UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

GEFFERSON LUIZ DOS SANTOS

COMO PROFESSORES E ALUNOS DO ENSINO MÉDIO LIDAM COM CONTEÚDOS ALGÉBRICOS EM SUA PRODUÇÃO ESCRITA

Londrina
2010

GEFFERSON LUIZ DOS SANTOS

COMO PROFESSORES E ALUNOS DO ENSINO MÉDIO LIDAM COM CONTEÚDOS ALGÉBRICOS EM SUA PRODUÇÃO ESCRITA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof Dra Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina
2010

Catalogação Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S237c Santos, Gefferson Luiz dos.
Como professores e alunos do ensino médio lidam com conteúdos algébricos em sua produção escrita / Gefferson Luiz dos Santos. - Londrina, 2010. 136 f.: il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2010.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática - Teses. 2. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 3. Álgebra (Ensino médio) - Teses. 4. Produção escrita em matemática -Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

GEFFERSON LUIZ DOS SANTOS

COMO PROFESSORES E ALUNOS DO ENSINO MÉDIO LIDAM COM CONTEÚDOS ALGÉBRICOS EM SUA PRODUÇÃO ESCRITA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina – PR

____
Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino UEL – Londrina – PR

____
Profa. Df Regina Célia Guapo Pasquini
UEL – Londrina – PR

Londrina, 22 de fevereiro de 2010.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela vida e pela oportunidade de concluir o curso de Mestrado.

Aos meus pais José e Maria, pelo incentivo e pelas orações durante as viagens que fiz.

A professora Angela Marta pela dedicação e apoio durante esta jornada.

As professoras componentes da minha banca, Márcia Cyrino e Regina Célia, cujas contribuições enriqueceram este trabalho.

Aos professores do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pela competência e compromisso com que desenvolvem o seu trabalho.

A minha esposa Luciana e aos meus filhos Lucas, Larissa e Alícia pela compreensão nos momentos de ausência.

A minha amiga Jane, por ter me substituído em aulas, reuniões, demonstrando o valor de uma verdadeira amizade.

Aos meus amigos Eduardo, Cristina e Cláudia pela convivência e pelos momentos de alegria que jamais irei esquecer.

Aos professores e estudantes que contribuíram para que esta pesquisa fosse realizada com êxito.

"Quando olho para o passado, vejo meu destino concretizado. Quando olho para o futuro deslumbro as possibilidades infinitas. E ambos se encontram no meu eterno presente"

(Autor Desconhecido)

SANTOS, Gefferson Luiz dos. **Como professores e alunos do ensino médio lidam com conteúdos algébricos em sua produção escrita**. 2010. 136 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

RESUMO

Neste trabalho analisamos a produção escrita de professores e estudantes do Ensino Médio, verificando os modos de resolução que estes utilizaram para resolver as de questões de Álgebra das provas de conhecimentos gerais de alguns vestibulares de universidades estaduais paranaenses. Numa abordagem predominantemente qualitativa, com cunho interpretativo, buscamos, por meio da análise da produção escrita, identificar os conteúdos algébricos presentes nas questões e também os modos e de resolução utilizados pelos participantes da pesquisa ao resolverem tais questões, inferindo sobre as possíveis características do pensamento algébrico, bem como a linguagem e simbologia algébricas. Os conteúdos abordados nas questões são, em sua maioria, conteúdos trabalhados no Ensino Fundamental. Os professores e alunos apresentaram modos de resolução baseados na Matemática Escolar trabalhada na Educação Básica e indícios do pensamento algébrico numa fase de transição permeada pela linguagem natural e alguns símbolos algébricos, considerando que muitas vezes o próprio enunciado das questões possa ter norteado algumas das produções apresentadas.

Palavras-chave: Pensamento algébrico. Linguagem algébrica. Produção escrita. Educação matemática.

SANTOS, Gefferson Luiz dos. **How teachers and high school students deal with algebraic contents in their written production**. 2010. 136 f. Dissertation Thesis (Master Degree in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina. 2010.

ABSTRACT

In this work we analyzed the written production of high school teachers and students, verifying the ways of resolution that these ones had used to solve questions of Algebra of common knowledge tests of some state universities of Parana. In a predominantly qualitative boarding, with understanding approach, we search, by means of the analysis of the written production, and also identify to the algebraic contents present in the questions and the ways of resolution used by the participants of the research when solving such questions, inferring on the possible characteristics of the algebraic thought, as well as the algebraic language and symbology. The boarded contents in the questions are, in its majority, contents worked in the Elementary School. The professors and students had presented ways of resolution in the school mathematics worked in the Basic Education and indications of the algebraic thought in a phase of transitions by for the natural language and some algebraic symbols, considering that many times the proper one enunciated of the questions can have guided some of the presented productions.

Keywords: Algebraic thought. Algebraic language. Written production. Mathematics education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa está relacionada com o tema **Pensamento Algébrico**, bem como a linguagem e a simbologia algébricas. A escolha desse tema se deve ao fato desse pensamento estar presente na Matemática, mais especificamente na Álgebra.

Considerando que a Álgebra é abordada no Ensino Fundamental e Médio e que exames vestibulares muitas vezes exigem esse tipo de conteúdo, pensamos ser pertinente buscar indícios de pensamento algébrico, linguagem algébrica e simbologia algébrica na produção escrita de estudantes e professores de Matemática do Ensino Médio, em questões de Álgebra de alguns vestibulares de universidades estaduais do Paraná.

Na busca de literatura a respeito do assunto, fizemos um levantamento de trabalhos apresentados em eventos, como SIPEM (2006) e EBRAPEM (2004, 2007 e 2008), além de artigos de autores como Kaput (1999), Kieran (1995) e Lins (1997), entre outros, e notamos que existem poucos estudos que investigam pensamento algébrico em questões de vestibulares.

Assim, neste trabalho, investigamos **quais conteúdos algébricos, as características do pensamento algébrico, da linguagem algébrica e simbologia algébrica são mobilizados por estudantes e professores de Matemática do Ensino Médio quando da resolução de questões de Álgebra de vestibulares de Instituições de Ensino Superior Estaduais do Paraná?**

Para tanto, inicialmente buscamos identificar como o pensamento algébrico, a álgebra, a simbologia e a linguagem algébrica estão presentes: na literatura em Educação Matemática; no desenvolvimento histórico da Matemática; no documento do NCTM (1989,2000).

Em seguida, aplicamos um instrumento contendo questões de Álgebra dos vestibulares de verão de algumas universidades estaduais paranaenses, no período de 2005 a 2007, a estudantes e professores de Matemática do Ensino Médio de escolas do município de Telêmaco Borba, Paraná.

Na análise desses registros escritos utilizamos caracterizações do pensamento algébrico e da Álgebra, principalmente as colocadas por Lins e Gimenez (1997) e Fiorentini et all (1993), bem como aspectos ligados ao ser algébrico, à simbologia algébrica e à linguagem algébrica apontados por Arcavi (1994) e Kieran (1992, 2004). Também explicitamos os conteúdos algébricos abordados.

No primeiro capítulo, apresentamos algumas concepções de Álgebra, características do pensamento algébrico e uma reflexão a respeito da linguagem algébrica e do simbolismo algébrico. No segundo capítulo, explicitamos o encaminhamento metodológico assumido nesta pesquisa. A descrição e análise da experimentação realizada com os estudantes e professores são apresentadas no terceiro capítulo. No quarto capítulo, expomos conclusivamente as análises realizadas. Por último, apresentamos algumas considerações a respeito da pesquisa realizada.

CAPÍTULO 1
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentamos algumas concepções de Álgebra, características do pensamento algébrico e uma reflexão a respeito da linguagem algébrica e do simbolismo algébrico, abordando também a Álgebra escolar.

1.1 ÁLGEBRA, PENSAMENTO, LINGUAGEM E SIMBOLISMO ALGÉBRICOS

A proposta, nesta seção, é realizar uma leitura da Álgebra e do pensamento algébrico, da linguagem e do simbolismo algébricos, ampliando sua compreensão a partir da concepção de autores apontados no NCTM (1989, 2000) e outros que tratam do mesmo assunto, os quais consideramos pertinentes.

Segundo Baumgart (1992), a palavra Álgebra vem do árabe *al-jabr (al-jebr)* que está no título do livro *Hisab al-jabr w 'al-muqabalah*, do matemático árabe **Mohammed idn-Musa al-Khowarizmi** (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizmi). Uma tradução desse título seria "Ciência da restauração e redução" ou "Ciência da transposição e cancelamento". A palavra Álgebra designa o que é relativo à resolução de equações e somente a partir do século XVIII passa a incorporar também as estruturas algébricas.

Na história da Matemática encontramos evidências de fragmentos que demonstram o desenvolvimento da Álgebra ligado a diversos povos. Segundo Eves (1995), na Mesopotâmia foram escavadas mais de 50.000 tabulas de argila. Destas, em torno de 400 continham listas de problemas matemáticos.

No Egito Antigo as análises das inscrições dos papiros demonstraram presença da Álgebra nos cálculos efetuados por este povo.

> Há um certo simbolismo na álgebra egípcia. No papiro Rhind encontram-se símbolos para *mais* e *menos*. O primeiro deles representa um par de pernas caminhando da esquerda para direita, o sentido normal da escrita egípcia, e o outro representa um par de pernas caminhando da direita para a esquerda, em sentido contrário à escrita egípcia. Empregavam-se também símbolos, ou *ideo*gramas, para igual e para a *incógnita* (EVES, 1995, p.74).

De acordo com o mesmo autor, em 1842, G.H. F. Nesselmann caracterizou os três estágios no desenvolvimento da notação algébrica.

No primeiro estágio, a Álgebra era *retórica ou verbal*, isto é, apresentava-se a resolução dos problemas em prosa, sem abreviações ou símbolos específicos. É a Álgebra dos egípcios, babilônios e dos gregos pré-diofantinos. "Por volta do ano 2000 a.C. a aritmética babilónica já havia evoluído para uma Álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, [...] como também se discutiam alguma equações cúbicas" (EVES, 1995, p.61-62).

No segundo estágio, a Álgebra apresentava-se *sincopada*. Nesse estágio adotavam-se abreviações para algumas quantidades e operações que se repetissem freqüentemente. Diofanto foi o primeiro a utilizar notações algébricas, ou seja, a Álgebra sincopada. Ele introduziu um símbolo para a letra "sigma" do alfabeto grego, utilizando também uma forma mais simplificada para as equações. Segundo Eves (1995), "Diofanto tinha abreviação para incógnita, potência de incógnita até a de expoente seis: subtração, igualdade e inverso" (EVES, 1995, p.209). A Álgebra retórica continuou de maneira bastante generalizada no resto do mundo, exceto na Índia. Na Europa Ocidental, a maior parte da Álgebra permaneceu retórica até o século XVI (EVES, 1995).

O último estágio da notação algébrica foi o simbólico, em que as resoluções dos problemas passaram a ser expressas somente através de símbolos, sem recorrer ao uso de palavras. A Álgebra simbólica passou a ser utilizada em toda Europa Ocidental a partir da metade do século XVII (EVES, 1995). Neste estágio destacamos François Viéte (1540-1603), um algebrista renomado que deu sua parcela de contribuição aos três famosos problemas da Antiguidade ao mostrar que a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo dependiam da resolução de uma raiz cúbica (EVES, 1995). Mas foi René Descartes (1596-1650) quem completou a passagem da Álgebra para o estágio *simbólico*. Descartes aperfeiçoou a Álgebra de Viéte criando os símbolos para os expoentes, os quais usamos até hoje.

Após esse breve relato histórico a respeito da álgebra, vejamos algumas considerações referentes ao conceito de ser algébrico. Segundo Mahoney e Hoyrup (1994, apud, PUIG; ROJANO, 2004, p. 198) algumas das características do "algébrico" são:

> – o uso de um sistema de signos[1] ara resolver problemas que nos permitem expressar o conteúdo de um dado do problema relevante a sua solução (sua "estrutura"), separada do que não é relevante para a sua solução. A história do simbolismo em álgebra pode estar relacionada à história de desenvolvimento do sistema de signos que nos permitem calcular no nível

[1] Símbolos numéricos.

> sintático[2] para encontrar a solução do problema sem recorrer ao nível semântico[3] do problema dado.
> – a busca sistemática (comumente combinatória) por tipos de estruturas expressas por expressões diferentes dentro de um sistema de signos.
> – o desenvolvimento de conjuntos de regras para o cálculo no nível sintático e assim reduzir qualquer expressão para um dos tipos de estruturas.
> – a busca por regras (principalmente algorítmicas) para resolver todos os tipos de estruturas.
> – a ausência do compromisso ontológico do sistema de signos que os permite representar qualquer tipo de objeto matemático.
> – o caráter analítico do uso do sistema de signos para reduzir os dados do problema a uma forma canônica[4] .

Assim, podemos perceber que a linguagem e o pensamento estão intimamente interligados quando tratamos de Álgebra e pensamento algébrico.

Lee (1997, *apud*, KIERAN, 2004) apresentou, após quatro anos de estudos, alguns resultados de sua pesquisa que objetivava explorar o entendimento algébrico. Esta mesma autora colocou a pergunta "O que é Álgebra?" para um grupo de matemáticos, professores, estudantes e pesquisadores em Educação Matemática. As respostas que emergiram foram:

- Álgebra é aritmética generalizada;
- Álgebra é uma ferramenta;
- Álgebra é uma linguagem;
- Álgebra é uma cultura;
- Álgebra é uma forma de pensar;
- Álgebra é uma atividade.

Lee (2001, apud, LINS; KAPUT, 2004) propôs que seria relevante pensar em Álgebra *como uma cultura*, pois desta forma estaria contemplando as demais respostas obtidas na pesquisa realizada.

De acordo com Kaput (1999, p.2),

> A imagem tradicional de álgebra, baseada em mais de um século de álgebra escolar, é a simplificação de expressões algébricas, resolução de equações,

[2] Este nível compreende, em Matemática pura, elementos como axiomas, definições, lemas, teoremas e demonstrações e, em Matemática aplicada, elementos adicionais como problemas, algoritmos, métodos e modelos [...] trata-se de um nível de rigor extremamente elevado, mas, apesar de tudo, limitado (ERNEST, apud PONTE, 2001).

[3] Este nível compreende as formulações heurísticas dos problemas, as conjecturas informais ou não verificadas, as tentativas de prova e a discussão histórica e informal. Este é o nível da Matemática não oficial, respeitante aos significados, relações e heurísticas (ERNEST, apud PONTE, 2001)

[4] Forma padrão.

> aprendizado de regras de manipulação de símbolos - a álgebra em que quase tudo, ao que parece, é amado e detestado. A álgebra oculta esta imagem falha em virtude de todas as dimensões da compreensão que Carpenter e Leher tomam como ponto inicial da reforma na sala de aula. A álgebra escolar tem tradicionalmente sido ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desconexos de outros conhecimentos matemáticos e do mundo real dos estudantes .

Ele defende que a Álgebra deve ser entendida de uma forma muito diferente da habitual. Acredita que o pensamento algébrico pode tomar diversas formas que se entrelaçam. Considera que os estudantes devem explorar situações aritméticas para chegar à expressão e formalização de generalizações (Aritmética generalizada) e trabalhar com regularidades numéricas para descrever e generalizar relações funcionais (pensamento funcional). Desse modo, a introdução à Álgebra é realizada a partir de generalizações baseadas nas experiências dos estudantes e não pela aprendizagem descontextualizada de regras de manipulação simbólica.

Nesta perspectiva, o documento do NCTM (2000) indica que o conteúdo de Matemática, mais especificamente a Álgebra, deve possibilitar aos estudantes algumas habilidades, as quais explicitaremos posteriormente.

Em se tratando do simbolismo algébrico, o trabalho de Arcavi (1994) enfoca o estudo da manipulação simbólica. Para ele, o pensamento algébrico inclui a aplicação de generalidade, variabilidade e estrutura, e afirma que o principal instrumento da Álgebra é o símbolo. Arcavi também defende o desenvolvimento do "sentido simbólico" (*symbol sense*) e afirma que existem poucos estudos na literatura relacionados a este tema, comparando-se a atenção que tem sido dada ao "sentido numérico" (*number sense*). Arcavi ressalta que indivíduos que executam manipulações algébricas, sem considerar a possível relevância dos símbolos para apresentar a estrutura de um problema que despertou sua curiosidade, não desenvolveram completamente seu sentido simbólico. "Ter sentido simbólico inclui a relevante invocação da Álgebra. [...] inclui a invocação de símbolos de forma apropriada e o reconhecimento do significado de uma solução simbólica" (ARCAVI, 1994, p.25). Mesmo tendo algo em comum, o pensamento algébrico e os símbolos não significam a mesma coisa. De acordo com Arcavi (2006, *apud*, PONTE et al, 2009) pensar algebricamente incide em usar instrumentos simbólicos para representar o problema de forma geral, aplicar procedimentos formais para obter um resultado, e poder interpretar esse resultado. Ter "symbol sense", segundo o mesmo autor, implica questionar os símbolos em busca de significados, e recusá-los a favor de outra representação quando eles não proporcionam esses mesmos significados. Assim, a habilidade em manipular símbolos faria parte do pensamento algébrico. Nesse mesmo artigo, Arcavi apresenta alguns aspectos fundamentais que caracterizam o sentido de símbolo:

> – um entendimento de e uma percepção estética do poder dos símbolos, entendimento de como e quando os símbolos podem e deveriam ser usados para mostrar relações, generalizações e provas, que por sua vez estão escondidas ou invisíveis.
> – um feeling para saber quando abandonar os símbolos em favor de outras abordagens para progredir com um problema ou para encontrar uma solução ou representação mais fácil ou elegante.
> – uma habilidade de manipular e "ler" expressões simbólicas como dois aspectos diferentes de resolver problemas algébricos. Por um lado, a separação do significado necessário para a manipulação aliada à visão totalitária das expressões simbólicas as tornam relativamente rápidas e eficientes. Por outro lado, a leitura das expressões simbólicas direcionadas ao significado pode acrescentar níveis de conexão e raciocínio aos resultados.
> – a consciência que alguém pode inventar relações simbólicas as quais expressam verbal ou graficamente as informações necessárias ao progresso de um problema e a habilidade de inventar tais expressões.
> – a habilidade de selecionar uma possível representação simbólica de um problema, e, se necessário, ter a ousadia, primeiro, de reconhecer e perceber a insatisfação de alguém com aquela escolha, e segundo, ser hábil na busca, por uma representação melhor, que possa substituir a anterior.
> – a noção da constante necessária para verificar os significados do símbolo enquanto se resolve um problema, e comparar e confrontar tais significados com as próprias intuições de alguém ou com os resultados esperados daquele problema.
> – perceber as diferentes funções que os símbolos podem desempenhar em diferentes contextos (ARCAVI, 1994, p.31, tradução nossa).

Arcavi ressalta que o simbolismo algébrico deve ser introduzido desde o início em situações que os alunos possam apreciar o poder dos símbolos na expressão de generalizações e justificações de fenômenos aritméticos. Também com igual importância ressaltam-se as questões e reflexões colocadas por Pimm (1995) sobre a origem da palavra símbolo e qual a função dos símbolos matemáticos. Entende-se que o conhecimento dos símbolos e da linguagem matemática é imprescindível para a formação de um professor de Matemática. É com eles que o professor poderá comunicar-se matematicamente e expressar-se para o leitor, isto é, escrever numa linguagem clara e de fácil entendimento.

Ameron (2002) ressalta que a linguagem simbólica requer dos estudantes um novo olhar para as expressões simbólicas, um olhar diferente das abordagens tradicionais, nas quais as fórmulas, equações ou identidades aritméticas são apresentadas de forma artificial, prontas. O significado dos símbolos é fixado numa "moldura rígida" de convenções.

Podemos pensar na linguagem algébrica como um sistema de símbolos com sua sintaxe, ou melhor, semiótica. O estudante precisa manipulá-la para que ela se torne familiar. A aprendizagem se daria como a língua natural, no dia a dia. Lembremos que a linguagem algébrica não é natural ao estudante, logo necessita ser desenvolvida por meio do ensino.

> Toda generalização, toda formação de conceitos é o ato mais específico, mais autêntico e mais indiscutível do pensamento. Conseqüentemente, estamos autorizados a considerar o significado da palavra como um fenômeno do pensamento (VYGOSTKY, 2001, p.398).

Para este autor, o desenvolvimento de conceitos, dos significados das palavras, pressupõe o desenvolvimento de muitas funções intelectuais, dentre elas a memória lógica e a abstração. Este autor ainda ressalta que quando o indivíduo se apropria do sistema simbólico algébrico, como um sistema de signos, pode transformá-lo em instrumento do pensamento e assim resolver as situações-problema com as quais se defronta. "Os conceitos algébricos representam abstrações e generalizações de certos aspectos dos números significando um novo e mais elevado plano do pensamento" (VYGOTSKY, 2001).

Acreditamos que os erros e as dificuldades que os estudantes apresentam em atividades algébricas se devem, muitas vezes, a um problema na manipulação da linguagem algébrica e seu formalismo.

1.2 A ÁLGEBRA ESCOLAR

Em maio de 1993, um colóquio internacional sobre Álgebra intitulado "Research Perspectives on the Emergence and Development of Algebraic Thought", que aconteceu em Montreal, apontou alguns "ingredientes básicos" da Álgebra Escolar:

> - generalização de padrões numéricos e geométricos e das relações numéricas;
> - resolução de problemas;
> - situações funcionais (no que se refere a funções);
> - modelagem de fenômenos físicos e matemáticos (BERDNAZ, KIERAN; LEE 1996, apud KIERAN 2004, p. 21).

Cada um desses "ingredientes básicos" centraliza uma forma de trabalhar a Álgebra, apontando avanços que o professor pode obter ou dificuldades que este poderá encontrar. Acreditamos que todas são relevantes e podem estar presentes na *práxis* pedagógica dos professores, pois a ênfase dada ao conhecimento matemático e mais especificamente à Álgebra é particular de cada um.

Ao buscarmos um referencial para a Álgebra Escolar, optamos pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM[5]), mais especificamente pelos documentos *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989) e *Principles and Standards for School Mathematics* (2000), os quais apresentamos um breve histórico do objetivo de sua publicação e tecemos algumas considerações presentes nesse documento e que são pertinentes de serem mencionadas em nossa pesquisa.

Segundo Onuchic e Allevato (2005), nos anos 70, várias discussões no campo da Educação Matemática no Brasil e no mundo mostravam a necessidade de se adequar o trabalho escolar às novas tendências que pudessem levar a formas mais significativas de ensinar e aprender matemática. O NCTM (2000) respondeu àquelas preocupações nos anos 80 no documento denominado *An Agenda for Action* (NCTM, 1980, p.217). A partir da década de 80, o documento do NCTM publicou os Standards, os quais "queriam apresentar objetivos e princípios em defesa de que práticas curriculares, de ensino e de avaliação pudessem ser examinadas" .

Após uma década de aplicação das ideias defendidas nos Standards, o NCTM trabalhou sobre as críticas e sugestões recebidas e produziu a publicação Principles and Standards for School Mathematics em 2000, conhecida como os Standards 2000, os quais refinaram e elaboraram as mensagens dos documentos originais dos Standards, conservando intacta sua visão básica (NCTM, 1980, p.218).

O documento do NCTM Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989) afirma que é nas séries finais do Ensino Fundamental que se estabelece uma ponte entre o currículo concreto da escola elementar e o currículo de Matemática mais formal e que neste período existe uma transição crítica entre a Aritmética e Álgebra, no momento em que os alunos generalizam padrões, investigam seqüências, exploram conceitos algébricos de maneira informal, conceitos que podem se considerar como fazendo parte da pré-álgebra[6].

---

[5] O NCTM é uma organização profissional sem fins lucrativos. Conta com mais de 125000 associados e é a principal organização para professores de Matemática desde o Pré-primário até a Escola Secundária (OUCHIC; ALLEVATO, 2005, p.215).

[6] Kieran e Chalouh (1993, p.181-182) ressaltam que a pré-álgebra constitui a área da Matemática na qual os estudantes constroem a sua Álgebra a partir da Aritmética, ou seja, constroem o significado dos símbolos e das operações da Álgebra com base nos conhecimentos da Aritmética. Para esses autores é "uma exploração de algumas ideias algébricas nas quais os estudantes (a) pensam sobre as relações numéricas de uma situação, (b) discutem-nas na linguagem do dia-a-dia e (c) eventualmente aprendem a representá-las com letras ou outra notação não-ambígua" .

O documento do NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics* (2000), ressalta que:

> Ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática. Em todos os níveis de escolaridade, os alunos deverão perceber que a matemática faz sentido através do desenvolvimento de idéias, da exploração de fenômenos, da justificação de resultados e da utilização de conjecturas matemáticas em todas as áreas de conteúdo (NCTM, 2000, p.61).

Este mesmo documento considera que a Álgebra deve ser abordada desde os primeiros anos de escolaridade, pois mesmo antes do ensino formal as crianças desenvolvem conceitos iniciais referentes a padrões, funções e Álgebra e quando, ao verbalizarem a sua compreensão matemática, estas começam a usar a linguagem formal do dia-a-dia, construindo elos com a linguagem matemática formal. Também coloca que os alunos devem compreender que as representações escritas das ideias matemáticas são componentes importantes da aprendizagem e da produção matemática, e que a utilização das formas de representação convencionais podem facilitar tanto a aprendizagem da Matemática quanto a comunicação com outras pessoas de suas ideias matemáticas. Acrescenta que um dos aspectos mais poderosos da Matemática consiste no uso da abstração[7]. Também descreve uma Matemática significativa, com os conteúdos e os processos matemáticos que os alunos deverão aprender, constituindo-se numa orientação curricular para esta disciplina, tanto ao nível de conteúdos como das abordagens que deles se faz até os dias atuais, elencando seis princípios para a matemática escolar: equidade, currículo, ensino, aprendizagem, avaliação e tecnologia. (NCTM, 2000, p.218). Considerando esses seis princípios, Onuchic e Allevato (2005) afirmam que:

> [...] são apresentados cinco padrões de conteúdo: números e operações, álgebra, geometria, medida e análise de dados e probabilidade, os quais descrevem explicitamente o conteúdo a ser trabalhado e que os alunos devem aprender. Os outros cinco padrões são padrões de processo: resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representação, que realçam os caminhos de se adquirir e usar o conhecimento do conteúdo trabalhado .

Na perspectiva do documento do NCTM (2000), o trabalho com números e suas propriedades fundamentam as bases para o trabalho com símbolos e expressões

---

[7] Eliminação, através da simbologia, de algumas características de um problema que não são essenciais para a sua análise, o que vai permitir que sua representação simbólica seja mais facilmente operacionalizada (NCTM, 2000, p.78)

algébricas. O trabalho com padrões propicia aos alunos identificar relações e fazer generalizações por meio de diversas atividades exploratórias. Também realça que a medida que estes fazem generalizações, observando os números e as operações, estão construindo as bases do pensamento algébrico. Ainda segundo este documento, os programas de ensino deverão permitir aos alunos:

> - compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
> - usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; analisar a variação em diversos contextos (NCTM, 2000, p.104).

Kieran (1981) realizou um estudo com o objetivo de observar o comportamento de alunos de todos os anos de escolaridade e algumas das dificuldades que estes possuíam. A pesquisadora mostra que a compreensão do sinal de igualdade deve ser relevante no estudo da Álgebra Escolar. Muitos alunos não concebem o sinal de igualdade como um sinal de equivalência. A ideia de que conceber o sinal de igualdade apenas como um símbolo pode persistir por todo o ensino fundamental, mesmo quando os alunos se deparam com situações em que este se associa ao sinal de equivalência.

Em alguns de seus artigos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática Escolar, a essência da Álgebra e a identificação de estágios de desenvolvimento algébrico, Kieran (1992, 2004) assegura que o simbolismo facilitou o desenvolvimento de conceitos matemáticos como, por exemplo, o de função. Acredita que na Álgebra Escolar a aprendizagem pode ser interpretada como uma série de ajustamentos processo-objeto que os alunos desenvolvem até perceberem os aspectos estruturais da Álgebra.

Kieran (1992 *apud*, PESQUITA, 2007, p.20) descreve seis níveis de interpretação da letra considerando um nível mínimo de compreensão necessário para realização correta das atividades propostas pelos estudantes:

> (a) Letra avaliada: é atribuído um valor à letra desde o princípio. Exemplo: Se a = 3, qual é o valor da expressão a + 5?
> (b) Letra não considerada: a letra é ignorada ou a sua existência é reconhecida sem que lhe seja dado um significado. Exemplo: Se x + y = 10, x + y + 5 = ...?
> (c) Letra considerada como objeto: a letra é entendida como o nome de um objeto concreto. Exemplo: O cálculo do perímetro de um quadrado é 4l, onde l é o comprimento do lado do quadrado.
> (d) Letra considerada como incógnita: a letra é entendida como um número específico, mas desconhecido. Exemplo: Dada a equação 2x +1 = 7, qual o valor de x?

(e) Letra considerada como número generalizado: a letra é entendida como uma representação de vários números e não de apenas um. Exemplo: A expressão de números ímpares, 2n -1.

(f) Letra considerada como variável: a letra é entendida como a representação de uma série de valores desconhecidos e é vista a existência de uma relação sistemática entre esses dois conjuntos de valores. Exemplo: Qual é maior, 2n ou n^2? .

Até meados do século XVIII a Álgebra aparecia descontextualizada como uma coleção de símbolos soltos e sem envolvimento entre si, onde os estudantes não entendiam a necessidade de sua utilização. Para eles a Álgebra era uma parte da Matemática muito complicada e difícil. Apesar de muitos estudantes ainda acharem que a Álgebra é apenas isso, sabemos que hoje ela abarca também relações matemáticas abstratas e as estruturas algébricas.

Carpenter et al. (2003) afirmam que os alunos podem aprender Aritmética de uma forma produtiva, na qual seu conhecimento de Aritmética sirva de base para aprender Álgebra. Sendo assim, consideram importante algumas discussões desde as séries iniciais sobre o sinal de igualdade, tanto na Aritmética quanto na Álgebra, as relações que se estabelecem entre as expressões numéricas, a construção de conjecturas representações simbólicas, a justificação e prova das conjecturas matemáticas e as relações de implicações da Aritmética e da Álgebra.

"Introduzir a Álgebra nas séries iniciais abriria um espaço curricular necessário para o nível secundário e acrescentaria um novo nível de coerência, profundidade e potência à matemática elementar" (BLANTON, KAPUT,2001, *apud* LINS, KAPUT, 2003, tradução nossa).

Carpenter et al (2003) sugerem que a integração entre a Aritmética e a Álgebra deve acontecer nas séries iniciais para que os estudantes não apresentem maiores dificuldades nas séries subseqüentes e que as crianças possam desenvolver o pensamento algébrico, generalizar relações ou padrões. "Muito embora os conceitos discutidos nas séries iniciais sejam algébricos, tal fato não significa que os alunos destes primeiros anos, tenham que lidar com o simbolismo freqüentemente ensinado nas tradicionais aulas de Álgebra" (NCTM, 2000, p.105). Existem muitas propriedades, estruturas e relações que são comuns à Álgebra e a Aritmética que podem ser abordadas de forma integrada.

Alguns autores como Sfard (1991) e Kieran (1992) salientam que as dificuldades de estudantes em aprender Álgebra ou a linguagem simbólica de Álgebra estão na incapacidade de relacionar expressões simbólicas ao seu significado. A fonte de muitos erros está na insuficiência de tais relações. Além de ignorarem os significados, inventam novos e torna-se difícil convencê-los do erro cometido.

Sfard (1991) aponta duas perspectivas fundamentais de conceber as noções matemáticas: *operacionalmente* (como processos) e *estruturalmente* (como objetos). Os alunos esforçam-se para adquirir uma concepção estrutural da Álgebra, a qual é diferente da perspectiva aritmética.

Para ilustrar essa concepção operacional, Sfard e Linchevski (1994, apud AMERON, 2002) explicam que uma expressão algébrica como 3(x +5) +1 pode ser vista como uma descrição de um processo computacional que pode ser visto como uma sequencia de instruções: adicione 5 a um certo número dado, multiplique o resultado por três e finalmente adicione 1; como um produto de computação, representando certo número (que desta vez pode ser especificado) e como uma função, ao invés de representar um número fixo que caracteriza uma mudança. E ainda de uma forma mais simples, num nível superficial, nós podemos ainda dizer que a expressão é uma seqüência de símbolos sem sentido. Como um objeto algébrico, ele pode ser manipulado e combinado com outras expressões simbólicas. As três últimas concepções como um produto computacional, como uma função e como seqüência de símbolos refletem uma compreensão da Álgebra . De fato, Sfard e Linchevski (1994, apud AMERON, 2002) discutem que estas quatro noções diferentes de uma expressão algébrica representam diferentes fases na aprendizagem individual de Álgebra, baseados em análises lógicas, históricas e ontológicas. Sfard (1991) afirma que o segundo estágio da Álgebra, o sincopado (no qual as quantidades desconhecidas são representadas por abreviaturas ou letras) está ligado à concepção operacional da Álgebra, considerando que o estágio simbólico (no qual as letras são consideradas como quantidades conhecidas) corresponde à concepção estrutural.

Retornando ao pensamento algébrico, agora na perspectiva da Álgebra Escolar, Lins e Gimenez (1997) discutem a existência ou não de um consenso a respeito do pensar algebricamente e do estabelecimento de uma raiz comum para a Álgebra e a Aritmética. Segundo os autores, isto seria uma extensão dos trabalhos de Davydov que considera que as relações quantitativas podem ser tratadas produzindo significado em relação a muitos tipos diferentes de núcleos e não apenas núcleos do tipo todo-parte.

Na perspectiva de Kaput (1999), o pensamento algébrico pode adquirir diversas formas que se combinam. Considera que a partir de situações aritméticas os alunos podem chegar a expressão e formalização de generalizações (aritmética generalizada) e trabalhar com regularidades numéricas para descrever e generalizar situações funcionais (pensamento funcional). Aponta também a modelação como uma forma de exprimir e formalizar generalizações, bem como a generalização relativa a estruturas abstratas. Dessa maneira a Álgebra e, conseqüentemente, o pensamento algébrico, podem ser iniciados com base nas experiências dos alunos e não pela aprendizagem descontextualizada de regras de manipulação simbólica.

Acreditamos que as caracterizações do pensamento algébrico precisam estar presentes nas pesquisas e nas discussões em sala de aula como qualquer outro conteúdo pertinente à Matemática. A compreensão dos conceitos algébricos fundamentais é um processo lento e requer dos professores e alunos um trabalho ao longo de vários anos.

Apresentaremos a seguir algumas caracterizações do pensamento algébrico, seguindo autores citados no NCTM (2000), as quais subsidiarão a análise da produção escrita dos alunos e professores.

Várias caracterizações de Álgebra e de pensamento algébrico foram propostas por diferentes autores. Lins coloca que: "[...] escolhas a respeito do que é álgebra e pensamento algébrico têm um grande impacto no desenvolvimento de pesquisas e materiais para a sala de aula" (LINS, 2001, p. 37).

Para Lins e Gimenez (1997, p.137), a Álgebra consiste em "um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade".

Assim, existem modos diferentes de produção desses significados, entre eles o pensamento algébrico. Este modo possui, então, de acordo com os mesmos autores, três características fundamentais:

1. Produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (aritmeticismo);
2. Considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos "físicos" ou geométricos (internalismo);
3. Operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (analiticidade) (LINS;GIMENEZ, 1997, p. 151).

Lins e Gimenez nos apontam que pensar algebricamente é pensar envolvendo essas três características, é produzir significado para as situações que nos apresentam envolvendo números e operações e transformá-las em expressões que são obtidas a partir dessas características. Ao afirmar que pensar algebricamente é pensar aritmeticamente, Lins nos remete "à idéia de modelar com números" (LINS, 1992, p.12).

Pensar aritmeticamente significa que estamos lidando exclusivamente com números, operações aritméticas e uma relação de igualdade (LINS, 1994).

Referindo-se ao pensar internamente, Lins (1992) afirma que quando pensamos algebricamente estamos tomando como referência as propriedades das operações. Sendo assim, podemos verificar a existência de modelos não-aritméticos como outras formas de produção de significados.

Na última característica do pensamento algébrico, pensar analiticamente, o pensamento algébrico é caracterizado "como um método de procura das verdades e que no pensamento algébrico o desconhecido é tratado como conhecido (LINS, 1992, p.16)".

Lins (1992, p. 17-18) afirma que o pensamento algébrico

> [...] pode acontecer no contexto da notação simbólica (literal ou outra). [...] a notação algébrica compacta que tem se desenvolvido - sustentada pela notação aritmética - não é apenas possível no contexto do pensamento algébrico, mas adequada. [...] no contexto algébrico, os números podem ser entendidos simbolicamente .

Lins (1992) acredita que essas caracterizações podem contribuir para uma melhor compreensão das soluções apresentadas pelos estudantes e podem tornar o ensino da Álgebra muito mais coerente e útil do que modelos prontos.

Fiorentini et al. (1993) estabelecem ainda uma caracterização do pensamento algébrico a partir da análise de situações nas quais acreditam ser possível a manifestação desse pensamento. Essas situações consistiram de problemas algébricos nos quais nem sempre era evidente a manifestação do pensamento algébrico.

> [...] acreditamos subsistir entre o pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas um relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-los, a colocar a questão de quais seriam ao elementos caracterizadores de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado de algébrico (FIORENTINI et al., 1993, p.85).

Concluem também que não existe apenas uma forma única de expressar o pensamento algébrico e consideram que o pensamento algébrico

> [...] pode expressar-se através de uma linguagem natural, através de uma linguagem aritmética, através de uma linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para este fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica (FIORENTINI et al., 1993, p.88).

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 87) apontam "a existência de elementos que caracterizam o pensamento algébrico tais como: percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam tentativas de uma situação-problema e a presença do processo de generalização" e que devemos levar nossos alunos a "pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essa regularidade através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente, estabelecer relações entre grandezas variáveis" .

Esses autores ressaltam algumas implicações pedagógicas no que se refere ao pensamento algébrico:

> 1ª) O pensamento algébrico pode ser abordado desde as séries iniciais, pois esse tipo de pensamento não prescinde uma linguagem simbólico-formal não havendo motivos para seu trabalho tardio.
>
> 2ª) A linguagem simbólico-formal além de fornecer um simbolismo conciso que possibilita abreviar a resolução de uma situação-problema, facilita a simplificação de cálculos.
>
> 3ª) A pensamento algébrico é indispensável na constituição do universo conceitual e temático subjacente à ciência contemporânea.
>
> 4ª) O pensamento algébrico deve basear-se em etapas que são importantes no desenvolvimento da Educação Algébrica, dentre as quais se destacam: o trabalho com situações-problema, a atribuição de algumas significações às expressões algébricas e o transformismo[8].

Fiorentini, Miorim e Miguel (2005) caracterizam três fases do desenvolvimento do pensamento algébrico: a fase pré-algébrica (em que o aluno utiliza algum outro elemento considerado algébrico - letra, por exemplo - mas não se consegue, ainda, concebê-lo como número generalizado); a fase de transição (na qual o aluno aceita conceber a existência de um número qualquer, estabelecendo alguns processos e generalizações, podendo ou não utilizar a linguagem simbólica); e finalmente o pensamento algébrico mais desenvolvido (quando o aluno concebe a existência de grandezas numéricas abertas ou variáveis dentro de um intervalo numérico, sendo capaz de operá-las). Na concepção desses

---

[8] Modo como uma expressão algébrica transforma-se em outra equivalente e os procedimentos que legitimam essas transformações.

autores, podemos inferir que o pensamento algébrico se potencializa à medida que os estudantes desenvolvem uma linguagem mais apropriada para ele.

Lins e Kaput (2004, p. 48, tradução nossa) apontam duas características para o pensamento algébrico. A primeira "envolve atos de generalização planejada e expressão de generalidade". A segunda envolve "usualmente como uma tentativa isolada, raciocínio baseado nas formas de generalização sintaticamente-estruturadas, incluindo ações orientadas sintaticamente e semanticamente" . Segundo esses autores, esta é uma caracterização de grande parte do raciocínio algébrico que nos auxilia nas discussões das formas do pensamento algébrico na busca da maneira mais adequada de ensinar crianças e as condições de promovê-las. Entre essas condições Lins e Kaput (2004, p.48, tradução nossa) ressaltam a "necessidade de uma grande integração de diferentes tópicos matemáticos para promover o desenvolvimento das formas do pensamento algébrico, as quais potencializam as habilidades de resolução de problemas nos alunos" .

Para Kaput (1999, p.04), muitas vezes a experiência com a Álgebra faz com que alguns alunos fiquem desmotivados para aprender Matemática, antes mesmo de construir o conhecimento matemático, quer para compreender sua importância e utilidade em suas vidas. Acrescenta ainda que "sem o simbolismo algébrico não existiria a Matemática superior nem a ciência quantitativa, a tecnologia e a vida moderna como as conhecemos ".

Lins e Gimenez (1997, p.28) acreditam numa "proposta para a educação matemática em que álgebra, aritmética e geometria sejam consideradas instrumentos que participam da organização da atividade humana." .

Finalmente, acreditamos que a atividade algébrica deve integrar o conhecimento aritmético e geométrico em toda a Educação Básica. Temos consciência de que, em certos momentos, estes devem ser abordados separadamente para se tratar de seus procedimentos e operações.

No próximo capítulo, abordaremos os procedimentos metodológicos de nossa pesquisa.

CAPÍTULO 2
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos os procedimentos metodológicos que utilizamos para responder nossa pergunta de pesquisa.

2.1 A NATUREZA DA PESQUISA

O objetivo deste trabalho é investigar **quais conteúdos algébricos, as características do pensamento algébrico, da linguagem algébrica e simbologia algébrica são mobilizados por estudantes e professores de Matemática do Ensino Médio quando da resolução de questões de Álgebra de vestibulares de Instituições de Ensino Superior Estaduais do Paraná?**

Assim, para atingir nosso objetivo, optamos pela pesquisa qualitativa, pois "[...] envolve a obtenção dos dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação encontrada e enfatiza mais o processo do que o produto (LÜDKE ; ANDRÉ, 1986, p.13)".

Os dados emergiram a partir da resolução de questões de vestibulares por estudantes e professores de Matemática do Ensino Médio, sendo o investigador o principal responsável pela organização e coleta de dados, pois esteve presente nas aplicações das questões, observando o que acontecia durante as mesmas. Esses dados são essencialmente descritivos, visto que foram alcançados a partir da resolução de questões retiradas de vestibulares de IES paranaenses.

O investigador esteve mais interessado no modo de resolução do que nos resultados ou produtos, pois pretendeu investigar conteúdos algébricos, pensamento algébrico, linguagem e simbologia em registros escritos de estudantes e professores de Matemática quando da resolução de questões de vestibulares e não somente a porcentagem de erros e acertos.

Finalmente, a análise dos dados foi feita de modo indutivo, com os dados iniciais sendo agrupados e relacionados na busca de responder à questão de nossa pesquisa.

2.2 O CONTEXTO DA PESQUISA

Visando atingir nosso objetivo, primeiramente buscamos no site da Secretaria de Estado da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior (SETI), no mês de novembro de 2008, as universidades públicas estaduais cadastradas e encontramos UEL, UEM, UEPG, UNICENTRO E UNIOESTE.

Como essas universidades realizavam o exame vestibular em duas etapas, optamos pelas universidades em que a primeira etapa era a prova de conhecimentos gerais, aplicada a todo o candidato independente do curso, pois acreditamos que essa etapa exige do candidato conhecimentos básicos que um egresso do Ensino Médio deve possuir para ingressar no ensino superior e assim selecionamos a UEPG, UEL e UEM[9]. Nosso próximo passo foi a delimitação do período para a coleta de dados e optamos pelo período de 2005 a 2007 para a seleção e análise das questões, por serem os últimos anos que antecederam o início de nossa pesquisa. Bardin (2004) afirma que "nem todo material de análise é suscetível de dar lugar a uma amostragem e, nesse caso, mais vale abstermo-nos e reduzir o próprio universo (e, portanto o alcance da análise), se este for demasiado importante" (BARDIN, 2004, p.97-98).

Após a seleção das universidades e do período, nosso próximo passo foi buscar nas provas de verão de conhecimentos gerais as questões de Matemática, totalizando 46 questões (Apêndice A).

Feita essa seleção, enviamos as questões a cinco especialistas, quatro doutores e um mestre em Álgebra, sendo que apenas o mestre e três doutores responderam nossa solicitação em indicar quais destas questões eram referentes à Álgebra. Cada questão tem um código de identificação no qual os dois primeiros dígitos se referem à universidade que propôs a questão, os outros dois dígitos referem-se ao ano do exame vestibular e a letra Q (questão), seguida de um número, indica a questão. Assim o código 0105Q3 refere-se à questão 03 da UEPG do ano de 2005. Solicitamos a esses especialistas que nos apontassem quais questões eram de Álgebra[10].Optamos por analisar aquelas que foram apontadas por, pelo menos, um especialista como sendo uma questão de Álgebra (Apêndice B) e assim procedemos a análise das 11 questões escolhidas (Apêndice C).

[9] A UEM no ano de 2005 ainda não realizava a prova de conhecimentos gerais. Seu exame vestibular ainda era similar ao exame vestibular da UNICENTRO E UNIOESTE. Somente a partir do ano de 2006 a referida universidade optou por este formato no seu exame vestibular.

[10] Segundo Bardin (2004), os documentos retidos devem ser homogêneos, quer dizer, devem obedecer a critérios precisos de escolha e não apresentar demasiada singularidade fora destes critérios de escolha.

Essas questões foram aplicadas a 24 professores de Matemática da Rede Pública de Telêmaco Borba, atuantes no Ensino Médio, e 50 estudantes que cursavam o 3° Ano do Ensino Médio. Os estudantes eram pertencentes às turmas dos professores que aceitaram participar da pesquisa e foram convidados pelo pesquisador para tomar parte da mesma. A aplicação das questões se deu no primeiro semestre de 2009.

2.3 SOBRE A DESCRIÇÃO E ANÁLISE

As provas que os professores receberam continham um código de identificação formado pela letra P (professor), seguido de um número que representava a quantidade dos participantes da pesquisa. Da mesma forma, as provas que os estudantes receberam continham também um código de identificação formado pela letra E (estudante), seguido de um número que representava a quantidade de estudantes que fizeram parte de nossa pesquisa. Por exemplo, a prova cujo código de identificação é P10 indica que o professor foi a 10ª amostra da nossa pesquisa a ser analisada. Esse código de identificação foi adotado para preservar o nome dos participantes. Com os estudantes, seguimos o mesmo procedimento: a prova cujo código de identificação é E28 indica que o estudante foi a 28a amostra analisada nesta pesquisa. Antes de procedermos a aplicação das provas, apresentamos aos professores e estudantes alguns esclarecimentos que consideramos pertinentes sobre a investigação que seria realizada a partir do material coletado. Todos os professores e estudantes que se dispuseram a contribuir com nossa investigação assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice D). Para os professores, a aplicação das questões ocorreu durante as suas horas-atividades em seus estabelecimentos de ensino. Os estudantes que aceitaram participar da nossa pesquisa foram reunidos em uma sala, no horário de aula, para que pudessem se concentrar melhor e com isso podermos observá-los durante a resolução das questões.

Antes de iniciar a análise da produção escrita contida nas provas, corpus[11] de nossa pesquisa, nosso primeiro passo foi resolver todas as questões para fazer um levantamento das impressões que tivemos de cada item, dos "caminhos" que percorremos em cada resolução e encontrar o resultado correto. Nos exames vestibulares cujas questões

[11] O corpus é o conjunto de documentos tidos e conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos. A constituição implica, muitas vezes, escolhas, seleções e regras (BARDIN, 2004, p.97).

apresentaram-se sob forma de questões abertas[12] e questões de alternativas múltiplas[13], adotamos alguns critérios na correção das mesmas: consideramos código 1 para pontuação total, ou seja, aquelas em que os participantes apresentaram a soma correta dos números correspondentes às questões verdadeiras; código 2 para a soma que apresentou a atribuição de pontos em que o valor numérico assinalado incluiu pelo menos uma alternativa verdadeira e nenhuma alternativa falsa. Portanto, a pontuação integral ou parcial de uma questão só foi feita se a soma apresentada não incluiu alternativa(s) falsa(s) e código 3 para as questões que os participantes não resolveram ou apresentaram uma soma incluindo alternativa falsa.

Seguimos, assim, um procedimento similar com base no Manual para Correção das Provas com Questões Abertas de Matemática AVA/2002 (BURIASCO, CYRINO; SOARES, 2004) e procedemos a primeira correção das provas. Olhamos o primeiro item de todas as provas de professores e estudantes , em seguida o segundo item e assim por diante.

A partir das produções escritas de professores e estudantes, iniciamos uma leitura de cada questão para buscar os detalhes de cada produção e assim estabelecermos os agrupamentos[14], os quais não são excludentes. Os grupos foram criados de acordo com o modo de resolução elaborado. Em algumas questões criamos subgrupos desses modos devido a processos de resolução e caminhos diferentes utilizados na produção, buscando uma análise mais detalhada.

Partindo dos agrupamentos, fizemos uma leitura específica de cada questão da prova e uma leitura dos grupos na busca de uma descrição da mesma e realizamos uma análise baseada no enunciado da questão, buscando verificar os conteúdos mobilizados para sua resolução e na produção escrita de estudantes e professores.

Nessa última fonte, inferimos que houve indícios de pensamento algébrico quando um ou mais indicadores se fizessem presentes explicitamente:

- generalização;
- regularidade;

---

[12] **Questões abertas** são aquelas que admitem respostas em valores numéricos inteiros compreendidos entre 00 e 99, incluindo esses dois valores (MANUAL DO CANDIDATO- UEPG).

[13] **Questões de alternativas múltiplas** são aquelas que apresentam seis alternativas, indicadas com os números 01, 02, 04, 08, 16 e 32. A resposta correta será a soma dos números correspondentes às alternativas verdadeiras. O valor numérico do somatório encontrado, obrigatoriamente, terá dois algarismos (MANUAL DO CANDIDATO- UEPG).

[14] Segundo Laville e Dionne (1999), a abordagem então é indutiva: o pesquisador parte com certo número de unidades, agrupando as de significação aproximada para obter um primeiro conjunto de categorias rudimentares. Esse conjunto constitui o ponto de partida de um procedimento que, por etapas sucessivas, conduzirá às categorias finais (LAVILLE; DIONNE, 1999, p.219).

- uso ou cálculo de incógnitas;
- uso ou cálculo com variáveis;
- uso de equações.

Além dos conteúdos algébricos envolvidos e do pensamento algébrico, analisamos a linguagem algébrica utilizada pelo sujeito da pesquisa, bem como a simbologia.

Para a análise da produção escrita dos estudantes e professores encontrada nas onze questões dos exames vestibulares apontadas por especialistas como sendo questões de Álgebra, utilizamos, primeiramente, a análise descritiva dos dados, isto é, uma descrição dos modos de resolução de cada questão, a análise interpretativa dos dados[15], e, posteriormente, a análise de conteúdo, que, segundo Laville e Dionne (1999, p.214), "consiste em desmontar a estrutura e os elementos de um conteúdo para esclarecer suas diferentes características extraindo sua significação." Acreditamos que assim conseguimos responder nossa pergunta de pesquisa.

[15] Segundo Gomes (1994) é a articulação dos dados com a fundamentação teórica.

CAPÍTULO 3
ANÁLISE DAS QUESTÕES

Neste capítulo apresentamos a análise descritiva, interpretativa e de conteúdo das questões de vestibulares apontadas pelos especialistas como sendo questões de Álgebra, à luz do referencial teórico abordado no capítulo 1 desta pesquisa.

3.1 QUESTÃO 01

De acordo com a tabela, com 3 colheres de pó de café e 0,5 litro de água, são feitos 8 cafezinhos. Com base nessas informações, calcule os valores de x, y, r e s da tabela e assinale o que for correto.

01) $\frac{r}{s}$ é um número natural.
02) r é um múltiplo de 4.
03) $x > s$.
08) $x + r$ é um número primo.
16) x é um divisor de r.
32) y é um número racional.

cafezinhos	colheres de pó de café	água(ℓ)
8	3	0,5
x	4,5	y
r	s	1,5

O enunciado da questão relaciona grandezas que são referenciadas no uso cotidiano, tais como: colheres de pó, água e cafezinhos. É uma questão de alternativas múltiplas, pois o estudante deve calcular o valor das incógnitas para em seguida verificar as afirmações da questão. Para descobrir os valores das incógnitas o estudante precisa reconhecer uma relação implícita de proporcionalidade entre as colheres de pó, água e cafezinhos. Após este reconhecimento, deve utilizar multiplicação, divisão e regra de três para descobrir o valor das incógnitas.

Como as alternativas envolvem os termos número natural, múltiplo, etc., o estudante deve conhecer o significado desses termos, bem como alguns símbolos algébricos.

A partir da correção realizada dessa questão, baseados nos critérios de correção descritos anteriormente, construímos a seguinte tabela com a qual podemos inferir que a questão foi resolvido facilmente por grande parte dos participantes e os modos de resolução adotados levaram à obtenção da pontuação integral da questão.

Tabela 1 – Distribuição das pontuações obtidas pelo grupo de professores e alunos na questão 01

Sujeitos da Pesquisa	Pontuações							
	Pontuação Integral		Pontuação Parcial		Pontuação Nula		Total da Amostra	
	Código 1		Código 2		Código 3			
	N	%	N	%	N	%	N	%
Professores	24	100	0	0	0	0	24	32
Estudantes	30	60	13	26	7	14	50	68
Total da Amostra	54	73	13	18	7	9	74	100

Por meio da análise da produção escrita dos participantes conseguimos estabelecer três grupos de modos de resolução, os quais apresentamos a seguir:

Quadro 1 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão

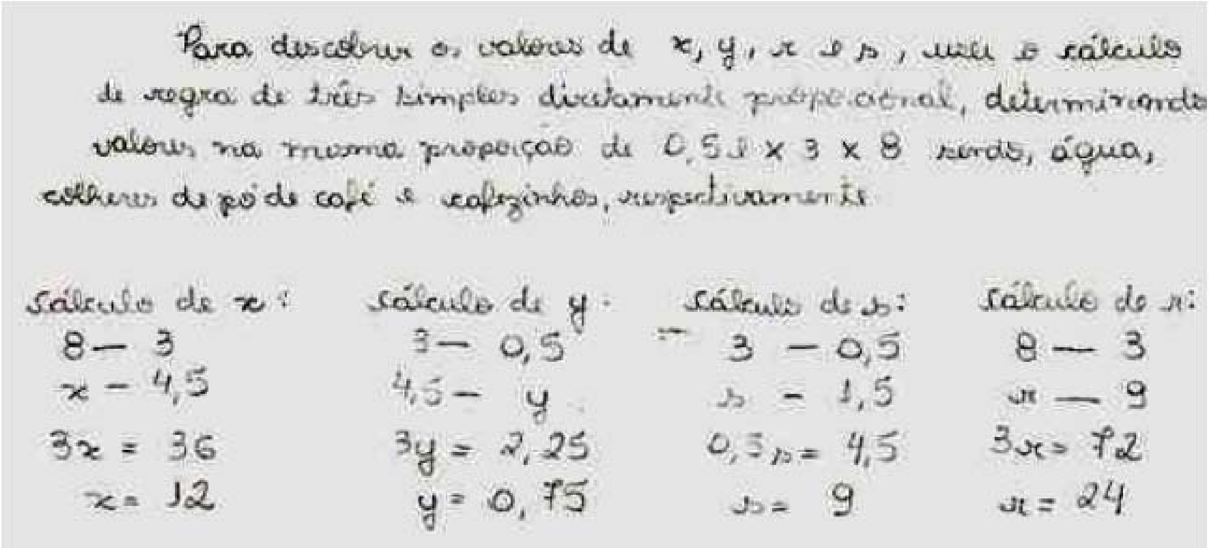
Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	**Regra de Três Explícita**	Apresenta a regra de três de forma explícita considerando que as grandezas são di-retamente proporcionais.	E01, E04, E12, E13, E15, E18, E19, E31, E40, E45, E46, P10
G2	**Regra de Três Implícita**	Calcula os valores desconhecidos *x, y, r e s* solicitados na tabela: $\frac{8}{x}=\frac{3}{4,5}=\frac{0,5}{y}$ $\frac{8}{r}=\frac{3}{s}=\frac{0,5}{1,5}$ Comparando as razões duas a duas encontra os valores das incógnitas. Para determinar o valor de x, compara as razões duas a duas: $\frac{8}{x}=\frac{3}{4,5}$ Multiplica 8 por 4,5. Divide o resultado por 3 e apresenta o resultado. O mesmo procedimento é adotado para encontrar resultado de y: $\frac{3}{4,5}=\frac{0,5}{y}$ Multiplica 4,5 por 0,5. Divide o resultado por 3.Apresenta o resultado. Para encontrar o resultado de r e s, monta-se uma nova seqüência de razões e por meio do conceito e das propriedades das proporções, calcula r e s: $\frac{8}{r}=\frac{0,5}{1,5}$ Multiplica 8 por 1,5. Divide por 0,5. Apresenta o resultado. $\frac{0,5}{1,5}=\frac{3}{s}$ Multiplica 3 por 1,5. Divide o resultado por 0,5. Apresenta o resultado.	E05, E14, E16, E17, E20, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E32, E33, E34, E35, E36, E37, E38, E39, E41, E42, E43, E44, E47, E48, E49, E50, P01, P02, P03, P04, P05, P06, P07, P09, P11, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P22, P23.

G3	**Proporcionalidade**	Observa a tabela e estabelece a razão entre os valores apresentados e assume que as grandezas são diretamente proporcionais Para encontrar os valores de *x* e *y*, utiliza a razão obtida Para encontrar *x* multiplica 8 por 1,5. Apresenta o resultado.Para encontrar *y* multiplica 0,5 por 1,5. Apresenta o resultado. Para obter os valores de r e s, utiliza a razão 2, obtida de valores apresentados. Multiplica 4,5 por 2 obtendo *s* e em seguida multiplica 12 por 2 obtendo *r*. Apresenta os resultado.	E02, E03, P08, P21, P24.

No **Grupo G1** temos doze produções, nas quais os participantes encontraram os valores das incógnitas da tabela por meio de uma regra de três explícita como modo de resolução. A atribuição da pontuação completa ou parcial estava vinculada a atribuição de verdadeira ou falsa às alternativas 01, 02, 04, 08, 16, 32. Lembramos que a pontuação parcial foi atribuída ao participante cujo valor numérico da somatória incluiu pelo menos uma alternativa verdadeira e nenhuma alternativa falsa. Das alternativas apresentadas, apenas duas eram falsas (alternativas 01 e 08). Desta forma, dez produções receberam pontuação integral e duas (E05 e E34) produções receberam pontuação parcial.

Apresentamos aqui a produção escrita do participante E04 que encontrou o valor das incógnitas por meio de uma regra de três explícita:

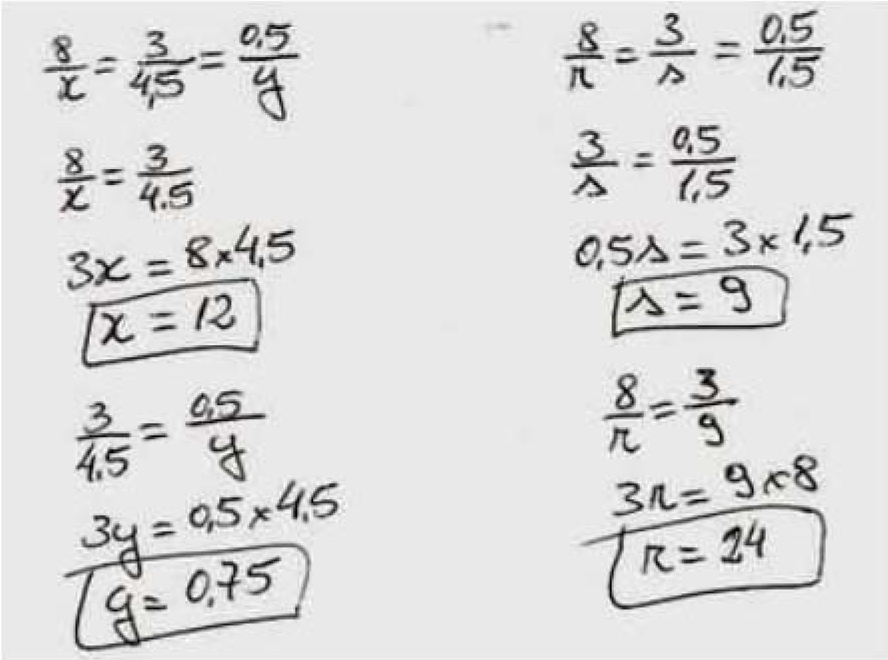
Figura 1 - Produção escrita presente na prova do participante E04 do grupo G1



Podemos inferir que houve indícios de pensamento algébrico na produção escrita do grupo G1, pois o participante usou incógnitas para encontrar os valores desconhecidos da tabela. Porém, estas incógnitas já se encontravam explicitadas no enunciado da questão, podendo induzir os participantes a este tipo de resolução. O enunciado da questão dá sentido à tabela. A linguagem utilizada é uma linguagem algébrica e sua utilização foi correta na maioria dos registros, bem como a simbologia utilizada. As letras nessas produções foram dadas como incógnitas (KIERAN, 1992).

O segundo grupo de modos de resolução (**Grupo G2**) apresentou cinqüenta produções nas quais os participantes encontraram o valor das incógnitas utilizando uma regra de três implícita. Destas produções, quarenta e cinco receberam pontuação integral e cinco receberam pontuação parcial.

Figura 2 - Produção escrita presente na prova do participante P04 do grupo G2

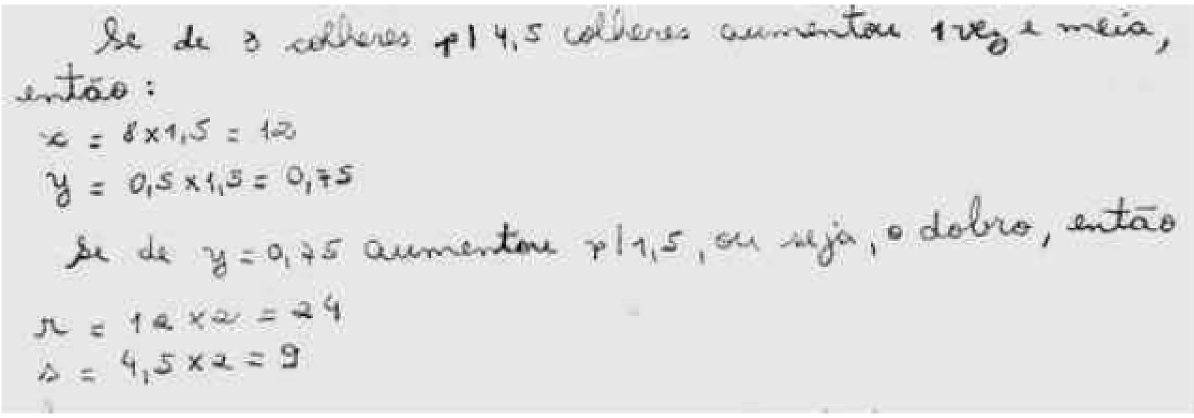


Neste grupo o pensamento algébrico se caracteriza pela representação implícita da regra de três, na qual as letras também são consideradas incógnitas e os cálculos explicitam a propriedade das proporções que se enuncia: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. A linguagem e simbolismo algébrico podem ter sido utilizados devido ao enunciado da questão que induz a este modo de resolução.

O terceiro grupo de modos de resolução (**Grupo G3**) apresentou cinco produções nas quais os participantes encontraram o valor das incógnitas utilizando a proporcionalidade, considerando que as grandezas são diretamente proporcionais. Todas as produções deste grupo receberam pontuação integral.

Apresentamos aqui a produção escrita do participante P08 que encontrou o valor das incógnitas utilizando a proporcionalidade, considerando que as grandezas são diretamente proporcionais.

Figura 3 - Produção escrita presente na prova do participante P08 do grupo G3



Se de 3 colheres p/ 4,5 colheres aumentou 1 vez e meia, então:

x = 8 x 1,5 = 12

y = 0,5 x 1,5 = 0,75

Se de y = 0,75 aumentou p/ 1,5, ou seja, o dobro, então

x = 12 x 2 = 24

s = 4,5 x 2 = 9

Inferimos que houve indícios do pensamento algébrico nesse grupo por meio de relações de proporção entre os elementos da tabela numa linguagem natural. Segundo Fiorentini et al (2005) podemos perceber aqui um exemplo da fase pré-algébrica na qual a letra foi considerada como letra avaliada (KIERAN, 1992) e uma concepção estrutural das noções matemáticas, pois estas são concebidas como objetos (SFARD, 1991).

Foram excluídos dos agrupamentos os participantes E06, E07, E08, E09, E10, E11, E21, os quais não apresentaram produção escrita apenas assinalaram uma das alternativas falsas e assim receberam código 03.

3.2 QUESTÃO 02

Determinada loja de fotografias de um shopping revela, em média, 20 rolos de filme fotográfico por dia, inclusive nos sábados e domingos. No mês de novembro, a média foi mantida até o dia 25. Do dia 26 ao dia 30, o número de rolos trazidos à loja obedeceu a tabela a seguir. Calcule a média diária de filmes revelados em novembro.

Dia	Número de rolos
26	28
27	27
28	26
29	25
30	24

O enunciado da questão mobiliza o conteúdo média aritmética ou média proporcional envolvendo rolos de filme revelados numa loja de fotografias, conteúdo este que pode ser abordado desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. É uma questão aberta, pois admite respostas em valores numéricos inteiros compreendidos entre 00 e 99 incluindo esses dois valores.

Para a correção da produção escrita dessa questão atribuímos código 1 para a pontuação completa, ou seja, a produção que apresentou resposta correta, código 2 para a produção escrita que apresentou a resolução parcial correta da questão e código 3 para a produção que não apresentou a resposta correta ou não resolveu a questão proposta.

Tabela 2 – Distribuição das pontuações obtidas pelo grupo de professores e alunos na questão 02

Sujeitos da Pesquisa	Pontuações							
	Pontuação Integral		Pontuação Parcial		Pontuação Nula		Total da Amostra	
	Código 1		Código 2		Código 3			
	N	%	N	%	N	%	N	%
Professores	24	100	0	0	0	0	24	32
Estudantes	42	84	2	4	6	12	50	68
Total da Amostra	66	90	2	3	6	8	74	100

Podemos inferir por meio desta tabela que a questão foi resolvida corretamente pela maioria dos participantes.

Por meio da produção escrita estabelecemos um grupo de modos de resolução, o qual apresentamos a seguir.

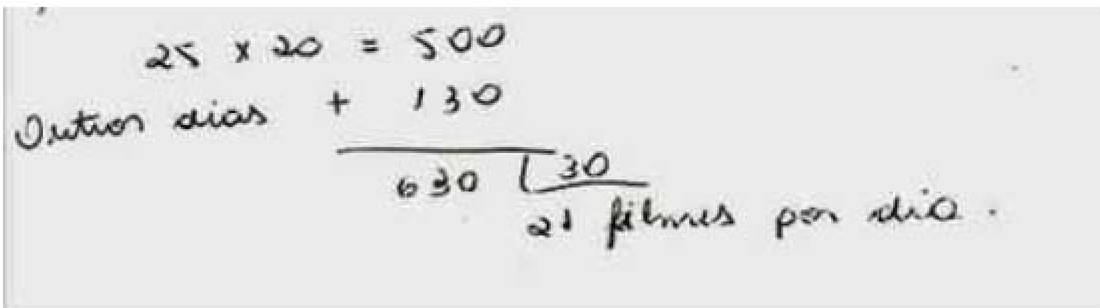
Quadro 2 – Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 02

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	Utilização do conceito de média aritmética	Multiplica a média de 20 rolos de filme fotográfico por dia pelo número de dias considerado para a média (25), mobilizando o conceito de média aritmética. Obtém como resultado 500 e soma com 130 que é a somatória dos dias que foram apresentados na tabela (dias 26 a 30). Obtém como resultado 630 e divide por 30 (número de dias do mês de novembro). Apresenta o resultado.	E01, E02, E03, E04, E05, E06, E08, E10, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E32, E33, E34, E35, E36, E37, E38, E39, E40, E41, E42, E43, E45, E46, E47, E48, E49, E50, P01, P02, P03, P04, P05, P06, P07, P08, P09, P10, P11, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P21, P22, P23, P24

No **Grupo G1** temos sessenta e seis produções nas quais os participantes multiplicam 20 por 25, ou seja, multiplicam a média de rolos de filme pelos 25 dias do mês de novembro que serviram de referência para o cálculo da média. Somam o resultado encontrado com 130, valor este resultante da soma dos rolos de filme revelados do dia 26 ao dia 30 de novembro e dividem o resultado por 30, obtendo a média diária de filmes no mês de novembro.

Apresentamos aqui a produção escrita do participante E36 que multiplicou a média de rolos de filme pelos 25 dias do mês de novembro tomando como referência para o cálculo da média.

Figura 4 - Produção escrita presente na prova do participante E36 do grupo G1



Podemos inferir que o pensamento algébrico se manifesta por meio de regularidades, quando o participante associa a média de rolos de filme fotográfico nos 25 primeiros dias de novembro. A linguagem é natural com alguns símbolos usuais. Segundo Lins e Gimenez (1997), o pensamento algébrico manifestado é o pensar aritmeticamente, pois foi produzido significado apenas em relação a números e operações.

As produções E08 e E10 receberam pontuação parcial. O participante E08 em sua produção escrita apresentou a operação 20 x 25 = 500, ou seja, a média de rolos de filme fotográfico revelado (20) durante os 25 dias do mês de novembro. Nas produções E10 e E11 os participantes apresentaram como resposta 630 rolos, ou seja, a soma de 500 (número de rolos de filme fotográfico revelados até o dia 25) com 130 (número de rolos de filme fotográfico revelados do dia 25 ao dia 30 de novembro). A produção escrita desses participantes mostra que os mesmos multiplicaram a média de rolos de filme fotográfico por dia (20) por 25 (número de dias considerados para a média) e em seguida somaram com 130 (soma obtida dos rolos de filme revelados do dia 26 ao dia 30 de novembro). Porém estes participantes não dividiram o resultado encontrado (630) por 30 para obter a média diária de filmes do mês de novembro.

As produções E07, E09, E11, E21, E31, E44 receberam código 3 (pontuação nula), pois não apresentaram a resposta correta ou nenhuma produção.

3.3 QUESTÃO 03

No quadrado abaixo, multiplicando-se os três números de qualquer linha, coluna ou diagonal, o resultado é sempre o mesmo. Então, assinale o que for correto.

01) $c = -4$

02) $e = -36$

04) $a + b = 9$

08) $b - a - c = -23$

16) $d - c = -2$

32) $b + e = -27$

−12	−1	a
b	6	c
d	e	−3

O enunciado da questão refere-se aos chamados "quadrados mágicos". Neste, em específico, o participante deve ler atentamente o enunciado e assim obter o mesmo produto em todas as linhas, colunas ou diagonais. A questão exige conteúdos de adição, subtração, multiplicação de números racionais, conteúdos estes abordados no Ensino Fundamental.

Tabela 3 – Distribuição das pontuações obtidas pelo grupo de professores e estudantes na questão 03

Grupo	**Pontuações**							
	Pontuação Integral		**Pontuação Parcial**		**Pontuação Nula**		**Total da Amostra**	
	Código 1		Código 2		Código 3			
	N	%	N	%	N	%	N	%
Professores	24	100	0	0	0	0	24	32
Estudantes	32	64	12	24	6	12	50	68
Total da Amostra	56	76	12	24	6	12	74	100

Observando a tabela acima, podemos inferir que a maioria dos participantes resolveu a questão proposta sem dificuldade. De posse das produções escritas, estabelecemos dois grupos de acordo com os modos de resolução.

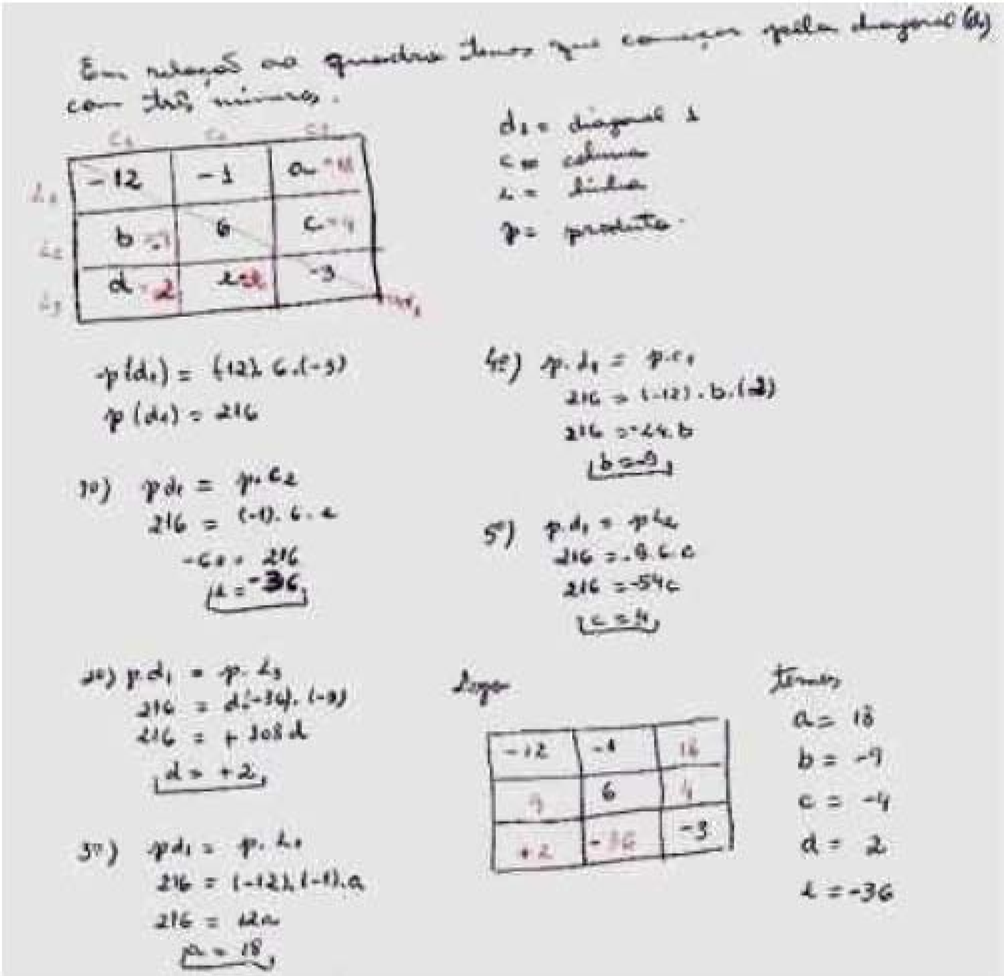
Quadro 3 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 03

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	**Equação do 1° Grau Explícita**	Encontra o produto da diagonal principal. Calcula os valores das demais incógnitas por meio de uma equação do 1° grau.	E01, E02, E03, E04, E06, E13, E15, E16, E17, E18, E19, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E30, E31, E32, E34, E35, E38, E39, E40, E42, E43, E44, E45, E46, E48, E49, P01, P02, P03, P04, P05, P06, P07, P08, P09, P10, P11, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P21, P22, P23, P24.
G2	**Equação do 1° Grau Implícita**	Encontra o produto da diagonal principal. Encontra os valores incógnitas sem apresentar linguagem algébrica explícita.	E05, E07, E08, E09, E10, E11, E12, E14, E20, E21, E22, E29, E33, E36, E37, E41, E47, E50.

No **Grupo G1** temos cinqüenta e seis produções que determinam o produto da diagonal principal e por meio de equações do 1º grau encontram os valores das demais incógnitas do quadrado mágico.

Apresentamos a seguir a produção escrita do participante P09 que determinou o produto da diagonal principal e encontrou os valores das demais incógnitas por meio de equações.

Figura 5 - Produção escrita presente na prova do participante P09 do grupo G1

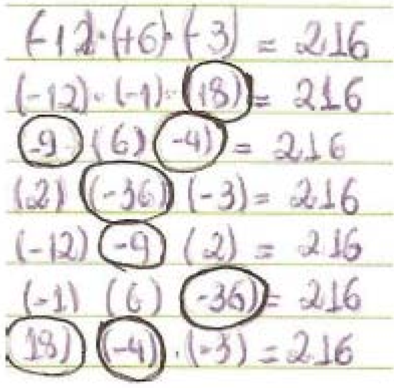


A linguagem utilizada é a linguagem algébrica e o pensamento algébrico se apresenta na fase mais desenvolvida (FIORENTINI et al. 2005), sendo caracterizado nestas produções pelo uso de equações como modo de resolução e determinação do valor das incógnitas. Consideramos que o próprio quadrado mágico da forma como se apresenta pode ter induzido os participantes a utilizarem uma equação como modo de resolução.

No **Grupo G2**, temos dezoito produções nas quais os participantes encontraram o valor da diagonal principal e não se utilizaram de uma equação do 1º grau explícita, ou seja, não apresentaram uma estrutura utilizando incógnitas para encontrar os valores desconhecidos, porém obtiveram pontuação integral.

A produção escrita do participante E05 representa o grupo G2, na qual este encontrou o valor da diagonal principal mas não utilizou uma equação de forma explícita.

Figura 6 - Produção escrita presente na prova do participante E05 do grupo G2



Podemos inferir que os participantes desse grupo podem ter utilizado uma equação, porém de forma implícita, considerando a incógnita como um valor desconhecido, porém sem representá-lo por meio de uma letra.

A linguagem desse grupo de produções é uma linguagem aritmética, na qual o pensamento algébrico se caracteriza pelo uso de operações aritméticas que auxiliam para determinar o valor desconhecido, pois, segundo Lins e Gimenez (1997), neste tipo de produção escrita, o participante pensa aritmeticamente.

Os participantes E05, E07, E08 E10, E40 e E49 encontraram os valores das incógnitas, o mesmo produto nas linhas, colunas e diagonais, porém ao analisar as alternativas escolheram uma das alternativas falsas, as quais, nesta questão, são as alternativas 16 e 32.

3.4 QUESTÃO 04

O *byte* é a unidade de medida das informações armazenadas em computadores. Seus múltiplos são:

kilobyte = 2^{10} bytes
megabyte = 2^{10} kilobytes
gigabyte = 2^{10} megabytes

Sobre *byte*, assinale o que for correto:

01) Um arquivo de 2 kilobytes equivale a 2^{20} bytes.
02) Um kilobyte equivale a 2^{100} megabytes.
04) Um arquivo de 8 gigabytes equivale a 2^{23} kilobytes.
08) Um arquivo de 2 megabytes equivale a 2^{21} bytes.
16) Um gigabyte equivale a 2^{30} bytes.
32) Um arquivo de 4 megabytes equivale a 2^{20} gigabytes

O enunciado desta questão traz termos utilizados com mais freqüência na Informática. Porém, a resolução da mesma não está vinculada ao termo apresentado, mas exige o domínio de conteúdos sobre potenciação, fatoração e sistema de medidas; conteúdos estes do Ensino Fundamental.

Tabela 4 – Distribuição das pontuações obtidas pelo grupo de professores e estudantes na questão 04

Grupo	Pontuações							
	Pontuação Integral		Pontuação Parcial		Pontuação Nula		Total da Amostra	
	Código 1		Código 2		Código 3			
	N	%	N	%	N	%	N	%
G1	20	83	2	8	2	8	24	32
G2	17	34	5	10	28	56	50	68
Total da Amostra	37	50	7	9	30	41	74	100

Ressaltamos que nessa questão as alternativas 01, 02 e 32 são falsas e o código 3 foi atribuído ao participante que não resolveu a questão ou então assinalou uma das alternativas falsas.

A partir da produção escrita construímos grupos com base nos modos de resolução desenvolvidos pelos participantes.

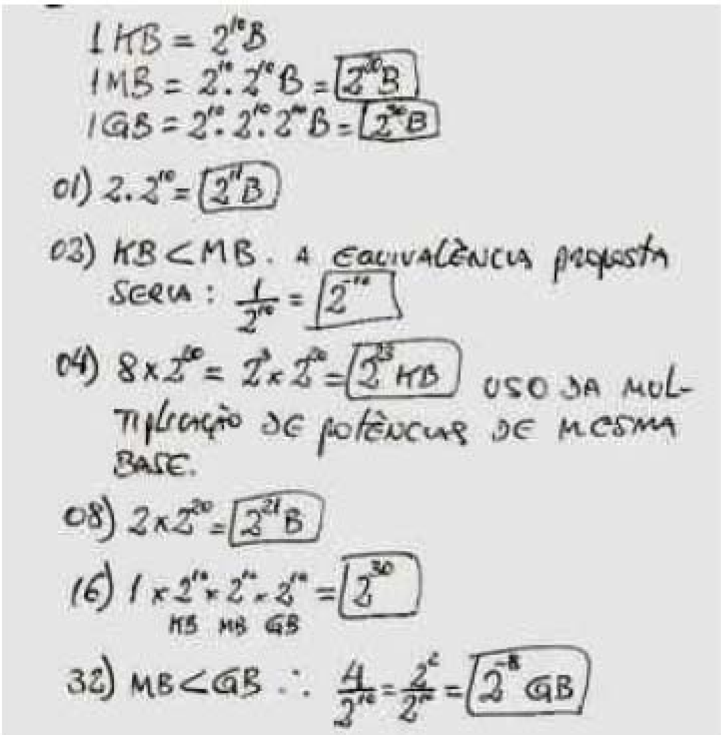
Quadro 4 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 04

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	**Transformação de Unidades de Medida**	Tomando como base o byte, transforma as unidades maiores, utiliza as propriedades das potências de mesma base para em seguida prosseguir a análise das alternativas: $1kb = 2^{10}b$ $1mb = 2^{10}kb = 2^{10}.2^{10} = 2^{20}\ b$ $1gb = 2^{10}mb = 2^{10}.2^{20} = 2^{30}b$	E02, E03, E04, E08, E09, E13, E15, E16, E19, E27, E31 E32, E36, E37, E40, E47, E48, P02, P03, P04, P07, P08, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P22, P23, P24.
G2	**Regra de Três**	Utiliza a regra de três para transformar as unidades solicitadas nas alternativas apresentadas.	E06, E07, E10, E12, E11, E14, E17, E18, E20, E22, E25, E29, E49, E50, P05, P09, P10, P11, P18, P19, P20, P21.

No **Grupo G1** temos trinta e uma produções que apresentaram a transformação de unidades como estratégia de resolução e assim procederam a análise das alternativas apresentadas, considerando-as como verdadeiras ou falsas. Nessa transformação, os participantes utilizaram potências de base 2 e as propriedades de potências de mesma base, além da fatoração para obter os números em forma de potência.

Apresentamos aqui a resolução do participante P22 que apresentou a transformação de unidades e assim procedeu a análise das demais alternativas.

Figura 7 – Produção escrita presente na prova do participante P22 do grupo G1

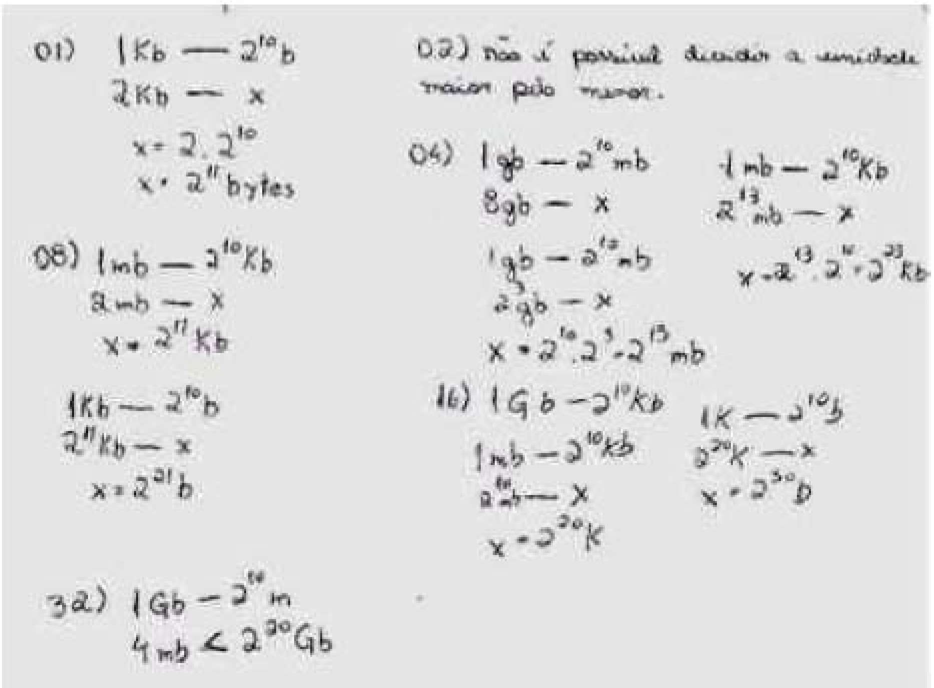


Inferimos que houve indício de pensamento algébrico nessa produção escrita quando o participante estabelece uma regularidade entre os múltiplos do byte, o que o auxilia a fazer as conversões estabelecendo as relações existentes entre estes. Também podemos inferir que o pensamento algébrico, segundo Lins e Gimenez (1997), está caracterizado pelo Aritmeticismo, ou seja, o participante produz significado apenas em relação a números e operações aritméticas permeadas pela linguagem natural.

No **Grupo G2** há vinte e uma produções que apresentaram como modo de resolução a regra de três simples, baseando-se também na potência de base dois.

Apresentamos aqui a produção escrita que do participante E18 que estabeleceu uma regularidade entre os múltiplos do byte e as respectivas conversões entre tais múltiplos:

Figura 8 - Produção escrita presente na prova do participante E18 do grupo G2


01) 1Kb — 2^{10}b
2Kb — x
x = 2 . 2^{10}
x = 2^{11} bytes

02) não é possível dividir a unidade maior pelo menor.

04) 1gb — 2^{10}mb
8gb — x
1gb — 2^{10}mb
2^3gb — x
x = $2^{10}.2^3 = 2^{13}$mb
1mb — 2^{10}Kb
2^{13}mb — x
x = $2^{13}.2^{10} = 2^{23}$Kb

08) 1mb — 2^{10}Kb
2mb — x
x = 2^{11}Kb
1Kb — 2^{10}b
2^{11}Kb — x
x = 2^{21}b

16) 1Gb — 2^{10}Kb
1mb — 2^{10}kb
2^{10}mb — x
x = 2^{20}K
1K — 2^{10}b
2^{20}K — x
x = 2^{30}b

32) 1Gb — 2^{10}m
4mb < 2^{20}Gb

O pensamento algébrico neste grupo se caracteriza pelo uso de incógnitas para fazer as conversões de unidades que são estabelecidas por meio de uma regra de três. Podemos inferir que o participante E18 demonstra certo conhecimento da linguagem algébrica como ferramenta na resolução dos problemas propostos.

Segundo Fiorentini et al (2005) o pensamento algébrico se apresenta numa fase de transição, na qual os participantes estabelecem processos e generalizações referentes às transformações de unidades.

Por não apresentarem produção escrita e nem assinalarem as alternativas corretas ficaram fora dos agrupamentos E01, E05, E26, E28, E30, E33, E34, E35, E38, E39, E41, E42, E43, E44, E45, E46, P01 e P06.

3.5 QUESTÃO 05

Se $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$, $x + y = a$ e $x - y = b$, assinale o que for correto.

01) $3a = 8y$

02) $b = \frac{3y}{2}$

04) $5x = 2b$

08) x equivale a 60% de y

16) Se $b = 20$, então $x > y$

32) Para $a = 40$, x é um número natural.

O enunciado da questão apresenta uma linguagem algébrica e mobiliza conteúdos sobre proporções e suas propriedades, relações entre variáveis além de equação do 1º grau.

Tabela 5 – Distribuição das pontuações obtidas pelo grupo de professores e estudantes na questão 05

Sujeitos	Pontuações: Pontuação Integral – Código 1		Pontuação Parcial – Código 2		Pontuação Nula – Código 3		Total da Amostra	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Professores	18	75	6	25	0	0	24	32,43
Estudantes	11	22	13	26	26	52	50	67,57
Total da Amostra	29	40	19	26	26	34	74	100,00

Pela tabela de pontuações verificamos que a questão não foi resolvida corretamente pela metade dos participantes desta pesquisa. A produção escrita norteou a formação dos grupos baseando-se nos modos de resolução adotados pelos participantes.

Quadro 5 – Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 05

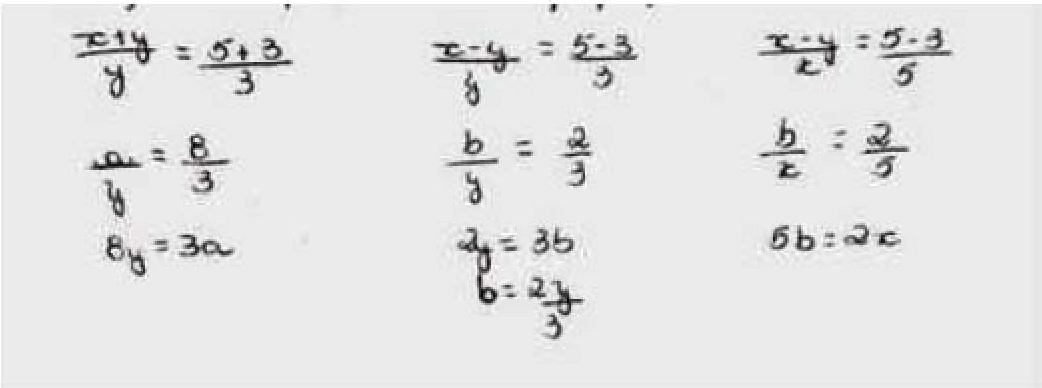
Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	**Proporções e suas propriedades**	Associa os dados apresentados à proporções e suas propriedades: " numa proporção a soma ou a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro termo, assim como a soma ou a diferença dos dois últimos termos está para o terceiro termo: x+y / y=5+3/3 ou x-y/ y=5-3/3	E11, E13, E14, E15, E17, E23, E27, E28, E29, E30, E33, E34, E41, E50, P01, P02, P03, P04, P05, P06, P07, P15, P16, P17, P19, P20, P21.
G2	**Relações entre variáveis**	Isola a variável x da equação x+y = a obtendo x = a –y e a variável x da equação x – y = b obtendo x=b +y e na mesma equação isola y, obtendo y = x - b. Utiliza a propriedade das proporções na igualdade x/y=5/3, considerando que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos obtendo a igualdade 3x=5y. Substitui y por x-b e obtém a igualdade 5b=2x. Substitui x por a-y na mesma igualdade obtendo 3a= 8y. Substitui x na igualdade 3x = 5y por b+y obtendo a igualdade 3b= 2y e assim procede a análise das alternativas apresentadas.	E05, E16, E24, E35, E40, E38, E39, E46, E48, E49, P08, P09, P10, P11, P12, P13, P14, P18, P22, P23, P24.

Por meio da análise da produção escrita dos participantes conseguimos identificar dois grupos de modos de resolução.

No Grupo **G1** temos vinte e sete produções nas quais os participantes resolveram a questão utilizando as propriedades das proporções que se enunciam: “numa proporção a soma ou a diferença dos dois primeiros termos (a e b) está para o primeiro termo (a), assim como a soma ou a diferença dos dois últimos termos (c e d) está para o terceiro termo (c)”.

Apresentamos aqui a produção escrita representante E13 resolveram a questão utilizando as propriedades das proporções :

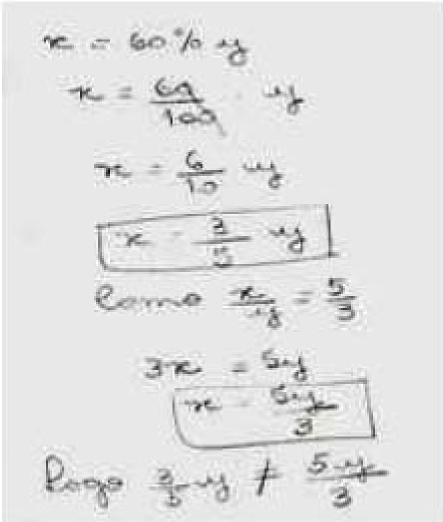
Figura 9 - Produção escrita presente na prova do participante E13 do grupo G1



Verificando as produções dos participantes deste grupo, observamos que alguns deles apresentaram uma produção escrita para cada alternativa da questão 05. Na produção escrita desse grupo é possível verificar a presença do pensamento algébrico na fase do pensamento mais desenvolvido (FIORENTINI et al, 2005), sendo que os participantes demonstram ter um grande domínio da manipulação da linguagem algébrica.

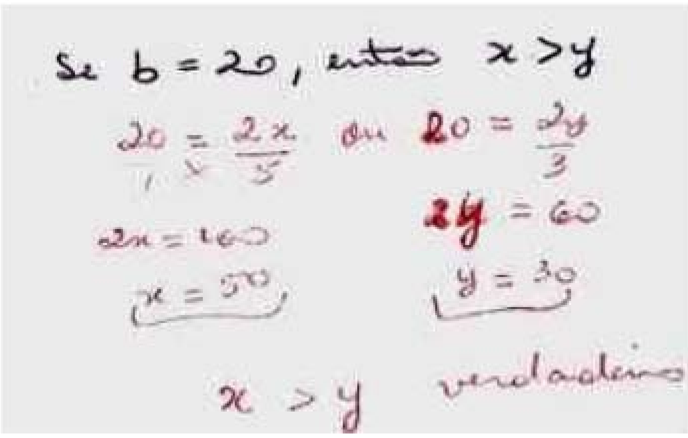
Para atribuir verdadeiro ou falso à afirmativa 08 que enuncia: “x equivale a 60% de y”, o participante P07, transforma a porcentagem em fração decimal, simplificando-a. Em seguida, retorna ao enunciado da questão que afirma: x/y= 5/3, aplica a propriedade das proporções que se enuncia: “o produto dos meios é igual ao produto dos extremos”, isolando a incógnita x. Por comparação, o participante conclui que y equivale a 60% e assim considera a alternativa como falsa.

Figura 10 - Produção escrita presente na prova do participante P07 do grupo G1



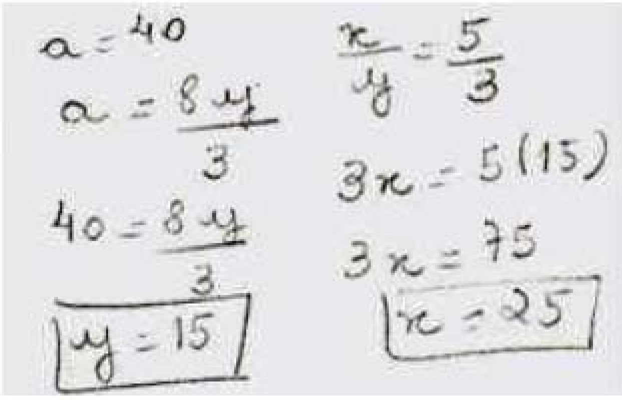
A alternativa 16 afirma-se que “se b=20, então x >y”. Para verificar se x >y, o participante P09 utiliza a igualdade 2x =5b, obtida ao aplicar as propriedades das proporções, isola o valor de b, obtendo a igualdade b = 2x /5, substitui b por 20 e obtém x = 50. Em seguida utiliza a igualdade b= 2y /3, substitui b por 20, obtendo y = 30 e assim considera a alternativa como verdadeira.

Figura 11 – Produção escrita presente na prova do participante P09 do grupo G1



Na alternativa 32, afirma-se que “se a = 40, então x é um número natural”. Partindo da relação 3a = 8y, o participante P23 isola a para em seguida substituí-lo por 40 e assim encontra y = 15. Para encontrar o valor de x, o participante parte da relação x/y = 5/3, substituindo y por 15 e encontra x= 25 e assim considera a alternativa 32 como sendo verdadeira.

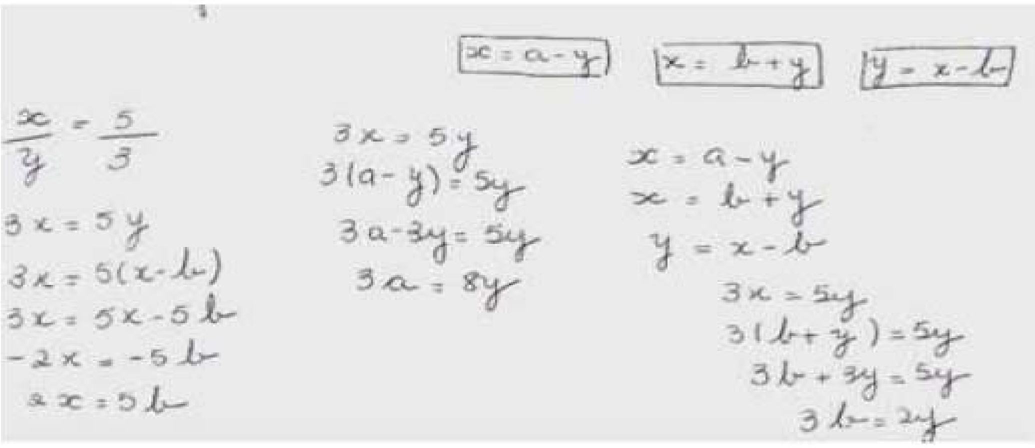
Figura 12 - Produção escrita presente na prova do participante P23 do grupo G1



Em ambas as produções, a linguagem algébrica mostra-se bem desenvolvida. Os participantes demonstram ter domínio de aspectos operacionais da Matemática. Podemos inferir que o pensamento algébrico presente nesta produção é o pensamento mais desenvolvido (FIORENTINI et al. 2005). Nas alternativas 16 e 32 as letras são utilizadas como letras avaliadas (KIERAN, 1992), pois são atribuídos valores para a e b e, por meio das relações estabelecidas nas alternativas anteriores, podemos atribuir verdadeiro ou falso à questão. Acreditamos que ao atribuir os valores que a alternativa apresenta os participantes podem reconhecer o significado de uma solução simbólica, neste caso, x>y (ARCAVI, 1994).

No segundo Grupo G2 temos 21 produções nas quais os participantes estabelecem relações entre as variáveis e encontram as seguintes relações: x= a – y; x= b – y e y = x – b. Substituindo essas relações nas igualdades apresentadas, os participantes estabelecem as seguintes relações 2x = 5b; 3a = 8y e 3b = 2y. Deste modo, pode considerar as alternativas como sendo verdadeiras ou falsas.

Figura 13 – Produção escrita presente na prova do participante P04 do grupo G2



A linguagem algébrica, presente na produção de ambos os grupos, mostra-se bem desenvolvida, pois os participantes são capazes de operar com variáveis e estabelecem relações entre as mesmas.

Podemos inferir que o pensamento algébrico destas produções se caracteriza pelo uso de variáveis e suas relações, demonstrando que os participantes são provavelmente capazes de manipulá-las sem dificuldades, baseando-se no uso da generalidade, não importando qual é a soma ou a diferença considerada entre x e y. Estas produções também demonstram um entendimento da utilidade dos símbolos para mostrar relações (ARCAVI, 1994).

Os participantes E01, E02, E04, E08, E18, E19, E20, E21, E25, E26, E31, E36, E37, E42, E43 e E47 não resolveram a questão proposta. Os participantes E03, E06, E07, E09, E10, E12, E22, E32, E44 e E45 não apresentaram produção escrita além de assinalar uma das alternativas falsas que nesta questão são as alternativas 02, 04 e 08.

3.6 QUESTÃO 06

Considerando os números inteiros a, b e c, tais que $a < b < 0$, assinale o que for correto.

01) $a^2 . b^3 > 0$
02) $a. b > 0$
04) $a – b > 0$
08) $b – a > 0$
16) $a + b > 0$
32) $(a + b) . a > 0$

O enunciado da questão mobiliza conhecimentos sobre números inteiros e suas operações, relacionando-os com sinais de desigualdade, conteúdos estes abordados no Ensino Fundamental e que podem ser retomados com mais ênfase no Ensino Médio.

Tabela 6 – Distribuição das pontuações obtidas pelo grupo de professores e estudantes na questão 06

Sujeitos	Pontuações							
	Pontuação Integral		Pontuação Parcial		Pontuação Nula		Total da Amostra	
	Código 1		Código 2		Código 3			
	N	%	N	%	N	%	N	%
Professores	22	92	2	8	0	0	24	32
Estudantes	20	40	17	34	13	26	50	68
Total da Amostra	42	57	19	25	13	18	74	100

Ressaltamos que as alternativas 02, 08 e 32 são alternativas verdadeiras e as alternativas 01, 04 e 16 são falsas. Pela tabela 06, podemos observar que a questão foi resolvida corretamente pela maioria dos participantes.

Com as produções escritas estabelecemos os grupos de acordo com os modos de resolução.

Quadro 6 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 06

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	**Atribuição de valores numéricos para *a* e *b***	Atribui um valor numérico para a e b, considerando as condições dadas no enunciado da questão, na qual *a* deve ser menor que *b* e ambos devem ser menores que 0.	E01, E02, E03, E04, E05, E06, E07, E09, E11, E13, E14,E15, E16, E17, E18, E19, E20, E23, E24, E27, E28, E30, E31, E32, E33, E35, E36,E37, E40, E41, E42, E43, E45, E46, E48, E49, E50, P01, P02, P04, P05, P06, P07, P08, P10, P11, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P22, P23, P24.
G2	**Análise por meio dos sinais**	De acordo com o enunciado da questão, considera a e b como sendo números negativos, mas sem atribuir valores.	P03, P09, P21.

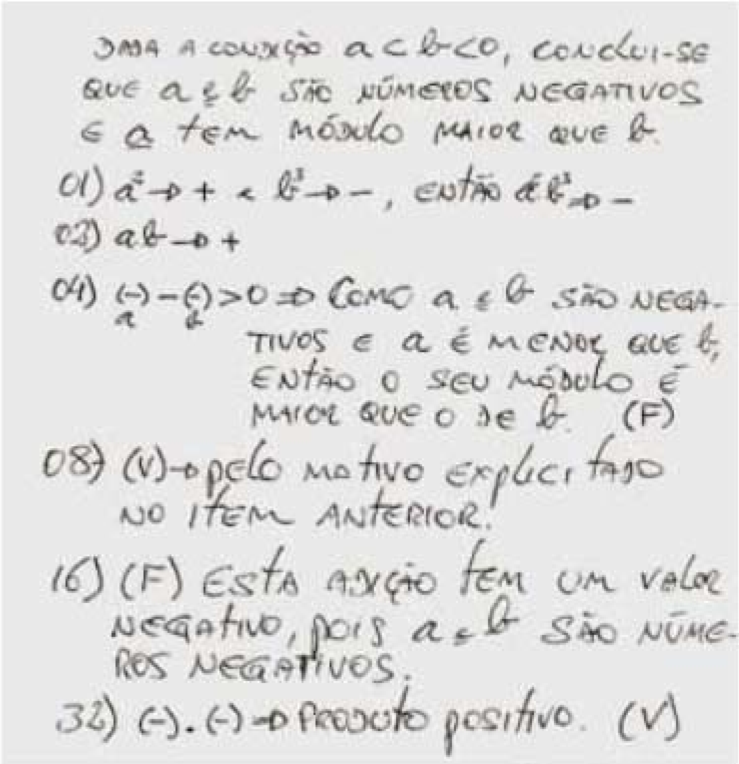
No **Grupo G1** temos cinqüenta e oito produções nas quais os participantes atribuíram valores para a e b, com a < b e ambos menores que zero, condições estas contidas no enunciado. Em seguida procederam a análise das alternativas das questões dadas. Na alternativa 01, são mobilizados conhecimentos sobre a multiplicação e potenciação de números inteiros. A alternativa 02 mobiliza conhecimentos sobre a multiplicação de números inteiros. A análise das alternativas 04, 08 e 16 mobiliza conhecimentos sobre adição e subtração de números inteiros. A alternativa 32 mobiliza conhecimentos sobre a adição de números inteiros e, em seguida, conhecimentos sobre a multiplicação dos mesmos.

Figura 14 – Produção escrita presente na prova do participante P01 do grupo G1

A linguagem presente na produção escrita deste grupo é aritmética e podemos inferir que houve indícios do pensamento algébrico quando os participantes utilizam números e operações aritméticas para produzir os significados necessários para atribuir verdadeiro ou falso às alternativas. Os participantes se utilizam da pré-álgebra (KIERAN e CHALOUH, 1993), construindo o significado dos símbolos e das operações da Álgebra com base nos seus conhecimentos aritméticos.

No **Grupo G2** temos três produções nas quais os participantes não atribuem valores numéricos para a e b. Por meio das regras da adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de números inteiros consideram as alternativas como sendo verdadeiras ou falsas.

Figura 15 – Produção escrita presente na prova do participante P03 do grupo G2


DADA A CONDIÇÃO $a<b<0$, CONCLUI-SE QUE a E b SÃO NÚMEROS NEGATIVOS E a TEM MÓDULO MAIOR QUE b.

01) $a^2 \to +$ E $b^3 \to -$, ENTÃO $ab^3 \to -$

02) $ab \to +$

04) $\underset{a}{(-)} - \underset{b}{(-)} > 0 \Rightarrow$ COMO a E b SÃO NEGATIVOS E a É MENOR QUE b, ENTÃO O SEU MÓDULO É MAIOR QUE O DE b. (F)

08) (V) → PELO MOTIVO EXPLICITADO NO ITEM ANTERIOR.

16) (F) ESTA ADIÇÃO TEM UM VALOR NEGATIVO, POIS a E b SÃO NÚMEROS NEGATIVOS.

32) $(-).(-) \to$ PRODUTO POSITIVO. (V)

Na produção escrita do **Grupo G2** a linguagem utilizada é algébrica, embora de forma equivocada. Podemos inferir que o participante utiliza esta simbologia inadequada quando este escreve $a^2 \to +$ para afirmar que números negativos elevados ao quadrado têm resultado positivo, mas pode suscitar outras interpretações. Da mesma forma, podemos observar quando o participante escreve $b^3 \to -$, acreditamos que este considera que todo números negativos elevados a um expoente ímpar têm resultado negativo. Também podemos observar que o uso do símbolo de implicação seguido do sinal de adição ou subtração não é empregado convenientemente. Podemos inferir também que a produção de significado para o pensamento algébrico é o internalismo, pois, segundo Lins e Gimenez (1997), neste modo de produzir significado os números e as operações são considerados apenas em suas propriedades. De acordo com a caracterização de Fiorentini et al (2005), o desenvolvimento do pensamento algébrico está na fase de transição e o participante também utiliza os símbolos para mostrar relações entre as variáveis e generalizações (ARCAVI, 1994).

3.7 QUESTÃO 07

Um investidor compra no dia 20/08/2004, um lote de ações da empresa A, cotado em R$1.000,00. Considerando que as despesas operacionais correspondentes, "taxa de corretagem", chegam a R$ 24,50, e os "emolumentos", a R$ 0,50, e são pagos à parte, assinale o que for correto:

01) Se, em 20/12/04, o valor total do lote de ações estiver cotado a R$1640, 00, o ganho patrimonial do investidor, considerando-se para o cálculo, as despesas operacionais, será de 60%.

02) Em 20/09/04, o lote de ações estava cotado a R$1.500,00. A valorização, sem levar em consideração, quaisquer despesas operacionais, foi de 50%.

04) Para que o lucro do investidor seja de 100% em relação a todo o dinheiro gasto na operação, é necessário que o lote de ações atinja a cotação de R$ 2.050,00.

08) Se, ignorando as despesas operacionais, o investidor pretende que seu lote de ações tenha a valorização mínima de 35%, o lote de ações deverá atingir a cotação de R$ 1.350,00 ou mais.

16) O percentual de corretagem cobrado, para o lote negociado, é de 0,245%.

32) Quando seu lote de ações atingiu a cotação de R$ 1.250,00, o investidor o vendeu, gastando mais R$25,00 com despesas operacionais. Assim, as despesas efetuadas com a compra e a venda, seu ganho foi de R$200,00.

A questão mobiliza conteúdos sobre lucros, ganhos e porcentagem, conteúdos estes do Ensino Médio, mas que podem ser abordados no Ensino Fundamental. O significado de alguns termos como "emolumentos e corretagem" presentes no enunciado não são relevantes para que o participante deixe de resolver a questão, pois outros termos auxiliam o participante a entender a questão e resolvê-la.

Tabela 7 – Distribuição das pontuações obtidas pelo grupo de professores e estudantes na questão 07

Sujeitos	Pontuações							
	Pontuação Integral		Pontuação Parcial		Pontuação Nula		Total da Amostra	
	Código 1		Código 2		Código 3			
	N	%	N	%	N	%	N	%
Professores	17	71	7	29	0	0	24	32
Estudantes	25	50	9	18	16	32	50	68
Total da Amostra	42	57	16	22	16	22	74	100

Com as produções escritas estabelecemos os grupos de acordo com a opção de modo de resolução por alternativas.

3.7.1 Alternativa 01

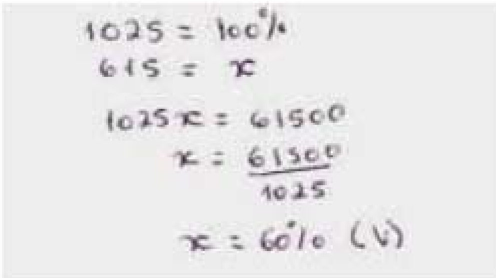
Quadro 7 – Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 07 - alternativa 01

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	**Regra de três**	Monta uma regra de três: 1025 - 100 / 615 - x. Escreve e resolve a equação obtida por meio da regra de três (x= 615 . 100: 1025). Apresenta o resultado	E01, E02, E03, E04, E12, E13, E14, E15, E16, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E30, E31, E32, E35, E40, E42, E43, E44, E45, E46, E47, E48, E49, E50, P01, P02, P03, P04, P05, P06, P07, P08, P09, P10, P11, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P21, P24.
G2	**Divisão**	Monta a expressão: 1640: (1000 + 25) Divide R$1640 (valor futuro) pela soma de R$1000,00 (valor presente) + R$ 25,00(despesas). Encontra 1,6. Desconta o valor 1 (considerado o valor inteiro), obtendo assim 0,6.Multiplica este valor por 100. Apresenta o resultado.	P22, P23

No **Grupo G1** temos cinqüenta e seis produções nas quais os participantes somam o investimento de R$1000,00 com R$ 25,00 de gastos operacionais (taxa de corretagem e emolumentos). Consideram o valor cotado em 20/12/04 de R$ 1640,00, subtraem este valor de R$1025,00 obtendo R$ 615, 00; montam a regra de três, obtendo 60% que é o ganho patrimonial do investidor.

Apresentamos aqui a produção escrita do participante P20 utilizou uma regra de três simples para obter o ganho patrimonial do investidor.

Figura 16 - Produção escrita presente na prova do participante P20 do grupo G1

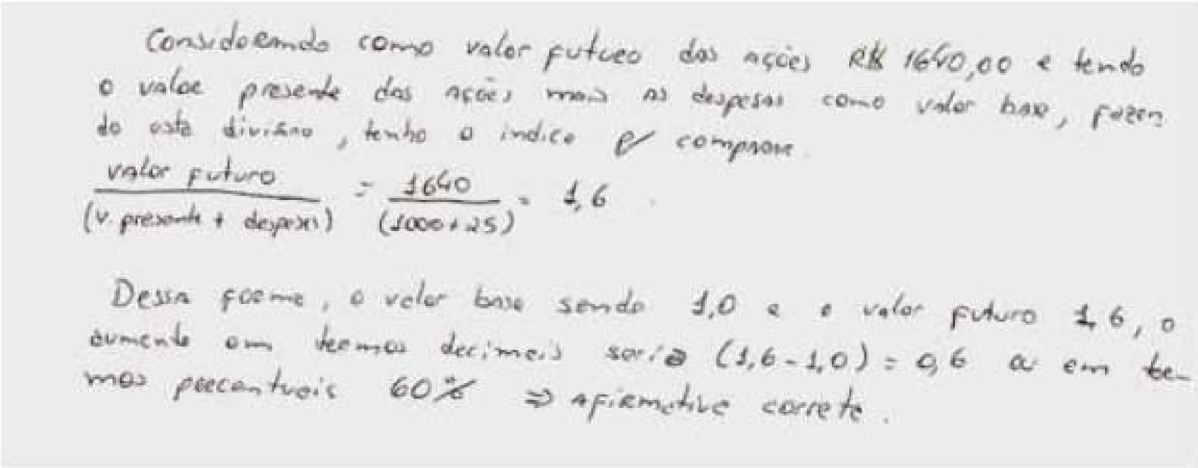


O pensamento algébrico no **Grupo G1** se caracteriza pelo uso de incógnitas no cálculo do ganho patrimonial do investidor. A linguagem que se apresenta é algébrica, porém o participante não utilizou a simbologia adequada ao montar a regra de três. O mesmo utilizou o sinal de igualdade na montagem da regra de três, simbologia está inadequada. A letra nessa produção é considerada como incógnita (KIERAN, 1992).

No **Grupo G2** temos duas produções nas quais os participantes utilizaram um vocabulário especifico da Matemática Financeira e dividiram o valor total do lote de ações cotado no dia 20/12/04 (R$1640,00), considerado pelos participantes como valor futuro pelo valor de compra das ações no dia 20/08/04 (R$ 1000,00), considerado como valor presente + despesas (R$ 25,00), obtendo 1,6 como resultado. Para saber o percentual do ganho patrimonial, os participantes subtraem do valor encontrado de 1 (considerado valor inteiro da operação) e multiplicam o resultado encontrado por 100, obtendo 60%.

Apresentamos aqui a produção escrita do participante P22 que utiliza um vocabulário especifico da Matemática Financeira:

Figura 17 - Produção escrita presente na prova do participante P22 do grupo G2



Considerando como valor futuro das ações R$ 1640,00 e tendo o valor presente das ações mais as despesas como valor base, fazendo esta divisão, tenho o índice p/ comparar.

$$\frac{\text{valor futuro}}{(\text{v. presente} + \text{despesas})} = \frac{1640}{(1000+25)} = 1,6$$

Dessa forma, o valor base sendo 1,0 e o valor futuro 1,6, o aumento em termos decimais seria $(1,6 - 1,0) = 0,6$ e em termos percentuais 60% ⇒ afirmativa correta.

No **Grupo G2** o pensamento algébrico também se faz presente, pois, segundo Lins e Gimenez (1997), quando produzimos significados apenas em relação a números e operações aritméticas (*Aritmeticismo*) estamos caracterizando o pensamento algébrico. A linguagem é natural e o participante utiliza símbolos apenas aritméticos para resolver a questão e verificar se a alternativa é verdadeira ou falsa.

3.7.2 Alternativa 02

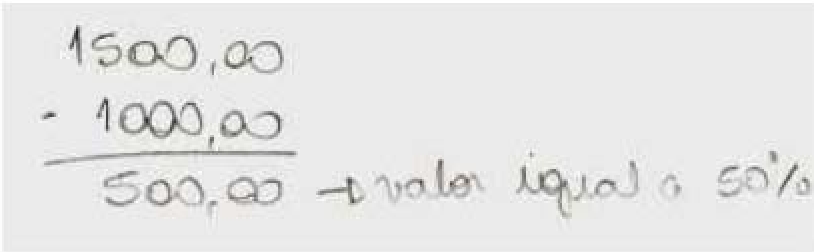
Quadro 8 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 07- alternativa 02

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	Subtração	Subtrai R$ 1000,00 de R$ 1500,00. Apresenta o resultado.	E03, E04, E12, E13, E14, E15, E16, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E30, E31, E32, E35, E40, E42, E43, E44, E45, E46, E48, E49,P04, P05, P09, P13, P14, P18.
G2	Subtração e cálculo da porcentagem	Subtrai R$ 1000,00 de R$ 1500,00. Divide 500 por 1000. Apresenta o resultado.	E01, E02, E24, E25, E26, E27, E28, E47, E50, P01, P02, P03, P06, P07, P08, P10, P11, P12, P15, P16, P17, P19, P20, P21, P22, P23, P24.

No **Grupo G1** temos 31 produções escritas nas quais os participantes apresentaram como modo de resolução a diferença entre R$ 1500,00 e R$1000,00 e já atribuíram a alternativa como verdadeira.

A produção escrita do participante E23 representa este grupo que utilizar a diferença entre 1500,00 e R$1000,00:

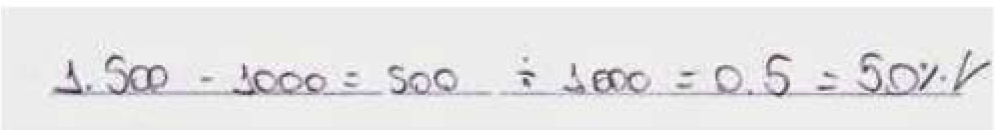
Figura 18 - Produção escrita presente na prova do participante E23 do grupo G1



No **Grupo G2** temos 27 produções nas quais os participantes apresentaram a mesma subtração efetuada pelo Grupo G1, porém apresentaram o modo de resolução para o cálculo da porcentagem. Dividiram 500 (diferença encontrada na subtração) por 1000 (custo da compra das ações) e encontraram 0,5 e em seguida apresentaram o valor percentual.

A produção escrita do participante E47 que utilizou a subtração e a divisão para encontrar a porcentagem:

Figura 19 – Produção escrita presente na prova do participante E47 do grupo G2



A linguagem presente nas produções dos grupos G1 e G2 é uma linguagem natural e, segundo Lins e Gimenez (1997), o pensamento algébrico está presente por meio do Aritmeticismo, pois os participantes utilizaram números e operações aritméticas para encontrar o resultado desejado e, segundo Fiorentini et al (2005), este se caracteriza pela fase pré-algébrica.

3.7.2 Alternativa 04

Quadro 9 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 07 – alternativa 04

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	Multiplicação	Multiplica por 2 o valor das despesas.	E01, E02, E03, E04, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32, E35, E40, E41, E42, E43, E44, E45, E46, E47, P01, P02, P03, P04, P05, P06, P07, P08, P09, P10, P11, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P21, P22, P23, P24.

No Grupo G1 temos cinqüenta e oito produções nas quais os participantes multiplicaram o valor de R$ 1025,00 (valor das despesas com ações e gastos operacionais) por 2, considerando este fator multiplicador como sendo 100% e encontraram R$ 2050,00.

3.7.4 Alternativa 08

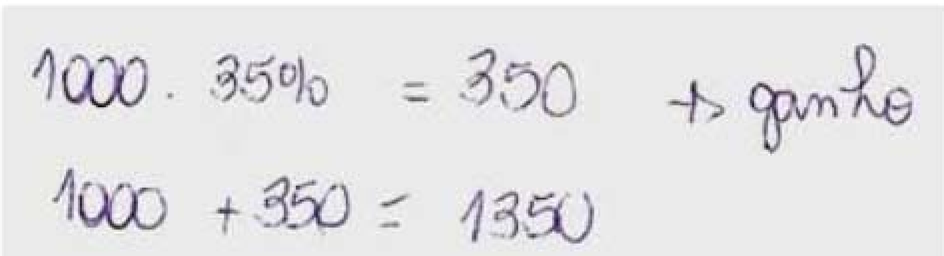
Quadro 10 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 07 – alternativa 08

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	**Porcentagem e Adição**	Calcula 35% de R$ 1000,00 (valor cotado no dia da compra das ações). Apresenta o resultado. Soma o valor encontrado com 1000. Apresenta o resultado.	E01, E02, E03, E04, E12, E14, E15, E16, E18, E19, P10, P11, P12, P13, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P21, P22, P23, P24.
G2	**Subtração e Porcentagem**	Calcula a diferença entre R$1350,00 e R$1000,00. Apresenta o resultado.	E13, E23, E24, E25, P05, P06, P07, P08, P09.
G3	**Regra de Três e Adição**	Monta uma regra de três: 1000 - 100% x - 35% Multiplica 1000 por 35. Divide por 100. Adiciona o valor encontrado a 1000. Apresenta o resultado.	P01, P02, P03, P04, P20.

No **Grupo G1** temos trinta e cinco produções nas quais os participantes apresentaram o cálculo de uma porcentagem: multiplicaram 1000 por 35 e dividiram o resultado por 100, obtendo 350 que somado com 1000 encontraram 1350.

Apresentamos aqui a produção escrita do participante P16

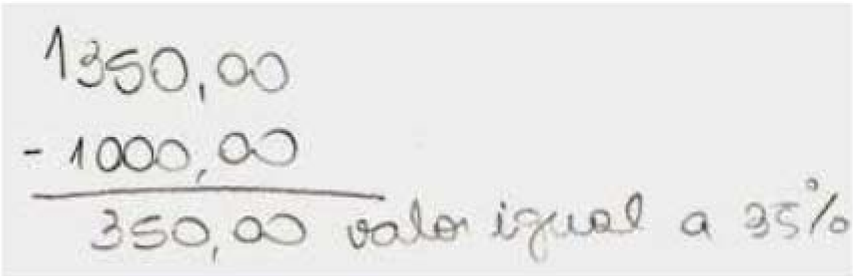
Figura 20 – Produção escrita presente na prova do participante P16 do grupo G1



No **Grupo G2** temos nove produções nas quais os participantes apresentaram a diferença entre 1350 e 1000, que foi de 350 e concluíram que este valor representa 35% do valor cotado no dia da compra das ações.

Apresentamos aqui a produção escrita do participante E24 que apresentou a diferença entre 1350 e 1000 e concluiu que os R$ 350,00 representa 35% do valor cotado no dia da compra das ações:

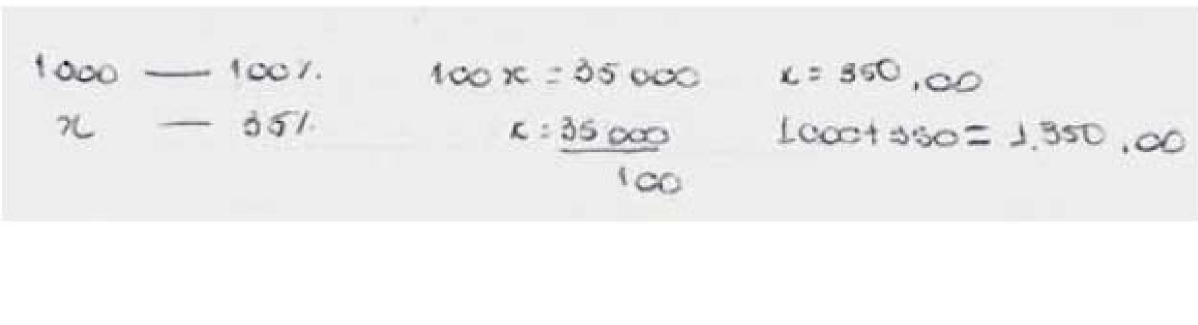
Figura 21 - Produção escrita presente na prova do participante E24 do grupo G2



No **Grupo G3** temos quatorze produções nas quais os participantes apresentaram uma regra de três para encontrar a porcentagem de valorização mínima apresentada na alternativa.

Aqui apresentamos a produção escrita do participante E48 que apresentou uma regra de três simples para encontrar a porcentagem:

Figura 22 – Produção escrita presente na prova do participante E48 do grupo G3



A linguagem das produções escritas da alternativa 08 é a linguagem aritmética e podemos inferir que o pensamento algébrico caracteriza-se pelo Aritmeticismo (LINS, GIMENEZ, 1997), e na fase pré-algébrica (FIORENTINI et al. 2005) nas produções dos participantes P16 e E24. Na produção escrita do participante E48 podemos inferir que houve indícios do pensamento algébrico quando este monta uma regra de três, considerando *a* letra como incógnita, como aponta Kieran (1992), e na fase de transição (FIORENTINI et al. 2005).

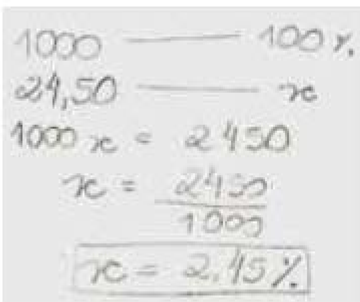
3.7.5 Alternativa 16

Quadro 11 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 07 - alternativa 16

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	Regra de Três	Monta uma regra de três: 1000 - 100% 24,50 - x Multiplica 24,50 por 100. Divide o resultado por 1000. Apresenta o resultado.	E01, E02, E03, E04, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32, E35, E40, E42, E43, E44, E45, E46, P01, P02, P03, P04, P05, P06, P07, P08, P09, P10, P11, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P21, P22, P23, P24.

No **Grupo G1** temos cinqüenta e nove produções nas quais os participantes apresentaram como modo de resolução uma regra de três, encontrando como resultado 2,45% e assim considerando a alternativa como falsa

Figura 23 - Produção escrita presente na prova do participante E22 do grupo G1



Nessa produção podemos verificar que houve indícios do pensamento algébrico pelo uso de uma incógnita para a valorização das ações. Segundo Fiorentini et al

(2005), o pensamento algébrico se encontra na fase de transição, fase esta em que o estudante concebe a existência de um número qualquer, estabelecendo alguns processos e generalizações.

3.7.6 Alternativa 32

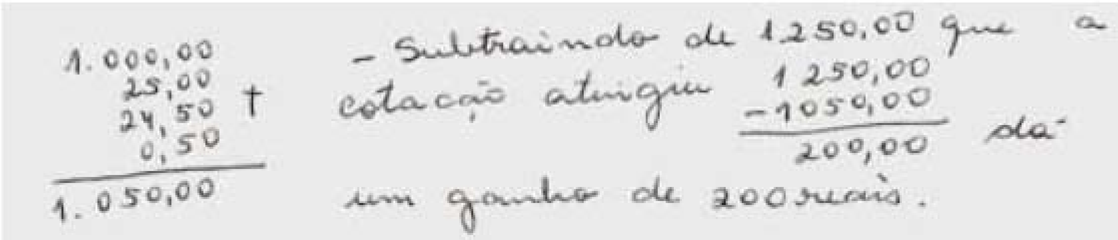
Quadro 12 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 07- alternativa 32

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	Adição e Subtração	Adiciona os gastos referentes ao valor cotado no dia da compra e venda das ações. Subtrai do valor da venda.	E01, E02, E03, E04, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32, E35, E40, E42, E43, E44, E45, E46, P01, P02, P03, P04, P05, P06, P07, P08, P09, P10, P11, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P21, P22, P23, P24.

No **Grupo G1** temos cinqüenta e oito produções nas quais os participantes adicionaram os gastos do dia da compra e venda das ações obtendo R$1050,00. Em seguida subtraíram de R$ 1250,00, valor da venda das ações, obtendo R$200,00 de lucro.

Em sua produção escrita o participante P19, utilizara as operações básicas para encontrar o lucro da venda das ações:

Figura 24 - Produção escrita presente na prova do participante P19 do grupo G1


1.000,00
25,00
24,50 +
0,50
1.050,00

- Subtraindo de 1.250,00 que a cotação atingiu
1 250,00
-1050,00
200,00
dá um ganho de 200 reais.

Podemos inferir que nesse grupo a linguagem presente é a linguagem aritmética. Acreditamos que o pensamento algébrico se caracteriza pelo Aritmeticismo (LINS, GIMENEZ, 1997) quando os participantes utilizam os números e as estruturas matemáticas para produzir significados e na fase pré-algébrica (FIORENTINI et al. 2005).

Os participantes E05, E08, E09, E10, E33, E34, E36, E38 não apresentaram produção escrita e os participantes E06, E07, E11, E37 e E39 além de não apresentarem produção escrita, assinalaram a alternativa falsa, que nesta questão era a alternativa 16.

3.8 QUESTÃO 08

João dispõe de R\$ 30.000,00 e quer comprar um imóvel. Para isso analisa a planta de um pequeno apartamento, de forma retangular, medindo 12 cm por 18 cm, na escala 1:50. O custo do m^2 é R\$ 600,00. Nestas condições assinale o que for correto.

01) A área do apartamento é de 54 m^2.
02) Ele precisa ainda de R\$ 2.400,00.
04) Com o dinheiro que tem, ele pode comprar um apartamento de até 50 m^2.
08) Ele pode comprar o apartamento e ainda sobram R\$ 2.000,00.
16) Ele precisa ainda de R\$ R\$ 3.200,00.
32) Ele tem a quantia exata para a compra

A questão refere-se à compra de um imóvel cujas medidas e o custo por m2 estão contidos no seu enunciado. A questão exige conteúdos sobre medidas, área, escala, multiplicação, transformação de unidades, conteúdos estes abordados no Ensino Fundamental.

Para a correção desta questão consideramos código 1 para pontuação total, código 2 para a somatória que apresentou a atribuição de pontos em que o valor numérico assinalado incluiu pelo menos uma alternativa verdadeira e nenhuma alternativa falsa. Portanto, a pontuação integral ou parcial de uma questão só foi feita se a soma apresentada não incluiu alternativa(s) falsa(s); e código 3 para as questões que os participantes não resolveram ou apresentaram uma soma incluindo alternativa falsa.

Tabela 8 – Distribuição das pontuações obtidas pelo grupo de professores e estudantes na questão 08

Sujeitos	Pontuações							
	Pontuação Integral		Pontuação Parcial		Pontuação Nula		Total da Amostra	
	Código 1		Código 2		Código 3			
	N	%	N	%	N	%	N	%
Professores	24	100	0	0	0	0	24	32
Estudantes	38	76	4	8	8	16	50	68
Total da Amostra	62	84	4	5	8	11	74	100

Podemos verificar que a questão foi resolvida corretamente pela maioria dos sujeitos da pesquisa.

As produções escritas nos propiciaram verificar quais os modos de resolução que os participantes optaram para aferir se as alternativas eram verdadeiras ou falsas.

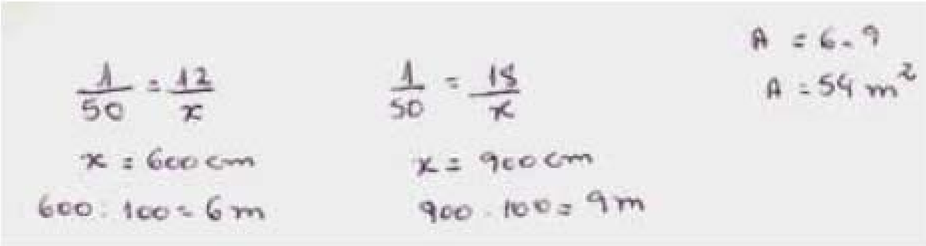
3.8.1 Alternativa 01

Quadro 13 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 08 – alternativa 01

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	**Transformação de escalas por meio de uma proporção. Divisão Multiplicação.**	Estabelece as propor-coes 1/50 = 12/x e 1/50= 18/x . Multiplica 50 por 1 2 50 por 18. Divide os resultados por 100. Multiplica os novos resultados. Determina a área.	E03, E05, E12, E18, E28, E29, E32, E33, E34, E41, E42, E43, E48, E49, P01, P04, P05, P08, P07, P10, P11, P16, P17, P20, P23.
G2	**Transformação de escalas por meio de uma multiplicação.**	Multiplica as medidas do imóvel por 50. Apresenta o resultado em m. Multiplica as medidas apresenta-das. Determina a área.	E01, E02, E13, E14, E15, E16, E17, E20, E22, E24, E25, E26, E35, E36, E37, E38, E39, E44, E45, E46, P03, P06, P09, P12, P14, P18, P19, P21, P24.
G3	**Transformação de unidades por meio de uma regra de três. Multiplicação**	Monta uma regra de três: 1 – 50 e 1 - 50 12 – x 18 – x Multiplica 12 e 18 por 50. Apresenta os resultados em m. Multiplica os resultados.Determina a área.	E04, E19, E23, E30, E31, E40, E47, E50, P02, P13, P15, P22.

No **Grupo G1** temos vinte e cinco produções nas quais os participantes montaram uma regra de três para encontrar as medidas reais do imóvel e dividiram os valores encontrados por 100 para transformar as unidades em metro. Em seguida multiplicaram as medidas depois da conversão para metro. Podemos inferir que os participantes podem ter optado por este modo de resolução devido ao próprio enunciado da questão. Aqui apresentamos a produção escrita do participante P10:

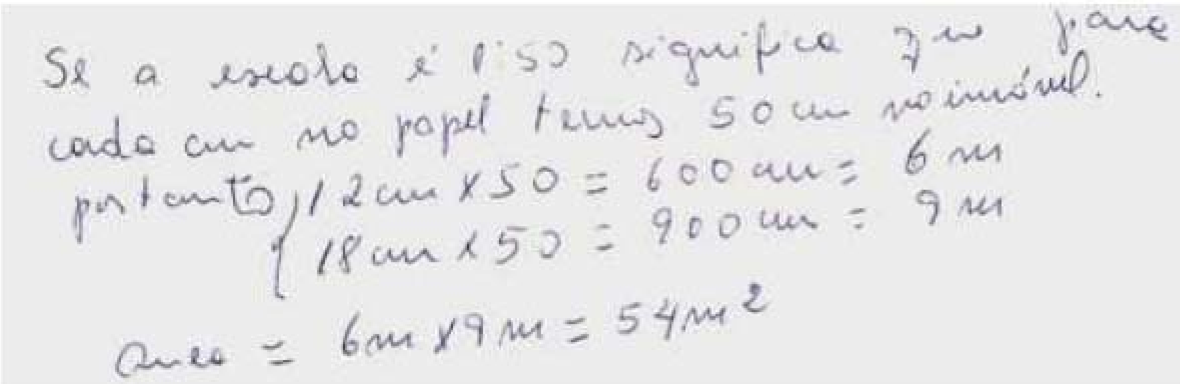
Figura 25 - Produção escrita presente na prova do participante P10 do grupo G1



No **Grupo G2** temos vinte e nove produções nas quais os participantes multiplicaram 12 e 18 por 50 para obter as medidas do imóvel na escala real e apresentaram o resultado em centímetros e metros.

Aqui apresentamos a produção escrita do participante P18:

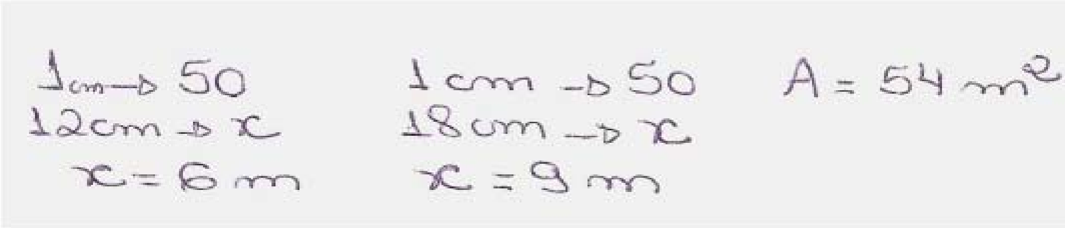
Figura 26 – Produção escrita presente na prova do participante P18 do grupo G2



No **Grupo G3** temos doze produções nas quais os participantes encontraram as medidas reais do imóvel por meio de uma regra de três. Em seguida apresentaram apenas a área do imóvel sem os referidos cálculos.

Aqui apresentamos a produção escrita do participante P15:

Figura 27 - Produção escrita presente na prova do participante P15 do grupo G3



Podemos inferir que o pensamento algébrico se caracteriza pelo uso de incógnitas nos Grupos G1 e G3 e pelo Aritmeticismo (LINS, GIMENEZ, 1997) no grupo G2. Quanto à linguagem, os participantes do grupo G2 utilizaram a linguagem natural e no Grupo G3 os participantes utilizaram a linguagem algébrica, considerando a letra como uma incógnita, as medidas reais do imóvel segundo Kieran (1992) e na fase de transição segundo Fiorentini et al (2005). A simbologia utilizada pelo participante P15 é equivocada, pois a implicação não se aplica a este contexto.

3.8.2 Alternativa 02

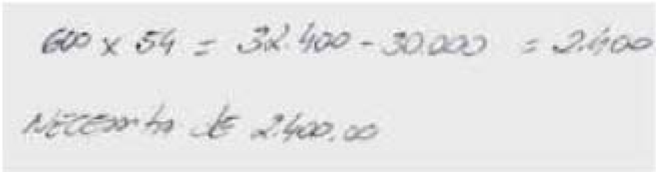
Quadro 14 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 08 – alternativa 02

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	Multiplicação e Subtração	Multiplica 54 por 600. Subtrai o resultado de 30.000. Apresenta o resultado.	E01, E02, E03, E04, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32, E35, E40, E42, E43, E44, E45, E46, E47, E48, E49, P01, P02, P03, P04, P05, P06, P07, P08, P09, P10, P11, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P21, P22, P23, P24.

No **Grupo G1** temos 66 produções nas quais os participantes multiplicaram a área do apartamento por 600, que é o custo do metro quadrado, encontrando 32.400.

Calcularam a diferença entre 32.400 e 30.000, que era o dinheiro que José dispunha para a compra do imóvel, encontrando 2400 e concluíram que este precisaria de 2400 reais para aquisição do imóvel

Figura 28 – Produção escrita presente na prova do participante E45 do grupo G1



A linguagem utilizada pelos participantes desse grupo é a linguagem natural. O pensamento algébrico se caracteriza pelo Aritmeticismo (LINS, GIMENEZ, 1997), apresentando uma relação entre as operações e caracterizando a fase pré-algébrica (FIORENTINI et al, 2005).Também podemos inferir que a linguagem simbólica presente nas produções desse grupo é constituída pelos sinais aritméticos.

3.8.3 Alternativa 04

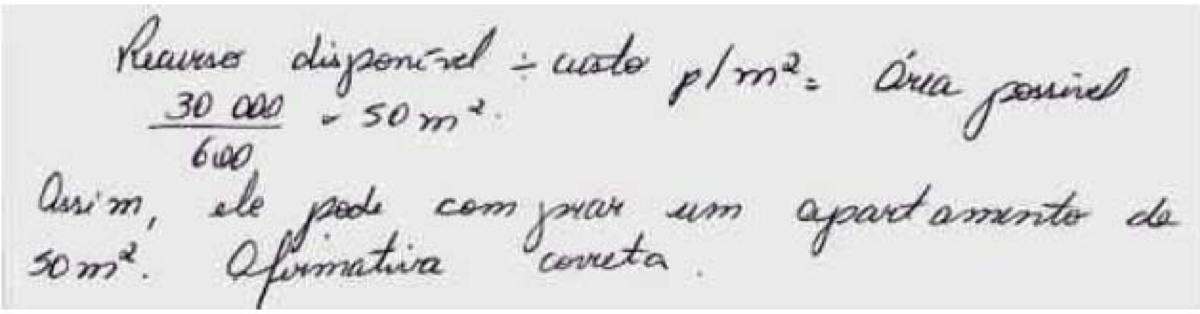
Quadro 15 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 08 – alternativa 04

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	Divisão	Divide 30000 por 600. Apresenta o resultado.	E01, E02, E13 E14, E15, E16, E17, E20, E22, E24, E25, E26, E35, E36, E37, E38, E39, E40, E42, E43, E45, E46, E47, E48, E49, P01, P02, P03, P04, P05, P06, P07, P08, P09, P10, P11, P12, P14, P16, P18, P19, P21, P22, P23, P24.
G2	Multiplicação	Multiplica 600 por 50. Apresenta o resultado.	E03, E04, E05, E12, E18, E19, E23, E28, E29, E32, E33, E34, E41, E42, E43, E48, E49, P13, P15, P17, P20.

No **Grupo G1** temos 45 produções nas quais os participantes dividiram o valor que João dispõe (R$ 30.000,00) pelo custo do metro quadrado (R$ 600,00), obtendo como resultado 50, ou seja, os participantes podem concluir que João pode comprar um apartamento de 50 metros quadrados, conforme a alternativa afirma.

Aqui apresentamos a produção escrita do participante P23 que dividiu o valor que João dispõe (R$ 30.000,00) pelo custo do metro quadrado (R$ 600,00), obtendo como resultado 50:

Figura 29 - Produção escrita presente na prova do participante P23 do grupo G1



Recurso disponível ÷ custo p/m² = Área possível

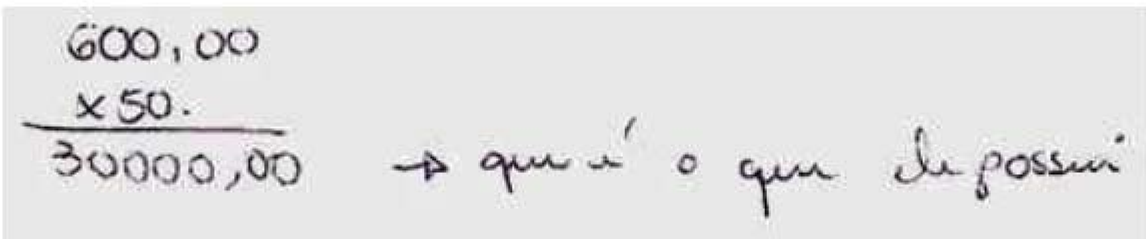
$\frac{30\,000}{600} = 50\,m^2$.

Assim, ele pode comprar um apartamento de $50\,m^2$. Afirmativa correta.

No **Grupo G2** temos 21 produções nas quais os participantes multiplicaram o custo do metro quadrado (R$ 600,00) pela possível área do apartamento que João poderá comprar.

Aqui apresentamos a produção escrita do participante P17 que multiplicou o custo do metro quadrado pela possível área do apartamento que João poderá comprar.

Figura 30 - Produção escrita presente na prova do participante P17 do grupo G2



600,00
×50.
30000,00 → que é o que ele possui

Podemos inferir que os participantes utilizaram uma linguagem natural e símbolos aritméticos ao resolver a alternativa proposta e os indícios do pensamento algébrico se apresentam quando eles utilizam a pré-álgebra (KIERAN; CHALOUH, 1993), construindo o significado dos símbolos e das operações da Álgebra com base nos seus conhecimentos aritméticos.

3.8.4 Alternativa 08

Na alternativa 08 os participantes não apresentaram produção escrita, pois acreditamos que os mesmos apenas analisaram a alternativa apresentada e, apoiados nos cálculos efetuados para responder a alternativa 02, puderam afirmar se a alternativa era verdadeira ou falsa. Podemos perceber que a alternativa é falsa, pois para comprar o apartamento que João deseja ele precisa de mais R$2400,00 e a alternativa afirma que ele pode comprar o apartamento e ainda lhe sobrará R$2000,00.

3.8.5 Alternativa 16

Na alternativa 16, assim como a alternativa 08, os participantes não apresentaram produção escrita, pois com os cálculos efetuados para responder a alternativa 02 acreditamos que os mesmos possuíam subsídios para atribuir verdadeiro ou falso à alternativa. Podemos verificar que a alternativa também é falsa, pois para a compra do apartamento que deseja, João precisará de R$2400,00.

3.8.6 Alternativa 32

Na alternativa 32, assim como nas alternativas 08 e 16, não há produção escrita, pois os participantes têm informações suficientes obtidas nos cálculos anteriores para decidir se a alternativa é verdadeira ou falsa. Podemos afirmar que a alternativa é falsa, pois João não dispõe da quantia exata para a compra, mas sim lhe faltam R$2400,00.

Os participantes E06, E07, E08, E09, E10, E11 e E21 não apresentaram produção escrita e, portanto, não foram incluídos nos agrupamentos.

3.9 QUESTÃO 09

> Em 30 dias uma frota de 32 táxis consome 57600 litros de combustível. Por problemas mecânicos, 2 táxis foram retirados da frota. Para quantos dias serão suficientes os 93600 litros de combustível que a frota tem em estoque, supondo que os táxis restantes continuem rodando normalmente?

O enunciado da questão aborda as grandezas quantidade de veículos, combustível e tempo. A questão exige o reconhecimento de uma relação de proporcionalidade, porém os valores solicitados podem ser obtidos por meio de uma divisão ou multiplicação ou, ainda, por meio de uma regra de três, conteúdos do Ensino Fundamental.

Tabela 9 – Distribuição das pontuações obtidas pelo grupo de professores e estudantes na questão 9

Sujeitos	Pontuações							
	Pontuação Integral		Pontuação Parcial		Pontuação Nula		Total da Amostra	
	Código 1		Código 2		Código 3			
	N	%	N	%	N	%	N	%
Professores	21	88	0	0	3	12	24	32
Estudantes	21	42	0	0	29	58	50	67
Total da Amostra	42	57	0	0	32	43	74	100

Podemos inferir que a grande maioria dos sujeitos da pesquisa, principalmente os estudantes, não responderam corretamente a questão proposta, pois 39,19% receberam código 3, ou seja, pontuação nula. Podemos também observar na tabela anterior que não houve pontuação parcial, pois os participantes não apresentaram produção escrita parcial da questão.

Com a produção escrita pudemos estabelecer os grupos de acordo com o modo de resolução.

Quadro 16 - Agrupamento por opção de modo de resolução da questão 09

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	**Divisão**	Divide 57600 por 32. Determina o consumo de combustível por táxi. Divide o valor encontrado por 30. Determina o consumo de combustível de cada táxi por dia. Divide 93600 por 30 táxis. Determina o consumo de combustível de cada táxi por dia. Divide o valor encontrado por 60. Apresenta resultado.	E23, E25, E26, E27, E30, E31, E32, E44, E47, E48, P01, P10, P21, P22.
G2	**Duas Regras de Três Simples**	Monta uma regra de três: 32 táxis – 57600 ℓ 30 táxis - x Multiplica 30 por 57600. Divide o valor encontrado por 32. Apresenta o resultado. Monta uma nova regra de três: 30 dias – 54000 ℓ x - 93600 ℓ Multiplica 30 por 93600. Divide o valor encontrado por 54000. Apresenta o resultado.	E49

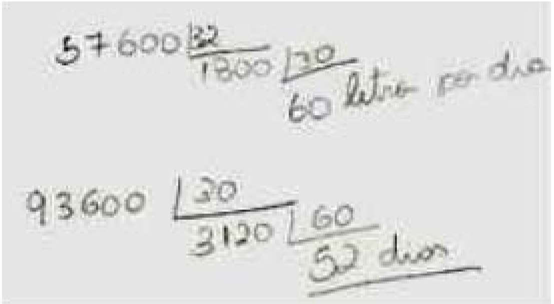
G3	**Regra de Três Composta**	Monta uma regra de três: dias táxis litros 30 32 57600 x 30 93600 Verifica quais são as grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais em relação à grandeza que deseja determinar o valor. Estabelece a relação: $\frac{30}{x}=\frac{30}{32}.\frac{57600}{93600}$ Multiplica 30 por 57600. Multiplica 32 por 93600. Estabelece uma nova relação: $\frac{30}{x}=\frac{172800}{2995200}$ Multiplica 2995200 por 30. Divide por 172800. Apresenta o resultado.	E12,E18, E19, E20, E21, E22, E24, E29, E45, E46, E47, P02, P04, P05, P06, P09, P11, P12, P13, P15, P16, P17, P19, P18, P19, P20, P24.

No **Grupo G**1 temos 14 produções nas quais os participantes optaram pela divisão como modo de resolução. Dividiram 57600 litros de combustível consumidos por 32 táxis, encontrando 1800 litros de combustível consumido por táxi. Em seguida dividiram 1800 por 30, encontrando o consumo diário de cada táxi, ou seja, cada táxi consome 60 litros por dia. Para determinar o número de dias que o combustível será suficiente, com a diminuição da frota, os participantes dividiram 93600 litros de combustível por 30 táxis, determinando a quantidade de combustível reservada para cada táxi, tendo como referência esse novo valor.

Em seguida dividiram o valor encontrado por 60, que é o consumo diário de cada veículo determinando assim, a quantidade de dias que a frota pode continuar rodando normalmente.

Aqui apresentamos a produção escrita do participante E30 que opto pela divisão como modo de resolução:

Figura 31 – Produção escrita presente na prova do participante E30 do grupo G1



No **Grupo G2** temos 01 produção na qual o participante monta uma regra de três, utilizando o número de táxis e o consumo de combustível da frota considerada.

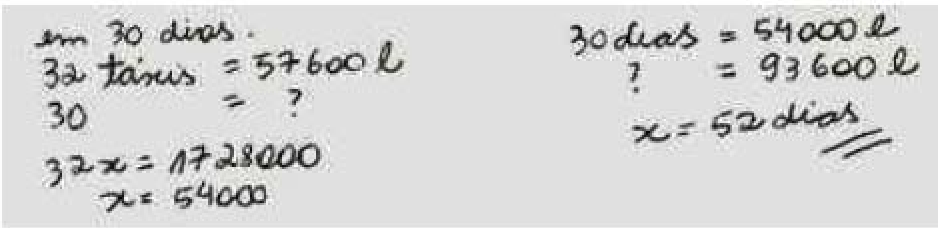
veículos		combustível (ℓ)
32	-	57600
30	-	x

O participante multiplicou 30 por 57600 e dividiu o resultado encontrado por 32 táxis, obtendo assim o consumo de combustível de uma frota de 30 táxis. Em seguida o participante montou uma nova regra de três com os dias considerados na verificação do consumo da frota e o consumo da frota nesse período:

dias		combustível (ℓ)
30	-	54000
x	-	93600

O participante multiplicou 93600 por 30 e dividiu por 54000 encontrando 52. Aqui apresentamos a produção escrita do participante E49:

Figura 32 – Produção escrita presente na prova do participante E49 do grupo G2



em 30 dias.
32 taxis = 57600 ℓ
30 = ?
32x = 1728000
x = 54000

30 dias = 54000 ℓ
? = 93600 ℓ
x = 52 dias

No **Grupo G3** temos 27 produções nas quais os participantes montaram uma regra de três composta com as grandezas dias, quantidade de táxis e consumo de combustível.

dias	nº de taxis	consumo de combustível (ℓ)
30	32	57600
x	30	93600

Após montar a regra de três, os participantes verificaram quais grandezas eram diretamente e inversamente proporcionais em relação à grandeza que contém a incógnita e assim montaram a proporção:

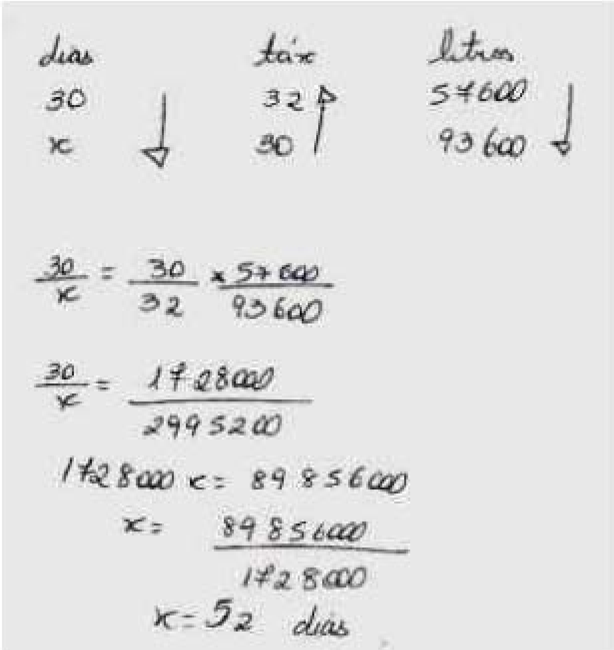
$$\frac{30}{x} = \frac{30}{32} \cdot \frac{57600}{93600}$$

Multiplicaram 30 por 57600. Multiplicaram 32 por 93600 e estabeleceram uma nova proporção:

$$\frac{30}{x} = \frac{172800}{2995200}$$

Multiplicaram 2995200 por 30. Dividiram por 172800 e apresentaram o resultado. Aqui apresentamos a produção escrita do participante P23 que utilizou uma regra de três composta:

Figura 33 - Produção escrita presente na prova do participante P23 do grupo G3



A linguagem utilizada é natural no Grupo G1 e algébrica nos grupos G2 e G3. No Grupo G1 o pensamento algébrico se caracteriza pelo Aritmeticismo (LINS; GIMENEZ, 1997) e pela fase pré-algébrica. O participante E49 utiliza o sinal de igualdade e simbologia inadequada ao montar uma regra de três. Nos Grupos G2 e G3 inferimos que há indícios do pensamento algébrico, pois os participantes utilizam a letra como incógnita segundo Kieran (1992). Segundo Fiorentini et al(2005), podemos também inferir que o pensamento algébrico se apresenta na fase de transição.O participante P23 utiliza as setas ↓↑ sem justificar seu uso.

Inferimos que esta representação é utilizada para relacionar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais em relação à grandeza que contém a incógnita.

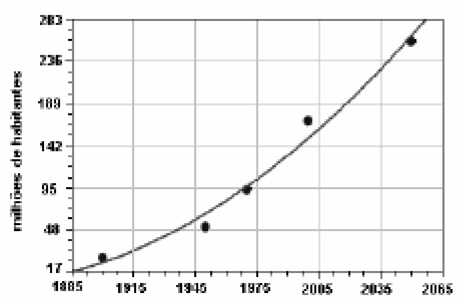
Os participantes E01, E02, E03, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E10, E11, E13, E14, E15, E16, E17, E21, E28, E33, E34, E35, E36, E37, E38, E39, E40, E41, E42, E43, E46, E50, P07, P08 e P14 não apresentaram produção escrita.

3.10 QUESTÃO 10

A população do Brasil, em 1900, era de 17.438.434. Em cinqüenta anos a população passou a ser de 51.944.397. Em 1970, quando o Brasil ganhou o tricampeonato, e toda a torcida brasileira cantava "90 milhões em ação", isto correspondia a 93.139.037 habitantes. Em 2000, a população já contava com 169.590.693 pessoas. A previsão para 2050 é que a população será de 259.800.000 brasileiros.

Fonte: http://www.ibge.gov.br/ibgeteen/pesquisas/ demograficas.html - acessada em 20/08/2006.

No gráfico seguinte são apresentados os pontos que representam a população em cada um destes anos e esses pontos são aproximados por uma função.



I. A função pode ser a exponencial: $y = ae^{bx}$, com $a>0$ e $b>0$.

II. A função pode ser a polinomial de grau 3: $y= ax^3+ bx^2+ cx +d$, com $a>0$.

III. A função pode ser a polinomial de grau 2: $y= ax^2+ bx+ c$, com $a<0$.

IV. A função pode ser a logarítmica: $y=a \log (bx)$, com $a<0$ e $b>0$.

Estão corretas apenas as afirmativas:

a) I e III.

b) II e IV.

c) I e II.

d) III e IV.

e) I e IV.

O enunciado da questão traz informações referentes à população do Brasil desde 1900 e uma perspectiva desta para o ano de 2050. A questão exige uma leitura interpretativa do gráfico para proceder a análise das afirmações, além de mobilizar conteúdos referentes a função quadrática, função polinomial, função exponencial e função logarítmica, conteúdos estes trabalhados no Ensino Médio em que se exige a análise da variação da população brasileira durante certo período.

Tabela 10 – Distribuição das pontuações obtidas pelo grupo de professores e estudantes na questão 10

Sujeitos	Pontuações							
	Pontuação Integral		Pontuação Parcial		Pontuação Nula		Total da Amostra	
	Código 1		Código 2		Código 3			
	N	%	N	%	N	%	N	%
Professores	10	42	0	0	14	58	24	32
Estudantes	15	30	0	0	35	70	50	67
Total da Amostra	25	34	0	0	49	66	74	100

Observamos pelas pontuações apresentadas que a grande maioria dos participantes não respondeu corretamente a questão proposta e assim podemos inferir que a interpretação gráfica que exige conteúdos sobre a representação gráfica de uma função representa um problema para professores e estudantes.

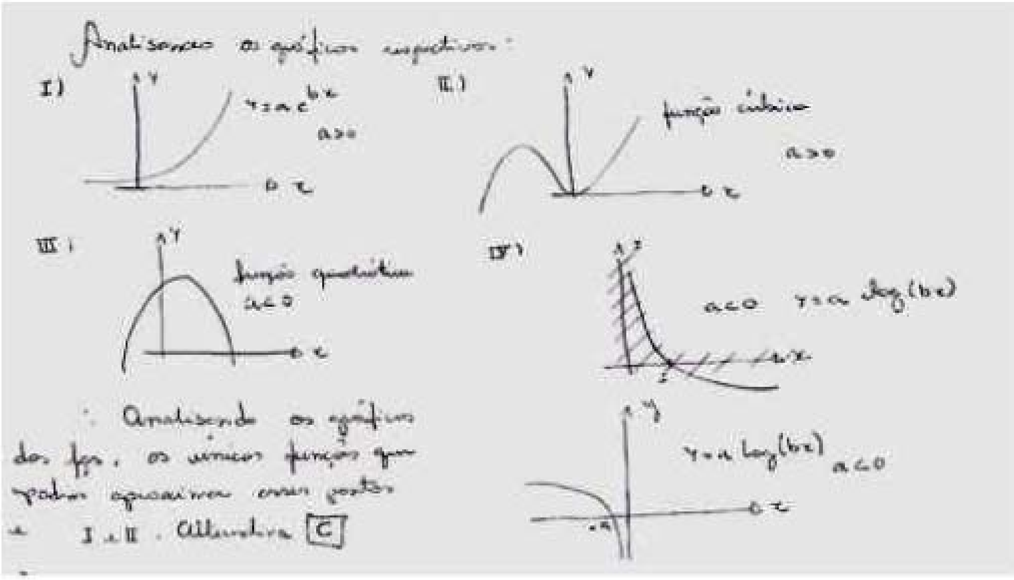
A partir da produção escrita dos participantes conseguimos compor 03 grupos de modos de resolução:

Quadro 17 - Agrupamento por estratégia da questão 10

Grupo	Opção de Modo de Resolução	Processo de Resolução	Produções
G1	**Análise dos gráficos de cada função**	Esboça o gráfico de cada uma das funções apresentadas nas alternativas e analisa seus respectivos coeficientes.	E20, E21, E22, E23, E26, E27, E28, E31, E32, P17, P20, P25.
G2	**Análise dos coeficientes sem representação gráfica**	Analisa os coeficientes de cada uma das funções apresentadas.	E24, E29, E30, E32, E48, P06, P07, P16, P22.
G3	**Análise apenas da função polinomial de grau 2**	Apresenta apenas uma explicação referente ao coeficiente da função polinomial do grau 2.	E25, E46, P23, P24.

No **Grupo G1** temos doze produções nas quais os participantes esboçaram os gráficos das funções baseando-se nas informações a respeito dos coeficientes.

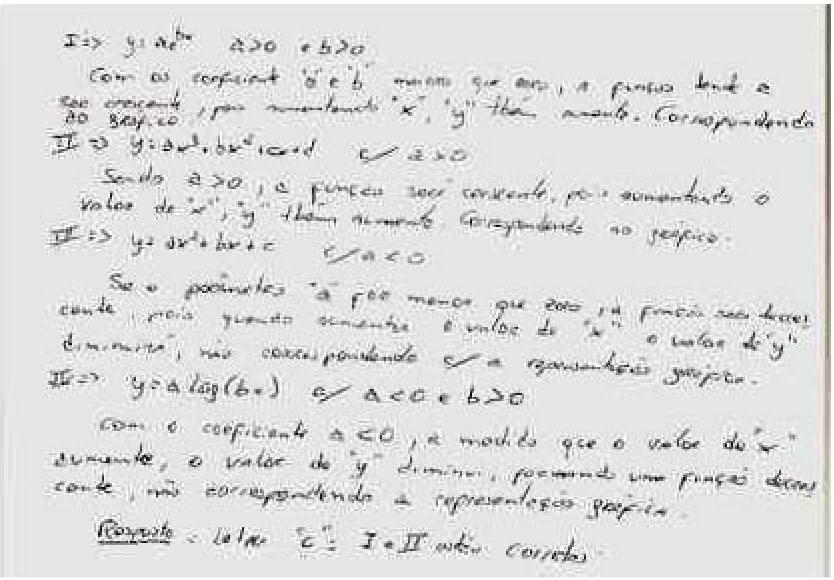
Figura 34 - Produção escrita presente na prova do participante P17 do grupo G1



A linguagem utilizada é a linguagem algébrica e gráfica de funções. Podemos também inferir que houve indícios do pensamento algébrico na produção escrita neste grupo, pois os participantes consideram a letra como um número generalizado segundo Kieran (1992). Segundo Fiorentini et al (2005), o pensamento algébrico está caracterizado pela fase do pensamento mais desenvolvido. Para analisar a alternativa I o participante P17 representou uma função exponencial crescente, considerando que as imagens serão sempre um valor real positivo diferente de zero. Na sua produção escrita, o participante P17 não faz referência ao termo b. Para verificar a alternativa II, o participante representa a função cúbica e podemos observar que ele considerou que uma função cúbica apresenta como uma de suas raízes o zero. O participante também utiliza a notação simbólica a>0 e representa um gráfico que se assemelha a uma parábola no segundo e primeiro quadrantes. Na resolução da alternativa III, o participante representa uma parábola com concavidade voltada para baixo, pois foi dado que a<0 e não podemos obter uma parábola com concavidade voltada para cima, portanto, a alternativa é falsa. Para analisar a alternativa IV, o participante representa uma função logarítmica decrescente e também podemos verificar que: o gráfico da função logarítmica sempre passa pelo ponto (1,0); nunca toca o eixo y e não ocupa pontos dos quadrantes II e III. O participante também representa ao lado do gráfico a notação simbólica a<0. Acreditamos que seja para justificar que sendo o coeficiente a negativo, a medida que os valores de x aumentam, os valores de y diminuem, o que não corresponde à representação gráfica. Também podemos inferir que nesta produção houve indícios da fase sincopada (EVES, 1995) ligada à concepção operacional da Álgebra (SFARD, 1991).

No Grupo G2 temos 09 produções nas quais os participantes analisaram as afirmações baseando-se nos coeficientes das funções dadas, sem recorrer a representação gráfica.

Figura 35 - Produção escrita presente na prova do participante P22 do grupo G2



No **Grupo G3** temos 04 produções nas quais os participantes analisaram apenas o coeficiente da função polinomial do 2º grau e assim assinalaram a alternativa correta.

Figura 36 – Produção escrita presente na prova do participante E46 do grupo G3

Neste grupo podemos inferir que houve indícios do pensamento algébrico caracterizado pela Analiticidade (LINS; GIMENEZ, 1997), pois os participantes operam sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos. Segundo Kieran (1992), os participantes também consideram a letra como um número generalizado. O participante E46 apenas analisou a alternativa III para responder a questão. Acreditamos que este modo de resolução se justifique pelo fato de ser uma função polinomial de grau 2, mas enfatizada em exercícios desde a 8ª série, porém, apenas com essa informação acreditamos não ser possível assinalar a alternativa correta sem analisar as outras alternativas. O participante utilizou o famoso "chutômetro".

Os participantes E13, E14, E15, E16, E17, E19, E33, E34, E35, E36, E37, E44, E45, E46, E49, E50, P13, P15, P04 e P10 não apresentaram produção escrita e nem assinalaram as alternativas dadas. Os participantes E01, E02, E03, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E10, E11, E12, E18, E38, E39, E40, E41, E42, P01, P02, P03, P08, P09, P11, P12, P14, P18, P19 não apresentaram produção escrita e assinalaram a alternativa errada.

3.11 Questão 11

O "Sudoku" é um jogo de desafio lógico inventado pelo matemático Leonhard Euler (1707-1783). Na década de 70, este jogo foi redescoberto pelos japoneses que o rebatizaram como Sudoku, palavra com o significado "número sozinho". É jogado em um quadro com 9 por 9 quadrados, que é subdividido em 9 submalhas de 3 por 3 quadrados, denominados quadrantes. O jogador deve preencher o quadro maior de forma que todos os espaços em branco contenham números de 1 a 9. Os algarismos não podem se repetir na mesma coluna, linha ou quadrante.

Fonte: LEÃO, S. Lógica e estratégia. Folha de Londrina, Especial 14, 17 de setembro de 2006.

Com base nessas informações, o algarismo a ser colocado na casa marcada com □ no quadro a seguir é:

a) 2

b) 3

c) 5

d) 7

e) 9

4				7			5	6
						9		2
6								
3				6	9			
		5	8	○	1	7		
8			7		4			
					3		2	1
		2						
1	6			2				7

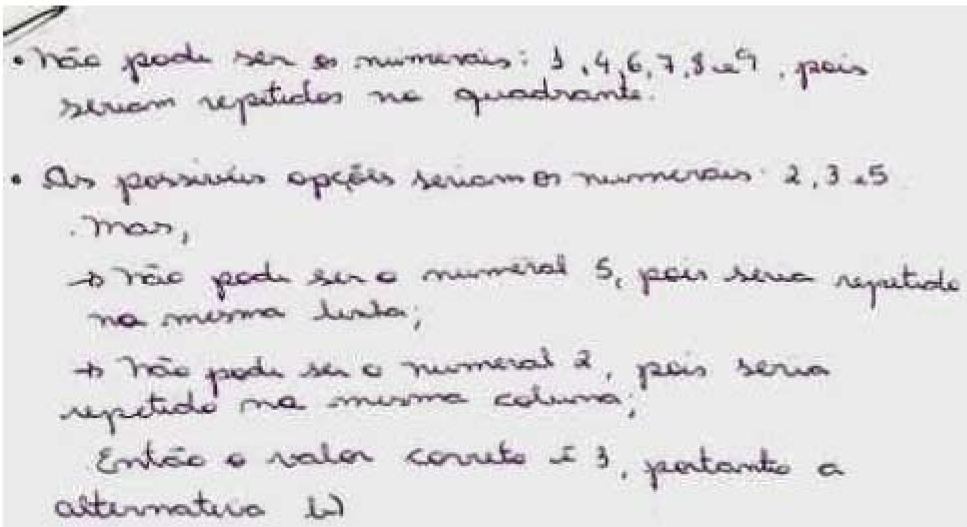
O enunciado da questão refere-se ao "Sudoku", um jogo de desafio lógico. A questão exige apenas raciocínio lógico para descobrir o número que está faltando no centro do quadro. Pelas condições do próprio jogo, os participantes devem observar as linhas, colunas ou quadrantes para verificar se não há algarismos repetidos, condição esta determinada pelo próprio jogo.

Tabela 11 – Distribuição das pontuações obtidas pelo grupo de professores e estudantes na questão 11

Sujeitos	Pontuações							
	Pontuação Integral		Pontuação Parcial		Pontuação Nula		Total da Amostra	
	Código 1		Código 2		Código 3			
	N	%	N	%	N	%	N	%
Professores	24	100	0	0	0	0	24	32
Estudantes	47	94	0	0	3	6	50	67
Total da Amostra	71	96	0	0	3	4	74	100

De posse das produções escritas, optamos em transcrevê-las, pois, conforme as orientações dadas solicitamos aos participantes que escrevessem como haviam "pensado" para encontrar o número a ser preenchido no centro do quadrado:

Figura 37 - Produção escrita presente na prova do participante E25


• Não pode ser os numerais: 1, 4, 6, 7, 8 e 9, pois seriam repetidos no quadrante.

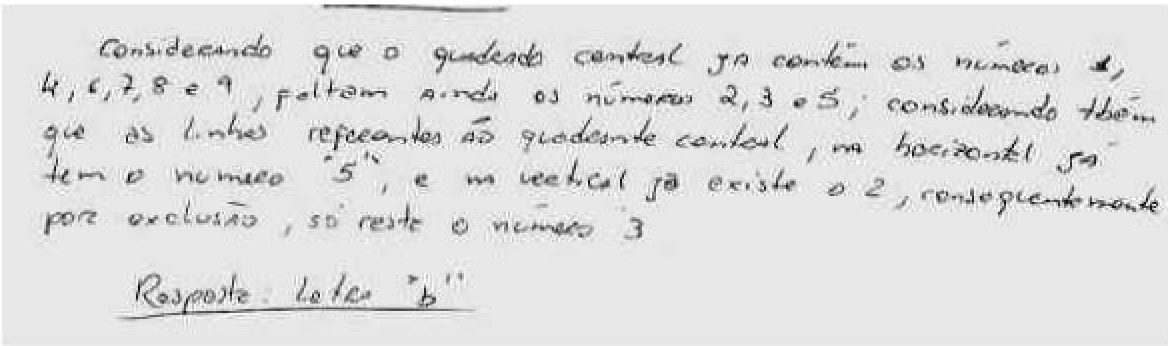
• As possíveis opções seriam os numerais: 2, 3 e 5. Mas,

→ não pode ser o numeral 5, pois seria repetido na mesma linha;

→ não pode ser o numeral 2, pois seria repetido na mesma coluna;

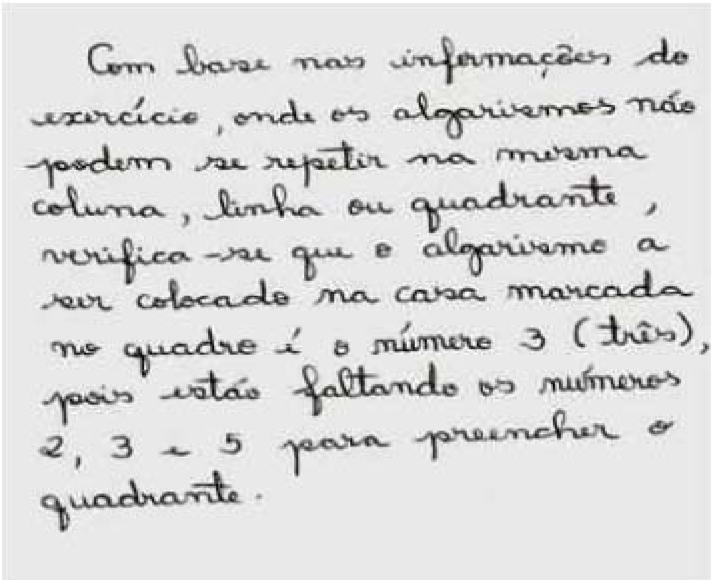
Então o valor correto é 3, portanto a alternativa b)

Figura 38 – Produção escrita presente na prova do participante E37


Considerando que o quadrado central já contém os números 1, 4, 6, 7, 8 e 9, faltam ainda os números 2, 3 e 5; considerando também que as linhas referentes ao quadrante central, na horizontal só tem o número "5", e na vertical já existe o 2, consequentemente por exclusão, só resta o número 3

Resposta: letra "b"

Figura 39- Produção escrita presente na prova do participante P14


Com base nas informações do exercício, onde os algarismos não podem se repetir na mesma coluna, linha ou quadrante, verifica-se que o algarismo a ser colocado na casa marcada no quadro é o número 3 (três), pois estão faltando os números 2, 3 e 5 para preencher o quadrante.

Inferimos que o pensamento algébrico está presente no raciocínio lógico e nas estratégias que os participantes precisaram estabelecer para preenchimento correto da casa marcada no quadro, como podemos observar na produção escrita dos participantes. Segundo Vygostky (2001), a memória lógica é desenvolvida a partir da formação de conceitos e "toda formação de conceitos é o ato mais específico, mais autêntico e mais indiscutível do pensamento". Segundo Lins e Gimenez (1997) o pensamento algébrico se caracteriza pelo Aritmeticismo, característica esta em que são produzidos significados apenas em relação a números.

Os participantes E08, E09 e E10 receberam pontuação nula, pois, mesmo com as instruções dadas, preencheram a casa solicitada com um número errado.

CAPITULO 4
ALGUMAS REFLEXÕES

Neste capítulo faremos um fechamento das análises realizadas, baseando-se na coleta de dados e na fundamentação teórica desta pesquisa. Com isso, pretendemos expor um panorama geral da pesquisa, fornecendo indicativos que possibilitem responder nossa questão inicial: **quais conteúdos algébricos, as características do pensamento algébrico, da linguagem algébrica e simbologia algébrica são mobilizados por estudantes e professores de Matemática do Ensino Médio quando da resolução de questões de Álgebra de vestibulares de Instituições de Ensino Superior Estaduais do Paraná?**

Considerando a questão inicial da nossa pesquisa, optamos em analisar a produção escrita dos participantes, pois quando um estudante ou professor resolve uma questão e registra seu modo de resolução numa avaliação, ou seja, aponta o caminho percorrido, nos possibilita inferir sobre seus modos de resolução. Desta forma, buscamos primeiramente verificar os conteúdos que foram abordados nas questões, tecendo algumas considerações pertinentes. Nas questões 01, 04, 05, 07, 08 e 09, os participantes optaram por regra de três e proporção. Acreditamos que muitas vezes a proporcionalidade é associada a procedimentos mecânicos, na propriedade das proporções ou na regra de três simples e que raciocínio proporcional é concebido apenas como a utilização de um algoritmo de resolução.

Na questão 02, os participantes utilizaram apenas o conceito de média aritmética. O documento do NCTM (2000, p.54) considera que "os alunos devem desenvolver uma compreensão dos dados agregados". Desta forma, os alunos poderão visualizar os dados como um todo e assim necessitar de ferramentas para descrever esse conjunto, esse todo. As medidas de tendência central, dentre elas a média, tornam-se úteis como descritores. Acreditamos que a própria questão possa ter suscitado a busca das medidas de tendência central como ferramenta para a resolução da mesma.

Na questão 03, os participantes optaram por equações do 1° grau para descobrir os valores das incógnitas de um quadrado mágico. Um quadrado mágico é uma matriz de inteiros de duas dimensões em que a soma das colunas, das linhas e das diagonais principais é constante, indicando certo padrão. Acreditamos que esta opção, como já mencionamos anteriormente, foi induzida pelo enunciado da questão. O documento do NCTM (2000, p.248) ressalta que o foco da Álgebra é "a capacidade de reconhecer e trabalhar eficazmente com relações lineares e suas representações correspondentes" . Este documento considera que o trabalho envolvendo equações constitui um importante componente do currículo e que os conhecimentos dos alunos a respeito desse assunto devem ir "além do simples reconhecimento de quem uma letra pode ser usada na representação de uma incógnita em equações" (NCTM, 2000, p.265). Kaput (1999) defende que o professor deve propiciar aos alunos a análise de padrões e regularidades, pois, assim, este encoraja os alunos a trabalhar com símbolos, sem se referir a números, incentivando a compreensão.

Na questão 06, as produções escritas focaram a multiplicação e potenciação de números inteiros, exigindo também que os participantes identificassem e utilizassem conexões entre essas duas operações. Segundo o documento do NCTM (2000), os alunos devem ser capazes de compreender números, suas formas de representação e suas relações entre os sistemas numéricos; além de compreender significados de operações e como elas se relacionam umas com as outras.

As produções escritas dos participantes na questão 10 abordaram a relação entre a representação gráfica e a expressão algébrica de uma função, fazendo uma leitura interpretativa destes e outras apenas analisando os coeficientes das funções, as quais foram informadas no enunciado da questão. Consideramos que os gráficos auxiliam na comunicação do pensamento ou na investigação de dados por meio de variadas representações e que o confronto com problemas do mundo real pode auxiliar os alunos na busca de estratégias para solucioná-los. Segundo o documento do NCTM (2000, p.262), os conteúdos do currículo devem habilitar os alunos para "usar modelos matemáticos para representar e compreender relação s quantitativas" por meio de diversas representações, dentre elas a representação gráfica. Achamos pertinente destacar a questão 10, que exigia que os participantes analisassem a variação num contexto. Dos 24 professores participantes, 14 não apresentaram produção escrita. Os resultados também levam a refletir como os professores e, consequentemente, os estudantes concebem o conhecimento algébrico.

A última questão (questão 11) fez referência ao raciocínio lógico. Acreditamos que o raciocínio lógico seja um fator importante na aprendizagem da Matemática, pois este pode conduzir alunos à compreensão do que está sendo proposto e não somente decorem e apliquem fórmulas. Como pudemos observar nessa questão, os exercícios de raciocínio lógico são exercícios desafiadores, instigadores, que exigem concentração e também um planejamento de ações. De acordo com o NCTM (2000, p.224), o professor deve "ajudar os seus alunos a reconhecerem o raciocínio enquanto componente central da atividade matemática ".

Em nossa pesquisa procuramos caracterizar o pensamento algébrico buscando indícios deste quando um ou mais indicadores se fizessem presentes explicitamente:

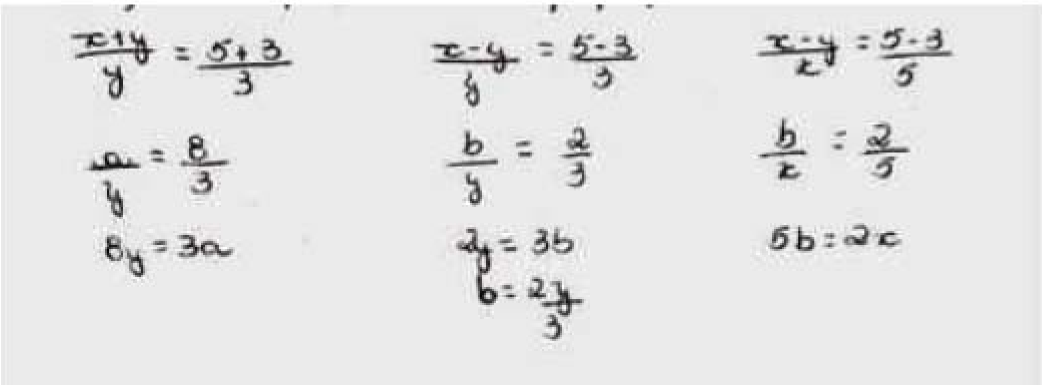
generalização, regularidade, uso ou cálculo de incógnitas, uso ou cálculo com variáveis e uso de equações. De posse das produções escritas pudemos constatar indícios de todos os indicadores que estabelecemos antes de iniciar a pesquisa de campo para caracterizar o pensamento algébrico. O uso de incógnitas foi o indicador que mais se evidenciou nas produções. Acreditamos que isso se deve ao fato dos próprios enunciados das questões, os quais já apresentavam as letras, induzirem os participantes a utilizá-las em suas produções.

Um dos referenciais teóricos adotados em nossa pesquisa foi os estudos de Lins e Gimenez (1997), os quais apresentaram três características fundamentais. Destas, o Aritmeticismo foi a característica mais evidenciada nas produções. Sabemos que a Aritmética com suas operações, símbolos e propriedades é base do pensamento algébrico e está ligada à operacionalidade. Mas consideramos que o pensamento algébrico vai além dessa operacionalidade. Inferimos que os participantes recorrem aos números e as operações aritméticas básicas para produzir significados, demonstrando que não sentiram necessidade do conhecimento algébrico ou até mesmo diante da dificuldade em manipular e "ler" expressões simbólicas como dois aspectos diferentes de resolver problemas (ARCAVI, 1994).

No que se refere à linguagem e ao simbolismo algébrico, pudemos perceber que a linguagem natural permeou grande parte das produções escritas. Acreditamos que os professores demonstraram em suas produções que muitas vezes não concebem a Matemática com uma linguagem própria, com sua ampla simbologia e, ao utilizarem essa simbologia, fazem-na erroneamente. A produção escrita do participante P03, do grupo G2, na questão 06, evidencia nossas afirmações. O participante escreve $a^2 \rightarrow +$, considerando que um número negativo elevado ao quadrado tem sempre como resposta um resultado positivo. Da mesma maneira o participante procede ao escrever $b^3 \rightarrow -$., considerando que qualquer número negativo elevado ao cubo tem como resposta um resultado negativo. Isso pode acarretar aos estudantes e também professores dificuldades na leitura e interpretação de muitos textos ou conteúdos matemáticos. Observando a produção do participante P03, os estudantes podem adotar como regra que qualquer número elevado ao cubo tem como resultado um valor negativo, independente de ser este um número positivo ou negativo. Os símbolos matemáticos devem estar bem definidos e usados de forma correta para não gerar dúvidas aos estudantes. O excesso de simbologia pode impedir que os estudantes compreendam a idéia representada e assim não produzam significados.

Pudemos também observar que a fase mais usada nas produções é a fase de transição (FIORENTINI et al. 2005), uma fase intermediária, não tão simples como a retórica nem tão desenvolvida como a simbólica. Contudo, existem algumas generalizações que não seriam possíveis de serem feitas apenas com a fase de transição. A produção escrita do participante E13, na questão 05, justifica nossa afirmação.

Figura 40 - Produção escrita presente na prova do participante E13 do grupo



Compreendemos que para entender como a Matemática é processada pelo aluno é preciso entender como ele conecta os símbolos. Para isso, é preciso estabelecer uma relação dialógica entre professor e aluno, a fim de possibilitar que o aluno explicite a leitura que faz da Matemática e assim procurar entender o significado dos símbolos em sua mente.

A linguagem matemática está repleta de conceitos que são oriundos da generalização e da abstração, surgidos da necessidade do próprio homem. Ela tem em seus signos, sinais que representam quantidades ou situações. No Ensino Médio, essa linguagem tende a se tornar mais formal e isso pode ser um agravante na compreensão dessa ciência. O pensamento algébrico pode expressar-se por meio da linguagem natural, da linguagem geométrica ou por meio da linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica. Saber utilizar a linguagem matemática significa entendê-la, aplicando-a de maneira adequada nos diversos contextos que surgem. Acreditamos que, independente da linguagem usada, o pensamento algébrico pode ser abordado desde os primeiros anos de escolaridade como defende o NCTM (2000). Cabe ao professor planejar ações que possibilitem aos estudantes uma reflexão que cause inquietude e desta forma a aprendizagem aconteça.

Inicialmente, esta pesquisa pretendia verificar conteúdos algébricos e pensamento algébrico em questões de Álgebra de vestibulares de universidades estaduais paranaenses. Contudo, nos deparamos com alguns questionamentos: como determinar quando uma questão de Matemática era de Álgebra e como trabalhar com o conteúdo sem ter uma resolução? Podemos resolver uma questão de várias maneiras e com vários conteúdos. Que conteúdos e características do pensamento algébrico podem se manifestar nas resoluções?

Assim, diante desses desafios, optamos por enviar as questões de Matemática dos vestibulares das universidades selecionadas dentro dos critérios estabelecidos a cinco especialistas em Álgebra, quatro doutores e um mestre, que nos indicariam quais dessas questões eram de Álgebra. Quando recebemos as respostas, qual não foi nossa surpresa ao verificar que as questões escolhidas eram exatamente aquelas que continham letras em seu enunciado, equações, funções e raciocínio lógico. De quarenta e seis questões, ficamos apenas com onze, considerando ainda todas as indicadas e não somente as comuns a todos eles. Não podemos afirmar que não ficamos frustrados, pois várias questões que considerávamos "interessantes", para verificar a resolução de alunos e professores, que iriam enriquecer nossa pesquisa, não foram apontadas por estes.

Aplicamos as questões a professores e alunos que ao resolverem nos forneceram as respostas para nossa pergunta. De posse das produções escritas, percebemos que tivemos muitos ganhos em material para análise. A partir disso, procedemos à correção das questões e fizemos os agrupamentos das mesmas para em seguida analisá-las. Consideramos que fazer a análise da produção escrita dos professores e estudantes respeitou e até mesmo valorizou o trabalho de ambos, conhecendo assim como produzem significado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Repensar o ensino da Álgebra é um desafio constante. Para que as mudanças ocorram é preciso que os professores se conscientizem da importância do pensamento algébrico, importância esta que não deve se resumir a cálculos repetitivos com letras, mas que sejam propiciadas atividades desde os anos iniciais de escolarização. Atividades estas que propiciem a construção e apropriação de novas ferramentas para os estudantes se constituírem em seres atuantes/ pensantes no contexto matemático. Geralmente as atividades ainda são abordadas numa linguagem mecanizada na sala de aula, na qual os alunos são treinados com exercícios padronizados, fórmulas prontas e os próprios alunos ou o professor tentam "generalizar" adotando macetes para encontrar a solução do que está sendo proposto. Uma linguagem que só existe na escola e que faz sentido para que estes efetuem "contas" ou resolvam as tais "equações". Se o pensamento algébrico for trabalhado desde os primeiros anos de escolaridade, acreditamos que os estudantes não sentirão "impacto" ao se depararem com a linguagem mais formal, estritamente simbólica da Álgebra, uma linguagem nova, estranha, na qual os estudantes trabalham com o desconhecido, pois aos poucos o pensamento algébrico vai se potencializando.

Mesmo não sendo o foco de nossa pesquisa, pudemos verificar a importância do enunciado de uma questão e de como este pode induzir os estudantes e professores a determinados processos de resolução. Muitas vezes, um enunciado mal elaborado pode levar o estudante a se sentir fracassado, por não entendê-lo ou não saber como resolver a questão que está sendo proposta. Muitos estudantes podem elaborar seus modos de resolução de acordo com a interpretação do enunciado.

Refletir sobre o papel da linguagem e do simbolismo algébricos e suas características, articulando-os com o pensar algébrico no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra é de suma importância. Acreditamos que pensar algebricamente, exige que o estudante tenha primeiramente se apropriado do conceito de número. Precisamos ter sempre em mente que a linguagem matemática ampliou-se para facilitar a comunicação entre as pessoas e não para dificultá-la. O professor precisa ser cauteloso para não "abusar" do uso dos símbolos, deixando de se preocupar com a compreensão dos mesmos por parte dos estudantes, esclarecendo os seus significados. Se o estudante não se apropria dos conceitos e procedimentos algébricos, estão não consegue aplicá-los na resolução de uma questão que destes necessite, distanciando-o da Álgebra e fortalecendo o estigma de que a Matemática é uma disciplina complexa, para poucos, como uma forma de exclusão. Como afirmam Lins e

Gimenez (1997), há uma cristalização do que a escola deve ensinar e os professores encontram-se "amarrados" aos currículos tradicionais. Desta forma, fragmentam o ensino da Álgebra fazendo com os estudantes apresentem dificuldades em questões que envolvam regularidades, padrões, generalizações advindas de muitas representações, simbólicas, algébricas gráficas e geométricas.

Saber utilizar a linguagem matemática não se restringe apenas ao domínio do vocabulário desta. Dominar esta linguagem significa entendê-la e utilizá-la de maneira adequada nos diversos contextos que surgem. Cabe a nós, educadores, ter consciência do que estamos "produzindo" em sala aula, seja em termos de conhecimento, seja em quanto aos estudantes que temos sob nossa "tutela". Precisamos refletir se realmente nosso trabalho em sala de aula está centrado em minimizar as dificuldades que nossos estudantes têm apresentado. Se buscamos transmitir os conhecimentos por meio de uma linguagem provida de significados, possibilitamos uma transição da Aritmética para a Álgebra sem grandes rupturas ou traumas.

REFERÊNCIAS

AMERON, B. A. **Reinvention of early algebra**: developmental research on the transition from arithmetic to algebra [S.l.]: [s.n.], 2002. Tekst. – Proefschrift Universiteit Utrecht. Disponível em: http://igiturarchive. library.uu.nl/dissertations/2002-1105-161148/inhoud.htm. Acesso em 10 de julho de 2009.

ARCAVI, A. Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics**. For the Learning of Mathematics**, v.14, n.1, 24-35, 1994.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula:** História da Álgebra. São Paulo: Atual, 1992.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** 3 ed. Lisboa: Edições 70 Ltda., 2004.

BURIASCO, R. L C. de; CYRINO, M. C. de C. T.; SOARES, M. T. C. **Manual para correção das provas com questões abertas de matemática** AVA - 2002. Curitiba: SEED/CAADI, 2004.

CARPENTER, T. P. et al. **Thinking mathematically. Integrating arithmetic ; algebra in elementary school.** Portsmouth, NH : Heinemann, c2003.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Ed. UNICAMP, 1995.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A.; MIGUEL, A.Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições,** v. 4, n.1, p. 78-91, 1993.

_____. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5**,** 2005, Porto. v.1. p. 1-13.

GOMES, R. Análise de dados em pesquisa qualitativa. In: MINAYO, Maria C. (Org.). **Pesquisa social:** teoria método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 1994, p. 67-79.

KAPUT, J. **Teaching and learning a new algebra with understanding.** (1999). Documento retirado de http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/KaputAlgUnd.pdf em 21de outubro de 2008.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In Grows, D. A. (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** New York, NY: MacMillan, 1992. p. 390-419

_____. The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In: **The future of teaching and learning of algebra:** the 12th ICMI Study. Dordrecht: Kluwer, 2004. p. 21-33.

KIERAN, C. ; CHALOUH, L. Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In Owers, D. (Ed) **Research ideas for the classroom middle grades mathematics**. New York, NY: Macmillan, 1993. p. 179-198.

LAVILLE, C. ; DIONNE, J. **A construção do saber:** manual de metodologia de pesquisa em ciências humanas. Porto Alegre: Editora UFMG: Artmed, 1999.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is.** 1992. PhD Thesis. University of Nothing, UK.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LINS, R. C. ; KAPUT, J. The Early development of Algebraic Reasoning: The current State of the Field. In: STACEY, K.; CHICK H. ; KENDAL M. (Eds). **The future of teaching and learning of algebra: the 12th ICMI Study.** Dordrecht: Kluwer, 2004. p.47-70.

LUDKE, M. ; ANDRE, M. E.D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

Manual do Candidato - UEPG- Disponível em http://www.cps.uepg.br/cps/Documentos/2007/manves081.pdf Acesso em 30 de novembro de 2008.

National Council of Teachers of Mathematics. **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.** 1989, RestonVA.

_____. Principles and standards for school mathematics. 2000, Reston: VA.

ONUCHIC, L.R. ; ALLEVATO, N. S.G. Novas Reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. BICUDO, Maria Aparecida Viggiani ; BORBA, Marcelo de Carvalho. (Orgs) pág. 213-231, 2005.

PESQUITA. I. M. P. **Álgebra e Pensamento Algébrico de Alunos do 8.° Ano.** 2007. 262 p. Dissertação (Mestrado em Educação - Especialidade em Didática da Matemática) - Departamento de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal, 2007.

PIMM, David. **Symbols and Meanings in School Mathematics,** Routledge: London. 1995

PONTE, J. P. et al. **Álgebra no Ensino Básico.** Disponível em www.dgidc.min-edu.pt/matematica/.. ./Brochura_**Algebra**_(Set2009).pdf.

PUIG, L. ; ROJANO, Teresa. The History of Algebra in Mathematics Education. In: **The future of teaching and learning of algebra:** the 12th ICMI Study. Dordrecht: Kluwer, 2004.

SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics,** 27,1-36.

VYGOSTKY, L. S. **Pensamento e linguagem.** Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questões dos Vestibulares das Provas de Conhecimentos Gerais de 2005 a 2007

QUESTÕES DOS VESTIBULARES DAS PROVAS DE CONHECIMENTOS GERAIS DE 2005 A 2007

0105Q1- De acordo com a tabela, com 3 colheres de pó de café e 0,5 litro de água, são feitos 8 cafezinhos. Com base nessas informações, calcule os valores de x, y, r e s da tabela e assinale o que for correto.

CAFEZINHOS	COLHERES DE PÓ DE CAFÉ	ÁGUA (ℓ)
8	3	0,5
x	4,5	y
r	s	1,5

01) $\frac{r}{s}$ é um número natural.

02) r é um múltiplo de 4.

04) $x > s$

08) $x + r$ é um número primo.

16) x é um divisor de r.

32) y é um número racional.

0105Q2 -. João dispõe de R$ 30.000,00 e quer comprar um imóvel. Para isso analisa a planta de um pequeno apartamento, de forma retangular, medindo 12 cm por 18 cm, na escala 1:50. O custo do m ^{2} é R$ 600,00. Nestas condições, assinale o que for correto.

01) A área do apartamento é de 54 m^2.

02) Ele precisa ainda de R$ 2.400,00.

04) Com o dinheiro que tem, ele pode comprar um apartamento de até 50 m ^{2}.

08) Ele pode comprar o apartamento e ainda sobram R$ 2.000,00.

16) Ele precisa ainda de R$ R$ 3.200,00.

32) Ele tem a quantia exata para a compra.

0105Q3 - Em relação à uma pirâmide hexagonal regular, assinale o que for correto.

01) A soma dos ângulos internos do polígono da base é igual a 8 retos.
02) Ela possui 7 faces.
04) Ela possui 12 arestas.
08) Ela possui 7 vértices.
16) O polígono da base tem 9 diagonais.
32) Suas faces laterais são triângulos isósceles.

0105Q4 - Um investidor compra, no dia 20/08/2004, um lote de ações da empresa *A*, cotado em R$ 1.000,00. Considerando que as despesas operacionais correspondentes à "taxa de corretagem" chegam a R$ 24,50, e os "emolumentos", a R$ 0,50, e são pagos à parte, assinale o que for correto.

01) Se, em 20/12/04, o valor total do lote de ações estiver cotado a R$ 1.640,00, o ganho patrimonial do investidor, considerando se para o cálculo, as despesas operacionais, será de 60%.
02) Em 20/09/04, o lote de ações estava cotado a R$ 1.500,00. A valorização, sem levar em consideração quaisquer despesas operacionais, foi de 50%.
04) Para que o lucro do investidor seja de 100% em relação a todo o dinheiro gasto na operação, é necessário que o lote de ações atinja a cotação de R$ 2.050,00.
08) Se, ignorando as despesas operacionais, o investidor pretende que seu lote de ações tenha a valorização mínima de 35%, o lote de ações deverá atingir a cotação de R$ 1.350,00 ou mais.
16) O percentual de corretagem cobrado, para o lote negociado, é de 0,245%.
32) Quando seu lote de ações atingiu a cotação de R$ 1.250,00, o investidor o vendeu, gastando mais R$ 25,00 com despesas operacionais. Assim, com as despesas efetuadas com a compra e a venda, seu ganho foi de R$ 200,00.

0105Q5 - Determinada loja de fotografias de um shopping revela, em média, 20 rolos de filme fotográfico por dia, inclusive nos sábados e domingos. No mês de novembro, a média foi mantida até o dia 25. Do dia 26 ao dia 30, o número de rolos trazidos à loja obedeceu a tabela a seguir. Calcule a média diária de filmes revelados em novembro.

Dia	Número de rolos
26	28
27	27
28	26
29	25
30	24

0105Q6 - No quadrado abaixo, multiplicando-se os três números de qualquer linha, coluna ou diagonal, o resultado é sempre o mesmo. Então, assinale o que for correto.

– 12	– 1	a
b	6	c
d	e	– 3

01) c = – 4

02) e = – 36

04) a + b = 9

08) b – a – c = – 23

16) d – c = – 2

32) b + e = – 27

0106Q7 - O *byte* é a unidade de medida das informações armazenadas em computadores. Seus múltiplos são:

kilobyte = 2^{10} bytes

megabyte = 2^{10} kilobytes

gigabyte = 2^{10} megabytes

Sobre *byte*, assinale o que for correto.

01) Um arquivo de 2 kilobytes equivale a 2^{20} bytes.
02) Um kilobyte equivale a 2^{100} megabytes.
04) Um arquivo de 8 gigabytes equivale a 2^{23} kilobytes.
08) Um arquivo de 2 megabytes equivale a 2^{21} bytes.
16) Um gigabyte equivale a 2^{30} bytes.
32) Um arquivo de 4 megabytes equivale a 2^{20} gigabytes

0106Q8 - Se $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$, $x + y = a$ e $x - y = b$, assinale o que for correto.

01) $3a = 8y$
02) $b = \frac{3y}{2}$
04) $5x = 2b$
08) x equivale a 60% de y
16) Se $b = 20$, então $x > y$
32) Para $a = 40$, x é um número natural.

0106Q9 - Em 30 dias uma frota de 32 táxis consome 57 600 litros de combustível. Por problemas mecânicos, 2 táxis foram retirados da frota. Para quantos dias serão suficientes os 93 600 litros de combustível que a frota tem em estoque, supondo que os táxis restantes continuem rodando normalmente?

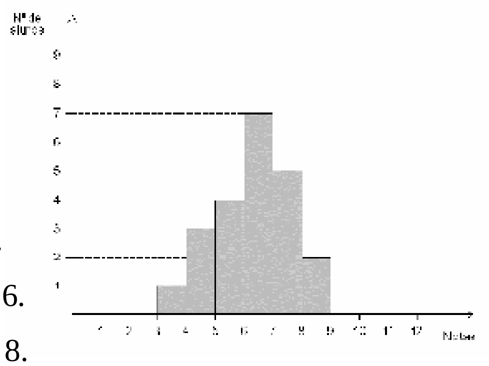
0106Q10 - Seja uma circunferência de raio igual a 10 cm, na qual um hexágono regular está inscrito e um quadrado está circunscrito. Assinale o que for correto.

01) A diagonal do quadrado vale 20 $\sqrt{2}$ cm.
02) O perímetro do hexágono é 60 cm.
04) O apótema do quadrado vale 10 cm.
08) O apótema do hexágono mede 5 $\sqrt{3}$ cm.
16) A área do quadrado vale 400 cm^2.
32) O hexágono tem 9 diagonais.

0106Q11 - Em relação a um paralelepípedo retângulo de dimensões 8 cm, 10 cm e 15 cm, assinalem o que for correto.

01) A soma de todas as suas arestas é 132 cm.
02) Se todas as arestas tiverem um acréscimo de 10% em suas medidas, o volume sofrerá um acréscimo de 30%.
04) Seu volume é 1200 cm^3.
08) A diagonal da face que tem as duas menores dimensões vale 2 41 cm.
16) A média aritmética das suas três dimensões vale 11 cm.
32) Sua área total é 7 00 cm^2

0106Q12 - As notas obtidas por uma turma em Matemática foram agrupadas em classes de 3 (inclusive) a 4(exclusive), de 4(inclusive) a 5(exclusive), e assim por diante, resultando no seguinte gráfico (histograma):
Analisando esse histograma, assinale o que for correto.



01) Essa turma tem 22 alunos.
02) Um dos alunos obteve nota maior que 9.
04) A maior nota obtida na prova foi 7.
08) Mais de 50% dos alunos obtiveram nota menor que 7.
16) Menos de 40% dos alunos obtiveram nota menor que 6.
32) Exatamente 2 alunos obtiveram nota maior ou igual a 8.

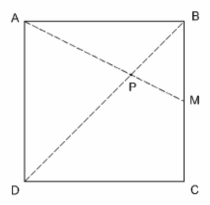
0107Q13 - Considerando os números inteiros a, b e c, tais que $a < b < 0$, assinale o que for correto.

01) $a^2.b^3 > 0$
02) $a.b > 0$
04) $a – b > 0$
08) $b – a > 0$
16) $a + b > 0$
32) $(a + b).a > 0$

0107Q14 - Assinale o que for correto.
01) A planificação da superfície lateral de um cilindro circular reto é um retângulo.
02) Uma pirâmide pentagonal tem 10 arestas.
04) Uma esfera de 5 cm de raio está inscrita em um cubo. Então a aresta do cubo mede 10 cm.
08) A planificação da superfície lateral de um cone circular reto é um triângulo.
16) Se uma esfera está inscrita em um cilindro, o seu diâmetro tem a mesma altura do cilindro.
32) Um prisma hexagonal tem 6 faces.

0107Q15 - Uma aplicação financeira com capitalização mensal rende juros compostos de 1,5% ao mês. Considerando-se uma aplicação de R$ 200,00, assinale o que for correto.
01) O valor inicial aplicado, ao final de um mês, alcançará o valor de R$ 203,00.
02) Após 2 meses, se não houver nenhuma retirada, o valor total acumulado será superior a R$ 206,00.
04) Se ao final de cada um dos 3 primeiros meses da aplicação forem retirados R$ 3,00, no final do quarto mês restará o valor de R$ 203,00.
08) Após 5 meses, se não houver nenhuma retirada, o valor total acumulado será superior a R$ 215,00.
16) Após 6 meses, se não houver nenhuma retirada, o valor total acumulado será menor que R$ 218,00.
32) Após 3 meses, se não houver nenhuma retirada, o capital inicial terá sofrido um acréscimo superior a 4,5%.

0107Q16 - Considerando o quadrado ABCD da figura abaixo, que tem 20 cm de lado e M localizado no ponto médio do lado BC, assinale o que for correto.



01) A diagonal BD mede mais que 30 cm.
02) O quadrilátero DPMC é um trapézio.
04) O quadrilátero AMCD é um trapézio.
08) A área do triângulo ABM é 120 cm^2.
16) O segmento AM mede 105 cm.
32) Os triângulos APD e BPM são semelhantes.

0107Q17 - A tabela abaixo representa a produção e as vendas de três montadoras de automóveis, no mês de novembro.

Montadora	Unidades produzidas	Porcentagem vendida da produção
A	4000	80%
B	5000	60%
C	3000	X%

Sabendo-se que no mesmo mês as três montadoras venderam juntas 8000 dos carros produzidos, assinale o que for correto.

01) Escolhendo-se ao acaso um dos carros vendidos, a probabilidade de ser da montadora C é de 60%.
02) A montadora B produziu mais de 40% do total produzido pelas três montadoras.
04) A montadora A vendeu mais de 3000 unidades.
08) Escolhendo-se ao acaso um dos carros produzidos, a probabilidade de ser da montadora C é de 25%.

16) As montadoras B e C venderam a mesma porcentagem da sua respectiva produção.

32) A montadora B produziu menos de $\frac{2}{3}$ da A e C juntas.

0107Q18 - Um caminhão percorre um trecho de 25 km em 20 minutos. Um automóvel faz o mesmo percurso em 15 minutos. Sabendo-se que ambos têm velocidade constante, assinale o que for correto.

01) A velocidade do automóvel é de 100 km/h.

02) Se o caminhão reduzir a sua velocidade em 20%, o trecho será percorrido em 25 minutos.

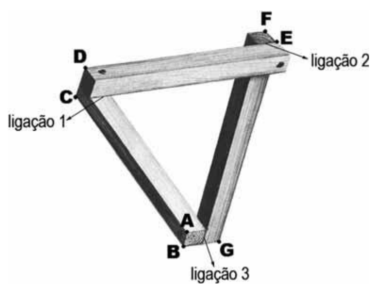
04) O automóvel é mais veloz que o caminhão.

08) O caminhão deve partir 5 minutos antes do automóvel para que cheguem juntos ao final do trecho.

16) Se a velocidade do automóvel for de 120 km/h, o mesmo trecho será percorrido em menos de 13 minutos.

32) A velocidade do caminhão corresponde a $\frac{3}{4}$ da velocidade do automóvel.

0205Q19 - A base da gravura Waterfall é a utilização do "Triângulo Impossível" desenvolvido por Roger Penrose e representado a seguir.



Essa construção consiste de traves retangulares que se sobrepõem perpendicularmente. Seguindo com os olhos todas as partes dessa construção, não se pode descobrir um único erro. No entanto, é um todo que só tem consistência como desenho. Os três ângulos retos são completamente normais, mas estão ligados uns aos outros de uma forma impossível, de modo a formarem uma espécie de triângulo, cuja soma dos ângulos perfaz 270º. Considerando possíveis apenas as ligações 1 e 2, e, portanto, impossível a ligação 3, considere que na figura anterior os pontos A, B e C pertençam a um plano α; C, D e E pertençam a um plano β; e que E, F e G pertençam a um plano λ. Em relação a esses planos, é correto afirmar:

a) α é paralelo a λ.
b) α é perpendicular a λ.
c) β é paralelo a α.
d) β é paralelo a λ.
e) α e λ possuem uma reta em comum.

0205Q20 - Ainda utilizando o "triângulo impossível" desenvolvido por Roger Penrose e admitindo possíveis apenas às ligações 1 e 2, e, portanto, impossível a ligação 3, analise as figuras I e II a seguir.

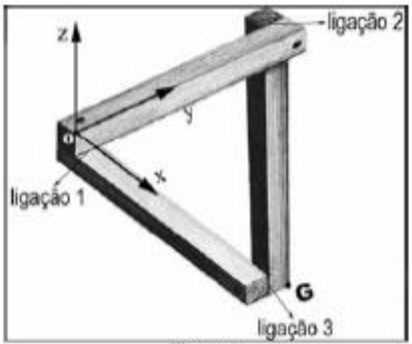


Figura I

Figura II

Considere o ponto O a origem O=(0,0,0) dos eixos coordenados (x , y , z), como indicado na figura I e que cada uma das três barras possui dimensões 4 x 0,5 x 0,5 (figura II), quais são as coordenadas do ponto G?

a) (-0,5, -4,0, 3,5)
b) (-0,5, 4,0, -4,0)
c) (1,0, 4,0, - 4,0)
d) (3,5, 1,0, - 1,0)
e) (4,0, - 0,5, - 4,0)

0205Q2 - Uma forma de medir o percentual de gordura corporal é calcular o índice de Massa Corporal (IMC), obtido pela divisão do “peso” (massa corporal, em kg) pela altura (em m) elevado ao quadrado, com resultado expresso em kg/m^2. O quadro a seguir, elaborado pela Organização Mundial da Saúde (OMS), apresenta a classificação da obesidade por graus progressivamente maiores por morbimortalidade utilizando o IMC.

IMC (kg/m^2)	Denominação	Grau de Obesidade
18,5 - 24,9	Peso saudável	0
25 - 29,9	Pré-obeso	I
30 - 39,9	Obeso	II
40	Obeso grave	III

Disponível em <saudeemmovimento.com.br>. Acesso em: 30 ago.2004

Considere um indivíduo de 1,60m de altura e “peso” de 89,6 kg. Com base nesses dados e nas informações fornecidas pelo quadro, considere as afirmativas a seguir:

I. Se esse indivíduo crescer e mantiver o mesmo “peso” (massa corporal), terá seu IMC reduzido.

II. Esse indivíduo é considerado pré-obeso.

III. Se esse indivíduo engordar 18 kg será considerado obeso grave.

IV. Se esse indivíduo emagrecer 30 kg terá peso saudável.

Estão corretas apenas as afirmativas:

a) I e II.

b) I e III.

c) II e IV

d) I, II e IV

e) II, III e IV.

0205Q22 - Em um restaurante de comida a quilo, são oferecidos os seguintes alimentos:

Grupo I	Grupo II	Grupo III	Grupo IV
Alface	Arroz	Carne bovina	Banana
Cenoura	Batata	Frango	Maçã
Beterraba	Mandioca	Peixe	Mamão
Tomate	Macarrão	Ovos	Laranja
Rúcula	Lasanha	Soja	Abacaxi
			Melão
			Melancia

Um nutricionista recomendou a um cliente desse restaurante que em sua dieta alimentar fossem consumidos, por refeição, dois alimentos do Grupo I, dois do Grupo II, um do Grupo III e um do Grupo IV. De quantos modos diferentes esse indivíduo pode compor sua refeição, seguindo esta dieta?

a) 32
b) 875
c) 3 500
d) 5 400
e) 14 000

0205Q23 - De acordo com a Agência Nacional de Petróleo (ANP) 11% dos combustíveis estão adulterados no Estado de São Paulo. Há 8300 postos no Estado. Cada um vende, em média, 170 mil litros de combustíveis por mês. Disso, 60% é gasolina. (Adaptado de: *O Estado de São Paulo,* São Paulo, 27 jun.2004. p. B. 4).

Com base no texto é correto afirmar que, em média, a quantidade de gasolina adulterada vendida por mês no Estado de São Paulo é de:

a) 26 928 mil litros.
b) 54 780 mil litros.
c) 75 324 mil litros.
d) 84 634 mil litros.
e) 93 126 mil litros.

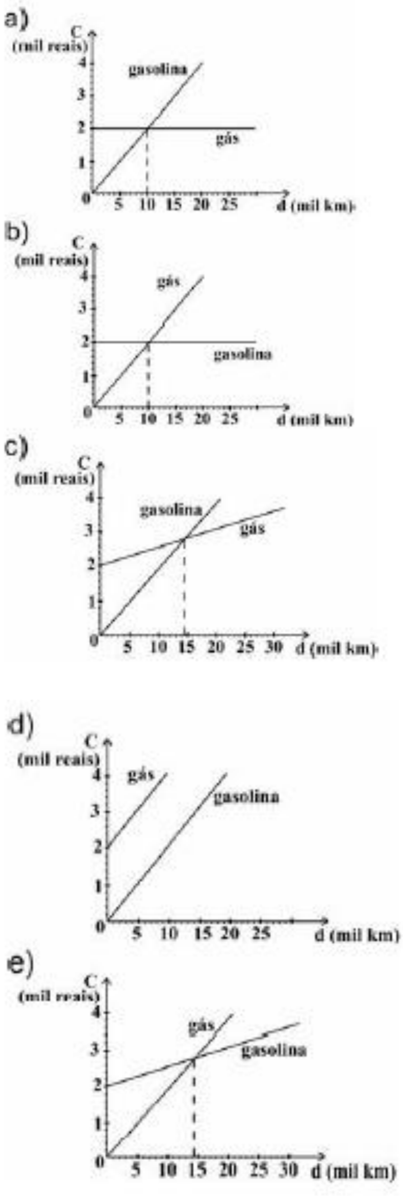
0205Q24 - Analise o gráfico a seguir:

Fonte: *O Estado de São Paulo*, São Paulo, 27 jun. 2004. p. B 4.

Levando-se em consideração a produção de 1999 e de 2003, assinale a alternativa que apresenta uma função que determina as projeções para a produção de solvente dos próximos anos.

a) y= 299,2. (t – 1999) + 481
b) y= 74,8 . (t- 1999) + 481
c) y= 74,8 . (t- 1999) – 35 978,8
d) y= 0,013 . (t- 1999) + 481
e) y= 0,013. (t- 1999) – 35978,8

0205Q25 - Um usuário pagou R$ 2.000,00 para adaptar o motor do seu carro, originalmente movido à gasolina, para funcionar também com gás natural. Considerando que este carro faz, em média, 10 km por litro de gasolina., cujo preço é de R$ 2,00 o litro, e 15 km por metro cúbico de gás, cujo preço é de R$ 0,90 o metro cúbico, assinale a alternativa em que o gráfico descreve corretamente os custos totais (C) em função da distância percorrida (d).



0206Q26 - Um camponês adquire um moinho ao preço de R$ 860,00. Com o passar do tempo, ocorre uma depreciação linear no preço desse equipamento. Considere que, em 6 anos, o preço do moinho será de R$ 500,00. Com base nessas informações, é correto afirmar:

a) Em três anos, o moinho valerá 50% do preço de compra.

b) Em nove anos, o preço do moinho será um múltiplo de nove.

c) É necessário um investimento maior que R$ 450,00 para comprar esse equipamento após sete anos.

d) Serão necessários 10 anos para que o valor desse equipamento seja inferior a R$ 200,00.

e) O moinho terá valor de venda ainda que tenha decorrido 13 anos.

0206Q27 - Considerando o universo de 61,5 milhões de brasileiras com idade igual ou superior a 15 anos, o quadro a seguir fornece dados sobre alguns tipos de violência sofridos (física, psicológica, sexual).

Tipo de violência contra as mulheres	Sofreram alguma vez (milhões de mulheres)
Física	20,3
Psicológica	16,6
Sexual	8,0
Física, psicológica e sexual	5,0

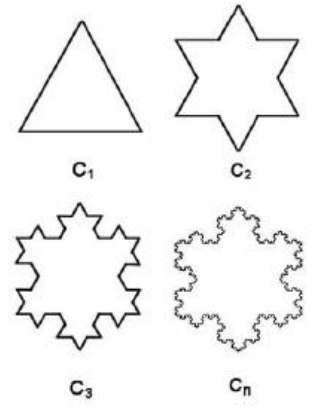
Adaptado de: A mulher brasileira no espaço público e privado. São Paulo: Perseu Abramo, 2004.

Com base no texto e no quadro anterior, é correto afirmar:

a) Menos de 20% das mulheres sofreram violência psicológica.
b) Aproximadamente 42% das mulheres não foram agredidas fisicamente.
c) Mais de 30% das mulheres já sofreram algum tipo de violência.
d) Aproximadamente 25% das mulheres já foram agredidas sexualmente.
e) Mais de 10% das mulheres já sofreram, simultaneamente, esses três tipos de violência.

0206Q28 - Uma das propriedades dos Fractais é a autosimilaridade, isto é, a repetição do todo em cada parte. "Floco de neve", (curva n c) de Helge Von Koch – 1904, é uma curva matemática que é um fractal primitivo, podendo ser construído sem o auxílio de um computador. Para a construção desse fractal devem ser seguidos os seguintes passos:

1. Tome um triângulo eqüilátero cujo lado tem uma unidade de comprimento e chame-o de curva c_1.
2. Divida cada lado desse triângulo em três partes iguais e, tomando como base o terço médio de cada lado, construa um novo triângulo eqüilátero apontando para fora, (apague as partes comuns aos triângulos antigos), a nova curva é chamada c_2 .
3. Repita o processo em c_2 , para obter c_3 .
4. Repetindo o processo n vezes, obtemos a curva c_n .



Sejam *n* p_1 , p_2 , p_3 ,..., p_n os perímetros das curvas c_1, c_2 , c_3 ,...,c_n , respectivamente. Com base nas imagens e nos conhecimentos sobre o tema, é correto afirmar:

a) $p_1 > p_2 > p_3$

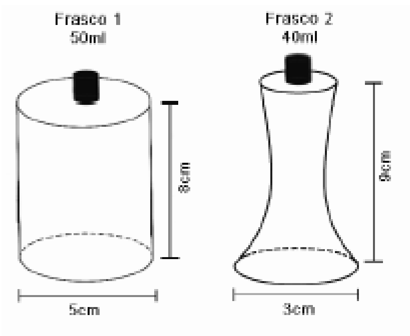
b) O perímetro p_n é inversamente proporcional a *n*

c) As curvas são simétricas em relação ao eixo vertical central de cada uma delas.

d) ½ p_1 = 1/3 p_2

e) A curva c_5 é constituída por 344 lados.

Analise as imagens a seguir e responda às questões 29 e 30:

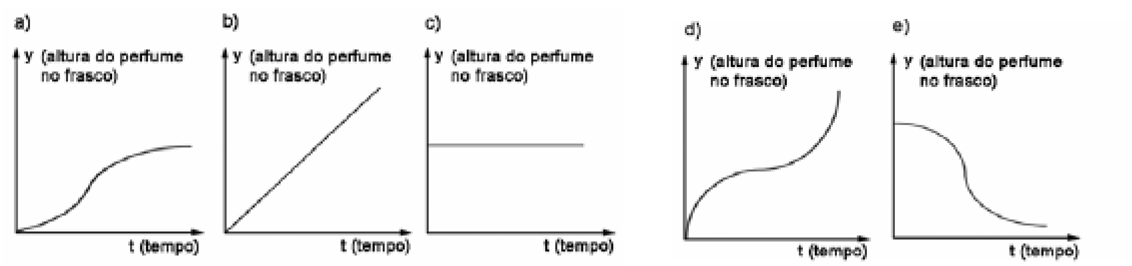


0206Q29 - Uma empresa pretende lançar um perfume e deve decidir qual, dentre as duas opções de frascos representadas nas imagens, é a melhor para a armazenagem. A prateleira para estoque é retangular com 1 m de comprimento, 5,5 cm de profundidade e tem dez divisões de 10 cm de altura cada. Os frascos devem ser armazenados com a abertura voltada para cima e estar inteiramente contidos na prateleira. O preço de venda ao consumidor (pc) é

R$ 100,00 por frasco, independentemente do tipo de frasco, e cada mililitro do produto custa à empresa R$ 1,00. O custo do produto (cp) depende da capacidade de cada frasco. O lucro da empresa é dado por: L = (pc).(ca) – (cp).(ca), onde (ca) é a capacidade máxima de armazenamento. Com base nessas informações, é correto afirmar que o frasco que dará maior lucro para a essa empresa é:

a) Frasco 1 com lucro de R$ 10.600,00.
b) Frasco 1 com lucro de R$ 15.200,00.
c) Frasco 1 com lucro de R$ 20.400,00.
d) Frasco 2 com lucro de R$ 19.800,00.
e) Frasco 2 com lucro de R$ 33.100,00.

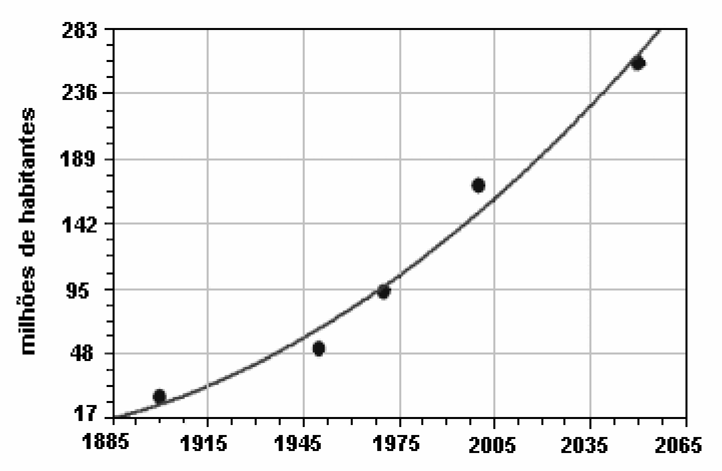
0206Q30 - Considere que um perfume está sendo colocado no frasco 2, e que, a cada unidade de tempo a quantidade colocada é constante. A função y= f(t) fornece a altura do perfume no frasco em função do tempo t, até que o mesmo esteja completamente cheio.Assinale a alternativa cujo gráfico representa a função y= f(t).



0207Q31 - A população do Brasil, em 1900, era de 17.438.434. Em cinqüenta anos a população passou a ser 51.944.397. Em 1970, quando o Brasil ganhou o tricampeonato, e toda a torcida brasileira cantava "90 milhões em ação", isto correspondia a 93.139.037 habitantes. Em 2000, a população já contava com 169.590.693 pessoas. A previsão para 2050 é que a população será de 259.800.000 brasileiros.

Fonte: http://www.ibge.gov.br/ibgeteen/pesquisas/ demograficas.html - acessada em 20/08/2006.

No gráfico seguinte, são apresentados os pontos que representam a população em cada um destes anos e esses pontos são aproximados por uma função.



Com base na figura, considere as afirmações sobre a função que aproxima esses pontos:

I. A função pode ser a exponencial: $y = aeb^x$, com a>0 e b>0.

II. A função pode ser a polinomial de grau 3: $y= ax^3+bx^2+cx+d$, com a>0.

III. A função pode ser a polinomial de grau 2: $y= ax^2+bx+c$, com a<0.

IV. A função pode ser a logarítmica: y=a log (bx), com a<0 e b>0.

Estão corretas apenas as afirmativas:

a) I e III.

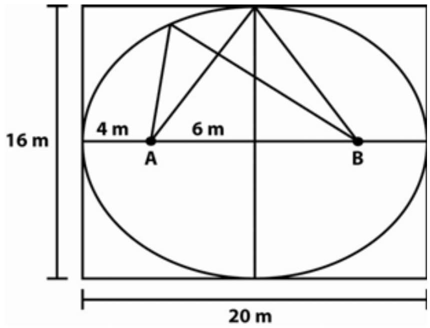
b) II e IV.

c) I e II.

d) III e IV.

e) I e IV.

0207Q32 - Existem pessoas que nascem com problemas de saúde relacionados ao consumo de leite de vaca. A pequena Laura, filha do Sr. Antônio nasceu com este problema. Para solucioná-lo, o Sr Antônio adquiriu uma cabra que pasta em um campo retangular medindo 20 m de comprimento e 16 m de largura. Acontece que as cabras comem tudo o que aparece à sua frente, invadindo hortas, jardins e chácaras vizinhas. O Sr. Antônio resolveu amarrar a cabra em uma corda presa pelas extremidades nos pontos A e B que estão 12 m afastados um do outro. A cabra tem uma argola na coleira por onde é passada a corda, de tal modo que ela possa deslizar livremente por toda a extensão da corda. Observe a figura e responda a questão a seguir.



Qual deve ser o comprimento da corda para que a cabra possa pastar na maior área possível, dentro do campo retangular?

a) 10 m.
b) 15 m.
c) 20 m.
d) 25 m.
e) 30 m.

0207Q33 - Com a crise nas penitenciárias brasileiras decorrentes das rebeliões simultâneas em várias instituições, houve discussões sobre o uso de bloqueadores de celulares. “O princípio do bloqueio é gerar um sinal, por meio de uma antena instalada internamente no presídio, que interfere na freqüência da rede celular e que seja mais forte do que o sinal da operadora” www.idgnow.com.br em 16/05/06. (Acesso em 20/07/2006)
A dificuldade, porém, está em evitar que o bloqueio extrapole a área do presídio. Supondo um determinado presídio inteiramente contido em um círculo com raio de 500 m, no qual a antena para o bloqueio esteja instalada no centro deste círculo e o bloqueio de celulares extrapole este círculo em 10% do raio, assinale qual a alternativa que corresponde à área indevidamente bloqueada fora deste círculo:

a) $52.000\pi\ m^2$
b) $52.500\pi\ m^2$
c) $53.000\pi\ m^2$
d) $53.500\pi\ m^2$
e) $54.000\pi\ m^2$

0207Q34 - Um automóvel zero km é comprado por R$ 32.000,00. Ao final de cada ano, seu valor diminui 10% em função da depreciação do bem. O valor aproximado do automóvel, após seis anos, é de:

a) R$ 15.006,00.
b) R$ 19.006,00.
c) R$ 16.006,00.
d) R$ 12.800,00.
e) R$ 17.006,00.

0207Q35 - O “Sudoku” é um jogo de desafio lógico inventado pelo Matemático Leonhard Euler (1707- 1783). Na década de 70, este jogo foi redescoberto pelos japoneses que o rebatizaram como Sudoku, palavra com o significado “número sozinho”. É jogado em um quadro com 9 por 9 quadrados, que é subdividido em 9 submalhas de 3 por 3 quadrados, denominados quadrantes. O jogador deve preencher o quadro maior de forma que todos os espaços em branco contenham números de 1 a 9. Os algarismos não podem se repetir na mesma coluna, linha ou quadrante.
Fonte: LEÃO, S. Lógica e estratégia. Folha de Londrina, Especial 14, 17 de setembro de 2006.

Com base nessas informações, o algarismo a ser colocado na casa marcada com □ no quadro a seguir é:

4				7			5	6
						9		2
6								
3				6	9			
		5	8	○	1	7		
8			7		4			
					3		2	1
		2						
1	6			2				7

a) 2
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

0207Q36 - Uma cadeia de restaurantes estima que a demanda de arroz, a cada 30 dias, seja de 600 kg. Desde que começou as atividades, a empresa mantém um estoque mínimo de 50 kg como reserva.Considerando que todos os dias é consumida a mesma quantidade de arroz nos restaurantes; que o estoque geral é reposto a cada 10 dias no começo de cada período e que a função A= A(t), com $0 \le t \le 30$ expressa a quantidade de arroz em estoque em cada dia t, então a função A é dada por:

a) $A(t) = \begin{cases} 200-20t & se \quad 0 \le t < 10 \\ 400-20t & se \quad 10 \le t < 20 \\ 600-20t & se \quad 20 \le t \le 30 \end{cases}$

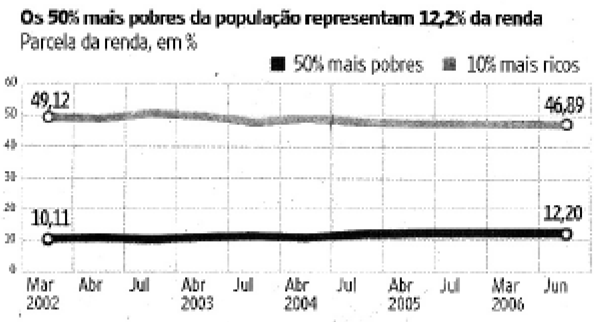
b) $A(t) = \begin{cases} 20t+250 & se \quad 0 \le t < 10 \\ 20t+450 & se \quad 10 \le t \le 20 \\ 20t+650 & se \quad 20 < t \le 30 \end{cases}$

c) $A(t) = \begin{cases} 20t-200 & se \quad 0 \le t < 10 \\ 20t-400 & se \quad 10 \le t \le 20 \\ 20t-600 & se \quad 20 < t \le 30 \end{cases}$

d) $A(t) = \begin{cases} 20t & se \quad 0 \le t < 10 \\ 20t-250 & se \quad 10 \le t \le 20 \\ 20t-450 & se \quad 20 < t \le 30 \end{cases}$

e) $A(t) = \begin{cases} 250-20t & se \quad 0 \le t < 10 \\ 450-20t & se \quad 10 \le t < 20 \\ 650-20t & se \quad 20 \le t \le 30 \end{cases}$

0207Q37 - Observe o gráfico abaixo:



Fonte: Folha de São Paulo, São Paulo, 23 de ago. 2006. p. B1

Com base nas informações observadas, considere as afirmativas.

I. Em junho de 2006, a renda dos 50% mais pobres era aproximadamente 3,8 vezes maior que a renda dos 10% mais ricos.

II. Em março de 2002, a renda dos 10% mais ricos era aproximadamente 4,86 vezes maior que a renda dos 50% mais pobres.

III. Em março de 2002, a renda dos 50% mais pobres era 20,6% da renda dos 10% mais ricos. Em junho de 2006, passou a 26,0%.

IV. Em junho de 2006, a renda dos mais ricos, era aproximadamente R$ 34,69 maior do que a renda dos mais pobres.

Estão corretas apenas as afirmativas:

a) I e II.

b) I e III.

c) II e III.

d) I, II e III.

e) II, III e IV.

0306Q38 - Um casal deseja ter três filhos. Supondo que nascerá um único filho por gestação, a probabilidade de pelo menos um desses filhos ser do sexo masculino é :

a) 1/2.

b) 1/4.

c) 1/8.

d) 3/8.

e) 7/8.

0306Q39 - Um edifício projeta no solo uma sombra de 15 m de comprimento no instante em que um muro de 200 cm projeta no solo uma sombra de 4 m. Considerando que o muro e o edifício são perpendiculares ao solo plano, pode-se afirmar que a altura do edifício é:

A) 7.500 cm.

B) 750 cm.

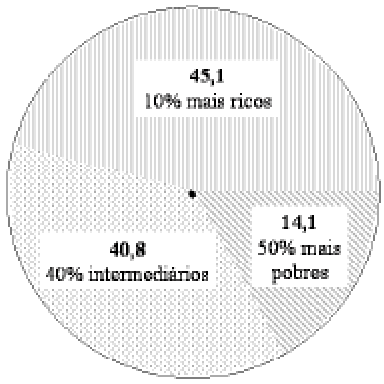
C) 3.000 cm.

D) 300 cm.

E) 2.500 cm.

0306Q40 - "As diferenças na apropriação da renda ainda são drásticas. Em 2005, os 50% mais pobres respondiam por 14,1% da renda do país. Já os 10% mais ricos representavam 45,1% da renda." (*Folha de São Paulo*, 23/09/2006, p.89.)

Participação da população na renda total em 2005, em %



Considerando o enunciado e o gráfico acima, assinale a alternativa correta.

a) Metade da população do país absorve 14,1% da renda, enquanto 45,1% da renda ficam em poder de 10% da população.
b) A renda dos 10% mais ricos corresponde exatamente a 10 vezes a renda dos intermediários e a 50 vezes a renda dos mais pobres.
c) A renda a que se refere o texto corresponde à somatória dos rendimentos de ricos, intermediários e pobres durante uma jornada de trabalho.
d) Levando-se em conta os números apresentados, a distribuição da renda e da riqueza do país pode ser considerada bastante democrática e reflete os padrões internacionais.
e) Os ângulos centrais dos três setores circulares assinalados no gráfico medem exatamente 60^o, 140^o e 160^o.

0306Q41 - A estatística teve início no século XVII com uma série de relações de taxas de mortalidade realizadas em Londres por John Gaut com o auxílio de William Petty (um dos fundadores da Economia Política Moderna). Os estudos estatísticos adquiriram maior consistência matemática no século XIX com as contribuições do belga Lambert Quételet, interessado nas questões sociais levantadas pela sociologia de Augusto Comte e do físico e matemático francês Simeón Poisson, que desenvolveu estudos estatísticos para desvendar a probabilidade de ocorrência de fenômenos físicos. A respeito da estatística, assinale a alternativa correta.

a) Considerando dois eventos *A* e *B* quaisquer de um mesmo espaço amostral *S*, temos que a probabilidade da união de *A* e *B* é igual à soma das probabilidades de cada evento.
b) A média aritmética de um conjunto *A* de valores observados é o quociente da soma desses valores pela quantidade de valores distintos de *A*.
c) Considerando dois eventos independentes *A* e *B* de um mesmo espaço amostral *S*, temos que a probabilidade da interseção de *A* e *B* é igual ao produto das probabilidades de cada evento.
d) As sociedades capitalistas rejeitam a idéia de planejamento econômico e, por essa razão, deram pouco valor aos estudos estatísticos.
e) A estatística só foi valorizada como ferramenta indispensável à tomada de decisões político administrativas com o advento da União das Repúblicas Socialistas Soviéticas, que inaugurou a era do planejamento estatal das atividades econômicas.

0306Q42 - Um dos desdobramentos do Império de Alexandre, o grande, foi a fundação de um museu e de uma grande biblioteca em Alexandria, cidade do Egito que se tornou, durante cerca de sete séculos, um centro avançado da cultura helenística, surgida da fusão da cultura grega com as culturas orientais. Um dos grandes nomes da ciência grega atraído para Alexandria foi Euclides, autor de *Elementos*, obra que contém, entre outras coisas, uma formalização do pensamento geométrico que foi a base do ensino da geometria no Ocidente durante mais de dois mil anos. A respeito do Helenismo e da Geometria Euclidiana, assinale a alternativa incorreta.

a) Um dos postulados de Euclides, denominado postulado das paralelas, determina que dada uma reta *r* e um ponto *A* não pertencente a *r*, existe uma e somente uma reta que passa por *A* e é paralela a *r*.
b) Um dos teoremas da Geometria Euclidiana afirma que “um feixe de retas paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos que são proporcionais”.
c) Euclides demonstrou na sua obra *Elementos*, que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º.

d) Alexandre, o grande, nasceu na Macedônia e foi educado pelo filósofo Aristóteles, de quem assimilou a mais refinada cultura grega. Partindo da Grécia conquistada por seu pai, Felipe II da Macedônia, Alexandre deu prosseguimento às conquistas e estendeu seus domínios até as margens do rio Indo, na Índia.

e) As conquistas de Alexandre no Oriente tiveram grande significado político para a Grécia, pois as sofisticadas sociedades orientais forneceram novas idéias políticas que ajudaram a aperfeiçoar e a fortalecer a democracia ateniense.

0307Q43 - Suponha que um criador de avestruz tenha iniciado seu trabalho em 2003 com 50 aves em um terreno de 10.000 m^2. A tabela a seguir contém os dados dessa criação, no mesmo terreno, entre os anos de 2003 e 2007, sendo que alguns dados foram omitidos.

Ano	Número	Nascimentos	Mortes	Imigrantes	Emigrados
2003	50	6	1	?	0
2004	57	10	?	0	2
2005	65	?	1	0	0
2006	80	20	3	2	?
2007	95				

Considerando as informações e os dados acima, assinale a alternativa correta.

a) A densidade populacional no início do ano de 2007 foi de 0,95 avestruz /$m^{2.}$

b) O número de mortes em 2004 foi o dobro do que em 2005.

c) Em 2003, imigraram 3 indivíduos.

d) Em 2005, nasceram 16 indivíduos.

e) Em 2006, 5 indivíduos emigraram.

0307Q44 - Quanto tempo um móvel viajando com uma velocidade constante de 15 km/h levará para percorrer um trajeto, em linha reta, correspondente a 3 cm, em uma carta topográfica cuja escala é 1:100.000?

a) 15 minutos

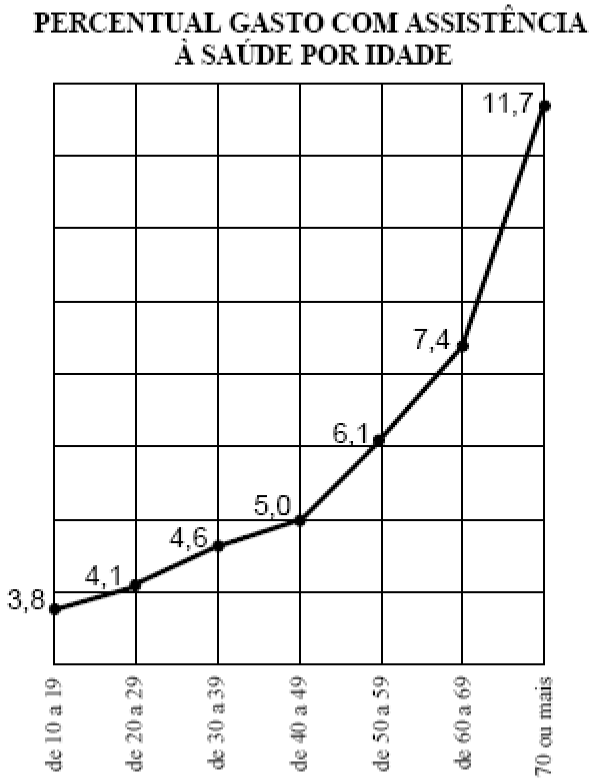
b) 45 minutos

c) 10 minutos

d) 30 minutos

e) 12 minutos

0307Q45 - O gráfico a seguir indica o percentual de gasto com assistência a saúde, em função da faixa etária da população.



Fonte: *Folha de São Paulo*, em 30/08/07, p. C1.

Assinale a alternativa correta:

a)Percentualmente, a população de 10 a 19 anos gasta com saúde metade do que gasta a população da faixa dos 50 a 59 anos.

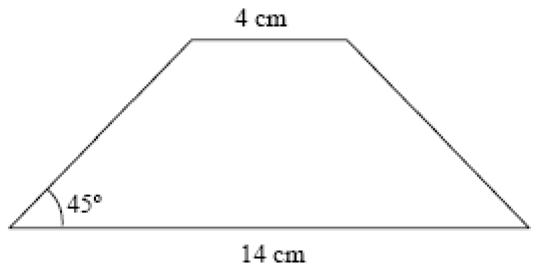
b) Os gastos com saúde crescem em progressão aritmética dos 10 aos 49 anos, passando a crescer em progressão geométrica, a partir dos 50 anos de idade.

c) Percentualmente, os idosos na faixa de 70 anos ou mais gastam com saúde um pouco mais que o triplo do que os jovens na faixa de 10 a 19 anos gastam.

d) Os pontos referentes às faixas etárias de 40 a 49, de 50 a 59 e de 60 a 69 são colineares.

e) A média (aritmética) e a mediana dos percentuais gastos com assistência à saúde são iguais.

0307Q46 - Uma película de cromo é depositada por evaporação, de maneira uniforme, sobre uma placa de vidro que possui o formato de um trapézio isósceles, conforme a figura a seguir. Considerando que a massa de Cr depositada é de 0,357 g, qual é a espessura (altura) aproximada da película depositada?(Dados: densidade do cromo = 7,14 g.cm^{-3})



a) 1/ 900 cm
b) 1/ 1800 cm
c) 1/ 90 cm
d) 1/ 180 cm
e) 1/ 450 cm

APÊNDICE B – Questões Apontadas pelos Especialistas

QUESTÕES	E_1	E_2	E_3	E_4
0105Q1	X	X	X	
0105Q2	X			
0105Q4	X			
0105Q5	X		X	
0105Q6	X	X	X	X
0106Q7	X		X	X
0106Q8	X	X		
0106Q9	X		X	X
0107Q13	X	X	X	
0207Q31			X	
0207Q35				X

E1- Especialista 1

E2- Especialista 2

E3- Especialista 3

E4- Especialista 4

E5- Especialista 5

APÊNDICE C – Prova Aplicada

Universidade Estadual de Londrina

Departamento de Matemática - CCE

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Área: Educação Matemática

INSTRUÇÕES

- Leia atenciosamente cada questão.
- Use apenas caneta para resolver cada questão.
- Na folha em anexo, resolva todas as questões da forma mais completa possível, fazendo cálculos, desenhos, esquemas, ou explicando, com suas palavras o que fez para resolver a questão.
- Confira as resoluções antes de entregar a prova.
- Nesta prova você encontrará questões de alternativas múltiplas e questões abertas. As questões de alternativas múltiplas são apresentadas de duas maneiras distintas: na primeira delas são apresentadas seis alternativas, indicadas com os números 01, 02, 04, 08, 16 e 32. A resposta correta será a soma dos números correspondentes às alternativas verdadeiras. O valor numérico do somatório encontrado, obrigatoriamente, terá dois algarismos. Na segunda maneira são apresentadas seis alternativas indicadas como as letras *a, b, c, d* e *e* das quais apenas uma delas é correta. As questões abertas admitem respostas em valores numéricos inteiros compreendidos entre 00 e 99, incluindo esses dois valores.

1 - De acordo com a tabela, com 3 colheres de pó de café e 0,5 litro de água, são feitos 8 cafezinhos. Com base nessas informações, calcule os valores *de* x, y, r e s da tabela e assinale o que for correto.

01) $\frac{r}{s}$ é um número natural.
02) r é um múltiplo de 4.
04) $x > s$
08) $x + r$ é um número primo.
16) x é um divisor de r.
32) y é um número racional.

CAFEZINHOS	COLHERES DE PÓ DE CAFÉ	ÁGUA (ℓ)
8	3	0,5
x	4,5	y
r	s	1,5

2 - Determinada loja de fotografias de um shopping revela, em média, 20 rolos de filme fotográfico por dia, inclusive nos sábados e domingos. No mês de novembro, a média foi mantida até o dia 25. Do dia 26 ao dia 30, o número de rolos trazidos à loja obedeceu a tabela a seguir. Calcule a média diária de filmes revelados em novembro.

Dia	Número de rolos
26	28
27	27
28	26
29	25
30	24

3 - No quadrado abaixo, multiplicando-se os três números de qualquer linha, coluna ou diagonal, o resultado é sempre o mesmo. Então, assinale o que for correto.

01) c = – 4
02) e = – 36
04) a + b = 9
08) b – a – c = – 23
16) d – c = – 2
32) b + e = – 27

– 12	– 1	a
b	6	c
d	e	– 3

4 - O *byte* é a unidade de medida das informações armazenadas em computadores. Seus múltiplos são:

kilobyte = 2^{10} bytes

megabyte = 2^{10} kilobytes

gigabyte = 2^{10} megabytes

Sobre *byte*, assinale o que for correto.

01) Um arquivo de 2 kilobytes equivale a 2^{20} bytes.

02) Um kilobyte equivale a 2^{100} megabytes.

04) Um arquivo de 8 gigabytes equivale a 2^{23} kilobytes.

08) Um arquivo de 2 megabytes equivale a 2^{21} bytes.

16) Um gigabyte equivale a 2^{30} bytes.

32) Um arquivo de 4 megabytes equivale a 2^{20} gigabytes

5 - Se $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$, x + y = a e x – y = b, assinale o que for correto.

01) 3a = 8y

02) $b = \frac{3y}{2}$

04) 5x = 2b

08) x equivale a 60% de y

16) Se b = 20, então x > y

32) Para a = 40, x é um número natural.

6 - Considerando os números inteiros a, b e c, tais que a < b < 0, assinale o que for correto.

01) $a^2.b^3 > 0$

02) a.b > 0

04) a – b > 0

08) b – a > 0

16) a + b > 0

32) (a + b).a > 0

7 - Um investidor compra no dia 20/08/2004, um lote de ações da empresa *A*, cotado em R$1.000,00. Considerando que as despesas operacionais correspondentes à “taxa de corretagem” chegam a R$ 24,50, e os “emolumentos”, a R$ 0,50, e são pagos à parte, assinale o que for correto.

01) Se, em 20/12/04, o valor total do lote de ações estiver cotado a R$ 1.640,00, o ganho patrimonial do investidor, considerando se para o cálculo, as despesas operacionais, será de 60%.

02) Em 20/09/04, o lote de ações estava cotado a R$ 1.500,00. A valorização, sem levar em consideração quaisquer despesas operacionais, foi de 50%.

04) Para que o lucro do investidor seja de 100% em relação a todo o dinheiro gasto na operação, é necessário que o lote de ações atinja a cotação de R$ 2.050,00.

08) Se, ignorando as despesas operacionais, o investidor pretende que seu lote de ações tenha a valorização mínima de 35%, o lote de ações deverá atingir a cotação de R$ 1.350,00 ou mais.

16) O percentual de corretagem cobrado, para o lote negociado, é de 0,245%.

32) Quando seu lote de ações atingiu a cotação de R$ 1.250,00, o investidor o vendeu, gastando mais R$ 25,00 com despesas operacionais. Assim, com as despesas efetuadas com a compra e a venda, seu ganho foi de R$ 200,00.

8 - Um investidor compra no dia 20/08/2004, um lote de ações da empresa *A*, cotado em R$1.000,00. Considerando que as despesas operacionais correspondentes à “taxa de corretagem” chegam a R$ 24,50, e os “emolumentos”, a R$ 0,50, e são pagos à parte, assinale o que for correto.

01) Se, em 20/12/04, o valor total do lote de ações estiver cotado a R$ 1.640,00, o ganho patrimonial do investidor, considerando se para o cálculo, as despesas operacionais, será de 60%.

02) Em 20/09/04, o lote de ações estava cotado a R$ 1.500,00. A valorização, sem levar em consideração quaisquer despesas operacionais, foi de 50%.

04) Para que o lucro do investidor seja de 100% em relação a todo o dinheiro gasto na operação, é necessário que o lote de ações atinja a cotação de R$ 2.050,00.

08) Se, ignorando as despesas operacionais, o investidor pretende que seu lote de ações tenha a valorização mínima de 35%,o lote de ações deverá atingir a cotação de R$ 1.350,00 ou mais.

16) O percentual de corretagem cobrado, para o lote negociado, é de 0,245%.

32) Quando seu lote de ações atingiu a cotação de R$ 1.250,00, o investidor o vendeu, gastando mais R$ 25,00 com despesas operacionais. Assim, com as despesas efetuadas com a compra e a venda, seu ganho foi de R$ 200,00.

9- João dispõe de R$ 30.000,00 e quer comprar um imóvel. Para isso analisa a planta de um pequeno apartamento, de forma retangular, medindo 12 cm por 18 cm, na escala 1:50. O custo do m^2 é R$ 600,00. Nestas condições, assinale o que for correto.

01) A área do apartamento é de 54 m^2.

02) Ele precisa ainda de R$ 2.400,00.

04) Com o dinheiro que tem, ele pode comprar um apartamento de até 50 m^2.

08) Ele pode comprar o apartamento e ainda sobram R$ 2.000,00.

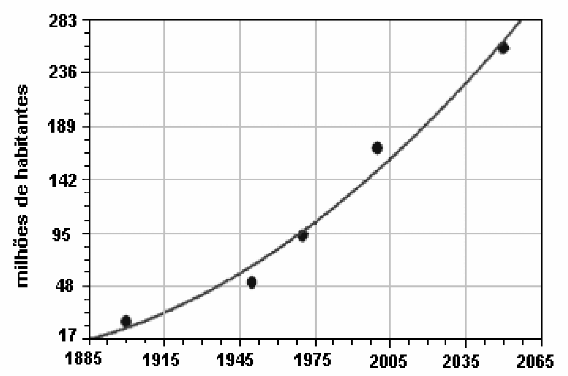
16) Ele precisa ainda de R$ R$ 3.200,00.

32) Ele tem a quantia exata para a compra.

10 - A população do Brasil, em 1900, era de 17.438.434. Em cinqüenta anos a população passou a ser 51.944.397. Em 1970, quando o Brasil ganhou o tricampeonato, e toda a torcida brasileira cantava "90 milhões em ação", isto correspondia a 93.139.037 habitantes. Em 2000, a população já contava com 169.590.693 pessoas. A previsão para 2050 é que a população será de 259.800.000 brasileiros.

Fonte: http://www.ibge.gov.br/ibgeteen/pesquisas/ demograficas.html - acessada em 20/08/2006.

No gráfico seguinte, são apresentados os pontos que representam a população em cada um destes anos e esses pontos são aproximados por uma função.



I. A função pode ser a exponencial: $y = ae^{bx}$, com $a>0$ e $b>0$.

II. A função pode ser a polinomial de grau 3: $y= ax^3+ bx^2+ cx +d$, com $a>0$.

III. A função pode ser a polinomial de grau 2: $y= ax^2+ bx+ c$, com $a<0$.

IV. A função pode ser a logarítmica: $y=a \log (bx)$, com $a<0$ e $b>0$.

Estão corretas apenas as afirmativas:

a) I e III.

b) II e IV.

c) I e II.

d) III e IV.

e) I e IV.

11 - O “Sudoku” é um jogo de desafio lógico inventado pelo Matemático Leonhard Euler (1707- 1783). Na década de 70, este jogo foi redescoberto pelos japoneses que o rebatizaram como Sudoku, palavra com o significado “número sozinho”. É jogado em um quadro com 9 por 9 quadrados, que é subdividido em 9 submalhas de 3 por 3 quadrados, denominados quadrantes. O jogador deve preencher o quadro maior de forma que todos os espaços em branco contenham números de 1 a 9. Os algarismos não podem se repetir na mesma coluna, linha ou quadrante.

Fonte: LEÃO, S. Lógica e estratégia. Folha de Londrina, Especial 14, 17 de setembro de 2006.

Com base nessas informações, o algarismo a ser colocado na casa marcada no quadro a seguir é:

4				7			5	6
						9		2
6								
3				6	9			
		5	8		1	7		
8			7		4			
					3		2	1
		2						
1	6			2				7

a) 2
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

APÊNDICE D – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento de projetos de investigação e pesquisa, sob responsabilidade de Angela Marta Pereira das Dores Savioli, professor (a) lotada no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que o (a) mesma utilize, parcial ou integralmente, registros dessas atividades, entrevistas, gravações em áudio ou vídeo de minhas falas ou imagem, minhas anotações, para fins de pesquisa, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome seja citado apenas como participante da pesquisa, garantido o anonimato no relato da pesquisa.

Declaro ainda, que fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Londrina, / / 2009.

NOME:____

RG:____

ASS.:____