão ampliando e aprimorando a linguagem simbólica algébrica. Assim sendo, como já mencionamos no desenvolvimento desta investigação, não faz sentido deixarmos a introdução desse pensamento apenas para as séries finais do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, deixamos um indicativo de futuras pesquisas a serem realizadas, bem como: refletir e investigar como ocorre o processo de construção da aprendizagem nas crianças, em específico, os conflitos, as trajetórias da passagem da linguagem natural para a linguagem convencional, ou seja, investigar como o raciocínio algébrico infantil evolui. O ensino e aprendizagem em matemática precisa de mudanças, em especial, nos anos iniciais, pois é nesse período que se inicia a caminhada escolar do estudante. Acreditamos que é tempo de mudança!

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Elizabeth Adorno de. **Influências das habilidades e das atitudes em relação a matemática e a escolha profissional.** Tese de doutorado. FE – UNICAMP: Campinas, 1999.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3 ed. Lisboa: Edição 70 Ltda., 2004.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** Edições 70. Lisboa, 1977.

BLANTON, M. et al. Early Algebra. In: **Algebra Gateway to a Technological Future.** ed. Victor J, 2007.

BLANTON, M.; KAPUT, J. (2000). Generalizing and progressively formalizing in a third grade mathematics classroom: Conversations about even and odd numbers. In: FERNÁNDEZ, M. (Ed.) **Proceedings of the XXII Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Columbus, OH, ERIC Clearinghouse, p.115.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education,** v.36, n.5, p.412-443, 2005.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Qualitative Reserch for Education: an introduction for to theory and methods.** Boston: Allyn and Bacon, 1982.

BOOKER, G. **Algebraic Thinking**: generalising number and geometry to express patterns and properties succinctly. Griffith University Brisbane, 2009.

BOOTH, L. R. Children's difficulties in beginning algebra. In Arthur F. Coxford, & Albert P. Shulte (Eds), **The ideas of algebra**, K-12 (1988 yearbook of the NCTM) (pp. 20–32). Reston, VA: NCTM, 1998.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (1ª a 4ª série)**: Matemática. Brasília: MEC-SEF, 112p., 1997.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança**: **explorando notações**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BRIZUELLA, B.; SCHLIEMANN, A. Ten-year-old Students Solving Linear Equations. **For the Learning Mathematics,** v.24, n.2, 2004.

CAPRARO, M. M.; RANGEL-CHAVEZ, A.; CAPRARO, R. M. **EFFECTIVE PREPARATION FOR TEACHING OF ALGEBRA AT THE PRIMARY LEVEL.** Texas A. M. University. Paper presented at the 11th International Conference on Mathematics Education (ICME-11) for Topic Study Group 2: New developments and trends in mathematics education at primary level, Monterrey, Mexico, July 2008.

CARPENTER, T. P., M. L. FRANKE; LEVI, L. **Thinking Mathematically**: Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School. Portsmouth, NH: Heinemann, 2003.

CARRAHER, D. W.; et al. **Arithmetic and algebra in early mathematics education**, 2000.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A.; BRIZUELLA, B. **Early Arithimetic:** Treating operations as functions. Plenary presentation at PME – NA XXII, Tucson, AZ, 2000.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A.; BRIZUELA, B. Algebra in the Early Grades? In: SAMSON, B. C. Staying the Course**: A commitment to inquiry-based learning.** Hands On!, Spring 2001, v. 24, n. 1, p. 8-11, 2001.

CARRAHER, D. W.; *et al.* Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.2, n.37, p.87-115, 2006.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A.; SCHWARTZ, J. 'Early algebra is not the same as algebra early'. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds). **Algebra in the Early Grades Mahwah**, New Jersey: Erlbaum, 2007.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM Mathematics Education.** DOI, v. 40, p, 3-22, 2008.

COXFORD, A. F; SHULT, A. P. As Idéias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

CURI, E. **Formação de professores polivalentes**: uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos. Tese de Doutorado, PUC/SP, 2004.

CYRINO, M. C. C. T. Projeto: Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática. Londrina: Universidade Estadual de Londrina – UEL, 2010.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Revista Zetetike**. Campinas: FE- Unicamp, ano 3, n. 4, p, 1-38, 1995.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Relatório de Projeto da Fapesp [processo 03/11233-4]. FE – UNICAMP: Campinas, 2005.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v.4, n.1, p.78-91, 1993.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. (Org.) **Por trás da porta, que Matemática acontece?** Campinas: Editora Gráfica FE/UNICAMP – CEMPEM, 2001.

FREIRE, R. S. **Objetos de Aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Ceará: UFC, 2007.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Eds.), **Mathematics classrooms that promote understanding** Mahwah, NJ: Erlbaum, p. 133-155, 1999.

KAPUT, J. J. **Teaching and Learning a New Algebra WithUnderstanding**. University of Massachusetts–Dartmouth, 2004.

KAPUT, J. J. BANTON, M. Algebrafying the elementary Mathematics experience Part. In: **Transforming task structures**. In H. Chick, K. Stacey; J. Vecent (Eds), Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra (Vol. 2, p. 344-352). Melbore, Australia: The University of Melbourne, 2001.

KIERAN, C. Learning and teaching of school algebra. In D. A Grows (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** New York: Macmillan, p.390-419, 1992.

KIERAN, C. The changing face of school algebra. In: C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), ***8th International Congress on Mathematical Education***: *Selected lectures,* p. 271-290. Seville, Spain: S.A.E.M. Thales, 1996.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator,** v.8, p.139-151, 2004.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LINS, R. C.; KAPUT, J. The early development of algebraic thinking. In: Kaye Stacey; Helen Chick;. (Org.). **The future of the teaching and learning of algebra**. Dordrecht: Kluwer, p. 47-70, 2004.

MOURA, Ana. R. L. de; SOUSA, Maria, C. Dando movimento ao pensamento algébrico. **Zetetiké**, Unicamp, v. 16, n. 30, p. 63 - 75, jul/dez, 2008.

MURRAY, M. K. **Early Algebra and Mathematics Specialists.** University of Virginia Mathematics Outreach Office. School of Continuing and Professional Studies. Charlottesville, VA 22904. **The Journal of Mathematics and Science** - Collaborative Explorations, v.12, p.73-81, 2010.

NCTM. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar.** 1.ed., 2000. Tradução Portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics. 2. ed. Lisboa: APM, 2008.

PIAGET, Jean. Coleção Os Pensadores. **A Epistemologia Genética; Sabedoria e Ilusões da Filosofia; Problemas de Psicologia Genética**. 3. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

PINTO, G., A. de T. **A Atribuição de Significado em Atividades Pré-Algébricas por Crianças do 2º ano do 1º Ciclo do Ensino Fundamenta**l. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco: UFPE, 2001.

PONTE, J. P., et al. A dinâmica da aula de matemática. In: **Didáctica da Matemática**, cap. 4. Lisboa: DES do MEC, 1997.

PONTE, J. P; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: ME - DGIDC, 2009.

PORTO, M. L.; et al. **Construindo a base do pensamento algébrico com crianças de 6 anos.** X Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador - BA, 7 a 9 de Julho de 2010.

SÃO PAULO. Secretaria Municipal de Educação. Diretoria de Orientação Técnica. **Orientações curriculares e proposição de expectativas de aprendizagem para o Ensino Fundamental: ciclo I**- São Paulo: SME / DOT, 2007, 208p.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. **Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic:** From Children's Ideas to Classroom Practice. **Studies in** Mathematical Thinking and Learning Series. Lawrence Erlbaum Associates, 2006

SCHWARTZ, J. L.; YERUSHALMY, M. **On the need for a Bridging Language for Mathematical Modeling:** For the Learning of Mathematics, 1995. 15 (2), 29-35. Disponível em: http://www.edu.haifa.ac.il/personal/michalyr/publications_articles.html. Acesso em: 20 de abril de 2012.

SIMON, A. M e STIMPSON, C. V. **Desenvolvimento da representação algébrica através de diagramas**. In: COXFORD, A. F & SHUTE, A. P. (org). As ideias da Álgebra. São Paulo: Atual. 1995. University of the District of Columbia, p. 155-170, 2007.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e Linguagem.** 1991**.** Edição Ridendo Castigat Mores. Disponível em: www.jahr.org. Acesso em: 25 de março de 2012.

ANEXOS

T E R M O D E
CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nome:...

Identidade:...

CPF:..

Endereço:..

Telefone:...

Email:..

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento da dissertação sobre as caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I, sob responsabilidade da Profa. Daniele Peres da Silva, com a orientação da Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, declaro que consinto que o(a) mesmo(a) utilize parcial ou integralmente os registros escritos de trinta e cinco estudantes do 5º ano de 2011 da Escola Municipal José Brazil Camargo, a qual é participante do Projeto Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática - Programa Observatório da Educação, podendo divulgá-los em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que os estudantes sejam citados apenas como participantes da pesquisa, garantido o anonimato no relato da pesquisa.

Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Londrina, / / .

NOME:____

ASS.:____