Universidade Estadual de Londrina

CÍNTIA DA SILVA

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Londrina
2018

CÍNTIA DA SILVA

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao curso de Pós Graduação do Programa de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para a obtenção do título de doutora.

Orientadora: Profª Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2018

CÍNTIA DA SILVA

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao curso de Pós Graduação do Programa de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para a obtenção do título de doutora

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profª Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Profª Dra. Adriana Helena Borssoi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Profª Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Profª Dra. Lilian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Profª Dra. Vanilde Bisognin
Centro Universitário Franciscano – UNIFRA

Londrina, 27 de fevereiro de 2018.

Para Filipe Elias Milani

AGRADECIMENTOS

À professora Lourdes pela orientação, pelo incentivo e pelas novas aprendizagens que oportunizou, tanto nas disciplinas cursadas, nas discussões com o grupo de pesquisa (GRUPEMMAT) e em outros momentos de convivência.

Às professoras Adriana, Karina, Lilian e Vanilde, pelas importantes contribuições desde o exame de qualificação até a avaliação final da pesquisa. Em especial, agradeço a Karina pela disponibilização da sua turma de alunos para a coleta de dados, e à Lilian pela amizade e orientação que vem de antes do início desta pesquisa.

Ao professor Dionísio Burak, por ter me apresentado à Educação Matemática e à Modelagem Matemática, ainda na graduação.

Aos colegas do GRUPEMMAT, pela agradável convivência nestes anos, pelas parcerias nos congressos, seminários, artigos e, em especial, aquelas que se tornaram mais próximas: Ana Paula, Ângela, Bárbara e Daiany.

Às amigas que, apesar da distância e do tempo, sempre se fizeram presentes: Ana Flávia, Franciele, Gabriela e Luana.

Aos amigos que conheci em Londrina e me fizeram sentir acolhida: Douglas, Dri, Elaine, Joicy, Lilian Queren, Maria Angélica, Tânia Camila eTathy.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Cada um sabe a dor e a delícia de ser o que é

Caetano Veloso

SILVA, Cíntia da. **Aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática**. 2018. 147f. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

RESUMO

Resultados de pesquisas têm apontado problemas de aprendizagem dos conceitos matemáticos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral em alunos de cursos de nível superior, o que tem ocasionado alto índice de reprovação nestas disciplinas e até mesmo desistência nos cursos de graduação. No entanto, já se tem na literatura propostas de abordagem para o ensino de Cálculo que visam facilitar a aprendizagem dos alunos. Dentre essas propostas há relatos sobre o uso da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para o ensino e aprendizagem de Matemática. Considerando a Aprendizagem Significativa como um produto final desejável para os alunos que cursam Cálculo, esta pesquisa investigou a ocorrência de Aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas em aulas de Cálculo Diferencial e Integral I. Para isso, desenvolvemos atividades de modelagem com alunos de um curso de Licenciatura em Química. As produções dos alunos durante as atividades foram analisadas segundo indicações da análise textual discursiva. Ao final das atividades os alunos construíram vês epistemológicos, os quais foram também submetidos à análise. Os resultados demonstram que características específicas da Aprendizagem Significativa estão presentes em cada uma fases da modelagem, como a presença de subsunçores, o uso de material potencialmente significativo e a predisposição dos alunos para aprender. Identificamos diferentes tipos de Aprendizagem Significativa que ocorrem durante uma atividade de modelagem (representacional, conceitual e proposicional), bem como ampliamos o entendimento sobre a aquisição de significados conotativos e denotativos pelos alunos. O diálogo com o referencial teórico juntamente com a análise dos dados levou à inclusão de dois elementos às condições essenciais para a ocorrência de Aprendizagem Significativa: as situações significantes (contexto) e a negociação de significados. O vê epistemológico mostrou-se um potencial instrumento para a verificação da Aprendizagem Significativa em atividades de modelagem.

Palavras-chave: Aprendizagem Significativa. Cálculo Diferencial e Integral. Educação Matemática. Modelagem Matemática. Significado. Vê Epistemológico.

SILVA, Cíntia da. **Meaningful Learning in Mathematical Modelling activities**. 2018. 147f. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

ABSTRACT

Research results have pointed to learning mathematical concepts problems in the Differential and Integral Calculus subjects in undergraduate students, which has caused a high disapproval rate in these subjects and even dropout in undergraduate courses. However, there are in the literature proposed approaches to teaching Calculus that aim to facilitate students' learning. Among these proposals there are reports about the use of Mathematical Modelling as a pedagogical alternative for teaching and learning Mathematics. Considering Meaningful Learning as a desirable end product for students taking Calculus, this research aims to investigate the Meaningful Learning occurrence in Mathematical Modelling activities developed in Differential and Integral Calculus I classes. For this, we developed modelling activities with students in Chemistry degree. The students' productions during the activities were analyzed according to the discursive textual analysis indications. At the end of the activities, the students constructed epistemological V, which were also submitted to analysis. The results demonstrate that specific characteristics of Meaningful Learning are present in each of the modeling phases, such as the presence of subsumers, the use of potentially meaningful material and the predisposition of students to learn. We identify different types of Meaningful Learning that occur during a modelling activity (representational, conceptual and propositional), as well as broaden the understanding about the acquisition of connotative and denotative meanings by students. The dialogue with the theoretical framework together with the analysis of the data led to the inclusion of two elements in the essential conditions for the occurrence of Meanigful Learning: the significant situations (context) and the negotiation of meanings. The epistemological V has proved to be a potential instrument for the verification of Significant Meaningful in modeling activities.

Key words: Meaningful Learning. Differential and integral Calculus. Mathematical Education. Mathematical Modelling. Meaning. Epistemological V.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APCC	Atividade Prática como Componente Curricular
APS	Atividades Práticas Supervisionadas
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
COEPP	Conselho de Ensino, Pesquisa e Pós-Graduação
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
UEPS	Unidades de Ensino Potencialmente Significativas
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Sumário

1. INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral é uma parte importante da Matemática, diferente do que, em geral, o aluno ingressante na universidade já estudou: ele é dinâmico. Nasceu motivado por alguns problemas, mas a abstração e a sofisticação das ideias que a partir disso se desenvolveram fez dele um assunto fundamental, com aplicações em muitas áreas do conhecimento. Conforme argumenta Lopes (1999):

> O Cálculo Diferencial e Integral permite, nas mais variadas áreas do conhecimento, como Engenharia, Química, Física, Biologia, Economia, Computação, Ciências Sociais, Ciências da Terra, etc, a análise sistemática de modelos que permitem prever, calcular, otimizar, medir, analisar o desempenho e performance de experiências, estimar, proceder análises estatísticas e ainda desenvolver padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico, humanístico dos diversos países do mundo (p. 125).

As dificuldades de alunos em aprender os conteúdos envolvidos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral[1], que compõe a matriz curricular de cursos de nível superior de diferentes áreas, têm resultado no alto índice de reprovação e desistência, principalmente nos cursos das Ciências Exatas (SILVA, 2011a). As dificuldades que surgem na transição do estudo da Matemática na Educação Básica para o estudo superior constituem um problema. Assim, as reprovações e as dificuldades enfrentadas pelos alunos motivaram a realização de pesquisas, como as de Santos e Matos (2012), Cavasotto e Viali (2011), Menestrina e Moraes (2011), Cury e Bisognin (2006), Cury (2005, 2000), Barbosa (2004a), Rezende (2004) e Lopes (1999), que intencionaram, de modo geral, investigar as razões desta problemática. Segundo Santos e Borges (1993, p. 4-5), essas dificuldades ocorrem pois o ensino de Matemática na Educação Básica é insuficiente: “deve haver uma defasagem bastante acentuada entre os conteúdos matemáticos ministrados no 1º e 2º graus e o que é exigido em Cálculo Diferencial e Integral I”.

---

[1] Embora alguns cursos denominem disciplinas diferentemente (existem as variações Cálculo I, II, III e IV, Cálculo A e B, Matemática A e B, Matemática Aplicada ao curso de, etc) nos referimos aqui aos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral que compõem estas disciplinas.

> A introdução de ideias abstratas como a noção de limite, por exemplo, constitui um passo difícil porque implica em uma mudança profunda na maneira de raciocinar e obriga o aluno a desenvolver uma sofisticada mudança do nível de reflexão na busca da compreensão do assunto (CÂNDIDO, BARUFI, MONTEIRO, 2004, p. 2).

Nasser (2007), analisando os dados de uma pesquisa envolvendo estudantes do ciclo básico do curso de Engenharia Industrial Têxtil, constatou a falta de experiências prévias referentes tanto ao raciocínio lógico quanto ao traçado e análise de gráficos. Os resultados apresentados por Cury (2009), em pesquisa sobre o erro em Cálculo, evidenciam que os maiores problemas não estão relacionados ao domínio de técnicas para o cálculo de limites, derivadas e integrais, mas com o aprendizado de conteúdos tratados no Ensino Fundamental e Médio, como simplificações algébricas, produtos notáveis, resolução de equações, conceito de funções e traçado de gráficos. Isto concorda com a afirmação de Meyer (2003):

> Os alunos, após cursarem a disciplina de Cálculo I, são capazes de determinar a função derivada de diversas funções, utilizando-se de regras e procedimentos algébricos, ou mesmo de reproduzir a definição formal de derivada de uma função. Mas, frequentemente, produzem significados para este conceito que não são compartilhados pela comunidade matemática e, portanto, não correspondendo aos significados pretendidos pelo sistema educacional (p. 4).

Machado (2008) argumenta que os resultados insatisfatórios do ensino e aprendizagem de Cálculo podem ser de três naturezas distintas: cognitiva, quando os alunos não têm estruturas cognitivas capazes de compreender as ideias do Cálculo; didática, relacionada à metodologia do ensino de Cálculo; e epistemológica, que se refere a omitir ou evitar ideias básicas e os problemas construtores de cálculo no ensino de Matemática. Semelhantemente, Silva (2011a) aponta como possíveis motivos para o baixo desempenho dos alunos em Cálculo a relação professor-aluno, a expectativa do professor em relação ao aluno, a formação do professor e a formação do aluno. Nesse sentido, o uso exclusivo de uma metodologia expositiva tem levado os alunos a desenvolver as mesmas habilidades de memorização e reprodução usadas na Educação Básica, pela ênfase na execução repetitiva de exercícios, sem ainda terem desenvolvido outras habilidades como reflexão e autonomia.

Almeida, Fatori e Souza (2007) argumentam que, de forma geral, nas aulas de Cálculo, “os conteúdos são apresentados aos alunos como um saber já construído, sem lugar para a intuição, experimentação ou descoberta e perante o qual não é possível a argumentação” (p. 7). A partir destes resultados têm surgido propostas de intervenção e melhoria das práticas pedagógicas no ensino de Cálculo, como a utilização da Modelagem Matemática (FRANCHI, 1993; VILARREAL, 1999; ARAÚJO, 2002; BIEMBENGUT, 1997; BARBOSA, 2004b) justificando que criar e explorar o modelo de um fenômeno é uma experiência importante no processo de aprendizagem. Seus resultados se mostram positivos em relação à aprendizagem dos alunos, pois a modelagem possibilitou a introdução de conceitos matemáticos e a aplicação de conteúdos já conhecidos; os alunos desenvolveram sua criatividade, conjecturaram, perceberam as aplicações da Matemática e sentiram-se mais motivados para participar das aulas.

Os resultados de uma pesquisa com Modelagem Matemática em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral estão relatados em Vertuan, Silva e Borssoi (2017). Estes autores apresentam as manifestações de alunos de um curso de Licenciatura em Química sobre o que aprendem ao realizarem atividades de modelagem. Discutem a emergência, no contexto escolar, de aspectos relacionados à aprendizagem de conceitos matemáticos, de estratégias de resolução, de algoritmos e de situações extra matemáticas, concluindo que esta emergência independe das especificidades de cada curso e disciplina.

Segundo Nery, Liegel e Fernandez (2007), existe na Química um elevado número de conceitos inter-relacionados a outras disciplinas, mas que não são facilmente percebidos pelos estudantes. Estes autores destacam que a relação com a Matemática é normalmente reduzida ao uso de algoritmos, exigindo apenas que os alunos saibam procedimentos mecânicos. Assim, fica a impressão para os alunos de que não há articulação entre os conteúdos químicos ou que esta articulação se restringe ao meio científico, teórico e experimental, ficando a área educacional sujeita aos tradicionais sistemas de ensino.

No entanto, no curso de Química as disciplinas de Matemática não estão no currículo ao acaso. De acordo com Mesquita e Soares (2011), para se compreender Química é necessário ter habilidade em Matemática. Isso corrobora com as habilidades do profissional em Química, com relação à formação pessoal, segundo às Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para os Cursos de Química. Conforme este documento, este profissional deve

> Possuir habilidade suficiente em Matemática para compreender conceitos de Química e de Física, para desenvolver formalismos que unifiquem fatos isolados e modelos quantitativos de previsão, com o objetivo de compreender modelos probabilísticos teóricos, e de organizar, descrever, arranjar e interpretar resultados experimentais, inclusive com auxílio de métodos computacionais (p. 4).

Segundo as mesmas DCN, no curso de Química os conteúdos curriculares básicos de Matemática que compõem a formação do químico são: álgebra, funções algébricas de uma variável, funções transcendentes, cálculo diferencial e integral, sequências e séries, funções de várias variáveis, equações diferenciais e vetores.

Nesse sentido, ressaltamos a importância de atitudes que visem à melhoria do ensino de Matemática nos cursos de graduação e a necessidade de repensar as opções didáticas e metodológicas. Além disso, consideramos que conhecer os mecanismos cognitivos pelos quais os alunos aprendem também pode ajudar o professor na organização de suas aulas e na abordagem dos conteúdos de sua disciplina. A Aprendizagem Significativa, teoria da Psicologia Educacional proposta por David Ausubel na década de 1960, considera algumas condições essenciais para que o aluno aprenda significativamente: que as novas ideias apresentadas ao aluno sejam potencialmente significativas, quer dizer, que sejam passíveis de aquisição de significado pelo aluno; que o estudante tenha em sua estrutura cognitiva conhecimentos prévios relevantes aos quais os novos conhecimentos possam se relacionar; e que o aluno esteja disposto a aprender significativamente (AUSUBEL; NOVAK, HANESIAN, 1980).

Assim, aprender significativamente, segundo esta teoria de aprendizagem, pressupõe também outras variáveis e relações, compondo um sistema complexo. No entanto, estas três condições iniciais básicas já podem servir de indicativos direcionais para o professor, tanto para a organização da aula e para sua mediação, quanto para a avaliação da aprendizagem.

Articulando Modelagem Matemática e Aprendizagem Significativa, Borssoi (2004, 2013), Borssoi e Almeida (2004, 2013), Fontanini (2007), Almeida e Fontanini (2010), Venâncio e Kato (2008), Venâncio (2010), Figueiredo e Kato (2012), Figueiredo (2013), Postal (2009) e outros autores apresentam resultados positivos em suas pesquisas. Relatam, por exemplo, que ao considerar elementos da teoria da

Aprendizagem Significativa no desenvolvimento de atividades de modelagem é possibilitada a interação entre os estudantes, bem como a possibilidade de os alunos relacionarem o que já sabem com os novos conhecimentos. Estas pesquisas também apresentam indicativos de colaboração e cooperação entre os alunos, além de indícios de que eles aprenderam significativamente conceitos matemáticos.

Em pesquisa de mestrado (SILVA, 2011b; SILVA; KATO, 2012; SILVA; KATO; PAULO, 2012), relatamos quais elementos caracterizam a perspectiva sociocrítica da Modelagem Matemática (KAISER; SRIRAMAN, 2006) e apontamos aproximações entre esta perspectiva e a aprendizagem significativa crítica[2] (MOREIRA, 2000). Em termos gerais, os resultados mostram que desenvolver, em sala de aula, atividades de Modelagem Matemática considerando elementos da perspectiva sociocrítica[3], facilita a aprendizagem significativa crítica.

Considerando, então, as dificuldades de aprendizagem dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica para abordar os conteúdos dessa disciplina e a Aprendizagem Significativa como um produto final desejável para os alunos que cursam uma disciplina de Cálculo I, objetivamos investigar, nesta pesquisa, **a ocorrência de Aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas em aulas de Cálculo I.** A investigação dessa ocorrência é mediada pelas questões:

1) Como se verificam as três condições propostas por Ausubel para a ocorrência de Aprendizagem Significativa em uma atividade de Modelagem Matemática?
2) Que indícios de Aprendizagem Significativa se apresentam em um vê epistemológico construído para uma atividae de Modelagem Matemática?
3) Durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem

---

[2] Baseia-se nas ideias de Neil Postman e Charles Weingartner de "aprendizagem subversiva" e de David Ausubel de Aprendizagem Significativa. Nas palavras de Moreira (2000), "permite ao sujeito fazer parte de sua cultura e ao mesmo tempo estar fora dela" (p. 4).

[3] "Essa perspectiva enfatiza o papel da matemática na sociedade e reivindica a necessidade de encorajar o pensamento crítico sobre o papel da matemática na sociedade, sobre o papel e a natureza de modelos matemáticos e sobre a função da modelagem matemática na sociedade" (KAISER; SRIRAMAN, 2006, p. 306).

> Matemática, se verificados indícios de Aprendizagem Significativa, como o aluno passa dos significados denotativos para os significados conotativos?

Para atender a este objetivo, desenvolvemos atividades de Modelagem Matemática com alunos de um curso de Licenciatura em Química, do câmpus Londrina da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), durante um semestre do ano letivo de 2016. Estas atividades, que se caracterizam como do terceiro momento de familiarização da modelagem (ALMEIDA; DIAS, 2004), foram analisadas a partir das produções destes alunos: diálogos entre os alunos durante a realização das atividades, exposição para a turma, produção de vês epistemológicos (NOVAK; GOWIN, 1984) e um relatório da atividade. Estes registros foram analisados conforme indicações da análise textual discursiva (MORAES, 2003; MOARES; GALIAZZI, 2006).

Para descrever os encaminhamentos desta pesquisa organizamos este relatório em seis capítulos: seguinte à Introdução, o capítulo 2 apresenta uma revisão e discussão sobre a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática, considerando como a entendemos nesta pesquisa e as suas potencialidades para o ensino de Matemática. O capítulo 3, sobre a Aprendizagem Significativa, apresenta aspectos gerais desta teoria, discute os vês epistemológicos como instrumentos de avaliação, bem como resultados de pesquisas que associam a Modelagem Matemática à Aprendizagem Significativa. Neste capítulo também discutimos o *significado* posto em Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e Ausubel (2003) sob uma ótica filosófica, conforme Ogden e Richards (1972). O Capítulo 4 discorre sobre o contexto da pesquisa e os aspectos metodológicos, descrevendo o ambiente onde a pesquisa foi realizada – como se deu a coleta de dados e os sujeitos da pesquisa – bem como a metodologia utilizada nas análises.

No capítulo 5 apresentamos a descrição das atividades de modelagem desenvolvidas pelos alunos, bem como suas análises, conforme a metodologia indicada no capítulo 4, e, por fim, apresentamos as novas compreensões emergentes do processo de análise empreendido sobre as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos alunos, que pretende responder ao objetivo desta pesquisa. Finalmente, o capítulo 6 apresenta as considerações finais, abordando os principais resultados obtidos, as contribuições e limitações desta pesquisa.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Oriunda das Ciências Exatas e Naturais, com raízes na Matemática Aplicada, a Modelagem Matemática faz parte do movimento da Educação Matemática há aproximadamente 45 anos (MALHEIROS, 2012, p. 90). Essa "transposição" não encerrou a modelagem nos seus usos e abordagens originais, mas deu início a novas abordagens, objetivos e contextos para sua utilização. Em outras palavras, matemáticos e profissionais de distintas áreas continuam construindo modelos que descrevem e/ou resolvem situações-problema, no sentido definido por Monteiro (1991, p. 106):

> Modelagem Matemática é compreendida como sendo um processo de abstração no qual, a partir de um problema real, são levantadas hipóteses e se constrói um modelo, o qual é resolvido por técnicas matemáticas e seu resultado é analisado como sendo ou não válido. Caso não seja, dados e hipóteses devem ser incluídos ou modificados para que o processo seja refeito.

A partir dessa transposição, os objetivos, a forma de abordagem e as discussões matemáticas passaram a diferir dos modeladores profissionais (BARBOSA, 2001). Nesse sentido, assim que a modelagem começou a ser utilizada para fins de ensino e aprendizagem da Matemática, outras compreensões, de diversas naturezas, são lançadas sobre ela. Entretanto, mesmo no campo da Educação Matemática, estas compreensões podem divergir em alguns aspectos, desde os procedimentos adotados para o desenvolvimento de uma atividade até o que se entende por modelo matemático, bem como sobre os objetivos que se pretende alcançar com a modelagem em sala de aula. De acordo com Biembengut (2009), essas diferenças de compreensão são provocadas pela formação e experiência de cada pesquisador, além de compreender outros atributos, que podem ser, por exemplo, sociais, geográficos e culturais.

Assim, abordamos neste capítulo algumas compreensões sobre Modelagem Matemática, mostrando como alguns autores propõem o desenvolvimento de atividades em etapas e o que consideram um modelo matemático. Procuramos ressaltar as potencialidades da modelagem, evidenciadas em pesquisas, para o ensino e aprendizagem (extra)matemática, discutindo também que diferentes objetivos de aprendizagem requerem abordagens diferentes. Como esta revisão da literatura também pretende contemplar os aspectos da Modelagem Matemática que se coadunam nesta pesquisa, apresentamos também como a modelagem é compreendida neste trabalho, as etapas que consideramos no seu processo e com que objetivos e abordagem a utilizamos.

2.1 Sobre a Modelagem Matemática na Educação Matemática

A modelagem na Educação Matemática tem sido debatida, internacionalmente a partir dos anos 1960 e no Brasil desde o final da década de 1970 (BIEMBENGUT, 2009). Isto tem implicado no aumento de pesquisas e relatos de experiências, bem como no número de interessados – professores e pesquisadores – cujas pesquisas e práticas se aprofundam e se diferenciam. Em outras palavras, com o passar do tempo, as compreensões acerca da Modelagem Matemática se especificam e se ramificam, no sentido de que o volume de pesquisas sobre ela revelam cada vez mais particularidades e, ao mesmo tempo, apresentam diversidades. As particularidades nos permitem compreendê-la detalhadamente, e as diversidades revelam as diferenças sobre os mesmos detalhes. Por exemplo, diferentes autores concordam que uma atividade de modelagem requer um conjunto de procedimentos para o seu desenvolvimento, mas cada autor apresenta diferenças, ou até mesmo divergências, sobre os procedimentos indicados.

Blum (2015) compreende que, em uma atividade de Modelagem Matemática, há uma interação entre o “mundo real” e a Matemática, na qual são abordados tanto os produtos como os processos. Tratando do ensino e aprendizagem da Matemática no contexto das relações entre os mundos matemático e extramatemático, ele esclarece que, este último, ou mundo real, refere-se àquilo que Pollak (1979) chama de “resto do mundo”, e que inclui a natureza, a cultura, a sociedade e a vida cotidiana.

Numa perspectiva diferente, Araújo (2009) propõe que a modelagem deve promover a atuação crítica dos alunos na sociedade, por meio do conhecimento matemático, de forma que possam reconhecer e valorizar sua cultura e sua realidade. Visando estes objetivos, a autora enfatiza a importância de os alunos trabalharem em grupos e que sejam abordados problemas não-matemáticos escolhidos, preferencialmente, pelos alunos. Além disso, que se utilize a Matemática, nas atividades de modelagem, como suporte para discussões sobre a realidade e que as discussões em sala de aula sejam problematizadas para o contexto social. Isto para promover a atuação crítica dos alunos, sem visar apenas a instrumentalização matemática, mas a sua emancipação como cidadãos. Dá importância também à discussão do uso da Matemática na sociedade, à ideologia da certeza[4] e ao poder formatador da Matemática[5].

Nas palavras da autora, a Modelagem Matemática é

> uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não matemático da realidade, ou de uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica[6] embasem o desenvolvimento do trabalho (ARAÚJO, 2002, p. 39).

Uma compreensão semelhante a de Araújo (2002, 2009) é a de Barbosa (2001, p. 29). Para ele, as atividades de modelagem são “um meio de indagar e questionar situações reais por meio de métodos matemáticos, evidenciando o caráter cultural e social da matemática”. Estas duas compreensões têm convergências devido aos seus objetivos: estão mais direcionadas a mostrar ao aluno a importância da Matemática na sociedade. Enquadram-se numa perspectiva sócio-crítica (KAISER; SRIRAMAN, 2006), sobre a qual trataremos mais adiante.

Segundo Burak (1992, p. 62), a Modelagem Matemática “constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões”. Conforme Klüber e Burak (2008), esse autor considera em sua concepção dois princípios básicos: o interesse do grupo e a obtenção de informações do ambiente em que se encontra o interesse do grupo. Esta forma de compreender a modelagem possui influências das Ciências Humanas, considerando os sujeitos, o ambiente social e cultural, dentre outros.

---

[4] Borba e Skovsmose (2001, p. 130) explicam que a ideologia da certeza pauta-se sobre as crenças de que a “matemática é perfeita, pura e geral, no sentido de que a verdade de uma declaração matemática não se fia em nenhuma investigação empírica [...] A matemática é relevante e confiável, porque pode ser aplicada a todos os tipos de problemas reais. A aplicação da matemática não tem limite, já que é sempre possível matematizar um problema.”

[5] Segundo Skovsmose (2011), a Matemática intervém na realidade ao oferecer, além de descrições de fenômenos, modelos para a alteração de comportamentos. Assim, vemos e agimos de acordo com a matemática.

[6] A Educação Matemática Crítica é fundamentada por Ole Skovsmose a partir da natureza crítica da Educação Matemática, questionando seu papel sociopolítico.

Além das mencionadas aqui há, de fato, uma diversidade de compreensões para a modelagem no âmbito da Educação Matemática: alguns autores a compreendem como uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática (BURAK, 2010; BISOGNIN et al., 2012; ROSA; REIS; OREY, 2012), como um um ambiente de aprendizagem (BARBOSA, 2001), como uma estratégia pedagógica (MALHEIROS, 2004; SOARES; BORBA, 2014) ou como uma estratégia de ensino e aprendizagem (BIEMBENGUT; HEIN, 2007; BASSANEZI, 2009). Pode ainda ser vista como uma abordagem segundo a Educação Matemática Crítica (ARAÚJO, 2002), ou como uma concepção de educar matematicamente (CALDEIRA, 2009; MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011).

Mesmo com essa multiplicidade de compreensões, destacamos que, independentemente de como é compreendida – sem discutir as bases filosóficas ou epistemológicas de cada autor que fundamentam suas crenças – a modelagem tem características, ou “elementos” comuns: termos como modelo, investigação e tema, por exemplo, sempre estão presentes. Klüber (2012) diz que “não seria equívoco afirmar que a Modelagem Matemática se revela como uma investigação sobre temas e que o modelo é um modo de expressar uma compreensão sobre esses temas, com matemática” (p. 381). Por isso, compreender o que é a modelagem na Educação Matemática requer também uma compreensão sobre modelo matemático neste campo de investigação.

Conforme Lesh et al. (2006) um modelo matemático é um sistema conceitual, expresso por uma linguagem ou por uma estrutura matemática, e objetiva descrever o comportamento de outro sistema e realizar previsões. Esta afirmação concorda com o que dizem Doerr e English (2003) sobre modelo: ele dá meios de descrever, explicar e predizer o comportamento de fenômenos, valendo-se de uma linguagem que pode ser simbólica, diagramática ou gráfica.

Para Blum (2015), um modelo matemático é uma imagem, simplificada e formalizada, de alguma parte do mundo real. Além disso, os modelos não têm apenas o propósito de descrever e explicar (modelos descritivos), mas também predizer e criar partes do mundo real[7] (modelos normativos).

---

[7] Aqui, Blum (2015) utiliza o termo “mundo real” ou “resto do mundo” no mesmo sentido utilizado por Pollak (1979): o mundo extramatemático, que inclui a natureza, o cotidiano, a sociedade e a cultura.

Jacobini e Wodewotzki (2006) consideram que os modelos matemáticos “são representações, em termos matemáticos, de aspectos de interesse do problema em estudo” (p.14) e concordam com Biembengut e Hein (2000, p. 12) que esses modelos podem ser obtidos “utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas etc.”

Uma observação importante a se fazer é que, dentro destas compreensões, em que a modelagem é utilizada como meio para ensinar Matemática, o modelo obtido para resolver a situação-problema não necessita ser completamente novo, tampouco ser obtido por meio de procedimentos matemáticos elaborados. Um modelo deve expressar, por meio de uma linguagem, uma compreensão de quem o obteve. Assim, concordamos com o exposto em Tortola e Almeida (2013, p. 7), de que

> o modelo matemático não tem um fim em si só, mas a sua construção, ao mesmo tempo que contribui para a resolução de um problema, também viabiliza a sistematização do conteúdo matemático que emerge dessa construção. Nesse sentido, a obtenção de um modelo não é o objetivo último de uma atividade de modelagem matemática, mais importante do que o modelo obtido é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sociocultural.

Nesse sentido ressaltamos que, nesta pesquisa, consideramos mais importante do que “chegar” a um modelo matemático, o processo que levou até ele e suas implicações no contexto da situação inicial, bem como o que expressa o modelo obtido, independentemente da linguagem que comunica este resultado. Compreendemos, também, a Modelagem Matemática conforme Almeida, Silva e Vertuan (2012). Segundo eles, a modelagem é uma alternativa pedagógica que visa abordar matematicamente “uma situação problemática não essencialmente matemática” (p. 17) e

> pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situção inicial para a situação final (p. 12).

Partir de uma situação problemática inicial e chegar a uma situação final desejada, ou seja, apresentar uma solução para um problema, não essencialmente matemático que se tem interesse em resolver, pressupõe um conjunto de ações e procedimentos. Este conjunto de ações são chamados de fases, ou etapas, da Modelagem Matemática.

2.2 SOBRE OS PROCEDIMENTOS PARA O DESENVOLVIMENTO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Compreensões diferentes levam a práticas diferentes, ou seja, cada autor sugere fases a serem seguidas numa atividade de Modelagem Matemática, intrínsecas à sua compreensão. Embora as fases da modelagem costumem ser estabelecidas numa determinada ordem, podem ser cumpridas mais de uma vez e a ordem se cumpre conforme o modelador julgue necessário. Pelo modo como os autores definem estas fases, percebemos similaridades tanto na ordem estabelecida, sem rigidez, quanto nos objetivos que cada uma dessas fases tem dentro da atividade.

Blum (2015) sugere que uma atividade de modelagem seja realizada seguindo uma sequência de etapas, no que ele chama de “esquema de sete passos”.

Este esquema descreve o processo de solucionar problemas por meio da Matemática, do ponto de vista cognitivo, e que, se necessário, pode ser percorrido várias vezes. Para Niss (2003), que considera este mesmo esquema para o desenvolvimento de atividades de modelagem, a habilidade de executar estes sete passos corresponde a certas competências[8] ou subcompetências, como o entendimento do mundo real ou a interpretação matemática dos resultados em relação a uma situação.

Jacobini e Wodewotzki (2006) também consideram que algumas etapas podem ser seguidas, relativas aos procedimentos inerentes a uma atividade de modelagem: 1) explorações preliminares sobre o assunto, 2) formulação de questões, 3) levantamento de hipóteses, 4) obtenção e organização de dados, 5) estudo do ferramental matemático disponível para a contrução do modelo e 6) possibilidades de relacionamento desse material com o conteúdo programático. Para eles, a imersão do estudante no objeto de estudo é feita com a intenção de ampliar o seu conhecimento sobre o tema, bem como a sua percepção da relação entre o

[8] As competências em modelagem não serão discutidas a fundo neste trabalho, mas, de modo geral, competência em modelagem significa a habilidade em construir ou aplicar modelos matemáticos executando as etapas apropriadas, bem como de analisar e comparar certos modelos (BLUM, 2015). Uma pesquisa sobre competências de modelagem pode ser consultada em Lorin (2015).

investigado e a Matemática.

Stillman et al. (2007) apontam que a modelagem envolve “componentes essenciais” como solução, formulação, interpretação e avaliação, ao passo que Burak (2004) propõe que uma atividade de modelagem seja desenvolvida em cinco etapas: 1) escolha do tema; 2) pesquisa exploratória; 3) levantamento do(s) problema(s); 4) resolução do(s) problema(s) e desenvolvimento dos conteúdos no contexto do tema e 5) análise crítica das soluções.

Ferri (2006) assim caracteriza as fases da Modelagem Matemática: 1) situação real: nessa etapa, ocorre o primeiro contato com a situação em que se situa o problema; 2) representação mental da situação: aqui, o aluno deve compreender a situação real e decidir o que se pode estudar a partir dela, fazendo simplificações e tomando decisões com base nas informações obtidas; 3) modelo real: caracteriza-se pela presença de representações como fórmulas ou esboço de um modelo; 4) modelo matemático: os alunos apresentam as representações matemáticas utilizando esboços e fórmulas; 5) resultados matemáticos: os resultados são obtidos por meio do modelo matemático obtido para a situação; 6) resultados reais: obtidos pela discussão a respeito dos resultados matemáticos encontrados e como se relacionam com a situação problema.

Ainda outras etapas são apresentadas na literatura em forma de esquema (GALBRAITH; STILLMAN, 2006; POLLAK, 1979; VERSCHAFFEL et al., 2000).

Considerando a compreensão de Modelagem Matemática nesta pesquisa, Almeida, Silva e Vertuan (2012) também discorrem sobre as fases a se percorrer durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem, as quais chamam de *inteiração*, *matematização e resolução* e *interpretação de resultados e validação.*

Na primeira fase, a inteiração, ocorre o primeiro contato com a situação-problema a ser estudada, a fim de conhecê-la melhor. Assim, deve-se coletar dados referentes à situação, para auxiliar na formulação do problema e na definição das estratégias que serão utilizadas na sua resolução. Embora esta fase marque o contato inicial com o tema, o levantamento de informações sobre ele pode ocorrer durante todo o desenvolvimento da atividade. Aqui, o objetivo é compreender o problema e organizar informações.

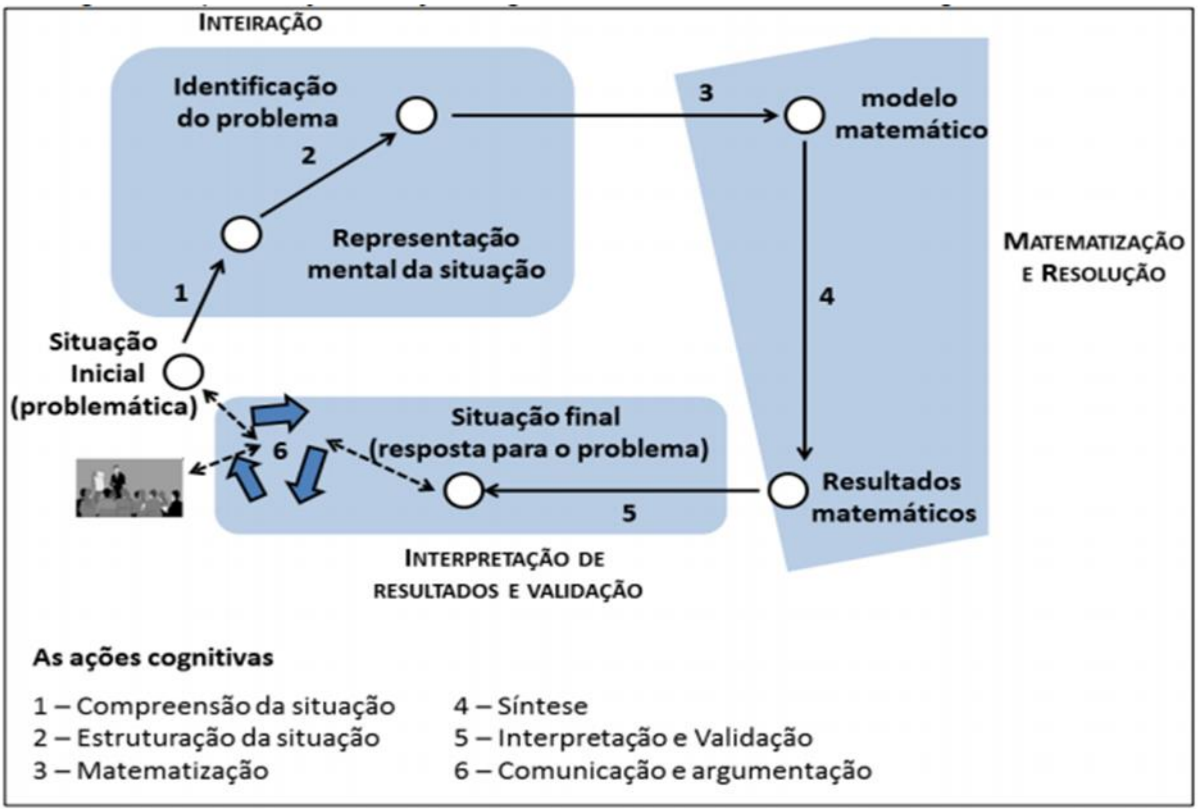
A matematização se caracteriza pela necessidade de passar a representação da situação-problema da linguagem natural para a linguagem matemática. Esta fase envolve o levantamento de hipóteses e sua análise, a definição de variáveis essenciais e simplificação de informações. Na resolução, segue-se a construção de um modelo matemático que permita descrever e analisar a situação-problema, bem como responder perguntas relacionadas à investigação ou até mesmo fazer previsões. Por fim, durante a interpretação dos resultados e validação ocorre um processo avaliativo para analisar a resposta obtida para o problema, em que se deve considerar os procedimentos matemáticos utilizados e o quanto a representação obtida se adequa à representação da situação. Nesta fase, o objetivo é encontrar soluções.

Ressalte-se que a realização dessas fases pode constituir um ciclo, já que não necessitam ocorrer de forma linear e podem se repetir conforme a necessidade. Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 19) representam esquematicamente as ações cognitivas dos alunos em cada uma das fases da modelagem (Figura 1), ou seja, para que cada fase da modelagem seja cumprida, determinadas ações são necessárias na estrutura cognitiva do aluno.

As características das atividades de modelagem, que, em geral, levam os alunos a enfrentar algo, de algum modo, novo, dão a eles a oportunidade de se familiarizar com mecanismos de ação e reflexão.

> O aluno precisa viver experiências com atividades de modelagem matemática a fim de ‘aprender’ a desenvolvê-las e fazer com que o desenvolvimento da atividade seja orientado pela busca de uma solução para a situação-problema e seja ele próprio o ‘resolvedor’ principal. O aluno tem, portanto, papel central no que se refere à articulação entre definição, investigação e resolução, essencial em uma atividade de modelagem (SILVA; ALMEIDA; GERÔLOMO, 2011, p. 30).

Figura 1 - As fases da Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 19).

Desenvolver atividades de Modelagem Matemática, para além da execução de fases, inclui atitudes por parte do professor, que podem contribuir para melhores resultados referentes ao ensino e a aprendizagem da Matemática em sala de aula. Schoenfeld (1992) argumenta que a modelagem não é um "esporte de espectador", pois neste tipo de atividade os alunos devem estar cognitivamente ativos e estimulados. Assim, cabe ao professor instigar os alunos cognitiva e metacognitivamente, promovendo reflexões e retrospectivas sobre as atividades. Deve haver também uma variação bem definida de contextos e tópicos abordados.

Ikeda e Stephens (2011) e Reusser (2001) são favoráveis à realização de atividades em grupo. Isto requer também que se utilize o tempo das aulas de maneira efetiva, que se use construtivamente os erros dos alunos como oportunidades de aprendizado, bem como variar os métodos e meios de comunicação. No entanto, mesmo com atividades em grupo, os professores devem incentivar soluções individuais nos problemas de modelagem. Isto porque elas obedecem às preferências de cada um dos alunos, apoiam a diferenciação interna na sala de aula, refletem o espírito genuíno da Matemática e permitem comparações e reflexões sobre diferentes soluções (BORROMEO-FERRI; BLUM, 2009; SCHOENFELD, 1998; HIEBERT; CARPENTER, 1992).

No entanto, apesar da constante orientação do professor, o trabalho independente dos alunos deve ser mantido. Este equilíbrio pode ser alcançado por uma *intervenção adaptativa* (LEISS, 2010), que permite que os alunos continuem seu trabalho sem perder sua independência. Isto porque, de modo geral, os professores tendem a executar intervenções fortes e estritamente relacionadas ao conteúdo para evitar erros ou bloqueios antes de ocorrerem.

Outro aspecto a se considerar para o desenvolvimento de atividades de modelagem inclui as tecnologias digitais, que podem ser usadas como ferramentas, não apenas nas fases intramatemáticas (BORBA; VILLARREAL, 2005; HENN, 2007; GEIGER, 2011; GREEFRATH et al., 2011). Os computadores podem ser utilizados para experimentos, investigações, simulações, visualizações e cálculos.

Entretanto, dado que desenvolver uma atividade de modelagem no ensino de matemática não é algo “corriqueiro”, é comum que os alunos não tenham familiaridade com este tipo de abordagem pedagógica. Conforme Blum (2015), a Modelagem Matemática é uma atividade de demanda cognitiva, concordando com Turner et al. (2013), uma vez que várias competências estão envolvidas, que podem ser competênticias não matemáticas, conhecimento matemático e extramatemático, noções conceituais, bem como convicções e atitudes adequadas. Estas demandas cognitivas são responsáveis pela dificuldade empírica: a modelagem é bastante difícil para os estudantes, como já apontado em alguns estudos (HOUSTON; NEIL, 2003; FREJD; ÄRLEBÄCK, 2011). Isto concorda com os resultados de Galbraith e Stillman (2006), que mostraram que cada etapa no processo de modelagem é uma barreira cognitiva potencial para os alunos, pois uma atividade de modelagem é cognitivamente exigente. Nesse sentido, quando lidamos com alunos “inexperientes” em Modelagem Matemática, há a necessidade de introduzir a modelagem de forma gradual. Uma forma de fazer isso é proposta por Almeida e Dias (2004), os momentos de familiarização com a Modelagem Matemática, sobre o que discorremos a seguir.

2.2.1 Os Momentos de Familiarização

Almeida e Dias (2004), considerando as características da

Modelagem Matemática, argumentam sobre a necessidade de os alunos se familiarizarem com este tipo de atividade. Nesse sentido, propõem a familiarização gradativa dos alunos com a modelagem, no que chamam de “três momentos de familiarização”.

Em atividades do primeiro momento, o professor apresenta aos alunos uma situação-problema, juntamente com outras informações necessárias. Cabe ao professor acompanhar também a investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático, orientando os alunos durante a definição de variáveis e hipóteses, simplificação, transição para a linguagem matemática, obtenção e validação do modelo.

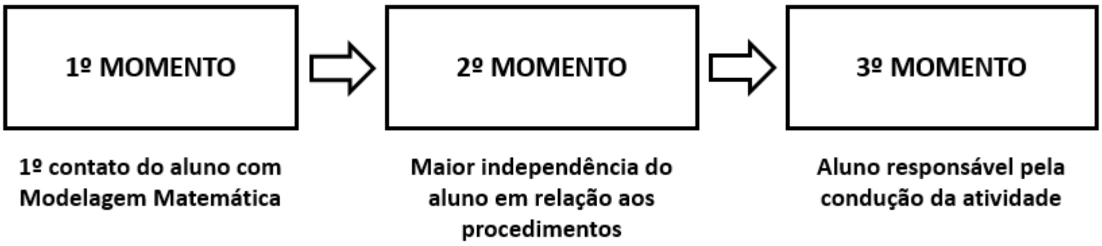
Nas atividades do segundo momento de familiarização, o professor pode sugerir uma situação-problema aos alunos que, divididos em grupos, coletam mais informações para a investigação da situação. Os alunos definem também as variáveis e formulam hipóteses simplificadoras, obtêm e validam um modelo matemático. Atividades de modelagem do segundo momento se caracterizam por uma maior independência do aluno referente à definição de procedimentos para realizar a investigação.

Durante atividades de modelagem do terceiro momento os alunos, em grupos, são responsáveis pela condução da atividade. Neste caso, eles identificam uma situação-problema, coletam e analisam os dados, executam as transições de linguagem, obtêm e validam um modelo para a análise da situação. Além disso, comunicam o resultados da investigação realizada para a comunidade escolar.

Durante o primeiro e o segundo momento, a mediação feita pelo professor é mais intensa, o que fornece ao aluno confiança, independência e autoridade para estudar uma situação-problema, e buscar por meio da Matemática uma solução. No decorrer dos diferentes momentos a independência do aluno para o desenvolvimento da atividade vai aumentando, tornando-se responsável por todos os procedimentos no terceiro momento.

Almeida e Dias (2004) preocupam-se com esta caracterização de atividades de modelagem em momentos visando o contato gradativo do aluno com a modelagem, de forma que ele possa ser responsável também pela atividade. A Figura 2 ilustra o processo gradativo de familiarização.

Figura 2 - O processo dos três momentos de familiarização da Modelagem Matemática



Fonte: Almeida e Dias (2004, p. 14).

Mesmo que a literatura apresente formas de utilizar a Modelagem Matemática em sala de aula, descrevendo diversas possibilidades de atuação tanto do professor quanto do aluno durante a realização dessas atividades, professores de Matemática ainda argumentam sobre a dificuldade de inserí-la no contexto da sala de aula, considerando as exigências do currículo e o tempo necessário para desenvolver uma atividade deste tipo. Nesse sentido, Blum e Niss (1991) sugerem possibilidades que permitem a adaptação de atividades de modelagem a diferentes contextos e objetivos. Almeida e Silva (2007) organizam estas possibilidades em quatro alternativas:

1) Alternativa da separação: quando não há a possibilidade de desenvolver atividades de modelagem durante as aulas regulares de Matemática, pode-se optar por cursos extracurriculares, realizados especificamente para esta finalidade. Assim, não há alteração nas aulas regulares de Matemática.
2) Alternativa da combinação: Neste caso, pode-se utilizar aspectos de uma atividade de Modelagem Matemática durante as aulas regulares, como uma forma de auxiliar a introdução de conceitos matemáticos. O inverso também pode ser feito: utilizar novos conceitos, métodos e resultados matemáticos para realizar atividades de modelagem.
3) Alternativa da integração curricular: esta alternativa propõe utilizar problemas como ponto de partida e a introdução da Matemática necessária para a sua resolução pode ser feita conforme a necessidade.

4) Alternativa interdisciplinar integrada: pressupõe uma integração completa das atividades extramatemáticas e matemáticas. Assim, a Matemática não seria organizada como disciplina isolada, mas os conteúdos das outras diferentes disciplinas poderiam ser desenvolvidos nas aulas de forma integrada.

Assim, vemos que a literatura dispõe de alternativas e recursos para orientar a condução de atividades de modelagem segundo a familiaridade dos alunos, bem como oferece opções de integração deste tipo de atividade no currículo escolar.

2.3 Das Potencialidades para o Ensino e Aprendizagem da Matemática

Como mencionado no início do capítulo, a quantidade de pesquisas e de interessados em modelagem na Educação Matemática tem aumentado. Este aumento pode estar diretamente relacionado aos resultados positivos quanto a implementação da modelagem em sala de aula, para fins de ensino e aprendizagem. Há relação também entre as potencialidades da Modelagem Matemática para atingir objetivos educacionais, como a capacidade de participar da vida social como um cidadão independente e responsável (BLUM, 2015).

Nesse sentido, diversos autores têm argumentado favoravelmente para a inclusão da modelagem nos currículos e no ensino. Conforme Kaiser e Sriraman (2006), pode-se integrar modelos e modelagem ao ensino da Matemática. Blomhϕj (2009) apresenta alguns argumentos para esta integração. Segundo ele, modelagem pode ajudar a estabelecer pontes entre as experiências dos alunos e a sua vida com a Matemática. Isto pode motivar a aprendizagem matemática dos alunos, dando-lhes suporte cognitivo para suas concepções, fazendo dela um meio para descrever e compreender as situações da realidade. Além disso, analisar e criticar modelos matemáticos são competências de importância crucial no desenvolvimento das sociedades altamente tecnológicas. Esta importância está relacionada às oportunidades e desafios na educação e na vida profissional e familiar, e da sociedade, com relação à necessidade de uma força de trabalho devidamente educada. Para este autor, os modelos matemáticos de diferentes tipos e complexidade têm importante papel no funcionamento e na formação de sociedades.

Em outras palavras, o desenvolvimento de competência crítica sobre os modelos pode ser utilizada na tomada de decisões, e torna-se imperativa para a manutenção e o aprofundamento da democracia.

Blomhϕj (2009) argumenta, ainda, que os modelos matemáticos podem ser usados para definir e descrever a desigualdade social e econômica: a Economia se baseia em modelos matemáticos de diferentes tipos – as taxas de juros, empréstimos, financiamento imobiliário, previsões e políticas de controle de epidemias, entre outros, são baseados em modelos matemáticos, enquanto dados de saúde e índices de criminalidade são discutidos por meio de modelos estatísticos. Estes e outros aspectos da vida social estão sendo transformados e formatados por meio de modelos matemáticos e suas aplicações. Portanto, tanto o desenvolvimento de um especialista quanto o de um leigo na população em geral deve-se, em parte, às maneiras pelas quais os modelos são utilizados na tomada de decisões

Blum (2011) apresenta quatro justificativas, as quais ele chama de *pragmática*, *formativa*, *cultural* e *psicológica*, exemplificando o tipo de atividade mais adequada a cada uma delas:

1) Justificativa pragmática: para entender e dominar as situações do mundo real, aplicações adequadas e exemplos de modelagem devem ser tratados explicitamente; não podemos esperar qualquer transferência a partir de atividades puramente matemáticas. Requer atividades autênticas[9] e concretas (sobre compras, notícias de jornais, cálculo de impostos etc).
2) Justificativa formativa: as competências também podem ser desenvolvidas ao serem envolvidas em atividades de modelagem; em particular, a competência de modelagem só avança dessa maneira, e a competência de argumentação pode ser desenvolvida por “provas relacionadas à realidade” (BLUM, 1998). Exige atividades cognitivamente ricas e metacognitivas.
3) Justificativa cultural: as relações com o mundo extramatemático são indispensáveis para uma visão adequada da Matemática como ciência, em um sentido abrangente. Neste caso, as

---

[9] Palm (2007) trata sobre a autenticidade em atividades de Modelagem Matemática.

atividades devem ser autênticas, mostrando aos alunos o quão intensamente a Matemática molda o mundo (às vezes de forma oculta e invisível), ou atividades epistemologicamente ricas, que destacam a Matemática como ciência. Em ambos os casos, o papel da Matemática e suas relações com o mundo real devem ser evidenciados.

4) Justificativa psicológica: exemplos do mundo real podem contribuir para aumentar o interesse dos alunos em Matemática, para motivar ou estruturar o conteúdo matemático, para melhor compreendê-lo e mantê-lo por mais tempo. Aqui, as atividades de modelagem devem ser interessantes, motivadoras ou ilustrativas, para tornar a Matemática mas atrativa para os estudantes. As atividades podem também ser matematicamente ricas, que cumpram o objetivo de tornar melhor compreensíveis certos tópicos matemáticos.

A modelagem pode contribuir também para aprimorar o ensino e a aprendizagem matemática, bem como para provocar uma reação e interação entre corpo docente e discente envolvidos na construção do conhecimento (BIEMBENGUT, 2009). Esta autora aponta que há vantagens em inserir a Modelagem Matemática no ensino, e um dos argumentos está relacionado ao desempenho cognitivo dos alunos. Utilizando autores como Engel e Vogel (2007) e Blum et al. (1991), pondera que modelos podem servir como mediadores entre o fenômeno e as atividades mentais do problema a ser resolvido e que "a construção de modelos mentais[10] significa a consciência e a possibilidade interada na passagem através do ciclo da modelagem" (p. 22). Nesse sentido, o processo cognitivo consiste na variação das observações e das medidas, na formulação de hipóteses verificáveis, isto é, em distinguir os elementos essenciais da situação observada.

---

[10] Diversos autores tratam sobre modelos mentais (GENTNER; GENTNER, 1983; WILLIANS; HOLLANS; STEVENS, 1983; GUTIERREZ; OGBORN, 1992; VOSNIADOU, 1994; HARRISON, TREAGUST, 1996; GRECA; MOREIRA, 1996; HALLOUN, 1996), mas uma compreensão que se coaduna ao desenvolvimento desta pesquisa é a sugerida por Johson-Laird (1983), explicada por Moreira (2006, p. 14): "modelos mentais são uma forma de representação analógica do conhecimento: existe uma correspondência direta entre entidades e relações presentes na estrutura dessa representação e as entidades e relações que se busca representar".

Ainda para Biembengut (2009), se a modelagem torna-se parte da Matemática, em situações que o aluno tem interesse, pode se tornar possível aumentar a sua compreensão sobre o uso de dados, “estimular o uso de sua autoridade matemática, desenvolver a compreensão de fórmulas algébricas e a habilidade de crítica e defesa dos modelos matemáticos criados ou na geração de modelos matemáticos traduzidos em situações da vida real” (p. 22).

Considerando a sua finalidade, Kaiser e Sriraman (2006) distinguem seis perspectivas para a modelagem: *realística*, *educacional*, *sócio-crítica*, *epistemológica*, *pedagógica* e *conceitual*. Estas perspectivas contribuem para o significado subjetivo de uma atividade de modelagem para o estudante, de modo que ele possa entender o propósito da atividade. Blum (2015) aproxima estas perspectivas das quatro justificativas listadas acima (BLUM, 2011), criando o que ele chama de *abordagens* para a Modelagem Matemática no ensino. Apresentamos esta aproximação no Quadro 1, que contém a abordagem nomeada por Blum (2015), exemplos dos tipos de atividades para cada uma, a perspectiva (KAISER; SRIRAMAN, 2006) equivalente e os objetivos que se pretende com cada abordagem.

Quadro 1 – Abordagens, perspectivas e objetivos para a Modelagem Matemática

Abordagem (BLUM, 2015)	**Exemplo de atividade de modelagem**	**Perspectiva** (KAISER; SRIRAMAN, 2006)	**Objetivo** (BLUM, 2015; KAISER; SRIRAMAN, 2006)
Pragmática	Autêntica	Realística	Compreensão e domínio de situações do mundo real
Formativa	Cognitivamente rica	Educacional	Percepção do próprio desevolvimento da competência
Cultural-emancipatória	Autêntica	Sócio-crítica	Compreensão do papel da matemática
Cultural-matemática	Epistemologicamente rica	Epistemológica	Compreensão da Matemática como Ciência
Psicológica	Motivacional	Pedagógica	Desenvolver gosto pela matemática
Psicológica	Matematicamente rica	Conceitual	Compreensão dos conceitos matemáticos

Fonte: Elaborado pela autora.

Este quadro (Quadro 1) exemplifica parte dos desdobramentos das pesquisas sobre Modelagem Matemática: de maneira simplificada e condensada ele procura mostrar como abordar a modelagem em sala de aula, de acordo com os objetivos que se quer alcançar, bem como o que já se tem relatado na literatura.

Outro argumento favorável à utilização da modelagem nas aulas de Matemática é que vários estudos de caso mostraram que a Modelagem Matemática pode ser aprendida pelos estudantes (KAISER-MESSMER, 1987; GALBRAITH; CLATWORTHY, 1990; ABRANTES, 1993; MAAS, 2007; BICCARD; WESSELS, 2011; BLUM; LEISS, 2007; SCHUKAJLOW et al., 2012). Alguns destes estudos mostraram que as opiniões dos alunos sobre Matemática podem ser alteradas positivamente diante de um ensino adequado e de qualidade, via Modelagem Matemática.

Semelhantemente, Klüber e Burak (2005) identificaram, em alguns resultados de pesquisas, outras potencialidades da Modelagem Matemática, além das que já mencionamos nesta seção. São elas: a *construção e o desenvolvimento de conceitos e dos conteúdos matemáticos*, a *contextualização*, a *interdisciplinaridade*, a *socialização* e a *ruptura com o currículo linear*. Segundo estes autores, quando aluno e professor são considerados sujeitos ativos no ensino e aprendizagem, valorizando os conhecimentos prévios dos alunos e o meio social, a modelagem pode facilitar a construção do conhecimento. Isto porque, na compreensão de modelagem dos autores, os conceitos surgem à medida que se faz necessária a sua explicitação. Em decorrência disso, justifica-se também a ruptura com a linearidade do currículo. Além disso, ao evitar a excessiva especialização, valorizando o contexto, o aluno se torna mais apto a resolver um problema adequadamente e a utilizá-lo em situações novas.

A interdisciplinaridade, considerando ainda os resultados de Klüber e Burak (2005), aparece em atividades de modelagem pela integração com outras áreas do conhecimento, diferente de uma simples aplicação de conceitos de uma área para outra. Já a socialização é favorecida pelo trabalho em grupo quando os alunos se relacionam e interagem com seus pares.

Schukajlow et al. (2012) discutem o papel da Modelagem Matemática nas aulas de Matemática, argumentando sobre o seu potencial para intensificar o processo de aprendizagem e a motivação e interesse dos alunos. Esta argumentação se pauta sobre a importância atribuida pelos alunos às atividades de modelagem que abordam temas ou problemas de seus interesses, diferentemente do que ocorre quando tratam de problemas intramatemáticos. Este autores desevolveram um estudo que pretendeu investigar como os alunos e professores lidam com as demandas cognitivas em atividades de modelagem. Alguns resultados apontaram positivamente para o desempenho e o uso de estratégias de aprendizagem pelos alunos.

Leiss et al. (2010) mostram que há uma conexão entre as competências de leitura e resolução de problemas intramatemáticos ao longo do desenvolvimento de uma atividade de modelagem: elas são fundamentais para o desempenho dos alunos em modelagem, pela sua importância para construir um modelo de uma situação.

Nesta pesquisa, acreditamos que, ao abordar temas de interesse dos alunos, que de acordo com suas experiências elaboram situações-problema que desejam resolver, aproximamos seu cotidiano da Matemática. Em outras palavras, os alunos passam a ter oportunidade de compreender situações utilizando Matemática. Nesse sentido, considerar as experiências dos alunos e seus interesses são aspectos tanto motivacionais da aprendizagem quanto cognitivos. Este e outros aspectos assumidos neste trabalho são explicitados no Capítulo seguinte.

3 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

David Paul Ausubel, como um representante do cognitivismo, propõe uma explicação teórica para o processo de aprendizagem, conforme o ponto de vista cognitivista. Para ele, aprendizagem significa organização e integração do material à estrutura cognitiva. Baseia-se na premissa de que existe uma estrutura em que essa organização e integração são processadas - a estrutura cognitiva, entendida como o conteúdo total de ideias de um indivíduo e sua organização. É o complexo resultante dos processos cognitivos, ou seja, dos processos por meio dos quais se adquire e utiliza o conhecimento.

A atenção de Ausubel se volta para a aprendizagem em sala de aula. Para ele, o fator que mais influencia a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe. Cabe ao professor identificar isso e ensinar de acordo.

3.1 Apresentação da Teoria, Aspectos Gerais e Tipos de Aprendizagem

Aprender para Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980; AUSUBEL, 2003) é adquirir, reter e utilizar informações significativas (fatos, proposições, princípios e vocabulário). Para ele, um aluno aprende significativamente quando adquire significado.

Essencialmente, a Aprendizagem Significativa pode ser compreendida como um processo, com três componentes principais: 1) novas ideias[11], 2) o que o aprendiz já sabe e 3) o novo significado; com relações especiais entre si. As novas ideias, ou o material instrucional – aquilo que se deseja que o aluno aprenda – é apresentado ao estudante, que deve relacioná-lo àquilo que já sabe – aos conhecimentos já existentes em sua estrutura cognitiva. O resultado desta relação é o novo significado, produzido pela interação e modificação do novo conhecimento com os conhecimentos pré-existentes.

[11] Embora Ausubel e seus colaboradores utilizem o termo “material instrucional”, utilizamos neste trabalho o termo “novas ideias”, com a intenção de expressar o conteúdo do material instrucional que é apresentado ao aluno. No entanto, este termo não é uma introdução nossa, já que aparece algumas vezes em textos sobre Aprendizagem Significativa (por exemplo, MOREIRA, 2006). Valadares (2011) utiliza também o termo “novas informações” neste mesmo sentido.

No entanto, há restrições a essas três componentes para que este processo seja chamado de Aprendizagem Significativa:

1) Novas ideias (material instrucional): devem ser *potencialmente significativas* (ter *significado lógico)* e ser *relacionáveis*. Um material instrucional potencialmente significativo possui *significado lógico* “se corresponder às exigências gerais ou não idiossincráticas para uma potencial significação” (AUSUBEL, 2003, p. 93), ou seja, depende apenas da natureza do material, independentemente das relações para com a estrutura cognitiva do aprendiz. Um material apresenta significado lógico caso possa se *relacionar*, *não-arbitrária* e *não-literalmente*, com ideias relevantes presentes na estrutura cognitiva de um indivíduo.

A capacidade de relação não-arbitrária pressupõe que se o material for suficientemente não arbitrário há uma base adequada para relacionar de forma não-arbitrária as novas ideias aos conceitos já existentes. A não-literalidade indica a independência do uso exclusivo de palavras particulares. Por exemplo, a expressão “a soma de todos os ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso” teria, essencialmente, o mesmo significado para a maioria dos estudantes de Geometria que “a soma de todos os ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus”.

2) O que o aprendiz já sabe: Trata-se de conteúdo especificamente relevante, a que Ausubel chama de subsunçores. Pode-se entender como a estrutura cognitiva do aprendiz numa determinada área. Podem ser conceitos, imagens, símbolos e proposições.

3) Novo significado: Resultado da interação entre os dois elementos anteriores, ou seja, não basta apresentar ao aluno novas ideias e que ele tenha em sua estrutura cognitiva conhecimentos prévios relevantes. O estudante só aprende significativamente se o material instrucional, que deve ser potencialmente significativo, relacionar-se de maneira não-arbitrária e não-literal a sua estrutura cognitiva. Nesta relação, Ausubel propõe, ainda, mais uma condição: que o aluno esteja disposto a fazer esta relação. Assim, pode-se dizer que a Aprendizagem Significativa depende destes três fatores e da relação entre eles, resultando no que Ausubel chama de significado *verdadeiro*, *idiossincrático*, *psicológico* ou *fenomenológico*, senão temos o que ele chama de *significação potencial*.

Por outro lado, quando se apresenta ao aluno um material instrucional e ele o relaciona a sua estrutura cognitiva de forma arbitrária e literal, tem-se o que

Ausubel chama de aprendizagem por memorização (mecânica), pois não resulta na aquisição de novos significados. Conforme Moreira e Masini (1982), neste tipo de aprendizagem há “aquisição de informações com pouca ou nenhuma intersecção com conceitos ou proposições relevantes existentes na estrutura cognitiva”. O conhecimento é armazenado de forma arbitrária, não estabelecendo relações com conceitos prévios. Este tipo de aprendizagem ocorre quando o indivíduo memoriza a informação para um determinado propósito, e esta é perdida assim que esse propósito se cumpre.

Conforme as definições de aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica, pode-se pensar que são dois tipos de aprendizagem opostas, ou seja, que ou ocorre uma ou outra. No entanto, Ausubel (2003) não as considera como sendo uma dicotomia, mas as vê como sendo dois extremos de um *continuum*. A Tabela 1, a seguir, mostra as relações entre aprendizagem significativa, significação potencial, significação lógica e significado psicológico.

Tabela 1 – Relações entre aprendizagem significativa, significação potencial, significação lógica e significado psicológico

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA ou AQUISIÇÃO DE SIGNIFICADO	exige	Material potencialmente significativo	e	Mecanismo de aprendizagem significativa
SIGNIFICAÇÃO POTENCIAL	depende de	Significação lógica	e	Disponibilidade de subsunçores
SIGNIFICADO PSICOLÓGICO	é o produto de	Aprendizagem Significativa	ou de	Significação potencial e mecanismo de aprendizagem significativa

Fonte: Adaptado de Ausubel (2003, p. 73).

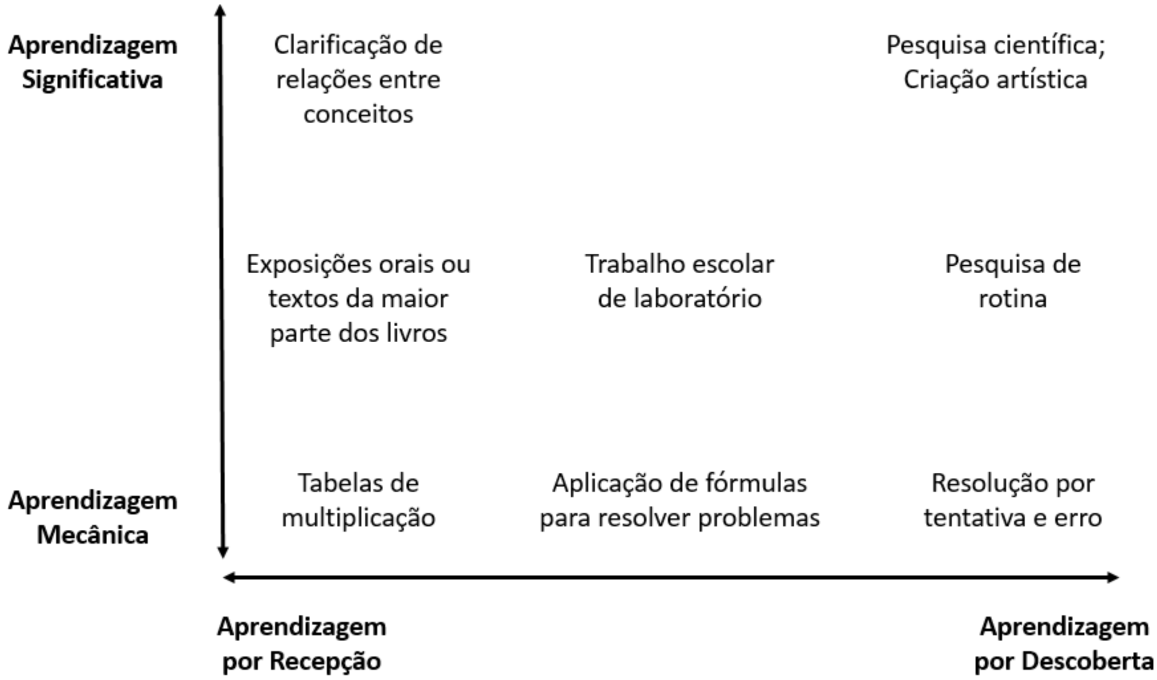
Ausubel (2003) distingue ainda dois outros tipos de aprendizagem:

- Aprendizagem por *recepção*: na qual o conteúdo a ser aprendido é apresentado de uma forma mais ou menos final. É um processo automático mas que também deve revestir-se de caráter significativo. De forma simplificada, podemos entender a aprendizagem por recepção como uma compreensão de ideias apresentadas.

- Aprendizagem por *descoberta*: o conteúdo principal do que vai ser aprendido não é dado, mas deve ser descoberto pelo aluno antes que possa ser incorporado à sua estrutura cognitiva. É o tipo de aprendizagem própria das fases iniciais de desenvolvimento cognitivo e dos problemas do cotidiano.

É importante destacar aqui que não há relação entre aprendizagem significativa-aprendizagem mecânica e aprendizagem por recepção-descoberta. Em outras palavras, a aprendizagem por descoberta, por exemplo, não favorece mais (ou menos) a aprendizagem significativa. Isto fica claro quando entendemos este fato pela

Figura 3 – As duas dimensões da aprendizagem



Fonte: Adaptado de Valadares (2011).

representação de dois “contínuos” diferentes (Figura 4).

A Figura 3 indica que aprendizagens “altamente significativas” e por descoberta são as “formas mais originais e criativas de produção de novos significados”, como a produção do conhecimento científico e as criações artísticas, por exemplo (VALADARES, 2011, p. 39).

A aprendizagem significativa recebe, também, três classificações (AUSUBEL, 2003):

- Aprendizagem *representacional*: o tipo mais básico de aprendizagem significativa, do qual os outros dois tipos dependem. É a aprendizagem de símbolos individuais (palavras, mais comumente) ou do que eles representam. Ocorre ao se estabelecer uma equivalência entre os símbolos e os seus referentes correspondentes (objetos, exemplos, conceitos). Considera-se um tipo de aprendizagem significativa à medida que as proposições podem ser relacionadas a generalizações. Aparece nos primeiros anos de vida na estrutura cognitiva do indivíduo: tudo tem um nome e o nome significa aquilo que o seu referente significa para uma determinada pessoa.

- Aprendizagem *de conceitos*: é um caso especial da aprendizagem representacional. Isto porque os conceitos ou as ideias gerais também podem ser representados por símbolos individuais e arbitrários. Trata-se de aprender que um conceito é representado por uma palavra específica, ou que existe uma equivalência entre a palavra que representa o conceito e o próprio conceito.

- Aprendizagem *proposicional*: consiste em aprender os significados das ideias expressas por grupos de palavras (geralmente representando conceitos) combinadas em proposições ou sentenças. Ou seja, é aprender o significado além da união dos significados das palavras que compõem a proposição.

Nesse sentido, tanto a aprendizagem proposicional quanto a aprendizagem de conceitos têm a mesma base e dependem da aprendizagem representacional. A aprendizagem proposicional pode, ainda, ser *subordinada*, *superordenada* ou *combinatória*.

A aprendizagem significativa subordinada é a mais comum e ocorre quando novos conceitos se relacionam com uma ideia específica relevante, mais abstrata, geral e inclusiva com as ideias existentes na estrutura cognitiva. Quando o novo material é ilustrativo de algum conceito preexistente, com estabilidade e inclusividade, a aprendizagem subordinada é chamada de *derivativa*. Se o material a ser aprendido é uma extensão, elaboração, modificação ou qualificação de conceitos previamente adquiridos, a aprendizagem subordinada é dita *correlativa*.

Quando conceitos mais abrangentes são relacionados, passando a subordinar conceitos já estabelecidos na estrutura cognitiva, diz-se que ocorreu uma aprendizagem *superordenada*. É um tipo de aprendizagem menos comum, mas importante para unificação e reconciliação integrativa de proposições não relacionadas ou conflituosas (MOREIRA, 1997). Moreira e Masini (1982) exemplificam:

> À medida que uma criança desenvolve os conceitos de cão, gato, leão etc, ela pode, mais tarde, aprender que todos esses são subordinados ao de mamífero. À medida que o conceito de mamífero é desenvolvido, os previamente aprendidos assumem a condição de subordinados e o de mamífero representa uma aprendizagem superordenada (p. 14).

Outro caso de aprendizagem de conceitos é a aprendizagem significativa *combinatória*, que se refere à aprendizagem do significado de um novo conceito que não é subordinado, nem superordenado, em relação a conceitos específicos que podem se relacionar com antecedentes de um conteúdo relevante. Por exemplo, generalizações inclusivas e amplas, como as relações entre massa e energia, calor e volume, estrutura genética e variabilidade, oferta e procura, requerem este tipo de aprendizagem.

3.1.1 Facilitação da Aprendizagem Significativa

Depois de considerar as condições necessárias para que a aprendizagem significativa ocorra, é importante mencionar que existem ações pelas quais esta aprendizagem pode ser facilitada. Ausubel (2003) propôs quatro princípios que podem proporcionar uma maior facilidade da aprendizagem significativa: *diferenciação progressiva*, *reconciliação integrativa*, *organização sequencial* e *consolidação*.

Conforme suas suposições: i) é mais fácil aprender aspectos diferenciados de um todo mais inclusivo já aprendido do que chegar ao todo a partir das suas componentes diferenciadas aprendidas; e ii) a organização de um conteúdo, na estrutura cognitiva, consiste numa organização hierárquica na qual as ideias mais inclusivas estão no ápice e incluem as proposições, conceitos e fatos, progressivamente menos inclusivos e mais diferenciados; (AUSUBEL, 1976; GUTIERREZ, 1987), Ausubel enuncia o *princípio da diferenciação progressiva*. Este princípio é parte do processo de aprendizagem significativa resultante da elaboração hierárquica de proposições e conceitos na estrutura de conhecimento do aluno. Consiste em organizar o material de aprendizagem de forma que as ideias mais gerais e inclusivas sejam apresentadas no início do processo de ensino e aprendizagem e, progressivamente, diferenciadas em detalhes e especificidades.

Entretanto, a organização do conteúdo deve, além de proporcionar a diferenciação progressiva, explorar as relações entre as proposições e conceitos, destacar as diferenças e as similaridades relevantes e reconciliar inconsistências reais ou aparentes. Assim, atinge-se o princípio que Ausubel chama de *reconciliação integrativa.*

A *reconciliação integrativa* dos conceitos ocorre quando as ideias parecem relacionáveis de um determinado modo, possibilitando descrever uma nova realidade. Semelhante ao princípio da diferenciação progressiva, na reconciliação integrativa a organização do material de aprendizagem também deve explorar relações entre ideias, apontar similaridades e diferenças relevantes, reconciliando discrepâncias reais ou aparentes.

O princípio da *organização sequencial dos conteúdos programáticos* consiste em sequenciar os tópicos de estudo da forma mais coerente possível, atendendo aos princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa.

O princípio da *consolidação* corrobora com a afirmação de Ausubel de que o fator isolado mais importante e determinante da aprendizagem é o que o aluno já sabe. Este princípio prevê que a matéria de ensino deve ser contínua, assegurando uma probabilidade de êxito na aprendizagem organizada sequencialmente.

A partir destes quatro princípios, percebe-se que o desenvolvimento cognitivo é um processo dinâmico em que os novos conhecimentos interagem constantemente com os já existentes. Assim, a estrutura cognitiva pode ser progressivamente diferenciada e tende a organizar hierarquicamente os conceitos, partindo dos mais gerais para os menos inclusivos.

Nesse contexto, Moreira (1989) infere que o papel do professor na facilitação da aprendizagem significativa envolve quatro tarefas:

1) Identificar a estrutura conceitual da matéria de ensino, isto é, identificar os conceitos e os princípios unificadores, inclusivos, com maior poder explanatório e propriedades integradoras, e organizá-los hierarquicamente de modo a abranger os menos inclusivos, até chegar aos exemplos e dados específicos.

2) Identificar quais os subsunçores relevantes para a aprendizagem do conteúdo a ser ensinado, os quais o aluno deve ter em sua estrutura cognitiva para poder aprender significativamente.

3) Diagnosticar aquilo que o aluno já sabe e determinar entre os subsunçores relevantes quais estão disponíveis na estrutura cognitiva do aluno.

4) Ensinar utilizando princípios que possam facilitar a aquisição da estrutura conceitual da matéria de ensino significativamente. O professor deve auxiliar o aluno a assimilar a estrutura da matéria de ensino e organizar sua estrutura cognitiva, por meio da aquisição de significados claros, estáveis e transferíveis.

3.2 Uma Discussão sobre Significado

Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 526) definem significado como

> Conteúdo da consciência diferenciado e agudamente articulado que se desenvolve como um produto da aprendizagem simbólica e significativa ou que pode ser evocado por um símbolo ou grupo de símbolos depois que estes foram relacionados não arbitrariamente e substantivamente à estrutura cognitiva.

Este significado, sinônimo, neste contexto, de significado psicológico: “conteúdo cognitivo idiossincrático diferenciado evocado por um dado símbolo ou grupo de símbolos num determinado aprendiz [...], um produto da aprendizagem significativa” (p. 526) reflete as qualidades únicas da estrutura de conhecimentos do aprendiz e pode, ainda, receber duas classificações: um significado pode ser *conotativo* ou *denotativo*.

No início da aprendizagem de vocabulário, as palavras tendem a representar objetos e casos particulares, por isso tendem a ser igualadas às imagens que estes referentes significam. Assim, a primeira forma de aprendizagem de palavras nas crianças envolve o estabelecimento de equivalências entre símbolos e imagens (aprendizagem representacional). Na medida em que as crianças crescem e as palavras passam a representar conceitos ou ideias mais gerais (aprendizagem conceitual), as palavras equacionam-se a um conteúdo cognitivo mais abstrato e generalizado.

Por exemplo, para uma criança a palavra cachorro pode significar uma imagem cognitiva de um animal de estimação ou dos cachorros das redondezas. No entanto, para uma criança mais velha, a palavra cachorro se refere aos atributos da imagem de um cão, o que descobriu, de forma indutiva, a partir das próprias experiências concretas com cães.

Relacionado ao significado *denotativo* de cachorro, que surge quando se apreendem, de forma significativa, os atributos de critérios deste conceito, estão as relações idiossincráticas afetivas e de atitude que o termo evoca em cada criança, dependendo das experiências particulares com a espécie.

A partir deste exemplo, distinguimos significado conotativo – “reações atitudinais idiossincráticas e afetivas eliciadas pelo nome de um conceito” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 596) – e significado denotativo – “atributos criteriais distintivos evocados pelo nome de um conceito distinto das reações atitudinais ou afetivas correlacionadas que elicia” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 596). Assim, entendemos que os conhecimentos têm dois tipos de significados: os denotativos, que são compartilhados, aceitos contextualmente, e os conotativos, que são idiossincráticos, pessoais.

Nesse sentido, captar e compartilhar significados refere-se aos significados denotativos, porém ao aprender significativamente o indivíduo também adquire significados pessoais. Por conseguinte, captar os significados aceitos no contexto de uma disciplina também envolve distinguir significados denotativos e conotativos.

Ogden e Richards (1976) desenvolveram o estudo dos sinais no campo da linguística, elaborando uma Ciência do Simbolismo. Utilizaram não somente uma abordagem filosófica, mas trataram de problemas como de Gramática, de Psicologia e do Significado. Discutem o significado sob uma ótica diferente da de Ausubel, e permitem complementar o entendimento sobre o significado, inclusive sobre denotação e conotação, como expomos mais adiante.

Para estes autores, a linguagem está enraizada na cultura e nos costumes de uma comunidade, e não pode ser compreendida/explicada sem referência a estes contextos, ou seja, o significado de uma palavra isolada depende da situação e do contexto. É o que os autores chamam de *situação significante*. Para eles, é errado considerar o significado uma “entidade real”, contida numa palavra ou frase. A compreensão da relação entre a interpretação linguística e a análise da cultura a que a língua pertence mostra que o significado não tem uma existência auto-suficiente e independente.

A argumentação acima pode ser bem ilustrada quando se considera compreender uma língua estrangeira, ou uma linguagem primitiva. Uma locução só é compreensiva quando a interpretamos como uma situação significante. As palavras de uma narrativa são significativas por causa das experiências prévias dos ouvintes, ou seja, estão associadas a uma situação a que se refere, ou, nas palavras de Ogden e Richars (1976, p. 310), “a função referencial de uma narrativa está subordinada à sua função social e emotiva"; só podem ser entendidas pela função da fala direta em ação.

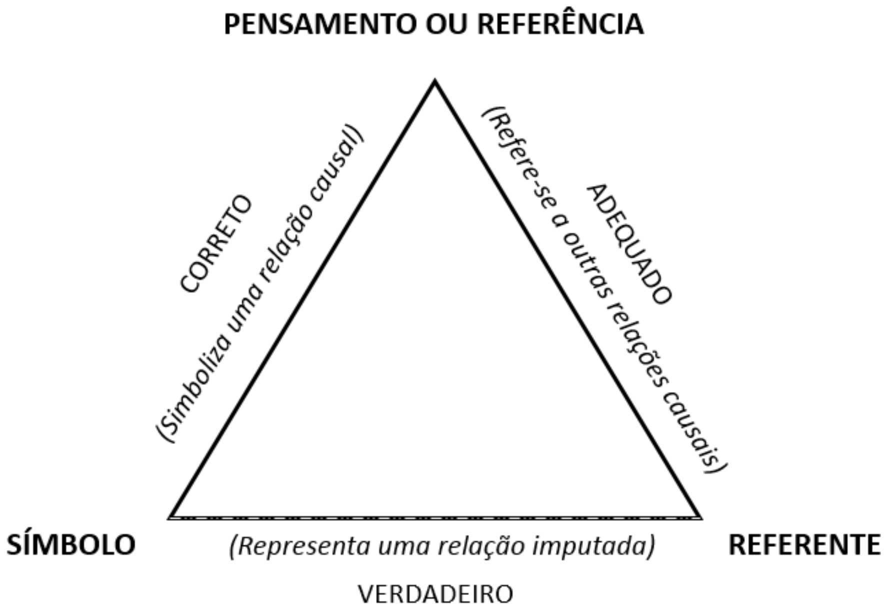
Ao discutir o *significado de significado*, Ogden e Richards (1976) apresentam uma lista das principais definições que alguns estudiosos deram para o significado. Nesta lista, encontra-se que o significado pode ser a “conotação de uma palavra” (p. 194). Explicam:

> Um símbolo significa o conjunto de coisas a que ele pode ser corretamente aplicado; e diz-se que os membros desse conjunto são denotados ou indicados pela palavra – ou que são a sua denotação. Um símbolo significa as propriedades em virtude das quais qualquer coisa é um membro do conjunto que é a denotação; diz-se que as propriedades são a conotação de um símbolo ou, por vezes, simplesmente, o seu significado (p. 194).

A relação entre denotação e conotação pode se resumir a sua compreensão, ou seja, as propriedades comuns às coisas a que pode se aplicar. Entretanto, o termo conotação é mais usado com o mesmo sentido de compreensão.

Denotar e conotar não podem ser usados como no caso de uma relação simples: nenhuma palavra possui qualquer denotação além da referência que ela simboliza. As relações entre uma palavra e as coisas que ela representa são indiretas e causais, conforme a Figura 4.

Figura 4 - Relações entre referência, símbolo e referente



Fonte: Ogden e Richards (1972, p. 32).

Neste diagrama, os três fatores envolvidos estão nos vértices do triângulo, e as relações entre eles são representadas pelos lados. A base do triângulo é diferente em sua composição dos outros dois lados: entre símbolo e referente não há uma relação direta.

Entre um pensamento e um símbolo são mantidas relações causais. Quando falamos, o simbolismo que empregamos é causado pela referência que estamos fazendo e pelos fatores sociais e psicológicos (a finalidade da referência que fazemos, o efeito dos símbolos sobre outras pessoas e nossa própria atitude). Quando ouvimos algo, os símbolos nos fazem desempenhar um ato de referência e assumir uma atitude que pode se assemelhar ao ato e à atitude de quem falou.

Entre o pensamento e o referente há também uma relação, direta ou indireta, em que pode haver uma longa cadeia de situações significantes intervindo entre o ato e o seu referente.

Voltando a tratar sobre denotação e conotação, Ogden e Richards (1972) afirmam que usar denotação como o nome de uma relação lógica é inapropriado, e que a conotação é uma seleção de propriedades ou adjetivos. Assim, a conotação de uma palavra é um conjunto de entidades nominais: “um conhecimento do uso da língua é suficiente, só por si, para saber o que uma frase significa” (p. 174). Em outras palavras, a conotação de uma palavra seria indistinguível do seu significado, no sentido da definiçao dada a uma palavra no dicionário.

A referência que uma palavra emprega (símbolo) determina os seus referentes (denotação) que, por sua vez, determinam quais as diferentes referências que lhes podem ser feitas. Portanto, a conotação de uma referência (e as palavras que o simbolizam) são aquelas características do seu referente em virtude dos quais isso é o que está sendo referido.

Os nomes próprios não são conotativos. Isso não equivale a dizer que o nome próprio não tem significado; pelo contrário, verificamos que o nome próprio não significa o mesmo que qualquer coisa que pudesse ser significada por uma frase descritiva ou conotativa; e, que significa precisamente o que poderia ser indicado por alguma frase descritiva apropriada.

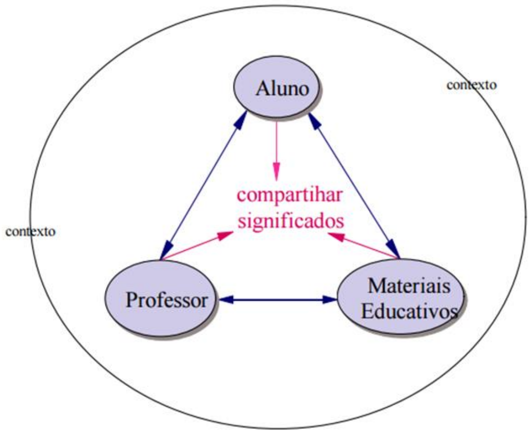
Esta explanação, considerando aspectos psicológicos e filosóficos do significado, nos leva a compreender mais claramente uma definição para o significado. Entendemos que o significado é o produto final da aprendizagem significativa: um conteúdo diferenciado e articulado que pode ser evocado por um símbolo. Quando trata de algo que já foi compreendido por um indivíduo, idiossincrática e pessoalmente, denomina-se significado conotativo. Quando é um conteúdo aceito em determinado contexto, o que a referência simboliza, e que ainda se encontra no nível de captação e compartilhamento, denomina-se significado denotativo. De acordo com esse entendimento, um significado atinge o nível de conotação depois de ter passado pela denotação. No entanto, conforme Ausubel (2003, p. 78)

> A natureza idiossincrática do significado psicológico não exclui a possibilidade de significados sociais ou partilhados. Isto permite comunicação e compreensão interpessoal. A homogeneidade de partilha de significados numa cultura particular reflete aspectos comuns do ideário nas estruturas cognitivas de diferentes aprendizes.

Daí a importância de compartilhar significados. Para Novak e Gowin (1984), quando há o compartilhar de significados entre professor e aluno, concretiza-se um episódio de ensino. Nessa perspectiva, estes dois sujeitos buscam congruência de significados: o professor atua com a intenção de mudar os significados da experiência do aluno que, por sua vez, caso manifeste disposição para aprender significativamente, capta o significado dos materiais educativos. O objetivo é compartilhar significados. Neste processo, o professor apresenta ao aluno os significados já compartilhados pela comunidade a respeito dos materiais educativos e o aluno deve devolver ao professor os significados que captou. Caso o compartilhar significados não seja alcançado, o professor deve apresentar novamente, porém de outro modo, os significados aceitos no contexto da matéria de ensino. Este processo é chamado de negociação de significados, e é bem representado pelo modelo de ensino de Gowin. Este autor entende o processo de ensino e aprendizagem como uma relação triádica, que ocorre dentro de um contexto, como sugere a Figura 5.

Neste modelo de ensino, o aluno deve externalizar novamente os significados que captou. O processo pode ser mais ou menos longo, mas o objetivo é sempre o de compartilhar significados. Assim, professor e aluno têm responsabilidades diferentes neste processo: o professor deve verificar se os significados que o aluno capta são aqueles compartilhados pela comunidade de usuários, e o aluno deve verificar se os significados que captou são aqueles que o professor pretendia que ele captasse, ou seja, os significados compartilhados no contexto da matéria de ensino. Se for alcançado o compartilhar significados, o aluno está pronto para decidir se quer aprender significativamente ou não.

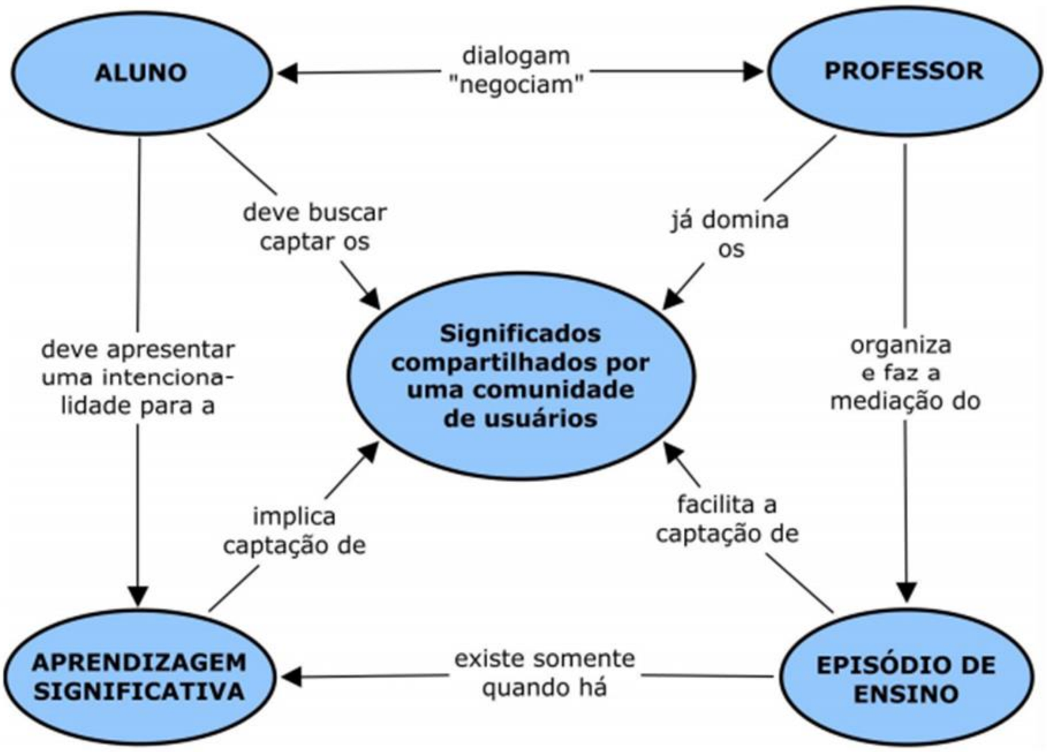
Figura 5 – Modelo de ensino de Gowin



Fonte: Novak e Gowin (1984).

Moreira (2008) propõe uma adaptação ao modelo de ensino de Gowin, em que procura explicitar melhor as relações entre professor, aluno, episódio de ensino e aprendizagem significativa quando se compartilham significados (Figura 6).

Figura 6 – Um esquema para a captação de significados em um episódio de ensino

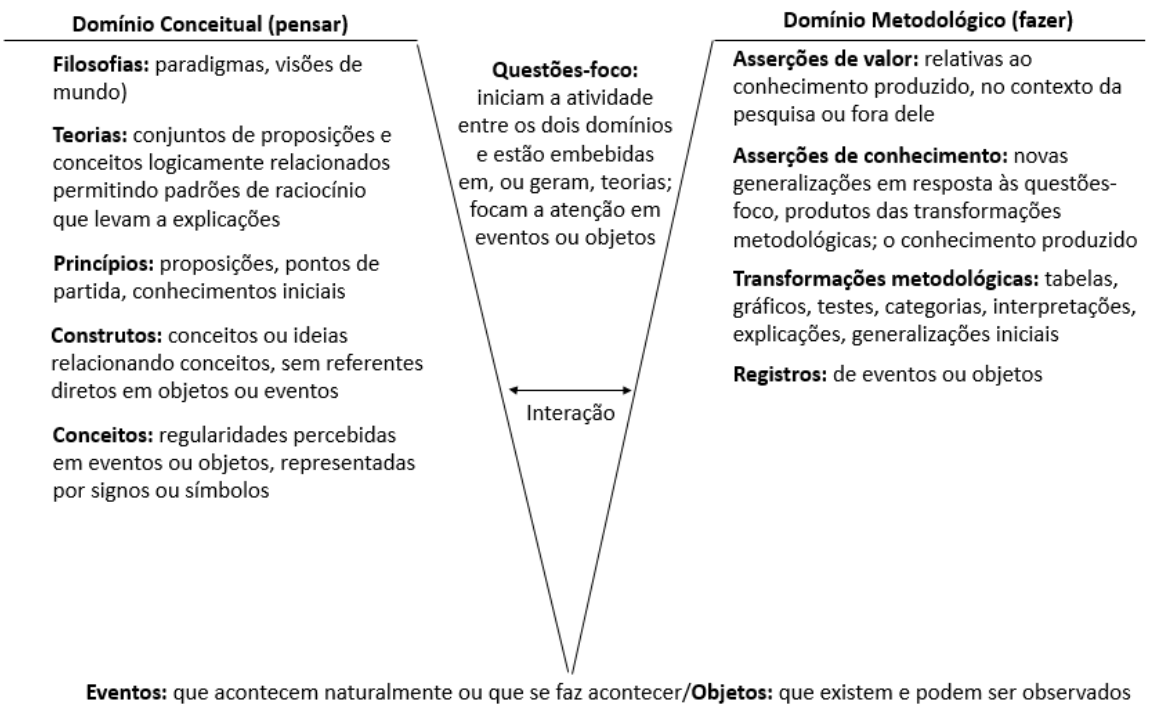


A captação e o compartilhar de significados no modelo de Gowin se referem aos significados denotativos, mas é preciso considerar que na aprendizagem significativa o indivíduo atribui também significados pessoais. Assim, a consequência da captação de significados aceitos no contexto da matéria de ensino envolve discriminar significados denotativos e conotativos, não só entre aceitos no contexto e no cotidiano.

3.3 O Vê Epistemológico de Gowin como um instrumento de organização do conhecimento

De início, o vê epistemológico foi desenvolvido para ajudar os estudantes e os professores a clarificar a natureza e os objetivos do trabalho experimental em ciências, para compreender a estrutura do conhecimento e as formas como os humanos produzem esse conhecimento.

Figura 7 – Domínios do Vê Epistemológico



Fonte: Moreira (2014).

Para Gowin (1981), a investigação científica é uma maneira de gerar estruturas de significados, ou seja, de conectar conceitos, eventos e fatos. Ele define conceitos como signos/símbolos que apontam regularidades em eventos e que utilizamos para pensar, pesquisar, aprender. Assim, o processo de pesquisa para Gowin tem a ver com a conexão entre eventos, fatos e conceitos. Esta conexão pode ser vista na forma de um vê ligando eventos a conceitos e fatos. O lado esquerdo se refere a conceitos e sistemas conceituais: ali se encontram os conceitos usados na pesquisa, que geram princípios e leis, que geram teorias. Seguem-se também sistemas de valores, visões de mundo ou filosofias. Este lado do vê corresponde ao "pensar" da pesquisa.

Na base do vê estão os eventos que acontecem naturalmente, ou que o pesquisador faz acontecer a fim de fazer registros pelos quais os fenômenos de interesse possam ser estudados.

O lado direito do vê tem a ver com fatos nos três sentidos propostos por Gowin: eventos, registros e asserções. A este lado Gowin chama de "domínio metodológico", pois nele se encontra a metodologia da produção de conhecimento. A partir dos registros dos eventos, chega-se a dados, os quais sofrem transformações metodológicas que servem de base para a formulação de asserções de conhecimento e asserções de valor. Esse lado do vê corresponde ao "fazer" da pesquisa. Tudo que é feito no lado metodológico do vê é guiado por conceitos, princípios, teorias e filosofias, ou seja, pelo domínio conceitual.

Existe uma constante interação entre os dois lados do vê. Essa interação é necessária para que se chegue a respostas às questões formuladas sobre os eventos.

A questão-chave está no centro do vê porque pertence tanto ao domínio metodológico como ao conceitual. É a questão que identifica o fenômeno de interesse de tal forma que é provável que alguma coisa seja descoberta, medida ou determinada ao responder essa questão. É a pergunta que informa sobre o ponto central de um trabalho de pesquisa; diz o que foi investigado.

Gowin, originalmente, propôs esse vê como instrumento heurístico para a análise da estrutura do processo de produção do conhecimento. A Figura 7 acima representa um vê epistemológico, destacando as componentes dos lados direito e esquerdo, a questão central e os acontecimentos, bem como explicita o que compõe cada um dos elementos dos domínios.

As asserções de conhecimento têm a ver com respostas a questões investigadas, enquanto as asserções de valor são declarações sobre o valor prático, estético, moral, social, desse conhecimento.

Antes de propor o vê, Gowin utilizava o “método das cinco questões”, que foram uma espécie de “embrião” do vê, e seguem os mesmo princípios e objetivos do vê: 1) quais as questões-foco? 2) quais os conceitos-chave? 3) quais os métodos usados para responder as questões-foco? 4) quais as asserções de conhecimento? 5) quais as asserções de valor?

Os conceitos-chave são os conceitos fundamentais do corpo de conhecimentos ou do campo de estudos no qual se insere o trabalho que está sob análise. São os conceitos envolvidos na questão-foco, na metodologia, nas asserções de conhecimento e valor, permeando todo o trabalho. Os métodos são a sequência de passos, os procedimentos, as técnicas de pesquisa, os argumentos lógicos, usados para responder às questões-foco; isto é, para chegar às asserções de conhecimento. As asserções de valor se referem à significância, utilidade, importância do conhecimento produzido. É feita alguma alegação sobre o valor de estudo? Alguma asserção sobre sua significância social? Estética? Significante para quem? Para quê? Qual o valor instrumental do conhecimento obtido?

As cinco questões de Gowin oferecem uma alternativa em relação aos instrumentos tradicionais de avaliação, e o vê é igualmente uma alternativa para avaliação.

Uma forma simples de utilizar o vê na avaliação é pedir aos alunos que apliquem o vê às afirmações feitas sobre acontecimentos ou objetos e, em seguida, que descrevam cada um dos elementos do vê, da forma como os interpretam. Isto requer que alunos vão muito além dos acontecimentos e detalhes relativamente desligados de uma experiência.

Embora não seja possível que alunos obtenham as informações necessárias para responder a todas as perguntas, a busca sistemática de respostas exige o melhor tipo de raciocínio que são capazes. Apesar de a elaboração de vês ser algo complexo, Novak e Gowin (1984) indicam que os alunos reagem a esta tarefa positivamente: quando comparado com os tradicionais trabalhos por escrito, o vê surge como uma forma de revelar a compreensão dos estudantes sobre um tema e também os ajuda a organizar as ideias e a informação.

Os estudantes reconhecem que a elaboração dos vês os ajuda a aumentar a sua compreensão do que está sendo estudado. Ao elaborar vês, eles têm sentimentos positivos quando se verifica um aumento na compreensão dos significados: ao se sentirem melhor pelo que alcançaram, os estudantes têm mais vontade de trabalhar espontaneamente e é mais provável que assumam a responsabilidade da sua própria aprendizagem.

Este tipo de diagrama ajuda os estudantes a organizarem o seu pensamento, a agirem de um modo mais eficiente e produtivo, e, principalmente, a sentirem-se melhor consigo mesmos e mais responsáveis pelo que fazem.

Sobre a apresentação do vê aos alunos, ao serem instruídos na sua elaboração, Gowin (1984) faz recomendações pouco sistemáticas. Ele sugere apenas que, antes de os alunos aprenderem a fazer vês, devem aprender a construir mapas conceituais[12]. Em seguida, deve-se explicitar o que compreende cada região do vê, tomando cuidado em explicar primeiro o lado esquerdo e depois os componentes do lado direito.

A importância de saber fazer mapas para poder construir vês epistemológicos consiste no fato de que o lado esquerdo do vê pode ser substituído por um mapa conceitual.

Gowin (1984) sugere uma "chave de pontuação" para estabelecer uma classificação para os vês: os pontos atribuídos a qualquer aspecto do vê podem variar de 0 a 3 ou 4 pontos. Apresentamos esta sugestão de pontuação para o vê na Tabela 2.

Tabela 2 – Chave de pontuação para classificação de vês epistemológicos

Pontos atribuídos	**Critérios**
Questão central	
0	Não está identificada nenhuma questão central
1	Está identificada uma questão, mas não se refere aos objetos e ao acontecimento principal ou ao lado conceitual do vê
2	Está identificada uma questão central; inclui conceitos, mas não sugere objetos ou o acontecimento principal ou estão identificados acontecimentos ou objetos errados

[12] Os mapas conceituais são diagramas que indicam a relação entre conceitos. São hierárquicos e derivam da estrutura conceitual de um conhecimento. Devem ser entendidos como diagramas bidimensionais que procuram mostrar relações hierárquicas entre conceitos de um corpo de conhecimento. Qualquer mapa conceitual deve ser visto apenas como uma das possíveis representações de uma certa estrutura conceitual. Ver Moreira (2006).

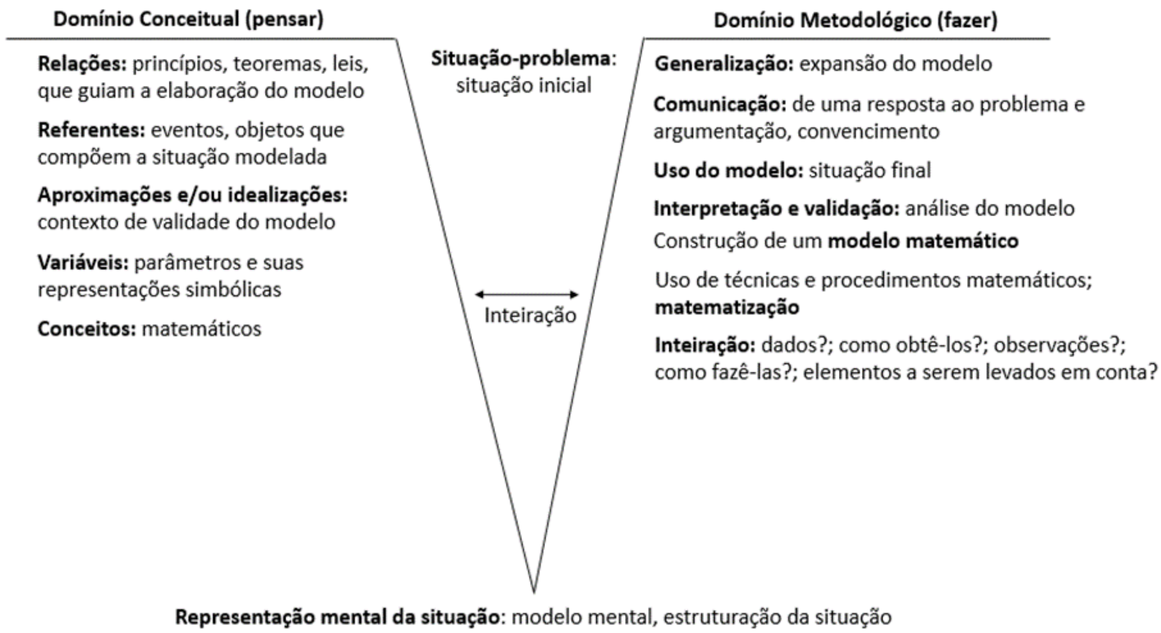
3	Está claramente identificada uma questão central, inclui conceitos a serem utilizados e sugere o acontecimento principal e os objetos correspondentes
Objetos/Acontecimentos/Evento	
0	Não se identificam acontecimentos nem objetos
1	Estão identificados o principal acontecimento ou os objetos e são consistentes com a questão central, ou estão identificados um acontecimento e objetos, mas são inconsistentes com a questão central
2	Está identificado o acontecimento principal e os objetos correspondentes, e há consistência com a questão central.
3	Sucede o mesmo que anteriormente, mas também são sugeridos os dados que se vão registar.
Teoria, princípios e conceitos	
0	Não se identifica o lado conceitual
1	Identificam-se alguns conceitos, mas sem quais quer princípios ou teorias, ou um dos princípios que se apresenta inicialmente é o juízo cognitivo que se pretende estabelecer
2	Identificam-se conceitos e, pelo menos, algum tipo de princípios (conceitual ou metodológico), ou identificam-se conceitos e a teoria relevante
3	Identificam-se conceitos e dois tipos de princípios, ou identificam-se conceitos, um tipo de princípios e uma teoria relevante.
4	Identificam-se conceitos, dois tipos de princípios e uma teoria relevante
Registros/Transformações	
0	Não se identificam quaisquer registos ou transformações
1	Identificam-se registos, mas são inconsistentes com a questão central ou com o acontecimento principal
2	Identificam-se registos ou transformações, mas não ambos
3	Identificam-se registos para o acontecimento principal; as transformações são inconsistentes com o propósito da questão central
4	Identificam-se registos para o acontecimento principal; as transformações são consistentes com a questão central e com o nível escolar e a capacidade do estudante
Juízos cognitivos	
0	Não se identifica nenhum juízo cognitivo
1	O juízo não está relacionado com o lado esquerdo do “Vê”
2	O juízo cognitivo inclui um conceito utilizado num contexto impróprio ou inclui uma generalização que é inconsistente com os registros e as transformações.
3	O juízo cognitivo inclui os conceitos da questão central e deriva dos registros e transformações.
4	Sucede o mesmo que anteriormente, mas o juízo cognitivo conduz a uma nova questão central.

Fonte: Adaptado de Gowin (1984).

Esta “chave de pontuação” pode ser entendida como uma sugestão para classificação de um vê produzido por um aluno, de forma que seja possível quantificar sua avaliação. No entanto, Gowin (1984) acrescenta que esta pontuação não precisa ser fixa, podendo o professor atribuir outros valores ou pesos diferentes para elementos do vê. Este esquema de pontuação será utilizado nesta pesquisa para classificação dos vês produzidos pelos alunos, conforme explicitamos melhor nos capítulos 4 e 5 deste texto.

Moreira (2014) considera o vê epistemológico uma estratégia instrucional que procura mostrar que o conhecimento científico é construído. Assim, o vê constitui um diagrama que mostra a estrutura dessa construção. Este autor faz uma adaptação do vê à construção de modelos matemáticos, baseada na proposta de Almeida, Silva e Vertuan (2012), sobre o que é uma atividade de Modelagem Matemática (Figura 8).

Figura 8 – Adaptação do vê epistemológico para a construção de modelos matemáticos



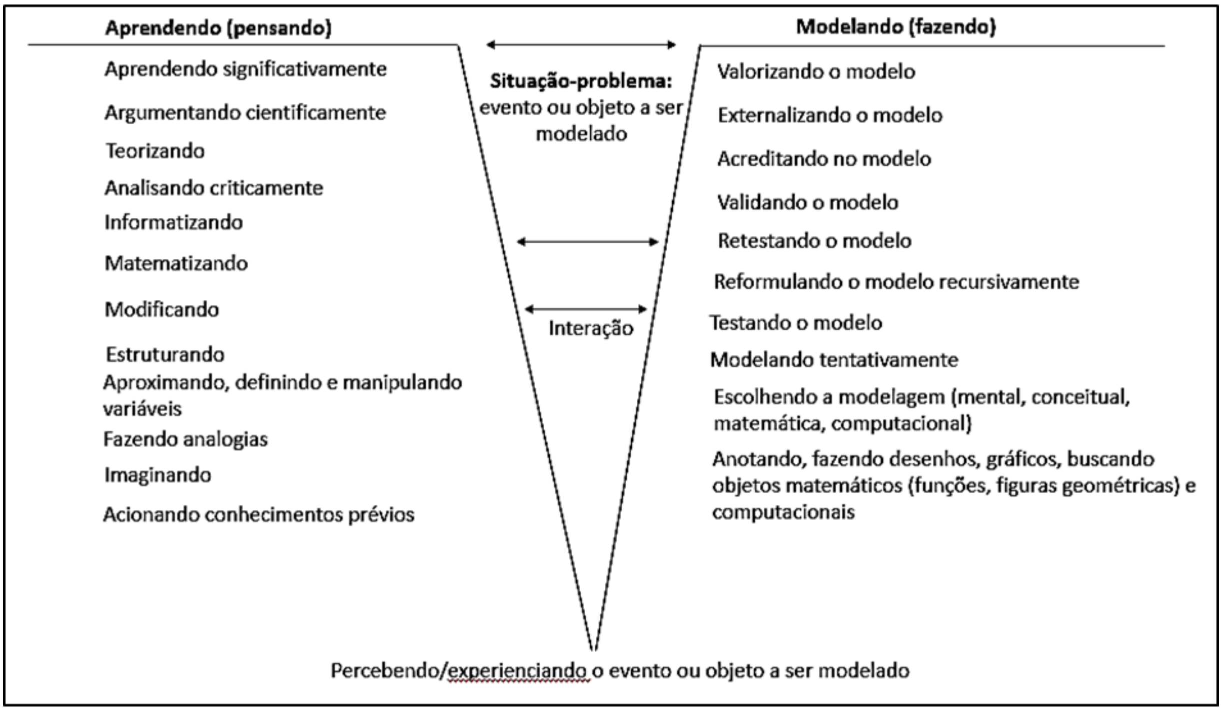
Fonte: Moreira (2014)

Moreira (2014) argumenta que, frente à situação-problema inicial, o primeiro e fundamental passo cognitivo do modelador é a representação mental, que é uma estruturação analógica da situação:

> Para ir modificando e melhorando o modelo mental inicial de modo a matematizá-lo e chegar a um modelo matemático para a situação inicial é preciso levar em conta, ou dar-se conta de conceitos, variáveis, aproximações, referentes e relações, assim como inteirar-se da situação no sentido de pensar que registros são necessários, como fazê-los e como usar técnicas e procedimentos que levem a um modelo matemático. Uma vez alcançado este objetivo é preciso abalizar e usar o modelo, comunicar resultados obtidos e convencer a uma audiência que esses resultados são aceitáveis. Uma última etapa, que tem a ver com as asserções de valor contidas no diagrama V original, é verificar se o modelo elaborado pode ser usado em outras situações além daquela inicial que gerou. É a da generalização, ou expansão, de modelo matemático (p. 15).

Na Figura 9, Moreira (2014) apresenta o “vê da modelagem”, uma interação permanente entre aprender e modelar, na aprendizagem significativa.

Figura 9 – O vê da Modelagem Matemática



Fonte: Moreira (2014)

Todas as partes do Vê epistemológico não são necessariamente lineares. O processo de elaboração de um modelo matemático resulta de interações entre os domínios conceitual e metodológico.

3.4 Modelagem Matemática e Aprendizagem Significativa

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980) uma atividade que propõe ao aluno resolver um problema pode ser encarada como um meio para promover aprendizagem significativa, uma vez que a resolução resulta de um processo de clarificação progressiva sobre relações de meio-e-fim fundamentadas na formulação, verificação e rejeição de hipóteses alternativas. De acordo com esse entendimento, ao considerar a Modelagem Matemática uma forma de resolver problemas, algumas pesquisas investigam como o envolvimento dos alunos nesse tipo de atividade pode viabilizar a aprendizagem significativa. Nesta seção, apresentamos uma revisão da literatura que articula Modelagem Matemática e aprendizagem significativa, com diferentes focos.

Borssoi e Almeida (2004) definem alguns aspectos que representam indicativos da aprendizagem significativa, separados em dois grupos:

1) Relacionado com a predisposição para aprender significativamente: os alunos se envolvem nas atividades, elaboram de estratégias próprias e há aprendizagem extra-conteúdo.
2) Relacionado com a aprendizagem do conteúdo: verifica-se nos alunos compreensão conceitual, construção e manipulação de representações múltiplas, aplicação do conhecimento a situações novas e retenção do conhecimento por longo tempo.

Conforme os resultados desta pesquisa, Borssoi e Almeida (2004) apontam que as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas permitiram abordar uma grande quantidade de conceitos matemáticos e extra-matemáticos e proporcionam interações favoráveis à aprendizagem. Além disso, as situações-problema apresentadas pelos alunos constituem "um material potencialmente significativo" e desencadearam a predisposição positiva do aluno para aprender.

Almeida e Fontanini (2010) apresentam elementos sinalizadores para buscar indícios de aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática por meio de mapas conceituais:

1) O conjunto de conceitos utilizados pelos alunos e as relações estabelecidas entre eles: os conceitos que aparecem no mapa

conceitual, as relações estabelecidas pelo aluno, a presença ou não de linhas de ligação entre os conceitos, bem como o uso de conectivo adequado para indicar a relação envolvida, são elementos que sinalizam a ocorrência de aprendizagem significativa.

2) As relações com poder de transferência: a aprendizagem significativa caracteriza-se por possuir alto grau de transferência. Isto é, o que é aprendido dá suporte ao aluno para que construa novos conhecimentos ou para que ele aplique o que foi aprendido na resolução de variados tipos de problemas. Para investigar no mapa a funcionalidade das relações construídas é interessante perceber se foram construídas aquelas relações que são as consideradas desejáveis naquele contexto, de forma que possibilitem ao aluno o avanço no processo de construção de outros conhecimentos.
3) Sinais de diferenciação progressiva e de reconciliação integrativa: a colocação de hierarquias válidas no mapa conceitual significa diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. Se na explicação do mapa o aluno sobe e desce nas hierarquias conceituais, isto também indica reconciliação integrativa. Segundo Ausubel, toda reconciliação integrativa tem como efeito a diferenciação progressiva da estrutura cognitiva pré-existente.
4) Aprendizagens extra-conteúdo: na Modelagem Matemática, as atividades acabam por envolver informações que pertencem a outras áreas do conhecimento e que extrapolam os aspectos referentes especificamente aos conteúdos matemáticos usados na atividade. A observação deste aspecto nos mapas conceituais dos alunos pode ser feita investigando se este expressa de forma adequada e não literal relações entre conceitos extra-matemáticos ou entre estes e conceitos matemáticos utilizados para o estudo da situação.
5) Modificação nos subsunçores: para observar nos mapas conceituais a modificação nos subsunçores, considera-se que os

> mapas são instrumentos heurísticos e, portanto mudanças nos mapas refletem mudanças no entendimento do aluno. Assim para observar este aspecto ao analisar o conjunto de mapas dos alunos, pode ser observado se existem conceitos que aparecem em mais de um mapa e se nos diferentes mapas foram construídas relações que revelam mudanças na compreensão desses conceitos.

Ao final de sua pesquisa, Almeida e Fontanini (2010) consideram que os alunos investigados construíram relações que lhes permitiram avançar no *continuum* aprendizagem memorística – aprendizagem significativa com respeito aos conceitos de função e de função do 1º grau, colaborando para a construção de novas relações que aperfeiçoaram o significado destes conceitos. Observam também que os mapas dos alunos refletem aspectos relacionados ao envolvimento do aluno com as atividades de modelagem. De modo geral, na elaboração dos mapas, os alunos partem das informações extramatemáticas que contextualizam o problema, identificam as variáveis, apresentam os conceitos matemáticos envolvidos na resolução e por fim apresentam os resultados no contexto do problema.

Para Almeida e Fontanini (2010), incluir na elaboração dos mapas, características da atividade de modelagem, representou, para alguns alunos, uma possibilidade de refletir sobre o problema em estudo e aprender mais. Além disso, o caráter *organizador* dos mapas elaborados após cada atividade viabilizou aos alunos construir e relacionar conceitos que não haviam percebido durante o desenvolvimento da atividade.

Outra pesquisa, com um foco diferente dos dois trabalhos comentados anteriormente, de Figueiredo e Kato (2012), propõe parâmetros para avaliação da aprendizagem significativa do aluno em atividades de Modelagem Matemática:

> Parâmetro 1: O aluno, ao se deparar com uma situação nova, deve ser capaz de criar relações entre as características do desconhecido (novo) e aquilo que ele já sabe. Essas relações podem ser observadas por meio de elementos do pensamento criativo, tais como, fluência, originalidade e complexidade.
>
> Parâmetro 2: Após a atividade de Modelagem Matemática, o aluno

> deve ser capaz de discernir o conceito matemático de sua aplicação nesse contexto. Mais ainda, o aluno deve compreender que a utilização desse conteúdo extrapola aquele mobilizado na atividade.
>
> Parâmetro 3: o aluno deve perceber a atividade de Modelagem Matemática como parte da realidade, relacionar criticamente a matemática envolvida no problema proposto, perceber sua importância para a sociedade e, utilizando o trabalho realizado, repensar sobre a situação nos seus vários aspectos.

A elaboração destes mecanismos de avaliação considerou vários elementos constituintes do processo de aprendizagem que aparecem de forma explícita ou implícita na condução da atividade e, portanto, têm caráter norteador e não padronizador e, dessa forma, foram denominados de parâmetros de avaliação.

A pesquisa de Silva, Kato e Paulo (2012) identificou que relações podem ser estabelecidas entre a Modelagem Matemática e a aprendizagem significativa crítica (MOREIRA, 2005). As autoras ponderam que, quando se solicita aos alunos que escolham algum tema ou situação-problema da realidade que seja do seu interesse, eles terão de recorrer às suas experiências, ao que já sabem sobre determinado assunto ou mesmo ao que já ouviram falar sobre ele. Assim, a formulação do problema em uma atividade de modelagem pressupõe a existência de conhecimentos prévios na estrutura cognitiva do aluno, pois a ênfase está na escolha do tema feita por eles.

Conforme os resultados da pesquisa, as autoras argumentam que o trabalho em grupo, sejam grupos formados por alunos ou o grupo de todos os alunos com o professor, juntamente com o ambiente democrático da sala de aula, pode favorecer a interação social. A discussão entre os grupos sobre a melhor solução para uma situação-problema, sobre a própria escolha do tema e a análise do modelo ou da solução encontrada para o problema propiciam que os alunos dialoguem e argumentem entre si, defendendo seus pontos de vista.

Neste mesmo trabalho, Silva, Kato e Paulo (2012) argumentam que, em geral, atividades de modelagem descentralizam a aprendizagem do livro didático, considerando-o um “complemento” para as aulas, quando se oportuniza ao aluno que realize pesquisas fora da escola ou em outras fontes, seja em visitas a locais relacionados ao tema escolhido, seja por palestras/entrevistas com profissionais da área, entre outras possibilidades de pesquisa. O aluno pode utilizar diversas maneiras para representar aquilo que aprende. Pode ser por meio de desenhos, textos, gráficos, tabelas ou modelos. A modelagem pode dar oportunidade para que o estudante represente tudo o que lhe é ensinado, e também aquilo que percebe, já que a ênfase não está apenas em explorar a matemática presente em determinado contexto ou tema. Assim, o aluno não só representa o que aprendeu ou uma aplicação do conteúdo matemático, mas o que significa aquilo que aprendeu e as implicações para a sua vida e a de seus pares.

Esta pesquisa indicou que, por meio da Modelagem Matemática pode se fazer os alunos perceber que a matemática é uma linguagem, ou uma forma de ver o mundo. Pode ser entendida como uma linguagem que representa o que o cerca, que pode ajudá-lo a tomar decisões e a compreender o que acontece ao seu redor. As palavras ou os símbolos podem ter significados que vão além do que o que eles próprios representam. Em atividades de modelagem observamos que o aluno pode desenvolver esta consciência semântica quando têm a oportunidade de perceber que as coisas podem ter significados que ultrapassam o que um resultado ou um modelo apresenta. Mais do que testar soluções é importante que o aluno compreenda porque determinadas soluções não são adequadas para alguns problemas, pois ele não deve apenas refletir sobre o erro cometido na elaboração matemática da solução, mas no contexto em que esta solução está sendo proposta. Ou seja, ele deve perceber que uma resposta pode estar correta do ponto de vista matemático, mas pode não estar adequada a determinada realidade.

Muitas vezes é necessário que o aluno perceba que está aprendendo um novo conceito utilizando um conhecimento prévio inadequado. Um modo de perceber isso é por notar que determinado conceito matemático não se está adequando à situação-problema a qual deseja encontrar uma solução. Isto envolve, novamente, não pensar somente sobre o aspecto matemático da questão, mas toda a situação envolvida.

Silva, Kato e Paulo (2012) concluem que desenvolver atividades de Modelagem Matemática favorece a implementação dos onze princípios[13] da

---

[13] 1) Princípio do conhecimento prévio. Aprendemos a partir do que já sabemos. 2) Princípio da interação social e do questionamento. Ensinar/aprender perguntas

aprendizagem significativa crítica em sala de aula.

Postal (2009) desenvolveu uma proposta de Modelagem Matemática, utilizando como ferramenta auxiliar o software Graphmatica e verificou que os materiais didáticos propostos foram potencialmente significativos e contribuíram para a aprendizagem significativa de função afim.

A pesquisadora conclui que a modelagem proporcionou interação entre os estudantes, no sentido de realizarem as atividades, refletirem sobre o tema "uso consciente dos celulares", e construírem o conceito de função de forma significativa. Aponta também a possibilidade dos estudantes serem os condutores da construção do seu conhecimento, participando na escolha do tema a ser estudado, buscando leituras complementares, elaborando problemas e buscando soluções para eles. Além disso, o desenvolvimento de uma proposta alternativa que privilegiou a colaboração e a cooperação entre os estudantes, para dar sentido a sua aprendizagem; a percepção, pelos estudantes, de que a Matemática não é somente algo abstrato, mas parte integrante da sociedade; o vislumbre dos estudantes em utilizar o computador como objeto de ensino, podendo construir e reconstruir gráficos com facilidade.

Venâncio e Kato (2010) verificaram indícios de aprendizagem significativa utilizando a Modelagem Matemática como estratégia de ensino. Para isso utilizaram mapas conceituais, os quais foram analisados segundo os seguintes princípios da aprendizagem significativa: a hierarquização dos conceitos, a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. Este tipo de avaliação, para os mapas, é proposto por Peña (2005). Nesta pesquisa, a produção de um texto livre sobre os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema apontou uma preocupação em relação ao assunto, porém não fundamentada em argumentos científicos, mas essencialmente pelas informações veiculadas pela mídia.

Borssoi e Almeida (2013) propõem uma estrutura para atividades

---

ao invés de respostas. 3) Princípio da não centralidade do livro de texto. Do uso de documentos, artigos e outros materiais educativos. Da diversidade de materiais instrucionais. 4) Princípio do aprendiz como preceptor/representador. 5) Princípio do conhecimento como linguagem. 6) Princípio da consciência semântica. 7) Princípio da aprendizagem pelo erro. 8) Princípio da desaprendizagem. 9) Princípio da incerteza do conhecimento. 10) Princípio da não utilização do quadro-de-giz. Da participação ativa do aluno. Da diversidade de estratégias de ensino. 11) Princípio do abandono da narrativa. De deixar o aluno falar (MOREIRA, 2005).

educacionais em que Unidades de Ensino Potencialmente Significativas[14] (UEPS) caracterizadas em Moreira (2011) são subsidiadas por atividades de Modelagem Matemática.

Borssoi e Almeida (2013) afirmam que os aspectos sequenciais apresentam indicações do tipo de atividades e de procedimentos que podem ser desenvolvidos nas unidades de ensino com vistas à ocorrência de aprendizagem significativa. Entretanto, é a partir do passo 3 que o papel da modelagem parece fortalecer em grande medida o potencial da UEPS para esta ocorrência. Apontam também que, a partir da análise dos alunos, a inclusão de atividades de modelagem na UEPS a fortalece no que se refere à verificação das condições básicas para a ocorrência de aprendizagem significativa.

Conforme as indicações presentes na literatura, há um número considerável de pesquisas que articulam Modelagem Matemática e Aprendizagem Significativa, indicando resultados positivos quando são utilizadas em sala de aula que podem ser utilizados pelo professor de Matemática, tanto para organizar suas aulas quanto para verificar a aprendizagem dos alunos. O capítulo a seguir apresenta o contexto de realização desta pesquisa e seus aspectos metodológicos.

[14] Moreira (2011) define um conjunto sequencial de procedimentos que caracterizam uma UEPS: 1) definição do tópico (conteúdo) a ser abordado na unidade de ensino; 2) criar e/ou propor situações que viabilizem ao aluno externalizar seu conhecimento prévio em relação ao tópico; 3) propor situações-problema em nível introdutório em relação ao conteúdo; 4) apresentar elementos do conteúdo em estudo considerando a diferenciação progressiva; 5) concentrar o foco em aspectos mais gerais, mas fundamentais, no ensino do tópico a ser estudado na UEPS; 6) fazer uma associação entre a diferenciação progressiva visando buscar a reconciliação integradora por meio de um conjunto de atividades e/ou ações.

4 CONTEXTO DA PESQUISA E ASPECTOS METODOLÓGICOS

Nos capítulos anteriores, abordamos a Modelagem Matemática na Educação Matemática como uma alternativa pedagógica, com o objetivo de apresentar alguns aspectos teóricos que fundamentam a sua prática, bem como aspectos inerentes ao desenvolvimento de uma atividade. Nesse sentido, as atividades de modelagem desenvolvidas nesta pesquisa e apresentadas e analisadas neste trabalho, em capítulo posterior, estão em consonância com o que já discutimos até aqui. De forma semelhante, no capítulo 3 tratamos da teoria da Aprendizagem Significativa, objeto também desta pesquisa, no qual damos destaque a elementos necessários para a compreensão desta teoria, além de aspectos que pretendemos utilizar como fundamentos para as análises que serão realizadas e apresentadas neste relatório.

Considerando o quadro teórico abordado até aqui, neste capítulo enunciamos o problema de pesquisa, acompanhado de questões auxiliares que podem nos assistir no caminho para responder a este problema. Descrevemos também como seu deu a coleta de dados, os sujeitos e o ambiente da pesquisa. A última seção aborda a metodologia empregada nas análises, adentrando a sua fundamentação teórica e explicitando os passos que percorreremos sobre o material que analisado.

4.1 PROBLEMA DE PESQUISA E OBJETIVOS

Nesta pesquisa, investigamos **a ocorrência de aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática**. Nossa investigação vem orientada em três questões auxiliares:

1) Como se verificam as três condições propostas por Ausubel para a ocorrência de aprendizagem significativa em uma atividade de Modelagem Matemática?
2) Que indícios de aprendizagem significativa se apresentam em um vê epistemológico construído para uma atividade de Modelagem

Matemática?

3) Durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, se verificados indícios de aprendizagem significativa, como o aluno passa dos significados denotativos para os significados conotativos?

Nossa investigação se dá a partir da análise de atividades de Modelagem Matemática, via análise textual discursiva.

4.2 O Contexto da Pesquisa: O Ambiente da Coleta de Dados

Para **investigar a ocorrência de aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática,** propusemos a alunos do primeiro período do curso de Licenciatura em Química, do câmpus Londrina da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, a realização de atividades de Modelagem Matemática. Nesta turma, estavam matriculados 44 alunos, que foram acompanhados pela pesquisadora nas Atividades Práticas Supervisionadas (APS) da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no letivo de 2016.

Segundo a Resolução nº 78/09 – COEPP/UTFPR, de 21 de agosto de 2009,

> As Atividades Práticas Supervisionadas (APS) são atividades acadêmicas desenvolvidas sob a orientação, supervisão e avaliação de docentes e realizadas pelos discentes em horários diferentes daqueles destinados às atividades presenciais. Podem ser consideradas Atividades Práticas Supervisionadas (APS): estudos dirigidos, trabalhos individuais, trabalhos em grupo, desenvolvimento de projetos, atividades em laboratório, atividades de campo, oficinas, pesquisas, estudos de casos, seminários, desenvolvimento de trabalhos acadêmicos, práticas de ensino e atividades específicas dos cursos de licenciatura, dentre outras (p. 2).

Assim, paralelamente à disciplina de Cálculo I[15], os alunos eram orientados pela pesquisadora em horários e locais diferentes daqueles em que esta disciplina era ministrada. Inicialmente, então, depois de informados que a partir daquele momento fariam parte de uma pesquisa e que seriam obtidos registros das

---

[15] A partir de agora, utilizamos o termo Cálculo I para nos referirmos à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

atividades realizadas, propôs-se que desenvolvessem uma atividade de Modelagem Matemática, com características do segundo momento de familiarização (ALMEIDA; DIAS, 2004). Esta foi a única situação em que a pesquisadora interagiu como mediadora de uma atividade de modelagem, com estes alunos, durante o horário regular da disciplina. A realização de uma atividade do segundo momento se mostrou necessária pelo fato de os alunos serem “inexperientes” em modelagem, embora a professora que ministrava a disciplina de Cálculo I já abordasse em suas aulas situações-problema e análise/coleta de dados. Nesse sentido, esta atividade inicial teve por objetivo “familiarizar” os alunos com a Modelagem Matemática, de modo que pudessem vivenciar as suas fases e as ações necessárias em cada uma delas.

Assim, nesta primeira atividade, os alunos organizaram-se em grupos e, sob a orientação da pesquisadora e da professora da disciplina, vivenciaram as fases de uma atividade de modelagem: elaboraram um problema definindo uma questão a ser estudada a partir dos dados da situação fornecida. Desse modo, cada grupo elaborou a sua própria questão, embora as questões de todos os grupos fossem semelhantes. Levantaram hipóteses e simplificaram a situação: com a ajuda de *softwares*, perceberam o comportamento dos dados, o que, de modo geral, os levou a pensar que a situação poderia ser representada por uma função. Depois, obtiveram um modelo matemático. Embora os *softwares* utilizados fornecessem ajustes para os dados, os alunos adotaram estes ajustes como um modelo para responder a questão formulada. A partir do modelo obtido, os alunos responderam a questão formulada (problema), encontrando uma solução. Por fim, analisaram se a solução encontrada estava adequada, ou se era necessário fazer adequações no modelo, ou ainda repetir uma das fases anteriores, para que se pudesse obter um melhor resultado.

Seguinte à esta experiência inicial com Modelagem Matemática, os alunos foram orientados a formarem grupos novamente para que desenvolvessem uma atividade de modelagem caracterizada como do terceiro momento (ALMEIDA; DIAS, 2004). Nesse sentido, os grupos escolheram temas de seus interesses sobre os quais ficaram responsáveis pela condução da atividade. As temáticas escolhidas pelos alunos foram bastante variadas. Os grupos optaram estudar: amargor das cervejas, cinética-química, impulso sobre um barco de papel, viscosidade do óleo de soja, acidez do suco de laranja, criometria, ebulioscopia e velocidade de um automóvel.

Os alunos foram orientados e acompanhados pela pesquisadora conforme suas possibilidades e necessidades. A cada encontro, os grupos apresentaram à pesquisadora o que tinham desenvolvido entre um encontro e outro, incluindo dúvidas e possibilidades de continuidade da atividade. Assim, eles foram orientados em cada fase da atividade de modelagem, desde a formulação do problema até a sua solução. Como estas atividades foram desenvolvidas pelos grupos na modalidade de APS de Cálculo I, também foram avaliadas pela professora da disciplina, a quem entregaram um relatório no final do semestre, bem como desenvolveram uma Atividade Prática como Componente Curricular (APCC).

Conforme as Diretrizes Curriculares para os cursos de graduação da UTFPR, as APCC são

> atividades a serem desenvolvidas com ênfase nos procedimentos de observação e reflexão, visando à atuação em situações contextualizadas, com o registro dessas observações realizadas e a resolução de situações-problema vivenciadas ao longo dos Cursos de Licenciatura (p. 4).

Neste caso, a APCC solicitada pela professora da disciplina foi que cada grupo de alunos ministrasse um seminário sobre a atividade de modelagem desenvolvida como APS, na qual poderiam selecionar os recursos de apresentação e exposição (lousa e giz, projetor multimídia) que julgassem mais adequados. A professora solicitou também que os grupos elaborassem e entregassem, na ocasião da apresentação da APCC, um plano de aula impresso, considerando que o objetivo desta atividade está relacionado à formação de professores e a experiências de sala de aula. Estipulou-se também que a apresentação de cada grupo deveria durar aproximadamente o tempo de uma aula (50 minutos).

Como a coleta de dados, para a atividade de modelagem, de alguns grupos foi realizada na execução de um experimento, alguns alunos simularam, durante a APCC, os experimentos realizados ou apresentaram vídeos e fotos do experimento realizado. Durante esta apresentação, os colegas ouvintes e a professora podiam interagir com os apresentadores por meio de perguntas ou comentários.

O desenvolvimento das atividades de modelagem (APS), em cada encontro da pesquisadora com os grupos de alunos, e a apresentação da APCC foram registrados em arquivos de áudio e no diário de campo da pesquisadora. Constituem também dados coletados para esta pesquisa os registros produzidos pelos alunos (cálculos, tabelas, anotações, arquivos de softwares, pesquisas impressas sobre o tema escolhido e uma cópia do relatório final da atividade entregue para a professora).

Depois de finalizadas as atividades de modelagem desenvolvidas por cada um dos grupos de alunos e as APCC, alguns encontros foram voltados à elaboração de vês epistemológicos. Ou seja, aós a conclusão e apresentação da atividade por grupo, este foi orientado sobre a construção de vês. Conforme os critérios para elaboração destes instrumentos, explicitados no capítulo 3, a pesquisadora orientou-os para que, cada aluno, individualmente, contruísse um um vê epistemológico sobre a atividade realizada pelo grupo ao qual pertencia. Assim, os vês produzidos pelos alunos também constituem material de análise nesta pesquisa.

Cinco das atividades do terceiro momento desenvolvidas pelos alunos estão detalhadas no capítulo 5 deste texto, juntamente com partes dos registros dos alunos, seguidos de suas análises. Consideramos que esta quantidade de atividades constitui uma amostra representativa das atividades desenvolvidas. Além disso, optamos pelas atividades dos grupos em que todos ou a maioria dos alunos integrantes participaram e entregaram os relatórios e vês epistemológicos. A Tabela 3 a seguir resume as atividades desenvolvidas pelos grupos de alunos.

Tabela 3 – Visão geral das atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos alunos

Grupo	Tema	Momento de Familiarização
Todos os alunos	Variação da temperatura no interior de um veículo automóvel	2º
GI	Amargor das cervejas	3º
GII	Impulso no barco de papel	
GIII	Cinética-Química	
GIV	Criometria	
GV	Acidez do suco de laranja	
GVI	Viscosidade do óleo de soja	
GVII	Ebulioscopia	
GVIII	Velocidade de um veículo	

Fonte: Elaborada pela autora.

Os registros obtidos dos alunos, seja durante o desenvolvimento da APS, da apresentação da APCC, ou depois de finalizadas essas atividades (os vês epistemológicos) foram submetidos à análise, com a finalidade de responder ao objetivo principal desta pesquisa, bem como às questões auxiliares. Assim, a seção seguinte apresenta a metodologia de análise empreendida nesta pesquisa.

4.3 A Metodologia de Análise: Análise Textual Discursiva

Para Fiorentini e Lorenzato (2006)

> a pesquisa é um processo de estudo que consiste na busca disciplinada/metódica de saberes ou compreensões acerca de um fenômeno, problema ou questão da realidade ou presente na literatura o qual inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou diz a respeito (p. 60).

Concordando com esta afirmação, procuramos uma metodologia adequada aos objetivos deste trabalho. Pretendemos **investigar a ocorrência de aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática,** e isto requer uma pesquisa de caráter interpretativo, pois não se preocupa em quantificar seus resultados, mas valoriza o processo de análise. Assim, adotamos uma metodologia qualitativa, que, segundo Moraes (2003), “pretende aprofundar a compreensão dos fenômenos que investiga a partir de uma análise criteriosa e rigorosa [...], não pretende testar hipóteses para comprová-las ou refutá-las ao final da pesquisa; a intenção é a compreensão” (p. 191).

Optamos pela análise textual discursiva (MORAES, 2003), uma metodologia que transita entre a análise de conteúdo e a análise de discurso e constitui um processo auto-organizado em torno de três focos: 1) *desmontagem dos textos*, 2) *estabelecimento de relações* e 3) *captando o novo emergente*. O material a ser analisado, o *corpus*, em geral, constitui-se de produções textuais que representam as informações da pesquisa e permitem a obtenção de resultados confiáveis.

O processo de análise textual discursiva tem início com um movimento desconstrutivo, que requer do pesquisador leitura e impregnação intensa com o material a ser analisado. É também recursivo, deslocando-se do empírico para a abstração teórica, no qual o pesquisador se movimenta intensamente entre interpretações e argumentações.

Na *desmontagem dos textos* ou *unitarização*, os textos são separados em *unidades de significado* (*unidades de análise* ou *unidades de sentido*). Ocorre uma interlocução empírica e teórica e das interpretações do pesquisador. Constitui uma fase intensa e profunda que segue alguns passos: fragmentação, codificação e atribuição de títulos às unidades de significado. Assim, inicialmente, o material a ser analisado é fragmentado, ou seja, extraem-se suas unidades constituintes, ficando a critério do pesquisador decidir em que medida fragmentará seus textos. Em outras palavras, o pesquisador seleciona trechos do *corpus* que considera representativos e relevantes do fenômeno em análise. Isso envolve interpretar e isolar ideias sobre o tema investigado: há que se fazer uma leitura cuidadosa de todo o *corpus*, mas sem deixar de assumir suas próprias interpretações. Assim, os textos submetidos à análise são recortados, desconstruídos a partir das capacidades interpretativas do pesquisador (MORAES; GALIAZZI, 2006). A unitarização é um “processo de colocar-se no movimento dos pensamentos da consciência coletiva, de reconstrução de significados compartilhados socialmente a partir da perspectiva pessoal do pesquisador” (MORAES; GALIAZZI, 2006, p. 118).

Obtidas as unidades de significado a partir da fragmentação, cada unidade deve ser reescrita, nas palavras do pesquisador, de forma que assuma o significado mais completo possível. Esta reescrita é importante para que as unidades possam expressar claramente os sentidos construídos a partir do contexto de sua produção. Depois de reescritas, a cada unidade de significado atribui-se um título, que tem por objetivo representar a sua ideia central.

A fase seguinte, a *categorização,* implica na construção de relações entre as unidades de significado, de modo que sejam combinadas e classificadas para formar conjuntos mais complexos, as categorias, por meio da comparação e união das unidades semelhantes. Nesta fase se faz uma articulação de significados parecidos. Começa a emergência de novos entendimentos e sentidos: as categorias exigem um retorno cíclico para sua qualificação.

> A combinação da unitarização e categorização corresponde a movimentos no espaço entre ordem e caos, em um processo de desconstrução que implica construção. A unitarização representa um movimento para o caos, de desorganização de verdades estabelecidas. A categorização é movimento construtivo de uma ordem diferente da original (MORAES; GALIAZZI, 2006, p. 125).

Pode-se chegar às categorias por diferentes metodologias, a saber, dedutivamente, indutivamente ou intuitivamente. O método dedutivo parte do geral para o particular, ou seja, as categorias são construídas antes de se examinar o *corpus*, constituindo categorias *a priori*. No método indutivo as categorias são construídas com base nas informações do *corpus*, indo do particular para o geral, resultando em *categorias emergentes*.

"O processo intuitivo pretende superar a racionalidade linear que está implícita tanto no método dedutivo quanto no indutivo" (MORAES, 2003, p. 198). As categorias produzidas por intuição originam-se de *insights*, advindos da impregnação do pesquisador com o material de análise. No entanto, tanto o método dedutivo quanto o indutivo requerem algum grau de intuição, possibilitando criações e compreensões mais originais.

A construção das categorias possui também algumas propriedades. A primeira é a *validade* ou *pertinência* da categoria. Um conjunto de categorias é válido quando é capaz de representar adequadamente as informações categorizadas, atendendo dessa forma aos objetivos da análise, que é de melhorar a compreensão dos fenômenos investigados. Quando um conjunto de categorias é válido, os sujeitos autores dos textos analisados precisam estar representados nas descrições e interpretações feitas (MORAES, 2003, p. 199).

Outra propriedade é a *homogeneidade*, ou seja, as categorias devem ser construídas a partir de um mesmo contínuo conceitual. Assim as unidades que compõem uma categoria referem-se todas a um mesmo princípio. A propriedade da *exclusão mútua*, nas formas mais tradicionais de análise de conteúdo, exige que um mesmo dado pertença a uma única categoria, porém, na perspectiva da análise discursiva, aceita-se a classificação de uma unidade em mais de uma categoria, pois uma unidade pode ser lida sob diferentes pontos de vista.

Definidas e expressas as categorias por seus elementos constituintes, as *unidades de análise*, inicia-se a explicitação das relações entre elas. Para isso "costuram-se" as categorias entre si para que expressem a compreensão do todo. O resultado deste processo é o *metatexto*, que se propõe a explicitar esta nova compreensão. Esta fase é a que Moraes (2003) chama de *captando o novo emergente*.

A produção de um metatexto descritivo-interpretativo, uma das formas de caracterizar a análise textual, constitui-se num esforço em expressar intuições e novos entendimentos atingidos a partir da impregnação intensa com o *corpus* da análise (MORAES, 2003, p. 205). Nesse sentido, um metatexto não deve apenas expressar algo já existente no *corpus*, mas as compreensões e intuições do pesquisador.

Os resultados de uma análise textual devem ser válidos e confiáveis. Uma forma de garantir isso é pelo rigor na condução das etapas. Outro modo é “ancorar” os resultados na realidade empírica, o que pode ser feito pelo uso de citações de elementos extraídos do *corpus*. Entretanto, o metatexto não deve constituir apenas uma montagem, seja de unidades e categorias, seja de citações. Deve “constituir-se a partir de algo importante que o pesquisador tem a dizer sobre o fenômeno que investigou [...] e que representa o elemento central da criação do pesquisador” (MORAES, 2003, p. 206).

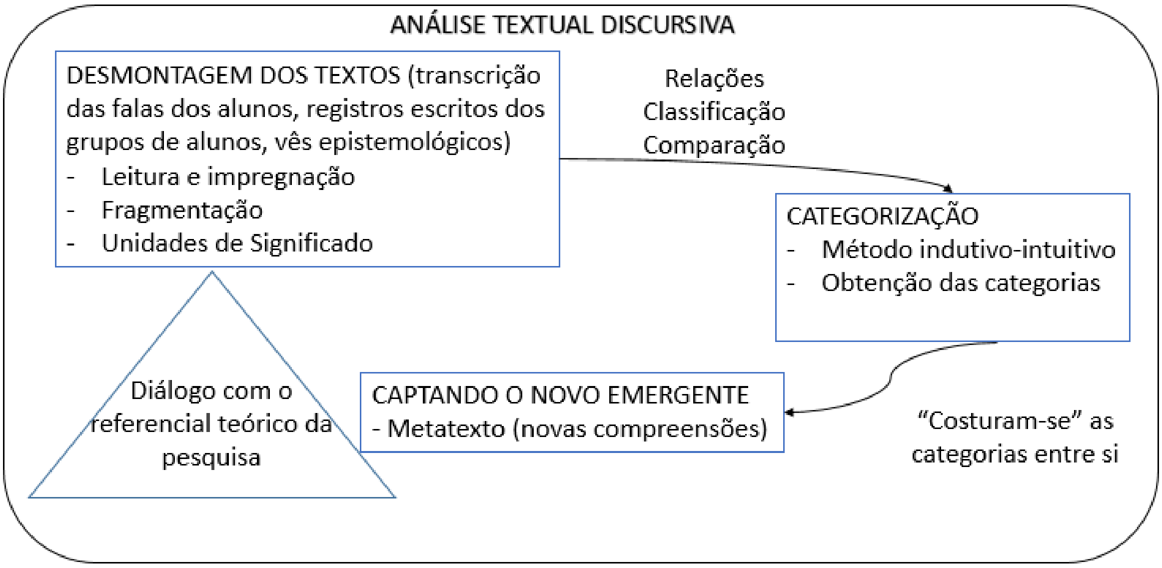
Este ciclo de análise compõe um processo auto-organizado, do qual surgem novas compreensões, em que não se pode prever os resultados finais, mas que objetiva expressar as novas compreensões atingidas ao longo da análise.

> O envolvimento com a análise textual discursiva implica ruptura com o paradigma dominante de ciência, fundamentado em suposta verdade, objetividade e neutralidade. Nesse tipo de análise exige-se do pesquisador mergulhar em seu objeto de pesquisa, assumindo-se sujeito e assumindo suas próprias interpretações. Nesse movimento hermenêutico são solicitadas constantes retomadas do concretizado, visando a permanente qualificação dos resultados (MORAES; GALIAZZI, 2006, p.122).

Nesse sentido, a análise textual discursiva, conforme Moraes (2003) e Moraes e Galiazzi (2006) é um procedimento de pesquisa que permite quatro reconstruções concomitantes: 1) do entendimento de ciência e de seus caminhos de produção, 2) do objeto da pesquisa e de sua compreensão, 3) da competência da produção escrita e 4) do sujeito pesquisador. Cria espaços de reconstrução envolvendo-se nisto a compreensão e produção de significados sobre os fenômenos investigados e a transformação do pesquisador. Possibilita conhecimentos mais ricos e seguros.

Nesta pesquisa, o *corpus* de análise é constituído por diferentes materiais, que podem expressar as produções e compreensões dos alunos: as transcrições dos arquivos de áudio, obtidos durante a interação dos alunos nos grupos e durante a exposição das atividades de modelagem que desenvolveram, para a classe (APCC); os registros escritos produzidos pelos alunos (relatório da atividade realizada, que inclui a pesquisa sobre o tema e o detalhamento das fases da modelagem vivenciadas pelo grupo), e os vês epistemológicos produzidos por cada aluno, individualmente. As análises das atividades, segundo a análise textual discursiva, constam do capítulo 5. Esquematicamente, a Figura 10 representa as análises empreendidas, nesta pesquisa, sobre o *corpus*.

Figura 10 – Esquema das análises empreendidas na pesquisa



Fonte: Elaborada pela autora.

Selecionado o *corpus*, passou-se a uma leitura e impregnação com estes textos, de forma a se obter uma grande familiarização com o seu conteúdo. A seguir, passamos a fragmentação desses textos, a fim de obter trechos representativos daquilo que investigamos, ou seja, selecionamos recortes dos textos que contêm indicativos característicos sobre Modelagem Matemática e Aprendizagem Significativa. Estes fragmentos constituem as unidades de significado. Depois de obtidas estas unidades de significado, elas foram agrupadas por semelhança, ou seja, unidades que fazem a mesma referência, ou referências semelhantes, foram agrupadas. A estes grupos de unidades semelhantes, chamamos de categorias. Nesse sentido, entendemos que este processo de análise possibilitou estabelecer categorias que podem caracterizar a Aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática. Assim, as unidades que compõem uma categoria podem levar à compreensão do contínuo conceitual a que se refere uma categoria, já que elas as constituem. Este processo de categorização se deu de forma indutiva intuitiva, já que as categorias foram construídas com base nas informações do *corpus*, bem como de *insights* advindos da impregnação com os textos analisados. Isso propiciou uma criação e compreensão mais original sobre o investigado.

Finalmente, depois de obtidas estas categorias, passamos a compreensão emergente do que elas revelam das relações entre elas. Estas relações assemelham-se a uma “costura”. Este “costurar” de categorias, na busca de aproximações e justificativas para/entre elas, leva a uma “nova compreensão”, em que “captamos o novo emergente” acerca daquilo que investigamos. Isto se conclui com a elaboração de um metatexto. Assim, o metatexto constitui novas compreensões sobre a ocorrência de aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática, e vislumbra responder às questões que orientam esta pesquisa.

5 AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E ANÁLISES

Neste capítulo descrevemos cada uma das atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos grupos de alunos sujeitos da pesquisa. Os dados obtidos do desenvolvimento destas atividades, constituídos das falas e diálogos dos alunos gravados em arquivos de aúdio e transcritos, assim como recortes dos relatórios feitos por eles e os vês epistemológicos produzidos individualmente, são analisados segundo as indicações da análise textual discursiva (MORAES, 2003).

Lembramos que, conforme discorrido no Capítulo 4, os alunos foram introduzidos aos vês em encontros com a pesquisadora destinados especificamente para este fim, ou seja, depois de concluída cada atividade de modelagem desenvolvida por um grupo, os alunos foram orientados sobre como fazer vês epistemológicos.

Embora tenham sido desenvolvidas oito atividades de Modelagem Matemática, descrevemos e analisamos cinco delas (grupos GI a GV), com características do terceiro momento de familiarização (ALMEIDA; DIAS, 2004). A Tabela 4 resume as atividades descritas e analisadas neste Capítulo.

Tabela 4 – Atividades descritas e analisadas na pesquisa

Grupo	**Alunos Integrantes**	**Tema**	**Momento de Familiarização**
GI	A, B, C	Amargor das cervejas	3º
GII	D, E, F, G, H	Impulso no barco de papel	
GIII	I, J, K, L	Cinética-Química	
GIV	M, N, O	Criometria	
GV	P, Q	Acidez do suco de laranja	

Fonte: Elaborada pela autora.

Para as atividades de modelagem que constam na Tabela 4, apresentamos neste Capítulo uma descrição sintetizada, composta por trechos do relatório entregue pelos alunos, que incluem as suas resoluções, e os vês epistemológicos de todos os alunos dos grupos.

No processo da análise discursiva, procedemos inicialmente com a desmontagem dos textos (falas transcritas dos arquivos de aúdio, relatórios e vês epistemológicos). Esta fase inicial se deu pela leitura deste material, procurando trechos que pudessem ser mais representativos do fenômeno investigado, ou seja, **a ocorrência de aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática**. Esta leitura inicial foi realizada considerando também as **questões auxiliares,** que enunciamos novamente:

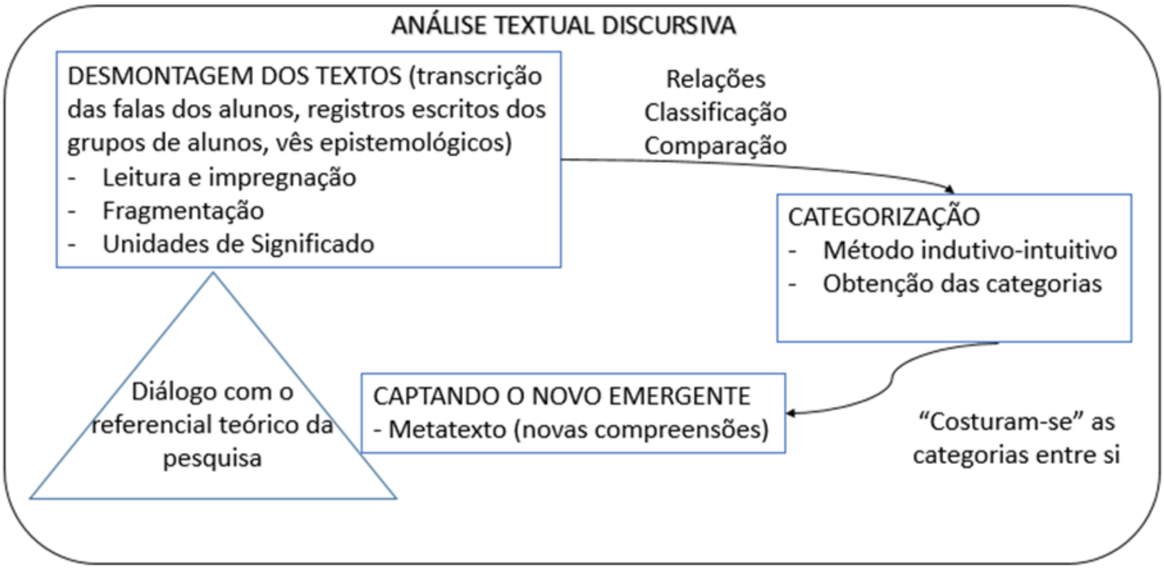
1) Durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, se verificados indícios de aprendizagem significativa, como o aluno passa dos significados denotativos para os significados conotativos?
2) Como se verificam as três condições propostas por Ausubel para a ocorrência de aprendizagem significativa em uma atividade de Modelagem Matemática?
3) Que indícios de aprendizagem significativa se apresentam em um vê epistemológico construído para uma atividade de Modelagem Matemática?

Seguinte a esta leitura, procedemos a fragmentação do *corpus*, fase em que recortamos dos textos os trechos selecionados. O passo seguinte foi a unitarização, quando reescrevemos os fragmentos de forma que consideramos explicitar sua ideia principal, e que passaram a ser as unidades de significado.

Para a fase seguinte do processo de análise discursiva, procuramos relações entre as unidades de significado obtidas, de forma que pudessem ser agrupadas segundo suas características. Assim, unidades de significado referentes a uma mesma ideia foram juntadas, no que se constituiu depois em categorias. Terminado o processo de categorização, passamos a buscar relações entre as categorias, num processo cíclico e contínuo de interação entre os textos submetidos à análise e o referencial teórico que subsidia esta pesquisa. Nesta fase final, em que devem emergir as novas compreensões, produzimos um metatexto – que explicita e evidencia estas novas compreensões.

Este ciclo de análise constitui um processo auto-organizado, no sentido de que, à medida que se procedem os seus passos, eles próprios conduzem aos passos seguintes, sempre com idas e vindas e recorrências. Assim, retomamos a Figura 10, que procura representar de forma esquemática as análises empreeendidas nesta pesquisa, sobre os materiais que constituem o *corpus*.

Figura 10 – Esquema de análises empreendidas na pesquisa



Fonte: Elaborada pela autora.

Desse modo, organizamos este Capítulo da seguinte maneira: inicialmente, na seção 5.1, descrevemos cada uma das cinco atividades listadas na Tabela 4, para que se tenha uma visão do seu desenvolvimento. Esta descrição apresenta a composição dos grupos, os temas escolhidos, os procedimentos para a coleta de dados, o relacionamento dos grupos entre os integrantes e com a pesquisadora, aspectos gerais para o desenvimento do modelo e solução da situação-problema elaborada (as fases da modelagem vivenciadas pelos grupos e as ações emprendidas em cada fase) e os vês epistemológicos produzidos por cada aluno. Destaque-se que, para uma melhor visualização, os vês foram reescritos em fonte maior.

Na seção 5.2 ilustramos o processo de análise textual discursiva empreendido sobre o *corpus,* apresentando na Tabela 5 os processos de fragmentação, unitarização e categorização. A Tabela 5 reúne os fragmentos extraídos das cinco atividades e, para fins de espaço e organização, *não contém todos os fragmentos obtidos na fase inicial da análise,* ou seja, para cada unidade de significado obtida, apresentamos alguns fragmentos obtidos, de modo a tornar perceptível a execução dos procedimentos de análise até a obtenção das categorias. Assim, as categorias obtidas da análise e organizadas na Tabela 5 são resultado da análise das cinco atividades de modelagem.

A seção 5.3 apresenta uma avaliação dos vês epistemológicos, segundo a “chave de pontuação” que apresentamos na Tabela 2 (Capítulo 3), com o objetivo de qualificá-los.

Encerramos o Capítulo 5 (seção 5.4) com o metatexto obtido como resultado final do processo de análise textual discursiva. Este metatexto apresenta as novas compreensões – o novo emergente captado – resultado da “costura” entre as categorias obtidas e de todo o processo vivenciado na análise. Ou seja, a impregnação da pesquisadora com as atividades (pela orientação dos grupos de alunos e intenso contato com o *corpus*) e com o referencial teórico da pesquisa resultou em compreensões em torno do objetivo pretendido nesta pesquisa e das questões auxiliares, bem como em compreensões acerca das relações entre Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e significado.

5.1 Descrição das Atividades

5.1.1 Atividade 1: Amargor Das Cervejas (Grupo I)

O Grupo I, constituído por três alunos, que chamaremos de A, B e C, decidiu fazer um estudo sobre o amargor das cervejas. Na fase da *inteiração*, além de coletar informações em *sites* especializados da *internet*, o grupo visitou uma cervejaria da cidade de Londrina, Paraná, para acompanhar o processo de produção de cerveja e obter informações diretamente de um mestre cervejeiro. De todos os grupos que participaram desta pesquisa, o Grupo I foi o que mais procurou a pesquisadora, em atentimentos na universidade ou para esclarecer dúvidas via mensagens eletrônicas.

As informações e o desenvolvimento da atividade por esse grupo estão sintetizadas no Quadro 2.

Quadro 2 – Desenvolvimento da atividade sobre o amargor das cervejas (Grupo I)

Situação: A cerveja é uma bebida elaborada com malte de cevada, água, lúpulo e levedura (fermento). Contudo, em vários países onde não existe autossuficiência de cevada ou malte, o malte é substituído pela alta maltose (que é produzida a partir do milho). Entretanto, independentemente da formulação, o lúpulo é um ingrediente insubstituível. O amargor da cerveja, assim como no mosto, é conferido principalmente pelas iso-humulonas oriundas do processo de isomerização do lúpulo, durante a fervura do mosto, liberando os iso-α-ácidos. A quantia de iso-α-ácidos inseridas na receita determinará o quanto amarga a cerveja será. O valor das unidades de amargor na cerveja está associado diretamente ao amargor do mosto.

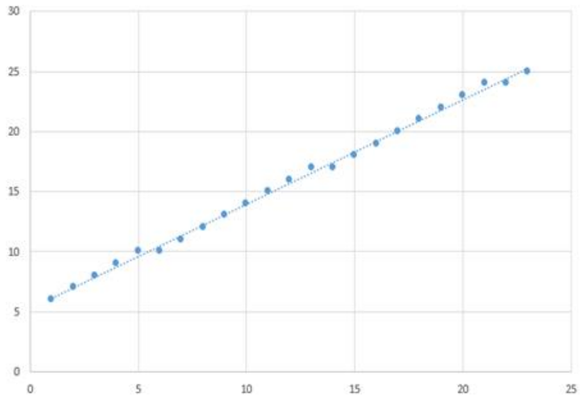
O amargor é um dos principais fatores de diferenciação entre as cervejas. Normalmente, os diferentes tipos de cerveja apresentam um amargor bastante distinto. Por isso, podemos qualificar e classificar uma cerveja pelo seu nível de amargor. A observância de amargor dentro dos padrões de qualidade estipulada garante uma melhor estabilidade organoléptica, condições microbiológicas mais satisfatórias, bem como melhores propriedades da espuma. A unidade que representa essa característica é representada pela sigla IBU (Unidades Internacionais de Amargor). Segundo o Sindicato Nacional da Indústria da Cerveja, estima-se que existam atualmente mais de 20 mil tipos de cerveja no mundo.

A Tabela de Klopper mostra a conversão de iso-α-ácidos em amargor:

Iso-α-ácido (mg/l)	Unidades de amargor - IBU	Iso-α-ácido (mg/l)	Unidades de amargor - IBU
1	6	12	16
2	7	13-14	17
3	8	15	18
4	9	16	19
5-6	10	17	20
7	11	18	21
8	12	19	22
9	13	20	23
10	14	21-22	24
11	15	23	25

Problema: Que quantidade de iso-α-ácidos deve ser utilizada para produzir uma cerveja com amargor pré-determinado?

Hipótese: O comportamento da função é linear (visualizado pela inserção dos valores da Tabela de Klopper no programa Excel, que resultou no gráfico abaixo).



Definição das variáveis:
y = amargor (em IBU)
x = quantidade de iso-α-ácidos (em mg/L)

Quadro 2 - Continuação

Desenvolvimento:

Utilizando o método dos mínimos quadrados

$$\boxed{\begin{aligned} nb + a\,\Sigma x &= \Sigma y \\ b\,\Sigma x + a\,\Sigma x^2 &= \Sigma xy \end{aligned}}$$

$y = ax + b$

$y = 0,87x + 5,25$

onde n é o número de linhas, utilizados no Excel

$$\begin{cases} 23b + 276a = 361 \\ 276b + 4324a = 5213 \end{cases}$$

$$\boxed{a = \frac{361 - 23b}{276}}$$

$$276b + 4324 \cdot \left(\frac{361 - 23b}{276}\right) = 5213$$

$$276b + \frac{1560964 - 99452b}{276} = 5213$$

$$276b + 5655,7 - 360,3b = 5213$$

$$-84,3b = 5213 - 5655,7$$

$$-84,3b = -442,7$$

$$b = \frac{-442,7}{-84,3}$$

$$\boxed{b \cong 5,25}$$

$$a = \frac{361 - 23 \cdot 5,25}{276}$$

$$a = \frac{361 - 120,75}{276}$$

$$\boxed{a = 0,87}$$

Validação:

C3 f_x =0,87*A3+5,25

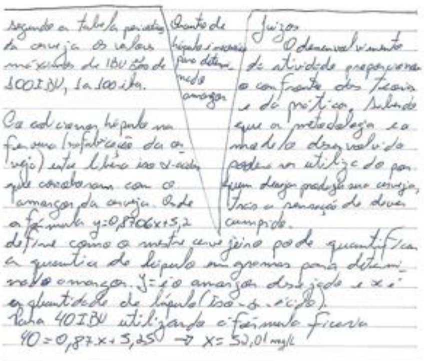
	A	B	C	D	E
1	x	y	VALIDAÇÃO		
2	1	6	6,12		
3	2	7	6,99		
4	3	8	7,86		
5	4	9	8,73		
6	5	10	9,6		
7	6	10	10,47		
8	7	11	11,34		
9	8	12	12,21		
10	9	13	13,08		
11	10	14	13,95		
12	11	15	14,82		
13	12	16	15,69		
14	13	17	16,56		
15	14	17	17,43		
16	15	18	18,3		
17	16	19	19,17		
18	17	20	20,04		
19	18	21	20,91		
20	19	22	21,78		
21	20	23	22,65		
22	21	24	23,52		
23	22	24	24,39		
24	23	25	25,26		

Fonte: Registros dos alunos

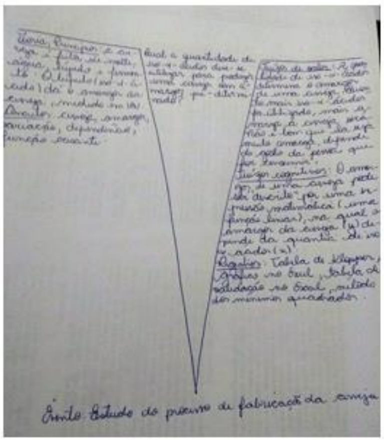
Depois de concluído o desenvolvimento desta atividade por este grupo de alunos, incluindo a apresentação que fizeram para a classe, em uma aula da disciplina de Cálculo I (APCC), destinada a esse fim específico, os alunos foram orientados, pela pesquisadora, para a produção de vês epistemológicos, segundo os critérios apresentados no Capítulo 3, para que fossem capazes de elaborar um vê sobre a atividade de modelagem que desenvolveram. Apesar de o desenvolvimento das atividades ter sido em grupo, assim como a elaboração do relatório e a apresentação da APCC, cada aluno elaborou seu próprio vê sobre a atividade desenvolvida pelo grupo que integrou.

Na sequência, a Figura 11 apresenta os vês epistemológicos elaborados pelos alunos integrantes do Grupo I. Para melhor visualização, os vês foram reescritos, preservando a sua composição original, e estão representados pelas Figuras 12, 13 e 14. Para fins de organização, utilizaremos a partir de agora a codificação Grupo-Aluno para nos referirmos aos alunos. O código GI-A, por exemplo, se refere ao aluno A integrante do Grupo I. Esta codificação será utilizada também nas análises das atividades.

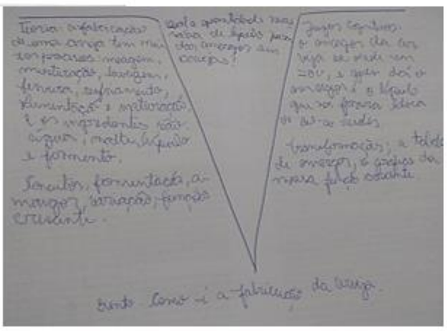
Figura 11 – Vês epistemológicos elaborados originalmente pelos alunos do Grupo I para a atividade sobre o amargor das cervejas



Vê de GI-A



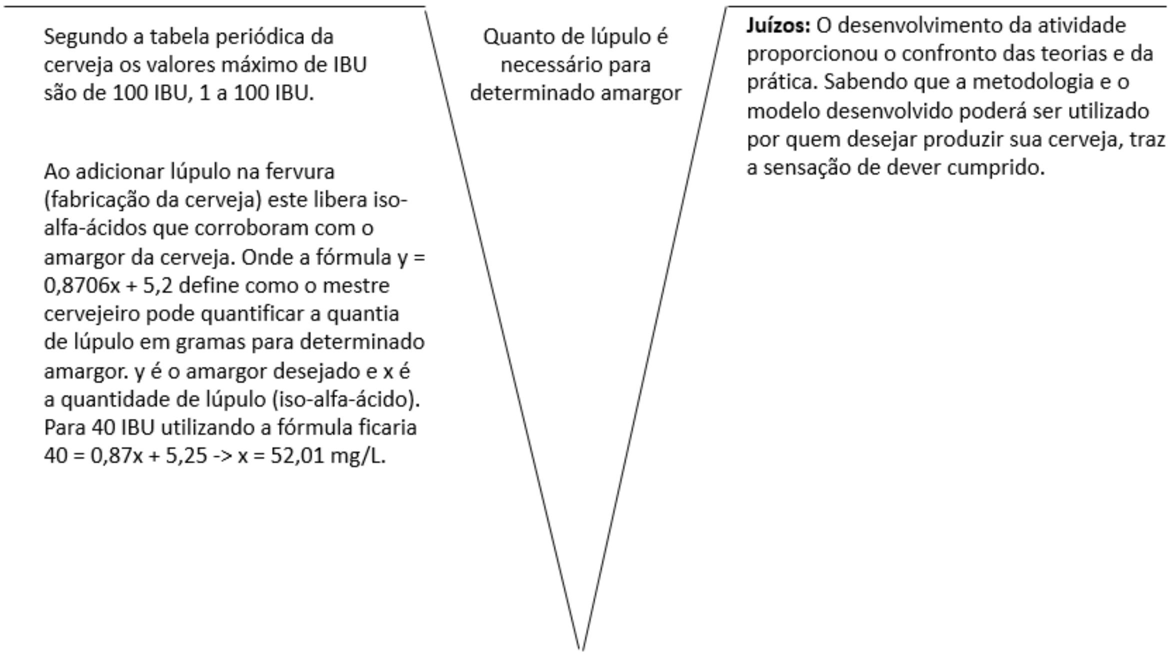
Vê de GI-B



Vê de GI-C

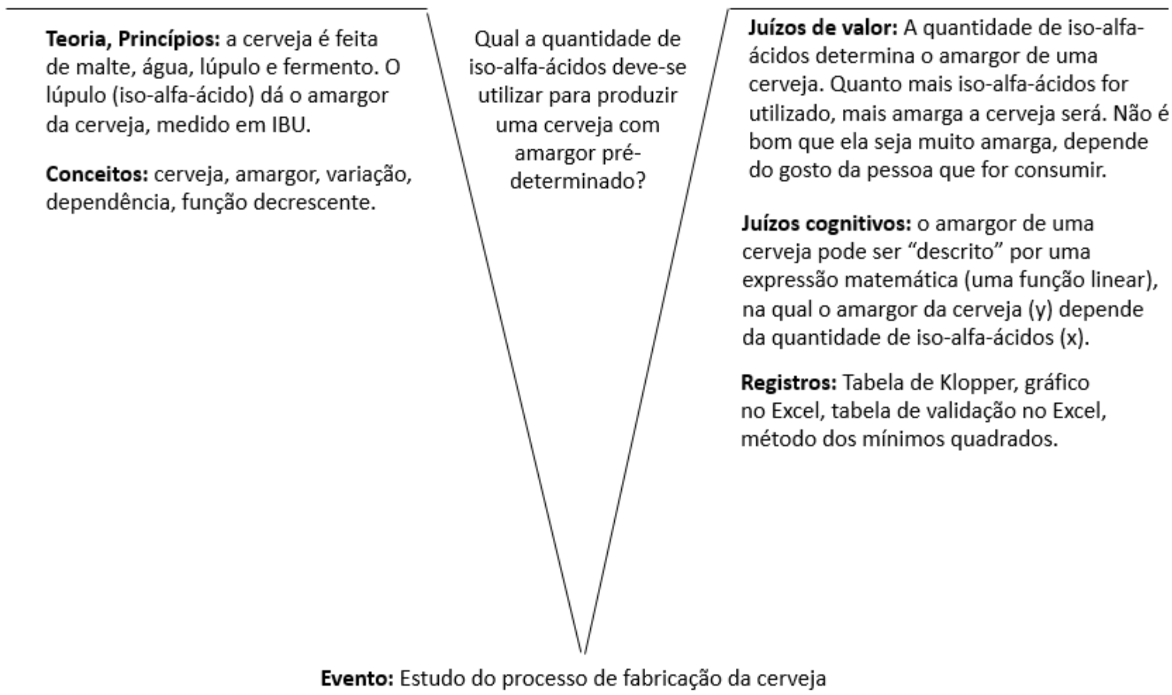
Fonte: Registros dos Alunos GI-A, GI-B e GI-C

Figura 13 – Vê epistemológico elaborado pelo aluno GI-A para a atividade sobre o amargor das cervejas



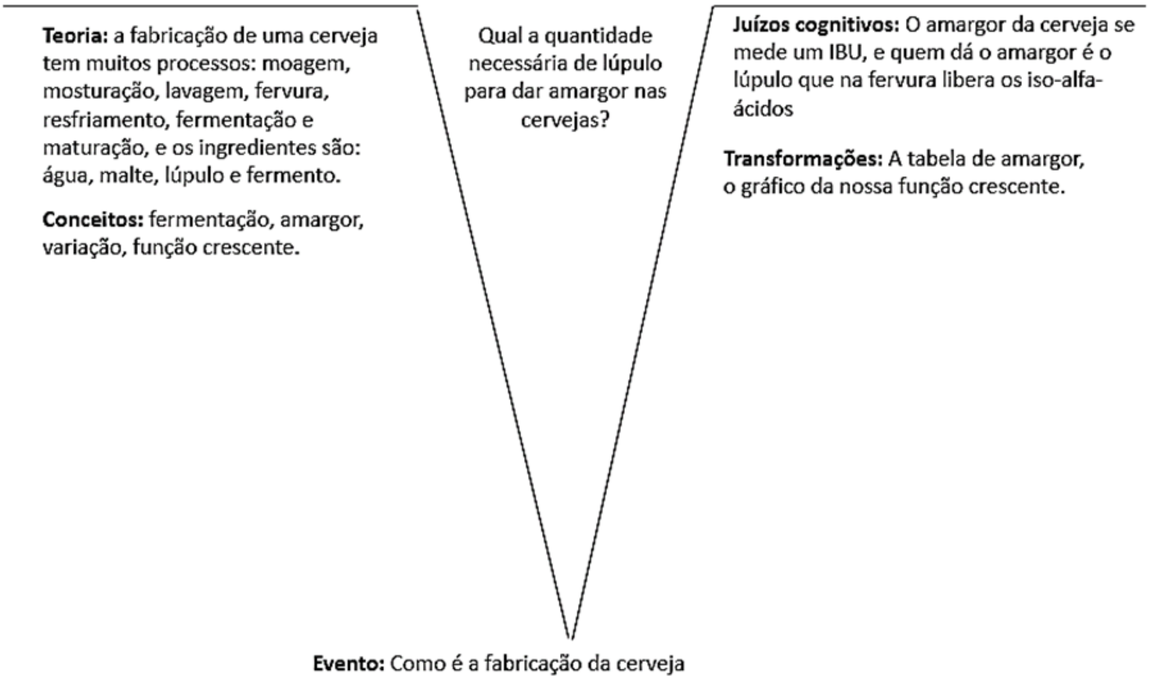
Fonte: Adaptado do registro do aluno GI-A.

Figura 12 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GI-B para a atividade sobre o amargor das cervejas



Fonte: Adaptado do registro do aluno GI-B

Figura 14 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GI-C para a atividade sobre o amargor das cervejas



Fonte: Adaptado do registro do aluno GI-C.

Uma classificação para os vês elaborados pelos três alunos do Grupo I, para a atividade de modelagem sobre o amargor das cervejas, está apresentada na seção 5.2, na qual elaboramos uma única tabela com as pontuações atribuídas aos vês conforme a "chave de pontuação" apresentada na Tabela 2 (Capítulo 3).

5.1.2 ATIVIDADE 2: IMPULSO SOBRE O BARCO DE PAPEL (GRUPO II)

O Grupo II, constituído por cinco alunos, a que chamamos de D, E, F G e H simulou o movimento de um barco sobre as águas do mar quando recebe um impulso, e o seu interesse estava em estudar esse movimento. Uma característica que ressaltamos é que um dos componentes do grupo demonstrou interesse em temas relacionados à Física, sendo o aluno mais entusiasmado com a realização da atividade. O Quadro 3 seguinte apresenta uma síntese da atividade desenvolvida pelos cinco alunos do Grupo II.

Quadro 3 – Desenvolvimento da atividade sobre o impulso em um barco de papel (Grupo II)

Situação: Mesmo com a tecnologia disponível ainda há um número considerável de acidentes e naufrágios que ocorrem no mar. Um dos motivos destes acidentes é o impulso causado pela quebra de uma onda atrás do barco, que faz com que ele atinja uma velocidade muito maior e fique instável, já que a superfície do mar não é plana, e sim muito maleável. Este aumento de velocidade quando somado com o balanço do barco sobre a água faz com que entre água pelas laterais do barco, fazendo com que ele afunde um pouco, até o ponto de entrar água pela sua ponta mais alta dianteira, e isso faz com que o barco afunde, pois esta é a responsável por manter o barco estável sobre a água.

Queremos encontrar, em uma "maquete", o impulso causado ao barco de papel que advém da reação química que ocorre entre a solução de água e corante, e o reagente detergente. Para isso, um experimento foi realizado:

1) Colocamos uma fôrma sobre uma base rígida.
2) Colocamos uma régua de 30 cm sobre a fôrma.
3) Adicionamos água até aproximadamente a metade da altura da fôrma.
4) Recortamos um triângulo de papel com uma abertura triangular em sua "cauda". Medimos sua massa em uma balança analítica e o colocamos sobre a água.
5) Colocamos 10 mL de detergente líquido sobre a água e também na ponta de um lápis.
6) Assopramos o barco para que entrasse em movimento. Colocamos a ponta do lápis com detergente na abertura traseira do barco. Esta ação causa um impulso sobre o movimento do barco.

As ações acima foram gravadas em vídeo e utilizando o software Tracker obtivemos a posição do barco em cada instante t:

Problemas:

1) Qual foi o impulso do barco de papel obtido, em g.cm/s?
2) Se, nessa situação, a massa do barco fosse de 0,1597 g e as velocidades antes e após o movimento continuassem as mesmas, qual seria o impulso obtido?
3) Caso o barco estivesse em repouso antes do impulso e os valores de a e b permanecessem os mesmos após o impulso, qual seria o impulso?
4) Se a equação do espaço fosse dada por $x = 32 + 2t^2 - t$, qual seria a velocidade em t = 4 s?

t (segundos)	x (centímetros)
0	-0,06
0,17	-0,32
0,33	-0,59
0,5	-0,88
0,67	-1,02
0,83	-1,19
1	-1,33

Resolução:

1) Ao derivarmos a função $X = B + At$ antes e após o impulso, obtemos que, a velocidade antes do impulso (inicial) é de 1,15 cm/s e que a velocidade após o impulso (final) é de 5,24 cm/s. Sabendo que a massa é de 0,2506 g, podemos calcular o impulso através da fórmula $I = m.V_f - m.V_i$, então a equação fica $I = 0{,}2506 . 5{,}24 - 0{,}2506 - 1{,}15$. Portanto respondendo a letra (a), temos que $I = 1{,}02$ g. cm/s

2) Se a única coisa que se altera nesse caso é a massa, temos que: $I = 0{,}1597 . 5{,}29 - 0{,}1597 . 1{,}15$, logo $I = 0{,}65$ g. cm/s.

3) Se o barco tem massa 0,2506 g, $V_f = 5{,}24$ cm/s e parte do repouso, podemos dizer que $V_i = 0$ cm/s, logo: $I = 0{,}2506 . 5{,}24 - 0{,}2506 . 0$, então $I = 1{,}31$ g. cm/s.

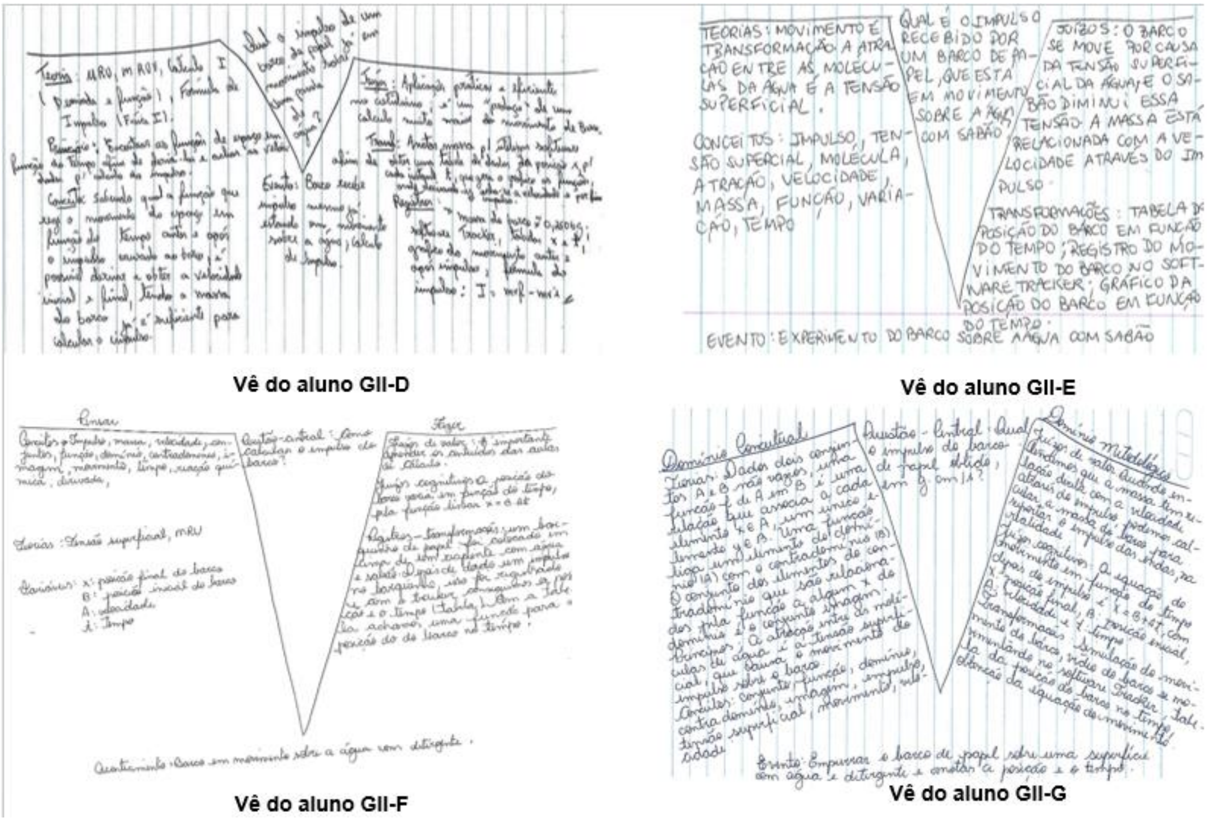
4) Basta derivarmos a equação para acharmos a velocidade e substituirmos o tempo na nova equação, logo: se $X = 32 + 2t^2 - t$, então $V = X'$, então $V = 0 + 4t - 1$, portanto $V = 4t - 1$; se queremos a velocidade no instante $t = 4s$, então por fim temos: $V = 4 . 4 - 1$ e então $V = 15$ cm/s.

Fonte: Registros dos alunos.

Assim como ocorreu com o Grupo I, após a conclusão do desenvolvimento desta atividade, a pesquisadora orientou os alunos sobre a elaboração de vês epistemológicos. Desse modo, cada componente do Grupo II produziu um vê sobre a atividade que desenvolveram.

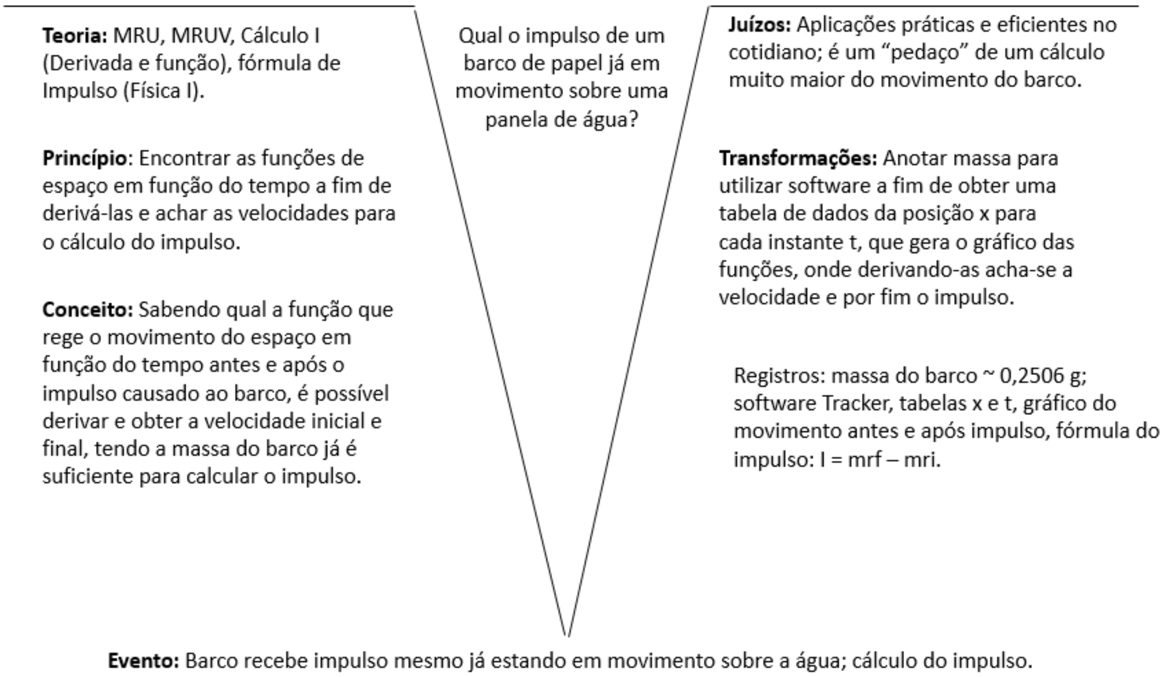
A Figura 15 contém os vês originais elaborados pelos alunos, que foram transcritos para uma melhor visualização. A transcrição destes vês corresponde às Figuras 16, 17, 18 e 19. O aluno GII-H não apresentou vê epistemológico.

Figura 15 - Vês epistemológicos elaborados originalmente pelos alunos do Grupo GII para a atividade de Modelagem Matemática sobre o impulso no barco de papel



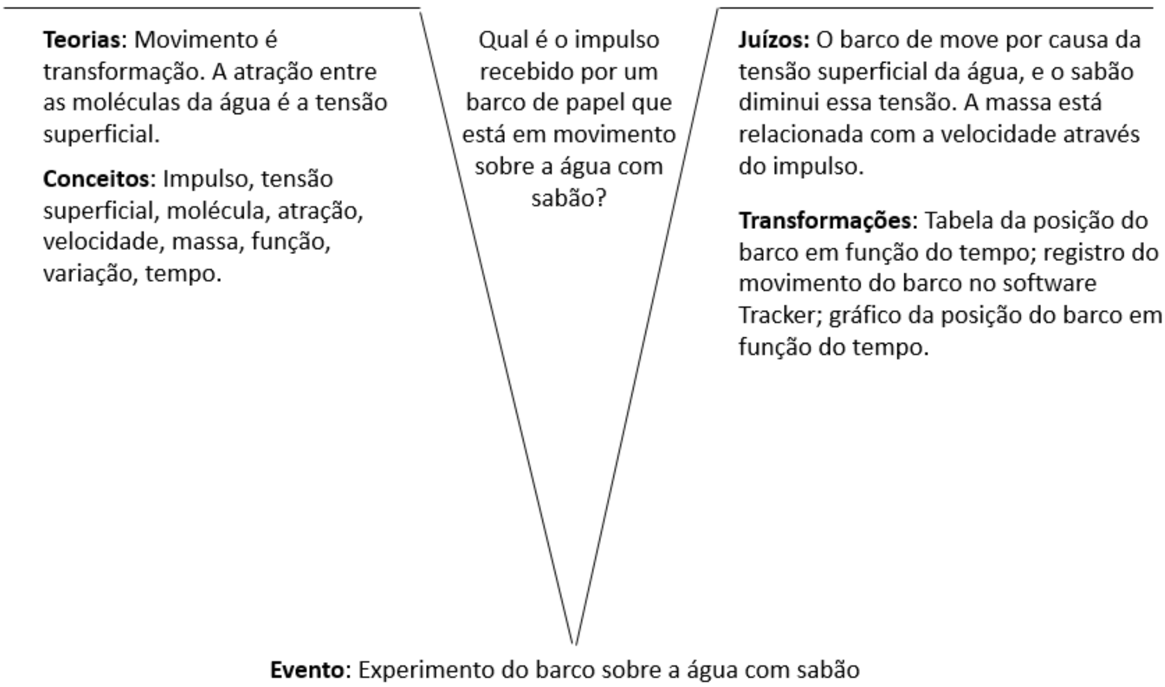
Fonte: Registros dos alunos

Figura 17 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GII-D para a atividade do impulso sobre o barco de papel



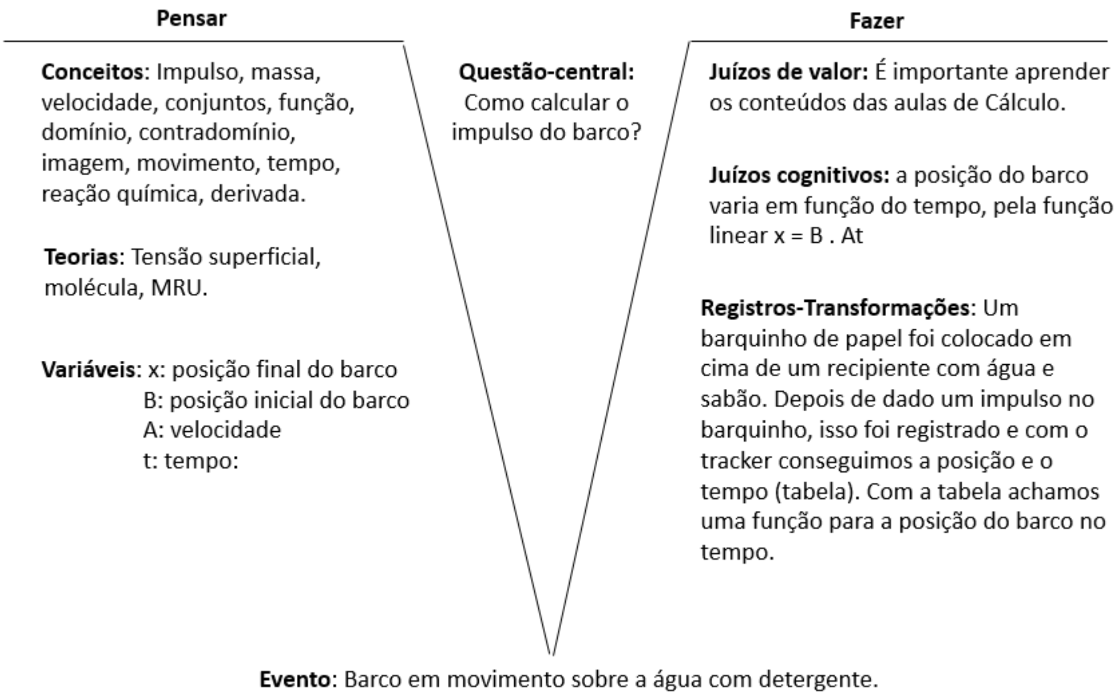
Fonte: Adaptado do registro de GII-E.

Figura 16 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GII-E para a atividade do impulso sobre o barco de papel



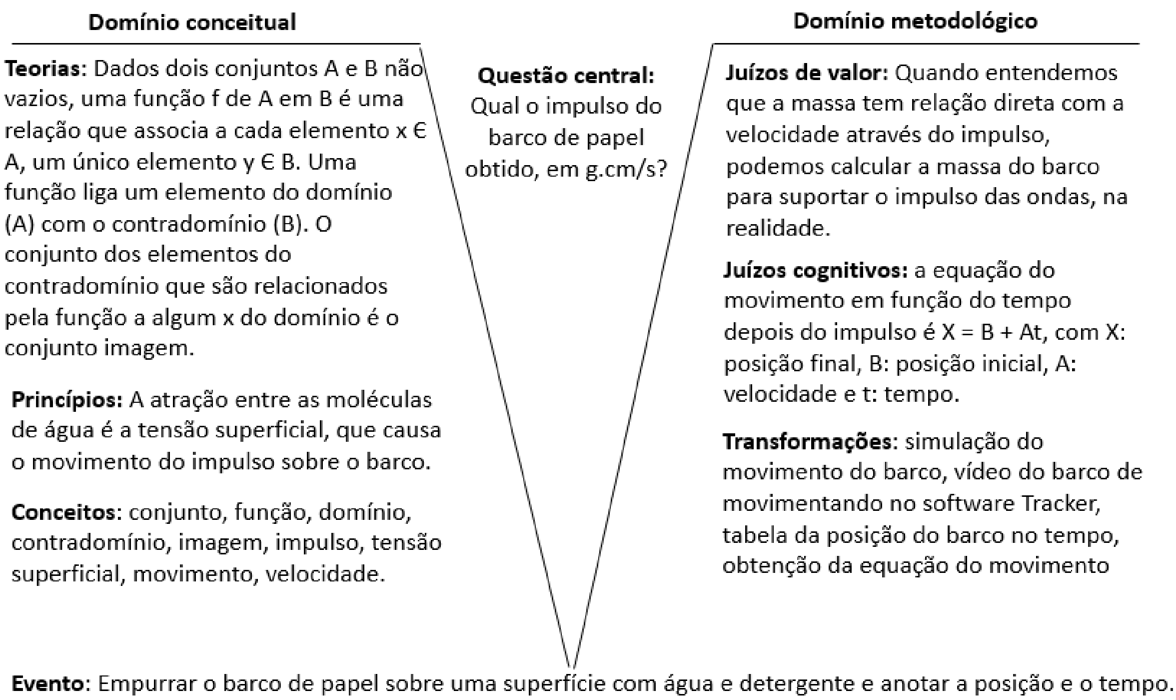
Fonte: Adaptado do registro de GII-E.

Figura 19 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GII-F para a atividade do impulso sobre o barco de papel



Fonte: Adaptado do registro de GII-F.

Figura 18 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GII-H para a atividade de Modelagem Matemática sobre o impulso no barco de papel



Fonte: Adaptado do registro de GII-H.

Considerando a “chave de pontuação” que apresentamos no Capítulo 3 (Tabela 2), desenvolvemos uma classificação para os vês elaborados pelos cinco alunos do Grupo GII. Esta classificação está na seção 5.3 deste trabalho (Tabela 6), juntamente os vês elaborados pelos alunos dos demais Grupos.

5.1.3 ATIVIDADE 3: CINÉTICA QUÍMICA (GRUPO III)

O Grupo III, formado por quatro alunos, os quais chamaremos de I, J, K e L, escolheram estudar cinética química, uma área da Química que estuda a velocidade das reações. Para isso, realizaram um experimento em laboratório para analisar a velocidade da dissolução de uma pastilha antiácido em água. A justificativa apresentada para esta escolha foi utilidade cotidiana dos conhecimentos da cinética química.

Assim como procedemos com os demais grupos de alunos, depois da conclusão desta atividade pelo Grupo GIII, os alunos foram instruídos sobre a elaboração de vês epistemológicos e foram solicitados a que produzissem, individualmente, um vê para a atividade desenvolvida pelo seu grupo, a saber, sobre Cinética Química. Ilustramos, na Figura 20, os quatro vês epistemológicos originais produzidos por um cada um dos integrantes Grupo GIII, para a atividade de modelagem sobre a Cinética Química. No entanto, para melhor visualização, transcrevemos cada um destes vês, conforme apresentamos nas figuras 21, 22, 23, e 24. Apresentamos a seguir uma síntese da atividade desenvolvida pelos alunos do Grupo III (Quadro 4)[16].

---

[16] A curva de solubilidade X temperatura é dependente da substância que está sendo analisada, seu comportamento nem sempre é linear. Porém, o comportamento é influenciado por alguns fatores: o analista, o clima do laboratório, os materiais usados etc (SKOOG et al, 2006).

Quadro 4 – Desenvolvimento da atividade sobre Cinética Química (Grupo III)

Situação: A Cinética é a área da Química que se preocupa com as velocidades ou grau de velocidade das reações. Existem alguns fatores que influenciam a velocidade das reações: estado físico dos reagentes, as concentrações do reagentes, a temperatura na qual a reação ocorre e a presença de um catalisador. Considere o experimento a seguir:

Duas pastilhas antiácido foram partidas em pedaços com massas 4 g, 1 g, 0,7 g, 0,5 g e 0,2 g. Verteu-se água na proveta até que se obtivesse 200 mL de água aquecida no Becker e, em seguida, o pedaço de pastilha de 4g. O tempo que o pedaço de pastilha levou até chegar à dissolução completa foi medido com o cronômetro. Este procedimento foi repetido para os outros pedaços de pastilha. As informações obtidas estão registradas na Tabela.

Massa (g)	Tempo (s)	Velocidade (g/s)
4	42	0,09
1	32	0,03
0,7	25	0,02
0,5	23	0,02
0,2	22	0,009

Problema: Considerando uma pastilha de antiácido de 4g, qual a velocidade de dissolução de um terço da pastilha?

Hipótese: O comportamento do fenômeno é linear (verificado utilizando o programa Excel).

Desenvolvimento: É possível se obter uma função linear de primeiro grau a partir da seguinte expressão:

$$F(x) = Ax + B$$

Em que, (A) é o coeficiente angular e (B) é o coeficiente linear. Quando A > 0 a função tende a ser crescente, e se A < 0 A função tende a ser decrescente.

Substituindo os valores dos termos dependentes e independentes, obtemos a função da seguinte maneira:

$$\begin{cases} 0{,}09 = A.4 + B \\ 0{,}03 = A.1 + B \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A = 0,02}$$

$$0{,}02.4 + B = 0{,}09$$

$$\boldsymbol{B = 0,01}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{v(m) = 0,02.m + 0,01}$$

Quadro 4 - Continuação

Validação:

O modelo matemático foi validado usando o programa Excel e esta validação está na tabela abaixo:

Tabela 2: Validação do modelo matemático.

Massa (g)	Velocidade (g/s) original	Validação (g/s)
4	0,09	0,09
1	0,03	0,03
0,7	0,02	0,024
0,5	0,02	0,02
0,2	0,009	0,014
2		0,05
3		0,07
1,3		0,036

Solução do problema:

Se um terço de uma pastilha que possui 4g é igual á aproximadamente 1,3g, ao substituir o valor de massa temos que:

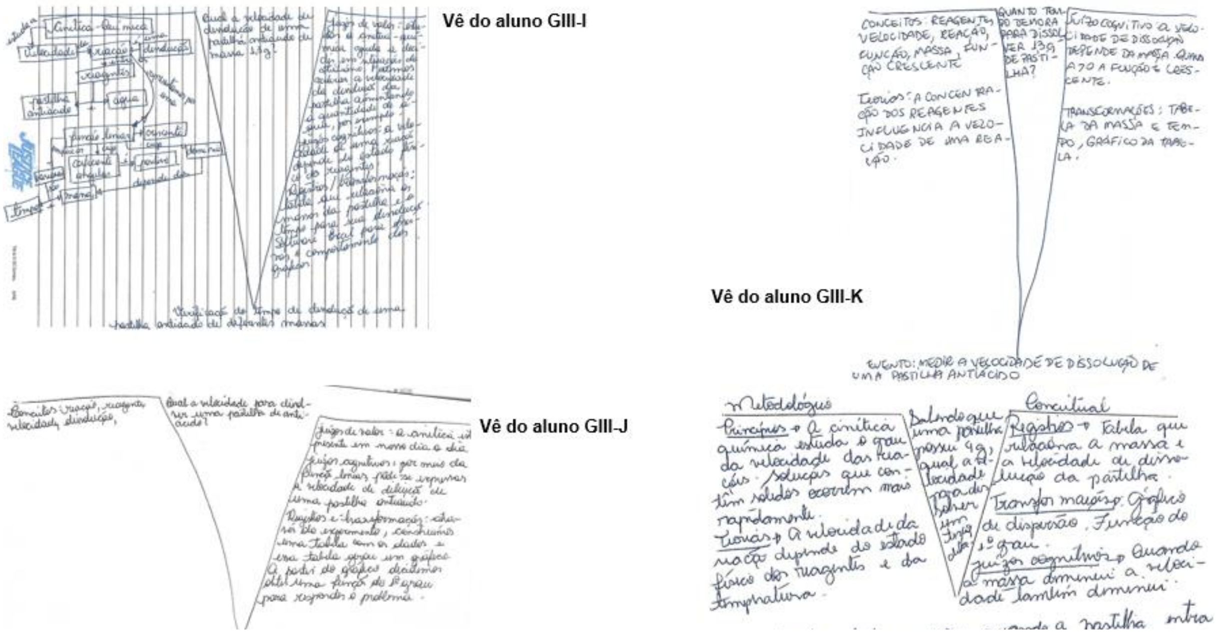
$$v(m) = 0{,}02.m + 0{,}01$$

$$v\ (1{,}3) = 0{,}02.1{,}3 + 0{,}01$$

$$v\ (1{,}3) = 0{,}03g/s$$

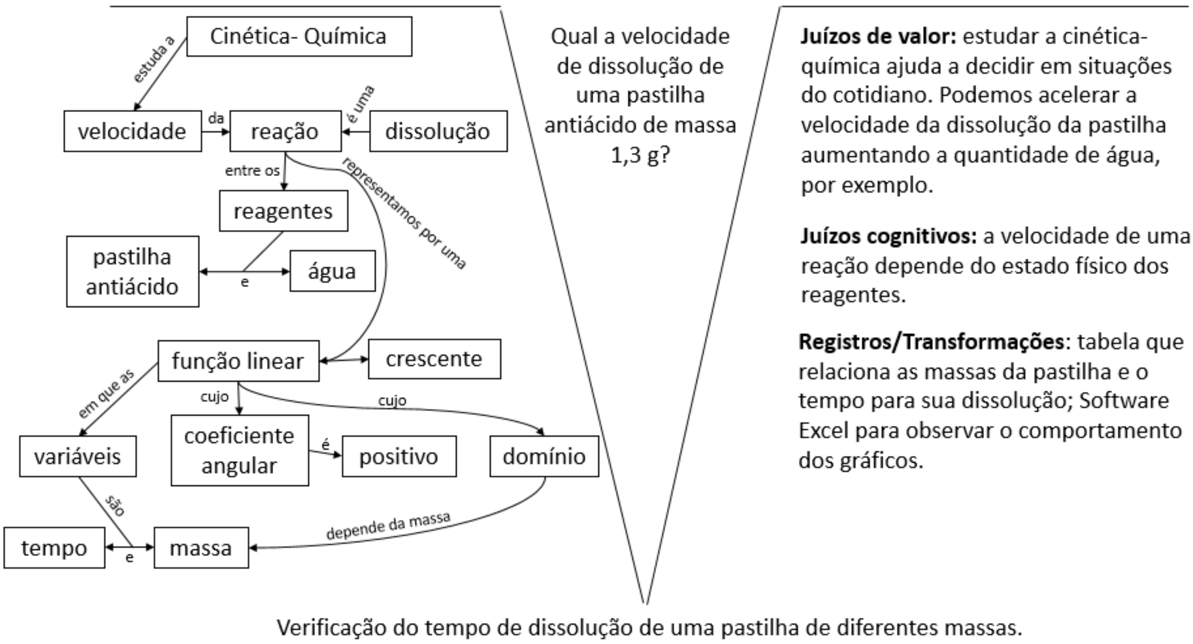
Fonte: Registros dos alunos.

Figura 20 - Vês epistemológicos elaborados originalmente pelos alunos do Grupo III para a atividade sobre Cinética Química



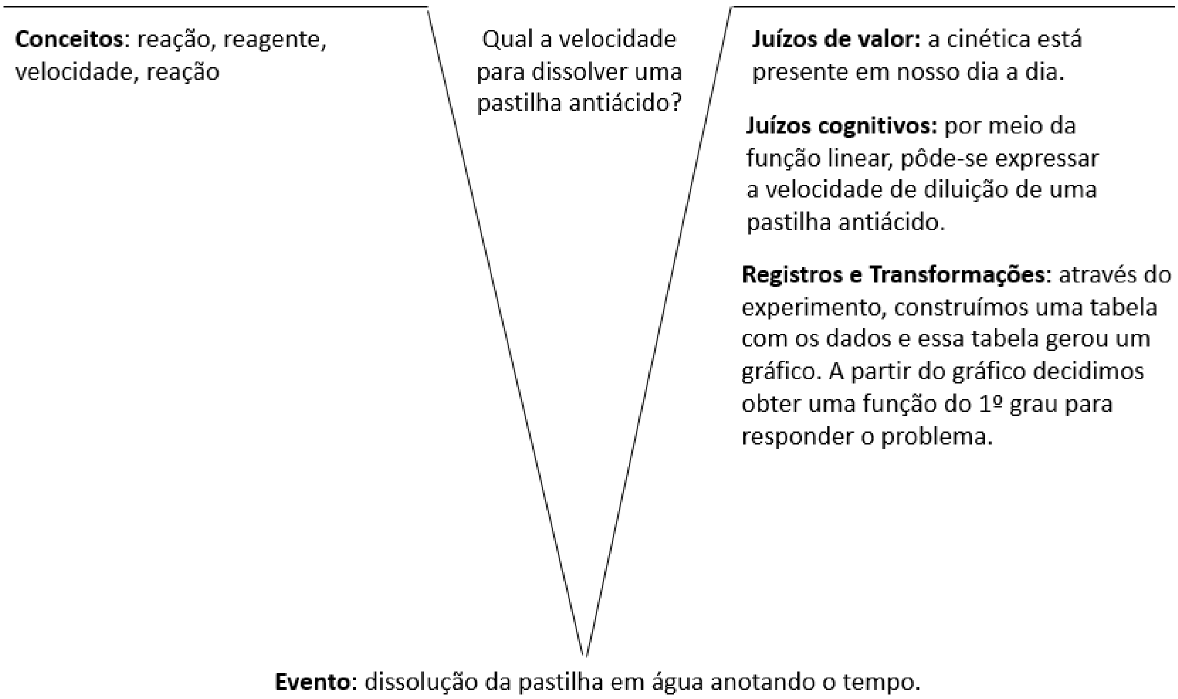
Fonte: Registros dos alunos.

Figura 22 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GIII-I para a atividade de Modelagem Matemática sobre Cinética Química



Fonte: Adaptado do Registro do aluno GIII-I.

Figura 21 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GIII-J para a atividade de Modelagem Matemática sobre Cinética Química



Fonte: Adaptado do registro de GIII-J

Figura 24 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GIII-L para a atividade de Modelagem Matemática sobre Cinética Química

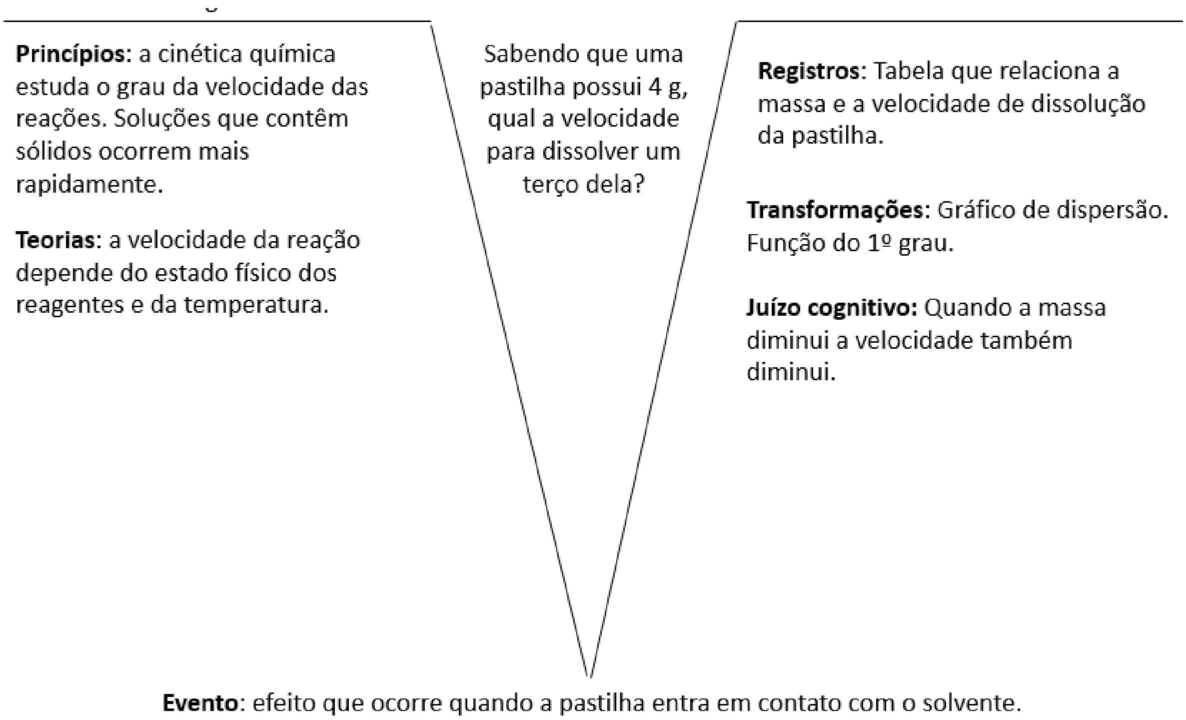
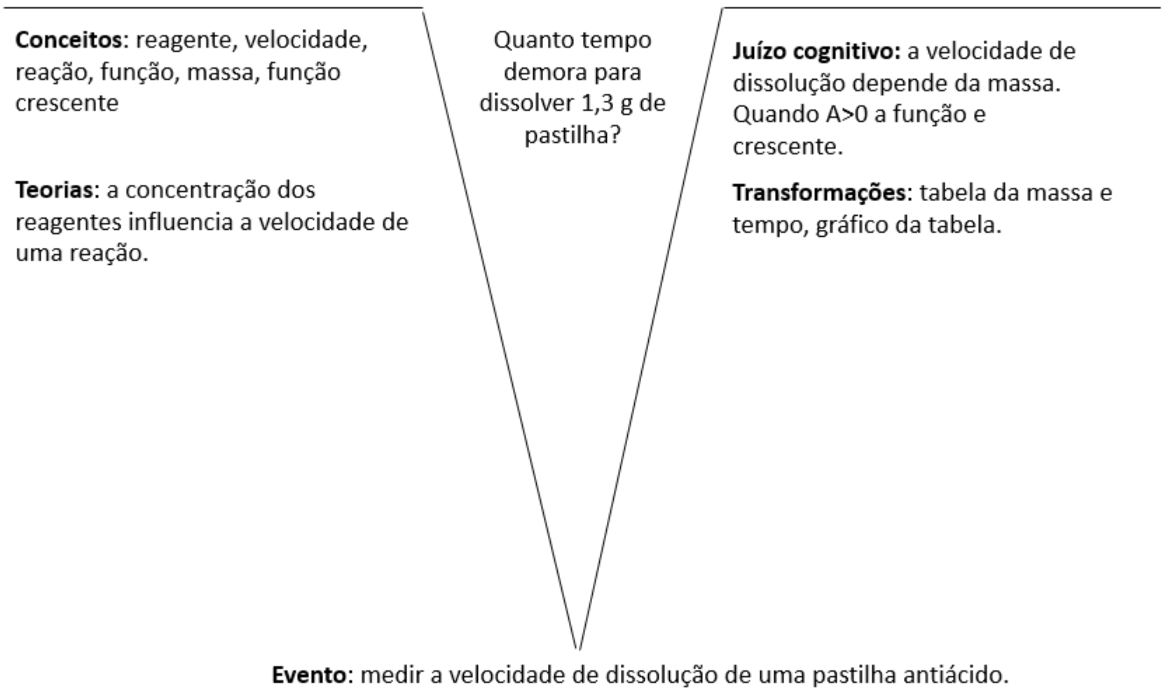


Figura 23 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GIII-K para a atividade de Modelagem Matemática sobre Cinética Química



Fonte: Adaptado do registro de GIII-K

Na seção 5.3, utilizando a chave de pontuação da Tabela 2, que apresentamos no Capítulo 3 deste trabalho, realizamos uma classificação para os vês elaborados pelos alunos do Grupo GIII (Tabela 5).

5.1.4 Atividade 4: Criometria (Grupo IV)

O Grupo GIV foi formado por três alunos, que chamaremos aqui de M, N e O. Este grupo se interessou pela Criometria, estudando em particular o caso da influência da glicose sobre o congelamento da água. O desenvolvimento desta atividade se deu com uma pesquisa sobre o tema, em que os alunos utilizaram livros e materiais disponíveis em *sites* da *internet*. A coleta de dados foi realizada em um laboratório da Universidade, onde puderam contar com o auxílio de um profissional técnico. Para o desenvolvimento matemático da atividade, o grupo utilizou o Excel para a elaboração de gráficos e tabelas, e construíram um modelo (função linear) utilizando o método dos mínimos quadrados. Uma breve descrição desta atividade consta do Quadro 5.

Conforme explicitado no Capítulo 4, assim que cada um dos grupos de alunos terminou a sua atividade, a pesquisadora orientou-os sobre a elaboração de vês epistemológicos, segundo os critérios sugeridos por Gowin (1984). Nesse sentido, os alunos do Grupo GIV construíram vês epistemológicos, individualmente, para a atividade que desenvolveram. Na Figura 25 apresentamos os vês originais elaborados por cada um dos integrantes do Grupo GIV, mas, para uma melhor visualização, transcrevemos estes vês e os apresentamos nas figuras 26 e 27. O aluno GIV-O não apresentou vê epistemológico.

Quadro 5 – Desenvolvimento da atividade sobre Criometria (Grupo IV)

Situação: Adicionou-se ao bécker água destilada a fim de fazer um Banho-Maria. Em um tubo de ensaio adicionou-se 1 mol de glicose. Tampou-se o tubo de ensaio com uma rolha contendo um termômetro. Ascendeu-se o bico de bunsen e o apagou quando mais da metade da glicose foi fundido. Esperou-se a fusão de todo o sólido do tubo de ensaio. Resfriou-se o sistema e observou-se o início da solidificação da glicose em freezer com observações de 10 em 10 minutos. Anotou-se a temperatura. Dados:

MM → H=1
MM → Cl=35,45
1L de água= 1 kg

$$\Delta t_{c=K_c.M_m}$$

Δtc = abaixamento da temperatura de congelação
Kc = constante criométrica (característica do solvente)
$\mathrm{M_m}$ = *concentração da solução (em mol/kg de solvente) → molalidade*

$$\mathrm{K_c} = \frac{\mathrm{R.T^2c_0}}{1000.\mathrm{L_f}}$$

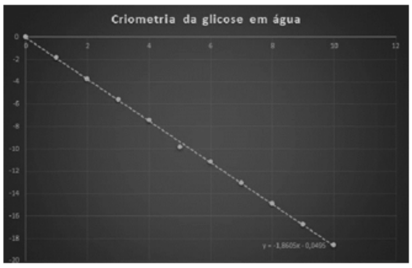
R: constante dos gases perfeitos = 2 cal/mol k .
Tc0: temperatura absoluta de congelação do solvente (K) → Água = 273,15 K
Lf: calor latente de fusão do solvente (cal/mol)

Mol de Glicose	Ponto de fusão da água
0	0
1	-1,86
2	-3,72
3	-5,58
4	-7,44
5	-9,86
6	-11,16
7	-13,02
8	-14,88
9	-1674
10	-18,61

Problema: Para fazer o ponto de congelamento da água ser -25,7°C, quanto de glicose tem de ser adicionado?

Variáveis: g: glicose (em mols)
t: temperatura (em °C)

Hipóteses: Inserindo as informações da Tabela em uma planilha do Excel, obtivemos um gráfico que representa um ajuste, o que nos levou a considerar que uma função linear pode descrever os dados.



Solução: Considerando o Método dos Mínimos Quadrados:

$$nb + a\sum u = \sum xy$$

$$b\sum x + a\sum x = \sum xy$$

$$11 * b + a * 55 = -102{,}87$$

$$b * 55 + a * 385 = -719{,}07$$

$$b = (-102{,}87 - 55a)/11$$

$$\left(55 * \frac{-102{,}87 - 55a}{11}\right) + 385a = -719{,}07$$

$$a \cong -1{,}86$$

$$b = \frac{-102{,}8 + (-55) * (-1{,}86)}{11}$$

$$b \cong -0{,}052$$

$$t(g) = a * g + b \ \rightarrow t(g) = -1{,}86g - 0{,}052$$

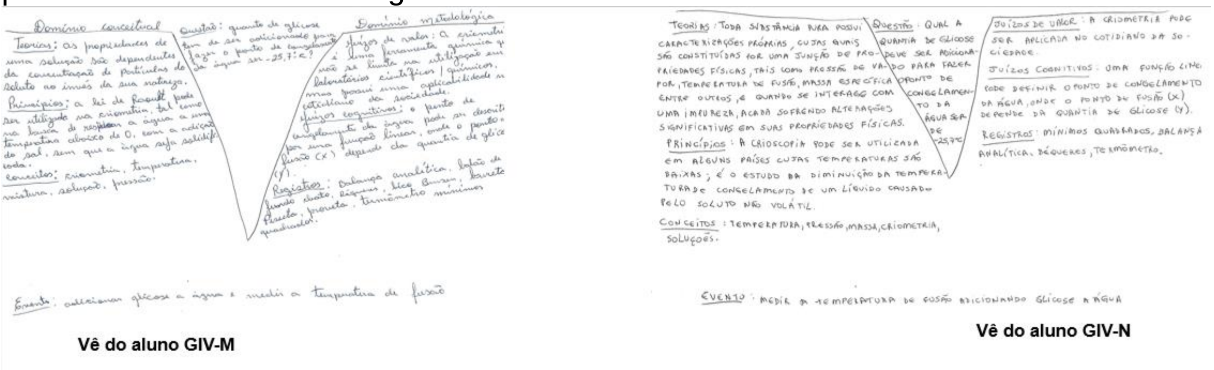
Validação:

Para g=3, $t(g) = -5{,}632\ °C$

Para g=8, $t(g) = -14{,}932\ °C$

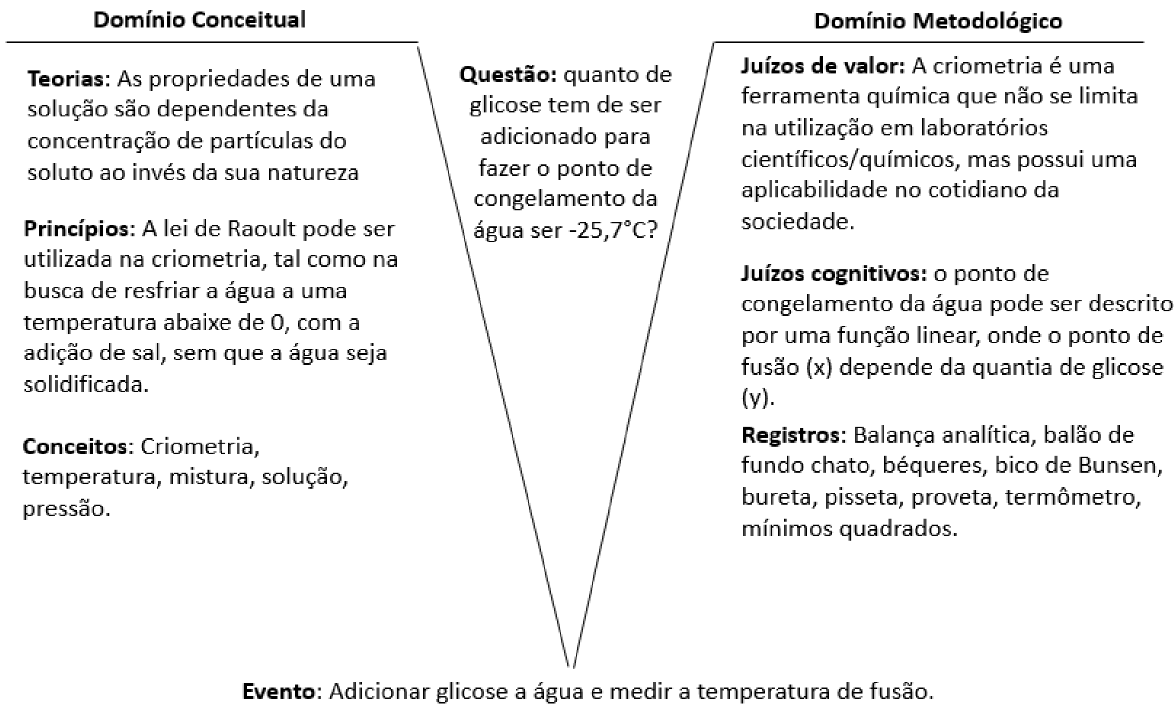
Fonte: Registros dos alunos.

Figura 25 - Vês epistemológicos elaborados originalmente pelos alunos do grupo GIV para a atividade de Modelagem Matemática sobre Criometria



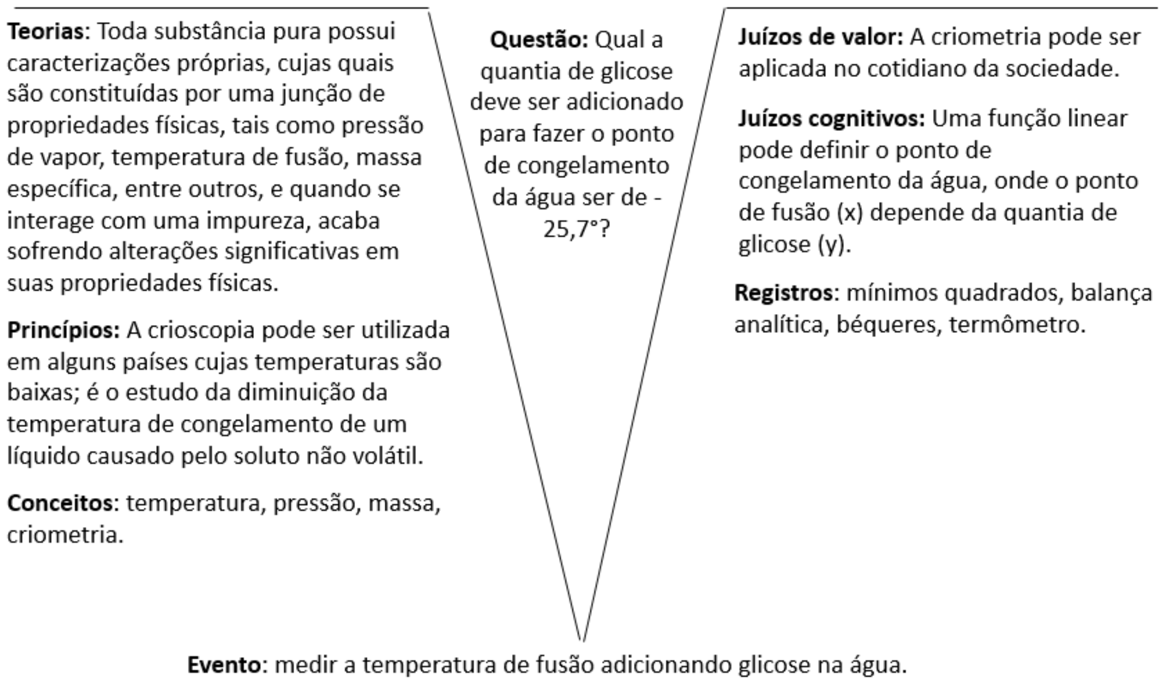
Fonte: Registros dos alunos.

Figura 26 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GIV-M para a atividade sobre Criometria



Fonte: Adaptado do registro de GIV-M

Figura 27 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GIV-N para a atividade sobre Criometria



Fonte: Adaptado do registro de GIV-N

Para classificar os vês epistemológicos construídos pelos alunos do Grupo GIV para atividade que desenvolveram, elaboramos uma Tabela a partir da “chave de pontuação” sugerida por Gowin (1984), em que atribuímos valores aos domínios dos vês. Esta classificação está apresentada na seção 5.3, e contempla os vês de todos os alunos integrantes dos Grupos GI a GV.

5.1.5 ATIVIDADE 5: ACIDEZ DO SUCO DE LARANJA (GRUPO V)

O Grupo GV foi constituído por dois alunos, a que chamaremos de P e Q. Este grupo decididiu estudar a acidez dos sucos de laranja industrializados, considerando o que o Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento define que seja um suco de fruta. O objetivo deste alunos foi fazer uma comparação entre a acidez da polpa da laranja e dos sucos de laranja industrializados, verificando qual a quantidade de solução de NaOH deve ser acrescenta à bebida para que sua acidez se aproxime à da polpa da fruta. Uma descrição sintética da atividade desenvolvida pelo Grupo GV está no Quadro 6, que contempla parte das pesquisas realizadas realizadas pelos dois alunos, a elaboração do problema, as variáveis e hipóteses consideradas, bem como a construção de um modelo matemático para a situação.

Quadro 6 – Desenvolvimento da atividade sobre a acidez do suco de laranja (Grupo V)

Situação: A laranja é uma fruta pertencente ao grupo dos *citrus* (limão, lima, cidra etc.) de origem asiática. É um fruto de casca fibrosa e polpa suculenta. De acordo com o artigo 18 do Decreto nº 6.871, de julho de 2009, do Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento, o suco de fruta é a bebida não fermentada, não concentrada e não diluída, destinada para o consumo, obtida por processamento adequado da fruta madura e sã, e submetida a tratamento que assegure a sua apresentação e conservação até o momento do consumo. Atualmente, o Brasil ocupa o primeiro lugar mundial na produção de laranja. O suco dessa fruta é considerado uma das melhores e maiores fontes de vitamina C. No sucos industrializados adiciona-se uma solução de NaOH, que altera a sua acidez natural.
Considere adicionar 5 mL de solução de NaOH a 75 mL de suco industrializado de laranja. Considere também a repetição deste processo até que se adicione 25 mL de solução de NaOH. A cada repetição, foi medido o pH da solução resultante e anotado o resultado. Os resultados deste procedimento estão na Tabela.

Solução de NaOH adicionada ao suco de laranja (em mL)	pH resultante
0	3,9
5	4,1
10	4,26
15	4,41
20	4,65
25	4,83

Problema: Considerando que o pH da polpa da laranja é aproximadamente 4, compare este pH com o do suco de laranja industrializado.

Variáveis: x = quantidade de solução de NaOH (em mL)
y = pH do suco de laranja

Hipótese: utilizando o Excel, o ajuste linear descreve uma aproximação para os dados reais. Assim vamos obter uma função linear que permite calcular o pH do suco em função da quantidade de NaoH.

Pelo Método dos Mínimos Quadrados, obtivemos

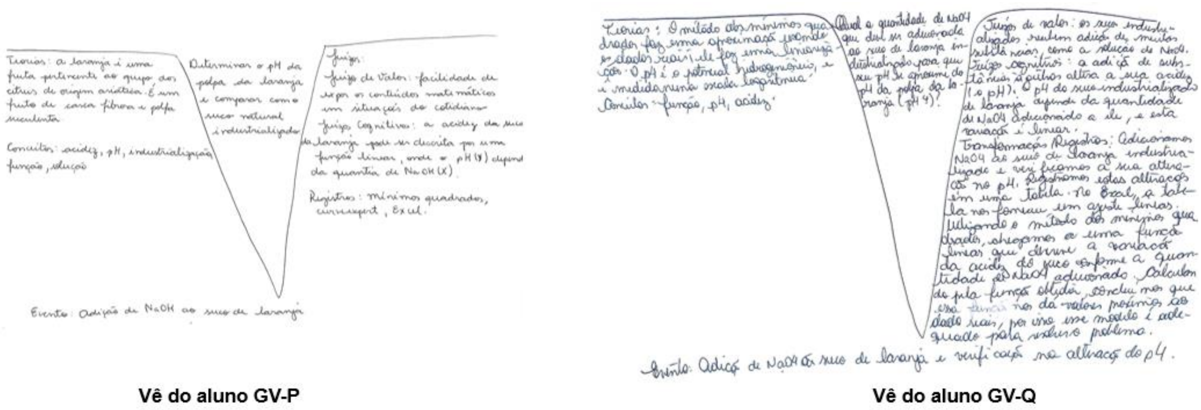
$$y = 0{,}369x + 3{,}8976$$

A partir desta função, é necessário adicionar aproximadamente 2,97 mL de solução de NaOH ao suco de laranja para que seu pH resultante seja 4 (valor do pH da polpa da laranja).

Fonte: Registros dos alunos.

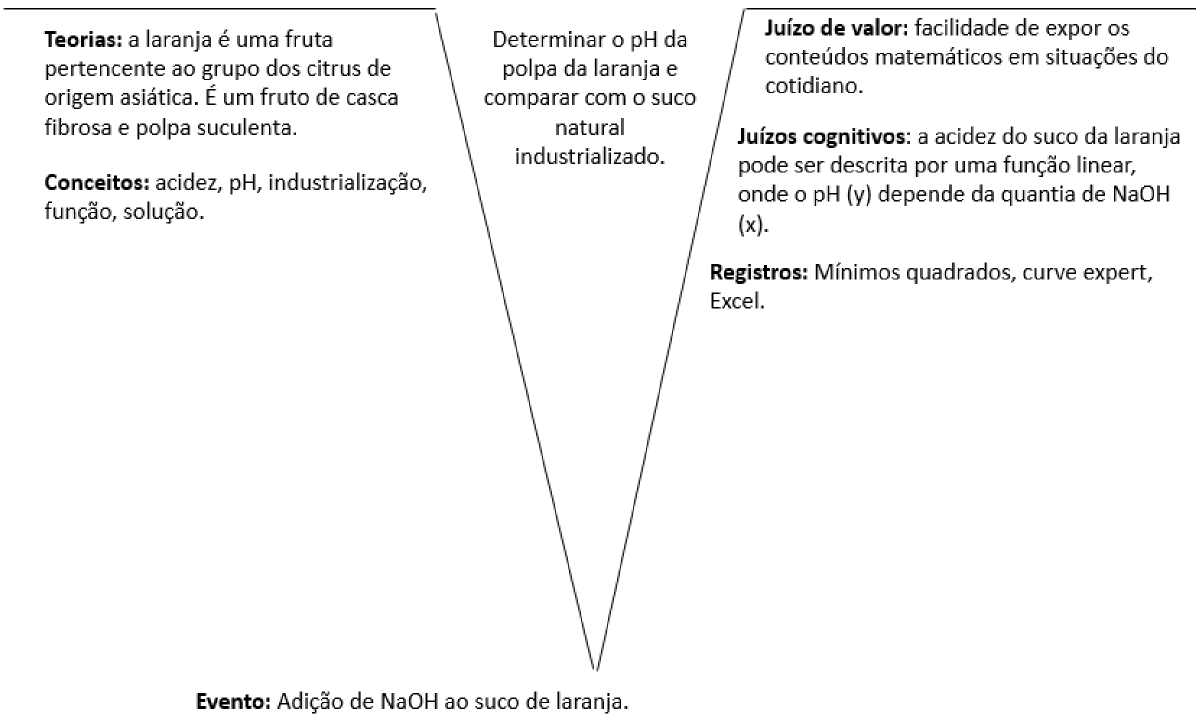
Finalizada a atividade de modelagem desenvolvida pelo Grupo GV, os alunos integrantes deste grupo foram orientados pela pesquisadora, segundo as indicações de Novak e Gowin (1984), para a elaboração de vês epistemológicos sobre a atividade de modelagem que desenvolveram. Os vês elaborados pelos alunos GV-P e GV-Q estão na Figura 28. Para uma melhor visualização, transcrevemos esses dois vês separadamente, conforme as Figuras 29 e 30.

Figura 28 - Vês epistemológicos produzidos originalmente pelos alunos do Grupo GV para a atividade de Modelagem Matemática sobre a acidez do suco de laranja



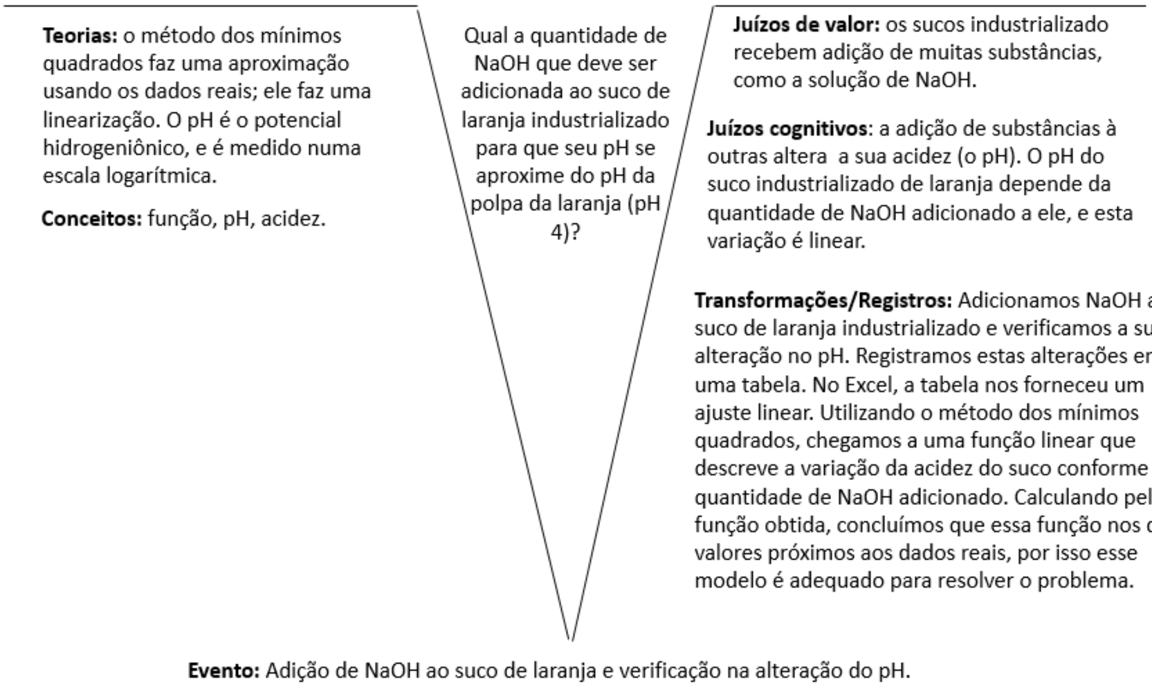
Fonte: Registros dos alunos.

Figura 29 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GV-P para a atividade de Modelagem Matemática sobre a acidez do suco de laranja



Fonte: Adaptado do registro de GV-P

Figura 30 - Vê epistemológico elaborado pelo aluno GV-Q sobre a atividade de Modelagem Matemática sobre a acidez do suco de laranja



Fonte: Adaptado do registro de GV-Q.

Uma classificação dos dois vês, conforme a “chave de pontuação” sugerida por Novak e Gowin (1984) está apresentada na seção 5.3 (Tabela 6), em que atribuímos uma pontuação para cada domínio dos vês construídos.

5.2 Análise Textual Discursiva das Atividades Desenvolvidas pelos Grupos GI a GVI

Iniciando o processo de análise desta atividade, realizamos uma leitura dos textos obtidos de seu desenvolvimento (transcrições das falas, relatório, vês epistemológicos). Em seguida, para desmontar esses textos, selecionamos recortes que consideramos mais representativos de características da Aprendizagem Significativa. Na Tabela 5, a primeira coluna dá exemplos de alguns fragmentos obtidos. Há mais fragmentos do que os que constam na Tabela 5, mas selecionamos exemplos a fim de compactar a Tabela 5 e mostrar os recortes que não contêm ideias repetidas.

Depois de extraídos os fragmentos dos textos, agrupamos aqueles que possuem características comuns, de modo a constituir as unidades de significado. Estas unidades compõem a segunda coluna da Tabela 5, que receberam um título que procura representar as ideias gerais principais dos fragmentos que as compõem.

Para a categorização, unimos unidades de significado que representam ideias comuns que remetem a algum aspecto da Aprendizagem Significativa. Estas unidades agrupadas constituem as categorias, na terceira coluna da Tabela. A codificação utilizada para indicar os fragmentos, na primeira coluna da Tabela 5, refere-se ao Grupo-aluno(trecho). Assim, por exemplo, o código GII-E(8) refere-se ao trecho 8 obtido do aluno E pertencente ao Grupo GII. Lembramos que estes trechos foram obtidos das falas transcritas a partir dos arquivos de áudio obtidos durante o desenvolvimento das atividades ou durante a apresentação da APCC, bem como trechos dos relatórios ou dos vês epistemológicos.

Tabela 5 – Processo de Análise textual discursiva sobre as atividades de modelagem desenvolvidas pelos Grupos G1 a GV

Fragmentos	Unidades de Significado	Categoria
GI-A(3): "*a gente queria saber sobre o processo de fabricação da cerveja*" GI-B(7): "*é muito comum errar o amargor da cerveja, porque existe erro na quantidade de lúpulo, então pensamos em encontrar um jeito com matemática pra que ninguém erre mais"* GI-C(11): *"acho que todo mundo aqui conhece e aprecia cerveja, então é interessante pra todos saber um pouco mais"* GII-D(3): "*Essa ideia do barquinho de papel nós tivemos das aulas de Física, pensando que podemos usar também o que aprendemos lá".* GII-E(18): *"Se a gente estudasse esse problema com um barco de papel, a gente poderia pensar como fazer com os barcos grandes, de verdade".* GII-F(11): *"O que eu mais gostei foi que deu pra ver o movimento do barquinho acontecendo com aquilo que a gente fez".* GII-G(23): *"No começo a gente pensou que não ia dar certo, mas depois ficou legal porque fomos estudando várias coisas sobre o movimento".*	Interesse pelo tema da atividade e/ou em obter uma solução para o problema	**Motivação para aprender**

GII-H(12): *"Eu pensei também nessa ideia do impulso no barquinho, porque já tinha visto algo parecido num vídeo e achei interessante de fazer e estudar o que acontece".* GIII-I(4): *"Por estar presente em nosso dia a dia, a cinética foi escolhida como tema desse trabalho, utilizando a superfície de contato como exemplo."* GIII-J(9): *"é importante entender como funciona uma reação como essa, porque ela acontece muito em situações da indústria, por exemplo"* GIII-K(14): *"nesse caso da velocidade da dissolução da pastilha a gente pode pensar... se é mais rápido colocar na água uma pastilha inteira, ou partir em vários pedacinhos"* GIV-L(15):*"O principal motivo de escolher esse tema foi porque a gente queria também fazer experimentos no laboratório".* GV-P(13):"*Eu e a minha família fazemos e compramos suco de laranja, então eu fiquei pensando no que eu poderia estudar sobre o suco".*		
GI-B(32): "*determinamos que a imagem da função vai de 1 a 100 IBU"* GI-C(19): "*nessa função, o amargor da cerveja varia de acordo com a quantidade de lúpulo*" GII-D(14): "*aqui a gente usou aquela ideia que a professora já passou pra gente"* GIII-I(17): "f*oram coletados dados de velocidade de dissolução de uma pastilha antiácido no laboratório, e a partir destes dados foi obtida uma função linear de primeiro grau"* GIII-J(3): "*Com o objetivo de se obter a velocidade de diluição da pastilha, ou seja, a velocidade em função do tempo, chegou-se a função de primeiro grau"* GIII-K(18): "*Como o objetivo deste trabalho foi achar uma função que representasse a velocidade de dissolução de uma pastilha, através da derivada dessa função pode-se encontrar a aceleração, e através integral achamos a variação de espaço*." GIV-N(27):"*Aí deu pra começar a entender a variação que estava*	Buscar solucionar o problema utilizando os conceitos do cálculo apresentados nas aulas	

acontecendo". GV-Q(31):*"Eu vi que podia pensar numa reta".*		
GI-A(8): "*o amargor da cerveja é conferido pelas iso-humulonas oriundas do processo de isomerização do lúpulo"* GI-B(11): "*o padrão de qualidade do amargor e a sua variação garantem a estabilidade organoléptica"* GI-C(4): "*a fermentação é um processo importante na fabricação da cerveja".* GII-G(24):*"A atração entre as moléculas da água é a tensão superficial".* GIII-I(18): "*a cinética é a área da química que se preocupa com as velocidades ou grau de velocidade das reações"* GIII-J(21): *"A maioria das reações que consideramos é homogênea, envolvendo gases ou soluções líquidas"* GIII-K(24): "*Quando os reagentes em fases diferentes, por exemplo, um gás e um sólido, a reação sólida esta limitada a área de contato. Soluções que contem sólidos tendem a prosseguir mais rapidamente*" GIV-O(34):*"A crioscopia é o estudo da diminuição da temperatura de congelamento de um líquido causado pelo soluto não volátil."* GV-P(30): *"O pH é o potencial hidrogeniônico".*	Conhecimentos da Química	**Aprendizagem extra-matemática**
GI-A(12): "*dizer que a função é crescente significa que quanto mais lúpulo mais amarga é a cerveja"* GI-B(14): "*a alta maltose é produzida a partir do milho"* GI-C(10):"*a fervura do mosto libera os iso-alfa-ácidos"* GII-D(9): "*essa equação é exatamente igual a equação do movimento retilíneo uniforme da Física"* GII-E(13): "*a massa tem relação direta com a velocidade através do impulso"* GII-F(7): "*a análise do movimento é um problema fundamental em Física, e a forma mais simples de abordá-la é considerar os primeiros conceitos que intervêm na descrição do movimento".* GIII-I(10):*" Estudar a cinética química*	Aplicações de conceitos de outras áreas do conhecimento	

ajuda a decidir em situações do cotidiano. Podemos acelerar a velocidade da dissolução da pastilha aumentando a quantidade de água, por exemplo.” GIV-M(26):*”A criometria é uma ferramenta química que não se limita na utilização em laboratórios científicos/químicos, mas possui uma aplicabilidade no cotidiano da sociedade”.* GV-P(37): *“O sucos industrializados recebem adição de muitas substâncias”.*		
GI-A(19):”*visitamos uma cervejaria e conversamos com o mestre cervejeiro”* GI-B(15): “*encontramos na internet a tabela periódica da cerveja”* GI-C(25): “*de acordo com o site da cerveja artesanal Karavelle, o Brasil só perde para a Alemanha em variedades de cerveja”* <u>As informações necessárias para a inteiração com os temas escolhidos foram obtidas de livros e de sites especializados da internet, por todos os Grupos, conforme indicado nas referências dos relatórios.</u>	Utilização de materiais informativos (sites, livros, consulta a um profissional)	**Material potencialmente significativo**
<u>Desenvolvimento matemático durante a fase de Matematização e Resolução das atividades dos Grupos GI a GV, conforme os Quadros 2 a 6.</u>	Conhecimentos de matemática básica	**Presença de subsunçores**
GI-A(36): *“Eu já sabia que o amargor da cerveja é medido em IBU”.* GII-D(17): ”*as moléculas de água possuem uma atração muito forte entre si, e essa atração é chamada de tensão superficial”* GII-E(29): “*as moléculas que estão na superfície da água só são atraídas por moléculas abaixo e ao lado dela, criando uma película elástica na superfície”* GII-F(44): “*a diferença de tensão no meio faz com que gere um impulso sobre o barquinho de papel”* GIII-J(27): *“No dia a dia, todo mundo já dissolveu algum coisa, e a gente já sabe que demora um tempinho pra dissolver tudo, dependendo da quantidade e da temperatura da água, por exemplo”.* GIV-M(12): *“É comum usar alguma substância no nosso dia a dia pras*	Conhecimentos sobre outras áreas	

coisa gelarem ou esquentarem mais rápido". GV-Q(41): *As substâncias que são adicionadas nos sucos, e em outras bebidas, são prejudiciais a nossa saúde".*		
GI-A(23)*"a maior parte dos açúcares foi metabolizada em álcool etílico, gás carbônico, e álcoois superiores"* GI-B(8): "*ocorre a saturação do CO_2, a clarificação através da decantação de partículas e resíduos da fermentação e maturação dos compostos".* GII-G(24):*"A atração entre as moléculas da água é a tensão superficial".* GIII-I(25):*" Ao diminuir cada vez mais a massa a ser diluída, o valor da velocidade também diminui. É normal que isso ocorra à medida que a reação prossegue, pois a concentração dos reagentes decresce*.*"* GIII-J27): "*Existem alguns fatores que influenciam a velocidade de reação: Estado físico dos reagentes; Concentrações dos reagentes; Temperatura na qual a reação ocorre; Presença de um catalizador*." GIV-O(34):*"A crioscopia é o estudo da diminuição da temperatura de congelamento de um líquido causado pelo soluto não volátil."* GV-P(30): *"O pH é o potencial hidrogeniônico".*	Conhecimentos sobre química	
<u>A representação dos dados coletados por meio de Tabelas, a utilização de software para perceber o comportamento dos dados, e o método utilizado para a obtenção do modelo estiveram presentes em todas as atividades analisadas, conforme os Quadros 2 a 6.</u>	Utilização de gráficos, desenhos, esquemas, cálculos, tabelas	**Múltiplas representações**
GI-B(38): *"Tem que prestar atenção aqui, na tabela que depois dá o gráfico, porque é isso que mostra o que tá acontecendo com os valores... então daí a gente vai ver que função é essa".* GII-F(41): *"Veja aqui que a tela tá mostrando a posição do barco, e é daí que a gente vai começar a pensar na resposta".* GIII-I(12):"*Com o objetivo de se obter a velocidade de diluição da pastilha, ou seja, a velocidade em função do*	Tentativas de resolução/generalização individuais ou com o grupo, sem intervenção da professora ou da pesquisadora	**Estratégias próprias de resolução**

tempo, chegou-se a função de primeiro grau” GIV-M(4): “*uma opção é fazer um gráfico pra ver o que está acontecendo com esses valores... pela tabela dá pra ver que eles aumentam”* GIV-N(18): “*a gente tem que pensar se isso daqui [referindo-se ao comportamento dos dados] vai continuar assim sempre”* GIV-O(35): “*como faz pra achar uma função com isso que temos? Aqui tem muitos pontos e eu sei que com dois pontos dá pra achar uma reta”* GV-P(34): “*Através dos dados coletados com a prática, foi possível criar um gráfico a partir deles e achar uma função que melhor expresse a situação”* GV-Q(19): *“Utilizando o programa “Excel”, percebeu-se que a função que melhor se adequou dentre as outras apresentadas foi a linear de primeiro grau”*		
Professora: “*qual a diferença, do que está escrito aí na lousa, entre incógnita e variável?”* GI-B: “*incógnita é o que você quer achar e a variável...”* Professora: “*a variável varia. As incógnitas, quando você determinar o valor de a e de b, vão ser aquelas incógnitas pro seu modelo”*	Questionamentos fundamentados, dúvidas	**Compartilhar significados**
GII-D(13): “*todo mundo aqui sabe como resolve essa derivada?”* Aluno ouvinte: *“Essa a gente faz daquele jeito mais simples, que dá uma função linear”* GII-E(19): “*E esse resultado representa o que, nessa situação?”* Aluno ouvinte: “*a velocidade... a velocidade do impulso...*	Discussão/Diálogo com a classe	
GI- A(45): *“Isso aqui é como a professora já falou na aula... que uma coisa depende da outra. Quer dizer que quando uma quantidade varia, a outra varia também... aumenta ou diminui. Então é a mesma coisa que aconteceu aqui: você coloca mais lúpulo na cerveja e ela aumenta o amargor... quer dizer que o amargor da cerveja depende de de quanto lúpulo você põe na receita”.* GII-E(40): *“Qualquer coisa que esteja*	Sugestão de aplicações de um conceito	**Aplicação do conhecimento a situações novas**

se movimentando, assim como fizemos com o barco, se tiver uma forma de gravar esse movimento... tipo, como é o trajeto de um objeto, dá pra fazer esse estudo do trajeto". GIII-K(18): *E não é só nesse caso que vai aparecer desse jeito. Tem muitas reações que também se comportam assim".* GVI-O(25) "*acho que aqui todo mundo já viu sistemas, sistemas lineares, a gente já resolveu coisas assim e é assim que a gente chegou nos valores a e b".* GV-P(31): "*do mesmo modo que a gente usou esse método pra chegar aqui nessa função, ele também pode ser usado com outro problema, que tenha um comportamento parecido e que pode ajudar a resolver".*		

Fonte: Elaborada pela autora.

Finalizado o processo de categorização, o passo seguinte indicado para a análise discursiva é a produção de um metatexto, que revela as compreensões que emergiram como resultado das fases cumpridas anteriormente. As relações entre categorias e unidades de significado irão compor este metatexto, que é apresentado na seção 5.4, quando "costuramos" todas as categorias obtidas das análises das cinco atividades descritas neste trabalho.

5.3 CLASSIFICAÇÃO DOS VÊS EPISTEMOLÓGICOS ELABORADOS PELOS ALUNOS SOBRE AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS

Considerando os vês epistemológicos produzidos pelos alunos dos Grupos GI a GV, conforme as figuras da seção 5.1, avaliamos cada um dos componentes de um vê utilizando a "chave de pontuação" sugerida por Gowin (1984), conforme mencionado no Capítulo 3 (Tabela 2) e organizamos a Tabela 6. Apesar desta forma de classificação dos vês ser quantitativa, por se constituir de um modo de atribuir pontos aos domínios do vê, consideramos que olhar para cada componente de um vê construído por um aluno, pode nos permitir uma visão mais específica sobre cada aspecto em que os alunos tiveram mais êxito ou mais dificuldade, tanto sobre a compreensão de algum domínio quanto sobre a sua elaboração.

Para facilitar a leitura, repetimos a Tabela 2 utilizada para atribuir pontos aos vês.

Tabela 2 – Chave de pontuação para vês epistemológicos

Pontos atribuídos	Critérios
Questão central	
0	Não está identificada nenhuma questão central
1	Está identificada uma questão, mas não se refere aos objetos e ao acontecimento principal ou ao lado conceitual do vê
2	Está identificada uma questão central; inclui conceitos, mas não sugere objetos ou o acontecimento principal ou estão identificados acontecimentos ou objetos errados
3	Está claramente identificada uma questão central, inclui conceitos a serem utilizados e sugere o acontecimento principal e os objetos correspondentes
Objetos/Acontecimentos/Evento	
0	Não se identificam acontecimentos nem objetos
1	Estão identificados o principal acontecimento ou os objetos e são consistentes com a questão central, ou estão identificados um acontecimento e objetos, mas são inconsistentes com a questão central
2	Está identificado o acontecimento principal e os objetos correspondentes, e há consistência com a questão central.
3	Sucede o mesmo que anteriormente, mas também são sugeridos os dados que se vão registar.
Teoria, princípios e conceitos	
0	Não se identifica o lado conceitual
1	Identificam-se alguns conceitos, mas sem quais quer princípios ou teorias, ou um dos princípios que se apresenta inicialmente é o juízo cognitivo que se pretende estabelecer
2	Identificam-se conceitos e, pelo menos, algum tipo de princípios (conceitual ou metodológico), ou identificam-se conceitos e a teoria relevante
3	Identificam-se conceitos e dois tipos de princípios, ou identificam-se conceitos, um tipo de princípios e uma teoria relevante.
4	Identificam-se conceitos, dois tipos de princípios e uma teoria relevante
Registros/Transformações	
0	Não se identificam quaisquer registos ou transformações
1	Identificam-se registos, mas são inconsistentes com a questão central ou com o acontecimento principal
2	Identificam-se registos ou transformações, mas não ambos
3	Identificam-se registos para o acontecimento principal; as transformações são inconsistentes com o propósito da questão central

4	Identificam-se registos para o acontecimento principal; as transformações são consistentes com a questão central e com o nível escolar e a capacidade do estudante
Juízos cognitivos	
0	Não se identifica nenhum juízo cognitivo
1	O juízo não está relacionado com o lado esquerdo do “Vê”
2	O juízo cognitivo inclui um conceito utilizado num contexto impróprio ou inclui uma generalização que é inconsistente com os registros e as transformações.
3	O juízo cognitivo inclui os conceitos da questão central e deriva dos registros e transformações.
4	Sucede o mesmo que anteriormente, mas o juízo cognitivo conduz a uma nova questão central.

Fonte: Adaptado de Gowin (1984).

Na Tabela 6 a seguir apresentamos a pontuação atribuída aos vês (coluna 1), conforme os critérios listados na Tabela 2.

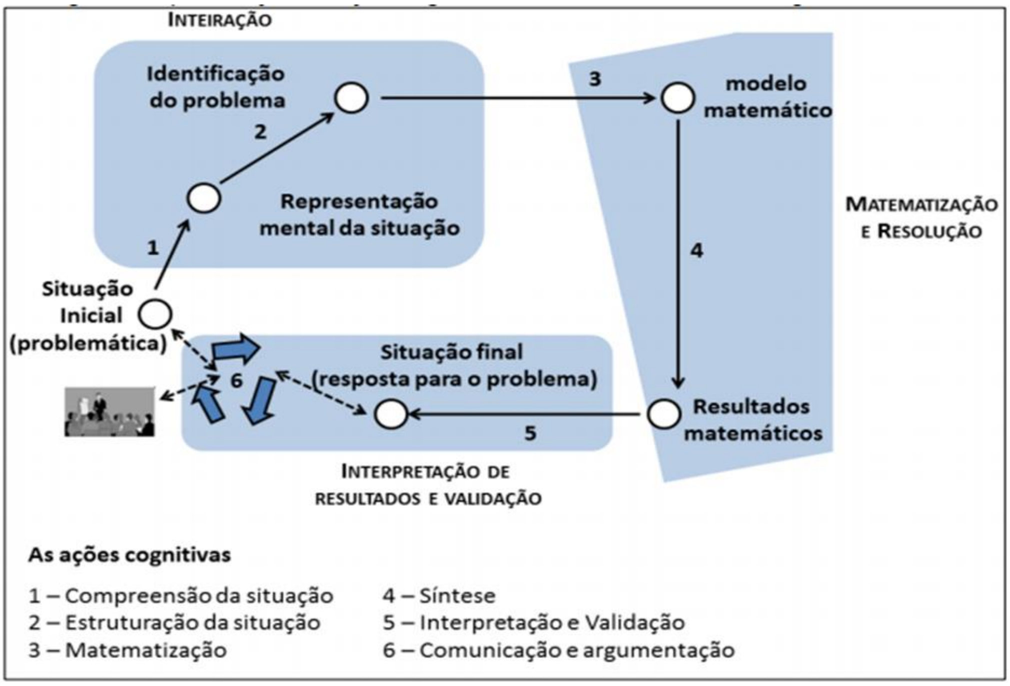
Tabela 6 - Classificação dos vês epistemológicos pela atribuição de valores aos seus domínios

Vê	**Pontuação Atribuída**					
	Questão Central	**Evento**	**Teoria/Princípios/ Conceitos**	**Registros/ Transformações**	**Juízos Cognitivos**	**Total**
Fig. 13	3	0	2	1	1	7
Fig. 14	3	2	2	2	3	12
Fig. 15	3	2	2	1	2	10
Fig. 16	3	3	3	4	2	15
Fig. 18	3	2	2	3	2	12
Fig. 19	2	2	3	4	2	13
Fig. 20	2	1	2	1	1	8
Fig. 22	3	2	3	3	2	13
Fig. 23	2	2	1	2	2	9
Fig. 24	2	2	2	1	2	9
Fig. 25	3	1	3	1	1	9
Fig. 27	2	1	1	1	0	5
Fig. 28	2	1	2	1	0	6
Fig. 29	3	2	1	2	1	9
Fig. 30	2	2	2	1	1	8

Fonte: Elaborada pela autora.

Esta avaliação dos vês (Tabela 6), apesar de quantitativa, permite perceber algumas fragilidades dos alunos na sua elaboração. Conforme as orientações constantes da Tabela 2, não é suficiente verificar se o aluno “completou” todos os domínios do vê, mas sim se conseguiu relacionar ou indicar relações entre suas partes componentes. A Tabela 6 revela que alguns dos vês analisados apresentam algumas inconsistências, ou seja, não atingem o objetivo inicial proposto por Novak e Gowin (1984) para a elaboração de um vê: “desempacotar conhecimentos”. Em outras palavras, alguns alunos não conseguiram expressar todo o conhecimento e os procedimentos utilizados no desenvolvimento da atividade de modelagem. E isto pode ser decorrente de dois motivos: o aluno pode não ter adquirido habilidade suficiente na elaboração de um vê ou não adquiriu conhecimento suficiente para ser “desempacotado”. Apesar disso, podemos lançar olhares para um vê e suas partes constituintes, no que se refere a correpondências implícitas entre as partes do vê e as ações dos alunos em um ciclo de modelagem. Considerando o ciclo

Figura 2 – As fases da modelagem e as ações cognitivas dos alunos



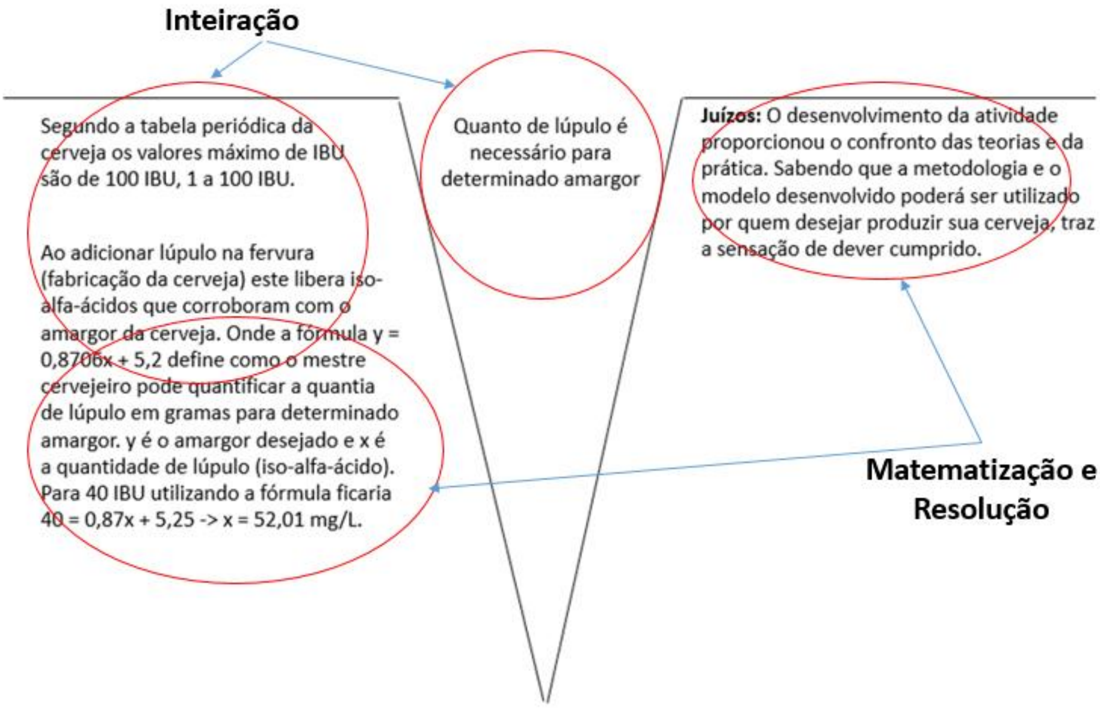
Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 19).

de modelagem da Figura 2, os vês das Figuras 8 e 9, e tomando como exemplo alguns vês produzidos pelos alunos percebemos possíveis correspondências. Consideremos, por exemplo, o vê da Figura 13, retomado a seguir na Figura 31.

A questão central do vê constitui o problema elaborado pelos alunos, o qual pretendiam resolver com a atividade de modelagem, pertencente à fase da inteiração. Aspectos referentes ao processo de inteiração sobre o tema correspondem a teorias e princípios pertencentes ao domínio conceitual do vê. Os registros e os juízos de valor, parte do domínio metodológico do vê apresentam indicações das fases de matematização e resolução, em uma atividade de modelagem.

A Figura 31 procura relacionar, ou indicar correspondências entre os domínios do vê epistemológico analisado (Figura 13) e as ações do aluno no desenvolvimento de uma atividade de modelagem.

Figura 31 - Possíveis correspondências entre os domínios de um vê epistemológico e as fases da Modelagem Matemática

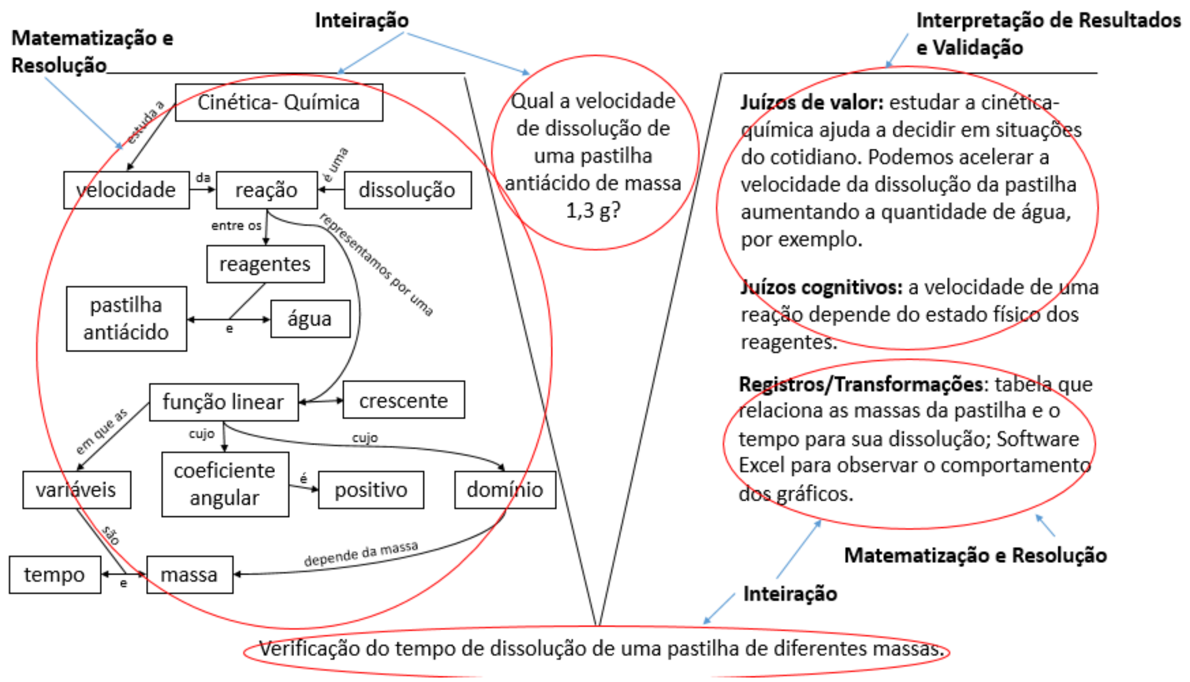


Fonte: Elaborada pela autora.

Ressaltamos que neste vê (Figura 31 obtida a partir da Figura 13), apesar de sua análise (Tabela 6) demonstrar ser um vê “insatisfatório”, no qual verificamos também alguns equívocos quanto ao “preenchimento” dos componentes de um vê corretamente – houve inversão de componentes dos domínios conceitual e metodológico – ainda assim percebemos correspondências entre as ações de pensar e fazer do aluno com as fases da modelagem.

Procuramos ilustrar a mesma análise e possíveis correpondências a partir de outro vê, conforme mostra a Figura 32, obtida a partir do vê ilustrado na Figura 22. Observe-se na Tabela 6 que a este vê atribuiu-se uma pontuação mais alta, num total de treze pontos. Neste caso temos a identificação da situação-problema (questão-central)/situação inicial (evento) e a apresentação de ideias importantes do tema (domínio conceitual), que se referem à fase da inteiração da modelagem, presentes em partes do vê. Temos também elementos matemáticos considerados para a contrução do modelo (domínio conceitual), que constam também no item “registros/transformações”, indicando as ações na fase de matematização e resolução. Nos itens “juízos de valor” e “juízos cognitivos” observamos interpretações e comunicações, correspondentes à fase de interpretação de resultados e validação.

Figura 32 - Possíveis correspondências entre os domínios de um vê epistemológico e as fases de uma atividade de Modelagem Matemática.



Fonte: Elaborada pela autora.

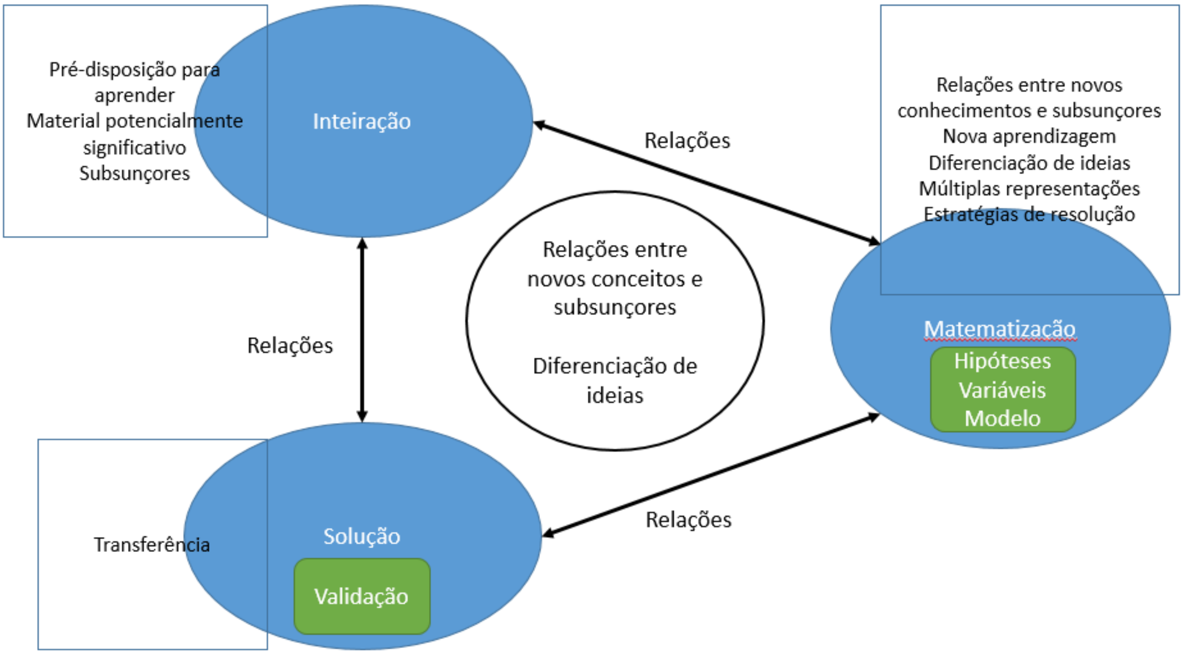
Olhando para mais vês, mais ou menos pontuados na Tabela 6, é possível perceber ações inerentes às fases da modelagem nos domínios do vê. Há que se considerar que alguns vês (os mais completos, mais bem estruturados e, consequentemente, mais pontuados) apresentam mais claramente estas ações e, mesmo os vês menos pontuados, evidenciam estas ações, mesmo que em menor quantidade ou menos claramente.

Durante a fase de inteiração, quando os alunos escolhem um tema, buscam informações necessárias e relevantes e elaboram um problema que têm interesse em resolver, demonstram predisposição para aprender, afinal, segundo Ausubel (2003), a motivação é um dos indicativos de que o estudante deseja aprender significativamente. Além disso, a escolha do tema também indica a presença de subsunçores na estrutura cognitiva dos alunos. Durante a inteiração também há contato com material potencialmente significativo, já que a busca por informações se dá em livros, revistas, sites etc.

Durante a fase de matematização e resolução é o momento em que o aluno faz abstrações e generalizações. Isto requer subsunçores, relações com novos conhecimentos – aliando os conhecimentos matemáticos aos conhecimentos sobre o tema da atividade. Observamos nesta fase também o uso de múltiplas representações, como o uso de tabelas, gráficos de dispersão e de funções, relações matemáticas e explicações em liguagem natural. É também nesta fase que os alunos elaboram suas estratégias de resolução.

Na fase da interpretação de resultados e validação em que o aluno recorre novamente às informações obtidas durante a inteiração, ele avalia se o seu modelo e sua resposta para o problema são válidos. Isto muitas vezes requer a transferência de conhecimentos para variadas situações. Ressaltamos também que na transição entre as fases durante uma atividade de modelagem ocorre o estabelecimento de relações – entre novos conceitos e os subsunçores – e a diferenciação de ideias. A Figura 33 a seguir ilustra ações inerentes à aprendizagem significativa requeridas nas fases da modelagem. Esta Figura será retomada na seção 5.4 e discutida no âmbito das novas compreensões emergentes do processo de análise desta pesquisa.

Figura 33 – Indicativos de aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática



Fonte: Elaborada pela autora.

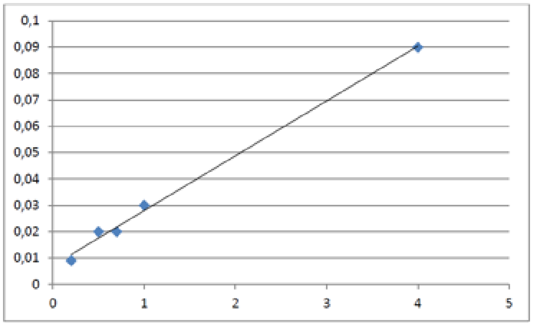
5.4 Resultados das Análises: O Metatexto

Considerando o referencial teórico utilizado nesta pesquisa, vislumbramos um olhar sobre a aprendizagem dos alunos ao “percorrer” um ciclo de Modelagem Matemática. Não nos atentamos somente para as fases do ciclo que são completadas, mas para as relações entre elas e para as ações efetuadas em cada uma. Durante a *inteiração* com o tema, quando os alunos realizam pesquisas de diversas naturezas, o interesse pelo assunto parece aumentar e ao mesmo tempo se refinar. Isto porque aprender mais sobre um determinado assunto gerou dúvidas e aguçou interesses específicos. Nesta pesquisa, o interesse específico ficou evidente, desde a escolha do tema, quando os alunos optaram por desenvolver estudos sobre assuntos relacionados à Química. Em todos os casos, os grupos escolheram desenvolver atividades sobre temas com os quais já tinham alguma familiaridade, isto é, nenhum grupo estudou algo completamente novo. Aqui, evidenciamos a relação do início do ciclo de modelagem com as três condições para a ocorrência de aprendizagem significativa: durante a inteiração, quando os alunos obtêm informações sobre o tema escolhido, estão **motivados**, querem aprender. Ao mesmo tempo, expõem-se a **materiais potencialmente significativos**, que têm significado lógico, para inteirar-se sobre o tema. O fato de escolherem temas com os quais já têm alguma familiaridade demonstra a presença de **subsunçores** em sua estrutura cognitiva, que dizer, já possuíam conhecimentos específicos relevantes aos quais as novas informações podem se associar e se diferenciar.

Durante a *matematização e resolução*, o estabelecimento de *hipóteses* e a definição de *variáveis* pressupõe relações entre os novos conhecimentos e os subsunçores. Isto porque, nesta fase, há que se relacionar as informações novas advindas da *inteiração* com o conhecimento já presente na estrutura cognitiva. São estabelecidas novas relações entre o novo conhecimento e os conhecimentos prévios específicos para que se dê um tratamento matemático às informações. A elaboração de um *modelo* pode requerer novas aprendizagens: desde a observação do comportamento dos dados, a utilização de programas e softwares, até os métodos matemáticos para que se chegue ao modelo. A obtenção do modelo matemático também propicia a **diferenciação de ideias**, as **múltiplas representações** (gráficos, tabelas, lei de uma função) e a **elaboração de estratégias próprias** de resolução. O Quadro 6 ilustra as múltiplas representados de informações, dados e estratégias utilizadas pelo Grupo GIII no desenvolvimento da atividade de modelagem.

Quadro 7 - Diferentes representações apresentadas pelo Grupo GIII, na atividade de modelagem sobre cinética-química

Massa (g)	Velocidade (g/s)
4	0,09
1	0,03
0,7	0,02
0,5	0,02
0,2	0,009



Massa (g)	Velocidade (g/s) original	Validação (g/s)
4	0,09	0,09
1	0,03	0,03
0,7	0,02	0,024
0,5	0,02	0,02
0,2	0,009	0,014
2		0,05
3		0,07
1,3		0,036

Massa (g)	Tempo (s)	Velocidade (g/s)
4	42	0,09
1	32	0,03
0,7	25	0,02
0,5	23	0,02
0,2	22	0,009

$$v(m) = 0,02.m + 0,01$$

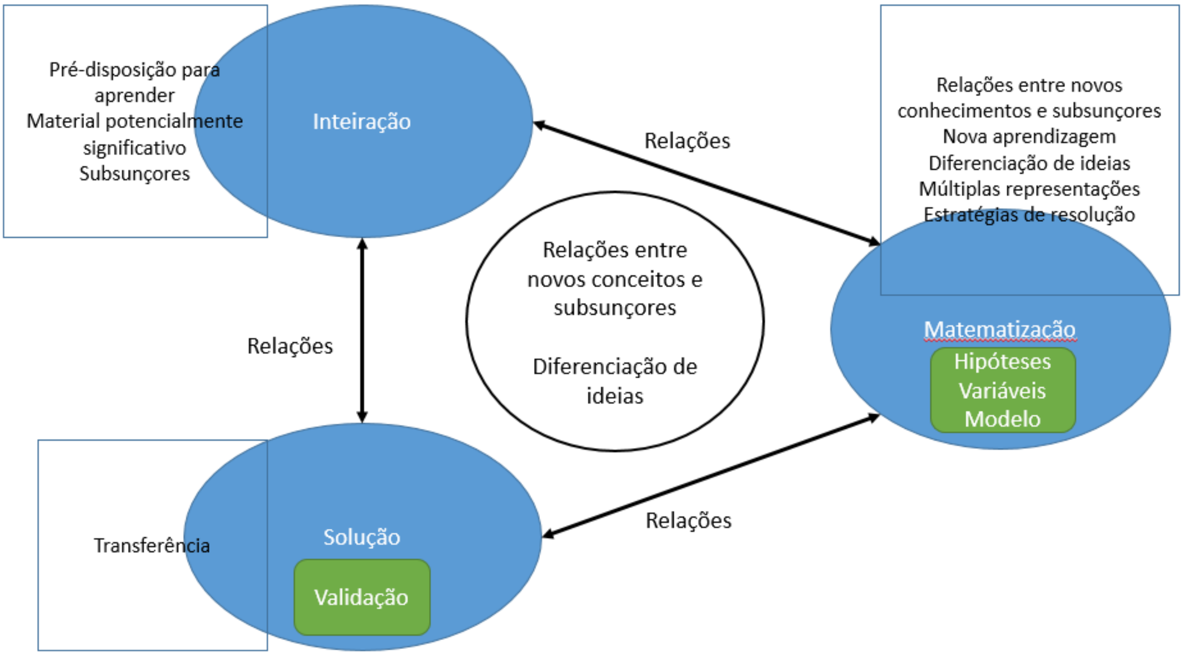
Fonte: Registros dos alunos

A *interpretação de resultados e validação* para a situação problemática inicial requer revisitas às fases anteriores do ciclo de modelagem. Para que o modelo obtido seja validado há que se olhar novamente para os dados iniciais e verificar a adequação do modelo à situação. Em alguns casos, o modelo pode ser reajustado. A solução obtida também precisa ser avaliada de acordo com as condições da situação inicial. Esta fase do ciclo evidencia o poder de transferência, quando conhecimentos já utilizados em outras situações podem ser aplicados a situações novas.

O que fica evidente em todo o ciclo de modelagem, em cada fase e nas transições de uma fase para a seguinte, bem como nas possíveis idas e vindas entre elas, é o estabelecimento de **relações** entre novos conceitos e conceitos específicos relevantes presentes na estrutura cognitiva do aluno. Cada fase exige que estas relações se estabeleçam à medida que o aluno avança nas fases do ciclo.

O esquema a seguir (Figura 33) pretende mostrar o entendimento de como elementos da aprendizagem significativa dos alunos aparecem nas fases do ciclo de modelagem.

Figura 34 – Indicativos de aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática



Fonte 1: Elaborada pela autora.

O desenvolvimento de atividades de modelagem do terceiro momento indicou nos alunos as aprendizagens já mencionadas em Vertuan, Silva e Borssoi (2017): os alunos coletaram dados em laboratório, o que implicou aprender os procedimentos relacionados a estas práticas e aos usos dos instrumentos; verificamos aprendizagens interpessoais, pela interação com os colegas do grupo, com os profissionais de laboratório e outros profissionais, bem como aprendizagens procedimentais e conceituais: demonstraram aprender a utilizar métodos e técnicas matemáticas, bem como conceitos relacionados à Química e a outras áreas do conhecimento.

Como discutido no Capítulo 3, o produto da aprendizagem significativa é o significado. Para Ausubel (2003), isto se traduz na capacidade de transformar significado lógico em significado psicológico – um significado altamente diferenciado e idiossincrático. Nos termos comuns a Ausubel (2003) e a Ogden e Richards (1972), o produto da aprendizagem significativa é o significado conotativo, partindo de significados denotativos. Olhando para todas as produções dos alunos, analisadas nesta pesquisa até o momento, afirmamos que os alunos foram capazes de diferenciar estes significados. A Figuras 34 e 35 mostram a nossa compreensão, a partir da análise dos dados, de como as ações dos alunos nas fases do ciclo de modelagem, ao desenvolverem uma atividade, os levam destes significados denotativos para os significados conotativos. Do mesmo modo, identificamos nos vês epistemológicos analisados ações, procedimentos e conhecimentos inerentes a atividades de Modelagem Matemática. Ressaltamos que quando nos referimos as fases da modelagem, estamos considerando o ciclo proposto por Almeida e Vertuan (2012), conforme a Figura 2.

A aprendizagem significativa implica em interação cognitiva entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, uma dinâmica em que a diferenciação progressiva e a reconciliação intregrativa são processo básicos (MOREIRA, 2011). Para Moreira (2014), a Modelagem Matemática permeia tudo isso.

> Aprender e modelar estão intrinsecamente relacionados. Enquanto está modelando, o sujeito, o(a) aluno(a) no caso, está aprendendo e vice-versa [...] A aprendizagem significativa é cognitivamente ativa e a modelagem é inerente a essa atividade. Aprender significativamente envolve pensar, é claro, mas esse pensar envolve imaginar, fazer analogias, buscar diferenças e semelhanças, fazer aproximações, modificar, matematizar informatizar, analisar criticamente, teorizar, argumentar, etc., não necessariamente nesta ordem. Tudo isso para quê? Para ir modelando os novos conhecimentos recebidos, ou para ir construindo novos conhecimentos através da modelagem (p. 17)

A **negociação de significados**, conforme Novak e Gowin (1984), se dá pelo compartilhar de significados, ou seja, conceitos são apresentados aos alunos, que devem devolver aquilo que conseguiram aprender. De acordo com os resultados dessa devolução, o professor há que compartilhar significados novamente, até que a compreensão do aluno atinja o esperado pelo professor. Essa dinâmica de negociação não envolve somente professor e alunos, mas também os materiais de ensino e o contexto. Na atividade 1, por exemplo, esta negociação fica evidente em alguns momentos, pois o modo como foi desenvolvida essa atividade gerou ambientes favoráveis a esse tipo de interação. Durante a exposição de sua atividade para a turma, a professora deu início a um diálogo, no qual está implícita a tentativa de captar os significados adquiridos pelos alunos sobre o método dos mínimos quadrados:

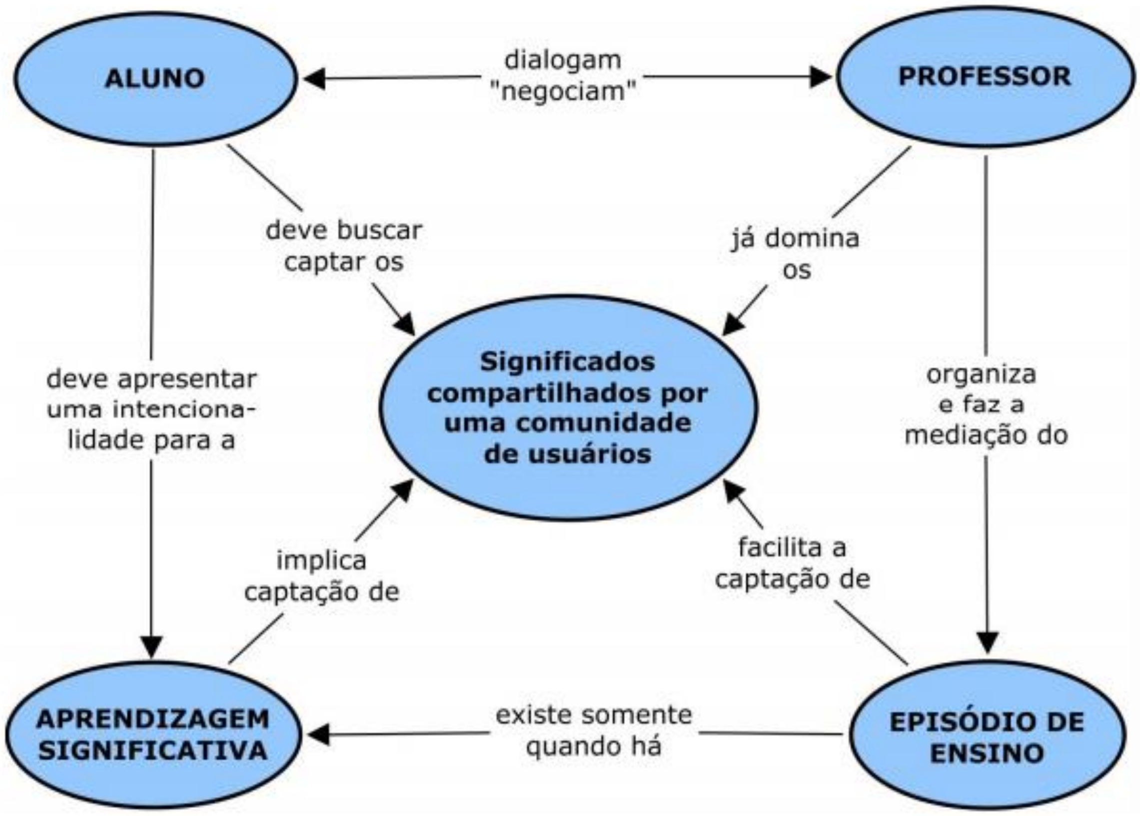
> *Professora: Por que vocês escolheram o método dos mínimos quadrados?*
> *G1: Porque, na verdade... assim, a gente sabia que dava uma reta, só que pelo Curve e pelo Excel...*
> *Professora: Tá, vou perguntar pra sala toda então: se eles colocaram os valores no plano cartesiano e usaram como hipótese que era uma reta, como que a gente faz para encontrar os valores a e b, se a gente não soubesse o método dos mínimos quadrados? Como determinar os valores de a e b?*

Quando a gente está estudando funções e tem uma reta, de quantos pontos você precisa para determinar a reta?
G1: Dois.
Professora: Por dois pontos, não é? Por dois pontos se determina uma reta. E se fosse uma parábola? Quantos pontos precisaria?
G2: Três.
Professora: Quantos parâmetros você tem na parábola, pra determinar? Quantos pontos tem ali (aponta para a lousa) pra determinar? Os valores de quem tem que determinar na função?
G1: a e b.
Professora: a e b, precisa de dois valores na função e aí se você tem dois pontos, por dois pontos não passa uma reta? No caso da função do 2º grau são três pontos. Mas qual é a diferença de usar dois pontos – aí você tem uma tabela com 23 pontos – qual a diferença de pegar dois pontos quaisquer da tabela e usar esse método dos mínimos quadrados?
G3: É que aí ele vai achar do momento que você tá querendo, e aqui ele é generalizado, ele tá pegando tudo.
Professora: Quando você pega dois pontos você só está considerando aqueles dois pontos.
G3: É só aquela parte ali.
G1: Por esse método aqui dá pra achar a taxa de erro.
Professora: Dá também.
G2: É que a gente quer alinhar, porque no gráfico a reta fica assim, por causa desses valores aqui...
Professora: Mas se escolhesse dois pontos também não alinharia?
G1: Pode ser...
Professora: Mas eu quero que vocês saibam porque vocês escolheram o método e não escolheram dois pontos. Porque se você fala que é linear, dois pontos determinam uma reta. A diferença não é alinhar. A diferença é que o método dos mínimos quadrados não considera somente dois pontos, considera todos os pontos que você colocou, que você tem. Por isso ele faz essa relação de somatórios de todos os x, que é somar todos aqueles primeiros valores da coluna, somatório de todos aqueles segundos valores, que são os valores y, depois eleva cada um desses termos da primeira coluna ao quadrado e soma todos. É isso que está escrito lá (aponta para a lousa) e depois multiplica cada um dos valores da primeira coluna pelos da segunda coluna. O resultado de cada operação é somado. Então quando o método faz isso, ele está fazendo a linearização desses valores que é o que o Excel faz quando a gente gera aquela curva de tendência. Então é isso. O método dos mínimos quadrados se aproxima mais de todos os pontos, ele vai mostrar qual a reta que se aproxima mais de todos os pontos.

Esse diálogo transcrito acima mostra o compartilhar de significados, em que fica evidente a não aquisição de significados, ou mesmo a aquisição de significados equivocados, tanto por respostas incorretas dadas pelos alunos, quanto por respostas insuficientes ou por não darem respostas. A professora repetiu indagações sobre os mesmos conceitos, utilizando conceitos mais específicos e particulares, tentando fazer com que os alunos chegassem sozinhos à capacidade de diferenciar os dois modos em questão de se obter uma reta. Este trecho da discussão é finalizado com a explicação da professora sobre a obtenção de um ajuste linear pelo método dos mínimos quadrados e representa um exemplo de negociação de significados.

Retomamos a Figura 6, considerando que há ensino quando há captação de significados, ou seja, um episódio de ensino ocorre quando o aluno capta os significados que o professor pretende que ele capte e que são aqueles aceitos por uma comunidade de usuários em um contexto que, é o da matéria de ensino.

Figura 6: Um esquema para a captação de significados em um episódio de ensino



Fonte: Moreira (2011).

Considerando o significado, nesta dinâmica de negociação de significados, Moreira (2011) enfatiza a necessidade de ensinar que o significado está nas pessoas, não nas palavras, nas coisas. Ou seja, que os significados são contextuais e conotativos. Novak e Gowin (1984) também citam a importância do contexto na negociação. Sob a ótica de Ogden e Richards (1972) o contexto é uma

situação significante, ou seja, os significados compartilhados em uma negociação dependem daquele contexto. Isso quer dizer que, em outra situação, por exemplo, os termos “função” ou “pontos” poderiam ter significados diferentes daqueles discutidos no contexto do diálogo considerado.

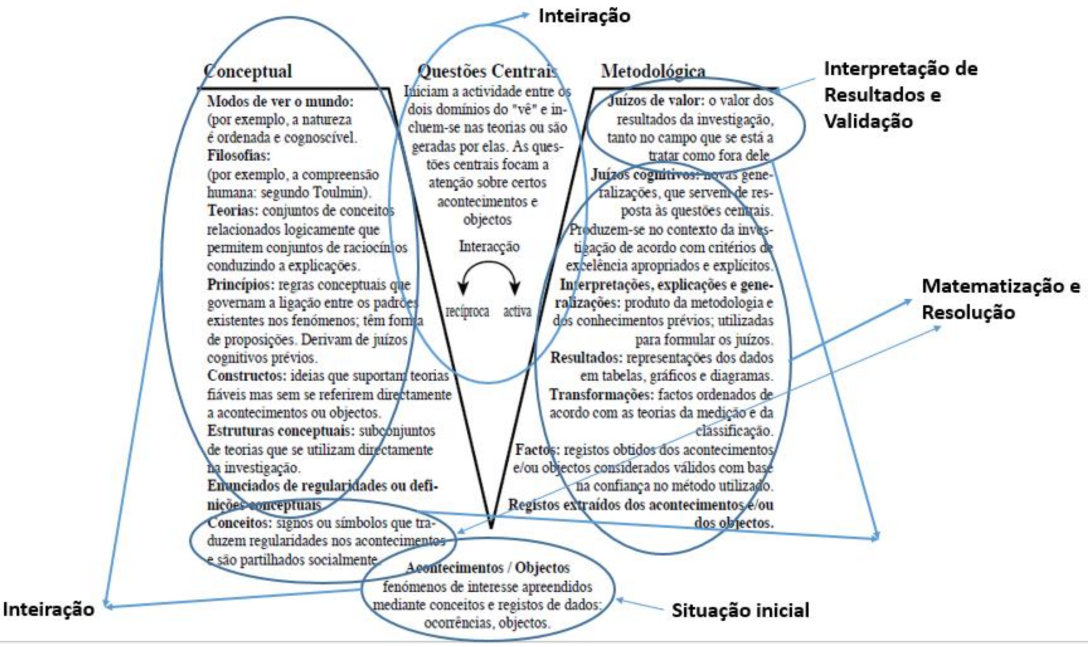
Os vês mostraram principalmente as relações e diferenciações entre os conceitos matemáticos, físicos e químicos das atividades. Os domínios do vê – conceitual e metodológico – e a interação demonstrada entre eles, juntamente com a questão central e o evento/acontecimento registrado evidenciam também o que os grupos desenvolveram em cada fase da atividade de modelagem. Em geral, a questão central do vê constituiu o problema a ser resolvido pelos alunos na atividade, enquanto o evento, na base do vê, foi composto pelo experimento realizado para a coleta de dados. O lado esquerdo do vê (domínio conceitual) apresenta itens verificados nas fases de *inteiração* e *matematização e resolução*. Na inteiração principalmente pelo levantamento de teorias e explicitação de conceitos utilizados ou necessários para a execução do experimento, e na solução pela necessidade de retornar a estas teorias e conceitos para a validação do modelo.

O domínio metodológico apresenta maior relação com a *matematização* na atividade de modelagem, principalmente nos itens registros e transferências, em que os alunos mostraram usar softwares, tabelas, gráficos e funções para auxiliar no desenvolvimento do modelo. Os juízos de valor apresentam relação com a fase da solução, pois nesta região do vê ficam explícitas a validade e até mesmo utilidade e importância do modelo obtido ou da resposta obtida para o problema/questão central. Os juízos cognitivos mostram alguma diferenciação dos conceitos adquiridos pelos alunos na fase de *inteiração*.

Considerando o ciclo de modelagem da Figura 2, os vês das Figuras 8 e 9, e o esquema de um vê epistemológico, observamos que questão central do vê constitui o problema elaborado pelos alunos, o qual pretendiam resolver com a atividade de modelagem, pertencente à fase da inteiração. A situação inicial está representada na base do vê. Aspectos referentes ao processo de inteiração sobre o tema também estão presentes no lado esquerdo do vê, correspondendo ao domínio conceitual. Isto porque é na fase de inteiração que os alunos levantam informações necessárias e relevantes para passar da situação inicial para a situação final. Neste caso, o aluno apresentou teorias, princípios e conceitos relacionados à atividade de modelagem. Ainda os princípios e conceitos também estão relacionados à fase de matematização e resolução, já que apresentam também simplificações e considerações matemáticas importantes para a resolução matemática do problema. Do lado direito do vê, o domínio metodológico, o aluno apresentou juízos de valor e cognitivos, e algumas transferências e registros realizados durante a atividade de modelagem. Estes componentes do vê podem estar associados também à matematização e resolução do problema, bem como a validação e interpretação de resultados.

Na figura seguinte (Figura 35) procuramos mostrar as relações entre os domínios do vê epistemológico e as fases da modelagem matemática.

Figura 35 - Relações entre os domínios do vê epistemológico e as fases da modelagem



Conforme a Figura 2, que representa as fases de uma atividade de Modelagem Matemática, como a entendemos nesta pesquisa, e os vês epistemológicos elaborados por Moreira (2014), percebemos a situação inicial da atividade, presente na base do vê. A fase de inteiração está relacionada à questão-central do vê, correspondente ao problema elaborado pelos alunos, inerente a esta fase, bem como informações constantes do domínio conceitual do vê. Neste caso, algumas proposições verificadas no vê correspondem às informações obtidas e necessárias para a compreensão da situação inicial e para a elaboração do problema.

Outras proposições observadas no vê correspondem a conceitos matemáticos utilizados na fase de resolução e matematização. O lado esquerdo vê, que corresponde ao domínio metodológico, também apresenta componentes que dizem sobre a matematização e resolução, pois considera os registros e as estratégias matemáticas utilizadas. Ainda neste domínio, os juízos cognitivos e os juízos de valor demonstram as conclusões dos alunos depois da obtenção da resposta para o problema e do confronto com os dados coletados e as informações obtidas durante a inteiração. Neste caso, os juízos se aproximam de considerações inerentes a fase de interpretação de resultados e validação, em uma atividade de Modelagem Matemática.

O contato com os dados analisados, seja pela utilização da análise textual discursiva, seja pela avaliação dos vês construídos pelos alunos, podemos propor uma compreensão do *continuum* aprendizagem mecânica-aprendizagem significativa, em que os extremos são os significados denotativos e conotativos, e o processo que avança na aquisição de significados é composto pelos tipos de aprendizagem, que se tornam mais complexos conforme o processo avança, sempre influenciado pelas três condições básicas para aprendizagem significativa propostos por Ausubel.

A Figura 36 procura ilustrar nosso entendimento sobre os estágios de possíveis avanços entre significado denotativo e conotativo. Finalmente, sintetizamos as novas compreensões emergentes decorrentes deste processo de análise utilizando um vê epistemológico, conforme a Figura 37.

5.5 CONCLUSÕES

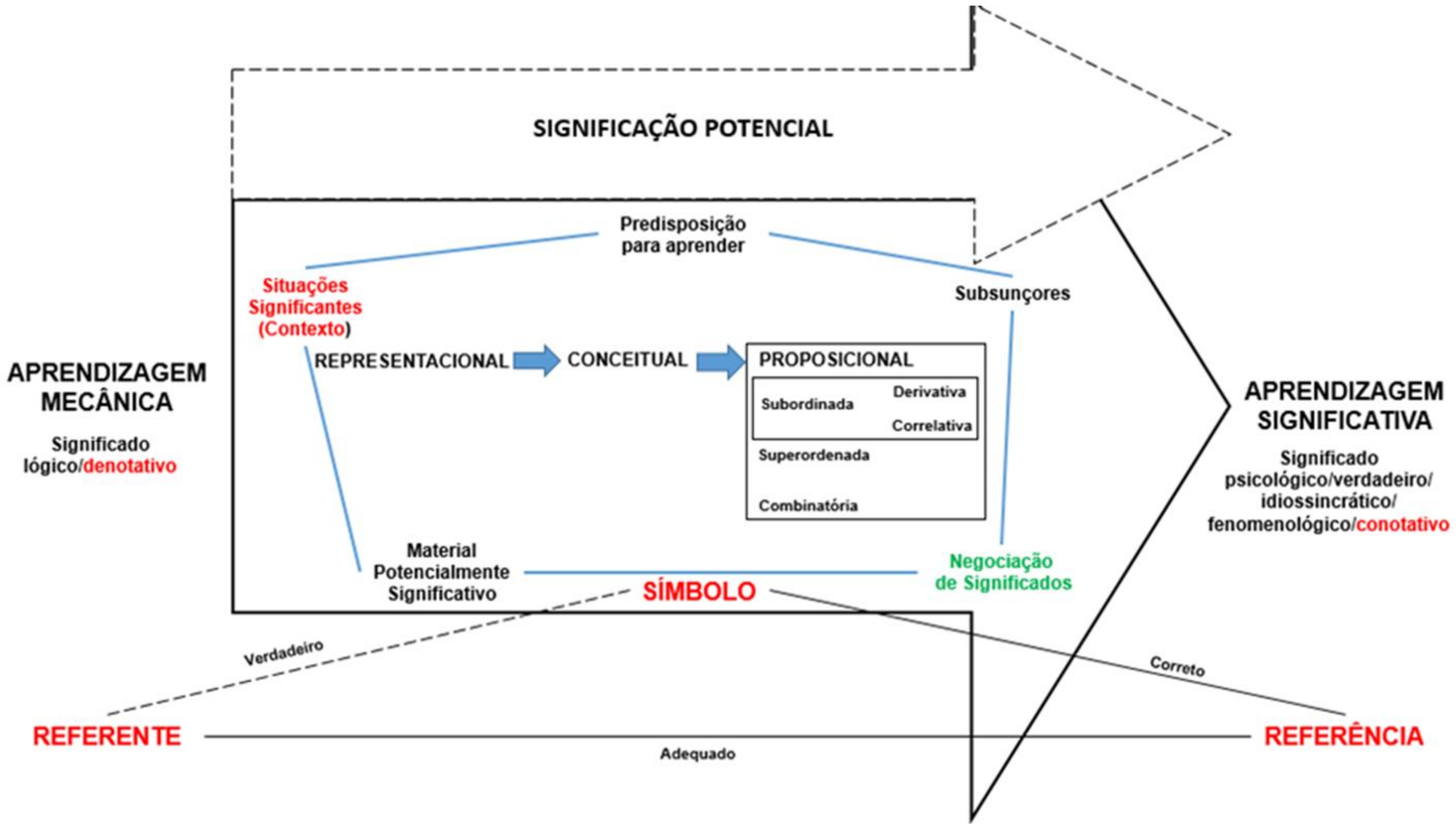
O percurso teórico-metodológico tem como finalidade **investigar a ocorrência de Aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática**. A investigação leva em consideração uma pesquisa empírica cuja análise de dados à luz do quadro teórico definido conduz à compreensão da Aprendizagem Significativa como processo. Esta compreensão, mediada pela teoria de Ausubel (2003) e pelas ponderações de Ogden e Richards (1972) sobre *significado* e pela utilização de vês epistemológicos (NOVAK; GOWIN, 1984) em atividades de

Modelagem Matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), aponta elementos que podem compor este processo, incluindo as suas relações.

Conforme ilustramos na Figura 36, na página seguinte, o ponto de partida para a Aprendizagem Significativa é o *significado lógico*. Só quando o aluno tem acesso a informações que têm significado lógico, seja por meio do livro didático, de *websites*, de filmes, revistas ou pelo próprio professor, o processo de Aprendizagem Significativa pode ser iniciado, considerando não apenas três, mas cinco condições: **material potencialmente significativo; a predisposição para aprender; os subsunçores; a negociação de significados; e o contexto.** Em contato com o **material potencialmente significativo** e **pré-disposto a aprender**, o aluno pode ser capaz de estabelecer novas relações entre o novo conhecimento e os conhecimentos prévios relevantes existentes em sua estrutura cognitiva, os **subsunçores**. No entanto, estas relações não podem ser consideradas sem a intervenção do professor, que é o responsável pela **negociação de significados**. É o professor que atua como mediador nesse processo, propondo e devolvendo significados aos alunos, numa relação dialógica que conduz aos significados esperados. Do mesmo modo, há que se considerar o **contexto**, no sentido de que os significados mudam de acordo com as situações, quer dizer, o significado pretendido ou esperado do aluno pertence a uma determinada situação específica e pode ter significados diferentes em outros contextos além daquele considerado na sala de aula, em uma atividade.

Compreendemos também a complexidade da Aprendizagem Significativa à medida que ela se diferencia em nível dos símbolos. Partindo da aprendizagem representacional, quando se estabelece uma correspondência

Figura 35 – Novas compreensões emergentes da pesquisa



entre um símbolo e um referente, é possível avançar para a aprendizagem conceitual, ou seja, é possível aprender que um conceito é representado por um símbolo específico. Quando se é capaz de aprender significados de combinações de conceitos, para além da união de significados em uma sentença, temos a aprendizagem proposicional.

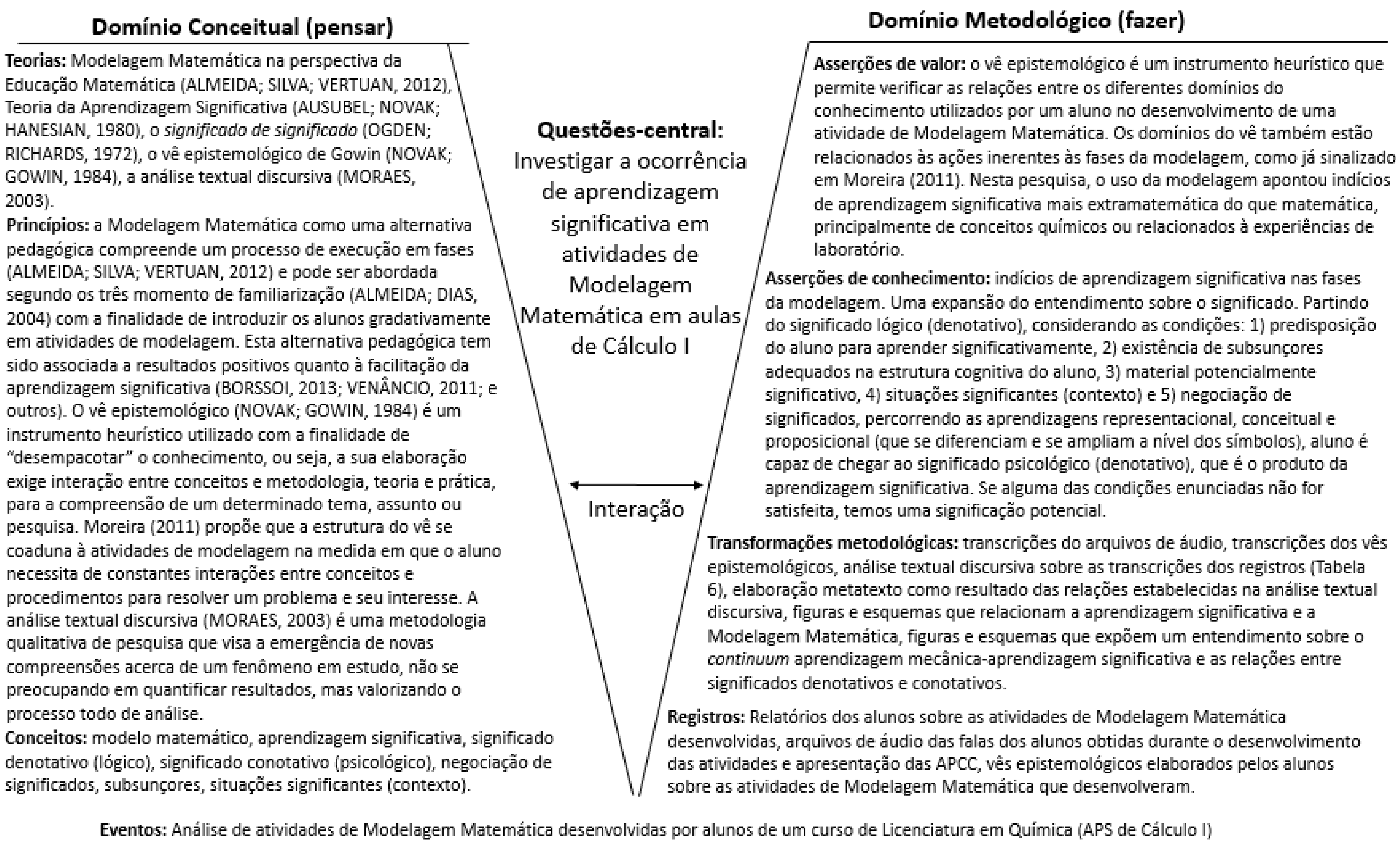
Assim, partindo de um significado lógico (denotativo) e considerando estas cinco condições, há Aprendizagem Significativa, que culmina no seu produto final, o significado psicológico (verdadeiro, idiossincrático, fenomenológico, conotativo). Quando pelo menos uma destas cinco condições não é satisfeita, caracteriza-se a significação potencial.

Incluímos o triângulo do *significado* de Ogden e Richards (1972) no esquema da Figura 35, pois ele complementa este entendimento. O “vértice” *referente* é equivalente ao significado denotativo e o *referência* ao significado conotativo. As relações entre símbolo, referente e referência são qualificadas como *verdadeira, adequada* e *correta* e querem dizer que: um símbolo verdadeiro registra corretamente uma referência adequada, ou seja, é a causa para que uma referência ocorra num intérprete. A relação entre eles consiste em seu uso por alguém para representar o referente. De modo mais simples, um símbolo é falso quando registra uma referência inadequada. A relação “adequada” entre *referente* e *referência* sugere que a referência é capaz de ter graus e que uma cadeia de situações significantes pode intervir sobre esta relação. Isto quer dizer que um referente pode ser mais ou menos adequado para uma referência. Um símbolo correto é aquele que causa num intérprete uma referência equivalente à simbolizada.

Recorremos também a um vê epistemológico para “desempacotar” a contribuição teórica da pesquisa desenvolvida nesta tese. Na Figura 36, a questão-central é o objetivo desta pesquisa, e o evento na base do vê se refere ao procedimento principal que nos levou a responder esta questão. O lado esquerdo vê (Domínio Conceitual) contempla os aspectos teóricos que sustentam esta pesquisa, enquanto o lado direito (Domínio Metodológico) aponta os procedimentos metodológicos e os resultados obtidos.

Os resultados que obtivemos, decorrentes de todo o processo de análise, sinalizaram os vês epistemológicos como instrumentos potenciais para a verificação da aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática, já que algumas ações decorrentes das fases da modelagem aparecem em alguns domínios dos vês. Além disso, foi possível perceber indicativos de aprendizagem significativa presentes nas fases da modelagem. Outro resultado importante, como demonstra a figura imediatamente anterior, é uma ampliação no entendimento sobre o significado como produto final da aprendizagem significativa, incluindo além das três condições básicas propostas por Ausubel, o contexto e a negociação de significados.

Figura 36 – Vê epistemológico para as novas compreensões emergentes na pesquisa.



6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Educação Matemática, como um campo de pesquisa que se ocupa de questões relativas ao ensino e à aprendizagem da Matemática, considerando não apenas a Matemática, mas também outras áreas do conhecimento envolvidas nesse processo, como a Psicologia, a Filosofia e a Linguística, tem apresentado resultados de pesquisas sobre as dificuldades de aprendizagem dos alunos.

No que se refere ao à aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I alguns resultados apontam para diferentes razões que levam a dificuldades nesta disciplina. Conforme indicam estes resultados, entre os fatores a que estão associadas estas dificuldades pode-se considerar a relação professor-aluno, a defasagem dos conteúdos pré-requeridos e a falta de interesse e aplicabilidade dos conteúdos.

A Modelagem Matemática tem demonstrado potencialidades para o ensino e aprendizagem da Matemática em diferentes níveis de escolaridade, inclusive em cursos de nível superior. Além destas potencialidades, resultados de pesquisas têm mostrado esta alternativa pedagógica como uma facilitadora da Aprendizagem Significativa, devido às características da modelagem, como a abordagem de temas de interesse dos alunos e o trabalho em grupos, por exemplo.

A pesquisa que desenvolvemos objetivou avançar em compreensões tanto sobre a Modelagem Matemática quanto sobre a Aprendizagem Significativa. Nesse sentido, nosso objetivo foi **investigar a ocorrência de aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática. Esta investigação considera as questões específicas:**

1) Durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, se verificados indícios de Aprendizagem Significativa, como o aluno passa dos significados denotativos para os significados conotativos?

2) Como se verificam as três condições propostas por Ausubel para a ocorrência de Aprendizagem Significativa em uma atividade de Modelagem Matemática?

3) Que indícios de Aprendizagem Significativa se apresentam em um Vê Epistemológico construído para uma atividade de Modelagem Matemática?

Assim, propusemos a alunos do primeiro período do curso de Licenciatura em Química da UTFPR, Londrina, Paraná, o desenvolvimento de atividades do terceiro momento de familiarização da Modelagem Matemática. Estas atividades foram desenvolvidas de acordo com o que a UTFPR definiu como Atividades Práticas Supervisionadas (APS), sob a orientação da pesquisadora, em horários diferentes daqueles em que a disciplina de Cálculo I era ministrada.

As informações obtidas do desenvolvimento destas atividades constituíram o material de análise: arquivos de áudio do desenvolvimento das atividades nos grupos e apresentação da Atividade Prática como Componente Curricular (APCC) para a turma de alunos, relatórios elaborados pelos grupos sobre a atividade desenvolvida e Vês Epistemológicos (NOVAK; GOWIN, 1984) produzidos individualmente pelos alunos. A análise empreendida sobre este material seguiu os pressupostos da análise textual discursiva (MORAES, 2003), e possibilitou a emergência de novas compreensões sobre aquilo que se objetivou investigar: observamos como alguns elementos característicos da Aprendizagem Significativa emergem ou são possibilitados no decorrer do desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Em outras palavras, observamos indícios de Aprendizagem Significativa nas fases do ciclo de modelagem, inclusive as três condições essenciais para que esta aprendizagem ocorra.

Os Vês Epistemológicos elaborados pelos alunos possibilitaram perceber as relações que estabeleceram entre os conceitos matemáticos, físicos e químicos presentes nas atividades. Além disso, os vês demonstraram ser instrumentos que revelam ações e aprendizagens dos alunos quando desenvolvem uma atividade de modelagem, pela distinção entre os domínios conceitual e metodológico, bem como da questão central e do evento. Isto indica que o Vê é um instrumento heurístico que permite verificar as relações entre os diferentes domínios do conhecimento utilizados por um aluno no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática. Os domínios do vê também estão relacionados às ações inerentes às fases da modelagem, como já sinalizado em Moreira (2011). Nesta pesquisa, o uso da modelagem apontou indícios de Aprendizagem Significativa mais extramatemática do que matemática, principalmente de conceitos químicos ou relacionados a experiências de laboratório.

Indícios de Aprendizagem Significativa foram observados nas fases da modelagem: a escolha de um tema em que se tem interesse em estudar aponta para a predisposição para aprender significativamente, além da existência de subsunçores na estrutura cognitiva dos estudantes. Na fase de inteiração, quando os alunos pesquisam informações necessárias e relevantes para a situação que pretendem resolver, o acesso às informações é feito por meio do uso de livros didáticos, revistas especializadas, páginas da internet e profissionais da área, ou seja, os alunos se inteiram sobre o tema por meio de materiais potencialmente significativos, que têm significado lógico. Outros dois fatores que passamos a considerar com a finalização desta pesquisa é importância do *contexto* na aquisição de significado, dado que o uso de determinados símbolos admitem compreensões diferentes em situações diferentes, bem como a *negociação de significados* (GOWIN, 1985; MOREIRA, 2011), já que um episódio de ensino requer a partilha e devolução de significados, de acordo com o que o professor espera de seu aluno.

Todo o processo de análise e constante revisita ao referencial teórico que subsidiou esta pesquisa também levou a uma expansão do entendimento sobre o *significado*. Partindo das explanações de Ausubel, Novak e Hanesian (1980) sobre a natureza do *significado* e do processo que o constitui como produto da Aprendizagem Significativa, bem como tomando o que discorrem Ogden e Richards (1972) sobre o *significado de significado*, conseguimos avançar no entendimento do *continuum* aprendizagem mecânica-aprendizagem signficativa de Ausubel. Partindo do significado lógico (denotativo), considerando as condições: 1) predisposição do aluno para aprender significativamente, 2) existência de subsunçores adequados na estrutura cognitiva do aluno, 3) material potencialmente significativo, 4) situações significantes (contexto) e 5) negociação de significados, percorrendo as aprendizagens representacional, conceitual e proposicional (que se diferenciam e se ampliam a nível dos símbolos), o aluno é capaz de chegar ao significado psicológico (conotativo), que é o produto da Aprendizagem Significativa. Por outro lado, quando estas condições não são satisfeitas, temos uma *significação potencial* que, conforme Ausubel, é a potencialidade que o estudante tem para adquirir determinado significado, desde que haja interação e relações entre estas condições.

Embora tenhamos apresentado aqui resultados positivos para esta pesquisa, no sentido de que ao **investigar a ocorrência de aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas em aulas de Cálculo I** obtivemos indícios desta aprendizagem, devemos destacar também algumas fragilidades e resultados não esperados, bem como particularidades decorrentes do processo de coleta e análise de dados que poderiam culminar em mais resultados e mais satisfatórios, ou até mesmo em outros resultados diferentes dos que apresentamos aqui.

As análises sobre os vês epistemológicos dos alunos, apesar de resultarem na sua afirmação como um bom instrumento heurístico que, além de "desempacotar" conhecimentos, dá indicações sobre as relações que os alunos fazem entre os domínios conceitual e metodológico de uma atividade de modelagem e os tipos de conhecimentos utilizados nas fases das atividades, bem como mostrar aspectos indicadores de Aprendizagem Significativa, apontaram que as aprendizagens dos alunos investigados foram mais extramatemáticas do que matemáticas. Isto quer dizer que, apesar de as atividades de modelagem terem sido desenvolvidas no âmbito da disciplina de Cálculo I, os significados adquiridos pelos alunos eram relativos mais à Química do que à Matemática. Não consideramos este um resultado negativo, já que nosso objetivo com esta pesquisa não visava investigar a ocorrência de Aprendizagem Significativa de algum conteúdo específico. No entanto, podemos considerar que este resultado pode estar diretamente ligado a dois fatores: o primeiro diz respeito à escolha do tema, já que os temas escolhidos pelos alunos foram predominantemente correlatos à sua área de formação, o que indica o interesse que tinham em aprender sobre estes temas, sem a preocupação em deixar evidente de que forma os conceitos do Cálculo se relacionavam com o problema a ser resolvido. O segundo fator se refere ao fato de as atividades desenvolvidas pelos alunos terem sido do terceiro momento de familiarização da modelagem (ALMEIDA; DIAS, 2004). Como tratamos no Capítulo 2, as atividades do terceiro momento se caracterizam pela maior independência dos alunos na condução da atividade e pela mediação do professor no sentido de orientador. Neste caso, o professor não direciona os alunos para resultados que ele espera. Este fator também leva em consideração o fato de que, nesta pesquisa, os sujeitos eram "inexperientes" em Modelagem Matemática, apesar de a professora que ministrava a disciplina de Cálculo

I abordar situações-problema, coleta de dados e formulação de hipóteses em suas aulas e de termos desenvolvido uma atividade de modelagem do segundo momento de familiariazação antes que eles desenvolvessem as atividades aqui descritas e analisadas.

Outro ponto a considerar se refere aos vês elaborados pelos alunos. A "chave de pontuação" utilizada para classificá-los mostrou que, apesar de consistir na atribuição de pontos aos domínios de um vê, a sua elaboração, na maioria dos casos, não foi satisfatória. Além da pontuação atribuída ser média ou baixa, a observação dos vês demonstra a falta de domínio e segurança dos alunos na utilização neste tipo de instrumento, tanto pelas poucas informações inseridas nos campos dos vês, pela qualidade das informações, quanto pelas informações inseridas em campos inadequados ou inesperados dos vês. Este resultado reflete a necessidade de empreender mais tempo na orientação dos alunos sobre a construção de vês. Eles demonstraram dificuldades em distinguir princípios, teorias e conceitos, por exemplo. Em alguns casos, não perceberam a relação direta entre a questão central e o evento, bem como entre os domínios metodológico e conceitual. A elaboração de um vê epistemológico não é uma tarefa simples, já que pormenoriza os domínios do conhecimento utilizados numa atividade de Modelagem Matemática, neste caso. Nesse sentido, podemos considerar que construir um vê requer bastante orientação, prática e até mesmo o seu refazer.

Nesse sentido, feitas estas considerações, os resultados desta pesquisa apontam para a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica com potencial para a facilitação da Aprendizagem Significativa, em especial para a formação do licenciando em Química. Percebemos também que o Vê Epistemológico pode ser utilizado como um instrumento para verificar indícios de Aprendizagem Significativa, além de apontar as relações entre os conhecimentos utilizados especificamente em atividades de modelagem. Desenvolvemos neste trabalho também uma argumentação sobre um entendimento para o *significado*, apontando indicações das possíveis aprendizagens que ocorrem no *continuum* aprendizagem mecânica-aprendizagem significativa na estrutura cognitiva de um indivíduo.

.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. de; DIAS, M. R. Um Estudo sobre o Uso da modelagem matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. **Bolema**, n. 22, pp 19- 35. Rio Claro: 2004.

ALMEIDA, L. M. W. de; FONTANINI, M. L. de C. Aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática: uma investigação usando mapas conceituais. **Investigações em Ensino de Ciências** (Online), v. 15, p. 403-425, 2010.

ALMEIDA, L. M. W. de, FATORI, L. H., SOUZA, L. G. S. **Ensino de Cálculo**: uma abordagem usando Modelagem Matemática. Disponível em <http://www.revista.unisal.br/sj/index.php/123/article/download/17/31> Acesso: 3 de julho de 2017.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** São Paulo: Contexto, 2012.

ARAÚJO, J. de L. **Cálculo, tecnologias e modelagem matemática**: as discussões dos alunos. Tese de Doutorado, Unesp, IGCE, Rio Claro, 2002, 173p.

ARAÚJO, J. L. Pesquisas sobre Modelagem em Eventos Científicos Recentes de Educação Matemática no Brasil. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, Brasília, DF. **Anais...** Brasília: Universidade Católica de Brasília, 2009. p. 1-19.

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gomez (Ed.), **Ingeniería didáctica em educación matemática**: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y El aprendizaje de las matemáticas, pp. 97-140. Méjico DC: Iberoamérica. 1995.

AUSUBEL, D. P., NOVAK, J. D., HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. Tradução de Eva Nick. Segunda edição. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção do conhecimento:** uma perspectiva cognitiva. Tradução Lígia Teopisto. Lisboa: Plátano. 2003. 243 p.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais**... Caxambu: ANPED, 2001. 1 CDROM.

BARBOSA, M. A. **O Insucesso no Ensino e Aprendizagem na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. 2004. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2004a.

BARBOSA, J. C. A "contextualização" e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004b, Recife. **Anais...** Recife: SBEM, 2004b. p. 1-8.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática:** uma nova estratégia. Editora Contexto: São Paulo, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma Nova Estratégia. 3ª ed. São Paulo: Contexto. 2009.

BICCARD, P.; WESSELS, D.C.J. (2011). Documenting the Development of Modelling Competencies of Grade 7 Students. In: Kaiser, G. et al. (Eds). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling** (ICTMA 14). Dordrecht: Springer, 375-383.

BIEMBENGUT, M. S. **Qualidade no Ensino de Matemática na Engenharia**: uma proposta metodológica e curricular, Tese de Doutorado (Doutorado em Engenharia de Produção) UFSC, SC, 1997, 250p.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis. v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Modelling in Engineering: Advantages and Difficulties. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICAL MODELLING AND APPLICATIONS, 12., 2007, Londres. **Proceedings**… Chichester: Horwood Publishing, 2007. p. 415-423.

BISOGNIN, E., SILVA, I. Z. da, FAGAN, S. B., BISOGNIN, V. Ensino e Aprendizagem de Conceitos Matemáticos Relacionados à Nanociência por meio da Modelagem Matemática. **Acta Scientiae**, v.14, n.2, maio/ago. 2012.

BORBA, M. de C.; SKOVSMOSE, O. A Ideologia da Certeza em Educação Matemática. In: SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. São Paulo: Papirus, 2001. p.127-148.

BORBA, M.C.; VILLAREAL, M.E. (2005). Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking – **Informations and Communication Technologies, Modeling, Exper- imentation and Visualization**. New York: Springer.

BLOMHOJ, M.; JENSEN, T.H. (2007). What's all the fuss about competencies? In: Blum, W. et al. (Eds), **Modelling and Applications in Mathematics Education**. New York: Springer, 45-56..

BLUM, W. Icmi study 14: Applications and modeling in mathematics education – discussion document. **Educational Studies in Mathematics**. 51, p. 149–171, 2002.

BLUM, W. Applications and Modelling in Mathematics teaching and mathematics education – some important aspects of pratice ando f research. In: SLOYER, C. et.al. (Ed.) **Advances and perspectives in the teaching of Mathematical modeling and applications**. Yorklyn, DE: Water Street Mathematics, 1998. p.1-20.

BLUM, W.; BORROMEO-FERRI, R. Mathematical Modelling: can it be taught and learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Aplication**, Blumenau, v. 1, n. 12, p. 45-58, 2009.

BLUM, W. Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. In: Kaiser, G. et al. (Eds), **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling** (ICTMA 14). Dordrecht: Springer, 15-30, 2011.

BLUM, W. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What do we know, what can we do? **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education Intellectual and attitudinal challenges,** pp.73-96, 2015.

BORSSOI, A. H. **A aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino.** Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, 2004.

BORSSOI, A. H. **Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias:** articulações em diferentes Contextos Educacionais. 2013. 256 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. de. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferencias ordinárias. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 6, n. 2, pp. 91-121, 2004.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. de. Uma aproximação entre modelagem matemática e unidades de ensino potencialmente significativas para a aprendizagem significativa: o caso das equações de diferenças. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 18, n. 2, p. 481-503, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Química**. Parecer CES/CNE 1.303/2001, homologação publicada no DOU 07/12/2001, Seção 1, p. 25. Resolução CES/CNE 08/2002, publicada no DOU 26/03/2002, Seção 1, p. 13.

BURAK, D. **Modelagem matemática:** ações e interações no processo de ensino e aprendizagem. Tese de doutorado, Campinas, UNICAMP, 1992.

BURAK, D. Uma perspectiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática. In: BRANDT, Célia Finck; BURAK, Dionísio; KLÜBER, Tiago Emanuel (Org.). **Modelagem Matemática**: Uma perspectiva para a Educação Básica. Ponta Grossa: UEPG, 2010, p. 15-38.

CALDEIRA, A. D. Modelagem matemática: um outro olhar. **Alexandria**, v. 2, n. 2, p. 33-54, 2009.

CÂNDIDO, C. C.; BARUFI, M. C. B; MONTEIRO, M. S. Dificuldades no ensino/aprendizagem de Cálculo. In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática: **Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática**, São Paulo, 2004.

CAVASOTTO, M.; VIALI, L. Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros podem informar. **Boletim GEPEM**, nº 59, p.15-33, jul./dez. 2011.

CIFUENTES, J. C., NEGRELLI, L. G. Uma interpretação epistemológica do processo de modelagem matemática: implicações para a matemática. **Bolema** [*online*]. 2012, vol.26, n.43, pp.791-815.

CONSELHO DE ENSINO, PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO DA UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ. Regulamenta as Atividades Práticas Supervisionadas da UTFPR. Resolução n. 78 de 21 de agosto de 2009.

COSTA, I. M.; SALVADOR, J. A. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: Experiências no DM – UFSCar. In: **Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática** (EPEM), USP, São Paulo, 2004.

CURY, H. N. Estilos de aprendizagem de alunos de Engenharia. In: **XXVIII COBENGE - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**, 2000, Ouro Preto, Minas Gerais.

CURY, H. N. Aprendizagem em Cálculo: uma experiência com avaliação formativa. In: **XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**. Santo Amaro, 2005.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E. Calculando e volume de um sólido: como a análise de erros pode auxiliar professores a elaborar atividade de ensino para calouros de Engenharia. In: **XXIV COBENGE - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**, 2006, Passo Fundo, Rio Grande do Sul.

CURY, H. N. Pesquisas em análise de erros no Ensino Superior: retrospectiva e novos resultados. In: Frota, M. C. R.; Nasser, L. (org.). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife. SBEM, p. 223-238, 2009.

DOERR, H. M.; ENGLISH. L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 34, n. 2, p. 110- 136, 2003.

ENGEL, J.; VOGEL, M. Mathematical Problem Solving as Modeling Process. In: BLUM, Werner et al. Modelling and Applications in Mathematics Education. **Springer**: New York, 2007 (p. 275-284).

FERREYRA, A.; GONZÁLEZ, E. M. **Reflexiones sobre la enseñanza de la física universitaria**. Enseñanza de las Ciencias, 18(2), 189-199, 2000.

FERRI, R. B.; Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. **ZDM**, v. 38 (2), 2006.

FIGUEIREDO, D. F.; KATO, L. A. Uma Proposta de Avaliação de Aprendizagem em Atividades de Modelagem Matemática na Sala de aula. **Acta Scientiae** (ULBRA), v. 14, p. 276-294, 2012.

FIGUEIREDO, D. F. **Uma proposta de avaliação de aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática na sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá; 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Tendências temáticas e metodológicas da pesquisa em educação matemática. In. Fiorentini, D.; Lorenzato, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Coleção Formação de Professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

FONTANINI, M. L. C. **Modelagem Matemática x Aprendizagem Significativa**: uma investigação usando Mapas Conceituais. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

FRANCHI, R. H. **A modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de engenharia**. Dissertação de Mestrado, Unesp, Rio Claro, 1993, 148p.

FREJD, P.; ARLEBACK, J. (2011). First Results from a Study Investigating Swedish Upper Secondary Students' Mathematical Modelling Competencies. In: Kaiser, G. et al. (Eds). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling** (ICTMA 14). Dordrecht: Springer, 407- 416.

GALBRAITH, P.; STILLMAN, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. In: **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik** 38(2), 143-162.

GALBRAITH, P. L.; CLATHWORTHY, N. J. Beyond Standart Models-Meeting the Challenge of Modelling. **Educational Studies in Mathematics**, v. 21, n. 2, p. 137-163, 1990.

GENTNER, D., GENTNER, D. R. Flowing Waters or teeming crowds: mental models of eletricity. In: GENTNER, D., STEVENS, A. L. (Eds.). **Mental Models**. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, p. 99-127.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. Um estúdio piloto sobre representaciones mentales, imágenes, proposicioes y modelos mentales respecto al concepto de campo electromagnetico em alunos de Física General, estudiantes de postgrado y físicos profesionales. **Investigações em Ensino de Ciências**, 1 (1): 95-108.

GOWIN, D. B. **Educating**. Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1981.

GUTIERREZ, R. Psicologia y aprendizaje de las ciencias. El modelo de Ausubel. **Enseñanza de las Ciencias**, 5 (2): 118-128, 1987.

GUTIERREZ, R.; OGBORNS, J. (1992). A causal framework for analysing alternative conceptions. **International Journal of Science Education**, 14 (2): 201-220.

HALLOUN, I. (1996). Shematic modeling for meaningful learning of physics. **Journal of Reserach in Science Teaching**, 33(9): 1019-1041.

HARRISON, A. G., TREAGUST, D. F. (1996). Secondary students' mental models of atoms and molecules: implications for teaching chemistry. **Science Education**, 80(5): 509-534.

HIEBERT, J., CARPENTER, T. P. Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics** (pp. 65-97). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc., 1992

IKEDA, T.; STEPHENS, Stephens, M. (2001). The effects of students' discussion in mathematical modelling. In: Matos, J.F., Blum, W., Houston, S.K. & Carreira, S.P. (Eds.), **Modelling and Mathematics Education: Applications in Science and Technology**. Chichester: Horwood, 381-390.

JACOBINI, O. R.; WODEWOTZKI, M. L. L. Uma reflexão sobre a modelagem matemática no contexto da educação matemática crítica. **Bolema**, Rio Claro, n. 25, p. 71-88, 2006.

JOHNSON-LAIRD, P. (1983). **Mental models**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 513 p.

KAISER, G. S. B.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik**, Eggenstein, Leopoldshafen, v. 38, n. 3, p. 302-310, June 2006.

Kaiser-Messmer, G. Application-Oriented Mathematics Teaching. In: Blum, W. et al. (Eds), **Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics**. Chichester: Horwood, 66-72, 1987.

KLÜBER, T. E., BURAK, D. Educação matemática: contribuições para a compreensão da sua natureza. **Acta Cientiae**. 2008, v. 10, n. 2, p. 93-106.

KLÜBER, T. E., BURAK, D. Sobre a pesquisa qualitativa na modelagem matemática em educação matemática. **Bolema** [*online*]. 2012, vol.26, n.43.

LeiSS, D. (2007). Lehrerinterventionen im selbständigkeitsorientierten Prozess der Lösung einer mathematischen Modellierungsaufgabe. Hildesheim: Franzbecker.
LeiSS, D. (2010). Adaptive Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren – empirische Befunde einer vergleichenden Labor- und Unterrichtsstudie. In: **Journal für Mathematik- Didaktik** 31 (2), 197-226.

LESH, R; CARMONA, G; HJALMARSON, M. Working group: models and modeling. In: PME-NA, Mérida. **Proceedings**... Mérida, p. 92-95, 2006.

LESH, R.A.; DOERR, H.M. (2003). **Beyond constructivism**: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

LOPES, A. Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. **Sociedade Brasileira de Matemática**. Rio de Janeiro, n. 26/27, p.123-146, jun./dez. 1999.

LORIN, A. P. Z. **Competências dos alunos em atividades de Modelagem matemática**. 2015. 164f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

Maas, K. Modelling in Class: What do we Want the Students' to Learn? In: Haines, C. et al. (Eds), **Mathematical Modelling**: Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood, 63-78, 2007.

MACHADO, R. M. **A visualização na resolução de problemas de cálculo diferencial e integral no ambiente computacional MPP**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

MALHEIROS, A. P. S. **A Produção Matemática dos Alunos em Ambiente de Modelagem**. 2004. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

MALHEIROS, A. P. dos S. Pesquisas em Modelagem Matemática e diferentes tendências em Educação e em Educação Matemática. **Bolema** [*online*]. 2012, vol.26, n.43, pp.861-882.

MENESTRINA, T. C.; MORAES, A. F. Alternativas para uma aprendizagem Significativa em Engenharia: Curso de Matemática Básica. **Revista Brasileira de Ensino de Engenharia**, v.30, n.1, p.52-60, 2011.

Mesquita, N. A. da S.; Soares, M. H. F. B. (2011). Aspectos históricos dos cursos de licenciatura em química no Brasil nas décadas de 1930 a 1980. **Quimica Nova**, 34(1), 165-174. Disponível em: http://www.quimicanova.sbq.org. Acesso em: 9 abr. 2013.

MEYER, C. **Derivada/reta tangente**: imagem conceitual e definição conceitual. 159f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP, São Paulo, 2003.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MONTEIRO, A**., O ensino da Matemática para adultos através da Modelagem**. Dissertação de Mestrado - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - UNESP. Rio Claro, 1991.

MORAES, C. A. de; TEIXEIRA JÚNIOR, J. G. Reflexões sobre o ensino de cálculo diferencial e integral em cursos de graduação em química. **Diversa Prática**, v. 2, n. 1, 2014.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência e educação** (Bauru) [*online*]. 2003, vol.9, n.2, pp.191-211.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. Análise textual discursiva: processo reconstrutivo de múltiplas faces. **Ciência e Educação**. v. 12, n.1, p. 117-128, 2006.

MOREIRA, M. A. Um mapa conceitual sobre partículas elementares**. Revista de Ensino de Física**, São Paulo, v. 11, p. 114-129, dez. 1989.

MOREIRA, M. A.; 1997. Aprendizagem significativa: um conceito subjacente. **Actas Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativa**, pp.17-44. Universidade de Burgos.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa crítica. **Atas do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa**, pp 33-45, com o título original de Aprendizagem significativa subversiva, 2000.

MOREIRA, M. A. Aprendizaje Significativo Crítico. **Indivisa, Boletín de Estúdios e Investigación**, n. 6, pp. 83-101, 2006.

MOREIRA, M. A. Negociação de significados e aprendizagem significativa. **Ensino, ambiente e saúde**, v. 1, n. 2, p. 2-13, dez. 2008.

MOREIRA, M. A. Abandono da narrativa, ensino centrado no aluno e aprender a aprender criticamente. **Ensino, ambiente e saúde**, v. 4, n. 1, p. 2-17, abril 2011.

MOREIRA, M. A. Modelos científicos, modelos mentais, modelagem computacional e modelagem matemática: aspectos epistemológicos e implicações para o ensino. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia**, v. 7, n. 2, mai-ago, 2014.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E.A.F.S. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo, Editora Moraes, 1982.

NASSER, L. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte**. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**. Belo Horizonte - MG: SBEM.

NERY, A. L. P.; LIEGEL, R. M.; FERNANDEZ, C. Um olhar crítico sobre o uso de algoritmos no Ensino de Química no Ensino Médio: a compreensão das transformações e representações das equações químicas. **Revista Electronica de Enseñanza de las Ciencias**, 6 (3), p. 587-600, 2007.

NISS, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project. In: Gagatsis, A. & Papastavridis, S. (Eds), **3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education**. Athens: The Hellenic Mathematical Society, 115-124.

NOVAK. J. D., GOWIN, D. B. **Aprender a aprender.** Tradução de Carla Valadares. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1984.

OGDEN, C. K.; RICHARDS, I. A. **O significado de significado**: um estudo da influência da linguagem sobre o pensamento e sobre a ciência do simbolismo. Tradução de Álvaro Cabral. Segunda edição. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976.

PALM, T. (2007) Features and Impact of the Authenticity of Applied Mathematical School Tasks. In: Blum W., Galbraith P.L., Henn HW., Niss M. (eds) **Modelling**

and Applications in Mathematics Education. New ICMI Study Series, vol 10. Springer, Boston, MA

PEÑA, A. O. **Mapas conceituais**: uma técnica para aprender. São Paulo: Loyola, 2005.

POLLAK, H. (1979). The Interaction between Mathematics and Other School Subjects. In: UNESCO (Ed.), **New Trends in Mathematics Teaching IV**. Paris, 232-248.

POSTAL, R. F. **Atividades de modelagem matemática visando a uma aprendizagem significativa de funções afins, fazendo uso do computador como ferramenta de ensino.** Dissertação (Mestrado) – Curso de Ensino de Ciências Exatas, Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2009.

REZENDE, W. M. **O ensino do cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. Tese de Doutorado, (Doutorado em Educação – Área de Ciências e Matemática). São Paulo: Faculdade de Educação da USP, 2003.

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: um problema do ensino superior de Matemática? **Anais do VIII ENEM**, Mesa Redonda, Pernambuco, 2004.

ROSA, M.; REIS, F. da S.; OREY, D. C. A modelagem matemática crítica nos cursos de formação de professores de matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 02, p. 159-184, 2012.

SANTAROSA, M. C. P.; MOREIRA, M. A. O cálculo nas aulas de física da UFRGS: um estudo exploratório. **Investigações em Ensino de Ciências**. 16(2), 317-351, 2011.

SANTOS, R. M.; BORGES, H. B**. Avaliação do Desempenho no Processo de Ensino-Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I** (O Caso da UFC). 1993. Disponível em: <http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/artigos/artigo-avaliacao-do-desempenho-no-processo-de-ensino-aprendizagem.pdf> Acesso em: julho de 2017.

SANTOS, S. P.; MATOS, M. G. O. O ensino de Cálculo I no curso de Licenciatura em Matemática: obstáculos na aprendizagem. **Revista Eventos Pedagógicos**, v.3, n.3, p.458-473, ago./dez. 2012.

SCHOENFELD, A.H. (1994). **Mathematical Thinking and Problem Solving**. Hillsdale: Erlbaum.

SCHUKAJLOW, S., LEISS, D., PEKRUN, R., BLUM, W., MULLER, M..MESSNER, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self- efficacy expectations. In: **Educational Studies in Mathematics** 79(2), 215-237.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. W.; GERÔLOMO, A. M. L. "Aprendendo" a Fazer Modelagem Matemática: A Vez do Aluno. **Educação Matemática em Revista**, p. 28-36, 2011.

SILVA, B. A. da. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 393-413, 2011a.

SILVA, C. da. **A perspectiva sociocrítica da modelagem matemática e a aprendizagem significativa crítica:** possíveis aproximações. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá; 2011b.

SILVA. C. da; KATO, L. A. Quais elementos caracterizam uma atividade de modelagem na perspectiva sociocrítica? In: **Bolema**, vol. 26, n. 45. Rio Claro, agosto de 2012.

SILVA, C. da; KATO, L. A.; PAULO, I. J. C. A perspectiva sociocrítica da modelagem matemática e a aprendizagem significativa crítica: possíveis aproximações. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 17 (1), p. 109-123, 2012.

SKOOG, D. A., WEST, D. M., HOLLER, F. J., CROUCH, S. R. **Fundamentos de Química Analítica**, Tradução da 8ª Edição norte-americana, Editora Thomson, São Paulo-SP, 2006.

SOARES, D. S.; BORBA, M. C. The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. **The International Journal on Mathematics Education**, 2014.

STILLMAN, G. et al. A framework for success in implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. In: WATSON, J.; BESWICK, K. Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia. 30th, 2007, Wrest Point Hotel Casino, Hobart. **Proceedings…** Hobart: TAS, 2007. p. 688-697.

TARDIF, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: Elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. **Revista Brasileira de Educação**, n. 13, p. 5-24, 2000.

VALADARES, J. A Teoria da Aprendizagem Significativa como Teoria Construtivista. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 1 (1), pp. 36-57, 2011.

VENÂNCIO, S.; KATO, L. A. A utilização de mapas conceituais na identificação da aprendizagem significativa crítica em uma atividade de modelagem matemática. **Experiências em Ensino de Ciências** – V3(2), pp. 57-68, 2008.

VENÂNCIO, S. **Aprendizagem Significativa de Função do 1º Grau:** Uma investigação por meio da Modelagem Matemática e dos Mapas Conceituais. 2010. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2010.

VERSCHAFFEL, L., VAN DOOREN, W., GREER, B., MUKHOPADHYAY, S. (2010). Reconceptualising Word Problems as Exercises in Mathematical Modelling. In: **Journal für Mathematik-Didaktik** 31(1), 9-29.

VERTUAN, R. E.; SILVA, K. A. P. da; BORSSOI, A. H. Modelagem Matemática em disciplinas do ensino superior: o que manifestam os estudantes? In: **Educere et Educare**, vol. 12, n. 24, 2017.

VILLARREAL, M. **O pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias informáticas**. 1999, Tese de Doutorado (Doutorado em Educação Matemática), UNESP, Rio Claro.

VOSNIADOU, S. (1994). **Capturang and modeling the process of conceptual chance Learning and Instruction,** 4: 45-69.

WILLIAMS, M. D.; HOLLAN, J. D.; STEVENS, A. L. (1983). Human reasoning about simple physical system. In GENTNER, D.; STEVENS, A. L. (Eds.). **Mental models**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.