



UNIVERSIDADE
ESTADUAL de LONDRINA

EDILAINE REGINA DOS SANTOS

**ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA EM MATEMÁTICA:
DE ESTRATÉGIA DE AVALIAÇÃO A ESTRATÉGIA DE
ENSINO**

EDILAINE REGINA DOS SANTOS

**ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA EM MATEMÁTICA:
DE ESTRATÉGIA DE AVALIAÇÃO A ESTRATÉGIA DE
ENSINO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco

Londrina
2014

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S237a Santos, Edilaine Regina dos.

Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino / Edilaine Regina dos Santos. – Londrina, 2014.
157 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2014.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Matemática – Métodos de ensino – Teses. 3. Prática de ensino – Teses. 4. Educação matemática – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

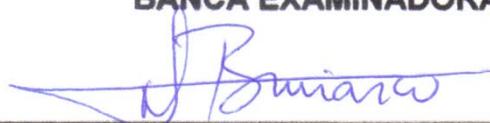
CDU 51:37.02

EDILAINE REGINA DOS SANTOS

**ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA EM MATEMÁTICA:
DE ESTRATÉGIA DE AVALIAÇÃO A ESTRATÉGIA DE ENSINO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

BANCA EXAMINADORA



Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina - UEL



Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares
Universidade Federal do Paraná - UFPR



Profa. Dra. Elsa Maria Mendes Pessoa Pullin
Universidade Estadual de Londrina - UEL



Profa. Dra. Doralice Aparecida Paranzini Gorni
Universidade Estadual de Londrina - UEL



Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 31 de Março de 2014.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar forças para mais essa caminhada.

Aos meus pais, Amadeu e Maria Amália, por tudo o que me proporcionaram e me proporcionam em minha vida.

Ao Bruno, meu esposo e grande amigo, que esteve sempre ao meu lado nessa caminhada, que soube entender minhas angústias e minhas ausências. Obrigada por me incentivar, fazer-me acreditar em mim mesma e por sempre tentar me mostrar o lado bom das coisas. Obrigada por sonhar comigo e contribuir para que meus e nossos sonhos se tornassem realidade.

Aos meus familiares, que me incentivaram e torceram por mim.

À professora Regina, que mais uma vez aceitou ser minha orientadora e que contribuiu para a minha formação profissional. Obrigada pelas orientações e pelo incentivo.

Às professoras Dra. Maria Tereza Carneiro Soares, Dra. Elsa Maria Mendes Pessoa Pullin, Dra. Doralice Aparecida Paranzini Gorni e Dra. Magna Natalia Marin Pires que aceitaram fazer parte da banca examinadora deste trabalho, por todas as considerações apresentadas.

À professora Dra. Andréia Büttner Ciani por também ter aceitado fazer parte da banca examinadora, pelas sugestões apresentadas, pelo apoio e incentivo.

Ao GPEMA, grupo que me acolheu desde a graduação, que me possibilitou muitos estudos e que contribui para a minha formação profissional e crescimento pessoal.

Aos professores e colegas do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, pelos estudos e conversas.

À Capes pela bolsa concedida.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para que eu chegasse até aqui!

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática:** de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. 157p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

RESUMO

Alguns trabalhos desenvolvidos no âmbito do GEPEMA - Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação - têm mostrado que a análise da produção escrita em matemática pode ser utilizada como uma estratégia de avaliação para investigar os processos de ensino e de aprendizagem da matemática. Outros trabalhos também desenvolvidos no interior do grupo têm revelado que a análise da produção escrita pode ainda ser utilizada para a condução das aulas de matemática, que seguem a perspectiva da reinvenção guiada na ótica da Educação Matemática Realística, com o intuito de que os alunos não sejam meros receptores de uma matemática pronta e sim autores de seus conhecimentos. Tendo isto em vista, este estudo, de cunho teórico, teve por objetivo investigar a utilização da análise da produção escrita em aulas de matemática, sob a luz da reinvenção guiada, para além da perspectiva de estratégia de avaliação. A investigação foi pautada nas seguintes questões norteadoras: que papel a análise da produção escrita pode assumir em aulas de matemática na perspectiva da reinvenção guiada? a análise da produção escrita pode ser considerada um método de ensino, estratégia de ensino, procedimento de ensino? nessa perspectiva de trabalho, qual é o papel do professor? qual o papel do aluno? qual a dinâmica da aula? Com este estudo, realizado a partir de orientações presentes na Análise de Conteúdo, a tese defendida é que a análise da produção escrita pode ser utilizada em aulas de matemática como uma estratégia de ensino. Espera-se que as informações apresentadas nesta investigação possam contribuir para suscitar reflexões e investigações futuras no âmbito da Educação Matemática.

Palavras-chave: Educação matemática. Educação matemática Realística. Análise da produção escrita em matemática. Estratégia de ensino.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Math written production analysis: from assessment strategy to teaching strategy.** 2014. 157p. Thesis (PhD in Mathematics Education and Sciences) –Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

ABSTRACT

Some works developed within the scope of GEPEMA - Assessment and Mathematics Education Research and Studies Group – have shown that the analysis of Math written production can be used as an assessment strategy to investigate Math teaching and learning processes. Other works also developed by the group have revealed that the written production analysis can also be used in the conduction of math classes, which follow the reinvention perspective guided by the Realistic Mathematics Education view point, to change students from mere receptors of a ready Math to authors of their own knowledge. Taking this all into consideration, the objective of this study, of theoretical character, was to investigate the use of written production analysis in Math classes, under the perspective of guided reinvention, going beyond the assessment strategy perspective. The investigation was based on the following guiding questions: What role can written production analysis play in Math classes within the guided reinvention perspective? Can written production analysis be considered a teaching method, a teaching strategy or a teaching procedure? What is the role of the teacher in this work perspective? What is the role of the student? What classroom dynamics should be adopted? With this study, based on the Content Analysis guidelines, the posed thesis is that written production analysis can be used in Math classes as a teaching strategy. It is expected that the information presented can contribute to future investigations and reflections in the area of Mathematics Education.

Keywords: Mathematics education. Realistic Mathematics education. Math written production analysis. Teaching strategy.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Esquema da relação existente entre método, estratégia, procedimento e meio de ensino	53
Figura 2 - Esquema da relação existente entre reinvenção guiada e análise da produção escrita em matemática	72

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Descrição da análise da produção escrita em matemática no âmbito do GEPEMA	21
Quadro 2 - Algumas ações descritas nas investigações do GEPEMA para a análise da produção escrita em matemática	24
Quadro 3 - Aspectos da dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática na perspectiva da RME	35
Quadro 4 - Alguns aspectos da dinâmica da aula sob a perspectiva da reinvenção guiada	39
Quadro 5 - Considerações a respeito da dinâmica da aula tendo em vista a perspectiva de trabalho adotada por Ciani (2012) e Pires (2013)	63
Quadro 6 - Dinâmica da aula de matemática tendo em vista a utilização da análise da produção escrita como estratégia de ensino	67

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
TRAJETÓRIA NO GEPEMA	10
A INVESTIGAÇÃO E SUA JUSTIFICATIVA	12
ESTRUTURA DO TRABALHO	14
1 DESENVOLVIMENTO DA INVESTIGAÇÃO	16
2 ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA EM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE AVALIAÇÃO	20
3 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA	29
3.1 UM PANORAMA A RESPEITO DE ALGUMAS IDEIAS DA RME	29
3.2 REINVENÇÃO GUIADA NA PERSPECTIVA DA RME: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES.....	35
4 ALGUNS ELEMENTOS DO CAMPO DA PRÁTICA DOCENTE	40
4.1 MÉTODO DE ENSINO	40
4.2 ESTRATÉGIA DE ENSINO.....	44
4.3 PROCEDIMENTO DE ENSINO	48
4.4 MEIOS DE ENSINO	50
4.5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DAS EXPRESSÕES APRESENTADAS E DA RELAÇÃO ENTRE ELAS	52
5 ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA EM AULAS DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA REINVENÇÃO GUIADA	55
5.1 A INVESTIGAÇÃO REALIZADA POR CIANI (2012)	55
5.2 A INVESTIGAÇÃO REALIZADA POR PIRES (2013)	59
6 ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA EM AULAS DE MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO	63
7 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES	69

REFERÊNCIAS	74
APÊNDICES	80
APÊNDICE A -	81
APÊNDICE B -	99
APÊNDICE C -	132

INTRODUÇÃO

TRAJETÓRIA NO GEPEMA

Iniciei minha participação no GEPEMA - Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação¹ - em 2005, ainda como aluna da Licenciatura em Matemática. Foi quando comecei a ter contato com estudos desenvolvidos na área de Educação Matemática e em Avaliação da Aprendizagem Escolar em Matemática.

Durante esse ano, trabalhei no estudo da relação entre o desempenho e as impressões de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental na Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA 2002², Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná, vinculada ao projeto de pesquisa Análise da Produção Escrita de Alunos e Professores nas Provas de Questões Abertas de Matemática³.

Ao final de 2005, participei do processo de seleção do Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática e, no ano seguinte, ingressei como aluna regular. A partir desse momento, comecei a ter mais contato com a análise da produção escrita de alunos e professores ao estudar os trabalhos já desenvolvidos pelos membros do grupo e ao pensar no que investigaria.

Ao estudar as investigações já desenvolvidas por membros do GEPEMA, pude perceber que, por meio da análise da produção escrita de alunos em algumas questões abertas e rotineiras de matemática⁴, apresentadas em situação de avaliação, era possível obter informações, que muitas vezes pareciam ser impossíveis de serem obtidas. Ficava encantada com o que as investigações revelavam das resoluções dos alunos ao utilizar a análise da produção escrita como estratégia de investigação. Por exemplo, me encantava a ideia de que uma resolução considerada incorreta podia ser uma rica fonte de informação a respeito do que os alunos já sabiam, das interpretações que faziam.

¹ O Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática - GEPEMA - está constituído no Departamento de Matemática e desenvolve suas atividades no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL. As principais atividades incluem o desenvolvimento da investigação no campo da Educação Matemática e Avaliação, bem como a formação de pesquisadores nesta área, nos níveis de Mestrado e Doutorado. Mais informações podem ser obtidas em: < <http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema>>.

² A última página da Prova de Questões Abertas de Matemática – AVA 2002 continha um questionário avaliativo que buscava colher as impressões dos alunos sobre a prova.

³ Projeto constituído de investigações realizadas por docentes, alunos de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, alunos de Mestrado em Educação e alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, articuladas em torno do eixo temático da Avaliação em Matemática tendo como foco dos estudos a Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA 2002.

⁴ Questões frequentemente trabalhadas em sala de aula e frequentemente encontradas em livros didáticos.

Esse encantamento continuou durante o desenvolvimento da minha dissertação de mestrado cujo objetivo foi investigar como alunos do Ensino Médio lidavam com questões abertas não-rotineiras de matemática quando apresentadas em situação de avaliação⁵.

Nesse período, paralelamente a essa investigação, trabalhava em um dos subprojetos do grupo, subprojeto 1 - Avaliação e erro em Educação Matemática, que tinha como um dos objetivos de trabalho obter um inventário das publicações relacionadas a esse tema para fundamentar e respaldar o desenvolvimento de estudo e pesquisas no assunto⁶.

Em 2008, após concluir o mestrado, continuei participando do desenvolvimento de tarefas no grupo, porém à distância, já que, por alguns motivos particulares, voltei para Barra Bonita, interior de São Paulo. Nessa “nova fase”, tentava conciliar as tarefas do grupo com a função de professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Foi um ano com algumas mudanças e adaptações e, por isso, precisei me afastar do grupo. Gostava de me dedicar ao máximo às tarefas e aos trabalhos com os quais me envolvia. Como, naquele momento, estava envolvida com cursos que me eram exigidos e com a preparação de aulas, ficava angustiada por não conseguir realizar as tarefas do grupo como eu queria. Não foi fácil, mas naquele momento foi necessário.

Mesmo distante, as marcas do grupo estavam em mim já que tentava utilizar a análise da produção escrita para investigar o processo de aprendizagem de meus alunos e para (re)orientar minha prática pedagógica.

Por sentir vontade de prosseguir em meus estudos e por querer continuar a investigar acerca da análise da produção escrita, ao final de 2010, decidi participar do processo de seleção para o Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL, e, em 2011, retornei ao grupo como aluna do doutorado.

A partir desse reingresso no grupo, comecei a realizar estudos sobre Educação Matemática Realística (EMR)⁷, abordagem à Educação Matemática adotada pelo GEPEMA, e a participar do subprojeto 3 - Educação Matemática Realística, que também tem como um de seus objetivos a obtenção de um inventário a respeito de publicações

⁵ Santos (2008).

⁶ Paralelamente às discussões e investigações comuns que envolvem todos os integrantes, o grupo tem focado seus estudos em algumas temáticas mais específicas, desenvolvendo atividades em subprojetos. Em 2007, as atividades eram desenvolvidas em relação aos subprojetos 1- Avaliação e Erro em Educação Matemática e 2- Educação Algébrica. Atualmente, o grupo também desenvolve atividades relacionadas ao subprojeto 3- Educação Matemática Realística.

⁷ *Realistic Mathematics Education* (RME).

relacionadas a esse tema de modo a fundamentar e respaldar o desenvolvimento de investigações do grupo.

Foi a partir de estudos realizados no grupo e de conversas com minha orientadora, que surgiu a ideia para esta investigação, cuja justificativa, objetivo e questões norteadoras são apresentados no tópico seguinte.

A INVESTIGAÇÃO E SUA JUSTIFICATIVA

Trabalhos desenvolvidos no âmbito do GEPEMA têm revelado que a análise da produção escrita pode ser utilizada como uma estratégia para investigar os processos de ensino e de aprendizagem em matemática, em uma perspectiva de avaliação como prática de investigação (BURIASCO, 1999, 2004; NAGY-SILVA, 2005; PEREGO, S., 2005; SEGURA, 2005; PEREGO, F., 2006; NEGRÃO DE LIMA, 2006; ALVES, 2006; DALTO, 2007; VIOLA DOS SANTOS, 2007; CELESTE, 2008; SANTOS, 2008; ALMEIDA, 2009; FERREIRA, 2009; BEZERRA, 2010; LOPEZ, 2010). Esses trabalhos sugerem que a análise da produção escrita pode ser utilizada em sala de aula pelo professor como uma estratégia de avaliação que o auxilie a obter informações a respeito de como os alunos interpretam uma situação, como procedem para resolver um problema, que dificuldades apresentam, o que demonstram saber ou o que estão próximos de saber.

Enquanto prática de investigação, a avaliação possibilita ao professor a obtenção de informações a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem, a reflexão e planejamento de intervenções e, ao aluno, a obtenção de informações acerca de seu processo de aprendizagem, a reflexão e o planejamento de ações que o auxiliem a superar dificuldades (ESTEBAN, 2003; BURIASCO, 2004; PEREGO, 2005; SANTOS, 2008; FERREIRA, 2009; BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009).

Alguns trabalhos também desenvolvidos por membros do grupo apontam que a avaliação, além de ser uma prática de investigação, também se constitui em uma oportunidade de aprendizagem (VIOLA DOS SANTOS, 2007; CIANI, 2012; PEDROCHI JUNIOR, 2012; PIRES; BURIASCO, 2011). Como oportunidade de aprendizagem, a avaliação é integrada aos processos de ensino e de aprendizagem e deve contribuir com a formação do aluno no seu processo de aprendizagem (BURIASCO, 2004; SANTOS; BURIASCO, 2009; PEDROCHI JUNIOR, 2012).

Assim, a avaliação da aprendizagem escolar não é tomada pelo grupo como um momento à parte dos processos de ensino e de aprendizagem e sim como uma prática de

investigação e como uma oportunidade de aprendizagem, o que vai ao encontro do que é proposto pela Educação Matemática Realística, na qual a aprendizagem matemática deve ser originada a partir da matematização da realidade, de situações que os alunos possam imaginar (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996), de forma que possam ter a oportunidade guiada de “reinventar” a matemática (FREUDENTHAL, 1991; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). Desse modo, por meio da reinvenção guiada, cuja condução é papel do professor, os alunos deixam de ser receptores de uma matemática pronta para se tornarem autores de sua própria matemática.

Mais recentemente, algumas investigações (CIANI, 2012; PIRES, 2013) lançaram um olhar para a reinvenção guiada na perspectiva da RME e utilizaram a análise da produção escrita – até então tomada pelo grupo como uma estratégia de avaliação – para a condução das aulas de matemática de modo que os alunos “desenvolvam sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, comunicar suas ideias matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem, interpretam tarefas em uma variedade de situações [...]” (PIRES; BURIASCO, 2012, p. 3).

Sendo assim, dando continuidade aos estudos do GEPEMA, o objetivo deste trabalho, de cunho teórico, consiste em investigar a utilização da análise da produção escrita em aulas de matemática sob a luz da reinvenção guiada, para além da perspectiva de estratégia de avaliação, defendida pelo grupo. Para isso, foram propostas algumas questões norteadoras:

- que papel a análise da produção escrita pode assumir em aulas de matemática na perspectiva da reinvenção guiada?
- a análise da produção escrita pode ser considerada um método de ensino, estratégia de ensino, procedimento de ensino?
- nessa perspectiva de trabalho, qual é o papel do professor? Qual o papel do aluno? Qual a dinâmica da aula?

Espera-se que esta investigação possa contribuir para suscitar reflexões e investigações futuras no âmbito da Educação Matemática.

ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está assim estruturado:

- “1. O desenvolvimento da investigação” - que traz informações do “passo a passo” desta investigação.
- “2. A análise da produção escrita em matemática como estratégia de avaliação” - que apresenta um panorama de como a análise da produção escrita tem sido apontada e realizada nas investigações desenvolvidas no interior do GEPEMA.
- “3. Educação Matemática Realística” – capítulo que apresenta um panorama de algumas ideias da RME e considerações a respeito da reinvenção guiada.
- “4. Alguns elementos do campo da prática docente”- em que são apresentadas considerações a respeito de alguns elementos do campo da prática docente, tais como método de ensino, estratégia de ensino, procedimento de ensino, meio de ensino, e das relações existentes entre eles com o intuito de que possam auxiliar nesta investigação da utilização da análise da produção escrita na reinvenção guiada durante as aulas de matemática.
- “5. Análise da produção escrita em aulas de matemática na perspectiva da reinvenção guiada”- em que são apresentadas informações acerca de investigações desenvolvidas por membros do GEPEMA que utilizaram a análise da produção escrita na reinvenção guiada, na perspectiva da Educação Matemática Realística (CIANI, 2012; PIRES, 2013). Tem-se como objetivo que tais informações auxiliem a identificar os papéis do professor e do aluno durante esse trabalho e a dinâmica das aulas de matemática nessa perspectiva.

- “6. Análise da produção escrita em aulas de matemática como estratégia de ensino” - em que são tecidas considerações quanto ao papel que a análise da produção escrita pode assumir na reinvenção guiada durante as aulas de matemática, o papel do professor, o papel do aluno e a dinâmica da aula nessa perspectiva de trabalho.

- 7. “Algumas considerações” - em que são apresentadas algumas considerações relativas à investigação realizada.

1 DESENVOLVIMENTO DA INVESTIGAÇÃO

O desenvolvimento desta investigação, de natureza qualitativa, se dá à luz de orientações presentes na Análise de Conteúdo, que, segundo Bardin (2004), organiza-se em torno de três polos: pré-análise, exploração do material, tratamento dos resultados obtidos e interpretação.

A pré-análise, segundo Bardin (2004, p. 90), é uma fase de organização e tem por objetivo “tornar operacionais e sistematizar as ideias iniciais, de maneira a conduzir a um esquema preciso de desenvolvimento das operações sucessivas”. Nessa fase, há realização de leituras flutuantes que possibilitam o estabelecimento de contato com os documentos que poderão ser analisados de modo que se possa conhecer o texto por eles apresentados (BARDIN, 2004). Há nessa fase ainda a constituição do *corpus*, que, segundo Bardin (2004, p. 90), é “o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos”. Não há, nessa fase, segundo a autora, a obrigatoriedade de se ter hipóteses para guiar as análises, que, por vezes, podem ocorrer às cegas e sem haver ideias já concebidas.

O polo referente à exploração do material diz respeito à administração sistemática das decisões tomadas (BARDIN, 2004), que pode ser uma fase longa e fastidiosa e consiste essencialmente em operações sobre o *corpus* em função de regras estabelecidas previamente.

Na fase do tratamento dos resultados obtidos e interpretação, os resultados são tratados e sintetizados de modo a serem significativos, o que auxiliará o investigador a fazer inferências e a antecipar interpretações em relação aos objetivos estabelecidos (BARDIN, 2004).

Assim, cada passo desta investigação foi dado tendo em vista orientações sobre esses três polos da Análise de Conteúdo.

Para a elaboração do capítulo que trata do panorama de como a análise da produção escrita tem sido apontada e realizada nas investigações desenvolvidas no interior do GEPEMA, ou seja, como estratégia de avaliação, foram realizadas leituras de investigações desenvolvidas por membros do grupo que tiveram como objeto de estudo a produção escrita de alunos ou professores em questões de matemática apresentadas em situação de avaliação⁸.

⁸ Nagy-Silva (2005), Perego, S. (2005), Segura (2005), Perego, F. (2006), Negrão de Lima (2006), Alves (2006), Dalto (2007), Viola dos Santos (2007), Celeste (2008), Santos (2008), Almeida (2009), Ferreira (2009), Lopez (2010), Bezerra (2010).

Com base nessas leituras, foram realizados inventários nos textos com o intuito de obter informações a respeito da análise da produção escrita em matemática (Apêndice A). Em seguida, buscou-se extrair desses inventários particularidades que fossem significativas para sintetizar como a análise da produção escrita é entendida no âmbito do grupo e como ela pode ser feita. Para auxiliar na apresentação dessas particularidades construíram-se dois quadros: um relacionando autor e a descrição do que é análise da produção escrita e do que ela possibilita, segundo a perspectiva adotada no respectivo trabalho, e outro relacionando autor e ações apresentadas por ele para a realização da análise da produção escrita.

Em seguida, essas informações foram interpretadas de modo que se pudessem apresentar dados relativos à análise da produção escrita como estratégia de avaliação, de como ela pode ser realizada pelo professor em sala de aula e de como ela pode auxiliá-lo nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática.

No que se refere à composição do capítulo 3, após realizadas leituras para conhecer alguns materiais que tratam da Educação Matemática Realística, foram evidenciadas informações quanto às suas características.

Nesse sentido, foram realizadas leituras de alguns materiais de autores tais como De Lange, (1987); Van den Heuvel-Panhuizen, (1996, 2000, 2001a, 2001b, 2002, 2003, 2010; Freudenthal, (1968, 1979, 1983, 1991); Gravemeijer, (2005; 2008); Gravemeijer e Terwel (2000); Treffers e Gofree (1985), cujos textos têm sido objeto de estudos no GEPEMA. A partir dessas leituras, foram realizados inventários que possibilitassem a obtenção de informações sobre temas abordados pela RME, tais como: atividade humana, matematização, reinvenção guiada, formação de modelos, fenomenologia didática, interação, produções dos alunos, trajetória de ensino e aprendizagem. (Apêndice B).

Essas informações foram interpretadas a fim de que auxiliassem na composição de um panorama a respeito de algumas ideias da RME. Em razão dessas considerações foi possível sintetizar informações no que tange a alguns aspectos da dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática na perspectiva da Educação Matemática Realística e da dinâmica da aula na perspectiva da reinvenção guiada.

Para a elaboração do capítulo que trata de alguns elementos do campo da prática docente, que aborda método de ensino, estratégia de ensino, procedimento de ensino e meio de ensino, primeiramente foram realizadas buscas a fim de se obter publicações relacionadas a essas expressões, para fundamentar e respaldar alguns aspectos desta

investigação, em particular o papel que a análise da produção escrita pode assumir na reinvenção guiada.

Como fontes de busca foram utilizados periódicos com *qualis*⁹ A1, A2, B1 e B2 na área da Educação¹⁰, livros do campo da Didática (Apêndice C), de anais das reuniões anuais¹¹ da ANPED (Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação) e anais¹² do ENDIPE (Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino).

Para a seleção desses materiais foram utilizadas as palavras-chave: estratégia metodológica, estratégia de ensino, metodologia de ensino, método de ensino, estratégia pedagógica, estratégia de ensino, alternativa pedagógica, didática, procedimento de ensino, dinâmica da aula; e tomados como base textos completos que proporcionassem alguma definição ou explicação dessas palavras. Desse modo, textos que apresentassem apenas alguma dessas palavras sem defini-las ou explicá-las não foram incluídos no inventário. As referências dos materiais selecionados também se constituíram como fonte de busca.

Após a constituição do *corpus*, em que alguns materiais encontrados fazem referência as expressões métodos de ensino, estratégia de ensino, procedimento de ensino e outros, aos termos método didático, estratégia didática, estratégia de aprendizagem, foram realizadas leituras com o objetivo de os conhecer e de conhecer o que eles apresentavam do assunto. A fim de facilitar a identificação do que cada autor considerava, foram elaborados quadros contendo a referência do material, a palavra e a definição (ou palavras e definições) apresentadas no texto (Apêndice C). Em seguida, voltou-se aos textos e a esses quadros com o objetivo de tentar identificar particularidades de cada expressão e também possíveis relações entre as informações apresentadas pelos autores.

Para a elaboração do capítulo que trata da análise da produção escrita em aulas de matemática na perspectiva da reinvenção guiada, foram realizadas leituras das investigações desenvolvidas por membros do GEPEMA (CIANI, 2012; PIRES, 2013) que

⁹ Avaliação 2010-2012.

¹⁰ Qualis A1: Caderno Cedes (UNICAMP), Ciência e Educação (UNESP), Educação e Pesquisa (USP), Educação em Revista (UFMG), Pro-Posições (UNICAMP), Educar em Revista (UFPR), Cadernos de Pesquisa (Fundação Carlos Chagas), Educação e Sociedade (UNICAMP). Qualis A2: Bolema (UNESP), Educação e Realidade (Universidade Federal do Rio Grande do Sul), Educação (PUCRS), Ensaio (Fundação Cesgranrio), Enseñanza de las Ciencias (Universidade Autônoma de Barcelona), Perspectiva (UFSC), Revista Brasileira de Educação (ANPEd), Revista Educação em Questão (UFRN), Práxis Educativa (UEPG), Revista de Educação Pública (UFT), Revista CADERNOS DE EDUCAÇÃO (UFPEL), Revista Educação e Filosofia (UFU). Qualis B1: Boletim GEPEM (UFRRJ), Zetetikè (UNICAMP). Qualis B2: Educação Matemática Pesquisa (PUC).

¹¹ Da 23ª Reunião Anual à 33ª Reunião Anual, cobrindo o período de 2000 a 2010.

¹² Endipe 2008 e Endipe 2010.

utilizaram a análise da produção escrita na reinvenção guiada na perspectiva da RME. Essas leituras foram realizadas com o intuito de obter informações que pudessem auxiliar a identificar os papéis do professor e do aluno durante esse trabalho e a respeito da dinâmica das aulas de matemática nessa perspectiva.

A opção por realizar leituras dessas investigações, e não de outras, deu-se porque elas, além de utilizarem a análise da produção escrita na reinvenção guiada na perspectiva da RME, também a utilizaram sob a perspectiva da avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem, tal como tem sido adotada e apresentada pelo GEPEMA.

No capítulo referente à análise da produção escrita em matemática como estratégia de ensino, buscou-se analisar as informações obtidas com os trabalhos de Ciani (2012) e Pires (2013) à luz dos capítulos anteriores de modo a subsidiar resposta às questões norteadoras deste estudo.

2 ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA EM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE AVALIAÇÃO

Desde 2005, o GEPEMA tem realizado investigações com o intuito de compreender como alunos, e professores que ensinam matemática, lidam com questões abertas de matemática quando apresentadas em situação de avaliação. Com isso, tendo como estratégia de investigação a análise da produção escrita, os estudos buscam, de modo geral, revelar como os participantes dessas investigações lidam com essas questões, ou seja, que interpretações fazem do enunciado dessas questões, que estratégias¹³ e procedimentos¹⁴ de resolução utilizam para resolvê-las.

Alguns dos trabalhos realizados no âmbito do grupo (NAGY-SILVA, 2005; PEREGO, S., 2005; SEGURA, 2005; PEREGO, F., 2006; NEGRÃO DE LIMA, 2006; ALVES, 2006; DALTO, 2007; VIOLA DOS SANTOS, 2007) tiveram como objeto de estudo a produção escrita de alunos e professores na resolução de questões consideradas rotineiras da Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA/2002- Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná.

Outras investigações dos membros do grupo (CELESTE, 2008; SANTOS, 2008; ALMEIDA, 2009; FERREIRA, 2009; BEZERRA, 2010; LOPEZ, 2010) tiveram como objeto de estudo a produção escrita de alunos do Ensino Fundamental, do Ensino Médio, graduandos em Matemática e professores que ensinam Matemática na resolução de questões consideradas não-rotineiras da aferição do PISA - *Programme for International Student Assessment*.

Mas o que é análise da produção escrita? Como ela é descrita e realizada? Por meio desta seção tenta-se apresentar um panorama de como a análise da produção escrita tem sido tomada e realizada em investigações no interior do GEPEMA.

O quadro a seguir apresenta particularidades das investigações realizadas no âmbito do GEPEMA que revelam o que vem a ser a análise da produção escrita. Nesse quadro, a descrição é feita tendo em vista informações do que é a análise da produção escrita e do que ela possibilita. Vale destacar que, nesse quadro, são utilizadas palavras diferentes,

¹³ Modo pelo qual se aborda um problema. Considerando, por exemplo, um problema que foi resolvido por meio de um sistema de equações do primeiro grau, utilizar sistema de equações de primeiro grau seria a estratégia escolhida para resolver o problema (SANTOS; BURIASCO, 2010).

¹⁴ Modo pelo qual se desenvolve a estratégia. Considerando, por exemplo, que um problema foi resolvido por meio de um sistema de equações do primeiro grau (estratégia utilizada para abordar o problema) e que esse sistema foi resolvido pelo método da substituição, este seria então o procedimento (SANTOS; BURIASCO, 2010).

tais como, alternativa, ferramenta, forma, caminho, para a descrição do que é a análise da produção escrita, pois se buscou preservar os termos utilizados pelos autores em seus trabalhos.

Quadro 1 - Descrição da análise da produção escrita em matemática no âmbito do GEPEMA

Autor/Ano	Análise da produção escrita em matemática	
	Descrição do que é	Descrição do que possibilita
NAGY-SILVA (2005)	Alternativa para a reorientação da avaliação escolar e uma forma de conhecer quais conhecimentos os alunos demonstram ter e quais ainda estão em construção.	Realizar intervenções de modo a contribuir para o desenvolvimento dos alunos.
PEREGO, S. (2005)	Ferramenta que pode ser utilizada para investigar as respostas dos alunos e descobrir o que sabem ou como lidam com aquilo que não dominam ou dominam parcialmente.	Obter informações de como agir e em que e como intervir durante o processo de aprendizagem de seus alunos.
SEGURA (2005)	Fonte de informações a respeito das compreensões dos diferentes conteúdos, estratégias e procedimentos presentes na produção escrita.	Identificar o caminho percorrido pelos alunos e escolher quais intervenções poderão favorecer a aprendizagem.
PEREGO, F. (2006)	Caminho que pode ser utilizado para investigar e auxiliar o processo de aprendizagem.	Conhecer como os alunos expressam aquilo que sabem.
NEGRÃO DE LIMA (2006)	Processo investigativo da produção escrita dos alunos.	Conhecer e compreender como os alunos utilizam seus conhecimentos matemáticos.
ALVES (2006)	Conversa com a escrita do aluno que fornece informações, pistas sobre o desenvolvimento do processo ensino/aprendizagem.	Ter uma visão geral da aprendizagem dos alunos.
DALTO (2007) ¹⁵		Inferir algo acerca de seu conhecimento matemático e de como esse conhecimento matemático foi mobilizado para a

¹⁵ No caso do trabalho de Dalto (2007) foi possível identificar apenas informações que evidenciam o que a análise da produção escrita faz ou o que ela possibilita.

Autor/Ano	Análise da produção escrita em matemática	
	Descrição do que é	Descrição do que possibilita
		resolução do problema.
VIOLA DOS SANTOS (2007)	Uma das formas de buscar conhecer as maneiras de alunos resolverem questões abertas de matemática, de conhecer como se configuram seus processos de aprendizagem. A análise da produção escrita se apresenta como uma estratégia para a implementação da avaliação como prática de investigação.	Inferir a respeito dos modos como interpretam o enunciado de uma questão, das estratégias que elaboram, dos procedimentos que utilizam, ou seja, é possível compreender como lidam com questões abertas de matemática.
CELESTE (2008)	Um procedimento que pode ser utilizado para conhecer as estratégias de resolução dos alunos, as dificuldades apresentadas por eles e os erros cometidos.	(Re)orientação na prática pedagógica do professor.
SANTOS (2008)	Um dos caminhos que pode ser adotado em sala de aula pelo professor para implementar a avaliação como prática de investigação, para compreender os modos de pensar dos alunos e como lidam com problemas.	Contribuir para o professor planejar ações de modo que estas possam contribuir com a aprendizagem dos alunos.
ALMEIDA (2009)	Um dos caminhos que pode ser utilizado para que a avaliação como prática investigativa se constitua.	Inferir a respeito do que mostram saber e acerca dos caminhos que escolheram para resolver um problema.
FERREIRA (2009)	Ferramenta de investigação por meio da qual se pode obter informações a respeito dos processos de ensino e aprendizagem.	Conhecer de que forma os alunos lidam com questões de matemática, sejam elas rotineiras ou não.
LOPEZ (2010)	Um meio de obter informações sobre o processo de ensino e aprendizagem de alunos.	Obter informações a respeito do modo como os alunos lidam com tarefas apresentadas em situação de avaliação.
BEZERRA (2010)	Fonte de comunicação entre professor e aluno.	Conhecer os modos de compreensão dos alunos, os caminhos percorridos por eles, e o

Autor/Ano	Análise da produção escrita em matemática	
	Descrição do que é	Descrição do que possibilita
		aluno, acompanhar o desenvolvimento de sua aprendizagem.

Fonte: autora. Subsídio: investigações desenvolvidas no interior do GEPEMA.

Com base nisso, a análise da produção escrita utilizada no GEPEMA como estratégia de investigação, desde 2005, permite obter informações acerca dos processos de ensino e de aprendizagem em matemática. Considerando que tem sido apontada nessas investigações como uma alternativa para a (re)orientação da avaliação escolar e (re)orientação da prática pedagógica e como uma possibilidade para a implementação da avaliação numa perspectiva de prática de investigação, pode-se afirmar que a análise da produção escrita em matemática pode ser considerada como uma estratégia de avaliação.

Considerando que estratégia é um “conjunto de ações coordenadas tendo em vista uma finalidade” (HADJI, 1994, p. 47) e que a avaliação tem por objetivo “contribuir para melhorar a aprendizagem em curso, informando o professor sobre as condições em que está a decorrer essa aprendizagem, e instruindo o aprendente sobre o seu próprio percurso, os seus êxitos e as suas dificuldades” (HADJI, 1994, p. 63), a análise da produção escrita em matemática como estratégia de avaliação pode ser tomada como um conjunto de ações frente à produção escrita dos alunos que possibilita ao professor obter informações para conhecer e compreender o processo de aprendizagem dos alunos, planejar e executar intervenções de modo a auxiliá-los (SANTOS; BURIASCO, 2010).

Nesse sentido, a análise da produção escrita não tem como objetivo a atribuição de uma nota ou de um conceito. O objetivo é obter informações que possibilitem uma tomada de consciência do ocorrido nos processos de ensino e de aprendizagem e uma tomada de decisão de modo a auxiliar tanto professor quanto alunos a organizar e orientar suas ações.

Como trabalhos acadêmicos, os estudos desenvolvidos no grupo, que analisaram a produção escrita registrada em questões apresentadas em situação de avaliação, em sua maioria, foram realizados sob a luz das orientações presentes na Análise de Conteúdo (BARDIN, 1977, 2004) e, de modo geral, seguiram as etapas: a pré-análise, a exploração do material, a inferência e a interpretação. Após a correção das resoluções dos estudantes, na pré-análise, foram realizadas leituras para conhecer os registros escritos presentes nessas

resoluções e uma descrição detalhada do que foi encontrado em cada questão de modo que se pudesse visualizar a resolução por meio da descrição. Na exploração do material, identificaram-se as estratégias e procedimentos de resolução e realizou-se uma operação de classificação da descrição da produção escrita em agrupamentos, em razão da parte comum existente entre elas, de modo que possibilitassem um estudo mais detalhado do processo de elaboração das resoluções. Por fim, foram realizadas interpretações e inferências das produções dos participantes.

O Quadro 2 apresenta, com base nos trabalhos do grupo, algumas ações que possibilitam analisar a produção escrita em matemática. Vale ressaltar que, nesse quadro, buscou-se preservar o que cada autor apresenta de informações a respeito dessas ações em seus trabalhos. Isso justifica uma mesma ação ser descrita diferentemente por alguns autores.

Quadro 2 - Algumas ações descritas nas investigações do GEPEMA para a análise da produção escrita em matemática

Autor/Ano	Ações ¹⁶ para realização da análise da produção escrita
NAGY-SILVA (2005)	<p><u>Leitura vertical</u>: leitura da produção de cada aluno em todas as questões para observar características e dificuldades apresentadas.</p> <p><u>Leitura horizontal</u>: leitura da produção escrita de todos os alunos em uma mesma questão para analisar pontos em comum e as regularidades presentes na produção escrita.</p> <p><u>Inferência</u>: com o intuito de levantar hipóteses, estabelecer conexões entre as informações encontradas.</p>
PEREGO, S. (2005)	<p><u>Análise vertical</u>: análise da produção escrita contida em cada questão.</p> <p><u>Análise horizontal</u>: análise da produção escrita contida na prova inteira com o intuito de não perder de vista o todo da prova de cada aluno.</p>
SEGURA (2005)	<p><u>Leitura vertical</u>: leitura da produção escrita em todas as questões de uma prova visando encontrar similaridades entre a resolução de questões.</p> <p><u>Leitura horizontal</u>: leitura da produção escrita de questão por questão visando encontrar similaridades entre as resoluções nas provas.</p>
PEREGO, F. (2006)	<p><u>Análise vertical</u>: consiste em estudar as produções contidas em uma mesma prova com o objetivo de saber quais aspectos do</p>

¹⁶ Ação, segundo o dicionário de Língua Portuguesa Houaiss (2001, CD ROM), pode ser considerada como um processo dinâmico em que há um agente que faz algo e pode ser expresso pelo verbo de ação ou por certos substantivos derivados dos verbos de ação. Por isso, nesse quadro, as ações são expressas por substantivos.

Autor/Ano	Ações ¹⁶ para realização da análise da produção escrita
	<p>conteúdo os alunos dominam, para identificar a possível causa de equívocos.</p> <p><u>Análise horizontal</u>: consiste em estudar a produção escrita contida na questão 1 de todas as provas. Realizada com o objetivo de observar a forma como os alunos procuram resolver as questões, se dominam algoritmos utilizados, se retiram adequadamente os dados do enunciado da questão.</p>
NEGRÃO DE LIMA (2006)	<p><u>Análise vertical</u>: análise de cada prova em sua totalidade. Com o objetivo de encontrar indícios da possível razão que levou o aluno a obter e apresentar ou não uma resposta ou mesmo cometer algum erro.</p> <p><u>Análise horizontal</u>: análise de questão por questão.</p> <p><u>Inferência</u>: pode ser hipotetizada pelo professor quanto à origem e soluções de obstáculos encontrados pelos alunos e a respeito dos saberes revelados por eles.</p>
ALVES (2006)	<p><u>Correção vertical</u>: análise de todas as questões de cada prova, comparando as produções de um mesmo aluno. Realizada com o objetivo de obter informações que pudessem confirmar as anotações feitas em todas as questões. Permite ter uma visão mais completa do estágio de aprendizagem em que o aluno se encontra.</p> <p><u>Correção horizontal</u>: análise da primeira questão de todas as provas, depois análise da segunda questão e assim sucessivamente. Possibilita a criação de um perfil da aprendizagem da turma de alunos.</p> <p><u>Inferência</u>: fornece informações que alertam para algumas práticas desenvolvidas em sala de aula.</p>
DALTO (2007)	<p><u>Inferência</u>: atribuições de significados à produção de modo a completar as informações que não ficam tão visíveis à primeira vista.</p>
VIOLA DOS SANTOS (2007)	<p><u>Inferência</u>: a respeito do modo dos alunos interpretarem as questões, das estratégias e procedimentos utilizados por eles, do que mostram saber de matemática.</p> <p><u>Interpretação</u>: para buscar algum entendimento de como os alunos lidam com as questões, para atribuir significados à produção dos alunos.</p>
CELESTE (2008)	<p><u>Inferência</u>: a respeito do que os alunos demonstram saber, acerca do que influencia na resolução da questão proposta e das suposições feitas pelos alunos.</p> <p><u>Interpretação</u>: com base na interpretação da produção dos alunos busca-se conhecer como lidam com as informações de um</p>

Autor/Ano	Ações ¹⁶ para realização da análise da produção escrita
	problema.
SANTOS (2008)	<p><u>Leitura vertical</u>: leitura de todas as resoluções de um mesmo aluno.</p> <p><u>Leitura horizontal</u>: leitura das resoluções da mesma questão de todos os alunos.</p> <p><u>Inferências</u>: procura-se inferir a respeito de como os alunos lidam com as questões, que interpretações fazem do enunciado, quais estratégias e procedimentos utilizam.</p>
ALMEIDA (2009)	<p><u>Leitura vertical</u>: consiste em estudar as provas individualmente como um todo, ou seja, todas as questões de uma mesma prova, de um mesmo aluno. É realizada com o objetivo de saber se os equívocos apresentados pelo aluno na resolução de uma questão estavam também presentes em outra.</p> <p><u>Leitura horizontal</u>: consiste em estudar uma mesma questão em todas as provas.</p> <p><u>Inferências</u>: a respeito do que os alunos mostram saber e acerca dos caminhos que escolheram para resolver um problema.</p>
FERREIRA (2009)	<p><u>Leitura</u>: de cada questão e/ou item da prova e de todas as produções.</p> <p><u>Leitura horizontal</u>: correção do primeiro item de todas as provas, depois correção do segundo item de todas as provas, e assim por diante.</p> <p><u>Inferência</u>: a respeito das maneiras de lidar, das relações estabelecidas com os contextos das tarefas propostas, dos possíveis processos de produção dos alunos.</p>
LOPEZ (2010)	<p><u>Correção e leitura horizontal</u>: corrigir e analisar as produções escritas de uma mesma questão em todas as provas.</p> <p><u>Inferência</u>: a respeito de como os alunos lidam com os problemas e conteúdos, de como as resoluções foram elaboradas.</p>
BEZERRA (2010)	<p><u>Leitura vertical</u>: consiste em estudar as resoluções de todas as questões de um mesmo aluno.</p> <p><u>Leitura horizontal</u>: para investigar os procedimentos utilizados para a resolução da primeira questão e os respectivos itens de todas as provas, em seguida da segunda questão de todas as provas e assim por diante.</p> <p><u>Inferência</u>: busca-se fazer inferências a respeito de como os alunos interpretam o enunciado das questões, como empregam as estratégias requeridas na resolução, como lidam com as técnicas operatórias dos algoritmos, quais dificuldades apresentam.</p>

Fonte: autora. Subsídio: investigações desenvolvidas no interior do GEPEMA

Com base nisso, em relação às ações, tem-se:

- leitura vertical: leitura de todas as produções de um mesmo aluno. Permite que o professor conheça como o aluno lida com tarefas, quais estratégias de resolução utiliza, que dificuldades apresenta. Possibilita encontrar similaridades nas produções do aluno e a construção de um perfil do modo dele lidar com as questões.
- leitura horizontal: leitura das produções de todos os alunos em uma mesma questão ou problema. Possibilita perceber semelhanças entre essas produções, o que auxilia a identificar estratégias e procedimentos de resolução mais utilizados, inventariar e analisar os acertos e erros mais frequentes. Auxilia na construção de um perfil do modo que a turma de alunos lida com as questões. Tanto a leitura vertical quanto a horizontal permite que o professor levante hipóteses acerca das produções dos alunos e propiciam a obtenção de informações que auxiliam, durante a inferência e interpretação, a ratificar ou a refutar algumas dessas hipóteses.
- inferência: busca ir além do que é encontrado na produção do aluno para tentar complementar informações a respeito do seu modo de lidar que não estão visíveis à primeira vista.
- interpretação: auxilia a compreender como os alunos lidam com as questões. Constitui-se em movimentos para tentar atribuir significados à produção escrita analisada, para compreender o que é encontrado na produção escrita do aluno.

Ainda em relação a essas ações, alguns questionamentos podem auxiliar a nortear a análise da produção escrita em matemática. Buriasco, Ferreira e Ciani (2009, p. 79) destacam alguns:

as dificuldades de 'interpretação' estão relacionados à linguagem utilizada no enunciado, ao conteúdo matemático envolvido, a ambos, ou a outros aspectos? Como saber se o enunciado da questão é suficientemente claro para que o aluno a resolva? O enunciado da questão pode servir de contexto para se produzir significado a partir dele? As informações presentes no enunciado da questão fazem parte do conjunto de circunstâncias que tornam a questão acessível aos alunos?

Desse modo, sob a perspectiva de estratégia de avaliação, a análise da produção escrita pode ser realizada pelo professor por meio de ações como leitura vertical, leitura horizontal, inferência e interpretação para obter informações que o auxiliem a conhecer e compreender como os alunos interpretam uma situação, como procedem para resolver uma tarefa, que dificuldades apresentam, quais erros cometem e por que eles ocorrem, o que demonstram saber.

3 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

3.1 UM PANORAMA A RESPEITO DE ALGUMAS IDEIAS DA RME

A Educação Matemática Realística (EMR) - *Realistic Mathematics Education* (RME) – originou-se no final da década de 60 a partir de uma necessidade de reforma na Educação Matemática na Holanda, que objetivava, segundo Van den Heuvel-Panhuizen (1996, 2010), obter uma alternativa à abordagem educacional vigente e às abordagens que tentavam influenciar a educação no país por meio da importação e utilização de materiais didáticos que as continham como fio condutor.

Nesse movimento de reforma, ainda para Van den Heuvel-Panhuizen (1996, 2010), o país queria abandonar a abordagem mecanicista¹⁷, que era até então predominante no ensino de matemática, e buscava resistir ao Movimento da Matemática Moderna¹⁸ vindo dos Estados Unidos, e também à abordagem empirista¹⁹, da Inglaterra.

A razão pela qual essa abordagem à Educação Matemática foi chamada de realística não está relacionada a uma conexão com o “mundo real” tal como se está acostumado a pensar, e sim a uma conexão com o imaginável. Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2000, 2002), a tradução holandesa do verbo zich REALISE-ren significa “imaginar”, e, por isso, o termo realístico está relacionado com o tornar algo “real” na mente. Sendo assim, a Educação Matemática Realística preocupa-se em tornar algo “real” na mente do aluno.

¹⁷ Nessa abordagem, a Matemática é vista como um sistema de regras em que as regras são dadas aos alunos para que as treinem e depois as apliquem em problemas similares aos exemplos anteriores mostrados pelo professor (DE LANGE, 1987). Segundo esse autor, nenhum fenômeno do “mundo real” é utilizado como fonte para a aprendizagem. Desse modo, problemas de contextos são utilizados para concluir o processo de aprendizagem, funcionando apenas como campo de aplicação (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001a, 2001b, 2010).

¹⁸ No fim dos anos 50, segundo Freudenthal (1979, p.317), a agitação criada pelo Sputnik suscitou uma discussão acerca do ensino da Matemática tal como era praticado. Ainda segundo esse autor, nessa época os defensores da modernização do ensino consideravam que a matemática escolar tal como era praticada apresentava atrasos em relação ao estado de conhecimento dessa época, e destacavam que era necessário tentar recuperar esse atraso formulando propostas que respeitassem as inovações existentes; propostas que “foram concretizadas em novos manuais escolares e baptizou-se este conjunto de «Matemática moderna»”. Para Freudenthal (1979 p.318), “a ideia inovadora proposta pelos defensores da Matemática moderna consistia em efectuar «encurtamento»: os conceitos mais adiantados deviam ser ensinados na escola infantil — mesmo por professores que não possuíam a menor ideia do seu significado nem das suas verdadeiras aplicações no plano matemático. Assim, certos sistemas colocados ao serviço de abstrações matemáticas, desligados do seu sentido e do seu contexto matemáticos, considerados temas de estudo, concretizados de maneira absurda, eram ensinados a crianças de qualquer idade”.

¹⁹ Nessa abordagem, segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2010), os alunos são deixados livres para realizar investigações e descobrir muito por si próprios. Nesse sentido, De Lange (1987) destaca que aos alunos são oferecidos ambientes estimulantes com a expectativa de que pelo “amadurecimento” possam ter a oportunidade de desenvolver conhecimentos.

As bases para o desenvolvimento da RME foram lançadas a partir do ponto de vista de Hans Freudenthal²⁰ acerca da matemática, qual seja a de que ela “é uma actividade humana simultaneamente natural e social, tal como a palavra, o desenho e a escrita” (FREUDENTHAL, 1979, p. 321). Sob essa perspectiva, a matemática não é vista como algo de natureza divina ou como um assunto a ser transmitido, e sim como uma atividade de natureza humana, um constructo derivado da ação humana.

O pensar em matemática como um assunto a ser transmitido pode levar professores e alunos a pensarem no ensino e na aprendizagem da matemática como o estabelecimento de conexões com um corpo exterior de conhecimento (GRAVEMEIJER, 2005). Nessa perspectiva, há um fosso entre o conhecimento matemático formal, um produto pronto para o consumo, e o aluno, que vive em um mundo à parte do mundo desse conhecimento, e é preciso construir uma ponte, tarefa do professor, para encurtar esse fosso (GRAVEMEIJER, 2005, 2008). No entanto, não há como garantir que, por meio da construção de uma ponte, o aluno chegará a esse mundo do conhecimento matemático formal, algo já pronto para consumo e tomado como ponto de partida para o ensino e a aprendizagem. Além disso, pode acontecer que nem seja possível construir essa ponte porque, para o aluno, esse outro mundo pode nem existir.

A ideia de pensar na matemática como uma atividade humana oferece uma alternativa oposta ao ensino e a aprendizagem da matemática tomados como um produto pronto para o consumo, qual seja a de que ao aluno deve ser dada a oportunidade “guiada” de reinventar a matemática (FREUDENTHAL, 1991; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000), de modo que ele, sob orientação do professor, seja autor de seu próprio conhecimento.

Assim, na RME, o aluno não é visto como um receptor de conhecimentos matemáticos já prontos, e sim como um participante ativo no processo educacional, em que ele próprio, sob orientação do professor, desenvolve ferramentas matemáticas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2000, 2002), ou seja, aprende matemática fazendo matemática, pois, segundo Freudenthal (1973, p. 110, tradução nossa²¹), “a melhor maneira de aprender uma atividade é realizá-la”. Desse modo, os alunos têm a oportunidade de vivenciar processos de fazer matemática similares aos dos matemáticos, ou seja, podem matematizar.

²⁰ Mais informações podem ser obtidas em: FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de tarefas de matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013, 121f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013, disponível em: <<http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/03%20publicacoes.htm>>.

²¹ “The best way to learn an activity is to perform it”.

Para Freudenthal (1968), sistematizar é uma virtude da matemática como atividade. Tendo isso em vista, esse autor destaca que, se possível, o aluno deve aprender essa virtude também, não pelo resultado que será produzido, e sim pela atividade em si mesma. Sendo assim, o foco não está no que resulta da ação de matematizar, mas sim na própria ação, no trabalho que é realizado pelo aluno durante a matematização (FREUDENTHAL, 1991). Nesse sentido, o autor ainda salienta: “o que os seres humanos têm de aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, o processo de matematização da realidade e, se possível, mesmo aquele de matematização da matemática” (FREUDENTHAL, 1968, p. 07, tradução nossa²²).

De modo geral, matematizar diz respeito a organizar um assunto, da “realidade” ou não, de um ponto de vista matemático. Treffers e Goffree (1985, p.109, tradução nossa²³) definem matematizar como sendo “uma atividade de organização e estruturação pela qual se recorre a conhecimentos e habilidades adquiridos para descobrir regularidades, conexões e estruturas ainda desconhecidas”.

No entanto, para que essa atividade de matematizar possa ser desenvolvida pelo aluno, não é propício que o trabalho com ele seja iniciado com a apresentação de definições, propriedades ou fórmulas com o objetivo de que ele posteriormente utilize esses conhecimentos para resolver tarefas de aplicação. Ao invés disso, aos alunos devem ser oferecidas situações que possam imaginar, sejam elas do “mundo real” ou não. Desse modo, deve-se começar com problemas nos quais os contextos exigem uma organização matemática, ou seja, problemas de contextos que possam ser matematizados (FREUDENTHAL, 1991; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Em relação aos problemas de contexto, Treffers e Goffree (1985) destacam algumas funções que tais problemas podem assumir. Segundo esses autores, problemas de contexto podem assumir uma função de formação de conceito, o que permite aos alunos um acesso natural e motivador à matemática, e também assumir uma função de formação de modelo, fornecendo apoio para a aprendizagem das operações formais, procedimentos, notações e regras. Além dessas funções, os autores ainda evidenciam que os problemas de contexto podem assumir uma função de aplicabilidade, o que possibilita que os alunos descubram a realidade como fonte de aplicação da matemática.

²² “What humans have to learn is not mathematics as a closed system, but rather as an activity, the process of mathematizing reality and if possible even that of mathematizing mathematics”.

²³ “[...] mathematising is as organizing and structuring activity by which acquired knowledge and abilities are called upon to find out still unknown regularities, connections and structures”.

No que diz respeito à função de formação de modelos, Van den Heuvel-Panhuizen (2000, 2002) apresenta algumas considerações. A autora explica que, quando da proposição de um problema, os alunos tendem a resolvê-lo utilizando estratégias informais que foram elaboradas a partir do contexto específico e que, em outras oportunidades, em outras situações, certos aspectos do contexto podem se tornar mais gerais e assumir um caráter de modelo o qual servirá para os alunos como suporte para a resolução de outros problemas e fonte de conhecimento matemático.

Desse modo, os modelos que, para Van den Heuvel-Panhuizen (2003), são vistos como representações de situações-problema e que refletem os aspectos essenciais de conceitos matemáticos e estruturas que são relevantes para a situação²⁴, têm o papel de fazer uma ligação entre o entendimento informal dos alunos, que está relacionado a uma “realidade”, e a compreensão de sistemas formais (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2003). Assim, os modelos possibilitam uma relação entre níveis informais e formais da matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2000, 2002, 2003; GRAVEMEIJER, 2005).

No entanto, para possibilitar essa relação, os modelos precisam passar de “modelo de” para “modelo para”²⁵. A respeito disso, ou seja, da mudança de “modelo de” para “modelo para”, Gravemeijer (2005, p. 16, grifos do autor) explica

inicialmente, os modelos surgem como modelos de contextos específicos. Os modelos referem-se a situações paradigmáticas concretas, que são experiências reais para os alunos. Neste nível os modelos devem permitir estratégias informais que correspondem a estratégias de resolução situadas ao nível da situação que está definida no problema contextualizado. A partir daí, o papel do modelo começa a mudar. Depois, enquanto os alunos recolhem mais experiências com problemas semelhantes, a sua atenção pode transferir-se para as relações e estratégias matemáticas. Como consequência, o modelo toma carácter mais objectivo, e torna-se mais importante como base para o raciocínio matemático do que como uma forma de representar um problema contextualizado. Assim, o modelo começa a tornar-se uma base referencial para o nível da Matemática formal. Ou resumidamente: um *modelo de* actividades matemáticas informais desenvolve-se num *modelo para* um raciocínio matemático mais formal.

Isso significa que em um primeiro momento a atenção e a atividade do aluno estão voltadas para encontrar um modelo específico para um problema específico e, posteriormente, tendo em vista outras experiências com outros problemas, tais ações centram-

²⁴ Essa autora ainda destaca que esboços, esquemas, diagramas e até mesmo símbolos podem servir como modelos.

²⁵ Para Freudenthal (1975, *apud* VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003, p.15), “modelos de” são “pós-imagens de um pedaço da realidade dada” e “modelos para” são “pré-imagens para uma parte de realidade a ser criada”.

se nas relações e estratégias matemáticas visando um conhecimento de uma matemática mais formal.

Para escolher problemas cujos contextos possam ser matematizados pelos alunos e que possibilitem a construção de modelos, o professor pode utilizar-se da fenomenologia²⁶ didática, que tem por base uma fenomenologia da matemática. (FREUDENTHAL, 1983). Segundo esse autor, a fenomenologia de um conceito matemático, uma estrutura matemática, ou uma de ideia matemática, tem como intenção descrever sua relação com o fenômeno²⁷ de que é meio de organização, e a fenomenologia didática busca identificar e entender como essa relação acontece nos processos de ensino e de aprendizagem.

Na perspectiva da fenomenologia didática, ao invés de se utilizar determinado conceito matemático como ponto de partida para o trabalho com os alunos, olha-se primeiramente para os fenômenos que podem contribuir para que eles elaborem o objeto mental que é matematizado por esse conceito (FREUDENTHAL, 1983)²⁸.

Ao trabalharem com contextos que exigem uma organização matemática, ou seja, que podem ser matematizados, os alunos podem, com o auxílio do professor e cada um em seu tempo e por seu caminho, vivenciar a matemática como uma atividade humana (FREUDENTHAL, 1991) bem como se sentir autor do resultado dessa atividade. No entanto, o fato de cada aluno ter a possibilidade de seguir um caminho de aprendizagem não significa que o trabalho a ser realizado ou a tarefa a ser trabalhada deva ser diferente para cada um.

Na RME, a aprendizagem da matemática é considerada uma atividade social (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, 2010) e o trabalho com os alunos é organizado de modo que as tarefas possam ser resolvidas em diferentes níveis de matematização, ou seja, possam ser resolvidas desde a elaboração de resoluções informais, conectadas aos contextos específicos, até a elaboração de esquemas que possibilitem o conhecimento de aspectos formais da matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, 2002, 2003, 2010).

Essa possibilidade de uma tarefa ser resolvida em diferentes níveis de matematização também oportuniza que a atividade ocorrida em um menor nível, mais tarde,

²⁶ O significado de fenomenologia, nesse caso, não possui relação com o significado de fenomenologia apresentado nas obras de Hegel, Husserl e Heidegger (FREUDENTHAL, 1983). Freudenthal (1983) utiliza a ideia de noúmenos e fenômenos e explica que os objetos matemáticos são noúmenos e que parte da matemática pode ser experimentada como fenômeno.

²⁷ Segundo Freudenthal (1983), por meio de figuras geométricas como triângulo, paralelogramo, losango ou quadrado, se consegue organizar o mundo dos fenômenos de contorno; números organizam o fenômeno da quantidade.

²⁸ A fim de esclarecer essa afirmação, Freudenthal (1983) apresenta o seguinte exemplo: a fim de ensinar Grupos, em vez de partir do conceito de Grupo e olhar ao redor para materiais que concretizem esse conceito, deve olhar primeiro para os fenômenos que podem levar o aluno a constituir o objeto mental que está sendo matematizado pelo conceito de Grupo.

se torne objeto de análise em um nível superior (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). Para tanto, é importante que os alunos possam refletir a respeito das atividades que realizam. Alguns aspectos destacados pela RME que podem contribuir para a ocorrência da reflexão por parte dos alunos dizem respeito à interação entre eles e a análise das próprias produções.

Ao poderem analisar e discutir suas produções, os alunos passam a ter oportunidades para compartilhar estratégias e “invenções” uns com os outros, o que pode auxiliá-los a perceber que existem outras estratégias para resolver um mesmo problema, além de terem “ideias” para aprimorarem as suas próprias estratégias (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

Treffers e Gofree (1985) destacam que as estratégias ou métodos informais dos alunos de resolverem um problema podem ser utilizados pelo professor como uma alavanca para que eles atinjam níveis formais. Assim, as produções dos alunos podem ser utilizadas pelo professor como ponto de partida para o processo de reinvenção (GRAVEMEIJER, 2008). Desse modo, o que o aluno sabe é valorizado em sala de aula e é utilizado para orientar os processos de ensino e de aprendizagem. Além disso, há o reconhecimento e o respeito para a diversidade de caminhos percorridos por ele, do entendimento que possui acerca de determinada tarefa que lhe foi proposta.

A partir dessas considerações é possível sintetizar algumas informações a respeito de aspectos da dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática na perspectiva da Educação Matemática Realística, como mostra o Quadro 3.

Quadro 3 - Aspectos da dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática na perspectiva da RME

Aspectos	Informações
Aprendizagem Matemática	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Considerada uma atividade social. ✓ Originada na atividade de matematizar.
Papel do professor	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Trabalha por meio da reinvenção guiada. ✓ Organiza o trabalho com os alunos oportunizando contextos que podem ser matematizados em diferentes níveis e que possibilitam a construção de modelos. ✓ Utiliza a fenomenologia didática para a escolha dos problemas que serão fonte de trabalho.
Papel do aluno	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Participa ativamente no processo educacional. ✓ Vivencia processos de fazer matemática similares aos dos matemáticos. ✓ Analisa e discute produções com os demais colegas. ✓ Tem a possibilidade de aprimorar suas estratégias de resolução.

Fonte: autora. Subsídio: livros e artigos de autores da RME referenciados na seção 3.1 deste trabalho

3.2 REINVENÇÃO GUIADA NA PERSPECTIVA DA RME: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Ainda hoje, por vezes, o trabalho com matemática em sala de aula segue uma perspectiva de “transferência de matemática pronta”: professor transferindo do livro didático para a lousa conteúdos ou conceitos matemáticos já sistematizados para que os alunos copiem da lousa para seus cadernos tais conteúdos para que, então, possam “aprendê-los”. Desse modo, nessa perspectiva, o produto final da atividade dos matemáticos é tomado como ponto de partida para o ensino e a aprendizagem da matemática e o aluno tem pouca ou nenhuma oportunidade para participar da sistematização de conceitos, questionar e interagir com os colegas.

Na perspectiva da Educação Matemática Realística, quando o produto final da atividade dos matemáticos é tomado como ponto de partida para o ensino e a aprendizagem da matemática, há uma inversão antididática.

Para a RME, os alunos devem ter a oportunidade guiada de “reinventar” a matemática (FREUDENTHAL, 1991; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000), de modo que possam aprender matemática matematizando, isto é, vivenciando processos de fazer matemática similares aos dos matemáticos.

Em relação a essa oportunidade guiada de reinventar a matemática, Freudenthal (1973, p. 120, tradução nossa²⁹) destaca: “Eu denominei o método de ensino que é construído sobre a interpretação e a análise da matemática como uma atividade de método de re-invenção”.

Ainda sobre isso, Freudenthal (1991) salienta a importância de haver um equilíbrio entre a liberdade do aluno em “inventar” sua matemática e o papel do professor de guiá-lo nesse processo de “invenção”. Segundo esse autor, “o aluno deve inventar algo que é novo para ele, mas bem conhecido para quem o guia”, isto é, para o professor (FREUDENTHAL, 1991, p. 48, tradução nossa³⁰).

No que diz respeito ao papel do professor, segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2000), esse tem a função de orientar o processo de aprendizagem dos alunos não de modo fixo, dizendo ou demonstrando o que eles devem aprender, mas criando um ambiente em que eles se sintam motivados e em que o processo de matematização possa emergir.

Uma possibilidade que o professor pode ter para isso refere-se à elaboração de trajetórias de ensino e aprendizagem que, segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2001a, 2001b, 2002), não são apenas uma coleção de objetivos ou lista de habilidades e conhecimentos para serem alcançados, nem uma formulação de parâmetros comportamentais a serem seguidos. Para essa autora, a trajetória de ensino e aprendizagem não apenas descreve aspectos da aprendizagem dos alunos, mas também retrata as principais ações e tarefas que podem levar a esses aspectos, isto é, descreve não somente aonde os alunos podem chegar, mas também os caminhos que os podem conduzir a isso. Desse modo, para essa autora, a trajetória tem como característica mais importante a sua perspectiva longitudinal.

²⁹ “I termed the teaching method that is built on interpreting and analyzing mathematics as an activity the method of re-invention”.

³⁰ “The learner shall invent something that is new to him but well-known to the guide”.

De modo geral, o principal objetivo de uma trajetória de ensino e aprendizagem refere-se a possibilitar que o professor tenha, por meio de uma descrição, uma visão geral do que poderá desenvolver com os alunos. Desse modo, a trajetória³¹ também possibilita uma visão geral de como os processos de ensino e de aprendizagem podem se desenrolar durante o trabalho com os alunos na reinvenção guiada. Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2001a, 2002), ter uma visão geral desses processos por meio da trajetória de ensino e aprendizagem auxilia o professor a tomar decisões didáticas como a de fazer ajustes no livro didático que é utilizado por ele como recurso em sala de aula ou ir além do que este oferece como possibilidade de trabalho.

A elaboração de trajetórias para os processos de ensino e de aprendizagem de matemática por si já proporciona ao professor o pensar em diferentes resoluções que os alunos podem apresentar quando do trabalho com uma tarefa, que eles podem entender algo em níveis diferentes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEM, 2001b), em como ele poderá explorar tais resoluções e de que modo poderá auxiliar os alunos na relação entre as suas estratégias informais de resolução, relacionadas a uma “realidade”, e um conhecimento matemático mais formal.

Desse modo, pode-se dizer que a elaboração dessas trajetórias conta com um aspecto relacionado ao pensamento antecipatório (CLEMENTS; SARAMA, 2004), ou seja, o de tentar prever, levantar conjecturas a respeito do que pode ocorrer em sala de aula e de como ele enquanto professor/guia pode agir frente a essas ocorrências.

Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2001a, 2001b, 2002), uma trajetória de ensino e aprendizagem apresenta três aspectos entrelaçados:

- um esquema do assunto, com indicações de quais os elementos centrais do currículo de matemática deve ser ensinado;
- uma trajetória de aprendizagem, o que proporciona uma visão geral do processo de aprendizagem dos alunos;
- uma trajetória de ensino, contendo indicações didáticas para o ensino e como esse pode ser relacionado com o processo de aprendizagem;

De modo geral, o primeiro aspecto diz respeito a uma descrição de possíveis percursos dos alunos durante a reinvenção guiada; o segundo, a como o professor poderá auxiliar os alunos durante o processo de aprendizagem; e o terceiro, a uma descrição das tarefas a serem trabalhadas e dos objetivos pretendidos.

³¹ Neste trabalho, o termo trajetória será utilizado como sinônimo de trajetória de ensino e aprendizagem.

Para tomar decisões adequadas no que se refere à elaboração da trajetória, Van den Heuvel-Panhuizen (2001a, 2001b, 2002) destaca que o professor deve ter ideia dos objetivos para a aprendizagem dos alunos, da maneira como chegará a tais objetivos, das tarefas a serem utilizadas bem como dos percursos dos alunos. Ainda conforme essa autora, sem ter isso em mente é difícil o professor valorizar as estratégias dos alunos e “prever” situações que podem ocorrer nas aulas sob a perspectiva da reinvenção guiada.

Outros aspectos também relevantes que podem auxiliar na tomada de decisões durante a elaboração de trajetórias de ensino e aprendizagem e na manutenção destas durante a reinvenção guiada dizem respeito ao conhecimento do professor acerca dos conteúdos de matemática e da história da matemática, assim como assumir a avaliação escolar como prática de investigação.

Conhecimentos a respeito da história da matemática, por exemplo, podem, segundo Gravemeijer (2008), servir de suporte para que o professor analise como práticas matemáticas se desenvolveram ao longo do tempo, analise as barreiras e impasses enfrentados pelos matemáticos e os avanços ocorridos e, assim, ter ideias que poderão auxiliá-lo a delinear caminhos pelos quais seus alunos poderão passar. Já a avaliação enquanto prática de investigação possibilita ao professor a obtenção de informações a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem de forma que essas lhe permitam conhecer e compreender os modos de os alunos lidarem com as tarefas que lhes são propostas, planejar e executar intervenções que possam auxiliá-los nas atividades que realizam (SANTOS; BURIASCO, 2010).

A trajetória de ensino e aprendizagem pode ser vista, então, como um recurso a mais que o professor pode utilizar tanto para o planejamento do trabalho a ser realizado com os alunos como para o desenvolvimento desse em sala de aula, servindo como um “quadro de referência” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001a).

Em relação ao trabalho dos alunos durante a reinvenção, tem-se que, após resolverem situações realísticas que possibilitem uma variedade de resoluções, podem interagir uns com os outros e, assim, terem a possibilidade de analisar e discutir estratégias e procedimentos que utilizaram. Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2000, 2002, 2010), essa interação pode evocar reflexão por parte dos alunos, o que permite que eles atinjam um nível maior de compreensão e desenvolvam sua própria matemática. Nessa perspectiva, o aluno não é percebido como um mero receptor de uma matemática pronta, ele também é responsável por sua aprendizagem, também é o autor da matemática que aprende, resolve problemas e também realiza investigações.

Para auxiliar os alunos no desenvolvimento de matemática por si próprios, o professor pode, segundo Gravemeijer (2008), explorar suas resoluções, das mais informais até as mais formais, explorar as diferenças existentes entre elas, e discutir com eles aspectos matemáticos subjacentes a cada uma dessas resoluções. Para esse autor, os alunos devem ser motivados a se interessar por esses aspectos e o professor pode auxiliá-los em relação a isso fazendo questionamentos, solicitando que expliquem o que fizeram e o que pensaram.

A fim de sintetizar algumas informações apresentadas nesta seção, o quadro a seguir traz algumas considerações a respeito da dinâmica da aula sob a perspectiva da reinvenção guiada, da Educação Matemática Realística.

Quadro 4 – Alguns aspectos da dinâmica da aula sob a perspectiva da reinvenção guiada

Alguns aspectos da dinâmica da aula sob a perspectiva da reinvenção guiada
<ul style="list-style-type: none"> ✓ O trabalho em sala de aula tem início com a proposição de uma situação realística que possibilita diferentes níveis de matematização. ✓ Após resolverem a situação, os alunos podem interagir uns com os outros e terem a oportunidade de analisar e discutir estratégias e procedimentos que utilizaram. ✓ Durante e após o trabalho dos alunos, o professor pode fazer questionamentos para explorar as resoluções que apresentaram bem como as diferenças existentes entre elas, e discutir aspectos matemáticos subjacente a essas resoluções encorajando-os a se interessar por esses aspectos.

Fonte: autora. Subsídio: livros e artigos de autores da RME referenciados na seção 3.2 deste trabalho

4 ALGUNS ELEMENTOS DO CAMPO DA PRÁTICA DOCENTE

No que se refere ao campo da prática docente, é frequente no cenário educacional a utilização de expressões tais como método de ensino³², estratégia de ensino, procedimento de ensino, meio de ensino. Algumas vezes, ou muitas, essas expressões são utilizadas como sinônimos. Mas o que significa cada uma? Qual a relação existente entre elas? O que a literatura no âmbito educacional possibilita de informações a respeito desse tema?

Neste capítulo são apresentadas considerações quanto a essas expressões e às relações existentes entre elas com o intuito de que possam auxiliar nesta investigação a respeito da utilização da análise da produção escrita em aulas de matemática na perspectiva da reinvenção guiada, mais especificamente em relação ao papel que pode assumir durante o trabalho na reinvenção guiada.

4.1 MÉTODO DE ENSINO

O que é método? Qual o significado da expressão “método de ensino”? O que compõe um método de ensino? Existem tipos de métodos de ensino? Com esta seção objetiva-se apresentar possíveis respostas a esses questionamentos.

A palavra método, segundo o dicionário etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa (CUNHA, 1986, p. 517), tem sua origem no termo grego *méthodos* e pode ser entendida como “ordem que se segue na investigação da verdade, no estudo de uma ciência ou para alcançar um fim determinado”. Segundo a Grande Enciclopédia Larousse Cultural (1998, p. 3957), a palavra método, que, do grego *méthodos*, significa caminho para chegar a um fim, pode assumir alguns significados, tais como: “1. maneira de dizer, de fazer, de ensinar uma coisa, segundo certos princípios e em determinada ordem. 2. maneira de agir. 3. ordem, arranjo, coordenação, organização, programa, processo, técnica”.

Tendo em vista a etimologia da palavra método, a expressão método de ensino pode ser entendida como um caminho que pode ser utilizado pelo professor para

³² É comum também no cenário educacional a utilização do termo metodologia de ensino. No entanto, segundo dicionário Oxford de Filosofia (BLACKBURN, 1997, p. 248), metodologia diz respeito ao “estudo geral do método nos diversos domínios particulares de investigação”. Tendo isso em vista, este trabalho fará referência apenas a método de ensino.

atingir objetivos previstos em relação à aprendizagem dos alunos (HAIDT, 1995; ANASTASIOU, 1997; RAYS, 2000; VERDE; MONTERO, 2006; VIANA, 2010).

Além de uma explicação mais geral, na literatura da área educacional também são encontradas outras explicações que trazem por sua vez outros elementos como constituintes do significado dessa expressão.

Segundo Nérici (1989, p. 55), método de ensino, também denominado método didático, indica aspectos mais gerais de ação didática e pode ser entendido como

um conjunto de procedimentos escolares lógica e psicologicamente estruturados de que se vale o professor para orientar a aprendizagem do educando, a fim de que este elabore conhecimentos, adquira técnicas ou assuma atitudes e ideias.

O autor argumenta ainda que

o método deve ser logicamente estruturado porque precisa apresentar justificativas para os seus passos, a fim de que não se baseie em aspectos secundários ou mesmo caprichosos de quem deva dirigir a aprendizagem dos alunos. Diz-se também que o método deve ser psicologicamente estruturado, porque precisa atender a peculiaridades comportamentais e possibilidades de aprendizagem dos alunos a que se destina [...] (NÉRICI, 1989, p. 55).

Segundo essa perspectiva, esse autor complementa que o método de ensino tem de ser acompanhado por um ciclo, denominado ciclo docente, composto pelas fases: planejamento, execução e avaliação. A fase do planejamento diz respeito ao estabelecimento do que será trabalhado com os alunos e do detalhamento de como se dará esse trabalho. Na fase de execução ocorre o desenvolvimento do trabalho, e a fase de avaliação é a que possibilita ao professor a obtenção de informações acerca dos processos de ensino e de aprendizagem.

No que concerne aos tipos de método de ensino, Nérici (1989) destaca que há métodos de ensino individualizado, coletivo e de grupo. Os métodos de ensino individualizados “consistem em se dirigirem diretamente a cada educando, individualmente, atendendo às condições pessoais de preparo, de aptidões e de motivação” (NÉRICI, 1989, p. 59). Já os métodos de ensino coletivos “são aqueles que se dirigem, ao mesmo tempo e da mesma forma, para todos os educandos igualmente, procurando atuar, de modo geral, com base no ‘educando médio’ ou na ‘classe média’ ou ‘grupo instrucional’ (NÉRICI, 1989, p. 59). Os métodos de ensino em grupos “são aqueles que fazem ênfase na interação dos

educandos, interagindo entre si, em pequenos grupos, cujo funcionamento se baseia na dinâmica de grupo [...]” (NÉRICI, 1989, p. 59).

Para Libâneo (1994, p. 149), os métodos de ensino são determinados pela relação entre objetivo pretendido e conteúdo a ser trabalhado, e dizem respeito “ao ‘como’ do processo de ensino, englobando as ações a serem realizadas pelo professor e pelos alunos para atingir os objetivos e conteúdos”. A fim de esclarecer sua explicação a respeito desse tema, o autor complementa

o professor, ao dirigir e estimular o processo de ensino em função da aprendizagem dos alunos, utiliza intencionalmente um conjunto de ações, passos, condições externas e procedimentos, a que chamamos de métodos de ensino (LIBÂNEO, 1994, p. 150).

O autor destaca que os métodos de ensino não se reduzem a procedimentos, que esses são apenas formas de ação docente. Os métodos de ensino, segundo ele, possuem as seguintes características: “estão orientados para objetivos; implicam uma sucessão planejada e sistematizada de ações, tanto do professor quanto dos alunos; requerem a utilização de meios” (LIBÂNEO, 1994, p. 149).

Para reforçar a ideia de que o método de ensino não se reduz a procedimentos, o autor argumenta que eles, os métodos de ensino,

decorrem de uma concepção de sociedade, da natureza da atividade prática humana no mundo, do processo de conhecimento e, particularmente, da compressão educativa numa determinada sociedade. Nesse sentido, antes de se constituírem em passos, medidas e procedimentos, os métodos de ensino se fundamentam num método de reflexão e ação sobre a realidade educacional, sobre a lógica interna e as relações entre os objetos, fatos e problemas dos conteúdos de ensino, de modo a vincular a todo momento o processo de conhecimento e a atividade prática humana no mundo (LIBÂNEO, 1994, p. 151).

Em relação aos tipos de métodos de ensino, esse autor classifica-os em método de exposição pelo professor, método de trabalho independente, método de elaboração conjunta, método de trabalho em grupo. No método da exposição pelo professor, “os conhecimentos, habilidades e tarefas são apresentadas, explicadas ou demonstradas pelo professor. A atividade dos alunos é receptiva, embora não necessariamente passiva” (LIBÂNEO, 1994, p. 161). O método de trabalho independente “consiste de tarefas, dirigidas e orientadas pelo professor, para que os alunos as resolvam de modo relativamente independente e criador” (LIBÂNEO, 1994, p. 163). Já o método de elaboração conjunta é

apresentado pelo autor como “uma forma de interação ativa entre o professor e os alunos visando à obtenção de novos conhecimentos, habilidades, atitudes e convicções [...]”(LIBÂNEO, 1994, p. 167). O método de trabalho em grupo “consiste basicamente em distribuir temas de estudos iguais ou diferentes a grupos fixo ou variáveis, compostos de 3 a 5 alunos. O trabalho em grupo tem sempre um caráter transitório, ou seja, deve ser empregado eventualmente, conjugado com outros métodos [...]” (LIBÂNEO, 1994, p. 170).

Sant’Anna e Menegolla (1995, p. 46) definem método de ensino como “um modo de conduzir a aprendizagem, buscando o desenvolvimento integral do educando, através de uma organização precisa de procedimentos que favoreçam a consecução dos propósitos estabelecidos”.

Tendo isso em vista, esses autores explicam que, de maneira geral, os métodos de ensino podem ser classificados em três grandes grupos: métodos didáticos orais, que podem ser reduzidos em método expositivo e método interrogativo, métodos intuitivos e métodos ativos. Para esses autores, “no método expositivo, o educador é ativo e o aluno, passivo, enquanto que no interrogativo o aluno e o educador interagem” (SANT’ANNA; MENEGOLLA, 1995, p. 46). No método intuitivo, “o fundamento é a intuição; o aluno aprende tendo uma visão das coisas em seu ambiente natural [...]” (SANT’ANNA; MENEGOLLA, 1995, p. 46). O método ativo está baseado na “auto-atividade do aluno” (SANT’ANNA; MENEGOLLA, 1995, p. 46), em seu fazer.

Para Machado (2000, p. 03), os métodos de ensino são

as formas através das quais os professores irão trabalhar os diversos conteúdos com a finalidade de atingirem os objetivos propostos. Compreende as estratégias e procedimentos adotados no ensino por professores e alunos. Os métodos se caracterizam por ações conscientes, planejadas e controladas, e visam atingir, além dos objetivos gerais e específicos propostos algum nível de generalização.

Esse autor destaca que a sua definição compreende o método em duas dimensões: uma referente ao plano de ação que será executado pelo professor e por seus alunos durante os processos de ensino e de aprendizagem, e a outra que diz respeito às atividades que esses desenvolverão para atingir os objetivos propostos (MACHADO, 2000). Por conseguinte, a definição apresentada por esse autor faz referência a estratégias e procedimentos adotados no ensino.

Para Amezola (2005, p. 41), método de ensino pode ser entendido como uma rota a ser seguida. O autor destaca que “el método de enseñanza se refiere no sólo a una

sucesión de actividades o acciones ordenadas para promover procesos de aprendizajes particulares, sino que se encuentra en relación con la combinación de todos los elementos desde una perspectiva educativa amplia”.

A partir das definições e tipos de métodos apresentados, é possível sintetizar que

- as expressões método didático e método de ensino parecem ser consideradas sinônimos;
- a expressão método de ensino parece ser entendida como um caminho para atingir objetivos estabelecidos;
- todas essas definições apresentam o termo procedimento;
- além do termo procedimento, as definições apresentadas por Libâneo (1994) e Machado (2000) também fazem referências às ações planejadas ou estratégias;
- tanto a classificação de Nérici (1989) como a de Libâneo (1994) evidencia um tipo de método de ensino que enfatiza a interação ou cooperação entre os alunos;
- um método de ensino que destaca a interação entre professor e alunos é apresentado tanto na classificação de Libâneo (1994) como na classificação de Sant’Anna e Menegolla (1995);
- o método expositivo ou da exposição é apresentado como um tipo de método de ensino por Libâneo (1994) e por Sant’Anna e Menegolla (1995).

4.2 ESTRATÉGIA DE ENSINO

Na seção anterior foi possível constatar que entre as definições de método de ensino há a que menciona a palavra estratégia. O que é possível obter de informações a respeito dessa palavra? E a respeito da expressão estratégia de ensino? Assim como há classificações para os métodos de ensino, há também classificações para estratégias de ensino? Esses são alguns dos questionamentos que orientaram a elaboração desta seção.

Segundo o dicionário etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa (CUNHA, 1986, p. 333), a palavra estratégia, do grego *stratégia*, significa “arte (militar) de planejar e executar movimentos e operações (de tropas)”. Fazendo referência também à

etimologia da palavra, a Grande Enciclopédia Larousse Cultural (1998, p. 2273) apresenta nesse verbete: “1. arte de planejar operações de guerra. 2. arte de combinar a ação das forças militares, políticas, morais, econômicas, implicadas na condução de uma guerra ou na preparação da defesa de um estado[...]”. O dicionário Houaiss da Língua Portuguesa (2001, CD ROM) também refere diferentes significados para a palavra estratégia. De um modo geral, segundo esse dicionário, estratégia pode ser entendida como “a arte de aplicar com eficácia os recursos de que se dispõe ou a arte de explorar as condições favoráveis de que desfrute, visando alcançar determinados objetivos” (HOUAISS, 2001, CD ROM).

Ainda no âmbito dos significados da palavra estratégia, pode-se fazer referência a Hadji (1994), segundo o qual “pode entender-se por estratégia a orientação geral das operações e dos meios a utilizar. No seu sentido primeiro, a estratégia é a arte de conduzir, de fazer avançar um exército. Em sentido lato, o termo designa um conjunto de ações coordenadas tendo em vista uma finalidade” (HADJI, 1994, p. 47).

A partir dos significados apresentados, pode-se considerar que, de modo geral, estratégia refere-se ou ao planejamento de operações ou à aplicação (exploração) de recursos (condições) ou ao planejamento e execução de operações.

Direcionando a atenção para o âmbito das explicações da expressão estratégia de ensino, no contexto educacional, têm-se como referência neste trabalho autores como Sant’Anna e Menegolla (1995), Haidt (1995), Villani e Freitas (2001), Rajadell (2001, 2012), Amezola et al (2005) e Verde e Montero (2006).

Sant’Anna e Menegolla (1995, p. 48) definem estratégia de ensino como “a ordenação sequencial de procedimentos, iniciando-se pelo diagnóstico e concluindo-se pela avaliação”. Ainda os autores argumentam que estratégia de ensino também pode ser definida como “um plano de ação, estruturado de forma a oferecer uma visão conjunta e planejada do processo ensino x aprendizagem” (SANT’ANNA; MENEGOLLA, 1995, p. 48).

Considerando as definições apresentadas por esses autores, a primeira enfatiza a ordem dos procedimentos a serem realizados e a segunda, o plano de ação que possibilitará ao professor uma visão mais geral do trabalho a ser realizado. Assim, a segunda definição apresentada por esses autores parece ser mais ampla que a primeira, englobando-a.

Segundo Haidt (1995, p. 144), a expressão estratégia de ensino é empregado para “designar os procedimentos e recursos didáticos a serem utilizados para atingir os objetivos desejados e previstos”. Nesse caso, a definição apresentada por essa autora enfatiza “o como fazer”, que diz respeito aos procedimentos, e “o que utilizar”, que se refere aos recursos didáticos.

Para Villani e Freitas (2001, p. 05), a terminologia estratégia de ensino também denominada estratégia didática é utilizada para referir-se a “um conjunto de ações implicitamente planejadas e conduzidas pelo professor para que ao final delas uma boa parte dos alunos se comprometam a realizar uma tarefa ou um trabalho didático da melhor maneira possível”.

De certo modo, a definição apresentada por esses autores parece sintetizar as duas propostas de Sant’Anna e Menegolla (1995) por englobar os procedimentos a serem utilizados e o planejamento de como serão conduzidos.

Rajadell (2012, p.105)³³ utiliza a expressão estratégia didática, definindo-a como “atuação seqüenciada potencialmente consciente do profissional em educação, guiada por um ou mais princípios da Didática e encaminhada à otimização do processo de ensino-aprendizagem”.

A partir da definição dessa autora, as estratégias didáticas podem ser classificadas em três grupos: estratégias centradas no formador, estratégias centradas no aluno e estratégias centradas no meio³⁴. A autora salienta que tal classificação é feita tendo em vista “o protagonista que organiza e dirige a situação educativa” (RAJADELL, 2012, p. 112).

Nas estratégias que se centram no formador, a responsabilidade recai sobre o professor ou o formador que “comunica a seus alunos um conjunto de conhecimentos em um contexto específico, sob um controle de espaço e tempo totalmente planejado” (RAJADELL, 2012, p. 112). Nas estratégias centradas no aluno, o protagonista é o aluno, que assume um papel fundamental no processo de formação. No entanto, a autora destaca que, mesmo o aluno sendo protagonista do processo de formação, o professor não está ausente e sim lado a lado do aluno com o objetivo de assegurar a efetividade da aprendizagem.

Rajadell (2001, 2012) explica que, nas estratégias em que o professor ou o aluno são protagonistas, o “meio” equivale a um suporte e que, nas estratégias que se centram no meio, este, por ser um recurso com potencial formativo, transforma-se em protagonista da docência, mesmo tendo alguém que o manipule e tome decisões.

Em relação a essas estratégias, que possuem o meio como protagonista, ou seja, que têm os recursos como protagonistas, essa autora explica que elas podem ser

³³ Segundo Radajell (2001, 2012), os princípios da Didática dizem respeito a oito pilares que sustentam a ação educativa: princípio da comunicação, princípio de atividade, princípio de individualização, princípio de socialização, princípio de globalização, princípio de criatividade, princípio de intuição, princípio de abertura. Quanto à otimização do processo de ensino-aprendizagem, a autora explica que essa otimização abrange a tripla dimensão: do saber, saber fazer e ser.

³⁴ A autora explica que o meio equivale a algum recurso utilizado durante o trabalho com os alunos. Desse modo, nesse texto, a palavra “meio” não é utilizada para fazer referência ao ambiente escolar ou ao ambiente em que o aluno vive fora da escola.

diferenciadas pelo tipo de suporte que oferecem: tecnológico, textual e corporal. Podem oferecer suporte tecnológico materiais audiovisuais, auditivos, informáticos; suporte textual, a impressa escrita, relatos escritos, entre outros; e suporte corporal, o diálogo, a representação cênica ou mímica.

Para Verde e Montero (2006, p. 03, tradução nossa³⁵), as estratégias de ensino dizem respeito

as ações que são realizadas pelo professor, com o objetivo consciente de que o aluno aprenda de maneira mais eficaz, são ações sequenciadas controladas pelo docente. Têm um alto grau de complexidade. Incluem meios de ensino para serem colocadas em prática, o controle e avaliação dos propósitos. As ações que são planejadas dependem do objetivo derivado do objetivo geral de ensino, das características psicológicas dos alunos e do conteúdo a ser ensinado, entre outros.

Além de utilizarem as expressões estratégia didática ou estratégia de ensino, Rajadell (2001) e Verde e Montero (2006) também fazem referência a expressão estratégia de aprendizagem. Para Rajadell (2001, p. 25, tradução nossa³⁶), as estratégias de aprendizagem equivalem à “atuação sequenciada, consciente ou inconsciente, por parte do aluno com a intencionalidade de aprender de forma total ou parcial um novo conceito [...]”. Verde e Montero (2006, p. 03, tradução nossa³⁷) referem-se às estratégias de aprendizagem como sendo “as ações que o aluno realiza, com o objetivo sempre consciente de apoiar e melhorar sua aprendizagem, são ações sequenciadas que são controladas pelo aluno”.

Além das expressões estratégia de ensino, estratégia didática, estratégia de aprendizagem, há também estratégia de ensino aprendizagem, que, segundo Amezola et al (2005), é difícil de ser delimitada conceitualmente, pois faz alusão a muitos conceitos que também não são fáceis de definir e que recebem significados diferentes dependendo do autor e do contexto. Entretanto, os autores fazem uma distinção entre estratégia de ensino e estratégia de aprendizagem com o objetivo de explicá-las. Para eles, estratégia de ensino abarca as decisões tomadas pelo professor para escolher e realizar as atividades docentes de modo coordenado, visando auxiliar os alunos no processo de aprendizagem, e estratégias de

³⁵ “Las acciones las realiza el maestro, com el objetivo consciente que el alumno aprenda de la manera más eficaz, son acciones secuenciadas que son controladas por el docente. Tienen un alto grado de complejidad. Incluyen medios de enseñanza para su puesta em práctica, el control y evaluación de los propósitos . Las acciones que se planifiquen dependen del objetivo derivado del objetivo general de la enseñanza, las características psicológicas de los alumnos y del contenido a enseñar, entre otras”.

³⁶ “actuación secuenciada, consciente o inconsciente, por parte del alumno com la intencionalidad de aprender de form total o parcial um nuevo concepto [...]”.

³⁷ “Las acciones las realiza el alumno , com el objetivo siempre consciente de apoyar y mejorar su aprendizaje, son acciones secuenciadas que son controladas por el estudiante”.

aprendizagem dizem respeito aos processos de tomada de decisão por parte dos alunos com o objetivo de alcançar algum objetivo em relação ao processo de aprendizagem.

Tendo em vista as informações apresentadas, é possível tecer algumas considerações, quais sejam

- as expressões estratégia didática e estratégia de ensino parecem ser considerados sinônimos;
- as estratégias de ensino dizem respeito às ações planejadas do professor ou decisões tomadas por ele, e as estratégias de aprendizagem, às ações dos alunos;
- todas as definições de estratégia de ensino citam, de alguma forma, que com ela visa-se atingir objetivos estabelecidos;
- considerando as estratégia de ensino como ações planejadas, pode-se pensar então que a estratégia de ensino possui uma dimensão de planejamento, concernente a “o que” e a “como” pode ou deve ser feito e uma dimensão de ação que se refere à execução do que foi planejado;
- incluem meios de ensino para serem colocadas em prática;
- dependendo do “protagonista que organiza e dirige a situação educativa” (RAJADELL, 2012, p. 112), as estratégias de ensino podem ser centradas no formador, no aluno ou no meio.

4.3 PROCEDIMENTO DE ENSINO

Algumas definições de método de ensino e de estratégia de ensino apresentadas nas seções anteriores destacam a palavra procedimento ou a expressão procedimento de ensino (NÉRICI, 1989; LIBÂNEO, 1994; SANT’ANNA; MENEGOLLA, 1995; HAIDT, 1995). Esta seção está voltada a apresentar informações que auxiliem no seu entendimento.

Em relação à palavra procedimento, o dicionário etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa (CUNHA, 1986, p. 636) destaca que procedimento, de proceder, do latim *procedere*, significa “ter origem, agir”. A Grande Enciclopédia Larousse Cultural (1998, p. 4789) apresenta alguns significados: “1. ação ou efeito de proceder. 2. maneira de agir; comportamento; maneira de viver, conduta. 3. Processo seguido para

conduzir uma experiência. 4. Sucessão de operações a serem executadas para realizar uma tarefa determinada”. Em referência também a procedimento como “maneira de agir”, o dicionário Houaiss da Língua Portuguesa (2001, CD ROM) evidencia: “1. modo de proceder, de portar(-se); conduta, comportamento. 2. modo de fazer (algo)[...]”.

Assim sendo, pode-se dizer que, de um modo geral, procedimento diz respeito a um fazer, à execução de “alguma coisa”.

Em relação à expressão procedimento de ensino, autores tais como Haidt (1995), Sant’Anna e Menegolla (1995), Rajadell (2012) e Verde e Montero (2006) apresentam algumas considerações visando explicá-la. No entanto, é comum encontrar autores (NÉRICI, 1989; LIBÂNEO, 1994) que, apesar de fazerem referência a ela em definições de método de ensino ou estratégia de ensino, não apresentam informações do que consideram ao utilizá-la.

Haidt (1995, p. 143), referindo-se a Turra *et al.* (1975, p. 126), alude a procedimento de ensino como “ações, processos ou comportamentos planejados pelo professor, para colocar o aluno em contato direto com coisas, fatos ou fenômenos que lhes possibilitem modificar sua conduta, em função dos objetivos previstos”. Tendo em vista essa definição, a autora conclui que procedimento de ensino relaciona-se à forma de intervenção em sala de aula.

Considerando os procedimentos de ensino como procedimentos didáticos, Sant’Anna e Menegolla, (1995, p.43) explicam que esses “expressam, em linhas gerais e específicas, a ação docente e discente capaz de conduzir ao alcance dos objetivos”. Os autores complementam que tais procedimentos “constituem-se pela indicação clara, objetiva, precisa das ações a serem vivenciadas pelos alunos e estabelecidas pelo professor e/ou alunos [...]” (SANT’ANNA; MENEGOLLA, 1995, p.43), tendo em vista os conteúdos a serem trabalhados e os objetivos estabelecidos.

Segundo Verde e Montero (2006, p. 06, tradução nossa³⁸), para o desenvolvimento das estratégias de ensino há a necessidade de escolher os procedimentos que “estão associados às condições em que a atividade é realizada, portanto tem um caráter mais concreto, são as maneiras de atuar, dizem respeito a uma série de passos ou etapas para atingir o objetivo”.

³⁸ “Están asociados a las condiciones em las que se realiza la actividad, por lo tanto tienen un carácter más concreto. Son la manera de actuar , trata de una serie de pasos o fases para conseguir el fin”.

Para Rajadell (2012), o conceito de procedimento engloba uma série de atividades que uma pessoa realiza tendo em vista a resolução de uma tarefa, e que configura a dimensão do saber fazer³⁹.

No que tange às considerações apresentadas por esses autores acerca de procedimentos de ensino, pode-se dizer que

- procedimentos de ensino e procedimentos didáticos parecem ser considerados sinônimos;
- evidenciam um aspecto mais operacional e dizem respeito ao “fazer”, a realização de “algo”, e
- esse aspecto operacional leva em consideração intencionalidades previstas, isto é, os procedimentos de ensino são realizados tendo em vista objetivos estabelecidos.

4.4 MEIOS DE ENSINO

A palavra meio, segundo a Grande Enciclopédia Larousse Cultural (1998, p. 3904), do latim *medius*, pode significar entre outras coisas “o que serve para alcançar algum fim”, “possibilidade, poder de fazer alguma coisa”. Nesse mesmo sentido, o dicionário Houaiss da Língua Portuguesa (2001, CD ROM) apresenta as seguintes acepções: “possibilidade de fazer qualquer coisa”, “aquilo que serve para ou permite alcançar um fim”, “[...] instrumento que permite a realização de algo”.

Em relação à expressão meio de ensino, autores como Libâneo (1994), Sant’Anna e Menegolla (1995), Machado (2000) e Vianna (2010) apresentam algumas ponderações acerca dessa expressão sobre as quais são tecidas as considerações que seguem.

Para Libâneo (1994, p. 173), meios de ensino designam “todos os meios e recursos materiais utilizados pelo professor e pelos alunos para a organização e condução metódica do processo de ensino e aprendizagem”. Tendo isso em vista, o autor identifica alguns equipamentos tais como quadro-negro, projetor de *slides*, livros, dicionários, rádio como meios de ensino gerais.

Ao se referirem a expressão meio de ensino, Sant’Anna e Menegolla (1995) salientam que não há na comunidade escolar uma conotação comum para ela e que o

³⁹ Segundo Rajadell (2012, p.110). “a dimensão do saber fazer pretende que a pessoa desenvolva aquelas habilidades que lhe permitam a realização de certas associações ou tarefas, tendo em conta a capacidade de modificação e transferência posterior a diferentes contextos.

entendimento da expressão está condicionado ao uso que se faz dela. Apesar disso, a fim de possibilitar ao leitor algum entendimento desse assunto, os autores defendem uma conotação ampla destacando os meios instrucionais que dizem respeito aos “equipamentos como projetores de slides, retroprojetores, os materiais que contêm as mensagens que serão transmitidas por meio desses equipamentos, bem como as pessoas, técnicas, o lugar ou ambiente utilizados para que se efetue a instrução” (SANT’ANNA; MENEGOLLA, 2005, p. 47).

Desse modo, tendo como referência essas considerações, os autores exemplificam que, num plano de ensino, os meios de ensino podem englobar as situações de experiência, os recursos, sejam eles físicos ou materiais ou humanos, as técnicas e inclusive instrumentos de avaliação.

Os meios de ensino, segundo Machado (2000, p. 06),

são os recursos materiais portadores de informação que, utilizados por professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem, sob determinadas condições previamente planejadas, facilitam a comunicação docente e o aprendizado, seja pela apresentação ou representação de aspectos da realidade concernentes ao currículo, seja pela mediação de sistemas simbólicos que permitam uma relação crítico ativa dos alunos com o seu entorno – o meio físico e o espaço sócio-cultural.

Apesar de se referir aos meios de ensino como recursos materiais portadores de informação, esse autor não apresenta exemplos que permitam elucidar quais recursos atuam desse modo. O que ele faz é apenas identificar materiais, como cadeiras, mesas, apagadores, que atuam como instrumentos auxiliares do trabalho docente.

A partir dessas considerações a respeito de meios de ensino apresentadas por Machado (2000), pode-se entender que há recursos materiais que atuam passivamente nos processos de ensino e de aprendizagem como instrumentais auxiliares, que são os equipamentos presentes no ambiente escolar, e recursos que são portadores de informação específica, necessários ao alcance de determinados objetivos em relação ao processo educativo. No caso desses recursos, pode-se pensar em livros, filmes, a produção escrita de alunos, entre outros.

Para Viana (2010), os meios de ensino são grandes coadjuvantes do processo de ensino-aprendizagem e devem ser selecionados com critérios rigorosos para que possam favorecer o desenrolar do processo, caso contrário, podem se constituir apenas em aparatos inúteis.

Segundo essa autora, os meios de ensino, do ponto de vista da comunicação,

são os canais através dos quais se transmitem as mensagens docentes. É o sustento material das mensagens no contexto escolar. Os meios servem aos métodos de ensino: para exposições, trabalho independente do aluno, as aulas práticas, ensino por meio de problemas e etc. Servem tanto para o professor quanto para o aluno (VIANA, 2010, p. 06).

Ainda segundo Viana (2010), os meios visuais ou sonoros, livros, laboratórios escolares e tudo o que serve de suporte ao trabalho do professor podem ser considerados como meio de ensino.

Face às informações apresentadas nesta seção, tem-se que os meios de ensino

- ✓ são recursos, de qualquer natureza, que auxiliam o trabalho do professor;
- ✓ podem ser instrumentos auxiliares que atuam passivamente nos processos de ensino e de aprendizagem e
- ✓ podem ser recursos portadores de informação, necessários ao alcance de objetivos previstos.

4.5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DAS EXPRESSÕES APRESENTADAS E DA RELAÇÃO ENTRE ELAS

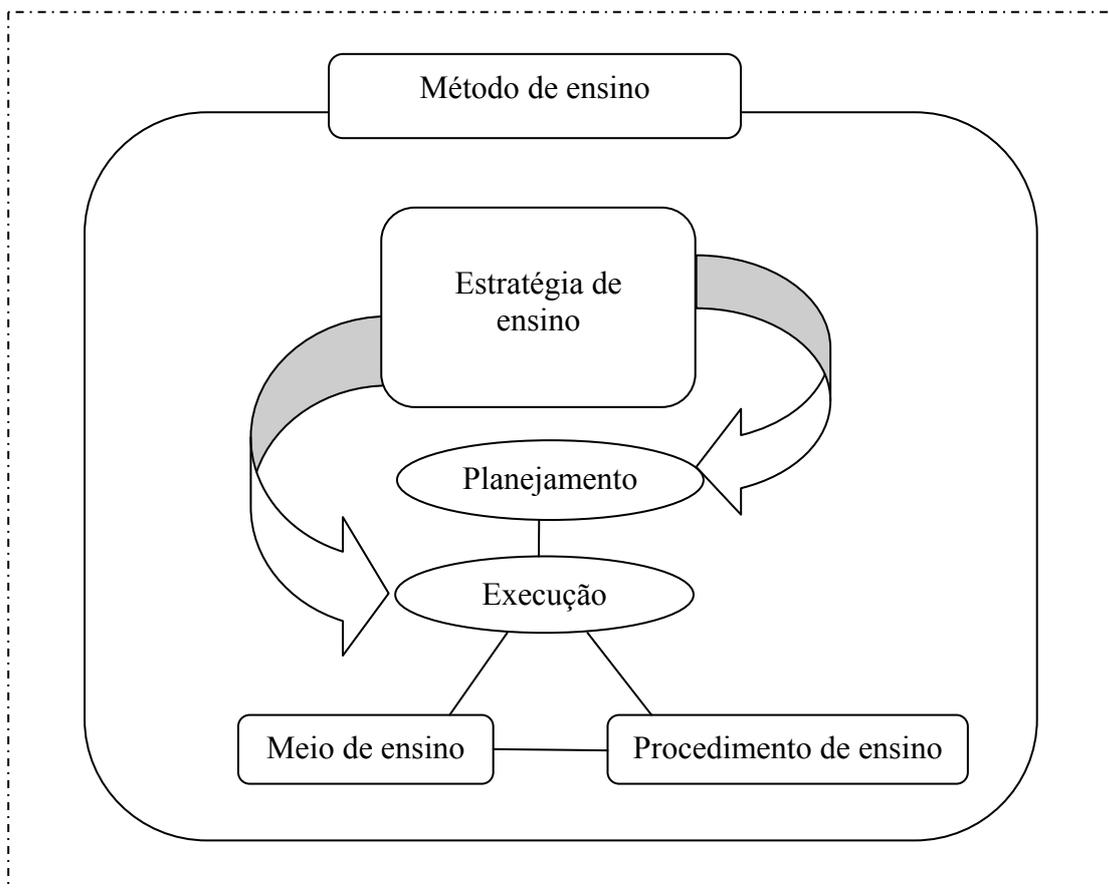
Tendo em vista as leituras e interpretações realizadas a respeito de método, estratégia, procedimento e meio de ensino, as informações apresentadas e as sínteses realizadas ao final de cada seção, algumas considerações podem ser tecidas:

- ✓ método de ensino diz respeito ao caminho a ser utilizado pelo professor para atingir objetivos estabelecidos em relação à aprendizagens dos alunos, engloba estratégias, procedimentos e meios de ensino.
- ✓ estratégia de ensino diz respeito às decisões ou ações tomadas pelo professor e possui uma dimensão de planejamento e uma dimensão de execução. A dimensão de planejamento refere-se ao plano do “o que” deve ser feito e do “como” deve ser feito, e a dimensão da ação refere-se à execução do que foi planejado. Além disso, para que a estratégia de ensino seja posta em prática faz-se necessária a utilização de meios de ensino.

- ✓ procedimento de ensino possui um aspecto mais “operacional” e diz respeito ao “fazer”, à realização de “algo”, aos passos ou operações a serem realizadas.
- ✓ meio de ensino são recursos, de qualquer natureza, que auxiliam o trabalho do professor. Podem ser instrumentos auxiliares, que atuam passivamente nos processos de ensino e de aprendizagem, ou portadores de informação, necessários à satisfação de objetivos estabelecidos.

No que se refere à relação existente entre método, estratégia, procedimento e meio de ensino, levando em conta essas considerações, é possível apresentar, por meio de um esquema, a seguinte relação:

Figura 1 - Esquema da relação existente entre método, estratégia, procedimento e meio de ensino



Fonte: autora

Por meio desse esquema pode-se entender o método de ensino como um elemento de dimensão ampla no campo da prática docente visto que oportuniza ao professor uma visão geral do caminho que ele poderá utilizar para orientar suas ações de modo a

auxiliar os alunos em suas aprendizagens. Por sua amplitude, o método de ensino engloba outros elementos pertencentes ao campo do trabalho docente, isto é, engloba estratégia, procedimento e meio de ensino.

A estratégia de ensino, que compreende “o que” deve ser feito e “como” deve ser feito, comporta uma dimensão de planejamento e uma de execução, sendo a dimensão de execução posta em prática tendo em vista, entre outros, as informações oriundas da dimensão do planejamento.

Para a efetivação da dimensão de execução, ou seja, para que a estratégia de ensino seja posta em prática, são necessários procedimentos de ensino, que são operações ou passos que devem ser realizados, e meios de ensino, que são recursos que auxiliam na operacionalização desses passos.

Cabe ressaltar que essa relação é uma dentre tantas que podem ser estabelecidas a partir de diferentes leituras e interpretações a respeito do assunto. Isso justifica a utilização da linha pontilhada no esquema apresentado na Figura 1.

5 ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA EM AULAS DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA REINVENÇÃO GUIADA

Neste capítulo são apresentadas considerações a respeito de investigações desenvolvidas por membros do GEPEMA (CIANI, 2012; PIRES, 2013) que utilizaram a análise da produção escrita em aulas de matemática na perspectiva da reinvenção guiada, sob a luz da RME. Com isso, objetiva-se obter informações que possam auxiliar a identificar o papel que a análise da produção escrita pode assumir em aulas de matemática na perspectiva da reinvenção guiada, os papéis do professor e do aluno durante esse trabalho e a dinâmica das aulas.

5.1 A INVESTIGAÇÃO REALIZADA POR CIANI (2012)

Em seu trabalho de doutorado, Ciani (2012) apresenta propostas de intervenções a serem desenvolvidas em aulas de matemática seguindo a perspectiva da reinvenção guiada, sob a luz da RME. Tais propostas⁴⁰ são apresentadas pela autora com o objetivo de oportunizar, a partir da análise da produção escrita de alunos, subsídios operacionais para a constituição de oportunidades de matematização em aulas de matemática, e de contribuir para a efetivação da avaliação da aprendizagem escolar como uma prática de investigação.

Esses objetivos se justificam, segundo a autora, tendo em vista que, “para a aprendizagem, é desejável que os construtos dessa prática de investigação não permaneçam apenas como informação, mas que, por meio da reflexão, retornem à prática de sala de aula efetivando-se em intervenções de ensino para a aprendizagem [...]” (CIANI, 2012, p. 61).

A autora também destaca que seu estudo visa ainda auxiliar o professor em seu trabalho com o aluno em sala de aula, de modo que três objetivos possam ser atingidos, quais sejam, estimular os alunos a

⁴⁰ A autora utiliza a expressão “intervenção para a aprendizagem” e justifica que essa expressão “nada mais é do que uma ‘expansão natural’, um componente do processo de avaliação da aprendizagem visada pelo GEPEMA, avançando, cada vez mais, em uma operacionalização em sala de aula, de sua perspectiva de avaliação da aprendizagem, que muito se assemelha à perspectiva de avaliação de vertente teórica de EMR” (CIANI, 2012, p. 65).

- o “fazer um levantamento de seus contextos, de situações imagináveis para eles a partir do enunciado do item” (CIANI, 2012, p. 69).
- o “matematizar nos contextos levantados por eles em situações-problemas que evocam algum conceito matemático para sua resolução. No caso, pode ser a própria ideia que os alunos fazem de um conceito” (CIANI, 2012, p. 70).
- o “obter uma forma de resolver diversos problemas que precisem do conceito ou ideia, ou ideias, da Matemática, inerentes à resolução daquele item; que eles consigam generalizar, de alguma maneira, formalizar o conceito e sejam capazes de aplicá-lo em outra situação” (CIANI, 2012, p. 70).

Para a elaboração dessas propostas, foram tomadas como referência as análises realizadas por Celeste (2008), Santos (2008) e Ferreira (2009) das produções escritas de alunos e professores presentes em duas questões não-rotineiras de matemática, retiradas das aferições do PISA.

Segundo Ciani (2012, p. 63), a análise da produção escrita apresentada nesses trabalhos é tomada como ponto de partida por fornecer “indícios para a construção da intervenção sugerida ao fim de cada apresentação da questão, na forma de uma trajetória de ensino e de aprendizagem; chamada aqui de hipotética porque ela é imaginada a partir do material escrito recolhido dos alunos”. Além disso, porque, por meio dessa análise, também se “busca identificar quais foram os problemas resolvidos nas produções escritas, o que se pode matematizar a partir deles e o que se pode fazer a partir da resolução já apresentada pelo resolvidor” (CIANI, 2012, p. 67).

Ainda em relação à utilização da análise da produção escrita como ponto de partida para a elaboração de intervenções, Ciani (2012, p. 68) complementa que

o professor, ao interpretar, analisar e tomar suas decisões em relação às maneiras idiossincráticas da atividade matemática dos seus estudantes, negociando essas maneiras de lidar, oportuniza algumas outras maneiras que, dentro de um determinado contexto, podem ser mais favoráveis aos alunos.

Também destaca que, após os alunos resolverem um item ou uma questão de matemática, o professor deve recolher as produções escritas e fazer uma análise detalhada de cada uma delas com o intuito de identificar as maneiras de lidar de cada um deles. Sugere

essa autora, ainda, que o professor faça a sistematização dessas produções, “agrupando as semelhantes, reconhecendo contextos, justificações e identificando na sua resolução as maneiras de lidar com o enunciado, a fim de tomá-las como desencadeadoras de diálogos ou discussões que favoreçam os estudantes à matematização” (CIANI, 2012, p. 70).

Tendo em vista tais considerações, a análise da produção escrita em matemática é utilizada para a obtenção de informações que possibilitem ao professor conhecer e compreender o processo de aprendizagem dos alunos e, posteriormente, planejar e executar intervenções de forma que orientem tanto o processo de ensino quanto o processo de aprendizagem (SANTOS; BURIASCO, 2010).

Desse modo, as informações obtidas a partir da análise da produção escrita dos alunos podem servir para a elaboração de trajetórias de ensino e aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001a, 2001b, 2002), as quais poderão auxiliar o professor a orientar os alunos durante o processo de matematização (FREUDENTHAL, 1991).

Assim, a análise da produção escrita dos alunos em matemática pode subsidiar o professor em seu planejamento de como ele poderá explorar, durante as aulas sob a perspectiva da reinvenção guiada, as resoluções apresentadas pelos alunos de modo que elas possam servir de suporte para a resolução de outros problemas e fonte de conhecimento matemático mais formal (TREFFERS; GOFREE, 1985; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2000, 2002, 2003; GRAVEMEIJER, 2005).

Quanto à elaboração e ao desenvolvimento de propostas de intervenção para aulas de matemática sob a luz da reinvenção guiada e a partir da análise da produção escrita dos alunos, Ciani (2012) explica que três momentos podem ser levados em consideração:

- “1º momento - Identificando o terreno”: o professor traz para a sala de aula situações indicadas pelos estudantes em suas produções e promove discussões que levem ao conhecimento de todos eles os diversos significados para conceitos ou assuntos matemáticos que surgiram a partir da produção escrita (CIANI, 2012, p. 84).
- “2º momento - Construindo ferramentas específicas”: os estudantes podem ser organizados em duplas e serem orientados a discutir as diversas situações e a utilizar outros materiais para obterem informações. Segundo a autora, “o dicionário, os livros textos exercem um papel fundamental nessa etapa e devem ser frequentemente consultados pelos alunos, para auxiliá-los nas tomadas de decisões, na escolha de modelos adequados e válidos para resolver as situações” (CIANI, 2012, p. 90).

Ainda para esse momento, a autora salienta que o professor pode prestar atendimento e lançar questionamentos às duplas.

- o “3º momento – discussão”: constitui-se em um momento que possibilita ao estudante dar significado a conceitos ou assuntos matemáticos, para conjecturar, organizar, simbolizar e esquematizar na busca de criar um modelo, entre outros acontecimentos que favoreçam a atividade de matematização dos alunos.

Com base nessas considerações apresentadas por Ciani (2012), pode-se dizer que, no primeiro momento, as atividades dos alunos ocorridas, possivelmente, em níveis diferentes de compreensão, e observadas via análise da produção escrita, se tornam objeto de discussão e reflexão, o que possibilitará que, em um segundo momento, os alunos aprimorem suas estratégias de resolução (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

Ainda no primeiro momento, os questionamentos feitos pelo professor aos alunos a respeito das diferentes resoluções, do entendimento que tiveram dos conceitos ou assuntos matemáticos que surgiram a partir delas, podem contribuir para que eles venham a se interessar pelos aspectos matemáticos mais formais da matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2000, 2002, 2003; GRAVEMEIJER, 2005, 2008).

Pode-se observar, a partir de informações acerca do 2º momento, outro aspecto importante da RME, qual seja o de que o aluno participa ativamente no processo de aprendizagem e tem oportunidade de discutir com os colegas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2002).

Em relação ao 3º momento, observa-se que as discussões já ocorridas em momentos anteriores podem auxiliar os alunos na construção de modelos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003; GRAVEMEIJER, 2005), bem como na compreensão de aspectos formais da matemática.

Com base na perspectiva de trabalho para aulas de matemática apresentada por Ciani (2012), pode-se dizer que

- a análise da produção escrita em aulas na perspectiva da reinvenção guiada é utilizada para a obtenção de informações a respeito de processos de ensino e de aprendizagem da matemática que auxiliam o professor a planejar e executar intervenções. Desse modo, a análise da produção escrita serve como base para a elaboração de intervenções, na forma de uma trajetória de ensino e aprendizagem, que poderão auxiliar o professor a orientar os alunos no processo de matematização;
- o professor recolhe as produções dos alunos quando da resolução de uma tarefa, analisa-as e sistematiza-as a fim de perceber particularidades ou semelhanças que o auxiliem na elaboração de intervenções que nortearão o prosseguimento do trabalho em sala de aula;
- o aluno inicialmente resolve uma tarefa e, depois, discute com os colegas as informações oriundas dessa análise do professor para continuar o trabalho de matematizar.

5.2 A INVESTIGAÇÃO REALIZADA POR PIRES (2013)

Em sua investigação de doutorado, Pires (2013) apresenta um estudo de uma das ações desenvolvidas no projeto “Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática”⁴¹, o qual envolvia uma agenda de trabalho de capacitação de professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública em um município situado no norte do Paraná.

Para a capacitação dessas professoras, foi utilizada uma prova em fases⁴², composta por 11 questões selecionadas “levando em conta a sua potencialidade quanto à exploração de elementos caracterizadores do pensamento matemático, assim como a possibilidade de resolver a questão de mais de uma maneira, ou de ter mais de uma resposta” (PIRES, 2013, p. 18).

Segundo Pires (2013, p. 19), a opção pela utilização da prova em fases teve por objetivos: “caracterizá-la como uma forma de praticar a reinvenção guiada; fornecer

⁴¹ Esse projeto foi proposto pelo grupo de Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM da Universidade Estadual de Londrina e foi aprovado no Edital CAPES/INEP nº 38/2010 do Programa Observatório da Educação.

⁴² Segundo a autora (PIRES, 2013, p.35), a prova em fases pode ser realizada no seguinte formato: “1º) o professor elabora a prova e os alunos, em uma primeira fase, resolvem sem nenhuma indicação do professor, em tempo determinado; 2º) o professor avalia as resoluções iniciais dos alunos e tece comentários pedindo justificativas e esclarecimentos; 3º) na segunda fase, os alunos tentam responder as questões postas pelo professor, podendo dispor de um tempo maior que na primeira fase. Nessa etapa espera-se que os alunos melhorem as respostas dadas na primeira fase”.

material para análise da produção escrita; reconhecer nesse instrumento oportunidade de aprendizagem”. Ainda em relação à utilização da prova em fases, a autora destaca que “praticar a reinvenção guiada numa prova em fases permite atender as diferenças entre os níveis de compreensão dos estudantes” (PIRES, 2013, p. 78).

O desenvolvimento da capacitação por meio da prova em fases transcorreu, segundo a autora, em um movimento contínuo de interação e comunicação, por ela denominado de “ação de intervenção” (PIRES, 2013, p. 12). Desse modo, segundo Pires (2013),

- o inicialmente a prova foi resolvida pelas professoras sem nenhuma indicação da pesquisadora.
- o após análise da produção escrita das professoras, a autora fez comentários em cada resolução pedindo justificativas e/ou esclarecimentos.
- o em seguida, as professoras trabalhavam nas respostas aos questionamentos.
- o quando o entendimento da autora era de que a potencialidade da resposta e da questão tinha se esgotado, passava-se para outra questão, e repetia-se o processo. Isto é, quando a autora entendia que as participantes haviam conseguido “reinventar” ou visitar algo que, supostamente, já haviam aprendido nas aulas de matemática na Educação Básica, passava-se para outra questão para que tivessem outra oportunidade para a reinvenção.

Durante essa “ação de intervenção”, para investigar os processos de aprendizagem das professoras, as estratégias criadas por elas para o enfrentamento de dificuldades de aprendizagem da matemática, foi realizada uma análise da produção escrita presente nas resoluções de cada questão da prova.

Segundo Pires (2013, p. 20), “os dados colhidos durante a investigação precisaram ser analisados constantemente, porque as perguntas que foram sendo feitas dependiam dessa análise”. Desse modo, em seu trabalho, as informações obtidas por meio da análise da produção escrita serviram como fonte para o processo de elaboração dos comentários por ela apresentados em cada resolução das professoras, em cada fase da prova.

Nesse caso, a análise da produção escrita em matemática foi utilizada pela autora em uma perspectiva investigativa (SANTOS; BURIASCO, 2010) já que as informações obtidas auxiliaram a conhecer e compreender o processo de aprendizagem dos envolvidos, de modo que ela pudesse planejar e executar intervenções durante a capacitação.

Esses comentários originados a partir da análise da produção escrita para Pires (2013, p. 34)

não dizem respeito a informar se houve acerto ou não, mas sim devem ser tais que ajudem o aluno a reconstituir, explicar, criticar a sua própria resolução. Outra vantagem é que os comentários do professor são específicos para cada aluno e isso permite uma aproximação maior entre eles, além de exigirem uma ação, uma intervenção no processo de ensino e aprendizagem.

Desse modo, como bem observado pela autora, “é possível utilizar a própria produção do aluno para encaminhá-lo ao entendimento do que se deseja” (PIRES, 2013, p. 92).

Tendo em vista que no trabalho de Pires (2013) as informações obtidas com a análise da produção escrita serviram como fonte para o processo de elaboração dos comentários da pesquisadora na resolução de cada fase da prova de cada uma das professoras, observa-se que a análise da produção escrita, realizada continuamente em toda a ação de intervenção, serviu para auxiliar essa autora a orientar as professoras em seus processos de aprendizagens.

Transferindo essa situação para o ambiente escolar, a autora destaca que, ao tentar esclarecer pontos levantados pelo professor a partir da análise da produção escrita, o aluno tem a oportunidade de, por exemplo:

estabelecer um processo de comunicação por escrito: ao explicar o que fez, pode, ao mesmo tempo, mostrar o que compreendeu das considerações feitas pelo professor; refletir sobre sua resposta inicial procurando reconstituir e criticar o seu próprio raciocínio, podendo descrever e explicar o que fez; desenvolver a resolução feita inicialmente, encorajado pelo professor (PIRES, 2013, p. 33).

Com base na perspectiva de trabalho para aulas de matemática apresentada por Pires (2013), pode-se dizer que:

- a análise da produção escrita em aulas na perspectiva da reinvenção guiada é utilizada para a obtenção de informações que auxiliem o

professor a investigar os processos de aprendizagem dos alunos e para servir como fonte para a elaboração dos comentários e/ou questionamentos que o professor pode fazer em cada resolução do aluno.

- o professor recolhe as produções dos alunos quando da resolução de uma tarefa, analisa-as de modo que possa elaborar comentários ou questionamentos que auxiliem o aluno a reconstituir, explicar, criticar a sua própria resolução. Após cada aluno devolver sua resolução ao professor, ele faz outra análise para que possa elaborar outros questionamentos ou comentários e dar continuidade ao trabalho em sala de aula.
- o aluno inicialmente resolve uma tarefa sem nenhuma indicação do professor e, em seguida, com os comentários feitos por ele, busca refletir sobre suas respostas e tentar explicar o que fez, tentando desenvolver suas resoluções iniciais.

6 ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA EM AULAS DE MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO

Com base nas informações obtidas a partir dos trabalhos de Ciani (2012) e de Pires (2013), tendo em vista a perspectiva adotada por essas autoras, foi possível identificar aspectos relativos ao papel que a análise da produção escrita pode assumir em aulas na perspectiva da reinvenção guiada, ao papel do professor, ao papel do aluno e em relação à dinâmica da aula.

O quadro a seguir sintetiza informações acerca desses aspectos. A sua construção teve o objetivo de auxiliar a identificar as particularidades e as similaridades entre eles.

Quadro 5 - Considerações a respeito da dinâmica da aula tendo em vista a perspectiva de trabalho adotada por Ciani (2012) e Pires (2013)

<p style="text-align: center;">Autor</p> <p>Elementos</p>	<p style="text-align: center;">Ciani (2012)</p>	<p style="text-align: center;">Pires (2013)</p>
<p style="text-align: center;">Utilização da análise da produção escrita</p>	<p>Possibilitar a obtenção de informações a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática que auxiliam o professor a planejar e executar intervenções. Desse modo, a análise da produção escrita serve como base para a elaboração de intervenções, na forma de trajetória de ensino e aprendizagem, que poderão auxiliar o professor a orientar os alunos no processo de matematização.</p>	<p>Possibilitar a obtenção de informações que auxiliem o professor a investigar os processos de aprendizagem dos alunos e de servir como fonte para o processo de elaboração dos comentários e/ou questionamentos que o professor pode fazer em cada resolução do aluno. Nesse caso, a análise da produção escrita em matemática é realizada continuamente em toda a ação de intervenção.</p>
<p style="text-align: center;">Papel do professor</p>	<p>Recolher as produções dos alunos quando da resolução de uma tarefa, analisá-las, sistematizá-las de modo a perceber particularidades ou</p>	<p>Recolher as produções dos alunos quando da resolução de uma tarefa, analisá-las de modo que possa obter informações que o auxiliem a elaborar comentários</p>

	semelhanças que o auxiliem na elaboração de intervenções que nortearão o prosseguimento do trabalho em sala de aula.	ou questionamentos que auxiliem os alunos a reconstituir, explicar, criticar a sua própria resolução. Após o aluno devolver sua resolução ao professor, esse faz outra análise para que possa elaborar outros questionamentos ou comentários e dar continuidade ao trabalho em sala de aula.
Papel do aluno	Reside em, inicialmente, resolver uma tarefa apresentando sua produção escrita, para que o professor possa analisá-la, e, depois, discutir com os colegas as informações oriundas dessa análise pelo professor, de modo a poder matematizar.	Reside em, inicialmente, resolver uma tarefa sem nenhuma indicação do professor e, em seguida, com os comentários feitos por ele, refletir sobre suas respostas e tentar explicar o que fez, buscando desenvolver suas resoluções iniciais, de modo a continuar matematizando.

Fonte: autora. Subsídio: investigações desenvolvidas por Ciani (2012) e Pires (2013).

Com base nas considerações a respeito dos trabalhos de Ciani (2012) e Pires (2013), apresentadas no capítulo 5, e nas informações acerca de elementos do campo da prática docente, apresentadas no capítulo 4, tem-se que a análise da produção escrita em aulas de matemática na perspectiva da reinvenção guiada pode ser considerada uma estratégia de ensino, porque refere-se às ações planejadas ou decisões realizadas ou tomadas pelo professor (VILLANI; FREITAS, 2001; VERDE; MONTERO, 2006) que lhe permitirão obter informações que servirão posteriormente de suporte para que ele conduza o trabalho em sala de aula de modo a auxiliar cada aluno em seu processo de matematização. Por conseguinte, a análise da produção escrita como estratégia de ensino pode ser utilizada para auxiliar o professor na obtenção de informações sobre os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, as quais posteriormente podem subsidiar a elaboração de intervenções, comentários e/ou questionamentos na produção do aluno (CIANI, 2012; PIRES, 2013) de modo que esse possa, sob orientação do professor, desenvolver ferramentas matemáticas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2000, 2002), isto é, ser autor de seu próprio conhecimento matemático, como preconiza a RME. Essas ações do professor, tais como apresentadas no capítulo 2 ou como descritas por Ciani (2012), são planejadas anteriormente por ele, ainda que implicitamente (VILLANI; FREITAS, 2001).

A ideia de que a análise da produção escrita como estratégia de ensino pode auxiliar o professor na obtenção de informações a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, subsidiando a elaboração de intervenções, comentários e/ou questionamentos, traz consigo a ideia de análise da produção escrita como estratégia de avaliação, já que, enquanto estratégia de avaliação, a análise da produção escrita possibilita que o professor tenha uma visão dos processos de aprendizagens dos alunos (ALVES, 2006) e possa re(orientar) sua prática pedagógica (CELESTE, 2008), para que, posteriormente, possa elaborar e executar intervenções. Assim, ao se considerar a análise da produção escrita em matemática como estratégia de ensino, não se está eliminando sua utilização como estratégia de avaliação, e sim considerando e ampliando sua possibilidade de utilização.

No entanto, apesar de a análise da produção escrita ser utilizada pelo GEPEMA como uma estratégia de avaliação e a avaliação ser integrada aos processos de ensino e de aprendizagem, perspectiva também defendida pelo grupo, não seria possível garantir que a análise da produção escrita em matemática, além de ser estratégia de avaliação, também possa ser considerada uma estratégia de ensino, antes de uma análise, como a feita nesta investigação, tendo em vista outros elementos do campo da prática docente, como os abordados no capítulo 4, pois ela poderia ser outro elemento que não uma estratégia de ensino.

Na dinâmica de aula apresentada em sua proposta de intervenção, Ciani (2012) enuncia algumas ações do professor para que a análise da produção escrita possa ser colocada em prática. Além da recolha do registro do aluno, a autora também destaca a ação de agrupar as produções dos alunos e demonstra que com essa ação é possível reconhecer contextos, justificativas e identificar na resolução dos alunos “as maneiras de lidar com o enunciado, a fim de tomá-las como desencadeadoras de diálogos ou discussões que favoreçam os alunos à matematização” (CIANI, 2012, p. 70). Já no estudo apresentado por Pires (2013), ações de como proceder não estão enunciadas, sendo possível, porém, que tenham sido realizadas e que o seu planejamento tenha acontecido de forma implícita.

Essas ações do professor, no entanto, somente são possíveis quando existir a produção escrita do aluno em alguma tarefa por ele realizada. Assim, a produção escrita ou registro escrito do aluno é de suma importância para que a análise e a consideração do professor possam ocorrer, para que essas ações possam ser postas em prática. Sem isso, as ações do professor não aconteceriam. Pode-se considerar, portanto, a análise da produção escrita como uma estratégia de ensino centrada no meio, como apresentado por Rajadell (2001, 2012). Isto é, uma estratégia de ensino em que o meio, a produção escrita, é um

recurso material (LIBÂNEO, 1994), de suporte textual (RAJADELL, 2001, 2012) e portador de informação (MACHADO, 2000), que é manipulado pelo professor a fim de que ele possa atingir seus objetivos.

Tendo em vista as investigações de Ciani (2012) e Pires (2013), foi possível identificar tanto o papel do professor como o papel do aluno quando da utilização da análise da produção escrita em aulas de matemática na perspectiva da reinvenção guiada.

Na perspectiva de trabalho apresentada por Ciani (2012), o papel do professor reside em recolher as produções dos alunos na resolução de uma tarefa, analisá-las, sistematizá-las para identificar particularidades ou semelhanças nessas produções e utilizar tais informações para elaborar uma trajetória de ensino e aprendizagem que possa auxiliá-lo a orientar/guiar os alunos a desenvolver suas ferramentas matemáticas. Desse modo, as informações oriundas das produções dos alunos são utilizadas como ponto de partida para o processo de reinvenção da matemática, como apontado por Gravemeijer (2008). O papel do aluno é o de resolver tarefas apresentando sua produção escrita para que o professor possa analisá-la e, depois, discutir com os colegas as informações oriundas dessa análise, e, assim, continuar em seu processo de matematização.

Considerando a perspectiva de trabalho de Pires (2013), o papel do professor diz respeito a recolher as produções dos alunos após a resolução de uma tarefa, analisá-las de modo que possa elaborar comentários ou questionamentos que os auxiliem a reconstituir, explicar, criticar a sua própria resolução. Depois de ter a oportunidade de analisar e trabalhar em sua resolução com os comentários, o aluno devolve sua produção ao professor para que esse faça outra análise e elabore, se necessário, outros questionamentos ou comentários. Com isso, o professor realiza uma análise da produção escrita antes de cada intervenção e orienta o processo de aprendizagem do aluno, não de modo fixo, dizendo ou demonstrando o que ele deve aprender, mas criando um ambiente em que ele se sinta motivado e desafiado (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

Ainda sob essa perspectiva, nota-se que o papel do aluno reside em, inicialmente, resolver uma tarefa sem nenhuma indicação do professor e, em seguida, com os comentários feitos por ele, refletir sobre sua resolução e tentar explicar o que fez, buscando desenvolver suas resoluções iniciais, aprimorando-as. Com isso, observa-se que o aluno tem a possibilidade de refletir a respeito do que faz e sobre sua resolução que, com os comentários e/ou questionamentos do professor, torna-se para o aluno objeto de análise em um nível superior (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Em relação à dinâmica da aula que segue a perspectiva de utilização da análise da produção escrita como estratégia de ensino, tendo em vista as informações apresentadas nesta investigação, é possível considerar duas possibilidades, que devem ser entendidas como uma sugestão para a dinâmica da aula e não como uma forma rígida de trabalho.

Quadro 6 - Dinâmica da aula de matemática tendo em vista a utilização da análise da produção escrita como estratégia de ensino

Dinâmica da aula de matemática quando...	
... a análise da produção escrita é utilizada tendo em vista a perspectiva de trabalho de Ciani (2012)	... a análise da produção escrita é utilizada tendo em vista a perspectiva de trabalho de Pires (2013)
<ul style="list-style-type: none"> ➤ O aluno resolve uma tarefa apresentando sua produção escrita. ➤ O professor recolhe a resolução do aluno e realiza uma análise da produção presente nessa resolução. ➤ Com base nas informações obtidas na análise realizada, o professor elabora intervenções, sob a forma de uma trajetória de ensino e aprendizagem, de modo que essas possam auxiliá-lo a guiar o aluno na reinvenção. ➤ O professor traz para sala de aula informações acerca da produção do aluno para que esse possa analisá-las e as discuti-las com os colegas. ➤ Tendo em vista as informações do professor, o aluno segue em seu processo de matematização, buscando desenvolver suas ferramentas matemáticas. ➤ O professor guia o aluno, tendo como referência a trajetória de ensino e aprendizagem elaborada, até entender que o aluno conseguiu desenvolver suas ferramentas matemáticas ou que conseguiu discutir aspectos matemáticos subjacentes à resolução apresentada. 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ O aluno resolve uma tarefa apresentando sua produção escrita. ➤ O professor recolhe a resolução do aluno e realiza uma análise da produção presente nessa resolução. ➤ Com base nas informações obtidas na análise realizada, o professor intervém no trabalho do aluno por meio de comentários registrados na resolução desse, pedindo justificativas e/ou esclarecimentos. Inicia-se um processo de comunicação por escrito com o aluno. ➤ O aluno recebe sua resolução, agora com os comentários do professor, busca refletir sobre sua resolução e tenta explicar, por meio de sua produção escrita, o que fez para dar continuidade a seu trabalho. ➤ O professor recolhe novamente a produção do aluno e realiza outra análise. Caso o aluno já tenha desenvolvido ferramentas matemáticas ou discutido aspectos matemáticos subjacentes à resolução apresentada, a reinvenção guiada é finalizada. Caso contrário, o professor novamente intervém no trabalho do aluno por meio de comentários registrados na resolução, pedindo justificativas e/ou esclarecimentos.

	<ul style="list-style-type: none">➤ Novamente de posse de sua resolução e de outros comentários e/ou questionamentos do professor, o aluno retoma sua atividade.➤ Esse processo repete-se até o professor entender que o aluno conseguiu desenvolver suas ferramentas matemáticas ou que conseguiu discutir aspectos matemáticos subjacentes à resolução apresentada.
--	--

Fonte: autora. Subsídio: informações desta investigação.

7 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Para o GEPEMA, a avaliação da aprendizagem escolar é considerada uma prática de investigação e uma oportunidade de aprendizagem, e a análise da produção escrita em matemática tem sido utilizada como uma estratégia para a implementação dessa perspectiva de avaliação. Nesse sentido, a análise da produção escrita é uma forma de materializar uma avaliação a serviço dos processos de ensino e de aprendizagem em matemática e as informações advindas dela podem realimentar o processo pedagógico.

Ainda no âmbito dos trabalhos desenvolvidos pelo grupo, a análise da produção escrita também tem sido utilizada para a condução de aulas de matemática, sob a perspectiva da reinvenção guiada, com o intuito de que os alunos “desenvolvam sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, comunicar suas ideias matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem, interpretam tarefas em uma variedade de situações [...]” (PIRES; BURIASCO, 2012, p. 3).

Tendo isso em vista, com este trabalho, de cunho teórico, buscou-se investigar a utilização da análise da produção escrita em aulas de matemática, sob a luz da reinvenção guiada, para além da perspectiva de estratégia de avaliação, já defendida pelo GEPEMA. Para isto, a investigação pautou-se pelas seguintes questões:

- que papel a análise da produção escrita pode assumir em aulas de matemática na perspectiva da reinvenção guiada?
- a análise da produção escrita pode ser considerada um método de ensino, estratégia de ensino, procedimento de ensino?
- nessa perspectiva de trabalho, qual é o papel do professor? Qual o papel do aluno? Qual a dinâmica da aula?

Realizado à luz de orientações presentes na Análise de Conteúdo, este estudo possibilitou que algumas considerações fossem tecidas, como as que seguem.

A partir de informações obtidas com as investigações desenvolvidas por Ciani (2012) e Pires (2013) e tendo em vista as demais apresentadas no capítulo 4, referentes aos elementos do campo da prática docente, foi possível considerar a análise da produção escrita como uma estratégia de ensino - centrada no meio, ou seja, na produção escrita - que pode ser utilizada pelo professor para obter informações a respeito dos processos de ensino e

de aprendizagem da matemática de modo que elas possam subsidiar o processo de elaboração de intervenções, comentários e/ou questionamentos na produção do aluno para que ele possa ser autor do seu próprio conhecimento.

Assim, a tese aqui defendida é a de que, em aulas de matemática sob a luz da reinvenção guiada, a análise da produção escrita pode ser utilizada como uma estratégia de ensino. Tendo isto em vista, considera-se que a originalidade deste trabalho reside em apresentar teoricamente a análise da produção escrita em matemática para além da perspectiva de estratégia de avaliação até então já defendida e utilizada pelo GEPEMA.

Também foi possível identificar tanto o papel do professor como o papel do aluno nessa perspectiva de trabalho. A partir do estudo de Ciani (2012) constatou-se que o papel do aluno diz respeito a resolver uma tarefa e discutir com os colegas as informações advindas da análise da produção escrita realizada pelo professor de modo que possa aprimorar sua estratégia de resolução e desenvolver suas ferramentas matemáticas e que o papel do professor reside em analisar as produções escritas dos alunos visando obter informações que o auxiliem a elaborar intervenções na forma de trajetórias de ensino e aprendizagem. Tendo em vista a investigação de Pires (2013), pode-se dizer que o papel do aluno é o de resolver uma tarefa e, a partir de comentários e/ou questionamentos do professor em sua produção, refletir a respeito do que fez de modo que possa desenvolver suas resoluções iniciais e desenvolver suas ferramentas matemáticas e que o papel do professor é o de analisar as produções escritas dos alunos visando obter informações que o auxiliem a elaborar comentários e/ou questionamentos na produção de cada aluno.

No que tange à dinâmica da aula tendo a análise da produção escrita como estratégia de ensino, é possível considerar duas possibilidades de trabalho, como pode ser observado no **Quadro 6**. Na dinâmica tendo em vista a perspectiva de trabalho de Ciani (2012), a análise da produção escrita do aluno auxilia o professor no processo de elaboração de intervenções na forma de trajetórias de ensino e aprendizagem. Na dinâmica identificada a partir do trabalho de Pires (2013), que possibilita um processo de comunicação por escrito, a análise da produção escrita serve à elaboração de comentários e/ou questionamentos do professor. Vale destacar que essas dinâmicas são possibilidades e, por isso, não se deve entendê-las como formas rígidas para o desenvolvimento da aula.

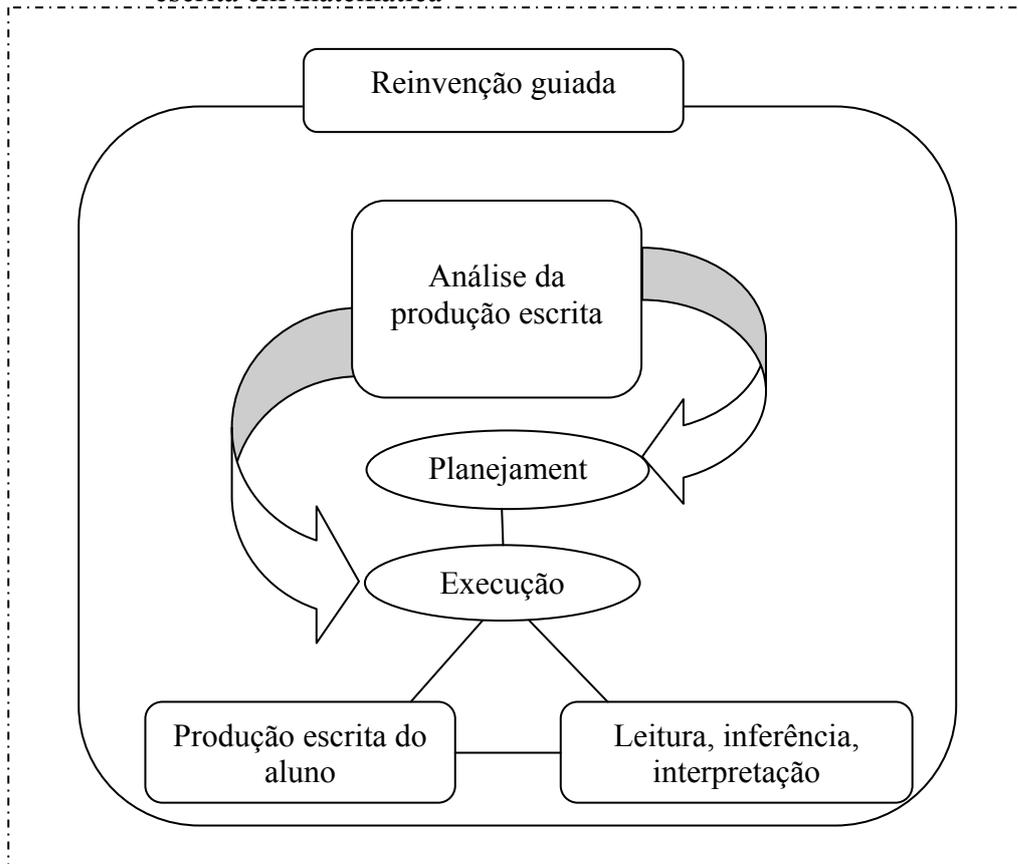
Para além dessas questões norteadoras, com base em informações a respeito da RME, capítulo 3, e a respeito de elementos do campo da prática docente, capítulo 4, foi possível estabelecer relações entre a reinvenção guiada e um elemento do campo da prática docente. É possível entender a reinvenção guiada como um método de ensino, já que é o

caminho utilizado pelo professor, na perspectiva da RME, para conduzir o trabalho com alunos, visando que eles possam matematizar e desenvolver ferramentas matemáticas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2000, 2002). Isto é, a reinvenção guiada é um método de ensino, pois é um caminho que pode ser utilizado pelo professor nas aulas de matemática para atingir os objetivos previstos em relação à aprendizagem dos alunos (HAIDT, 1995; ANASTASIOU, 1997; RAYS, 2000; VERDE; MONTERO, 2006; VIANA, 2010). Isso vai ao encontro da perspectiva apresentada por Freudenthal (1973) a respeito do método da reinvenção como método de ensino.

A argumentação em torno da reinvenção guiada enquanto método de ensino decorre de uma concepção de matemática como uma atividade humana (FREUDENTHAL, 1979) e de uma compreensão de que os alunos devem ter a oportunidade “guiada” de reinventar a matemática (FREUDENTHAL 1991; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). Desse modo, antes de se constituir em um método de ensino, a reinvenção guiada está fundamentada em um “método de reflexão e ação sobre a realidade educacional” (LIBÂNEO, 1994, p. 151), sendo uma alternativa contra o ensino da matemática tomado como um produto pronto para o consumo.

Considerando o esquema da relação existente entre alguns elementos do campo da prática docente e as considerações tecidas neste capítulo e no anterior, foi possível apresentar outro esquema, agora voltado para a reinvenção guiada e a análise da produção escrita.

Figura 2 - Esquema da relação existente entre reinvenção guiada e análise da produção escrita em matemática



Fonte: autor.

Por meio desse esquema pode-se entender a reinvenção guiada como método de ensino, como elemento de dimensão ampla no campo prática docente já que oferece ao professor uma visão geral do caminho que ele poderá utilizar para orientar suas ações de modo a auxiliar os alunos a serem autores dos seus próprios conhecimentos em Matemática.

A análise da produção escrita pode ser entendida como uma estratégia de ensino, mas para sua efetivação, são necessários a produção escrita do aluno, que é o meio de ensino, e os procedimentos de ensino, que são as operações ou passos que devem ser realizados: leituras, inferência e interpretação.

Tendo em vista que a avaliação escolar é entendida pelo GEPEMA como componente dos processos de ensino e de aprendizagem, sob uma perspectiva de avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem, vale salientar que ela, a avaliação, se faz presente de forma implícita nesse esquema, permeando todo o caminho a ser utilizado pelo professor para guiar o aluno em seu processo de aprendizagem. Ao permear

esse caminho, a avaliação possibilita que o professor e o aluno reflita e (re)oriente sua prática ao longo dele.

Antes de finalizar, algumas considerações ainda se fazem necessárias. Essa investigação não teve por objetivo apontar ou analisar limitações da utilização da análise da produção escrita para a condução das aulas de matemáticas sob a luz da reinvenção guiada, e sim apresentá-la teoricamente, para além da perspectiva de estratégia de avaliação. Nesse sentido, e tendo em vista o atual cenário educacional, limites e possibilidades da análise da produção escrita em matemática como estratégia de ensino, tal como evidenciada nesse trabalho, podem se constituir em objeto de estudo de investigações futuras. Espera-se que as informações aqui apresentadas possam contribuir para isso e para suscitar reflexões e outros estudos no âmbito da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

- AÇÃO. In: HOUAISS, A. **Dicionário eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. CD-ROM.
- ALMEIDA, V. L. C. de. **Questões não-rotineiras: a produção escrita de alunos da graduação em Matemática**. 2009. 144f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2009.
- ALVES, R. M. F. **Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões de matemática**. 2006. 158f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.
- AMEZOLA, J.J.H. et al. Referentes conceptuales para la enseñanza centrada em el aprendizaje. **Revista de educación e desarrollo**, Guadalajara , 4, p. 35-44 , out.-dez. 2005. Disponível em: <http://www.cucs.udg.mx/revistas/edu_desarrollo/anteriores/4/004_Huerta.pdf>. Acesso em: 22/02/12.
- ANATASIOU, L. das G. C. Metodologias de ensino: primeiras aproximações. **Educar em revista**. Curitiba, n.13, p. 93-100, 1997.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edição 70 Ltda., 1977.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. 3 ed. Lisboa: Edição 70 Ltda., 2004.
- BEZERRA, G. C. **Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade: um estudo**. 2010. 183f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010.
- BURIASCO, R. L. C. de. **Avaliação em Matemática: um estudo das respostas de alunos e professores**. 1999. 238f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.
- BURIASCO, R. L. C. de. Análise da produção escrita: a busca do conhecimento escondido. . In: XII ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, 2004, Curitiba. **Anais**. Curitiba: Editora Champagnat, 2004. v. 3, p. 243-251.
- BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A, B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **BOLEMA**, Rio Claro (SP), Ano 22, nº 33, 2009, p. 69-96.
- CELESTE, L. B. **A Produção escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de matemática do PISA**. 2008. 85f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.
- CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2011. 166f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2012.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Learning Trajectories in Mathematics Education. **Mathematics Thinking and Learning**, v. 6, n.2, p. 81-89. 2004.

DALTO, J. O. **A produção escrita em matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e a 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 2007. 100f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2007.

DE LANGE, J. **Mathematics, insight and meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

ESTEBAN, M. T. A avaliação no cotidiano escolar. In: ESTEBAN, M. T. **Avaliação**: uma prática em busca de novos sentidos. 5 ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2003. p. 7-28

ESTRATÉGIA. In: CUNHA, A. G. **Dicionário etimológico nova fronteira da Língua Portuguesa**. 2 ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986. p. 333.

ESTRATÉGIA. In: **Grande Enciclopédia Larousse Cultural**. São Paulo: Nova Cultural, 1998. p. 2273.

ESTRATÉGIA. In: HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. CD-ROM.

FERREIRA, P. E. A. **Análise da produção escrita de professores da educação básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. 166f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2009.

FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de tarefas de matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013, 121f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013

FREUDENTHAL, H. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics**. Holanda, v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

FREUDENTHAL, H. Matemática nova ou educação nova? **Perspectivas**, Portugal, vol. IX, n.3, p. 317 – 328, 1979. Disponível em: <
<http://unesdoc.unesco.org/images/0003/000346/034654poro.pdf>> acesso em: 03/09/2012.

_____. The Method. In: Freudenthal, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel. 1983, p. 28-33.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAVEMEIJER, K. P. E. O que torna a matemática tão difícil e o que podemos fazer para o alterar?. **Educação matemática**: caminhos e encruzilhadas. Lisboa: APM, 2005. p. 83-101.

_____. RME theory and mathematics teacher education. In: TIROSH, D; WOOD, T. Tool and process in mathematics teacher education. **The International handbook of Mathematics Teacher Education**, v. 2. 2008. Rotterdam: Sense Publishers, p.283-302.

- GRAVEMEIJER, K. P. E.; TERWEL, J. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n.º. 6, p. 777-796. 2000.
- HADJI, C. **A Avaliação, Regras do jogo**. Das intenções aos Instrumentos. 4ª ed. Porto, 1994.
- Haidt, R. C. C. **Curso de Didática Geral**. 2ª ed. São Paulo: editora Ática, 1995.
- LIBÂNIO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994.
- LOPEZ, J. M. S. **Análise interpretativa de questões não-rotineiras de matemática**. 2010. 141f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010.
- MACHADO, A. V. Métodos e meios de ensino - categorias básicas da Tecnologia Educacional. **Revista de Educação Pública**, Cuiabá, v. 9, p. 9-24, 2000.
- MEIO. In: **Grande enciclopédia Larousse Cultural**. São Paulo: Nova Cultural, 1998. p. 3904.
- MEIO. In: HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. CD-ROM.
- MÉTODO. In: CUNHA, A. G. **Dicionário etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa**. 2ªed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986. p. 517.
- MÉTODO. In: **Grande Enciclopédia Larousse Cultural**. São Paulo: Nova Cultural, 1998. p. 3957.
- NAGY-SILVA, M. C. **Do observável ao oculto: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática**. 2005. 114f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.
- NEGRÃO de LIMA. R. C. **Avaliação em matemática: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas**. 2006. 181f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.
- NÉRICI, I. G. **Metodologia do ensino: uma introdução**. 3ª ed. São Paulo: Atlas, 1989.
- PEDROCHI JUNIOR, O. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em Matemática**. 2012. 56f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2012.
- PEREGO, S. C. **Questões abertas de matemática: um estudo de registros escritos**. 2005. 103f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.
- PEREGO, F. **O que a produção escrita pode revelar? Uma análise de questões de matemática**. 2006. 128f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.

- PIRES, M. N. M. **Oportunidade para aprender**: uma prática da reinvenção guiada na prova em fases. 2013.122 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e educação matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.
- PIRES, M. N. M.; BURIASCO, R. L. C. de. Prova em fases: uma oportunidade para aprender. In: I SIPERE, 2011, Curitiba. **Anais** eletrônico do 1ºSIPERE, Curitiba, 2011, p. 146-155.
- PIRES, M. N. M.; BURIASCO, R. L. C. de. Prova em fases: instrumento para aprender. In: V SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, Petrópolis. **Anais...**Petrópolis, 2012, p. 1-17.
- PROCEDIMENTO. In: CUNHA, A. G. **Dicionário etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa**. 2ªed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986. p. 636.
- PROCEDIMENTO. In: **Grande enciclopédia Larousse Cultural**. São Paulo: Nova Cultural, 1998. p. 4789.
- PROCEDIMENTO. In: HOUAISS, A. **Dicionário eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. CD-ROM.
- RAJADELL, N. Estratégias didácticas para el desarrollo de procedimientos. **Revista española de pedagogía**. Madrid, Año LVIII, n. 217, p. 573-591, 2000
- RAJADELL, N. Los procesos formativos em el aula: estrategias de enseñanza e aprendizaje. In: SEPULVEDA, F.; RAJADELL, N. **Didáctica General para psicopedagogos**. Madrid: Eds de La UNED, 2001, p. 465-525. Disponível em: <http://www.upm.es/innovacion/cd/02_formacion/talleres/nuevas_met_eva/rajadell_articulo.pdf>. Acesso em: 01/02/2012.
- RAJADELL, N. A importância das estratégias didáticas em toda ação formativa. In: SUANNO, M. V. R.; RAJADELL, N. **Didática e formação de professores**: perspectivas e inovações. Goiânia: CEPED Publicações e PUC Goiás, 2012. p. 105-132.
- RAYS, O. A. A questão da Metodologia de ensino na didática escolar. In: VEIGA, I. P. A. (coord.). **Repensando a didática**. 16ª ed. Campinas: Papirus, 2000. p. 83-95.
- SANT'ANNA, I. M.; MENEGOLLA, M. **Didática**: aprender a ensinar. 4ª ed. São Paulo: Edições Loyola, 1995.
- SANTOS, E. R. **Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões discursivas não rotineiras de matemática**. 2008. 166f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.
- SANTOS, E. R.; BURIASCO, R. L. C. Uma análise da produção escrita de alunos do ensino médio em uma questão não rotineira de matemática: algumas informações obtidas. In: IV SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2009, Brasília. **Anais...**Brasília, 2009, p. 1-19.
- SANTOS, E. R.; BURIASCO, R. L. C. Estudo da Produção Escrita de Alunos do Ensino Médio em uma Questão Não Rotineira de Matemática. **Unión**: Revista Iberoamericana de Educação Matemática, nº 24, p. 103-115, 2010.

SEGURA, R. O. **Estudo da produção escrita de professores em questões discursivas de matemática**. 2005. 176f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.

TREFFERS, A. **Three dimensions**: a model of goal and theory description in mathematics instruction – the wiskobas project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

TREFFERS, A.; GOFREE, F. **Rational analysis of realistic mathematics education - the wiskobas program**. 1985. Disponível em: <<https://docs.google.com/file/d/0B4o6aVujDKNpY1dQSTBqNEo4b1E/edit>>. Acesso em: 04/06/11.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Assessment and realistic mathematics education**. Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Mathematics education in the Netherlands**: a guided tour. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University, 2000. Disponível em: <www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah>. Acesso em: 28/02/12.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Learning-teaching trajectories with intermediate attainment targets. In: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school**. Rotterdam: Sense Publishers, 2001a, p. 13-22. Disponível em: <<https://www.sensepublishers.com/media/161-children-learn-mathematics.pdf>>. Acesso em 07/11/12.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. A Learning-teaching trajectory as a hold for teaching primary-school mathematics in the Netherlands. In: TZAKAKI, M. **Didactics of Mathematics and Informatics in Education**, 2001b, Thessaloniki, Aristotle University of Thessaloniki/University of Macedonia, Thessaloniki, p.21-39. Disponível em: <http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/download/vdHeuvel_2001_Thessaloniki_trajectory.pdf>. Acesso em: 28/02/13.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Realistic Mathematics Education**: work in progress. In: F.L. Lin (ed.), *Common Sense in Mathematics Education*. Proceedings of The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, 2002, Taipei, Taiwan, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, pp. 1–42. Disponível em: <<http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/4966.pdf>>. Acesso em: 28/02/12.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**, v. 54, n.1, p. 09-35, nov. 2003.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: **The Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**, 2010, Australia, p. 3-7. Disponível em: <http://www.merga.net.au/documents/MERGA33_Keynote_vandenHeuvel-Panhuizen.pdf>. Acesso em: 21/11/12.

VERDE, A.R.M.; MONTERO, O. B. Estrategias de enseñanza o estrategias de aprendizaje? **Revista Varela**, Villa Clara, 13 ed., p. 01-08, jan.-abr. 2006. Disponível em: <<http://www.ucp.vc.rimed.cu/sitios/varela/articulos/rv1305.pdf>> Acesso em: 01/02/2012.

VIANA, M. C. V. Didática da Matemática no Ensino Superior. In: **Reunião Anual da ANPEd**, 33, 2010, Caxambu. Disponível: <<http://www.anped.org.br/33encontro/internas/ver/trabalhos-gt04>>. Acesso em: 29/02/12.

VILLANI, A; FREITAS, D. de. Estrutura disciplinar, estratégias didáticas e estilo docente: categorias para interpretar a sala de aula. In: **Reunião Anual da ANPEd**, 2001, Caxambu. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/reunioes/24/tp.htm#gt4>>. Acesso em: 27/02/12.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. 108f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>NAGY-SILVA (2005)</p>	<p><u>p. 11</u>: “[...] análise da produção escrita dos alunos constitui-se como uma alternativa para que a reorientação da avaliação aconteça”.</p> <p><u>p.11</u>: “A atitude de analisar constantemente a produção escrita dos alunos contribui para que o professor possa refletir sobre seu planejamento, desenvolvimento e avaliação da sua prática pedagógica”.</p> <p><u>p.45</u>: “[...] sendo a produção escrita de alunos em questões abertas de matemática uma forma de comunicação, podemos, então, utilizar a análise de conteúdo”.</p> <p><u>p.96</u>: “Por considerarmos necessária a reorientação da avaliação, optamos por analisar a produção escrita dos alunos mostrando que é possível olhar para ela buscando conhecer quais conhecimentos eles demonstraram ter, quais ainda estão em construção”.</p> <p><u>p.106</u>: “Com informações sobre a produção escrita dos alunos, que apresentam tanto as suas dificuldades quanto as suas possibilidades, é possível realizar uma intervenção que de fato contribua para o desenvolvimento dos alunos. Nessa perspectiva, a avaliação, enquanto processo de recolha e interpretação de dados seguido de uma intervenção informada e ajustada, colocar-se-ia a serviço da regulação do processo de ensino-aprendizagem (HADJI, 2001)”.</p>	<p><u>p.106</u>: “Para realizarmos a análise dos dados, a Análise de Conteúdo teve um papel fundamental: ela nos ajudou a ‘quebrar’ a produção escrita dos alunos e assim pudemos olhar para ela tanto na horizontal quanto na vertical”.</p> <p><u>p.107</u>: “Na vertical, quando relacionamos a produção de cada um dos alunos nas três questões de sua prova, considerando as características, as dificuldades apresentadas. Na horizontal, quando olhamos a primeira questão de todos os alunos, depois a segunda e a terceira, analisando os pontos em comum e as regularidades presentes na produção escrita desse grupo de alunos”.</p> <p><u>p.107</u>: “Nesse processo de ‘desconstrução’ e ‘construção’ da produção escrita, pudemos realizar inferências: O que o aluno fez? Por que fez assim? É isso mesmo que ele queria dizer?”</p> <p><u>p.107</u>: “Realizar inferências serviu para que pudéssemos levantar hipóteses, estabelecer conexões entre as informações encontradas, separar as informações em unidades de análise. Semelhante a isso, na medida em que o professor se propõe a observar e a ouvir o que o aluno faz ao resolver um problema, ele pode realizar ‘inferências’ em sala de aula e tomar consciência de como o aluno pensou, quais são suas dificuldades, para então tomar decisões referentes a sua prática pedagógica”.</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>PEREGO, S. (2005)</p>	<p><u>p.19:</u> “Investigando suas respostas é possível, ao professor, descobrir o que os alunos sabem e como lidam com aquilo que não dominam ou dominam parcialmente. A partir de uma investigação mais profunda dessas respostas, o professor poderá descobrir como agir e em que e como deve interferir durante o processo de aprendizagem de seus alunos. Ao fazê-lo, estará, também, aprendendo a como ensinar”.</p> <p><u>p. 23 e 24:</u> “A análise realizada permitiu, então, obter informações, tirar conclusões, compreender a realidade, completar ou inferir conhecimentos por meio de exame detalhado de fatos e dados [...]”.</p> <p><u>p.27:</u> “Nessa análise, procuramos identificar os erros mais freqüentes e discutir e/ou apontar suas possíveis razões, descrever nossa interpretação sobre o que os alunos mostraram saber em seus registros escritos ao resolverem as questões propostas, apontar possíveis encaminhamentos para a regulação do processo de ensino e aprendizagem”.</p> <p><u>p.78:</u> “Ao analisarmos a produção dos alunos da Licenciatura nesse estudo confirmamos a importância dessa ferramenta para o professor. Utilizar a avaliação para investigar os saberes dos alunos é uma das maneiras de acompanhar e participar da aprendizagem destes. Neste trabalho utilizamos uma forma de avaliação, a prova escrita, mas a diversificação das formas de avaliação faz com que o professor possa ter uma idéia global do fazer de seus alunos no processo de aprendizagem e contribuir para sua efetivação no sentido de poder auxiliá-los nessa tarefa”.</p>	<p><u>p.23:</u>“Para a análise e interpretação das informações, seguimos as orientações metodológicas preconizadas por BARDIN (1977). Após leitura exaustiva e repetida dos textos e considerando os objetivos do estudo e as questões teóricas apontadas, ordenamos e classificamos o conteúdo dos textos, o que permitiu a identificação de vários temas, que após cuidadosa análise resultou no elenco final de temas”.</p> <p><u>p.26:</u> “No nosso primeiro contato propriamente dito com as provas resolvidas, descrevemos os procedimentos utilizados pelos alunos em cada questão, tentando traduzir o que eles registraram em suas provas. Em seguida, tentamos agrupar as resoluções semelhantes”.</p> <p><u>p.27:</u> “Optamos por fazer uma análise das provas vertical e horizontalmente. Inicialmente analisamos questão por questão, para em seguida analisarmos cada prova inteira de modo a não perder de vista o todo da prova de cada aluno. Dessa forma, ao analisar uma questão, procuramos também nas outras do mesmo aluno indícios da possível razão que o levou a responder algo ou mesmo cometer algum tipo de erro”.</p> <p><u>p.80:</u> “A investigação (horizontal) na prova desse aluno permitiu que fizéssemos essa inferência, pois as outras operações de adição com reserva foram efetuadas corretamente” .</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
PEREGO (2005) (continuação)	p.83: “Por meio da análise que fizemos dos registros escritos foi possível perceber que os alunos mostram muito dos seus conhecimentos matemáticos quando resolvem as questões abertas, daí a importância de que todos os ‘rascunhos’ e cálculos feitos pelos alunos cheguem até o professor. Só assim ele pode ter a noção do todo percorrido pelo aluno na resolução de problemas”.	

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>SEGURA (2005)</p>	<p>“É preciso, primeiramente, reforçar que as informações obtidas com este estudo têm a pretensão de contribuir para o trabalho daqueles que buscam compreender melhor a prática profissional do professor, fornecendo subsídios que possam ser úteis para a (re)elaboração de programas de formação profissional e que, também, possam proporcionar aos leitores informações sobre a relevância do trabalho de análise da produção escrita, como fonte de informações sobre compreensões manifestas dos diferentes conteúdos, estratégias e procedimentos nas mais diversas situações”.</p> <p>“Neste estudo, ao se analisar a produção escrita de professores, não se teve, em momento algum, a pretensão de emitir qualquer juízo de valor sobre ela”.</p> <p>“Ou ainda, como sugere este estudo, o professor pode olhar para a produção escrita de seus alunos, seja ela qual for, buscando identificar os caminhos percorridos por eles, e, desta forma, escolher quais intervenções poderão favorecer a aprendizagem”.</p>	<p>“[...] várias leituras de toda a produção escrita apresentada pelos professores ao resolverem as questões. Essas leituras num primeiro momento foram feitas no sentido vertical, ou seja, todas as questões de uma prova, depois todas as questões de outra prova, e assim todas as provas. Num segundo momento, para iniciar a correção das provas, foram feitas leituras no sentido horizontal, ou seja, a 1ª questão de todas as provas, depois a 2ª questão de todas as provas, e assim todas as questões”.</p> <p>“Em seguida foi realizada a correção das provas, que aconteceu primeiramente no sentido horizontal, principalmente para encontrar similaridades entre as resoluções nas provas, e depois no sentido vertical para encontrar similaridades entre a resolução de questões. Com isso foi possível ter uma visão mais clara a respeito das formas de resolução utilizadas”.</p> <p>“As soluções apresentadas foram analisadas com base nos critérios: estratégias/procedimentos mais utilizados; acertos e erros mais frequentes; marcas de conteúdo matemático escolar e agrupadas de acordo com suas similaridades.”</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>PEREGO, F. (2006)</p>	<p>p.11 e 12: “O caminho que escolhemos para investigar como compreender melhor e poder auxiliar no processo de aprendizagem, foi analisar a produção escrita de alunos e, buscar por meio dela, conhecer como expressam aquilo que sabem”.</p> <p>p.17: “[...] meio desta análise, mostrar que a avaliação pode trazer ao professor muitas informações relevantes a respeito da aprendizagem dos alunos”.</p>	<p>p.27: “O primeiro momento consistiu em olhar cada Prova inteira, observando a forma como os alunos procuraram resolver as questões, se dominavam ou não os algoritmos utilizados por eles, se os dados da questão foram retirados adequadamente. A partir daí, num segundo momento, iniciou-se o estudo da questão 1 de todas as Provas.</p> <p>p.28: “Num terceiro momento, foi feita a descrição e análise da produção escrita, as questões foram estudadas uma a uma. Por exemplo, estudaram-se todas as resoluções da Questão 1, e assim sucessivamente, comparando com a primeira descrição que já havia sido feita. Em seguida, olhando mais atentamente o início das resoluções, foi possível agrupar as resoluções de acordo com a semelhança na escolha do primeiro procedimento”.</p> <p>p.28: “É importante deixar claro que a análise das Provas foi feita de maneira ‘horizontal’ e ‘vertical’. A análise ‘horizontal’ consistiu em estudar a Questão 1 de todas as Provas, por exemplo. E, na análise ‘vertical’, as Provas eram estudadas individualmente como um todo, ou seja, todas as questões de uma mesma Prova, com o objetivo de saber um pouco mais a respeito de quais aspectos já eram dominados por determinado aluno, se as situações equivocadas que ele apresentou na resolução de uma questão estavam também presentes em outra; se havia alguma forma de saber se esses equívocos eram causadas, por exemplo, por alguma dificuldade que ele possuía ou por distração”.</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>NEGRÃO DE LIMA (2006)</p>	<p><u>p.168 e p.169</u>: “Ao investir na avaliação como ação investigativa, o professor tem a oportunidade de valorizar e reconhecer os múltiplos saberes que transitam no espaço da sala de aula a partir mesmo dos desempenhos aquém dos esperados. Por isso, é necessário que o professor disponha de informações confiáveis do que seus alunos sabem e são capazes de fazer. Daí a importância de o professor observar, analisar, interpretar o processo e os resultados produzidos pelos alunos, fazendo uma análise de suas produções a fim de identificar os saberes por eles construídos”.</p> <p><u>p. 169</u>: “Com a finalidade de contribuir para a prática sistemática da avaliação da aprendizagem no contexto escolar de forma investigativa e de demonstrar que é possível por meio da produção escrita conhecer e compreender como os alunos usam seus conhecimentos matemáticos é que se buscou realizar este estudo”.</p> <p><u>p. 170</u>: “A partir da análise da produção escrita de cada aluno-participante e tendo os critérios do Manual como eixo, inferiram-se os saberes ‘revelados’ pelos alunos”.</p> <p><u>p. 176</u>: “A relevância deste estudo relaciona-se à da sua finalidade: contribuir para o reconhecimento de que realizar uma prática sistemática da avaliação da aprendizagem, por meio de um processo investigativo da produção escrita dos alunos é possível, a partir do momento em que cada um, professor e aluno, com as condições de que dispõem, se responsabilizarem pelo</p>	<p><u>p. 64</u>: “Após a seleção da amostra, organizaram-se as provas conforme os créditos obtidos em cada questão, considerando-se para estes as estratégias de resolução e os procedimentos corretos ou incorretos utilizados pelos alunos. Em seguida, descreve-se o procedimento escolhido pelos participantes, na tentativa de traduzir os registros feitos nas provas, agrupando-as de acordo com as semelhanças de resoluções apresentadas pelos alunos”.</p> <p><u>p.64</u>: “Optou-se pro fazer uma análise horizontal e vertical das provas. Primeiramente analisou-se questão por questão, para posteriormente analisar cada prova em sua totalidade para não perder de vista o conjunto da produção escrita apresentado na prova de cada participante. Sendo assim, ao analisar uma questão, procuram-se nas outras respondidas pelo mesmo aluno indícios da possível razão que o levou a encontrar e apresentar ou não uma resposta ou mesmo cometer algum tipo de erro”.</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
	trabalho que lhes compete no ambiente escolar.	
Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
ALVES (2006)	<p>p.103 e 104: “A análise das produções aqui realizada constituiu-se em uma ‘conversa’ do investigador com a escrita do aluno e forneceu valiosas informações, o que mostra que o diálogo em sala de aula pode se tornar um instrumento potente para fornecer, ao professor, pistas sobre o desenvolvimento do processo ensino/aprendizagem.”</p>	<p>p.58: “[...]buscou-se seguir os três procedimentos básicos para sua realização, ou seja, a organização do material, a descrição analítica e as inferências”.</p> <p>p.59: “[...] fiz uma correção vertical, ou seja, analisei as três questões de cada prova, comparando as produções do mesmo aluno e buscando informações que pudessem confirmar as anotações feitas nas três questões.</p> <p>p.103 e 104: “[...] o professor deve preocupar-se e habituar-se a fazer uma análise, não apenas horizontal das produções de seus alunos, caso queira compará-las, mas também uma análise vertical, pois esta lhe permite ter uma visão mais completa e real do estágio de aprendizagem em que os alunos se encontram”.</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>DALTO (2007)</p>	<p><u>p.29</u>: “[...]num processo avaliativo, cuja perspectiva seja a de contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem, a produção escrita do aluno pode fornecer informações sobre o grau de desenvolvimento do seu pensamento algébrico, sua concepção sobre álgebra, bem como a maneira com que o aluno mobiliza o conhecimento – algébrico e/ou aritmético – que possui para a resolução de problemas.</p> <p><u>p.83</u>: “Assim, uma avaliação, nessa perspectiva, da produção escrita dos alunos em uma prova de questões discursivas pode contribuir para que os resultados sejam utilizados na tomada de decisões, tendo em vista contribuir para a aprendizagem”.</p>	<p><u>p.30</u>: “Assim, neste estudo realizou-se uma pesquisa de cunho interpretativo, uma vez que, para a realização de inferências, foi necessário descrever e compreender a produção escrita dos alunos, de modo que se pudesse conhecer, por meio da análise da sua produção escrita, o conhecimento matemático que mostraram possuir, bem como a maneira como este conhecimento foi mobilizado na resolução de problemas.”</p> <p><u>p.36</u>: “[...]para facilitar o processo de descrição e a inferência, conforme propõe a Análise de conteúdo, as resoluções dos alunos foram agrupadas de acordo com suas particularidades.”</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>VIOLA DOS SANTOS (2007)</p>	<p><u>p.14</u>: “A produção escrita dos alunos é uma rica fonte para entender os processos de ensino e aprendizagem bem como os procedimentos e as estratégias utilizados para resolver problemas (BURIASCO, 2004)”.</p> <p><u>p.14</u>: “É possível, por meio da produção escrita dos alunos, compreender como eles lidam com as questões abertas de matemática, ou seja, investigar e analisar o modo como eles interpretam os enunciados das questões, as estratégias que elaboram e, quais procedimentos utilizam”.</p> <p><u>p.27-28</u>: “Uma das formas, atrelada à idéia de avaliação como prática de investigação, de buscar conhecer mais detalhadamente como os alunos lidam com os problemas matemáticos, como se configuram seus processos de aprendizagem, quais dificuldades encontram, tomando as maneiras de lidar dos alunos, diferentes da correta, como constituintes do processo de aprendizagem, é a análise da produção escrita de alunos e professores”.</p> <p><u>p.28</u>: “Assim, ao buscarmos subsídios para conhecer como os alunos lidam com questões abertas de matemática, a produção escrita se mostra como uma alternativa promissora”.</p> <p><u>p.96</u>: “A primeira, e uma das mais importantes considerações que apresentamos com este trabalho, é que a avaliação deve ser encarada como uma prática de</p>	<p><u>p.46</u>: “Realizamos nossas análises em consonância com esses três momentos da análise textual discursiva que acontecem de maneira cíclica e ao longo de todo o processo. Levamos nossos dados ao limite do caos, num processo de desorganização para a constituição das nossas unidades de significados, constituindo assim a unitarização. A partir da busca entre as possíveis relações entre essas unidades, por meio de critérios bem estabelecidos, construímos nossas categorias, que descreveremos a seguir sob três tipos de critérios. Nesse processo construímos um metatexto, no qual nos assumimos por inteiro para tecer algumas considerações sobre a investigação realizada.”</p> <p><u>p.48</u>: “Iniciamos nossas análises descrevendo cada uma das resoluções contidas nas 147 provas que compõem a amostra do nosso estudo. Cada operação, rabisco, observações deixadas pelos alunos, ou seja, toda a produção escrita dos alunos em cada prova foi detalhadamente descrita. Cada vez que olhávamos para a produção escrita dos alunos, conseguíamos fazer uma interpretação algumas vezes diferente da anterior. Assim, essa fase se caracterizou pela busca das unidades de significado, ou seja, a unitarização. Essa estratégia foi sendo refinada a cada vez que olhávamos para as provas, porque mais detalhes das resoluções dos alunos e outras interpretações, eram a todo o momento construídas. Focamos nossa atenção em cada uma das séries, tentando separar as provas pelas resoluções que continham semelhanças. Num primeiro momento, depois de muitas idas e vindas à produção escrita dos alunos, conseguimos juntar as provas de cada uma das séries estudadas em 6 grupos, utilizando alguns critérios preliminares”.</p> <p><u>p. 48</u>: “Essa segunda análise, feita a partir do inventário resultante da</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>VIOLA DOS SANTOS (2007) (continuação)</p>	<p>investigação pelos professores e alunos em sala de aula, e a análise da produção escrita se apresenta como uma estratégia para sua implementação.”</p> <p>p.96: “Essas análises, que têm por objetivo oportunizar compreensões para desvendar e interpretar o caminho percorrido, mostram-se como uma alternativa a propiciar conhecimentos sobre a atividade matemática dos alunos. Por meio dos registros escritos dos alunos é possível inferir sobre seus modos de interpretar o enunciado da questão, bem como analisar as estratégias elaboradas e os procedimentos utilizados.”</p>	<p>análise descritiva, consiste em construir interpretações baseadas na produção escrita de cada aluno para buscar algum entendimento sobre o modo de lidar com a questão.”</p> <p>p.49: “Interpretamos, atribuímos significados e com isso construímos nosso conhecimento tendo a produção escrita dos alunos como ponto de partida. Por meio dos registros escritos contidos nas provas, construímos uma interpretação da possível interpretação que os alunos fizeram do enunciado da questão, inferimos as estratégias que utilizaram, bem como o que eles mostram saber da matemática escolar, que aquela específica questão pudesse mostrar”.</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>CELESTE (2008)</p>	<p>p.18: “A prova escrita é um dos instrumentos de avaliação com o qual se pode investigar a aprendizagem dos alunos, o ensino do professor, o que acontece na sala de aula. Para isso, um dos procedimentos é o de se fazer a análise da produção escrita, pois, por meio dela, o professor pode conhecer quais estratégias os alunos utilizam, quais as dificuldades apresentadas, os erros cometidos.”</p> <p>p.57: “A análise da produção escrita nessa questão, por exemplo, pode indicar uma (re)orientação na prática pedagógica do professor, pois ao identificar que alguns alunos interpretam “média” como “soma de pontos”, ele poderia explorar esses dois temas com a turma, a fim de que seus alunos pudessem superar suas dificuldades.”</p>	<p>p.26: “Este trabalho foi desenvolvido numa perspectiva qualitativa, de caráter interpretativo à luz das orientações presentes na Análise de Conteúdo,[...]”.</p> <p>p.26: “[...] as diferentes fases da análise de conteúdo se organizam em torno de três pólos cronológicos: pré-análise; exploração do material; tratamento dos resultados, inferência e interpretação”.</p> <p>p.28: “Após as correções, o primeiro passo consistiu em fazer as descrições das respostas dadas às questões, de modo que resoluções semelhantes pudessem ser identificadas e agrupadas. Outro passo consistiu em formar os grupos para a análise, de acordo com as semelhanças que apresentavam em suas estratégias”.</p> <p>p.56: “Por meio da produção escrita dos alunos, procurou-se conhecer de que modo os alunos identificam as informações contidas no enunciado de um problema não rotineiro, como eles lidam com elas para construir uma solução no contexto ou na situação na qual esse problema foi apresentado, identificar as estratégias e os procedimentos escolhidos por eles para resolver as questões, e, a partir disso, fazer inferências sobre o que eles demonstram saber. Com isso, e com as interpretações realizadas baseadas na Análise de Conteúdo, foram construídos grupos de análise para cinco (5) das questões resolvidas.”</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>SANTOS (2008)</p>	<p><u>p.20</u>: “Nessa perspectiva de avaliação, um dos caminhos que podem ser utilizados para compreender os modos de pensar dos alunos e como lidam com problemas é a análise da produção escrita deles. Este foi o caminho escolhido nesta investigação para compreender como os alunos lidam com questões discursivas, não rotineiras de matemática.”</p> <p><u>p.23</u>: “Analisando a produção escrita dos alunos, interpretando as informações presentes nessa produção, os professores podem também identificar possíveis dificuldades, analisar os erros encontrados e obter indícios do que pode ter levado esses alunos a errarem e, a partir de tais informações e de conversas com eles, planejar novas ações de modo que estas possam contribuir com a aprendizagem dos envolvidos. Nesse sentido, a análise da produção escrita constitui-se também uma alternativa para que o professor possa caminhar em direção a refletir sobre sua prática, sobre suas escolhas didáticas, e para que a reorientação da avaliação escolar aconteça (NAGYSILVA, 2005).”</p> <p><u>p.104</u>: “Ao se fazer a opção pela análise da produção escrita para o desenvolvimento desta investigação, pensou-se em apresentá-la como um dos caminhos que pode ser adotado em sala de aula pelo professor para implementar esta perspectiva de avaliação, na busca de investigar, analisar e compreender como os alunos interpretam um problema, que estratégias e procedimentos utilizam para resolvê-lo, como expressam suas idéias, e assim como obter informações sobre o que sabem ao resolver questões discursivas”.</p>	<p><u>p.37 e 38</u>: “O estudo foi desenvolvido em três fases: a da pré-análise, a da exploração do material e a da inferência e interpretação. A fase da pré-análise foi a fase de organização do material, neste caso a produção escrita dos alunos nas resoluções das questões da prova em tela. Nessa fase foram realizadas leituras do material para conhecer os registros escritos. Inicialmente fez-se a leitura vertical das resoluções das questões, ou seja, realizou-se uma leitura de todas as resoluções de um mesmo aluno. Em um segundo momento, procedeu-se à leitura das resoluções da mesma questão de todos os alunos, isto é, uma leitura horizontal. Em seguida, fez-se uma descrição detalhada do que foi encontrado em cada questão. Para organizar essas descrições foram elaborados quadros descritivos (Apêndice D). Na fase de exploração do material foi realizada, a partir da descrição que se fez de cada questão, uma operação de classificação da produção escrita em agrupamentos, em razão da parte comum existente entre elas no que diz respeito às estratégias, segundo interpretação desta investigadora, adotadas pelos alunos. Essa operação de classificação foi realizada com o objetivo de se ter uma representação simplificada dos dados. Após a fase de classificação da produção escrita em agrupamentos, partiu-se para a última fase: a da inferência e interpretação”.</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
ALMEIDA (2009)	<p>p.20: “Para que a avaliação tomada como prática investigativa se constitua, um dos caminhos que pode ser utilizado é o da análise da produção escrita. Investigar os registros dos alunos nas provas escritas permite fazer inferências sobre o que os alunos mostram saber e sobre os caminhos que escolheram para resolver um problema.”</p>	<p>p.41: “Para inferir sobre os conteúdos matemáticos presentes nos registros dos alunos, têm-se algumas etapas: obtenção da amostra, correção das provas, descrição detalhada dos registros escritos apresentados pelos alunos, análises da descrição dos registros e discussões das análises”.</p> <p>p.45: “Nesta fase, foi feita uma leitura vertical e horizontal das resoluções dos alunos e, em seguida, uma descrição detalhada dos registros encontrados. A leitura ‘horizontal’ consistiu em estudar uma mesma questão em todas as provas, e, na leitura ‘vertical’, as provas eram estudadas individualmente como um todo, ou seja, todas as questões de uma mesma prova, de um mesmo aluno, com o objetivo de saber se “as situações equivocadas que ele apresentou na resolução de uma questão estavam também presentes em outra; se havia alguma forma de saber se esses equívocos eram causados, por exemplo, por alguma dificuldade que ele possuía ou por distração” (PEREGO, 2006)”.</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>FERREIRA (2009)</p>	<p><u>p.14</u>: “Tendo em vista que a prova escrita é um dos instrumentos mais utilizados como meio de avaliação, o GEPEMA tem se dedicado à análise da produção escrita de alunos e professores, porque considera que a análise dos registros escritos é uma importante ferramenta de investigação por meio da qual se pode obter informações sobre os processos de ensino e aprendizagem.</p> <p><u>p.24</u>: “[...] indicar ações que possibilitam inferir formas de os alunos procederem na execução das estratégias adotadas/elaboradas; reconhecer possíveis dificuldades enfrentadas; identificar como utilizam conteúdos matemáticos; inferir sobre as interpretações feitas; ter indícios do que os alunos mostram saber; perceber relações que os alunos estabelecem com as informações do enunciado; enfim, conhecer de que forma lidam com questões de matemática, sejam elas rotineiras ou não”.</p> <p><u>p.26</u>: “Ao adotarmos a análise da produção escrita como prática de investigação, estamos assumindo um olhar sobre as <i>maneiras de lidar</i>”.</p>	<p><u>p.37</u>: “Nessa primeira correção, fizemos uma leitura horizontal das provas, ou seja, corrigimos o primeiro item de todas as provas, depois corrigimos o segundo item de todas as provas, o terceiro e assim por diante. Paralelamente à leitura e a correção das questões, também registrávamos a descrição das diferentes resoluções de cada item. De posse de todas as resoluções levantadas foi elaborado um manual de correção para cada item da prova. O manual de correção continha a descrição das diferentes resoluções que surgiram da primeira correção e o código de correção (2, 0, 1, 9) que lhes foi atribuído”.</p> <p><u>p.39</u>: “A partir das descrições feitas das produções escritas, buscamos investigar quais as questões em que as produções poderiam dar margem para uma análise mais rica no que diz respeito às estratégias e aos procedimentos desenvolvidos”.</p> <p><u>p.39</u>: “Feito esse recorte, iniciamos uma leitura detalhada das descrições de cada item, buscando quais estratégias e procedimentos foram mais frequentes. Procuramos fragmentar cada produção de modo a observá-la em seus detalhes, analisando cada uma por si só e, em seguida, com relação às demais produções”.</p> <p><u>p. 39</u>: “De posse das inferências quanto às estratégias e procedimentos utilizados pelos participantes, agrupamos as produções escritas por estratégia utilizada”.</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>LOPEZ (2010)</p>	<p>p.34: “A produção escrita dos alunos pode fornecer valiosas informações a respeito do modo como lidaram com a tarefa de avaliação, mas nem sempre essas informações estão imediatamente visíveis para o professor.”</p> <p>p.136: “Contudo, o fato de nosso campo de análise ter sido reduzido, por não podermos mostrar os enunciado das questões, não diminui o potencial da análise da produção escrita como um meio de obter informações sobre o processo de ensino e aprendizagem de alunos, uma vez que o professor em sala de aula não terá esse obstáculo”.</p>	<p>p.45: “Este conjunto é organizado em três etapas: - a pré-análise – é a fase da organização propriamente dita que possui três missões: a escolha dos documentos a serem submetidos a análise (delimitação do corpus), a formulação das hipóteses e dos objetivos, e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final; - a exploração do material – é a fase de operações de codificação, recortes (escolhas de unidades), enumeração (escolha de regras de contagem) e categorização; - tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação (BARDIN, 2004).</p> <p>p.47: “Como optamos por realizar, primeiramente, correções e leituras horizontais, ou seja, corrigir e analisar as produções escritas de uma mesma questão em todas as provas da amostra, “desmontamos” as provas em questões e agrupamos todas as questões iguais de todas as provas. Dessa maneira, “transformamos” as 261 provas em 31 “blocos de questões”, cada um contendo todas as produções dos alunos referentes a cada questão”.</p> <p>p.49: “Após essa primeira correção, efetuamos as descrições das resoluções encontradas em cada item, de maneira bem detalhada, de forma que fosse possível “enxergar” a resolução por meio, apenas, das descrições. Para assegurar a legitimidade das descrições, todas elas foram validadas por, pelo menos, mais dois membros do GEPEMA”.</p> <p>p.50: “Identificadas e agrupadas as descrições de resoluções semelhantes, começamos um processo de busca por relações entre elas, a fim de realizar agrupamentos que pudessem possibilitar uma melhor compreensão sobre a maneira com que os alunos lidaram com as questões”.</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>LOPEZ (2010) (continuação)</p>		<p>p.50-51: “Procuramos agrupar as produções escritas, primeiramente, pelos diferentes procedimentos registrados pelos alunos para operacionalizarem suas estratégias de resolução e, posteriormente, por outras características que se mostraram marcantes nessas produções. Elaborados os agrupamentos, começamos a examiná-los detalhadamente de maneira a conseguir dar significado para as resoluções dos alunos, procurando compreender o processo de elaboração dessa resolução e, sempre que possível, a razão de ter ocorrido dessa maneira. Para cada item, foi elaborado um pequeno texto contendo possíveis interpretações e inferências sobre a maneira como as resoluções foram elaboradas, obtidas por meio de intenso exame e “impregnação” das descrições das produções e da relação com a fundamentação teórica apresentada”.</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>BEZERRA (2010)</p>	<p>p.30: “A análise da produção escrita dos alunos pode constituir-se em uma fonte de comunicação entre professor e aluno, com a qual o professor tem a possibilidade de conhecer detalhadamente os modos de compreensão dos alunos, os caminhos percorridos, as dificuldades apresentadas, as estratégias e os procedimentos utilizados, e o aluno tem possibilidade de acompanhar o desenvolvimento da sua aprendizagem”.</p>	<p>p.59: “As diferentes fases da Análise de Conteúdo, segundo Bardin (2004), são organizadas em torno de três fases cronológicas: i) a pré-análise; ii) a exploração do material; iii) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação”.</p> <p>p.62: “Na primeira fase, isto é, da <i>pré-análise</i>, organizamos as provas da amostra obtida. Cada uma das duzentas e sessenta e uma (261)30 provas pertencentes à amostra foi nomeada de modo a possibilitar a sua identificação, para a qual utilizamos cinco dígitos e quatro letras. Por exemplo, a prova PRC02E024 indica que ela pertence à amostra de alunos paranaenses (PR), do caderno 02 (C02) e que foi a vigésima quarta prova corrigida (E024). A partir disso, realizamos uma leitura das resoluções, observando os procedimentos desenvolvidos pelos alunos ao resolver cada item, com o intuito de nos familiarizarmos com os registros escritos apresentados nas provas. Duas leituras foram realizadas: uma leitura vertical das resoluções, que consistiu em estudar as resoluções de todas as questões de um mesmo aluno; uma leitura horizontal, na qual averiguamos os procedimentos utilizados para a resolução da primeira questão e os respectivos itens de todas as provas, em seguida da segunda questão de todas as provas e assim por diante”.</p> <p>p.62: “Na segunda fase, a da exploração do material, resolvemos todas as questões presentes na prova, identificamos os conteúdos matemáticos requeridos para a resolução, fizemos um levantamento dos conteúdos utilizados pelos alunos na resolução das questões, identificamos as estratégias e os procedimentos por eles desenvolvidos e compusemos um gabarito para nos auxiliar durante o processo de correção. Elaboramos, também, os critérios de correção e</p>

Autor	Como a análise da produção escrita é descrita	Como é feita a análise da produção escrita
<p>BEZERRA (2010) (continuação)</p>		<p>de descrição para cada item da prova.”</p> <p>p.64: “Após a fase de classificação dos registros escritos em agrupamentos, partimos para a última etapa, caracterizada, segundo Bardin (2004), por inferência e interpretação. A partir dos agrupamentos realizados, passamos a analisar os registros escritos dos alunos pertencentes a cada subgrupo, buscando fazer inferências sobre: a) como eles interpretaram o enunciado das questões; b) quais conteúdos matemáticos utilizaram para resolvê-las; c) como lidaram com as técnicas operatórias dos algoritmos; d) as dificuldades apresentadas; e) a utilização de âncoras durante a resolução; f) como empregaram as estratégias requeridas na resolução; g) os procedimentos desenvolvidos”.</p>

APÊNDICE B

Autor	Freudenthal (1968)
Termo/assunto	
Origem/motivação	⁴³
Matemática como atividade humana	
Realidade/realístico	
Matematização	<p><u>p. 6</u> “The problem, however, is still much more serious. In the past, and mostly even now, textbook writing has been dominated by quite other aims than by the goal of a mathematics that could be useful. Mathematics is a peculiar subject. Arithmetic and geometry have sprung from mathematizing part of reality. But soon, at least from the Greek antiquity onwards, mathematics itself has become the object of mathematizing. Arranging and rearranging the subject matter, turning definitions into theorems and theorems into definitions, looking for more general approaches from which all can be derived by specialization, unifying several theories into one - this has been a most fruitful activity of the mathematician, and no doubt our students are entitled to enjoy these fruits. No doubt modern mathematics is both much more flexible and much simpler than the mathematics of fifty years ago. No doubt our students have to learn the most modern mathematics. Teachers are more and more prepared and more and more inclined to bridge the gap between school mathematics and grown-up mathematics which had become wider from year to year”.</p> <p><u>p. 7</u> “However, this is not the whole story. The problem is not what kind of mathematics, but how mathematics has to be taught, in its first principles mathematics means mathematizing reality, and for most of its users this is the final aspect of mathematics, too. For a few ones this activity extends to mathematizing mathematics itself. The result can be a paper, a treatise, a textbook. A systematic textbook is a thing of beauty, a joy for its author, who knows the secret of its architecture and who has the right to be proud of it. Look how such an author would justify his construction: Why have you defined addition on page 10 in such a circumstantial way? – because this more general definition will prove useful on p. 110. Why have you proved this geometrical theorem in such an unnatural manner? – because at this stage I restrict myself to affine notions which have to precede metric notions. Why do not you mention forces as an instance of vectors? – because mechanics has to be based upon vector algebra and not the other way round”.</p> <p><u>p. 7</u> “Systematization is a great virtue of mathematics, and if possible, the student has to learn this virtue, too. But then I mean</p>

⁴³ As células em branco significam que não foram encontradas informações, no texto referenciado, a respeito do tema enunciado no quadro.

	the activity of systematizing, not its result. Its result is a system, a beautiful closed system, closed, with no entrance and no exit. In its highest perfection it can even be handled by a machine. But for what can be performed by machines, we need no humans. What humans have to learn is not mathematics as a closed system, but rather as an activity, the process of mathematizing reality and if possible even that of mathematizing mathematics”.
Reinvenção guiada	
Contextos/ Fenomenologia didática	
Rotas de aprendizagem/rotas de invenção	
Trajetórias de ensino e aprendizagem	
Produções dos alunos/interação	
Modelos	

Autor	Freudenthal (1979)
Termo/assunto	
Origem/motivação	<p>p. 323 “Permiti que vos resuma os conceitos fundamentais do IOWO, através de alguns «slogans» que sublinhem os seguintes pontos a propósito da Matemática:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Actividade humana em vez de disciplina pré-estabelecida; - Matematização da realidade, em vez de realidade já matematizada; - Reinvenção em vez de transmissão dos conceitos; - Apresentação da realidade como fonte, <i>a priori</i>, da Matemática, em vez de domínio de aplicação; - Articulação da Matemática com os outros domínios, em vez de apresentação isolada ; - Contextos ricos de significado, em vez de reunião de problemas linguísticos ; - Elaboração de figurações mentais, em vez de conceitos; - Abordagens múltiplas em relação a conceitos novos, em vez de concretização múltipla; - Compreensão em vez de mecanismo.”
Matemática como atividade humana	<p>p. 312 “A Matemática é uma actividade humana simultaneamente natural e social, tal como a palavra, o desenho e a escrita. Figura entre as primeiras actividades cognitivas conhecidas e foi a primeira disciplina a ser ensinada, mas evoluiu e transformou-se sob a influência das modificações sociais, bem como a sua Filosofia e a maneira de ser ensinada. Permiti que o prove, considerando o exemplo da numeração.”</p>
Realidade/realístico	
Matematização	
Reinvenção guiada	
Contextos/ Fenomenologia didática	
Rotas de aprendizagem/rotas de invenção	
Trajetórias de ensino e aprendizagem	
Produções dos alunos/interação	

Modelos	
Autor	Freudenthal (1983)
Termo/assunto	
Origem/motivação	
Matemática como atividade humana	
Realidade/realístico	
Matematização	
Reinvenção guiada	
Contextos/ Fenomenologia didática	<p>p. 28: “First of all, what of the terms “phenomenology” and “didactical phenomenology”? Of course I do not mean “phenomenology” in the sense that might be extracted from the works of Hegel, Husserl, and Heidegger. Though the clearest interpretation I can imagine is that by means of the example of chapter I, which is to be continued in the following chapters, nevertheless it is worthwhile trying something like a definition”.</p> <p>p. 28: “I start with the antithesis – if it really is an antithesis – between <i>nooumenon</i> (thought object) and <i>phainomenon</i>. The mathematical <i>objects</i> are <i>nooumena</i>, but a piece of mathematics can be experienced as a <i>phainomenon</i>; numbers are <i>nooumena</i>, but working with numbers can be a <i>phainomenon</i>.”</p> <p>p. 28: “Mathematical concepts, structures, and ideas serve to organise phenomena – phenomena from the concrete world as well as from mathematics – and in the past I have illustrated this by many examples³. By means of geometrical figures like triangle, parallelogram, rhombus, or square one succeeds in organising the world of contour phenomena; numbers organise the phenomenon of quantity. On a higher level the phenomenon of geometrical figure is organised by means of geometrical constructions and proofs, the phenomenon “number” is organised by means of the decimal system. So it goes in mathematics up to the highest levels: continuing abstraction brings similar looking mathematical phenomena under one concept – group, field, topological space, deduction, induction, and so on”.</p> <p>p. 28: “Phenomenology of a mathematical concept, a mathematical structure, or a mathematical idea means, in my terminology, describing this <i>nooumenon</i> in its relation to the <i>phainomena</i> of which it is the means of organising, indicating which phenomena it is created to organise, and to which it can be extended, how it acts upon these phenomena as a means of organising, and with what power over these phenomena it endows us. If in this relation of <i>nooumenon</i> and <i>phainomenon</i> I stress the didactical element, that is, if I pay attention to how the relation is acquired in a learning–teaching process, I speak of <i>didactical</i> phenomenology of this <i>nooumenon</i>. If I would replace “learning–teaching process” by “cognitive growth”, it would be <i>genetic</i> phenomenology and if “is ... in a learning–teaching process” is replaced by “was ... in history”, it is <i>historical</i> phenomenology. I am always concerned with phenomenology of mathematical nooumena, although the terminology could be</p>

	<p>extended to other kinds of noumena”.</p> <p>p. 32: “What a didactical phenomenology can do is to prepare the converse approach: starting from those phenomena that beg to be organised and from that starting point teaching the learner to manipulate these means of organising. Didactical phenomenology is to be called in to develop plans to realise such an approach. In the didactical phenomenology of length, number, and so on, the phenomena organised by length, number, and so on, are displayed as broadly as possible. In order to teach groups, rather than starting from the group concept and looking around for material that concretises this concept, one shall look first for phenomena that might compel the learner to constitute the mental object that is being mathematised <i>by</i> the group concept. If at a given age such phenomena are not available, one gives up the – useless – attempts to instill the group concept”.</p>
Rotas de aprendizagem/rotas de invenção	
Trajetórias de ensino e aprendizagem	
Produções dos alunos/interação	
Modelos	

Autor	Freudenthal (1991)
Termo/assunto	
Origem/motivação	
Matemática como atividade humana	<p>p. 47 “This is a view at variance with that of prescribing to people <i>a priori</i> the mathematics they should learn. Learners should be allowed to find their own levels and explore the paths leading there with as much and as little guidance as each particular case requires. There are sound pedagogical arguments in favour of this policy. First knowledge and ability, when acquired by one’s own activity, stick better and are more readily available than when imposed by others. Second discovery can be enjoyable and so learning by reinvention may be motivating. Third it fosters the attitude of experiencing mathematics as a human activity.”</p>
Realidade/realístico	
Matematização	<p>p. 30: “Mathematising as a term was very likely preceded and suggested by terms such as axiomatising, formalising, schematising, among which axiomatising may have been the very first to occur in mathematical contexts. Axioms and formulas are an old heritage, although the meaning of “axiom” (or “postulate”), and the form of formulas has changed in the course of time”.</p> <p>p. 41: “Treffers, in his thesis of 1978, distinguished <i>horizontal</i> and <i>vertical</i> mathematising -- not sharply but with due reservations: Horizontal mathematising, which makes a problem field accessible to mathematical treatment (mathematical in the narrow formal sense) versus vertical mathematising, which effects the more or less sophisticated mathematical processing. For a long time I have hesitated to accept this distinction. I was concerned about the theoretical equivalence of both kind of activities and, as a consequence, their equal status in practice, which I was afraid would be endangered by this distinction. How often haven’t I been disappointed by mathematicians interested in education who narrowed mathematising to its vertical component, as well as by educationalists turning to mathematics instruction who restricted it to the horizontal one (to use Treffers’ terminology)! Eventually I have reconciled myself with the idea of this distinction, even to the point of appreciating it positively; I do add certain nuances to its formulation, but in a way that still respects Treffers’ intentions, I believe. I have accepted the distinction because of its consequences for mathematics education, and in particular, for characterising educational styles. I will explain this in detail when I will deal with theoretic frameworks of mathematics education (3.1.2)”.</p> <p>p.41 e p.42: “from the world of <i>life</i> to the world of <i>symbols</i>. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly; this is vertical mathematisation. The world of life is what is experienced as reality (in the sense I used the word before), as is symbol world</p>

	<p>with regard to its abstraction. To be sure, the frontiers of these worlds are rather vaguely marked. The worlds can expand and shrink --also at one another's expense. Something may belong in one instance to the world of life and in another to the world of symbols (road-systems, geographical maps, geometrical figures, bills, tables, forms to be filled out, and so on). Natural number can already belong to the world of life, while abstract addition still requires symbolic schemes. Abstract addition may have been incorporated into the world of life, while the cognition of its commutativity (or multiplication based on it) still need models which are processed and the equivalence of which is understood in the world of symbols. For the expert mathematician, mathematical objects can be part of his life in quite a different way but for the novice. The distinction between horizontal and vertical mathematising depends on the specific situation, the person involved and his environment. Apart from these generalities, examples on various levels are the best way to explain the difference between horizontal and vertical mathematising".</p>
<p>Reinvenção guiada</p>	<p>p. 46: "I shall not start an idle discussion on whether mathematics arises by discovery or invention, or to what degree it does so as a science or as an art. With regard to the subject matter to be organised I preferred the term "discovery"; in the context of teaching, however, my choice of long ago was "invention", which embraces both content and form, fresh discovery and organisation. Inventions, as understood here, are steps in learning processes, which is accounted for by the "re" in reinvention, while the instructional environment of the learning process is pointed to by the adjective "guided"".</p> <p>p.48 "It will not be a simple answer since guiding reinvention means striking a subtle balance between the freedom of inventing and the force of guiding, between allowing the learner to please himself and asking him to please the teacher. Moreover, the learner's free choice is already restricted by the "re" of "reinvention". The learner shall invent something that is new to him but well-known to the guide."</p> <p>p. 49 "Whatever the importance of subject matter and neatly tailored abilities, they are, they are considerably less so in mathematics than in any other teaching. Since I stressed mathematics as an activity my answer to the question "where to?" will be: "to an activity". In other words, the learner should reinvent mathematising rather than mathematics; abstracting rather than abstractions; schematising rather than schemes; formalising rather than formulas; algorithmising rather than algorithms; verbalising rather than language -- let us stop here, now that it is obvious what is meant."</p> <p>p.50: "When asked "where to" the reinventing learner should be guided, my answer was: to mathematising and its various aspects. The lack of more substantial objectives can be made up for by asking <i>what</i> the learner is expected to mathematise. This can be answered in one word: Reality. What kind of reality? The learner's own reality as laid open to him by his guide. This leads us to the next question."</p>
<p>Contextos/ Fenomenologia</p>	

didática	
Rotas de aprendizagem/rotas de invenção	
Trajetórias de ensino e aprendizagem	
Produções dos alunos/interação	
Modelos	

Autor	Gravemeijer e Terwel (2000)
Termo/assunto	
Origem/motivação	<p>Matemática como atividade humana</p> <p>p. 780: “[...]mathematics should be taught as <i>mathematizing</i>. This view of the task of school mathematics was not only motivated by its importance for usefulness; for Freudenthal mathematics was first and foremost an activity, a <i>human</i> activity, as he often emphasized. As a research mathematician, doing mathematics was more important to Freudenthal than mathematics as a ready-made product”.</p> <p>p.781: “[Mathematics as a human activity] is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter. This can be a matter from reality which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach (Freudenthal 1971: 413- 414)”.</p> <p>p.786: “We can summarize Freudenthal’s view on mathematics education as follows. Mathematics must be seen fore most as a process, a human activity. However, at the same time, this activity has to result in mathematics as a Product”.</p>
Realidade/realístico	
Matematização	<p>p. 781: “Freudenthal used the word ‘mathematizing’ in a broad sense: it was a form of <i>organizing</i> that also incorporated mathematical matter. By choosing the word ‘organizing’, Freudenthal also indicated that, for him, mathematizing was not just a translation into a ready-made symbol system. Instead, a way of symbolizing might emerge in the process of organizing the subject matter. It was the organizing activity itself that was central to Freudenthal’s conception”.</p>
Reinvenção guiada	<p>p. 786: “According to the reinvention principle, a route to learning along which as tudent is able, in principle, to find the intended mathematics by himselfor herself has to be mapped out (Freudenthal 1973b). To do so, the curriculum developer starts with a thought experiment, imagining aroute by which he or she could have arrived at a personal solution. Knowledge of the history of mathematics can be used as a heuristic device in this process”.</p> <p>p. 786: “Freudenthal (1991) spoke of ‘guided reinvention’ with an emphasis on the character of the learning process rather than on inventing as such. The idea was to allow learners to come to regard the knowledge they acquire as their own, personal</p>

	<p>knowledge, knowledge for which they themselves are responsible. On the teaching side, students should be given the opportunity to build their own mathematical knowledge-store on the basis of such a learning process”.</p>
<p>Contextos/ Fenomenologia didática</p>	<p>p. 786: “In general, contextual problems that allow for a wide variety of solution procedures will be selected, preferably solution procedures that in themselves reflect a possible learning route”.</p> <p>p. 787: “Freudenthal emphasized the importance of a phenomenological embedding of mathematical objects. In opposition to the concept-attainment approach, which implies the embodiment of concepts in concrete materials, Freudenthal proposed the use of phenomenologically rich situations: situations that are begging to be organized. In such a didactical phenomenology (Freudenthal 1983), situations should be selected in such a way that they can be organized by the mathematical objects which the students are supposed to construct. The objective is to figure out how the ‘thought matter’ (<i>nooumenon</i>) describes and analyses the ‘phenomenon’. How it would make the phenomenon accessible for calculation and thinking activity. Such phenomenological analysis lays the basis for a didactical phenomenology which also incorporates a discussion of what phenomenological analysis meant from an educational perspective. For example, to construct length as a mathematical object students should be confronted with situations where phenomena have to be organized by length”.</p> <p>p. 788: “Within the framework of a didactical phenomenology, situations where a given mathematical topic is applied are to be investigated in order to assess their suitability as points of impact for a process of progressive mathematization. If we viewed mathematics as having evolved historically from practical problem solving, it would be reasonable to expect to find the problems which gave rise to this process in present-day applications. Next we could imagine that formal mathematics came into being in a process of generalizing and formalizing situation-specific problem solving procedures and concepts about a variety of situations. The goal of a phenomenological investigation is, therefore, to find problem-situations from which situation-specific approaches can be generalized, and to find situations that can evoke paradigmatic solution-procedures as the basis for vertical mathematization. To find phenomena which can be mathematized, we can seek to understand how they were invented”.</p>
<p>Rotas de aprendizagem/rotas de invenção</p>	
<p>Trajatórias de ensino e aprendizagem</p>	<p>p. 786: “According to the reinvention principle, a route to learning along which a student is able, in principle, to find the intended mathematics by himself for herself has to be mapped out (Freudenthal 1973b). To do so, the curriculum developer starts with a thought experiment, imagining a route by which he or she could have arrived at a personal solution. Knowledge of the history of mathematics can be used as a heuristic device in this process”.</p>
<p>Produções dos alunos/interação</p>	

Modelos	
Autor	Gravemeijer (2005)
Termo/assunto	
Origem/motivação	
Matemática como atividade humana	<p>p.9: “Uma forma diferente de criticar a abordagem de ensino discutida acima, é observar que é o produto final da actividade matemática de muitos matemáticos excepcionais que é tomado como ponto de partida para o ensino dos jovens alunos. Freudenthal (1973, 1991) chama a isto uma inversão anti-didáctica. E acrescenta, a alternativa é criar oportunidades para os alunos reinventarem a Matemática”.</p> <p>p.9: “Relativamente a isto, ele fala da “Matemática como uma actividade humana”. Tal como a actividade dos matemáticos resulta na Matemática tal como a conhecemos hoje, a actividade dos alunos pode resultar na construção da Matemática. Por isso, esta abordagem oferece uma alternativa para o ensino da Matemática como um produto pronto a consumir”.</p>
Realidade/realístico	
Matematização	<p>p.9 e p.10: “Deixem-me explorar ainda mais o ponto de vista de Freudenthal. Para ele – como matemático – a Matemática é antes de mais uma actividade. Uma actividade que designa “matematizar” ou organizar. Ele refere, relativamente a este aspecto, a actividade de organizar assuntos (<i>subject matter</i>) para os tornar mais matemáticos. Isto pode dizer respeito, tanto a organizar matéria da realidade para a tornar mais acessível do ponto de vista do significado matemático como a organizar matéria matemática para a tornar mais matemática”.</p>
Reinvenção guiada	<p>p.10 “Freudenthal (1973) argumentava que os alunos conseguem reinventar a Matemática através da matematização, embora ele também reconhecesse que os alunos não conseguem simplesmente reinventar a Matemática que levou milhões de anos a matemáticos brilhantes a inventarem. Por isso, ele propõe a <i>reinvenção guiada</i>”.</p> <p>“Os professores e os manuais escolares têm de ajudar os alunos no processo, enquanto tentam garantir que os alunos experienciam a aprendizagem da Matemática como um processo de invenção da Matemática, por eles próprios. Para tal poder ser alcançando, tem de ser desenvolvido um trajecto de invenção”.</p>
Contextos/ Fenomenologia didáctica	
Rotas de aprendizagem/rotas de invenção	

Trajelórias de ensino e aprendizagem	p. 10: “Criar trajetórias de invenção tem sido a missão do Instituto Freudenthal, nas últimas décadas. Isto resultou no que chamamos de domínio específico da teoria de ensino para a educação matemática realística (RME). A teoria RME é o resultado da generalização de várias teorias locais de ensino, que descrevem como um certo tópico pode ser ensinado de acordo com a ideia de Freudenthal da Matemática como uma actividade humana.”
Produções dos alunos/interação	
Modelos	<p>p.16: “Inicialmente, os modelos surgem como modelos de contextos específicos. Os modelos referem-se a situações paradigmáticas concretas, que são experiências reais para os alunos. Neste nível os modelos devem permitir estratégias informais que correspondem a estratégias de resolução situadas ao nível da situação que está definida no problema contextualizado.</p> <p>A partir daí, o papel do modelo começa a mudar. Depois, enquanto os alunos recolhem mais experiências com problemas semelhantes, a sua atenção pode transferir-se para as relações e estratégias matemáticas. Como consequência, o modelo toma carácter mais objectivo, e torna-se mais importante como base para o raciocínio matemático do que como uma forma de representar um problema contextualizado. Assim, o modelo começa a tornar-se uma base referencial para o nível da Matemática formal. Ou resumidamente: um <i>modelo de</i> actividades matemáticas informais desenvolve-se num <i>modelo para</i> um raciocínio matemático mais formal.”</p>

Autor	Gravemeijer (2008)
Termo/assunto	
Origem/motivação	
Matemática como atividade humana	<p>“The general point of departure of RME approaches is that students should be given the opportunity to reinvent mathematics. According to Freudenthal, who was the founding father of what we now call realistic mathematics education, mathematics has to be (re)invented.”</p> <p>“He took his point of departure in the notion of ‘mathematics as a human activity’. Being a mathematician himself, he characterizes mathematics as the activity of mathematicians that involves solving problems, looking for problems, and mathematizing subject matter.”</p>
Realidade/realístico	
Matematização	<p>“The latter may concern mathematizing mathematical matter, or mathematizing subject matter from reality, in which mathematizing stands for organizing subject matter from a mathematical point of view. In his view, the main activity of mathematicians is that of mathematizing”.</p>
Reinvenção guiada	<p>“As an alternative, he advocates for giving students the opportunity to do what mathematicians do. Instead of presenting mathematics as a ready-made product, the primary goal of mathematics education should be to engage students in mathematics as an activity. Then, similar to the way in which the mathematical activity of mathematicians has resulted in mathematics as we know it, the activity of students should result in the construction of such mathematics. In this scenario, the students have to be supported in inventing mathematics. In this respect, Freudenthal (1973) speaks of guided reinvention. Guidance by teachers and textbooks is not only needed to ensure that the mathematics that the students invent corresponds with conventional mathematics, but also to substantially curtail the invention process. Students cannot simply reinvent the mathematics that took the brightest mathematicians eons to develop. Teachers need to help students along, while trying to make sure that the students experience their learning as a process of ‘inventing’ mathematics”.</p> <p>“Guided reinvention not only describes the overall approach of RME, but it can also be seen as an instructional heuristic. Taken as a heuristic for design, the reinvention principle suggests the instructional designer to look at the history of mathematics to see how certain mathematical practices developed over time.”</p> <p>As a special point of attention we may note that reinvention has both an individual and a collective aspect, it is the interaction between students in particular that functions as a catalyst. The designer needs to develop instructional activities that are bound to give rise to a variety of student responses. What is aimed for is a variety in responses that to some extent mirrors the reinvention route. When some students come up with more advanced forms of reasoning than others, teachers can exploit these differences. They can try to frame the mathematical issue that underlies those differences as a topic for discussion. In orchestrating such a</p>

	discussion, they can then foster the reinvention process. Without such differences, the teacher will not have a basis for organizing a productive, and will have to ask leading questions to solicit the preferred responses.
Contextos/ Fenomenologia didática	“The second RME design heuristic concerns the didactical phenomenological analysis, or didactical phenomenology for short (Freudenthal, 1983). Here the word ‘phenomenological’ refers to a phenomenology of mathematics. In this phenomenology, the focus is on how mathematical ‘thought-things’ (which may be concepts, procedures, or tools) organize – as Freudenthal (1983) puts it – certain phenomena. Knowing how certain phenomena are organized by the thought thing under consideration, one can envision how a task setting in which students are to mathematize those phenomena may create the need for them to develop the intended thought thing. In this manner, problem situations may be identified, which may be used as starting points for a reinvention process. Note that such starting-point-situations may also be used to explore the students’ informal strategies. To find the phenomena that may constitute starting-point-situations, we may look at applications of the concept, procedure or tool under consideration. Assuming that mathematics has emerged as a result of solving practical problems, we may presume that the present-day applications encompass the phenomena, which originally had to be organized. Consequently the designer is advised to analyze present-day applications in order to find starting points for a reinvention route. Note, however, that as the students progress further in mathematics, applications may concern mathematics itself. Essential for valuable starting point is that they are experientially real for the students, that those concern situations, in which the students know how to act and reason sensibly.”
Rotas de aprendizagem/rotas de invenção	“The designer is advised to especially look for potential conceptual barriers, dead ends, and breakthroughs. These may be taken into account when designing a potential reinvention route”.
Trajetórias de ensino e aprendizagem	
Produções dos alunos/interação	
Modelos	“The third RME design heuristic is called emergent modeling (Gravemeijer, 1999). This design heuristic takes its point of departure in the activity of modeling. Modelling in this conception is an activity that students may employ when solving a contextual problem. Such a modeling activity might involve making drawings, diagrams, or tables, or it could involve developing informal notations or using conventional mathematical notations. The conjecture is that acting with the models will help the students to reinvent the more formal mathematics that is aimed for. Initially, the models come to the fore as context-specific models. The models refer to concrete or paradigmatic situations, which are experientially real for the students. Initial models should allow for informal strategies that correspond with situated solution strategies at the level of the situation of the contextual problem. Then, while the students gather more experience with similar problems, their attention may shift towards the mathematical relations and strategies. This helps them to further develop those mathematical relations, which enables them to use the model in a different manner. The model becomes more important as a base for reasoning about these mathematical relations than as a way of representing a contextual problem. In this manner, the model starts to become a means of support for more formal mathematics. Or more precisely: A model of informal mathematical activity develops into a model for more formal mathematical reasoning.”

<p style="text-align: center;">Autor</p> <p>Termo/assunto</p>	<p>Van den Heuvel-Panhuizen (1996)</p>
<p>Origem/motivação</p>	<p>p.9: “The reform of Dutch mathematics education was provoked to a great extent by the kind of material being exported to The Netherlands from the American reform movement. The Dutch reform movement, which held an aversion to the prevailing home-grown mechanistic approach to arithmetic education, particularly wished to offer an alternative to the American ‘New Math’ approach that was threatening to intrude on Dutch education by way of translated textbooks. The same was true to a lesser degree with respect to the structuralistic methods originating in France and Belgium and the empirically oriented educational materials from Britain.”</p>
<p>Matemática como atividade humana</p>	<p>p.10: “As mentioned above, Freudenthal’s views were determinant for the direction taken by mathematics education reform in The Netherlands.6 One of the most important characteristics of this reform was the assumption of a particular viewpoint regarding both people and mathematics (Freudenthal, 1977). According to Freudenthal, mathematics must be connected to reality, stay close to children and be relevant to society in order to be of human value. This viewpoint involves regarding mathematics not as subject matter but, rather, as a human activity[...].”</p>
<p>Realidade/realístico</p>	<p>p.13: “The contexts need not necessarily refer, however, to real life situations. The important point is that they can be organized mathematically and that the students can place themselves within them. The students must be aware of both the situation and the corresponding problem, and must image themselves in the situation.10 It is this aspect – the ‘imagining themselves’ – that gave RME its name (Van den Brink, 1973a, 1989; Wijdeveld, 1980”).</p>
<p>Matematização</p>	<p>p.11: “It was Treffers (1978, 1987a) who formulated in an educational context the idea of two types of mathematization, by distinguishing ‘horizontal’ and ‘vertical’ mathematization. In broad terms, these can be described as follows: in horizontal mathematization, the students come up with mathematical tools to help organize and solve a problem located in a real-life situation. Vertical mathematization, on the other hand, is the process of a variety of reorganizations and operations within the mathematical system itself. Or, as Freudenthal (1991) put it, horizontal mathematization involves going from the world of life into the world of symbols, while vertical mathematization means moving within the world of symbols. Finding shortcuts and discovering connections between concepts and strategies and then applying these discoveries is implicit in vertical mathematization. Freudenthal emphasized, however, that the differences between these two worlds are far from clear cut. In addition, in his eyes, the two forms</p>

	<p>of mathematization were of equal value and he stressed the fact that both activities could take place on all levels of mathematical activity. In other words, even on the level of counting activities, for example, both forms may occur.”</p> <p><u>p.11</u>: “This idea of mathematization clearly refers to the concept of mathematics as an activity which, according to Freudenthal (1971, 1973), can best be learned by doing. The students, instead of being the receivers of ready-made mathematics, are treated as active participants in the educational process, in which they themselves develop all sorts of mathematical tools and insights. Freudenthal (1973) called this the ‘reinvention principle”.</p>
Reinvenção guiada	
Contextos/ Fenomenologia didática	<p><u>p.12</u>: “Rather than beginning with certain abstractions or definitions that are to be applied later, one must start with rich contexts demanding mathematical organization or, in other words, contexts that can be mathematized (Freudenthal, 1979b, 1986). This also means, therefore, that one must begin with material that can contribute to putting this mathematization into practice (Freudenthal, 1984a). Just as one must avoid beginning with abstractions, so should one avoid pre-structured material (Freudenthal, 1978a, 1979b).</p> <p><u>p.12</u>: “In contrast to this top-down approach, Freudenthal (1978a, 1983a) proposed a ‘didactical phenomenology’ in which an analysis is made of the real-life sources of the mathematics. The point here is to determine which actual phenomena (in the past) contributed to particular mathematical concepts, how the students can come in contact with these phenomena, and how these concepts appear to the students”.</p> <p><u>p.12</u>: “This analysis can be used to help locate contexts that can serve the students as a source for developing mathematics. By this means, moreover, it can be discovered which mathematics is worthwhile learning. The contexts thus serve not only as a source, but as an area of application as well”.</p> <p><u>p.13</u>: “The contexts need not necessarily refer, however, to real life situations. The important point is that they can be organized mathematically and that the students can place themselves within them. The students must be aware of both the situation and the corresponding problem, and must image themselves in the situation.¹⁰ It is this aspect – the ‘imagining themselves’ – that gave RME its name (Van den Brink, 1973a, 1989; Wijdeveld, 1980).</p>
Rotas de aprendizagem/rotas de invenção	
Trajatórias de ensino e aprendizagem	
Produções dos alunos/interação	<u>p.14</u> : “Children are individuals, each following an individual learning path. Education must therefore be adapted to the

	children's distinctive learning processes. The children themselves, indicate, to a great extent, how this should be done, through their own constructions and informal strategies. Rather than repressing such activities, one should use them as footholds for learning the more formal strategies (Freudenthal, 1986)."
Modelos	p.14: "Models can serve as an important device for bridging this gap between informal, context-related mathematics and the more formal mathematics (Streefland, 1985b; Treffers, 1987a, 1991a; Gravemeijer, 1994; Van den Heuvel-Panhuizen, 1995b). The strength of these models is the fact that, while they are often rooted in concrete situations, they are also flexible enough to be introduced into higher levels of mathematical activities. They provide a foothold during the process of vertical mathematization, without obstructing the path back to the source.

<p>Autor</p> <p>Termo/assunto</p>	<p>Van den Heuvel-Panhuizen (2000)</p>
<p>Origem/motivação</p>	<p>p.3: “The development of what is now known as RME started around 1970. The foundations were laid by Freudenthal and his colleagues at the former IOWO, the oldest predecessor of the Freudenthal Institute. The actual impulse for the reform movement was the inception, in 1968, of the Wiskobas project, initiated by Wijdeveld and Goffree. The project’s first merit was that Dutch mathematics education was not affected by the New Math movement”.</p>
<p>Matemática como atividade humana</p>	<p>p.3: “The present form of RME has been mostly determined by Freudenthal’s (1977) view on mathematics. He felt mathematics must be connected to reality, stay close to children’s experience and be relevant to society, in order to be of human value. Instead of seeing mathematics as a subject to be transmitted, Freudenthal stressed the idea of mathematics as a human activity. Mathematics lessons should give students the ‘guided’ opportunity to ‘re-invent’ mathematics by doing it. This means that in mathematics education, the focal point should not be on mathematics as a closed system but on the activity, on the process of mathematization (Freudenthal, 1968).”</p> <p>p.5: “The idea of mathematization clearly refers to the concept of mathematics as an activity which, according to Freudenthal (1971, 1973), can best be learned by doing (see also Treffers, 1978, 1987). The students, instead of being receivers of ready-made mathematics, are treated as active participants in the educational process, in which they develop all sorts of mathematical tools and insights by themselves. According to Freudenthal (1973), using scientifically structured curricula, in which students are confronted with ready-made mathematics, is an ‘anti-didactic inversion.’ It is based on the false assumption that the results of mathematical thinking, placed in a subject-matter framework, can be transferred directly to the students. The activity principle means that students are confronted with problem situations in which, for instance, they can produce fractions and gradually develop an algorithmic way of multiplication and division, based on an informal way of working. In relation to this principle, ‘own productions’ play an important role in RME.”</p>
<p>Realidade/realístico</p>	<p>p.4 :“The reason, however, why the Dutch reform of mathematics education was called ‘realistic’ is not just because of its connection with the real world, but is related to the emphasis that RME puts on offering the students problem situations which they can imagine. The Dutch translation of ‘to imagine’ is ‘zich REALISeren.’ It is this emphasis on making something real in your mind, that gave RME its name. For the problems presented to the students, this means that the context can be one from the real world but this is not always necessary. The fantasy world of fairy tales and even the formal world of mathematics can provide suitable contexts for a problem, as long as they are real in the student’s mind.”</p>

	<p>p.5: “As in most approaches to mathematics education, RME aims at enabling students to apply mathematics. The overall goal of mathematics education is that students must be able to use their mathematical understanding and tools to solve problems. This implies that they must learn ‘mathematics so as to be useful’ (see Freudenthal, 1968). In RME, however, this reality principle is not only recognizable at the end of the learning process in the area of application, reality is also conceived as a source for learning mathematics. Just as mathematics arose from the mathematization of reality, so must learning mathematics also originate in mathematizing reality. Even in the early years of RME it was emphasized that if children learn mathematics in an isolated fashion, divorced from their experiences, it will quickly be forgotten and the children will not be able to apply it (Freudenthal, 1971, 1973, 1968). Rather than beginning with certain abstractions or definitions to be applied later, one must start with rich contexts demanding mathematical organization or, in other words, contexts that can be mathematized (Freudenthal, 1979, 1968). Thus, while working on context problems, the students can develop mathematical tools and understanding.”</p>
<p>Matematização</p>	<p>p. 4: “Later on, Treffers (1978, 1987) explicitly formulated the idea of two types of mathematization in an educational context; he distinguished ‘horizontal’ and ‘vertical’ mathematization. In broad terms, these two types can be understood as follows. In horizontal mathematization, the students come up with mathematical tools which can help to organize and solve a problem set in a real-life situation. Vertical mathematization is the process of reorganization within the mathematical system itself, for instance, finding shortcuts and discovering connections between concepts and strategies and then applying these discoveries. Thus horizontal mathematization involves going from the world of life into the world of symbols, while vertical mathematization means moving within the world of symbols (see also Freudenthal, 1991). Although this distinction seems to be free from ambiguity, Freudenthal stated that it does not mean that the difference between these two worlds is clear cut. He also stressed that these two forms of mathematization are of equal value. Furthermore, one must keep in mind that mathematization can occur at different levels of understanding.”</p>
<p>Reinvenção guiada</p>	<p>p. 9: “One of Freudenthal’s (1991) key principles for mathematics education is that it should give students a ‘guided’ opportunity to ‘re-invent’ mathematics. This implies that, in RME, both the teachers and the educational programs have a crucial role in how students acquire knowledge. They steer the learning process, but not in a fixed way by demonstrating what the students have to learn. This would be in conflict with the activity principle and would lead to pseudo understanding. Instead, the students need room to construct mathematical insights and tools by themselves. In order to reach this desired state, the teachers have to provide the students with a learning environment in which the constructing process can emerge. One requirement is that teachers must be able to foresee where and how they can anticipate the students’ understandings and skills that are just coming into view in the distance (see also Streefland, 1985). Educational programs should contain scenarios which have the potential to work as a lever in shifting students’ understanding. It is important for these scenarios that they always hold the perspective of the long-term teaching/learning trajectory based on the desired goals. Without this perspective, it is not possible to guide the students’ learning.”</p>

Contextos/ Fenomenologia didática	
Rotas de aprendizagem/rotas de invenção	
Trajetórias de ensino e aprendizagem	
Produções dos alunos/interação	<p>p. 5: “Learning mathematics means that students pass through various levels of understanding: from the ability to invent informal context-related solutions, to the creation of various levels of short cuts and schematizations, to the acquisition of insight into the underlying principles and the discernment of even broader relationships. The condition for arriving at the next level is the ability to reflect on the activities conducted. This reflection can be elicited by interaction.”</p> <p>p. 8: “Within RME, the learning of mathematics is considered as a social activity. Education should offer students opportunities to share their strategies and inventions with each other. By listening to what others find out and discussing these findings, the students can get ideas for improving their strategies. Moreover, the interaction can evoke reflection, which enables the students to reach a higher level of understanding.”</p> <p>p. 9: “The significance of the interaction principle implies that whole-class teaching plays an important role in the RME approach to mathematics education. However, this does not mean that the whole class is proceeding collectively and that every student is following the same track and is reaching the same level of development at the same moment. On the contrary, within RME, children are considered as individuals, each following an individual learning path. This view on learning often results in pleads for splitting up classes into small groups of students each following their own learning trajectories. In RME, however, there is a strong preference for keeping the class together as a unit of organization and for adapting the education to the different ability levels of the students instead. This can be done by means of providing the students with problems which can be solved on different levels of understanding.”</p>
Modelos	<p>p. 5: “Models serve as an important device for bridging this gap between informal, context-related mathematics and more formal mathematics. First, the students develop strategies closely connected to the context. Later on, certain aspects of the context situation can become more general, which means that the context more or less acquires the character of a model and as such can give support for solving other, but related, problems. Eventually, the models give the students access to more formal mathematical knowledge. In order to fulfil the bridging function between the informal and formal levels, models have to shift from a ‘model of’ a particular situation to a ‘model for’ all kinds of other, but equivalent, situations.”</p>

Autor	Van den Heuvel-Panhuizen (2001 a)
Termo/assunto	
Origem/motivação	
Matemática como atividade humana	
Realidade/realístico	
Matematização	
Reinvenção guiada	
Contextos/ Fenomenologia didática	p. 20: “The starting point for this learning process is formed by context situations accessible to the children. It is in these specific environmental situations that children develop context-related strategies and notations that later become more generalized, particularly those based on contexts with a definite model character”.
Rotas de aprendizagem/rotas de invenção	
Trajetórias de ensino e aprendizagem	<p>p. 13: “Put briefly, the learning-teaching trajectory describes the learning process the children follow. It should not be concluded from this, however, that it <i>only</i> contains the learning perspective. In this book a learning-teaching trajectory has three interwoven meanings:</p> <ul style="list-style-type: none"> – a <i>learning</i> trajectory that gives a general overview of the learning process of the students – a <i>teaching</i> trajectory, consisting of didactical indications that describe how the teaching can most effectively linkup with and stimulate the learning process – a <i>subject matter</i> outline, indicating which of the core elements of the mathematics curriculum should be taught”. <p>p. 13 e p. 14: “At the same time, a learning-teaching trajectory should not be seen as a strictly linear, step-by-step regime in which each step is necessarily and inexorably followed by the next. It should be seen as being broader than a single track, because it needs to do justice to:</p> <ul style="list-style-type: none"> – the learning processes of individual students – discontinuities in the learning processes; students sometimes progress by leaps and bounds and at other times can appear to relapse – the fact that multiple skills can be learned development at the same time, both within and outside the subject – differences that can appear in the learning process at school, as a result of differences in learning situations outside school – the different levels at which children master certain skills.

	<p>In short, there is sufficient reason to talk about a learning teaching trajectory having a certain bandwidth”.</p> <p><u>p. 14</u>: “The learning-teaching trajectory description describes not only where the children should end up but also the broad path they will follow in getting there. This path does not consist of isolated knowledge elements but rather consists of skills and insights between which cohesion gradually builds up. What is learned in one phase, is understood and performed at a higher level in a later phase. To make proper use of the TAL learning-teaching trajectory descriptions, it is essential to be clear about the stratified nature of the learning process. Properly understood, the different levels can supply a large part of the cohesion in the learning-teaching trajectory”.</p> <p><u>p. 14</u>: “The fact that the students are able to understand the same subject matter at different levels forms the basis for the communal learning-teaching trajectory. This means that children can work in one and the same subject matter domain while they are at different stages of their development”.</p> <p><u>p. 17</u>: “A learning-teaching trajectory description is not a handbook for everyday practice but it can offer support in realizing good mathematics teaching. This can be brought about by, among other things, opening up an across-the-school discussion about mathematics education. With the help of a learning-teaching trajectory, the boundaries of the grade classes can be broken down and a language is provided for discussing mathematics with the whole teaching team”.</p> <p><u>p. 18</u>: “Although the level of mathematics textbook series available in the Netherlands is adequate, they remain nothing more than books until a teacher turns them into education. First of all, a teacher will make a selection from the activities and problems offered in the textbooks. But this means, more often than not, that they end up developing their own new materials for practicing. In general, the oral practice falls almost entirely under the responsibility of the teacher and cannot be found in the textbook. The learning-teaching trajectories can help here both as a frame of reference and as a source of ideas. In other words, the learning-teaching trajectories can help the teacher to rise beyond the limitations of the textbooks”.</p>
<p>Produções dos alunos/interação</p>	<p><u>p. 20</u>: “This process of level raising through the use of models is helped along by interaction with other students. Confrontation with other peoples’ thinking and alternative solutions can push the student’s own thinking into new and fruitful directions. Besides providing opportunities for individual practice and assimilation, interactive group-orientated forms of teaching also lie at the heart of realistic didactics: they lead students to reflect on their own thinking and calculation methods and, in so doing, prepare the ground for level raising”.</p>
<p>Modelos</p>	

<p>Autor</p> <p>Termo/assunto</p>	<p>Van den Heuvel-Panhuizen (2001 b)</p>
<p>Origem/motivação</p>	
<p>Matemática como atividade humana</p>	
<p>Realidade/realístico</p>	
<p>Matematização</p>	
<p>Reinvenção guiada</p>	
<p>Contextos/ Fenomenologia didática</p>	
<p>Rotas de aprendizagem/rotas de invenção</p>	
<p>Trajetórias de ensino e aprendizagem</p>	<p>p.7: “What is meant by a learning-teaching trajectory? To put it briefly, a learning-teaching trajectory describes the learning process the students follow. It should not be concluded from this, however, that it <i>only</i> contains the learning perspective. In our view, the term learning-teaching trajectory⁸ has three interwoven meanings:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ a <i>learning</i> trajectory that gives a general overview of the learning process of the students ▪ a <i>teaching</i> trajectory, consisting of didactical indications that describe how the teaching can most effectively link up with and stimulate the learning process ▪ a <i>subject matter</i> outline, indicating which of the core elements of the mathematics curriculum should be taught”. <p>p.7: “ A learning-teaching trajectory puts the learning process in line, but at the same time it should not be seen as a strictly linear, singular step-by-step regime in which each step is necessarily and inexorably followed by the next. A learning-teaching trajectory should be seen as being broader than a single track. It is very important that such a trajectory description is doing justice to:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ the learning processes of individual students ▪ discontinuities in the learning processes; students sometimes progress by leaps and bounds and at other times can appear to relapse ▪ the fact that multiple skills can be learned simultaneously and that different concepts can be in development at the same

	<p>time, both within and outside the subject</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ differences that can appear in the learning process at school, as a result of differences in learning situations outside school ▪ the different levels at which children master certain skills. <p>In short, there is sufficient reason to talk about a learning-teaching trajectory having a certain Bandwidth”.</p> <p>p.8: “First of all, the trajectory is more than an assembled collection of the attainment targets of all the different grades. Instead of a checklist of isolated abilities, the trajectory makes clear how the abilities are built up in connection with each other. It shows what is coming earlier and what is coming later. In other words, the most important characteristic of the learning-teaching trajectory is its <i>longitudinal perspective</i>”.</p> <p>p.8: “A second characteristic is its <i>double perspective of attainment targets and teaching framework</i>. The learning-teaching trajectory does not only describe the landmarks in student learning that can be recognized en route, but it also portrays the key activities in teaching that lead to these landmarks”.</p> <p>p.8: “The third feature is its <i>inherent coherence, based on the distinction of levels</i>. The description makes clear that what is learned in one stage, is understood and performed on a higher level in a following stage. A recurring pattern of interlocking transitions to a higher level forms the connecting element in the trajectory. It is this level characteristic of learning processes, which is also a constitutive element of the Dutch approach to mathematics education, that brings longitudinal coherence into the learning-teaching trajectory. Another crucial implication of this level characteristic is that students can understand something on different levels. In other words, they can work on the same problems without being on the same level of understanding. The distinction of levels in understanding, which can have different appearances for different subdomains within the whole number strand, is very fruitful for working on the progress of children’s understanding. It offers footholds for stimulating this progress”.</p> <p>p.8: “The fourth attribute of the TAL learning-teaching trajectory is the new description format that is chosen for it. The description is not a simple list of skills and insights to be achieved, nor a strict formulation of behavioral parameters that can be tested directly. Instead, <i>a sketchy and narrative description, completed with many examples</i>, is given of the continued development that takes place in the teaching-learning process”.</p>
Produções dos alunos/interação	
Modelos	

Autor	Van den Heuvel-Panhuizen (2002)
Termo/assunto	
Origem/motivação	<p>p. 1: “Realistic Mathematics Education, or RME, is the Dutch answer to the need, felt worldwide, to reform the teaching of mathematics. The roots of the Dutch reform movement go back to the beginning of the seventies, when the first ideas for RME were conceptualized. It was a reaction to both the American “New Math” movement, which was likely to flood our country in those days, and the then prevailing Dutch approach to mathematics education, which often is labeled as “mechanistic mathematics education.”</p>
Matemática como atividade humana	<p>p. 3: “According to him, mathematics must be connected to reality, stay close to children and be relevant to society, in order to be of human value. Instead of seeing mathematics as subject matter that has to be transmitted, Freudenthal stressed the idea of mathematics as a human activity. Education should give students the “guided” opportunity to “re-invent” mathematics by doing it. This means that in mathematics education, the focal point should not be on mathematics as a closed system but on the activity, on the process of mathematization (Freudenthal, 1968).”</p> <p>p. 4: “The students, instead of being the receivers of ready-made mathematics, are considered active participants in the teaching-learning process, in which they develop mathematical tools and insights.”</p>
Realidade/realístico	<p>p. 3: “Despite of this overt statement about horizontal and vertical mathematization, RME became known as “real-world mathematics education.” This was especially the case outside the Netherlands, but the same interpretation can also be found in our own country. It must be admitted, the name “Realistic Mathematics Education” is somewhat confusing in this respect. The reason, however, why the Dutch reform of mathematics education was called “realistic” is not just the connection with the real world, but is related to the emphasis that RME puts on offering the students problem situations which they can imagine. The Dutch translation of the verb “to imagine” is “zich REALISEren.” It is this emphasis on making something real in your mind that gave RME its name. For the problems to be presented to the students this means that the context can be a real-world context but this is not always necessary. The fantasy world of fairy tales and even the formal world of mathematics can be very suitable contexts for a problem, as long as they are real in the student's mind.”</p>
Matematização	<p>p. 3: “Later on, Treffers (1978, 1987) formulated the idea of two types of mathematization explicitly in an educational context and distinguished “horizontal” and “vertical” mathematization. In broad terms, these two types can be understood as follows. In</p>

	<p>horizontal mathematization, the students come up with mathematical tools, which can help to organize and solve a problem located in a real-life situation. Vertical mathematization is the process of reorganization within the mathematical system itself, like, for instance, finding shortcuts and discovering connections between concepts and strategies and then applying these discoveries.”</p> <p>p. 3: “In short, one could say — and here I am quoting Freudenthal (1991) — “horizontal mathematization involves going from the world of life into the world of symbols, while vertical mathematization means moving within the world of symbols.” Although this distinction seems to be free from ambiguity, it does not mean, as Freudenthal (ibid.) said, that the difference between these two worlds is clear-cut.”</p> <p>p. 3: “Freudenthal (ibid.) also stressed that these two forms of mathematization are of equal value. Furthermore one must keep in mind that mathematization can occur on different levels of understanding.”</p>
Reinvenção guiada	
Contextos/ Fenomenologia didática	<p>p. 4: “In RME this is different. Here, context problems function also as a source for the learning process. In other words, in RME, context problems and real-life situations are used both to constitute and to apply mathematical concepts. While working on context problems the students can develop mathematical tools and understanding.”</p>
Rotas de aprendizagem/rotas de invenção	
Trajétórias de ensino e aprendizagem	<p>p. 18: “What is meant by the TAL learning-teaching trajectories? To put it briefly, a learning-teaching trajectory describes the learning process the students follow. It should not be concluded from this, however, that it <i>only</i> contains the learning perspective. In our view, the term learning-teaching trajectory¹⁴ has three interwoven meanings:</p> <ul style="list-style-type: none"> _ a <i>learning</i> trajectory that gives a general overview of the learning process of the students _ a <i>teaching</i> trajectory, consisting of didactical indications that describe how the teaching can most effectively link up with and stimulate the learning process _ a <i>subject matter</i> outline, indicating which of the core elements of the mathematics curriculum should be taught.” <p>p. 18: “A learning-teaching trajectory puts the learning process in line, but at the same time it should not be seen as a strictly linear, singular step-by-step regime in which each step is necessarily and inexorably followed by the next. A learning-teaching trajectory should be seen as having a certain bandwidth, instead of being a single track. It is very important that such a trajectory description is doing justice to:</p>

	<ul style="list-style-type: none"> _ the learning processes of individual students _ discontinuities in the learning processes; students sometimes progress by leaps and bounds and at other times can appear to relapse _ the fact that multiple skills can be learned simultaneously and that different concepts can be in development at the same time, both within and outside the subject _ differences that can appear in the learning process at school, as a result of differences in learning situations outside school _ the different levels at which children master certain skills.” <p>p. 18: “The main purpose of a learning-teaching trajectory is to give the teachers a pointed overview of how children’s mathematical understanding can develop from K1 and 2 through grade 6 and of how education can contribute to this development. It is intended to provide teachers with a “mental educational map” which can help them to make didactical decisions, for instance making adjustments to the textbook that they use as a daily guide. The learning-teaching trajectory serves as a guide at a meta level. Having an overview of the process the students go through is very important for working on progress in students’ understanding. To make adequate decisions about help and hints, a teacher must have a good idea of the goals, the way that can lead to these goals and the landmarks the students will pass in one way or another along the route, when selecting new problems. Without this outline in mind it is difficult for the teacher to value the strategies of the students and to foresee where and when one can anticipate the students’ understandings and skills that are just coming into view in the distance (see also Streefland, 1985). Without this longitudinal perspective, it is not possible to guide the students’ learning.”</p> <p>p. 19: “First of all, the trajectory is more than an assembled collection of the attainment targets of all the different grades. Instead of a checklist of isolated abilities, the trajectory makes it clear how the abilities are built up in connection with each other. It shows what comes earlier and what comes later. In other words, the most important characteristic of the learning-teaching trajectory is its <i>longitudinal perspective</i>.”</p> <p>p. 19: A” second characteristic is its <i>double perspective of attainment targets and teaching framework</i>. The learning-teaching trajectory does not only describe the landmarks in student learning that can be recognized en route, but it also portrays the key activities in teaching that lead to these landmarks”.</p>
Produções dos alunos/interação	<p>p. 4: “In this respect RME has a lot in common with socio-constructivist based mathematics education. Another similarity between the two approaches to mathematics education is that crucial for the RME teaching methods is that students are also offered opportunities to share their experiences with others.”</p> <p>p. 13: “Within RME, the learning of mathematics is considered as a social activity. Based on this idea the <i>interaction principle</i> is one of the major characteristics of RME. Education should offer students opportunities to share their strategies and inventions with each other. By listening to what others find out and discussing these findings, the students can get ideas for improving their strategies. Moreover, the interaction can evoke reflection, which is necessary to reach a higher level of</p>

	<p>understanding.”</p> <p><u>p. 13</u>: “The significance of the interaction principle implies that whole-class teaching plays an important role in the RME approach to mathematics education. However, this does not mean that the whole class is proceeding collectively and that every student is following the same track and is reaching the same level of development at the same moment. On the contrary, within RME, children are considered as individuals, each following an individual learning path. This view on learning often results in pleas for splitting up classes into small groups of students each following their own learning trajectories. In RME, however, there is a strong preference for keeping the class together as a unit of organization and for adapting the education to the different ability levels of the students instead. This can be done by means of providing the students with problems that can be solved on different levels of understanding”.</p>
Modelos	<p><u>p. 11</u>: “As became already visible in the previous examples, progress implies that students arrive at more general solutions from context-related solutions. Contexts that have model potential serve as an important device for bridging this gap between informal and more formal mathematics. First, the students develop strategies closely connected to the context. Later on, certain aspects of the context situation can become more general, which means that the context more or less acquires the character of a model and as such can give support for solving other, but related, problems. Eventually, the models give the students access to more formal mathematical knowledge.”</p> <p><u>p. 11</u>: “In order to make the shift from the informal to the formal level possible, the models have to modify from a “model of” a particular situation (e.g. a scheme that represents the situation of passengers getting on and off the bus at a bus stop) to a “model for” all kinds of other, but equivalent, situations (e.g. a scheme that can be used for expressing shop attendance, but that also can be used to find number pairs that give the same increase or decrease as a result).”</p> <p><u>p. 4</u>: “First, they develop strategies closely connected to the context. Later on, certain aspects of the context situation can become more general which means that the context can get more or less the character of a model, and as such give support for solving other but related problems. Eventually, the models give the students access to more formal mathematical knowledge. In order to fulfill the bridging function between the informal and the formal level, models have to shift from a “model of” to a “model for.” Talking about this shift is not possible without thinking about our colleague Leen Streefland, who died in 1998. It was he who in 1985 detected this crucial mechanism in the growth of understanding. His death means a great loss for the world of mathematics education”.</p>

Autor	Van den Heuvel-Panhuizen (2003)
Termo/assunto	
Origem/motivação	
Matemática como atividade humana	<p>p. 9: “Based on Freudenthal’s (1977) idea that mathematics – in order to be of human value – must be connected to reality, stay close to children and should be relevant to society, the use of realistic contexts became one of the determining characteristics of this approach to mathematics education. In RME, students should learn mathematics by developing and applying mathematical concepts and tools in daily-life problem situations that make sense to them.”</p> <p>p. 10: “It was Freudenthal’s (1987) belief that mathematical structures are not a fixed datum, but that they emerge from reality and expand continuously in individual and collective learning processes. In other words, in RME students are seen as active participants in the teaching-learning process that takes place within the social context of the classroom.”</p>
Realidade/realístico	<p>p. 13: “On the one hand the adjective ‘realistic’ is definitely in agreement with how the teaching and learning of mathematics is seen within RME, but on the other hand this term is also confusing. In Dutch, the verb ‘zich realiseren’ means ‘to imagine’. In other words, the term ‘realistic’ refers more to the intention that students should be offered problem situations which they can <i>imagine</i> (see Van den Brink, 1973; Wijdeveld, 1980) than that it refers to the ‘realness’ or authenticity of problems. However, the latter does not mean that the connection to real life is not important. It only implies that the contexts are not necessarily restricted to real-world situations. The fantasy world of fairy tales and even the formal world of mathematics can be very suitable contexts for problems, as long as they are ‘real’ in the students’ minds.”</p>
Matematização	<p>p. 11: “One of the basic concepts of RME is Freudenthal’s (1971) idea of mathematics as a human activity. As has been said before, for him mathematics was not the body of mathematical knowledge, but the activity of solving problems and looking for problems, and, more generally, the activity of organizing matter from reality or mathematical matter – which he called ‘mathematization’ (Freudenthal, 1968). In very clear terms he clarified what mathematics is about: “There is no mathematics without mathematizing” (Freudenthal, 1973, p. 134).”</p> <p>p. 11: “This activity-based interpretation of mathematics had also important consequences for how mathematics <i>education</i> was conceptualized. More precisely, it affected both the goals of mathematics education and the teaching methods. According to Freudenthal, mathematics can best be learned by doing (ibid., 1968, 1971, 1973) and mathematizing is the core goal of mathematics education [...]”</p>
Reinvenção guiada	<p>p. 11: “In addition to the foregoing, however, Freudenthal (1991) also emphasized that the process of re-invention should be a</p>

	guided one. Students should be offered a learning environment in which they can construct mathematical knowledge and have possibilities of coming to higher levels of comprehension. This implies that scenarios should be developed that have the potential to elicit this growth in understanding. The development of such a scenario for learning percentage was one of the goals of the <i>Mathematics in Context</i> project. Within this scenario the bar model was the main didactical tool to facilitate the students' learning process.”
Contextos/ Fenomenologia didática	
Rotas de aprendizagem/rotas de invenção	
Trajetórias de ensino e aprendizagem	
Produções dos alunos/interação	p. 12: “Another characteristic of RME that is closely related to mathematizing is what could be called the ‘level principle’ of RME. Students pass through different levels of understanding on which mathematizing can take place from devising informal context-connected solutions to reaching some level of schematization, and finally having insight into the general principles behind a problem and being able to see the overall picture. Essential for this level theory of learning – which Freudenthal derived from the observations and ideas of the Van Hiele (see, for instance, Freudenthal 1973, 1991) – is that the activity of mathematizing on a lower level can be the subject of inquiry on a higher level. This means that the organizing activities that have been carried out initially in an informal way, later, as a result of reflection, become more formal”
Modelos	<p>p. 13: “This level theory of learning is also reflected in ‘progressive mathematization’ that is considered as the most general characteristic of RME and where <i>models</i> – interpreted broadly – are seen as vehicles to elicit and support this progress (Treffers and Goffree, 1985; Treffers, 1987; Gravemeijer, 1994a; Van den Heuvel-Panhuizen, 1995, 2002). Models are attributed the role of bridging the gap between the informal understanding connected to the ‘real’ and imagined reality on the one side, and the understanding of formal systems on the other.”</p> <p>p. 13: “Within RME, models are seen as representations of problem situations, which necessarily reflect essential aspects of mathematical concepts and structures that are relevant for the problem situation, but that can have different manifestations. This means that the term ‘model’ is not taken in a very literal way. Materials, visual sketches, paradigmatic situations, schemes, diagrams and even symbols can serve as models (see Treffers and Goffree, 1985; Treffers 1987, 1991; Gravemeijer 1994a). For instance, an example of a paradigmatic situation that can function as a model, is repeated subtraction. Within the learning strand on long division, this procedure – elicited, for instance, by the transit of a large number of supporters by coach (see Gravemeijer 1982; Treffers, 1991) – both legitimizes and gives access to the formal long division algorithm. As an example of</p>

a way of notation the arrow language can be mentioned. The initial way of describing the changes in the number of passengers on a bus ends up being used to describe all kind of numerical changes later on (see Van den Brink, 1984).”

p. 14: “Coming to the point of why models can contribute to level raising, the work of Streefland comes into the picture. About fifteen years ago, Streefland (1985a) elucidated in a Dutch article how models can fulfill the bridging function between the informal and the formal level: by shifting from a ‘*model of*’ to a ‘*model for*’. In brief, this means that in the beginning of a particular learning process a model is constituted in very close connection to the problem situation at hand, and that later on the context specific model is generalized over situations and becomes then a model that can be used to organize related and new problem situations and to reason mathematically. In that second stage, the strategies that are applied to solve a problem are no longer related to that specific situation, but reflect a more general point of view. In the mental shift from ‘after-image’ to ‘preimage’ the awareness of the problem situation and the increase in level of understanding become manifest.⁴ The change of perspective involves both insight into the broader applicability of the constructed model, and reflection on what was done before (Streefland, 1985a; see also 1992, 1993, 1996). Especially in the areas of fractions, ratio and percentage Streefland enriched the didactics of mathematics education with models that have this shifting quality.”

p. 15: “Although we owe the concept of the shifts in models to Streefland, he did not do his work in isolation. Again, the role Freudenthal played should not be underestimated. The distinction between the two meanings of ‘model’ was already an issue in his writings in the 1970s, when he wrote: “Models *of* something are after-images of a piece of given reality; models *for* something are pre-images for a piece of to be created reality” (Freudenthal, 1975, p. 6).”

Autor	Van den Heuvel-Panhuizen (2010)
Termo/assunto	
Origem/motivação	<p>p. 4: “In the 1960 the Netherlands wanted to abandon the then prevalent mechanistic approach to mathematics education. Characteristic of this approach is its focus on calculations with bare numbers, and the little attention that it pays to applications; which is certainly true for the beginning of the learning process. Mathematics is taught in an atomised way. Students learn procedures in a step-by-step way in which the teacher demonstrates how to solve a problem”.</p> <p>p. 4: “Conversely, mathematics education in England had an empiricist slant in those days. Typical of this type of education was that students were let free to discover much by themselves and were stimulated to carry out investigations. This method deviated greatly from the, at that time existing, structuralist approach derived from the ideas from Bourbaki group about mathematics as a discipline, and which in the US led to the so-called New Math movement. This is a method of teaching mathematics which focuses on abstract concepts such as set theory, functions and bases other than ten”.</p> <p>p. 4: “In its search for an alternative for the mechanistic approach, the Netherlands pursued neither the empiricist nor the structuralistic approach. In particular through Freudenthal’s opposition to the structuralistic ‘New Math’ movement that washed over the Netherlands, there was an opportunity to go in another direction and end up at the RME approach”.</p>
Matemática como atividade humana	<p>p. 4: “The <i>activity principle</i> refers to the interpretation of mathematics as a human activity (Freudenthal, 1971, 1973). In RME, students are treated as active participants in the learning process. Transferring ready-made mathematics directly to students is an ‘anti-didactic inversion’ (Freudenthal, 1973) which does not work.”</p>
Realidade/realístico	<p>p. 5: “The <i>reality principle</i> emphasises that RME is aimed at having students be capable of applying mathematics. However, this application of mathematical knowledge is not only considered as something that is situated at the end of a learning process, but also at the beginning. Rather than commencing with certain abstractions or definitions to be applied later, one must start with rich contexts that require mathematical organisation or, in other words, contexts that can be mathematised (Freudenthal, 1979, 1968).”</p>
Matematização	<p>p. 4: “To understand this way of teaching mathematics and recognise how it differs from other approaches to mathematics education which were manifest in the early days of RME, Treffers’ (1978, 1987) distinction in horizontal and vertical mathematisation is very helpful. Horizontal mathematisation involves going from the world of real-life into the world of</p>

	mathematics. This means that mathematical tools are used to organise and model, and solve problems situated in a real-life situations. Vertical mathematisation means moving within the world of mathematics. It refers to the process of reorganisation within the mathematical system resulting in shortcuts by making use of connections between concepts and strategies”
Reinvenção guiada	p. 5: “The <i>guidance principle</i> means that students are provided with a guided opportunity to re-invent mathematics (Freudenthal, 1991). This implies that, in RME, teachers should have a pro-active role in students learning and that educational programs should contain scenarios which have the potential to work as a lever to reach shifts in students understanding. To realise this, the teaching and the programmes should be based on a coherent long-term teaching-learning trajectory”.
Contextos/ Fenomenologia didática	
Rotas de aprendizagem/rotas de invenção	
Trajetórias de ensino e aprendizagem	
Produções dos alunos/interação	p. 5: “The <i>interactivity principle</i> of RME signifies that the learning of mathematics is not only a personal activity but also a social activity. Therefore, RME is in favour of whole-class teaching’. Education should offer students opportunities to share their strategies and inventions with other students. In this way they can get ideas for improving their strategies. Moreover, reflection is evoked, which enables them to reach a higher level of understanding.”
Modelos	p. 5: “The <i>level principle</i> underlines that learning mathematics means that students pass various levels of understanding: from the ability to invent informal context-related solutions, to the creation of various levels of shortcuts and schematisations, to the acquisition of insight into how concepts and strategies are related. Models serve as an important device for bridging the gap between informal, context-related mathematics and the more formal mathematics. In order to fulfil this bridging function, models have to shift from a _model of’ a particular situation to a _model for’ all kinds of other, but equivalent, situations (Streefland, 1985, 1993, 1996; see also Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). For teaching calculations the level principle is reflected in the didactical method of progressive schematisation (Treffers, 1982a, 1982b). I will return to this point later.”

APÊNDICE C

Expressões Referência	Estratégias de ensino	Métodos de ensino	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
<p>NÉRICI, I. G. Metodologia do ensino: uma introdução. 3ª ed. São Paulo: Atlas, 1989.</p>		<p>“[...] um conjunto de procedimentos escolares lógica e psicologicamente estruturados de que se vale o professor para orientar a aprendizagem do educando, a fim de que este elabore conhecimentos, adquira técnicas ou assuma atitudes e ideias”(p.55).</p> <p>“[...] o método deve ser logicamente estruturado porque precisa apresentar justificativas para os seus passos, a fim de que não se baseie em aspectos secundários ou mesmo caprichosos de quem deva dirigir a aprendizagem dos alunos. Diz-se também que o método deve ser psicologicamente estruturado, porque precisa atender a peculiaridades comportamentais e possibilidades de aprendizagem dos alunos a que se destina [...]” (p.55)</p>		

		<p>[Em relação ao método de ensino individualizado] “[...] consistem em se dirigirem diretamente a cada educando, individualmente, atendendo às condições pessoais de preparo, de aptidões e de motivação” (p.59).</p> <p>[Em relação ao método de ensino coletivo] “[...] são aqueles que se dirigem, ao mesmo tempo e da mesma forma, para todos os educandos igualmente, procurando atuar, de modo geral, com base no ‘educando médio’ ou na ‘classe média’ ou ‘grupo instrucional’ (p.59).</p> <p>[Em relação ao método de ensino em grupo] “[...] são aqueles que fazem ênfase na interação dos educandos, interagindo entre si, em pequenos grupos, cujo funcionamento se baseia na dinâmica de grupo [...]” (p.59).</p> <p>“Todo método de ensino tem de acompanhar o esquema de desenvolvimento de um <i>ciclo docente</i>, que fundamentalmente consta de três partes: planejamento, execução e avaliação” (p.56).</p>		
--	--	---	--	--

Expressões Referência	Estratégias de ensino	Métodos de ensino	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
<p>LIBÂNEO, J. C. Didática. São Paulo: Cortez, 1994.</p>		<p>“Os métodos são determinados pela relação objetivo-conteúdo, e referem-se aos meios para alcançar objetivos gerais e específicos de ensino, ou seja, ao “como” do processo de ensino, englobando as ações a serem realizadas pelo professor e pelos alunos para atingir os objetivos e conteúdos. Temos, assim, as características dos métodos de ensino: estão orientados para objetivos; implicam uma sucessão planejada e sistematizada de ações, tanto do professor quanto dos alunos; requerem a utilização de meios” (p.149). “O conceito mais simples de “método” é o de caminho para atingir um objetivo” (p.150). “O professor, ao dirigir e estimular o processo de ensino em função da aprendizagem dos alunos, utiliza intencionalmente um conjunto de ações, passos, condições externas e procedimentos, a que chamamos de métodos de ensino” (p.150).</p>		<p>“Por meios de ensino designamos todos os meios e recursos materiais utilizados pelo professor e pelos alunos para a organização e condução metódica do processo de ensino e aprendizagem” (p.173). “Equipamentos são meios de ensino gerais, necessários para todas as matérias, cuja relação com o ensino é direta. são carteiras ou mesas, quadro-negro, projetor de <i>slides</i> ou filmes, toca-disco, gravador e toa-fitas, flanelógrafo, etc. Cada disciplina exige também seu material específico, como ilustrações e gravuras, filmes, mapas e globo terrestre, discos e fitas, livros, enciclopédias, dicionários, revistas, álbum seriado, cartazes, gráficos, etc. Alguns autores classificam ainda, como meios de ensino, manuais e livros didáticos; rádio, cinema, televisão; recursos naturais (objetos e</p>

		<p>“[...] decorrem de uma concepção de sociedade, da natureza da atividade prática humana no mundo, do processo de conhecimento e, particularmente, da compressão educativa numa determinada sociedade. Nesse sentido, antes de se constituírem em passos, medidas e procedimentos, os métodos de ensino se fundamentam num método de reflexão e ação sobre a realidade educacional, sobre a lógica interna e as relações entre os objetos, fatos e problemas dos conteúdos de ensino, de modo a vincular a todo momento o processo de conhecimento e a atividade prática humana no mundo” (p.151).</p> <p>“Em resumo, podemos dizer que os métodos de ensino são as ações do professor pelas quais se organizam as atividades de ensino e dos alunos para atingir objetivos do trabalho docente em relação a um conteúdo específico. Eles regular as formas de interação entre ensino e aprendizagem, entre o professor e os alunos,</p>		<p>fenômenos da natureza); recursos da localidade (biblioteca, museu, indústria, etc.); excursões escolares; modelos de objetos e situações (amostras, aquários, dramatizações etc.)” (p.173).</p>
--	--	---	--	--

		<p>cujo resultado é assimilação consciente dos conhecimentos e o desenvolvimento das capacidades cognoscitivas e operativas dos alunos” (p152).</p> <p>“[...]tratamos neste tópico de métodos gerais de ensino, cuja utilização depende dos objetivos-conteúdos-métodos das matérias, das peculiaridades dos alunos e do trabalho criativo do professor” (p.160).</p> <p>[Em relação do método da exposição pelo professor] “[...] os conhecimentos, habilidades e tarefas são apresentadas, explicadas ou demonstradas pelo professor. A atividade dos alunos é receptiva, embora não necessariamente passiva” (p.161).</p> <p>[Em relação do método de trabalho independente] “[...] consiste de tarefas, dirigidas e orientadas pelo professor, para que os alunos as resolvam de modo relativamente independente e criador. O trabalho independente pressupõe determinados conhecimentos, compreensão</p>		
--	--	---	--	--

		<p>da tarefa e do seu objetivo, o domínio do método de solução, de modo que os alunos possam aplicar conhecimentos e habilidades sem a orientação direta do professor” (p.163).</p> <p>[Em relação do método de elaboração conjunta] “[...] é uma forma de interação ativa entre o professor e os alunos visando à obtenção de novos conhecimentos, habilidades, atitudes e convicções, bem como a fixação e consolidação de conhecimentos e convicções já adquiridos [...]. Aplica-se em vários momentos do desenvolvimento da unidade didática, seja na fase inicial de introdução e preparação para estudo do conteúdo, seja no decorrer da fase de organização e sistematização, seja ainda na fase de fixação, consolidação e aplicação” (p.167).</p> <p>[Em relação do método de trabalho em grupo] “[...] consiste basicamente em distribuir temas de estudos iguais ou diferentes a grupos fixo ou variáveis, compostos de 3 a 5 alunos. O trabalho em</p>		
--	--	--	--	--

		grupo tem sempre um caráter transitório, ou seja, deve ser empregado eventualmente, conjugado com outros métodos [...]” (p. 170).		
--	--	---	--	--

Expressões Referência	Estratégias de ensino	Métodos de ensino	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
<p>Haidt, R. C. C. Curso de Didática Geral. 2ª ed. São Paulo: editora Ática, 1995, 327 p.</p>	<p>“Atualmente, é empregado o termo estratégia de ensino, para designar os procedimentos e recursos didáticos a serem utilizados para atingir os objetivos desejados e previstos” (p.144).</p>	<p>“Por sua vez, o termo <i>método</i> vem do grego (<i>méthodos</i>=caminho para chegar a um fim) e se refere a um caminho para atingir um fim. Walter Garcia define método como sendo uma ‘sequência de operações com vistas a determinado resultado esperado’. Logo, método de ensino é um procedimento didático caracterizado por certas fases e operações para alcançar um objetivo previsto” (p.144).</p>	<p>A autora fazendo referência a Turra (1975) expõe o que considera por procedimentos de ensino: “ações, processos ou comportamentos planejados pelo professor, para colocar o aluno em contato direto com coisas, fatos ou fenômenos que lhes possibilitem modificar sua conduta, em função dos objetivos previstos” (p.143). “Portanto, os procedimentos de ensino dizem respeito às formas de intervenção na sala de aula” (p.143).</p>	

Expressões Referência	Estratégias de ensino	Métodos de ensino/método didático	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
<p>SANT'ANNA, I. M.; MENEGOLLA, M. Didática: aprender a ensinar. 4ª ed. São Paulo: Edições Loyola, 1995, 126 p.</p>	<p>“Entendemos como estratégia de ensino a ordenação sequencial de procedimentos, iniciando-se pelo diagnóstico e concluindo-se pela avaliação. Podemos também defini-la como um plano de ação, estruturado de forma a oferecer uma visão conjunta e planejada do processo ensino x aprendizagem” (p.48).</p> <p>“A estratégia de ensino envolve tipos de atividades pelas quais o aluno deve realizar certas operações mentais” (p.48).</p>	<p>“Método é um modo de conduzir a aprendizagem integral do educando, através de uma organização precisa de procedimentos que favoreçam a consecução dos propostos estabelecidos” (p.46).</p> <p>[Os autores utilizam “métodos didáticos. Explicam que esses podem ser reduzidos a dois tipos: expositivo (o educador é ativo e o aluno é passivo) e interrogativo (o aluno e o professor interagem).]</p>	<p>“Trata-se de atividades, métodos, técnicas e modalidades de ensino selecionados com o propósito de facilitar a aprendizagem. São, propriamente, os diversos modos de organizar o conjunto de recursos possíveis e adequados à promoção da aprendizagem” (p.43).</p>	<p>“Os equipamentos como projetores de slides, retroprojetores, os materiais que contêm as mensagens que serão transmitidas por meio desses equipamentos, bem como as pessoas, técnicas, o lugar ou ambiente utilizados para que se efetue a instrução são todos considerados meios instrucionais” (p.47).</p> <p>“Damos ao termo ‘meios’ uma conotação ampla; nós o temos como referencial teórico indicador de recursos, atividades, técnicas, procedimentos e inclusive instrumentos de avaliação utilizados num plano de ensino.</p>

Expressões Referência	Estratégias de ensino	Métodos de ensino	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
ANATASIOU, L. das G. C. Metodologias de ensino: primeiras aproximações. Educar em revista . Curitiba, n.13, p.93-100, 1997.		“Ao discutirmos método, muitos elementos nos vêm à mente, incluindo elementos referentes a técnicas e recursos. Etimologicamente, método vem do grego, sendo a composição de ‘méta’, que quer dizer ‘através, para’ e de <i>ódos</i> , que quer dizer ‘caminho’. Portanto, método seria um caminho através do qual se chega a um determinado fim” (p.93).		

Expressões Referência	Estratégia de ensino (estratégia didática)	Métodos de ensino	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
<p>MACHADO, A. V. Métodos e meios de ensino-categorias básicas da Tecnologia Educacional. Revista de Educação Pública, v. 9, p. 9-24, 2000.</p>	<p>“Em nosso conceito, quando incluímos as estratégias de ensino como componentes fundamentais do método, estamos invocando a dimensão do planejamento, da idealização geral de um plano de trabalho, que se faz à luz de determinados princípios teóricos. É importante que se preserve esta dimensão teórica. Caso contrário, se os métodos se esgotassem em seus componentes puramente instrumentais, estaríamos diante de uma concepção eminentemente tecnocrática do processo de ensino aprendizagem. A reflexão teórica se adere aos métodos como instrumento de articulação entre os elementos puramente técnicos e os fins maiores da educação, nos contextos sócio-culturais específicos” (p.3).</p>	<p>“Os métodos de ensino são as formas através das quais os professores irão trabalhar os diversos conteúdos com a finalidade de atingirem os objetivos propostos. Compreende as estratégias e procedimentos adotados no ensino por professores e alunos. Os métodos se caracterizam por ações conscientes, planejadas e controladas, e visam atingir, além dos objetivos gerais e específicos propostos, algum nível de generalização” (p.3).</p> <p>“A definição de método de ensino acima colocada compreende o método em suas duas dimensões: como plano ideal de ação, a ser executado por professores e alunos no processo de ensino aprendizagem, e como as próprias atividades efetivamente desenvolvidas por professores e alunos para atingir os objetivos propostos. Estas duas dimensões</p>	<p>“Por outro lado, no conceito acima colocado, incluímos os procedimentos adotados no ensino como componentes essenciais do método. Tal o fazemos porque entendemos que o resgate da dimensão prática, operativa e atualizada do método é fundamental para se avaliar a sua eficácia. Pensamos que, enfatizando o lado operativo e instrumental do método, também estaremos contribuindo para uma melhor compreensão sobre a relação entre o arcabouço teórico de uma determinada corrente pedagógica e a aplicação de seus princípios. Isso porque, com muita frequência, o método é confundido com a própria escola ou tendência pedagógica que lhe dá sustentação”(p. 3).</p>	<p>“Os conceitos de meios de ensino variam muito, sendo por vezes muito restritivos e, em outros casos, excessivamente abrangentes. Há os que consideram os meios de ensino como meros instrumentos auxiliares do professor no processo de ensino-aprendizagem. Tal concepção é restritiva porque a condição de "instrumentos auxiliares" pressupõe uma participação passiva da categoria meios de ensino no conjunto do processo de ensino-aprendizagem. O desenvolvimento dos meios pode promover mudanças substanciais no processo pedagógico como um todo, e eles são, em muitos casos, absolutamente necessários para a satisfação de determinados objetivos” (p.4).</p>

		<p>geralmente não são coincidentes numa avaliação final do processo, mas revelam-se etapas inseparáveis de um mesmo sistema (p.3).</p> <p>“O método ainda depende dos meios de ensino disponíveis em seu contexto educativo e, principalmente, das características gerais da clientela a que se dirige (número de alunos, sua idade, seu nível de desenvolvimento prévio, o estrato sócio-cultural a que pertencem, sexo, entre outros). Considerando tudo isso, os métodos de ensino, por mais que alguns deles tenham obtido êxito comprovado em algumas situações, não podem ser nunca encarados como respostas definitivas para os mais sérios problemas educacionais, como modelos estandardizados de longo alcance. Há que se ter muito cuidado com as generalizações em um campo que sofre a influência de tantas e tão complexas variáveis. (p.3 e p.4)</p>		
--	--	---	--	--

Expressões Referência	Estratégias de ensino	Métodos de ensino	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
<p>RAYS, O. A. A questão da Metodologia de ensino na didática escolar. In: VEIGA, I. P. A. (coord.). Repensando a didática. 16ª ed. Campinas: Papyrus, 2000. p. 83-95.</p>		<p>“O método traz em si a ideia de uma direção com a finalidade de alcançar um propósito, não se tratando, porém, de uma direção qualquer, mas daquela que leva de forma mais segura à consecução de um propósito estabelecido” (p. 85).</p>		

Expressões Referência	Estratégias de ensino (estratégia didática)	Métodos de ensino	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
<p>VILLANI, A; FREITAS, D. de. Estrutura disciplinar, estratégias didáticas e estilo docente: categorias para interpretar a sala de aula. In: 24ª Reunião Anual da ANPED, 2001, Caxambu. Disponível em: http://www.anped.org.br/reunioes/24/tp.htm#gt4. Acesso em: 27/02/12, 19:50.</p>	<p>“Em nossa interpretação, uma estratégia didática é um conjunto de ações implicitamente planejadas e conduzidas pelo professor para que ao final delas uma boa parte dos alunos se comprometam a realizar uma tarefa ou um trabalho didático da melhor maneira possível” (p.5)</p>			

Expressões Referência	Estratégias de ensino/estratégia didática	Métodos de ensino	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
<p>RAJADELL, N. Los procesos formativos en el aula: estrategias de enseñanza e aprendizaje. In: SEPULVEDA, F.; RAJADELL, N. Didáctica General para psicopedagogos. Madrid: Eds de La UNED, 2001, p.465-525. Disponível em: <http://www.upm.es/innovacion/cd/02_formacion/talleres/nuevas_met_e_va/rajadell_articulo.pdf>. Acesso em: 01/02/2012, 20:07.</p>	<p>“Una estrategia de enseñanza equivale a la actuación secuenciada potencialmente consciente del profesional em educación, del proceso de enseñanza em su triple dimensión de saber, saber hacer e ser (Rajadell 1992). La dimensión del saber se centra em la adquisición y dominio de determinados conocimientos, por lo cual se utilizarán una série de metodologías fundamentalmente de carácter meorístico o de conocimiento informativo, así como una determinada tipología de estrategias como por ejemplo explicaciones, lecturas o charlas. La dimensión del saber hacer pretende que la persona desarrolle aquellas habilidade que le permitan la realización de ciertas acciones o tareas, teniendo em cuenta la capacidad de modificiación y transferencia posterior a diferentes contextos. Hay que dejar</p>	<p>“Conocemos bajo la denominación de metodoogia aquella opción que toma el docente o el formador para organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, teniendo una serie de factores que condicionan dicha actuación, como la lógica interna de la materia, el nivel de madurez de los sujetos a los que pretende enseñar, las finalidades que se persiguen, los recursos disponibles, el curriculum vigente, la relación entre las diferentes áreas curriculares, su próprio pensamiento profesional y la respuesta o reacción del alumnado. Metodologia equivale a intervención, y para intervenir necesitamos planificar estrategias que nos aproximen al máximo hacia esta obtención de las finalidades previstas, a través de actividades concretas, activas y graduales, y com el soporte de materiales curriculares que nos faciliten esta enseñanza, así como eel</p>		

	<p>claro que no busca eliminar la memorización sino que prioriza el desarrollo de estrategia cognitivas superiores.</p> <p>La dimeensión del ser profundiza em la faceta afectiva de la persona, em la que juegan um papel prioritario la modificación y consolidación de intereses, actitudes y valores. La tarea de aprender a percibir, reaccionar y cooperar de manera positiva ante una situación o um objeto, acoge una complejidad superior que la simple retención de conocimientos” (p.8).</p> <p>“Básicamente podemos agrupar em tres categorías las diferentes estrategias planteadas para la adquisición de concocimientos; clasificación elaborada a partir del protagonista que organiza y dirige la situación educativa” (p.9).</p> <p>“El profesor o formados comunia a sus alumnos um conjunto de conocimientos em um contexto específico, bajo um control de espacio y</p>	<p>espacio y el tiempo más adecuados para cada estrategia de intervención” (p.1).</p>		
--	---	---	--	--

	<p>tiempo totalmente planificados. Una conferencia, una lección magistral, una exposición, una explicación o un debate son algunas de las muchas estrategias didácticas centradas en la figura del formador” (p.10).</p> <p>“En este grupo de estrategias el alumno es el protagonista que toma un papel fundamental en el proceso de formación, a pesar de que el formado se encuentra a su lado con el objetivo de dirigir y asegurar la efectividad del aprendizaje. La edad, los objetivos previstos, la tipología del contenido o el nivel de conocimientos previos son factores que influyen notablemente en el desarrollo de este tipo de estrategias” (p.12).</p> <p>“En las estrategias anteriores el medio suponía un soporte al formador o al alumno; en este bloque el medio cobra una relevancia especial, se convierte en un recurso con un potencial formativo tan notable que le convierte</p>			
--	--	--	--	--

	<p>transforma en el protagonista de la docencia, a pesar de que detrás se encuentra un profesional que lo seleccione o manipule. La máquina o el medio no toman decisiones; son las personas quienes manipulan los medios y a través de ellos acaban manipulando a las personas” (p.15).</p>			
--	--	--	--	--

Expressões Referência	Estratégias de ensino	Métodos de ensino	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
<p>AMEZOLA, J.J.H. et al. Referentes conceptuales para la enseñanza centrada en el aprendizaje. Revista de Educación e Desarrollo, Guadalajara, 4, p. 35-44, out.-dez. 2005. Disponível em: <http://www.cucs.udg.mx/revistas/edu_desarrollo/anteriores/4/004_Huerta.pdf>. Acesso em: 22/02/12, 09:58.</p>	<p>“Abordar las estrategias de enseñanza aprendizaje tiene un cierto grado de dificultad porque el término alude a una serie de conceptos que no son fáciles de delimitar y que reciben diferentes acepciones dependiendo de los autores y del contexto, del nivel, el problema y el objeto al que se aplican (por ejemplo: aprendizaje, currículum, tutoría, competencias, docencia, etc)” (p.40).</p> <p>“Las estrategias de enseñanza son las decisiones que toma el profesor para elegir y realizar las actividades de docentes de forma coordinada, con el objeto de ayudar a los alumnos en su proceso de aprendizaje. Si “las estrategias docentes constituyen el conjunto de acciones integradas que el profesor hace entrar en juego para</p>	<p>“Por otra parte, es común encontrar que se utilizan indistintamente los términos de estrategias de enseñanza aprendizaje y método de enseñanza. Una de las diferencias estriba en que el método de enseñanza se refiere no sólo a una sucesión de actividades o acciones ordenadas para promover procesos de aprendizajes particulares, sino que se encuentra en relación con la combinación de todos los elementos desde una perspectiva educativa amplia. El método es “más complejo que una derivación de una determinada teoría de aprendizaje, debe dar cuenta del proceso social (de transformaciones en los sujetos y en sus relaciones con los objetos) que se despliega en el espacio de la institución educativa; por otra parte al hacerlo, define explícita o tácitamente un modelo de sociedad y escuela que se pretende construir” (Furlán, 1978)”</p>		

	<p>facilitar el aprendizaje del alumno” (Campos, 1978), entonces el docente requiere una propuesta teórico conceptual, que le oriente en la toma de decisiones con relación a las mejores opciones de participación” (p.40).</p> <p>“En este trabajo, las estrategias de enseñanza centradas en el aprendizaje son concebidas como procedimientos didácticos globales con cierto grado de integración. Encierran una serie de actividades cuyo propósito es encaminar al alumno a una situación de aprendizaje permanente” (p.42) .</p>	<p>(p.41).</p> <p>“Desde el momento que se define la situación metodológica se establecen las condiciones bajo las cuales se abordará la implementación de un programa educativo. De esta manera, el método de enseñanza no constituye una ruta que se deba seguir linealmente, en la cual todos los problemas encuentren solución sobre la base de fórmulas infalibles. En realidad, el método se plantea como un conjunto de principios orientadores de la actividad docente, tomados de varias disciplinas educativas (Furlán, 1978)” (p.41).</p>		
--	---	--	--	--

Expressões Referência	Estratégias de ensino	Métodos de ensino	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
<p>VERDE, A.R.M.; MONTERO, O. B. Estrategias de enseñanza o Estrategias de aprendizaje? Revista Varela, Villa Clara, 13 ed., p.01-08, jan.-abr. 2006. Disponível em: <http://www.ucp.vc.rimed.cu/sitios/varela/articulos/rv1305.pdf> Acesso em: 01/02/2012, 19:38.</p>	<p>“Las acciones las realiza el maestro, con el objetivo consciente que el alumno aprenda de la manera más eficaz, son acciones secuenciadas que son controladas por el docente. Tienen un alto grado de complejidad. Incluyen medios de enseñanza para su puesta en práctica ,el control y evaluación de los propósitos. Las acciones que se planifiquen dependen Del objetivo derivado del objetivo general de la enseñanza, las características psicológicas de los alumnos y del contenido a enseñar, entre otras. Son acciones externas, observables” (p.3).</p>	<p>“En la estrategia de enseñanza es necesario precisar los <i>métodos de enseñanza</i>, ellos ocupan un lugar medular en su preparación y ejecución. Constituyen la vía, el camino, el modo, la manera más general de realizar las acciones de enseñanza que a su vez estimulan las acciones de aprendizaje, esencialmente pertenecientes a las estrategias cognitivas, para llegar al objetivo propuesto. El método organiza la actividad del profesor y la de los alumnos en clase. Si el profesor emplea el método del trabajo independiente, la actividad cognitiva de los alumnos es más intensa. Si utiliza el método expositivo, el mayor esfuerzo intelectual en la clase es del profesor” (p.6).</p>	<p>“En la medida en que proyecta sus acciones para desarrollar la estrategia de enseñanza también debe elegir los procedimientos .Los <i>procedimientos</i> suelen ser definidos con contenidos que también corresponden a las habilidades, a las estrategias, a los propios métodos” (p.6). “Están asociados a las condiciones em las que se realiza la actividad, por lo tanto tienen un carácter más concreto ,son La manera de actuar , trata de una serie de pasos o fases para conseguir el fin” (p.6). “El mismo procedimiento se puede utilizar em distintos métodos, a su vez en La utilización de un método se incluyen procedimientos más o menos complejos. Por ejemplo, el educador emplea el método de enseñanza expositivo en su clase y para ello como procedimiento ejemplifica, demuestra y expone. También el mismo procedimiento es utilizado en</p>	

			diferentes asignaturas. Todo esto fundamenta el carácter general y amplio de los procedimientos” (p.6)..	
--	--	--	--	--

Expressões Referência	Estratégias de ensino	Métodos de ensino	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
<p>VIANA, M. C. V. Didática da Matemática no Ensino Superior. In: 33ª Reunião Anual da ANPEd, 2010, Caxambu. Disponível:< http://www.anped.org.br/33encontro/internas/ver/trabalhos-gt04>. Acesso em: 29/02/12, 10:05).</p>		<p>“Etimologicamente, método significa caminho para se chegar a um fim. Pode ser a condução do pensamento e ações para alcançar um intento. É também a disciplinação do pensamento e das ações para se obter eficiência no que se deseja realizar. Segundo Nérici (1969, p.225), “método de ensino é o conjunto de momentos e técnicas logicamente coordenados, tendo em vista dirigir a aprendizagem do educando para determinados objetivos” (p.3).</p>		<p>“Sobre meios de ensino, González Castro (1999), diz que são todos os componentes do processo de ensino aprendizagem que atuam como suporte material dos métodos com o propósito de alcançar os objetivos pretendidos. Podemos citar os meios visuais ou sonoros e os próprios livros textos, laboratórios escolares tudo o que serve de sustentação ao trabalho do professor” (p.6). “Do ponto de vista da teoria da comunicação, os meios de ensino são os canais através dos quais se transmitem as mensagens docentes. É o sustento material das mensagens no contexto escolar. Os meios servem aos métodos de ensino: para exposições, trabalho independente do aluno, as aulas práticas, ensino por meio de problemas etc” (p.6).</p>

Expressões Referência	Estratégias de ensino/estratégia didática	Métodos de ensino	Procedimentos de ensino	Meios de ensino
<p>RAJADELL, N. A importância das estratégias didáticas em toda a ação formativa. In: SUANNO, M.; RAJADELL, N. Didática e Formação de professores: perspectivas e inovações. Goiânia: CEPED Publicações e PUC Goiás, 2012. p.105-132.</p>	<p>“Uma estratégia didática é a atuação seqüenciada potencialmente consciente do profissional em educação, guiada por um ou mais princípios da Didática e encaminhada à otimização do processo de ensino-aprendizagem (Rajadell, 1992)” p.105).</p> <p>“Basicamente podemos agrupar em três categorias as diferentes estratégias propostas para a aquisição de conhecimentos; classificação elaborada a partir do protagonista que organiza e dirige a situação educativa” (p.112).</p> <p>[referindo-se as estratégias centradas no professor] “O professor ou formador comunica a seus alunos um conjunto de conhecimentos em um contexto específico, sob um controle de espaço e tempo totalmente planejados. Um conferência, uma lição</p>		<p>“[...] faz alusão a uma série de atividades seqüenciadas que uma pessoa realiza para resolver uma determinada tarefa, e que configura esta dimensão do saber fazer, embora possua influências de outras dimensões” (p.116).</p>	

	<p>magistral, uma exposição ou um debate são algumas das muitas estratégias didáticas centradas na figura do formador” (p.112).</p> <p>[referindo-se as estratégias centradas no aluno] “Nesta ocasião o aluno é o protagonista que assume um papel fundamental no processo de formação, apesar de que o formador se encontra ao seu lado com o objetivo de dirigir e assegurar a efetividade da aprendizagem” (p.113).</p> <p>[referindo-se as estratégias centradas no meio] “Nas estratégias anteriores o meio equivalia a um suporte ao formador ou ao alunado, mas nesta ocasião o meio se transforma em protagonista da docência, apesar de que o formador é quem toma a decisão e a manipula. Encontramos diferentes propostas para classificar estas estratégias, já que possuem propriedades comunicativas, cognitivas e motivacionais diferentes: - suporte tecnológico, que</p>			
--	--	--	--	--

	<p>poderíamos subdividir em função de cada tipologia de suporte, seja audiovisual (filmes, documentários,...), auditivo (música, relato oral, ...), informático (<i>Cd-rom</i> interativo, <i>software</i> específico, ...); - suporte textual, que acolheria a imprensa escrita, relato escritos, documentários, gráficos, entre todas as suas variedades; - suporte corporal, frequentemente inter-relacionado à comunicação oral, que facilita o desenvolvimento de estratégias como o diálogo, a representação cênica ou a mímica, entre um amplo leque de possibilidades; - suporte experiencial, a partir da vivência experimentada por uma pessoa. A importância que a experiência possui no âmbito educativo, e ainda mais se esta for impactante, cada dia é mais indiscutível” (p.114 e 115).</p>			
--	---	--	--	--